С. Б. Гашков

Квадратный трехчлен в задачах

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 512
ББК 22.14
Г24

Гашков С. Б.
Квадратный трехчлен в задачах.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2015.
189 с.
ISBN 978-5-4439-2443-4

В книге собрано более трехсот задач, связанных с понятием квадратного трехчлена. Значительная их часть доступна школьникам. Кроме задач приведены необходимые определения и факты из теории, много иллюстраций и исторических сведений о происхождении тех или иных задач.

Имеются не только алгебраические, но и геометрические задачи, например задачи о параболах и гиперболах, много задач олимпиадного характера. Книга может быть использована в качестве задачника как на обычных школьных занятиях, так и на факультативах и кружках. Ее можно применять как вспомогательное пособие и при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ.

Книга представляет интерес для школьников старших классов, студентов и учителей.

Подготовлено на основе книги: *Гашков С. Б.* Квадратный трехчлен в задачах. — М.: МЦНМО, 2015. — 192 с. ISBN 978-5-4439-0352-1.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241–08–04
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2443-4

Памяти моего отца
Бориса Васильевича Гашкова,
лейтенанта Великой Отечественной войны
(27.11.1924–12.04.2008)
и моей матери
Гашковой Надежды Дмитриевны
(01.10.1927–06.03.2013)

Оглавление

Предисловие

— Что ты знаешь о математике, молодой человек? — спросил он, помолчав. Тон его мне не понравился…

Апостолос Доксиадис. Дядя Петрос и проблема Гольдбаха (1992)

Казалось бы, что может быть скучнее, чем школьная алгебра и ее излюбленный объект — квадратный трехчлен?

В этой книжке мы попытаемся показать, что это не так, и, как это ни удивительно, в квадратном трехчлене отражается значительная часть математики (хотя зеркало, возможно, кривое).

Действительно, многие задачи о квадратном трехчлене обобщаются на многочлены произвольной степени и превращаются при этом иногда в очень непростые теоремы. Точнее сказать, наоборот: большинство интересных теорем о произвольных многочленах остаются нетривиальными даже в случае квадратного трехчлена. В этой книжке собрана коллекция таких задач, причем оказалось, что многие из них предлагались на различных олимпиадах. Самостоятельное решение таких задач облегчает усвоение доказательств обобщающих их теорем или, в крайнем случае, позволяет узнать об их существовании и прочувствовать, хотя бы в миниатюре, возникающие трудности и идеи этих доказательств.

Подобных задач оказалось удивительно много, и в книжку были включены только некоторые из них. Выбор их, конечно, субъективен. Предпочтение поначалу отдавалось задачам и теоремам экстремального характера и неравенствам с точными константами, но ради разнообразия было включено и большое количество задач других типов, в том числе и таких, которые не обобщаются на произвольные многочлены. Некоторые задачи даже не содержат в формулировках упоминаний о квадратных трехчленах, тем не менее квадратные трехчлены появляются в их решениях. Отдельные задачи не имеют прямого отношения к основной теме, но все же имеют с ней связь и представляют самостоятельный интерес. Большинство задач существенно отличаются друг от друга как по формулировкам, так и по идеям решений. Однотипных задач мы старались избегать.

Было бы разумно снабдить все задачи о трехчленах хотя бы указаниями к решению, а общие утверждения формулировать не в виде задач, а в виде теорем, и привести для них подробные доказательства. Однако из-за недостатка места пришлось часто отступать от этого правила, например, теоремы формулировать в виде задач и оставлять их даже без кратких указаний к решению. Такие задачи, естественно, очень трудны и отмечаются соответствующим количеством звездочек. Разумеется, число звездочек (или их отсутствие) определялось субъективным образом. Авторство задач, как правило, не указывалось, его вообще трудно установить, за исключением случаев, когда задачи принадлежат знаменитым математикам прошлого (и даже в этих случаях нет уверенности в том, что указан истинный автор). Многие задачи взяты из известных задачников. Если задача предлагалась на олимпиаде, то, как правило, указывалось, когда и где проходила олимпиада. Сокращение *ВМО* означает Всероссийскую (до 1992 года — всесоюзную) олимпиаду, а сокращение *IMO* — международную олимпиаду. Остальные сокращения очевидны.

Книжка оказалась довольно пестрой как по содержанию, так и по стилю. Местами она напоминает учебник (иногда даже вузовский), местами — сборник задач (часто олимпиадных), но в целом она является популярной книжкой по элементарной математике. Ее начальные разделы доступны пониманию школьников 8–9 классов, средние же и последние разделы больше соответствуют уровню старших классов школы, но школьники средних классов при желании (возможно, заглядывая иногда в учебник для старших классов) тоже смогут в ней разобраться. Автор в свое время получал большое удовольствие от такой деятельности и постарался написать такую книжку, которую с интересом читал бы в то время сам. Однако он сознается, что тригонометрию тогда недолюбливал и она ассоциировалась у него (как и у большинства школьников) с неизбежностью вступительных экзаменов. Поэтому все, что связано с тригонометрией, и большинство задач о многочленах произвольных степеней он решил перенести в другую, более трудную, книжку, которую автор надеется выпустить в свет вслед за этой.

На этом месте предисловие заканчивается, и мы переходим к точным (на самом деле все же не совсем точным) определениям.

Назовем *многочленом* формальную сумму

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — числовые *коэффициенты*, а x — символ *переменной* величины (или *неизвестной*, если речь пойдет об уравнении).

Коэффициент a_n часто называют *старшим коэффициентом*, а коэффициент a_0 — *свободным членом*. Разумно рассматривать только многочлены, у которых старший коэффициент отличен от нуля (хотя в некоторых случаях удобно отступать от этого правила).

Степенью многочлена $f(x)$ называется в этом случае число n, обозначаемое далее как $\deg f(x)$. Многочлены второй степени называют *квадратными*, а многочлены третьей степени называют *кубическими* и реже *кубичными*. Многочлены

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

называются *равными*, если равны их степени и равны все коэффициенты при соответствующих степенях x, т. е. $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Многочлен, имеющий только один ненулевой коэффициент, называется *одночленом*. Аналогично определяются *двучлены* и *трёхчлены*. Любой многочлен можно рассматривать как сумму его одночленов. Иногда используется терминология, восходящая к латинскому языку: многочлены называются *полиномами*, одночлены — *мономами*, двучлены — *биномами*. Трехчлены называют *триномами* чрезвычайно редко.

Квадратные уравнения появляются не только в алгебре, но и в геометрии, и в физике. Примеров таких задач, конечно, можно привести много, но мы ограничимся лишь двумя.

1. (Задача Герберта Аврилакского[1].) По данной площади прямоугольного треугольника и гипотенузе найти катеты.

2. (Задача из «Всеобщей арифметики» Ньютона.) Как определить глубину колодца, бросив в него камень и измерив время, через которое будет услышан звук падения камня?

[1] Герберт родился в первой половине X века в Оверне (Франция), близ монастыря Аврилака, в котором получил первоначальное образование и потом стал монахом. Со временем стал широко известен как один из ученейших людей своего времени. Возобновил в Европе употребление абака для арифметических вычислений. В 999 г. был избран папой римским под именем Сильвестра II. Именно его рукописи приехал разбирать в Москву профессор Воланд в романе М. А. Булгакова «Мастер и Маргарита».

§ 1. Легко ли решать квадратные уравнения?

> …Например, некий квадрат и 21 равны в числах десяти корням того же квадрата… Раздели пополам число корней; половина есть 5. Умножь это на себя; произведение будет 25. Вычти из этого 21; останется 4. Извлеки из этого корень; он равен 2. Вычти это из половины корней, которая равна 5, останется 3. Это есть корень того квадрата, который надо найти, а сам квадрат равен 9. Или можешь прибавить корень к половине корней; сумма будет семь, это корень того квадрата, который ты ищешь, а сам квадрат равен 49.
>
> *Мохаммед бен Муса Аль-Хорезми.* Китаб мухтасар аль-джабр ва-ль-мукабала (ок. 830)

В приведенном отрывке из рукописи Аль-Хорезми описано решение квадратного уравнения $x^2 + 21 = 10x$ (в современных обозначениях). К этому уравнению сводится решение следующей задачи Аль-Хорезми.

1. «Я разбил число 10 на две части и, перемножив их, получил 21. Чему равны эти части?»

«Китаб аль-джабр» — это знаменитая книга. Одно слово из ее длинного титула стало названием одного из важнейших разделов математики. По этой книге в латинских переводах (один из первых переводов был сделан Робертом из Честера в XII веке) Европа училась и арифметике, и алгебре. Первая строчка этого перевода, звучащая по-русски приблизительно как «Диксит Альгоризми» («говорит Аль-Хорезми»), вызвала к жизни один из самых популярных математических терминов — алгоритм[1]. В этом слове почти наш соотечественник Аль-Хорезми обессмертил и свое прозвище, и название своей родины — древнего Хорезма (область с таким названием и сейчас есть в Узбекистане).

Однако квадратные уравнения, вероятно, научились решать в глубокой древности. Возможно, некоторые квадратные уравнения умели решать еще в Древнем Шумере (найдены глиняные клинописные

[1] Поэтому, вопреки очевидному созвучию, к слову «ритм» термин «алгоритм» никакого отношения не имеет.

Рис. 1. Первая страница книги «Китаб аль-джабр»

таблицы с корнями таких уравнений), и почти наверняка их умели решать пифагорейцы — ученики легендарного Пифагора. Во всяком случае, они уже знали, что корень уравнения $x^2 = 2$ не является рациональным числом (т. е. диагональ квадрата несоизмерима с его стороной).

Общее квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ легко свести к уравнению вида $x^2 = c$, которое для неотрицательных c решается с помощью арифметического квадратного корня: $x_1 = \sqrt{c}$, $x_2 = -\sqrt{c}$ — два его решения. Для решения общего квадратного уравнения достаточно выделить полный квадрат:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Для корней исходного уравнения получаем формулы:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

в случае, если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0$.

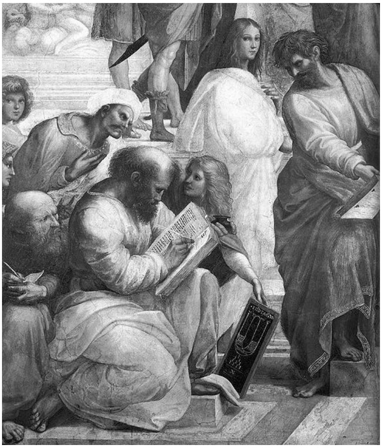


Рис. 2. Пифагорейская школа. Фреска Рафаэля (1509)

Заметим, что квадрат разности корней легко выражается через коэффициенты
$$(x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q = D.$$
Это выражение называется *дискриминантом* уравнения; оно содержит существенную информацию о его корнях. В самом деле, по определению $D = 0$ тогда и только тогда, когда у уравнения корни совпадают (т. е. являются *кратными*). Если $D \geqslant 0$, то у уравнения есть действительные корни. В противном случае их нет, но есть комплексные, о которых см. § 21.

2. Проверьте справедливость следующей (совершенно бесполезной с практической точки зрения) формулы для корней квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:
$$x_{1,2} = \frac{(p \pm \sqrt{p^2 - 4q})c + 2q}{2c + p \mp \sqrt{p^2 - 4q}}.$$
В ней c — произвольный параметр, удовлетворяющий лишь условию
$$2c + p \mp \sqrt{p^2 - 4q} \neq 0,$$
т. е. это фактически бесконечное семейство разных формул для решения уравнения $x^2 + px + q = 0$. Обычная формула является предельным случаем указанной формулы при c, стремящемся к бесконечности (так как при растущем c числитель приблизительно равен $(p \pm \sqrt{p^2 - 4q})c$, а знаменатель приблизительно равен $2c$ со сколь угодно малой относительной погрешностью).

Древние греки не знали ни алгебры в нашем понимании, ни теоремы Виета. Но решать квадратные уравнения они умели. Задача решения уравнения вида $x^2 + px = q$, $p > 0$, $q > 0$, представлялась ими как задача нахождения прямоугольника с данной площадью q, у которого одна сторона на p больше другой (разумеется, единицы измерения длины и площади предполагаются согласованными между собой). Прямоугольник представляется в виде квадрата со стороной x, к которому сбоку приставлен прямоугольник со сторонами x и p (рис. 3).

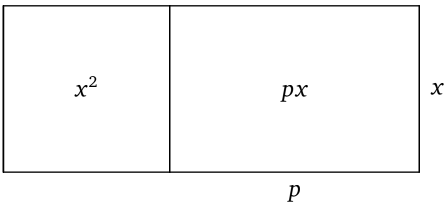


Рис. 3. Геометрическое представление уравнения $x^2 + px = q$

Этот прямоугольник режется пополам прямой, параллельной стороне x, общей у него и квадрата, и не смежная с квадратом половина прямоугольника приставляется к соседней стороне квадрата так, что он будет окружен двумя половинками меньшего прямоугольника. Площадь полученной фигуры, составленной из квадрата с двумя прилегающими прямоугольниками размера $x \times (p/2)$, равна q, так же как и площадь исходного прямоугольника. Добавляя к этой фигуре квадрат со стороной $p/2$, получаем большой квадрат со стороной $x + (p/2)$, составленный из двух меньших квадратов и двух прямоугольников (рис. 4).

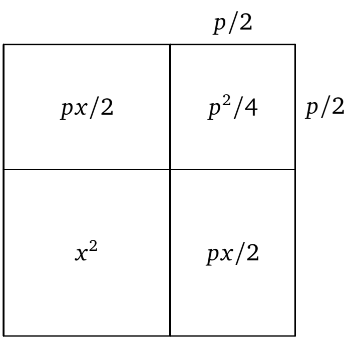


Рис. 4. Геометрическая иллюстрация решения уравнения $x^2 + px = q$

Площадь большого квадрата равна $(x+(p/2))^2$, но в то же время она равна $q+(p^2/4)$, так как этот квадрат составлен из фигуры площади q и меньшего квадрата площади $p^2/4$. Находя сторону квадрата по его площади, получаем, что

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}.$$

А это по существу и есть формула для одного из корней уравнения. Второй корень таким способом найти нельзя, но он отрицательный, а такие числа греками не признавались за равноправные положительным.

Древние индусы тоже умели решать квадратные уравнения, но вместо доказательств они бы нарисовали чертеж и написали одно слово: «Смотри».

Геометрический способ решения имеет преимущество в наглядности, но требует рассмотрения разных чертежей при разных выборах знака коэффициента p. В одном случае надо делать приложение (по-гречески παραβολή) с избытком (ὑπερβολή), а в другом — с недостатком (ἔλλειψις). Впоследствии эти названия греки перенесли и на конические сечения (которые они же и открыли).

А как греки находили сторону квадрата данной площади, т. е. извлекали квадратный корень (говоря на современном языке)? Вероятно, они делали это геометрическим построением, используя циркуль и линейку, например так. На продолжении отрезка AB единичной длины откладывался отрезок BC заданной длины a, на отрезке AC как на диаметре строилась окружность и через точку B проводилась ее хорда DE, перпендикулярная диаметру AC. Тогда длина отрезка BD (равно как и отрезка BE) равна $\sqrt{a}$.

3. Докажите это утверждение.

Естественно спросить: а можно ли по данным отрезкам p, q непосредственно построить корни уравнения $x^2+px+q=0$, не пользуясь формулой для его корней и предыдущим построением? Можно, и разными способами, например таким (приведенным в замечательной книге знаменитого английского математика Г. Х. Харди «Курс чистой математики»[1]). Возьмем отрезок AB единичной длины, восставим к нему перпендикуляр BC длины p, проведем отрезок CD длины q параллельно AB в направлении точки A и на AD как на диаметре

[1] Русский перевод недавно был переиздан (М.: КомКнига, 2006).

построим окружность, пересекающую BC в точках X, Y. Тогда длины отрезков BX, BY являются корнями уравнения $x^2 - px + q = 0$. Если окружность касается отрезка BC в точке X, то корень у уравнения один (но, как говорят, двукратный), и он равен длине отрезка BX. Если же окружность не пересекается с отрезком BC, то корней (действительных) у него нет. Корни у данного уравнения всегда положительны. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ можно отдельно не рассматривать, так как оно превращается в уравнение $x^2 - px + q = 0$ сменой знака перед неизвестной.

4. Докажите все эти утверждения.

Квадратные уравнения изучают уже в восьмом классе, и многие школьники думают, что решать их совсем просто. Это верно. Однако огромное количество ошибок, допускаемых школьниками и абитуриентами, появляется именно в решении квадратных уравнений. Основная причина, конечно, невнимательность. Часто, например, при решении «в уме» путаются две разные формулы для корней уравнения, которые даются в школьном учебнике, и из них составляется одна, но неверная.

Дадим несколько советов, как избегать таких ошибок. Первый из них: не переоценивайте свои способности к устному счету, лучше напишите формулу на бумаге, проверьте, что это та формула, которая нужна, подставьте в нее численные значения коэффициентов, не перепутав их друг с другом. Если коэффициенты большие, то увеличивается вероятность арифметической ошибки при вычислении дискриминанта. Так как из него потом надо извлекать квадратный корень, иногда полезно сразу его разлагать на множители, если коэффициенты имеют общие делители, или применять формулу разности квадратов и найденные множители выносить за знак корня, извлекая из них при этом корень.

Например, если при решении уравнения $45x^2 + 42x + 5 = 0$ получилась формула для корней

$$x_{1,2} = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2 - 4 \cdot 45 \cdot 5}}{2 \cdot 45},$$

то, так как

$$42^2 - 4 \cdot 45 \cdot 5 = 4 \cdot 9(7^2 - 5^2) = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 12 = 4 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 6 = (4 \cdot 3)^2 \cdot 6 = 12^2 \cdot 6,$$

ответ будет

$$x_{1,2} = \frac{-42 \pm 12\sqrt{6}}{2 \cdot 45} = \frac{-7 \pm 2\sqrt{6}}{15}.$$

В следующих двух задачах непосредственное применение формулы для корней ведет к довольно громоздким вычислениям. Но есть и еще один способ решения уравнений: угадать один корень и найти другой по теореме Виета (кто не знает, что это такое, — читайте следующий параграф).

5. Решите уравнение $x^2 + 2008x + 2007 = 0$.

6. Решите уравнение $1999x^2 + 1000x - 2999 = 0$.

Иногда (например, когда все корни целые) этот способ удобно применять и к уравнениям с небольшими коэффициентами. Тогда лучше угадывать оба корня сразу, пользуясь теоремой Виета. При этом полезно начать с разложения на множители свободного члена.

7. Решите уравнение $x^2 - 7x + 12 = 0$.

В следующей задаче коэффициент так велик, что не поможет и калькулятор.

8. (Экзамены в СУНЦ МГУ, 2000.) Решите уравнение

$$x^2 + x = 1\,111\,111\,122\,222\,222.$$

Конечно, метод угадывания не всегда приводит к цели, но если приводит, то обычно быстрее, чем непосредственное применение формул. Если же вы предпочитаете решать уравнения с помощью формул для корней, то полезно проверять, не ошиблись ли вы, с помощью формул Виета или непосредственной подстановкой.

Но не забывайте, что теорема Виета для уравнения $ax^2+bx+c=0$ выглядит иначе, чем для приведенного уравнения, и это тоже является источником ошибок.

9. Решите уравнение $x^2 + 7x + 12 = 0$.

По существу, метод угадывания мало чем отличается от решения путем разложения на множители:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 &= (x^2 - 3x) + (-4x + 12) = \\ &= x(x-3) + (-4)(x-3) = (x-4)(x-3) = 0. \end{aligned}$$

10. Угадайте корни квадратного уравнения $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19$ из книги Аль-Хорезми.

11. Решите уравнения (относительно x):

- $x^2 - 2(a+1)x + 4a = 0$;
- $a(a+1)x^2 + x - a(a-1) = 0$;
- $a(a+2)x^2 + 2x - a^2 + 1 = 0$;

- $(a^2+a-2)x^2+(2a^2+a+3)x+a^2-1=0$;
- $(a^2-b^2)x^2-2ax+1=0$;
- $(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+b+c-2a=0$;
- $\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1$, $a\neq b$, $a\neq c$, $b\neq c$;
- $\dfrac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{b(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x$, $a\neq b$, $a\neq c$, $b\neq c$.

Указание и предупреждение: число решений может зависеть от буквенных коэффициентов (параметров уравнения)! Надо исследовать все возможные случаи.

Следующие далее уравнения не являются квадратными, но легко к ним сводятся.

12. Решите уравнение Иоганна Мюллера[1]

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=25.$$

13. (Москва, 1985.) Решите уравнение

$$\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}.$$

Указание. Здесь корни лучше угадывать!

14. Решите уравнения:

- $\dfrac{x-a}{x-b}+\dfrac{x-b}{x-a}+2=0$;
- $\dfrac{x-a}{x-b}-\dfrac{x-b}{x-a}+2+\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=0$;
- $\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{2a}{x+a}=\dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$;
- $\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{b}{b+x}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}$, $ab\neq 0$;
- $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, $ab\neq 0$.

Следующее уравнение некоторым может показаться тождеством.

15. Решите уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}.$$

16. (Экзамены в СУНЦ МГУ, 1988.) Найдите a, при которых уравнения $x^2+ax+1=0$, $x^2+x+a=0$ имеют хотя бы один общий корень.

[1] И. Мюллер (1436–1476), по прозвищу Региомонтан, — немецкий математик.

Указание. Вычесть второе уравнение из первого, иначе считать придется долго.

Иногда уравнение может вообще не иметь действительных корней, например в следующей задаче.

17. Докажите, что если a, b, c — стороны треугольника, то уравнение

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

не имеет действительных корней.

Вопрос о существовании корней может быть не таким уж простым. Чтобы в этом убедиться, попробуйте решить следующие задачи.

18. Докажите, что если $ac = 2(b+d)$, то хотя бы одно из уравнений $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + cx + d = 0$ имеет действительные корни.

19. (ВМО, 1994.) Докажите, что если $abc \neq 0$, то хотя бы один из трехчленов $ax^2 + 2bx + c$, $bx^2 + 2cx + a$, $cx^2 + 2ax + b$ имеет корень.

20. (Австрия, 1974.) Докажите, что уравнение

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c) = 0$$

всегда имеет корни. Выведите отсюда неравенства

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+ac+bc), \quad a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

21. Докажите, что если все корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ действительны, то

$$(2ax + b)^2 \geqslant 2a(ax^2 + bx + c).$$

22*. (С.-Петербург, 2009.) Дискриминанты квадратных трехчленов f_1, f_2, f_3 равны $1, 4, 9$, а дискриминанты их попарных сумм $f_1 + f_2$, $f_1 + f_3$, $f_2 + f_3$ равны $1, 16, 73$. Докажите, что квадратный трехчлен, равный их сумме $f_1 + f_2 + f_3$, имеет действительные корни.

23. Докажите, что если корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ действительны и различны, то при любом a уравнения

$$x^2 + (p+2a)x + q + ap = 0, \quad 3x^2 + 2(p+a)x + q + ap = 0$$

имеют также действительные и различные корни.

Предыдущие две задачи являются частными случаями нетривиальных общих теорем. Подобная ситуация далее часто будет встречаться.

§ 2. Теорема Виета и корни трехчленов

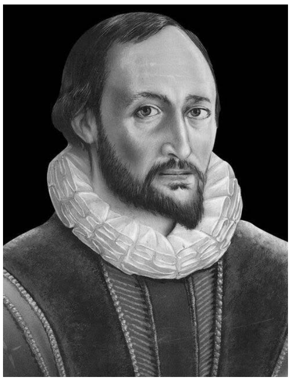
> …Остаток утра я провел за работой над моим трактатом по истории алгебраического метода и с легкостью написал несколько абзацев, в которых неопровержимо доказал лживость притязаний Виета, все открытия которого на самом деле сделаны тридцатью годами ранее мистером Хэрриотом[1].
>
> *Йен Пирс*. Перст указующий (1998)

Из формулы для корней квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ легко следует

Теорема 1 (Виет). *Сумма корней приведенного квадратного трехчлена равна* $-p$, *а произведение равно* q.

Действительно, при сложении корней x_1 и x_2 выражения $\sqrt{D}$ уничтожаются, а для умножения корней применяем формулу разности квадратов $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, которая дает ответ $(p/2)^2 - D = q$. Однако в школе теорему Виета доказывают другим способом, раскры-

Франсуа Виет



Томас Хэрриот

[1] Томас Хэрриот — известный английский математик, живший в одно время с Франсуа Виетом. Своих работ, как правило, не публиковал. Эпиграф является отрывком из дневника, якобы написанного знаменитым английским математиком Валлисом, названным в русском переводе книги Пирса Уоллесом, вопреки сложившейся в русской математической литературе традиции.

вая скобки в формуле $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$. Вычислительно этот способ немного короче, но требует доказательства сама эта формула (она вытекает из теоремы Безу). Поэтому вряд ли этот способ на самом деле проще. Его преимущество заключается в возможности обобщения на случай уравнения произвольной степени. Действительно, доказать теорему Виета для многочленов третьей степени, используя формулы для корней, уже не так просто (и формулы эти, так называемые формулы Ферро — Тартальи — Кардано, довольно сложны и в этой книжке не появятся).

Читатель проникнется большой любовью к теореме Виета, если попробует без ее помощи решить следующие задачи.

24. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + px + q = 0$.

25. Найдите сумму кубов корней уравнения $x^2 + px + q = 0$.

26. Найдите сумму четвертых степеней корней уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Следующая задача также легко решается с помощью теоремы Виета.

27. (Экзамены в СУНЦ МГУ, 1990.) При каких p, q уравнению $x^2 + px + q = 0$ удовлетворяют два различных числа $2p$ и $p + q$?

Но бездумное использование теоремы Виета может привести к ошибке, например в следующей задаче.

28. (И. Н. Сергеев.) Числа p и q — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Чему могут быть равны эти числа?

Действительно, применяя теорему Виета, получаем систему

$$\begin{cases} p + q = -p, \\ pq = q, \end{cases}$$

откуда имеем $p = 1$, $q = -2p = -2$; $q = p = 0$.

Но это не все решения! Дело в том, что в случае $p = q \neq 0$ из условия ясно только, что p — корень уравнения, а про второй корень ничего не сказано. Поэтому проще теорему Виета не применять, а подставить $x = p, q$ в уравнение и получить систему

$$\begin{cases} 2p^2 + q = 0, \\ q^2 + pq + q = 0, \end{cases}$$

откуда $q_1 = p_1 = 0$ и при $q \neq 0$ имеем $q = -p - 1$, $2p^2 - p - 1 = 0$, значит, $p_{2,3} = 1, -1/2$, $q_{2,3} = -2, -1/2$.

Теорема Виета полезна при решении многих задач, связанных с корнями квадратного уравнения. Примените ее при решении следующих задач.

29. Пусть x_i — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. Найдите $x_1^{-3}+x_2^{-3}$.

30. Найдите a, при которых один из корней уравнения

$$x^2-\frac{15}{4}x+a^2=0$$

будет квадратом другого.

31. Найдите a, при которых разность корней уравнения

$$2x^2-(a+1)x+a+3=0$$

равна 1.

32. При каком a один из корней уравнения $x^2-7x+2a=0$ вдвое больше одного из корней уравнения $x^2-5x+a=0$?

33. (Венгрия, 1899.) Пусть x_i — корни трехчлена

$$x^2-(a+d)x+ad-bc.$$

Докажите, что тогда x_i^3 — корни трехчлена

$$x^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)x+(ad-bc)^3.$$

34. (ВМО, 1989.) Найдите корни трехчлена x^2+px+q, если известно, что они целые и $p+q=198$.

35. (ВМО, 1997.) При каких значениях a, b, c квадратные трехчлены ax^2+bx+c и $(a+1)x^2+(b+1)x+c+1$ имеют по два целых корня?

36*. (Польша, 1965.) Докажите, что если x_i — корни трехчлена $x^2+px-1=0$, то при нечетном p числа $x_1^n+x_2^n$, $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ — целые и взаимно простые.

37*. (Польша, 1954.) Пусть $x^2+px+1=0$. Найдите $x^{13}+1/x^{13}$.

38. Пусть x_i — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Вычислите $x_1^{10}+x_2^{10}$.

§ 3. Рекуррентные последовательности и числа Фибоначчи

> Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения.
>
> *Леонардо Фибоначчи.* Liber abaci (1202)

Попытка решить задачи 37, 38 и другие подобные задачи с помощью формул для корней квадратного уравнения приводит к громоздким вычислениям. Укажем подход, который позволяет решать любые задачи подобного вида, не используя формул для корней квадратного уравнения.

Для этого заметим, что последовательность $a_n = x_1^n + x_2^n$, так же как и произвольная последовательность вида $a_n = bx_1^n + cx_2^n$, удовлетворяет следующему соотношению (такие соотношения называют *рекуррентными*)

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0.$$

Действительно,

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + p(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) + q(x_1^n + x_2^n) = \\ = x_1^n(x_1^2 + px_1 + q) + x_2^n(x_2^2 + px_2 + q) = 0.$$

С помощью этого соотношения можно последовательно вычислять значения a_n по формуле

$$a_{n+2} = -pa_{n+1} - qa_n,$$

нужно только знать первые два значения a_0 и a_1. Но $a_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2$, а $a_1 = x_1^1 + x_2^1 = -p$ по теореме Виета. Если вам не нравится формула $a_0 = x_1^0 + x_2^0$, можно вместо нее взять $a_2 = x_1^2 + x_2^2$, результат будет тот же, но придется выразить

$$a_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x - 2 = p^2 - 2q.$$

Теперь уже легко найти a_{10} и вообще любое значение a_n, причем ясно, что это значение будет всегда целым числом, если p, q сами целые.

39*. (Частный случай формулы Варинга[1].) Докажите, что

$$\frac{a_n}{n} = \sum_{0\leqslant m\leqslant n/2} (-1)^{n+m} \frac{(n+m-1)!}{m!(n-2m)!} p^{n-2m} q^m.$$

В этой формуле $n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1$, $0! = 1$.

Не меньший интерес представляет и обратная задача. Пусть дана последовательность a_n, удовлетворяющая *линейному рекуррентному соотношению второго порядка*

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$$

и начальным условиям $a_0 = a$, $a_1 = b$. Надо найти явную формулу для этой последовательности. Для этого поступим следующим образом. Заметим, что любая последовательность вида $a_n = cx_1^n + dx_2^n$, где x_i — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = -pa_{n+1} - qa_n$. Если корни x_i различны, то для любых начальных условий $a_0 = a, a_1 = b$ можно однозначно найти коэффициенты c, d, решив систему уравнений

$$\begin{cases} c + d = a, \\ cx_1 + dx_2 = b. \end{cases}$$

Тогда последовательность $a_n = cx_1^n + dx_2^n$ совпадает с заданной, так как удовлетворяет тому же соотношению и тем же начальным условиям.

40. Проверьте, что в случае $x_1 = x_2$ последовательность a_n можно искать в виде $cx_1^n + dnx_1^n$.

Описанный выше прием можно применить к исследованию последовательности $\{F_n\}$, определенной равенствами

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

которая называется последовательностью Фибоначчи[2], и получить следующий факт.

[1] Э. Варинг (ок. 1734–1798) — британский математик.

[2] Она появилась в книге Леонардо Пизанского, по прозвищу Фибоначчи (что означает «сын Бонначи»), в задаче о размножении кроликов. Впрочем, он имел у соотечественников и другое прозвище — Bigollone (глупец), так как предпочитал занятие науками торговле, которой занимались его сограждане. Фибоначчи первый познакомил Европу с алгеброй арабов и индийской десятичной системой счисления и сам был, без сомнения, крупнейшим европейским математиком своего времени. Благодаря его книгам (но, конечно, не только им) Италия сохраняла лидирующие позиции в европейской (и мировой) математике спустя сотни лет после его смерти.

Леонардо Фибоначчи

Жак Бине

Теорема 2 (Бине[1]). *Справедлива формула*

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}},$$

где $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ — *так называемое* золотое сечение.

Если формула уже известна, ее доказательство проще всего провести по индукции. База индукции при $n = 0, 1$ очевидно справедлива, так как

$$\frac{\varphi - (-\varphi)^{-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1,$$

а для выполнения шага индукции достаточно проверить равенства

$$\varphi^2 = \varphi + 1, \quad (-\varphi)^{-2} = (-\varphi)^{-1} + 1,$$

из них вывести почленным умножением равенства

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1}, \quad (-\varphi)^{-n-1} = (-\varphi)^{-n} + (-\varphi)^{-n+1}$$

и заметить, что тогда

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-1} - (-\varphi)^{-n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n+1} - (-\varphi)^{-n-1}}{\sqrt{5}},$$

что и требовалось доказать.

41. Докажите, что для чисел Фибоначчи справедливо тождество

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n.$$

[1] Ж. Бине (1786–1856) — французский математик и астроном, член Парижской академии наук.

42. Докажите, что если $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$, то

$$a_n = \frac{1}{2}\left((3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n\right).$$

43*. Докажите, что если x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$, то $x_1^n + x_2^n$ — целое число, причем не кратное 5, при любом натуральном n.

44. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Найдите квадратное уравнение с корнями $x_1^{2^n}$, $x_2^{2^n}$.

45. Найдите формулу для последовательности

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, \quad a_1 = 1,\ a_0 = 0.$$

46. Найдите формулу для последовательности

$$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}, \quad a_1 = 1,\ a_0 = 0.$$

§ 4. Парабола — график квадратного трехчлена

> Проведите прямую, потом еще одну, пересекающуюся, и вращайте первую вокруг второй — получите конус. Проденьте его сквозь плоскость и отметьте общие точки плоскости и конуса. Чаще всего получится эллипс, но если склон конуса параллелен плоскости, то выйдет парабола, а если же плоскость пересекает обе части конуса, то кривая из двух частей, называемая гиперболой. Во всех этих кривых — эллипсе, гиперболе и параболе — интересно то, что их порождает нечто прямое — две линии и плоскость.
>
> *Нил Стивенсон.* Ртуть (2003)

График функции $y = ax^2$ (при $a \neq 0$, естественно) называется *параболой*. При $a > 0$ ее ветви направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз. В обоих случаях нулем функции является 0, который в первом случае является точкой минимума, а во втором — максимума. Точка с координатами $(0, 0)$ называется *вершиной* параболы.

Функция $y = ax^2$ не меняется при смене знака у x. Такие функции называются *четными*. График любой четной функции, в частности парабола, симметричен относительно прямой $x = 0$ (оси Oy). Эта прямая называется *осью симметрии* (или просто осью) параболы, и она, очевидно, проходит через ее вершину.

Выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат, как и при решении квадратных уравнений, имеем

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

откуда видно, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ получается сдвигом (параллельным переносом) параболы $y = ax^2$, при котором ее ось симметрии перемещается в прямую $x = -b/(2a)$, а вершина — в точку $(-b/(2a), c - b^2/(4a))$, которая при $a > 0$ будет минимумом, а при $a < 0$ — максимумом. Точки пересечения с осью Ox у параболы при $a > 0$ будут существовать, только если $c - b^2/(4a) \leqslant 0$ (вершина «под водой»), а при $a < 0$ — только если $c - b^2/(4a) \geqslant 0$ (вершина «над водой»). В обоих случаях точка $-b/(2a)$ (абсцисса оси параболы) лежит в точности между корнями.

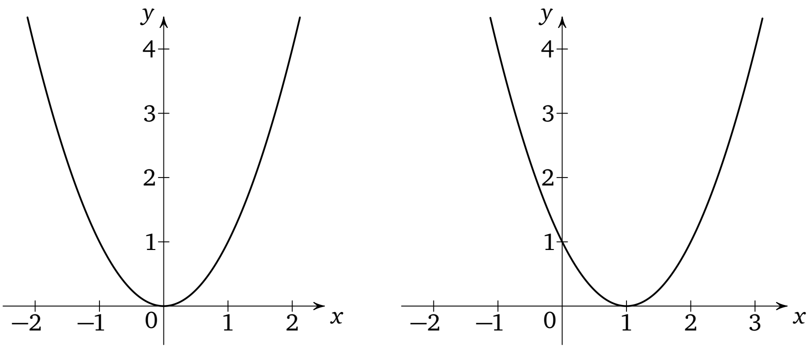


Рис. 5. Парабола $y = x^2$ и ее сдвиг на 1 вдоль оси Ox

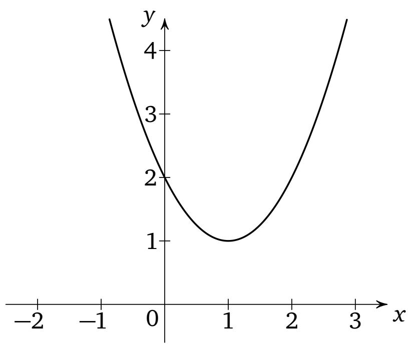


Рис. 6. Сдвиг вдоль оси Oy

Последовательность действий при построении графика квадратного трехчлена иллюстрируется рис. 5 и 6.

Но в случае необходимости эскиз графика квадратного трехчлена можно нарисовать очень быстро. Для этого не нужно ни строить график «по точкам», ни выполнять графически параллельный перенос параболы $y = ax^2$ на вектор $(-b/(2a), c - b^2/(4a))$. Нужно всего лишь по знаку a определить направление ветвей графика (вверх или вниз), вычислить координаты вершины параболы $(-b/(2a), c - b^2/(4a))$ и (можно грубо приближенно) отметить эту точку на координатной плоскости, провести через нее прямую, параллельную оси Oy, которая (эта прямая, а не ось Oy) будет осью симметрии параболы, и наконец провести через вершину симметрично относительно оси кривую с ветвями в заданном направлении, напоминающую параболу.

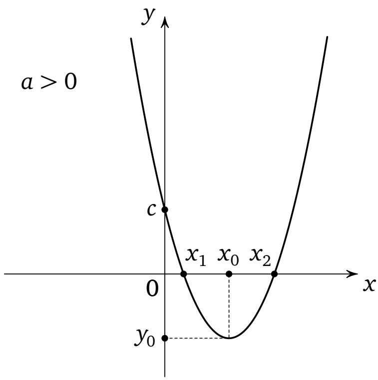


Рис. 7. Определение знаков a, b, c по графику квадратного трехчлена

Если вам известны нули функции, график, конечно, проводится через эти точки на оси Ox.

Если вы спешите и не требуется особой точности, можно нули не вычислять и даже не вычислять точно координаты вершины, а только их знаки. Для этого кроме знаков коэффициентов трехчлена придется определить знак дискриминанта $b^2 - 4ac$. Очень легко определить точку пересечения графика с осью Oy — это точка $(0, c)$. Нарисовав симметричную ей точку относительно оси параболы, получаем вместе с вершиной три точки параболы, через которые проводится график.

47. (Экзамены в ФМШ МГУ, 1997.) Найдите максимальное значение xy, если $x + 2y = 1$.

48. Докажите, что парабола однозначно определяется любыми тремя своими точками.

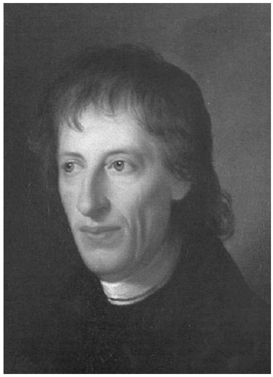
Следующая задача кажется на первый взгляд противоречащей геометрической интуиции.

49. Докажите, что графики парабол $y = x^2$ и $y = ax^2$, $a > 0$, подобны друг другу с коэффициентом подобия a.

50. Докажите, что графики любых двух парабол вида $y = ax^2 + bx + c$ подобны друг другу.

По информации о знаках коэффициентов эскиз графика квадратного трехчлена нарисовать правильно нельзя, нужно еще знать знак дискриминанта. Но по эскизу графика знаки коэффициентов определить легко. Знак a находится по направлению ветвей, знак b определяется по тому, левее или правее оси Oy лежит вершина параболы, знак c определяется по точке пересечения параболы с осью Oy.

Огюстен Луи Коши



Бернард Больцано

51. Докажите, что трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ неотрицателен при всех x тогда и только тогда, когда $a\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $b^2-4ac\leqslant 0$.

Следующее утверждение является частным случаем теоремы Больцано — Коши о промежуточном значении непрерывной функции. Оно выглядит очевидным (как и сама упомянутая теорема), но тем не менее нуждается в доказательстве. Это доказательство можно провести совершенно независимо от доказательства теоремы о промежуточном значении.

52. Докажите, что если трехчлен принимает значения разных знаков на концах данного отрезка, то он имеет хотя бы один корень на этом отрезке.

Следующее утверждение также является частным случаем упоминавшейся теоремы о промежуточном значении.

53. Докажите, что множество всех значений трехчлена $f(x)$ на данном отрезке $[a_1, a_2]$ содержит все числа, заключенные между $f(a_1)$ и $f(a_2)$.

Еще один пример на применение этой теоремы.

54. Докажите, что если c — корень $x^2+ax+b=0$, а d — корень $x^2-ax-b=0$, то уравнение $x^2-2ax-2b=0$ имеет корень между c и d.

55. (Румыния, 1975.) Для любых p, q найдите множество всех значений $f(x)=x^2+px+q$ при $|x|\leqslant 1$.

§ 5. Параболы в геометрии и в оптике

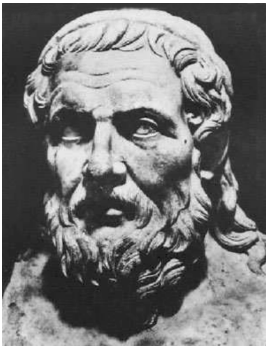
Навстречу сверкают, как чудо,
Параболы звезд небывалых:
Зеленых, серебряных, алых
На тусклом ночном багреце.

Даниил Андреев (1941)

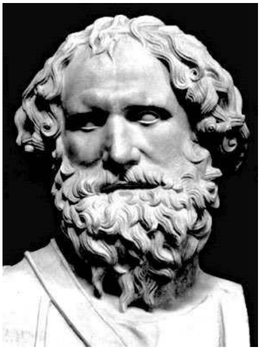
Следующие задачи были известны еще древним грекам. Вероятно, их знал Архимед, и несомненно знал Аполлоний.

56. Докажите, что график параболы $4y = x^2$ можно начертить как геометрическое место точек, равноудаленных от точки с координатами $(0, 1)$ (*фокуса* параболы) и прямой $y = -1$ (ее *директрисы*).

На самом деле Аполлоний и определил произвольную параболу как множество точек, равноудаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы). Далее во многих задачах вместо указанной в них конкретной параболы можно понимать произвольную параболу и решать эти задачи чисто геометрически, хотя, как правило, это несколько труднее.



Аполлоний из Перги



Архимед

57. Докажите, что если через произвольную точку N параболы $y = x^2$ провести луч, проходящий через ее фокус, и опустить перпендикуляр на директрису, то биссектриса угла, образованного этими лучами, будет касательной к параболе в этой точке N (т. е. прямой, пересекающей параболу только в одной точке — самой точке касания).

Представим, что поверхность параболы зеркальна и из ее фокуса выходит луч света. Как он будет отражаться от параболы в точке, в которой он в нее попадает? Согласно закону отражения света от плоского зеркала (известного Пьеру Ферма) «угол падения равен углу отражения». Так как в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки график параболы сколь угодно мало отличается от прямой — касательной к параболе в этой точке, — естественно понимать в случае параболического зеркала под углами падения и отражения соответствующие углы, образованные лучом с рассматриваемой касательной к параболе.

58. Применяя предыдущую задачу, докажите, что отраженный от параболы луч, выходящий из ее фокуса, полетит параллельно оси симметрии параболы, которая проходит через ее фокус перпендикулярно директрисе.

Теперь представим, что парабола вращается вокруг своей оси. Полученная двумерная поверхность называется *параболоидом вращения*. Она является частным случаем так называемого *эллиптического параболоида* (рис. 8).

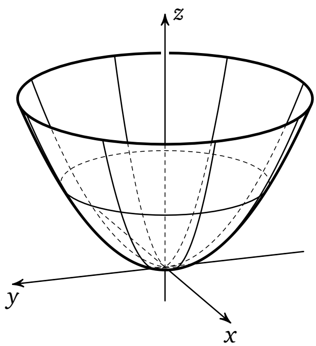


Рис. 8. Эллиптический параболоид

Все его сечения плоскостями, проходящими через рассматриваемую ось вращения, будут одинаковыми параболами с общим фокусом, который естественно назвать фокусом параболоида. Представим теперь, что поверхность параболоида сделана из подходящего металла и зеркальна. Получится параболическое зеркало. Такое жидкое зеркало можно получить, если налить в ведро ртуть и начать очень быстро вращать ведро вокруг оси (подобный опыт, с целью создания жидкого телескопа, реально выполнил знаменитый американский физик-экспериментатор Роберт Вуд, автор замечательной книги по физической оптике; повторить его в домашних условиях довольно сложно: ведро ртути весит больше ста килограмм, вращать его нужно очень быстро, а пары ртути ядовиты).

Если в фокус параболического зеркала поместить источник света, то оно будет отражать его лучи согласно предыдущей задаче в направ-

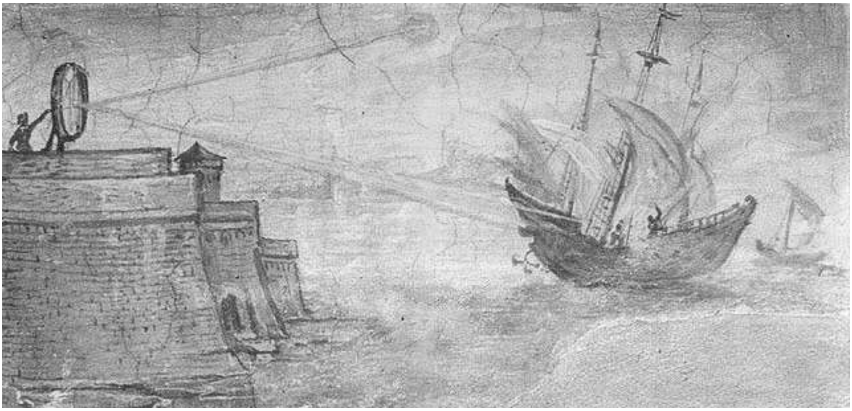


Рис. 9. Атака Архимеда. Фреска Джулио Париджи (1600). Галерея Уффици

лении оси симметрии (оси вращения зеркала), — получится параболический прожектор (или лампа для прогревания ушей — садистский инструмент из арсенала врачей-отоларингологов шестидесятых годов, которым меня лечили в детстве). Если, наоборот, направить в это зеркало параллельно его оси пучок, то он соберется в фокусе. Если поместить в фокус бумагу, сухую траву и т. п., получится зажигательное зеркало для туристических походов. А если в фокус поместить маленькое плоское зеркало из тугоплавкого металла и направить его в сторону *вершины параболоида*, в которой проделано небольшое отверстие, то из него вылетит мощный луч света — получится фантастический прибор из романа Алексея Толстого «Гиперболоид инженера Гарина»[1]. Реальные возможности этого устройства писатель несколько преувеличил, и осуществить с таким размахом эту идею на практике пока никому не удалось[2]. Впрочем, согласно легендам, Архимед сжег римский флот с помощью зеркал.

Венгерский математик Альфред Реньи в своей замечательной книге «Диалоги о математике»[3] дополнил эту легенду такой подроб-

[1] Толстой допустил ошибку, гиперболоид не обладает нужным свойством. В романе следовало использовать параболоид, но, возможно, дело в том, что гиперболоид звучит красивее.

[2] Нечто подобное делают приборы, называемые лазерами, но они устроены на совершенно других и существенно более сложных физических принципах; за их создание советские физики Басов и Прохоров получили совместно с американцем Таунсом Нобелевскую премию (1964).

[3] Имеется русский перевод (М.: Мир, 1969).

ностью: Архимед составил из множества маленьких женских зеркал большое параболическое зеркало. Было это в действительности или не было, неизвестно. Но такая идея прийти в голову Архимеду вполне могла. Другое дело, была ли у него возможность ее реализовать[1]. Согласно тем же легендам, Архимед построил также хитроумные метательные машины, которые помогали осажденным жителям Сиракуз выдерживать натиск римской армии. Это выглядит правдоподобно, и, как считает известный историк механики И. Н. Веселовский, вероятно, Архимед был скорее военным инженером, чем чистым математиком, но это уже другая история…

59. Докажите, что середины семейства параллельных хорд параболы лежат на одной прямой, параллельной оси параболы.

60*. (ВМО, 1982.) На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Потом оси координат стерли. Как по оставшейся параболе восстановить их и единицу длины, пользуясь циркулем и линейкой?

На самом деле предыдущая задача фактически имеется в томе 1 прекрасной книги Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова «Аналитическая геометрия». Только она сформулирована немного по-другому: требуется по контуру параболы найти ее ось, фокус и директрису. Если вы вспомните, как находятся у параболы фокус и директриса, то станет ясно, что их построение сводится к нахождению единицы длины.

В упомянутой книге есть и другие замечательные задачи про параболу. Например, следующие задачи о построении параболы разными методами.

61. (Построение параболы по осям координат и одной точке.) Требуется построить точки параболы (k, k^2), $k = -n, \ldots, n$, если точка $M = (n, n^2)$ задана.

62. (Построение параболы по фокусу и директрисе с помощью угольника и нити.) Пусть заданы фокус и директриса параболы. Закрепим вдоль директрисы линейку. К линейке приставим меньшим

[1] Вот что писали об этом античные историки: «Когда корабли Марцелла приблизились на расстояние полета стрелы… старик (Архимед) велел приблизить шестигранное зеркало, сделанное им. На известном расстоянии от этого зеркала он поместил другие зеркала, поменьше, такого же вида; зеркала эти вращались на своих шарнирах при помощи квадратных пластинок <…> Лучи, отраженные от этих зеркал, произвели страшный пожар на кораблях, которые были обращены в пепел…». Известный французский естествоиспытатель Бюффон в 1777 г. показал на опыте, что это возможно. При помощи 168 зеркал он, в апреле месяце, зажег дерево и расплавил свинец на расстоянии 47 метров.

катетом чертежный угольник и к его вершине, противолежащей этому катету, прикрепим одним концом нить, равную по длине большему катету. Второй конец нити закрепим в фокусе. Докажите, что если перемещать угольник вдоль линейки, удерживая нить натянутой карандашом (или пишущей ручкой), то острие карандаша будет описывать параболу.

63. (Построение параболы по фокусу и директрисе с помощью циркуля.) Пусть заданы фокус и директриса параболы. Проведем ряд параллелей к директрисе. Сделаем на каждой из них две засечки циркулем из фокуса как из центра раствором, равным расстоянию этой параллели до директрисы. Докажите, что построенные точки лежат на параболе с данным фокусом и директрисой.

64. (Построение параболы перегибанием листа бумаги.) Возьмем прямоугольный лист бумаги с одним выделенным краем и проколем его в некоторой точке A. Перегнем лист так, чтобы этот его край проходил через точку A. Тогда линия сгиба будет касательной к параболе с фокусом в точке A и директрисой, совпадающей с этим краем листа. Докажите, что, проведя всевозможные такие перегибания, получим семейство касательных к параболе, и в определенном смысле — саму параболу (касательной к параболе называется, естественно, любая прямая, пересекающаяся с ней в одной точке).

Как построить касательную к параболе в ее данной точке, ясно из задачи 57 — нужно провести биссектрису угла между перпендикуляром, опущенным из данной точки на директрису, и направлением из данной точки на фокус.

65. (Построение касательных к параболе из внешней точки.) Из данной точки N как из центра опишем окружность, проходящую через фокус параболы. Эта окружность пересекается с директрисой в точках D_1, D_2. Восстановим из D_i перпендикуляр к директрисе до пересечения с параболой в точке M_i. Докажите, что прямые NM_i будут искомыми касательными к параболе.

66. Опустим из произвольной точки параболы перпендикуляр на касательную, проведенную через вершину этой параболы. Докажите, что касательная к параболе в указанной точке является медианой прямоугольного треугольника, образованного касательной к вершине параболы, построенным к ней перпендикуляром и прямой, соединяющей эту точку с вершиной параболы.

67. (Экзамены в СУНЦ МГУ, 1980.) Под каким углом видна парабола $y = x^2/4$ из точки $(0, -1)$?

68*. (Экзамены в СУНЦ МГУ, 1998.) Нарисуйте множество точек координатной плоскости, из которых парабола $y = 2x^2$ видна под прямым углом.

69*. Докажите, что для произвольной параболы это множество точек совпадает с ее директрисой.

Покажем, как можно геометрическим способом решать квадратные уравнения. Таких способов много, наиболее элегантный следующий. Пусть надо решить уравнение $x^2 + px + q = 0$. Нарисуем на плоскости Opq дискриминантную кривую этого уравнения (линию, на которой дискриминант обращается в нуль) — ею, очевидно, является парабола $p^2 = 4q$. Уравнение будем изображать точкой $(-p/2, q/4)$. Очевидно, таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и всевозможными квадратными уравнениями.

70. Докажите, что если точка $(-p/2, q/4)$ лежит внутри дискриминантной параболы, то уравнение не имеет действительных корней, если на границе, то имеет один кратный корень, равный абсциссе данной точки, а если вне параболы, то уравнение имеет два действительных корня.

71. (Построение корней квадратного уравнения.) В последнем случае оба корня можно построить, проведя из точки $N = (-p/2, q/4)$ две касательные к дискриминантной параболе $p^2 = 4q$. Докажите, что абсциссы точек касания и будут корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

72. (Экзамены в СУНЦ МГУ, 1996.) Рассмотрим произвольную параболу $y = x^2 + px + q$, пересекающую оси координат в трех разных точках. Докажите, что окружность, проходящая через эти точки, проходит через точку $(0, 1)$ (не зависящую от p, q!).

В следующей задаче для простоты можно считать, что речь идет о параболах $y = ax^2 + bx + c$ и $x = py^2 + qy + r$.

73*. Докажите, что если две параболы с перпендикулярными осями (или, что то же самое, с перпендикулярными директрисами) пересекаются в четырех точках, то эти точки лежат на одной окружности.

В следующей задаче загадочным образом появляются четыре параболы.

74. (ВМО, 1967.) Три последовательные вершины ромба лежат на трех сторонах (например, AB, BC, CD) квадрата со стороной 1. Найдите фигуру (геометрическое место точек), заполняемую четвертыми вершинами таких ромбов, и вычислите ее площадь.

§ 6. Параболы в механике и баллистике

Литлвуд держался несколько напряженно, когда стал объяснять: он сейчас руководит группой, которая ведет исследования по баллистике для Королевской артиллерии. Военная разведка недавно оповестила их о том, что высокая точность огня противника на Западном фронте объясняется применением нового способа расчетов, называемого «метод Папахристоса».

— Я уверен, вы не откажетесь поделиться вашим открытием с правительством Его Величества, старина, — заключил Литлвуд. — В конце концов, Греция наш союзник.

Апостолос Доксиадис. Дядя Петрос и проблема Гольдбаха (1992)

Если бросить камень точно вертикально вверх, то он упадет вам на голову. А если бросить не совсем вертикально, то он полетит по параболе[1]. То же самое можно сказать и о полете пушечного ядра или артиллерийского снаряда[2].

Никколо Тарталья

Поэтому с появлением артиллерии для многих военных и государственных деятелей дошло, что математика — наука полезная. Уже знаменитый итальянский математик XV века Никколо Тарталья[3] подрабатывал, консультируя Венецианский арсенал.

Кстати, он первым понял, что для достижения максимальной дальнобойности надо поднять ствол орудия под углом 45° к горизонту. Имел ли он строгое доказательство, неясно, потому что тот факт, что ядро, бро-

[1] Разумеется, это утверждение является некоторой идеализацией. Оно верно при отсутствии атмосферы и предположении, что Земля плоская, но будет с высокой точностью выполняться, если камень брошен недалеко, невысоко (поэтому действующая на него сила притяжения Земли не сильно изменяется во время его полета) и не слишком быстро (поэтому силой сопротивления воздуха можно пренебречь). Если же эти условия не выполняются, то вероятно, речь идет не о камне, а о ракете.

[2] С учетом сделанных выше замечаний.

[3] Он был одним из первых, кто нашел формулу для корней кубического уравнения.

шенное вверх, будет падать с постоянным ускорением $g \approx 10$ м/с^2 был открыт только в XVII веке Галилеем.

Мы предлагаем читателю вспомнить физику и решить следующую задачу.

75. Пусть скорость снаряда равна v, а угол возвышения орудия равен α. Докажите, что если начало координат совместить с орудием, то траектория полета снаряда задается уравнением

$$y = kx - ax^2(k^2+1),$$

где $a = g/(2v^2)$, $k = \operatorname{tg}\alpha$, y — высота полета снаряда. Докажите также, что максимальная высота траектории равна $h = (v^2 \sin^2\alpha)/g$, а ее дальность равна $d = (v^2 \sin 2\alpha)/g$.

Из предыдущей задачи легко следует, что

76. Максимальная дальнобойность орудия равна $d = v^2/g$.

Из приведенных примеров ясно, что баллистика — наука о полете снарядов и ракет — немыслима без математики. Неудивительно, что ею занимались в прошлом известные математики. Например, Леонард Эйлер написал книгу, посвященную баллистике[1]. А артиллеристы изучали математику. Самым известным из них был, безусловно, Наполеон, который, кстати, всегда поддерживал Политехническую школу, готовившую гражданских и военных инженеров, и в его время, и долгое время после него в ней преподавали лучшие французские математики — Монж, Лежандр, Пуассон, Ампер, Коши и др. Лев Толстой в молодости изучал математику и служил артиллерийским офицером в Севастополе во время Крымской войны. Самый известный русский математик и механик первой половины XIX века Михаил Васильевич Остроградский преподавал в военных учебных заведениях Петербурга.

Рассмотрим еще интересный пример появления парабол в баллистике.

77. Предположим, что зенитное орудие может стрелять в любом направлении под любым углом от нуля до 90° со скоростью вылета снаряда v. Как определить зону, в которой оно может поразить самолет? Этой задачей интересовались (не в применении к самолетам и зенитным орудиям) Эванджелиста Торричелли и Иоганн Бернулли. Впрочем, огибающую этого семейства парабол можно увидеть во-

[1] Эта книга имеется в русском переводе: «Исследования по баллистике», М.: Физматлит, 1961.

Рис. 10. Фонтан «Солнце» в Петергофе

очию в Петергофском парке. Там есть фонтан, выпускающий по всем направлениям струи воды с одинаковой начальной скоростью. Они летят, естественно, по параболам (см. рис. 10).

Для решения этой задачи сначала предположим, что стрельба ведется в одном направлении (т. е. в одной плоскости), и найдем плоское сечение зоны поражения. Совместим начало плоской системы координат с орудием, а саму координатную плоскость — с плоскостью стрельбы (размерами орудия будем пренебрегать). Рассмотрим правую часть плоской зоны поражения (лежащую в полуплоскости $x \geqslant 0$). Из задачи 75 следует, что при угле возвышения орудия α (угол измеряется в радианах) траектория полета снаряда совпадает с параболой $y = kx - ax^2(k^2 + 1)$, где $a = g/(2v^2)$, $k = \operatorname{tg} \alpha$. Зона поражения, очевидно, ограничивается кривой, которая содержит внутри себя каждую из парабол

$$y = kx - ax^2(k^2 + 1), \quad x \geqslant 0, \ k > 0,$$

и которая касается каждой из этих парабол. Эту кривую можно назвать *огибающей* данного семейства парабол $F(x, y, k)$. В математическом анализе разработаны общие методы вычисления таких огибающих. Но в данном примере можно обойтись и без общей теории.

Действительно, огибающая $y = y(x)$ при $x = 0$, очевидно, удовлетворяет равенству $y(0) = 1/(4a) = v^2/(2g)$, так как при стрельбе вертикально вверх снаряд летит не по параболе, а по прямой и достигает максимальной высоты в момент времени $t = v/g$, когда скорость полета снаряда $v - gt$ будет равна нулю. Пройденный к этому моменту *путь* (в данном случае высота подъема снаряда) равен

$$vt - \frac{gt^2}{2} = \frac{v^2}{g} - \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}.$$

При $x > 0$ огибающая есть

$$y(x) = \max_{k>0}\{kx - ax^2(k^2+1)\}.$$

Выделяя полный квадрат (рассматривая k как переменную, а x — как фиксированный параметр), имеем

$$xk - ax^2(k^2+1) = xk - ax^2k^2 - ax^2 = \frac{1}{4a} - ax^2 - ax^2\left(k - \frac{1}{2ax}\right)^2,$$

откуда

$$y(x) = \max_{k>0}\{kx - ax^2(k^2+1)\} = \frac{1}{4a} - ax^2,$$

так как $ax^2\left(k - \frac{1}{2ax}\right)^2 \geqslant 0$, и $ax^2\left(k - \frac{1}{2ax}\right)^2 = 0$ при $k = \frac{1}{2ax}$. Таким образом, огибающей семейства парабол

$$y = kx - ax^2(k^2+1), \quad x \geqslant 0,\ k > 0,$$

является парабола $y = 1/(4a) - ax^2$. Левая часть зоны поражения (лежащая в полуплоскости $x \leqslant 0$), очевидно, симметрична правой части относительно оси ординат и ограничивается сверху огибающей семейства парабол

$$y = -kx - ax^2(k^2+1), \quad x \leqslant 0,\ k > 0,$$

которая из соображений симметрии является той же параболой $y = 1/(4a) - ax^2$. Таким образом, плоское сечение зоны поражения есть внутренность параболы $y = 1/(4a) - ax^2$, $a = g/(2v^2)$. Чтобы найти полностью границу зоны поражения, надо взять поверхность, полученную вращением параболы $y = 1/(4a) - ax^2$ вокруг оси ординат. Это поверхность является уже встречавшимся нам параболоидом вращения и задается равенством $y = 1/(4a) - a(x^2 + z^2)$, если через Oz обозначить ось пространственной системы координат, перпендикулярную осям Ox и Oy. Найденный нами параболоид можно назвать *параболоидом безопасности* (если смотреть на ситуацию глазами летчика).

Интересно, что вершины рассмотренного семейства парабол

$$y = kx - ax^2(k^2 + 1)$$

вовсе не лежат на параболе безопасности, как может показаться на первый взгляд.

78. Докажите, что при $k > 0$ вершины семейства парабол

$$y = kx - ax^2(k^2 + 1)$$

имеют координаты

$$x = \frac{k}{2a(k^2 + 1)}, \quad y = \frac{k^2}{4a(k^2 + 1)}$$

и лежат на кривой с уравнением $y - 4ay^2 = ax^2$.

Применяя к полученному уравнению процедуру выделения полного квадрата, можно переписать это уравнение в виде

$$x^2 + 4\left(y - \frac{1}{8a}\right)^2 = \left(\frac{1}{4a}\right)^2,$$

из которого становится ясно, что указанная фигура является *эллипсом* с *центром* в точке $(0, 1/(8a))$ и *полуосями* $1/(4a)$, $1/(8a)$.

На рис. 11 показаны несколько возможных траекторий снаряда, эллипс, на котором лежат их вершины, и огибающая траектории парабола безопасности.

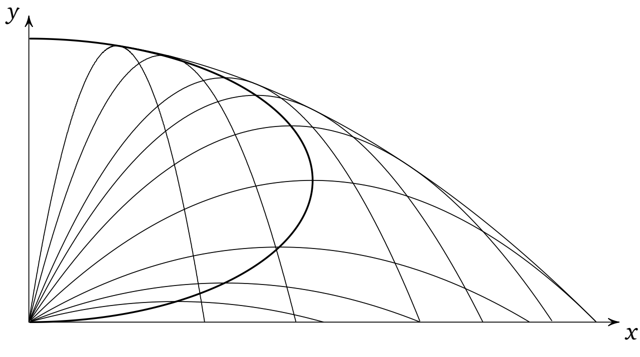


Рис. 11. Парабола безопасности

§ 7. Квадратный трехчлен и задачи на максимум и минимум

> Я хочу только, чтобы он знал, что наши вопросы о максимумах и минимумах и о касательных к кривым линиям были решены восемь или десять лет тому назад и несколько человек, которые знали про это в последние пять или шесть лет, могут это засвидетельствовать.
>
> *Пьер Ферма.* Письмо Рене Декарту (1638)

Многие задачи на максимум и минимум могут быть решены с помощью уже известного нам алгоритма поиска экстремума квадратного трехчлена.

Например: как среди всех прямоугольников данного периметра найти имеющий наибольшую площадь?

Эта задача сразу сводится к следующей.

79. Найдите максимальное значение $x(1-x)$.

Из результата этой задачи вытекает, что максимальную площадь имеет квадрат (и только квадрат).

Многие экстремальные задачи имеют двойственные формулировки. Например, для рассмотренной задачи двойственной является следующая: среди всех прямоугольников данной площади найти имеющий наименьший периметр. Решение двойственной задачи, как правило, легко вытекает из решения прямой задачи рассуждением от противного. Например, в данном случае, предположив, что среди прямоугольников площади S наименьший периметр P имеет не квадрат, получаем, что квадрат периметра P имеет площадь, большую чем S, и, уменьшив его подобным образом, получим квадрат площади S и периметра, меньшего P, что противоречит минимальности P. Однако в этом рассуждении молча предполагалось, что экстремальная фигура существует, а это надо доказывать.

Но можно непосредственно решить двойственную задачу (и, наоборот, из нее вывести прямую задачу), сведя ее к следующей задаче.

80. Найдите минимальное значение $x+1/x$ при всех $x>0$ (и максимальное при $x<0$).

Предыдущая задача равносильна следующей.

81. Найдите максимум и минимум $x/(x^2+1)$.

Также легко увидеть, что задача 80 равносильна следующей.

82. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$

Здесь и далее в подобных ситуациях предполагается, что $x, y \geqslant 0$. Следующая задача равносильна предыдущей.

83. Докажите неравенство

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy.$$

Но, разумеется, ее легко решить и непосредственно: выделяем полный квадрат

$$\frac{x^2+y^2}{2} - xy = \frac{(x-y)^2}{2} \geqslant 0.$$

Известно несколько геометрических интерпретаций неравенства между средними. Одно из них уже было указано выше — среди прямоугольников с данной площадью минимальный периметр имеет квадрат. Кстати, у последнего утверждения имеется обобщение: среди всех четырехугольников с данной площадью минимальный периметр имеет квадрат, и вообще, среди всех n-угольников с данной площадью минимальный периметр имеет правильный n-угольник — это так называемое *изопериметрическое* неравенство. Однако оно выходит за рамки нашей книжки.

В задачах 84, 86–88 рассмотрим трапецию с верхним (меньшим) основанием x и нижним y. В следующей задаче дается еще одна геометрическая интерпретация неравенства между средними (рис. 12).

84. Докажите, что средняя линия трапеции равна $(x+y)/2$, а линия, параллельная основаниям и разделяющая трапецию на две подобные друг другу трапеции, равна $\sqrt{xy}$. (Первая линия находится ниже второй.)

Следующая задача, как это ни удивительно на первый взгляд, равносильна задаче 82.

85. Докажите неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим:

$$\sqrt{xy} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

86. Докажите, что параллельная основаниям линия, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, равна среднему гар-

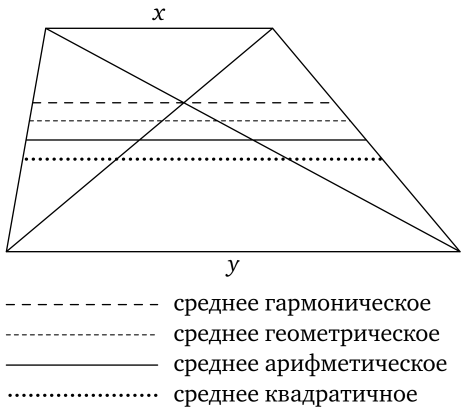


Рис. 12. Неравенства о средних на трапеции

моническому оснований $2/(1/x + 1/y)$. Эта линия проходит выше и средней линии, и линии, разделяющей подобные трапеции (рис. 12).

Для решения следующей задачи достаточно возвести обе части неравенства в квадрат.

87. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2}.$$

88. Докажите, что параллельная основаниям линия, делящая площадь трапеции пополам, равна $\sqrt{(x^2+y^2)/2}$. Эта линия проходит ниже средней линии (рис. 12).

Вместе все неравенства между средними выглядят так:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \geqslant \frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}.$$

89. Проверьте, что любое из этих неравенств обращается в равенство только при $x = y$.

Еще одна геометрическая интерпретация неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным получается, если заметить, что парабола (с ветвями, направленными вверх) обладает свойством *выпуклости*, т. е. любая ее дуга лежит ниже стягивающей ее хорды (рис. 13), а поэтому середина хорды лежит выше середины дуги.

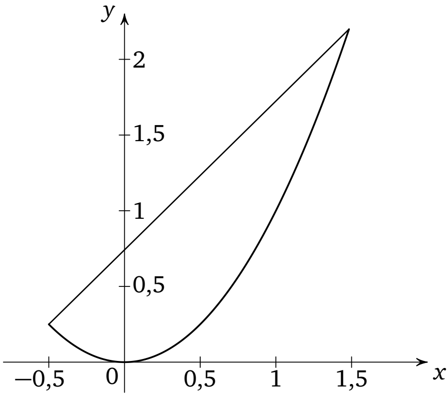


Рис. 13. Выпуклость параболы: хорда выше дуги

Так как любая точка хорды лежит выше соответствующей точки дуги, отсюда следует неравенство, обобщающее неравенство задачи 87:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 \geqslant (\alpha x + \beta y)^2,$$

где $\alpha + \beta = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Так как свойство выпуклости параболы мы не доказывали, это неравенство нуждается в алгебраическом доказательстве, которое мы предоставляем читателю выполнить самому. Указанное неравенство можно обобщить на n слагаемых и получить неравенство

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2 \geqslant (\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)^2,$$

где $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, $\alpha_i > 0$. Это неравенство также является следствием выпуклости параболы. Вообще для любой *выпуклой* функции $f(x)$ (т. е. такой, у которой график всегда лежит ниже хорды) справедливо неравенство

$$\alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n) \geqslant f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n),$$

где $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, $\alpha_i > 0$, которое называется неравенством Йенсена. Его доказательство, однако, выходит за рамки нашей темы.

Йохан Йенсен

Задач (и теорем) о неравенствах известно огромное количество, и о них написаны целые книги, например, рассчитанная на школьников книга Беккенбаха и Беллмана «Введение в неравенства» (Мир, 1965). Увлечение такими задачами уведет в сторону от нашей темы, поэтому мы здесь еще только упомянем о том, что неравенства между средними можно обобщить и для n положительных чисел

$$\sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\ldots x_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}},$$

и заметим, что его можно вывести из неравенства Йенсена.

Возвращаемся к задачам на максимум и минимум.

С помощью исследования квадратного трехчлена решается следующая задача.

90. Из прямоугольного треугольника с катетами a, b вырежьте прямоугольник наибольшей площади, примыкающий к прямому углу. Какова его площадь?

На самом деле ответ в этой задаче не изменится, если в условии потребовать вырезать из произвольного треугольника параллелограмм, причем произвольно расположенный. Но это задача уже скорее геометрическая, чем алгебраическая.

Некоторые совсем простые геометрические задачи имеют экстремальную природу, например, следующая задача.

91. Найдите на прямой $x/a + y/b = 1$ точку, наиболее близкую к началу координат.

На алгебраическом языке здесь речь идет о минимизации функции $\sqrt{x^2+y^2}$ (т. е. фактически квадратичной формы x^2+y^2) на прямой $x/a+y/b=1$. Задача легко сводится к минимизации квадратного трехчлена. На геометрическом языке решение очевидно — надо опустить из начала координат перпендикуляр на эту прямую. Так как эта прямая отсекает от осей координат треугольник с катетами a, b, его удвоенная площадь равна ab, а искомый перпендикуляр — это высота треугольника, опущенная на гипотенузу, откуда, вычисляя удвоенную площадь как произведение гипотенузы на высоту, имеем

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

К решению экстремальной задачи сводятся и задачи о проведении огибающей к семейству кривых, с которыми мы уже имели дело. Вот еще одна такая задача.

92. Опираясь концами на оси координат, отрезок (переменной длины) скользит так, что сумма его проекций на оси координат постоянна. Докажите, что тогда огибающей семейства прямых, продолжающих эти отрезки, является парабола, ось которой совпадает с биссектрисой угла между осями координат.

Не каждая экстремальная задача имеет решение. Рассмотрим, например, следующую задачу.

93. Вырежьте из квадратного куска картона с единичной стороной прямоугольную коробку с наибольшей площадью поверхности (крышка делается из другого куска картона и ее площадь учитывается). Та же задача, если крышки нет и ее площадь не учитывается.

Следующая задача также не имеет решения.

94. Вырежьте из квадратного куска картона с единичной стороной прямоугольную коробку с крышкой с наибольшей площадью поверхности.

95. Вырежьте из квадратного куска картона с единичной стороной прямоугольную коробку без крышки наибольшего объема.

Эта задача имеет решение, хотя в ней надо максимизировать не квадратный, а кубический многочлен $f(x)=x(1-2x)^2$.

Эту задачу можно решить, применив неравенство о средних для трех чисел: действительно,

$$4x(1-2x)(1-2x)\leqslant\frac{(4x+1-2x+1-2x)^3}{27}=\frac{8}{27};$$

можно решить и с помощью производных, но мы здесь покажем более длинное решение, доступное школьникам средних классов, в котором появляется квадратный трехчлен. Фактически мы повторяем рассуждения Пьера Ферма.

Предположим, что максимум достигается при $x=a$. Отсюда следует, что при любом не слишком большом h верно неравенство $f(a)\geqslant f(a+h)$. Но $f(a)=a(1-2a)^2=4a^3-4a^2+a$, поэтому

$$\begin{aligned}f(a+h)-f(a)&=4((a+h)^3-a^3)-4((a+h)^2-a^2)+(a+h)-a=\\&=4h(a^2+a(a+h)+(a+h)^2)-4h(a+a+h)+h=\\&=h(12a^2+12ah+4h^2-8a-4h+1)=\\&=h(12a^2-8a+1+(12a-4)h+4h^2)\leqslant 0.\end{aligned}$$

Заметим теперь, что при $12a^2-8a+1\neq 0$ это неравенство не может всегда выполняться, потому что при достаточно малом h

$$12a^2-8a+1+(12a-4)h+4h^2\neq 0$$

Пьер Ферма

(и имеет тот же знак, что и $12a^2-8a+1$), поэтому, выбирая подходящий знак у h, можно получить, что $f(a+h)-f(a)>0$. Поэтому необходимое условие для того, чтобы при $x=a$ достигался максимум, есть $12a^2-8a+1=0$. Решая это уравнение, имеем $a_{1,2}=1/2, 1/6$. Первый корень не подходит по смыслу задачи, так как $0<x<1/2$. Значит, максимум может достигаться только при $x=1/6$. Но надо еще доказать, что это максимум. Но, очевидно, при $a=1/6$ и $0<a+h<1/2$

$$f(a+h)-f(a)=h(4h^2-2h)=2h^2(2h-1)<0,$$

значит, это действительно максимум.

К исследованию квадратного трехчлена можно свести задачи, в которых формально он и не встречается. Например:

96. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{2x+1}-x$.

На самом деле трехчлен в этой задаче, конечно, есть, так как график данной функции лежит на кривой $(y+x)^2=2x+1$, которая является «косо» расположенной параболой, в чем легко убедиться, сделав замену координат $Y=y+x$, $X=2x+1$ и получив уравнение $Y^2=X$ (в косоугольной системе координат, в которой осями являются прямые $y+x=0$, $2x+1=0$).

Следующую задачу можно решить с помощью производных, но есть и способ, доступный школьникам средних классов.

97. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^2+x-2}{2x^2-x+3}.$$

Для ее решения можно просто найти все множество значений данной функции, а это равносильно вычислению множества значений параметра y, при которых разрешимо уравнение

$$(2y-1)x^2-(y+1)x+3y+2=0.$$

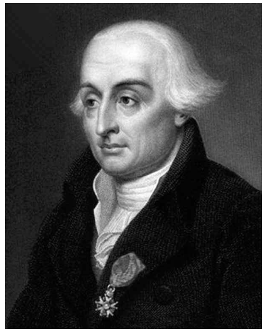
Следующая задача относится к типу задач, которые называются задачами на *условный экстремум*. Для решения таких задач знаменитый французский математик Жозеф-Луи Лагранж придумал специальный метод, который называется методом *множителей Лагранжа*.

Однако эту задачу можно решить школьным способом, используя квадратный трехчлен.

98. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $2x-3y$, если

$$3x^2-xy+2y^2=5.$$

И в этом случае можно найти множество всех возможных значений $2x-3y$, а потом выбрать из него максимум и минимум. Для этого введем новую переменную $a=2x-3y$, тогда $y=(2x-a)/3$ и данное условие можно переписать в виде



Жозеф-Луи Лагранж

$$29x^2-5ax+2a^2-45=0.$$

Для нахождения множества всех значений $2x-3y$ нужно найти множество всех значений параметра, при которых уравнение имеет решение.

Следующая задача также является фактически задачей на условный экстремум.

99. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $2x^2-xy-y^2$, если $x^2+2xy+3y^2=4$.

Задача, очевидно, сводится к решению следующей задачи «на системы с параметром»: найти все a, при которых разрешима система

$$\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=a, \\ x^2+2xy+3y^2=4. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 4, а второе на a и почленно вычтем их. Получим

$$(8-a)x^2-(4+2a)xy-(4+3a)y^2=0.$$

Разделив обе части на y^2 и заменив x/y на z, получаем квадратное (при $a\neq 8$) уравнение с параметром:

$$(8-a)z^2-(4+2a)z-(4+3a)=0.$$

Для его разрешимости дискриминант должен быть неотрицателен, поэтому

$$(2+a)^2+(8-a)(4+3a)\geqslant 0.$$

Решая неравенство, имеем $6-3\sqrt{6}\leqslant a\leqslant 6+3\sqrt{6}$. При $a=8$ уравнение также имеет решение, но $a=8$ входит в полученный промежуток.

Остается проверить, что при всех этих a исходная система имеет решения.

На этом мы заканчиваем экскурс в область теории экстремальных задач. Эта тема необъятна, и ей посвящены многочисленные специальные книги. Интересующихся мы отсылаем, например, к рассчитанной на подготовленных школьников книге В. М. Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах» (М.: МЦНМО, 2006).

§ 8. Гипербола и дробно-рациональные функции

Это просто, как дважды два... Лучи света, падая на внутреннюю поверхность гиперболического зеркала, сходятся все в одной точке, в фокусе гиперболы.

А. Н. Толстой. Гиперболоид инженера Гарина (1927)

Научимся быстро рисовать график дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Он является не параболой, а (в невырожденном случае) гиперболой, но эти кривые тесно связаны друг с другом, и умение строить график гиперболы полезно при решении квадратных уравнений. Например, уравнение вида

$$\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1} = \frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$$

легко сводится к квадратному.

В простейшем случае $y=1/x$ график состоит из двух ветвей, разделяемых вертикальной асимптотой $x=0$, при приближении к которой каждая из них стремится к бесконечности в разных направлениях.

Каждая из ветвей стремится к общей горизонтальной асимптоте $y=0$ при x, стремящемся к бесконечности.

График

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0,$$

можно получить из графика

$$y = \frac{k}{x}, \quad k = \frac{bc-ad}{c^2},$$

с помощью параллельного переноса, так как

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{k}{x+\frac{d}{c}}.$$

Для быстрого построения эскиза графика не нужно строить график $y=1/x$, а потом выполнять параллельный перенос. Достаточно построить асимптоты графика, которыми являются прямые $y=a/c$ (горизонтальная) и $x=-d/c$ (вертикальная), построить точки пересечения графика с осями координат $(0, b/d)$ (с осью Oy) и $(-b/a, 0)$

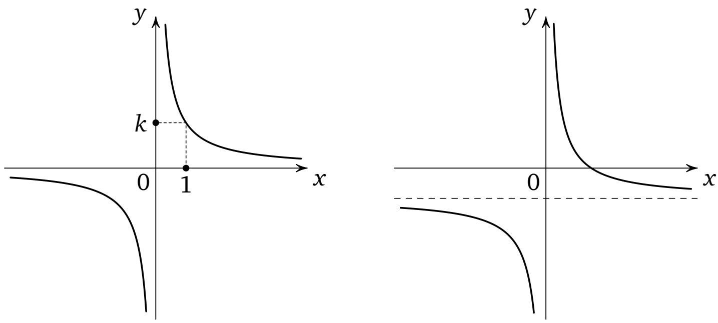


Рис. 14. Растяжение гиперболы вдоль оси Oy и сдвиг вдоль оси Oy

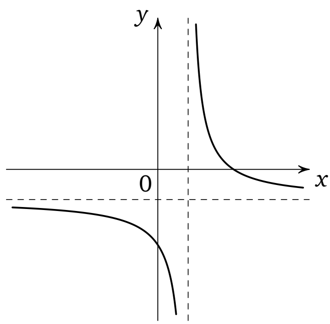


Рис. 15. Сдвиг вдоль оси Ox

(с осью Ox) и нарисовать обе ветви так, чтобы они проходили через указанные точки (конечно, если они существуют) и стремились к указанным асимптотам. Если учесть, что обе ветви должны быть симметричны относительно точки $(-d/c, a/c)$ пересечения асимптот, то с учетом условия стремления ветвей к асимптотам есть только два варианта расположения ветвей. Чтобы из них выбрать один, достаточно знать знак числа k, т. е. знак числа $bc - ad$. Но его фактически можно не вычислять, а учесть, что для прохождения через вычисленные точки пересечения с осями координат (даже если имеется только одна такая точка) имеется только один вариант расположения ветвей. График $y = 1/x$ не пересекается с осями координат, но как он выглядит, нам и так известно.

Указанные выше формулы нет необходимости запоминать, так как их легко получить в каждом конкретном случае. Вертикальная асимптота определяется из условия обращения в нуль знаменателя дроби. Точка пересечения с осью Ox есть просто корень числителя этой дроби. Точка пересечения с осью Oy получается (как и для любой функции) подстановкой $x = 0$ в данную дробь. Горизонтальная асимптота находится путем вычисления предела этой дроби при x, стремящемся к бесконечности, который равен отношению старших коэффициентов числителя и знаменателя, так как при больших x дробь становится все ближе и ближе к $ax/(cx) = a/c$.

Для правильного построения эскиза графика достаточно знать знаки a, c, d и знак $bc - ad$. Всегда без ограничения общности можно считать, что $c > 0$.

100. Как определить по нарисованной гиперболе знаки a, b, d?

101. Докажите, что гипербола однозначно определяется любыми тремя своими точками.

102. Докажите, что (в невырожденном случае) графики любых двух дробно-линейных функций

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

подобны друг другу.

103. Сколько общих точек могут иметь графики функций

$$\frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1} \quad \text{и} \quad \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2}?$$

Следующая задача легко решается, если представить себе графики обеих функций.

104. (С.-Петербург, 1998.) Две дробно-линейные функции $f(x)$, $g(x)$ таковы, что $f(x) - g(x) > 1997$ при всех x из области определения. Докажите, что $f(x) - g(x)$ есть константа (на своей области определения).

105. Найдите все a, при которых система $2ax > a + x > ax$ имеет хотя бы одно решение.

Гипербола, так же как и парабола, имеет фокус, даже не один, а два. *Фокусы гиперболы* определяются как две точки, обладающие следующим *фокальным свойством*: модуль разности расстояний от любой точки гиперболы до ее фокусов постоянен.

106. Докажите, что фокусами гиперболы $2y = 1/x$ являются точки $F_1 = (1, 1)$, $F_2 = (-1, -1)$, причем эта гипербола является множеством (раньше говорили: геометрическим местом) точек N, удовлетворяющих равенству $|NF_1 - NF_2| = 2$.

Если в качестве фокусов выбрать точки $F_1=(1,0)$, $F_2=(-1,0)$, то множество точек N, таких что $|NF_1-NF_2|=1$, оказывается кривой, задаваемой уравнением $4(x^2-y^2)=1$.

107. Проверьте это.

Эта кривая, конечно, тоже является гиперболой, но повернутой на 45° и подвергнутой преобразованию подобия с коэффициентом $1/2$. В школе такие кривые не рассматриваются, возможно потому, что не являются графиками функций. Произвольную гиперболу можно определить как множество точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек (ее фокусов) постоянен. Гипербола обладает многими свойствами, похожими на свойства параболы. Например, касательная к гиперболе является биссектрисой угла, образованного направлениями из точки касания на фокусы.

108*. Проверьте это для любой из указанных выше гипербол алгебраически или для любой возможной гиперболы докажите геометрически.

У касательных гиперболы есть еще одно простое свойство.

109. Касательная к гиперболе $xy=a$ в точке (x_0, y_0) задается уравнением

$$yx_0+xy_0=2a.$$

Докажите, что касательная к этой гиперболе отсекает от осей координат треугольник постоянной площади.

Предыдущее утверждение верно и для произвольной гиперболы, только вместо осей координат надо взять асимптоты гиперболы (т. е. прямые, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы; у гиперболы $y=1/x$ асимптоты совпадают с осями координат).

Предыдущую задачу можно переформулировать следующим образом. Прямая скользит так, что площадь треугольника, отсекаемого ею от осей координат, постоянна. Тогда огибающей этого семейства прямых является гипербола, причем касаться каждого отрезка она будет в его середине.

Можно для гиперболы определить и понятие директрисы, но ее свойство более сложно, чем свойство директрисы параболы, и поэтому оно здесь не приводится.

Как мы уже видели, геометрическим местом таких вершин A треугольника с данным основанием BC, что разность сторон AB и AC равна заданному числу a, является ветвь гиперболы с фокусами B, C.

Если же заменить в предыдущем утверждении разность на частное, то получится следующая теорема Аполлония.

Arithmetica Universalis;
SIVE
DE COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA
LIBER.
Cui accessit
HALLEIANA
Æquationum Radices Arithmetice
inveniendi methodus.

In Usum Juventutis Academicæ

CANTABRIGIÆ:
Typis Academicis.
LONDINI, ... A. D. MDCCVII.

Рис. 16. «Арифметика» Ньютона.
Английское издание XVIII века

110. Геометрическим местом вершин A треугольника с данным основанием BC, таких, что отношение сторон AB и AC равно заданному числу a, является окружностью, если $a \neq 1$, и прямой, если $a = 1$.

Следующая задача заимствована из замечательной книги И. Ньютона «Всеобщая арифметика, или Книга об арифметических синтезе и анализе», изданной в переводе с латинского на русский в издательстве АН СССР в 1948 г. в Москве.

111. Найдите множество вершин A треугольника с данным основанием BC, таких что разность углов ABC и ACB при его основании равна заданному углу α.

Оказывается, все такие вершины A лежат на гиперболе, причем у этой гиперболы асимптоты перпендикулярны. Для сравнения: если заменить в задаче Ньютона разность углов на их сумму, то из известной теоремы Евклида легко следует, что искомое множество точек лежит на окружности.

Решение этой задачи равносильно доказательству следующей теоремы.

Теорема 3 (Ньютон). *Если в прямоугольной гиперболе провести какой-либо диаметр* AB (*отрезок с концами на гиперболе, проходящий через ее центр*) *и из его концов провести к каким-либо двум точкам гиперболы* C, D *прямые* AD, BD *и* AC, BC, *то эти прямые образуют в концах диаметра равные углы* DAC, DBC.

§ 9. Эллипсы в алгебре, геометрии и физике

Теперь я мог все это определить, как закон — простой, красивый, истинный: планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов имея Солнце.

Джон Бэнвилл. Кеплер (1981)

Естественно также возникает вопрос: какую кривую образует множество точек N, для которых сумма расстояний до двух данных точек F_i постоянна? Эта кривая называется *эллипсом*, а точки F_i — его фокусами. Эллипсы также обладают многими свойствами, похожими на свойства гиперболы и параболы. В частности, все эти кривые являются плоскими сечениями конуса и поэтому еще с древности называются *коническими сечениями*. Самое простое доказательство того факта, что (ограниченное) плоское сечение обычного (кругового) конуса является эллипсом, можно получить, используя замечательную геометрическую конструкцию, называемую «шарами Данделена».

Для доказательства Данделен[1] предложил применить теорему о том, что длины касательных к шару, проведенных из одной точки,

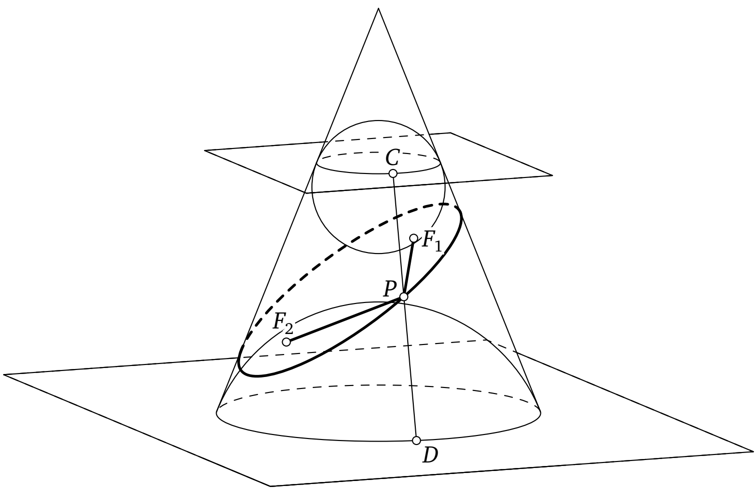


Рис. 17. Шары Данделена

[1] Ж. Данделен (1794–1847) — бельгийский математик и инженер.

равны, и заметить, что для любой точки P данного сечения, касающегося шаров в точках F_1, F_2, справедливо равенство

$$PF_1 + PF_2 = PC + PD = CD.$$

Далее, так как длина отрезка CD, высекаемого на прямолинейной образующей конуса параллельными плоскостями, проходящими через окружности, по которым касаются конуса эти шары, постоянна, получаем, что точки P данного сечения лежат на эллипсе с фокусами F_1, F_2.

Описание свойств конических сечений могло бы занять целую книгу и такие книги имеются в большом ассортименте. Первую из них написал древнегреческий геометр Аполлоний из Перги[1]. Большое число прекрасных задач о конических сечениях есть, как это ни удивительно, в знаменитой книге Ньютона «Математические начала натуральной философии». Углубленное изучение конических сечений выходит за рамки нашей темы, и поэтому мы упомянем только некоторые из их свойств.

112. Докажите, что внутренность эллипса вместе с самим эллипсом (часто также называемая эллипсом) является *центрально-симметричной выпуклой* фигурой (фигура выпуклая, если вместе с любыми двумя точками содержит и весь отрезок с концами в этих точках). *Центр симметрии* эллипса называется для краткости просто его *центром*.

Хордой эллипса называется отрезок с концами на эллипсе.

Очевидно, что для построения эллипса с данными фокусами и данной суммой расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов можно воткнуть в фокусы кнопки, привязать к ним концы нити данной длины и начать двигать по бумаге карандашом так, чтобы нить была все время натянута.

Интересно, что если на плоскость поставить прямой цилиндр, основание которого имеет форму эллипса (так называемый *эллиптический цилиндр*), накинуть на него связанную в кольцо нить, вставить в нее карандаш и двигать им так, чтобы нить была натянута, то будет нарисован эллипс с теми же фокусами, что и исходный. Это вытекает из следующей теоремы, доказанной в XIX веке английским священником Чарльзом Грейвсом[2].

[1] См.: *Розенфельд Б. А.* Аполлоний Пергский. М.: МЦНМО, 2004.
[2] Дедом известного писателя Роберта Грейвса.

Теорема 4 (Грейвс). *Даны два* софокусных *эллипса* (*т. е. эллипсы с общими фокусами*). *При перемещении точки M по внешнему эллипсу разность $MA + MB - \operatorname{arc} AB$ постоянна, где MA, MB — касательные, проведенные из точки M к внутреннему эллипсу, а $\operatorname{arc} AB$ — длина малой дуги этого эллипса, заключенной между точками A, B* (*т. е. той дуги, которая вместе с касательными образует криволинейный треугольник, лежащий вне внутреннего эллипса*).

Доказательство не приводим, так как оно использует элементы математического анализа.

Многие свойства эллипса (и других конических сечений) известны с глубокой древности. Например, еще Аполлоний доказал следующую теорему о диаметрах эллипса.

Теорема 5. *Геометрическое место середин семейства параллельных хорд эллипса является* диаметром эллипса[1] (*хордой, проходящей через центр*). *Хорда из указанного семейства, которая проходит через центр эллипса, является диаметром, который называется* сопряженным диаметром *к диаметру, образованному серединами хорд данного семейства.*

Если диаметр d сопряжен диаметру d', то диаметр d' сопряжен диаметру d. Диагонали параллелограмма, описанного вокруг эллипса, являются сопряженными диаметрами эллипса. Перпендикулярные друг другу сопряженные диаметры называются осями *эллипса. На большей оси лежат оба фокуса.*

Ее читатель может попробовать доказать самостоятельно.

Следующую теорему доказать сложнее, и мы уже не предлагаем читателю это сделать.

Теорема 6 (первая теорема Аполлония). *Площадь параллелограмма, описанного вокруг эллипса так, что его стороны параллельны двум сопряженным диаметрам эллипса, постоянна и равна площади прямоугольника, построенного на осях эллипса. Или, что равносильно, произведение длин сопряженных диаметров на синус угла между ними равно произведению длин осей эллипса.*

Есть еще и вторая теорема Аполлония.

---

[1] Формально говоря, диаметром без концов. Но если к указанному множеству точек добавить точки касания эллипса с касательными, параллельными данному семейству хорд, то получится полный диаметр.

Теорема 7 (вторая теорема Аполлония). *Сумма квадратов сопряженных диаметров эллипса постоянна и равна сумме квадратов его осей.*

Про касательные к эллипсу известно много красивых теорем, связанных с так называемым оптическим свойством эллипса. (См. сайт `www.etudes.ru`.)

113. Прямая касается эллипса с фокусами в точках A, B в точке C. Докажите, что тогда биссектриса угла ACB перпендикулярна данной касательной.

114. Докажите, что геометрическое место точек D, симметричных фокусу A относительно произвольной касательной к эллипсу (т. е. таких, что $DC = AC$ и биссектриса угла DCA — касательная к эллипсу), является окружностью с центром B и радиусом, равным большой оси эллипса. Эта окружность иногда называется *направляющей окружностью* эллипса.

115. Докажите, что геометрическое место точек D, являющихся проекцией фокусов эллипса на произвольную касательную к нему, является окружностью с центром в центре эллипса и радиусом, равным большой полуоси эллипса. Эта окружность иногда называется *вершинной окружностью* эллипса.

Если точка лежит на эллипсе, то провести через нее касательную можно с помощью задачи 113. В противном случае можно воспользоваться следующей задачей.

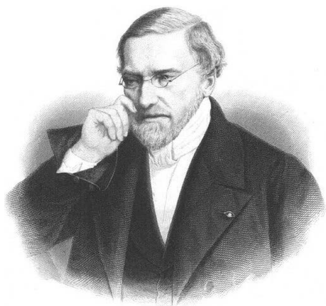
116. Пусть точка P лежит вне эллипса. Точка, симметричная фокусу A относительно проходящей через P касательной к эллипсу, лежит, согласно задаче 114, на направляющей окружности эллипса с центром в фокусе B и на расстоянии от P, равном PA. Построим окружность с центром P и радиусом PA. Пусть G, G' — точки пересечения этой окружности с направляющей окружностью. Докажите, что, опустив перпендикуляры из P на прямые AG, AG', получим обе касательные.

С приведенными выше утверждениями тесно связаны следующие теоремы о касательных к эллипсу.

Теорема 8 (изогональное свойство). *Пусть PG, PH — касательные к эллипсу с фокусами A, B. Тогда углы APH и BPG равны.*

Теорема 9. *Геометрическое место точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом (т. е. проведенные из данной точки* *касательные к эллипсу образуют прямой угол), является окружностью с центром в центре эллипса.*

Теорема 10 (Понселе). *Отрезок подвижной касательной к эллипсу, заключенный между двумя неподвижными касательными, виден из фокуса под постоянным углом.*



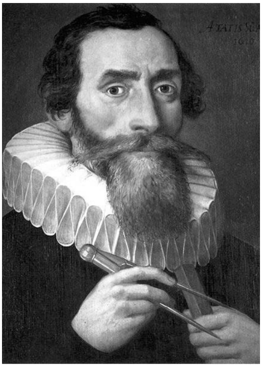
Жан-Виктор Понселе

Оптическое свойство эллипса означает, что если в один фокус поместить источник света, то свет, отразившись от эллипса, соберется в другом фокусе. Более точно, здесь вместо эллипса лучше говорить о поверхности (*эллипсоиде вращения*), которая получается при вращении эллипса вокруг одной из его осей. Звук, так же как и свет, имеет волновую природу, но с большей длиной волны, поэтому о прямолинейном распространении звука можно говорить лишь приближенно. Тем не менее с известной долей идеализации можно считать, что звук отражается от стенок по тем же законам, что и свет. Поэтому звуковой луч, выйдя из одного фокуса эллипсоида (или поверхности, близкой по форме к эллипсоиду), соберется в другом его фокусе.

Как написано в книге Л. Д. Ландау и А. И. Китайгородского «Физика для всех»:

> Это свойство кривых поверхностей знали еще в древности… Во времена инквизиции… для подслушивания разговоров использовали сводчатые поверхности. Двое людей, тихим голосом поведывающие друг другу свои мысли, и не подозревали, что благодаря сводчатому потолку в другом углу таверны дремлющий монах почти так же хорошо слышит каждое слово их беседы, как и они сами.

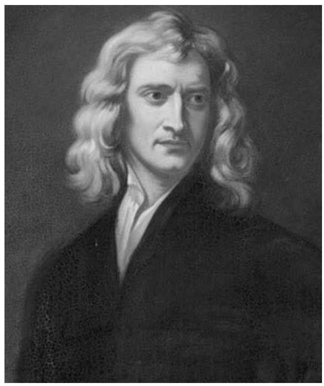
Но эллипсы появляются в физике не только благодаря своему оптическому свойству. Гораздо более важно то, что планеты в Солнечной системе (и их естественные и искусственные спутники) движутся по эллиптическим орбитам. Этот факт эмпирически обнаружил Кеплер, пользуясь результатами многолетних наблюдений Тихо Браге. Как-либо обосновать открытые им законы движения небесных тел


Иоганн Кеплер

Кеплер не мог, но они были настолько красивы и так точно выполнялись, что в их справедливости ни у кого не возникло сомнений.

Впоследствии Ньютон сумел строго доказать справедливость законов Кеплера, выведя их из своего закона всемирного тяготения[1]. Для этого ему пришлось развить направление математики, которое сейчас называется дифференциальным и интегральным исчислением, а также создать классическую механику. В частности, Ньютон начал исследовать вопрос о том, с какой силой будет притягивать тело эллипсоидальной формы и равномерной распределенной плотности.

Ему удалось решить его в случае сферической формы, но в общем случае этот вопрос оказался весьма сложным. Впоследствии им занимались Маклорен, Лаплас, Гаусс, Шаль. Полученные в результате формулы включают в себя так называемые эллиптические интегралы (обо всем этом можно прочитать, например, в прекрасном курсе теоретической механики профессора МГУ, «отца русской авиации» Н. Е. Жуковского). Эти формулы имеют не только теоретическое значение, так как Земля имеет форму не шара, а скорее эллипсоида. Интерес к задаче о силе притяжения материального эллипсоида сохраняется и в наше время, в связи с появлением космических аппаратов и необходимостью точного расчета их орбит.


Исаак Ньютон

Сплюснут земной эллипсоид у полюсов или нет — этот вопрос очень интере-

[1] Строго говоря, закон всемирного тяготения независимо от Ньютона и, по-видимому, раньше его открыл выдающийся английский физик-экспериментатор Роберт Гук. Он даже пытался (без особого успеха) получить экспериментальное подтверждение этого закона. Но Ньютону удалось теоретически вывести из закона всемирного тяготения законы Кеплера, и слава первооткрывателя (в общем-то, справедливо) досталась ему. Просто Ньютон был одним из крупнейших математиков своего времени (да и всех времен тоже).

совал ученых в XVIII веке. Возник даже спор между французскими и английскими учеными. Для разрешения этого спора французская академия наук организовала в 1730-х гг. геодезическую экспедицию с целью измерения длины одного градуса меридиана в Лапландии (у Полярного круга) и в Перу (у экватора). Известный математик и механик Мопертюи руководил экспедицией в Лапландию. Она завершилась успешно: было установлено, что Земля сплюснута у полюсов. Мопертюи получил прозвище «сплюснувший Землю». Знаменитый писатель Вольтер совершенно незаслуженно высмеял эту экспедицию в своих «Философских повестях».

Работы по измерению длины меридиана продолжались и далее. В конце XVIII века была послана экспедиция в Испанию, но в связи с бурными политическими событиями исследования проходили в мало подходящих условиях и чуть было не закончились безрезультатно. Руководитель экспедиции академик Мешень умер. В 1806 г. для продолжения работ в Испанию был командирован выпускник Политехнической школы Араго. В течение трех лет он продолжал работу в немыслимых условиях; ему удалось закончить измерения и привезти результаты расчетов в Париж на разрозненных листах бумаги буквально под своей рубашкой. За эти три года он неоднократно рисковал жизнью, побывал в испанской тюрьме и через Алжир с трудом вернулся во Францию. Свои приключения он описал в воспоминаниях, которые можно прочесть в третьем томе его «Биографий знаменитых астрономов, физиков и геометров» (Москва — Ижевск: РХД, 2000). Когда в 23 года он был избран в Академию наук и был по этому поводу представлен императору, Наполеон спросил, что он сделал. Академики ответили: «Измерил дугу меридиана в Испании».

Вернемся к алгебре. Хотя большинство свойств эллипса можно красиво доказать чисто геометрически, все же проще для этого использовать алгебру[1] и систему координат.

117. Если провести ось Ox через фокусы эллипса, а ось Oy через его центр (середину *фокального отрезка*), то уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

При этом a, b — это полуоси эллипса.

[1] Этим не пренебрегал и сам Аполлоний.

Если же выбрать оси координат произвольно, то получатся для эллипса (как и для параболы и гиперболы) более сложные уравнения, но они всегда будут уравнениями второго порядка, т. е. уравнениями вида

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0.$$

Верно и обратное, а именно, справедлива классическая

Теорема 11. *Невырожденная кривая второго порядка (т. е. кривая, задаваемая уравнением второго порядка) является либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой. Вырожденная кривая является либо объединением двух прямых, либо просто прямой, либо точкой, а может быть пустым множеством. Произвольная кривая второго порядка однозначно определяется любыми пятью своими точками. Любую другую точку кривой второго порядка можно построить по пяти данным точкам одной линейкой с помощью теоремы Паскаля. Любые две кривые второго порядка либо содержат общую прямую, либо имеют не более четырех общих точек.*

Этьен Безу

Последнее из утверждений теоремы есть частный случай теоремы Безу, в которой речь идет о пересечении кривых произвольного порядка[1].

Покажем, как решать систему двух уравнений второго порядка (и тем самым как доказать упомянутый частный случай теоремы Безу):

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0, \\ b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_1x + b_2y + b_0 = 0. \end{cases}$$

Для этого достаточно выразить, например, x через y и подставить это выражение $x = f(y)$ в любое из двух уравнений. Если $a_{11} = 0$ или $b_{11} = 0$, это делается очевидным образом, например, если $a_{11} = 0$, то

$$x = -\frac{a_{22}y^2 + a_2y + a_0}{a_{12}y + a_1}.$$

Если же $a_{11}b_{11} \neq 0$, то, умножая первое уравнение на $\lambda = -b_{11}/a_{11}$ и складывая со вторым, получаем вместо первого уравнения

$$A_{12}xy + A_{22}y^2 + A_1x + A_2y + A_0 = 0,$$

[1] Это настоящая теорема Безу, а не тот почти очевидный факт, который носит имя Безу в школе.

и полученная система, равносильная исходной, решается с помощью указанной выше подстановки, выполнив которую, получаем вместо второго уравнения уравнение не выше четвертой степени, но от одной неизвестной: $b_4y^4 + \ldots + b_0 = 0$. Это уравнение (если оно не вырождается в тождество $0 = 0$) имеет не более чем 4 решения, которые можно найти, применив любой из известных методов решения уравнений 4-й степени. Эти методы не просты, и мы не будем здесь их приводить, а отошлем читателя к подходящему учебнику алгебры. Конечно, иногда можно решить полученное уравнение элементарно, например, разложив его на множители или угадав корни.

Очевидно, что геометрическая задача о нахождении пересечения двух кривых равносильна алгебраической задаче о решении системы уравнений. Для использования геометрической интерпретации в решении систем нужно уметь быстро понимать, какого типа кривую задает каждое уравнение.

Для этого достаточно знать только квадратичную часть уравнения кривой — *квадратичную форму*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Если она нулевая, то уравнение становится линейным. В противном случае можно после смены знака считать, что $a > 0$ или эта форма имеет вид $2bxy$. Последний случай можно свести к первому заменой переменных вида

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}, \\ y' = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

(геометрически означающей поворот системы координат на 45°), так как в новых переменных квадратичная форма примет вид $b(x^2 - y^2)$. Далее выделяем полный квадрат

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\Big(x + \frac{by}{a}\Big)^2 + y^2\Big(c - \frac{b^2}{a}\Big)$$

и после замены переменных

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{by}{a}, \\ y' = y \end{cases}$$

(которая геометрически означает перекос системы координат), квадратичная форма уравнения принимает вид $ax^2 + by^2$, а линейная часть уравнения остается линейной. Далее делаем замену переменных

$$\begin{cases} x' = x + c_0, \\ y' = y + c_1 \end{cases}$$

(геометрически означающую параллельный перенос системы координат) и получаем уравнение кривой в виде $ax^2 + by^2 = c$, или в виде $ax^2 = y$, или в виде $ax^2 = c$. В предпоследнем случае кривая является параболой, а в последнем вырождается либо в пару параллельных прямых $x = \pm\sqrt{c/a}$, либо в одну прямую $x = 0$, либо в пустое множество при $c/a < 0$.

В первом случае $a^2+b^2>0$, и если $c=0$, то кривая вырождается в объединение двух прямых $\sqrt{a}x \pm \sqrt{(-b)}y = 0$ при $b<0$, или в точку $(x=0,\ y=0)$, если $b>0$. Если же $c\neq 0$, то при $b<0$ получается гипербола, так как гипербола отличается от эллипса и параболы наличием *асимптот* — прямых, к которым она неограничено приближается, их не пересекая (в данном случае это прямые $\sqrt{a}x \pm \sqrt{(-b)}y = 0$), а при $b>0$ получается либо эллипс, так как эллипс отличается от гиперболы и параболы своей ограниченностью, либо пустое множество, если $c<0$.

Мы не будем здесь искать *прямоугольную* систему координат, в которой уравнение кривой принимает указанный в задаче 117 *канонический* вид, так как для понимания взаимного расположения кривых это не нужно, но рассмотрим более простые и полезные на практике вопросы о том, как быстро рисовать кривые второго порядка для некоторых специальных видов их уравнений.

Если уравнение имеет вид

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0, \quad a > 0,$$

то оно задает окружность, точку или пустое множество. Чтобы его нарисовать, нужно преобразовать его к виду

$$(x - c_0)^2 + (y - c_1)^2 = R^2,$$

где

$$c_0 = \frac{b}{2a}, \quad c_1 = \frac{c}{2a}, \quad R^2 = -\frac{4da + b^2 + c^2}{4a^2}.$$

Окружность имеет центр (c_0, c_1) и радиус R.

Иногда уравнение окружности замаскировано радикалами. От них следует избавиться. Например, рассмотрим следующую задачу.

118. Проведите через точку $(7, 3)$ касательные к кривой

$$y = \sqrt{6x - x^2}.$$

Особенно полезна геометрическая интерпретация систем уравнений (не обязательно второго порядка) при решении систем и уравнений с параметрами. Если дано одно уравнение с параметром, то полезно нарисовать его как кривую на плоскости с осями координат Ox и Oa — в этом заключается идея так называемого метода Oxa.

119. Решите уравнение с параметром $x^2 + 2ax + 5a^2 - 4a - 8 = 0$.

120. При каких a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ ax + y = 1 \end{cases}$$

имеет решение?

Можно изображать на плоскости и системы неравенств, как, например, в следующей задаче.

121. При каких a система

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 + a < 0, \\ 2x + a + 6 > 0 \end{cases}$$

имеет решение?

Иногда полезно для решения таких задач разложить их левые части на множители. В следующей задаче это уже сделано.

122. Нарисуйте на плоскости решение системы неравенств

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x - y) < 0, \\ (x^2 + 4y^2 - 4)(xy - 1) > 0. \end{cases}$$

В следующей задаче речь идет о пересечении гипербол, но использование этой идеи не приводит сразу к ее решению. На самом деле здесь помогает одно алгебраическое соображение: надо умножить одно из неравенств на некоторое отрицательное число и сложить со вторым неравенством (в этом случае складывать неравенства можно!), причем подобрать это число так, чтобы сумма оказалась полным квадратом (и тогда полученное неравенство будет определять не внутренность некоторого конического сечения, а полосу между параллельными прямыми).

123*. При каких a система

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geqslant \dfrac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leqslant -2 \end{cases}$$

имеет решение?

В следующей задаче речь идет о пересечении окружности и пары прямых, пересекающихся под прямым углом.

124. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Приведенные примеры показывают, что геометрические соображения облегчают решение алгебраических задач. Но и обратно, алгебраические рассуждения (как показал Декарт) часто облегчают доказательство геометрических теорем. Для примера приведем, следуя замечательной книжке выдающегося немецкого геометра В. Бляшке «Греческая и наглядная геометрия» (М. — Ижевск: РХД, 2001), доказательство следующей теоремы Архимеда. Теорема Архимеда интересна тем, что она одинаково формулируется для всех конических сечений. Многие из свойств конических сечений, приведенных выше, даны только для одного из видов конических сечений, но имеют аналоги и для других видов, иногда более сложно формулируемые.

Теорема 12. *Пусть через точку O, не лежащую на данном коническом сечении K (т. е. эллипсе, гиперболе или параболе), проведены две хорды, пересекающие кривую K в точках A_1, B_1 (первая хорда) и в точках A_2, B_2 (вторая). Тогда отношение*

$$\frac{OA_1 \cdot OB_1}{OA_2 \cdot OB_2}$$

не зависит от точки O, а только от направления хорд.

Для доказательства запишем уравнение кривой в виде

$$K(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0,$$

обозначим (x_0, y_0) координаты точки O, представим координаты произвольной точки первой хорды в виде

$$x = x_0 + r\zeta_1, \quad y = y_0 + r\theta_1,$$

где r — расстояние от этой точки до точки $(x_0, y_0) = O$, $\zeta_1^2 + \theta_1^2 = 1$, и, аналогично, представим координаты произвольной точки второй хорды в виде

$$x = x_0 + r\zeta_2, \quad y = y_0 + r\theta_2, \quad \zeta_2^2 + \theta_2^2 = 1.$$

Для определения расстояний OA_1, OB_1 мы имеем квадратное уравнение

$$K(x_0, y_0) + H(x_0, y_0; \zeta_1, \theta_1)r + (a_{11}\zeta_1^2 + a_{12}\zeta_1\theta_1 + a_{22}\theta_1^2)r^2 = 0.$$

Корни его, согласно теореме Виета, удовлетворяют равенству

$$r_1r_2 = \frac{K(x_0, y_0)}{a_{11}\zeta_1^2 + a_{12}\zeta_1\theta_1 + a_{22}\theta_1^2},$$

откуда имеем, что

$$OA_1 \cdot OB_1 = \frac{K(x_0, y_0)}{a_{11}\zeta_1^2 + a_{12}\zeta_1\theta_1 + a_{22}\theta_1^2}.$$

Аналогично

$$OA_2 \cdot OB_2 = \frac{K(x_0, y_0)}{a_{11}\zeta_2^2 + a_{12}\zeta_2\theta_2 + a_{22}\theta_2^2},$$

следовательно,

$$\frac{OA_1 \cdot OB_1}{OA_2 \cdot OB_2} = \frac{a_{11}\zeta_2^2 + a_{12}\zeta_2\theta_2 + a_{22}\theta_2^2}{a_{11}\zeta_1^2 + a_{12}\zeta_1\theta_1 + a_{22}\theta_1^2},$$

откуда и вытекает теорема Архимеда. Если же K является окружностью, то $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, и из теоремы Архимеда следует, что

$$\frac{OA_1 \cdot OB_1}{OA_2 \cdot OB_2} = 1$$

независимо от направления хорд, т. е. известная теорема о пересекающихся хордах окружности[1]. Ньютон вновь открыл теорему Архимеда и обобщил ее на алгебраические кривые произвольного порядка.

В заключение рассмотрим еще несколько задач, при решении которых алгебра используется совместно с геометрией.

125. При каких λ система

$$\begin{cases} 2x + 3y = \lambda x, \\ 3x + 4y = \lambda y \end{cases}$$

имеет ненулевое решение?

126*. Пусть система

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x, \\ bx + cy = \lambda y \end{cases}$$

при некоторых $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$ $(\lambda_1\neq\lambda_2)$ имеет решения (x_1, y_1), (x_2, y_2) соответственно. Докажите, что $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Предыдущие две задачи позволяют находить у произвольных гипербол и эллипсов *главные оси*, т. е. находить перпендикулярные оси координат, в которых, например, кривая $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$ задается

[1] Впервые доказанная Архитом Тарентским в IV веке до н. э.

уравнением *канонического вида* $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2=d$. Действительно, в качестве λ_i можно взять собственные значения системы

$$\begin{cases} ax+by=\lambda x,\\ bx+cy=\lambda y. \end{cases}$$

Так как λ_i являются корнями уравнения $(a-\lambda)(c-\lambda)-b^2=0$, они всегда существуют, потому что дискриминант этого уравнения неотрицателен:

$$D=(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2\geqslant 0.$$

Предполагаем далее для простоты, что λ_i различны. Пусть (x_i, y_i) — ненулевые решения рассматриваемой системы. Можно их выбрать так, что $x_i^2+y_i^2=1$.

Так как согласно задаче 126 $x_1x_2+y_1y_2=0$, получаем, что $x_2=-y_1$, $y_2=x_1$ (такой вектор (x_2, y_2) будет перпендикулярен вектору (x_1, y_1), поскольку $x_1x_2+y_1y_2=0$, а перпендикулярный вектор длины 1 для данного вектора определяется однозначно). Рассмотрим перпендикулярные оси координат, задаваемые уравнениями $x_ix+y_iy=0$. Координаты относительно этих осей выражаются в виде $X=x_1x+y_1y$, $Y=x_2x+y_2y$. Обратное преобразование имеет вид $x=y_2X+x_2Y$, $y=y_1X+x_1Y$, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Сделав эту замену в квадратичной форме $ax^2+2bxy+cy^2$, получим форму $AX^2+2BXY+CY^2$, где

$$\begin{aligned} A=ay_2^2+cy_1^2+2by_2y_1=ax_1^2+2bx_1y_1+cy_1^2&=\\ =(ax_1+by_1)x_1+(bx_1+cy_1)y_1&=\\ =(\lambda_1x_1)x_1+(\lambda_1y_1)y_1&=\lambda_1(x_1^2+y_1^2)=\lambda_1, \end{aligned}$$

аналогично $C=ax_2^2+2bx_2y_2+cy_2^2=\lambda_2$,

$$\begin{aligned} B=ay_2x_2+cy_1x_1+b(y_2x_1+x_2y_1)&=-ax_1y_1+cx_1y_1+b(x_1^2-y_1^2)=\\ &=(cy_1+bx_1)x_1-(ax_1+by_1)y_1=\lambda_1y_1x_1-\lambda_1x_1y_1=0, \end{aligned}$$

т. е. форму $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2$. Значит, в новых координатах кривая имеет вид $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=d$. Если $\lambda_1\lambda_2>0$ и знаки λ_i и d совпадают, то кривая является эллипсом (противоположными знаки быть не могут, так как тогда кривая вырождается в пустое множество, а мы предполагаем, что кривая невырожденная). Если $\lambda_1\lambda_2<0$, то кривая является гиперболой. Если $\lambda_1\lambda_2=0$, то в невырожденных случаях получается парабола. Тем самым определен тип кривой и найдено ее каноническое уравнение (и главные оси).

Выше было показано, как определить тип кривой более простым способом. Указанный способ сложнее для понимания, но прост в вычислительном смысле, так как согласно теореме Виета $\lambda_1\lambda_2 = ac - b^2$, и вычислять сами λ_i не нужно.

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая уравнением вида

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0.$$

Примеры таких поверхностей уже встречались нам, и уместно сказать о них хотя бы несколько слов.

127. Докажите, что плоское сечение поверхности второго порядка является кривой второго порядка.

Поверхность

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

называется, естественно, эллипсоидом (рис. 18).

Числа a, b, c называются *полуосями эллипсоида*. Если две полуоси совпадают, то получается уже встречавшийся выше эллипсоид вращения. Если все полуоси совпадают, то получается сфера. Произвольный эллипсоид получается из сферы сжатиями к плоскостям координат, подобно тому как эллипс получается из окружности. Разумеется, эллипсоидом может оказаться поверхность второго порядка не с таким простым уравнением (оно называется *каноническим*), так же как и эллипс может задаваться не обязательно каноническим уравнением. Вопрос о том, как неканоническое уравнение преобразовать к каноническому виду (выполнить так называемое *приведение к главным осям*), несколько сложнее, чем в плоском случае, и далее рассматриваться не будет.

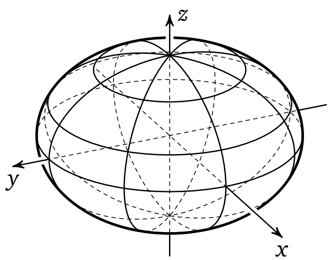


Рис. 18. Эллипсоид

Все сказанное относится и к другим видам поверхностей второго порядка, о которых речь пойдет далее.

128. Докажите, что плоское сечение эллипсоида является эллипсом.

Труднее доказать обратное утверждение.

129*. Поверхность, все плоские сечения которой — эллипсы, является эллипсоидом.

Чуть проще доказать аналог этой теоремы для шара.

130. Тело, все плоские сечения которого — круги, является шаром.

Поверхность
$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$$
называется *эллиптическим параболоидом*. В случае $a = b$ получается уже известный нам параболоид вращения. Название поверхности обусловлено следующим ее свойством.

131. Докажите, что плоское сечение эллиптического параболоида является параболой или эллипсом.

Поверхность
$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$$
нам еще не встречалась. Она называется *гиперболическим параболоидом*.

132. Докажите, что сечение гиперболического параболоида плоскостью $z = c$ является гиперболой, а сечения плоскостями $y = c$ являются параболами.

Гиперболический параболоид (рис. 19) обладает замечательным свойством: это *линейчатая* поверхность (иногда даже говорят, дважды линейчатая поверхность). Через каждую его точку (x_0, y_0) проходят две прямые, целиком лежащие на нем. Эти прямые называются *прямолинейными образующими* этой поверхности. Они принадлежат двум семействам прямолинейных образующих, каждое из которых

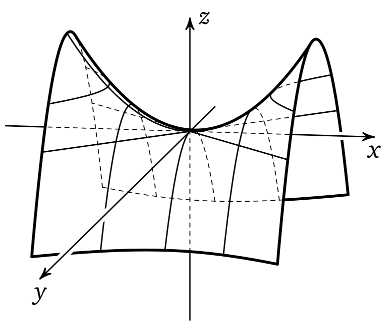


Рис. 19. Гиперболический параболоид

покрывает эту поверхность без просветов и перекрытий. Любые две прямые разных семейств пересекаются, разные прямые одного семейства скрещиваются (не пересекаются), все прямые одного семейства параллельны одной плоскости.

У гиперболического параболоида есть еще одно любопытное свойство.

133. Проверьте, что функция

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

обладает следующим свойством. При любом c функция $f(x, cx)$ одной переменной имеет в нуле максимум или минимум (в зависимости от c), а функция двух переменных $f(x, y)$ не имеет ни максимума, ни минимума даже в окрестности нуля.

Поверхности, подобные графику этой функции, называются *седлообразными*.

Наряду с эллипсоидом естественно рассмотреть поверхности

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Первая из них уже упоминалась выше. Это и есть гиперболоид, ставший названием романа А. Н. Толстого. Он состоит из двух не связанных друг с другом (и симметричных относительно плоскости $x = 0$) частей и называется *двуполостным гиперболоидом* (рис. 20). Расположен он внутри поверхности второго порядка

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0,$$

которая является *конусом*.

134. Если плоскость пересекает обе чаши гиперболоида, то в сечении получается гипербола, а если одну — эллипс или парабола.

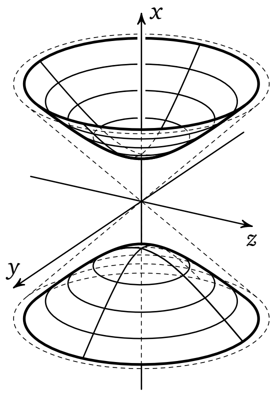


Рис. 20. Двуполостный гиперболоид

Вторая поверхность — *однополостный гиперболоид*, так как эта поверхность связна. Внутри нее расположена поверхность

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0,$$

которая тоже является конусом (рис. 21).

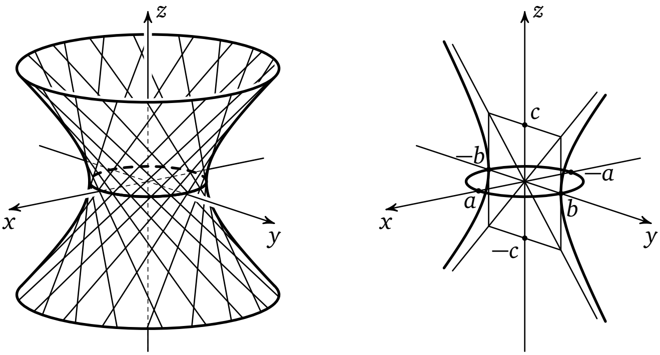


Рис. 21. Однополостный гиперболоид с его прямолинейными образующими и его сечения

135. Сечениями однополостного гиперболоида, так же как и конуса, могут быть и эллипсы, и гиперболы, и параболы.

Эллипсоиды, гиперболоиды и конусы имеют центр симметрии (центром симметрии является начало координат) и иногда называются *центральными поверхностями*. Параболоиды центра симметрии не имеют. Эллипсоиды — единственный вид *ограниченных* поверхностей второго порядка (точки тоже можно считать эллипсоидами).

Однополостный гиперболоид, так же как и гиперболический параболоид, является дважды линейчатой поверхностью. Все его прямолинейные образующие пересекают его *горловой эллипс*, который получается при пересечении гиперболоида с плоскостью $z = 0$.

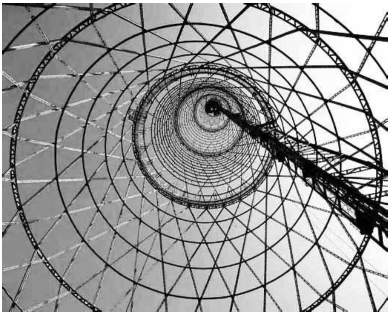
136. Проверьте, что прямые-образующие, проходящие через произвольную точку (x_0, y_0) горлового эллипса, задаются уравнениями

$$x = x_0 - \frac{uay_0t}{b}, \quad y = y_0 + \frac{ubx_0t}{a}, \quad z = ct,$$

где параметр t пробегает все действительные числа, а $u = \pm 1$.

Эти образующие в виде пересекающихся стальных стержней видны на каждом ярусе старой телевизионной башни на Шаболовке, построенной еще в двадцатые годы (тогда на ней были радиоантенны), потому что каждый ярус представляет собой кольцо, вырезанное из гиперболоида.

Эту башню, долгое время бывшую самым высоким сооружением в стране, называют Шуховской, по имени автора ее проекта знаменитого инженера Шухова, так же как Останкинскую телебашню — одно



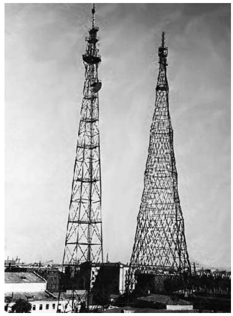


Рис. 22. Шуховская башня — вид снизу и вид сбоку (фото времен строительства)

Рис. 23. Фонтан в Ташкенте — струи воды направлены по прямолинейным образующим гиперболоида

время самое высокое сооружение в мире — называют иногда Никитинской иглой в честь ее автора, выдающегося инженера Никитина. В свое время телевизионная заставка с изображением Шуховской башни, на котором были видны образующие гиперболоида, каждый день появлялась на всех телеэкранах страны.

Поверхностями второго порядка являются также цилиндры, среди которых выделяются эллиптические, гиперболические и параболические, и некоторые вырожденные поверхности, например пара пересекающихся или параллельных плоскостей, но они не представляют особого интереса, хотя возможность вырождения при решении разных задач надо всегда иметь в виду.

Следующую задачу можно решить и алгебраически, но у нее есть красивое геометрическое решение. Однако при его поисках не стоит использовать поверхности второго порядка.

137. (ВМО 83, А. А. Болотов.) Положительные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25, \\ z^2 + \dfrac{y^2}{3} = 9, \\ x^2 + xz + z^2 = 16. \end{cases}$$

Найдите $xy + 2yz + 3zx$.

§ 10. Геометрия помогает алгебре

> Надо лишь делать необходимые измерения на фиксированной поверхности — плоскости, — на которую ложится тень. Декарт дал нам эту плоскость.
>
> *Нил Стивенсон.* Ртуть (2003)

Для решения некоторых задач не надо рисовать график, достаточно только его себе представить. Например, в следующей задаче надо только заметить, что с изменением свободного члена не меняется ось параболы, а вершина скользит вдоль этой оси.

138. (Москва, 1952.) Докажите, что если при любом положительном p все корни уравнения $ax^2+bx+c+p=0$ положительны, то $a=0$.

Рассмотрим для примера еще несколько задач.

139. Найдите все a, при которых уравнения

$$x^2-ax+1=0, \quad x^2-x+a=0$$

имеют хотя бы один общий корень.

Для решения этой задачи достаточно найти точку пересечения двух парабол.

140. Найдите все a, для которых корни уравнения $4x^2-2x+a=0$ заключены между -1 и 1.

Для решения этой задачи достаточно заметить, что ее условие равносильно следующему: для $f(x)=4x^2-2x+a$ должны выполняться неравенства $f(-1) \geqslant 0$, $f(1) \geqslant 0$, и дискриминант должен быть неотрицателен.

Для решения подобных задач с параметром полезно бывает также нарисовать картинку на плоскости Oxa. В ФМШ МГУ (ныне СУНЦ) такой прием по традиции, идущей от А. Н. Землякова, назывался «методом Оха».

141. Для каких a уравнение $(3a+2)x^2+(a-1)x+4a+3=0$ имеет один корень больше 3, а другой — меньше 2?

В этой задаче надо рассмотреть обе возможности для направления ветвей в зависимости от знака $3a+2$, учесть, что дискриминант должен быть неотрицателен и ординаты графика с абсциссами 2 и 3 должны иметь знак, противоположный знаку старшего коэффициента.

142. Нарисуйте на плоскости Opq геометрическое место таких точек (p, q), что уравнение $x^2 + px + q = 0$

- не имеет действительных корней;
- имеет два разных действительных корня;
- имеет кратный корень;
- имеет корнем данное число a;
- имеет ровно один корень на отрезке $[1, 2]$;
- не имеет корней вне отрезка $[1, 2]$.

143. (С.-Петербург, 1995.) У квадратного трехчлена $f(x)$ разность корней не меньше 1995. Докажите, что трехчлен

$$f(x) + f(x+1) + \ldots + f(x+1995)$$

имеет два действительных корня.

144. (Москва, 1953.) Пусть x_1 — корень трехчлена $ax^2 + bx + c$, а x_2 — корень трехчлена $-ax^2 + bx + c$. Докажите, что тогда у трехчлена $(a/2)x^2 + bx + c$ найдется корень, лежащий между x_1 и x_2.

145. (Москва, 1954.) Известно, что модули корней квадратных трехчленов $x^2 + p_ix + q_i$ меньше 1. Докажите, что тем же свойством обладают корни трехчлена $2x^2 + (p_1 + p_2)x + q_1 + q_2$.

146. Докажите, что если трехчлены $ax^2 + 2bx + c$ и $px^2 + 2qx + r$ неотрицательны при всех x, то тем же свойством обладает трехчлен $(a + p)x^2 + 2(b + q)x + c + r$.

147. (Венгрия, 1918.) Докажите, что если трехчлены $ax^2 + 2bx + c$ и $px^2 + 2qx + r$ неотрицательны при всех x, то тем же свойством обладает трехчлен $apx^2 + 2bqx + cr$.

148. (ВМО, 1971.) Докажите, что если

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0,$$

то квадратные трехчлены $x^2 + p_ix + q_i$ имеют только действительные корни и между двумя корнями одного лежит корень другого.

Назовем *уклонением функции* $f(x)$ *от нуля* на отрезке $[a, b]$ максимальное значение модуля этой функции на этом отрезке.

149. Докажите, что уклонение двучлена $x^2 - 1/2$ от нуля на отрезке $[-1, 1]$ равно $1/2$.

Заметим, что точки пересечения графика $y = x^2 - 1/2$ с прямыми $x = \pm 1$ и осью Oy имеют ординаты, по модулю равные $1/2$.

Геометрически довольно очевидно, что все остальные трехчлены вида $x^2 + px + q$ уклоняются от нуля на отрезке $[-1, 1]$ больше, чем на $1/2$ (хотя прямое доказательство этого, основанное на формулах задачи 55, довольно громоздко). Действительно, график любого трехчлена $y = x^2 + px + q$ получается из графика $y = x^2 - 1/2$ путем параллельного переноса. При любом переносе точки пересечения графика с прямыми $x = \pm 1$ и осью Oy изменяются так, что модуль ординаты хотя бы одной из них возрастает. Далее будут приведены и другие доказательства.

150. (Московская студенческая олимпиада.) Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(0)| > 1, \quad f(-1)f(1) > 0.$$

Докажите, что он не имеет корней на отрезке $[-1, 1]$.

Иногда квадратные трехчлены не участвуют явно в формулировке, но естественно возникают в решении, как, например, в следующих задачах.

151. (Москва, 1999.) Докажите, что если $(a+b+c)c<0$, то $b^2>4ac$.

152. (Венгрия, 1939.) Пусть выполнены неравенства

$$a_1a_2 > 0, \quad a_1c_1 \geqslant b_1^2, \quad a_2c_2 \geqslant b_2^2.$$

Докажите, что $(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) \geqslant (b_1 + b_2)^2$.

Следующая трудная задача была придумана И. С. Петраковым, который долгие годы был одним из руководителей команды СССР на международных математических олимпиадах.

153.** (IMO, 1969.) Пусть $x_i > 0$, $x_iy_i > z_i^2$, $i = 1, 2$. Докажите, что

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Выясните, когда имеет место равенство.

§ 11. Графики дробно-рациональных функций и неравенства

...Основные результаты математики чаще выражаются неравенствами, а не равенствами.

Эдвин Беккенбах, Ричард Беллман.
Введение в неравенства (1961)

Графические представления полезны при решении неравенств. Однако построение графиков произвольных дробно-рациональных функций не такое простое дело. Оно описано во многих книгах (иногда специально этому посвященных), и мы не будем касаться этого вопроса, тем более что к теме нашей книжки относится разве только построение графиков *квадратично-рациональных* функций, т. е. функций вида $f(x)/g(x)$, где f и g — квадратные трехчлены.

Обычно для решения полиномиальных и дробно-рациональных неравенств применяется метод интервалов, описанный во многих учебниках и пособиях для поступающих в вузы, поэтому мы здесь его тоже не касаемся.

Научиться строить графики квадратично-рациональных функций несложно, и с этой целью мы предложим читателю несколько задач на построение таких графиков, охватывающих большинство возможных их типов, нарисуем некоторые графики и сделаем несколько замечаний о том, как их строить. Надо сказать, что в последнее время в моду вошло использовать для построения графиков графические микрокалькуляторы. Появляются статьи, в которых учителя делятся своим опытом использования микрокалькуляторов в деле обучения школьников. Не подвергая сомнению полезность микрокалькуляторов в качестве иллюстративного средства, автор считает необходимым и полезным иметь навык «ручного» построения эскизов простейших графиков. Он так же полезен, как и навык «ручного» выполнения арифметических операций.

На мехмате МГУ в течение первого месяца обучения математическому анализу студентов в основном учат строить графики (конечно, не только дробно-рациональных функций). Завершается это обучение контрольной работой, а иногда и начинается с нее, чтобы проверить уровень начальной подготовки и показать самоуверенным выпускникам матклассов, что построение графиков (достаточно сложных функций) не так просто, как это им кажется[1]. В то же время в американских университетах (возможно, не во всех), как слышал автор, контрольная работа по построению графиков проводится на графических микрокалькуляторах.

Переходим, однако, к делу. Рассмотрим вначале пример, в котором корни числителя и знаменателя *перемежаются*.

154. Нарисовать эскиз графика

$$y = \frac{x^2 - 6x + \dfrac{27}{4}}{2(x^2 - 3x + 2)}.$$

Для построения графика надо найти корни числителя и знаменателя (это будут соответственно $3/2$, $9/2$ и $1, 2$), нарисовать вертикальные асимптоты $x = 1$, $x = 2$ (они возникают при стремлении x к корням знаменателя, тогда y стремится к бесконечности), отметить на оси Ox корни числителя $3/2$, $9/2$, график должен пройти через них, и отметить точку, в которой график пересекает ось Oy. Ордината этой точки равна значению функции в нуле, т. е. частному младших коэффициентов (свободных членов) числителя и знаменателя, в данном примере $27/16$. График состоит из трех не связанных друг с другом частей (лежащих в областях $x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x$; см. рис. 24). Левая часть должна при x, стремящемся к минус бесконечности, стремиться

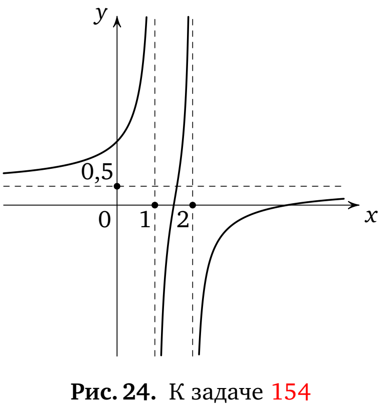


Рис. 24. К задаче 154

[1] Автор вспоминает, что не особенно удачно написал в свое время предварительную контрольную по графикам и не был освобожден от месячного обучения построению графиков (впрочем, из всей нашей группы никто и не был освобожден). Итоговую контрольную, однако, написал на пять, и всего пятерок в группе было две. Впоследствии четверо студентов из нашей группы закончили факультет круглыми отличниками.

к 1/2, так как, выделяя целую часть из дроби, имеем

$$\frac{x^2-6x+\frac{27}{4}}{2(x^2-3x+2)}=\frac{1}{2}+\frac{-3x+\frac{19}{4}}{2(x^2-3x+2)},$$

откуда видно, что дробная часть стремится к нулю (неограниченно к нему приближаясь), когда x стремится к минус бесконечности (т. е. неограничено двигаясь влево вдоль оси Ox). В подобных ситуациях говорят, что левая часть графика стремится к горизонтальной асимптоте $y=1/2$. Аналогично и правая часть графика при x, стремящемся к плюс бесконечности, стремится к той же горизонтальной асимптоте. Для нахождения этой асимптоты не обязательно разлагать дробь, достаточно поделить старший коэффициент числителя на старший коэффициент знаменателя. Так как левая часть графика проходит через найденную точку $(0, 27/16)$ и не проходит через корни числителя, она не меняет знака, и этот ее знак везде положителен, значит, к вертикальной асимптоте $x=1$ она приближается снизу. Так как при переходе через абсциссу асимптоты функция меняет знак, средняя часть графика стремится к ней сверху, проходит через ось Ox в точке $3/2$ (корне числителя и поэтому нуле функции) и, так как второго нуля на интервале $(1, 2)$ нет, далее поднимается вверх и стремится ко второй асимптоте $x = 2$ снизу. Значит, правая часть стремится к ней сверху, т. е. график с ростом x возрастает, пересекает ось Oy в точке $9/2$, и стремится к горизонтальной асимптоте $y = 1/2$ снизу (так как найденная дробная часть при $x > 2$ отрицательна). Можно, конечно, провести более тонкое исследование графика, например доказать, что все его ветви монотонно возрастают (но в целом всю функцию монотонной назвать никак нельзя), но мы ограничимся сделанным.

Заметим, что при небольшом изменении одного из коэффициентов получаем график

$$y=\frac{x^2-6x+8}{2(x^2-3x+2)}=\frac{x-4}{2x-1},$$

вырождающийся в гиперболу (в которой нужно выколоть точку с абсциссой 2). Такие явления происходят при совпадении корней у числителя и знаменателя.

Конечно, графики дробно-квадратичных функций могут выглядеть и по-другому, но строятся они с помощью аналогичных рассуждений. Рассмотрим пример, в котором корни числителя лежат между корнями знаменателя.

155. Нарисовать эскиз графика

$$y = \frac{x^2 - 3x + \dfrac{17}{8}}{2(x^2 - 3x + 2)}.$$

В этой задаче средняя ветвь графика уже не монотонна, она пересекает ось Ox в двух точках и к обеим асимптотам стремится сверху, а правая часть графика убывает, стремясь к горизонтальной асимптоте сверху (рис. 25).

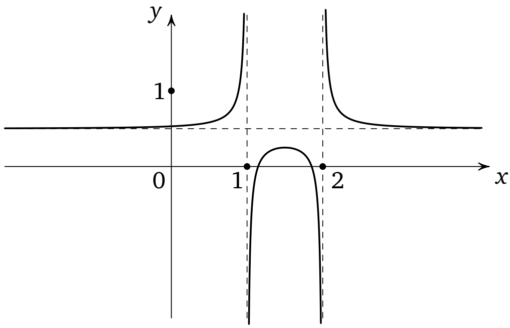


Рис. 25. К задаче 155

Заметим, что при небольшом изменении одного из коэффициентов получаем график

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2(x^2 - 3x + 2)} = \frac{1}{2},$$

вырождающийся в прямую линию (в которой нужно выколоть две точки с абсциссами $1, 2$).

Еще один вид графика получится, когда оба корня числителя лежат правее или левее корней знаменателя.

156. Нарисовать эскиз графика

$$y = \frac{x^2 - 8x + 15}{2(x^2 - 3x + 2)}.$$

Отличие этого графика от предыдущего в том, что средняя часть не поднимается выше оси Ox, а правая часть, убывая, опускается ниже оси Ox в интервале между корнями числителя, потом опять поднимается выше этой оси и стремится снизу к горизонтальной асимптоте (рис. 26).

Графики функций, у которых у числителя один корень или вообще их нет, при наличии двух корней у знаменателя выглядят приблизительно так же. В случае же, когда у знаменателя только один

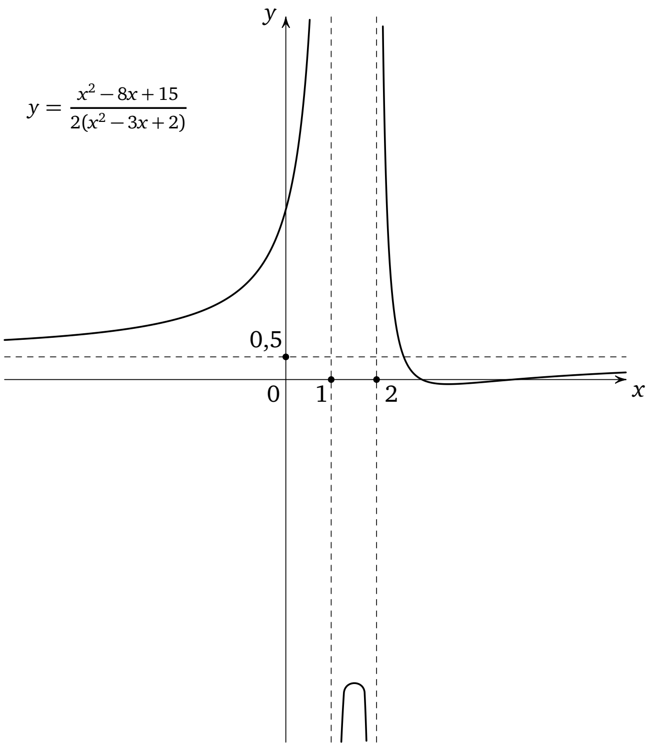


Рис. 26. К задаче 156

корень, вид графика существенно меняется. В этом случае он имеет только одну вертикальную асимптоту и состоит из двух частей. Так как при переходе через этот корень знак знаменателя не меняется, обе ветви графика стремятся к вертикальной асимптоте одинаково — сверху или снизу в зависимости от знака числителя в корне знаменателя. Если этот знак отрицательный, то корень знаменателя лежит между корнями числителя и обе ветви стремятся к вертикальной асимптоте сверху, поднимаются выше оси Ox, пересекая ее каждая в своем корне числителя, а потом обе ветви стремятся к общей горизонтальной асимптоте. Например, как в следующей задаче.

157. Нарисовать эскиз графика $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x + 1}$. (См. рис. 27.)

Если же знак этот положительный, значит, оба корня числителя лежат либо левее, либо правее корня знаменателя, в этом случае обе ветви стремятся к вертикальной асимптоте снизу, одна из ветвей

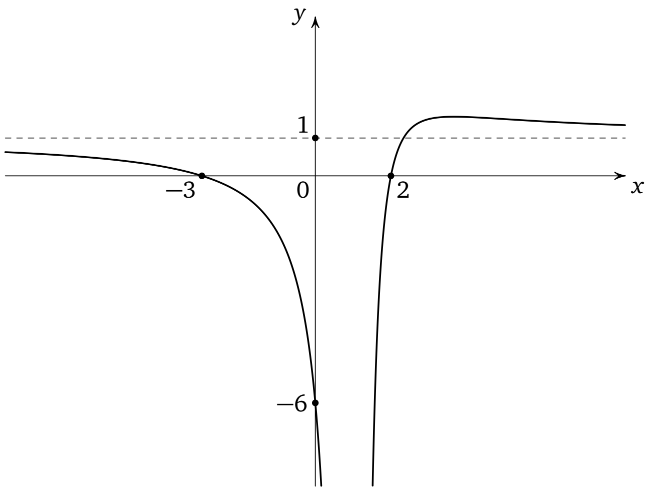


Рис. 27. К задаче 157

лежит выше оси Ox, а другая пересекает ее в двух точках (корнях числителя), как, например, в следующей задаче.

158. Нарисовать эскиз графика $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 6x + 3}$. (См. рис. 28.)

Случай, когда числитель тоже имеет один корень или вообще не имеет корней, по виду графика принципиально не отличается от рассмотренного.

Наконец, возможен случай, когда знаменатель корней не имеет. Тогда график не имеет вертикальных асимптот и состоит из одной ветви. Но горизонтальная асимптота у него по-прежнему есть. Его нули, как всегда, совпадают с корнями числителя. Вид графика зависит в основном от числа этих корней. В отличие от других случаев, в этом случае график имеет точки и максимума, и минимума (остальные типы графиков могут иметь только один минимум или один максимум или вообще их не иметь). Для более тонкого исследования графика полезно уметь находить экстремумы функции. Примеры, как это делать, используя свойства квадратного трехчлена, уже приводились выше.

Укажем еще один прием. Фактически он повторяет одну из возможных процедур построения графика данной функции. Найдем для примера экстремумы функции

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x + 3}.$$

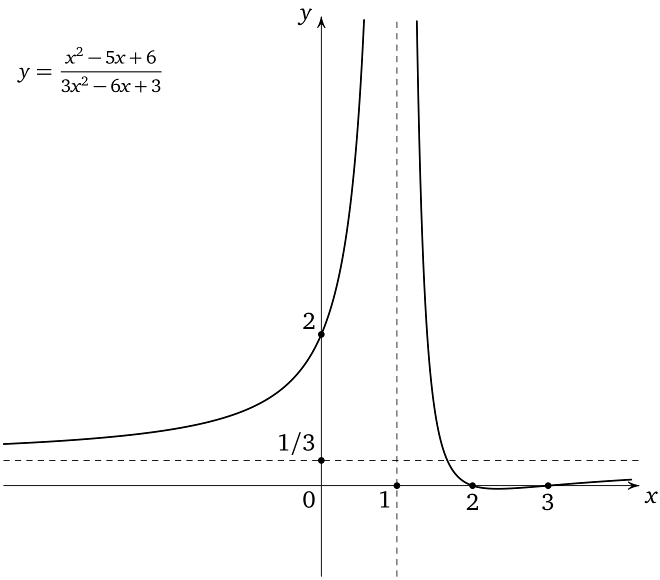


Рис. 28. К задаче 158

Сначала выделим целую часть:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}}{2x^2 - x + 3}.$$

Ясно, что задача свелась к поиску экстремумов функции

$$y = \frac{3x-7}{4x^2-2x+6}.$$

А эта задача равносильна поиску экстремумов у функции

$$y = \frac{4x^2-2x+6}{3x-7}.$$

Вводя новую переменную $z = 3x - 7$, сводим задачу к поиску экстремумов у функции

$$\frac{4\frac{(z+7)^2}{9} - 2\frac{z+7}{3} + 6}{z} = \frac{\frac{4}{9}z^2 + \frac{50}{9}z + \frac{236}{9}}{z} = \frac{4}{9}z + \frac{236}{9z} + \frac{50}{9}.$$

Эта задача сводится к поиску экстремумов у функции

$$\frac{4}{9}z + \frac{236}{9z},$$

а значит, и у функции
$$z + \frac{59}{z}.$$
Точки экстремума $z = \pm\sqrt{59}$, в силу неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Осталось еще научиться рисовать эскизы графиков дробно-квадратичных функций, в которых знаменатель вырождается в линейный двучлен, т. е. графиков функций вида
$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}.$$
Они выглядят проще и менее разнообразны.

Начнем с вырожденного случая, когда знаменатель делит числитель, например в случае
$$y = \frac{x^2 + 3x + 2}{3x + 3}.$$
Тогда после сокращения дробь превращается в линейную функцию, в рассматриваемом примере равную $(x + 2)/3$. График будет прямой линией, но в ней надо не забыть выколоть точку с абсциссой $x = -1$, так как при этом значении x исходная функция не определена.

В остальных случаях график имеет одну вертикальную асимптоту $x = -e/d$, где $-e/d$ — корень знаменателя, и состоит из двух ветвей. При сдвиге вдоль оси Ox на величину e/d эта асимптота совмещается с осью Oy, а график превращается в график функции вида
$$\frac{ax^2 + bx + c}{dx} = Ax + \frac{C}{x} + B.$$
Таким образом, все графики рассматриваемого вида получаются из графиков функций $y = ax + b + c/x$ сдвигами вдоль осей координат (т. е. параллельным переносом на подходящий вектор). Так как при x, стремящемся к бесконечности (в любом из двух направлений), последнее слагаемое стремится к нулю, обе ветви функции будут стремится к графику линейной функции $y = ax + b$, т. е. к прямой, которая является тем самым *наклонной асимптотой*.

Для того чтобы быстро нарисовать график рассматриваемого вида, можно, найдя корень $-e/d$ знаменателя, провести через него вертикальную асимптоту, потом, выделив из дроби
$$\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = px + q + \frac{r}{dx + e}$$
целую часть, нарисовать наклонную асимптоту $y = px + q$ (она, конечно, совпадет с вычисленной выше другим способом наклонной

асимптотой, а каким способом ее быстрее вычислять — дело вкуса), потом нарисовать обе ветви графика так, чтобы они стремились к асимптотам. Так как есть две разных возможности это сделать, нужно выбрать одну из них. Это проще всего сделать, вычислив корни числителя, тогда ветви надо проводить через эти корни.

Если вертикальная асимптота лежит между корнями числителя, то каждая из ветвей проходит через свой корень, и эскиз тем самым однозначно рисуется; если же оба корня, возможно, совпадающие друг с другом, лежат по одну сторону от вертикальной асимптоты, то одна из ветвей проходит через эти оба корня, и поэтому график выглядит немного по-другому; вторая ветвь тогда целиком лежит выше или ниже оси абсцисс, а как именно, легко понять, заметив, что обе ветви стремятся к асимптотам с разных сторон.

Если же корней нет, то одна из ветвей лежит выше, а одна — ниже оси абсцисс, и чтобы выяснить точно, какая именно где лежит, достаточно вычислить точку, в которой график пересекает ось Oy, а это, очевидно, точка $(0, c/d)$, и провести через нее соответствующую ветвь графика.

Для большей реалистичности можно еще у каждой ветви найти экстремум (у одной максимум, а у другой — минимум), если они есть. Для этого достаточно вычислить экстремум функции $y = Ax + C/x$, где $AC > 0$. В случае $AC < 0$ экстремумов, как можно проверить, нет.

Прочитавший все это уже, вероятно, заметил, что построенный график очень похож на косо расположенную гиперболу. Это, конечно, так и есть, потому что график функции $y = ax + b/x$ совпадет с невырожденной кривой второго порядка $yx = ax^2 + b$, которая может быть только гиперболой. Если сделать замену координат $x = X$, $y = Y + aX$, то уравнение этой гиперболы запишется в привычном виде $XY = b$ (правда, оси координат не будут взаимно перпендикулярны). Найти ее фокусы (и главные оси) — довольно трудная в общем случае задача, и мы ее здесь рассматривать не будем. Для закрепления навыков предлагаем следующую задачу.

159. Нарисовать эскизы графиков

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{3(x+2)}, \quad y = \frac{x^2 + 3x + 5}{3(x+1)}.$$

В заключение предлагаются несколько задач, для решения которых полезно уметь строить эскизы таких графиков. Обычно задачи на решение неравенств менее интересны по сравнению с задачам на доказательство неравенств. Предлагаемые далее задачи способны поколебать это мнение.

160. Доказать, что при $c_1, c_2, c > 0$ таких, что $c_1 + c_2 = 1$, множество решений неравенства

$$\frac{c_1}{x - a_1} + \frac{c_2}{x - a_2} \geqslant c$$

есть объединение попарно непересекающихся интервалов суммарной длины $1/c$.

161. Доказать, что для любых $a < c < b$ и $d > 0$ множество решений неравенства

$$\frac{1}{|x - c|} \leqslant \frac{d}{|(x - a)(x - b)|}$$

есть объединение попарно непересекающихся интервалов суммарной длины $2/d$.

В дальнейшем нам понадобится следующее определение, хотя здесь можно было бы обойтись и без него. *Производной* многочлена

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

называется многочлен

$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n - 1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Далее совсем не обязательно будет понимать, что это та же самая производная, которая изучается в старших классах.

162. Квадратный трехчлен $p(x)$ имеет два различных действительных корня. Доказать, что для любого $c > 0$ множество решений неравенства $p'(x)/p(x) > c$ есть объединение двух попарно непересекающихся интервалов суммарной длины $2/c$.

163*. Пусть квадратный трехчлен $p(x)$ имеет 2 различных корня в интервале (a, b). Доказать, что для любого $c > 0$ множество решений неравенства

$$\left|\frac{p'(x)}{p(x)}\right| \leqslant \frac{c}{|(x - a)(x - b)|}$$

есть объединение попарно непересекающихся интервалов суммарной длины $4/c$.

164*. (IMO, 1988.) Докажите, что множество решений неравенства

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2} + \ldots + \frac{70}{x - 70} \geqslant \frac{5}{4}$$

является объединением полуинтервалов с суммой длин 1988.

Предыдущие задачи являются частными случаями следующих теорем.

165.** Для любых положительных c_i и c множество решений неравенства

$$\frac{c_1}{x-a_1}+\ldots+\frac{c_n}{x-a_n}\geqslant c$$

есть объединение конечного числа попарно непересекающихся интервалов суммарной длины $(c_1+\ldots+c_n)/c$.

166.** Пусть многочлен $p(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Тогда для любого $c>0$ множество решений неравенства $p'(x)/p(x)>c$ есть объединение конечного числа попарно непересекающихся интервалов суммарной длины n/c (эта теорема предлагалась в качестве задачи на московской студенческой олимпиаде).

167.** Пусть многочлен $p(x)$ степени n имеет n различных действительных корней в интервале (a,b). Тогда для любого $c>0$ множество решений неравенства

$$\left|\frac{p'(x)}{p(x)}\right|\leqslant\frac{c}{|(x-a)(x-b)|}$$

есть объединение конечного числа попарно непересекающихся интервалов суммарной длины $2n/c$.

В заключение еще одна задача, похожая на предыдущие.

168*. (С.-Петербург, 1996.) Пусть для положительных a, b квадратный трехчлен x^2-ax+b имеет дискриминант D, $0<D<2a$. Докажите, что множество решений неравенства

$$x^4-(a+1)x^2-x\sqrt{x}+b\leqslant 0$$

является объединением двух отрезков с суммой длин 2.

§ 12. Углы между трехчленами и неравенство Коши — Буняковского

Имейте в виду, что на это существует еще и седьмое доказательство, и уж самое надежное! И сейчас оно будет вам предъявлено.

М. А. Булгаков. Мастер и Маргарита

Неравенством Коши — Буняковского называется неравенство

$$(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2).$$

Одно из наиболее известных его доказательств основано на умелом использовании квадратного трехчлена. Приведем это доказательство. Рассмотрим многочлен от переменной λ, определяемый равенством

$$(x_1+\lambda y_1)^2+\ldots+(x_n+\lambda y_n)^2$$

(числа x_i, y_i играют роль «параметров»). Раскрывая скобки, запишем его в виде

$$(y_1^2+\ldots+y_n^2)\lambda^2+2(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)\lambda+(x_1^2+\ldots+x_n^2),$$

причем ясно, что это просто квадратный трехчлен (если старший коэффициент нулевой, то это будет уже не трехчлен, но в этом случае все $y_i=0$, тогда и следующий коэффициент нулевой, но неравенство тогда очевидно обращается в равенство и доказывать нечего). Представление его в виде суммы квадратов показывает, что этот трехчлен неотрицателен при любом λ (кстати, в § 17 такого типа трехчлены нам еще встретятся). Значит, он не может иметь двух разных действительных корней (тогда между ними он был бы отрицательным), значит, его дискриминант $D=b^2-4ac\leqslant 0$. Подставляя в это неравенство вместо a, b, c коэффициенты трехчлена, получаем (после сокращения на 4) неравенство, которое требовалось доказать:

$$(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2-(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)\leqslant 0.$$

Условием его обращения в равенство является равенство нулю дискриминанта, значит, наличие единственного корня λ_0 у рассматриваемого трехчлена, а представление его в виде суммы квадратов показывает, что λ_0 будет корнем тогда и только тогда, когда $x_i+\lambda_0y_i=0$

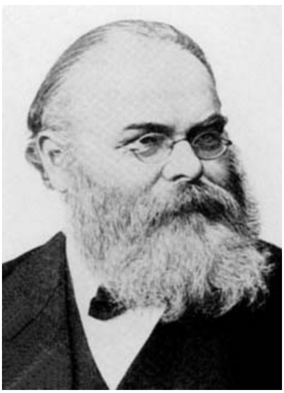
при всех i, другими словами, когда все дроби x_i/y_i равны друг другу (за возможным исключением тех, которые имеют вид $0/0$).

Для тех, кто видит это доказательство в первый раз, оно покажется каким-то трюком (чем оно, конечно, и является). Непонятно, как догадаться рассмотреть сумму квадратов

$$(x_1 + \lambda y_1)^2 + \ldots + (x_n + \lambda y_n)^2.$$

Можно, конечно, сказать, что подобные выражения возникают в так называемом методе наименьших квадратов, но это вряд ли чем поможет (особенно тем, кто не знает, что это за метод). Вместо рассуждений о том, как можно было бы додуматься до этого доказательства, мы приведем несколько других доказательств, иногда похожих, а иногда и совсем не похожих на это (но будем излагать их уже не с такими подробностями).

Следующее доказательство является просто обобщением предыдущего, при этом и само неравенство будет обобщено. С непривычки это обобщение выглядит странноватым, но именно в таком виде неравенство Коши стало одним из самых популярных неравенств в математике (в зарубежной литературе — часто под именем неравенства Коши — Шварца, а иногда и просто Шварца).



Герман Амандус Шварц

Вот это обобщение. Пусть V — некоторое множество, элементы которого будем называть векторами, на котором определены операция сложения векторов и операция умножения вектора на данное число. Например, в качестве V можно взять множество всех упорядоченных числовых наборов (n-мерных векторов) $(x_1, \ldots, x_n)$, операцию сложения определить так:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

а операцию умножения на число — так:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Функцию $f(x, y)$, определенную для любых упорядоченных пар векторов $x, y \in V$, назовем *скалярным произведением*, если она удовлетворяет следующим свойствам: *линейности*, т. е. для любых векторов

$x, y, z \in V$ и любого числа λ выполняется тождество

$$f(x+\lambda y, z) = f(x, z) + \lambda f(y, z),$$

симметричности $f(x, y) = f(y, x)$ и *положительной определенности* $f(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ (через 0 обозначается нулевой вектор, который определяется условием $x + 0 = 0 + x = x$ и предполагается существующим в V; проверьте сами, что если он существует, то определен однозначно, а также что он удовлетворяет тождеству $f(x, 0) = 0$, где нуль справа — это не вектор, а число). Примером скалярного произведения является функция

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

(проверьте это). Обобщенное неравенство Коши — Буняковского выглядит так. Если функция $f(x, y)$ — скалярное произведение, то для любых векторов $x, y \in V$

$$f(x, y)^2 \leqslant f(x, x) f(y, y).$$

Для доказательства заметим, что

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, y) &= \lambda f(x, y),\\
f(x, \lambda y) &= f(\lambda y, x) = \lambda f(y, x) = \lambda f(x, y),\\
f(x+y, z) &= f(x, z) + f(y, z),\\
f(x, y+z) &= f(y+z, x) = f(y, x) + f(z, x) = f(x, y) + f(x, z),\\
f(x+\lambda y, x+\lambda y) &= f(x+\lambda y, x) + f(x+\lambda y, \lambda y) =\\
&= f(x, x) + \lambda f(x, y) + f(x, \lambda y) + f(\lambda y, \lambda y) =\\
&= f(x, x) + 2\lambda f(x, y) + \lambda f(y, \lambda y) =\\
&= f(x, x) + 2\lambda f(x, y) + \lambda^2 f(y, y) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

значит, дискриминант квадратного трехчлена $D = b^2 - 4ac \leqslant 0$, т. е.

$$f(x, y)^2 \leqslant f(x, x) f(y, y).$$

Равенство возможно, лишь когда дискриминант нулевой, т. е. трехчлен имеет единственный корень λ_0, но тогда $f(x+\lambda_0 y, x+\lambda_0 y) = 0$, откуда $x + \lambda_0 y = 0$, т. е., как говорят, векторы x, y *линейно зависимы* (случай $y = 0$, в котором трехчлен вырождается, приводит неравенство к равенству и тоже покрывается найденным условием линейной зависимости). Дает ли это обобщение что-нибудь новое, по сравнению с уже известным нам неравенством, которое получается подстановкой вместо $f(x, y)$ функции

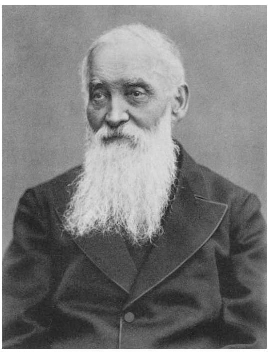
$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n?$$

Дает — например, для тех, кто знает, что такое интеграл, в качестве $f(x, y)$ можно взять $\int_a^b x(t)y(t)\,dt$, если в качестве векторов $x = x(t)$, $y = y(t)$ взять непрерывные функции, определенные на отрезке $[a, b]$. Тогда общее неравенство Коши — Буняковского — Шварца превращается в неравенство для интегралов

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_a^b x(t)^2\,dt \int_a^b y(t)^2\,dt,$$

которое впервые было получено академиком Петербургской академии наук В. Я. Буняковским.

Приведем еще одно доказательство, идея которого основана на геометрических соображениях (но само доказательство будет, конечно, чисто алгебраическим). Будем рассматривать, как и выше, векторное пространство[1] V со скалярным произведением $f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, которое для краткости далее обозначаем $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Если $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, то векторы $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ будем называть *ортогональными* (это принятый в алгебре синоним геометрического термина *перпендикулярный*).



Василий Яковлевич Буняковский

Далее описываем доказательство в геометрических терминах, но это описание можно рассматривать как некоторые пояснения для чисто алгебраических манипуляций, из которых строится доказательство. Будем представлять векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ как выходящие из начала координат. Опустим перпендикуляр из конца вектора $\mathbf{x}$ на вектор $\mathbf{y}$, точнее, на прямую, на которой лежит $\mathbf{y}$. Так как точки этой прямой представляются концами векторов $\lambda\mathbf{y}$ (вектор $\lambda\mathbf{y}$ можно представлять себе как растяжение вектора $\mathbf{y}$ в λ раз), искомая проекция является концом вектора

[1] Оно не было полностью определено, но это нам не помешает, мы только потребуем, чтобы в нем выполнялись тождества $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$, $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$, $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, из последних можно вывести, что $0 \cdot \mathbf{v} = 0$. Все это в одном месте далее понадобится.

$\lambda\mathbf{y}$ (далее вместо «конец вектора» пишем просто «вектор»). При этом вектор $\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}$ должен быть перпендикулярен $\mathbf{y}$, т. е. $(\mathbf{y},\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y})=0$ (здесь и далее $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ — это обозначение для $\mathbf{x}+(-1)\mathbf{y}$), откуда

$$0=(\mathbf{y},\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})-(\mathbf{y},\lambda\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})-\lambda(\mathbf{y},\mathbf{y}),$$

значит, $\lambda=(\mathbf{y},\mathbf{x})/(\mathbf{y},\mathbf{y})$ (в доказательстве, естественно, предполагается, что $\mathbf{y}\neq 0$.) Как известно, длина проекции вектора не больше длины самого вектора. Под длиной произвольного вектора $\mathbf{v}$ понимаем $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{(\mathbf{v},\mathbf{v})}$ (можно проверить, что $\|\mathbf{v}\|\geqslant 0$ и равенство возможно лишь для $\mathbf{v}=0$). Для доказательства заметим, что $\mathbf{x}=\mathbf{z}+\lambda\mathbf{y}$, где $\lambda=(\mathbf{y},\mathbf{x})/(\mathbf{y},\mathbf{y})$, $\mathbf{z}=\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}$, (потому что $\mathbf{x}=\mathbf{z}+\lambda\mathbf{y}=\mathbf{x}+(\lambda+(-\lambda))\mathbf{y}=$ $=\mathbf{x}+0\mathbf{y}=\mathbf{x}$), откуда

$$\|\mathbf{x}\|^2=(\mathbf{x},\mathbf{x})^2=(\mathbf{z}+\lambda\mathbf{y})^2=(\lambda\mathbf{y},\lambda\mathbf{y})+(\mathbf{z},\mathbf{z})+2(\lambda\mathbf{y},\mathbf{z})=\|\lambda\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{z}\|^2,$$

так как $(\mathbf{z},\mathbf{y})=0$, значит,

$$\|\mathbf{x}\|\geqslant\|\lambda\mathbf{y}\|=|\lambda|\cdot\|\mathbf{y}\|=\frac{\|\mathbf{y}\|\cdot|(\mathbf{y},\mathbf{x})|}{(\mathbf{y},\mathbf{y})}=\frac{\|\mathbf{y}\|\cdot|(\mathbf{y},\mathbf{x})|}{\|\mathbf{y}\|^2}=\frac{|(\mathbf{y},\mathbf{x})|}{\|\mathbf{y}\|},$$

откуда

$$\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\geqslant|(\mathbf{y},\mathbf{x})|,$$

и, возводя почленно последнее неравенство в квадрат, получаем неравенство Коши — Буняковского (впрочем, и вариант с длинами векторов также называется неравенством Коши — Буняковского). В равенство оно обращается, когда $\|\mathbf{z}\|=0$, т. е. когда $0=\mathbf{z}=\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}$, что равносильно условию *коллинеарности векторов* $\mathbf{x},\mathbf{y}$ (и условию их линейной зависимости) $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}$. Таким образом, геометрический смысл неравенства Коши — Буняковского в том, что ортогональная проекция вектора (на другой вектор) не длиннее самого вектора.

Заметим, что по ходу доказательства фактически мы доказали теорему Пифагора, точнее, ее алгебраический аналог: при $(\mathbf{v},\mathbf{w})=0$

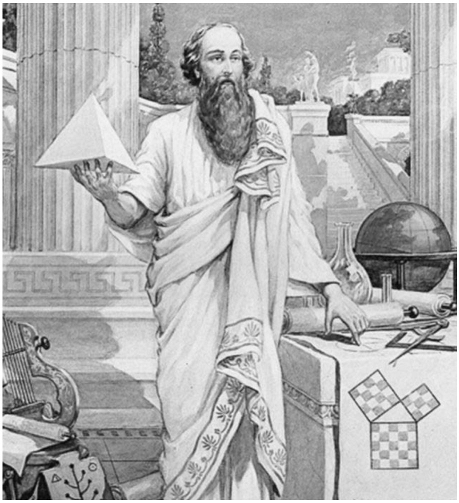
$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2=\|\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{w}\|^2.$$

Действительно,

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2=(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{v},\mathbf{v})+(\mathbf{w},\mathbf{w})+2(\mathbf{v},\mathbf{w})=$$
$$=(\mathbf{v},\mathbf{v})+(\mathbf{w},\mathbf{w})=\|\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{w}\|^2.$$

Эту теорему легко обобщить по индукции и на случай n попарно ортогональных векторов: если $(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)=0$ при любых $i\neq j$, то

$$\|\mathbf{v}_1+\ldots+\mathbf{v}_n\|^2=\|\mathbf{v}_1\|^2+\ldots+\|\mathbf{v}_n\|^2.$$



Пифагор

Для выполнения шага индукции достаточно заметить, что

$$(\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n) + \ldots + (\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n) = 0.$$

Из неравенства Коши — Буняковского легко следует также неравенство

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|,$$

называемое неравенством треугольника. Действительно,

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leqslant \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| = (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2.$$

Как и теорему Пифагора, неравенство треугольника можно обобщить на случай n векторов:

$$\|\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n\| \leqslant \|\mathbf{v}_1\| + \ldots + \|\mathbf{v}_n\|.$$

Доказательство проводится по индукции, и с выполнением шага индукции никаких проблем не возникает.

Применяя неравенство треугольника к пространству со скалярным произведением $x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, получаем

$$\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2} \geqslant \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2}.$$

Это неравенство, конечно, можно вывести не из обобщенного неравенства треугольника, а непосредственно из обычного неравенства

Коши по той же схеме, как выводилось обобщенное неравенство. При $n = 2$ его действительно можно интерпретировать как неравенство треугольника для треугольника ABC, а именно, если вершина A — это начало координат, а вершины B, C — это точки (x_1, x_2), $(-y_1, -y_2)$, то это неравенство можно записать в виде $OA + OB \geqslant AB$, если воспользоваться известной формулой расстояния между точками на плоскости.

Из неравенства $\|\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n\| \leqslant \|\mathbf{v}_1\| + \ldots + \|\mathbf{v}_n\|$ легко вывести, например, такое неравенство:

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+\ldots+\sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2}\geqslant\sqrt{x^2+y^2},$$

которое геометрически интерпретируется как утверждение о том, что n-звенная ломаная не короче отрезка, соединяющего ее концы.

Из неравенства Коши можно вывести много других неравенств того же типа, например, уже встречавшееся нам неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим.

169. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Из неравенства Коши можно получить следующее неравенство при положительных y_i:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + \ldots + y_n}.$$

Действительно, если его переписать в виде

$$(y_1 + \ldots + y_n)\left(\frac{x_1^2}{y_1} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n}\right) \geqslant (x_1 + \ldots + x_n)^2,$$

то оно получается из неравенства Коши заменой переменных

$$Y_i = \sqrt{y_i}, \quad X_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}.$$

Так как эта замена обратима, в свою очередь неравенство Коши можно получить из этого неравенства (сделав замену $y_i = Y_i^2$, $x_i = X_i Y_i$), но только при положительных y_i. Впрочем, если неравенство Коши доказано при положительных x_i, y_i, то оно будет верно и при любых x_i, y_i, так как

$$\begin{aligned}(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2 = |x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n|^2 \leqslant \\ \leqslant (|x_1| \cdot |y_1| + \ldots + |x_n| \cdot |y_n|)^2 \leqslant (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2).\end{aligned}$$

170. Докажите неравенство

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n}\geqslant\frac{(x_1+\ldots+x_n)^2}{y_1+\ldots+y_n}$$

непосредственно (и тем самым получите еще одно доказательство неравенства Коши).

Из неравенства задачи 170 подстановкой $y_i=1$ легко получить неравенство задачи 169, а подстановкой $x_i=1$ — неравенство

$$\frac{1}{y_1}+\ldots+\frac{1}{y_n}\geqslant\frac{n^2}{y_1+\ldots+y_n}.$$

171. Выведите из результата задачи 170 неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим

$$\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}\geqslant\frac{n}{\dfrac{1}{y_1}+\ldots+\dfrac{1}{y_n}}.$$

Еще одно доказательство неравенства Коши можно получить, представляя разность

$$(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)-(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2$$

в виде суммы квадратов. Неравенство тогда становится очевидным. Но как разложить эту квадратичную форму в сумму квадратов? При $n=2$ это легко:

$$(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)-(x_1y_1+x_2y_2)^2=(x_1y_2-x_2y_1)^2.$$

Это тождество было известно еще Фибоначчи. Попробуйте сами обобщить его на случай $n=3$. Тогда вы оцените замечательное тождество Лагранжа из следующей задачи.

172. Докажите, что

$$(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)-(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2=\sum_{i<j}(x_iy_j-x_jy_i)^2.$$

Доказательство с помощью тождества Лагранжа является наиболее прямым из известных, но случай превращения неравенства в равенство в нем не так уж и очевиден.

Еще одно простое доказательство неравенства Коши можно получить, используя его *однородность*. Положим

$$X^2=x_1^2+\ldots+x_n^2,\quad Y^2=y_1^2+\ldots+y_n^2,$$

поделим обе части неравенства на X^2Y^2 и, введя обозначения $X_i = x_i/X$, $Y_i = y_i/Y$, перепишем полученное неравенство в виде

$$X_1Y_1 + \ldots + X_nY_n \leqslant 1.$$

Заметим еще, что новые переменные удовлетворяют равенствам

$$X_1^2 + \ldots + X_n^2 = 1, \quad Y_1^2 + \ldots + Y_n^2 = 1.$$

Поэтому, так как $X_iY_i \leqslant (X_i^2 + Y_i^2)/2$, суммируя эти неравенства и учитывая выписанные соотношения, получаем нужное нам неравенство.

Приведенное выше доказательство интересно тем, что по той же схеме, но с использованием другой верхней оценки для X_iY_i, можно доказать обобщение неравенства Коши — неравенство Гёльдера:

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \leqslant (x_1^p + \ldots + x_n^p)^{1/p}(y_1^q + \ldots + y_n^q)^{1/q},$$

в котором $1/p + 1/q = 1$, числа $p, q > 1$ могут быть произвольными (даже иррациональными), но тогда, конечно, $x_i, y_i \geqslant 0$. Неравенство Коши получается из неравенства Гёльдера при $p = q = 2$.

На этом мы закончим обзор различных доказательств и вернемся к геометрической интерпретации неравенства Коши. Если в качестве пространства V взять множество всех обычных (двумерных) векторов, а в качестве скалярного произведения $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ обычное скалярное произведение векторов, которое, как известно, равно $|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\varphi$ — произведению длин векторов на косинус угла между ними (тот факт, что это скалярное произведение удовлетворяет всем условиям, которые мы наложили на использованное выше обобщенное, или абстрактное, скалярное произведение, легко проверить непосредственно), то неравенство Коши станет равносильным неравенству $|\cos\varphi| \leqslant 1$, т. е. фактически очевидным. Однако для других скалярных произведений, конечно, считать его очевидным на основе приведенных соображений нельзя, так как понятие угла между векторами там может и не быть. Но в этом случае можно определить угол между векторами $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ в любом абстрактном векторном пространстве V как такое число φ в пределах от 0 до π (или, если хотите, до 180°), что

Отто Гёльдер

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})(\mathbf{w}, \mathbf{w})}}.$$

Для того чтобы это определение было корректным, нужно, чтобы

$$\frac{|(\mathbf{v},\mathbf{w})|}{\|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|}\leqslant 1$$

(иначе такого угла φ не существует). Но неравенство Коши — Буняковского гарантирует нам это. Таким образом, мы можем измерять углы между абстрактными векторами. Например, в качестве трехмерных векторов возьмем квадратные трехчлены ax^2+bx+c и определим скалярное произведение двух трехчленов $a_1x^2+b_1x+c_1$, a_2x^2+ $+b_2x+c_2$ как

$$\int_{-1}^{1}(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\,dx.$$

Пусть читатель, незнакомый с интегралами, нам поверит, что это скалярное произведение удовлетворяет всем условиям, которые выше мы на него налагали, и для этого скалярного произведения справедливо неравенство Коши — Буняковского (уже сообщалось, что в таком виде его доказал Буняковский фактически для любых функций, для которых имеют смысл указанные интегралы). А как вычислить нужные сейчас интегралы, мы объясним. Надо всего лишь знать, что

$$\int_{-1}^{1}1\,dx=2,\quad \int_{-1}^{1}x\,dx=\int_{-1}^{1}x^3\,dx=0,\quad \int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{2}{3},\quad \int_{-1}^{1}x^4\,dx=\frac{2}{5}$$

(большинство этих формул по существу знал уже Архимед), а также что интеграл от суммы равен сумме интегралов и что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла (это *свойства линейности* операции интегрирования, операция дифференцирования обладает такими же свойствами). Этой информации достаточно, чтобы явно вычислить определенное выше скалярное произведение и обнаружить, что оно является, как говорят, *билинейной формой* от шести переменных a_i, b_i, c_i (т. е. просто многочленом второй степени от этих переменных).

173. Попробуйте сделать это.

Длиной (или, как еще говорят, *нормой*) трехчлена ax^2+bx+c (относительно введенного скалярного произведения) является число

$$\|ax^2+bx+c\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)^2\,dx}.$$

Тогда углом между трехчленами f, g является такое число φ, что

$$\cos\varphi = \frac{(f, g)}{\|f\| \cdot \|g\|}.$$

Например, угол между 1 и x будет нулевым, так как

$$(1, x) = \int\limits_{-1}^{1} x\,dx = 0.$$

Аналогично угол между x и x^2 тоже будет нулевым. Длина 1 равна

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \sqrt{2},$$

длина x равна

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

а длина x^2 равна

$$\|x^2\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^4\,dx} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Так как

$$(1, x^2) = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

косинус угла между 1 и x^2 будет равен

$$\frac{(1, x^2)}{\|1\| \cdot \|x^2\|} = \frac{2}{3\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

т. е. $\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \arcsin\frac{2}{3}$.

Следующая задача непосредственно может быть сведена к решению квадратного уравнения.

174. Найдите такое a, что угол между $x^2 + ax$ и x равен $60°$.

Решим ее, используя «геометрические» соображения. По определению, угол между векторами равен $60°$ только в случае, когда

$$\frac{\|x^2 + ax\| \cdot \|x\|}{2} = (x, x^2 + ax).$$

Но

$$(x, x^2 + ax) = (x, x^2) + a(x, x) = a\|x\|^2 = \frac{2a}{3}$$

согласно проведенным выше вычислениям. Далее, согласно теореме Пифагора и проведенным выше вычислениям имеем

$$\|x^2+ax\| = \sqrt{\|x^2\|^2 + a^2\|x\|^2} = \sqrt{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}a^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{4a}{3} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}a^2\right)\frac{2}{3}}.$$

Возводя в квадрат, получаем квадратное уравнение

$$\frac{16a^2}{9} = \frac{4}{15} + \frac{4a^2}{9},$$

откуда $a = \pm 1/\sqrt{5}$. Нам подходит только $a = 1/\sqrt{5}$.

Не стоит, конечно, думать, что мы раз и навсегда определили понятие угла между трехчленами. Введенное понятие зависит от выбранного скалярного произведения. Возьмем другое скалярное произведение, например

$$\int_0^1 (a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\,dx$$

или просто $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$, и получим другой угол. Тем не менее такой «геометрический» подход к определенным задачам очень полезен, правда, в основном такие задачи встречаются уже не в школьной математике.

Попробуем, к примеру, решить следующую задачу.

175. Найти квадратный трехчлен, ортогональный к многочленам 1 и x.

Ее тоже будем решать «геометрически». Нам уже известно, что для $f = x^2$ и $v_1 = 1$, $v_2 = x$

$$(f, v_2) = 0, \quad (f, v_1) = \frac{2}{3}.$$

Опуская из f перпендикуляр на v_1, как во втором доказательстве неравенства Коши — Буняковского, получаем ортогональную проекцию

$$\frac{v_1(f, v_1)}{\|v_1\|^2} = \frac{1}{3}\,v_1,$$

при этом, конечно, $\left(f_1 - \frac{1}{3}v_1, v_1\right) = 0$. В то же время

$$\left(f_1 - \frac{1}{3}v_1, v_2\right) = (f_1, v_2) - \frac{1}{3}(v_1, v_2) = 0 - 0 = 0.$$

Йорген Грам

Эрхардт Шмидт

Задача решена, искомый вектор $f_1 - \frac{1}{3}\,v_1 = x^2 - \frac{1}{3}$. Используемый в ее решении прием является простейшим примером применения *процесса ортогонализации* Грама — Шмидта, который позволяет систему функций в так называемом *гильбертовом пространстве* превратить в систему, в которой любые две различные функции будут ортогональны[1].

176*. Попробуйте продолжить процесс ортогонализации дальше и найдите кубический многочлен, ортогональный к попарно ортогональным многочленам $1, x, x^2 - 1/3$.

Если этот процесс продолжить и дальше, то получится последовательность *ортогональных многочленов Лежандра*[2].

Ортогональную систему Лежандра $1, x, x^2 - 1/3, \ldots$ можно сделать *ортонормированной*, если умножить каждый из ее многочленов на подходящую константу так, чтобы их длины (нормы) стали равны единице. При этом ортогональность системы, конечно, не нарушится.

[1] Гильбертово пространство впервые появилось в работах Шмидта, бывшего в свое время аспирантом у знаменитого немецкого математика Гильберта в Гёттингене. Согласно легенде, когда Шмидт делал доклад о своих работах на семинаре, Гильберт спросил: «Герр Шмидт, о каких таких гильбертовых пространствах вы все время здесь говорите?»

[2] Адриен Мари Лежандр (1752–1833) — знаменитый французский математик, придумавший свои многочлены задолго до появления теории гильбертовых пространств. Недавно обнаружилось, что портрет Лежандра, имеющийся во многих книгах, на самом деле является портретом его однофамильца. Единственным прижизненным изображением Лежандра является карикатура 1820 г. Ее не имеет смысла помещать в этой книге. Лежандру не повезло еще и в том, что из-за бюрократической ошибки ему перестали в 1824 г. выплачивать пенсию, и последние годы жизни он провел в нужде.

177. Проверьте, что ортонормированная система будет начинаться так:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{\frac{3}{2}}\,x, \quad \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1), \quad \ldots$$

Обозначим многочлены этой системы $e_0, e_1, e_2, \ldots$ Тогда

$$\|e_i\| = 1, \quad (e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Следующая задача может быть сведена к решению системы из трех линейных уравнений с тремя неизвестными[1].

178. Разложите трехчлен ax^2+bx+c по базисным векторам e_0, e_1, e_2, т. е. представьте его в виде

$$ax^2+bx+c = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

и докажите, что это разложение однозначно.

Покажем, как можно решить эту задачу «геометрически». Заметим, что существование разложения любого трехчлена легко доказать следующим образом. Достаточно научиться разлагать любой из многочленов 1, x, x^2 (потому что через них выражается любой трехчлен). Для первых двух это очевидно. Для третьего тоже, потому что

$$3\sqrt{\frac{5}{8}}\,x^2 = e_2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\,e_0.$$

Таким путем можно получить и формулы для коэффициентов разложения, но мы сейчас укажем более красивый способ. Пусть

$$f = ax^2+bx+c.$$

Спроектируем его на каждый e_i так, как не раз уже делалось выше, и получим проекции $f_i = (f, e_i)e_i$ (здесь учтено, что $\|e_i\|^2 = 1$). Тогда $f - f_i$ будет ортогонален e_i (так как $(f-f_i, e_i) = (f, e_i) - (f, e_i)(e_i, e_i) = 0$). Рассмотрим $g = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $\alpha_i = (f, e_i)$. Тогда

$$(g, e_i) = \alpha_0(e_0, e_i) + \alpha_1(e_1, e_i) + \alpha_2(e_2, e_i) = \alpha_i(e_i, e_i) = \alpha_i = (f, e_i)$$

в силу ортонормированности $\{e_i\}$. Поэтому

$$(f-g, e_i) = (f, e_i) - (g, e_i) = \alpha_i - \alpha_i = 0.$$

Покажем, что $f = g$, и задача будет решена. Допустим, что $f - g = h \neq 0$. Тогда

$$h = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2.$$

[1] Лежандр, конечно, умел решать эту задачу для произвольных многочленов.

Повторяя проведенные выше вычисления, замечаем, что $(h, e_i) = \beta_i$, $i = 0, 1, 2$. С другой стороны, $(h, e_i) = (f - g, e_i) = 0$. Поэтому $\beta_i = 0$, $i = 0, 1, 2$, значит,

$$h = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 = 0,$$

и получено противоречие. Единственность разложения также докажем от противного. Пусть имеются два разложения

$$f = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2.$$

Тогда, вычитая разложения, получаем (здесь придется воспользоваться свойствами сочетательности и переместительности операции сложения векторов), что

$$0 = \gamma_0 e_0 + \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2, \quad \gamma_i = \alpha_i - \beta_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Умножая обе части равенства скалярно на e_i, получаем слева нуль (так как $(0, e_i) = 0$), а справа (как и выше) получаем γ_i, которые не все равны нулю по предположению.

Жан-Батист Жозеф Фурье

Полученные формулы для коэффициентов разложения по ортонормированному базису

$$f = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2,$$
$$a_i = (f, e_i), \quad i = 0, 1, 2,$$

называются формулами Фурье[1], а сами коэффициенты — коэффициентами Фурье[2].

Применяя теорему Пифагора и пользуясь ортонормируемостью, получаем равенство

$$\|f\|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2,$$

которое является частным случаем *равенства Парсеваля*. Найдем, наконец, эти коэффициенты в явном виде:

$$a_0 = (f, e_0) = \left(ax^2 + bx + c, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a(x^2, 1) + b(x, 1) + c(1, 1)\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2a}{3} + 2c\right) = \sqrt{2}\left(\frac{a}{3} + c\right),$$

[1] Ж. Фурье (1768–1830) — знаменитый французский математик. Участник Египетской экспедиции Наполеона.

[2] Сам Фурье получил эти формулы не в такой абстрактной ситуации, и для другой, так называемой тригонометрической системы, впрочем, для нее подобные формулы еще раньше получил Эйлер.

$$\begin{aligned}
a_1 &= (f, e_1) = \left(ax^2+bx+c, \sqrt{\tfrac{3}{2}}x\right) = \\
&= \sqrt{\tfrac{3}{2}}\bigl(a(x^2,x)+b(x,x)+c(x,1)\bigr) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\frac{2b}{3} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,b,\\
a_2 &= (f, e_2) = (ax^2+bx+c, e_2) = a(x^2,e_2)+b(x,e_2)+c(1,e_2) = \\
&= a(x^2,e_2)+b\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,(e_1,e_2)+c\sqrt{2}(e_0,e_2) = a(x^2,e_2) = \\
&= a\left(x^2, \sqrt{\tfrac{5}{8}}\,(3x^2-1)\right) = a\sqrt{\tfrac{5}{8}}\bigl(3(x^2,x^2)-(x^2,1)\bigr) = \\
&= a\sqrt{\tfrac{5}{8}}\left(\tfrac{6}{5}-\tfrac{2}{3}\right) = a\sqrt{\tfrac{8}{45}}.
\end{aligned}$$

Тогда $\|f\|^2$ в явном виде выражается так:

$$\|f\|^2 = a_0^2+a_1^2+a_2^2 = 2\left(\frac{a}{3}+c\right)^2+\frac{2b^2}{3}+\frac{8a^2}{45}.$$

С помощью этой формулы легко решается следующая задача.

179. Докажите для $f(x)=ax^2+bx+c$ неравенство

$$\sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx} \geqslant \max\left\{\sqrt{\frac{8}{45}}\,|a|, \sqrt{\frac{2}{3}}\,|b|, \sqrt{2}\left|\frac{a}{3}+c\right|\right\}$$

и выведите из него, что среди всех трехчленов с фиксированным старшим коэффициентом a наименьшее *среднеквадратичное значение*

$$\sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx}$$

имеет многочлен, пропорциональный многочлену Лежандра $a\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$ и только он, а также что среди всех трехчленов с фиксированным средним коэффициентом b наименьшее среднеквадратичное значение имеет многочлен bx (пропорциональный первому многочлену Лежандра), и только он.

Найдите среди всех трехчленов с фиксированным младшим коэффициентом c трехчлен, имеющий наименьшее среднеквадратичное значение.

В заключение, используя неравенство Коши — Буняковского, еще раз решим экстремальные задачи из § 7.

Задача 98. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $2x-3y$, если $3x^2-xy+2y^2=5$.

Фигура, на которой ищется экстремум, — это косо расположенный эллипс. Чтобы понять это, достаточно выделить полные квадраты в *квадратичной форме* $3x^2 - xy + 2y^2$, точнее, представить ее в виде суммы квадратов

$$3x^2 - xy + 2y^2 = 2\left(y - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{23x^2}{8}.$$

Введя подходящие новые переменные

$$X = \sqrt{\frac{23}{8}}x, \quad Y = \sqrt{2}\left(y - \frac{x}{4}\right),$$

эллипс можно превратить даже в окружность $X^2 + Y^2 = 5$, на которой придется искать экстремумы выражения

$$2x - 3y = 2x - 3\left(\frac{Y}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4}\right) = \frac{5x}{4} - \frac{3Y}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{25}{46}}X - \sqrt{\frac{9}{2}}Y.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$(ax + by)^2 \leqslant (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 5(a^2 + b^2),$$

откуда

$$-\sqrt{5(a^2 + b^2)} \leqslant ax + by \leqslant \sqrt{5(a^2 + b^2)},$$

причем обе границы достижимы. Остается подставить значения a, b.

Задача 99. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $2x^2 - xy - y^2$, если $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$.

Начинаем так же, как в предыдущей задаче. Заметим, что фигура, на которой ищется экстремум, — это косо расположенный эллипс (кстати, квадратичная форма $2x^2 - xy - y^2$ задавала бы гиперболу). Представим квадратичную форму $x^2 + 2xy + 3y^2$ в виде суммы квадратов $(y + x)^2 + 2y^2$. Введя подходящие новые переменные $X = (x + y)/2$, $Y = y/\sqrt{2}$, эллипс можно превратить в окружность $X^2 + Y^2 = 1$, на которой будем искать экстремумы квадратичной формы

$$2x^2 - xy - y^2 = 2(2X - Y\sqrt{2})^2 - (2X - Y\sqrt{2})Y\sqrt{2} - (Y\sqrt{2})^2 = \\ = 8X^2 - 10XY\sqrt{2} + 4Y^2.$$

Так как $X^2 + Y^2 = 1$, достаточно найти экстремумы, например, формы $4X^2 - 10\sqrt{2}XY$, что сводится к поиску экстремумов формы $X^2 - KXY$ при подходящем K. Так как $X^2 + Y^2 = 1$, можно вместо двух связанных друг с другом переменных ввести одну, а именно $X = \cos\varphi$, $Y = \sin\varphi$. Тогда

$$X^2 - KXY = \cos^2\varphi - \frac{K}{2}\sin 2\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} - \frac{K}{2}\sin 2\varphi$$

и поиск экстремумов сводится к поиску экстремумов у функции

$$A\sin x + B\cos x,$$

которые, как известно, равны $\pm\sqrt{A^2+B^2}$, что следует, например, из неравенства Коши — Буняковского

$$(A\sin x + B\cos x)^2 \leqslant (A^2+B^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = A^2+B^2.$$

Еще одно решение приведенных задач можно получить, если для минимизации данной квадратичной формы $ax^2+2bxy+cy^2$ на единичной окружности $x^2+y^2=1$ выполнить найденную в конце § 9 замену координат, при которой эта форма принимает канонический вид $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2$, где λ_i — корни характеристического уравнения

$$(a-\lambda)(c-\lambda)-b^2=0$$

(это утверждение верно и в случае, когда корни совпадают, хотя это и не доказывалось в § 9). Так как в указанной системе координат оси перпендикулярны, данная окружность в новых координатах имеет то же вид, что и в старых. Задача минимизации квадратичной формы в новых координатах принимает вид: найти минимум и максимум $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2$ при условии $x^2+y^2=1$. Но теперь она решается просто. Пусть, к примеру, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$. Тогда при $x^2+y^2=1$

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2 = \lambda_1(x^2+y^2)-(\lambda_1-\lambda_2)y^2 = \lambda_1-(\lambda_1-\lambda_2)y^2 \leqslant \lambda_1,$$

и равенство возможно лишь при $y=0$. Аналогично находим, что минимум равен λ_2. Значит, максимум квадратичной формы на единичной окружности равен наибольшему, а минимум — наименьшему ее собственному значению. Доказанное утверждение является очень простым частным случаем теоремы, обычно приписываемой Куранту и Фишеру (или Рэлею и Ритцу).

§ 13. Умеете ли вы извлекать квадратные корни?

— Вижу, он заинтересовался математикой.

— Не думаю, что он создан быть простым счетчиком, — предупредил Кларк. — Дни напролет сидеть над тетрадями, корпеть над таблицами логарифмов, кубическими корнями, косинусами…

— Благодарение Декарту, теперь математикам есть чем заняться помимо этого, — промолвил Енох. — Скажите брату, чтобы показал мальчику Евклида, и пусть тот выбирает сам.

Нил Стивенсон. Ртуть

Читатель уже убедился, что хотя для решения уравнений полезно уметь извлекать квадратные корни, иногда можно этого избежать. Знание приближенного значения корней, как правило, нужно для их сравнения с данными числами. Но эту операцию можно провести и без вычисления корней. Например, для сравнения чисел вида $a+\sqrt{b}$, где a, b — рациональные числа, достаточно переписать неравенство в виде $\sqrt{c} < a+\sqrt{b}$, проверить, что правая часть положительна, возвести обе части в квадрат и получить неравенство только с одним корнем. Уединяя этот корень и еще раз возводя в квадрат, получаем неравенство между рациональными числами, не содержащее корней. Но иногда эти вычисления могут быть громоздкими.

Рассмотрим ситуацию, когда не удается придумать ничего, кроме как взять и извлечь корень. Как сделать это быстро и без ошибок? Укажем несколько полезных приемов и заодно убедим читателя, что решение квадратных уравнений не такое уж и простое дело (возможно, он уже и сам начал это подозревать).

Начнем с того, что научимся быстро определять, извлекается ли нацело корень из целого числа. При решении квадратных уравнений с рациональными коэффициентами этот вопрос неизбежно возникает, и он равносилен вопросу, рациональны ли корни уравнения. Уже древние греки знали, что корень из натурального числа — либо натуральное число, либо число иррациональное. Изучение рациональных и иррациональных чисел не входит в наши планы и требует отдельной книжки[1]. Мы хотим только знать, будет ли корень целым. Для

[1] См.: *Нивен А.* Числа рациональные и иррациональные. М.: Мир, 1966.

этого можно, конечно, воспользоваться калькулятором или таблицей квадратов. Но на экзамене это запрещено. Поэтому полезно небольшую таблицу квадратов хранить в памяти или научиться быстро ее вычислять, используя формулу

$$(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2,$$

которую при $a = 1$ легко применять даже в уме. Но что делать, если числа большие?

Заметим, что можно вообще избежать рассмотрения этого вопроса, так как для нахождения рациональных корней произвольного алгебраического уравнения известен прием (иногда приписываемый самому Гауссу). Он основан на применении следующей теоремы, которую в силу ограниченности места мы предлагаем в качестве задачи (решение которой можно найти во многих книгах).

180*. Докажите, что все рациональные корни многочлена

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$$

с целыми коэффициентами имеют вид $\pm p/q$, где p делит a_0, q делит a_n, $p - mq$ при любом целом m делит $f(m)$.

Для ее применения достаточно разложить a_0 и a_n на простые множители, найти делители p, q этих чисел и для каждого из чисел $\pm p/q$ проверить, не является ли оно корнем. Если нет, то многочлен не имеет рациональных корней. Условие, что $p - mq$ при любом целом m делит $f(m)$, иногда позволяет при его удачном использовании сократить перебор. Однако этот метод не всегда удобен практически, и мы рассмотрим методы, непосредственно распознающие целочисленность квадратного корня.

Укажем метод, который позволяет в случае удачи быстро убедиться в том, что квадратный корень из n не является целым числом. Для этого вычислим остатки от деления n на 3, 4, 5 и так далее. Если нам повезет и какой-то из них не является квадратом по соответствующему модулю, то и само число n не является полным квадратом. Действительно, чтобы число было квадратом, необходимо, чтобы оно либо делилось на 3 (и поэтому на 9), либо при делении на 3 давало в остатке 1. Для доказательства заметим, что $(3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$. На практике можно сразу вычислять остаток от деления на 9, так как соответствующий признак делимости очень прост; чтобы число было квадратом, остаток должен быть равен 0, 1, 4 или 7. С вероятностью $5/9$ это простой тест позволяет доказать, что n не является квадратом, так как из 9 равновероятных остатков от деления на 9 появление 5 остатков (а именно $2, 3, 5, 6, 8$) означает, что n не является квадратом, а вероятность этого события равна по определению отношению числа благоприятных исходов к общему числу равновероятных исходов.

Если тест не дал ответа, применяем следующий тест, основанный на таком замечании.

При делении на 4 квадраты целых чисел дают остатки $0, 1$, так как $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$. Можно заметить, что при делении на 8 квадраты дают остатки $0, 1, 4$, а при делении на 16 — остатки $0, 1, 4, 9$. Последний тест с вероятностью $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ позволяет доказать, что n не является квадратом, так как из 16 равновероятных остатков от деления на 16 появление 12 остатков (а именно отличных от $0, 1, 4, 9$) означает, что n не является квадратом.

Разумеется, достаточно только выполнить деление на 4, а деление на 16 выполнять только в случае, если число разделилось на четыре. При этом можно обращать внимание только на последние четыре цифры числа.

После обоих тестов ситуация останется неопределенной (когда еще не ясно, является ли число квадратом или нет) только с вероятностью[1] $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{16} = \frac{1}{9}$. В этом случае замечаем, что квадрат при делении

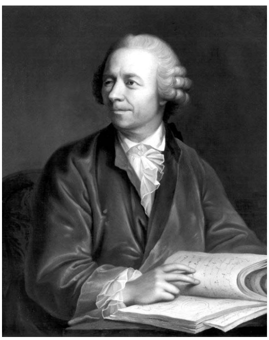
[1] Читатель может поверить утверждениям о вероятности на слово, но если верить не хочет, то пусть заметит, что если произвольному числу n сопоставить упорядоченную пару $(a, b) = (n \bmod 9,\ n \bmod 16)$, где $n \bmod 9$ есть остаток от деления на 9, а $n \bmod 16$ есть остаток от деления на 16, то оба теста дадут неопределенный результат только в случае, когда в соответствующей паре (a, b) число a принимает значения $0, 1, 4, 7$, а число b — значения $0, 1, 4, 9$ независимо от значения числа a, поэтому число пар, благоприятствующих неопределенному исходу теста, равно $4 \cdot 4 = 16$, а число всех возможных результатов рассматриваемого теста равно $9 \cdot 16 = 144$, и если читатель поверит, что все они равновероятны, то вероятность неопределенности будет равна $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{16} = \frac{1}{9}$. Для обоснования указанной равновероятности достаточно заметить, что согласно китайской теореме об остатках по каждой из 144 упомянутых пар (a, b) можно однозначно определить остаток от деления соответствующего числа n на 144, причем разным парам будут отвечать разные остатки, а так как остатки от деления произвольного числа n на 144 равновероятны, то и соответствующие им пары (a, b) — тоже. Для доказательства в указанном частном случае китайской теоремы достаточно заметить, что по остатку $n \bmod 144$ остатки $a = n \bmod 9$ и $b = n \bmod 16$ определяются однозначно, причем разным остаткам соответствуют разные пары (a, b), потому что если $n \bmod 9 = m \bmod 9$ и $n \bmod 16 = m \bmod 16$, то $n - m$ кратно и 9, и 16, следовательно, $n - m$ кратно $9 \cdot 16 = 144$ в силу взаимной простоты чисел 9 и 16, но это означает, что $n \bmod 144 = m \bmod 144$. А так как разных пар $(a, b) = (n \bmod 9, n \bmod 16)$ имеется

на 5 обязан давать остатки 0, 1, 4, а при делении на 25 — остатки 0, 1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19, 21, 24. Вероятность неопределенности после этого теста будет равна $\frac{1}{9} \cdot \frac{11}{25} = \frac{11}{225}$ (что можно обосновать так же, как в предыдущем подстрочном примечании).

В условиях экзамена этими тремя тестами разумно и ограничиться, так как признаки делимости на 7 и на 11 уже не так просты. Но если продолжить тестирование дальше (по модулям остальных простых чисел), то вероятность неопределенности будет стремится к нулю. Поэтому мы получаем вероятностный алгоритм распознавания полных квадратов в натуральном ряду. Вероятностные алгоритмы, как это ни удивительно, широко используются в современной математике, но далее мы покажем, что указанный алгоритм имеет детерминированную модификацию. Однако в применении к очень большим числам он неэффективен и его применять мы не советуем. Хотя вряд ли вам придется решать квадратные уравнения со стозначными коэффициентами, обсудим этот вопрос, чтобы увидеть, насколько он непрост. Первая трудность, возникающая здесь, — быстрый рост числа остатков при делении на p, которые могут иметь полные квадраты. Такие остатки называются *квадратичными вычетами*.

181. Докажите, что число квадратичных вычетов по простому модулю $p > 2$ равно $(p+1)/2$.

Поскольку квадратичных вычетов так много, при больших p для их запоминания не хватит памяти не только вам, но и компьютеру.



Леонард Эйлер

Но вместо запоминания заранее вычисленной таблицы вычетов в случае ее чрезмерной длины можно просто научиться быстро определять по остатку от деления на p, является ли он квадратичным вычетом, и если да, то находить число, квадрат которого при делении на p дает остаток, равный этому вычету.

Быстро распознавать квадратичные вычеты можно с помощью квадратичного закона взаимности, открытого Эйлером и доказанного Гауссом.

ровно 144 и различных остатков по модулю 144 столько же, то и обратно, по каждой паре (a, b) остаток по модулю 144 определяется однозначно и разным парам соответствуют разные остатки.

Карл Фридрих Гаусс

Здесь нет возможности объяснять, что это такое, и мы отсылаем читателя к книгам по элементарной теории чисел. Если воспользоваться быстрыми современными алгоритмами умножения и деления чисел[1], а также быстрым вариантом алгоритма Евклида, можно распознавать квадратичные вычеты, выполнив не более $C\lg p\cdot(\lg\lg p)^2\cdot\lg\lg\lg p$ операций с цифрами, где C — константа, не зависящая от p, но довольно большая.

Извлечение квадратных корней по модулю p сложнее, и наилучшие современные алгоритмы используют $C\lg^2 p\cdot\lg\lg p\cdot\lg\lg\lg p$ операций. Задача облегчается тем, что все это можно делать только для одного простого числа $p>2\sqrt{n}$, и найти такое число $0<b<p/2$, что b^2-n кратно p. Если окажется, что $n\neq b^2$, то n не является полным квадратом. Действительно, если бы $n=a^2$, $a>0$, $a\neq b$, то $b^2-n=(b+a)(b-a)$ кратно p, значит, $|a\pm b|$ делится на p, что невозможно, так как

$$0<|a\pm b|\leqslant|a|+|b|<\frac{p}{2}+\sqrt{n}<p.$$

Это позволяет превратить алгоритм в полностью детерминированный, и требующий $C\lg^2 n\cdot\lg\lg n\cdot\lg\lg\lg n$ операций.

Но есть более быстрый и более простой алгоритм извлечения целого квадратного корня. Для этого нужно извлечь корень с достаточно малой погрешностью, например меньшей $1/2$, и выбрать из интервала возможных значений корня единственное натуральное число в этом интервале, если оно есть, а потом выполнить проверку, возведя его в квадрат.

Быстрый алгоритм извлечения корня дает метод Ньютона — Герона, о котором пойдет речь в § 14. Используя обычный школьный алгоритм умножения чисел, можно этим методом Ньютона извлекать корни с точностью n значащих цифр за Cn^2 операций, а используя современные быстрые методы умножения чисел можно извлекать корни, затратив $Cn\lg n\cdot\lg\lg n$ операций[2]. За почти линейное время

[1] Первое представление о таких алгоритмах можно получить по книжке автора «Системы счисления и их применение» в серии «Библиотека „Математическое просвещение“», но за подробностями надо обращаться к серьезной литературе.

[2] В 2007 г. американский математик Мартин Фюрер предложил еще более быстрый способ умножения n-разрядных чисел, с помощью которого можно и корни извлекать

можно также распознавать полные квадраты в натуральном ряду и даже выяснять, является ли число какой-нибудь степенью натурального числа, но мы не можем здесь на этом останавливаться.

Однако упомянутый метод Ньютона — Герона не очень прост для понимания, и в условиях экзамена лучше применять более простой метод *цифра за цифрой*, описанный в школьных учебниках[1]. Этот метод достигает любой точности, в частности им можно находить целую часть корня. Извлечение корня из целого числа или из десятичной дроби принципиально ничем не отличается, если заметить, что

$$\sqrt{a_0{,}a_1 \dots a_{2n}} = \sqrt{a_0 a_1 \dots a_{2n}} \cdot 10^{-n},$$

и выполнить соответствующий сдвиг запятой. Поэтому достаточно научиться извлекать корень из числа вида

$$A = a_0{,}a_1 \dots a_{2n},$$

лежащего между 1 и 10. Для нахождения корня с точностью до одной значащей цифры нужно уметь вычислять целую часть корня из натуральных чисел от 1 до 9. Для этого достаточно помнить лишь таблицу из трех квадратов $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$. Если мы уже вычислили $m+1$ значащую цифру корня, т. е. нашли такое число $B_m = b_0{,}b_1 \dots b_m$, что $B_m^2 \leqslant A < (B_m + 10^{-m})^2$, то для вычисления очередной цифры корня надо найти $b = b_{m+1} = 0, 1, \dots, 9$ такое, что

$$(B_m + b \cdot 10^{-m-1})^2 \leqslant A < (B_m + (b+1) \cdot 10^{-m-1})^2.$$

Это неравенство естественно переписать как

$$2B_m b 10^{-m-1} + b^2 10^{-2m-2} \leqslant A - B_m^2 < 2B_m (b+1) 10^{-m-1} + (b+1)^2 10^{-2m-2}.$$

Так как последовательность

$$x_b = 2B_m b \cdot 10^{-m-1} + b^2 \cdot 10^{-2m-2}, \quad b = 0, \dots, 9,$$

монотонно возрастает и состоит из 10 членов, искомая цифра b определяется однозначно и может быть найдена простым перебором. Если вместо десятичной системы использовать двоичную, то перебор фактически исчезает. Так как двоичная система до сих пор остается несколько непривычной (см. о ней уже упоминавшуюся книжку «Системы счисления»), вернемся опять к десятичной и обсудим, как

быстрее чем, например, за $Cn \lg n \cdot \lg \lg \lg \dots \lg n$ операций, где число последовательных логарифмирований может быть весьма большим.

[1] Кстати, именно его Ньютон описывает в своем учебнике «Всеобщая арифметика».

можно сократить перебор. Для этого воспользуемся оценками цифры b сверху и снизу:

$$b \leqslant \frac{10^{m+1}(A-B_m^2)}{2B_m}, \qquad \frac{10^{m+1}(A-B_m^2-10^{-2m})}{2B_m} < b+1.$$

Правильное значение b можно искать в интервале, определяемом этими оценками.

Можно также вычислять b по формуле

$$b = \left\lfloor \frac{10^{m+1}(A-B_m^2)}{2B_m} \right\rfloor$$

(здесь и далее $\lfloor a \rfloor$ означает *целую часть* числа a, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a), а потом, если неравенство

$$2B_m b \cdot 10^{-m-1} + b^2 \cdot 10^{-2m-2} \leqslant A - B_m^2$$

не выполняется, делать поправку, уменьшая b на единицу. Неравенство

$$\frac{10^{m+1}(A-B_m^2-10^{-2m})}{2B_m} < b+1$$

выполняется автоматически и в проверке не нуждается. Так как

$$B_m^2 \leqslant A < (B_m + 10^{-m})^2,$$

получаем, что

$$A - B_m^2 < 2B_m 10^{-m} + 10^{-2m} \leqslant 2\sqrt{A}10^{-m} + 10^{-2m} < 8 \cdot 10^{-m},$$

поэтому число оценивается сверху

$$\frac{10^{m+1}(A-B_m^2)}{2} = 5(A-B_m^2)10^m < 40$$

и имеет не более $2\max\{n,m\} + 2 - m$ цифр в десятичной записи. Число B_m содержит $m+1$ цифру. Для нахождения

$$b = \left\lfloor \frac{10^{m+1}(A-B_m^2)}{2B_m} \right\rfloor$$

нужно выполнить деление этих двух чисел. Если $m \geqslant n$, то выполняется деление $(m+2)$-разрядного числа на $(m+1)$-разрядное, и в частном получается одноразрядное число (возможно, изредка получится частное 10, но тогда обязательно потом оно уменьшается на единицу). Если $m < n$, то делимое имеет $2n+2-m > m+2$ цифр, но так как в частном всегда получается одноразрядное число (возможно, изредка получается 10), то последние $2n-2m$ цифры в нем можно отбросить, при этом частное не изменится, и поэтому всегда при вычислении цифры $b = b_{m+1}$ выполняется деление $(m+2)$-разрядного числа на $(m+1)$-разрядное.

Заметим, что подобное деление приходится выполнять на каждом шаге при делении n-разрядного числа на m-разрядное при делении столбиком. Поэтому указанный алгоритм извлечения корня похож на школьный алгоритм деления, но почему-то в школах изучается не всегда. И при изучении деления столбиком в школе не учат, как делить $(m+1)$-разрядное число $u = \overline{u_0u_1\ldots u_m}$ на m-разрядное число $v = \overline{v_1\ldots v_m}$, а предлагают находить частное просто подбором.

Для желающих научиться делить «истинно алгоритмическим» образом предлагаем следующие задачи, которые показывают, что деление столбиком не так просто, как кажется. Рассмотрим числа $u = \overline{u_0u_1\ldots u_m}$ и $v = \overline{v_1\ldots v_m}$ и положим

$$q = \left\lfloor \frac{u}{v} \right\rfloor, \quad q^* = \min\left\{\left\lfloor \frac{10u_0 + u_1}{v_1} \right\rfloor, 9\right\}.$$

182. Докажите, что $q^* \geqslant q$, а при $v_1 \geqslant 5$ к тому же $q^* - 2 \leqslant q$.

Умножив u и v на $\lfloor 10/(v_1+1) \rfloor$, можно, не изменяя u/v, добиться того, что $v_1 \geqslant 5$. Неравенство $q^* - 2 \leqslant q$, вообще говоря, усилить нельзя.

183. Докажите, что:

- если $u_0 = v_1$, то $q = 9$ или 8;
- всегда $q \geqslant \lfloor (10u_0 + u_1)/(v_1+1) \rfloor$;
- если при $r^* = 10u_0 + u_1 - q^*v_1$ справедливо неравенство

  $$v_2q^* > 10r^* + u_2,$$

  то $q = q^* - 1$ или $q = q^* - 2$, а если $v_2q^* \leqslant 10r^* + u_2$, то $q = q^*$ или $q = q^* - 1$;
- если $v_1 \geqslant 5$, $v_2q^* \leqslant 10r^* + u_2$, но $q^* \neq q$, то $u - qv \geqslant 7v/10$ (т. е. с вероятностью 0,7 все же $q^* = q$).

184. Проверьте, что вычисление корня с n значащими цифрами требует не более Cn^2 операций с цифрами.

Еще о решении квадратных уравнений

Рассмотрим вопрос о минимизации длины записи корней квадратного уравнения. Речь пойдет о том, что запись корней в виде

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

в том случае, когда установлено, что b^2-4ac не является полным квадратом, хотя формально правильна, но может иногда быть записана в более компактном виде

$$x_{1,2}=\frac{P\pm S\sqrt{Q}}{R},$$

где P, S, Q и R — некоторые делители чисел b, $D=b^2-4ac$ и $2a$ соответственно. Естественно в этом случае найти наиболее компактную запись, т. е. минимизировать числа P, Q, R. Это означает, что Q должно быть *свободно от квадратов*, т. е. не представимо в виде $Q_1^2Q_2$, где Q_i — целые числа, $Q_1>1$, тогда $\sqrt{Q}$ не будет представим в виде $Q_1\sqrt{Q_2}$ нетривиальным образом, а среди дробей P/R, S/R хотя бы одна должна быть несократимой.

В школе некоторые учителя требуют находить такую запись, называя ее «решением наиболее рациональным способом» и т. п. Эта же задача возникает и перед создателями систем компьютерной алгебры (хотя автор не уверен, что во всех таких системах реализован подобный алгоритм). Ее решение для конкретных уравнений с небольшими коэффициентами не вызывает труда, но написать программу, которая всегда будет это делать правильно, не так уж и просто, и мы предлагаем читателям убедится в этом самостоятельно.

Выше уже объяснялось, как распознавать полные квадраты и как извлекать из них корни. Научимся выделять из неквадратных чисел максимальные квадратные множители, т. е. представлять натуральное число N в виде n^2K, где K *свободно от квадратов*. Такое представление существует и единственно, при этом иногда $n=1$. Доказательство данного утверждения очевидно следует из теоремы об однозначности разложения натуральных чисел на множители (иногда называемой основной теоремой арифметики). Эту теорему не проходят в школе, и многие школьники считают ее очевидной, однако ее простота обманчива. Здесь нет места для ее доказательства и обсуждения, и мы вынуждены отослать читателя к другим книжкам. Мы только покажем, как, зная разложение N на простые множители $p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$, получить представление $N=n^2K$.

Для этого составляется список индексов $\{i_1,\dots,i_m\}$, для которых α_{i_l} нечетно, и вычисляется

$$K=p_{i_1}\dots p_{i_m},\quad n^2=\frac{N}{K}.$$

Делить и извлекать корень для вычисления n не нужно, достаточно вместо этого составить список всех остальных индексов $\{j_1,\dots,j_{k-m}\}$, т. е. таких, для которых α_{j_l} четно, и вычислить

$$n = p_{j_1}^{\alpha_{j_1}/2} \ldots p_{j_{k-m}}^{\alpha_{j_{k-m}}/2}.$$

После того как получено представление дискриминанта

$$D = b^2 - 4ac = n^2 K,$$

где K свободно от квадратов, имеем

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm n\sqrt{K}}{2a},$$

и остается сократить дроби $b/(2a)$, $n/(2a)$ на максимальное возможное число. Для этого можно у любой из этих дробей найти наибольший общий делитель d числителя и знаменателя, а потом найти наибольший общий делитель числа d и числителя второй дроби. На полученное число обе дроби можно сократить, после чего из них сократимой останется не более чем одна.

Если вы начнете программировать, то поймете, что все не так просто. Для вычисления наибольшего общего делителя естественно применить алгоритм Евклида. Не будем здесь объяснять, как это делается. Скажем только, что этому алгоритму, его модификациям и приложениям можно посвятить толстый том, и хотя возраст алгоритма почти такой, как у старика Хоттабыча, большая часть содержания этого тома будет основана на результатах, полученных в XX веке.

Средневековый портрет Евклида. Юстус ван Гейт (ок. 1474)

Для выделения максимального квадрата придется дискриминант разлагать на простые множители. Для этого известно много алгоритмов, описаниям которых уже посвящены целые книги. Интерес к этим алгоритмам сильно подогревается их применениями в криптографии с открытым ключом. Но до сих пор неизвестно, существует ли алгоритм, разлагающий n-значное число на простые множители за n^C операций, где C — не зависящее от n число.

Здесь мы прекратим запугивать читателя и заметим, что в условиях экзамена он будет иметь дело с уравнениями с небольшими коэффициентами и вполне сможет выполнить описанный выше алгоритм, иногда даже в уме. При этом для сокращения дробей вместо алгоритма Евклида, конечно, проще применять разложение на множители (хотя иногда знание алгоритма Евклида может помочь, если в нем достаточно сделать, например, только один шаг). Если коэффициенты a, b, c имеют общий множитель, то начать надо, конечно, с того, что на него сократить. Если b, a имеют простой общий множитель p, а c на него не делится, то в этом случае находим наибольшую степень p^β, делящую b, и наибольшую степень p^α, делящую a. Тогда $D = b^2 - 4ac$ делится на $p^{\min\{2\beta,\alpha\}}$, и даже на $p^{\min\{2\beta,\alpha+2\}}$ в случае $p = 2$. Заметим, что в случаях $2\beta = \alpha$, $p > 2$ и $2\beta = \alpha + 2$, $p = 2$ возможна делимость D и на бо́льшие степени, и путем пробных делений в этих случаях тоже можно найти максимальную степень p^δ, делящую D. Тогда при $\gamma = \min\{\beta, \alpha, \lfloor\delta/2\rfloor\}$ и при $\gamma = \min\{\beta, \alpha + 1, \lfloor\delta/2\rfloor\}$ в случае $p = 2$ имеем

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b/p^\gamma \pm \sqrt{D/p^{2\gamma}}}{2a/p^\gamma}, \quad D = \left(\frac{b}{p^\gamma}\right)^2 - \frac{4ac}{p^{2\gamma}}.$$

Если b, c имеют общий простой делитель p, то a не делится на p. Находим максимальную степень p^α, делящую c, и максимальную степень p^β, делящую b, тогда аналогично рассмотренному случаю можно найти максимальную степень p^δ, делящую D. Тогда имеем

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm p^{\lfloor\delta/2\rfloor}\sqrt{D/p^{2\lfloor\delta/2\rfloor}}}{2a},$$
$$\frac{D}{p^{2\lfloor\delta/2\rfloor}} = \left(\frac{b}{p^{\lfloor\delta/2\rfloor}}\right)^2 - \frac{4ac}{p^{2\lfloor\delta/2\rfloor}}.$$

Дроби в этом выражении можно сократить только в случае $p = 2$, $\lfloor\delta/2\rfloor \geqslant 1$. К полученным более простым выражениям для корней можно применять описанный выше прием и далее до тех пор, пока это удается. Если же общих делителей выделить не удается, то придется разлагать подкоренное выражение на множители и выделять квадратный множитель, как было объяснено выше.

§ 14. Как извлекали корни Ньютон и Герон

> Вечернее солнце светило в открытые окна. Енох подъехал к школе с северо-западной стороны, чтобы случайный наблюдатель увидел лишь длинную тень в плаще с капюшоном. Он довольно долго смотрел на мальчика. Закатное солнце багрило и без того красное от натуги лицо. Мальчик истреблял надписи усердно, и даже с жаром, как будто это жалкое место недостойно нести его собственноручную подпись. С одного подоконника за другим исчезало имя: «И. НЬЮТОН».
>
> *Нил Стивенсон.* Ртуть (2003)

Метод *цифра за цифрой* для вычисления квадратных корней был открыт еще в Древней Индии. Для приближенного поиска корней произвольных алгебраических уравнений его применил Виет. Одной из вариаций этого метода является используемый в артиллерии так называемый *метод вилки*. Идея его такова: если при некотором угле наклона орудия зафиксирован недолет, а при большем угле — перелет, то следующий угол наклона выбирают как среднее арифметическое двух этих углов[1].

В применении к поиску корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ это выглядит следующим образом. Положим $x_0 = a$, $y_0 = b$, и если на n-м шаге вычисления мы нашли приближения x_n, y_n такие, что $f(x_n)f(y_n) < 0$, то вычисляем $z_n = (x_n + y_n)/2$, $f(z_n)$, и в случае $f(z_n)f(x_n) < 0$ полагаем $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = z_n$, а в случае $f(z_n)f(y_n) < 0$ полагаем $x_{n+1} = z_n$, $y_{n+1} = y_n$.

Очевидно, что таким путем можно найти все корни любого многочлена с любой заданной точностью. Этот метод хорош еще тем, что пригоден для поиска корней у любой непрерывной функции, даже в условиях, когда нам про нее ничего не известно, но по нашему требованию вычисляют любые ее значения.

Если начальные значения x_0, y_0 целые, то указанный метод находит разложение корня в двоичную дробь. Если мы хотим найти

---

[1] Интересное упоминание об этом методе см. в воспоминаниях Л. И. Брежнева «Малая Земля» в сцене партсобрания. Было это в реальности или нет, трудно сказать. Но вполне могло быть.

десятичное приближение, надо каждый отрезок $[x_n, y_n]$ разбивать на 10 равных частей, и искать x_{n+1}, y_{n+1} такими, что

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{y_n - x_n}{10}.$$

Иногда для поиска очередного приближения вместо уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[x_n, y_n]$ рассматривают уравнение

$$g(y) = 0, \quad g(y) = f\left(x_n + \frac{(y_n - x_n)y}{10}\right)$$

на отрезке $[0, 10]$, и так можно делать на каждом шаге вычисления. При этом мы избавляемся от дробей, но сталкиваемся с быстрым ростом коэффициентов у последовательности уравнений.

Для ускорения работы нет необходимости вычислять при этом все 11 значений $g(0), \ldots, g(10)$, а достаточно, применив метод вилки, сделать только 3 или 4 вычисления значений $g(y)$.

Но самым эффективным методом приближенного вычисления корней является описываемый далее метод Ньютона. Его достоинство заключается, в частности, в том, что он является *итеративным* методом, а эти методы устойчивы относительно ошибок вычислений: если очередная итерация выполнена с небольшой ошибкой, то довольно часто это не приводит к существенной ошибке в окончательном ответе.

Ньютонова итерация делается следующим образом: если x_n — полученное приближение к корню уравнения $f(x) = 0$, то новое приближение находится по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

где $f'(x_n)$ — производная функции f в точке x_n. Англичане называют эту формулу *формулой Ньютона — Рафсона* потому, что хотя Ньютон предложил метод, фактически использующий эту формулу, но саму формулу он не выписал, и позднее это сделал английский математик Рафсон. В других странах ее обычно называют просто формулой Ньютона.

Геометрический смысл этой формулы прост: нужно через точку $(x_n, f(x_n))$ графика функции $y = f(x)$ провести касательную, тогда она пересекает ось Ox в точке x_{n+1}.

185. (Для знающих, что такое производная.) Докажите предыдущее утверждение.

Герон Александрийский

С помощью метода Ньютона очень быстро вычисляются квадратные корни и корни более высокой степени.

Например, для квадратного корня $\sqrt{N}$ ньютонова итерация имеет вид

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right).$$

По-видимому, она была известна еще древнегреческим математикам Герону и Архимеду.

Для ее получения не обязательно знать, что такое производная. Достаточно воспользоваться следующей приближенной формулой

$$\sqrt{a \pm b} \approx \sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}},$$

в которой предполагается, что b/a достаточно мало (чем меньше, тем точнее будет формула).

186. Докажите эту формулу методом возведения в квадрат. Попробуйте получить оценку ее точности.

Применяя эту формулу при $a = v^2$, $b = N - v^2$, имеем

$$\sqrt{N} \approx v + \frac{N - v^2}{2v} = \frac{1}{2}\left(v + \frac{N}{v}\right).$$

Полагая здесь $v = x_n$, получаем формулу Ньютона.

Применим ее для вычисления $\sqrt{2}$. В качестве начального приближения удобно взять 1,4. Тогда уже на второй итерации получим $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135642$, и на каждой следующей итерации число верных знаков после запятой будет приблизительно удваиваться. Если же вычисления выполнить в 60-ричной системе счисления и началом итерации взять

$$(1, 25)_{60} = 1 + \frac{25}{60},$$

тогда на второй итерации получится, что

$$\sqrt{2} \approx (1, 24, 51, 10)_{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}.$$

Это приближение эквивалентно десятичному приближению с шестью верными цифрами после запятой. Любопытно, что это число было найдено на глиняной клинописной табличке из Вавилона, сделанной около 4000 лет назад. Эта находка указывает, что, вероятно, метод Ньютона — Герона — Архимеда был известен еще древним шумерам.

Для корня m-й степени $\sqrt[m]{N}$ ньютонова итерация имеет вид

$$x_{n+1} = \frac{1}{m}\left((m-1)x_n + \frac{N}{x_n^{m-1}}\right).$$

187. (Для тех, кто знает, что такое производная.) Покажите, что это действительно ньютоновы итерации в применении к уравнению $x^m - N = 0$, $N > 0$.

Можно доказать, что они будут почти всегда сходится к корню независимо от выбора начального значения x_0. Для квадратного корня это можно сделать совсем элементарно (без использования производной).

188. Докажите для ньютоновых приближений к $\sqrt{N}$ тождество

$$\frac{x_n - \sqrt{N}}{x_n + \sqrt{N}} = \left(\frac{x_0 - \sqrt{N}}{x_0 + \sqrt{N}}\right)^{2^n}.$$

Докажите, что если

$$\left|\frac{x_n - \sqrt{N}}{x_n + \sqrt{N}}\right| < 1,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{N}$, а если

$$\left|\frac{x_n - \sqrt{N}}{x_n + \sqrt{N}}\right| > 1,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\sqrt{N}$.

Однако для ускорения вычислений лучше взять x_0 как можно ближе к корню. Например, если $1/2 \leqslant N < 1$, то простейшее наилучшее приближение есть $0{,}5903N + 0{,}4173$. После этого уже две итерации дают 9 десятичных знаков после запятой. При $0{,}1 \leqslant N \leqslant 10$ в качестве приближения с точностью $1/12$ можно взять $(1+4N)/(4+N)$.

Скорость сходимости итераций метода Ньютона хорошо демонстрирует следующая задача.

189. (Москва, 1986.) Если $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$, то

$$0 < x_{10} - \sqrt{2} < 10^{-370}.$$

А эта задача показывает, что важно выбирать хорошее начальное приближение.

190. (Москва, 1953.) Если $x_0 = 10^9$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$, то

$$0 < x_{36} - \sqrt{2} < 10^{-9}.$$

Формулу для погрешности $\varepsilon_n = \sqrt{N} - x_n$ последовательности ньютоновых итераций

$$x_{n+1} = \frac{x_n + N/x_n}{2}$$

можно получить в виде

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{-\varepsilon_n^2}{2x_n},$$

откуда следует, что знаки у последовательности ε_n (при выборе начального значения x_1 достаточно близко к $\sqrt{N}$) чередуются, т. е. последовательность приближений x_n будет то больше, то меньше $\sqrt{N}$, и, значит, искомый корень всегда лежит между соседними приближениями. Для *относительной* погрешности $\delta_n = |\varepsilon_n/x_n|$ справедлива рекуррентная формула $\delta_{n+1} = \delta_n^2 x_n/x_{n+1}$. Из нее по индукции следует, например, что если погрешность начального приближения δ_1 достаточно мала, то $b^{2^n} < \delta_n < a^{2^n}$, где $0 < b < a < 1/2$ — некоторые константы, зависящие от δ_1. Поэтому число n итераций, необходимых для достижения погрешности, меньшей данного $\varepsilon > 0$, будет равно $\log_2 \log_2(1/\varepsilon)$ с точностью до некоторой константы.

Скорость сходимости можно увеличить, если использовать последовательность

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}\left(3x_n + 6\frac{N}{x_n} - \frac{(N/x_n)^2}{x_n}\right).$$

Погрешность $\varepsilon_n = \sqrt{N} - x_n$ тогда будет вычисляться по рекуррентной формуле

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^3}{2x_n^2} + \frac{\varepsilon_n^4}{8x_n^3}$$

(попробуйте ее доказать!). Из нее видно, что при достаточно малом ε_1 последовательность ε_n знакопостоянна, т. е. x_n приближается к $\sqrt{N}$ с одной стороны. Если начальное приближение взять *с избытком*, т. е. выбрать $x_1 > \sqrt{N}$, то при достаточно малом $|\varepsilon_1|$ всегда будет $\varepsilon_n < 0$ и

$$|\varepsilon_{n+1}| < \frac{|\varepsilon_n|^3}{2x_n^2},$$

откуда можно по индукции вывести, что

$$b^{3^n} < |\varepsilon_{n+1}| < a^{3^n},$$

где $0 < b < a < 1/2$ — некоторые константы, зависящие от ε_1. Поэтому число n итераций, необходимых для достижения погрешности, меньшей данного $\varepsilon > 0$, будет равно $\log_3 \log_2(1/\varepsilon)$ с точностью до некоторой константы, т. е. примерно в 1,6 раза меньше, чем у простых ньютоновых итераций.

Однако с точки зрения вычислительной сложности указанный метод, видимо, хуже, чем простой метод Ньютона, так каждая из итераций требует двух делений и одного возведения в квадрат, не считая более простых операций сложения, умножения на числа 3 и 6 (которые можно заменить многократным сложением, так как это экономит время в компьютерных вычислениях) и деления на 8 (при использовании двоичной системы оно выполняется мгновенно). Простая же ньютонова итерация требует только одного деления, сложения и деления пополам.

Сказанное в равной степени относится и к ручным, и к компьютерным вычислениям, и к вычислениям на калькуляторе. Удобство ньютоновых итераций в калькуляторных вычислениях заключается еще и в том, что в процессе выполнения итерации число x_n можно хранить в памяти калькулятора, а после появления на дисплее значения x_{n+1} его можно поменять с хранившимся в памяти x_n (с помощью одной хитрости это можно сделать даже на простейших калькуляторах, которые не имеют такой операции). Впрочем, большинство калькуляторов имеют встроенную операцию извлечения квадратного корня.

На компьютерах, в отличие от калькуляторов, операция деления выполняется существенно медленнее, чем умножение (в определенном смысле и на калькуляторе деление выполняется медленнее, но скорость выполнения операции на нем определяется не скоростью работы микросхемы, а скоростью, с которой человек нажимает на кнопки). В ручных вычислениях деление тоже несколько медленнее умножения. Поэтому возникает желание устранить деление из ньютоновой итерации.

191*. Докажите, что $\sqrt{N}$ можно вычислить с помощью итераций без деления, если число $M = 1/(2N)$ вычислить заранее. А именно, можно использовать итерации

$$x_{n+1} = x_n\left(\frac{3}{2} - M\cdot x_n^2\right).$$

Оценим теперь число операций с цифрами, необходимое для вычисления n цифр у квадратного корня из N. Для простоты предполагаем, что $1 < N < 2$. Так как после каждой простой ньютоновой итерации число найденных значащих цифр приблизительно удваивается (из-за того, что погрешность приблизительно возводится в квадрат), число операций, необходимых для выполнения очередной итерации, увеличивается приблизительно в 4 раза (так как умножение n-разрядных чисел обычным школьным методом требует по порядку n^2 операций). Значит, наибольшее число операций требует выполнение последней итерации (приблизительно $(\log_2 n)$-й по счету), предыдущая в 4 раза проще, и т. д. Поэтому общее число операций при вычислении корня примерно на треть больше, чем число операций в последней итерации, т. е. оно равно по порядку n^2. Значит, сложность вычисления корня лишь в несколько раз больше сложности умножения n-разрядных чисел. Приведенное рассуждение можно сделать совсем строгим, если ввести необходимые понятия и определения, но здесь неуместно этим заниматься. Таким образом, мы видим, что метод Ньютона по своей вычислительной эффективности по порядку не отличается от школьного метода извлечения квадратного корня, изложенного в § 13.

Однако если нужно вычислить очень большое число значащих цифр корня, то вычисления в методе Ньютона можно существенно ускорить, применив любой из упоминавшихся в § 13 быстрых методов умножения многоразрядных чисел. И в этом случае сложность метода Ньютона по порядку будет равна сложности быстрого метода умножения. Школьный алгоритм вычисления квадратного корня таким замечательным свойством не обладает.

В общем случае (при решении произвольных уравнений) неизвестны удобные необходимые и достаточные условия сходимости метода Ньютона при данной начальной точке x_0. Приведем без доказательства некоторые достаточные условия его сходимости.

Теорема 13 (Фурье). *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, на его концах имеет разные знаки (т. е. $f(a)f(b) < 0$), имеет на нем непрерывные первую и вторую производные, причем везде $f'(x)f''(x) \neq 0$, и $f(a)f''(a) > 0$. Тогда при $x_0 = a$ ньютоновы итерации x_n сходятся к корню, причем если выполнить еще итерации по формуле*

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \qquad y_0 = b,$$

то y_n тоже будет сходиться к корню, но с другой стороны. При этом

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|y_{n+1} - x_{n+1}|}{(y_n - x_n)^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(c)}{f'(c)}\right|,$$

где c — искомый корень.

Словами эту формулу можно выразить так: расстояние между x_n и y_n убывает по квадратичному закону. Это очень быстро, гораздо быстрее, чем в методе вилки. Но последовательность y_n дает гораздо худшее приближение к корню, чем x_n, а именно, доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{y_n-c}{x_n-c}\right| = +\infty.$$

Поэтому в качестве приближения берут x_n, а y_n используют только для контроля достигнутой точности (иногда можно обойтись и без вычисления y_n).

Для ускорения сходимости последовательности y_n Данделен предложил использовать итерации

$$y_{n+1} = y_n - f(y_n)\frac{y_n - x_n}{f(y_n) - f(x_n)}.$$

Вычислять их немного сложнее, но зато справедлива

Теорема 14 (Данделен). *Если выполнены условия Фурье, то*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{y_n-c}{x_n-c}\right| = g(y_0),$$

где g — некоторая монотонная функция, причем

$$\lim_{|y_0-x_0|\to 0} g(y_0) = 0.$$

В качестве ответа обычно берут среднее арифметическое x_n и y_n при последней итерации.

В случае, если уравнение дано в виде $f(x) = x$ (а к этому виду можно привести любое уравнение), можно для его решения использовать простейший итерационный процесс: $x_{n+1} = f(x_n)$. Очевидно, что если y — корень уравнения, то при $x_0 = y$ последовательность стабильна: $x_n = y$.

Если $f(a) > a$, $f(b) < b$, $a < b$, функция $f(x)$ непрерывна, монотонно возрастает и уравнение $f(x) = x$ имеет ровно один корень на отрезке $[a, b]$, то последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ при любом начальном значении сходится к этому корню.

Действительно, если, например, x_0 таково, что $f(x_0) > x_0$, то последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ монотонно возрастает, ограничена (почему?) и поэтому имеет предел, который в силу непрерывности совпадает с корнем.

Можно доказать, что если в окрестности корня производная функции по модулю меньше единицы, то в этой окрестности указанная последовательность сходится к корню. Однако если в окрестности корня выполняется неравенство $|f'(x)| > 1$, то эта последовательность удаляется от корня.

Если уравнение не имеет вида $f(x) = x$, то его можно привести к этому виду по-разному. Иногда после этого метод итераций дает ответ, иногда нет.

Итерационные последовательности вида $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, в особенности не сходящиеся и зацикливающиеся, вызывают в настоящее время большой интерес. Их исследование нетривиально даже в случае квадратного трехчлена, в чем читатель может убедиться, решая следующие задачи.

192. (IMO, 1968.) Пусть

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad f_1(x) = f(x), \quad f_n(x) = f(f_{n-1}(x)).$$

Докажите, что уравнение $f_n(x) = x$

- не имеет действительных корней, если $(b-1)^2 - 4ac < 0$;
- имеет единственный корень, если $(b-1)^2 - 4ac = 0$;
- имеет более одного корня, если $(b-1)^2 - 4ac > 0$.

193. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c > 0$ и уравнение $f(x) = x$ имеет корни x_1, x_2, такие что $x_1 = 1$, $0 < x_2 < 1$. Докажите, что $2a + b > 1$.

194. (ВМО, 1973.) Пусть для квадратного трехчлена $f(x)$ уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что $f(f(x)) = x$ тоже не имеет корней.

195. (Москва, 2000.) Пусть

$$f(x) = x^2 + 2px + p(p-1).$$

Решите уравнения

а) $f(f(f(f(f(x))))) = 0$;

б) $f(f(f(f(f(x))))) = x$.

196*. Решите уравнение $x^8 - 4x^6 + 4x^4 + x - 1 = 0$.

197*. (Москва, 1957.) Пусть

$$f(x) = 1 - x^2, \quad f_1(x) = f(x), \quad f_n(x) = f(f_{n-1}(x)).$$

Решите уравнение $f_n(x) = x$.

198*. (IMO, 1976.) Пусть

$$f(x) = x^2 - 2, \quad f_1(x) = f(x), \quad f_n(x) = f(f_{n-1}(x)).$$

Докажите, что у уравнения $f_n(x) = x$ все корни действительны и различны.

199. Пусть

$$f(x) = 2x^2 - 1, \quad f_1(x) = f(x), \quad f_n(x) = f(f_{n-1}(x)).$$

Докажите, что у уравнения $f_n(x) = 0$ все корни действительны и различны.

200. Решите уравнения

а) $2(2x^2 - 1)^2 - 1 = x$;

б) $2(2x^2 - 1)^2 = 1$.

§ 15. Квадратные корни и уравнение Пелля

> Если дано произвольное число, которое не является квадратом, то найдется также и бесконечное количество таких квадратов, что если этот квадрат умножить на данное число и к произведению прибавить единицу, то результат будет квадратом.
>
> *Пьер Ферма*. Письмо английским математикам (1657)

Рассмотрим указанную в предыдущем разделе последовательность приближений для $\sqrt{2}$:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Очевидно, она состоит из рациональных чисел $x_n = p_n/q_n$, $p_1 = q_1 = 1$, и из приведенного выше рекуррентного соотношения следует рекуррентное соотношение для последовательности пар (p_n, q_n) числителей и знаменателей:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n}{2q_n} + \frac{q_n}{p_n} = \frac{p_n^2 + 2q_n^2}{2q_n p_n}.$$

Из него следует, что

$$p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = (p_n^2 + 2q_n^2)^2 - 2(2q_n p_n)^2 = p_n^4 + 4q_n^4 - 4p_n^2 q_n^2 = (p_n^2 - 2q_n^2)^2 = 1,$$

так как $p_1^2 - 2q_1^2 = -1$, $p_2^2 - 2q_2^2 = (p_1^2 - 2q_1^2)^2 = 1$. Таким образом, получаем бесконечную последовательность решений (но не все решения) уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ в целых (фактически в натуральных) числах. Уравнение $x^2 - Ny^2 = 1$, решение которого ищется в целых числах, называется уравнением Пелля[1]. Выше мы увидели, что при $N = 2$ это уравнение имеет бесконечно много решений. Мы не будем здесь это доказывать. Как видно, задача решения этого уравнения оказалась очень близка к задаче нахождения все более точных приближений к $\sqrt{2}$. Уточним, что решение уравнения Пелля представляет интерес, только если N не является квадратом целого числа.

201. Докажите, что при $N = n^2$, где n — целое, уравнение $x^2 - Ny^2 = 1$ имеет только два решения в целых числах, а произвольное уравнение вида $x^2 - Ny^2 = m$ — конечное число решений.

---

[1] См. брошюру: *Бугаенко В. О.* Уравнение Пелля. М.: МЦНМО, 2010.

При не квадратном N произвольное уравнение $x^2 - Ny^2 = m$ может и не иметь решений, но если имеет, то бесконечно много.

С геометрической точки зрения решение уравнения Пелля $x^2 - Ny^2 = 1$ равносильно нахождению всех *целых точек* (точек с целыми координатами), лежащих на гиперболе $x^2 - Ny^2 = 1$. Очевидно, что подобная задача для эллипса интереса не представляет (очевидно, что таких точек конечное число, зависящее от размеров эллипса), а для параболы она существенно проще, чем для гиперболы.

Удивительно, но такими задачами заинтересовались уже древние греки, хотя, вообще говоря, идея поиска решений уравнения в целых числах им была не близка. Решением уравнений в целых числах стал заниматься в III веке н. э. Диофант, но он в основном искал решения не в целых, а в рациональных числах. Для уравнения Пелля это довольно простая задача. Кстати, Диофант в своей «Арифметике» рассматривал уравнение Пелля при $N = 26, 30$ и искусственным приемом нашел в этих случаях наименьшее решение.

202. Решите уравнение Пелля в рациональных числах.

Греки могли заинтересоваться уравнением Пелля в связи с приближенным вычислением квадратного корня. Возможно, даже пифагорейцы, обнаружившие иррациональность $\sqrt{2}$ и пытавшиеся его вычислить приближенно, кое-что знали о решениях уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$. Почти наверняка что-то знал об уравнении Пелля $x^2 - 3y^2 = 1$ Архимед, который, вероятно, и открыл метод Герона приближенного вычисления квадратных корней. Например, у Архимеда встречается приближение $1351/780$ к $\sqrt{3}$. Непонятно, как он его получил, если не знал, что $1351^2 = 3 \cdot 780^2 + 1$.

203. Пользуясь последовательностью приближений

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2} + \frac{3}{2x_n}$$

для $\sqrt{3}$, найдите бесконечно много решений уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$ в целых числах.

204. Найдите аналогичным образом бесконечное число решений уравнения Пелля $x^2 - 5y^2 = 1$, пользуясь последовательностью приближений

$$x_1 = \frac{9}{4}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2} + \frac{5}{2x_n}.$$

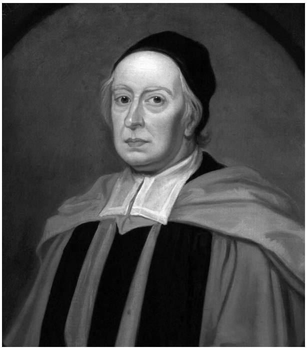
Но скорее всего, греки пришли к решению уравнения Пелля при $N = 2$, рассуждая геометрически (как они всегда делали). Более по-дробно можно прочитать об этом в статье известного голландского математика и историка науки Ван дер Вардена «Уравнение Пелля в математике греков и индусов», опубликованной в 1976 г. в журнале «Успехи математических наук» на русском языке.

По-видимому, первыми научились решать общее уравнение Пелля индийские математики. Основная трудность заключается в поиске минимального решения. Бесконечное же множество решений можно получить из минимального примерно так же, как в задачах 203, 204. В VII веке Брахмагупта нашел минимальное решение для уравнения $x^2 - 92y^2 = 1$, а в XII веке Бхаскара Ачарья описал общий алгоритм (так называемый циклический метод) поиска минимального решения уравнения Пелля. Доказательства корректности метода он, разумеется, не дал. В Европе первым нашел метод решения уравнения Пелля знаменитый Пьер Ферма. Как обычно, он не опубликовал свое решение, а послал в 1657 г. английским математикам задачу — решить уравнение Пелля при $N = 61, 109, 149$. Тот факт, что сам он умел решать уравнение Пелля, подтверждается тем обстоятельством, что среди чисел $N < 100$ минимальное решение уравнения Пелля максимально именно при $N = 61$ (в этом решении $y = 226\,153\,980$), а числа 109, 149 экстремальны в том же смысле среди чисел от 100 до 150. Англичане вначале поняли задачу Ферма как задачу 202, но Ферма разъяснил им их заблуждение. К чести англичан, задачу Ферма они в конце концов решили. Решение опубликовал известный английский математик Валлис, но приписал открытие метода президенту Королевского общества лорду Броункеру, и теперь этот метод носит имя Валлиса — Броункера, хотя доказательства корректности они, как заметил еще Ферма, не дали.

Сам Ферма, впрочем, тоже его не опубликовал, и первое опубликованное доказательство принадлежит знаменитому французскому математику Лагранжу. Эйлер в своем учебнике «Введение в алгебру» по ошибке приписал метод Валлиса — Броункера их современнику Джону Пеллю, который к нему не имеет никакого отношения, но авторитет Эйлера закрепил это название за уравнением $x^2 - Ny^2 = 1$, по-видимому, навечно.

В 1773 г. Лессинг опубликовал задачу о быках, которую якобы Архимед предложил Эратосфену. Большинство историков полагает, что подобную задачу действительно мог поставить Архимед.

В ней 8 неизвестных (обозначающих число животных разного вида), связанных семью линейными уравнениями и двумя условиями,



Джон Валлис

Уильям Броункер

в которых требуется, чтобы некоторые числа были точными квадратами. В книге известного английского математика Дэвенпорта «Высшая арифметика», опубликованной в русском переводе в 1966 г. и недавно вновь переизданной, к которой мы и отсылаем читателя, заинтересовавшегося уравнением Пелля, утверждается, что задача Архимеда сводится к уравнению Пелля $x^2 - 4\,729\,494y^2 = 1$, наименьшее решение которого нашел в 1880 г. Амтор. Оказалось, что в нем y содержит 41 цифру. Текста задачи Дэвенпорт, однако, не приводит. Этот текст в русском стихотворном переводе И. Н. Веселовского звучит так:

Сколько у Солнца коров и быков, сосчитай, иностранец,
Ум навостривши, коль впрямь свойственна мудрость тебе.
Сколько скота выгонялось на долы Сицилии влажной?
Разного цвета стада бог лучезарный имел,
Счетом четыре: из них — одно белоснежное было,
Черным отливом других лоснилась жирная шерсть,
Бурое — третье стадо, четвертое — пестрое. В каждом
Стаде дородных быков было большое число.
Так ты исчислишь быков: найти чтоб число белоснежных,
Надо от черных быков взять половину и треть,
Бурых к ним всех присчитавши (прими это все во вниманье!)
Черных быков число четверти с пятой равно
Пестрых быков, если к ним присчитать в добавление бурых.
Пестрых число, наконец (тех, что остались еще),
Части шестой и седьмой равнялось быков белоснежных,
Если к ним бурых быков всех заодно присчитать.
Если ж коров сосчитать захочешь, получится вот что:
Белых коров число черного стада всего

Трети с четвертою частью равно (безо всякой ошибки).
Черных коров число части четвертой равно
Пестрого стада, коль к ней и пятую часть присчитаем,
Тех, что с быками паслись вместе на общем лугу.
Пятой же части с шестою частию бурого стада
Было равно по числу сонмище пестрых коров.
Бурых коров число равно половине от трети
Вместе с седьмой от числа белого стада голов.
Если сочтешь скота всего там сколько набралось,
Сколько паслось на лугах мясообильных быков,
Сколько удойных коров и сколько каждого цвета,
Не назовет уж никто в числах невеждой тебя.
Все же и к мудрым еще тебя не причислят за это,
Коль не учтешь ты еще разных повадок быков:
Если смешается черных быков с белоснежными стадо,
То занимают они на поле точный квадрат
С равной длине шириною, и эта несчетная масса
Поле Тринакии все сплошь заполняет собой.
Если же бурые все и пестрые вместе сберутся
(А остальные от них будут отдельно пастись,
Иль все равно, если к ним придут и все остальные),
Так, что в переднем ряду станет один, а затем
В каждом дальнейшем ряду все больше, то будет в фигуре,
Что заполняют собой все они, три стороны:
Если сумеешь все это найти и взором духовным
Стада размеры объять сам и другим передать,
Гордо шествуй вперед, кичася великой победой:
Знай, что, других превзойдя, первый по мудрости ты.

Формулировка задачи, как видим, довольно темная, и некоторые авторы утверждают, что она приводит к уравнению Пелля с

$$N = 410\,286\,423\,278\,424.$$

В этом случае утверждается, что общее количество голов скота выражается числом, имеющим 206 545 десятичных знаков, т. е. для того чтобы только записать это число, придется занять 60 страниц убористого шрифта.

Поэтому трудно сказать, умел ли Архимед сам решать эту задачу или приписываемый ему текст был сочинен (или по крайней мере дополнен) самим Лессингом, тем более что примерно в это же время Лагранж опубликовал доказательство существования у уравнения Пелля бесконечного множества решений.

§ 16. Оценки корней уравнений

Приближенное решение уравнений с высокой точностью — работа, недостойная христианина.

Из переписки математиков XVII века, цитируется по книге *Э. Уиттекера и Г. Робинсона* «Математическая обработка результатов наблюдений» (1925)

Методы приближенного вычисления корней квадратных уравнений в экзаменационных условиях нужны, как правило, для того, чтобы сравнивать найденные иррациональные корни с некоторыми другими числами в задачах, где решение квадратных уравнений является не самоцелью, а фрагментом решения более сложной задачи.

Обычно высокой точности вычисления корней при этом не требуется. Поэтому иногда можно заменить приближенное вычисление корней их оценкой одним из приемов, излагаемых ниже. Мы излагаем эти приемы в виде задач, к которым в некоторых случаях даются указания.

205. Трехчлен x^2+px+q, такой что $p \geqslant 0 > q$ или $p, q < 0$, имеет единственный положительный корень. В первом случае он не больше $\sqrt{|q|}$.

206. Если $q \geqslant 0$, то корни трехчлена x^2+px+q по модулю не превосходят $|p|$.

207. Если $p, q > 0$, то корни трехчлена x^2+px+q заключены между $-\max\{p, q/p\}$ и $-\min\{p, q/p\}$.

208. Корни трехчлена x^2+px+q во всех случаях по модулю не превосходят

- $1+\max\{|q|, |p|\}$;
- $\sqrt{1+p^2+q^2}$;
- $|p|+|q/p|$.

Указание. Если z — корень, то

$$|z|^2 = |-pz-q| \leqslant |p||z|+|q|,$$

а так как при $\beta = |p|+|q/p|$

$$|p|\beta+|q| = p^2+2|q| < \left(|p|+\left|\frac{q}{p}\right|\right)^2 = \beta^2,$$

в силу монотонности получаем, что $|z| < \beta$.

- $\sqrt{|q|} + |p| \leqslant 2\max\{\sqrt{|q|}, |p|\}$.
  Указание. $\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \leqslant p + \sqrt{q}$.
- $\max\{\sqrt{2|q|}, 2|p|\}$.
  Указание. Пусть $\beta = \max\{|2p|, \sqrt{2|q|}\}$. Если z — корень и $|z| > \beta$, то $|z|^2/2 > |p| \cdot |z|$, $|q| < |z|^2/2$,
  $$|p| \cdot |z| + |q| < \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^2}{2} = |z|^2 = |-pz - q| \leqslant |p| \cdot |z| + |q|,$$
  что дает противоречие.
- $\max\{\sqrt{3|q|}, 3|p|/2\}$.
  Указание. Пусть $\beta = \max\{|3p/2|, \sqrt{3|q|}\}$. Если z — корень и $|z| > \beta$, то $2|z|^2/3 > |p| \cdot |z|$, $|q| < |z|^2/3$,
  $$|p| \cdot |z| + |q| < \frac{2|z|^2}{3} + \frac{|z|^2}{3} = |z|^2 \leqslant |p| \cdot |z| + |q|,$$
  что дает противоречие.
- $\dfrac{\max\{\sqrt{|q|}, |p|/2\}}{\sqrt{2} - 1}$.
  Указание. Пусть $\beta = \max\{|p/2|, \sqrt{|q|}\}$. Если z — корень, то
  $$|z|^2 \leqslant |p| \cdot |z| + |q| \leqslant 2\beta|z| + \beta^2 = (|z| + \beta)^2 - |z|^2.$$
  Отсюда имеем $|z| \leqslant \beta/(\sqrt{2} - 1)$.

Заметим, что для нахождения нижней границы для положительных корней вместо $x^2 + px + q$ можно рассмотреть $x^2 + (p/q)x + 1/q$, а для получения границ отрицательных корней вместо $x^2 + px + q$ можно рассмотреть $x^2 - px + q$.

209. Если у трехчлена $x^2 + px + q$ в точке a значение $a^2 + pa + q \geqslant 0$, $2a + p \geqslant 0$, то для любого $b > a$ выполняется $b^2 + pb + q \geqslant 0$, $2b + p \geqslant 0$, в частности все корни не превосходят a.

Предлагаем читателю распознать в предыдущих задачах частные случаи следующих теорем, которые в этой книжке лучше оставить без доказательства.

Теорема 15 (Декарт). *Многочлен $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ с одной переменой знака имеет единственный положительный корень. Многочлен $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ имеет положительных корней не больше, чем число перемен знака в последовательности его коэффициентов (а если меньше, то на четное число).*

Теорема 16 (Ньютон). *Если у многочлена* $p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ *последовательность производных* $p_n(a), p_n'(a), \ldots, p_n^{(n-1)}(a)$ *неотрицательна, то она останется такой же и в любой точке* $b > a$. *Как следствие получается, что любое такое значение a служит верхней границей корней многочлена.*

Теорема 17 (Маклорен). *Корни произвольного многочлена* $g(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ *по модулю не превосходят*

- $1 + \max\limits_{k<n} \left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|$;
- $\rho + \max\limits_{k<n} \left|\dfrac{a_k}{a_n\rho^{n-k-1}}\right|$ *при любом* $\rho > 0$;
- $2 \max\limits_{k<n} \sqrt[n-k]{\left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|}$;
- $\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \max\limits_{k<n} \sqrt[n-k-1]{\left|\dfrac{a_k}{a_{n-1}}\right|}$.

Колин Маклорен

Теорема 18 (Энестрём — Какея). *Если все коэффициенты многочлена*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

положительны, то модули всех его корней заключены между

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{a_{i-1}}{a_i}, \quad \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{a_{i-1}}{a_i}.$$

Теорема 19 (Пойа — Сегё). *Модули корней многочлена*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

не превосходят $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (n|a_{n-k}|)^{1/k}$, *а также не превосходят*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \left(\frac{2^n-1}{\binom{n}{k}}|a_{n-k}|\right)^{1/k}.$$

Теорема 20 (Цассенхауз). *Корни произвольного многочлена*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

по модулю не превосходят

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\left|a_{n-k}/\binom{n}{k}\right|^{1/k}}{2^{1/n}-1}.$$

§ 17. Разные задачи о квадратных трехчленах

> Мораль этого вечера выделилась с хрустальной ясностью: математика — это нечто бесконечно более интересное, чем решение квадратных уравнений…
>
> *Апостолос Доксиадис.* Дядя Петрос и проблема Гольдбаха (1992)

Предлагаем для самостоятельного решения несколько задач, близких по теме приведенным выше.

210. Сколько существует уравнений вида $x^2 - px - q = 0$, где p и q — натуральные числа, положительный корень которых меньше заданного натурального числа r?

211. (ВМО, 1997.) Среди трехчленов $x^2 + px + q$, где $0 < p, q < 1998$ — целые, каких больше: имеющих целые корни, или не имеющих действительных корней?

212. Пусть x_1, x_2 различные корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + px + q$. Доказать, что

$$\frac{1}{2x_1 + p} + \frac{1}{2x_2 + p} = 0, \qquad \frac{x_1}{2x_1 + p} + \frac{x_2}{2x_2 + p} = 1.$$

213. (С.-Петербург, 1998.) Сумма четырех корней двух квадратных трехчленов f, g с одинаковыми старшими коэффициентами равна нулю. Докажите, что сумма корней трехчлена $f + g$ тоже равна нулю.

214. (С.-Петербург, 1997.) Даны три квадратных трехчлена, никакие два из которых не имеют общих корней. Каждый из этих трехчленов имеет общий корень с суммой двух оставшихся. Доказать, что сумма этих трехчленов равна нулю.

215. (Венгрия, 1916.) Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x + b} = 0, \qquad a > 0,\ b > 0,$$

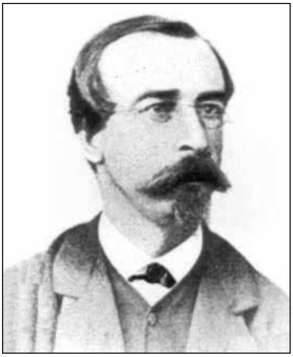
имеет два корня, первый из которых заключен между $a/3$ и $2a/3$, а второй — между $-2b/3$ и $-b/3$.

Предыдущая задача является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 21 (Лагерр). *Уравнение*

$$\frac{1}{x-a_1}+\ldots+\frac{1}{x-a_n}=0$$

имеет $n-1$ корней, лежащих каждый в своем интервале (a_i, a_{i+1}), $i=1,\ldots,n-1$. Если интервал (a_i, a_{i+1}) разделить на n равных частей, то лежащий в нем корень не может попасть ни в одну из частей, примыкающих к концам интервала.



Эдмон Лагерр

216. (Польша, 1969.) Если

$$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0, \quad m>0,$$

то трехчлен ax^2+bx+c имеет корень между 0 и 1.

217. Если уравнение $a+bx+cx^2=0$ имеет только действительные корни, то это же верно для уравнения $a+bx+cx^2/2=0$.

218. (С.-Петербург, 1998.) Если

$$(a+b+c+d)^2 \geqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2),$$

то трехчлен $(x-a)(x-b)+(x-c)(x-d)$ имеет корень.

219. (С.-Петербург, 2003.) Модуль разности корней квадратного трехчлена ax^2+bx+c не меньше 10. Докажите, что модуль разности корней трехчлена $ax^2+2bx+3c$ больше 17.

220. (Москва, 1965.) Найдите множество всех значений, которые могут принимать действительные корни трехчленов x^2+px+q, $|p|, |q| \leqslant 1$.

221. (С.-Петербург, 1997.) Корень трехчлена ax^2+bx+b умножили на корень трехчлена ax^2+ax+b и получили единицу. Найдите эти корни.

222. (Англия, 1967.) Пусть a, b — корни трехчлена x^2+px+1, а c, d — корни трехчлена x^2+qx+1. Докажите, что

$$(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=q^2-p^2.$$

223. (Польша, 1960.) Найдите необходимое и достаточное условие того, что квадратные уравнения $x^2+p_ix+q_i=0$, $i=1,2$, имеют общий корень.

224. Докажите для квадратного трехчлена x^2+px+q с корнями x_1, x_2 неравенство

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|x^2+px+q| \geqslant \frac{1}{2}\prod_{|x_i|>1}|x_i|$$

(если $|x_i| \leqslant 1$, $i = 1, 2$, то считаем произведение в правой части равным 1).

225. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $1 + kx + x^2 = 0$. Найдите все k, при которых справедливо неравенство $(x_1/x_2) + (x_2/x_1) > 10$.

226. (Югославия, 1981.) Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами и с $a > 0$ имеет два корня на интервале $(0, 1)$. Найдите минимальное значение a.

Задачи о представлениях трехчленов в разных формах

227. Докажите, что любой неотрицательный квадратный трехчлен (т. е. не принимающий отрицательных значений) можно представить в виде суммы двух трехчленов вида $c(x + a)^2$ с положительными старшими коэффициентами.

228. (Москва, 2004.) Докажите, что любой квадратный трехчлен можно представить в виде суммы двух трехчленов с нулевыми дискриминантами.

229. Квадратный трехчлен, принимающий неотрицательные значения при неотрицательных x, можно представить в виде

$$(Ax - B)^2 + C^2x,$$

и обратно, любой трехчлен такого вида принимает неотрицательные значения при неотрицательных x.

230*. Докажите, что квадратный трехчлен, принимающий положительные значения при положительном x, можно представить в виде отношения двух многочленов с положительными коэффициентами.

231*. Докажите, что квадратный трехчлен, принимающий неотрицательные значения при $|x| \leqslant 1$, можно представить в виде

$$(Ax + B)^2 + C^2(1 - x^2),$$

и обратно, любой трехчлен такого вида принимает неотрицательные значения при $|x| \leqslant 1$.

232*. Докажите, что трехчлен, положительный при любом $x \in (-1, 1)$, можно представить в виде суммы многочленов вида $A_{ij}(1-x)^i(1+x)^j$, $i, j \geqslant 0$, $i + j \leqslant 2$, с положительными коэффициентами.

233. Докажите, что для любого линейного двучлена найдется такой неотрицательный квадратный трехчлен, что их сумма также будет неотрицательна.

234*. Докажите, что любой квадратный трехчлен можно представить в виде разности монотонно возрастающих многочленов.

Квадратные трехчлены с целыми коэффициентами

В следующих задачах даются полезные признаки существования целых или рациональных корней у квадратных трехчленов. Многие из этих задач имеют обобщения на произвольные многочлены с целыми коэффициентами.

Например, следующее утверждение вытекает из теоремы Гаусса, но может быть доказано и без нее.

235. Докажите, что если трехчлен $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень, то оба его корня — целые.

236. (Венгрия, 1907.) Докажите, что трехчлен $x^2 + 2px + 2q$ при нечетных p, q не может иметь рациональных корней.

237. (Польша, 1959.) Докажите, что если квадратный трехчлен с целыми коэффициентами имеет рациональный корень, то хотя бы один из коэффициентов четен.

238. (Москва, 1991.) Докажите, что если квадратный трехчлен с целыми коэффициентами принимает нечетные значения при $x = 0$ и $x = 1$, то он не имеет целых корней.

239. (Польша, 1968.) Докажите, что если квадратный трехчлен с целыми коэффициентами при трех целых значениях x принимает значения ± 1, то он не имеет целых корней.

240. (Москва, 1958.) Докажите, что если два квадратных трехчлена с единичными старшими коэффициентами и с целыми остальными коэффициентами имеют общий *нецелый* корень, то эти трехчлены совпадают.

241. (ВМО, 1994.) Найдите все целые p, при которых квадратный трехчлен $x^2 + px + p$ имеет целый корень.

242. Найдите целое a, при котором трехчлен $(x - a)(x - 10) + 1$ имеет два целых корня.

243. Докажите, что квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет целые коэффициенты тогда и только тогда, когда a, $f(0)$, $f(1)$ — целые числа.

244*. (ВМО, 1969.) При каком наименьшем натуральном a у квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами корни различны, положительны и меньше 1?

245. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если в ее условии отбросить требование различия корней?

В следующих задачах речь идет не о корнях, а о значениях трехчленов с целыми коэффициентами.

246. Докажите, что трехчлен $x^2 + 5x + 16$ ни при каком целом x не делится на 169.

247. Квадратный трехчлен при любом целом x принимает значения, равные четвертой степени натурального числа. Докажите, что он равен константе.

248*. (Москва, 1955.) Трехчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x принимает значения, являющиеся точными квадратами. Докажите, что $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$, где d, e — целые числа.

В международном стандарте LTE (это один из стандартов для мобильной связи) в рекомендованном алгоритме кодирования для перемешивания данных используется отображение множества чисел от 0 до $N - 1$ в себя, определяемое равенством

$$g(x) = (bx + ax^2) \bmod N,$$

где операция $x \bmod N$ вычисляет остаток от деления на N. В стандарте явно указаны значения $N, a, b,$ для которых указанное отображение является перестановкой (т. е. взаимно однозначным отображением). Определяющий подобное отображение квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно назвать перестановочным по модулю N. Перестановочными могут быть и многочлены высоких степеней, но в стандарте выбраны именно трехчлены из-за простоты их вычисления. Конечно, еще проще вычисляются линейные двучлены, но они порождают недостаточно запутанные перестановки. Поэтому на перестановочные квадратные трехчлены накладывается еще условие $a \bmod N \neq 0$.

249. Докажите, что двучлен $ax + b$ будет перестановочным по модулю N тогда и только тогда, когда a и N взаимно просты (т. е. не имеют общих делителей).

250*. Докажите, что квадратный трехчлен

$$ax^2 + bx + c, \quad a \bmod N \neq 0,$$

может быть перестановочным по модулю N в том и только в том случае, когда N не свободно от квадратов (т. е. делится на квадрат некоторого натурального числа) или четно.

Целозначные квадратные трехчлены

Многочлен называется *целозначным*, если он принимает во всех целых точках только целые значения. Целозначными будут многочлены с целыми коэффициентами, но не только они. О таких многочленах известно удивительно много интересных задач. Далее для простоты мы их формулируем только для случая квадратных трехчленов.

251. Докажите, что операция $\Delta(P) = P(x+1) - P(x)$ переводит целозначный многочлен в целозначный.

252. Докажите, что если квадратный трехчлен $P(x)$ целозначный, то трехчлен $2P(x)$ имеет целые коэффициенты.

253. Докажите, что целозначный квадратный трехчлен имеет вид

$$a\frac{x(x-1)}{2} + bx + c,$$

где a, b, c — целые числа, и обратно, все такие многочлены — целозначные.

254. Докажите, что квадратный трехчлен, принимающий в трех подряд идущих целых точках только целые значения, является целозначным.

255. (Польша, 1957.) Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ принимает при целых x только целые значения. Докажите, что это возможно тогда и только тогда, когда $2a$, $a + b$, c — целые числа.

256. (Румыния, 1962.) Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ принимает при целых x только целые значения. Найдите необходимые и достаточные условия того, что все эти значения а) четны; б) нечетны; в) кратны трем.

257. Докажите, что квадратный трехчлен, принимающий в точках 0, 1, 4 только целые значения, принимает целые значения в любой целой точке вида m^2, где m — целое число.

Следующая задача на олимпиаде предлагалась для произвольного многочлена.

258. (Москва, 1981.) Квадратный трехчлен со старшим коэффициентом 1 при целых значениях аргумента принимает целые значения, делящиеся на m. Докажите, что $m = 1$ или 2.

Следующая задача является частным случаем теоремы Гаусса.

259. (*Гаусс*.) Докажите, что квадратный трехчлен

$$p(x) = c_0 + c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x),$$

где c_i — целые числа, а

$$g_1(x) = \frac{x-1}{q-1}, \quad g_2(x) = \frac{(x-1)(x-q)}{q(q-1)(q^2-1)},$$

при $x = 1$, q, q^2 принимает целые значения; и наоборот, квадратный трехчлен p при $x = 1, q, q^2$ принимает целые значения, если и только если

$$p(x) = c_0 + c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x),$$

где c_i — целые числа.

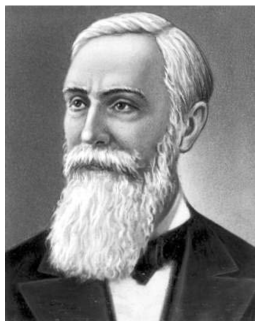
§ 18. Квадратные трехчлены, наименее уклоняющиеся от нуля

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, U — полином степени n с произвольными коэффициентами. Если выберем эти коэффициенты так, чтобы разность $f(x) - U$ от $x = a - h$ до $x = a + h$ лежала в пределах, наиболее близких к нулю, то разность $f(x) - U$ будет обладать следующим свойством: между наибольшим и наименьшим значением разности $f(x) - U$ в пределах от $x = a - h$ до $x = a + h$ встречается по крайней мере $n + 2$ раза одно и тоже численное значение.

П. Л. Чебышёв. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. (Собр. соч., т. 2, 1947)

Здесь мы в частных случаях встречаемся со знаменитыми результатами П. Л. Чебышёва о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, легших в основу теории приближений.

Следующая задача выглядит как одна из типичных задач на решение уравнений с параметром.



Пафнутий Львович Чебышёв

260. Найдите все a, для которых уравнение $|x^2+px+q|=a+y^2$ при любых p, q имеет решение, удовлетворяющее неравенству $|x| \leqslant 1$.

Действительно, задача равносильна нахождению всех a таких, что при всех p, q

$$\max_{|x|\leqslant 1} |x^2 + px + q| \geqslant a.$$

Последнее условие равносильно неравенству

$$\min_{p,q} \max_{|x|\leqslant 1} |x^2 + px + q| \geqslant a.$$

Значит, задача свелась к нахождению трехчлена, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Вот еще одна задача такого же рода.

261. Найти все a, при которых уравнение $(x^2+px+q)^2+y^2=a$ при любых p, q имеет решение, удовлетворяющее неравенству $1 \leqslant x \leqslant 2$.

262. (Ленинград, 1965.) Среди всех трехчленов $x^2 + px + q$ найдите тот, у которого $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |x^2 + px + q|$ принимает наименьшее возможное значение.

В таких задачах труднее всего найти ответ, но если он найден, то доказать его правильность уже проще. Поэтому подскажем: искомый экстремальный трехчлен есть $x^2-1/2$, а его уклонение от нуля, т. е. максимум на отрезке $[-1,1]$, равно $1/2$.

Если же взять любой трехчлен $f(x)=x^2+px+q$, то, заметив, что $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$ независимо от p,q, выводим отсюда неравенство

$$4m \geqslant |f(-1)|+2|f(0)|+|f(1)| \geqslant |f(-1)-2f(0)+f(1)|=2,$$

где m — упомянутый максимум.

Но этого недостаточно, нужно доказать строгое неравенство при $f(x)\neq x^2-1/2$. Для этого просто найдем условие, когда доказанное неравенство превращается в равенство. Необходимое условие есть

$$f(-1)=f(1)=-f(0)=\frac{1}{2}.$$

Ясно, что этому условию удовлетворяет только трехчлен $x^2-1/2$, так как система уравнений

$$\begin{cases} 1+q-p=\dfrac{1}{2}, \\ 1+q+p=\dfrac{1}{2}, \\ q=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

имеет единственное решение $p=0$, $q=-1/2$.

263. Среди всех трехчленов

- $f(x)=px^2+x+q$,
- $f(x)=px^2+qx+1$,
- $f(x)$ таких, что $f(a)=b$, $b\neq 0$, $|a|>1$,

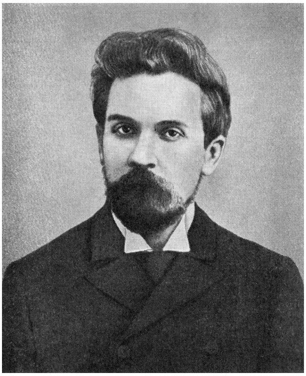
найти тот, у которого $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$ принимает наименьшее возможное значение.

264. Среди всех двучленов $x+p$ найти тот, у которого величина $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|x+p|$ принимает наименьшее возможное значение.

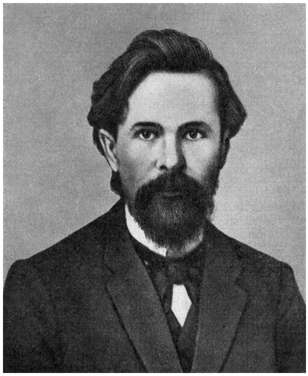
265. Среди всех двучленов x^2+p найти тот, у которого величина $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|x^2+p|$ принимает наименьшее возможное значение.

266. Среди всех двучленов x^2+px найти тот, у которого величина $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|x^2+px|$ принимает наименьшее возможное значение.

267. Среди всех трехчленов $f(x)$ таких, что $f(a)=b$, $b\neq 0$, $|a|>1$, найти тот, у которого $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$ принимает наименьшее возможное значение.



Владимир Андреевич Марков



Андрей Андреевич Марков

Квадратные трехчлены, ограниченные на данном отрезке

Большинство задач этого раздела являются просто переформулировками задач предыдущего раздела.

Следующая задача является частным случаем общей задачи Владимира Маркова[1], в которой для произвольных многочленов нужно максимизировать заданные линейные комбинации их коэффициентов.

268. Среди всех трехчленов ax^2+bx+c таких, что при $|x|\leqslant 1$ справедливо $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$, найти тот (или те), у которого максимальна следующая величина: $|a|$, $|b|$, $|c|$, $|4a+2b+c|$, $|a-b+c|$, $|a+b+c|$.

Следующая задача переносит первый пункт задачи 268 на случай кубических многочленов.

269. (Чехословакия, 1974.) Среди всех кубических многочленов

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

таких, что при $|x|\leqslant 1$ справедливо $|f(x)|\leqslant 1$, найдите тот, у которого максимально $|a|$.

Задачу 269 можно, конечно, сформулировать и для многочленов произвольной степени (однако решить ее существенно труднее).

270. (Ленинград, 1980.) Среди всех трехчленов ax^2+bx+c таких, что при $0\leqslant x\leqslant 1$ справедливо $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$, найдите тот, у которого максимально $|a|+|b|+|c|$.

---

[1] Владимир Марков — младший брат выдающегося математика А. А. Маркова, сам талантливый математик, умерший в 26 лет от туберкулеза.

271*. (Венгрия, 1965.) Среди всех трехчленов ax^2+bx+c таких, что при $0\leqslant x\leqslant 1$ справедливо $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$, найдите тот, у которого максимально $8a^2/3+2b^2$.

272. Пусть квадратный трехчлен удовлетворяет условию $|f(x)|\leqslant M$ при $|x|\leqslant 1$. Докажите, что тогда при любом x, $|x|>1$, справедливо неравенство $|f(x)|\leqslant M|2x^2-1|$.

273. (С.-Петербург, 2003.) Для любого квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ такого, что при $0\leqslant x\leqslant 1$ справедливо $|f(x)|\leqslant 1$, докажите, что $f(-1/2)\leqslant 7$ и найдите трехчлен, для которого достигается равенство.

274. (ВМО, 1973.) Пусть при $|x|\leqslant 1$ выполнено $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$. Докажите, что при $|x|\leqslant 1$ выполнено $|cx^2+bx+a|\leqslant 2$.

275*. (Венгрия, 1914.) Среди всех трехчленов ax^2+bx+c таких, что при $|x|\leqslant 1$ выполнено $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$, найдите тот, у которого максимально значение $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|2ax+b|$.

276*. (Польша, 1970.) Среди всех трехчленов ax^2+bx+c таких, что при $0\leqslant x\leqslant 1$ выполнено $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$, найдите тот, у которого максимально b.

Отметим, что две предыдущие задачи являются частными случаями задачи, поставленной Д. И. Менделеевым в одной из своих работ, посвященных теории растворов, в частности растворению спирта в воде[1]. В общем виде эта задача была решена его современником, знаменитым русским математиком А. А. Марковым в работе «Об одном вопросе Д. И. Менделеева».

[1] В этих работах им была определена оптимальная концентрация спирта в водке, ставшая с тех пор стандартом, — 40 градусов.

§ 19. Комплексные числа

> Цикл завершился. Я начну свою жизнь…с той точки, где дядя Петрос с помощью грязного трюка свернул меня с пути, который снова считаю правильным… Я… в тот же вечер пошел в офис регистратора и заполнил свой выбор курсов на начавшийся семестр: введение в анализ, введение в комплексный анализ, введение в современную алгебру и общую топологию. Да, и конечно, я указал свою специализацию: Математика.
>
> *Апостолос Доксиадис.* Дядя Петрос и проблема Гольдбаха (1992)

Эти числа возникают при попытке решить квадратные уравнения, которые не имеют действительных корней. Любое квадратное уравнение эквивалентно уравнению вида $x^2 = c$. Если $c < 0$, то корнями уравнения $x^2 = c$ являются два чисто мнимых числа $x_1 = \sqrt{|c|}i$, $x_2 = -\sqrt{|c|}i$, т. е. $\sqrt{c} = \pm\sqrt{|c|}i$. Здесь число i — мнимая единица — обладает свойством $i^2 = i \cdot i = -1$, т. е. является одним из корней квадратного уравнения $x^2 = -1$ (другим корнем должно быть число $-i$). Чтобы рассматривать корни произвольных квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом, нужно ввести в рассмотрение суммы вида $z = a + bi$, где a и b — действительные числа. Впервые комплексные числа появились (в туманной форме) у средневековых итальянских математиков Дж. Кардано и Р. Бомбелли.

Арифметика комплексных чисел

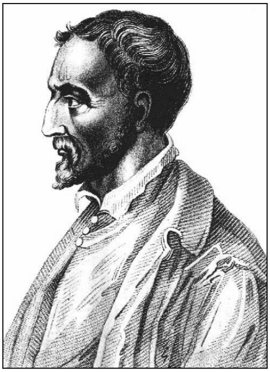
> Умолчим о нравственных муках, и перемножим числа $5 + \sqrt{-15}$ и $5 - \sqrt{-15}$. Их произведение равно $25 - (-15) = 40$… Арифметические соображения становятся все более неуловимыми, достигая предела столь же утонченного, сколь и бесполезного.
>
> *Джироламо Кардано.* Ars Magna, глава 37 (1545)

Для выражений вида $z = a + bi$, называемых комплексными числами, можно построить свою арифметику.

У комплексного числа $z = a + bi$ число a называется действительной частью и обозначается $\operatorname{Re} z$, а число b называется мнимой частью и обозначается $\operatorname{Im} z$.

Определим сложение и умножение чисел z_1, z_2 следующими формулами:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$



Джироламо Кардано

где a_1, a_2, b_1, b_2 — действительные числа. Заметим, что при сложении мы почленно складываем действительные части a_1, a_2 и мнимые части b_1, b_2. При умножении мы раскрываем скобки и как обычно перемножаем слагаемые, пользуясь только свойством мнимой единицы $i \cdot i = -1$.

Очевидно, что для любого комплексного числа $z = a + bi$ есть противоположное $-z = -a - bi$:

$$z + (-z) = 0 + 0i = 0.$$

Чуть менее очевидно, что для $z \neq 0$ есть обратное число (относительно умножения)

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i.$$

Например,

$$(3 + 4i)^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i, \quad (1 + i)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Обозначим через $|z|$ неотрицательное действительное число

$$\sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

называемое модулем комплексного числа z. Через $\bar{z}$ обозначим комплексное число $\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z = a - ib$, называемое сопряженным к z комплексным числом.

Например,

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \overline{3 + 4i} = 3 - 4i.$$

277. Проверьте, что

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}, \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

Уравнение $z_2 w = z_1$ с комплексной неизвестной w при $z_2 \neq 0$ имеет единственное решение $w = z_1 \cdot z_2^{-1}$. Найдите это решение непосредственно.

Число $z_1 \cdot z_2^{-1}$ называется частным чисел z_1, z_2 и обозначается $\dfrac{z_1}{z_2}$. Например,

$$\frac{1}{3-4i} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}\,i,$$

$$\frac{3+4i}{3-4i} = (3+4i)\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\,i\right) = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}\,i,$$

$$\text{если } |z| = 1, \text{ то } \frac{1}{z} = \bar{z}.$$

Иногда деление комплексных чисел можно выполнить быстрее, чем пользуясь непосредственным определением:

$$\frac{8-27i}{2+3i} = \frac{2^3 + (3i)^3}{2+3i} = 2^2 - 6i - 9 = -5 - 6i.$$

Далее множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$, а множество всех действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

278. Проверьте, что для любых $z, w \in \mathbb{C}$

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}},$$

где в последнем тождестве $w \neq 0$.

§ 20. Геометрия комплексных чисел

…Прошу вас обратить внимание… что сомнения, мешавшие старинным писателям использовать арифметическую терминологию в геометрии, которые могли быть лишь следствием их неспособности ясно осознать связь между этими дисциплинами, внесли много неясностей и путаницы в их объяснения.

Рене Декарт. Геометрия (1637)

Для комплексных чисел есть удобная геометрическая интерпретация (предложенная независимо датчанином Весселем и французом Арганом и ставшая популярной благодаря работам Гаусса) — число $a+bi$ изображают точкой плоскости с координатами (a, b).

Эквивалентным образом, комплексные числа можно изображать векторами, выходящими из начала координат и с концом в точке (a, b). Множество всех действительных чисел при этом изображается одной из осей координат, называемой *действительной осью*, а множество всех *чисто мнимых чисел*, т. е. чисел с нулевой действительной частью, изображается другой осью координат, называемой *мнимой осью*. Модулем комплексного числа является длина изображающего его вектора.

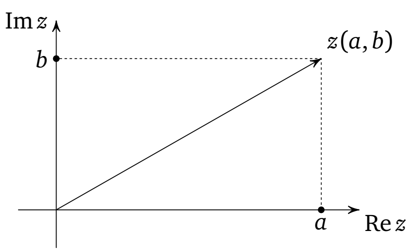


Рис. 29. Геометрическое изображение комплексного числа

279. Пусть w — комплексное число. Докажите, что геометрическое место точек z таких, что $|z-w| = c$, является окружностью.

280. Пусть $w_1 \neq w_2$ — комплексные числа. Докажите, что геометрическое место точек z таких, что

$$|z-w_1| = |z-w_2|,$$

является прямой, а геометрическое место точек z таких, что

$$\frac{|z-w_1|}{|z-w_2|}=c,$$

при фиксированном $c\neq 1$ является окружностью.

281. Пусть $w_1\neq w_2$ — комплексные числа. Докажите, что геометрическое место точек z таких, что

$$|z-w_1|+|z-w_2|=c,$$

при $c>|w_1-w_2|$ является эллипсом, а геометрическое место точек z таких, что

$$|z-w_1|-|z-w_2|=c,$$

при $c\neq 0$ является гиперболой.

Очевидно, что на комплексной плоскости числа z и $\bar{z}$ расположены симметрично относительно действительной оси (рис. 30).

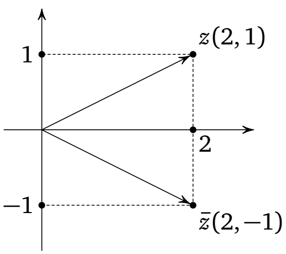


Рис. 30. Операция сопряжения

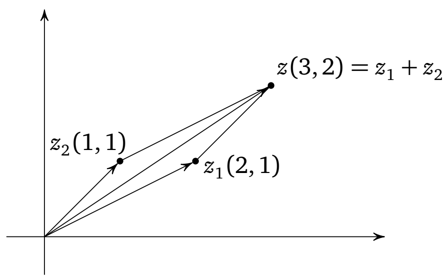


Рис. 31. Сложение комплексных чисел

Операция сложения комплексных чисел интерпретируется как сложение векторов (рис. 31).

Угол φ, образованный вектором Oz и положительным направлением действительной оси Ox, называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\arg z$.

Аргумент определяется только для ненулевых чисел и лежит в пределах $0\leqslant \arg z<2\pi$.

Например,

$$\arg(1+i)=\frac{\pi}{4},\qquad \arg(1-i)=\frac{7\pi}{4},$$
$$\arg(-1-i)=\frac{5\pi}{4},\quad \arg(-1+i)=\frac{3\pi}{4}.$$

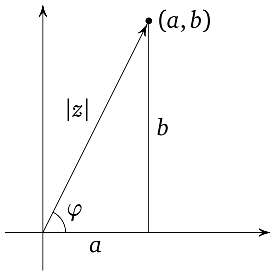


Рис. 32. Тригонометрическая форма

Через действительную и мнимую части числа легко выразить тригонометрические функции от аргумента φ:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Можно принять эти равенства и за определения тригонометрических функций, если вы их не знаете. Отсюда

$$a = \sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi = |z|\cos\varphi,$$
$$b = \sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi = |z|\sin\varphi,$$

значит,

$$z = a + bi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Получившаяся тригонометрическая форма записи числа z удобна при умножении.

282. Используя тригонометрические теоремы сложения, проверьте, что если

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$z_1\cdot z_2 = |z_1\cdot z_2|\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

В последнем равенстве предполагается, что $z_2 \neq 0$.

283. Из предыдущих равенств выведите, что

$$\arg(z_1z_2) = (\arg z_1 + \arg z_2) \bmod 2\pi,$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = (\arg z_1 - \arg z_2) \bmod 2\pi.$$

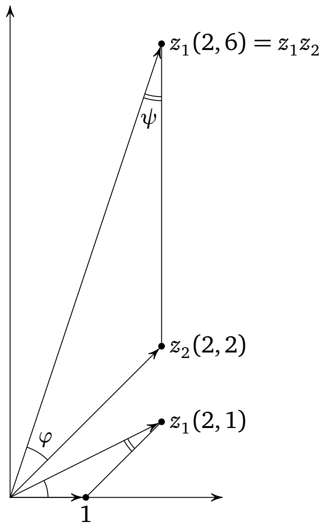


Рис. 33. Умножение комплексных чисел

284. Проверьте равенство

$$\frac{1}{i} = \frac{i+1}{i-1} = \left(\frac{5i+1}{5i-1}\right)^4 \frac{239i-1}{239i+1}.$$

285. Докажите, что при умножении чисел z_i и z_2 (рис. 33) треугольники с вершинами в точках $0, 1, z_1$ и $0, z_2, z$ подобны.

286. Постройте циркулем и линейкой сумму, разность, произведение и частное двух данных комплексных чисел (действительная и мнимая оси заданы). Попробуйте сделать это самым экономным образом.

Скалярным произведением двух комплексных чисел $z = a + ib$ и $w = c + id$ назовем число $\langle w, z\rangle = \mathrm{Re}(w\bar{z}) = ac + bd$.

287. Проверьте следующие свойства скалярного произведения:

- симметричность: $\langle w, z\rangle = \langle z, w\rangle$;
- однородность: $a\langle w, z\rangle = \langle aw, z\rangle$ для любого $a \in \mathbb{R}$;
- аддитивность: $\langle w_1 + w_2, z\rangle = \langle w_1, z\rangle + \langle w_2, z\rangle$;
- неотрицательность квадрата: $\langle z, z\rangle = |z|^2 \geqslant 0$.

Комплексные числа z и w назовем *ортогональными*, если $\langle w, z\rangle = 0$.

288. Проверьте, что

- числа z и iz всегда ортогональны;
- числа z и w ортогональны $\Longleftrightarrow z = iaw$, где $a \in \mathbb{R}$.

Скалярное произведение чисел z и w совпадает со скалярным произведением векторов z и w, которое геометрически определяется как произведение длин векторов на косинус угла между ними.

289. Проверьте, что, действительно, для ненулевых векторов

$$|z| \cdot |w| \cos \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \operatorname{Re}(w\bar{z}) = \langle w, z\rangle.$$

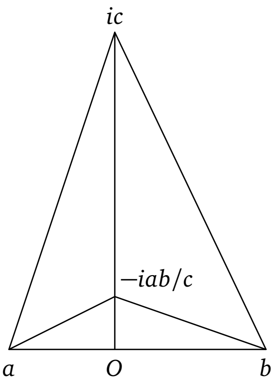


Рис. 34. Теорема об ортоцентре

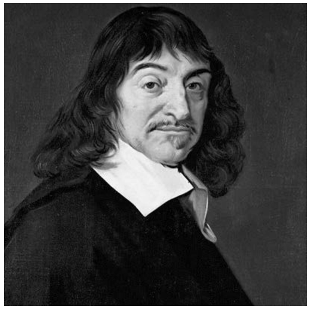
Теперь мы можем использовать комплексные числа для доказательства геометрических теорем. Например, теорему о высотах треугольника можно доказать следующим образом.

Пусть дан треугольник ABC. Выберем систему координат так, чтобы основание AB лежало на действительной оси, а мнимая ось проходила по высоте CO, где O совпадает с началом координат (рис. 34). Тогда вершины треугольника A, B изображаются действительными числами a, b, а вершина C — чисто мнимым числом ic. Тогда *ортоцентру* H (т. е. точке пересечения высот) треугольника ABC отвечает чисто мнимое число $-iab/c$. Действительно, вектор AH соответствует числу $-a - iab/c$, а вектор BC — числу $-b + ic$, а согласно задаче 288 эти векторы ортогональны (перпендикулярны), так как $a + (iab)/c = (b - ic)ia/c$, аналогично BH ортогонален AC, так как $b + (iab)/c = (a - ic)ib/c$, а ортогональность OH и AB ясна из условия.

§ 21. Комплексные корни квадратных уравнений

> Ни истинные, ни ложные корни[1] не являются всегда действительными, иногда они являются мнимыми…
>
> *Рене Декарт.* Геометрия (1637)

Мы знаем, что $\sqrt{-1} = \pm i$. А как извлекать квадратные корни из произвольных комплексных чисел? Извлечь квадратный корень из комплексного числа $a + bi$ означает решить квадратное уравнение вида $z^2 = a + bi$ в комплексных числах. Это можно сделать следующим образом.



Рене Декарт

290. Докажите, что

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\right).$$

291. Найдите квадратные корни из чисел $\pm i$, $1 \pm i$, $3 \pm 4i$.

С помощью комплексных чисел можно решить любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Но как решать произвольные квадратные уравнения с комплексными коэффициентами? Такое уравнение выглядит следующим образом:

$$(a + Ai)z^2 + (b + Bi)z + (c + iC) = 0.$$

После того как мы научились извлекать корни из комплексных чисел, комплексные квадратные уравнения можно решать по той же схеме, что и действительные. А именно, сначала поделив все коэффициенты на старший коэффициент (делить комплексные числа мы уже умеем), сведем это уравнение к виду

$$z^2 + 2(b + Bi)z + (c + iC) = 0$$

(множитель 2 в коэффициент введен для сокращения формул). Далее, выделяя полный квадрат, как и в действительном случае, получаем

[1] Ложными корнями назывались в то время отрицательные корни.

формулу

$$z_{1,2} = -b - Bi \pm \sqrt{(b+Bi)^2 - (c+iC)}.$$

Квадратный корень из комплексного дискриминанта извлекаем так, как было показано выше.

Следующие далее задачи заимствованы из уже упоминавшейся книги Г. Х. Харди «Курс чистой математики».

292. Покажите, что $z_{1,2}$ можно представить в виде $x_{1,2} + iy_{1,2}$, где

$$x_{1,2} = -b \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{h^2+k^2}+h\right)},$$

$$y_{1,2} = -B \pm \frac{k}{|k|}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{h^2+k^2}-h\right)},$$

$h = b^2 - B^2 - c$, $k = 2bB - c$.

293. Покажите, что два корня совпадают тогда и только тогда, когда $c = b^2 - B^2$, $C = 2bB$.

294. Один из корней будет действительным тогда и только тогда, когда $C^2 - 4bBC + 4cB^2 = 0$.

Подскажем, как решить эту задачу. Проще не пользоваться общими формулами, а рассуждать так: если x — действительный корень уравнения $x^2 + 2(b+Bi)x + (c+iC) = 0$, то он удовлетворяет действительной системе

$$\begin{cases} x^2 + 2bx + c = 0, \\ 2Bx + C = 0, \end{cases}$$

а из нее исключить x.

Аналогично решается и следующая задача.

295. Один из корней будет чисто мнимым тогда и только тогда, когда $C^2 - 4bBC - 4cb^2 = 0$.

296. Оба корня будут комплексно сопряженными друг к другу тогда и только тогда, когда $B = C = 0$, $b^2 < c$.

297. Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с действительными коэффициентами и $a > 0$ имеет чисто мнимый корень, то его можно представить в виде $(Ax+B)^2 + (Cx+D)^2$, где A, B, C, D — действительные числа.

Квадратные трехчлены с комплексными коэффициентами

Некоторые задачи, подобные тем, которые уже встречались нам, можно рассматривать и для многочленов с комплексными коэффициентами. Следующие две задачи принадлежат известному английскому математику Рогозинскому (на самом деле это частные случаи его серьезной теоремы).

298*. Пусть квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ с комплексными коэффициентами удовлетворяет неравенствам $|f(0)| \leqslant 1$, $|f(\pm 1)| \leqslant 1$. Тогда при любом действительном x, таком, что $|x| \geqslant 1$, справедливо неравенство $|2ax + b| \leqslant |4x|$. Равенство справедливо, только когда $f = 2x^2 - 1$.

299. Пусть квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ удовлетворяет неравенствам $|f(0)| \leqslant 1$, $|f(\pm 1)| \leqslant 1$. Тогда справедливо неравенство $|a| \leqslant 2$. Равенство справедливо, только когда $f = 2x^2 - 1$.

300. Докажите, что среди всех квадратных трехчленов со старшим коэффициентом a наименьшее уклонение от нуля на отрезке $[a, b]$, равное $2a/(b-a)^2$, имеет трехчлен

$$\frac{2a}{(b-a)^2}\left(2\left(\frac{2x-a-b}{a-b}\right)^2-1\right).$$

Последней задаче можно придать геометрическую форму.

301. Для любых двух точек плоскости A_1, A_2 произведение расстояний $A_1M \cdot A_2M$ от них до точки M, пробегающей данный отрезок длины $4h$, не может оставаться всегда менее $2h^2$. Указанная оценка точная.

302. Докажите, что среди всех квадратных трехчленов таких, что $f(a)=b$, где $|a|>1$, наименьшее уклонение от нуля на отрезке $[-1, 1]$ имеет трехчлен $f(x) = b(2x^2-1)/(2a^2-1)$.

303*. (*Студенческая олимпиада мехмата МГУ.*) Трехчлен $f(x)$ удовлетворяет неравенствам $|f(0)| \leqslant 1$, $|f(\pm 1)| \leqslant 1$. Докажите, что $|f(x)| \leqslant 5/4$, если $|x| \leqslant 1$. Найдите трехчлен, для которого справедливо равенство.

Указания и решения

3. Треугольники ACD, ABD, BCD подобны друг другу по двум углам; воспользуйтесь равенством отношений сходственных сторон в них.

4. Выразите длины отрезков OX и AO, где O — середина AD (т. е. центр рассматриваемой окружности) через p, q и $x = BX$, применяя теорему Пифагора (или вытекающую из нее формулу для расстояния между двумя точками), и приравняйте их (воспользовавшись тем, что X лежит на рассматриваемой окружности), а потом возведите обе части равенства в квадрат, избавляясь от квадратных корней; получится рассматриваемое квадратное уравнение.

5. *Указание.* $x_1 = -1$.

6. Один из корней $x_1 = 1$.

7. Выпишем разложения: $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Последняя попытка оказалась удачной.

8. Один из корней $x_1 = 33\,333\,333$. Чтобы его угадать, представьте правую часть в виде

$$\frac{10^{16}-1}{9}+\frac{10^{8}-1}{9}=\frac{10^{8}-1}{3}\cdot\frac{10^{8}+2}{3}.$$

Второй корень найдите по теореме Виета.

9. Учтите, что 12 равно не только $3 \cdot 4$, но и $(-3)(-4)$.

11. Приведем решение одного из уравнений:

$$x^2-2(a+1)x+4a=0.$$

Вычислим дискриминант:

$$D=4(a+1)^2-16a=4(a-1)^2.$$

Отсюда находим корни $x_{1,2} = (a+1) \pm (a-1)$, или $x_1 = 2$, $x_2 = 2a$. Ответ: $x = 2$ при $a = 1$; $x_1 = 2$, $x_2 = 2a$ при $a \neq 1$.

17. Разложите дискриминант на множители по формуле разности квадратов и убедитесь, что он отрицателен.

18. Если оба уравнения не имеют действительных корней, то $a^2 < 4b$, $c^2 < 4d$, тогда $4(b+d)^2 = (ac)^2 < 16bd$, что невозможно.

19. Если у всех трехчленов нет корней, то $b^2 < ac$, $c^2 < ab$, $a^2 < bc$. Перемножая эти неравенства, получаем противоречие: $(abc)^2 < (abc)^2$.

20. В случае, когда из трех чисел a, b, c два равны, утверждение очевидно. Если же, например, $a<b<c$, то $f(b)<0$, поэтому имеется два корня. Далее воспользуйтесь тем, что дискриминант неотрицателен.

22. Проверьте тождество

$$(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3) = \\ = (x_1+x_2)(y_1+y_2)+(x_1+x_3)(y_1+y_3)+ \\ +(x_2+x_3)(y_2+y_3)-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3$$

и выведите из него тождество для дискриминантов

$$D(f_1+f_2+f_3)=D(f_1+f_2)+D(f_1+f_3)+D(f_2+f_3)-D(f_1)-D(f_2)-D(f_3)$$

(на самом деле это тождество справедливо не только для функций $D(ax^2+bx+c)=b^2-4ac$, но для любой функции вида

$$k_1a^2+k_2b^2+k_3c^2+k_4ab+k_5bc+k_6ac,$$

называемой квадратичной формой от переменных a, b, c, и даже для подобных функций от любого числа переменных, но здесь оно понадобится только в случае $D(f)=b^2-4ac$). Из этого тождества и условия задачи следует, что $D(f_1+f_2+f_3)=76$. Значит, трехчлен $f_1+f_2+f_3$ имеет действительные корни.

23. Проверьте, что оба трехчлена в точке $-p/2$ отрицательны.

24. Заметьте, что $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$.

25. Воспользуйтесь тождеством $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$.

26. Примените тождество $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2$.

29. Заметьте, что $1/x_1, 1/x_2$ — корни уравнения $cx^2+bx+a=0$.

30. Решите уравнение $x_1+x_1^2=x_1+x_2=15/4$.

31. Решите систему $x_1+x_2=(a+1)/2$, $x_1-x_2=1$.

32. Уравнения $(2x)^2-7(2x)+2a=0$ и $x^2-5x+a=0$ имеют общий корень. Но этот корень будет корнем уравнения

$$4x^2-14x+2a-4(x^2-5x+a)=0.$$

33. Примените тождество $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$.

34. Заметьте, что $199=p+q+1=1-x_1-x_2+x_1x_2=(x_1-1)(x_2-1)$, а 199 — простое число.

35. Ответ: ни при каких.

Указание. Можно считать, что a четно, тогда b, c — тоже, так как у многочлена с целыми корнями, согласно теореме Виета, b/a, c/a — целые числа. Тогда $b+1$, $c+1$ нечетны, и опять по теореме Виета $y_1+y_2=-(b+1)/(a+1)$, $y_1y_2=(c+1)/(a+1)$ — целые нечетные. Но если сумма целых нечетна, то хотя бы одно из них — четно. Поэтому и произведение четно. Противоречие.

36. Для краткости положим $a_n = x_1^n + x_2^n$. Тогда $a_0 = 2$, потому что $x_i^0 = 1$. Так как по теореме Виета $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = -1$, получаем, что

$$a_{n+1} = a_n(x_1 + x_2) - x_1x_2a_{n-1} = -pa_n + a_{n-1}.$$

Очевидно, $a_1 = -p$ и $a_0 = 2$ — целые и взаимно простые. Если a_n и a_{n-1} — целые и взаимно простые, то a_{n+1} — целое, и если бы оно имело общий делитель $d > 1$ с a_n, то и $a_{n-1} = a_{n+1} + pa_n$ делилось бы на d. Противоречие.

37. Согласно теореме Виета корни уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ удовлетворяют равенствам $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = 1$. Положим $a_n = x_1^n + x_2^n$. Тогда надо найти a_{13}. Можно проверить, что при $n \geqslant m$

$$a_{n+m} = a_na_m - a_{n-m}.$$

Отсюда $a_2 = a_1^2 - 2 = p^2 - 2$, $a_4 = a_2^2 - 2 = p^4 - 4p^2 + 2$, далее аналогично находим $a_3 = a_2a_1 - a_1$, потом $a_6 = a_3^2 - 2$, потом $a_7 = a_4a_3 - a_1$ и, наконец, $a_{13} = a_7a_6 - a_1$.

41. Очевидно, что при $m = 1, 2$ это верно при всех n. Предполагая, что для любого n справедливы равенства

$$F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n, \qquad F_{n+m-1} = F_{m-1}F_{n+1} + F_{m-2}F_n,$$

проверьте, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} F_{n+m+1} &= F_{n+m} + F_{n+m-1} = (F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n) + (F_{m-1}F_{n+1} + F_{m-2}F_n) = \\ &= (F_m + F_{m-1})F_{n+1} + (F_{m-1} + F_{m-2})F_n = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n. \end{aligned}$$

42. Рассуждайте так же, как и в доказательстве теоремы Бине.

43. Пусть $a_n = x_1^n + x_2^n$, тогда $a_0 = 2$, $a_1 = 6$, $a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$, и, очевидно, a_n — всегда целые, например $a_2 = 34$. Если a_{n+1} кратно 5, то $a_n - a_{n-1}$ — тоже. Но если $a_n - a_{n-1} = 5a_{n-1} - a_{n-2}$ кратно 5, то a_{n-2} — тоже. Аналогично получаем, что и a_{n-5} кратно 5, и т. д. В конце концов получим, что a_0, a_1 или a_2 кратно 5. Противоречие.

45. Общее решение данного рекуррентного соотношения есть $a2^n + b$.

46. Общее решение данного рекуррентного соотношения есть $2^n(an + b)$.

47. Нарисуйте параболу $y = x(1 - 2x)$.

48. Коэффициенты квадратного трехчлена однозначно восстанавливаются по его значениям для трех разных значений переменной.

49. Эти параболы гомотетичны и центр гомотетии совпадает с началом координат.

50. Передвиньте эти параболы так, чтобы их вершины совпали с началом координат.

51. Если трехчлен неотрицателен, то ветви его графика направлены вверх, т. е. $a>0$, $c=f(0)\geqslant 0$, он не имеет корней или имеет один кратный корень, поэтому его дискриминант не положителен. Если трехчлен вырожденный, то он будет неотрицательным только при $a=b=0$, $c\geqslant 0$, значит, и тогда $a\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $b^2-4ac\leqslant 0$. Для доказательства обратного утверждения в случае невырожденного трехчлена достаточно воспользоваться формулой

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Для вырожденного трехчлена $a=0$, $c\geqslant 0$, $b^2\leqslant 0$, значит, $b=0$ и утверждение очевидно.

52. Как и в указании к задаче 51, покажите вначале, что если дискриминант неположителен, то знак трехчлена постоянен и совпадает со знаком старшего коэффициента. Поэтому у данного трехчлена дискриминант положителен. Но тогда он имеет два корня и представляется в виде $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. Пусть a_1 и a_2 — те точки, в которых трехчлен имеет разные знаки. Если $f(a_2)<0<f(a_1)$, то a_2 лежит внутри отрезка $[x_1, x_2]$, а a_1 — вне его. Если $a_1<x_1$, то x_1 лежит на отрезке $[a_1, a_2]$, в противном случае x_2 лежит на отрезке $[a_2, a_1]$.

53. Пусть $f(a_1)\leqslant d\leqslant f(a_2)$. Примените к трехчлену $f(x)-d$ задачу 52.

55. Ответ: если $|p|>2$, то это множество есть отрезок с концами $f(1)$, $f(-1)$, т. е. с концами $1\pm p+q$; если $-2\leqslant p\leqslant 0$, то это отрезок $[q-p^2/4, 1-p+q]$, в противном случае это отрезок $[q-p^2/4, 1+p+q]$.

56. Квадрат расстояния от точки параболы (x, y) до фокуса $(0, 1)$ равен

$$x^2+(y-1)^2=4y+\frac{x^4}{16}-2y+1=\frac{x^4}{16}+2y+1=(y+1)^2.$$

57. Докажем, что построенная касательная действительно пересекается с параболой только в точке касания N. Для этого возьмем любую другу точку M данной касательной и покажем, что расстояние от нее до фокуса больше, чем до директрисы. Для этого заметим, что согласно свойству биссектрисы расстояние от точки M до фокуса и до проекции точки N на биссектрису равны (потому, что равны соответствующие треугольники по двум сторонам и углу). Но расстояние от точки M до директрисы меньше, чем расстояние до указанной проекции, так как перпендикуляр короче наклонной.

59. Рассмотрим хорду с концами (x_i, y_i), $i=1, 2$, и фиксированным угловым коэффициентом k. Тогда

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}=x_2+x_1,$$

значит, центр хорды имеет абсциссу $(x_1+x_2)/2=k/2$ и все такие центры лежат на одной прямой $x=k/2$.

60. С помощью задачи 59 постройте какую-нибудь прямую, параллельную оси параболы, постройте перпендикулярную к ней хорду, найдите ее центр и восстановите в нем перпендикуляр к этой хорде. Это и будет ось Oy. Через вершину параболы проведите прямую, перпендикулярную оси Oy. Получится ось Ox. Потом проведите прямую $y=x$ (биссектрису угла между осями). Вторую точку ее пересечения с параболой спроектируйте на любую из осей координат. Получим единицу длины.

61. Откладывая единичный отрезок, построим на оси Ox точки с координатами $1, \ldots, n-1$. Восстановим в этих точках перпендикуляры к оси Ox и занумеруем их числами $1, \ldots, n-1$. Опустим перпендикуляр из M на ось Ox (ему естественно сопоставить номер n) и разделим его на n равных отрезков, концы которых обозначим в естественном порядке M_i, $i=1, \ldots, n$, при этом $M_n=M$. Проведем прямые из начала координат в точки M_i, $i=1, \ldots, n-1$. Тогда точка пересечения i-й прямой с i-м перпендикуляром имеет координаты (i, i^2). Указанное построение является аффинным в том смысле, что его можно применить в случае, когда вместо осей координат используется произвольная касательная к параболе и диаметр, проходящий через точку касания (диаметр — это множество середин хорд параболы, параллельных данной касательной). Кроме того, оно фактически выполняется одной линейкой.

62. Примените задачу 56.

63. Примените задачу 56.

64. Пусть A' — точка на левом краю листа, симметричная точке A относительно линии сгиба (если точка A была бы покрашенной, то точка A' тоже будет покрашенной, так как наложится на точку A при рассматриваемом сгибе). Восстановим в A' перпендикуляр к краю листа до пересечения в точке M с линией сгиба. Тогда точка M лежит на параболе, а линия сгиба является к ней касательной согласно задаче 57.

65. Если NM_1 — касательная, то согласно задачам 57, 56 треугольники $\triangle ND_1M$, $\triangle ND_1F$, где F — фокус, равны по двум сторонам и углу (так как $D_1M = MF$ и NM_1 — биссектриса угла $\angle D_1M_1F$). Поэтому $ND_1 = NF$, т. е. D_1 лежит на данной окружности.

67. Ответ: 90 градусов.

Указание. Нужно найти угол между касательными.

68. Ответ: прямая $y = -1/8$.

Указание. Задачу лучше решать алгебраически. Прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффициентов равно -1.

70. Заметьте, что $(p/2)^2 - 4(q/4) \geqslant 0$ равносильно $p^2 - 4q \geqslant 0$.

71. Рассмотрим окружность из задачи 65. Достаточно доказать, что абсциссы x_i точек D_i ее пересечения с директрисой удовлетворяют соотношениям Виета $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$. Первое равенство следует из того, что проекция центра N этой окружности на директрису имеет абсциссу $-p/2$ и лежит в середине хорды D_1D_2. Второе равенство можно проверить, непосредственно вычислив координаты точек D_i, но можно доказать почти без вычислений. Рассмотрим случай, когда точка пересечения директрисы и оси Oy лежит внутри нашей окружности. Через нее, кроме лежащей на директрисе хорды D_1D_2, проходит перпендикулярная ей хорда, лежащая на оси Oy. Согласно известной теореме, произведения отрезков, на которые делятся эти хорды точкой их пересечения, равны. Произведение отрезков, на которые делится хорда D_1D_2, равно $|x_1x_2| = -x_1x_2$. Длина второй хорды вдвое больше длины отрезка от фокуса до проекции центра окружности — точки N на эту хорду, т. е. на ось Oy, так как окружность проходит через фокус. Поэтому длина хорды равна

$$2\left(1 + \frac{|q|}{4}\right) = 2\left(1 - \frac{q}{4}\right) = 2 - \frac{q}{2},$$

так как расстояние между фокусом и началом координат равно 1. Длина отрезка хорды от фокуса до точки пересечения хорды с директрисой равна 2. Поэтому длина второго отрезка этой хорды равна $|q|/2 = -q/2$, и их произведение равно $2|q|/2 = -q$. Поэтому $x_1x_2 = q$. Если точка пересечения директрисы и оси Oy лежит вне нашей окружности, то вместо теоремы о произведении отрезков хорд используется теорема о произведении отрезков секущих.

72. Пусть A, B — точки на оси Ox, C — точка на оси Oy, $D = (0, 1)$, O — начало координат. Докажите с помощью теоремы Виета, что $AO \cdot BO = CO \cdot DO$, и примените теорему о произведении отрезков хорды (и теорему о произведении отрезков секущей).

74. Удобно выбрать систему координат с центром в середине стороны BC и осью Ox, проходящей через BC, и заметить, что искомое

ГМТ симметрично относительно оси Oy. Если зафиксировать вершину ромба, лежащую на оси Ox, то ГМТ четвертых вершин образует отрезок, параллельный оси Oy. Вычислите координаты его концов и обратите внимание на то, что они лежат на двух параболах вида $x = ay^2 + by + c$. Эти параболы, вместе с еще двумя, симметричными им относительно оси Oy, ограничивают искомое ГМТ. Для вычисления его площади не нужно уметь вычислять площадь сегмента параболы. Достаточно заметить, что передвинув две из четырех частей, составляющих ГМТ, можно получить данный в условии квадрат $ABCD$.

79. Выделим полный квадрат: $x(1-x) = 1/4-(x-1/2)^2$.

80. Выделим полный квадрат: $x + 1/x = (\sqrt{x} - \sqrt{1/x})^2 + 2$.

81. Заметим, что $x/(x^2 + 1) = 1/(x + 1/x)$.

82. Положим $X = x/\sqrt{xy}$, $Y = y/\sqrt{xy}$, и задача сведется к задаче 80.

83. Свести к неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим.

84. Если длина линии, разделяющей подобные трапеции, равна l, то $x/l = l/y$, откуда $l = \sqrt{xy}$. Так как верхняя подобная трапеция меньше нижней, боковая сторона у нее также меньше, значит, эта линия лежит выше средней линии.

85. Заметим, что $\dfrac{2}{1/x + 1/y} = \dfrac{2xy}{x+y}$.

86. Диагонали делят трапецию на 4 треугольника. Линия, проходящая через точку пересечения диагоналей, делится ей пополам на отрезки $xy/(x + y)$, что видно из подобия треугольников, прилегающих к основаниям трапеции. Боковые стороны эта линия делит в отношении $x : y$. Линия, делящая трапецию на подобные трапеции, имеет длину $l = \sqrt{xy}$ и делит боковые стороны в отношении $(l-x) : (y-l) = \sqrt{x} : \sqrt{y}$. Так как $\sqrt{y/x} < y/x$, эта линия лежит выше линии, проходящей через точку пересечения диагоналей.

88. Линия длины l, параллельная основаниям, делит высоту трапеции в отношении $(l - x) : (y - l)$, а поэтому и площадь трапеции в отношении $(x + l)(l - x) : (y + l)(y - l)$. Это отношение равно 1, если $2l^2 = x^2 + y^2$. Средняя же линия отсекает верхнюю трапецию площади меньшей, чем нижняя трапеция.

90. Если высота прямоугольника равна x, то его ширина $b(a-x)/a$, тогда площадь равна $x(a-x)b/a$. Максимум равен половине площади треугольника.

92. Пусть сумма катетов равна 1, а тот из них, который лежит на оси Oy, равен a. Точка с абсциссой x, лежащая на гипотенузе,

имеет ординату
$$y_a(x)=\frac{(1-a)(a-x)}{a}=1+x-a-\frac{x}{a}.$$
Вычисляя $\max_a y_a(x)$ с помощью неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, имеем
$$\max_a y_a(x)=1+x-2\sqrt{x}=(1-\sqrt{x})^2.$$
Уравнение полученной кривой имеет вид $y=(1-\sqrt{x})^2$, или, в более симметричном виде, $\sqrt{y}+\sqrt{x}=1$, откуда уже ясно, что эта кривая имеет осью симметрии прямую $y=x$. Избавляясь от радикалов, имеем $y+x+2\sqrt{xy}=1$, $4xy=(1-x-y)^2=1+(x+y)^2-2(x+y)$, откуда $1+(x-y)^2-2(x+y)=0$. Выбирая в качестве осей координат перпендикулярные прямые $x=\pm y$, вычисляем новые координаты $X=(x-y)/\sqrt{2}$, $Y=(x+y)/\sqrt{2}$, и в них уравнение кривой приобретает вид $2\sqrt{2}Y=1+2X^2$, т. е. кривая — парабола (точнее, ее дуга, заключенная между осями координат, см. рис. 35).

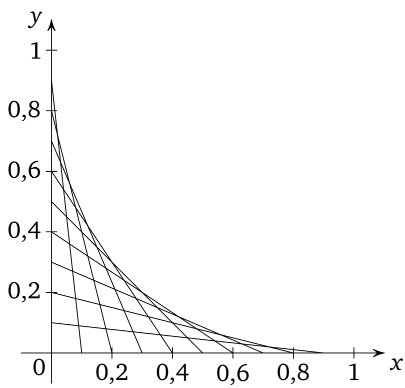


Рис. 35. Огибающая семейства прямых

93. Пусть x — высота коробки. По смыслу задачи $0<x<1/2$, иначе коробка вырождается. Площадь ее поверхности равна
$$2(1-2x)^2+4x(1-2x)=2-4x.$$
Очевидно, что площадь может быть сколь угодно близкой к 2, но никогда ее не достигнет.

В другом случае пусть x — высота коробки. Площадь ее поверхности (без крышки) равна $1-4x^2$. Очевидно, что площадь может быть сколь угодно близкой к 1, но никогда ее не достигнет.

94. Пусть x — высота коробки. Тогда ее длина равна $1-2x$, а ширина (с учетом необходимости вырезать крышку) равна $1/2-x$. Поэтому $0<x<1/2$. Площадь ее поверхности равна

$$2\left(\frac{1}{2}-x\right)(1-2x)+2x(1-2x)+2x\left(\frac{1}{2}-x\right)=$$
$$=1-4x+4x^2+3x-6x^2=1-x-2x^2.$$

Выделяем полный квадрат:

$$1-x-2x^2=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}.$$

Очевидно, что площадь может быть сколь угодно близка к 1, но никогда ее не достигнет.

96. Пусть $z=\sqrt{2x+1}$, тогда $z\geqslant 0$, и надо найти максимум $y=$ $=z-(z^2-1)/2$. Для максимизации квадратного трехчлена выделяем полный квадрат: $y=1-(z-1)^2/2$.

97. Найдем все множество значений функции

$$y=\frac{x^2+x-2}{2x^2-x+3}.$$

Для этого перепишем предыдущее равенство в виде квадратного уравнения с параметром y:

$$(2y-1)x^2-(y+1)x+3y+2=0.$$

Данная функция принимает значение y тогда и только тогда, когда указанное уравнение имеет решение, т. е. когда дискриминант неотрицателен. Отсюда имеем:

$$D=(y+1)^2-4(3y+2)(2y-1)=-23y^2-2y+9\geqslant 0.$$

Решая неравенство, получаем, что

$$\frac{-1-\sqrt{208}}{23}\leqslant y\leqslant\frac{-1+\sqrt{208}}{23}.$$

98. Дискриминант должен быть неотрицателен, значит,

$$D=25a^2-4\cdot 29(2a^2-45)\geqslant 0.$$

Решая неравенство, находим, что

$$-\sqrt{\frac{580}{23}}\leqslant a\leqslant\sqrt{\frac{580}{23}}.$$

101. График гиперболы $y=(ax+b)/(cx+d)$ зависит не от четырех параметров, а от трех: $y=(Ax+B)/(x+D)$. Для их нахождения достаточно решить систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

102. Докажите вначале, что графики $y=1/x$ и $y=k/x$ подобны друг другу.

105. Примените метод *Оха* (см. с. 65).

106. Проверьте, что

$$NF_1=\sqrt{(y-1)^2+(x-1)^2},\quad NF_2=\sqrt{(y+1)^2+(x+1)^2},$$

тогда по формуле разности квадратов

$$|NF_1-NF_2|=\frac{\left|(y+1)^2+(x+1)^2-(y-1)^2-(x-1)^2\right|}{\sqrt{(y-1)^2+(x-1)^2}+\sqrt{(y+1)^2+(x+1)^2}}=$$
$$=\frac{4|y+x|}{\sqrt{(y-1)^2+(x-1)^2}+\sqrt{(y+1)^2+(x+1)^2}},$$

и достаточно проверить, что

$$4(y^2+x^2+2xy)=4(y^2+x^2+1)=$$
$$=(y-1)^2+(x-1)^2+(y+1)^2+(x+1)^2+$$
$$+2\sqrt{((y-1)^2+(x-1)^2)((y+1)^2+(x+1)^2)}.$$

Последнее равенство равносильно следующему

$$y^2+x^2=\sqrt{((y-1)^2+(x-1)^2)((y+1)^2+(x+1)^2)},$$

а оно после почленного возведения в квадрат превращается в тождество, так как

$$(y^2+x^2+2-(2y+2x))(y^2+x^2+2+(2y+2x))=$$
$$=(y^2+x^2+2)^2-4(y+x)^2=$$
$$=(y^2+x^2)^2+4+4(y^2+x^2)-4(y^2+x^2+2xy)=(y^2+x^2)^2.$$

Очевидно, что все проведенные преобразования обратимы.

109. Задачу проще решить алгебраически, но надо вначале научиться записывать уравнение касательной.

110. Примените теорему об отношении, в котором биссектриса внутреннего угла делит противоположную сторону, и аналогичную теорему о биссектрисе внешнего угла, а также теорему о том, что точки, из которых данный отрезок виден под прямым углом, лежат на окружности, диаметр которой совпадает с данным отрезком.

111. В книге Ньютона дано два решения этой (с. 182–186) задачи. Далее приводится второе, более короткое решение. Ему Ньютон предпослал разъяснения, как можно было бы прийти к этому решению,

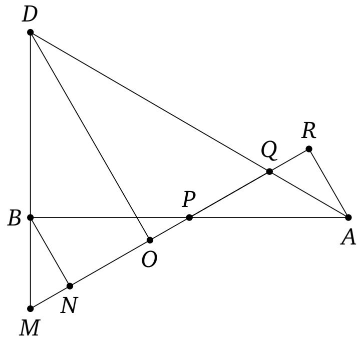


Рис. 36. К задаче 111

но мы их с целью краткости опускаем. Далее приводится текст Ньютона почти слово в слово, оставляя без перевода несколько латинских терминов.

Пусть у треугольника ADB дано основание AB и разность углов при нем. Делим его точкой P пополам и проводим через нее прямую MQ так, чтобы угол MPB (и равный ему угол APQ) был равен полуразности углов DBA и BAD (см. рис. 36) Тогда треугольник MDQ будет равнобедренным с основанием MQ (Q лежит на стороне AD, а M — на продолжении стороны BD). Опустим на MQ перпендикуляры AR, BN, DO и положим $PO = x$, $DO = y$ (т. е. DO будет ординатой, а PO — абсциссой, точка P — начало координат, ось абсцисс идет по прямой MQ, ось ординат ей перпендикулярна.) Обозначим $AR = BN$ через b, а $PR = PN$ через c. В силу подобия треугольников BNM и DOM выполняется $BN : DO = MN : MO$. Dividendo, получим:

$$(DO - BN = y - b) : (DO = y) = (MO - MN = ON = c - x) : (MO).$$

Значит, $MO = \dfrac{cy - xy}{y - b}$. Точно так же из подобия треугольников ARQ, DOQ имеем: $AR : DO = RQ : QO$ и, componendo,

$$(DO + AR = y + b) : (DO = y) = (QO + QR = OR = x + c) : QO.$$

Значит, $QO = \dfrac{cy + xy}{y + b}$. Наконец, $MO = QO$ в силу равенства углов DMQ и DQM, и, значит,

$$\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}.$$

Разделим все на y и домножим на знаменатели; получится

$$cy + cb - yx - bx = cy - cb + yx - bx,$$

или же $xy = cb$, т. е. особенно известное уравнение гиперболы. Далее Ньютон объясняет, как можно было бы обойтись без алгебраического вычисления. В самом деле, мы нашли выше, что

$$(DO - BN) : ON = DO : (MO = OQ) = (DO + AR) : OR,$$

т. е.

$$(DO - BN) : (DO + BN) = ON : OR.$$

Mixtim, мы получим

$$DO : BN = \left(\frac{ON + OR}{2} = NP\right) : \left(\frac{OR - ON}{2} = OP\right),$$

следовательно, $xy = DO \times OP = BN \times NP = bc$.

112. Примените теорему о том, что если точка D делит сторону BC треугольника ABC в отношении $\alpha : (1-\alpha)$, то $AD \leqslant (1-\alpha)AB + \alpha AC$.

113. Пусть B' — зеркальное отражение фокуса B относительно прямой, проходящей через C перпендикулярно биссектрисе угла ACB. Тогда $AC + CB = AC + CB' = AB'$. Для любой другой точки D этой прямой $AD + DB = AD + DB' > AB' = AC + CB$ согласно неравенству треугольника, поэтому D лежит вне данного эллипса.

114. Согласно задаче 113 $DB = DC + CB = AC + CB$.

115. Примените задачу 114 и теорему о средней линии треугольника.

118. Кривая $y^2 = 6x - x^2$ есть окружность $y^2 + (x-3)^2 = 9$ с центром $(3, 0)$ и радиусом 3.

119. Перепишем уравнение так:

$$(x+a)^2 + (2a-1)^2 - 9 = 0, \quad (x+a)^2 = 9 - (2a-1)^2.$$

Дальнейшее ясно.

120. Разберитесь, когда прямая пересекает окружность.

121. Нарисуйте на плоскости Oxa параболу и полуплоскость. Их пересечение образует *параболический сегмент*. Найдите его проекцию на ось Oa.

122. Множество решений неравенства $(x^2 + y^2 - 1)(x - y) < 0$ находится так. Нарисуем на одной плоскости Oxy окружность $x^2 + y^2 = 1$ и прямую $y = x$. Они разобьют плоскость на четыре части (рис. 38). При переходе из любой из них в соседнюю граница между ними пересекается один раз, что приводит к изменению знака в одном из сомножителей, а значит, меняется знак и всего произведения. Поэтому для нахождения нужного множества достаточно определить знак

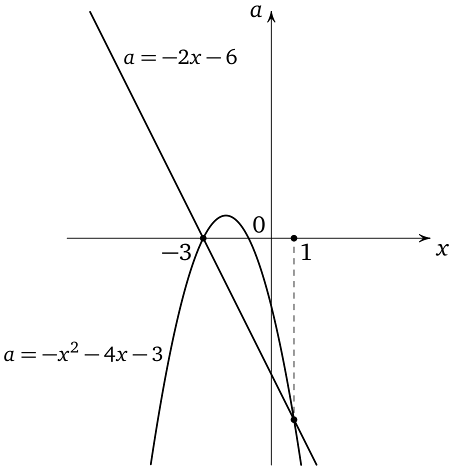


Рис. 37. К задаче 121. Сегмент параболы

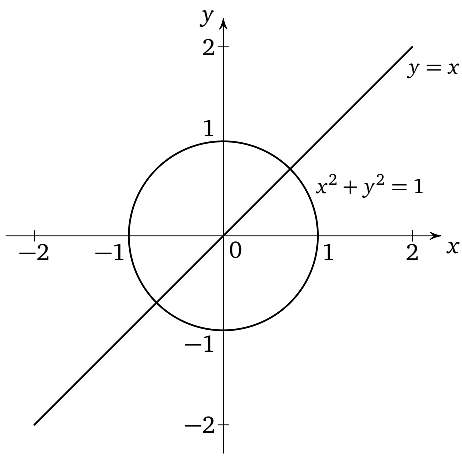


Рис. 38. Единичный круг и биссектриса первого координатного угла

произведения в одной точке одной из частей, например в $(1/2, 0)$. Этот знак отрицателен, значит, отрицательным будет знак данного произведения и во всем нижнем полукруге (с центром в начале координат, диаметр которого лежит на биссектрисе первого координатного угла). Знаки в остальных частях расставляются (с учетом найденного) в «шахматном порядке». Это значит, что знак «минус»

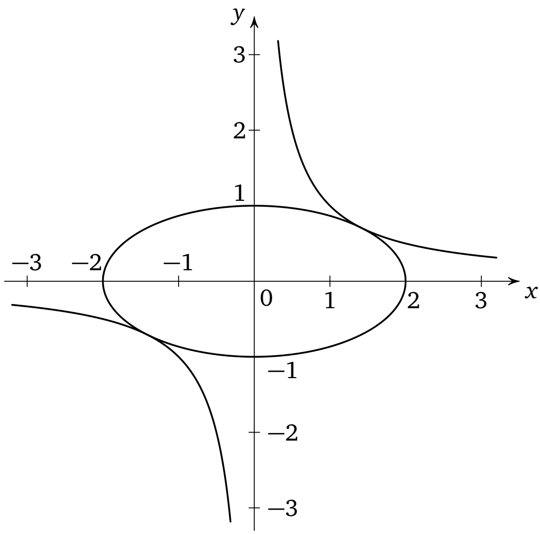


Рис. 39. Эллипс и гипербола

будет еще в верхнем «полукольце» (с бесконечным внешним радиусом и единичным внутренним радиусом). На границах областей произведение равно нулю.

Для нахождения множества решений неравенства

$$(x^2+4y^2-4)(xy-1)<0$$

нарисуем на одной плоскости Oxy эллипс $x^2+4y^2=4$ и гиперболу $xy=1$.

Рисунок 39 подсказывает, что эллипс и гипербола не пересекаются друг с другом, а касаются в точках $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Но эту догадку надо строго доказать. Домножив левую часть уравнения эллипса на x^2, имеем

$$x^4+4y^2x^2=x^4+4\geqslant 4x^2,$$

так как $x^4+4-4x^2=(x^2-2)^2\geqslant 0$. Отсюда и вытекает требуемое. Значит, эллипс и гипербола разбивают плоскость на 5 частей. Среди них будут внутренность эллипса и внутренности обеих ветвей гиперболы. Во внутренности эллипса знак произведения будет положительным (потому что он таков, например, в точке $(0,0)$). Но переход из внутренности эллипса во внутренность гиперболы осуществляется через точки касания, в которых границы между областями пересекаются

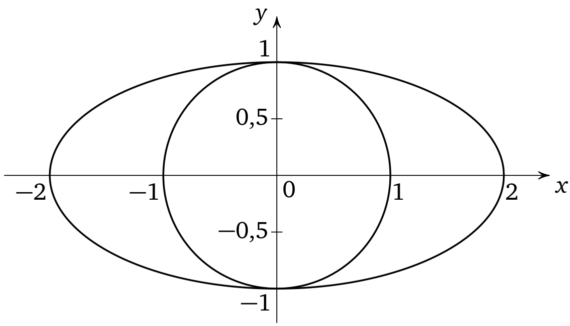


Рис. 40. Эллипс и единичный круг

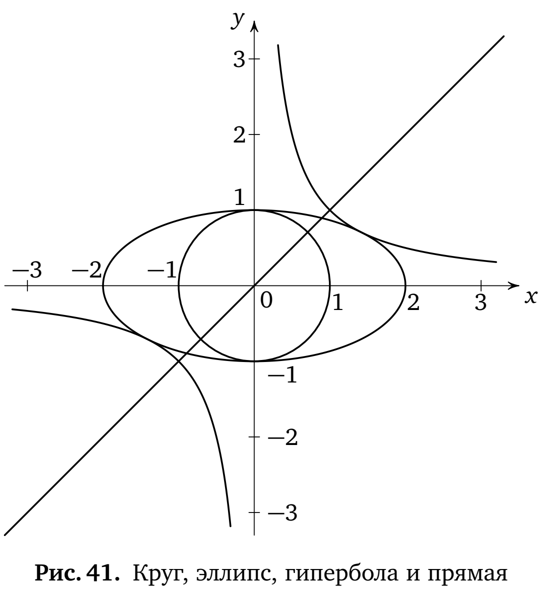


Рис. 41. Круг, эллипс, гипербола и прямая

дважды, поэтому при этом переходе знак не меняется (не всегда граничащие области имеют разные знаки и поэтому не всегда можно применять алгоритм «шахматной раскраски»!) и остается положительным (впрочем, в этом легко убедиться, вычислив знак в любой точке внутри гиперболы, например в $(2, 2)$). Отрицательным будет знак у произведения в двух остальных частях, на которые разрезает внешность гиперболы вписанный в нее эллипс. На его границе произведение скобок, конечно, равно нулю. Наконец, осталось нарисовать два найденных множества на одной плоскости Oxy и найти их пересечение. Нарисуем на одной плоскости Oxy единичный круг $x^2+y^2 \leqslant 1$ и эллипс $x^2+4y^2=4$.

На рис. 40 видно, что круг лежит внутри эллипса. Для доказательства достаточно заметить, что если $x^2+y^2 \leqslant 1$, то $x^2+4y^2 \leqslant$ $\leqslant 4x^2+4y^2 \leqslant 4$, откуда также видно, что эллипс с кругом пересекаются только в точках $(0,1)$, $(0,-1)$. Поэтому полукруг содержится внутри эллипса и не пересекается с нижней из двух частей внешности гиперболы и эллипса, что видно на рис. 41, на котором изображены все четыре линии.

Верхнее же «полукольцо» пересекается с верхней частью внешности гиперболы и эллипса, и в пересечении получается указанная верхняя часть, от которой отрезан маленький криволинейный треугольник, ограниченный эллипсом, гиперболой и биссектрисой первого координатного угла.

123. Первое неравенство надо умножить на -2 и сложить со вторым. Получится $(x+3y)^2 \leqslant -2-2(1-a)/(a+1)$. Поэтому система может иметь решение, лишь когда $(1-a)/(a+1) \leqslant -1$.

125. Решим систему в общем виде:

$$\begin{cases} ax+by=\lambda x, \\ cx+dy=\lambda y. \end{cases}$$

Перепишем ее в виде

$$\begin{cases} (a-\lambda)x+by=0, \\ cx+(d-\lambda)y=0, \end{cases}$$

а потом в виде

$$\begin{cases} (a-\lambda)x=-by, \\ cx=-(d-\lambda)y. \end{cases}$$

Привлекая геометрические соображения, можно заметить, что эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда векторы $(a-\lambda, c)$ и $(b, d-\lambda)$ коллинеарны, а это возможно, лишь когда

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0.$$

Можно в этом убедится и чисто алгебраически, решая полученную линейную систему. В алгебре многочлен $(a-\lambda)(d-\lambda)-bc$ называется *характеристическим* многочленом данной системы, а его корни λ_1, λ_2 — *собственными значениями* линейного преобразования

$$A(x,y)=(ax+by, cx+dy).$$

Их, очевидно, не более двух. Из теоремы Виета следует, что $\lambda_1\lambda_2 = ad - bc$. Если собственных значений нет, то система не имеет ненулевых решений. Каждому собственному значению соответствует множество решений вида $(X = \alpha x_0, Y = \alpha y_0)$, где α — произвольное число. Порождающий это множество вектор (x_0, y_0) называется *собственным вектором* линейного преобразования $A(x, y)$, отвечающим данному собственному числу.

126. Можно считать, что речь идет о ненулевых решениях, иначе все очевидно. Тогда согласно задаче 125 λ_1, λ_2 есть корни характеристического уравнения $(a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = 0$ Заметим, что

$$(ax_1 + by_1)x_2 + (bx_1 + cy_1)y_2 = (ax_2 + by_2)x_1 + (bx_2 + cy_2)y_1.$$

Так как $ax_i + by_i = \lambda_i x_i$, $bx_i + cy_i = \lambda_i y_i$, отсюда имеем

$$\begin{aligned}\lambda_1(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda_1 x_1x_2 + \lambda_1 y_1y_2 &= (ax_1 + by_1)x_2 + (bx_1 + cy_1)y_2 = \\ &= (ax_2 + by_2)x_1 + (bx_2 + cy_2)y_1 = \\ &= \lambda_2 x_2x_1 + \lambda_2 y_2y_1 = \lambda_2(x_1x_2 + y_1y_2),\end{aligned}$$

откуда

$$0 = \lambda_1(x_1x_2 + y_1y_2) - \lambda_2(x_1x_2 + y_1y_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1x_2 + y_1y_2),$$

значит, $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. Доказанная теорема на языке алгебры означает, что собственные векторы *симметричного* линейного преобразования ортогональны. Она имеет далеко идущие обобщения и следствия.

127. Множество всех точек (x, y, z) произвольной плоскости можно представить в виде

$$\begin{aligned}x &= a_{11}u + a_{12}v + a_{10},\\ y &= a_{21}u + a_{22}v + a_{20},\\ z &= a_{31}u + a_{32}v + a_{30}.\end{aligned}$$

Подставив эти формулы в уравнение поверхности второго порядка, получим для плоского сечения уравнение $K(u, v) = 0$ второго порядка.

128. Сечения эллипсоида являются ограниченными кривыми второго порядка, т. е. эллипсами (или точками, если сечение образуется касательной плоскостью к эллипсу).

129. Выберем на поверхности нашего тела две наиболее удаленные друг от друга точки. Отрезок, их соединяющий, назовем *диаметром*. У неограниченного тела диаметра не существует, но мы будем предполагать, что наше тело ограниченное (это кажется очевидным, но нуждается, конечно, в доказательстве; мы его, однако, опускаем).

Тот факт, что у ограниченного тела диаметр существует, тоже кажется очевидным, но нуждается в доказательстве. Строго говоря, это даже неверно, например шар, из которого удалены его граничные точки (лежащие на сфере), диаметра не имеет. Но *замкнутые* ограниченные множества (такие как шар вместе с его границей) диаметр имеют, и это можно доказать с помощью теоремы Вейерштрасса о существовании экстремума у непрерывной функции. Эта теорема, однако, не совсем элементарна, и поэтому далее факт существования диаметра мы примем без доказательства.

Рассмотрим все сечения нашего тела плоскостями, проходящими через его диаметр. Эти сечения — эллипсы, и их большая полуось обязана совпадать с нашим диаметром (потому что у эллипса большая полуось является единственным диаметром в указанном смысле, а у окружности любой диаметр в обычном смысле является большой полуосью и диаметром в нашем смысле).

Проведем через центр O нашего диаметра плоскость, ему перпендикулярную. Она пересекает наше тело по перпендикулярному эллипсу. Рассмотрим произвольную хорду этого эллипса, проходящую через O. Плоскость, проходящая через эту хорду и наш диаметр, пересекает тело по другому эллипсу. Рассматриваемая хорда является также хордой у последнего эллипса, перпендикулярной нашему диаметру — большой полуоси этого эллипса. Значит, указанная хорда является малой полуосью этого эллипса, и точка O делит ее пополам (если данный эллипс является окружностью, то это очевидно). Таким образом, все хорды «перпендикулярного» эллипса, проходящие через O, делятся этой точкой пополам, т. е. O является центром «перпендикулярного» эллипса. Проведем через O полуоси этого эллипса (или любые два перпендикулярных диаметра, если это окружность). Они перпендикулярны друг другу и нашему диаметру.

Рассмотрим эллипсоид, у которого эти три хорды являются осями. Его диаметр и его «перпендикулярный» эллипс совпадают с диаметром и «перпендикулярным» эллипсом нашего тела. Для того чтобы доказать совпадение нашего тела и указанного эллипсоида, достаточно доказать совпадение любых их плоских сечений, проходящих через рассматриваемый диаметр. Но оба этих сечения — эллипсы с общей большой полуосью и общей малой полуосью (так как их малые полуоси являются хордами «перпендикулярного» эллипса, проходящими через O, и, следовательно, они совпадают). Такие эллипсы, очевидно, совпадают.

130. Теорему можно вывести из предыдущей, но можно доказать и непосредственно, подобными же, но чуть более простыми рассуждениями.

131. Сечения — либо ограниченные кривые, значит, эллипсы, либо неограниченные, но связные, значит, параболы.

132. Выпишите явно уравнения сечений.

133. Часть парабол направлена выпуклостью вверх, а часть — вниз.

137. Рассмотрим три луча с общим началом, образующие друг с другом углы $90°$, $120°$, $150°$. Отложим на них от общего начала отрезки x, $y/\sqrt{3}$, z так, чтобы между отрезками длины x, z был угол $120°$, между z, $y/\sqrt{3}$ угол $90°$, между x, $y/\sqrt{3}$ угол $150°$. Концы этих отрезков образуют треугольник. Тогда из данных в условии соотношений следует, что стороны этого треугольника равны $3, 4, 5$, а площадь равна $(xy + 2yz + 3zx)/(4\sqrt{3})$. Но площадь этого треугольника равна 6, так как он прямоугольный (египетский!) с катетами $3, 4$.

143. Если x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ — корни трехчлена $f(x)$, то на отрезке $[x_1,\ x_2 - 1995]$, знаки всех трехчленов $f(x+k)$, $k = 0, 1, \ldots, 1995$, совпадают, значит, и их сумма имеет тот же знак, противоположный знаку старшего коэффициента.

144. Трехчлен $(a/2)x^2 + bx + c$ в точке x_1 равен $-(a/2)x_1^2$, а в точке x_2 равен $3(a/2)x_2^2$, поэтому эти значения имеют разные знаки. Значит, между ними есть корень.

145. Графики трехчленов f_i по условию положительны вне отрезка $[-1, 1]$. График трехчлена $(f_1 + f_2)/2$ (как и любого трехчлена $\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2$ при $0 < \alpha < 1$) тогда тоже обладает этим свойством.

146. Сумма неотрицательных чисел неотрицательна.

147. Согласно задаче 51

$$a \geqslant 0, \quad c \geqslant 0, \quad b^2 \leqslant ac, \quad p \geqslant 0, \quad r \geqslant 0, \quad q^2 \leqslant pr,$$

тогда

$$ap \geqslant 0, \quad cr \geqslant 0, \quad (bq)^2 \leqslant (ap)(cr),$$

и согласно той же задаче трехчлен $apx^2 + 2bqx + cr$ неотрицателен.

148. *Перемежаемость корней* двух трехчленов, о которой идет речь в задаче, равносильна тому, что точка их пересечения лежит ниже оси Ox.

150. Ветви параболы направлены вверх. Так как знаки $f(-1)$ и $f(1)$ одинаковы, она может пересекать отрезок $[-1, 1]$ в двух точках, касаться его или вообще не пересекать. Покажем, что первые два случая невозможны.

Пусть $f(0) < -1$. Тогда и в вершине $(-p/2, q - p^2/4)$ параболы значение $f(-p/2) = q - p^2/4 < -1$, при этом $-1 \leqslant -p/2 \leqslant 1$, $f(1) > 0$, $f(-1) > 0$. Пусть, к примеру, $p \geqslant 0$. Тогда, выделяя полный квадрат, получаем противоречие:

$$1 < f(1) - f\left(-\frac{p}{2}\right) = \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2 \leqslant 1.$$

Аналогично получаем противоречие и в случае $p < 0$.

В случае $f(0) > 1$, очевидно, $f(1) > 0$, $f(-1) > 0$, и если парабола пересекает, к примеру, отрезок $[0, 1]$, то ее вершина $(-p/2, q - p^2/4)$ удовлетворяет условиям $0 < -p/2 < 1$, $f(-p/2) \leqslant 0$, откуда опять следует противоречие:

$$1 < f(0) - f\left(\frac{p}{2}\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 < 1.$$

151. Рассмотрите трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ и заметьте, что $f(0)f(1) < 0$, значит, он имеет корни.

152. Рассмотрите трехчлены $f_i(x) = a_i x^2 + 2b_i x + c_i$ и заметьте, что они не меняют своего знака (т. е. их графики или не пересекают ось Ox, или ее касаются), причем их ветви направлены в одну сторону. Тогда сумма их графиков тоже не меняет своего знака, поэтому ее дискриминант не положителен.

159. Графики см. на рис. 42.

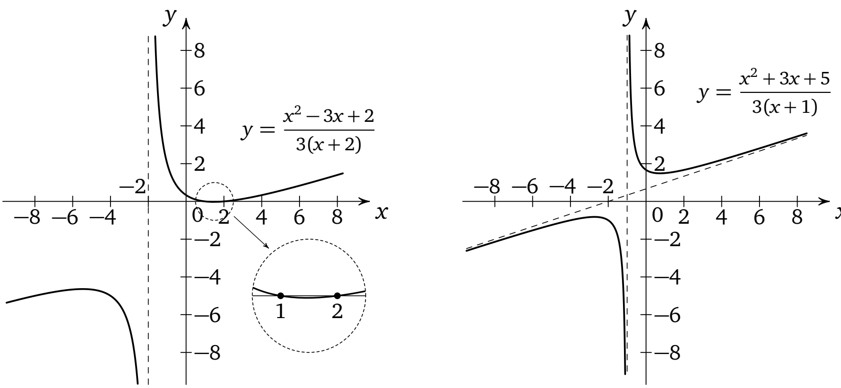


Рис. 42. Графики к задаче 159

160. Можно считать, что $a_1 < a_2$. График состоит из трех частей. Каждая часть является графиком монотонно убывающей функции (рис. 43). Множество решений является объединением двух интерва-

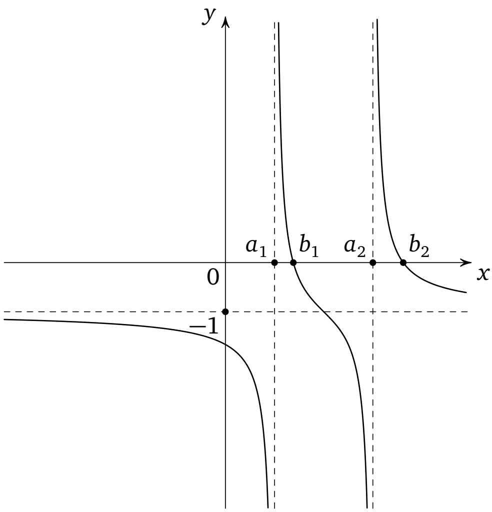


Рис. 43. К задаче 160

лов $(a_1, b_1]$ и $(a_2, b_2]$, $b_1 < a_2$, где b_i — корни уравнения

$$\frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{x-a_2} = c.$$

Это уравнение равносильно квадратному:

$$c_1(x-a_2) + c_2(x-a_1) = c(x-a_1)(x-a_2).$$

Применяя теорему Виета, имеем $b_1 + b_2 = a_1 + a_2 + 1/c$.

161. *Указание.* Опять постройте график и для вычисления суммы корней примените теорему Виета.

162. Если $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)$, то

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{(x-x_1)+(x-x_2)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2}.$$

Далее примените задачу 160.

163. Примените тождество $\dfrac{p'(x)}{p(x)} = \dfrac{1}{x-x_1} + \dfrac{1}{x-x_2}$ и задачу 161.

164. Представьте мысленно график функции

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{70}{x-70}.$$

На интервалах $(k, k+1)$, $k = 1, \ldots, 69$, она убывает от $+\infty$ до $-\infty$ (как сумма убывающих функций), а на интервале $(70, +\infty)$ она убывает только до нуля (его не достигая). На интервале $(-\infty, 1)$ функция отрицательна. Поэтому множество решений неравенства $f(x) \geqslant 5/4$ есть объединение полуинтервалов $(k, x_k]$, где $k < x_k < k+1$, $k = 1, \ldots, 70$, а x_k, $k = 1, \ldots, 70$, есть корни уравнения $f(x) = 5/4$, т. е. корни многочлена

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-70) - \frac{4}{5}\big((x-2)\ldots(x-70) + \\ + 2(x-1)(x-3)\ldots(x-70) + \ldots + 70(x-1)\ldots(x-69)\big).$$

По теореме Виета сумма корней $x_1 + \ldots + x_{70}$ равна со знаком минус второму (по старшинству) коэффициенту указанного многочлена, т. е.

$$(1+2+\ldots+70) + \frac{4}{5}(1+2+\ldots+70).$$

Поэтому сумма длин всех полуинтервалов равна

$$(x_1 - 1) + \ldots + (x_{70} - 70) = \frac{4}{5}(1+2+\ldots+70) = 1988.$$

169. Возведите в квадрат и получите неравенство

$$n(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant (x_1 + \ldots + x_n)^2.$$

Последнее неравенство есть частный случай неравенства Коши при $y_i = 1$. Равенство возможно, лишь когда все x_i равны.

170. Применим индукцию. База $(n = 2)$

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} \geqslant \frac{(x_1 + x_2)^2}{y_1 + y_2}$$

после избавления от дробей записывается в виде

$$x_1^2 y_2 (y_1 + y_2) + x_2^2 y_1 (y_1 + y_2) \geqslant (x_1 + x_2)^2 y_1 y_2,$$

а после сокращений становится очевидной:

$$x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 \geqslant 2 x_1 x_2 y_1 y_2$$

(как частный случай неравенства $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$). Шаг индукции обосновывается тем же самым неравенством.

172. Проверьте, что

$$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + \sum_{i<j} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2),$$

$$(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j y_i y_j.$$

173. Ответ: $\dfrac{2a_1a_2}{5}+\dfrac{2(b_1b_2+c_1a_2+c_2a_1)}{3}+2c_1c_2$.

179. Из формулы

$$\|f\|^2=a_0^2+a_1^2+a_2^2=2\left(\frac{a}{3}+c\right)^2+\frac{2b^2}{3}+\frac{8a^2}{45}$$

очевидно следует, что $\|f\|^2\geqslant 8a^2/45$, причем равенство возможно, лишь когда $b=0$, $a/3+c=0$, т. е. только для многочленов $ax^2-a/3$. Также имеем $\|f\|^2\geqslant 2b^2/3$, причем равенство возможно, лишь когда $a=0$, $a/3+c=0$, т. е. когда $a=0$, $c=0$. Так как

$$2\left(\frac{a}{3}+c\right)^2+\frac{2b^2}{3}+\frac{8a^2}{45}=2\frac{\left(a+\frac{5c}{3}\right)^2}{5}+\frac{2b^2}{3}+\frac{8c^2}{9},$$

получаем, что $\|f\|^2\geqslant 8c^2/9$, и равенство возможно только для

$$f(x)=\frac{-5cx^2}{3}+c.$$

192. Пусть x_1 — корень уравнения $f_n(x)=x$, а $y_k=x_{k+1}-x_k$, $k=1,\ldots,n-1$, $y_n=x_1-x_n$. Тогда

$$y_k=ax_k^2+(b-1)x_k+c,\qquad y_1+\ldots+y_n=0.$$

Если $(b-1)^2-4ac<0$, то трехчлен $ax^2+(b-1)x+c$ принимает все значения только одного знака, поэтому сумма $y_1+\ldots+y_n$ не может быть равна нулю. Поэтому уравнение $f_n(x)=x$ не имеет корней. Если $(b-1)^2-4ac=0$, то трехчлен $ax^2+(b-1)x+c$ принимает все значения только одного знака, но имеет единственный корень. Так как $y_1+\ldots+y_n=0$, это возможно, лишь когда все $y_k=0$, но тогда все x_k равны этому единственному корню, значит, уравнение $f_n(x)=x$ имеет единственный корень. Если $(b-1)^2-4ac>0$, то уравнение $f(x)=x$ имеет два корня, и они же, очевидно, будут корнями уравнения $f_n(x)=x$.

194. См. решение задачи 192.

195. Поскольку $f(x)=(x+p)^2-p$, последовательность $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$, $n\geqslant 2$, $f_1(x)=f(x)$, явно выражается формулами

$$f_n(x)=(x+p)^{2^n}-p.$$

196. Запишите уравнение в виде $1-(1-(1-x^2)^2)^2=x$. Его корнями будут корни уравнения $1-x^2=x$. Других корней нет.

197. Уравнение $f_2(x)=x$ имеет 4 корня $x_{1,2}=(-1\pm\sqrt{5})/2$, $x_3=0$, $x_4=1$. Значит, при четном n имеются те же корни. При нечетном n

имеются только первые два корня. Других корней нет. Чтобы доказать это, надо убедится, что итерационный процесс отталкивается от отрицательного корня и притягивается к положительному.

198. На отрезке $[-2, 0]$ $f(x)$ убывает от 2 до -2, а на отрезке $[0, 2]$ — возрастает от -2 до 2. Проверьте, что $f_n(x)$ является многочленом, который 2^n раз на отрезке $[-2, 2]$ колеблется между 2 и -2. За время каждого колебания он пересекает прямую $y = x$. Поэтому уравнение $f_n(x) = x$ имеет не менее 2^n действительных корней. Больше их быть не может, так как степень его равна 2^n.

201. Разложим $x^2 - n^2y^2$ на множители $(x - ny)(x + ny)$. Уравнение сведется к системе $x - ny = x + ny = \pm 1$.

203. Пусть $x_n = p_n/q_n$, тогда из рекуррентного соотношения

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2} + \frac{3}{2x_n}$$

имеем $p_1 = 2$, $q_1 = 1$,

$$p_{n+1} = p_n^2 + 3q_n^2, \quad q_{n+1} = 2p_nq_n.$$

Так как $p_1^2 - 3q_1^2 = 1$, далее по индукции имеем

$$p_{n+1}^2 - 3q_{n+1}^2 = (p_n^2 + 3q_n^2)^2 - 3(2p_nq_n)^2 = (p_n^2 - 3q_n^2)^2 = 1.$$

В частности, $p_2 = 7$, $q_2 = 4$, $p_3 = 97$, $q_3 = 56$, $p_4 = 18\,817$, $q_4 = 10\,864$. Кстати, дробь $\frac{97}{56}$ дает для $\sqrt{3}$ четыре верных десятичных знака после запятой, а дробь $\frac{18\,817}{10\,864}$ — восемь.

211. Каждому уравнению $x^2 + px + q = 0$, где $0 < p, q < 1998$, с целыми корнями $m \leqslant n$ сопоставим уравнение $x^2 - nx + nm = 0$, лежащее в том же множестве и не имеющее корней (так как $D = n^2 - 4mn < 0$). Но кроме таких уравнений, не имеют корней также уравнения вида $x^2 + cx + d = 0$, у которых $D < 0$, c четно, d нечетно.

215. Освободившись от знаменателей, получим, как ни странно, квадратное уравнение $3x^2 - 2(a - b)x - ab = 0$. Использование формул для решения квадратного уравнения ведет к громоздким вычислениям. Поэтому поступаем следующим образом. Так как этот квадратный трехчлен в точках $a, -b$ положителен, а в точке 0 — отрицателен, он имеет два корня, из которых отрицательный больше $-b$, а положительный — меньше a. Это действительно корни, так как они входят в ОДЗ исходного уравнения. Пусть $x_1 > 0 > x_2$. Тогда

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 + b} = \frac{1}{a - x_1},$$

откуда $1/x_1<1/(a-x_1)$, значит, $x_1>a/2>a/3$. Далее, $1/x_1>1/(x_1+b)$, поэтому
$$\frac{2}{x_1}>\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1+b}=\frac{1}{a-x_1},$$
откуда $a-x_1>x_1/2$, значит, $2a/3>x_1$. Аналогично разбираемся со вторым корнем.

216. Можно считать, что $a\geqslant 0$. Случай $a=0$ не сложен. Пусть $a>0$. Проверьте, что $f(m/(m+1))<0$. Если $c>0$, то $f(0)>0$ и имеется корень на отрезке $[0,m/(m+1)]$. Если же $c\leqslant 0$, то можно проверить, что $f(1)>0$, поэтому имеется корень на отрезке $[m/(m+1),1]$.

219. Модуль разности корней у первого трехчлена равен
$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|},$$
а у второго равен
$$\frac{\sqrt{4b^2-12ac}}{|a|}.$$
Очевидно, что
$$\frac{\sqrt{4b^2-12ac}}{|a|}\geqslant\frac{\sqrt{3}\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}\geqslant 10\sqrt{3}>17.$$

220. Ответ: $\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Указание. Очевидно,
$$\frac{-p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

222. Примените теорему Виета и заметьте, что
$$(a-c)(b-c)=c^2+pc+1,\qquad (a+d)(b+d)=d^2-pd+1,$$
а потом еще раз ее применить.

223. Ответ: это условие $(p_1-p_2)(p_1q_2-p_2q_1)+(q_1-q_2)^2=0$. См. также задачу 148.

224. Ответ: решений нет.

Указание. Поскольку a целое и корни должны быть целые, получаем, что это произведение целых чисел. Возможны два случая:
$$\begin{cases}x-a=1,\\ x-10=-1\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x-a=-1,\\ x-10=1.\end{cases}$$
Отсюда при $a=8$ единственный корень $x=9$, при $a=12$ единственный корень $x=11$. Двух целых корней нет ни при каком a.

226. Ответ: $a = 5$.

Указание. Применить теорему Виета и доказать, что $a > c > 0 > b$. Заметить, что $f(1) > 0$, откуда $a + c > -b$, потом получить неравенство $(a-c)^2 > b^2 - 4ac > 0$, откуда $a - c \geqslant 2$. Случаи $a \leqslant 4$ теперь можно все перебрать. Уравнение $5x^2 - 5x + 1$ имеет оба корня на интервале $(0, 1)$.

227. Если $x^2 + px + q$ — неотрицательный трехчлен, то $p^2 - 4q \leqslant 0$. Но тогда система

$$\begin{cases} a + b = p, \\ a^2 + b^2 = 2q \end{cases}$$

разрешима, потому что

$$2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2 = p^2 - 2q,$$

а уравнение $x^2 - px + (p^2/2 - q)$ имеет неотрицательный дискриминант. Далее, $((x+a)^2 + (x+b)^2)/2 = x^2 + px + q$.

228. Трехчлен имеет нулевой дискриминант тогда и только тогда, когда он представим в виде $c(x+a)^2$. В случае, когда трехчлен не имеет корней, применяем задачу 227. Если корень один, то представляем в виде $f = f/2 + f/2$. Если корней два, то подбираем a, b так, чтобы

$$(x - x_1)(x - x_2) = \frac{(2x+a)^2 - (x+b)^2}{3} = (x + a - b)\frac{(3x + a + b)}{3}.$$

229. Если $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$, то $c \geqslant 0$, $a > 0$. Представим его в виде $(Ax - B)^2 + Kx$, где $A = \sqrt{a}$, $B = \sqrt{c}$. Если $K < 0$, то при $x = B/A > 0$ имеем $ax^2 + bx + c = Kx < 0$, что противоречит условию. Поэтому $K = C^2$.

233. Пусть линейный двучлен есть $2ax + b$. Если $b \leqslant 0$, то для неотрицательного трехчлена $f = (x - a/2)^2 - b$ трехчлен $f + 2ax + b = (x + a/2)^2$ неотрицателен. Если $b \geqslant 0$, то для неотрицательного трехчлена $f = (x - a/2)^2$ трехчлен $f + 2ax + b = (x + a/2)^2 + b$ неотрицателен.

234. С помощью задачи 233 выберем неотрицательный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ так, чтобы $f(x) + 2ax + b$ тоже был неотрицателен. Тогда кубический многочлен $g(x) = x^3/3 + px^2/2 + qx$ монотонно возрастает, и кубический многочлен

$$g(x) + ax^2 + bx + c = \frac{x^3}{3} + \left(\frac{p}{2} + a\right)x^2 + (q+b)x + c$$

монотонно возрастает, потому что производные обоих многочленов неотрицательны.

235. Если один корень рациональный, то и второй — тоже. Пусть корень $x = m/n$ — рациональная несократимая дробь, тогда

$$m^2 + pmn = -qn^2,$$

значит, m^2 кратно n, что невозможно при $n \neq 1$.

236. При нечетных x трехчлен $x^2 + 2px + 2q$ принимает нечетное значение, поэтому не может обращаться в нуль. При четном x $x^2 + 2px$ кратно 4, а $2q$ — нет, поэтому $x^2 + 2px + 2q$ тоже не равно нулю. Значит, целых корней у трехчлена нет. Дробных нецелых корней у него тоже нет.

237. Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень r, то уравнение $x^2 + bx + ac$ также имеет рациональный корень ra и согласно задаче 235 этот корень обязательно целый. Пусть a, b, c нечетны, тогда коэффициенты второго уравнения нечетны. Тогда целый корень четен, ибо при нечетном x значение $x^2 + bx + ac$ нечетно, и, значит, отлично от нуля. Но и четным он быть не может, так как тогда $x^2 + bx = -ac$ слева четно, а справа — нечетно.

238. Если c и $a + b + c$ нечетны, то четных корней нет, так как иначе $ax^2 + bx = -c$ было бы четным и нечетным одновременно, и нечетных тоже нет, так как тогда

$$a(2k+1)^2 + b(2k+1) + c = a + b + c + 4k^2a + 4ka + 2bk$$

было бы нечетным и не могло равняться нулю.

239. Пусть трехчлен имеет целый корень x_0, значит,

$$f(x) = (x - x_0)(ax + b),$$

где a, b — целые. Если $|f(x_i)| = \pm 1$ при целых x_i, $i = 1, 2, 3$, то $x_i - x_0$ делит ± 1, значит, $x_i - x_0 = \pm 1$, но это невозможно, так как три разных числа не могут быть равны 1 и -1.

240. Если два различных квадратных трехчлена с рациональными коэффициентами имеют общий корень, то этот корень рационален (из системы двух различных квадратных уравнений можно вывести линейное уравнение с рациональными коэффициентами). Но трехчлены вида $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами не могут иметь нецелых рациональных корней.

244. Заметьте, что если $0 < x_i < 1$ — корни данного трехчлена $f(x)$, то согласно теореме Виета

$$1 \leqslant f(0)f(1) = ax_1x_2a(1-x_1)(1-x_2) = a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) < \frac{a^2}{16},$$

так как $x(1-x)<1/4$ при $x\neq 1/2$. Поэтому $a\geqslant 5$. Трехчлен $5x^2-5x+1$ удовлетворяет условиям задачи.

248. Ясно, что $a>0$. Пусть

$$f(x)=ax^2+bx+c=g(x)^2$$

(здесь и далее x — целые). Проверьте, что

$$f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=2a,$$

откуда

$$g(x+2)^2-2g(x+1)^2+g^2(x)=2a.$$

Положим

$$g_1(x)=g(x+1)-g(x),\quad g_2(x)=g(x+2)-g(x+1),$$

тогда при $x\geqslant -b/(2a)$ в силу монотонности $g_i(x)>0$, следовательно,

$$\begin{aligned}2a=g^2(x+2)-2g^2(x+1)+g^2(x)&=\\ =g_2^2(x)-g_1^2(x)+2g_2g_1+2(g_2(x)-g_1(x))g(x)&>\\ >g_2^2(x)-g_1^2(x)+2(g_2(x)-g_1(x))g(x).\end{aligned}$$

Неравенство $g_2(x)-g_1(x)>0$ не может выполняться при достаточно больших x, потому что в силу целочисленности тогда $g_2(x)-g_1(x)\geqslant 1$, откуда $2a>2g(x)$, что невозможно, так как $g(x)$ (вместе с $f(x)$) неограниченно возрастает с ростом x. Поэтому начиная с некоторого места всегда $g_2(x)\leqslant g_1(x)$, а это равносильно тому, что $g_1(x)=g(x+1)-g(x)$ не возрастает, начиная с некоторого места. Но последовательность натуральных чисел не может неограничено убывать, следовательно, в силу целочисленности $g_1(x)>0$ начиная с некоторого места становится равной некоторой натуральной константе d, поэтому с этого места $g(x)$ превращается в целочисленную арифметическую прогрессию $dx+e$. Значит, начиная с некоторого места трехчлены $f(x)=g^2(x)$ и $(dx+e)^2$ совпадают. Но если они совпадают в трех точках, то совпадают тождественно.

249. Докажите, что у чисел $0, a, 2a, \ldots, (N-1)a$ остатки при делении на N попарно различны.

250. Пусть $N=pQ$, где p делит Q. Тогда $f(x)=x+Qx^2$ перестановочный по модулю N. В противном случае при $i-j$, не кратном N, было бы $f(i) \bmod N=f(j) \bmod N$, т. е. $f(i)-f(j)=(i-j)(1+Q(i+j))$ делилось бы на N, что невозможно, так как $1+Q(i+j)$ взаимно просто с N, а тогда согласно задаче 249 $(i-j)(1+Q(i+j)) \bmod N\neq 0$, что противоречит равенству $f(i) \bmod N=f(j) \bmod N$.

Далее, пусть $N=2Q$, где Q нечетно. Тогда двучлен $f(x)=2x+Qx^2$ перестановочный по модулю N. В противном случае при $i-j$, не кратном N, было бы $f(i) \bmod N = f(j) \bmod N$, т. е.

$$f(i)-f(j)=(i-j)(2+Q(i+j))$$

делилось бы на N, что невозможно, так как $2+Q(i+j)$ взаимно просто с Q, поэтому делимость на N возможна, лишь когда $i-j$ кратно Q и четно (если бы $i-j$ было нечетным, то и $(i-j)(2+Q(i+j))$ было бы нечетным и не делилось бы на N), т. е. когда $i-j$ делится на N, а это противоречит предположению.

Наконец, пусть $N=p_1\ldots p_n$, где p_i — различные нечетные простые. Тогда $f(x)=ax^2+bx+c$ при $a \bmod N\neq 0$ не является перестановочным по модулю N. Можно считать, что a не кратно p_1. Проверим, что он не будет перестановочным по простому модулю p_1. Согласно задаче 249 найдется такое k, что $(ak+b) \bmod p_1=0$. Выберем $i\neq j \bmod p_1$ так, что $i+j=k \bmod p_1$. Тогда $f(i)=f(j) \bmod p_1$, так как $f(i)-f(j)=(i-j)(b+a(i+j))$ кратно p_1. Далее, пусть $J=sN/p_1$, $I=tN/p_1$ где s,t выбраны с помощью задачи 249 так, что $J=j \bmod p_1$, а $I=i \bmod p_1$, Тогда $I-J$ кратно N/p_1,

$$b+a(I+J)=b+a(i+j)=b+ak=0 \bmod p_1,$$

поэтому

$$f(I)-f(J)=(I-J)(b+a(I+J))=0 \bmod N, \quad I\neq J \bmod N,$$

значит, $f(x)$ — не перестановочный по модулю N.

252. Примените задачу 253.

253. Примените формулу Ньютона.

254. Примените задачу 251.

257. Примените задачу 254.

258. Примените задачу 251.

270. Применяя интерполяционную формулу Лагранжа (или пользуясь тем, что $f(1)=a+b+c$, $f(1/2)=a/4+b/2+c$, $f(0)=c$), получите формулы

$$a=2f(1)+2f(0)-4f\left(\frac{1}{2}\right), \quad b=4f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)-3f(0), \quad c=f(0),$$

где $f(x)=ax^2+bx+c$. Далее замечаем, что

$$|a|\leqslant 2|f(1)|+2|f(0)|+4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant 2+2+4=8$$

и аналогично $|b| \leqslant 8$. Очевидно, что $|c| \leqslant |f(0)| \leqslant 1$. Поэтому $|a|+|b|+|c| \leqslant 17$. Это равенство достигается для трехчлена

$$f(x) = 8x^2 - 8x + 1 = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1,$$

для которого очевидно $-1 \leqslant f(x) \leqslant 8/4 - 1 = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Можно проверить, что $|a| + |b| + |c| = 17$ только в случае $f(1) = f(0) = 1$, $f(-1/2) = -1$, т. е. только для указанного трехчлена.

273. Примените задачу 272.

274. Примените задачу 272.

275. Ясно, что

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |2ax + b| = \max\{|2a \pm b|\}.$$

Из условия следуют неравенства $-1 \leqslant -c \leqslant 1$, $-1 \leqslant a \pm b + c \leqslant 1$. Почленно складывая их, получаем, что $-2 \leqslant a \pm b \leqslant 2$. Складывая почленно последние два неравенства, имеем $-4 \leqslant 2a \leqslant 4$, т. е. $-2 \leqslant a \leqslant 2$. Суммируя последнее неравенство с $-2 \leqslant a \pm b \leqslant 2$, имеем $-4 \leqslant 2a \pm b \leqslant 4$, откуда $\max\{|2a \pm b|\} \leqslant 4$. Равенство достигается, только когда $c = -1$, $b = 0$, $a = 2$, т. е. для трехчлена $2x^2 - 1$, а также для трехчлена $1 - 2x^2$.

276. Положим $f(x) = ax^2 + bx + c$, тогда из условия следует, что $|f(0)| \leqslant 1$, $|f(1/2)| \leqslant 1$, $|f(1)| \leqslant 1$, а так как

$$b = 4\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right) - (a + b + c) - 3c = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - 3f(0),$$

получаем, что

$$|b| \leqslant 4\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + |f(1)| + 3|f(0)| \leqslant 8.$$

Равенство $b = 8$ возможно, лишь когда $f(0) = f(1) = -f(1/2) = -1$, откуда имеем, что $f(x) = \pm(8x^2 - 8x + 1)$.

284. Если не хотите вычислять, то, используя геометрическую интерпретацию умножения и деления комплексных чисел, можно проверить, что указанное равенство равносильно формуле Мэчина

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

290. Очевидно, $b/|b| = \pm 1$ в зависимости от знака b. Надо найти комплексное число $x + iy$ такое, что $(x + iy)^2 = a + bi$. Так как $(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, для этого надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Возводя второе уравнение в квадрат, сводим систему к следующей

$$\begin{cases} u-v=a, \\ uv=\dfrac{b^2}{4}, \end{cases}$$

а потом, заменяя $-v$ на w, получаем систему

$$\begin{cases} u+w=a, \\ uw=-\dfrac{b^2}{4}. \end{cases}$$

Для ее решения применяем теорему Виета.

292. Примените задачу 290.

293. Это условие равносильно обнулению дискриминанта.

296. Равенство означает, что уравнение на самом деле имеет действительные коэффициенты, а неравенство означает отсутствие действительных корней.

298. Пусть

$$l_1(x)=(x+1)x, \quad l_{-1}(x)=(x-1)x, \quad l_0(x)=(x-1)(x+1),$$

тогда

$$f(x)=-f(0)l_0(x)+\frac{1}{2}(f(1)l_1(x)+f(-1)l_{-1}(x)).$$

Дифференцируя k раз и учитывая, что

$$|f(0)|\leqslant 1, \quad |f(\pm 1)|\leqslant 1,$$

имеем

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant \left|-f(0)l_0^{(k)}(x)+\frac{1}{2}\left(f(1)l_1^{(k)}(x)+f(-1)l_{-1}^{(k)}(x)\right)\right|.$$

Заметим, что $f(i)=2i^2-1=-(-1)^j=\dfrac{l_j(i)}{|l_j(i)|}$, поэтому

$$|(2x^2-1)^{(k)}|=\left|\sum_{j=-1}^{1}(-1)^j\frac{l_j^{(k)}(x)}{l_j(i)}\right|=\left|\sum_{j=-1}^{1}\frac{l_j^{(k)}(x)}{|l_j(i)|}\right|.$$

Все корни любого многочлена $l_j(x)$ принадлежат отрезку $[-1,1]$, поэтому все корни его кратной производной $l_j^{(k)}(x)$ тоже принадлежат отрезку $[-1,1]$, поэтому $l_j^{(k)}(x)>0$ при $x\geqslant 1$, значит, при $x\leqslant -1$ знак $l_j^{(k)}(x)$ тоже постоянен, поэтому при $|x|\geqslant 1$

$$|(2x^2-1)^{(k)}|=\left|\sum_{j=-1}^{1}\frac{|l_j^{(k)}(x)|}{|l_j(i)|}\right|=\left|\sum_{j=-1}^{1}\frac{l_j^{(k)}(x)}{l_j(i)}\right|.$$

Отсюда $|f^{(k)}(x)| \leqslant |(2x^2-1)^{(k)}|$, причем равенство возможно, лишь когда $f(i) = \pm(2i^2-1)$, $i = 0, \pm 1$, т. е. при $f = \pm(2x^2-1)$.

299. Примените задачу 298.

300. Задачу минимизации многочлена на произвольном отрезке $[a, b]$ легко свести к такой же задаче для любого конкретного отрезка, например $[-1, 1]$, если вместо многочлена $f(x)$ рассмотреть многочлен $g(x) = f((a+b+x(b-a))/2)$.

302. Примените задачу 298 при $k = 1$.

303. Воспользуйтесь тождеством

$$f(x) = -f(0)l_0(x) + \frac{1}{2}(f(1)l_1(x) + f(-1)l_{-1}(x)),$$

где

$$l_1(x) = (x+1)x, \quad l_{-1}(x) = (x-1)x, \quad l_0(x) = (x-1)(x+1).$$

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: http://biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: http://www.litres.ru/mcnmo/

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru