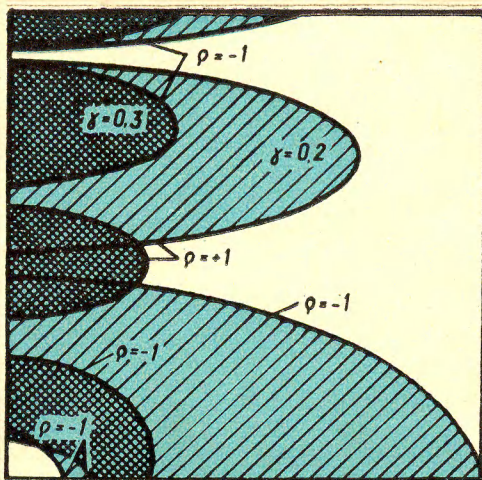


В.И.ГОСТЕВ
С.В.ГУСОВСКИЙ

РАСЧЕТ И ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ СЪЕМА ДАННЫХ



Киев
«Техніка»
1985

В.И.ГОСТЕВ, С.В.ГУСОВСКИЙ

**РАСЧЕТ
И ОПТИМИЗАЦИЯ
СИСТЕМ
С КОНЕЧНЫМ
ВРЕМЕНЕМ
СЪЕМА ДАННЫХ**

**КИЕВ
«ТЕХНІКА»
1985**

82.965
Г72

Гостев В. И., Гусовский С. В.

Г72 Расчет и оптимизация систем с конечным временем съема данных.—К.: Техніка, 1985.—152 с., ил.—Библиогр.: с. 151—152. 60 к. 2000 экз.

В книге даны расчет областей устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров и расчет переходных процессов импульсных систем с конечным временем съема данных, широко используемых в радиолокационной технике, технике связи и промышленной автоматике. Рассмотрены метод определения частотных характеристик и расчет систем в частотной области. Изложены вопросы оптимизации параметров систем рассматриваемого класса на основе интегральных оценок и критерия максимального быстродействия. Рассчитана на инженерно-технических работников, занимающихся вопросами расчета, проектирования и эксплуатации систем автоматического управления, а также может быть полезна студентам вузов соответствующих специальностей.

Г $\frac{240200000-007}{M202(04)-85}$ 41.85

32.965

Рецензенты кандидаты техн. наук Р. Э. Милько, Е. И. Серебряный

Редакция литературы по энергетике, электронике, кибернетике и связи
Зав. редакцией Э. В. Божко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из определяющих факторов в решении задач, поставленных XXVI съездом КПСС в области развития общественного производства, является автоматизация производственных процессов. Автоматизация достигается внедрением в производство автоматизированных систем управления на базе локальных систем автоматического управления и требует разработки теории, методов анализа и расчета систем.

Импульсные системы с конечным временем съема данных характеризуются тем, что в них информация об отклонении управляемой величины поступает в систему не непрерывно, как в обычных непрерывных системах, и не дискретно, как в обычных импульсных системах, а периодически, в течение некоторого конечного интервала времени на протяжении периода. Такие системы в настоящее время широко применяют, например, в многоканальных системах промышленной автоматики, технике связи, а также в радиолокационных устройствах. Квантование информации по времени специально вводится в следующих случаях [14]:

когда устройство вычисления ошибки поочередно решает несколько задач управления, что позволяет эффективно использовать ЭВМ; при управлении процессами, в которых благодаря квантованию достигается более экономичное использование приборов, измеряющих температуру, давление, расход топлива и т. п.;

в телеметрических системах, в которых часто используется один канал связи для передачи информации о нескольких независимых переменных;

в системах связи в схемах разделения по времени;

в системах управления, в которых при определенных условиях система с прерывателем (ключом) работает лучше, чем непрерывная система.

Кроме того, имеются системы, в которых информация существует лишь в моменты съема, например, радиолокационные системы и системы передачи данных, обслуживающие одновременно несколько систем управления. Прерывание информации в радиотехнических системах возникает не только при передаче сообщений посредством радиосигналов с различными видами импульсной модуляции, но и в результате воздействия на радиосистему некоторых видов организованных помех [18].

Прерывание информации отображается на структурных схемах специфическим звеном — (прерывателем) ключом с конечным временем

замыкания. Прерыватель характеризуется двумя параметрами: периодом замыкания T и длительностью замыкания γT .

Несмотря на широкое применение импульсных систем с конечным временем съема данных (систем с ключом), их теория, точные и приближенные методы анализа и расчета, вопросы оптимизации и синтеза развиты недостаточно полно [19]. Некоторые точные методы, например P -преобразования, приспособывания, z -преобразования, весьма сложны и громоздки.

В последние годы разработаны достаточно простые методы и алгоритмы расчета областей устойчивости и неустойчивости, анализа переходных процессов импульсных систем с конечным временем съема данных, исследованы вопросы оптимизации систем на основе интегральных критериев качества. Разработан инженерный метод эквивалентных передаточных матриц, позволяющий определять с высокой точностью частотные характеристики импульсных систем с ключом и решать задачу оптимизации параметров систем на основе частотных показателей качества. Однако единого пособия по расчету систем нет.

В книге приведены расчеты импульсных систем с конечным временем съема данных. Основное внимание уделяется расчету систем с одним или несколькими синхронно работающими ключами. Именно такие системы наиболее часто используют на практике.

Гл. 2—4 книги написаны В. И. Гостевым. Предисловие и гл. 1 написаны авторами совместно.

Отзывы и пожелания просим направлять по адресу: 252601, Киев, 1, Крещатик, 5, издательство «Техніка».

Глава 1.

УСТОЙЧИВОСТЬ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ СЪЕМА ДАННЫХ

1. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ

Наиболее часто в технике автоматического управления применяют импульсные системы с конечным временем съема данных, в которых прерыватели (ключи) замыкаются периодически и синхронно, с периодами, кратными или равными основному (наибольшему) периоду прерывания T . Одна из возможных алгоритмических схем таких

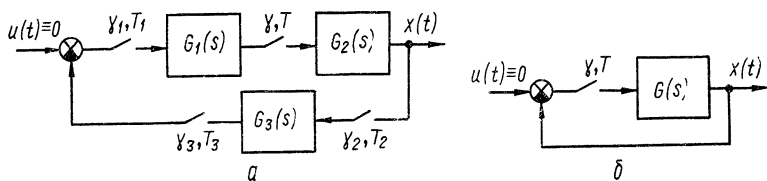


Рис. 1.1

систем показана на рис. 1. 1, а. Относительная (по отношению к периоду T) длительность замыкания γ у прерывателей различная, синфазность работы прерывателей может не соблюдаться, а количество прерывателей может быть любым. Наиболее простая схема (с одним прерывателем) показана на рис. 1. 1, б. Импульсные системы с периодически и синхронно работающими прерывателями являются периодически нестационарными системами. Поэтому проблему устойчивости (и неустойчивости) таких импульсных систем с конечным временем съема данных можно решать на базе общей теории периодических систем, учитывая конкретные особенности импульсных систем с прерывателями. Периодическими системами или, что более точно, периодически нестационарными называются системы с периодически изменяющимися несколькими (или одним) параметрами. Уравнения, описывающие линейные периодически нестационарные системы, отличаются от уравнений линейных стационарных систем тем, что коэффициенты этих уравнений являются периодическими функциями времени [12, 27].

Динамика свободного движения рассматриваемых систем описывается в виде векторного дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{A}(t)$ — квадратная непрерывная периодическая с периодом T матрица,

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T). \quad (1.2)$$

В работах по теории автоматического управления вектор $x(t)$ называют вектором состояния, уравнение (1. 1) — уравнением состояния системы, а матрицу $A(t)$ — матрицей коэффициентов [12, 23]. Решение уравнения (1.1) имеет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0. \quad (1.3)$$

Матрица $\Phi(t, t_0)$ квадратная, того же порядка, что и $A(t)$, является решением уравнения

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I, \quad (1.4)$$

где I — единичная матрица. Матрица $\Phi(t, t_0)$ представляет собой линейное преобразование, которое переводит начальное состояние системы x_0 в момент t_0 в определенное состояние в момент t . По этой причине $\Phi(t, t_0)$ называют переходной матрицей (фундаментальной матрицей, или матрицантом). Согласно определению матрицы $\Phi(t, t_0)$, вектор $x(t)$ равен x_0 при $t = t_0$. Дифференцируя равенство (1.3) с учетом уравнения (1.4), убеждаемся, что оно удовлетворяет уравнению (1.1).

Для упрощения записи обозначим

$$\Phi(t) \equiv \Phi(t, 0) = \Phi(t, t_0)|_{t_0=0}, \quad \Phi(0) = I. \quad (1.5)$$

При условии (1. 2) переходная матрица уравнения (1.1) удовлетворяет тождеству

$$\Phi(t + T) \equiv \Phi(t) \Phi(T) \quad (1.6)$$

(обе части равенства удовлетворяют уравнению (1. 4) и совпадают при $t=0$, поэтому в силу единственности решения уравнения (1. 4) они тождественны). Обратно, если матрицант уравнения (1. 1) удовлетворяет тождеству (1. 6), то матрица $A(t)$ периодическая с периодом T . Действительно, используя тождество (1. 6), находим

$$A(t + T) = \dot{\Phi}(t + T) \Phi(t + T)^{-1} = \dot{\Phi}(t) \Phi(T) \Phi(T)^{-1} \Phi(t)^{-1} = A(t).$$

Матрица $\Phi(T)$ называется матрицей монодромии, а ее собственные значения ρ_i , т. е. корни характеристического уравнения

$$\det[\Phi(T) - \rho I] = (-1)^h (\rho^h + a_1 \rho^{h-1} + a_2 \rho^{h-2} + \dots + a_{h-1} \rho + a_h) = 0 \quad (1.7)$$

называются мультипликаторами уравнения (1. 1).

Каждому значению ρ , например ρ_i , соответствует собственный вектор λ_i матрицы $\Phi(T)$, удовлетворяющий уравнению

$$\Phi(T) \lambda_i = \rho_i \lambda_i. \quad (1.8)$$

Рассмотрим решение $x(t)$ уравнения (1.1) с начальным условием $x_0 = x(0) = \lambda_i$. Это решение согласно формулам (1.3) и (1.5) имеет вид

$$x(t) = \Phi(t) x_0 = \Phi(t) \lambda_i. \quad (1.9)$$

Учитывая выражения (1. 6), (1. 8) и (1.9), записываем

$$\mathbf{x}(t + T) = \Phi(t + T) \lambda_i = \Phi(t) \Phi(T) \lambda_i = \rho_i \Phi(t) \lambda_i = \rho_i \mathbf{x}(t).$$

Таким образом, каждому мультипликатору ρ_i отвечает решение уравнения (1.1), удовлетворяющее соотношению

$$\mathbf{x}(t + T) = \rho_i \mathbf{x}(t). \quad (1.10)$$

Из выражения (1.10) можно заключить, что периодически нестационарная система имеет периодическое решение периода T только тогда, когда один из мультипликаторов ρ равен единице. Система имеет антипериодическое решение периода T только тогда, когда один из мультипликаторов $\rho = -1$. Отметим что антипериодическое решение $\mathbf{x}(t + T) = -\mathbf{x}(t)$ есть периодическое решение с периодом $2T$, так как $\mathbf{x}(t + 2T) = -\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$. Если $\rho = \exp \frac{p}{q} \pi j$, где p, q — целые числа, то система имеет периодическое решение с периодом $2qT$, $q \geq 1$.

Теоремы Флоке—Ляпунова. Определим постоянную матрицу Γ равенством

$$\Gamma = 1/T \ln \Phi(T),$$

где под $\Gamma T = \ln \Phi(T)$ понимается одно из решений матричного уравнения $\exp(\Gamma T) = \Phi(T)$.

Если матрица $A(t)$ вещественная, то и $\Phi(T)$ также вещественная матрица, но Γ будет комплексной матрицей. Определим далее матрицу-функцию $R(t)$ равенством

$$R(t) = \Phi(t) \exp(-\Gamma t). \quad (1.11)$$

Используя тождество (1.6), находим $R(t + T) = \Phi(t + T) \exp(-\Gamma T) \times \exp(-\Gamma t) = \Phi(t) \Phi(T) \Phi(T)^{-1} \exp(-\Gamma t) = R(t)$. Таким образом, матрицант уравнения (1.1), в котором $A(t)$ периодическая матрица периода T , имеет вид

$$\Phi(t) = R(t) \exp(\Gamma t), \quad (1.12)$$

где $R(t)$ — периодическая матрица-функция с периодом T , причем, как видно из формулы (1.11), эта матрица неособая, непрерывная с интегрируемой кусочно-непрерывной производной и $R(0) = \Phi(0) = I$. Этот результат формулируется как теорема Флоке—Ляпунова [27]. Матрицант уравнения (1.1), в котором $A(t)$ — непрерывная периодическая с периодом T матрица, можно представить в виде формулы (1.12), где $R(t)$ — периодическая матрица-функция с периодом T , неособая для всех значений t , непрерывная, с интегрируемой кусочно-непрерывной производной и удовлетворяющая условию $R(0) = I$, а Γ — постоянная матрица. Наоборот, пусть $R(t)$ — матрица-функция с указанными свойствами; Γ — произвольная постоянная матрица. Тогда матрица $\Phi(t)$, определяемая формулой (1.12), является матрицантом уравнения (1.1).

Действительно, из формулы (1.12) следует, что $\Phi(t + T) = R(t + T) \exp(\Gamma t) \exp(\Gamma T) = R(t) \exp(\Gamma t) \exp(\Gamma T) = \Phi(t) \Phi(T)$, т. е. $\Phi(t)$ удовлетворяет тождеству (1.6), а последнее, как было показано

выше, означает периодичность матрицы $A(t)$ уравнения (1.1), для которого $\Phi(t)$ является матрицантом. Далее покажем, что замена

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t) \mathbf{y}(t) \quad (1.13)$$

приводит уравнение (1.1) к виду

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}(t). \quad (1.14)$$

Действительно, подставляя выражение (1.13) в уравнение (1.1), имеем

$$\dot{\mathbf{R}}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{R}(t) \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{y}(t). \quad (1.15)$$

Используя тождество $\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}(t) \Phi(t)$ и дифференцируя (1.11), находим $\dot{\mathbf{R}}(t) = \dot{\Phi}(t) \exp(-\mathbf{\Gamma}t) - \Phi(t) \exp(-\mathbf{\Gamma}t) \mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}(t) \Phi(t) \exp(-\mathbf{\Gamma}t) - \mathbf{R}(t) \mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}(t) \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t) \mathbf{\Gamma}$. Умножим последнее выражение на $\mathbf{y}(t)$ и запишем

$$\dot{\mathbf{R}}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{R}(t) \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{y}(t). \quad (1.16)$$

Сравнивая выражения (1.15) и (1.16), убеждаемся в справедливости уравнения (1.14). Поэтому теорему Флоке—Ляпунова сформулируем в следующем виде (теорема Ляпунова о приводимости): для уравнения (1.1) с непрерывной периодической периода T матрицей $\mathbf{A}(t)$ существует непрерывная, неособая, периодическая периода T , имеющая непрерывную кусочно интегрируемую производную матрица-функция $\mathbf{R}(t)$ такая, что замена равенства (1.13) приводит уравнение (1.1) к уравнению (1.14).

Собственные значения λ_i матрицы $\mathbf{\Gamma}$, т. е. корни характеристического уравнения $\det [\mathbf{\Gamma} - \lambda \mathbf{I}] = 0$, называются характеристическими показателями системы (1.1). Следует отметить, что матрица $\mathbf{\Gamma}$ не является строго определенной, так как значение $\ln \Phi(T)$ многозначно. Характеристические показатели связаны с мультипликаторами ρ_i формулой

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln \rho_i = \frac{1}{T} [\ln |\rho_i| + j(\arg \rho_i + 2\pi m)], \quad (1.17)$$

где $m = 0; \pm 1; \pm 2, \dots, i = 1, 2, \dots, h$, h — порядок (число корней) характеристического уравнения (1.7).

Из формулы (1.17) видно, что λ_i определяются с точностью до слагаемого $2\pi m j/T$, где m — целое число, $j = \sqrt{-1}$. Очевидно,

$$\rho_i = \exp(\lambda_i T). \quad (1.18)$$

Используя формулу (1.12), можно показать, что каждому характеристическому показателю λ_i отвечает решение уравнения (1.1) вида

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_i t} \boldsymbol{\varphi}(t), \quad \boldsymbol{\varphi}(t + T) = \boldsymbol{\varphi}(t),$$

где $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\alpha}_i$; $\boldsymbol{\alpha}_i$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{\Gamma}$.

Условия устойчивости (неустойчивости). Поскольку процессы в системах автоматического управления описываются дифференциальными уравнениями, то математический анализ устойчивости сводится к исследованию свойств решений этих уравнений. Из формулы

(1.12) видно, что устойчивость или неустойчивость периодически нестационарной системы, динамика которой описывается векторным дифференциальным уравнением (1.1) с периодической матрицей $A(t)$, определяется матрицей Γ или матрицей $\Phi(T) = \exp(\Gamma T)$. Другими словами, матрица Γ или матрица $\Phi(T)$ определяет ограниченность, неограниченность, порядок роста или убывания при $t \rightarrow \infty$ всех решений этого уравнения. При исследовании устойчивости иногда достаточно охарактеризовать матрицу Γ или матрицу $\Phi(T)$ или даже собственные значения этих матриц, т. е. характеристические показатели или мультипликаторы уравнения (1.1).

Изучение устойчивости периодически нестационарных систем представляет интерес не только вследствие большого распространения таких систем на практике, но и вследствие того, что к проблеме устойчивости линейных периодических нестационарных систем сводится проблема устойчивости периодических решений нелинейных систем. Из общего определения устойчивости по Ляпунову следует, что тривиальное решение векторного дифференциального уравнения (1.1) устойчиво, если все решения этого уравнения ограничены при $t \rightarrow \infty$, и асимптотически устойчиво, если все решения стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Из формул (1.3), (1.5) и (1.12) следует, что первое имеет место, если матрица $\exp(\Gamma t)$ ограничена при $t \rightarrow \infty$, второе имеет место, если матрица $\exp(\Gamma t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, тривиальное решение уравнения (1.1) устойчиво тогда и только тогда, когда характеристические показатели этого уравнения имеют неположительные вещественные части, причем чисто мнимым и нулевым характеристическим показателям отвечают простые элементарные делители матрицы $\Gamma - \lambda I$. Если вещественная часть хотя бы одного из характеристических показателей положительна или имеет кратный чисто мнимый или нулевой показатель с непростым элементарным делителем матрицы $\Gamma - \lambda I$, тривиальное решение уравнения (1.1) неустойчиво. Асимптотическая устойчивость тривиального решения уравнения (1.1) будет тогда и только тогда, когда все характеристические показатели этого уравнения имеют отрицательные вещественные части.

Вместо характеристических показателей λ_i рассмотрим мультипликаторы ρ_i (см. формулу (1.18)) и сформулируем условия устойчивости и неустойчивости следующим образом.

Периодически нестационарная система, описываемая уравнением (1.1), устойчива, если все мультипликаторы ρ_i уравнения (1.1) расположены на комплексной плоскости внутри замкнутого единичного круга $|\rho| < 1$, причем мультипликаторы, лежащие на окружности $|\rho| = 1$, имеют простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения соответствующей матрицы монодромии. Для асимптотической устойчивости периодически нестационарной системы необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы уравнения (1.1) находились внутри единичного круга $|\rho| < 1$. Действительно, так как характеристические показатели λ_i связаны с мультипликаторами ρ_i соотношениями (1.17) и (1.18), то при $|\rho_i| < 1$ имеем $\lambda_i < 0$.

Для определения областей асимптотической устойчивости выведем условия, обеспечивающие принадлежность корней полинома $f(\rho) \equiv \det[\Phi(T) - \rho I]$ единичному кругу $|\rho| < 1$ на комплексной плоскости ρ .

Нетрудно проверить, что дробно-линейное преобразование $\rho = (\omega + 1)/(\omega - 1)$ переводит единичный круг $|\rho| < 1$ плоскости ρ в левую полуплоскость $\text{Re } \omega$ плоскости ω , а полином

$$f(\rho) = (-1)^h (\rho^h + a_1 \rho^{h-1} + a_2 \rho^{h-2} + \dots + a_{h-1} \rho + a_h)$$

преобразуется в полином Гурвица

$$F(\omega) = \pm (\omega - 1)^h f\left(\frac{\omega + 1}{\omega - 1}\right) = B_0 \omega^h + B_1 \omega^{h-1} + B_2 \omega^{h-2} + \dots + B_{h-1} \omega + B_h, \quad (1.19)$$

причем знак в формуле (1.19) следует выбрать так, чтобы полином $F(\omega)$ был стандартным, т. е.

$$F(0) = \pm (-1)^h f(-1) > 0.$$

Корни уравнения

$$\rho^h + a_1 \rho^{h-1} + a_2 \rho^{h-2} + \dots + a_{h-1} \rho + a_h = 0$$

соответствуют корням уравнения

$$B_0 \omega^h + B_1 \omega^{h-1} + B_2 \omega^{h-2} + \dots + B_{h-1} \omega + B_h = 0 \quad (1.20)$$

и устойчивость системы можно анализировать без определения корней уравнения (1.20) при помощи критерия Гурвица.

Предварительно отметим, что периодические режимы периодически нестационарной системы на основании формул (1.7) и (1.19) определяются уравнениями

$$f(1) = \det[\Phi(T) - I] = (-1)^h \left(1 + \sum_{i=1}^h a_i\right) = (-1)^h B_0 = 0$$

(наличие периодического решения периода T , $\rho = 1$);

$$f(-1) = \det[\Phi(T) + I] = 1 + \sum_{i=1}^h (-1)^i a_i = B_h = 0$$

(наличие антипериодического решения периода $2T$, $\rho = -1$).

Для периодически нестационарной системы второго порядка ($h=2$), характеристическое уравнение которой имеет вид $\rho^2 + a_1 \rho + a_2 = 0$, запишем условие устойчивости Гурвица

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1 + a_1 + a_2 > 0; \\ B_1 &= 2(1 - a_2) > 0; \\ B_2 &= 1 - a_1 + a_2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Условия существования периодических режимов для системы второго порядка

$$\left. \begin{aligned} \tilde{B}_0 &= 1 + a_1 + a_2 = 0; \\ \tilde{B}_2 &= 1 - a_1 + a_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Анализируя формулы (1.21) и (1.22), можно заключить, что при выполняемых совместно условиях $B_0 > 0, B_1 > 0, B_2 = 0$ или условиях $B_0 = 0, B_1 > 0, B_2 > 0$ границам областей устойчивости и неустойчивости периодически нестационарной системы второго порядка соответствуют периодические режимы, для которых мультипликаторы уравнения (1.1) равны $+1$ или -1 . Более того, если коэффициент $a_2 < 1$ (что обычно выполняется на практике), то границы областей устойчивости и неустойчивости системы второго порядка определяются только уравнениями (1.22).

Для периодически нестационарной системы третьего порядка ($h = 3$), характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\rho^3 + a_1\rho^2 + a_2\rho + a_3 = 0,$$

запишем условия устойчивости Гурвица

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1 + a_1 + a_2 + a_3 > 0; \\ B_1 &= 3(1 - a_3) + a_1 - a_2 > 0; \\ B_2 &= 3(1 + a_3) - a_1 - a_2 > 0; \\ B_3 &= 1 - a_1 + a_2 - a_3 > 0; \\ B_1B_2 - B_0B_3 &= 8(1 - a_3^2 - a_2 + a_1a_3) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Условия существования периодических режимов для систем третьего порядка

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1 + a_1 + a_2 + a_3 = 0; \\ B_3 &= 1 - a_1 + a_2 - a_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Анализируя формулы (1.23) и (1.24), можно заключить, что при выполняемых совместно условиях $B_0 > 0, B_1 > 0, B_2 > 0, B_3 = 0, B_1B_2 - B_0B_3 > 0$ или условиях $B_0 = 0, B_1 > 0, B_2 > 0, B_3 > 0, B_1B_2 - B_0B_3 > 0$ границам областей устойчивости и неустойчивости периодически нестационарной системы третьего порядка соответствуют периодические режимы, для которых мультипликаторы ρ уравнения (1.1) равны $+1$ или -1 .

Для периодически нестационарной системы четвертого порядка ($h = 4$), характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\rho^4 + a_1\rho^3 + a_2\rho^2 + a_3\rho + a_4 = 0,$$

запишем условия устойчивости Гурвица

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0; \\ B_1 &= 4(1 - a_4) + 2(a_1 - a_3) > 0; \\ B_2 &= 6(1 + a_4) - 2a_2 > 0; \\ B_3 &= 4(1 - a_4) + 2(a_3 - a_1) > 0; \\ B_4 &= 1 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 > 0; \\ \Delta &= B_1B_2 - B_0B_3 > 0; \\ B_3\Delta - B_1^2B_4 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

что матрица $A(t)$ будет постоянной для каждого подынтервала, то матрица монодромии для такой системы определяется на основании формулы (1.29), которая окончательно имеет вид

$$C \equiv \Phi(T) = \prod_{k=m}^1 \exp(A_k T_k) = \prod_{k=m}^1 \Phi_k(T_k). \quad (1.30)$$

Определение областей устойчивости импульсных систем с конечным временем съема данных. Задачу нахождения областей устойчивости (неустойчивости) можно решить, определив матрицу монодромии $C \equiv \Phi(T)$, коэффициенты a_i характеристического уравнения (1.7) и подставив эти коэффициенты в полученные выше соотношения, определяющие условия устойчивости. Этот метод определения областей устойчивости (неустойчивости) поясним конкретным примером.

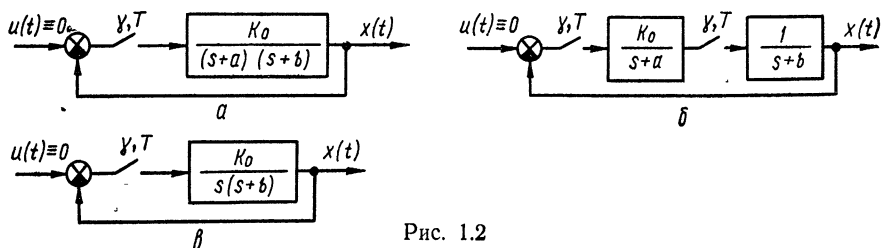


Рис. 1.2

Рассмотрим систему (рис. 1.2, а) с одним периодически работающим прерывателем, который в каждый период T замыкается на относительно время γ . Пусть непрерывная часть системы имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{K_0}{(s+a)(s+b)}.$$

Запишем для этой системы матрицу $A(t)$ в интервалах $nT < t \leq (n + \gamma)T$ при замкнутом прерывателе:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -b & 1 \\ -K_0 & -a \end{bmatrix}.$$

Матрицу $A(t)$ при замкнутом и разомкнутом состояниях прерывателя удобно находить путем замены структурной схемы системы на соответствующую схему аналогового моделирования и записи для схемы аналогового моделирования соответствующего ей уравнения вида (1.1). Поскольку при этом линейные стационарные звенья, составляющие непрерывную часть системы, можно менять местами в схеме аналогового моделирования, то можно записать несколько равнозначных вариантов матрицы $A(t)$ при разомкнутом и замкнутом состояниях прерывателя. Соответствующая записанной матрице A_1 переходная матрица имеет вид

$$\Phi_1(t) = L^{-1} \{ (sI - A_1)^{-1} \} = \exp \{ A_1 t \} = \begin{bmatrix} A & B \\ -K_0 B & C \end{bmatrix}.$$

где

$$A = \frac{\lambda_1 + a}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 + a}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}; \quad B = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}; \quad C = \\ = \frac{\lambda_1 + b}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 + b}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}; \quad \lambda_{1,2} = -\frac{a+b}{2} \pm \lambda, \quad \lambda = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} - K_0}.$$

Запишем матрицу $A(t)$ в интервалах $(n + \gamma)T < t \leq (n + 1)T$ при разомкнутом прерывателе:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -b & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}.$$

Соответствующая переходная матрица

$$\Phi_2(t) = L^{-1} \{ (sI - A_2)^{-1} \} = \exp \{ A_2 t \} = \begin{bmatrix} D & E \\ 0 & H \end{bmatrix},$$

где $D = e^{-bt}$; $E = \frac{1}{b-a} e^{-at} + \frac{1}{a-b} e^{-bt}$; $H = e^{-at}$.

Матрица монодромии $\Phi(T)$ определяется по формуле (1.30)

$$\Phi(T) = \Phi_2(T - \gamma T) \Phi_1(\gamma T).$$

Подставляя в коэффициенты A , B и C значение $t = \gamma T$, а в коэффициенты D , E и H значение $t = T - \gamma T$ и вводя обозначения $\kappa = bT$; $\eta = \frac{a}{b}(\eta\kappa = aT)$; $z = \lambda T$, находим

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} AD - K_0 BE & BD + CE \\ -K_0 BH & CH \end{bmatrix},$$

где коэффициенты в элементах матрицы монодромии

$$A = e^{-(1+\eta)\frac{\kappa}{2}} \left[\frac{(\eta-1)\kappa}{2|z|} \sin(\gamma|z|) + \cos(\gamma|z|) \right];$$

$$B = \frac{T}{|z|} e^{-(1+\eta)\frac{\kappa}{2}} \sin(\gamma|z|);$$

$$C = e^{-(1+\eta)\frac{\kappa}{2}} \left[\frac{(1-\eta)\kappa}{2|z|} \sin(\gamma|z|) + \cos(\gamma|z|) \right];$$

$$D = e^{-(1-\gamma)\kappa};$$

$$E = \frac{T}{\kappa(1-\eta)} [e^{-(1-\gamma)\eta\kappa} - e^{-(1-\gamma)\kappa}];$$

$$H = e^{-(1-\gamma)\eta\kappa}.$$

Области устойчивости и неустойчивости и кривые, соответствующие периодическим режимам, для рассматриваемой системы определяются по формулам (1.21) и (1.22), в которых коэффициенты a_1 и a_2 определяются на основании выражений (1.27) и (1.28):

$$a_1 = -\text{Sp}[\Phi(T)] = -(AD - K_0 BE + CH);$$

$$a_2 = \det \Phi(T) = DH(AG + K_0 B^2).$$

После простых вычислений находим

$$a_1 = -e^{-(1+\eta)\gamma \frac{x}{2}} \{ [e^{-(1-\eta)\gamma x} + e^{-(1-\eta)\eta x}] \cos(\gamma|z|) + \left[\frac{(1-\eta)\kappa}{4|z|} - \frac{|z|}{(1-\eta)\kappa} \right] [e^{-(1-\eta)\eta x} - e^{-(1-\eta)x}] \sin(\gamma|z|); \quad (1.31)$$

$$a_2 = e^{-(1+\eta)x}. \quad (1.32)$$

Рассчитанные на ЭВМ по формулам (1.21), (1.22) и (1.31), (1.32) области устойчивости и неустойчивости системы (рис.1.2, а) в плоскости параметров $(|z|, \kappa)$ при относительной длительности замыкания прерывателя $\gamma = 0,5$ и значениях η , равных 0, 0,5 и 1, изображены на рис.1.3 (области неустойчивости заштрихованы). С увеличением η области неустойчивости уменьшаются. Границам областей устойчивости и неустойчивости соответствуют периодические режимы. При параметрах системы, соответствующих границам областей устойчивости и неустойчивости, в системе существуют периодические колебания периода T (при $\rho = 1, B_0 = 0$) или периода $2T$ (при $\rho = -1, B_2 = 0$).

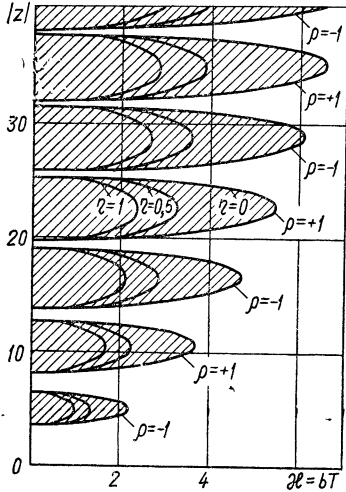


Рис. 1.3

Рассмотрим систему рис.1.2, б с двумя синхронно и синфазно работающими ключами. Для этой системы все полученные выше выражения справедливы за исключением того, что коэффициент E равен нулю. Поэтому

$$a_1 = -(AD + CH) = -e^{-(1+\eta)\gamma \frac{x}{2}} \{ [e^{-(1-\eta)\eta x} + e^{-(1-\eta)x}] \times \cos(\gamma|z|) + \frac{(1-\eta)\kappa}{2|z|} [e^{-(1-\eta)\eta x} - e^{-(1-\eta)x}] \sin(\gamma|z|) \}.$$

При $\eta = 1$ $a_1 = -2e^{-x} \cos(\gamma|z|)$; $a_2 = e^{-2x} < 1$, условия устойчивости $1 + a_2 > |a_1|$. Подставляя коэффициенты a_1 и a_2 , находим

$$1 + e^{-2x} > 2e^{-x} |\cos(\gamma|z|)|,$$

или

$$\operatorname{ch} x > |\cos(\gamma|z|)|.$$

Поскольку последнее условие всегда выполняется, то система рис.1.2, б (когда $\eta = 1$) устойчива при любых значениях параметров x, γ и $|z|$. Таким образом, введение второго прерывателя придает системе свойство абсолютной устойчивости.

Наконец, рассмотрим систему рис.1.2, в [14]. Определим полные области устойчивости и неустойчивости этой системы. Нетрудно видеть, что алгоритмическая схема рис.1.2, в получается из схемы рис.1.2, а при параметре $a = 0$. Поэтому коэффициенты a_1 и a_2 харак-

теристического уравнения системы рис. 1.2, в можно получить из формул (1.31) и (1.32) при $\eta = a/b = 0$. В результате для системы рис. 1.2, в получим

$$a_1 = -e^{-\frac{x}{2}} \left\{ [1 + e^{-(1-\gamma)x}] \cos(\gamma |z|) + \right. \\ \left. + \left(\frac{x}{4|z|} - \frac{|z|}{x} \right) [1 - e^{-(1-\gamma)x}] \sin(\gamma |z|) \right\}; \quad (1.33)$$

$$a_2 = e^{-x} < 1. \quad (1.34)$$

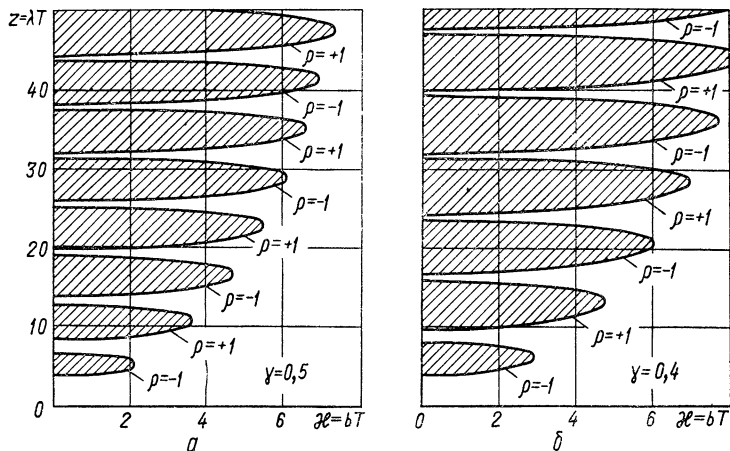


Рис. 1.4

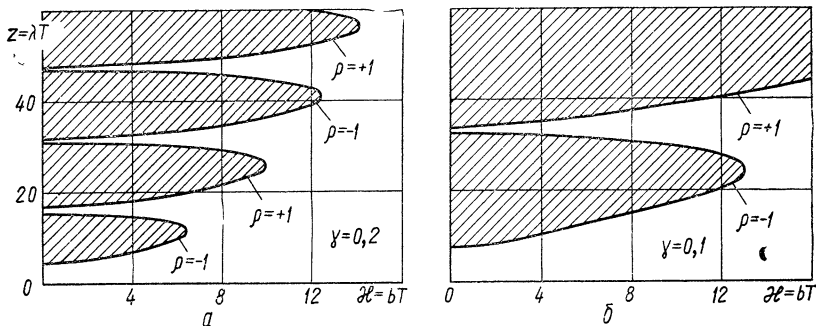


Рис. 1.5

Поскольку $a_2 < 1$, то границам областей устойчивости и неустойчивости соответствуют только T и $2T$ — периодические режимы. Рассчитанные на ЭВМ по формулам (1.21), (1.22) и (1.33), (1.34) области устойчивости и неустойчивости системы рис. 1.2, в в плоскости параметров $(x, |z|)$ при значениях γ , равных 0,5; 0,4; 0,2 и 0,1 изображены на рис. 1.4 и 1.5 (области неустойчивости заштрихованы).

Устойчивость и неустойчивость периодически нестационарных импульсных систем с конечным временем сема данных связаны с пе-

ремещением мультипликаторов уравнения (1.1) на комплексной плоскости ρ при изменении одного из параметров системы, обычно коэффициента усиления. Рассмотрим годограф мультипликаторов системы (см. рис. 1.2, в), который получается при изменении коэффициента усиления K_0 , определяемого из соотношения

$$K_0 T^2 = |z|^2 + \kappa^2/4.$$

Этот годограф состоит из участков вещественной оси и окружности радиуса $R = \sqrt{D}$, где $D = a_2 = \text{def } \Phi(T)$, с центром в начале координат. При $\kappa = 2$ ($D = 0,1353$) и $\gamma = 0,5$ годограф мультипликаторов системы (см. рис. 1.2, в) показан на рис. 1.6. С увеличением коэффициента K_0 один мультипликатор от точки $(D; j0)$, а второй мультипликатор от точки $(+1; j0)$ двигаются к точке $a(\sqrt{D}; j0)$,

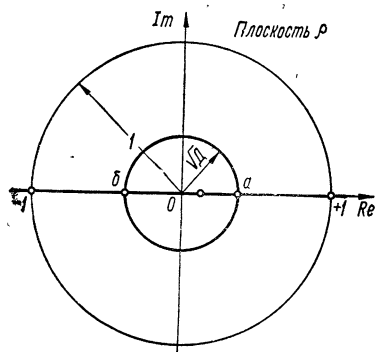


Рис. 1.6

в которой $\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{D}$ ($S = -a_1 = \text{Sp } \Phi(T) = 2\sqrt{D}$). Затем один мультипликатор движется по верхней, другой мультипликатор — по нижней полуокружности радиуса $R = \sqrt{D}$ к точке $b(-\sqrt{D}; j0)$, в которой $\rho_1 = \rho_2 = -\sqrt{D}$ ($S = -2\sqrt{D}$). От точки b один мультипликатор движется к началу координат, а второй мультипликатор — к точке $(-1; j0)$ и проходит эту точку (система становится неустойчивой). Затем оба мультипликатора возвращаются в точку b , один движется далее по верхней, а второй — по нижней полуокружности радиуса $R = \sqrt{D}$ к точке a . От точки a один мультипликатор движется к началу координат, а второй мультипликатор к точке $(+1; j0)$ и проходит эту точку (система снова становится неустойчивой). При дальнейшем увеличении коэффициента усиления K_0 мультипликаторы снова двигаются к точке a и циклы движения повторяются. Следует отметить, что $D = e^{-\kappa}$ и поэтому изменение относительной длительности замыкания прерывателя γ на форму годографа мультипликаторов не влияет, но с уменьшением γ выходы мультипликаторов по вещественной оси за пределы окружности единичного радиуса увеличиваются по длине.

Системы первого порядка. Для дифференциального уравнения первого порядка с периодически изменяющимися коэффициентами возможно точное решение в квадратурах (решение получается конечным числом алгебраических операций и интегрированием). Рассмотрим однородное уравнение первого порядка

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.35)$$

где $A(t)$ — периодическая функция периода T , $A(t) = A(t + T)$.

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$x(t) = \exp \left\{ \int_0^t A(\eta) d\eta \right\} x_0 = \varphi_0(t) x_0,$$

$$\text{где } \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0)|_{t_0=0} = \exp \left\{ \int_0^t A(\eta) d\eta \right\}$$

называется одномерной переходной матрицей.

Подставляя $t + T$ вместо t в решение, получаем

$$x(t + T) = \exp \left\{ \int_0^{t+T} A(\eta) d\eta \right\} x_0 = \varphi_0(t + T) x_0,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0(t + T) &= \exp \left\{ \int_0^{t+T} A(\eta) d\eta \right\} = \\ &= \exp \left\{ \int_0^t A(\eta) d\eta \right\} \exp \left\{ \int_t^{t+T} A(\eta) d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку $A(t)$ — периодическая функция с периодом T , то

$$\exp \left\{ \int_t^{t+T} A(\eta) d\eta \right\} = \exp \left\{ \int_0^T A(\eta) d\eta \right\} = \varphi_0(T) = C,$$

где C — постоянная, независимая от t величина. Полученные выше соотношения перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t + T) &= \varphi_0(t) \varphi_0(T) = C \varphi_0(t); \\ x(t + T) &= C x(t). \end{aligned}$$

Эти соотношения являются типичными для периодически нестационарных систем и показывают, что решение на некотором периоде $[t, t + T]$ связано с решением на предыдущем периоде $[t - T, t]$ через постоянную величину C . Поэтому можно записать $x(t + nT) = C^n \times x(t)$. Решение уравнения (1.35) в любом интервале $nT \leq t \leq (n + 1)T$, $n = 1, 2, 3, \dots$, имеет вид

$$x(t) = C^n x(t - nT), \quad nT \leq t \leq (n + 1)T, \quad (1.36)$$

где $x(t - nT)$ — решение уравнения (1.35) для первого периода ($0 \leq t \leq T$), смещенное на интервал nT .

Из формулы (1.36) видно, что необходимым и достаточным условием устойчивости системы, описываемой уравнением (1.35), в котором $A(t)$ — периодическая функция с периодом T , является

$$|C| = \left| \exp \left\{ \int_0^T A(\eta) d\eta \right\} \right| \leq 1, \quad (1.37)$$

причем при $|C| < 1$ система асимптотически устойчива, а при $C = 1$ совершает периодическое свободное движение.

Рассмотрим свободные периодически нестационарные системы (рис. 1.7), в которых в качестве множительного устройства используется синхронный прерыватель, имеющий функцию переключения вида

$$m(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } nT \leq t \leq nT + \gamma T; \\ 0 & \text{при } nT + \gamma T \leq t \leq (n+1)T, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \end{cases}$$

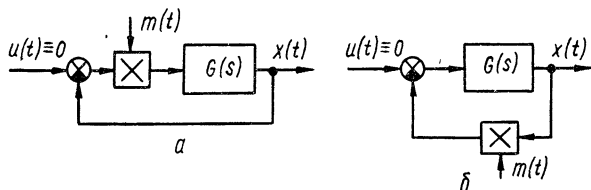


Рис. 1.7

Динамика систем описывается уравнением (1.35), в котором

$$A(t) = \begin{cases} -(b + \alpha) & \text{при } nT \leq t \leq nT + \gamma T; \\ -b & \text{при } nT + \gamma T \leq t \leq (n+1)T. \end{cases}$$

Из выражения (1.37) находим

$$|C| = \left| \exp \left[- \int_0^{\gamma T} (b + \alpha) d\eta \right] \exp \left(- \int_{\gamma T}^T b d\eta \right) \right| = |e^{-(b+\alpha)\gamma T} e^{-b(1-\gamma)T}| < 1.$$

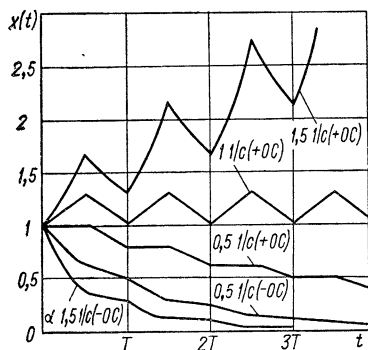


Рис. 1.8

Системы асимптотически устойчивы при любом значении коэффициента α ($\alpha > 0$) и любой относительной длительности замыкания прерывателя γ .

Выходной сигнал $x(t)$ для первого периода ($0 \leq t \leq T$)

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp \left\{ \int_0^t A(\eta) d\eta \right\} x_0 = \\ &= \begin{cases} e^{-(b+\alpha)t} x_0 & \text{при } 0 \leq t \leq \gamma T; \\ e^{-(b+\alpha)\gamma T} e^{-b(t-\gamma T)} x_0 & \text{при } \gamma T \leq t \leq T. \end{cases} \end{aligned}$$

Для любого другого периода $nT \leq t \leq (n+1)T$ выходной сигнал на основании формулы (1.36)

$$x(t) = \begin{cases} C^n e^{-(b+\alpha)(t-nT)} x_0 & \text{при } nT \leq t \leq nT + \gamma T; \\ C^n e^{-(b+\alpha)\gamma T} e^{-b(t-nT-\gamma T)} x_0 & \text{при } (n+\gamma)T \leq t \leq (n+1)T. \end{cases}$$

Если системы имеют положительную обратную связь (знак перед α изменяется на противоположный), то $C = e^{-(b-\gamma\alpha)T}$. При этом если $\alpha = b/\gamma$, то $C = 1$ и системы находятся на границе устойчивости; при $\alpha > b/\gamma$ $C > 1$ и системы неустойчивы; при $\alpha < b/\gamma$ $C < 1$ и системы асимптотически устойчивы.

На рис. 1.8 изображены выходные сигналы систем, приведенных на рис. 1.7, для параметров $x_0=1$, $T=1$ с, $\gamma=0,5$, $b=0,5$ с⁻¹ и различных значений α для двух случаев: системы имеют положительную обратную связь (+ ОС) и системы имеют отрицательную обратную связь (- ОС).

2. РАСЧЕТ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим устойчивость некоторых импульсных систем с конечным временем съема данных второго порядка.

Области устойчивости и неустойчивости двухинтеграторной радиотехнической следящей системы с ключом. Структурная схема радиотехнической системы слежения за параметрами импульсного радиосигнала (направлением его прихода, временным положением, частотой, фазой) показана на рис. 1.9, а. Ключ, отображающий импульсный

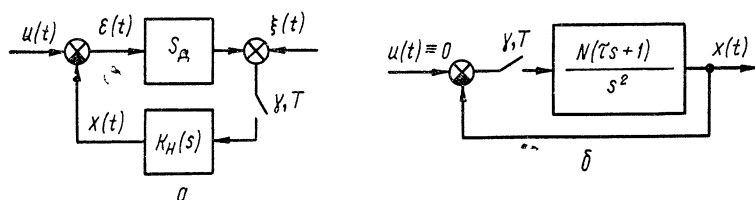


Рис. 1.9

характер сигнала, замыкается с периодом T на относительное (по отношению к периоду) время γ . Предполагается, что приемное устройство радиотехнической системы стробируется во время паузы между импульсами сигнала. В результате стробирования флюктуационная помеха ($\xi(t)$), пересчитанная к выходу дискриминатора, преобразуется в последовательность импульсов (пачек) шума. На схеме приняты следующие обозначения: $u(t)$ — управляющее воздействие, которым является отслеживаемый параметр сигнала или его отклонение от номинального значения; $x(t)$ — управляемая величина или ее отклонение от номинального значения; $\varepsilon(t)$ — ошибка слежения. Полагая, что при малых значениях ошибки характеристика дискриминатора $F(\varepsilon)$ линейная, т. е. $F(\varepsilon) = S_d \varepsilon$, где $S_d = dF(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ — крутизна характеристики дискриминатора. Пусть передаточная функция непрерывной части

$$K_H(s) = K_H(\tau s + 1)/s^2.$$

Такая передаточная функция часто получается в результате синтеза фильтра следящей системы методами оптимальной линейной фильтрации. Фильтры такого типа применяются в электронных дальномерах с двумя интеграторами, в системах частотной и фазовой автоподстройки (18).

При анализе устойчивости системы рис. 1.9, а принимаем $u(t) \equiv 0$ и $\xi(t) \equiv 0$, поэтому рассмотрим структурную схему, изображенную на рис. 1.9, б, где $N = K_H S_d$. Динамика системы рис. 1.9, б описывается

векторным дифференциальным уравнением (1.1), в котором $A(t) \doteq$ периодическая с периодом T кусочно-постоянная матрица. В интервалах $nT < t \leq (n + \gamma)T$ при замкнутом ключе матрицу $A(t)$ можно записать в виде

$$A_1 = \begin{bmatrix} -N\tau & 1 \\ -N & 0 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая переходная матрица

$$\Phi_1(t) = L^{-1} \{(sI - A_1)^{-1}\} = \exp \{A_1 t\} = \begin{bmatrix} A & B \\ -NB & A + N\tau B \end{bmatrix},$$

где $A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t})$; $B = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$; $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \lambda$; $\alpha = -\frac{N\tau}{2}$; $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{(N\tau)^2 - 4N}$.

В интервалах $(n + \gamma)T < t \leq (n + 1)T$ при замкнутом ключе матрица $A(t)$ имеет вид

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая переходная матрица

$$\Phi_2(t) = L^{-1} \{(sI - A_2)^{-1}\} = \exp \{A_2 t\} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица монодромии

$$\Phi(T) = \Phi_2(T - \gamma T) \Phi_1(\gamma T).$$

Подставляя в коэффициенты A и B значение $t = \gamma T$ и вводя обозначения

$$y = -\alpha T = \frac{1}{2} N\tau T; \quad z = \lambda T = \sqrt{y^2 - NT^2},$$

находим

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} A - (1 - \gamma)TNB & B + (1 - \gamma)T(A + N\tau B) \\ -NB & A + N\tau B \end{bmatrix},$$

где коэффициенты A и B запишем в следующем виде.

1. Если $\tau < 2/\sqrt{N}$, то z — мнимая величина. Учитывая, что

$$z = j|z|; \quad \frac{1}{j|z|} \operatorname{sh}(j\gamma|z|) = \frac{1}{|z|} \sin(\gamma|z|); \quad \operatorname{ch}(j\gamma|z|) = \cos(\gamma|z|)$$

и используя принятые обозначения, получаем

$$A = e^{-\gamma y} \left[\cos(\gamma|z|) - \frac{y}{|z|} \sin(\gamma|z|) \right]; \quad B = \frac{T}{|z|} e^{-\gamma y} \sin(\gamma|z|).$$

При этом $NT^2 = |z|^2 + y^2$.

2. Если $\tau > 2/\sqrt{N}$, то z — действительная величина, и коэффициенты

$$A = e^{-\gamma y} \left[\operatorname{ch}(\gamma z) - \frac{y}{z} \operatorname{sh}(\gamma z) \right]; \quad B = \frac{T}{z} e^{-\gamma y} \operatorname{sh}(\gamma z).$$

При этом $NT^2 = y^2 - z^2$.

В первом случае след матрицы монодромии

$$\begin{aligned} S &\equiv \operatorname{Sp} \Phi(T) = 2A + NB[\tau - (1 - \gamma)T] = \\ &= e^{-\gamma y} \left[2 \cos(\gamma |z|) - (1 - \gamma) \frac{|z|^2 + y^2}{|z|} \sin(\gamma |z|) \right]; \end{aligned} \quad (1.38)$$

во втором случае

$$S = e^{-\gamma y} \left[2 \operatorname{ch}(\gamma z) - (1 - \gamma) \frac{y^2 - z^2}{z} \operatorname{sh}(\gamma z) \right].$$

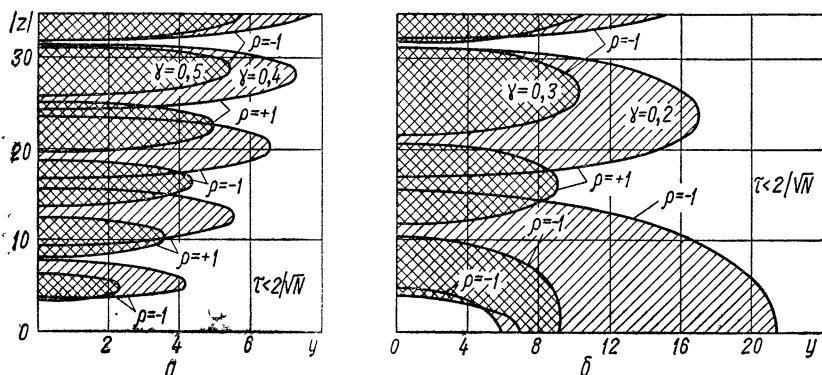


Рис. 1.10

Определитель матрицы монодромии в обоих случаях

$$D \equiv \det \Phi(T) = A^2 + NB(\tau A + B) = e^{-2\gamma y}. \quad (1.39)$$

Устойчивость системы (рис.1.9,б) определяется по расположению корней характеристического уравнения

$$\det[\Phi(T) - \rho I] = \rho^2 - S\rho + D = 0.$$

Если корни характеристического уравнения ρ_1 и ρ_2 — мультипликаторы уравнения (1.1) — находятся в круге единичного радиуса, то система устойчива. Поскольку $D \leq 1$, то границы областей устойчивости и неустойчивости системы второго порядка определяются двумя уравнениями

$$\det[\Phi(T) - I] = 1 - S + D = 0$$

(наличие периодического решения периода T ; один из мультипликаторов $\rho=1$);

$$\det[\Phi(T) + I] = 1 + S + D = 0 \quad (1.40)$$

(наличие антипериодического решения периода $2T$; один из мультипликаторов $\rho = -1$), т. е. границам областей устойчивости и неустойчивости соответствуют периодические режимы (T и $2T$ — периодические решения).

На рис. 1.10—1.13 показаны рассчитанные на ЭВМ области устойчивости и неустойчивости системы (рис. 1.9, б) в плоскости нормированных параметров ($|z|, y$) и (z, y) при различных значениях относительного времени замыкания ключа γ .

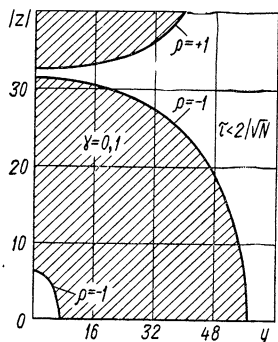


Рис. 1.11

На рис. 1.10 и 1.11 изображены области, рассчитанные для $\tau < 2/\sqrt{N}$. При $\gamma = 1$ областей неустойчивости нет; система является абсолютно устойчивой. С уменьшением γ при значениях y , близких к нулю, в точках $|z| = (2k-1)\pi$ при $\rho = -1$ и в точках $|z| = 2k\pi$ при $\rho = +1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) «зарождаются» области неустойчивости; с уменьшением γ области неустойчивости возрастают. На рис. 1.10, а показаны области неустойчивости для $\gamma = 0,5$ (двойной штриховкой) и $\gamma = 0,4$ (одинарной штриховкой); указаны мультипликаторы, соответствующие периодическим и антипериодическим решениям

(режимам) на границах областей устойчивости и неустойчивости. Система имеет бесконечное число областей (зон) неустойчивости, что характерно для периодически нестационарных систем в целом.

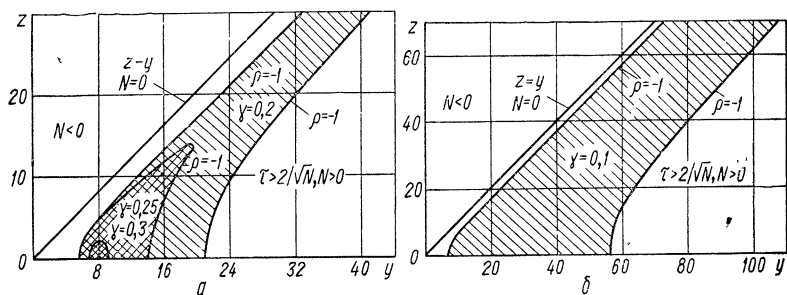


Рис. 1.12

При дальнейшем уменьшении γ первая область неустойчивости отклоняется в сторону оси y и затем «опирается» на эту ось. На рис. 1.10, б изображены области неустойчивости для $\gamma = 0,3$ (двойной штриховкой) и $\gamma = 0,2$ (одинарной штриховкой). С уменьшением γ первая область неустойчивости увеличивается значительно интенсивнее других областей неустойчивости. Области неустойчивости (заштрихованы) при $\gamma = 0,1$ изображены на рис. 1.11 (вид областей устойчивости и неустойчивости при $\gamma < 0,1$ сохраняется таким же).

На рис. 1.12. изображены области, рассчитанные для $\tau > 2/\sqrt{N}$ (области неустойчивости заштрихованы). Вместо бесконечного числа

областей неустойчивости при $\tau < 2/\sqrt{N}$ в данном случае имеется только одна область неустойчивости. Поскольку ось y соответствует равенству $z = 0$ ($\tau = 2/\sqrt{\pi}$), то область неустойчивости начинается с участка оси y , на который «опиралась» первая область неустойчивости при $\tau < 2/\sqrt{N}$ и соответствующем значении γ . Границы отрезка зоны неустойчивости по оси y определим из уравнения

$$(1 + e^{-\gamma y})^2 - \gamma(1 - \gamma)y^2 e^{-\gamma y} = 0,$$

полученного на основании формул (1.38) — (1.40) при $z = 0$.

В результате решения этого уравнения построена область неустойчивости (заштрихована) в плоскости нормированных параметров

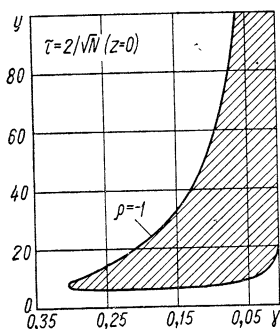


Рис. 1.13

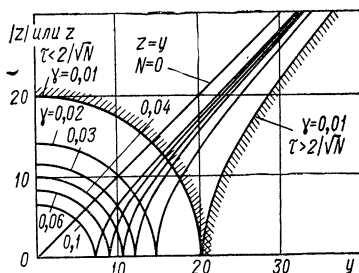


Рис. 1.14

ров (y, γ) (рис. 1.13.). По рис. 1.10—1.13 можно представить общую картину областей устойчивости и неустойчивости обобщенной двухинтеграторной радиотехнической системы с ключом.

Если радиотехнические системы с конечным временем съема данных работают с малым относительным временем замыкания ключа (обычно $\gamma \leq 0,1$), интерес представляют только области устойчивости в плоскости нормированных параметров ($|z|, y$) или (z, y) около начала координат. Такие области для малых значений γ построены на рис. 1.14 (штриховка обращена внутрь областей неустойчивости для значений $\gamma = 0,01$; с увеличением γ до 0,1 области устойчивости уменьшаются). Границы областей устойчивости и неустойчивости при $\gamma \leq 0,1$ с достаточной для практики точностью описываются приближенными уравнениями

$$|z|^2 + y^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^2 \text{ при } \tau < 2/\sqrt{N}; \quad y^2 - z^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^2 \text{ при } \tau > 2/\sqrt{N}.$$

Устойчивость — важнейшее свойство системы. Полученные области устойчивости определяют значения параметров, при которых система (рис. 1.9, а) является работоспособной.

Передаточная функция непрерывной части в структурной схеме обобщенной радиотехнической системы имеет вид (рис. 1.15,а)

$$G(s) = \frac{N(\tau s + 1)}{s(s + b)}$$

Для такой системы одна из возможных схем аналогового моделирования изображена на рис. 1.15, б. Матрица $A(t)$ в интервалах $nT < t \leq (n + \gamma)T$, $n = 0, 1, 2, \dots$, при замкнутом прерывателе

$$A_1 = \begin{bmatrix} -N\tau & 1 - b\tau \\ -N & -b \end{bmatrix},$$

матрица $A(t)$ в интервалах $(n + \gamma)T < t \leq (n + 1)T$ при разомкнутом прерывателе

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 - b\tau \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

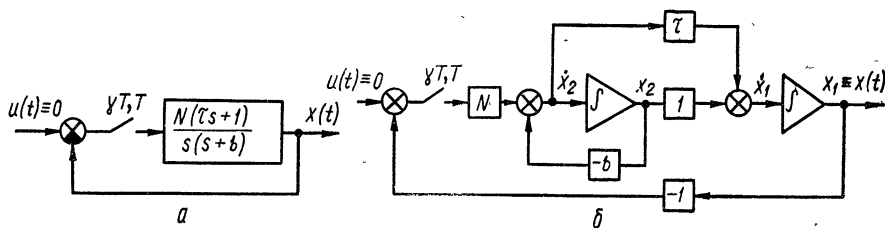


Рис. 1.15

Опуская промежуточные математические выкладки, запишем сразу матрицу монодромии уравнения $\dot{x} = A(t)x$, которая служит основой для анализа устойчивости (неустойчивости) системы:

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= \Phi_2(T - \gamma T) \Phi_1(\gamma T) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & E \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & (1 - \kappa\tau/T)B \\ -NB & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C - NBE & (1 - \kappa\tau/T)B + AE \\ -NBD & AD \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Коэффициенты, определяющие элементы матрицы монодромии, имеют следующие выражения:

$$1. \quad A = e^{-\gamma y} \left[\cos(\gamma |z|) + \frac{y - \kappa}{|z|} \sin(\gamma |z|) \right];$$

$$B = \frac{T}{|z|} e^{-\gamma y} \sin(\gamma |z|);$$

$$C = e^{-\gamma y} \left[\cos(\gamma |z|) + \frac{\kappa - y}{|z|} \sin(\gamma |z|) \right];$$

$$D = e^{-\kappa(1-\gamma)};$$

$$E = T \frac{1 - \kappa\tau/T}{\kappa} [1 - e^{-\kappa(1-\gamma)}];$$

$$\kappa = bT; \quad y = \frac{1}{2}(NT^2 \tau/T + \kappa); \quad z = \sqrt{y^2 - NT^2}$$

при условии $NT^2 > y^2$ (когда z — мнимая величина и $NT^2 = |z|^2 + y^2$);

$$2. \quad A = e^{-\gamma y} \left[\operatorname{ch}(\gamma z) + \frac{y - \kappa}{z} \operatorname{sh}(\gamma z) \right];$$

$$B = \frac{T}{z} e^{-\gamma y} \operatorname{sh}(\gamma z);$$

$$C = e^{-\gamma y} \left[\operatorname{ch}(\gamma z) + \frac{\kappa - y}{z} \operatorname{sh}(\gamma z) \right];$$

при условии $y^2 > NT^2$ (когда z — действительная величина и $NT^2 = y^2 - z^2$).

В первом случае след матрицы монодромии

$$S \equiv \operatorname{Sp} \mathbf{X}(T) = C - NBE + AD = e^{-\gamma y} \{ [1 + e^{-\kappa(1-\gamma)}] \cos(\gamma |z|) + \\ + \left(\frac{y}{|z|} - \frac{y^2}{|z|\kappa} - \frac{|z|}{\kappa} \right) [1 - e^{-\kappa(1-\gamma)}] \sin(\gamma |z|) \};$$

во втором случае

$$S = e^{-\gamma y} \{ [1 + e^{-\kappa(1-\gamma)}] \operatorname{ch}(\gamma z) + \\ + \left(\frac{y}{z} - \frac{y^2}{z\kappa} + \frac{z}{\kappa} \right) [1 - e^{-\kappa(1-\gamma)}] \operatorname{sh}(\gamma z) \}.$$

Определитель матрицы монодромии в обоих случаях

$$D \equiv \det \mathbf{X}(T) = ACD + NB^2D(1 - \kappa\tau/T) = e^{-2\gamma y} e^{-\kappa(1-\gamma)}.$$

Области устойчивости и неустойчивости рассматриваемой системы определяют по формулам (1.21) и (1.22), в которых согласно выражениям (1.27) и (1.28) $S = -a_1$ и $D = a_2$. Как и для предыдущей системы рис. 1.9, a области устойчивости и неустойчивости можно построить в плоскости нормированных параметров ($|z|$, y) или (z , y) при различных значениях относительного (по отношению к периоду T) времени замыкания прерывателя γ . При этом необходимо задаваться значениями нормированного параметра κ , а значения τ/T определять из формул

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2y - \kappa}{|z|^2 + y^2} \quad (z \text{ — мнимая величина})$$

или

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2y - \kappa}{y^2 - z^2} \quad (z \text{ — действительная величина}).$$

Либо необходимо задаваться значениями параметров τ/T , а значения κ определять соответственно из формул

$$\kappa = 2y - \frac{\tau}{T} (|z|^2 + y^2)$$

или

$$\kappa = 2y - \frac{\tau}{T} (y^2 - z^2).$$

На рис. 1.16 изображены рассчитанные на ЭВМ области устойчивости и неустойчивости системы рис. 1.15, a в плоскости нормированных параметров ($|z|$, y) при значениях γ , равных 0,1 и 0,2, и значе-

ниях τ/T , равных 0,01 и 0,02. Области неустойчивости при $\kappa > 0$ заштрихованы. Указаны мультипликаторы, соответствующие периодическим и антипериодическим решениям (режимам) на границах областей устойчивости и неустойчивости. Поскольку два нормированных параметра (γ и τ/T) являются заданными, то каждой точке на плоскости параметров ($|z|$, y) соответствуют определенные значения параметров NT^2 и κ .

Области устойчивости и неустойчивости периодических колебательных систем второго порядка. Рассмотрим устойчивость системы

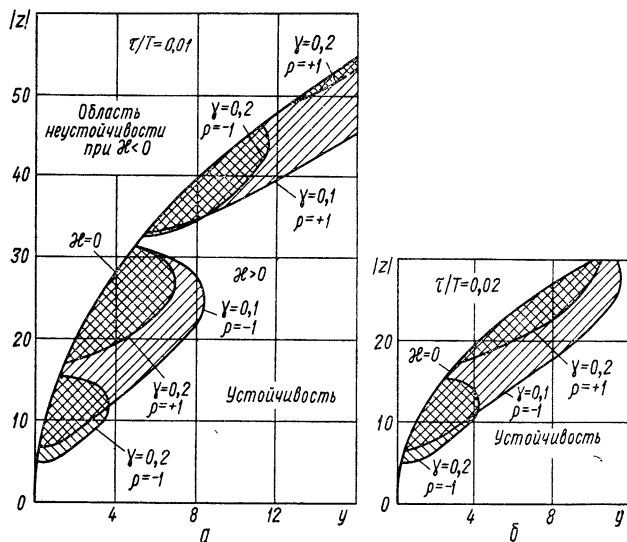


Рис. 1.16

(рис. 1.17,а) с линейной стационарной частью, описываемой передаточной функцией

$$G_0(s) = \frac{K_1}{T_1^2 s^2 + 2\xi T_1 s + 1} = \frac{K_0}{s^2 + bs + a},$$

где $K_0 = K_1/T_1^2$; $b = 2\xi/T_1$; $a = 1/T_1^2$; ξ — коэффициент затухания; T_1 — постоянная времени колебательного звена, и функцией возбуждения, показанной на рис. 1.17, б. Эта система описывается уравнением (1.1), в котором $A(t)$ — периодическая с периодом T кусочно-постоянная матрица. В интервалах $nT < t \leq (n + \gamma)T$ матрицу $A(t)$ можно записать в виде

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(K_0 + a) & -b \end{bmatrix}.$$

Соответствующая переходная матрица

$$\Phi_1(t) = L^{-1} \{ (sI - A_1)^{-1} \} = \exp(A_1 t) = \begin{bmatrix} Q & B \\ -(K_0 + a) & A \end{bmatrix},$$

где

$$A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t});$$

$$B = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t});$$

$$Q = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t};$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \lambda, \quad \lambda = \sqrt{\frac{b^2}{4} - (K_0 + a)}.$$

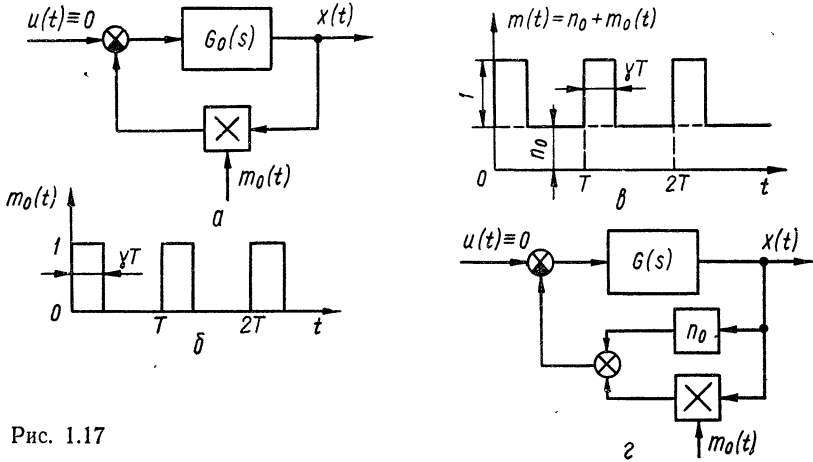


Рис. 1.17

Матрица $A(t)$ в интервалах $(n + \gamma)T < t \leq (n + 1)T$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}.$$

Соответствующая ей переходная матрица

$$\Phi_2(t) = L^{-1} \{(sI - A_2)^{-1}\} = \exp(A_2 t) = \begin{bmatrix} L & E \\ -aE & D \end{bmatrix},$$

где

$$D = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} (\sigma_1 e^{\sigma_1 t} - \sigma_2 e^{\sigma_2 t});$$

$$E = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} (e^{\sigma_1 t} - e^{\sigma_2 t});$$

$$L = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} e^{\sigma_1 t} + \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} e^{\sigma_2 t};$$

$$\sigma_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sigma, \quad \sigma = \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}.$$

Матрица монодромии

$$\Phi(T) = \Phi_2(T - \gamma T) \Phi_1(\gamma T).$$

Подставляя в коэффициенты A , B и Q значение $t = \gamma T$, а в коэффициенты D , E и L значение $t = T - \gamma T$, и вводя обозначения $\kappa = T \sqrt{a}$; $z = \lambda T$, находим

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} QL - (K_0 + a) BE & BL + AE \\ -aEQ - (K_0 + a) BD & -aBE + AD \end{bmatrix},$$

где коэффициенты A , B , Q , D , E и L имеют вид

$$\begin{aligned} A &= e^{-\gamma \kappa z} \left[\cos(\gamma |z|) - \frac{\xi \kappa}{|z|} \sin(\gamma |z|) \right]; \\ B &= \frac{T}{|z|} e^{-\gamma \kappa z} \sin(\gamma |z|); \\ Q &= e^{-\gamma \kappa z} \left[\cos(\gamma |z|) + \frac{\xi \kappa}{|z|} \sin(\gamma |z|) \right]; \\ D &= e^{-(1-\gamma) \kappa z} \left\{ \cos[(1-\gamma) \kappa \sqrt{1-\xi^2}] - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin[(1-\gamma) \kappa \sqrt{1-\xi^2}] \right\}; \\ E &= \frac{T}{\kappa \sqrt{1-\xi^2}} e^{-(1-\gamma) \kappa z} \sin[(1-\gamma) \kappa \sqrt{1-\xi^2}]; \\ L &= e^{-(1-\gamma) \kappa z} \left\{ \cos[(1-\gamma) \kappa \sqrt{1-\xi^2}] + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin[(1-\gamma) \kappa \sqrt{1-\xi^2}] \right\}. \end{aligned}$$

Отметим, что $bT/2 = \xi \kappa$; $\sigma T = \kappa \sqrt{\xi^2 - 1}$; $\lambda T = \sqrt{\kappa^2 (\xi^2 - 1) - K_0 T^2}$ поэтому при $0 \ll \xi < 1$ σ и λ являются мнимыми величинами; выше приведенные выражения для коэффициентов получены с учетом того что

$$\kappa \sqrt{\xi^2 - 1} = j \kappa \sqrt{1 - \xi^2}; \quad z = j |z| = j \sqrt{\kappa^2 (1 - \xi^2) + K_0 T^2},$$

и известных формул $\text{ch}(jy) = \cos y$, $\frac{1}{jy} \text{sh}(jy) = \frac{1}{y} \sin y$.

Коэффициент усиления найдем из выражения

$$K_0 T^2 = |z|^2 + \kappa^2 (\xi^2 - 1).$$

Области устойчивости и кривые, соответствующие периодическим режимам, для рассматриваемой системы определим по формулам (1.21) и (1.22), в которых

$$a_1 = -S \equiv -\text{Sp } \Phi(T) = -[AD + QL - (K_0 + 2a) BE];$$

$$a_2 = D \equiv \det \Phi(T) = (DL + aE^2)[AQ + (K_0 + a) B^2].$$

После простых вычислений получим

$$a_1 = -e^{-\xi \kappa z} \left\{ 2 \cos(\gamma |z|) \cos[(1-\gamma) \kappa \sqrt{1-\xi^2}] - \left(\frac{\kappa \sqrt{1-\xi^2}}{|z|} + \frac{|z|}{\kappa \sqrt{1-\xi^2}} \right) \sin(\gamma |z|) \sin[(1-\gamma) \kappa \sqrt{1-\xi^2}] \right\}, \quad (1.41)$$

$$a_2 = e^{-2\xi \kappa z}. \quad (1.42)$$

Поскольку $a_2 = D \equiv \det \Phi(T) < 1$, то границам областей устойчивости и неустойчивости соответствуют только T и $2T$ — периодические режимы. Рассчитанные на ЭВМ по формулам (1.21), (1.22), (1.41) и (1.42) области устойчивости и неустойчивости исследуемой системы в плоскости параметров $(|z|, \kappa)$ при $\gamma = 0,5$ и значениях ξ , равных 0,8; 0,2 и 0, показаны на рис. 1.18 (области неустойчивости на рисунке заштрихованы).

При увеличении коэффициента затухания ξ области неустойчивости уменьшаются. Интересно отметить, что при $\xi = 0$ каждая из областей неустойчивости, границы которых соответствуют мультипликаторам $\rho = -1$ или $\rho = +1$, стягивается в точку при $\kappa = 2\pi$.

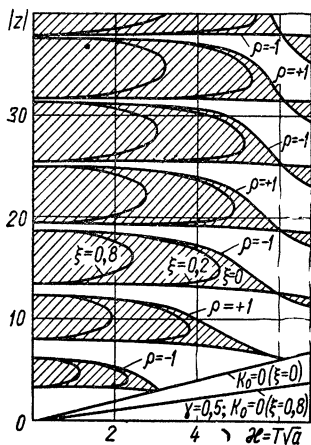


Рис. 1.18

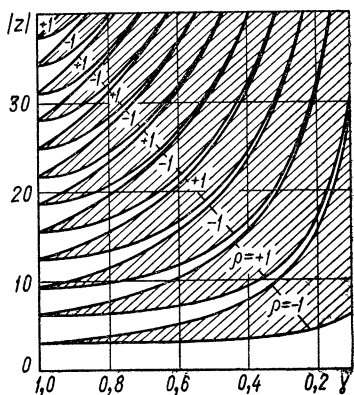


Рис. 1.19

Отсюда можно сделать вывод о том, что при частоте сопряжения $\omega_1 = 1/T_1$ консервативного звена, равной угловой частоте коммутации $\omega_n = 2\pi/T$, система устойчива при любом значении параметра $|z|$. На рис. 1.18 изображены также прямые, соответствующие условию $K_0 = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = 0,8$. В любой точке плоскости параметров $(|z|, \kappa)$, находящейся выше соответствующей прямой, коэффициент K_0 положительный, ниже прямой — отрицательный. Поскольку при $\kappa = 0$

$$a_1 = -\text{Sp } \Phi(T) = -[2 \cos(\gamma |z|) - (1 - \gamma) |z| \sin(\gamma |z|)];$$

$$a_2 = \det \Phi(T) = 1,$$

то при определенном значении γ (например, при $\gamma = 0,5$) области неустойчивости начинаются в одних и тех же точках на оси $|z|$ независимо от того, какие значения имеет величина ξ .

Рассчитанные на ЭВМ по формулам (1.21), (1.22), (1.41) и (1.42) при $\kappa = 0$ области устойчивости и неустойчивости исследуемой системы в плоскости параметров $(|z|, \gamma)$ показаны на рис. 1.19. Области не-

устойчивости (на рисунке они заштрихованы) начинаются в точках

$$|z| = \begin{cases} (2k-1)\pi & (\rho = -1); \\ 2k\pi & (\rho = +1), \end{cases}$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ при $\gamma = 1$.

При $\gamma = 1$ и $\kappa = 0$ характеристическое уравнение системы

$$\rho^2 - 2 \cos |z| \rho + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\rho_{1,2} = \cos |z| \pm j \sqrt{1 - \cos^2 |z|}$$

при любых значениях $|z|$ не выходят за пределы единичного круга на комплексной плоскости ρ . Поэтому, как и следовало ожидать, система при $\gamma = 1$ является абсолютно устойчивой.

Иногда функция возбуждения имеет вид, показанный на рис. 1.17, в (структурная схема системы показана на рис. 1.17, з). Если передаточная функция $G(s)$ совпадает с рассмотренной выше функцией $G_0(s)$ (рис. 1.17, а), то схему рис. 1.17, з можно преобразовать к схеме рис. 1.17, а с новой передаточной функцией

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + n_0 G(s)} = \frac{K_0}{s^2 + bs + a \left(1 + \frac{n_0 K_0}{a}\right)}.$$

При этом все полученные выше формулы и графики остаются справедливыми, если использовать новые значения κ и ξ :

$$\kappa_0 = \kappa \sqrt{1 + \frac{n_0 K_0}{a}} > \kappa; \quad \xi_0 = \frac{\xi}{\sqrt{1 + \frac{n_0 K_0}{a}}} < \xi.$$

Рассмотрим колебательную систему, динамика которой описывается линейным уравнением второго порядка с периодически изменяющимися коэффициентами.

$$\ddot{x}(t) + a(t) \dot{x}(t) + b(t) x(t) = 0. \quad (1.43)$$

Уравнение (1.43) описывает электрический контур с периодически изменяющейся емкостью. Известно, что уравнение (1.43) путем замены переменной можно привести к виду $\ddot{y}(t) + F(t) y(t) = 0$, при $F(t) = a + b \cos 2t$ уравнение известно как уравнение Матье, при $F(t) = a + b \operatorname{sign}(\cos 2t)$ — как уравнение Хилла — Мейснера. Предположим, что в уравнении (1.43)

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= \alpha + \gamma \operatorname{sign}(\sin t), \quad \alpha > 0, \\ b(t) &= \delta + \varepsilon \operatorname{sign}(\sin t), \quad \delta > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Уравнение (1.43) можно записать в векторно-матричной форме (1.1) если положить $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Тогда

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Так как $a(t)$ и $b(t)$ имеют постоянные значения в интервалах $2n\pi < t \leq (2n+1)\pi$ и $(2n+1)\pi < t \leq (2n+2)\pi$, то матрица $A(t)$ имеет вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_1 & -a_1 \end{bmatrix} \text{ при } 2n\pi < t \leq (2n+1)\pi$$

и

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -a_2 \end{bmatrix} \text{ при } (2n+1)\pi < t \leq (2n+2)\pi,$$

где $a_1 = \alpha + \gamma$; $b_1 = \delta + \varepsilon$; $a_2 = \alpha - \gamma$; $b_2 = \delta - \varepsilon$.

Соответствующая уравнению $\dot{x} = A_1 x$ переходная матрица

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \exp(A_1 t) = L^{-1} \{ (sI - A_1)^{-1} \} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \begin{bmatrix} s + a_1 & -b_1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} H_1 & -b_1 B_1 \\ B_1 & C_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{a_1}{2} \pm \omega_1; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + b_1}; \\ H_1 &= \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{a_1}{2} \operatorname{sh} \omega_1 t + \omega_1 \operatorname{ch} \omega_1 t \right) \exp\left(-\frac{a_1}{2} t\right); \\ B_1 &= \frac{1}{\omega_1} \operatorname{sh} \omega_1 t \exp\left(-\frac{a_1}{2} t\right); \\ C_1 &= \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{a_1}{2} \operatorname{sh} \omega_1 t + \omega_1 \operatorname{ch} \omega_1 t \right) \exp\left(-\frac{a_1}{2} t\right). \end{aligned}$$

Аналогично определим переходную матрицу $\Phi_2(t)$, соответствующую уравнению $\dot{x} = A_2 x$. Матрица монодромии на основании формулы (1.30)

$$\Phi(2\pi) = \Phi_2(\pi) \Phi_1(\pi) = \begin{bmatrix} H & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left[\left(\frac{a_1 a_2}{4} - b_2 \right) \operatorname{sh} \Theta_1 \operatorname{sh} \Theta_2 + \omega_1 \omega_2 \operatorname{ch} \Theta_1 \operatorname{ch} \Theta_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_1 \omega_2}{2} \operatorname{sh} \Theta_1 \operatorname{ch} \Theta_2 + \frac{a_2 \omega_1}{2} \operatorname{sh} \Theta_2 \operatorname{ch} \Theta_1 \right] \exp\left(-\frac{a_1 + a_2}{2} \pi\right); \\ B &= \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left[\left(\frac{a_1 b_2}{2} - \frac{b_1 a_2}{2} \right) \operatorname{sh} \Theta_1 \operatorname{sh} \Theta_2 - \omega_1 b_2 \operatorname{sh} \Theta_2 \operatorname{ch} \Theta_1 - \right. \\ &\quad \left. - \omega_2 b_1 \operatorname{sh} \Theta_1 \operatorname{ch} \Theta_2 \right] \exp\left(-\frac{a_1 + a_2}{2} \pi\right); \\ C &= \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \operatorname{sh} \Theta_1 \operatorname{sh} \Theta_2 + \omega_1 \operatorname{ch} \Theta_1 \operatorname{sh} \Theta_2 + \right. \\ &\quad \left. + \omega_2 \operatorname{sh} \Theta_1 \operatorname{ch} \Theta_2 \right) \exp\left(-\frac{a_1 + a_2}{2} \pi\right); \\ D &= \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left[\left(\frac{a_1 a_2}{4} - b_1 \right) \operatorname{sh} \Theta_1 \operatorname{sh} \Theta_2 + \omega_1 \omega_2 \operatorname{ch} \Theta_1 \operatorname{ch} \Theta_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_1 \omega_2}{2} \operatorname{sh} \Theta_1 \operatorname{ch} \Theta_2 - \frac{a_2 \omega_1}{2} \operatorname{ch} \Theta_1 \operatorname{sh} \Theta_2 \right] \exp\left(-\frac{a_1 + a_2}{2} \pi\right); \\ &\quad \Theta_1 = \omega_1 \pi, \quad \Theta_2 = \omega_2 \pi. \end{aligned}$$

Устойчивость (или неустойчивость) рассматриваемой системы определяется корнями характеристического уравнения (1.7), которое запишем в виде

$$\det[\Phi(2\pi) - \rho I] = \rho^2 + S\rho + D = 0, \quad (1.45)$$

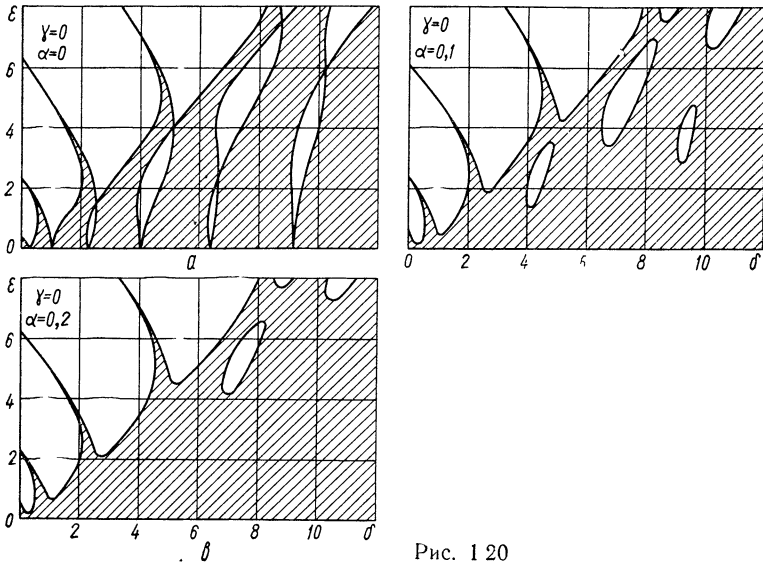


Рис. 1.20

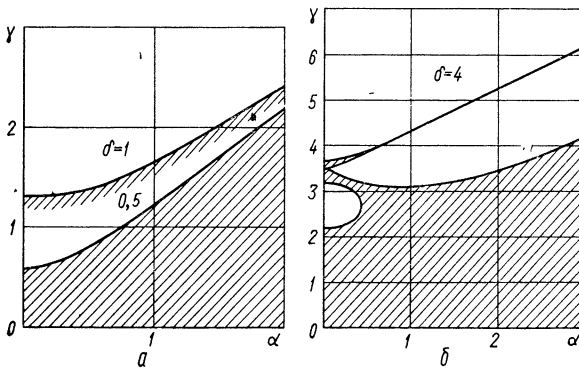


Рис. 1.21

где $S \equiv \text{Sp}[\Phi(2\pi)]$ — след матрицы монодромии; $D \equiv \det[\Phi(2\pi)]$ — определитель матрицы монодромии:

$$S = H + D = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left[\left(\frac{a_1 a_2}{2} - b_1 - b_2 \right) \text{sh } \Theta_1 \text{sh } \Theta_2 + \right. \\ \left. + 2\omega_1 \omega_2 \text{ch } \Theta_1 \text{ch } \Theta_2 \right] \exp\left(-\frac{a_1 + a_2}{2} \pi\right); \\ D = HD - BC = \exp[-(a_1 + a_2) \pi] = \exp(-2\alpha \pi).$$

Для асимптотической устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы находились внутри единичного круга $|\rho| < 1$. Вводя в уравнение (1.45) новую переменную $\rho = (\omega + 1)/(\omega - 1)$, получаем условия устойчивости Гурвица в виде (1.21); система устойчива, если выполнены следующие неравенства: $1 + S + D > 0$; $1 - S + D > 0$; $2(1 - D) > 0$. Поскольку определитель матрицы монодромии $0 < D < 1$, то условие устойчивости можно записать в виде одного неравенства. Система устойчива, если $1 + D > |S|$, или в развернутом виде.

$$2\text{ch} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \pi \right) > \left| \left(\frac{a_1 a_2}{\gamma} - b_1 - b_2 \right) \frac{\text{sh} \Theta_1 \text{sh} \Theta_2}{\omega_1 \omega_2} + 2 \text{ch} \Theta_1 \text{ch} \Theta_2 \right|.$$

Границы областей устойчивости и неустойчивости определяются равенством $1 + D = |S|$ (подставляя значения $\rho = 1$ и $\rho = -1$ в уравнение (1.45), замечаем, что равенству $1 + D = S$ соответствует периодическое решение периода 2π , а равенству $1 + D = -S$ — антипериодическое решение периода 4π).

На рис. 1.20—1.22 показаны рассчитанные на ЭВМ (30) области устойчивости (заштрихованы) для системы, динамика которой описывается уравнением (1.43) при условии (1.44). На рис. 1.20 области устойчивости даны в плоскости параметров (ϵ, δ) при $\gamma = 0$ и различных значениях α , указанных на рисунках. На рис. 1.21 области устойчивости даны в плоскости параметров (γ, α) при $\epsilon = 0$ и различных значениях δ , а на рис. 1.22 области устойчивости даны в плоскости параметров (γ, ϵ) .

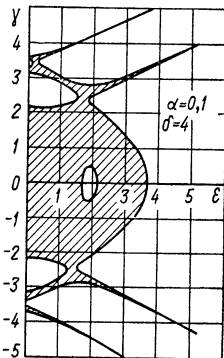


Рис. 1.22

3. РАСЧЕТ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим области устойчивости и неустойчивости импульсных систем третьего порядка с конечным временем сема данных в плоскости нормированных параметров, а также годографы мультипликаторов импульсных периодически нестационарных систем третьего порядка [4].

На рис. 1.23, а показана система, в которой ключ замыкается периодически с периодом T на относительное время γ , а непрерывная часть имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{K_1}{s(T_2 s + 1)(T_1 s + 1)} = \frac{K_0}{s(\delta + b)(s + a)},$$

где $a = 1/T_1$; $b = 1/T_2$; $K_0 = K_1 \eta a^2$; $\eta = b/a = T_1/T_2 \geq 1$.

Для этой системы в интервалах времени $nT \leq t < (n + \gamma)T$ при замкнутом ключе запишем матрицу $A(t)$ уравнения (1.1), которым описывается динамика системы,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 1 \\ -K_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая переходная матрица

$$\Phi_1(t) = \exp \{A_1 t\} = L^{-1} \{ (sI - A_1)^{-1} \} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

где $a_{11} = \delta + ba_{12}$;

$$\delta = \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{\lambda_2 t} + \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{\lambda_3 t};$$

$$a_{12} = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{\lambda_2 t} + \frac{\lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{\lambda_3 t};$$

$$a_{13} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{\lambda_3 t};$$

$$a_{21} = a_{32} = -K_0 a_{13}; \quad a_{22} = \delta + aa_{12};$$

$$a_{23} = a_{12} + aa_{13}; \quad a_{31} = -K_0 (a_{12} + ba_{13});$$

$$a_{33} = \delta + (a + b)a_{12} + aba_{13}.$$

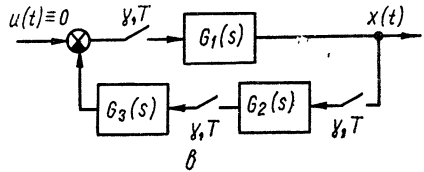
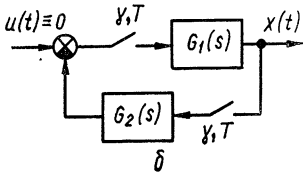
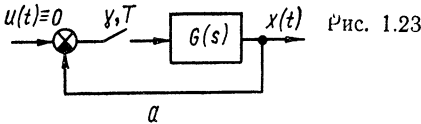


рис. 1.23

Для определения элементов переходной матрицы $\Phi_1(t)$ необходимо знать величины λ_1 , λ_2 , и λ_3 , которые являются корнями кубического уравнения

$$s^3 + (a + b)s^2 + abs + K_0 = 0. \quad (1.46)$$

Корни кубического уравнения запишем в следующем виде: $\lambda_1 = -\alpha - \vartheta + j\beta$; $\lambda_2 = -\alpha - \vartheta - j\beta$; $\lambda_3 = 2\alpha - \vartheta$.

В интервалах $(n + \gamma)T \leq t < (n + 1)T$ при разомкнутом ключе матрица $A(t)$ имеет вид

$$A_2 = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая переходная матрица

$$\Phi_2(t) = \exp \{A_2 t\} = L^{-1} \{(sI - A_2)^{-1}\} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$b_{11} = e^{-at}; \quad b_{12} = \frac{1}{a-b} e^{-bt} + \frac{1}{b-a} e^{-at}; \quad b_{13} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} e^{-at} + \\ + \frac{1}{b(b-a)} e^{-bt}; \quad b_{21} = b_{31} = b_{32} = 0; \quad b_{22} = e^{-bt}; \quad b_{23} = \frac{1}{b} (1 - e^{-bt}); \\ b_{33} = 1.$$

Матрица монодромии

$$\Phi(T) = \Phi_2(T - \gamma T) \Phi_1(\gamma T). \quad (1.47)$$

Матрица $\Phi_2(T - \gamma T) = \Phi_2(t)$ при $t = (1 - \gamma)T$. Введем обозначения $\kappa = T/T_1 = aT$; $\eta\kappa = T/T_2 = bT$ ($\eta = b/a$). Тогда матрицу $\Phi_2(T - \gamma T)$ можно представить в следующем виде:

$$\Phi_2(T - \gamma T) = \begin{bmatrix} P & TQ & T^2R \\ 0 & V & TW \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $P = e^{-(1-\gamma)\kappa}$; $V = e^{-(1-\gamma)\eta\kappa}$; $W = \frac{1}{\eta\kappa} (1 - V)$; $Q = \frac{1}{(\eta - 1)\kappa} (P - V)$;
 $R = \frac{1}{\eta\kappa^2} + \frac{1}{\eta(\eta - 1)\kappa^2} (V - \eta P)$.

Нетрудно видеть, что элементы матрицы $\Phi_2(T - \gamma T)$ определяются непосредственно через функции нормированных параметров κ и η .

Матрица $\Phi_1(\gamma T) = \Phi_1(t)$ при $t = \gamma T$. Введем обозначения $y = \alpha T$; $z = \beta T$; $\varepsilon = \vartheta T$; $\sigma = K_0 T^3$. Тогда матрицу $\Phi_1(\gamma T)$ можно представить в следующем виде

$$\Phi_1(\gamma T) = \begin{bmatrix} A & TB & T^2C \\ -\frac{1}{T}\sigma C & D & TE \\ \frac{1}{T^2}G & \frac{1}{T}\sigma C & H \end{bmatrix},$$

где $A = \delta + \eta\kappa B$; $D = \delta + \kappa B$; $E = B + \kappa C$; $G = -\sigma(B + \eta\kappa C)$;

$$H = \delta + (1 - \eta)\kappa B + \eta\kappa^2 C; \quad \delta = \frac{e^{-\gamma y} e^{-\gamma \varepsilon}}{9y^2 + z^2} \{ [y + \varepsilon] (5y - \varepsilon) + \\ + z^2 \} \cos(\gamma z) + \left[z(y - 2\varepsilon) - \frac{3y}{z}(y + \varepsilon)^2 \right] \sin(\gamma z) + (2y - \varepsilon)^2 e^{3\gamma y};$$

$$B = \frac{e^{-\gamma y} e^{-\gamma \varepsilon}}{9y^2 + z^2} \left\{ [3y(y + \varepsilon) + z^2] \frac{1}{z} \sin(\gamma z) - (2y - \varepsilon) \cos(\gamma z) + \right. \\ \left. + (2y - \varepsilon) e^{3\gamma y} \right\}; \quad C = -\frac{e^{-\gamma y} e^{-\gamma \varepsilon}}{9y^2 + z^2} \left[\cos(\gamma z) + \frac{3y}{z} \sin(\gamma z) - e^{3\gamma y} \right].$$

Подстановкой $sT = p$ преобразуем кубичное уравнение (1.46) в новое кубичное уравнение

$$p^3 + (1 + \eta) \kappa p^2 + \eta \kappa^2 p + \sigma = 0. \quad (1.48)$$

Очевидно, что корни этого уравнения $p_1 = \lambda_1 T = -y - \varepsilon + jz$; $p_2 = \lambda_2 T = -y - \varepsilon - jz$; $p_3 = \lambda_3 T = 2y + \varepsilon$.

Для определения элементов матрицы $\Phi_1(\gamma T)$ необходимо знать корни кубичного уравнения (1.48) или, более конкретно, величины y , ε и z . Указанные величины при заданных κ , η и σ на основании решения Кардано [16] кубичного уравнения (1.48) определяются по следующим формулам:

$$y = \frac{a_1 + b_1}{2}; \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1 - b_1); \quad \varepsilon = \frac{(1 + \eta) \kappa}{3};$$

$$a_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{c_1}}; \quad b_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{c_1}}; \quad c_1 = \left(\frac{l}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2;$$

$$l = -\frac{\kappa^2}{2}(1 - \eta + \eta^2); \quad q = \frac{\kappa^3}{27}(2 - 3\eta - 3\eta^2 + 2\eta^3) + \sigma.$$

Следует отметить, что для рассматриваемой системы третьего порядка на границе областей устойчивости и неустойчивости $c_1 > 0$ два корня уравнения (1.48) являются комплексно-сопряженными и один корень действительный. На основании уравнения (1.48) запишем матрицу монодромии

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} AP - \sigma CQ + RG & T(BP + DQ - \sigma CR) & T^2(CP + EQ + RH) \\ \frac{1}{T}(-\sigma CV + GW) & DV - \sigma CW & T(EV + HW) \\ \frac{1}{T^2}G & -\frac{1}{T}\sigma C & H \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

Система устойчива, если мультипликаторы ρ_i , т. е. корни характеристического уравнения

$$\det[\Phi(T) - \rho I] = (-1)^3(\rho^3 - S\rho + S1\rho - D) = 0 \quad (1.50)$$

находятся внутри или на окружности единичного радиуса (в последнем случае им должны соответствовать простые элементарные делители матрицы $\Phi(T) - \rho I$). В уравнении (1.50) $S \equiv \text{Sp} \Phi(T) -$ след матрицы монодромии; $D \equiv \det \Phi(T) -$ определитель матрицы монодромии;

$$S1 = \frac{1}{2} \{[\text{Sp} \Phi(T)]^2 - \text{Sp}[\Phi(T)]^2\}.$$

Уравнение $\rho^3 - S\rho^2 + S1\rho - D = 0$ при помощи билинейного преобразования $\rho = (\omega + 1)/(\omega - 1)$ преобразуем к виду

$$B_0\omega^3 + B_1\omega^2 + B_2\omega + B_3 = 0.$$

Запишем необходимые и достаточные условия устойчивости системы на основе критерия Гурвица:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1 - S + S1 - D > 0; \\ B_1 &= 3(1 + D) - S - S1 > 0; \\ B_2 &= 3(1 - D) + S - S1 > 0; \\ B_3 &= 1 + S + S1 + D > 0; \\ \Delta &= B_1 B_2 - B_0 B_3 = 8(1 - D^2 - S1 + SD) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

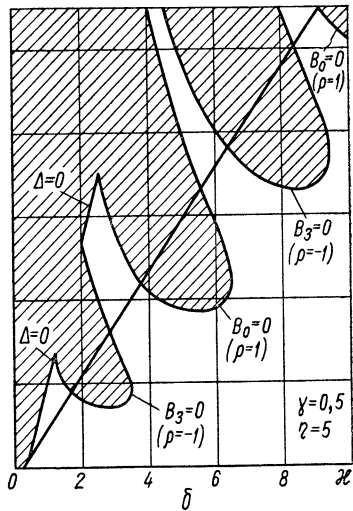
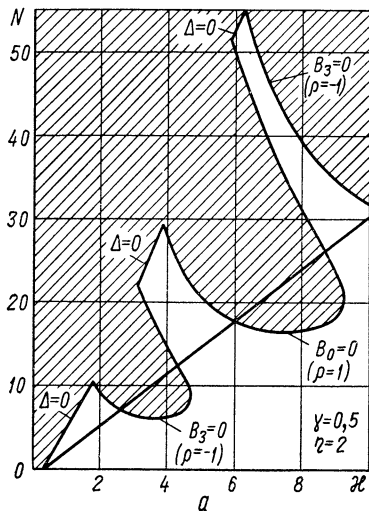


Рис. 124

Периодические режимы определяются двумя уравнениями:

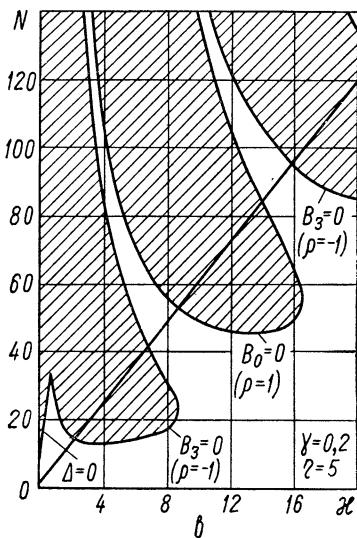
$$B_0 = (-1)^3 \det[\Phi(T) - I] = 1 - S + S1 - D = 0$$

(наличие периодического решения периода T , один из мультипликаторов равен единице),

$$B_3 = \det[\Phi(T) + I] = 1 + S + S1 + D = 0$$

(наличие антипериодического решения, имеется мультипликатор $\rho = -1$).

По полученным формулам на ЭВМ рассчитаны области устойчивости и неустойчивости системы рис.1.23, а в плоскости нормированных параметров (рис. 1.24). На графиках по оси абсцисс отложена величина $\kappa = aT$, по оси ординат — нормированный коэффициент усиления $N = K_1 T = K_0 T / \eta \alpha^2 = \sigma / \eta \kappa^2$. Области неустойчивости на рису-



нках заштрихованы. Границы областей устойчивости и неустойчивости системы состоят из кривых, соответствующих антипериодическому ($B_3=0, \rho=-1$), периодическому ($B_0=0, \rho=1$) и в общем случае непериодическому ($\Delta=0$) режимам. Прямая линия на рисунках соответствует границе областей устойчивости и неустойчивости непрерывной замкнутой системы ($\gamma=1$) при тех же параметрах η , κ и N . Для замкнутой непрерывной системы характеристическое уравнение определяется по формуле (1.46). Обозначая $sT=p$ и учитывая, что $\sigma=N\eta\kappa^2$, преобразуем уравнение (1.46) к виду

$$p^3 + (1 + \eta)\kappa p^2 + \eta\kappa^2 p + N\eta\kappa^2 = 0.$$

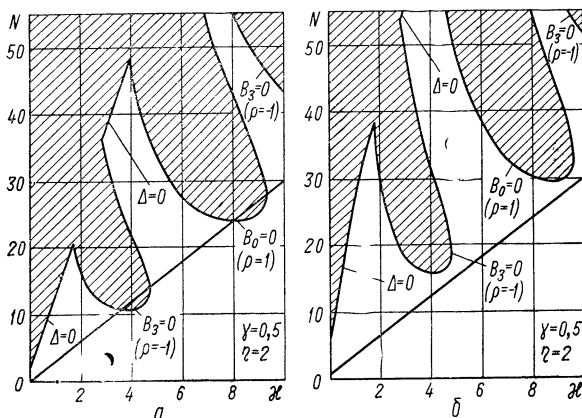


Рис. 1.25

На основании критерия И. А. Вышнеградского условие устойчивости непрерывной ($\gamma=1$) системы запишем в виде

$$(1 + \eta)\kappa\eta\kappa^2 - N\eta\kappa^2 > 0,$$

а граница областей устойчивости и неустойчивости определяется из уравнения $(1 + \eta)\kappa - N = 0$.

Как видно из рис. 1.24, система с конечным временем съема данных может быть устойчивой при неустойчивой замкнутой непрерывной системе и неустойчивой при устойчивой замкнутой непрерывной системе. Существуют также точки пересечения границ областей устойчивости и неустойчивости системы с конечным временем съема данных и замкнутой непрерывной системы, причем эти точки соответствуют только периодическому или антипериодическому режимам.

На рис. 1.23,б изображена система с двумя синхронно и синфазно работающими ключами, а непрерывные части имеют передаточные функции

$$G_1(s) = \frac{K_0}{s(s+b)} \quad \text{и} \quad G_2(s) = \frac{1}{s+a}.$$

Матрица монодромии $\Phi(T)$ для этой системы определяется по формуле (1.49), в которой $Q=0$ и $R=0$.

На рис.1.23, в изображена система с тремя синхронно и синфазно работающими ключами, непрерывные части которых имеют передаточные функции

$$G_1(s) = K_0/s; G_2(s) = 1/(s + b); G_3(s) = 1/(s + a).$$

Матрица монодромии $\Phi(T)$ для этой системы определяется по формуле(1.49), в которой $Q=0$, $R=0$ и $W=0$.

Области устойчивости и неустойчивости систем рис.1.23, б и в показаны соответственно на рис.1.25. Сравнение рис.1.24 и 1.25 показы-

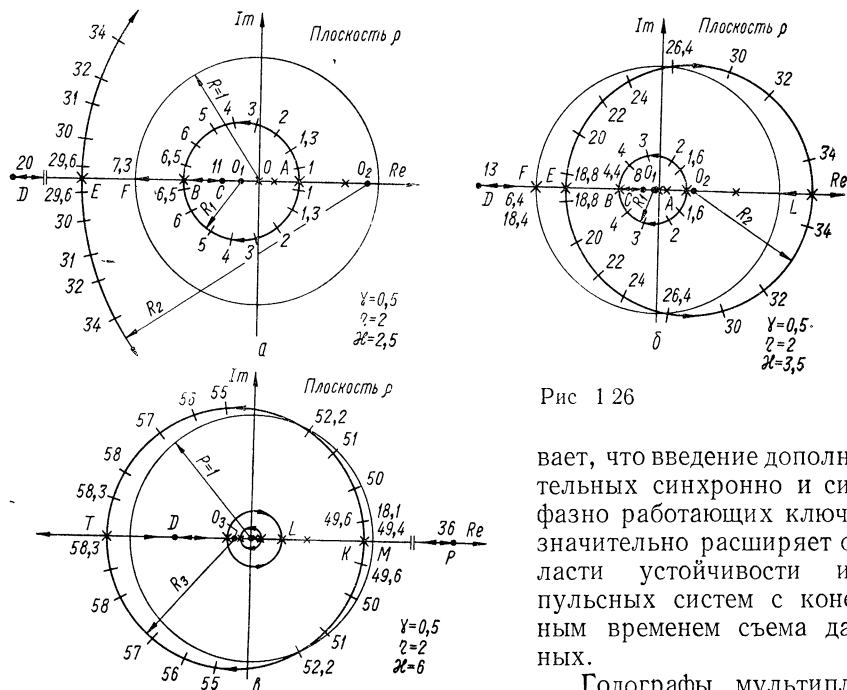


Рис 1 26

вает, что введение дополнительных синхронно и синфазно работающих ключей значительно расширяет области устойчивости импульсных систем с конечным временем сьема данных.

Годографы мультипликаторов (траектории движения мультипликаторов на комплексной плоскости при увеличении нормированного коэффициента усиления N от 0 до ∞) импульсных систем третьего порядка с конечным временем сьема данных представляют собой бесконечное число окружностей, радиусы которых последовательно увеличены и центры которых расположены поочередно слева и справа от начала координат на действительной оси, и отрезков действительной оси. Для более полного выявления особенностей годографов мультипликаторов рассмотрим начальные участки годографов системы рис.1.23,а (рис.1.26).

Годографы начинаются на действительной оси при положительных значениях мультипликаторов. На рис.1.26, а при $N=0,5$ значения мультипликаторов отмечены крестиками. Ближайший к началу координат мультипликатор при увеличении N до ∞ двигается к началу координат. Два других мультипликатора совершают более сложное

движение: вначале они двигаются к точке A , затем один из мультипликаторов двигается по верхней, другой — по нижней полуокружности с центром O_1 радиуса R_1 к точке B ; от точки B один мультипликатор двигается к точке $F(-1; j0)$ и при $N \approx 7,3$ выходит за окружность единичного радиуса (система теряет устойчивость), второй двигается к началу координат до точки C и, достигнув этой точки при $N \approx 11$, в обратную сторону к точке E ; первый мультипликатор, достигнув точки $D(-2,8; j0)$ при $N \approx 20$, двигается в обратную сторону также к точке E ; из точки E один из мультипликаторов двигается по верхней, другой — по нижней полуокружности с центром O_2 радиуса R_2 .

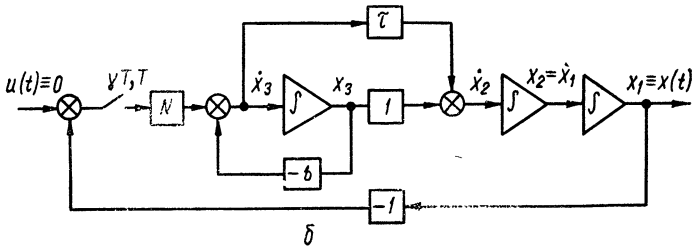
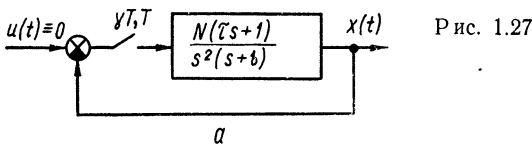
На рис.1.26,б значения мультипликаторов при $N=0,7$ отмечены крестиками. При увеличении N два мультипликатора двигаются к точке A , затем один из этих мультипликаторов двигается по верхней, другой — по нижней полуокружности с центром O_1 радиуса R_1 к точке B (где $N \approx 4,4$); от точки B один мультипликатор двигается к точке $F(-1; j0)$ и при $N \approx 6,4$ выходит за окружность единичного радиуса (система теряет устойчивость), второй двигается к началу координат до точки C и, достигнув этой точки при $N \approx 8$, в обратную сторону к точке E ; первый мультипликатор, достигнув точки D при $N \approx 13$, двигается в обратную сторону также к точке E (при достижении этим мультипликатором точки $F(-1; j0)$ при $N \approx 18,4$ система из неустойчивой снова становится устойчивой); из точки E один мультипликатор двигается по верхней, другой — по нижней полуокружности с центром O_2 радиуса R_2 к точке L . При достижении мультипликаторами окружности единичного радиуса при $N \approx 26,4$ система окончательно теряет устойчивость. От точки L мультипликаторы двигаются в разные стороны по действительной оси.

С увеличением κ радиусы окружностей, по которым двигаются мультипликаторы, уменьшаются. При $\kappa=6$ (рис.1.26,в) окружности с радиусами R_1 и R_2 располагаются значительно ближе к началу координат, а точки D и L располагаются в окружности единичного радиуса. От точки L , как было отмечено выше, мультипликаторы двигаются в разные стороны. При этом один из мультипликаторов достигает точки $M[1; j0]$ при $N \approx 18,1$ (система теряет устойчивость). Вторым мультипликатором двигается к началу координат до точки $Q[0,057; j0]$ и, достигнув этой точки при $N \approx 24$, двигается в обратную сторону к точке K . Первый мультипликатор, достигнув точки $P[4,13; j0]$ при $N \approx 36$, начинает двигаться в обратную сторону также к точке K ; при достижении этим мультипликатором точки $M[1; j0]$ при $N \approx 49,4$ система из неустойчивой снова становится устойчивой. Далее из точки K один мультипликатор двигается по верхней, другой — по нижней полуокружности с центром O_3 радиуса R_3 к точке T (при достижении мультипликаторами одновременно окружности единичного радиуса при величине нормального коэффициента усиления $N \approx 52,2$ система окончательно теряет устойчивость). От точки T мультипликаторы двигаются в разные стороны по действительной оси. Циклы движения повторяются, но в каждом последующем цикле мультипликаторы двигаются по окружности большего радиуса и расходятся в разные стороны по действительной оси слева или справа от начала координат

на большие расстояния. Нахождение одного мультипликатора в точке $M[1; j0]$ соответствует периодическому режиму, нахождение одного мультипликатора в точке $F[-1; j0]$ соответствует антипериодическому режиму, нахождение сразу двух мультипликаторов на окружности единичного радиуса соответствует режиму, отличному от T -периодического и от $2T$ -периодического, при условии, что остальные мультипликаторы (два — в первых двух случаях и один — в третьем случае) находятся внутри круга единичного радиуса на комплексной плоскости ρ .

Рассмотрим области устойчивости и неустойчивости системы третьего порядка рис. 1.27, а, непрерывная часть которой описывается передаточной функцией

$$G(s) = \frac{N(\tau s + 1)}{s^2(s + b)}$$



Одна из возможных схем системы в переменных состояния (схем аналогового моделирования) показана на рис. 1.27, б. Для такой системы матрица $A(t)$ на интервале $nT < t \leq (n + \gamma)T$ при замкнутом прерывателе

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -N\tau & 0 & 1 - b\tau \\ -N & 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Матрица $A(t)$ в интервалах $(n + \gamma)T < t \leq (n + 1)T$ при разомкнутом прерывателе

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - b\tau \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Пропуская промежуточные математические выкладки, запишем сразу матрицу монодромии для этой системы:

$$\Phi(T) = \Phi_2(T - \gamma T) \Phi_1(\gamma T) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & (1 - \gamma)T & VT^2 \\ 0 & 1 & QT \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & TB & T^2C \\ \frac{1}{T}D & A & TE \\ -\frac{1}{T^2}\sigma W & -\frac{1}{T}\sigma R & H \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & TC_3 & T^2C_5 \\ \frac{1}{T}C_4 & C_2 & TC_6 \\ -\frac{1}{T^2}\sigma WP & -\frac{1}{T}\sigma RP & HP \end{bmatrix},$$

где $C_1 = A + (1 - \gamma)D - \sigma WV$; $C_2 = A - \sigma RQ$; $C_3 = B + (1 - \gamma)A - \sigma RV$; $C_4 = D - \sigma WQ$; $C_5 = C + (1 - \gamma)E + HV$; $C_6 = E + QH$; $A = \delta + \kappa W$; $B = W + \kappa R$; $C = \left(1 - \kappa \frac{\tau}{T}\right)R$; $D = -\sigma \left(\frac{\tau}{T}W + R\right)$; $E = \left(1 - \kappa \frac{\tau}{T}\right)W$; $H = \delta + \sigma \frac{\tau}{T}R$;

$$P = e^{-(1-\gamma)\kappa}$$
; $Q = \frac{1 - \kappa \frac{\tau}{T}}{\kappa} (1 - P)$; $V = \left(1 - \kappa \frac{\tau}{T}\right) \times$

$$\times \left(\frac{1 - \gamma}{\kappa} + \frac{P - 1}{\kappa^2}\right)$$
; $\delta = \frac{e^{-\gamma y} e^{-\gamma \varepsilon}}{9y^2 + z^2} \{[(y + \varepsilon)(5y + \varepsilon) + z^2] \cos(\gamma z) + [z(y - 2\varepsilon) - \frac{3y}{z}(y + \varepsilon)^2] \sin(\gamma z) + (2y - \varepsilon)^2 \times$

$$\times e^{3\gamma y}\}$$
; $R = -\frac{e^{-\gamma y} e^{-\gamma \varepsilon}}{9y^2 + z^2} \left[\cos(\gamma z) + \frac{3y}{z} \sin(\gamma z) - e^{3\gamma y}\right]$; $W = \frac{e^{-\gamma y} e^{-\gamma \varepsilon}}{9y^2 + z^2} \left\{[3y(y + \varepsilon) + z^2] \frac{1}{z} \sin(\gamma z) - (2y - \varepsilon) \times \right.$

$$\times \cos(\gamma z) + (2y - \varepsilon) e^{3\gamma y}\}.$$

Для определения коэффициентов δ , R и W необходимо знать корни $p_1 = \lambda_1 T = -y - \varepsilon + jz$; $p_2 = \lambda_2 T = -y - \varepsilon - jz$; $p_3 = \lambda_3 T = 2y - \varepsilon$ (или, более конкретно, величины y , ε и z) кубического уравнения

$$p^3 + \kappa p^2 + \sigma \frac{\tau}{T} p + \sigma = 0, \quad (1.52)$$

которое получается из уравнения

$$s^3 + bs^2 + N\tau s + N = 0$$

при введении обозначений $sT = p$; $bT = \kappa$; $NT^3 = \sigma$.

При заданных κ и σ величины y , ε и z на основании решения Кардано кубического уравнения (1.52) определяются по следующим формулам:

$$y = \frac{a_1 + b_1}{2}; \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} (a_1 - b_1); \quad \varepsilon = \frac{\kappa}{3};$$

$$a_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{c_1}}; \quad b_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{c_1}}; \quad c_1 = \left(\frac{l}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2;$$

$$l = -\frac{\kappa^2}{3} + \sigma \frac{\tau}{T}; \quad q = \frac{2\kappa^3}{27} - \frac{\kappa}{3} \sigma \frac{\tau}{T} + \sigma$$

(для рассматриваемой системы третьего порядка на границе областей устойчивости и неустойчивости $c_1 > 0$, т. е. два корня уравнения (1.52) являются комплексно-сопряженными и один корень — действительный).

Необходимые и достаточные условия устойчивости системы определим на основе критерия Гурвица по формулам (1.51), в которых след матрицы монодромии

$$S \equiv \text{Sp } \Phi(T) = C_1 + C_2 + HP;$$

определитель матрицы монодромии

$$D \equiv \det \Phi(T) = HP(C_1C_2 - C_3C_4) + \sigma RP(C_1C_6 - C_4C_5) - \sigma WP(C_3C_6 - C_2C_5);$$

коэффициент

$$SI \equiv \frac{1}{2} \{[\text{Sp } \Phi(T)]^2 - \text{Sp}[\Phi(T)]^2\} = \\ = C_1C_2 - C_3C_4 + (C_1 + C_2)HP + (C_5W + C_6R)\sigma P.$$

Рассчитанные на ЭВМ области устойчивости и неустойчивости импульсной системы (рис. 1.27, а) в плоскости нормированных параметров (σ, κ) при относительной длительности замыкания ключа, равной 0,4 и 0,5 и параметре τ/T , равной 5 и 10, изображены на рис. 1.28, а, б (области неустойчивости при $\gamma = 0,5$ заштрихованы).

Границы, разделяющие области устойчивости и неустойчивости, соответствуют условию $B_0 = 0$ (наличие периодического решения периода T , один из мультипликаторов равен единице), $B_2 = 0$ (наличие периодического решения периода $2T$, один из мультипликаторов $\rho = -1$) или $\Delta = 0$ (наличие периодического решения с периодом, отличным от T и $2T$, имеется пара комплексно-сопряженных мультипликаторов) при выполнении остальных неравенств в условиях Гурвица (1.51).

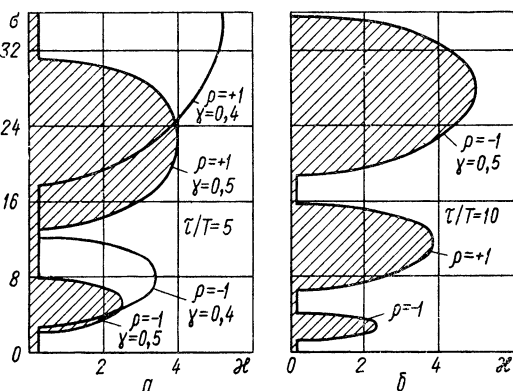


Рис. 1.28

4. НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ

Для асимптотической устойчивости периодических импульсных систем с конечным временем съема данных необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы уравнения динамики системы (1.1), т. е. корни характеристического уравнения

$$\det[\Phi(T) - \rho I] = (-1)^h (\rho^h + a_1 \rho^{h-1} + a_2 \rho^{h-2} + \dots + a_h) = 0,$$

находились внутри круга единичного радиуса на комплексной плоскости ρ . Условия (1.21)—(1.26) для систем второго, третьего и четвертого порядков и аналогичные условия, которые можно получить для систем более высоких порядков, дают возможность построить точные значения областей устойчивости и неустойчивости. Для этого необходимо найти матрицу монодромии $\Phi(T) \equiv C$ и коэффициенты a_i характеристического уравнения по формулам (1.27), (1.28), затем записать коэффициенты B_i уравнения (1.20) через коэффициенты a_i и условия Гурвица, например в форме (1.21)—(1.26). Следующий, и последний, этап заключается в решении неравенства Гурвица.

Матрицу монодромии $\Phi(T) \equiv C$ можно определить в аналитическом виде для систем, динамика которых при замкнутых прерывателях (прерывателе) описывается уравнениями до четвертой степени включительно. Это связано с тем, что уравнения пятой степени и выше в общем случае в радикалах разрешены быть не могут. Численными методами всегда можно найти матрицу монодромии со степенью точности, определяемой матрицей коэффициентов $A(t)$.

Решение уравнений и неравенств (1.21)—(1.26) является сложной задачей и решить их можно на ЭВМ. Трудности возрастают при исследовании корней характеристических уравнений пятого и более высоких порядков.

Существуют методы, по которым без рассмотрения характеристического полинома по матрице монодромии $\Phi(T) \equiv C$ можно определить устойчивость или неустойчивость импульсных систем с конечным временем съема данных [22].

Известно, что если собственные числа матрицы C суть $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, то собственные числа C^k равны $\rho_1^k, \rho_2^k, \dots, \rho_n^k$, т. е. при возведении матрицы C в степень в ту же степень возводятся и ее собственные числа. Если все ρ_i лежат внутри единичного круга с центром в начале координат на комплексной плоскости ρ , то последовательное возведение матрицы C в степень уменьшает абсолютную величину собственных чисел ρ_i^k . Поэтому, чтобы система (1.1) была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно выполнить условие

$$C^k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (1.53)$$

где 0 — нулевая матрица.

Выполнимость необходимого и достаточного условия устойчивости можно установить по факту абсолютного убывания элементов $|c_{ij}^{(k)}|$ матрицы C^k . Возведение матрицы в степень рекомендуется выполнять так, чтобы каждая последующая матрица являлась квадратом предыдущей, т. е. по закону

$$C^k = C^{2^m} = C^{2^{m-1}} C^{2^{m-1}}.$$

Тогда k -я степень матрицы C^k находится через $\log_2 k$ шагов (128-я степень получается через семь, а 1024-я — через десять возведений матрицы C в степень). В этом случае в оперативном запоминающем устройстве ЭВМ не надо постоянно удерживать матрицу C , так как каждый раз используются лишь полученные из нее степени. Вычисления

можно ограничить, если абсолютное значение каждого из элементов матрицы C^k не превышает величины $1/h$, т. е. если выполняется неравенство

$$|c_{ij}^{(k)}| \leq 1/h, \quad (1.54)$$

где h — степень характеристического уравнения. Если условие (1.54) удовлетворяется для C , то условие устойчивости (1.53) выполняется сразу и возведение в степень не требуется.

Рассмотрим количественные критерии оценки устойчивости по нормам и по следу матрицы C . Напомним, что нормой квадратной матрицы C называют действительное число $\|C\|$, удовлетворяющее условиям:

- а) $\|C\| \geq 0$, причем $\|C\| = 0$ тогда и только тогда, когда $C = 0$;
- б) $\|aC\| = |a| \|C\|$, a — число;
- в) $\|C + D\| \leq \|C\| + \|D\|$;
- г) $\|CD\| \leq \|C\| \|D\|$.

Рассмотрим следующие, легко вычисляемые нормы:

$$\|C\|_I = \max_i \sum_{j=1}^h |c_{ij}|;$$

$$\|C\|_{II} = \max_j \sum_{i=1}^h |c_{ij}|;$$

$$\|C\|_{III} = \sqrt{\sum_{i,j} c_{ij}^2};$$

$$\|C\|_{IV} = h \max_{i,j} |c_{ij}|.$$

Для того чтобы система (1.1) была асимптотически устойчива и $C^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, достаточно, чтобы любая из норм матрицы C была меньше единицы: $\|C\| < 1$. Действительно, в силу определения нормы (см. условие «г»)

$$\|C^k\| \leq \|C^{k-1}\| \|C\| \leq \dots \leq \|C\|^k.$$

Поэтому, если $\|C\| < 1$, то $\|C\|^k \rightarrow 0$ и, значит, $C^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Таким образом, чтобы исследуемая система (1.1) была устойчива, достаточно, чтобы какая-либо из норм была меньше единицы, т. е. достаточно выполнить условие

$$\min(\|C\|_I, \|C\|_{II}, \|C\|_{III}, \|C\|_{IV}) < 1. \quad (1.55)$$

Если условие (1.55) не соблюдается, то из этого не следует, что исследуемая точка пространства параметров системы является неустойчивой. Вопрос об устойчивости должен быть исследован дополнительно путем рассмотрения степеней матрицы C^k .

Пусть все собственные значения матрицы C лежат внутри единичного круга с центром в начале координат комплексной плоскости $\rho(|\rho_i| < 1, i = 1, 2, \dots, h)$, а все нормы матрицы C больше единицы.

Рассмотрим последовательность степеней $C^2, C^4, C^8, \dots, C^{2^m}$; $k = 2^m$. Так как все собственные числа $|\rho_i| < 1$, элементы матрицы C^k , начиная с некоторого k , убывают, стремясь к нулю при $k \rightarrow \infty$. Тогда на каком-либо шаге $\|C^k\| < 1$. Это условие является необходимым и достаточным для определения устойчивости системы.

Таким образом, оценка устойчивости по нормам выполняется в следующей последовательности.

Вычисляется какая-либо из норм матрицы C или контролируется условие (1.55). Если $\|C\| < 1$, то исследуемая точка пространства параметров принадлежит области устойчивости.

Если соотношение (1.55) не выполняется, то матрицу C следует возводить в степень и рассматривать нормы последовательных степеней $\|C^2\|, \|C^4\|, \|C^8\|, \dots, \|C^k\|$. Если при некотором фиксированном k какая-либо из норм стала меньше единицы $\|C^k\| < 1$, то условие устойчивости $C^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) соблюдается и исследуемая система при данных сочетаниях параметров рассматривается как устойчивая.

Известно, что следы последовательных степеней матрицы C^k представляют собой суммы всех собственных чисел ρ_i^k , взятых в той же степени, что и матрица C^k , т. е.

$$\text{Sp } C^k = \rho_1^k + \rho_2^k + \dots + \rho_h^k = \sum_{i=1}^h \rho_i^k.$$

Если система устойчива и $C^k \rightarrow 0$, то след $\text{Sp } C^k$ также стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Если сочетание параметров рассматриваемой точки пространства таково, что точка находится достаточно далеко от границы устойчивости, то матрицу C можно не возводить в степень, а воспользоваться *достаточным критерием неустойчивости*

$$|\text{Sp } C| = \left| \sum_{i=1}^h \rho_i \right| > h. \quad (1.56)$$

Можно утверждать, что если выполняется условие (1.56), то среди значений $|\rho_i|$ найдется хотя бы одно, для которого справедливо условие $|\rho_i| > 1$. Действительно, допустим, что все $|\rho_i| < 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^h |\rho_i| < h,$$

и из справедливости неравенства $\left| \sum_{i=1}^h \rho_i \right| \leq \sum_{i=1}^h |\rho_i|$ следует, что

$$|\text{Sp } C| = \left| \sum_{i=1}^h \rho_i \right| \leq h. \quad (1.57)$$

Из противоречия неравенств (1.56) и (1.57) доказывается истинность условия (1.56).

Таким образом, достаточно построить матрицу C и если ее след по абсолютной величине превышает порядок матрицы h , то исследуе-

мая точка пространства параметров не принадлежит области устойчивости. Если соотношение (1.56) не удовлетворяется, никаких выводов относительно принадлежности рассматриваемой точки к области неустойчивости сделать нельзя.

Глава 2

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ СЪЕМА ДАННЫХ

5. РАСШИРЕННАЯ ПЕРЕХОДНАЯ МАТРИЦА.

РЕАКЦИЯ СИСТЕМ НА ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Динамика периодической импульсной системы с конечным временем съема данных, находящейся под воздействиями, описывается дифференциальными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t); \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где $A(t)$ — матрица коэффициентов; $B(t)$ — матрица управления; $C(t)$ — матрица выхода; $D(t)$ — матрица обхода системы.

При детерминированных входных сигналах удобно входное воздействие $u(t)$ рассматривать как выход системы, формирующей входной сигнал, и такую формирующую систему описать своим дифференциальным уравнением. Тогда уравнения (2.1) можно свести к уравнению

$$\dot{v}(t) = A(t)v(t), \quad v(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

В уравнении (2.2) матрица $A(t)$ представляет собой расширенную матрицу коэффициентов исходной и формирующей системы. Решение уравнения (2.2) имеет вид

$$v(t) = \Phi(t)v(0^+), \quad (2.3)$$

где $\Phi(t)$ — расширенная переходная матрица, которая характеризует одновременно изменение как переменных состояния процесса системы, так и входного воздействия.

Хотя матрицу коэффициентов в уравнениях (1.1), (2.1) и (2.2) обозначают одинаково — $A(t)$, но в уравнениях (1.1) и (2.1) $A(t)$ — это матрица коэффициентов, а в уравнении (2.2) $A(t)$ — это расширенная матрица коэффициентов. Это касается и матрицы $\Phi(t)$. В уравнении (1.3) $\Phi(t)$ — переходная матрица, в уравнении (2.3) $\Phi(t)$ — расширенная переходная матрица.

Вектор-столбец $v(t)$ представляет входные переменные и координаты системы. Если входные переменные рассматривать совместно с переменными состояния системы, т. е. включать их в число координат системы, то вектор $v(t)$ можно считать вектором состояния системы

увеличенной размерности. Один из способов определения переменных (координат) состояния системы использует схему системы в переменных состояниях (схему аналогового моделирования). Эта схема составляется из интеграторов, усилителей, суммирующих устройств. Выходы интеграторов можно выбрать в качестве координат переменных состояний системы. Схема в переменных состояниях дает наглядную физическую интерпретацию координат системы и описывает их взаимосвязь.

Рассмотрим описание переменными состояниями некоторых часто встречающихся входных воздействий и схемы систем в переменных состояниях [23]. Пусть входное воздействие представляет собой ступенчатую функцию

$$u(t) = \begin{cases} r & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

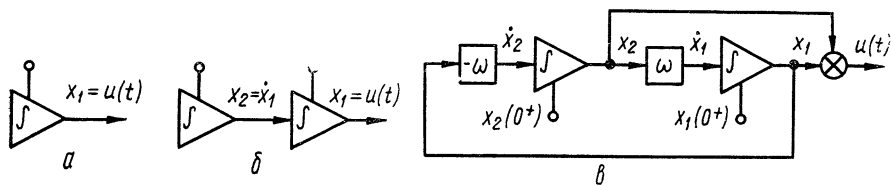


Рис. 2.1

Введем переменную состояния $u(t) = x_1$, получим уравнение $\dot{x}_1 = 0$ с начальным условием $x_1(0) = r$. Схема в переменных состояниях, формирующая ступенчатое входное воздействие, показана на рис. 2.1, а.

Рассмотрим воздействие в виде линейной функции $u(t) = r_0 + r_1 t$, $t \geq 0$. Полагая $u(t) = x_1$, находим дифференциальные уравнения состояния

$$\dot{x}_1 = r_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0$$

с начальными условиями $x_1(0) = r_0$ и $x_2(0) = r_1$. Схема в переменных состояниях, формирующая такое воздействие, изображена на рис. 2.1, б.

Известно, что решение гармонического уравнения $\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$, $t \geq 0$ дает синусоидальный сигнал. Это уравнение можно записать в виде двух уравнений $\dot{x}_1 = \omega x_2$; $\dot{x}_2 = -\omega x_1$ с начальными условиями $x_1 = x_1(0)$, $x_2 = x_2(0)$. Схема в переменных состояниях, которая формирует синусоидальный сигнал, показана на рис. 2.1, в. В этой схеме $u(t) = x_1 + x_2 = x_1(0) \cos \omega t + x_2(0) \sin \omega t$.

Составим схему системы в переменных состояниях для стационарной системы второго порядка, описываемую уравнением

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + K_0 x(t) = K_0 u(t).$$

Полагая $x_1 = x(t)$ и $x_2 = \dot{x}_1$, запишем $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = K_0 u - K_0 x_1 - b x_2$. При $u(t) \equiv 0$ первоначальное уравнение преобразуется к виду $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$,

где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_0 & -b \end{bmatrix};$$

\mathbf{A} — матрица коэффициентов системы.

Пусть входное воздействие имеет вид ступенчатой функции. Тогда $\dot{u} = 0$; $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = K_0 u - K_0 x_1 - b x_2$ и первоначальное уравнение преобразуется к виду $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \mathbf{v}$, где

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K_0 & -K_0 & -b \end{bmatrix},$$

\mathbf{A} — расширенная матрица коэффициентов системы.

Следует учитывать, что для одной и той же системы (или одного и того же дифференциального уравнения) можно получить несколько схем в переменных состояния (несколько схем аналогового моделирования), отличающихся промежуточными переменными, выбранными для описания системы. Выбор этих переменных определяет конфигурацию схемы системы в переменных состояния, каждая из которых полностью характеризует систему. Схему системы в переменных состояния можно составить по исходному дифференциальному уравнению или передаточной функции системы способами прямого, параллельного или последовательного программирования.

Для импульсной системы с конечным временем съема данных, содержащей несколько синхронно работающих прерывателей, основной наибольший интервал (период) прерывания T можно разделить на ряд подынтервалов в соответствии с частотами, фазами и относительной длительностью замыкания отдельных прерывателей так, что динамика возбужденной системы для любого полученного подынтервала длительностью $T_k = \gamma_k T$, $k = 1, 2, \dots, m$, описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{v}}(\tau) = \mathbf{A}_k \mathbf{v}(\tau), \quad \mathbf{v}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\tau) \\ \mathbf{x}(\tau) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где $\tau = t - nT$ находится в подынтервале $0 \leq \tau \leq \gamma_k T$; γ_k — относительная (по отношению к периоду T) длительность подынтервала; \mathbf{A}_k — постоянная расширенная матрица коэффициентов системы для этого подынтервала [2, 23]. Вектор-столбец $\mathbf{v}(\tau)$ представляет входные переменные и координаты системы. Решение уравнения (2.4):

$$\mathbf{v}(\tau) = \Phi_k(\tau) \mathbf{v}_k(0), \quad (2.5)$$

где $\Phi_k(\tau)$ — расширенная переходная матрица для этого подынтервала, которая характеризует одновременно изменение как переменных состояния процесса системы, так и входного воздействия; $\mathbf{v}_k(0)$ — вектор начальных условий для этого подынтервала.

Разбивая первый интервал (период) $0 \leq t \leq T$ указанным выше образом на m подынтервалов ($T_k = t_k - t_{k-1}$; $t_0 = 0$; $t_m = T$, $k = 1$,

2, ..., m) и последовательно определяя решение уравнений (2.4) для подынтервалов первого периода, находим для k -го подынтервала

$$\mathbf{v}(t) = \Phi_k(t) \mathbf{v}(0); \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad (2.6)$$

$$\Phi_k(t) = \Phi_k(t - t_{k-1}) \Phi_{k-1}(T_{k-1}) \dots \Phi_3(T_3) \Phi_2(T_2) \Phi_1(T_1). \quad (2.7)$$

При $t = t_m = T$ из формулы (2.7) определим матрицу монодромии

$$\mathbf{C} \equiv \Phi(T) = \Phi_m(T) = \prod_{k=m}^1 \Phi_k(T_k) = \prod_{k=m}^1 \exp(\mathbf{A}_k T_k). \quad (2.8)$$

При анализе периодически нестационарных систем было установлено, что для системы, описываемой векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{A}(t)$ — периодическая периода T матрица, т. е. $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T)$, переходная матрица уравнения (2.9) удовлетворяет тождеству

$$\Phi(t + T) = \Phi(t) \Phi(T), \quad (2.10)$$

где $\Phi(T) \equiv \mathbf{C}$ — матрица монодромии; $\Phi(0) = \mathbf{I}$.

Решение уравнения (2.9) имеет вид (для простоты полагаем $t_0 = 0$) $\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}_0$. Повторные применения уравнения (2.10) приводят к соотношениям $\Phi(t + kT) = \Phi(t) \mathbf{C}^k$; $\mathbf{x}(t + kT) = \Phi(t + kT) \mathbf{x}_0 = \Phi(t) \mathbf{C}^k \mathbf{x}_0$. Таким образом, в любом интервале $nT \leq t \leq (n + 1)T$, $n = 1, 2, 3, \dots$, решение уравнения (2.9) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - nT) \mathbf{C}^n \mathbf{x}_0, \quad nT \leq t \leq (n + 1)T, \quad (2.11)$$

где $\Phi(t - nT)$ — переходная матрица, вычисленная для первого периода $0 \leq t \leq T$ и смещенная на интервал nT .

Если возбужденная импульсная система с конечным временем съема данных описывается векторным дифференциальным уравнением $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{v}(t)$, где расширенная матрица коэффициентов системы $\mathbf{A}(t)$ является периодической периода T , то согласно выражениям (2.4) — (2.7) и (2.11) для k -го подынтервала $t_{k-1} \leq t - nt \leq t_k$ любого основного интервала (периода) $nT \leq t \leq (n + 1)T$ решение уравнения (2.4) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \Phi_k(t - nT) \mathbf{C}^n \mathbf{v}(0), \quad nT \leq t \leq (n + 1)T, \quad (2.12)$$

где $\Phi_k(t - nT)$ — переходная матрица, вычисленная по формуле (2.7) для первого основного периода $0 \leq t \leq T$ на подынтервале $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ и смещенная на промежуток времени nT ; \mathbf{C} — матрица монодромии, определяемая по формуле (2.8).

Формула (2.12) является чрезвычайно простой и удобной для расчета переходных процессов периодически нестационарных импульсных систем с конечным временем съема данных. Покажем это на примере расчета переходного процесса простейшей замкнутой системы с периодически работающим прерывателем рис. 2.2, а, на вход которой в момент $t_0 = 0$ поступает входной сигнал в виде единичной ступ-

пенчатой функции. Схема системы в переменных состояния (схема аналогового моделирования) изображена на рис. 2.2, б.

Процессы в системе описываются двумя уравнениями вида (2.4): в подынтервалах $nT \leq t \leq (n + \gamma)T$ при замкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -(\alpha + b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x_1 \end{bmatrix};$$

в подынтервалах $(n + \gamma)T \leq t \leq (n + 1)T$ при разомкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

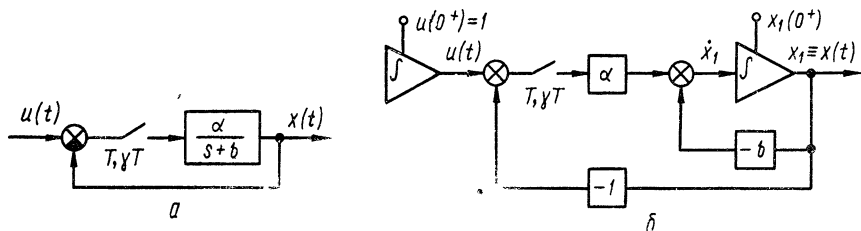


Рис. 2.2

Переходная матрица для первых подынтервалов

$$\Phi_1(\tau) = L^{-1}\{(sI - A_1)^{-1}\} = \exp(A_1\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\alpha + b} [1 - e^{-(\alpha+b)\tau}] & e^{-(\alpha+b)\tau} \end{bmatrix}.$$

Переходная матрица для вторых подынтервалов

$$\Phi_2(\tau) = L^{-1}\{(sI - A_2)^{-1}\} = \exp(A_2\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-b\tau} \end{bmatrix}.$$

Для первого интервала (периода) на подынтервале $0 \leq t \leq \gamma T$, согласно формулам (2.6) и (2.7) имеем

$$\mathbf{v}(t) = \Phi_1(t) \mathbf{v}(0); \quad \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} u(0) \\ x_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} u \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\alpha + b} [1 - e^{-(\alpha+b)t}] & e^{-(\alpha+b)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для первого интервала (периода) на подынтервале $\gamma T \leq t \leq T$

$$\mathbf{v}(t) = \Phi_2(t - \gamma T) \Phi_1(\gamma T) \mathbf{v}(0).$$

или

$$\begin{bmatrix} u \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\alpha + b} [1 - e^{-(\alpha+b)\gamma T}] e^{-b(t-\gamma T)} & e^{-(\alpha+b)\gamma T} e^{-b(t-\gamma T)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матрица монодромии, согласно формуле (2.8),

$$C \equiv \Phi(T) = \Phi_2(T - \gamma T) \Phi_1(\gamma T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\alpha + b} e^{-b(1-\gamma)T} [1 - e^{-(\alpha+b)\gamma T}] & e^{-b(1-\gamma)T} e^{-(\alpha+b)\gamma T} \end{bmatrix}.$$

Для любого основного интервала (периода) $nT \leq t \leq (n+1)T$ решения уравнений вида (2.4) для рассматриваемой системы определяются на основании формулы (2.12):

для подынтервалов $nT \leq t \leq (n+\gamma)T$ при замкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} u \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\alpha + b} [1 - e^{-(\alpha+b)(t-nT)}] & e^{-(\alpha+b)(t-nT)} \end{bmatrix} C^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.13)$$

для подынтервалов $(n+\gamma)T \leq t \leq (n+1)T$ при разомкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} u \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\alpha + b} e^{-b(t-nT-\gamma T)} [1 - e^{-(\alpha+b)\gamma T}] & e^{-(\alpha+b)\gamma T} e^{-b(t-nT-\gamma T)} \end{bmatrix} \times C^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

На рис. 2.3 изображены рассчитанные по формулам (2.13) и (2.14) выходные сигналы $x(t) \equiv x_1$ системы, имеющей параметры $\gamma = 0,5$; $T = 1$ с; $b = 0,5$ с⁻¹. Реакция системы на входное единичное ступенчатое воздействие определена для различных коэффициентов α с⁻¹.

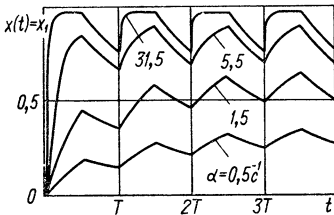


Рис. 2.3

Если возбужденная импульсная система с конечным временем съема данных описывается векторным дифференциальным уравнением $\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{v}(t)$, где расширенная матрица коэффициентов системы $\mathbf{A}(t)$ не является периодической вследствие неперiodической работы прерывателей (прерывателя), то переходный процесс системы можно

вычислить по рекуррентным соотношениям (2.6) и (2.7) на интервале от t_0 до t_m , где t_0 — начальное время (время начала отсчета); t_m — конечное время переходного процесса. Разбивая этот временной интервал на m подынтервалов так, что для каждого k -го подынтервала ($k = 1, 2, \dots, m$) матрица $\mathbf{A}(t)$ тождественно равна матрице \mathbf{A}_k , где \mathbf{A}_k — расширенная матрица коэффициентов системы, постоянная для этого подынтервала, можно найти переходный процесс системы в каждом подынтервале по формуле (2.5), в которой $\tau = t - t_{k-1}$, $0 \leq \tau \leq T_k$, T_k — длительность k -го подынтервала. Действительно, определяя вектор начальных условий для k -го подынтервала на основании формул (2.6) и (2.7) в виде

$$\mathbf{v}_k(0) = \Phi_{k-1}(T_{k-1}) \dots \Phi_2(T_2) \Phi_1(T_1) \mathbf{v}(0) \quad (2.15)$$

и обозначая $\Phi_k(t - t_{k-1}) \equiv \Phi_k(\tau)$, запишем

$$\mathbf{v}(t) = \Phi_k(t - t_{k-1}) \mathbf{v}_k(0), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k \quad (2.16)$$

или

$$\mathbf{v}(\tau) = \Phi_k(\tau) \mathbf{v}_k(0), \quad 0 \leq \tau \leq T_k, \quad (2.17)$$

где $\Phi_k(\tau)$ — переходная матрица для k -го подынтервала.

Наиболее часто импульсная система с конечным временем смена данных имеет один прерыватель (ключ), который характеризуется своей функцией коммутации $m(t)$. Нахождение переходного процесса такой системы связано с определением двух переходных матриц: $\Phi_1(\tau)$ — для подынтервалов замкнутого состояния прерывателя и $\Phi_2(\tau)$ — для подынтервалов разомкнутого состояния прерывателя.

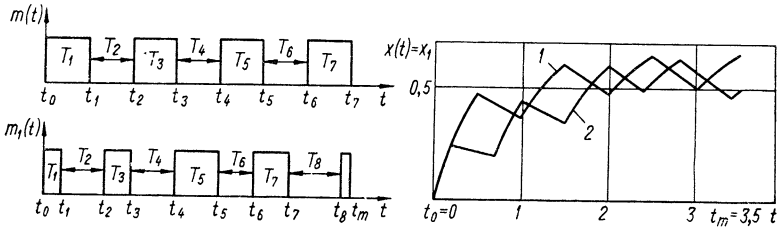


Рис. 2 4

При подаче на вход системы единичного скачка входного сигнала в момент замкнутого состояния прерывателя на основании формул (2.15), (2.16) и (2.17) последовательно находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \Phi_1(t) \mathbf{v}_1(0) = \Phi_1(\tau) \mathbf{v}_1(0), \\ & \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad 0 \leq \tau \leq T_1, \\ & \quad \mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}(0); \\ \mathbf{v}(t) &= \Phi_2(t - t_1) \mathbf{v}_2(0) = \Phi_2(\tau) \mathbf{v}_2(0), \\ & \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad 0 \leq \tau \leq T_2, \\ & \quad \mathbf{v}_2(0) = \Phi_1(T_1) \mathbf{v}(0), \\ \mathbf{v}(t) &= \Phi_1(t - t_2) \mathbf{v}_3(0) = \Phi_1(\tau) \mathbf{v}_3(0), \\ & \quad t_2 \leq t \leq t_3, \quad 0 \leq \tau \leq T_3, \\ \mathbf{v}_3(0) &= \Phi_2(T_2) \Phi_1(T_1) \mathbf{v}(0) = \Phi_2(T_2) \mathbf{v}_2(0); \\ \mathbf{v}(t) &= \Phi_2(t - t_3) \mathbf{v}_4(0) = \Phi_2(\tau) \mathbf{v}_4(0), \\ & \quad t_3 \leq t \leq t_4, \quad 0 \leq \tau \leq T_4, \\ \mathbf{v}_4(0) &= \Phi_1(T_3) \Phi_2(T_2) \Phi_1(T_1) \mathbf{v}(0) = \Phi_1(T_3) \mathbf{v}_3(0); \\ \mathbf{v}(t) &= \Phi_1(t - t_4) \mathbf{v}_5(0) = \Phi_1(\tau) \mathbf{v}_5(0), \\ & \quad t_4 \leq t \leq t_5, \quad 0 \leq \tau \leq T_5, \\ \mathbf{v}_5(0) &= \Phi_2(T_4) \Phi_1(T_3) \Phi_2(T_2) \Phi_1(T_1) \mathbf{v}(0) = \Phi_2(T_4) \mathbf{v}_4(0); \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

По формулам (2.15)—(2.17) можно рассчитывать переходные процессы систем с прерывателями, имеющими как неперiodические, так и периодические функции коммутации $m(t)$.

1. Временные параметры функции коммутации $m(t)$ прерывателя на промежутке от $t_0 = 0$ до $t_m = 3,5$ с

Периодическая функция				Непериодическая функция			
t_k, c		T_k, c		t_k, c		T_k, c	
t_1	0,5	T_1	0,5	t_1	0,2	T_1	0,2
t_2	1	T_2	0,5	t_2	0,7	T_2	0,5
t_3	1,5	T_3	0,5	t_3	1	T_3	0,3
t_4	2	T_4	0,5	t_4	1,5	T_4	0,5
t_5	2	T_5	0,5	t_5	2	T_5	0,5
t_6	3	T_6	0,5	t_6	2,4	T_6	0,4
$t_7 = t_m$	3,5	T_7	0,5	t_7	2,8	T_7	0,4
				t_8	3,4	T_8	0,6
				$t_9 = t_m$	3,5	T_9	0,1

Переходные процессы систем с прерывателями, имеющими непериодические функции коммутации, обычно рассчитывают на конечном интервале времени от t_0 до t_m . На рис.2.4 изображены периодическая $m(t)$, непериодическая $m_1(t)$ функции коммутации прерывателя на интервале от $t_0=0$ до $t_m=3,5$ с и рассчитанные для этих функций коммутации на основании соотношений (2.15)–(2.17) переходные процессы простейшей импульсной системы с прерывателем (рис. 2.2) на единичный скачок входного воздействия. Временные параметры функций коммутации приведены в табл.1. Непрерывная часть системы имеет параметры $\alpha=1,5$ с⁻¹; $b=0,5$ с⁻¹. Переходная матрица для подынтервалов замкнутого состояния прерывателя

$$\Phi_1(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,75(1 - e^{-2\tau}) & e^{-2\tau} \end{bmatrix};$$

переходная матрица для подынтервалов разомкнутого состояния прерывателя

$$\Phi_2(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-0,5\tau} \end{bmatrix}; \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Кривая 1 (рис.2.4) соответствует переходному процессу системы с функцией коммутации прерывателя $m(t)$, кривая 2 — с функцией $m_1(t)$.

Для периодически нестационарных импульсных систем с конечным временем съема данных расчет переходных процессов по формулам (2.15) — (2.17) значительно более трудоемкий и менее удобный для программирования на ЭВМ, чем расчет по формуле (2.12). Поэтому для периодических систем целесообразно использовать формулу (2.12).

Рассмотрим замкнутую систему с периодически работающим прерывателем рис. 2.5, а. Пусть на вход системы в момент $t_0=0$ поступает сигнал в виде линейно-возрастающей функции $u(t)=r_0+r_1t$. Схема аналогового моделирования такой системы в переменных состояния изображена на рис. 2.5, б. Процессы в системе описываются двумя уравнениями:

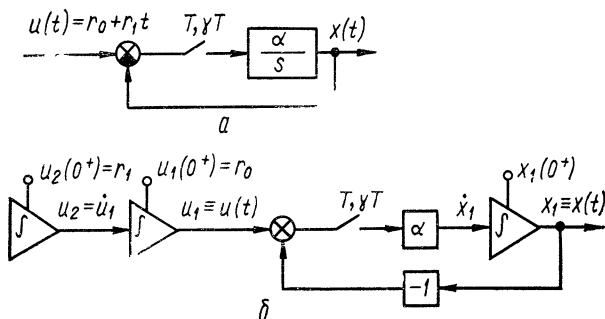


Рис. 2.5

в подынтервалах $nT \leq t \leq (n + \gamma)T$ при замкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ x_1 \end{bmatrix};$$

в подынтервалах $(n + \gamma)T \leq t \leq (n + 1)T$ при разомкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ x_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2(0^+) \\ u_1(0^+) \\ x_1(0^+) \end{bmatrix}.$$

Переходная матрица для первых подынтервалов

$$\Phi_1(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ \frac{e^{-\alpha\tau} + \alpha\tau - 1}{\alpha} & 1 - e^{-\alpha\tau} & e^{-\alpha\tau} \end{bmatrix}.$$

Переходная матрица для вторых подынтервалов

$$\Phi_2(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для первого интервала (периода) на подынтервале $0 \leq t \leq \gamma T$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \Phi_1(t) \mathbf{v}(0) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{e^{-\alpha t} + \alpha t - 1}{\alpha} & 1 - e^{-\alpha t} & e^{-\alpha t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(0^+) \\ u_1(0^+) \\ x_1(0^+) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для первого интервала (периода) на подынтервале $\gamma T \leq t \leq T$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \Phi_2(t - \gamma T) \Phi_1(\gamma T) \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t - \gamma T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma T & 1 & 0 \\ \frac{e^{-\alpha \gamma T} + \alpha \gamma T - 1}{\alpha} & 1 - e^{-\alpha \gamma T} & e^{-\alpha \gamma T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(0^+) \\ u_1(0^+) \\ x_1(0^+) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица монодромии

$$\begin{aligned} C \equiv \Phi(T) &= \Phi_2(T - \gamma T) \Phi_1(\gamma T) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 \\ \frac{e^{-\alpha \gamma T} + \alpha \gamma T - 1}{\alpha} & 1 - e^{-\alpha \gamma T} & e^{-\alpha \gamma T} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для любого основного интервала (периода) $nT \leq t \leq (n+1)T$ решения уравнений определяются на основании формулы (2.12); для подынтервалов $nT \leq t \leq (n+\gamma)T$ при замкнутом прерывателе

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ x_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t - nT & 1 & 0 \\ \frac{e^{-\alpha(t-nT)} + \alpha(t-nT) - 1}{\alpha} & 1 - e^{-\alpha(t-nT)} & e^{-\alpha(t-nT)} \end{bmatrix} \times \\ &\times C^n \begin{bmatrix} r_1 \\ r_0 \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (2.18)$$

для подынтервалов $(n+\gamma)T \leq t \leq (n+1)T$ при разомкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t - nT & 1 & 0 \\ \frac{e^{-\alpha \gamma T} + \alpha \gamma T - 1}{\alpha} & 1 - e^{-\alpha \gamma T} & e^{-\alpha \gamma T} \end{bmatrix} C^n \begin{bmatrix} r_1 \\ r_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

На рис. 2.6 изображены функция коммутации прерывателя $m(t)$, входное воздействие $u(t)$ и реакция системы $x(t) \equiv x_1$, вычисленная по формулам (2.18), (2.19) при параметрах системы $\alpha=10 \text{ с}^{-1}$, $\gamma=0,5$, $T=1\text{с}$, параметрах входного воздействия $r_0 = 0,5$ и $r_1=0,2$ и начальных условиях

$$v(0) = \begin{bmatrix} u_2(0^+) \\ u_1(0^+) \\ x_1(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

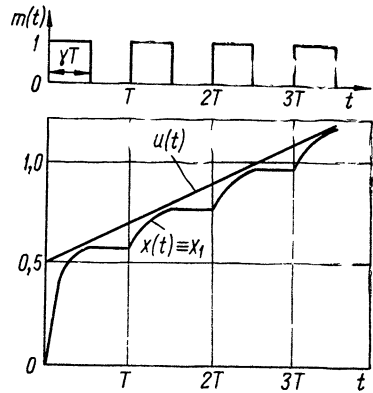


Рис. 2.6

6. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИ РАБОТАЮЩИМИ ПРЕРЫВАТЕЛЯМИ

Рассчитаем переходные процессы периодических импульсных систем, области устойчивости которых определены в гл.1. При параметрах систем, соответствующих границам областей устойчивости и неустойчивости, переходные процессы могут быть периодическими периода T , антипериодическими периода $2T$ функциями времени. Это характерно для периодически нестационарных систем. Переходные процессы зависят не только от входного воздействия, параметров прерывателя и непрерывной части системы, но и от того, в каком месте в системе находится прерыватель и в какой точке системы рассматриваются переходные процессы. Входное воздействие будем описывать в основном единичной ступенчатой функцией и рассматривать реакцию на выходе системы или функцию ошибки системы на выходе измерительного элемента.

Рассмотрим замкнутую импульсную систему с периодически работающим прерывателем (рис.2.7, а). Области устойчивости и неустойчивости этой системы показаны на рис. 1.4 и 1.5. Пусть на вход системы в момент $t_0=0$ поступает входной сигнал в виде единичной ступенчатой функции. Одна из возможных схем системы в переменных состояния (одна из возможных схем аналогового моделирования) изображена на рис.2.7,б. Процессы в системе описываются двумя уравнениями:

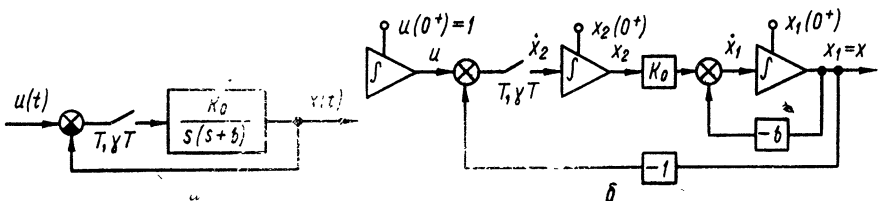


Рис. 2.7

в интервалах $nT < t \leq (n + \gamma)T$ при замкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & K_0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

в интервалах $(n + \gamma)T < t \leq (n + 1)T$ при разомкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & K_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Переходная матрица для первых интервалов

$$\Phi_1(\tau) = L^{-1} \{(sI - A_1)^{-1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - Q & A & K_0 B \\ G & -B & Q \end{bmatrix},$$

где коэффициенты

$$A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} - \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau});$$

$$B = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 \tau} - e^{\lambda_2 \tau});$$

$$Q = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_2 \tau} - \lambda_2 e^{\lambda_1 \tau});$$

$$G = \frac{1}{K_0} \left[b + \frac{1}{2\lambda} (\lambda_1^2 e^{\lambda_2 \tau} - \lambda_2^2 e^{\lambda_1 \tau}) \right];$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \lambda; \quad \lambda = \sqrt{\frac{b^2}{4} - K_0};$$

$$(\lambda_1 \lambda_2 = K_0; \lambda_1 + \lambda_2 = -b; \lambda_1 - \lambda_2 = 2\lambda).$$

Переходная матрица для вторых интервалов

$$\Phi_2(\tau) = L^{-1} \{(sI - A_2)^{-1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $D = e^{-b\tau}$; $E = \frac{K_0}{b} (1 - e^{-b\tau})$.

Введем в рассмотрение относительное время $\bar{t} = t/T = n + \varepsilon$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ и обозначим

$$\left. \begin{aligned} bT &= \kappa, \\ \lambda T &= T \sqrt{\frac{b^2}{4} - K_0} = z. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Для первого периода на интервале $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$

$$\mathbf{v}(\varepsilon) = \Phi_1(\varepsilon) \mathbf{v}(0), \quad \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} u(0^+) \\ x_1(0^+) \\ x_2(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - Q(\varepsilon) & A(\varepsilon) & K_0 B(\varepsilon) \\ G(\varepsilon) & -B(\varepsilon) & Q(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где коэффициенты A , B , Q и G являются функциями относительного времени ε ($0 \leq \varepsilon \leq \gamma$):

$$\left. \begin{aligned} A(\varepsilon) &= e^{-\frac{\kappa}{2}\varepsilon} \left[\cos(|z|\varepsilon) - \frac{\kappa}{2|z|} \sin(|z|\varepsilon) \right]; \\ B(\varepsilon) &= \frac{T}{|z|} e^{-\frac{\kappa}{2}\varepsilon} \sin(|z|\varepsilon); \\ Q(\varepsilon) &= e^{-\frac{\kappa}{2}\varepsilon} \left[\cos(|z|\varepsilon) + \frac{\kappa}{2|z|} \sin(|z|\varepsilon) \right]; \\ G(\varepsilon) &= \frac{T}{|z|^2 + \frac{\kappa^2}{4}} \left\{ \kappa - e^{-\frac{\kappa}{2}\varepsilon} \left[\kappa \cos(|z|\varepsilon) + \left(\frac{\kappa^2}{4|z|} - |z| \right) \sin(|z|\varepsilon) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} (2.21)$$

Выражения (2.21) справедливы при $K_0 \geq b^2/4$ ($K_0 T^2 \geq \kappa^2/4$), т. е. когда λ (а значит, и z) — мнимая величина. При этом $K_0 T^2 = |z|^2 + \kappa^2/4$. Для первого периода на интервале $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$, согласно формулам (2.6) и (2.7), имеем

$$\mathbf{v}(\varepsilon) = \Phi_2(\varepsilon - \gamma) \Phi_1(\gamma) \mathbf{v}(0),$$

или

$$\begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D(\varepsilon - \gamma) & E(\varepsilon - \gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - Q(\gamma) & A(\gamma) & K_0 B(\gamma) \\ G(\gamma) & -B(\gamma) & Q(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где коэффициенты D и E являются функциями относительного времени ε ($\gamma \leq \varepsilon \leq 1$):

$$\left. \begin{aligned} D(\varepsilon - \gamma) &= e^{-\kappa(\varepsilon - \gamma)}; \\ E(\varepsilon - \gamma) &= \frac{1}{\kappa T} \left(|z|^2 + \frac{\kappa^2}{4} \right) [1 - e^{-\kappa(\varepsilon - \gamma)}], \end{aligned} \right\} (2.22)$$

а коэффициенты A , B , Q , G определяются по формулам (2.21) при $\varepsilon = \gamma$ и от ε не зависят.

Матрица монодромии, согласно формуле (2.8),

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\equiv \Phi(1) = \Phi_2(1 - \gamma) \Phi_1(\gamma) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D(1 - \gamma) & E(1 - \gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - Q(\gamma) & A(\gamma) & K_0 B(\gamma) \\ G(\gamma) & -B(\gamma) & Q(\gamma) \end{bmatrix}, \end{aligned} (2.23)$$

где коэффициенты D и E находим по формулам (2.22) при $\varepsilon = 1$.

Для любого периода $n \leq t \leq n + 1$ решения уравнения (2.4) рассматриваемой системы определяются на основании полученной формулы (2.12):

для интервалов $n \leq \bar{t} \leq n + \gamma$ при замкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - Q(\varepsilon) & A(\varepsilon) & K_0 B(\varepsilon) \\ G(\varepsilon) & -B(\varepsilon) & Q(\varepsilon) \end{bmatrix} C^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

при $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$;

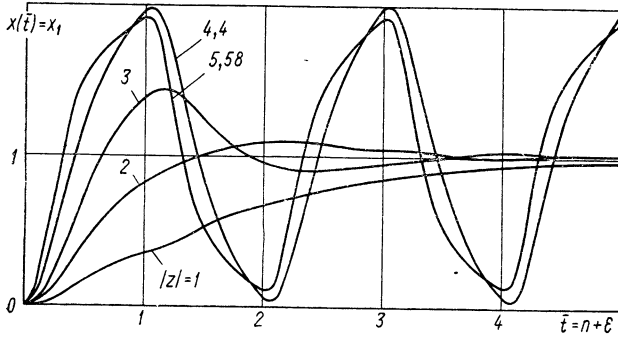


Рис. 2.8

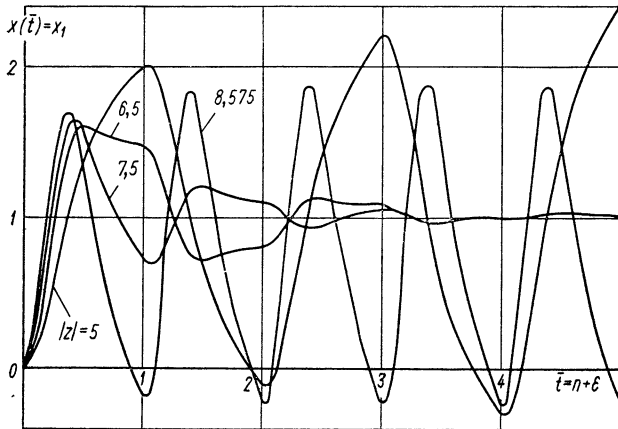


Рис. 2.9

для интервалов $n + \gamma \leq \bar{t} \leq n + 1$ при разомкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D(\varepsilon - \gamma) & E(\varepsilon - \gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - Q(\gamma) & A(\gamma) & K_0 B(\gamma) \\ G(\gamma) & -B(\gamma) & Q(\gamma) \end{bmatrix} \times \\ \times C^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

при $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$.

Рассчитанные по формулам (2.20)—(2.25) переходные процессы системы рис.2.7,а (реакции системы на единичное ступенчатое воздействие) $x(\bar{t}) \equiv x_1$ при параметрах системы $\gamma=0,5, \kappa=2$ и различных нормированных коэффициентах усиления $|z|$ изображены на рис. 2.8—2 10. Ранее были получены области устойчивости и неустойчивости системы (см.рис.1.4, а). При значениях $|z|$, равных 1, 2 и 3, система имеет затухающие переходные процессы (рис.2.8), а значениям $|z| \approx 4.4$ и $|z| \approx 5,58$ соответствуют периодические колебания периода $2T$ (антипериодические решения). При $|z|=5$ существуют возрастающие колебания (рис.2.9), а при $|z|$, равных 6,5 и 7,5, система снова имеет затухающие переходные процессы. Значению $|z|$, равному 8,575, соответствует периодическое колебание выходной величины с периодом T (периодическое решение). При $|z|=10$ имеют место возрастающие колебания (рис.2.10), а при $|z|=13$ — затухающие колебания. Значению $|z|$, равному 12, 29, соответствует периодическое колебание выходной величины с периодом T (периодическое решение).

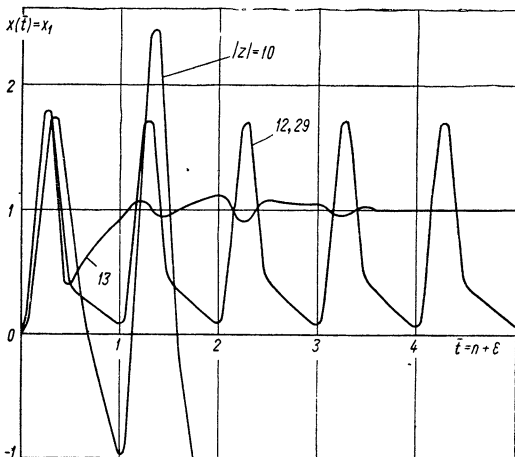


Рис. 2.10

Расчет переходных процессов системы рис. 2.7, а можно выполнить также по рекуррентным формулам:

$$\mathbf{v}(n, \varepsilon) = \Phi_1(\varepsilon) \mathbf{v}(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - Q(\varepsilon) & A(\varepsilon) & K_0 B(\varepsilon) \\ G(\varepsilon) & -B(\varepsilon) & Q(\varepsilon) \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) \quad (2.26)$$

при $0 \leq \varepsilon \leq \gamma, n = 0, 1, 2, \dots;$

$$\mathbf{v}(n + \gamma, \varepsilon) = \Phi_2(\varepsilon) \mathbf{v}(n + \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D(\varepsilon) & E(\varepsilon) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n + \gamma) \quad (2.27)$$

при $0 \leq \varepsilon \leq 1 - \gamma, n = 0, 1, 2, \dots$

В этом случае на каждом подынтервале последовательно вычисляем векторы $\mathbf{v}(n)$ и $\mathbf{v}(n + \gamma)$, определяющие начальные условия для последующих подынтервалов. Например, при параметрах системы $\gamma=0,5; T=1$ с; $K_0=5$ с⁻¹; $b=2$ с⁻¹ ($\kappa=2, |z|=2$) находим

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,41710 \\ 0,42203 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(1) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0,82033 \\ 0,42203 \end{bmatrix}; & \mathbf{v}(1 + \gamma) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,01508 \\ 0,45868 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{v}(2) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,09828 \\ 0,45868 \end{bmatrix}; & \mathbf{v}(2 + \gamma) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,08200 \\ 0,40912 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{v}(3) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,04458 \\ 0,40912 \end{bmatrix}; & \mathbf{v}(3 + \gamma) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,01488 \\ 0,39394 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

.....

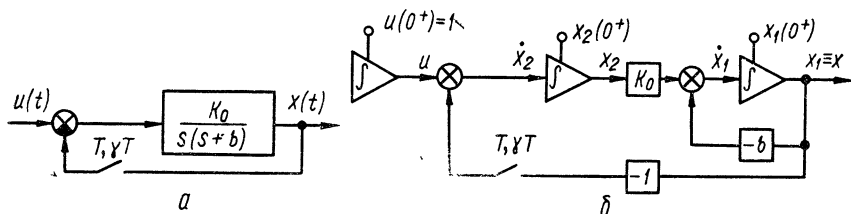


Рис. 2 11

Рассмотрим систему рис.2.11, а, в которой прерыватель включен в цепь обратной связи. Эта система отличается от системы рис.2.7, а только местом включения прерывателя в замкнутом контуре и, как нетрудно заметить, области устойчивости и неустойчивости для систем рис.2.7 и 2. 11 одни и те же. Но включение прерывателя в цепь обратной связи изменяет характер переходных процессов в системе.

Одна из возможных схем системы рис. 2.11, а в переменных состояния изображена на рис. 2.11, б. Процессы в системе в интервалах $nT < t \leq (n + \gamma)T$ при замкнутом прерывателе и переходная матрица для этих интервалов описываются теми же формулами, что и для системы рис. 2.7, а. Процессы же в интервалах $(n + \gamma)T \leq t \leq (n + 1)T$ при разомкнутом прерывателе определяются иначе:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & K_0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому переходная матрица для вторых интервалов имеет вид

$$\Phi_2(\tau) = L^{-1} \{(sI - A_2)^{-1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ H & D & E \\ \tau & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $H = \frac{K_0}{b^2} (b\tau - 1 + e^{-b\tau})$.

Решение для первого периода на интервале $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$

$$\begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ H(\varepsilon - \gamma) & D(\varepsilon - \gamma) & E(\varepsilon - \gamma) \\ T(\varepsilon - \gamma) & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - \dot{Q}(\gamma) & A(\gamma) & K_0 B(\gamma) \\ G(\gamma) & -B(\gamma) & Q(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где коэффициент $H(\varepsilon - \gamma)$ найдем из выражения

$$H(\varepsilon - \gamma) = \left(\frac{|z|^2}{\kappa} + \frac{\kappa}{4} \right) \left[\frac{e^{-\kappa(\varepsilon - \gamma)} - 1}{\kappa} + (\varepsilon - \gamma) \right], \quad (2.28)$$

коэффициенты D и E определяются по формулам (2.22), а коэффициенты A , B , Q и G — по формулам (2.21) при $\varepsilon = \gamma$ и от ε не зависят.

Матрица монодромии, согласно формуле (2.8),

$$C \equiv \Phi(1) = \Phi_2(1 - \gamma) \Phi_1(\gamma) = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ H(1 - \gamma) & D(1 - \gamma) & E(1 - \gamma) \\ T(1 - \gamma) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - Q(\gamma) & A(\gamma) & K_0 B(\gamma) \\ G(\gamma) & -B(\gamma) & Q(\gamma) \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Для любого основного периода $n \leq \bar{t} \leq n + 1$ решения уравнений вида (2.4) для рассматриваемой системы определяются на основании формулы (2.12): для интервалов $n \leq \bar{t} \leq n + \gamma$ при замкнутом прерывателе — по формуле (2.24); для интервалов $n + \gamma \leq \bar{t} \leq n + 1$ при разомкнутом прерывателе — по формуле

$$\begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ H(\varepsilon - \gamma) & D(\varepsilon - \gamma) & E(\varepsilon - \gamma) \\ T(\varepsilon - \gamma) & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - Q(\gamma) & A(\gamma) & K_0 B(\gamma) \\ G(\gamma) & -B(\gamma) & Q(\gamma) \end{bmatrix} C^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.30) \\ \text{при } \gamma \leq \varepsilon \leq 1.$$

Переходные процессы системы рис. 2.11, *a* можно рассчитать по рекуррентным формулам: для интервалов $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$, $n = 0, 1, 2, \dots$ по формуле (2.26); для интервалов $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$ — по формуле

$$v(n + \gamma, \varepsilon) = \Phi_2(\varepsilon) v(n + \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ H(\varepsilon) & D(\varepsilon) & E(\varepsilon) \\ T\varepsilon & 0 & 1 \end{bmatrix} v(n + \gamma) \quad (2.31) \\ \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq 1 - \gamma, n = 0, 1, 2, \dots$$

В этом случае на каждом подынтервале последовательно вычисляем векторы $v(n)$ и $v(n + \gamma)$, определяющие начальные условия для последующих подынтервалов. При параметрах системы $\gamma=0,5$, $T=1$ с, $K_0=5 \text{ с}^{-2}$, $b=2 \text{ с}^{-1}$ ($\kappa=2$, $|z|=2$) по формулам (2.26) и (2.31) находим

$$\begin{aligned}
 v(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & v(\gamma) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0,41710 \\ 0,42203 \end{bmatrix}; \\
 v(1) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,28023 \\ 0,92203 \end{bmatrix}; & v(1+\gamma) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,68640 \\ 0,63278 \end{bmatrix}; \\
 v(2) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2,08022 \\ 1,13278 \end{bmatrix}; & v(2+\gamma) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2,01333 \\ 0,55148 \end{bmatrix}; \\
 v(3) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2,07201 \\ 1,05148 \end{bmatrix}; & v(3+\gamma) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,90899 \\ 0,50618 \end{bmatrix}; \\
 v(4) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,96204 \\ 1,00618 \end{bmatrix}; & & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

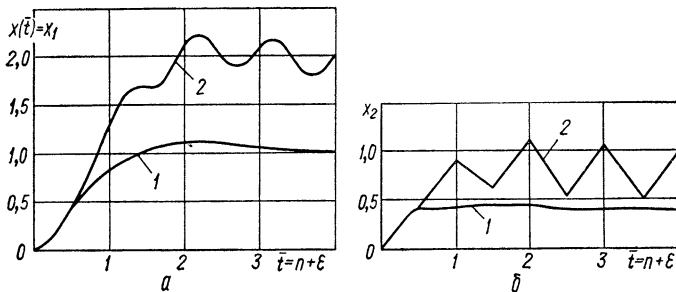


Рис. 2.12

Переходные процессы системы рис.2.11, *a* при указанных выше параметрах, рассчитанные по формулам (2.26), (2.28) — (2.31), изображены на рис.2.12 (кривые 2). На этих же рисунках показаны переходные процессы системы рис.2.7, *a* (кривые 1). Если система рис. 2.7, *a*, в которой прерыватель квантует сигнал ошибки, при входном воздействии типа единичного скачка имеет ошибку рассогласования $\Theta(\bar{t}) = 1 - x_1(\bar{t})$ только в переходном режиме, то система рис.2.11, *a*, в которой прерыватель квантует сигнал обратной связи, имеет большие ошибки как в переходном, так и в установившемся режимах. Для переменных состояния системы с прерывателем в цепи обратной связи характерно наличие незатухающих колебаний, т. е. величины $x_1(\bar{t})$

и $x_2(\bar{t})$ в установившемся режиме являются периодическими функциями времени даже в случаях, когда система не находится на границе устойчивости.

В некоторых случаях в замкнутую систему автоматического управления специально включают прерыватель для придания системе требуемых свойств, например устойчивости. Но наличие дополнительного прерывателя может ухудшить качество переходных процессов, привести к возрастанию ошибок в переходном и установившемся режимах. Поэтому важно исследовать переходные процессы таких систем.

Рассмотрим замкнутую импульсную систему рис. 2.13,а, которая отличается от системы рис.2.7,а непрерывной частью. Области устойчивости и неустойчивости такой системы приведены на рис.1.3. На вход системы в момент $t_0=0$ поступает сигнал в виде единичной ступенчатой функции. Одна из возможных схем аналогового моделирования системы изображена на рис.2.13,б. Процессы в системе описываются двумя уравнениями:

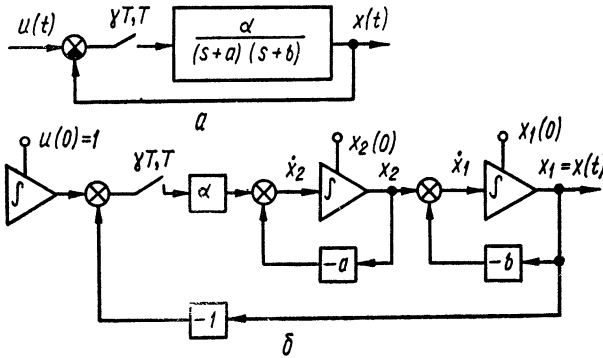


Рис. 2.13

чивости и неустойчивости такой системы приведены на рис.1.3. На вход системы в момент $t_0=0$ поступает сигнал в виде единичной ступенчатой функции. Одна из возможных схем аналогового моделирования системы изображена на рис.2.13,б. Процессы в системе описываются двумя уравнениями:

в интервалах $nT < t \leq (n + \gamma)T$ при замкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 1 \\ \alpha & -\alpha & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$

в интервалах $(n + \gamma)T < t \leq (n + 1)T$ при разомкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Переходная матрица для первых интервалов

$$\Phi_1(\tau) = L^{-1} \{ (sI - A_1)^{-1} \} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha G & A & B \\ \alpha (B + bG) & -\alpha B & C \end{bmatrix},$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[(\lambda_1 + a) e^{\lambda_1 \tau} - (\lambda_2 + a) e^{\lambda_2 \tau} \right]; \\
 B &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 \tau} - e^{\lambda_2 \tau}); \\
 C &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[(\lambda_1 + b) e^{\lambda_1 \tau} - (\lambda_2 + b) e^{\lambda_2 \tau} \right]; \\
 G &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left[1 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 e^{\lambda_1 \tau} - \lambda_1 e^{\lambda_2 \tau}) \right]; \\
 \lambda_{1,2} &= -\frac{a+b}{2} \pm \lambda; \quad \lambda = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} - \alpha}; \\
 (\lambda_1 \lambda_2 &= ab + \alpha; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -(a+b); \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2\lambda).
 \end{aligned}$$

Переходная матрица для вторых интервалов

$$\Phi_2(\tau) = L^{-1} \{ (sI - A_2)^{-1} \} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix},$$

где $D = e^{-b\tau}$; $H = e^{-a\tau}$; $E = -\frac{1}{a-b} (e^{-a\tau} - e^{-b\tau})$.

Введем в рассмотрение относительное время $\tilde{t} = t/T = n + \varepsilon$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, и обозначим

$$bT = \kappa, \quad \lambda T = z, \quad a/b = \eta \quad (aT = \eta\kappa). \quad (2.32)$$

Для первого периода на интервале $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$ имеем

$$\mathbf{v}(\varepsilon) = \Phi_1(\varepsilon) \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha G(\varepsilon) & A(\varepsilon) & B(\varepsilon) \\ \alpha \left[B(\varepsilon) + \frac{\kappa}{T} G(\varepsilon) \right] & -\alpha B(\varepsilon) & C(\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где коэффициенты A , B , C и G являются функциями относительного времени ε ($0 \leq \varepsilon \leq \gamma$):

$$\left. \begin{aligned}
 A(\varepsilon) &= e^{-(1+\eta)\frac{\kappa}{2}\varepsilon} \left[\frac{(\eta-1)\kappa}{2|z|} \sin(|z|\varepsilon) + \cos(|z|\varepsilon) \right]; \\
 B(\varepsilon) &= \frac{T}{|z|} e^{-(1+\eta)\frac{\kappa}{2}\varepsilon} \sin(|z|\varepsilon); \\
 C(\varepsilon) &= e^{-(1+\eta)\frac{\kappa}{2}\varepsilon} \left[\frac{(1-\eta)\kappa}{2|z|} \sin(|z|\varepsilon) + \cos(|z|\varepsilon) \right]; \\
 G(\varepsilon) &= \frac{4T^2}{(1+\eta)^2 \kappa^2 + 4|z|^2} \left\{ 1 - e^{-(1+\eta)\frac{\kappa}{2}\varepsilon} \left[\frac{(\eta+1)\kappa}{2|z|} \sin(|z|\varepsilon) + \cos(|z|\varepsilon) \right] \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Выражения (2.33) справедливы при $\alpha T^2 \geq (1-\eta)^2 \kappa^2 / 4$, т. е. когда λ (а значит, и z) — мнимая величина. При этом

$$\alpha T^2 = |z|^2 + \frac{(1-\eta)^2 \kappa^2}{4}.$$

Для первого периода на интервале $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} v(\varepsilon) &= \Phi_2(\varepsilon - \gamma) \Phi_1(\gamma) v(0) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D(\varepsilon - \gamma) & E(\varepsilon - \gamma) \\ 0 & 0 & H(\varepsilon - \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha G(\gamma) & A(\gamma) & B(\gamma) \\ \alpha [B(\gamma) + \frac{\kappa}{T} G(\gamma)] & -\alpha B(\gamma) & C(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где коэффициенты D , E , H являются следующими функциями относительного времени ε ($\gamma \leq \varepsilon \leq 1$):

$$\left. \begin{aligned} D(\varepsilon - \gamma) &= e^{-\kappa(\varepsilon - \gamma)}; \quad H = e^{-\eta \kappa(\varepsilon - \gamma)}; \\ E(\varepsilon - \gamma) &= \frac{T}{(1 - \eta)\kappa} [e^{-\eta \kappa(\varepsilon - \gamma)} - e^{-\kappa(\varepsilon - \gamma)}], \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

а коэффициенты A , B , C и G определяются по формулам (2.33) при $\varepsilon = \gamma$ и от ε не зависят.

Матрица монодромии, согласно формуле (2.8),

$$\begin{aligned} C \equiv \Phi(1) &= \Phi_2(1 - \gamma) \Phi_1(\gamma) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D(1 - \gamma) & E(1 - \gamma) \\ 0 & 0 & H(1 - \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha G(\gamma) & A(\gamma) & B(\gamma) \\ \alpha [B(\gamma) + \frac{\kappa}{T} G(\gamma)] & -\alpha B(\gamma) & C(\gamma) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где коэффициенты D , E , H находят по формулам (2.34) при $\varepsilon = 1$.

Для любого основного периода $n \leq \bar{t} \leq n + 1$ решения уравнений вида (2.4) для рассматриваемой системы определяются на основании формулы (2.12):

для интервалов $n \leq \bar{t} \leq n + \gamma$ при замкнутом прерывателе

$$\begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha G(\varepsilon) & A(\varepsilon) & B(\varepsilon) \\ \alpha [B(\varepsilon) + \frac{\kappa}{T} G(\varepsilon)] & -\alpha B(\varepsilon) & C(\varepsilon) \end{bmatrix} C^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

при $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$;

для интервалов $n + \gamma \leq \bar{t} \leq n + 1$ при разомкнутом прерывателе

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D(\varepsilon - \gamma) & E(\varepsilon - \gamma) \\ 0 & 0 & H(\varepsilon - \gamma) \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha G(\gamma) & A(\gamma) & B(\gamma) \\ \alpha [B(\gamma) + \frac{\kappa}{T} G(\gamma)] & -\alpha B(\gamma) & C(\gamma) \end{bmatrix} C^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

при $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$.

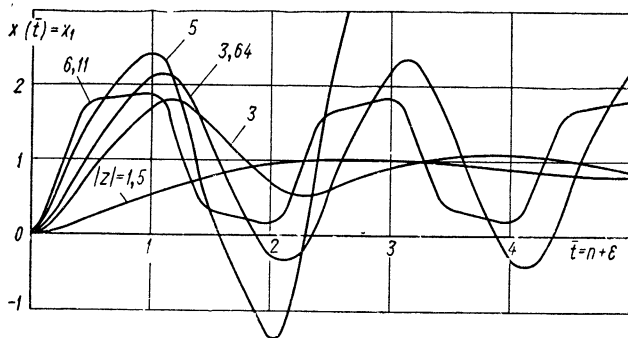


Рис. 2.14

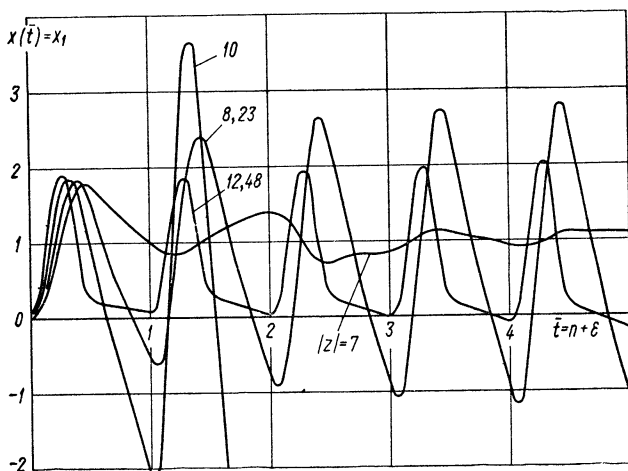


Рис. 2.15

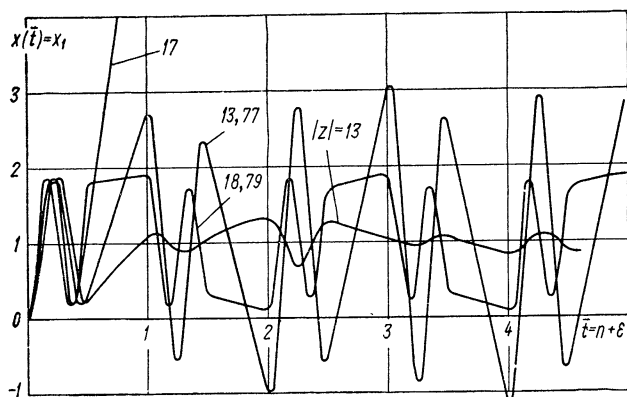


Рис. 2.16

Рассчитанные по формулам (2.32) — (2.37) переходные процессы системы рис. 2.13, а (реакции системы на единичное ступенчатое воздействие) $x(t) \equiv x_1$ при параметрах системы $T = 1$ с; $\gamma = 0,5$; $\kappa = 0,5$; $\eta = 1$ и различных нормированных коэффициентах усиления $|z|$ изображены на рис. 2.14—2.16.

При значениях $|z|$, равных 1,5 и 3, система имеет затухающие переходные процессы (рис. 2.14), значениям $|z| \approx 3,64$ и $|z| \approx 6,11$ соответствуют периодические колебания периода $2T$ (антипериодические решения), а $|z| = 5$ — возрастающие колебания.

При значении $|z| = 7$ система снова имеет затухающие колебания (рис. 2.15), значениям $|z| \approx 8,23$ и $|z| \approx 12,48$ соответствуют периодические колебания периода T (периодические решения), $|z| = 10$ — возрастающие колебания.

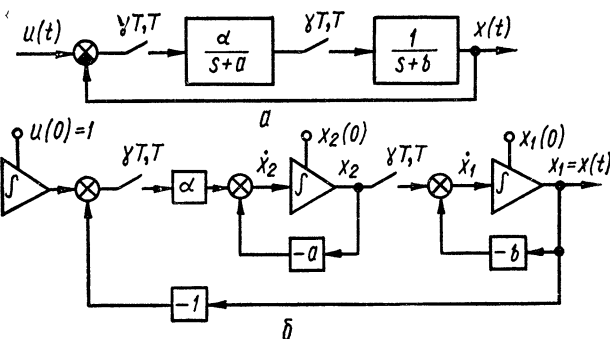


Рис. 2.17

При значении $|z| = 13$ система снова имеет затухающие колебания (рис. 2.16), а значениям $|z| \approx 13,77$ и $|z| \approx 18,79$ соответствуют периодические колебания периода $2T$ (антипериодические решения). При значении $|z| = 17$ система имеет возрастающие колебания.

Следует отметить, что переходные процессы в областях устойчивости при больших нормированных коэффициентах усиления (при значениях $6,11 \leq |z| \leq 8,23$ или $12,48 \leq |z| \leq 13,77$) имеют более плохое качество (большее перерегулирование, большую колебательность, большие ошибки рассогласования), чем процессы в первой области устойчивости ($0 \leq |z| \leq 3,64$).

На рис. 2.17, а показана система, которая отличается от рассмотренной системы рис. 2.13, а дополнительным прерывателем, работающим синхронно и синфазно с первым прерывателем. Система рис. 2.17, а является устойчивой при любом коэффициенте усиления α . Для определения переходных процессов системы рассмотрим схему ее аналогового моделирования (рис. 2.17, б). Из анализа схемы аналогового моделирования можно заключить, что все расчетные формулы, полученные выше для системы рис. 2.13, б, остаются справедливыми и для системы рис. 2.17, б, если в переходной матрице для вторых интервалов ($\gamma < \varepsilon < 1$) принять значение коэффициента E равным нулю; тогда в формулах (2.34) и (2.37) $E(\varepsilon - \gamma) = 0$ и в формуле (2.35) $E(1 - \gamma) =$

$= 0$. Рассчитанные по формулам (2.32) — (2.37) при указанных условиях переходные процессы системы рис. 2.17,а (реакции системы на единичное ступенчатое воздействие) $\bar{x}(t) \equiv x_1$ при параметрах системы $T = 1$ с; $\gamma = 0,5$; $\kappa = 0,5$; $\eta = 1$ и различных нормированных коэффициентах усиления $|z|$ изображены на рис.2.18 и 2.19. Из этих рисунков видно, что на границах областей неустойчивости и в областях неустойчивости системы рис. 2.13, а (в пределах $8,23 \leq |z| \leq 12,48$ и $13,77 \leq |z| \leq 18,79$) переходные процессы системы рис. 2.17, а являются затухающими, хотя и обладают весьма плохим качеством.

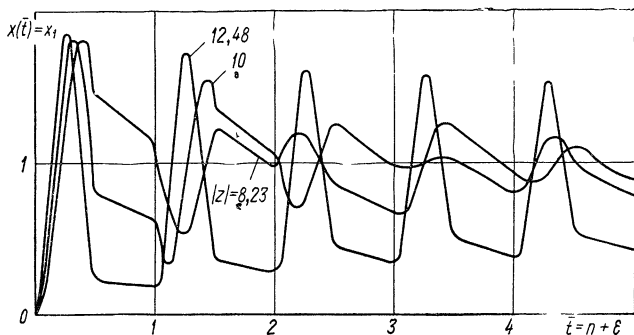


Рис. 2 18

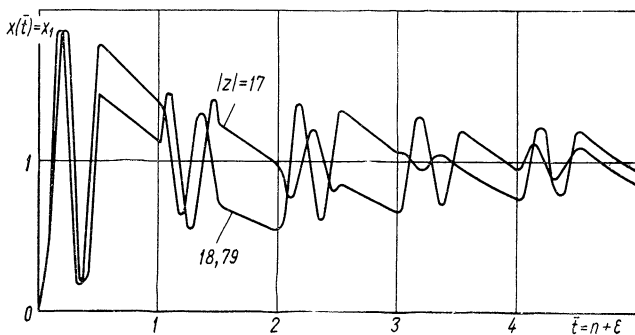


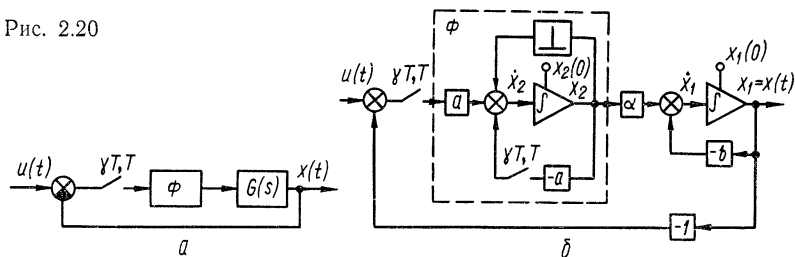
Рис. 2.19

Системы с фиксатором. В импульсных системах с конечным временем съема данных после прерывателя для уменьшения пульсаций на выходе системы включают фиксирующие цепи (запоминающие элементы). Хотя используются запоминающие элементы нулевого, первого и более высоких порядков, наибольшее распространение получили запоминающие элементы нулевого порядка (фиксаторы), которые величину входного импульса удерживают постоянной до прихода следующего импульса и, в отличие от запоминающих элементов более высоких порядков, просты и вводят наименьший фазовый сдвиг низкочастотного сигнала. В радиотехнических следящих системах с прерывателем роль фиксатора выполняют обычно пико-

вые детекторы со сбросом. Структурная схема такой системы с фиксатором показана на рис.2.20,а.

Пусть основной прерыватель замыкается периодически на интервалах $nT \leq t \leq (n + \gamma)T$, $n=0,1,2,\dots$, а передаточная функция непрерывной части $G(s)=\alpha/(s + b)$. Тогда схема аналогового моделирования системы имеет вид рис.2.20,б. На этой схеме фиксатор Φ в интервалах $nT \leq t \leq (n + \gamma)T$ при замкнутом прерывателе представлен апериодическим звеном с передаточной функцией $H(s)=a/(s + a)$, $a \gg 1/\gamma T$; в интервалах $(n + \gamma)T \leq t \leq (n + 1)T$ при разомкнутом прерывателе фиксатор является интегрирующим звеном (интегратором) с передаточной функцией $H(s)=1/s$; в моменты, непосредственно предшествующие моментам квантования nT , $n=0,1,2,\dots$, ин-

Рис. 2.20



тегратор охватывается единичной связью через простейший импульсный элемент (мгновенный ключ). Алгоритмическая схема такого фиксатора (рис.2.20,б) описывает работу пикового детектора со сбросом в предположении достаточно малой постоянной времени цепи заряда, бесконечно большой постоянной времени цепи разряда и бесконечно малой длительности импульсов сброса, разряжающих конденсатор пикового детектора перед приходом очередного импульса.

Из схемы аналогового моделирования рис.2.20,б (схемы системы в переменных состоянии) дифференциальные уравнения состояния при замкнутых прерывателях

$$\dot{u} = 0; \quad \dot{x}_1 = -bx_1 + \alpha x_2; \quad \dot{x}_2 = a(u - x_1 - x_2);$$

при разомкнутых прерывателях

$$\dot{x}_1 = -bx_1 + \alpha x_2; \quad \dot{x}_2 = 0.$$

Введем в рассмотрение расширенный вектор состояния

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

На основании дифференциальных уравнений, представленных в векторной форме $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\mathbf{v}$, матрицы \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 можно записать в виде

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & \alpha \\ a & -a & -a \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отличительной особенностью расчета рассматриваемой системы является учет уравнений переходных состояний $u(nT^+) = u(nT)$; $x_1(nT^+) = x_1(nT)$; $x_2(nT^+) = 0$. На основе этих уравнений можно записать матрицу переходных состояний (матрицу сброса)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Переходная матрица для интервалов замкнутого состояния прерывателей

$$\Phi_1(\tau) = L^{-1} \{[sI - A_1]^{-1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha\alpha G & A & \alpha B \\ a(B + bG) & -aB & C \end{bmatrix},$$

где

$$A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [(\lambda_1 + a)e^{\lambda_1\tau} - (\lambda_2 + a)e^{\lambda_2\tau}];$$

$$B = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1\tau} - e^{\lambda_2\tau});$$

$$C = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [(\lambda_1 + b)e^{\lambda_1\tau} - (\lambda_2 + b)e^{\lambda_2\tau}];$$

$$G = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \left[1 + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 e^{\lambda_1\tau} - \lambda_1 e^{\lambda_2\tau}) \right];$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a+b}{2} \pm \lambda; \quad \lambda = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} - \alpha\alpha}. \quad (\lambda_1\lambda_2 = a(b+\alpha));$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(a+b); \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2\lambda.$$

Переходная матрица для интервалов разомкнутого состояния прерывателей

$$\Phi_2(\tau) = L^{-1} \{[sI - A_2]^{-1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $D = e^{-b\tau}$; $E = \frac{\alpha}{b} (1 - e^{-b\tau})$.

Введем в рассмотрение относительное время $\bar{t} = t/T = n + \varepsilon$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, и обозначения (2.32). Тогда переходная матрица для интервалов замкнутого состояния прерывателей

$$\Phi_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\eta\kappa}{T} \alpha G(\varepsilon) & A(\varepsilon) & \alpha B(\varepsilon) \\ \frac{\eta\kappa}{T} [B(\varepsilon) + \frac{\kappa}{T} G(\varepsilon)] & -\frac{\eta\kappa}{T} B(\varepsilon) & C(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

где коэффициенты A , B , C и G определяются по формулам (2.33).

Формулы (2.33) в данном случае справедливы при условии, что $\alpha z > (a-b)^2/4$, т.е. когда λ (а значит, и z) — мнимая величина. При этом

$$\eta \kappa \alpha T = \frac{(\eta - 1)^2 \kappa^2}{4} + |z|^2. \quad (2.38)$$

Переходная матрица для интервалов разомкнутого состояния прерывателей

$$\Phi_2(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D(\varepsilon) & E(\varepsilon) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$D(\varepsilon) = e^{-\kappa \varepsilon}; \quad E(\varepsilon) = \frac{\alpha T}{\kappa} (1 - e^{-\kappa \varepsilon}). \quad (2.39)$$

Расчет переходных процессов системы удобно производить по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n^+) &= \mathbf{B}\mathbf{v}(n); \quad \mathbf{v}(n, \varepsilon) = \Phi_1(\varepsilon) \mathbf{v}(n^+) = \Phi_1(\varepsilon) \mathbf{B}\mathbf{v}(n) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\eta \kappa}{T} \alpha G(\varepsilon) & A(\varepsilon) & 0 \\ \frac{\eta \kappa}{T} \left[B(\varepsilon) + \frac{\kappa}{T} G(\varepsilon) \right] & -\frac{\eta \kappa}{T} B(\varepsilon) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) \quad (2.40) \\ &\text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \gamma; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n + \gamma, \varepsilon) &= \Phi_2(\varepsilon) \mathbf{v}(n + \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D(\varepsilon) & E(\varepsilon) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41) \\ &\text{при } 0 \leq \varepsilon \leq 1 - \gamma; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

На каждом подынтервале последовательно находят векторы $\mathbf{v}(n)$ и $\mathbf{v}(n + \gamma)$, определяющие начальные условия для последующих подынтервалов. Произведем расчет переходных процессов системы, имеющей следующие параметры: $T=1$ с; $\gamma=0,2$; $b=0,1$ с⁻¹; $a=50$ с⁻¹ ($\kappa=0,1$; $\eta=500$) и $\alpha \approx 14,45$ с⁻¹ ($|z|=10$). Полагаем начальные условия нулевыми. На вход системы воздействует единичный скачок. В результате последовательных расчетов находим векторы состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,98079 \\ 0,03451 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{v}(1) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1,28882 \\ 0,03451 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}(1^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,28882 \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$v(1 + \gamma) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,99535 \\ -0,00121 \end{bmatrix}; \quad v(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,90537 \\ -0,00121 \end{bmatrix};$$

$$v(2^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,90537 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots$$

На рис. 2. 21 показаны рассчитанные по формулам (2.40) и (2.41) переходные процессы системы рис. 2.20, б — реакция на выходе системы $x_1(\bar{t}) \equiv x_1$ и сигнал на выходе фиксатора $x_2(\bar{t})$ Для сравнения пункти-

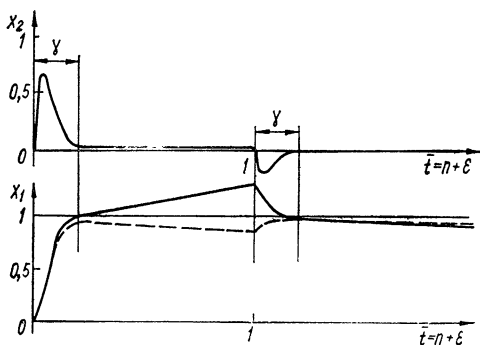


Рис. 2.21

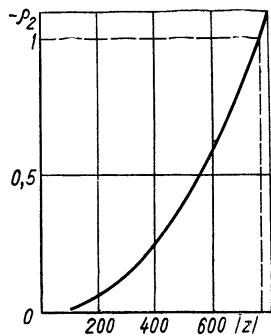


Рис. 2.22

ром изображена реакция системы без фиксатора с передаточной функцией непрерывной части, имеющей параметры $\alpha \approx 14,45 \text{ с}^{-1}$ и $b = 0,1 \text{ с}^{-1}$.

Рассмотрим устойчивость системы рис.2.20,б. Для этого найдем матрицу монодромии свободной системы при $u(t) \equiv 0$. Эта матрица определяется в виде

$$C = \begin{bmatrix} D(1 - \gamma) & E(1 - \gamma) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\gamma) & 0 \\ -\frac{\eta x}{T} B(\gamma) & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} D(1 - \gamma) A(\gamma) - \frac{\eta x}{T} E(1 - \gamma) B(\gamma) & 0 \\ -\frac{\eta x}{T} B(\gamma) & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $\det[C - \rho I] = 0$, или $\rho \left[\rho - D(1 - \gamma) A(\gamma) + \frac{\eta x}{T} E(1 - \gamma) B(\gamma) \right] = 0$.

Отсюда находим мультипликаторы системы

$$\rho_1 = 0; \quad \rho_2 = D(1 - \gamma) A(\gamma) - \frac{\eta x}{T} E(1 - \gamma) B(\gamma). \quad (2.42)$$

Поскольку мультипликатор ρ_1 равен нулю, то система устойчива, если $|\rho_2| < 1$. При $|\rho_2| > 1$ система неустойчива. При $|\rho_2| = 1$ система находится на границе устойчивости (совершает периодические колебания).

Из выражений (2.33), (2.38), (2.39) и (2.42) при $\kappa=0,1$ и $\eta=500$ находим

$$\rho_2 = e^{-5,09} \left[\frac{24,95}{|z|} \sin(0,2|z|) + \cos(0,2|z|) \right] - \frac{(49,9)^2 + 4|z|^2}{0,4|z|} (e^{-5,01} - e^{-5,09}) \sin(0,2|z|).$$

Зависимость $\rho_2 = f(|z|)$ показана на рис.2.22. Система с фиксатором имеет предельный коэффициент усиления $|z| \approx 780$. Система без фиксатора устойчива при любом коэффициенте усиления. Тот факт, что система с фиксатором имеет предельный коэффициент усиления, а при устранении фиксатора устойчива при любом коэффициенте усиления, свидетельствует о том, что устойчивость системы при введении фиксатора ухудшается. Динамические свойства фиксатора как звена системы автоматического управления подробно исследованы в работе [24].

7. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ СИСТЕМ. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА

Изложенный ниже эффективный численный метод расчета переходных процессов импульсных систем с конечным временем съема данных базируется на теории линейных периодических систем [12,27], методе пространства состояний [23] и приближенном методе численного интегрирования по формуле трапеций [11,29]. Этот метод применим к периодически нестационарным системам [11,31]. При использовании метода для определения переходных процессов в любом временном интервале достаточно с заданной точностью определить эти процессы для первого основного периода $0 \leq t \leq T$, где T — период матрицы коэффициентов исходного дифференциального уравнения системы.

Суть метода состоит в следующем. Пусть система (рис.2.23,а) имеет множительное устройство с периодической функцией коммутации $m(t)$. Известно, что такая система описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad (2.43)$$

где $\mathbf{A}(t)$ — периодическая матрица периода T , $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T)$.

Переходная матрица уравнения (2.43) удовлетворяет тождеству

$$\Phi(t + T) = \Phi(t) \Phi(T) = \Phi(t) \mathbf{C}, \quad (2.44)$$

где $\Phi(T) = \mathbf{C}$ — матрица монодромии.

Решение уравнения (2.43) имеет вид (полагаем $t_0=0$)

$$\mathbf{v}(t) = \Phi(t) \mathbf{v}_0. \quad (2.45)$$

Используя уравнение (2.44), запишем

$$\Phi(t + kT) = \Phi(t) C^k \quad (2.46)$$

и

$$\mathbf{v}(t + kT) = \Phi(t + kT) \mathbf{v}_0 = \Phi(t) C^k \mathbf{v}_0. \quad (2.47)$$

В формуле (2.47) $\Phi(t)$ — расширенная переходная матрица, которая характеризует одновременно изменение как переменных состояния процесса системы, так и входного воздействия, а вектор состояния определяется как

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{u}(t)$ — вектор, характеризующий входное воздействие; $\mathbf{x}(t)$ — вектор переменных состояния системы.

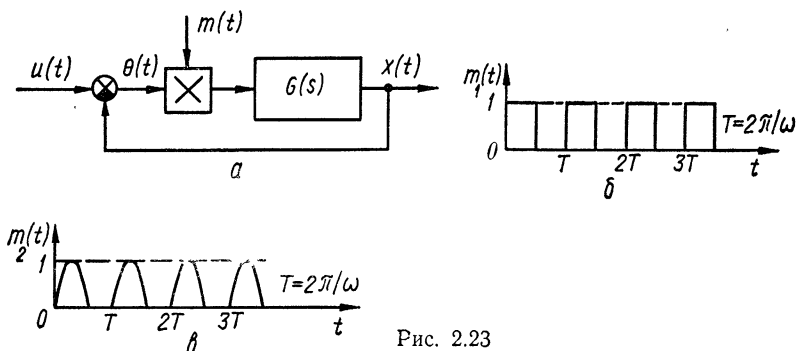


Рис. 2.23

Таким образом, определение переходного процесса сводится к вычислению расширенной переходной матрицы системы, т.е. к определению элементов a_{ij} переходной матрицы $\Phi(t)$ системы на первом основном периоде $0 \leq t \leq T$.

Известно, что a_{ij} есть реакция системы на единичное ступенчатое воздействие $v_j(0^+) = 1$ при нулевых начальных значениях остальных координат, измеряемая в точке формирования координаты v_i схемы системы в переменных состояния. Первый индекс в a_{ij} указывает координату, по которой измеряется реакция системы, а второй индекс — координату, по которой производится возбуждение системы. Таким образом, для вычисления элементов переходной матрицы необходимо составить схему системы в переменных состояния и вычислить реакцию системы в точках формирования координат при соответствующем возбуждении системы единичными ступенчатыми функциями.

Пусть система (рис.2.23,а) имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)} = \frac{K_0}{s(s+b)} \left(b = \frac{1}{T_1}; K_0 = Kb \right).$$

Тогда при входном воздействии типа единичного скачка схему системы в переменных состояния (схема аналогового моделирования) для определения элементов переходной матрицы можно представить в виде рис.2.24. Для такой схемы переходная матрица имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Значение элементов первого столбца матрицы можно определить, если выполнить начальные условия $u(0^+) = 1$; $x_1(0^+) = 0$; $x_2(0^+) = 0$.

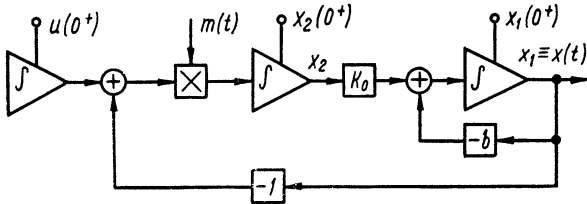


Рис. 2.24

Тогда

$$\left. \begin{aligned} a_{11}(t) &= u(t) = 1; \\ a_{21}(t) &= x_1(t) = \int_0^t [K_0 x_2(\tau) - b x_1(\tau)] d\tau; \\ a_{31}(t) &= x_2(t) = \int_0^t [1 - x_1(\tau)] m(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Значения элементов второго столбца матрицы $\Phi(t)$ можно определить, если выполнить начальные условия $u(0^+) = 0$; $x_1(0^+) = 1$; $x_2(0^+) = 0$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} a_{12}(t) &= u(t) = 0; \\ a_{22}(t) &= x_1(t) = 1 + \int_0^t [K_0 x_2(\tau) - b x_1(\tau)] d\tau; \\ a_{32}(t) &= x_2(t) = - \int_0^t x_1(\tau) m(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Наконец, значения элементов третьего столбца матрицы $\Phi(t)$ можно определить, если выполнить начальные условия $u(0^+) = 0$; $x_1(0^+) = 0$; $x_2(0^+) = 1$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} a_{13}(t) &= u(t) = 0; \\ a_{23}(t) &= x_1(t) = \int_0^t [K_0 x_2(\tau) - b x_1(\tau)] d\tau; \\ a_{33}(t) &= x_2(t) = 1 - \int_0^t x_1(\tau) m(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

Разбивая интервал интегрирования $[0, T]$ на n подынтервалов длительностью $h=T/n$ и применяя формулу трапеций, запишем следующие выражения. На основании уравнений (2.48)

$$\left. \begin{aligned} a_{21n} = x_{1n} &= hK_0 \left(\frac{1}{2} x_{20} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{2i} + \frac{1}{2} x_{2n} \right) - \\ &- hb \left(\frac{1}{2} x_{10} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{1i} + \frac{1}{2} x_{1n} \right); \\ a_{31n} = x_{2n} &= h \left(\frac{1}{2} m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} m_i + \frac{1}{2} m_n \right) - \\ &- h \left(\frac{1}{2} x_{10} m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_{1i} m_i + \frac{1}{2} x_{1n} m_n \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

На основании уравнений (2.49)

$$\left. \begin{aligned} a_{22n} = x_{1n} &= 1 + hK_0 \left(\frac{1}{2} x_{20} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{2i} + \frac{1}{2} x_{2n} \right) - \\ &- hb \left(\frac{1}{2} x_{10} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{1i} + \frac{1}{2} x_{1n} \right); \\ a_{32n} = x_{2n} &= -h \left(\frac{1}{2} x_{10} m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_{1i} m_i + \frac{1}{2} m_n \right); \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

На основании уравнений (2.50)

$$\left. \begin{aligned} a_{23n} = x_{1n} &= hK_0 \left[\frac{1}{2} x_{20} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{2i} + \frac{1}{2} x_{2n} \right] - \\ &- hb \left[\frac{1}{2} x_{10} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{1i} + \frac{1}{2} x_{1n} \right]; \\ a_{33n} = x_{2n} &= 1 - h \left(\frac{1}{2} x_{10} m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_{1i} m_i + \frac{1}{2} x_{1n} m_n \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Каждая система уравнений (2.51) — (2.53) имеет вид $b_{11}x_{1n} + b_{12}x_{2n} = c_1$; $b_{21}x_{1n} + b_{22}x_{2n} = c_2$, и решения x_{1n} и x_{2n} для этих систем вычисляются по известным формулам:

$$x_{1n} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_{12} \\ c_2 & b_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_{2n} = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & c_1 \\ b_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}}. \quad (2.54)$$

Определяя x_{1n} и x_{2n} для систем уравнений (2.51) — (2.53), находим значения всех элементов переходной матрицы

$$\Phi_n = \begin{vmatrix} a_{11n} & a_{12n} & a_{13n} \\ a_{21n} & a_{22n} & a_{23n} \\ a_{31n} & a_{32n} & a_{33n} \end{vmatrix}.$$

Матрица монодромии $\Phi_n(T) = C_n$ определяется элементами расширенной переходной матрицы Φ_n в момент времени $t = T$, а значения x_{1n} и x_{2n} в любые квантованные моменты времени — по формуле (2.46) на основании матрицы монодромии и значений переходной матрицы в соответствующие моменты квантования в первом основном периоде $0 \leq t \leq T$.

Переходные процессы линейных периодически нестационарных систем существенно зависят от функции переключения (перемножения) множительного устройства $m(t)$. Переходные процессы рассматриваемой системы рассчитаем для функций переключения

$$m_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } lT \leq t < (l + \gamma)T; \\ 0 & \text{при } (l + \gamma)T \leq t < (l + 1)T \end{cases}$$

и

$$m_2(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{при } lT \leq t < (l + \gamma)T; \\ 0 & \text{при } (l + \gamma)T \leq t < (l + 1)T, \end{cases}$$

изображенных на рис. 2.23, б, в ($\omega = 2\pi/T$; $\gamma = 0,5$; $l = 0, 1, 2, \dots$).

На рис. 2.25, а показаны рассчитанные по формулам (2.51) — (2.54) элементы переходной матрицы рассматриваемой системы, имеющей функцию переключения $m_1(t)$, параметры $\gamma = 0,5$; $T = 1$ с; $b = 2$ с⁻¹ и значения коэффициента K_0 , соответственно равные 10 и 20, 36. На рис. 2.26 показаны элементы матрицы перехода этой же системы, имеющей указанные выше параметры, но функцию перемножения $m_2(t)$. На рис. 2.27, а показаны переходные процессы системы для различных значений коэффициента K_0 и функции перемножения $m_1(t)$, на рис. 2.27, б — функции перемножения $m_2(t)$.

При расчетах шаг интегрирования выбирался равным 0,1 с (при $T = 1$ с; $n = 10$). Установлено, что дальнейшее уменьшение шага интегриро-

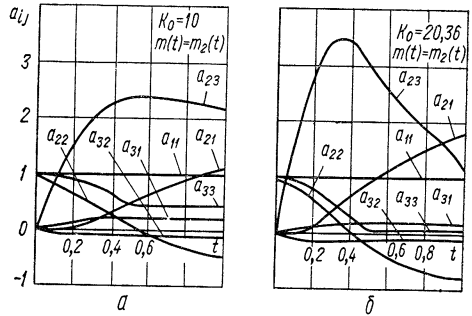


Рис. 2.25

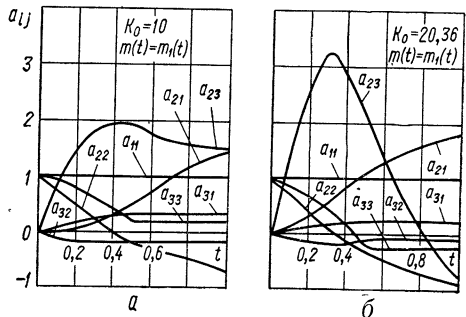


Рис. 2.26

вания не приводит к значительному увеличению точности полученных кривых. Результаты расчетов хорошо согласуются с результатами аналогового моделирования.

Качество процессов регулирования можно оценивать при помощи различных методов, в том числе при помощи интегральных показателей качества. Наиболее часто используются интегральные оценки вида

$$J_1 = \int_0^{\infty} \Theta(t) dt; \quad J_2 = \int_0^{\infty} \Theta^2(t) dt; \quad J_3 = \int_0^{\infty} [\Theta^2(t) + T_s^2 \dot{\Theta}^2(t)] dt.$$

Оценка J_1 для монотонного переходного процесса учитывает время регулирования и максимальное отклонение регулируемой величины.

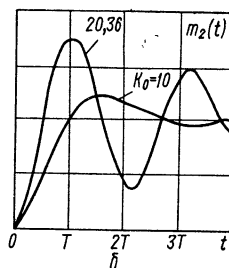
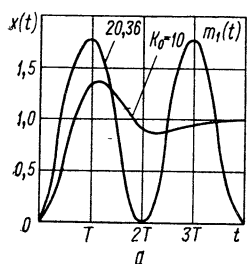


Рис. 2.27

Оценка J_2 используется для колебательных процессов при обработке скачкообразных входных воздействий, оценка J_3 — для получения плавных переходных процессов заданной длительности. Возможны и более сложные интегральные оценки. Для линейных систем эти интегральные оценки выражаются аналитически через параметры системы (или через коэффициенты характеристического уравнения системы).

Поскольку изложенный выше метод использует численное интегрирование и при его применении нет необходимости в отыскании аналитической зависимости интегральной оценки от параметров систем, то удобно выбрать линейную оценку качества

$$J = \int_0^{\infty} |\Theta(t)| dt, \quad (2.55)$$

где $\Theta(t)$ — свободная составляющая переходного процесса.

Такая оценка позволяет учитывать колебательность переходных процессов и является наиболее простой для метода численного интегрирования. В качестве критерия оптимизации параметров можно использовать не только линейную интегральную оценку вида (2.55), но и другие.

Свободная составляющая переходного процесса

$$\Theta(t) = x_1(\infty) - x_1(t),$$

где $x_1(t)$ — реакция системы на входное воздействие.

Для переходных процессов астатических систем с единичной обратной связью при входном воздействии в виде единичной ступенчатой

функции $\Theta(t) = 1 - x_1(t)$. Зная реакцию системы $x_1(t)$, можно определить и значение интеграла

$$J = \int_0^{\infty} |1 - x_1(t)| dt.$$

Применяя формулу трапеции с тем же шагом интегрирования, с которым рассчитан переходный процесс, вычисляем значение интегральной оценки качества переходных процессов

$$J = h \left(\frac{1}{2} |1 - x_{10}| + \sum_{i=1}^{n-1} |1 - x_{1i}| + \frac{1}{2} |1 - x_{1n}| \right).$$

Изменяя один из параметров системы, можно построить зависимость интегральной оценки J от этого параметра (например, $J = f(K)$)

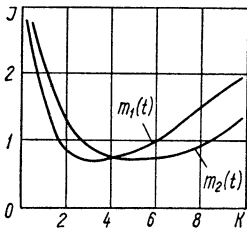


Рис. 2.28

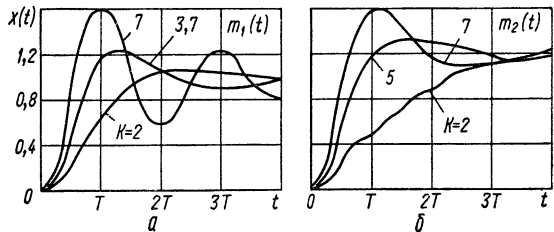


Рис. 2.29

или $J = f(T_1)$, где K — коэффициент усиления; T_1 — постоянная времени системы) и по минимальному значению J определить оптимальный параметр.

Переходные процессы линейных периодически нестационарных систем, а значит, и функции $J = f(K)$ и $J = f(T_1)$ существенно зависят от функций переключения (перемножения) $m(t)$ множительных устройств.

На рис. 2.28 показаны рассчитанные значения интегральной оценки $J = f(K)$ для рассмотренной системы с параметрами $T = 1$ с; $b = 1/T_1 = 2$ с⁻¹; $\gamma = 0,5$ и функциями переключения $m_1(t)$ и $m_2(t)$. Из рис. 2.28 следует, что для системы с указанными параметрами оптимальные коэффициенты усиления K равны $\approx 3,7$ при $m_1(t)$ и $K \approx 5$ при $m_2(t)$.

На рис. 2.29 построены графики переходных процессов системы для различных значений коэффициента усиления K ($K = K_0/b$) и функций переключения $m_1(t)$ и $m_2(t)$.

Определение переходных процессов систем через весовую функцию непрерывной части. Для системы рис. 1.7, а реакцию $x(t)$ на возмущающее воздействие $u(t) \neq 0$ можно записать в виде

$$x(t) = \int_0^t w(t - \lambda) \Theta(\lambda) m(\lambda) d\lambda,$$

где $\Theta(t)$ — ошибка системы на выходе измерительного элемента (перед

множительным устройством); $\omega(t)$ — весовая функция непрерывной части системы $\omega(t) = L^{-1}\{G(s)\}$.

Тогда ошибка системы

$$\Theta(t) = u(t) - \int_0^t \omega(t-\lambda) \Theta(\lambda) m(\lambda) d\lambda.$$

Разбивая интервал $(0, t)$ на n подынтервалов длительностью $h = t/n$ и применяя правило трапеции, находим

$$\Theta_n = u_n - h \left(\frac{1}{2} \omega_n \Theta_0 m_0 + \omega_{n-1} \Theta_1 m_1 + \omega_{n-2} \Theta_2 m_2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \omega_2 \Theta_{n-2} m_{n-2} + \omega_1 \Theta_{n-1} m_{n-1} + \frac{1}{2} \omega_0 \Theta_n m_n \right),$$

где $\omega_n = \omega(nh)$; $\Theta_n = \Theta(nh)$; $m_n = m(nh)$.

Из полученного выражения последовательно определяем

$$\Theta_0 = \frac{u_0}{1 + \frac{1}{2} h \omega_0 m_0};$$

$$\Theta_1 = \frac{u_1 - h \frac{1}{2} \omega_1 \Theta_0 m_0}{1 + \frac{1}{2} h \omega_0 m_1};$$

$$\Theta_2 = \frac{u_2 - h \left(\frac{1}{2} \omega_2 \Theta_0 m_0 + \omega_1 \Theta_1 m_1 \right)}{1 + \frac{1}{2} h \omega_0 m_2};$$

$$\Theta_3 = \frac{u_3 - h \left(\frac{1}{2} \omega_3 \Theta_0 m_0 + \omega_2 \Theta_1 m_1 + \omega_1 \Theta_2 m_2 \right)}{1 + \frac{1}{2} h \omega_0 m_3};$$

.

$$\Theta_n = \frac{u_n - h \left(\frac{1}{2} \omega_n \Theta_0 m_0 + \dots + \omega_1 \Theta_{n-1} m_{n-1} \right)}{1 + \frac{1}{2} h \omega_0 m_n}.$$

Для системы рис. 1.7, б реакцию $x(t)$ на возмущающее воздействие $u(t) \neq 0$ можно записать в виде

$$x(t) = \int_0^t \omega(t-\lambda) \Theta(\lambda) d\lambda,$$

где $\Theta(t) = u(t) - m(t)x(t)$, или $\Theta(t) = u(t) - m(t) \int_0^t \omega(t-\lambda) \Theta(\lambda) d\lambda$.

Разбивая интервал $(0, t)$ на n подынтервалов длительностью $h = t/n$ и применяя правило трапеции, находим

$$\Theta_n = u_n - hm_n \left(\frac{1}{2} \omega_n \Theta_0 + \omega_{n-1} \Theta_1 + \omega_{n-2} \Theta_2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \omega_2 \Theta_{n-2} + \omega_1 \Theta_{n-1} + \frac{1}{2} \omega_0 \Theta_n \right).$$

Из полученного выражения последовательно определяем

$$\Theta_0 = \frac{u_0}{1 + \frac{1}{2} hm_0 \omega_0};$$

$$\Theta_1 = \frac{u_1 - hm_1 \frac{1}{2} \omega_1 \Theta_0}{1 + \frac{1}{2} hm_1 \omega_0};$$

$$\Theta_2 = \frac{u_2 - hm_2 \left(\frac{1}{2} \omega_2 \Theta_0 + \omega_1 \Theta_1 \right)}{1 + \frac{1}{2} hm_2 \omega_0};$$

$$\Theta_3 = \frac{u_3 - hm_3 \left(\frac{1}{2} \omega_3 \Theta_0 + \omega_2 \Theta_1 + \omega_1 \Theta_2 \right)}{1 + \frac{1}{2} hm_3 \omega_0};$$

.

$$\Theta_n = \frac{u_n - hm_n \left(\frac{1}{2} \omega_n \Theta_0 + \dots + \omega_1 \Theta_{n-1} \right)}{1 + \frac{1}{2} hm_n \omega_0}.$$

Для большинства систем автоматического управления $\omega_0 = 0$. В этом случае ошибку рассогласования рассчитаем по следующим рекуррентным формулам:

для системы рис. 1.7, а

$$\Theta_n = u_n - h \left(\frac{1}{2} \omega_n \Theta_0 m_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{n-i} \Theta_i m_i \right); \quad (2.56)$$

для системы рис. 1.7, б

$$\Theta_n = u_n - hm_n \left(\frac{1}{2} \omega_n \Theta_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{n-i} \Theta_i \right). \quad (2.57)$$

В качестве примера вычислим функцию ошибки при единичном скачке входного воздействия

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$$

для системы рис. 1.7, а, имеющей

$$G(s) = \frac{K_0}{s(s+b)} = \frac{5}{s(s+2)}; \quad m(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } nT \leq t < (n+\gamma)T; \\ 0 & \text{при } (n+\gamma)T \leq t < (n+1)T; \end{cases}$$

$T = 1$ с; $\gamma = 0,5$; $n = 0, 1, 2, \dots$

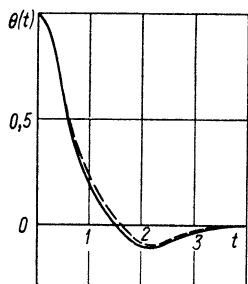


Рис. 2.30

Весовая функция непрерывной части системы

$$\omega(t) = L^{-1}\{G(s)\} = \frac{5}{2}(1 - e^{-2t}).$$

Для вычислений выбираем шаг h длительностью 0,1 с. Кривая ошибки рассогласования, вычисленная по формуле (2.56), изображена на рис. 2.30 пунктирной линией. Сплошной линией показана кривая ошибки, вычисленная точным методом. При уменьшении h пунктирная кривая сливается со сплошной линией.

Глава 3

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ СЪЕМА ДАННЫХ

8. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МАТРИЦЫ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Частотные характеристики импульсных систем с конечным временем съема данных можно получить на основе метода эквивалентных передаточных матриц для периодически нестационарных линейных систем [3,8]. Кратко рассмотрим основы метода.

Периодическая система отличается от обычной линейной стационарной системы наличием одного или нескольких синхронно работающих множительных устройств. Рассмотрим периодическую систему (рис. 3.1,а), структурная схема которой содержит последовательно включенные множительное устройство и линейную стационарную часть с передаточной функцией $G(s)$. Сигнал рассогласования в такой системе перемножается на периодическую функцию $m(t)$ множительного устройства. Если положить, что сигнал рассогласования содержит медленно изменяющуюся по сравнению с функцией $m(t)$ составляющую $\varepsilon(t)$, которую назовем постоянной составляющей, то сигнал на выходе множительного устройства записывается в виде произведения $\varepsilon(t) m(t)$ или, поскольку периодическую функцию $m(t)$ можно представить рядом Фурье, в виде

$$\frac{a_0}{2} \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon(t) \cos k\omega_n t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varepsilon(t) \sin k\omega_n t,$$

где ω_n — угловая несущая частота функции перемножения $m(t)$.

Таким образом, сигнал рассогласования на выходе множительного устройства представляется бесконечной суммой амплитудно-модулированных сигналов на прямых $\sin k\omega_{нt}$ и квадратурных $\cos k\omega_{нt}$ несущих. Известно, что установившаяся реакция линейной стационарной части на амплитудно-модулированный сигнал вида $A_k(t) \sin k\omega_{нt}$ имеет вид

$$B_k(t) \sin k\omega_{нt} + C_k(t) \cos k\omega_{нt},$$

реакция на сигнал $A_k(t) \cos k\omega_{нt}$

$$-C_k(t) \sin k\omega_{нt} + B_k(t) \cos k\omega_{нt}.$$

Связь между огибающими $B_k(t)$, $C_k(t)$ выходного сигнала и огибающей $A_k(t)$ входного сигнала описывается соответственно прямой $G_{прk}$ и квадратурной $G_{квk}$ эквивалентными (для огибающих) передаточными функциями линейной части, которые легко найти на основании обычной передаточной функции $G(s)$. Таким образом, в замкнутой системе на вход множительного устройства поступает сигнал

$$e_{вх}(t) = \sum_{h=0, 1, 2, \dots}^{\infty} \times [a_h(t) \sin h\omega_{нt} + b_h(t) \cos h\omega_{нt}]. \quad (3.1)$$

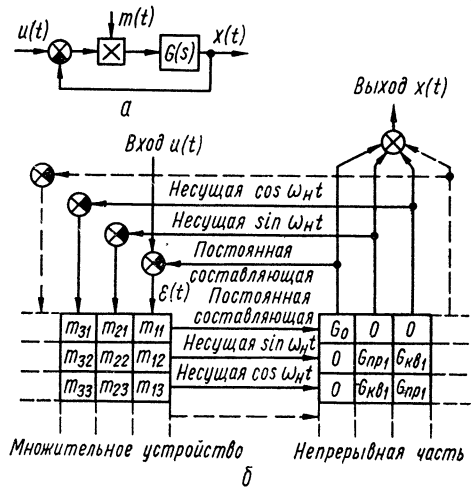


Рис. 3.1

Огибающие $a_h(t)$ и $b_h(t)$ можно представить преобразованиями Фурье

$$\left. \begin{aligned} a_h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_h(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega; \\ b_h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b_h(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где частотные изображения огибающих

$$\left. \begin{aligned} a_h(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} a_h(t) e^{-j\Omega t} dt; \\ b_h(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} b_h(t) e^{-j\Omega t} dt \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

(функции $a_h(t)$ и $b_h(t)$ предполагаются абсолютно интегрируемыми функциями времени;

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a_h(t)| dt < \infty \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} |b_h(t)| dt < \infty; \quad (3.4)$$

Ω — угловая частота огибающих.

Замкнутую систему (рис. 3.1, а) можно представить схемой (рис. 3.1, б), которая показывает циркуляцию амплитудно-модулированных сигналов. Эта схема описывает также преобразование системой огибающих на прямых $\sin k\omega_n t$ и квадратурных $\cos k\omega_n t$ несущих.

Если определить эквивалентную (для огибающих) передаточную матрицу множительного устройства M и эквивалентную передаточную матрицу стационарной линейной части G , то эквивалентная передаточная матрица разомкнутой системы (рис. 3.1, а)

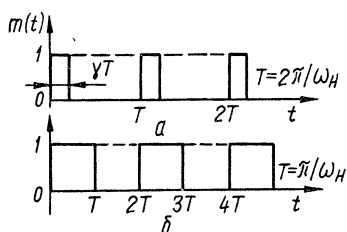
$$K_p = MG. \quad (3.5)$$

Эквивалентная передаточная матрица замкнутой системы

$$K_3 = [I + K_p]^{-1} K_p, \quad (3.6)$$

где I — единичная матрица. Матрица K_3 является исходной для анализа и расчета соответствующей периодической системы.

Рис. 3.2



В большинстве случаев линейная стационарная часть является фильтром нижних частот, поэтому часто достаточно учитывать, кроме постоянной составляющей, первые и вторые гармоники (на частотах ω_n или $2\omega_n$) для выявления всех основных свойств периодической (нестационарной) системы.

Импульсная система с конечным временем съема данных в качестве множительного устройства содержит прерыватель (ключ). Функция переключения $m(t)$ такого множительного устройства представляет собой последовательность прямоугольных импульсов (рис. 3.2, а) с различной относительной длительностью γ ; в частном случае $\gamma = 0,5$ (рис. 3.2, б).

Для множительного устройства с любой функцией переключения (рис. 3.2) можно определить связь между установившимся выходным сигналом $e_{\text{вых}}(t)$ и входным сигналом вида

$$e_{\text{вх}}(t) = \sum_{h=0, 1, 2, \dots}^8 (\sin \Omega t \sin h\omega_n t + \cos \Omega t \sin h\omega_n t + \sin \Omega t \cos h\omega_n t + \cos \Omega t \cos h\omega_n t). \quad (3.7)$$

Эта связь описывается бесконечной матрицей, hk -я 4×4 субматрица которой приведена в табл. 2.

2. hk -я 4×4 передаточная матрица множительного устройства или тракта с синхронными и множительными устройствами

Входные составляющие	Выходные составляющие			
	$\sin \Omega t \times \sin k\omega_H t$	$\cos \Omega t \times \sin k\omega_H t$	$\sin \Omega t \times \cos k\omega_H t$	$\cos \Omega t \times \cos k\omega_H t$
$\sin \Omega t \times \sin h\omega_H t$	A_{hk}	A'_{hk}	B_{hk}	B'_{hk}
$\cos \Omega t \times \sin h\omega_H t$	$-A'_{hk}$	A_{hk}	$-B'_{hk}$	B_{hk}
$\sin \Omega t \times \cos h\omega_H t$	C_{hk}	C'_{hk}	D_{hk}	D'_{hk}
$\cos \Omega t \times \cos h\omega_H t$	$-C'_{hk}$	C_{hk}	$-D'_{hk}$	D_{hk}

Используя матрицу (табл. 2), можно определить связь между установившимся выходным сигналом множительного устройства $e_{\text{вых}}(t)$ и входным сигналом вида

$$e_{\text{вх}}(t) = \sum_{h=0, 1, 2, \dots}^{\infty} \{a_h(j\Omega) e^{j\Omega t} \sin h\omega_H t + b_h(j\Omega) e^{j\Omega t} \cos h\omega_H t\}. \quad (3.8)$$

Эта связь описывается бесконечной матрицей, hk -я 2×2 субматрица которой приведена в табл. 3. На основании табл. 3, выражений (3.1) — (3.4), (3.8) и принципа суперпозиции установившуюся реакцию множительного устройства на входной сигнал вида (3.1) можно представить в виде

$$e_{\text{вых}}(t) = \sum_{h=0, 1, 2, \dots}^{\infty} \sum_{k=0, 1, 2, \dots}^{\infty} \{c_{hk}(t) \sin k\omega_H t + d_{hk}(t) \cos k\omega_H t\}. \quad (3.9)$$

Сравнивая выражения (3.1) и (3.9), замечаем, что табл. 3 описывает связь между огибающими, выраженными в комплексной форме, выходного и входного сигналов, т. е. дает математически точные выражения для эквивалентных (по огибающим) передаточных коэффициентов множительного устройства:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{пр}hk} &= \frac{c_{hk}(j\Omega)}{a_h(j\Omega)} = A_{hk} + jA'_{hk}; \\ P_{\text{кв}hk} &= \frac{d_{hk}(j\Omega)}{a_h(j\Omega)} = B_{hk} + jB'_{hk}; \\ P'_{\text{пр}hk} &= \frac{c_{hk}(j\Omega)}{b_h(j\Omega)} = C_{hk} + jC'_{hk}; \\ P'_{\text{кв}hk} &= \frac{d_{hk}(j\Omega)}{b_h(j\Omega)} = D_{hk} + jD'_{hk}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Эквивалентная передаточная матрица прерывателя с произвольной относительной длительностью замыкания γ . Для определения эквивалентной передаточной матрицы прерывателя следует вычислить

3. hk -я 2×2 эквивалентная передаточная матрица множительного устройства или тракта с синхронными множительными устройствами

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_H t$	$\cos k\omega_H t$
$\sin h\omega_H t$	$A_{hk} + jA'_{hk}$	$B_{hk} + jB'_{hk}$
$\cos h\omega_H t$	$C_{hk} + jC'_{hk}$	$D_{hk} + jD'_{hk}$

записанные в табл. 3 коэффициенты. Эти коэффициенты можно найти из установившейся реакции множительного устройства на входной сигнал вида (3.7). Из табл. 2 видно, что для определения всех коэффициентов достаточно найти реакцию множительного устройства только на сигналы $\sin \Omega t \sin h \times \omega_H t$ и $\sin \Omega t \cos h \omega_H t$. Сигналы на входе и выходе множительного устройства связаны соотношением $e_{\text{вых}}(t) = e_{\text{вх}}(t)m(t)$. Изображение по Лапласу, соответствующее этому выражению, на основании теоремы свертки в комплексной области

$$E_{\text{вых}}(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E_{\text{вх}}(p) M(s-p) dp, \quad (3.11)$$

где $E_{\text{вых}}(s) = L\{e_{\text{вых}}(t)\}$; $E_{\text{вх}}(s) = L\{e_{\text{вх}}(t)\}$.

Для прерывателя с произвольной относительной длительностью замыкания γ изображение по Лапласу функции переключения (рис. 3.2,а)

$$M(s) = L\{m(t)\} = \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s(1 - e^{-Ts})}; \quad T = 2\pi/\omega_H.$$

На основании выражения (3.11) можно, вычисляя интеграл, определить $E_{\text{вых}}(s)$ для различных функций $E_{\text{вх}}(s)$. Два необходимых соотношения приведены в табл. 4. Используя табл. 4, находим выходное напряжение переключателя для сигнала

$$e_{\text{вх}}(t) = \sin \Omega t \sin h\omega_H t = \frac{1}{2} [\cos(h\omega_H - \Omega)t - \cos(h\omega_H + \Omega)t]. \quad (3.12)$$

4. Соотношения между изображениями по Лапласу на входе и выходе прерывателя с произвольной длительностью замыкания

$E_{\text{вх}}(s)$	$E_{\text{вых}}(s)$	$E_{\text{вх}}(s)$	$E_{\text{вых}}(s)$
$\frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$	$\frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\Omega} \frac{1 - e^{-\gamma T(s-j\Omega)}}{1 - e^{-T(s-j\Omega)}} - \frac{1}{s + j\Omega} \frac{1 - e^{-\gamma T(s+j\Omega)}}{1 - e^{-T(s+j\Omega)}} \right]$	$\frac{s}{s^2 + \Omega^2}$	$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - j\Omega} \frac{1 - e^{-\gamma T(s-j\Omega)}}{1 - e^{-T(s-j\Omega)}} + \frac{1}{s + j\Omega} \frac{1 - e^{-\gamma T(s+j\Omega)}}{1 - e^{-T(s+j\Omega)}} \right]$

Получаем

$$E_{\text{вых}}(s) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{s - j(h\omega_H - \Omega)} \frac{1 - e^{-\gamma T[s - j(h\omega_H - \Omega)]}}{1 - e^{-T(s+j\Omega)}} + \dots \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{s+j(h\omega_H-\Omega)} \frac{1-e^{-\gamma T[s+j(h\omega_H-\Omega)]}}{1-e^{-T(s-j\Omega)}} - \frac{1}{s-j(h\omega_H+\Omega)} \times \\
& \times \left. \frac{1-e^{-\gamma T[s-j(h\omega_H+\Omega)]}}{1-e^{-T(s-j\Omega)}} - \frac{1}{s+j(h\omega_H+\Omega)} \frac{1-e^{-\gamma T[s+j(h\omega_H+\Omega)]}}{1-e^{-T(s+j\Omega)}} \right\}. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Определение оригинала $e_{\text{вых}}(t)$ связано с вычислением интегралов вида

$$\begin{aligned}
I_1(\Omega) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\{1-e^{-\gamma T[s-j(h\omega_H-\Omega)]}\} e^{st} ds}{[s-j(h\omega_H-\Omega)] [1-e^{-T(s+j\Omega)}]}; \\
I_2(\Omega) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\{1-e^{-\gamma T[s-j(h\omega_H-\Omega)]}\} e^{st} ds}{[s+j(h\omega_H-\Omega)] [1-e^{-T(s+j\Omega)}]}.
\end{aligned}$$

Интеграл $I_1(\Omega)$ имеет простые полюсы в точках $s = -j\Omega \pm j\omega_H k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Вычисление интеграла при $k \neq h$ приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned}
I_1(\Omega) &= \frac{\cos \Omega t - j \sin \Omega t}{\pi} \left\{ -\frac{1-e^{j2\pi\gamma h}}{j2h} - \right. \\
& - \sum_{k=1, 2, 3, \dots} \left[\frac{k \sin k\omega_H t}{h^2 - k^2} + \frac{h \cos k\omega_H t}{j(h^2 - k^2)} \right] + \\
& \left. + e^{j2\pi\gamma h} \sum_{k=1, 2, 3, \dots} \left[\frac{h \cos k\omega_H(t - \gamma T)}{j(h^2 - k^2)} + \frac{k \sin k\omega_H(t - \gamma T)}{h^2 - k^2} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Интеграл $I_2(\Omega)$ имеет простые полюсы в точках $s = j\Omega \pm j\omega_H k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Вычисление интеграла при $k \neq h$ приводит к следующему результату

$$\begin{aligned}
I_2(\Omega) &= \frac{\cos \Omega t + j \sin \Omega t}{\pi} \left\{ \frac{1-e^{-j2\pi\gamma h}}{j2h} - \right. \\
& - \sum_{k=1, 2, 3, \dots} \left[\frac{k \sin k\omega_H t}{h^2 - k^2} - \frac{h \cos k\omega_H t}{j(h^2 - k^2)} \right] + \\
& \left. + e^{-j2\pi\gamma h} \sum_{k=1, 2, 3, \dots} \left[\frac{k \sin k\omega_H(t - \gamma T)}{h^2 - k^2} - \frac{h \cos k\omega_H(t - \gamma T)}{j(h^2 - k^2)} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Переходя от изображений (3.13) к оригиналам, после сложных преобразований получаем

$$\begin{aligned}
e_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{4} [I_1(\Omega) + I_2(\Omega) - I_1(-\Omega) - I_2(-\Omega)] = \\
& = \frac{\sin \Omega t}{\pi} \left\{ \frac{1 - \cos 2\pi\gamma h}{2h} + \sum_{k=1, 2, 3, \dots} \frac{h \cos k\omega_H t}{h^2 - k^2} - \right. \\
& \left. - \frac{h \cos 2\pi\gamma h}{h^2 - k^2} \cos k\omega_H(t - \gamma T) + \frac{k \sin 2\pi\gamma h}{h^2 - k^2} \sin k\omega_H(t - \gamma T) \right\}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Изображение выходного сигнала прерывателя (ключа) для входного сигнала вида

$$e_{\text{вх}}(t) = \sin \Omega t \cos h\omega_H t = \frac{1}{2} [\sin (h\omega_H + \Omega) t - \sin (h\omega_H - \Omega) t] \quad (3.15)$$

на основании табл. 4 можно записать в виде

$$E_{\text{вых}}(s) = \frac{1}{4j} \left\{ \frac{1}{s-j(h\omega_H + \Omega)} \frac{1 - e^{-\gamma T[s-j(h\omega_H + \Omega)]}}{1 - e^{-\gamma T(s-j\Omega)}} - \frac{1}{s+j(h\omega_H + \Omega)} \times \right. \\ \times \frac{1 - e^{-\gamma T[s+j(h\omega_H + \Omega)]}}{1 - e^{-\gamma T(s+j\Omega)}} - \frac{1}{s-j(h\omega_H - \Omega)} \frac{1 - e^{-\gamma T[s-j(h\omega_H - \Omega)]}}{1 - e^{-\gamma T(s+j\Omega)}} + \\ \left. + \frac{1}{s+j(h\omega_H - \Omega)} \frac{1 - e^{-\gamma T[s+j(h\omega_H - \Omega)]}}{1 - e^{-\gamma T(s-j\Omega)}} \right\}. \quad (3.16)$$

Переходя от изображений (3.16) к оригиналам, после несложных преобразований получаем

$$e_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{4j} [I_1(-\Omega) - I_2(-\Omega) - I_1(\Omega) + I_2(\Omega)] = \\ = \frac{\sin \Omega t}{\pi} \left\{ \frac{\sin 2\pi\gamma h}{2h} - \sum_{k=1, 2, 3, \dots}^{\infty} \left[\frac{k \sin k\omega_H t}{h^2 - k^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{h \sin 2\pi\gamma h}{h^2 - k^2} \cos k\omega_H(t - \gamma T) - \frac{k \cos 2\pi\gamma h}{h^2 - k^2} \sin k\omega_H(t - \gamma T) \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Сравнивая выражения (3.12) и (3.14), а затем выражения (3.15) и (3.17), можно записать следующие формулы определения коэффициентов табл. 3 множительного устройства типа прерывателя (ключа) (при $k \neq h$):

$$A_{hk} = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{h}{h^2 - k^2} \cos 2\pi\gamma h \sin 2\pi\gamma k + \frac{k}{h^2 - k^2} \times \right. \\ \left. \times \sin 2\pi\gamma h \cos 2\pi\gamma k \right) = \gamma \left[\frac{\sin 2\pi\gamma(h-k)}{2\pi\gamma(h-k)} - \frac{\sin 2\pi\gamma(h+k)}{2\pi\gamma(h+k)} \right]; \\ B_{hk} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{h}{h^2 - k^2} - \frac{h}{h^2 - k^2} \cos 2\pi\gamma h \cos 2\pi\gamma k - \right. \\ \left. - \frac{k}{h^2 - k^2} \sin 2\pi\gamma h \sin 2\pi\gamma k \right) = \frac{h}{\pi(h^2 - k^2)} - \\ - \gamma \left[\frac{\cos 2\pi\gamma(h-k)}{2\pi\gamma(h-k)} + \frac{\cos 2\pi\gamma(h+k)}{2\pi\gamma(h+k)} \right], \quad k \neq 0; \\ B_{hk} = \frac{1 - \cos 2\pi\gamma h}{2\pi h}, \quad k = 0; \\ C_{hk} = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{k}{h^2 - k^2} + \frac{h}{h^2 - k^2} \sin 2\pi\gamma h \sin 2\pi\gamma k + \right. \\ \left. + \frac{k}{h^2 - k^2} \cos 2\pi\gamma h \cos 2\pi\gamma k \right) = -\frac{k}{\pi(h^2 - k^2)} + \\ + \gamma \left[\frac{\cos 2\pi\gamma(h-k)}{2\pi\gamma(h-k)} - \frac{\cos 2\pi\gamma(h+k)}{2\pi\gamma(h+k)} \right];$$

$$D_{hk} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{h}{h^2 - k^2} \sin 2\pi\gamma h \cos 2\pi\gamma k - \frac{k}{h^2 - k^2} \cos 2\pi\gamma h \sin 2\pi\gamma k \right] =$$

$$= \gamma \left[\frac{\sin 2\pi\gamma (h - k)}{2\pi\gamma (h - k)} + \frac{\sin 2\pi\gamma (h + k)}{2\pi\gamma (h + k)} \right], \quad k \neq 0;$$

$$D_{hk} = \frac{\sin 2\pi\gamma h}{2\pi\gamma h}, \quad k = 0;$$

$$A'_{hk} = B'_{hk} = C'_{hk} = D'_{hk} = 0.$$

Эквивалентную передаточную матрицу (табл. 3) безынерционного множительного устройства можно определить также следующим образом: подать на вход множительного устройства только прямые и квадратурные несущие $e_{\text{вх}}(t) = \sin h\omega_{\text{н}}t$ и $e_{\text{вх}}^*(t) = \cos h\omega_{\text{н}}t$, умножить эти несущие на функцию переключения $e_{\text{вых}}(t) = m(t) \sin h\omega_{\text{н}}t$ и $e_{\text{вых}}^*(t) = m(t) \cos h\omega_{\text{н}}t$, разложить функции $e_{\text{вых}}(t)$ и $e_{\text{вых}}^*(t)$ в ряды Фурье:

$$e_{\text{вых}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_{\text{н}}t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_{\text{н}}t;$$

$$e_{\text{вых}}^*(t) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \cos k\omega_{\text{н}}t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^* \sin k\omega_{\text{н}}t.$$

При этом

$$P_{\text{пр}hk} = b_k = \frac{2}{T} \int_0^T e_{\text{вых}}(t) \sin k\omega_{\text{н}}t dt;$$

$$P_{\text{кв}hk} = a_k = \frac{2}{T} \int_0^T e_{\text{вых}}(t) \cos k\omega_{\text{н}}t dt;$$

$$P'_{\text{пр}hk} = b_k^* = \frac{2}{T} \int_0^T e_{\text{вых}}^*(t) \sin k\omega_{\text{н}}t dt;$$

$$P'_{\text{кв}hk} = a_k^* = \frac{2}{T} \int_0^T e_{\text{вых}}^*(t) \cos k\omega_{\text{н}}t dt.$$

Для множительного элемента типа прерывателя (ключа) коэффициенты в разложении Фурье

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^{\gamma T} \sin h\omega_{\text{н}}t \sin k\omega_{\text{н}}t dt =$$

$$= \begin{cases} \gamma \left[\frac{\sin (h - k) 2\pi\gamma}{(h - k) 2\pi\gamma} - \frac{\sin (h + k) 2\pi\gamma}{(h + k) 2\pi\gamma} \right], & k \neq h; \\ \gamma \left[1 - \frac{\sin 4\pi\gamma h}{4\pi\gamma h} \right], & k = h; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^{\gamma T} \sin h\omega_H t \cos k\omega_H t dt = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[\frac{h}{h^2 - k^2} - \frac{\cos(h-k)2\pi\gamma}{2(h-k)} - \frac{\cos(h+k)2\pi\gamma}{2(h+k)} \right], & k \neq h; \\ \frac{1}{2\pi\gamma} \sin^2 2\pi\gamma h, & k = h; \end{cases} \\
 b_k^* &= \frac{2}{T} \int_0^{\gamma T} \cos h\omega_H t \sin k\omega_H t dt = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[-\frac{k}{h^2 - k^2} + \frac{\cos(h-k)2\pi\gamma}{2(h-k)} - \frac{\cos(h+k)2\pi\gamma}{2(h+k)} \right], & k \neq h; \\ \frac{1}{2\pi\gamma} \sin^2 2\pi\gamma h, & k = h; \end{cases} \\
 a_k^* &= \frac{2}{T} \int_0^{\gamma T} \cos h\omega_H t \cos k\omega_H t dt = \\
 &= \begin{cases} \gamma \left[\frac{\sin(h-k)2\pi\gamma}{(h-k)2\pi\gamma} + \frac{\sin(h+k)2\pi\gamma}{(h+k)2\pi\gamma} \right], & k \neq h; \\ \gamma \left[1 + \frac{\sin 4\pi\gamma h}{4\pi\gamma h} \right], & k = h. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Эквивалентная передаточная матрица прерывателя (ключа) с произвольной относительной длительностью замыкания γ приведена в табл. 5

5. hk -я 2×2 эквивалентная передаточная матрица прерывателя (ключа) с произвольной длительностью замыкания (при $h \neq k \neq 0$)

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_H t$	$\cos k\omega_H t$
$\sin h\omega_H t$	$ \Pi_{\text{пр}hk} = \gamma \left[\frac{\sin 2\pi\gamma(h-k)}{2\pi\gamma(h-k)} - \frac{\sin 2\pi\gamma(h+k)}{2\pi\gamma(h+k)} \right] $	$ \Pi_{\text{кв}hk} = \frac{h}{\pi(h^2 - k^2)} - \gamma \left[\frac{\cos 2\pi\gamma(h-k)}{2\pi\gamma(h-k)} + \frac{\cos 2\pi\gamma(h+k)}{2\pi\gamma(h+k)} \right] $
$\cos h\omega_H t$	$ \Pi'_{\text{пр}hk} = -\frac{k}{\pi(h^2 - k^2)} + \gamma \left[\frac{\cos 2\pi\gamma(h-k)}{2\pi\gamma(h-k)} - \frac{\cos 2\pi\gamma(h+k)}{2\pi\gamma(h+k)} \right] $	$ \Pi'_{\text{кв}hk} = \gamma \left[\frac{\sin 2\pi\gamma(h-k)}{2\pi\gamma(h-k)} + \frac{\sin 2\pi\gamma(h+k)}{2\pi\gamma(h+k)} \right] $

1. Примечания: 1. При $k = h \neq 0$ $\Pi_{\text{пр}hk} = \gamma \left[1 - \frac{\sin 4\pi\gamma h}{4\pi\gamma h} \right]$; $\Pi'_{\text{пр}hk} = \Pi_{\text{кв}hk} = \frac{\sin^2 2\pi\gamma h}{2\pi h}$; $\Pi'_{\text{кв}hk} = \gamma \left[1 + \frac{\sin 4\pi\gamma h}{4\pi\gamma h} \right]$. 2. При $k = h = 0$ $\Pi_{\text{пр}hk} = \Pi_{\text{кв}hk} = \Pi'_{\text{пр}hk} = 0$; $\Pi'_{\text{кв}hk} = \gamma$. 3. При $h \neq 0, k = 0$ $\Pi_{\text{пр}hk} = \Pi'_{\text{пр}hk} = 0$; $\Pi_{\text{кв}hk} = \frac{1 - \cos 2\pi\gamma h}{2\pi h}$; $\Pi'_{\text{кв}hk} = \frac{\sin 2\pi\gamma h}{2\pi h}$. 4. При $h = 0, k \neq 0$ $\Pi_{\text{пр}hk} = \Pi_{\text{кв}hk} = 0$; $\Pi'_{\text{пр}hk} = \frac{1 - \cos 2\pi\gamma k}{\pi k}$; $\Pi'_{\text{кв}hk} = \frac{\sin 2\pi\gamma k}{\pi k}$.

В системах автоматического управления прерыватели часто имеют относительную длительность замыкания γ , равную 0,5 (однополупериодный синхронный ключ). Функция переключения $m(t)$ прерывателя с относительной длительностью замыкания $\gamma = 0,5$ показана на рис. 3.2,б (для удобства расчетов период функции переключения в этом случае определяют как $T = \pi/\omega_h$; тогда в одном периоде ключ замкнут, в другом — разомкнут). Эквивалентная передаточная матрица прерывателя с относительной (по отношению к периоду $T = 2\pi/\omega_h$) длительностью замыкания $\gamma = 0,5$ приведена в табл. 6.

6. hk -я 2×2 эквивалентная передаточная матрица прерывателя с относительной длительностью замыкания $\gamma = 0,5$

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_h t$	$\cos k\omega_h t$
$\sin h\omega_h t$	$\Pi_{\text{пр}hk} = \frac{1}{2} \delta_{hk}$	$\Pi_{\text{кв}hk} = \frac{2}{\pi} \frac{h}{h^2 - k^2} \sigma_{hk} \quad (k \neq 0)$
$\cos h\omega_h t$	$\Pi'_{\text{пр}hk} = -\frac{2}{\pi} \frac{k}{h^2 - k^2} \sigma_{hk}$	$\Pi'_{\text{кв}hk} = \frac{1}{2} \delta_{hk}$

Примечания: 1. При $k = 0$ $\Pi_{\text{кв}hk} = \frac{1}{\pi h} \sigma_{h0}$.

2. δ_{hk} — символ Кронекера, $\delta_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{при } h = k; \\ 0 & \text{при } h \neq k. \end{cases}$

3. $\sigma_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{при } h = 0, 2, 4 \dots (h = 1, 3, 5 \dots), \\ & \text{но } k = 1, 3, 5, \dots (k = 0, 2, 4, \dots); \\ 0 & \text{при } h = 0, 2, 4, \dots (h = 1, 3, 5, \dots) \\ & \text{и } k = 0, 2, 4, \dots (k = 1, 3, 5, \dots). \end{cases}$

При первоначальном общем рассмотрении системы, содержащей множительное устройство, показано, что замкнутую систему рис. 3.1,а можно представить эквивалентной системой (рис. 3.1,б), в которой подробно изображена циркуляция амплитудно-модулированных гармонических составляющих сигналов, имеющихся в замкнутом контуре системы (рис. 3.1,а). Множительное устройство в системе рис. 3.1,б представлено в общем виде как матрица с элементами m_{ij} . Когда получены эквивалентные передаточные матрицы множительных устройств типа прерывателей (табл. 5 и 6), можно конкретно расписать

элементы матрицы множительного устройства, показанной на рис. 3.1,б. Сравнивая табл. 5 и 6 с матрицей множительного устройства на рис. 3.1, б, находим:

$$\begin{aligned} m_{11} &\equiv P'_{кв00}; \\ m_{21} &\equiv P_{кв10}; \quad m_{31} \equiv P'_{кв10}; \\ m_{12} &\equiv P'_{пр01}; \quad m_{13} \equiv P'_{кв01}; \\ m_{22} &\equiv P_{пр11}; \quad m_{23} \equiv P_{кв11}; \quad m_{32} \equiv P'_{пр11}; \quad m_{33} \equiv P'_{кв11} \end{aligned}$$

и так далее.

Эквивалентная передаточная матрица непрерывной части систем. С выхода множительного устройства на линейную непрерывную часть системы поступают амплитудно-модулированные сигналы на прямых и квадратурных несущих $\sin k\omega_{\text{н}}t$ и $\cos k\omega_{\text{н}}t$, где $k = 0, 1, 2 \dots$. Элементарный амплитудно-модулированный сигнал можно записать в виде

$$\begin{aligned} e(t) &= a(t) \sin k\omega_{\text{н}}t + b(t) \cos k\omega_{\text{н}}t = \\ &= a(t) \frac{e^{jk\omega_{\text{н}}t} - e^{-jk\omega_{\text{н}}t}}{2j} + b(t) \frac{e^{jk\omega_{\text{н}}t} + e^{-jk\omega_{\text{н}}t}}{2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Найдем эквивалентную передаточную матрицу непрерывной части системы, которая определяет эквивалентные (для огибающих на несущих $\sin k\omega_{\text{н}}t$ и $\cos k\omega_{\text{н}}t$) передаточные функции. Для этого рассмотрим преобразование элементарного сигнала вида (3.18) линейной непрерывной частью, имеющей обычную передаточную функцию $G(s)$. Используя теорему смещения в комплексной области, запишем изображение по Лапласу сигнала $e(t)$:

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{2j} [a(s - jk\omega_{\text{н}}) - a(s + jk\omega_{\text{н}})] + \frac{1}{2} [b(s - jk\omega_{\text{н}}) + \\ &\quad + b(s + jk\omega_{\text{н}})]. \end{aligned}$$

Изображение выходного сигнала $Z(s) = E(s)G(s)$. Переходя от изображений к оригиналам, получаем:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2j} [L^{-1}\{a(s - jk\omega_{\text{н}})G(s)\} - L^{-1}\{a(s + jk\omega_{\text{н}})G(s)\}] + \\ &\quad + \frac{1}{2} [L^{-1}\{b(s - jk\omega_{\text{н}})G(s)\} + L^{-1}\{b(s + jk\omega_{\text{н}})G(s)\}]. \end{aligned}$$

Используя вторично теорему смещения в комплексной области, найдем

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2j} [L^{-1}\{G(s + jk\omega_{\text{н}})a(s)\} e^{jk\omega_{\text{н}}t} - L^{-1}\{G(s - \\ &\quad - jk\omega_{\text{н}})a(s)\} e^{-jk\omega_{\text{н}}t}] + \frac{1}{2} [L^{-1}\{G(s + jk\omega_{\text{н}})b(s)\} e^{jk\omega_{\text{н}}t} + \\ &\quad + L^{-1}\{G(s - jk\omega_{\text{н}})b(s)\} e^{-jk\omega_{\text{н}}t}]. \end{aligned}$$

На основании свойства линейности преобразования Лапласа напишем последнее выражение в виде

$$z(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s + jk\omega_H) - G(s - jk\omega_H)}{2j} a(s) \right\} \cos k\omega_H t + \\ + L^{-1} \left\{ \frac{G(s + jk\omega_H) + G(s - jk\omega_H)}{2} a(s) \right\} \sin k\omega_H t + \\ + L^{-1} \left\{ \frac{G(s + jk\omega_H) + G(s - jk\omega_H)}{2} b(s) \right\} \cos k\omega_H t - \\ - L^{-1} \left\{ \frac{G(s + jk\omega_H) - G(s - jk\omega_H)}{2j} b(s) \right\} \sin k\omega_H t. \quad (3.19)$$

Поскольку входной сигнал (3.18) имеет вид:

$$e(t) = L^{-1} \{ a(s) \} \sin k\omega_H t + L^{-1} \{ b(s) \} \cos k\omega_H t, \quad (3.20)$$

то сравнивая выражения (3.19) и (3.20), запишем эквивалентную передаточную матрицу непрерывной части с передаточной функцией $G(s)$ в виде табл.7. В этой таблице в качестве аргумента комплексных эквивалентных передаточных функций для удобства расчетов использована относительная частота $K = \Omega / \omega_H$ (комплексная частота огибающих $s = j\Omega$).

7. Эквивалентная передаточная матрица непрерывной части с передаточной функцией $G(s)$

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_H t$	$\cos k\omega_H t$
$\sin k\omega_H t$	$G_{\text{пр } k}(jK) = \frac{G[j\omega_H(K+k)] + G[j\omega_H(K-k)]}{2}$	$G_{\text{кв } k}(jK) = \frac{G[j\omega_H(K+k)] - G[j\omega_H(K-k)]}{2j}$
$\cos k\omega_H t$	$G'_{\text{пр } k}(jK) = -G_{\text{кв } k}(jK)$	$G'_{\text{кв } k}(jK) = G_{\text{пр } k}(jK)$

8. Эквивалентная передаточная матрица звена с передаточной функцией $G(s) = a_v / (s + b_v)$

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_H t$	$\cos k\omega_H t$
$\sin k\omega_H t$	$\frac{a_v}{\omega_H} \frac{A_v + jK}{(A_v + jK)^2 + K^2}$	$-\frac{a_v}{\omega_H} \frac{k}{(A_v + jK)^2 + k^2}$
$\cos k\omega_H t$	$\frac{a_v}{\omega_H} \frac{k}{(A_v + jK)^2 + k^2}$	$\frac{a_v}{\omega_H} \frac{A_v + jK}{(A_v + jK)^2 + k^2}$

Примечание. $A_v = \beta_v / \pi = b_v / \omega_H$. $K = \Omega / \omega_H$.

9. Эквивалентная передаточная матрица звена с передаточной функцией $G(s) = a_v/s$

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_H t$	$\cos k\omega_H t$
$\sin k\omega_H t$	$\frac{a_v}{\omega_H} \frac{jK}{k^2 - K^2}$	$-\frac{a_v}{\omega_H} \frac{k}{k^2 - K^2}$
$\cos k\omega_H t$	$\frac{a_v}{\omega_H} \frac{k}{k^2 - K^2}$	$\frac{a_v}{\omega_H} \frac{jK}{k^2 - K^2}$

10. Эквивалентная передаточная матрица звена с передаточной функцией $G(s) = a_v/s^2$

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_H t$	$\cos k\omega_H t$
$\sin k\omega_H t$	$-\frac{a_v}{\omega_H^2} \frac{k^2 + K^2}{(k^2 - K^2)^2}$	$-j \frac{a_v}{\omega_H^2} \frac{2kK}{(k^2 - K^2)^2}$
$\cos k\omega_H t$	$j \frac{a_v}{\omega_H^2} \frac{2kK}{(k^2 - K^2)^2}$	$-\frac{a_v}{\omega_H^2} \frac{k^2 + K^2}{(k^2 - K^2)^2}$

Таким образом, зная обычную передаточную функцию $G(s)$, на основании табл.7 можно определить эквивалентную передаточную

11. Эквивалентная передаточная матрица звена с передаточной

функцией $G(s) = \frac{a_v}{\omega_H} s$

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_H t$	$\cos k\omega_H t$
$\sin k\omega_H t$	jKa_v	ka_v
$\cos k\omega_H t$	$-ka_v$	jKa_v

матрицу непрерывной части конкретной системы. Эквивалентные передаточные матрицы для некоторых динамических звеньев приведены в табл.8—11.

Поскольку передаточную функцию непрерывной части системы с астатизмом нулевого порядка можно представить в виде

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \sum_{v=1}^l \frac{a_v}{s + b_v}, \quad (3.21)$$

где

$$a_v = \frac{Q(s_v)}{P'(s_v)}; \quad s_v = -b_v,$$

передаточную функцию непрерывной части системы с астатизмом первого порядка — в виде

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \frac{1}{s} = \frac{a_0}{s} + \sum_{v=1}^l \frac{a_v}{s + b_v}, \quad (3.22)$$

где $a_0 = \frac{Q(0)}{P(0)}$; $a_v = \frac{Q(s_v)}{P'(s_v) s_v}$; $s_v = -b_v$,

а передаточную функцию непрерывной части системы с астатизмом второго порядка — в виде

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \sum_{v=2}^l \frac{a_v}{s + b_v}, \quad (3.23)$$

где $a_0 = \frac{d}{ds} \frac{Q(s)}{P(s)} \Big|_{s=0}$; $a_1 = \frac{Q(0)}{P(0)}$; $a_v = \frac{Q(s_v)}{P(s_v) s_v^2}$; $s_v = -b_v$,

то эквивалентные передаточные матрицы непрерывной части для таких систем можно найти путем простого суммирования матриц (табл. 8—11) с соответствующими коэффициентами a_v и параметрами β . В некоторых системах непрерывная часть описывается звеном второго порядка, например колебательным звеном. Эквивалентные передаточные матрицы для некоторых типовых звеньев второго порядка приведены в табл. 12—14.

Эквивалентные передаточные матрицы разомкнутой K_p и замкнутой K_s систем. Эквивалентная передаточная матрица системы (рис. 3.1, а) в разомкнутом состоянии определяется произведением матриц множительного устройства и линейной непрерывной части (см. формулу (3.5)). Эквивалентная передаточная матрица разомкнутой системы,

12. Эквивалентная передаточная матрица звена с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_H t$	$\cos k\omega_H t$
$\sin k\omega_H t$	$\frac{N}{2} \left[\frac{1}{N - (K+k)^2 + j(K+k)A} + \frac{1}{N - (K-k)^2 + j(K-k)A} \right] = G_{\text{пр } k}(jK)$	$G_{\text{кв } k}(jK) = \frac{N}{2j} \left[\frac{1}{N - (K+k)^2 + j(K+k)A} - \frac{1}{N - (K-k)^2 + j(K-k)A} \right]$
$\cos k\omega_H t$	$G'_{\text{пр } k}(jK) = -G_{\text{кв } k}(jK)$	$G'_{\text{кв } k}(jK) = G_{\text{пр } k}(jK)$

Примечание. $N = \omega_0^2 / \omega_H^2$; $A = 2\alpha / \omega_H$; $K = \omega / \omega_H$.

13. Эквивалентная передаточная матрица звена с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{2\alpha s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_H t$	$\cos k\omega_H t$
$\sin k\omega_H t$	$G_{\text{пр } k}(jK) =$ $= j \frac{A}{2} \left[\frac{(K+k)}{N - (K+k)^2 + j(K+k)A} + \frac{(K-k)}{N - (K-k)^2 + j(K-k)A} \right]$	$G_{\text{кв } k}(jK) =$ $= \frac{A}{2} \left[\frac{(K+k)}{N - (K+k)^2 + j(K+k)A} - \frac{(K-k)}{N - (K-k)^2 + j(K-k)A} \right]$
$\cos k\omega_H t$	$G'_{\text{пр } k}(jK) = -G_{\text{кв } k}(jK)$	$G'_{\text{кв } k}(jK) = G_{\text{пр } k}(jK)$

14. Эквивалентная передаточная матрица звена с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

Входные несущие	Выходные несущие	
	$\sin k\omega_H t$	$\cos k\omega_H (t)$
$\sin k\omega_H t$	$G_{\text{пр } k}(jK) =$ $= -\frac{1}{2} \left[\frac{(K+k)^2}{N - (K+k)^2 + j(K+k)A} + \frac{(K-k)^2}{N - (K-k)^2 + j(K-k)A} \right]$	$G_{\text{кв } k}(jK) =$ $= j \frac{1}{2} \left[\frac{(K+k)^2}{N - (K+k)^2 + j(K+k)A} - \frac{(K-k)^2}{N - (K-k)^2 + j(K-k)A} \right]$
$\cos k\omega_H t$	$G'_{\text{пр } k}(jK) = -G_{\text{кв } k}(jK)$	$G'_{\text{кв } k}(jK) = G_{\text{пр } k}(jK)$

имеющей множительное устройство или тракт с синхронными множительными устройствами, теоретически является бесконечной, т. е. в замкнутой системе циркулирует в общем случае бесконечно много гармоник. Однако непрерывная часть системы при правильном проектировании всегда соответствует фильтру нижних частот. Поэтому модули эквивалентных передаточных функций разомкнутой системы, которые определяются эквивалентной передаточной матрицей K_p , с ростом номера гармонических составляющих быстро уменьшаются по величине. Задача заключается в том, чтобы учесть высшие гармоники, которые существенно влияют на основную гармонику, циркулирующую в замкнутой системе. Оказывается, что при ограничении только двумя или тремя гармониками можно получить требуемые результаты.

Эквивалентная передаточная матрица замкнутой системы с единичной обратной связью (рис.3.1,а) находится по формуле (3.6), в которой K_p — эквивалентная передаточная матрица разомкнутой системы, определяющая математически точные эквивалентные (для огибающих) передаточные функции разомкнутой системы.

Операция обращения бесконечной матрицы $I + K_p$ (см. формулу (3.6)) является чрезвычайно сложной и требует определения бесконечного определителя. При расчете систем всегда можно использовать усеченную матрицу $I + K_p$ благодаря тому, что непрерывная часть системы обычно соответствует фильтру нижних частот. При использовании усеченной передаточной матрицы разомкнутой системы определить передаточную матрицу замкнутой системы просто. При необходимости можно расширить усеченную матрицу разомкнутой системы до любого требуемого количества элементов. Таким образом, можно оценить влияние любого количества гармонических составляющих на частотные характеристики системы в замкнутом состоянии или определить деформацию частотных характеристик системы для основной составляющей сигнала при наличии высших гармонических.

Если допустить, что в замкнутой системе циркулирует основная (на нулевой частоте) первая и вторая (соответственно на частотах ω_H и $2\omega_H$) прямые и квадратурные гармонические составляющие, то усеченную эквивалентную передаточную матрицу $I + K_p$ системы можно представить матрицей (табл. 15). Учитывая, что

$$K_3 = [I + K_p]^{-1}K_p = I - [I + K_p]^{-1},$$

эквивалентная передаточная матрица замкнутой системы имеет вид матрицы (табл. 16), где Δ_{mn} — алгебраические дополнения; Δ — главный определитель соответствующей матрицы $I + K_p$.

15. Усеченная эквивалентная передаточная матрица $I + K_p$

Входные несущие	Выходные несущие				
	Постоянная составляющая	$\sin \omega_H t$	$\cos \omega_H t$	$\sin 2\omega_H t$	$\cos 2\omega_H t$
Постоянная составляющая	$1 + a_{11}$	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
$\sin \omega_H t$	a_{21}	$1 + a_{22}$	a_{23}	a_{24}	a_{25}
$\cos \omega_H t$	a_{31}	a_{32}	$1 + a_{33}$	a_{34}	a_{35}
$\sin 2\omega_H t$	a_{41}	a_{42}	a_{43}	$1 + a_{44}$	a_{45}
$\cos 2\omega_H t$	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	$1 + a_{55}$

16. Усеченная эквивалентная передаточная матрица замкнутой системы с единичной обратной связью

Входные несущие	Выходные несущие				
	Постоянная составляющая	$\sin \omega_H t$	$\cos \omega_H t$	$\sin 2\omega_H t$	$\cos 2\omega_H t$
Постоянная составляющая	$c_{11} = 1 - \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$	$c_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta}$	$c_{13} = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta}$	$c_{14} = -\frac{\Delta_{41}}{\Delta}$	$c_{15} = -\frac{\Delta_{51}}{\Delta}$
$\sin \omega_H t$	$c_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta}$	$c_{22} = 1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta}$	$c_{23} = -\frac{\Delta_{32}}{\Delta}$	$c_{24} = -\frac{\Delta_{42}}{\Delta}$	$c_{25} = -\frac{\Delta_{52}}{\Delta}$
$\cos \omega_H t$	$c_{31} = -\frac{\Delta_{13}}{\Delta}$	$c_{32} = -\frac{\Delta_{23}}{\Delta}$	$c_{33} = 1 - \frac{\Delta_{33}}{\Delta}$	$c_{34} = -\frac{\Delta_{43}}{\Delta}$	$c_{35} = -\frac{\Delta_{53}}{\Delta}$
$\sin 2\omega_H t$	$c_{41} = -\frac{\Delta_{14}}{\Delta}$	$c_{42} = -\frac{\Delta_{24}}{\Delta}$	$c_{43} = -\frac{\Delta_{34}}{\Delta}$	$c_{44} = 1 - \frac{\Delta_{44}}{\Delta}$	$c_{45} = -\frac{\Delta_{54}}{\Delta}$
$\cos 2\omega_H t$	$c_{51} = -\frac{\Delta_{15}}{\Delta}$	$c_{52} = -\frac{\Delta_{25}}{\Delta}$	$c_{53} = \frac{\Delta_{35}}{\Delta}$	$c_{54} = -\frac{\Delta_{45}}{\Delta}$	$c_{55} = 1 - \frac{\Delta_{55}}{\Delta}$

При поступлении на вход замкнутой системы низкочастотных сигналов (спектр которых расположен около нулевой частоты), динамику работы замкнутой системы определяют только эквивалентные передаточные функции $c_{11}(jK) = 1 - \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$; $c_{12}(jK) = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta}$; $c_{13}(jK) = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta}$, ...

Эквивалентные передаточные функции замкнутой системы для входных прямых и квадратурных сигналов на первой, второй и высших гармониках несущей частоты определяют режимы работы системы при воздействии нежелательных помех, поступающих на вход замкнутой системы на различных частотах, кратных несущей частоте.

Хотя определить матрицу K_3 с учетом более высоких гармонических составляющих, чем вторая, просто, в подавляющем большинстве случаев вполне достаточно знать матрицу (табл.16), описывающую циркуляцию в системе, кроме основной, первых и вторых гармонических составляющих, или даже достаточно знать более простую матрицу (выделена в табл.16 двойной линией), описывающую циркуляцию, кроме основной, только первых (прямой и квадратурной) гармонических составляющих.

Очевидно, что эквивалентная передаточная функция $\tilde{K}_p^{(0)}(jK) = a_{11}$ (табл. 15) представляет собой передаточную функцию $K_p(jK)$ разомкнутой системы, в которой нет циркуляции высших гармонических составляющих. Передаточная функция замкнутой системы $K_3(jK)$ без циркуляции высших гармонических составляющих $c_{11}^{(0)}(jK) = a_{11}/(1 + a_{11})$.

Основная эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы с учетом циркуляции основной и первых (прямой и квадратурной) гармоник, полученная на основе матрицы, выделенной в табл. 15 двойной линией,

$$\tilde{K}_p^{(1)}(jK) = a_{11} + a_{12} \frac{\Delta_{12}^{(1)}}{\Delta_{11}^{(1)}} + a_{13} \frac{\Delta_{13}^{(1)}}{\Delta_{11}^{(1)}} = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta_{11}^{(1)}} - 1.$$

Соответствующая функции $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ эквивалентная передаточная функция замкнутой системы

$$c_{11}^{(1)}(jK) = 1 - \frac{\Delta_{11}^{(1)}}{\Delta^{(1)}}.$$

Основная эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы с учетом циркуляции основной, первых и вторых (прямых и квадратурных) гармоник, полученная на основе матрицы табл. 15,

$$\tilde{K}_p^{(2)}(jK) = a_{11} + a_{12} \frac{\Delta_{12}^{(2)}}{\Delta_{11}^{(2)}} + a_{13} \frac{\Delta_{13}^{(2)}}{\Delta_{11}^{(2)}} + a_{14} \frac{\Delta_{14}^{(2)}}{\Delta_{11}^{(2)}} + a_{15} \frac{\Delta_{15}^{(2)}}{\Delta_{11}^{(2)}} = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta_{11}^{(2)}} - 1.$$

Соответствующая функции $K_p^{(2)}(jK)$ эквивалентная передаточная функция замкнутой системы

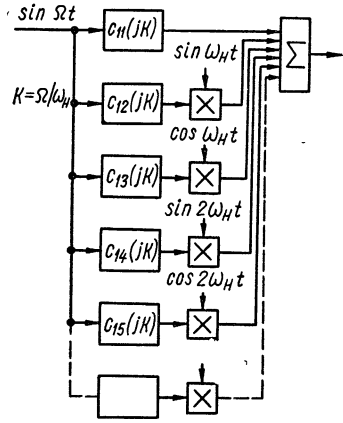
$$c_{11}^{(2)}(jK) = 1 - \frac{\Delta_{11}^{(2)}}{\Delta^{(2)}}.$$

Функции $\tilde{K}_p^{(N)}(jK)$ и $c_{11}^{(N)}(jK)$ при $N \neq 0$, где N — номер усечения матрицы $I + K_p$, учитывают влияние высших гармонических составляющих на основные частотные характеристики системы. Используя основную эквивалентную передаточную функцию $\tilde{K}_p^{(N)}(jK)$ можно обычными для стационарных линейных систем методами определять устойчивость замкнутых автоматических систем с синхронными множительными устройствами.

При этом частотные критерии устойчивости для функции $\tilde{K}_p^{(N)} \times (jK)$, например критерий Найквиста—Михайлова, формулируются обычным образом. Функция $\tilde{K}_p^{(N)}(jK)$ позволяет также определить запас устойчивости по амплитуде (модулю), запас устойчивости по фазе, а по функции $c_{11}^{(N)}(jK)$ можно определить показатель колебательности $M_{\text{рез}}$, относительное значение резонансной частоты $K_{\text{рез}} = \Omega_{\text{рез}}/\omega_n$. Однако для полного исследования качества системы с синхронными множительными устройствами необходимо рассмотреть эквивалентную передаточную матрицу K_s , которая дает полное описание таких систем.

Структурная схема замкнутой системы (рис.3.1,а) при поступлении на ее вход низкочастотных сигналов $x(t)$, спектр которых расположен ниже несущей частоты ω_n , показана на рис. 3.3. Вместо множительного устройства или тракта с синхронными множительными устройствами имеются $2N + 1$ (N — номер усечения матрицы

K_p) множительных устройств. Отличие заключается в том, что эти множительные устройства находятся вне замкнутого контура. Задача анализа системы (рис.3.3) сводится к определению эквивалентных передаточных функций $c_{mn}(jK)$. Основные эквивалентные передаточные функции



$$c_{11}^{(N)}(jK) = 1 - \frac{\Delta_{11}^{(N)}}{\Delta^{(N)}} \quad (3.24)$$

и

$$\tilde{K}_p^{(N)}(jK) = \frac{\Delta^{(N)}}{\Delta_{11}^{(N)}} - 1 \quad (3.25)$$

определяют передаточные функции «эквивалентной системы постоянного тока» соответственно в замкнутом и разомкнутом состояниях, причем эти передаточные функции получаются с учетом циркуляции в замкнутом контуре системы, содержащие множительное устройство (прерыватель), $(2N + 1)$ гармонических составляющих.

Рис. 3.3

9. РАСЧЕТ СИСТЕМ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Применение метода эквивалентных передаточных матриц для исследования замкнутых автоматических систем с конечным временем сема данных рассмотрим на примере расчета замкнутой системы со множительным устройством типа синхронного прерывателя, структурная схема которой показана на рис.3.1,а. Допустим, что непрерывная часть системы описывается передаточной функцией

$$G(s) = \frac{K_0}{s(s+b_v)} = \frac{\alpha}{s} - \frac{\alpha}{s+b_v}, \quad (3.26)$$

где $\alpha = K_0/b_v = K_v$, а синхронный прерыватель замыкается ровно на полупериоды несущей частоты, т. е. передаточная матрица прерывателя определяется табл.6. Передаточная матрица прерывателя является бесконечной. При расчетах учитываем в замкнутом контуре системы постоянную, первые и вторые (прямые и квадратные) гармонические составляющие. Тогда синхронный прерыватель с функцией переключения $m(t)$, показанной на рис.3.2,б, описывается усеченной 5×5 передаточной матрицей табл.17, которая получается непосредственно из табл.6 при h и k , равных 0; 1; 2. Усеченная 5×5 эквивалентная передаточная матрица непрерывной части записана из табл.7 при k , равных 0; 1; 2. Для передаточной функции непрерывной части, определяемой формулой (3.26), усеченная эквивалентная передаточная матрица находится непосредственно из табл. 8 и 9 и получается в виде табл.18,

17. Усеченная эквивалентная передаточная матрица однополупериодного синхронного прерывателя

Входные несущие	Выходные несущие				
	Постоянная составляющая	$\sin \omega_H t$	$\cos \omega_H t$	$\sin 2\omega_H t$	$\cos 2\omega_H t$
Постоянная составляющая	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	0	0	0
$\sin \omega_H t$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{2}{3\pi}$
$\cos \omega_H t$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3\pi}$	0
$\sin 2\omega_H t$	0	0	$\frac{4}{3\pi}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos 2\omega_H t$	0	$-\frac{2}{3\pi}$	0	0	$\frac{1}{2}$

18. Усеченная эквивалентная передаточная матрица непрерывной части

Входные несущие	Выходные несущие				
	Постоянная составляющая	$\sin \omega_H t$	$\cos \omega_H t$	$\sin 2\omega_H t$	$\cos 2\omega_H t$
Постоянная составляющая	$a + jb$	0	0	0	0
$\sin \omega_H t$	0	$c + jd$	$e + jg$	0	0
$\cos \omega_H t$	0	$-(e + jg)$	$e + jd$	0	0
$\sin 2\omega_H t$	0	0	0	$u + jq$	$p + jv$
$\cos 2\omega_H t$	0	0	0	$-(p + jv)$	$u + jq$

где

$$a = -N_0 \frac{A}{A^2 + K^2}; \quad b = -N_0 \left(\frac{1}{K} - \frac{K}{A^2 + K^2} \right); \quad (3.27)$$

$$\left. \begin{aligned} c &= -N_0 A (A^2 + K^2 + 1) / \mathcal{K}_1; \\ d &= N_0 K \left(\frac{1}{1 - K^2} - \frac{1 - K^2 - A^2}{\mathcal{K}_1} \right); \\ e &= -N_0 \left(\frac{1}{1 - K^2} - \frac{A^2 - K^2 + 1}{\mathcal{K}_1} \right); \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{aligned} g &= -2N_0 K A / \mathcal{K}_1; \\ u &= -N_0 A (A^2 + K^2 + 4) / \mathcal{K}_2; \\ q &= N_0 K \left(\frac{1}{4 - K^2} - \frac{4 - K^2 - A^2}{\mathcal{K}_2} \right); \\ p &= -2N_0 \left(\frac{1}{4 - K^2} - \frac{A^2 - K^2 + 4}{\mathcal{K}_2} \right); \\ v &= -4N_0 K A / \mathcal{K}_2; \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

$$\mathcal{K}_1 = (A^2 - K^2 + 1)^2 + 4K^2 A^2; \quad \mathcal{K}_2 = (A^2 - K^2 + 4)^2 + 4K^2 A^2; \\ A = \beta_v / \pi = b_v / \omega_n.$$

На основании формулы (3.5), перемножая матрицы табл. 17 и 18, находим усеченную 5×5 -эквивалентную передаточную матрицу разомкнутой системы и, прибавляя к диагональным элементам этой матрицы единицу, записываем усеченную 5×5 матрицу $I + K_p$ (табл. 19).

19. Усеченная матрица $I + K_p$ системы с множительным устройством типа однополупериодного синхронного прерывателя и передаточной функции

$$\text{непрерывной части } G(s) = \frac{\alpha}{s} - \frac{\alpha}{s + b_v}$$

Входные несущие	Выходные несущие				
	Постоянная составляющая	$\sin \omega_n t$	$\cos \omega_n t$	$\sin 2\omega_n t$	$\cos 2\omega_n t$
Постоянная составляющая	$1 + a + jb$	$\frac{4}{\pi} (c + jd)$	$\frac{4}{\pi} (e + jg)$	0	0
$\sin \omega_n t$	$\frac{2}{\pi} (a + jb)$	$1 + c + jd$	$e + jg$	$\frac{4}{3\pi} (p + jv)$	$-\frac{4}{3\pi} (u + jq)$
$\cos \omega_n t$	0	$-(e + jg)$	$1 + c + jd$	$\frac{8}{3\pi} (u + jq)$	$\frac{8}{3\pi} (p + jv)$
$\sin 2\omega_n t$	0	$-\frac{8}{3\pi} (e + jg)$	$\frac{8}{3\pi} (c + jd)$	$1 + u + jq$	$p + jv$
$\cos 2\omega_n t$	0	$-\frac{4}{3\pi} (c + jd)$	$-\frac{4}{3\pi} (e + jg)$	$-(p + jv)$	$1 + u + jq$

Для удобства дальнейших вычислений каждый элемент матрицы множительного устройства (табл.17) умножаем на 2; тогда нормированный коэффициент усиления разомкнутой системы

$$N_0 = \alpha/2\omega_n. \quad (3.30)$$

Если учитывать только основную постоянную составляющую, считая, что все остальные гармоники фильтруются системой, то передаточные функции в разомкнутом и замкнутом состояниях имеют обычный вид:

$$K_p(jK) = a_{11}(jK) = a + jb; \quad (3.31)$$

$$K_s(jK) = \frac{K_p(jK)}{1 + K_p(jK)} = \frac{a(1+a) + b^2 + jb}{(1+a)^2 + b^2}. \quad (3.32)$$

Очевидно, что $K_p(jK) = \tilde{K}_p^{(0)}(jK)$; $K_s(jK) = c_{11}^{(0)}(jK)$.

При учете, кроме основной составляющей, также первых гармоник, эквивалентная передаточная матрица замкнутой системы выделена в табл.16 двойной линией. При этом алгебраические дополнения и главный определитель матрицы $I + K_p$, выделенные в табл. 19 двойной линией

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11} &= A_1 + jB_1 = (1 + 2c + c^2 - d^2 + e^2 - g^2) + \\ &+ j2(d + dc + eg); \\ \Delta_{21} &= V_1 + jD_1 = -\frac{4}{\pi}(c + c^2 - d^2 + e^2 - g^2) - \\ &- j\frac{4}{\pi}(d + 2cd + 2eg); \\ \Delta_{31} &= E_1 + jG_1 = -\frac{4}{\pi}e - j\frac{4}{\pi}g; \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{12} &= A_2 + jB_2 = -\frac{2}{\pi}(a + ac + bd) - \\ &- j\frac{2}{\pi}(b + bc + ad); \\ \Delta_{22} &= V_2 + jD_2 = (1 + c + a + a^2 - bd) + \\ &+ j(b + bc + d + ad); \\ \Delta_{32} &= E_2 + jG_2 = -\left[e + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)(ae - \right. \\ &\left. - bg) \right] - j\left[g + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)(be + ag) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{13} &= A_3 + jB_3 = -\frac{2}{\pi}(ae - bg) - j\frac{2}{\pi}(be + ag); \\ \Delta_{23} &= V_3 + jD_3 = (e + ae - bg) + j(g + be + ag); \\ \Delta_{33} &= E_3 + jG_3 = \left[1 + a + c + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)(ac - \right. \\ &\left. - bd) \right] + j\left[b + d + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right)(bc + ad) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

$$\Delta = X + jY = \left[(1 + a)A_1 - bB_1 + \frac{2}{\pi}(aV_1 - bD_1) \right] + \\ + j \left[(1 + a)B_1 + bA_1 + \frac{2}{\pi}(aD_1 + bV_1) \right]. \quad (3.36)$$

Эквивалентная передаточная матрица замкнутой системы (выделенная в табл.16 двойной линией) определяет эквивалентные передаточные функции замкнутой системы для основной и первых (прямой и квадратурной) гармонических составляющих. Эквивалентные передаточные функции замкнутой системы для входных сигналов на нулевой гармонике имеют вид:

$$c_{11}(jK) = 1 - \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = z_1 + jz_2; \quad (3.37)$$

$$c_{12}(jK) = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta} = z_3 + jz_4; \quad (3.38)$$

$$c_{13}(jK) = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta} = z_5 + jz_6, \quad (3.39)$$

где $z_1 = 1 - (A_1X + B_1Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_2 = -(D_1X - V_1Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_3 = -(B_1X - A_1Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_4 = -(E_1X + G_1Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_5 = -(V_1X + D_1Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_6 = -(G_1X - E_1Y)/(X^2 + Y^2)$.

Эквивалентная передаточная функция $c_{11}(jK)$ является основной. Соответствующая этой передаточной функции эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы (т. е. эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы с учетом гармонических составляющих или уточненная эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы) определяется по формуле

$$\tilde{K}_p^{(1)}(jK) = \frac{c_{11}(jK)}{1 - c_{11}(jK)} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} - 1 = z_7 + jz_8, \quad (3.40)$$

где $z_7 = (A_1X + B_1Y)/(A_1^2 + B_1^2) - 1$; $z_8 = (A_1Y - B_1X)/(A_1^2 + B_1^2)$.

Эквивалентные передаточные функции замкнутой системы для входных сигналов на прямой и квадратурной гармониках несущей частоты соответственно

$$c_{21}(jK) = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta} = z_9 + jz_{10}; \quad (3.41)$$

$$c_{22}(jK) = 1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = z_{11} + jz_{12}; \quad (3.42)$$

$$c_{23}(jK) = -\frac{\Delta_{32}}{\Delta} = z_{13} + jz_{14}, \quad (3.43)$$

где $z_9 = -(A_2X + B_2Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_{12} = -(D_2X - V_2Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_{10} = -(B_2X - A_2Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_{13} = -(E_2X + G_2Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_{11} = 1 - (V_2X + D_2Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_{14} = -(G_2X - E_2Y)/(X^2 + Y^2)$.

$$c_{31}(jK) = -\frac{\Delta_{13}}{\Delta} = z_{15} + jz_{16}; \quad (3.44)$$

$$c_{32}(jK) = -\frac{\Delta_{23}}{\Delta} = z_{17} + jz_{18}; \quad (3.45)$$

$$c_{33}(jK) = 1 - \frac{\Delta_{33}}{\Delta} = z_{19} + jz_{20}, \quad (3.46)$$

где $z_{15} = -(A_3X + B_3Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_{18} = -(D_3X - V_3Y)/(X^2 + Y^2)$;
 $z_{16} = -(B_3X - A_3Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_{19} = 1 - (E_3X + G_3Y)/(X^2 + Y^2)$;
 $z_{17} = -(V_3X + D_3Y)/(X^2 + Y^2)$; $z_{20} = -(G_3X - E_3Y)/(X^2 + Y^2)$.

Допустим, что система имеет постоянную времени $T_v = 1/b_v = 0,1с$, угловая частота коммутации синхронного ключа $\omega_H = 314с^{-1}$ ($T = \pi/\omega_H = 0,01с$). Тогда параметр системы $A_v = \beta_v/\pi = b_v/\omega_H = 0,1/\pi$. Рассмотрим эквивалентные передаточные функции замкнутой системы при различных значениях N_0 .

На рис.3.4 показаны рассчитанные по формулам (3.33), (3.36) и (3.37) годографы основных эквивалентных передаточных функций

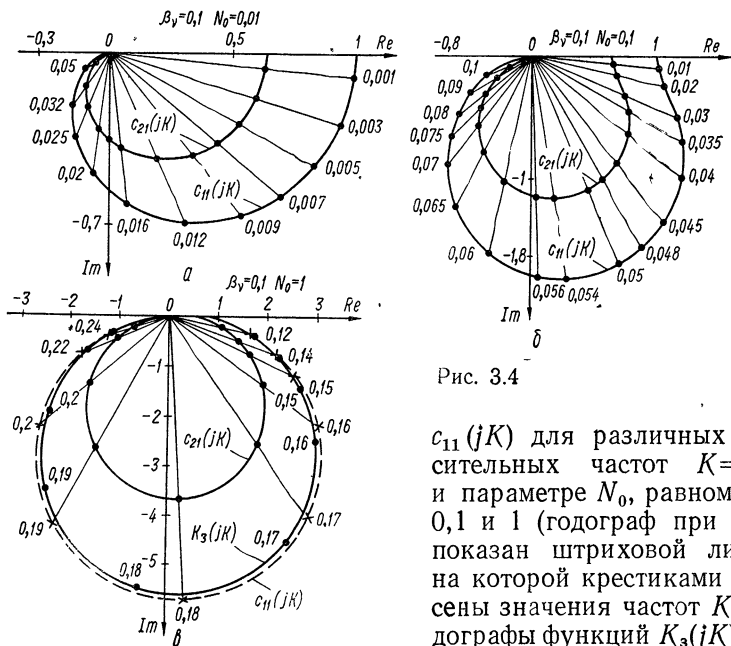


Рис. 3.4

$c_{11}(jK)$ для различных относительных частот $K = \Omega/\omega_H$ и параметре N_0 , равном 0,01; 0,1 и 1 (годограф при $N_0=1$ показан штриховой линией, на которой крестиками нанесены значения частот K). Годографы функций $K_3(jK)$, рассчитанные по формуле (3.32),

при N_0 равном 0,01 и 0,1 с большой степенью точности совпадают с $c_{11}(jK)$, а годограф $K_3(jK)$ при $N_0=1$ (рис. 3.4,в) отличается от соответствующего годографа $c_{11}(jK)$. Таким образом, при параметрах системы $\beta_v=0,1$; $N_0=0,01$ и $N_0=0,1$ первые гармоники, циркулирующие в замкнутой системе, не влияют на основную эквивалентную амплитудно-фазовую характеристику системы, рассчитанную для циркуляции одной постоянной составляющей. С увеличением коэффициента усиления системы (при $N_0=1$) первые (прямая и квадратная) гармоники деформируют характеристику $K_3(jK)$ в характеристику $c_{11}(jK)$.

Годографы эквивалентных передаточных функций $c_{12}(jK)$ и $c_{13}(jK)$ (рис.3.5), рассчитанные по формулам (3.33), (3.36), (3.38) и (3.39), показывают, что с ростом коэффициента усиления возрастают пульсации на выходе системы, но даже при $N_0=1$ эти пульсации остаются

весьма малы́ми по сравнению с основной постоянной составляющей выходной величины.

На рис. 3.6. показаны годографы функций $K_p(jK)$, рассчитанные по формуле (3.31) для различных относительных частот K при N_0 , равном 0,01; 0,1; 1. Годографы $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ при $N_0 = 0,01$ и $N_0 = 0,1$

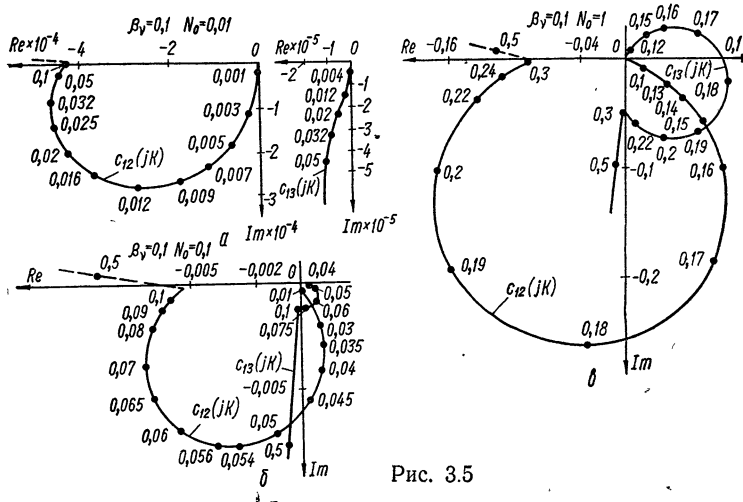


Рис. 3.5

с большой точностью совпадают с $K_p(jK)$, а годограф $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ при $N_0 = 1$ (значения этого годографа отмечены крестиками) отличаются от соответствующего годографа $K_p(jK)$, главным образом, расположением относительных частот K . Годографы $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ рассчитаны по формуле (3.40).

Исследование годографов $c_{11}(jK)$ и $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ показывает, что рассматриваемая система при параметрах $\beta_v = 0,1$; $N_0 = 0,01$ и $N_0 = 0,1$ полностью эквивалентна системе постоянного тока (без синхронного прерывателя). Однако этот вывод требует уточнения.

Ранее были рассмотрены годографы эквивалентных передаточных функций замкнутой системы для входных сигналов

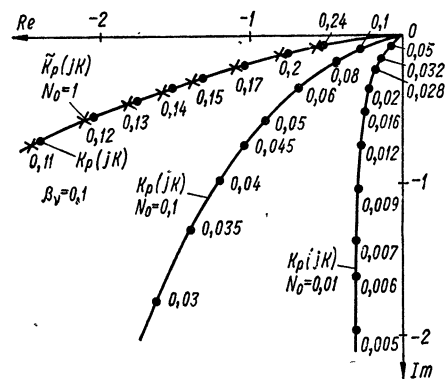


Рис. 3.6

на нулевой гармонике (спектр таких сигналов расположен вблизи нулевой частоты). Если по формулам (3.41) — (3.46) рассчитать годографы эквивалентных передаточных функций замкнутой системы для входных сигналов на первых (прямой и квадратурной) гармониках, то окажется, что некоторые из этих годографов по своим параметрам подобны или близки к годографу основной эквивалентной передаточной

функции $c_{11}(jK)$. Таким годографом, в частности, для системы является годограф функции $c_{21}(jK)$ (см. рис. 3.4). Этот годограф показывает, что на вход следящей системы, работающей при любом коэффициенте усиления, не должны поступать воздействия на несущей частоте. При поступлении таких воздействий система обрабатывает их подобно низкочастотным полезным сигналам. Очевидно, что входные сигналы на несущей частоте, поступающие на вход замкнутой системы, серьезно влияют на динамику работы системы и существенно снижают точность ее слежения. Такая исключительно высокая чувствительность замкнутой системы с синхронным прерывателем (см. рис. 3.1, а) к помехам, поступающим на ее вход на несущей частоте, качественно отличает эту систему от эквивалентной ей системы постоянного тока. Для того чтобы паразитные низкочастотные колебания на выходе системы не возникли, необходимо ограничивать спектр входного полезного сигнала и включать фильтры низких частот на входе замкнутой систе-

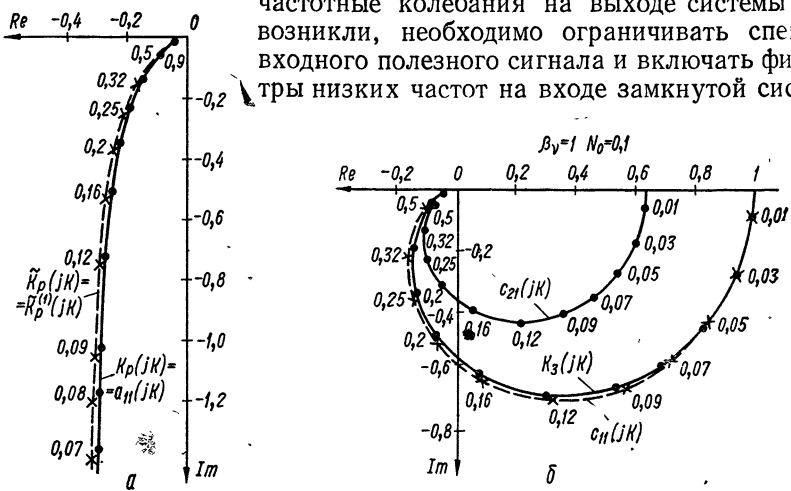


Рис. 3.7

мы. При таких условиях замкнутая система с ключом при соответствующем коэффициенте усиления ($N_0 \ll 0,1$) полностью эквивалентна системе постоянного тока (без ключа).

Допустим, что система имеет постоянную времени $T_v = 1/b_v = 0,01$ с, а угловая частота коммутации синхронного ключа $\omega_n = 314$ с⁻¹ ($T = \pi/\omega_n = 0,01$ с). Тогда параметр системы $A_v = \beta_v/\pi = b_v/\omega_n = 1/\pi$. Рассмотрим эквивалентные передаточные функции замкнутой системы при различных значениях N_0 .

На рис. 3.7 изображены годографы функций $c_{11}(jK)$, $K_3(jK)$, $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$, $K_p(jK)$ при $N_0 = 0,1$. Значения функций $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ и $c_{11}(jK)$, показанные крестиками для различных относительных частот K , незначительно отличаются от значений соответствующих функций $K_p(jK)$ и $K_3(jK)$, рассчитанных по формулам (3.31), (3.32) и показанных точками. Это свидетельствует о том, что первые гармоники, циркулирующие в замкнутой системе, несущественно влияют на основную эквивалентную амплитудно-фазовую характеристику системы, расчи-

танную только для циркуляции одной постоянной составляющей. Годограф функции $c_{21}(jK)$ (рис. 3.7) показывает, что на вход следящей системы не должны поступать воздействия на несущей частоте.

Годографы функций $c_{12}(jK)$ и $c_{13}(jK)$ показаны на рис. 3.8, из которого видно, что выходные сигналы системы при $\beta_v = 1$ содержат значительные пульсации по сравнению с выходными сигналами системы, имеющей параметр $\beta_v = 0,1$.

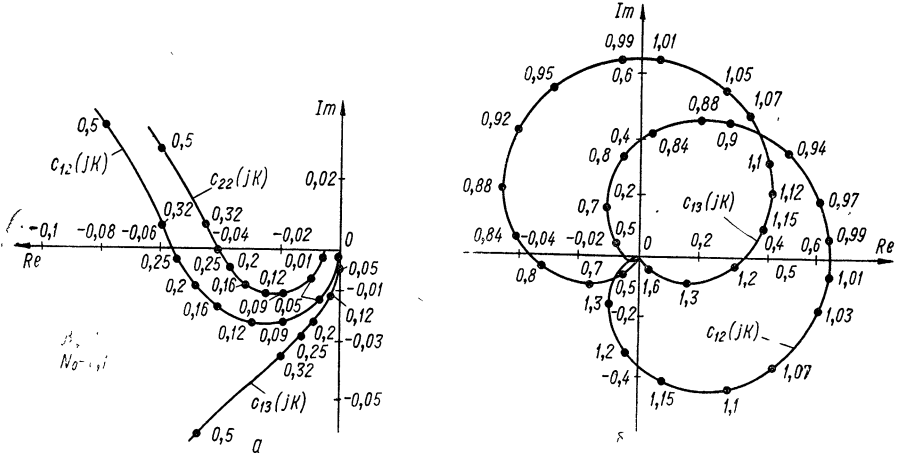


Рис. 3.8

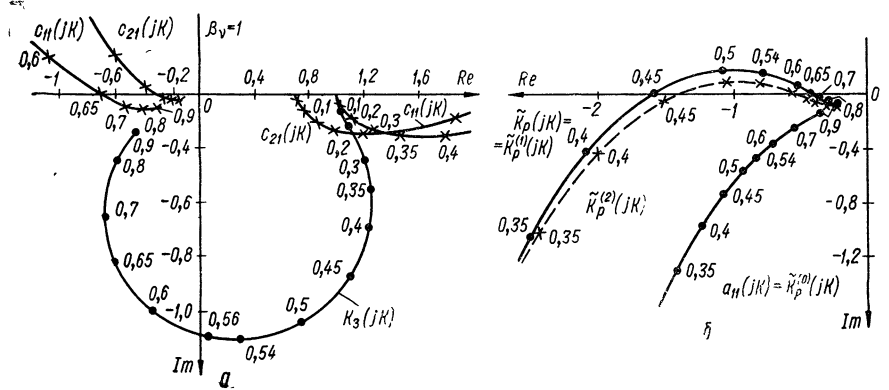


Рис. 3.9

На рис. 3.9 изображены годографы функций $c_{11}(jK)$, $K_3(jK)$ и $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$, $K_p(jK)$ при $N_0 = 1$. Значения функций $c_{11}(jK)$ и $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$, показанные крестиками для различных относительных частот K , существенно отличаются от значений функций $K_3(jK)$ и $K_p(jK)$ на этих же частотах. При рассматриваемых параметрах системы ($\beta_v = 1$ и $N_0 = 1$) первые гармоники, циркулирующие в замкнутой системе, так деформируют основную эквивалентную амплитудно-фазовую характеристику, что система теряет устойчивость.

Важно отметить, что функции a и b в формулах (3.31) и (3.32), определяемые из выражений (3.27), совершенно не зависят от несущей частоты. Чтобы убедиться в этом, достаточно в выражения для функций a и b подставить значения $K = \Omega/\omega_n$ и $A_v = \beta_v/\pi = b_v/\omega_n$. Функции c , d , e и g , определяемые из выражений (3.28), зависят от несущей частоты ω_n . Значит, частотные характеристики системы в разомкнутом и замкнутом состояниях, рассчитанные по формулам (3.31) и (3.32) из условия циркуляции в системе только основной гармоники на нулевой частоте, независимы от несущей частоты. Частотные характеристики системы, рассчитанные с учетом влияния гармонических составляющих, генерируемых в процессе синхронного прерывания сигнала, зависят от несущей частоты. Оценить влияние изменений несущей частоты на частотные характеристики системы просто: для этого достаточно рассчитать эти характеристики при новых значениях параметров $K'\Omega/\omega'_n$ и $A' = b_v/\omega'_n$, где ω'_n — новая несущая частота. Из рис. 3.4 — 3.9 видно, что чем меньше влияют гармоники на частотные характеристики системы, тем меньшее влияние оказывает и нестабильность несущей частоты.

До сих пор рассматривалась матрица $I + K_p$ размером 3×3 и исследовалось влияние первых (прямой и квадратурной) гармоник на основные частотные характеристики системы с ключом при различных параметрах системы N_0 и $A_v = \beta_v/\pi$. Когда первые гармоники существенно деформируют основные годографы, т. е. когда $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ отличается от $K_p(jK) = a_{11}(jK)$ и, значит, $c_{11}^{(1)}(jK)$ отличается от $K_3(jK)$, рассмотрим влияние более высоких гармонических составляющих на основные частотные характеристики системы. Для этого следует вычислить матрицу $I + K_p$ размером 5×5 и функцию $\tilde{K}_p^{(2)}(jK)$ или соответствующую ей функцию $c_{11}^{(2)}(jK)$.

На рис. 3.10, a изображены годографы $\Delta_{11}^{(1)}(jK)$, $\Delta_{12}^{(1)}(jK)$, $\Delta_{13}^{(1)}(jK)$ и $\Delta^{(1)}(jK)$ для системы, имеющей параметры $N_0 = 0,1$ и $\beta_v = 1$, на рис. 3.10, b — для системы, имеющей $N_0 = 1$ и $\beta_v = 1$. Годографы показаны сплошными линиями, на которых точками отмечены относительные частоты $K = \Omega/\omega_n$. На этих же рисунках изображены годографы $\frac{\pi}{4} a_{12}(jK)$ и $\frac{\pi}{4} a_{13}(jK)$. Расчет годографов выполнен на основании 3×3 матрицы $I + K_p$, выделенной в табл. 15 и 19 двойной линией. Вычисленные по этим годографам функции $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ изображены на рис. 3.7 для системы, имеющей параметры $N_0 = 0,1$ и $\beta_v = 1$, и на рис. 3.9, b — для системы, имеющей $N_0 = 1$ и $\beta_v = 1$.

Если выполнить расчет годографов на основании 5×5 матрицы $I + K_p$ (табл. 19), то получим следующее. Годографы $\Delta_{11}^{(2)}(jK)$, $\Delta_{12}^{(2)}(jK)$, $\Delta_{13}^{(2)}(jK)$ и $\Delta^{(2)}(jK)$ практически сливаются с годографами $\Delta_{11}^{(1)}(jK)$, $\Delta_{12}^{(1)}(jK)$, $\Delta_{13}^{(1)}(jK)$ и $\Delta^{(1)}(jK)$ для системы, имеющей $N_0 = 0,1$ и $\beta_v = 1$ и определенным образом смещаются, но не очень значительно, относительно последних для системы, имеющей $N_0 = 1$ и $\beta_v = 1$ (годографы $\Delta_{11}^{(2)}(jK)$, $\Delta_{12}^{(2)}(jK)$, $\Delta_{13}^{(2)}(jK)$ и $\Delta^{(2)}(jK)$ для системы, имеющей $N_0 = 1$

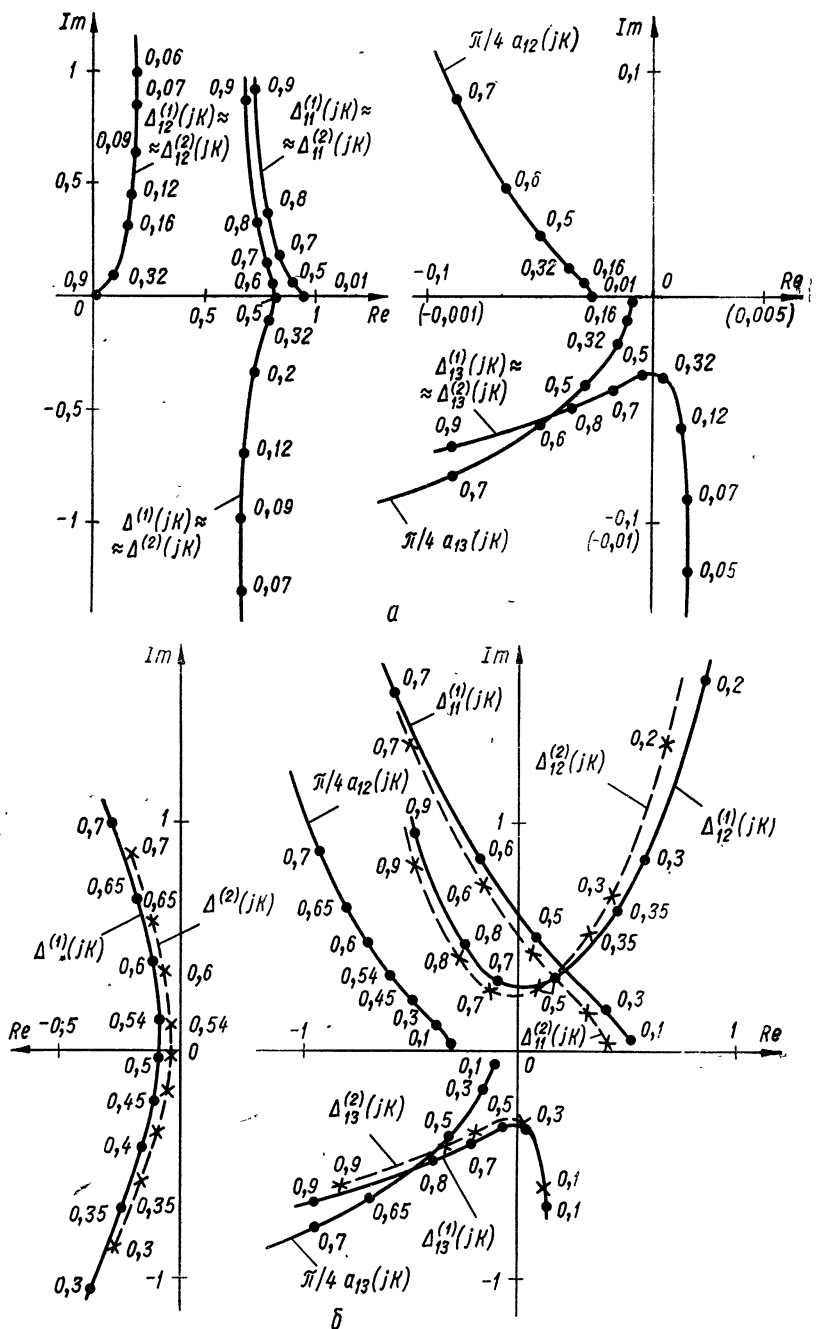


Рис. 3.10

и $\beta_v = 1$, изображены на рис. 3.10 штриховыми линиями). Вычисленная по этим годографам на основании формулы (3.25) функция $\tilde{K}_p^{(2)}(jK)$ для системы, имеющей $N_0 = 0,1$ и $\beta_v = 1$, совпадает с функцией $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ (см. рис. 3.7), а функция $\tilde{K}_p^{(2)}(jK)$ для системы, имеющей $N_0 = 1$ и $\beta_v = 1$, определенным образом смещена относительно функции $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ [см. рис. 3.9, б, где $\tilde{K}_p^{(2)}(jK)$ изображена штриховой линией].

Из сравнения рис. 3.7 и 3.10, а видно, что система, имеющая параметры $N_0 = 0,1$ и $\beta_v = 1$, полностью описывается 3×3 матрицей, выделенной в табл. 16 двойной линией, и динамика системы при поступлении входных сигналов на постоянной составляющей характеризуется только функциями $c_{11}(jK)$, $c_{12}(jK)$ и $c_{13}(jK)$, изображенными на рис. 3.7 и 3.8. Этот вывод подтвержден экспериментальным исследованием системы.

Таким образом, можно сделать вывод, что для системы, имеющей параметры $N_0 = 1$ и $\beta_v = 1$, даже для неустойчивой системы последовательность функций $\tilde{K}_p^{(0)}(jK)$, $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$, $\tilde{K}_p^{(2)}(jK)$ и т. д. является сходящейся (первые гармоники увеличивают, а вторые уменьшают относительную неустойчивость системы, что хорошо видно по расположению годографов относительно точки $[-1; j 0]$).

После детального расчета конкретной системы (см. рис. 3.1,а) со множительным устройством типа однополупериодного прерывателя и непрерывной частью, описываемой обычной передаточной функцией вида (3.26), можно более глубоко и полно представить основные процессы в периодически нестационарных системах, имеющих множительные устройства с периодической функцией перемножения. Во-первых, в замкнутом контуре управления таких систем, кроме низкочастотной медленноизменяющейся (постоянной) составляющей, циркулируют высшие гармонические составляющие (гармоники) на частотах, равных и кратных частоте функции перемножения (функции коммутации прерывателя). Во-вторых, при перемножении некоторых из гармоник на функцию коммутации на выходе множительного устройства получаются дополнительные низкочастотные колебания, амплитуда которых зависит от соответствующих высших гармоник. Поэтому указанные высшие гармоники влияют на общую низкочастотную составляющую, а значит, деформируют (изменяют) основные амплитудно-фазовые частотные характеристики (АФХ) системы. Эти характеристики представляют собой годографы эквивалентных передаточных функций $c_{11}^{(N)}(jK)$ и $\tilde{K}_p^{(N)}(jK)$ и описывают связь соответственно между общими низкочастотными составляющими выхода и входа системы и между общими низкочастотными составляющими выхода и ошибки системы. В-третьих, высшие гармонические составляющие, наложенные на низкочастотную составляющую, в любой точке замкнутого контура системы представляют собой нежелательные пульсации. При воздействии на вход системы (см. рис. 3.1,а) низкочастотного входного сигнала пульсации на выходе системы определяются функциями $c_{ii}^{(N)}(jK)$, $i = 2, 3, \dots$ (см. рис. 3.3). В-четвер-

тых, улучшение фильтрующих свойств непрерывной части системы приводит к уменьшению влияния гармоник на основные характеристики системы и уменьшает пульсации.

Исследуем систему с прерывателем, относительная длительность замыкания которого отлична от $\gamma=0,5$. При произвольной, но постоянной относительной длительности замыкания прерывателя его усеченная эквивалентная передаточная матрица при условии циркуляции в системе постоянной составляющей и первых (прямой и квадратурной) гармоник на основании табл.5 имеет вид табл.20.

20. Усеченная 3×3 эквивалентная передаточная матрица прерывателя (ключа) с произвольной длительностью замыкания

Входные несущие	Выходные несущие		
	Постоянная составляющая	$\sin \omega_n t$	$\cos \omega_n t$
Постоянная составляющая	γ	$1 - \frac{\cos 2\pi\gamma}{\pi}$	$\frac{\sin 2\pi\gamma}{\pi}$
$\sin \omega_n t$	$1 - \frac{\cos 2\pi\gamma}{2\pi}$	$\gamma \left(1 - \frac{\sin 4\pi\gamma}{4\pi\gamma} \right)$	$\frac{\sin^2 2\pi\gamma}{2\pi}$
$\cos \omega_n t$	$\frac{\sin 2\pi\gamma}{2\pi}$	$\frac{\sin^2 2\pi\gamma}{2\pi}$	$\gamma \left(1 + \frac{\sin 4\pi\gamma}{4\pi\gamma} \right)$

Пусть передаточная функция непрерывной части системы определяется формулой (3.26). При условии циркуляции в системе постоянной составляющей и первых (прямой и квадратурной) гармоник усеченная эквивалентная передаточная матрица непрерывной части имеет вид выделенной в табл. 18 двойной линией. Величины a, b, c, d, e и g в этой матрице определяются по приведенным ранее формулам (3.27) и (3.28). Для удобства последующих вычислений каждый элемент матрицы табл. 20 умножим на коэффициент $1/\gamma$, а нормированный коэффициент усиления разомкнутой системы представим в виде (сравним с формулой (3.30)) $N_0 = \gamma\alpha/\omega_n$. На основании формулы (3.5), умножая матрицу табл. 20 на матрицу, выделенную в табл. 18 двойной линией, получим усеченную 3×3 эквивалентную передаточную матрицу разомкнутой системы и, прибавляя к диагональным элементам этой матрицы единицу, запишем усеченную 3×3 матрицу $[I + K_p]$ (табл. 21), в которой $p_1 = 1$; $p_2 = \frac{1 - \cos 2\pi\gamma}{\pi\gamma}$; $p_3 = \frac{\sin 2\pi\gamma}{\pi\gamma}$; $p_4 = \frac{\sin^2 2\pi\gamma}{2\pi\gamma}$; $p_5 = 1 - \frac{\sin 4\pi\gamma}{4\pi\gamma}$; $p_6 = 1 + \frac{\sin 4\pi\gamma}{4\pi\gamma}$.

Для определения эквивалентных передаточных функций $c_{11}^{(1)}(jK)$, $c_{12}^{(1)}(jK)$, $c_{13}^{(1)}(jK)$ и $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ найдем алгебраические дополнения и главный определитель матрицы $[I + K_p]$ (табл. 21):

$$\Delta_{11} = A_1 + jB_1 = [1 + (p_5 + p_6)c + (p_5 p_6 - p_4^2)(c^2 + e^2 - d^2 - g^2)] + j[(p_5 + p_6)d + 2(p_5 p_6 - p_4^2)(cd + eg)];$$

21. Усеченная 3×3 матрица $[I + K_p]$ системы с прерывателем (ключом) и передаточной функцией непрерывной части $G(s) = \frac{\alpha}{s} - \frac{\alpha}{s + b_v}$

Входные несущие	Выходные несущие		
	Постоянная составляющая	$\sin \omega_H t$	$\cos \omega_H t$
Постоянная составляющая	$1 + p_1(a + jb)$	$p_2(c + jd) - p_3(e + jg)$	$p_2(e + jg) + p_3(c + jd)$
$\sin \omega_H t$	$\frac{1}{2} p_2(a + jb)$	$1 + p_5(c + jd) - p_4(e + jg)$	$p_5(e + jg) + p_4(c + jd)$
$\cos \omega_H t$	$\frac{1}{2} p_3(a + jb)$	$p_4(c + jd) - p_6(e + jg)$	$1 + p_4(e + jg) + p_6(c + jd)$

$$\Delta_{21} = V_1 + jD_1 = [-p_2c + p_3e - (p_2p_6 - p_3p_4)(c^2 + e^2 - d^2g^2)] + j[-p_2d + p_3g - 2(p_2p_6 - p_3p_4)(cd + eg)];$$

$$\Delta_{31} = E_1 + jG_1 = [-p_2e - p_3c - (p_3p_5 - p_2p_4)(c^2 + e^2 - d^2 - g^2)] + j[-p_2g - p_3d - 2(p_3p_5 - p_2p_4)(cd + eg)];$$

$$\Delta = X + jY = [A_1(1 + a) - B_1b + \frac{a}{2}(p_3E_1 - p_2V_1) - \frac{b}{2}(p_3G_1 - p_2D_1)] + j[B_1(1 + a) + A_1b + \frac{a}{2}(p_3G_1 - p_2D_1) + \frac{b}{2}(p_3E_1 - p_2V_1)].$$

Усеченная 3×3 эквивалентная передаточная матрица замкнутой системы K_3 , которая определяет эквивалентные передаточные функции замкнутой системы для основной (постоянной) и первых (прямой и квадратурной) гармонических составляющих, описывается матрицей, выделенной в табл.16 двойной линией. Эквивалентные передаточные функции замкнутой системы для входных сигналов на нулевой гармонике (постоянной составляющей) определяются по формулам (3.33), (3.37) — (3.39). Соответствующую функцию $c_{11}^1(jK)$ функции $\tilde{K}_p^{(1)} \times (jK)$ можно вычислить по формуле (3.40).

Допустим, что система имеет постоянную времени $T_v = 1/b_v = 0,01$ с и угловую частоту коммутации синхронного ключа $\omega_H = 314$ с $^{-1}$ ($T = \pi/\omega_H = 0,01$ с). Тогда параметр системы $A_v = B_v/\pi = b/\omega_H = 1/\pi$. Рассмотрим эквивалентные передаточные функции замкнутой системы при различных значениях нормированного коэффициента усиления N_0 и относительной длительности замыкания синхронного прерывателя γ .

На рис. 3.11 изображены годографы функций $c_{11}^{(1)}(jK)$ и $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ при $N_0 = 0,1$ и различных значениях γ , равных 0,25; 0,1 и 0,05 (годографы при $\gamma = 0,01$ практически совпадают с годографами при $\gamma = 0,05$). Для сравнения на рисунках изображены также годографы $K_3(jK)$ и $K_p(jK)$, рассчитанные при $N_0 = 0,1$ и $\beta_v = 1$ по формулам (3.31) и (3.32). Из рисунка видно, что при параметрах системы ($\beta_v =$

$= 1$ и $N_0 = 0,1$) первые гармоники, циркулирующие в замкнутой системе, несущественно влияют на основные частотные характеристики системы в замкнутом и разомкнутом состояниях, рассчитанные только для циркуляции одной постоянной составляющей. Годографы функций $c_{12}^{(1)}(jK)$ и $c_{13}^{(1)}(jK)$ (рис. 3.12) показывают, что система имеет значительные пульсации выходного сигнала при всех значениях γ . Если изменение относительного времени замыкания синхронного ключа γ незначительно влияет на годографы $c_{11}^{(1)}(jK)$ и $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ (рис. 3.11), то годографы функций $c_{12}^{(1)}(jK)$ и $c_{13}^{(1)}(jK)$ в большой степени зависят от значения γ , причем γ (рис. 3.12) влияет главным образом на форму и значительно меньше на пульсации выходного сигнала системы.

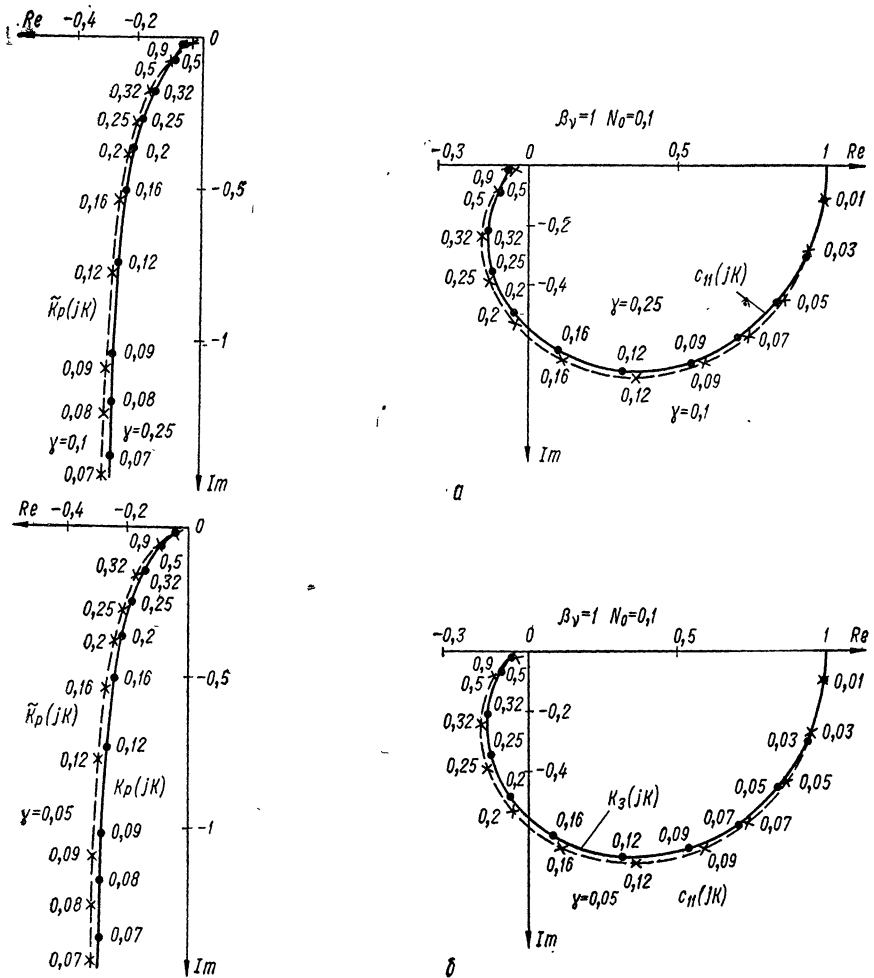


Рис. 3.11

Исключительно большое влияние на частотные характеристики системы оказывает нормированный коэффициент усиления N_0 . С увеличением N_0 расхождение между годографами функций $c_{11}^{(1)}(jK)$ и $K_3(jK)$,

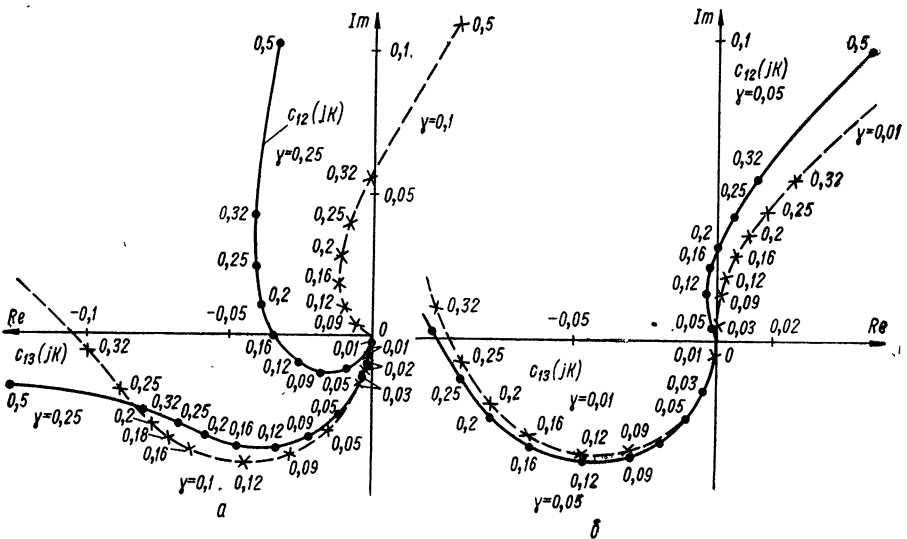


Рис. 3.12

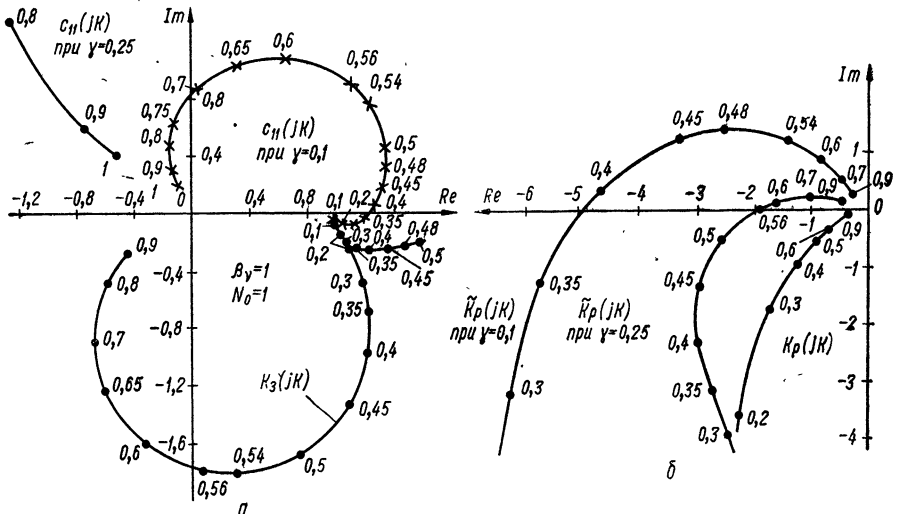


Рис. 3.13

а значит, и между годографами функций $K_p^{(1)}(jK)$ и $K_p(jK)$ возрастает и при некоторых параметрах системы наступает качественное отличие сравниваемых годографов.

На рис. 3.13, а построены годографы функций $c_{11}^{(1)}(jK)$ при $\gamma = 0,25$, $\gamma = 0,1$ и $N_0 = 1$ и годограф функции $K_3(jK)$. Если замкнутая система

без синхронного прерывателя при $\beta_v = 1$ и $N_0 = 1$ является устойчивой, то система с прерывателем, работающим при различных значениях γ (например, при γ , равном 0,5 на рис. 3.9; 0,25 и 0,1 на рис. 3.13), является неустойчивой. Гармоники, циркулирующие в замкнутой системе и обусловленные наличием синхронного ключа, так деформируют основную эквивалентную амплитудно-фазовую характеристику, что система теряет устойчивость. Потеря устойчивости системой особенно наглядна из сравнения годографов функций $\tilde{K}_p^{(1)}(jK)$ и $K_p(jK)$ (см. рис. 3.9, б и 3.13, б).

При определенных параметрах непрерывной части системы, например при $\beta_v = 1$, увеличение коэффициента N_0 приводит к резкому возрастанию пульсаций выходного напряжения. На рис. 3.14 показаны годографы функций $c_{12}^{(1)}(jK)$ и $c_{13}^{(1)}(jK)$ при параметрах рассматриваемой системы $\beta_v = 1$; $N_0 = 1$ и $\gamma = 0,1$. Эти годографы характеризуют исключительно высокий уровень пульсаций выходного сигнала. Однако следует подчеркнуть, что не пульсации приводят систему к неустойчивости (пульсации можно отфильтровать из выходного сигнала системы), а высшие гармоники, циркулирующие в замкнутой системе, которые деформируют характеристики системы для основной, постоянной составляющей. Синхронное множительное устройство, введенное

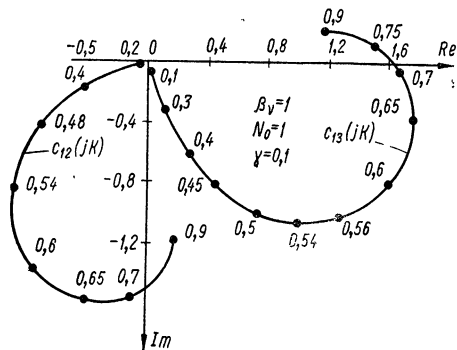


Рис. 3.14

в непрерывную замкнутую систему, деформирует основные частотные характеристики, генерирует гармонические составляющие (пульсации, наложенные на основную гармонику) и делает систему чувствительной к входным сигналам (помехам), поступающим на частотах, кратных несущей частоте коммутации синхронного прерывателя. Влияние синхронного множительного устройства можно уменьшить или даже свести на нет либо уменьшением коэффициента усиления и увеличением постоянной времени непрерывной части системы, либо увеличением номинального значения несущей частоты (в обоих случаях значения N_0 и β_v уменьшаются).

Основной эквивалентной передаточной функцией разомкнутой системы является функция $\tilde{K}_p^{(N)}(jK)$. Именно годограф этой функции определяет устойчивость (или неустойчивость) системы с прерывателем. Согласно критерию Найквиста, если разомкнутая цепь системы устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф $\tilde{K}_p^{(N)}(jK)$, т. е. амплитудно-частотная характеристика «эквивалентной системы постоянного тока» в разомкнутом состоянии, не охватывал точку на комплексной плоскости с координатами $(-1; j0)$.

Области устойчивости и неустойчивости системы построены в плоскости параметров κ и z (см. рис. 1.4—1.7). Годографы системы зависят от параметров $A_v = b_v/\omega_n$ и $\kappa = b_v T$ (где $T = 2\pi/\omega_n$), которые связаны между собой соотношением

$$A_v = \kappa/2\pi. \tag{3.47}$$

Связь между нормированным коэффициентом усиления $N_0 = \gamma\alpha/\omega_n$ и параметром

$$z = T \sqrt{b_v^2/4 - K_0} = \kappa \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{K_0}{b_v^2}} = \kappa \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{b_v}}$$

можно определить следующим образом. Выразим отношение α/b_v в виде $\alpha/b_v = N_0/(\gamma A_v) = 2\pi N_0/(\gamma\kappa)$. Учитывая, что z — мнимая величина, найдем

$$|z|^2 + \frac{\kappa^2}{4} = \kappa^2 \frac{2\pi N_0}{\gamma\kappa}.$$

Отсюда

$$N_0 = \frac{\gamma\kappa}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{|z|^2}{\kappa^2} \right). \tag{3.48}$$

Пусть нормированная постоянная времени системы $A_v = 1/\pi$ и относительная длительность замыкания прерывателя $\gamma = 0,5$. Тогда на основании формул (3.47) и (3.48) $\kappa = 2$

$$N_0 = \frac{1}{8\pi} (1 + |z|^2).$$

Области устойчивости и неустойчивости системы с прерывателем при $\gamma=0,5$ показаны на рис.1.4. Выберем по рисунку значения параметра $|z|$, которые при $\kappa = 2$ соответствуют устойчивому и неустойчивому состояниям системы, а также запишем значения параметра $|z|$, при которых система находится на границе устойчивости. Для выбранных параметров $|z|$ рассчитаем соответствующие значения нормированного коэффициента усиления N_0 . Результаты сведем в табл.22.

22. Состояние системы в зависимости от значений нормированных коэффициентов усиления

$ z $	N_0	Состояние системы	$ z $	N_0	Состояние системы
2	0,199	Устойчивое	7,5	2,278	Устойчивое
4,4	0,810	На границе устойчивости	8	2,586	»
5	1,034	Неустойчивое	8,575	2,965	На границе устойчивости
5,58	1,278	На границе устойчивости	9	3,262	Неустойчивое
7	1,989	Устойчивое	10	4,018	»

На рис. 3.13—3.17 показаны рассчитанные на ЭВМ годографы основной эквивалентной передаточной функции системы $\tilde{K}_p^{(2)}(j\omega)$

(в замкнутом контуре системы учитываются постоянная составляющая, первые и вторые прямые и квадратурные гармоники) при значениях нормированного коэффициента усиления N_0 , указанных в табл. 22.

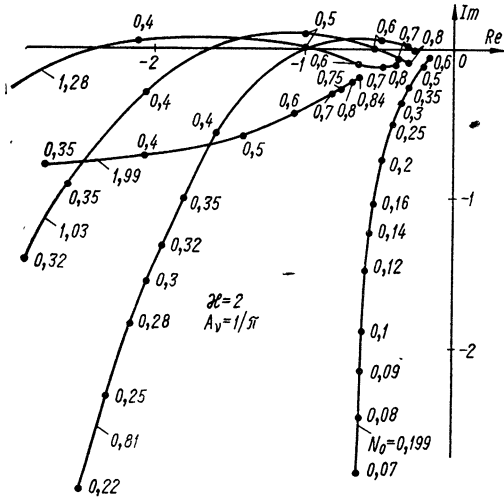


Рис. 3.15

Смещение годографа основной эквивалентной передаточной функции $\tilde{K}_p^{(2)}(jK)$ с возрастанием нормированного коэффициента усиления системы N_0 и расположения этого годографа относительно критической точки $(-1; j0)$ ясно показывают особенности импульсной системы с прерывателем. Во-первых, при увеличении коэффициента N_0 система периодически становится устойчивой и неустойчивой. Во-вторых, годограф пересекает критическую точку или на частоте $K=0,5$ ($\Omega=\omega_n/2$), или на частоте $K=1$ ($\Omega=\omega_n$).

Другими словами, система с прерывателем, имеющая непрерывную часть второго порядка, может самовозбуждаться на частотах, равных

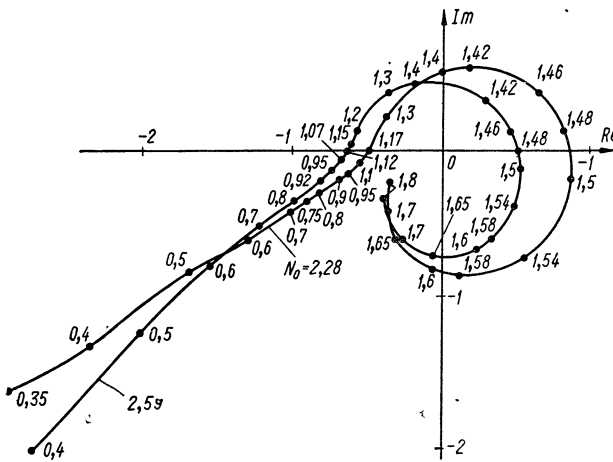


Рис. 3.16

$\omega_n/2$ и ω_n , при определенных параметрах $A_v = b_v/\omega_n$ и $N_0 = \gamma\alpha/\omega_n$. Конечно, исследование годографа $\tilde{K}_p(jK)$ при очень высоких коэффициентах N_0 требует учета большего числа гармоник в замкнутом

контуре системы. Однако следящие системы работают обычно в первой области устойчивости, поэтому в большинстве практических случаев достаточно учета одной или двух (прямых и квадратурных) гармоник.

Определение установившихся и переходных процессов в системе по эквивалентным передаточным функциям. При поступлении на вход системы синусоидального сигнала

$$x_{вх} = \sin(\Omega t + \Theta) u_{-1}(t) = \sin(K\omega_n t + \Theta) u_{-1}(t), \quad (3.49)$$

где $u_{-1}(t)$ — единичная ступенчатая функция, примененная в момент $t=0$, установившийся выходной сигнал системы не является синусоидальным, а представляет собой сложную функцию, которая тем более отлична от чисто синусоидального сигнала, чем выше значения параметров системы β_v и N_0 и чем больше значение относительной частоты K .

Например, для рассматриваемой системы с ключом, имеющей $\beta_v = 1$; $N_0 = 0,1$ и $\gamma = 0,5$, установившийся выходной сигнал системы при поступлении входного сигнала

$$x_{вх} = \sin(0,25\omega_n t + \Theta) u_{-1}(t)$$

на основании значений годографов $c_{11}^{(1)}(jK)$, $c_{12}^{(1)}(jK)$ и $c_{13}^{(1)}(jK)$ при $K = 0,25$ (см. рис. 3.7, 3.8) запишем в виде

$$G = A + B \sin \omega_n t + C \cos \omega_n t, \quad (3.50)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -[0,138 \sin(\Omega t + \Theta) + 0,361 \cos(\Omega t + \Theta)]; \\ B &= -[0,0542 \sin(\Omega t + \Theta) + 0,00333 \cos(\Omega t + \Theta)]; \\ C &= -[0,0129 \sin(\Omega t + \Theta) + 0,0283 \cos(\Omega t + \Theta)]. \end{aligned}$$

Установившийся выходной сигнал системы при поступлении входного сигнала

$$x_{вх} = \sin(0,5\omega_n t + \Theta) u_{-1}(t)$$

на основании значений годографов $c_{11}^{(1)}(jK)$, $c_{12}^{(1)}(jK)$ и $c_{13}^{(1)}(jK)$ при $K = 0,5$ запишем в виде

$$G = A + B \sin \omega_n t + C \cos \omega_n t, \quad (3.51)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -[0,102 \sin(\Omega t + \Theta) + 0,0704 \cos(\Omega t + \Theta)]; \\ B &= -[0,0794 \sin(\Omega t + \Theta) - 0,0418 \cos(\Omega t + \Theta)]; \\ C &= -[0,0471 \sin(\Omega t + \Theta) + 0,0604 \cos(\Omega t + \Theta)]. \end{aligned}$$

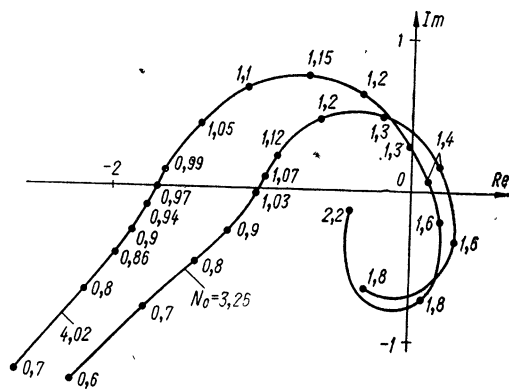


Рис. 3.17

Постоянная составляющая A , огибающие прямой B и квадратурной C гармоник, прямая D и квадратурная E первые гармоники, а также установившийся выходной сигнал G системы показаны на рис. 3.18, a , при частоте $\Omega=0,25 \omega_n$ и на рис. 3.18, b при $\Omega=0,5 \omega_n$ для фазового угла $\Theta=0$. Из рисунков видно, что чем меньше относительная частота K , тем форма сигнала G ближе к чисто синусоидальному сигналу A .

Система с синхронными множительными устройствами является нестационарной. Поэтому установившийся выходной сигнал системы зависит от фазового угла Θ входного синусоидального сигнала, т. е. зависит от момента приложения синусоидального сигнала ко входу

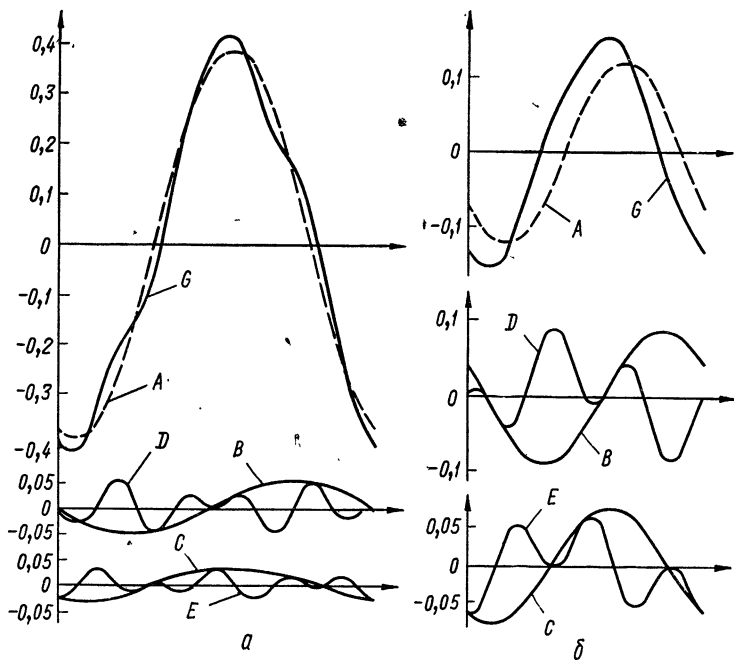


Рис. 3.18

системы. На рис. 3.19 показаны установившийся выходной сигнал G и постоянная составляющая A системы с ключом, имеющей параметры $\beta_v=1$; $N_0=0,1$ и $\gamma=0,5$ при поступлении входного сигнала (3.49) с частотой $\Omega=0,25 \omega_n$ и различными фазовыми углами Θ (амплитуда входного сигнала $x_{вх}$ уменьшена в пять раз); на рис. 3. 20 показан установившийся выходной сигнал G и постоянная составляющая A этой системы при $\Omega=0,5 \omega_n$ и различных Θ (амплитуда $x_{вх}$ уменьшена в десять раз). Все кривые рассчитаны по формулам (3.50) и (3.51) и с большой точностью совпадают с экспериментальными.

Переходные процессы системы с синхронными множительными устройствами можно находить на основании матриц (табл.16), используя известную для линейных стационарных систем связь между переходной функцией $h(t)$, импульсной характеристикой $\omega(t)$ и частотными

характеристиками замкнутой системы (например, вещественной частотной характеристикой). Если эквивалентная передаточная матрица замкнутой системы описывается матрицей, выделенной в табл. 16

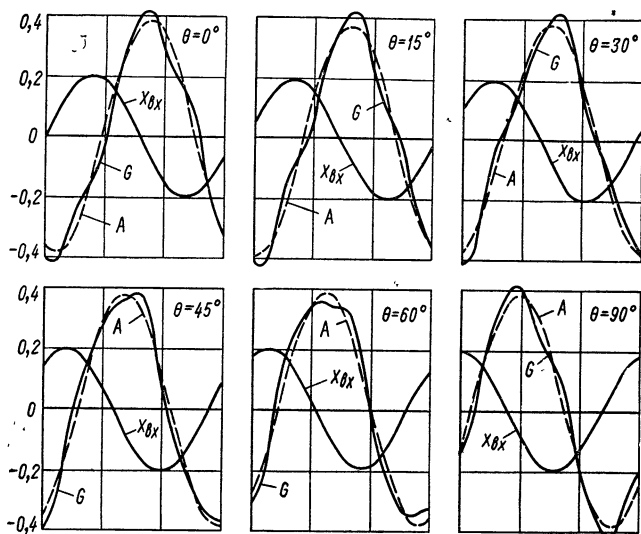


Рис. 3.19

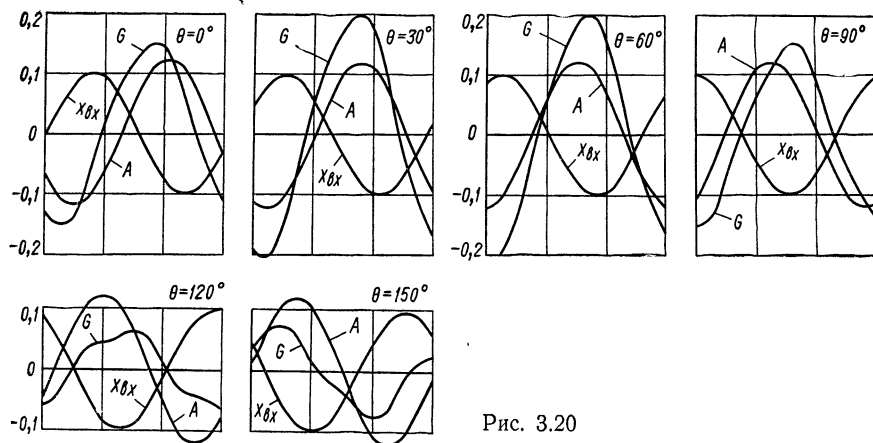


Рис. 3.20

двойной линией, то переходный процесс в системе (реакция системы на единичное ступенчатое воздействие) можно представить в следующем виде:

$$h(x - \Theta) = I_1(x - \Theta) + I_2(x - \Theta) \sin x + I_3(x - \Theta) \cos x, \quad (3.52)$$

где

$$I_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_1(K)}{K} \sin Kx dK;$$

$$I_2(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_2(K)}{K} \sin Kx \, dK;$$

$$I_3(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_3(K)}{K} \sin Kx \, dK;$$

$P_1(K)$, $P_2(K)$ и $P_3(K)$ — вещественные части соответствующих эквивалентных передаточных функций $c_{11}^{(1)}(jK)$, $c_{12}^{(1)}(jK)$ и $c_{13}^{(1)}(jK)$; $x = \omega_n t$.

Интегралы $I(x)$ вычисляются графоаналитическим способом разложением функции $P_i(K)$ на трапецеидальные вещественные частотные характеристики (ВЧХ) и использованием табличных h_x -функций.

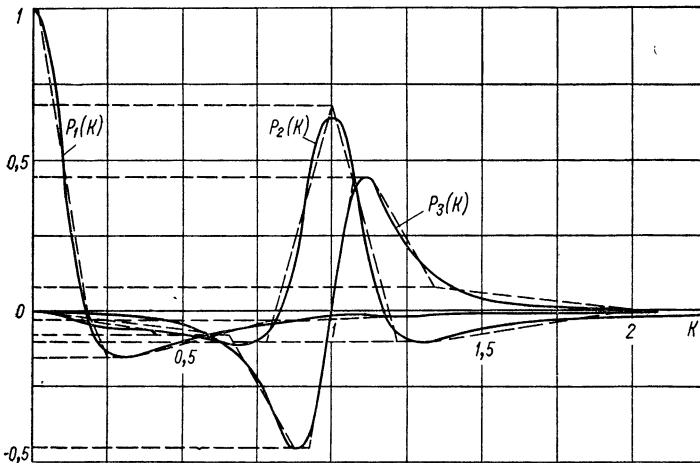


Рис. 3.21

На рис. 3.21 показаны функции $P_1(K)$, $P_2(K)$ и $P_3(K)$ для системы с ключом, имеющей параметры $\beta_v = 1$; $N_0 = 0,1$ и $\gamma = 0,5$. Разложим функцию $P_1(K)$ на трапеции со следующими параметрами:

- 1) $P(0) = 1$; $K_n = 0,18$; $K_d = 0,018$; $\kappa = K_d/K_n = 0,1$;
- 2) $P(0) = 0,15$; $K_n = 0,25$; $K_d = 0,18$; $\kappa = 0,72$;
- 3) $P(0) = -0,12$; $K_n = 0,8$; $K_d = 0,35$; $\kappa = 0,44$;
- 4) $P(0) = -0,03$; $K_n = 2$; $K_d = 0,8$; $\kappa = 0,4$.

Функцию $P_2(K)$ также разложим на трапеции с параметрами

- 1) $P(0) = 0,78$; $K_n = 1,22$; $K_d = 1$; $\kappa \approx 0,82$;
- 2) $P(0) = -0,1$; $K_n = 2$; $K_d = 1,34$; $\kappa = 0,67$;
- 3) $P(0) = -0,78$; $K_n = 1$; $K_d = 0,78$; $\kappa = 0,78$;
- 4) $P(0) = 0,1$; $K_n = 0,6$; $K_d = 0$; $\kappa = 0$.

Наконец, функцию $P_3(K)$ разложим на трапеции с параметрами

- 1) $P(0) = 0,36; K_n = 1,34; K_d = 1,13; \kappa \approx 0,84;$
- 2) $P(0) = 0,08; K_n = 2; K_d = 1,34; \kappa \approx 0,67;$
- 3) $P(0) = -0,89; K_n = 1,08; K_d = 0,92; \kappa \approx 0,85;$
- 4) $P(0) = 0,37; K_n = 0,87; K_d = 0,66; \kappa \approx 0,76;$
- 5) $P(0) = 0,08; K_n = 0,66; K_d = 0; \kappa = 0.$

На рис. 3.22 показаны переходные функции $I_1(x) - I_3(x)$, соответствующие аппроксимированным функциям $P_1(K) - P_3(K)$,

а также переходные процессы с ключом, рассчитанные по формуле (3.52). Эти процессы хорошо согласуются с экспериментальными. Импульсная характеристика системы, передаточная матрица которой описывается матрицей, выделенной в табл. 16 двойной линией, определяется формулой

$$\omega(x - \Theta) = \omega_1(x - \Theta) + \omega_2(x - \Theta) \sin x + \omega_3 \times \times (x - \Theta) \cos x, \quad (3.53)$$

где

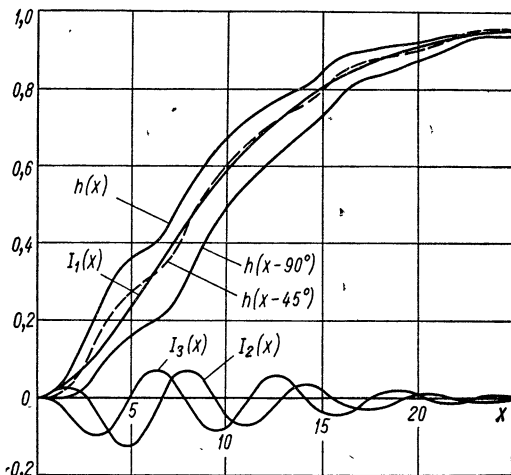


Рис. 3.22

$$\omega_i(x) = \omega_n \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P_i(K) \cos Kx dK.$$

Глава 4.

РАСЧЕТ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ СЪЕМА ДАННЫХ С ЦИФРОВЫМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМИ УСТРОЙСТВАМИ

10. СИСТЕМЫ С ПРОСТЕЙШИМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ (СИСТЕМЫ С МГНОВЕННЫМИ КЛЮЧАМИ)

Цифровые вычислительные устройства в импульсных системах с конечным временем съема данных применяются для коррекции характеристик системы и оптимального управления. В тех случаях,

когда цифровое вычислительное устройство осуществляет линейное преобразование входной последовательности чисел, его называют также цифровым (дискретным) фильтром. Структурная схема системы с конечным временем съема данных, в которой применяется цифровое вычислительное устройство (цифровой фильтр), показана на рис. 4.1, а. Эта система содержит два мгновенных ключа с периодом замыкания h , цифровой фильтр с передаточной функцией $W(z)$, фиксатор, непрерывные части с передаточными функциями $G_1(s)$, $G_2(s)$ и прерыватель с конечным временем γT и периодом T замыкания. Даже при условии, что передаточная функция цифрового фильтра $W(z)=1$, система отличается от известных тем, что содержит кроме прерывателей с конечным

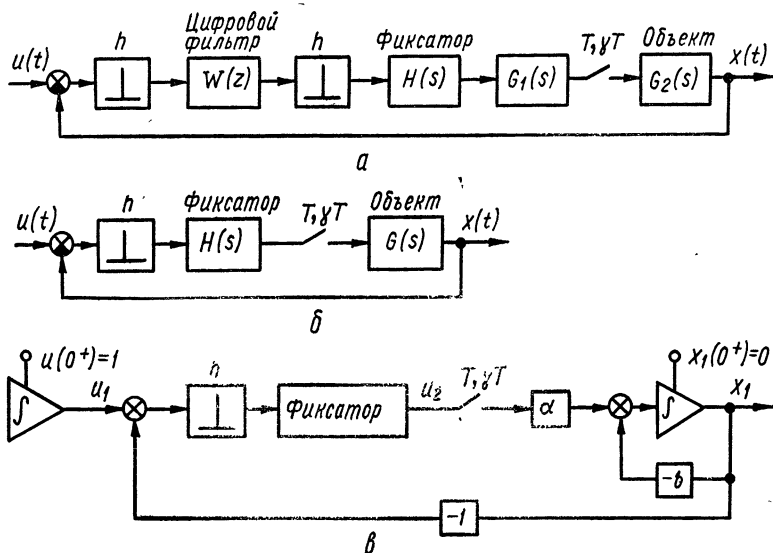


Рис. 4.1

временем замыкания также простейшие импульсные элементы (мгновенные ключи, т. е. ключи с мгновенным временем замыкания). Наиболее простая схема показана на рис. 4.1, б. Она содержит мгновенный ключ и прерыватель с конечным временем замыкания. Вообще, такие системы могут содержать любое количество прерывателей с конечным временем замыкания и мгновенных ключей, а структурные схемы систем значительно отличаются от рис. 4.1, а, б. При анализе положим, что прерыватели с конечным временем замыкания в таких системах работают синхронно, причем наибольший интервал (период) прерывания равен T .

Теория импульсных систем с мгновенными ключами хорошо развита и изложена в фундаментальных работах [14, 17, 24, 26]. Проблемы устойчивости и построения переходных процессов импульсных систем с прерывателями, имеющими конечную длительность замыкания, рассмотрены в работах [19, 21, 23, 26]. Однако теория импульсных систем, в которых используются как прерыватели с конечным време-

нем замыкания, так и мгновенные ключи, в настоящее время практически не развита. Рассмотрим простейшие системы, содержащие прерыватели с конечным временем замыкания и мгновенные ключи, методы построения переходных процессов, определения устойчивости и оптимизации параметров таких систем на основе различных интегральных (суммарных) оценок, реализацию наиболее простых цифровых фильтров и методы расчета импульсных систем с конечным временем съема данных с цифровыми фильтрами (цифровыми вычислительными устройствами).

Ранее показано, что для системы, описываемой векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.1)$$

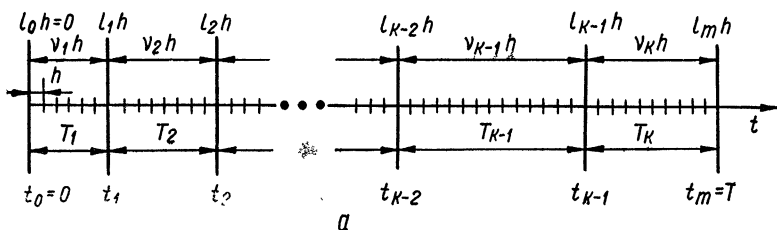
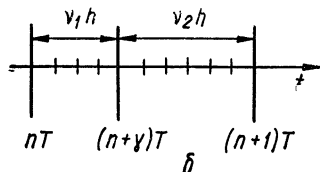


Рис. 4.2



где $\mathbf{A}(t)$ — периодическая периода T матрица, решение уравнения в любом интервале $nT \leq t \leq (n+1)T$, $n = 0, 1, 2, \dots$, имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - nT) \mathbf{C}^n \mathbf{x}_0, \quad (4.2)$$

где $\Phi(t - nT)$ — переходная матрица, вычисленная для первого периода $0 \leq t \leq T$ и смещенная на интервал nT ; $\mathbf{C} \equiv \Phi(T)$ — матрица монодромии.

Для импульсной системы с конечным временем съема данных, содержащей несколько синхронно работающих прерывателей, основной (наибольший) период прерывания T можно разделить на ряд подынтервалов (рис.4.2,а) в соответствии с частотами, фазами и относительной длительностью замыкания отдельных прерывателей так, что динамика системы с мгновенными ключами для любого полученного подынтервала длительностью T_k , $k=1, 2, \dots, m$, на отрезке $0 \leq \tau \leq h$ описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{v}}(\tau) = \mathbf{A}_k \mathbf{v}(\tau), \quad \mathbf{v}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\tau) \\ \mathbf{x}(\tau) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

где \mathbf{A}_k — постоянная расширенная матрица коэффициентов системы для этого подынтервала.

Решение этого уравнения, из которого определяются переменные состояния системы с мгновенными ключами в последовательные моменты квантования мгновенных ключей, имеет вид

$$\mathbf{v}(\nu h) = H_k^{\nu - l_k - 1}(h) \mathbf{v}_k(0), \quad \nu = 0, 1, 2 \dots, \quad (4.4)$$

где $H_k^{\nu - l_k - 1}(h)$ — расширенная H -матрица для этого подынтервала, которая характеризует одновременно изменение как переменных состояния процесса системы, так и входного воздействия; $\mathbf{v}_k(0)$ — вектор начальных условий для этого подынтервала.

Разбивая первый интервал (период) $0 \leq \nu h \leq T$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$; h — период квантования мгновенных ключей, указанным выше способом на m подынтервалов (рис. 4.2, а) и определяя решения уравнений (4.3) для подынтервалов первого основного периода, находим для k -го подынтервала

$$\mathbf{v}(\nu h) = H_k^\nu \mathbf{v}(0); \quad (4.5)$$

$$H_k^\nu = H_k^{\nu - l_k - 1}(h) H_{k-1}^{\nu_k - 1}(h) \dots H_2^{\nu_2}(h) H_1^{\nu_1}(h), \quad (4.6)$$

где $\nu_k = T_k/h$; $l_k = t_k/h$.

Для простоты полагаем, что ν_k и l_k — целые числа. Период (шаг) квантования мгновенных ключей h значительно меньше основного периода T . При $\nu = l_m = T/h$ находим матрицу монодромии

$$C \equiv \prod_{k=m}^1 H_k^{\nu_k}(h). \quad (4.7)$$

Согласно формулам (4.2) и (4.5) для k -го подынтервала $l_{k-1} \leq \nu - nT/h \leq l_k$ любого основного интервала (периода) $nT \leq \nu h \leq (n+1)T$ решение уравнения (4.3) имеет вид

$$\mathbf{v}(\nu h) = H_k^{\nu - nT/h} C^n \mathbf{v}(0), \quad nT \leq \nu h \leq (n+1)T, \quad (4.8)$$

где $H_k^{\nu - nT/h}$ — это H -матрица импульсной системы с мгновенными ключами, вычисленная для первого основного периода $0 \leq \nu h \leq T$ на подынтервале $l_{k-1} \leq \nu \leq l_k$ и смещенная на промежуток времени nT/h ; C — матрица монодромии, определяемая по формуле (4.7).

Рассмотрим простейшую замкнутую импульсную систему с периодически работающим прерывателем рис. 4.1, б, в которой передаточная функция непрерывной части $G(s) = \alpha/(s+b)$. Передаточная функция фиксатора нулевого порядка в системах рис. 4.1 $H(s) = (1 - e^{-hs}/s)$. Пусть входное воздействие имеет вид единичной ступенчатой функции. Схема системы в переменных состояния (схема аналогового моделирования) изображена на рис. 4.1, в. При замкнутом прерывателе дифференциальные уравнения состояния $\dot{u}_1 = 0$; $\dot{u}_2 = 0$; $\dot{x}_1 = \alpha u_2 - b x_1$, уравнения переходных состояний $u_1(\nu h^+) = u_1(\nu h)$; $u_2(\nu h^+) = u_1(\nu h) - x_1(\nu h)$; $x_1(\nu h^+) = x_1(\nu h)$. Записывая уравнения в векторной форме

$$\dot{\mathbf{v}}(\tau) = A_1 \mathbf{v}(\tau) \quad \text{и} \quad \mathbf{v}(\nu h^+) = B_1 \mathbf{v}(\nu h),$$

находим матрицы

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}(\tau) = \begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ x_1(\tau) \end{bmatrix}.$$

Расширенная матрица перехода

$$\Phi_1(\tau) = L^{-1} \{ [sI - A_1]^{-1} \} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{b} (1 - e^{-b\tau}) & e^{-b\tau} \end{bmatrix}.$$

H -матрица

$$H_1(h) = \Phi_1(h) B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{\alpha}{b} (1 - e^{-bh}) & 0 & -\frac{\alpha}{b} + \left(\frac{\alpha}{b} + 1\right) e^{-bh} \end{bmatrix}.$$

Определяем матрицы при разомкнутом прерывателе

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}; B_2 = B_1.$$

Расширенная матрица перехода

$$\Phi_2(\tau) = L^{-1} \{ [sI - A_2]^{-1} \} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-b\tau} \end{bmatrix}$$

и H -матрица

$$H_2(h) = \Phi_2(h) B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & e^{-bh} \end{bmatrix}.$$

Для первого интервала (периода) на подынтервале $0 \leq v\hbar \leq \gamma T$, где $v = 0, 1, 2, \dots$; h — шаг квантования, согласно формулам (4.5) и (4.6), переменные состояния системы в последовательные моменты квантования мгновенного ключа

$$\mathbf{v}(v\hbar) = H_1^v(h) \mathbf{v}(0).$$

Для первого интервала (периода) на подынтервале $\gamma T \leq v\hbar \leq T$, согласно формулам (4.5) и (4.6), переменные состояния системы в последовательные моменты квантования мгновенного ключа

$$\mathbf{v}(v\hbar) = H_2^{v-\gamma} h(h) H_1^{\gamma} h(h) \mathbf{v}(0).$$

H -матрица монодромии согласно выражению (4.7)

$$C = H_2^{\gamma} h(h) H_1^{\gamma} h(h)$$

Для любого основного интервала (периода) $nT \leq \nu h \leq (n+1)T$ переменные состояния в последовательные моменты квантования мгновенного ключа определяются на основании формулы (4.8):

для подынтервалов $nT \leq \nu h \leq (n+\gamma)T$ при замкнутом прерывателе

$$\mathbf{v}(\nu h) = H_1^{\nu - \frac{T}{h}n}(\nu h) C^n \mathbf{v}(0);$$

для подынтервалов $(n+\gamma)T \leq \nu h \leq (n+1)T$ при разомкнутом прерывателе

$$\mathbf{v}(\nu h) = H_2^{\nu - \frac{T}{h}n - \nu_1}(\nu h) H_1^{\nu_1}(\nu h) C^n \mathbf{v}(0).$$

Рассчитаем переходные процессы системы при следующих параметрах: $\gamma = 0,4$; $T = 1$ с; $h = 0,1$ с ($\nu_1 = 4$; $\nu_2 = 6$ см. рис. 4.2, б); $\alpha = 51$ с⁻¹; $b = 0,51$ с⁻¹.

H -матрицы для замкнутого и разомкнутого состояний прерывателя

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0,4877 & 0 & 0,4635 \end{bmatrix}; \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0,9512 \end{bmatrix}.$$

На основании полученных формул последовательно определяем:

$$\mathbf{v}(h) = H_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,4877 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(2h) = H_1^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_1 \mathbf{v}(h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5123 \\ 0,7138 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(3h) = H_1^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_1 \mathbf{v}(2h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2862 \\ 0,8186 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(4h) = H_1^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_1 \mathbf{v}(3h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1814 \\ 0,8671 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(5h) = H_2^{5-4} H_1^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_2 \mathbf{v}(4h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1329 \\ 0,8248 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(6h) = H_2^{6-4} H_1^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_2 \mathbf{v}(5h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1752 \\ 0,7846 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(7h) = H_2^{7-4} H_1^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_2 \mathbf{v}(6h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2154 \\ 0,7463 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(8h) &= H_2^{8-4} H_1^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_2 \mathbf{v}(7h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2537 \\ 0,7099 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{v}(9h) &= H_2^{9-4} H_1^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_2 \mathbf{v}(8h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2901 \\ 0,6753 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{v}(10h) &= H_2^{10-4} H_1^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_2 \mathbf{v}(9h) = C \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,3247 \\ 0,6424 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{v}(11h) &= H_1 C \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_1 \mathbf{v}(10h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,3576 \\ 0,7855 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{v}(12h) &= H_1^2 C \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_1 \mathbf{v}(11h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2145 \\ 0,8518 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{v}(13h) &= H_1^3 C \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_1 \mathbf{v}(12h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1482 \\ 0,8825 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{v}(14h) &= H_1^4 C \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_1 \mathbf{v}(13h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1175 \\ 0,8968 \end{bmatrix}; \\
\mathbf{v}(15h) &= H_2^{5-4} H_1^4 C \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = H_2 \mathbf{v}(14h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1032 \\ 0,8530 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Переходные процессы системы — выходная величина $x(t) \equiv x_1$ и ошибка системы на выходе фиксатора u_2 — показаны на рис. 4.3.

Для анализа устойчивости систем рассматриваемого класса следует матрицу монодромии C разделить на блоки согласно размерностям вектора входного воздействия и вектора переменных состояния системы:

$$C = \begin{bmatrix} \alpha(h) & 0 \\ \beta(h) & \gamma(h) \end{bmatrix}.$$

При этом характеристическое уравнение системы

$$\det[\gamma(h) - \rho I] = 0. \quad (4.9)$$

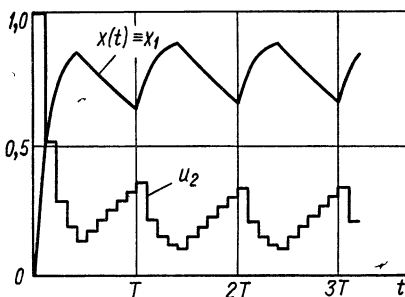


Рис. 4.3

Если корни этого характеристического уравнения лежат в круге единичного радиуса на комплексной плоскости ρ , система устойчива. Для рассматриваемой системы (рис.4.1,в) можно найти в аналитическом виде степени матриц $H_1(h)$ и $H_2(h)$. Действительно, обозначая

$$P = \frac{\alpha}{b}(1 - e^{-bh}); \quad Q = -\frac{\alpha}{b} + \left(\frac{\alpha}{b} + 1\right)e^{-bh}; \quad S = e^{-bh}$$

и записывая матрицы $H_1(h)$ и $H_2(h)$ в виде

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ P & 0 & Q \end{bmatrix}; \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix},$$

находим

$$H_1^v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - P(1 + \sum_{i=1}^{v-2} Q^i) & 0 & -Q^{v-1} \\ P(1 + \sum_{i=1}^{v-1} Q^i) & 0 & Q^v \end{bmatrix}; \quad H_2^v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -S^{v-1} \\ 0 & 0 & S^v \end{bmatrix}.$$

Матрицу монодромии C можно также записать в аналитическом виде

$$C = H_2^5 H_1^v = H_2^6 H_1^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - PS^5(1 + \sum_{i=1}^3 Q^i) & 0 & -S^5 Q^4 \\ PS^6(1 + \sum_{i=1}^3 Q^i) & 0 & S^6 Q^4 \end{bmatrix}.$$

Из записанной матрицы нетрудно найти, что

$$\gamma(h) = \begin{bmatrix} 0 & -S^5 Q^4 \\ 0 & S^6 Q^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-5bh} \left[-\frac{\alpha}{b} + \left(\frac{\alpha}{b} + 1\right)e^{-bh} \right]^4 \\ 0 & e^{-6bh} \left[-\frac{\alpha}{b} + \left(\frac{\alpha}{b} + 1\right)e^{-bh} \right]^4 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы согласно формуле (4.9)

$$\det[\gamma(h) - \rho I] = \rho \left\{ e^{-6bh} \left[-\frac{\alpha}{b} + \left(\frac{\alpha}{b} + 1\right)e^{-bh} \right]^4 - \rho \right\} = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\rho_1 = 0; \quad \rho_2 = e^{-6bh} \left[-\frac{\alpha}{b} + \left(\frac{\alpha}{b} + 1\right)e^{-bh} \right]^4.$$

Таким образом, система рис.4.1,в абсолютно устойчива при любых параметрах α , b и h .

При расчетах переходных процессов на ЭВМ удобно использовать рекуррентные соотношения. Такие соотношения можно получить методами теории нестандартных дискретных систем [23]. Так, для системы рис. 4.1,б с одним периодически работающим прерывателем в интервалах замкнутого состояния прерывателя переходные процессы

$$\mathbf{v}(\overline{v+1}h) = \mathbf{H}_1(h) \mathbf{v}(vh), \quad (nT)/h \leq v \leq (nT)/h + v_1 - 1; \quad (4.10)$$

в интервалах разомкнутого состояния прерывателя

$$\mathbf{v}(\overline{v+1}h) = \mathbf{H}_2(h) \mathbf{v}(vh), \quad h \frac{T}{h} + v_1 \leq v \leq n \frac{T}{h} + v_1 + v_2 - 1. \quad (4.11)$$

Числа n ($n = 0, 1, 2, \dots$) определяют основные интервалы; числа v ($v = 0, 1, 2, \dots$) — текущие дискретные моменты времени. Для первого основного интервала ($n = 0$) подынтервалы замкнутого и разомкнутого состояний прерывателя $0 \leq v \leq v_1$; $v_1 \leq v \leq v_1 + v_2$ ($v_1 + v_2 = T/h$; $v_1 = \gamma T/h$; $v_2 = (1 - \gamma) T/h$).

Для второго основного периода ($n = 1$): $T/h \leq v \leq T/h + v_1$; $T/h + v_1 \leq v \leq T/h + v_1 + v_2$. И так далее. $\mathbf{H}_1(h)$ и $\mathbf{H}_2(h)$ — это H -матрицы соответственно для замкнутого и разомкнутого состояний прерывателя; $\mathbf{J}(vh)$ — вектор состояния системы в моменты квантования; h — шаг квантования.

Рекуррентные соотношения (4.10) и (4.11) являются идеальной формой с точки зрения программирования для ЭВМ.

Если прерыватель в системе рис.4.1,б работает непериодически, то переходные процессы можно рассчитывать на конечном интервале времени от t_0 до t_m (рис.4.2,а). Нахождение переходного процесса связано с определением H -матриц соответственно для подынтервалов замкнутого и разомкнутого состояний прерывателя: $\mathbf{H}_1(h)$ и $\mathbf{H}_2(h)$. В соответствии с функцией коммутации прерывателя последовательно находим (рис.4.2,а):

$$\mathbf{v}(\overline{v+1}h) = \mathbf{H}_1(h) \mathbf{v}(vh);$$

$$0 \leq v \leq v_1 - 1 \quad (l_0 \leq v \leq l_1 - 1);$$

$$\mathbf{v}(\overline{v+1}h) = \mathbf{H}_2(h) \mathbf{v}(vh);$$

$$v_1 \leq v \leq v_1 + v_2 - 1 \quad (l_1 \leq v \leq l_2 - 1);$$

$$\mathbf{v}(\overline{v+1}h) = \mathbf{H}_1(h) \mathbf{v}(vh);$$

$$v_1 + v_2 \leq v \leq v_1 + v_2 + v_3 - 1 \quad (l_2 \leq v \leq l_3 - 1);$$

$$\mathbf{v}(\overline{v+1}h) = \mathbf{H}_2(h) \mathbf{v}(vh);$$

$$v_1 + v_2 + v_3 \leq v \leq v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 1 \quad (l_3 \leq v \leq l_4 - 1);$$

$$\mathbf{v}(\overline{v+1}h) = \mathbf{H}(h) \mathbf{v}(vh);$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \leq v \leq v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - 1 \quad (l_4 \leq v \leq l_5 - 1);$$

Вместе с расчетом переходного процесса можно оценивать качество этого процесса при помощи различных интегральных (суммарных)

оценок. Наиболее простыми интегральными оценками, которые учитывают колебательность и время регулирования, являются оценки вида

$$J_1 = \int_0^{\infty} |\Theta(t)| dt; \quad J_2 = \int_0^{\infty} \Theta^2(t) dt,$$

где $\Theta(t)$ — свободная составляющая переходного процесса.

Если $x(t)$ — реакция системы на входное воздействие, то $\Theta(t) = x(\infty) - x(t)$. При рассмотрении переходных процессов астатических систем с единичной обратной связью при входных воздействиях вида единичной ступенчатой функции $\Theta(t) = 1 - x(t)$; $x(t) \equiv x_1$.

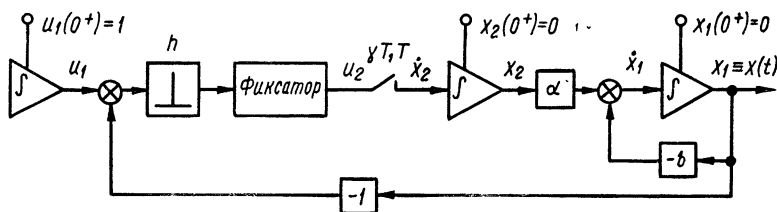


Рис. 4.4

Для систем рис.4.1 удобно находить оценки J_1 и J_2 по формуле трапеций с шагом интегрирования h (с которым рассчитан переходный процесс). При этом

$$J_1 = h \left(\frac{1}{2} |1 - x_{10}| + \sum_{i=1}^{N-1} |1 - x_{1i}| + \frac{1}{2} |1 - x_{1N}| \right); \quad (4.12)$$

$$J_2 = h \left[\frac{1}{2} (1 - x_{10})^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (1 - x_{1i})^2 + \frac{1}{2} (1 - x_{1N})^2 \right]. \quad (4.13)$$

Изменяя один из параметров системы, можно построить зависимость интегральной оценки от этого параметра и по минимальному значению интегральной оценки определить оптимальный параметр.

Рассмотрим замкнутую систему с периодически работающим прерывателем рис. 4.1,б, в которой

$$G(s) = \frac{\alpha}{s(s+b)}.$$

Пусть входное воздействие имеет вид единичной ступенчатой функции. Схема системы в переменных состояния (схема аналогового моделирования) изображена на рис. 4.4. Из этой схемы при замкнутом прерывателе дифференциальные уравнения состояния определяются $\dot{u}_1 = 0$; $\dot{u}_2 = 0$; $\dot{x}_2 = u_2$; $\dot{x}_1 = \alpha x_2 - b x_1$, уравнения переходных состояний

$$u_1(vh^+) = u_1(vh); \quad u_2(vh^+) = u_2(vh) - x_1(vh);$$

$$x_2(vh^+) = x_2(vh); \quad x_1(vh^+) = x_1(vh).$$

Записывая уравнения в векторной форме

$$\dot{\mathbf{v}}(\tau) = \mathbf{A}_1 \mathbf{v}(\tau) \text{ и } \mathbf{v}(\nu h^+) = \mathbf{B}_1 \mathbf{v}(\nu h),$$

находим матрицы \mathbf{A}_1 и \mathbf{B}_1 в виде

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -b \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Расширенная матрица перехода

$$\Phi_1(\tau) = L_1^{-1} \{[sI - \mathbf{A}_1]^{-1}\} = \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{b^2}(b\tau - 1 + e^{-b\tau}) & \frac{\alpha}{b}(1 - e^{-b\tau}) & e^{-b\tau} \end{bmatrix}.$$

Наконец, H -матрица

$$\begin{aligned} H_1(h) &= \Phi_1(h) \mathbf{B}_1 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ h & 0 & 1 & -h \\ \frac{\alpha}{b^2}(bh - 1 + e^{-bh}) & 0 & \frac{\alpha}{b}(1 - e^{-bh}) & e^{-bh} - \frac{\alpha}{b^2}(bh - 1 + e^{-bh}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Запишем матрицы \mathbf{A}_2 и \mathbf{B}_2 при разомкнутом прерывателе

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -b \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1.$$

Расширенная матрица перехода

$$\Phi_2(\tau) = L^{-1} \{[sI - \mathbf{A}_2]^{-1}\} = \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{b}(1 - e^{-b\tau}) & e^{-b\tau} \end{bmatrix}$$

и H -матрица

$$H_2(h) = \Phi_2(h) \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{b}(1 - e^{-bh}) & e^{-bh} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Переходные процессы системы (рис. 4.1), имеющей следующие параметры: $T=1$ с; $\gamma=0,5$; $h=0,1$ с; $v_1=v_2=5$; $b=2$ с $^{-1}$, изображены на рис. 4.5. На рис. 4.5, а показана реакция системы $x(t) \equiv x_1$ на единичный скачок входного сигнала при различных коэффициентах усиления α . При $\alpha=2$ с $^{-1}$ переходный процесс системы без перерегулирования, с временем регулирования $t_p \approx 3,5 T = 3,5$ с. При $\alpha=7,5$ с $^{-1}$ переходный

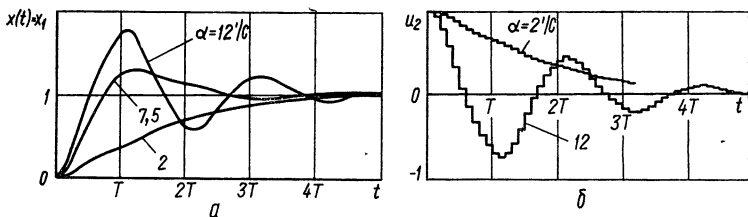


Рис. 4.5

процесс имеет перерегулирование $\delta \approx 29,4$ % и время регулирования $t_p \approx 2,1T = 2,1$ с. При $\alpha=12$ с $^{-1}$ переходный процесс характеризуется величинами $\delta \approx 76,3$ % и $t_p \approx 3,5$ с. Время регулирования определяется промежутком времени, по истечении которого отклонение переходной характеристики от установившегося значения, равного единице, не превышает 10%.

На рис. 4.5, б показана ошибка системы в переходных режимах на выходе фиксатора u_2 при коэффициентах усиления α , равных 2 и 12 с $^{-1}$. Эти ошибки имеют вид многоступенчатых функций с шагом квантования по времени $h = 0,1T = 0,1$ с.

На рис. 4.6 показаны кривые интегральных оценок J_1 и J_2 качества переходных характеристик системы рис.4.4, рассчитанные по формулам (4.12) и (4.13). Интегральные оценки J_1 и J_2 рассчитаны как функции переменного коэффициента усиления α при указанных выше остальных параметрах системы. Интегральная оценка J_1 имеет наименьшее значение при $\alpha \approx 6,5$ с $^{-1}$, а интегральная оценка J_2 — при $\alpha \approx 7,5$ с $^{-1}$. Таким образом, переходная характеристика на рис.4.5,а при $\alpha=7,5$ с $^{-1}$ является близкой к оптимальной с точки зрения интегральной оценки J_2 .

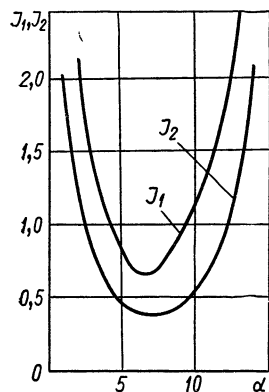


Рис. 4.6

11. СИСТЕМЫ С ЦИФРОВЫМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМИ УСТРОЙСТВАМИ

С увеличением надежности и уменьшением размеров, массы и стоимости ЭВМ стремятся использовать их в качестве составной части систем автоматического управления. Наиболее перспективными являются системы цифрового управления, в которых ЭВМ

находится в замкнутом контуре управления и выполняет вычисления в реальном масштабе времени. Применение ЭВМ для оптимального управления дает существенный экономический выигрыш. Цифровая система автоматического управления кроме обычных элементов содержит аналого-цифровой преобразователь (АЦП), цифровое вычислительное устройство (ЦВУ) и цифроаналоговый преобразователь (ЦАП). Во многих случаях можно пренебречь влиянием нелинейностей преобразователей. Это позволяет свести систему с ЭВМ к линейной импульсной системе. Импульсная система с конечным временем съема данных с цифровым вычислительным устройством (см. рис.4.1,а) является достаточно общей. Ранее эта система рассматривалась при условии, что передаточная функция цифрового вычислительного устройства (цифрового фильтра) $W(z)=1$. Исследуем эту систему (рис.4.1,а) с цифровым фильтром, передаточная функция которого отличается от единицы.

Цифровые фильтры. Вычислительное устройство, которое последовательность чисел (импульсов) $x(vh)$, поступающую в дискретные моменты времени vh на его вход, преобразует в выходную последовательность чисел (импульсов) $y(vh)$ по правилу

$$y(vh) = \sum_{i=0}^{l_1} a_i x[(v-i)h] - \sum_{i=1}^{l_2} b_i y[(v-i)h], \quad (4.16)$$

где a_i, b_i — постоянные коэффициенты, называют цифровым (дискретным) фильтром.

Используя аппарат Z-преобразования, можно алгоритм (4.16) записать в виде передаточной функции цифрового фильтра

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{l_1} z^{-l_1}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{l_2} z^{-l_2}} = \frac{\sum_{i=0}^{l_1} a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{l_2} b_i z^{-i}}, \quad (4.17)$$

где $X(z)$ и $Y(z)$ — z-преобразования входного и выходного сигналов цифрового фильтра; $b_0=1$.

В частном случае выражения (4.16) и (4.17) имеют вид

$$y(vh) = \sum_{i=0}^l c_i x[(v-i)h]; \quad W(z) = \sum_{i=0}^l c_i z^{-i}. \quad (4.18)$$

Цифровые фильтры, функционирующие по алгоритмам (4.16) и (4.17), называют рекурсивными, а по алгоритмам (4.18) — нерекурсивными. Отличие этих фильтров состоит в том, что рекурсивный цифровой фильтр вычисляет текущее значение выходной величины $y(vh)$ по значениям входного сигнала в данный и предыдущие дискретные моменты времени и значениям выходного сигнала в предыдущие дискретные моменты времени, а нерекурсивный цифровой фильтр вычисляет текущее значение выходной величины $y(vh)$ только по значениям входного сигнала в данный и предыдущие моменты времени.

Коэффициенты a_i , b_i и c_i связаны рекурсивным соотношением

$$c_k = a_k - \sum_{i=1}^k b_i c_{k-i}, \quad (4.19)$$

где $a_i = 0$ при $i > l_1$, $b_i = 0$ при $i > l_2$, которое получается приравниванием правых частей функции $W(z)$ в выражениях (4.17) и (4.18) при $l = \infty$.

С учетом выражения (4.19) передаточную функцию рекурсивного фильтра запишем в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}. \quad (4.20)$$

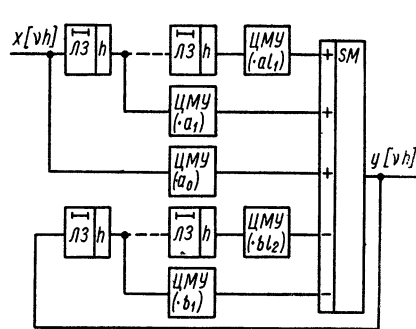


Рис. 4.7

Поэтому рекурсивный фильтр называют также фильтром с бесконечной памятью, а нерекурсивный — фильтром с конечной памятью. Цифровой (дискретный) фильтр, как следует из формул (4.16) — (4.18), можно реализовать на элементах цифровой техники (линиях задержки, множительных устройствах и сумматорах), если в правую часть разностного уравнения (4.16) входят только настоящие и прошлые значения входной величины, но не входят будущие значения.

На рис. 4.7 показана функциональная схема рекурсивного цифрового фильтра, построенная по методу прямого программирования на линиях задержки ЛЗ, цифровых множительных устройствах ЦМУ и сумматоре SM.

Цифровые (дискретные) фильтры можно также реализовать на элементах дискретных систем: мгновенных ключах, фиксаторах, сумматорах, усилителях и элементах задержки. Схемы таких фильтров в переменных состояниях в отличие от схем непрерывных систем вместо интеграторов содержат элементы задержки.

Расчет систем при воздействии типа ступенчатой функции. Рассмотрим систему с конечным временем съема данных (рис.4.8,а), имеющую цифровой фильтр. Наличие цифрового фильтра позволяет при входном воздействии типа ступенчатой функции и нулевых начальных условиях осуществить оптимальный переходный процесс без перегулирования за конечное и минимальное время. Для получения такого оптимального переходного процесса необходимо определить требуемую передаточную функцию цифрового фильтра $W(z)$. Наиболее просто функция $W(z)$ определяется методом переменного коэффициента усиления [23]. Метод заключается в том, что цифровой фильтр рассматривается как усилитель с переменным коэффициентом усиления K_v , принимающим различные значения на различных интервалах прерывания мгновенного ключа длительностью h . В струк-

турной схеме такой усилитель располагается после фиксатора (рис. 4.8, б), причем в любой момент времени $t = \nu h^+$ вход u_2 и выход u_2' этого усилителя связаны линейным соотношением $u_2'(\nu h^+) = K_\nu u_2(\nu h^+)$, где K_ν — постоянный коэффициент усиления усилителя в $(\nu + 1)$ -м периоде прерывания мгновенного ключа. Матрица перехода системы Φ представляется в виде функции коэффициентов K_ν в последовательных интервалах прерывания мгновенного ключа. Используя известные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}(\nu h^+) &= \mathbf{B}\mathbf{v}(\nu h); \\ \mathbf{v}(\nu + 1)h &= \Phi(h)\mathbf{v}(\nu h^+); \\ \mathbf{v}(\nu + 1)h &= \Phi(h)\mathbf{B}\mathbf{v}(\nu h), \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

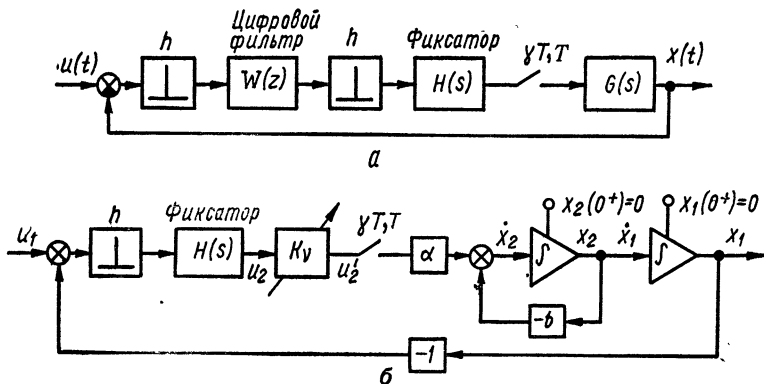


Рис. 4.8

находим вектор состояния $\mathbf{v}(\nu h)$ как функцию коэффициентов усиления $K_0, K_1, K_2, \dots, K_{\nu-1}$. Зная значения вектора состояния $\mathbf{v}(\nu h^+)$ в последовательные дискретные моменты времени $\nu = 0, 1, 2, \dots$, получаем последовательность входных $u_2(\nu h^+)$ и выходных $u_2'(\nu h^+) = K_\nu u_2(\nu h^+)$ сигналов цифрового фильтра.

Передаточная функция $W(z)$ цифрового фильтра

$$W(z) = \frac{U_2'(z)}{U_2(z)} = \frac{\sum_{\nu=0}^n K_\nu u_2(\nu h^+) z^{-\nu}}{\sum_{\nu=0}^n u_2(\nu h^+) z^{-\nu}}. \quad (4.22)$$

Константы K_ν находят с учетом требований, предъявляемых к системе. Для получения максимального быстрого действия при входном воздействии вида ступенчатой функции и нулевых начальных условиях необходимо, чтобы при $t > ph$, где p — порядок дифференциального уравнения непрерывной части системы; h — шаг квантования мгновенного ключа, ошибка системы равнялась нулю и вводные сигналы интеграторов схемы системы в переменных состояния также были равны нулю.

При расчете методом переменного коэффициента усиления систем с конечным временем съема данных, имеющих цифровые фильтры, возможны два случая: 1) переходный процесс системы заканчивается за время, меньшее времени замыкания прерывателя γT (т. е. $ph < \gamma T$); 2) переходный процесс системы заканчивается за время, большее времени замыкания прерывателя γT ($ph > \gamma T$). Если в первом случае расчет системы с конечным временем съема данных мало отличается от расчета обычной импульсной системы, то во втором случае расчет имеет существенные особенности.

Рассмотрим систему (рис. 4.8, а), в которой передаточная функция непрерывной части

$$G(s) = \frac{\alpha}{s(s+b)}.$$

Схема аналогового моделирования для рассматриваемой системы изображена на рис. 4.8, б. Цифровой фильтр (цифровой регулятор) представлен в виде усилительного элемента с переменным коэффициентом усиления K_v . Входное воздействие u_1 имеет вид единичной ступенчатой функции. При замкнутом прерывателе дифференциальные уравнения состояния $\dot{u}_1 = 0$; $\dot{x} = x_2$; $\dot{x}_2 = u_2\alpha - bx_2$; $\dot{u}_2 = 0$, уравнения переходных состояний $u_1(vh^+) = u_1(vh)$; $x_1(vh^+) = x_1(vh)$; $x_2(vh^+) = x_2(vh)$; $u_2(vh^+) = u_1(vh) - x_1(vh)$.

Вектор состояния

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Переписывая уравнения в векторной форме $\dot{\mathbf{v}}(\tau) = \mathbf{A}_1\mathbf{v}(\tau)$ и $\mathbf{v}(vh^+) = \mathbf{B}_1\mathbf{v}(vh)$, находим матрицы

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом усилителя с переменным коэффициентом усиления K_v матрицу перехода определим по матрице \mathbf{A}_1 в виде

$$\Phi_1(h, K_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b}(1 - e^{-bh}) & \frac{\alpha}{b^2}(bh - 1 + e^{-bh})K_v \\ 0 & 0 & e^{-bh} & \frac{\alpha}{b}(1 - e^{-bh})K_v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вектор начального состояния

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

На основании соотношений (4.21) последовательно определяем

$$\mathbf{v}(0^+) = \mathbf{B}_1 \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(h) = \Phi_1(h_1, K_0) \mathbf{v}(0^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) K_0 \\ \frac{\alpha}{b} (1 - e^{-bh}) K_0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(h^+) = \mathbf{B}_1 \mathbf{v}(h) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) K_0 \\ \frac{\alpha}{b} (1 - e^{-bh}) K_0 \\ 1 - \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) K_0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(2h) = \Phi_1(h, K_1) \mathbf{v}(h^+) = \begin{bmatrix} u_1(2h) \\ x_1(2h) \\ x_2(2h) \\ u_2(2h) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\alpha}{b^2} (bh - e^{-bh} + e^{-2bh}) K_0 + \\ + \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) \left[1 - \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) K_0 \right] K_1 \\ \frac{\alpha}{b} (e^{-bh} - e^{-2bh}) K_0 + \\ + \frac{\alpha}{b} (1 - e^{-bh}) \left[1 - \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) K_0 \right] K_1 \\ 1 - \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) K_0 \end{bmatrix}.$$

Последнее выражение показывает, что в конечном состоянии равновесия систему можно перевести за два периода прерывания мгновен-

ного ключа. Для этого необходимо совместное выполнение двух условий:

$$\left. \begin{aligned} x_1(2h) &= \frac{\alpha}{b^2} (bh - e^{-bh} + e^{-2bh}) K_0 + \\ &+ \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) \left[1 - \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) K_0 \right] K_1 = 1; \\ x_2(2h) &= \frac{\alpha}{b} (e^{-bh} - e^{-2bh}) K_0 + \\ &+ \frac{\alpha}{b} (1 - e^{-bh}) \left[1 - \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) K_0 \right] K_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Действительно, при этом

$$\mathbf{v}(2h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 - \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) K_0 \end{bmatrix},$$

а при таком значении вектора $\mathbf{v}(2h)$ далее имеем

$$\mathbf{v}(2h^+) = \mathbf{B}_1 \mathbf{v}(2h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(3h) = \Phi_1(h, K_2) \mathbf{v}(2h^+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(3h^+) = \mathbf{B}_1 \mathbf{v}(3h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

.....

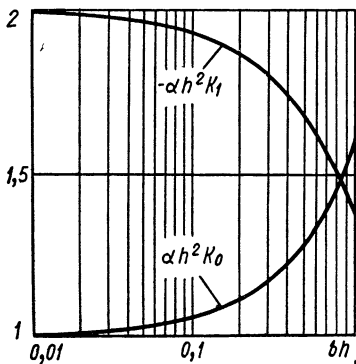


Рис. 4.9

Таким образом, при $x_1(2h) = 1$ и $x_2(2h) = 0$ в желаемое конечное состояние равновесия систему можно перевести за два периода квантования h . Решая систему уравнений (4.23) относительно K_0 и K_1 , находим

$$K_0 = \frac{bh}{\alpha h^2 (1 - e^{-bh})};$$

$$K_1 = - \frac{(bh)^2 e^{-bh}}{\alpha h^2 [1 - e^{-bh} (1 + bh)]}.$$

Зависимости $\alpha h^2 K_0 = f(bh)$ и $-\alpha h^2 K_1 = f(bh)$ построены на рис.4.9.

Зная значения вектора состояния $v(vh^+)$ в последовательные дискретные моменты времени, выпишем последовательность входных и выходных сигналов цифрового фильтра:

$$\begin{aligned} u_2(0^+) &= 1; \\ u_2(h^+) &= 1 - \frac{\alpha}{b^2} (bh - 1 + e^{-bh}) K_0; \\ u_2(vh^+) &= 0 \text{ при } v \geq 2; \\ u_2'(0^+) &= K_0 u_2(0^+) = K_0; \\ u_2'(h^+) &= K_1 u_2(h^+); \\ u_2'(vh^+) &= K_v u_2(vh^+) = 0 \text{ при } v \geq 2. \end{aligned}$$

Передаточная функция цифрового фильтра

$$W(z) = \frac{U_2'(z)}{U_2(z)} = \frac{\sum_{v=0}^1 K_v u_2(vh^+) z^{-v}}{\sum_{v=0}^1 u_2(vh^+) z^{-v}}.$$

Зададимся следующими параметрами системы: $b=2c^{-1}$; $\alpha=10 c^{-1}$; $h=0,1$ с; $T=1$ с. Если относительная длительность замыкания прерывателя γ находится в пределах от 0,2 до 1, то $ph < \gamma T$ ($p=2$) и переходный процесс системы закончится во время замкнутого состояния прерывателя. Размыкание прерывателя не вызовет новых переходных процессов, так как ошибка системы и сигналы на входах интеграторов равны нулю.

При указанных параметрах системы $K_0 \approx 11,0333$; $K_1 \approx -18,6892$;

$$W(z) = \frac{11,0333 - 9,0333z^{-1}}{1 + 0,4833z^{-1}} = 11,0333 \frac{1 - 0,8187z^{-1}}{1 + 0,4833z^{-1}},$$

а переходные процессы системы определяются по формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,5(2\tau - 1 + e^{-2\tau}) K_0; \\ x_2 &= 5(1 - e^{-2\tau}) K_0; \\ u_2 &= 1; u_2' = K_0 \text{ при } 0 \leq \tau \leq h; \tau = t; \\ x_1 &= 2,5(e^{-0,2} - 0,8) K_0 + 2,5(1 - e^{-0,2}) K_0(1 - e^{-2\tau}) + \\ &\quad + 2,5[1 - 2,5(e^{-0,2} - 0,8) K_0] K_1(2\tau - 1 + e^{-2\tau}); \\ x_2 &= 5(1 - e^{-0,2}) K_0 e^{-2\tau} + 5[1 - 2,5(e^{-0,2} - 0,8) K_0] K_1(1 - e^{-2\tau}); \\ u_2 &= 1 - 2,5(e^{-0,2} - 0,8) K_0; \\ u_2 &= [1 - 2,5(e^{-0,2} - 0,8) K_0] K_1 \text{ при } 0 \leq \tau \leq h; h \leq t \leq 2h; \tau = t - h. \end{aligned}$$

Эти переходные процессы изображены на рис.4.10.

Зададимся следующими параметрами системы; $b=2c^{-1}$; $\alpha=10 c^{-1}$; $h=0,1$ с; $T=0,4$ с. Пусть относительная длительность замыкания прерывателя $\gamma=0,25$. В этом случае $ph > \gamma T$ и переходные процессы в системе не могут закончиться во время замкнутого состояния прерывателя. Поэтому необходимо изучить поведение системы как при замкнутом, так и при разомкнутом состояниях прерывателя.

Из схемы аналогового моделирования при разомкнутом прерывателе дифференциальные уравнения состояния $\dot{u}_1=0$; $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = -bx_2$; $\dot{u}_2=0$, уравнения переходных состояний, остаются прежними, как и при замкнутом прерывателе. Поэтому

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_2 = B_1.$$

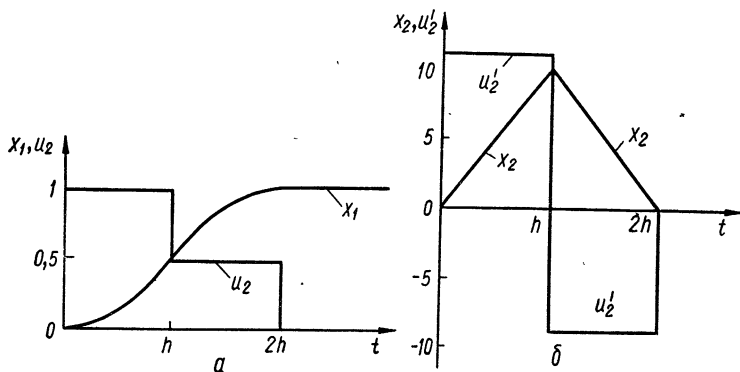


Рис. 4.10

Матрица перехода

$$\Phi_2(h) = L^{-1} \{ [sI - A_2]^{-1} \} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b}(1 - e^{-bh}) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-bh} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая H -матрица

$$H_2(h) = \Phi_2(h) B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b}(1 - e^{-bh}) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-bh} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$A = \frac{1}{b}(1 - e^{-bh}); \quad B = e^{-bh}. \quad (4.24)$$

С учетом этих обозначений запишем матрицу

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и определим, что

$$H_2^v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A(1 + \sum_{i=1}^{v-1} B^i) & 0 \\ 0 & 0 & B^v & 0 \\ 1 & -1 & -A(1 + \sum_{i=1}^{v-2} B^i) & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть вектор начального состояния

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

На первом шаге квантования мгновенного ключа система находится в замкнутом состоянии, на трех последующих шагах квантования — в разомкнутом состоянии (прерыватель разомкнут), на пятом шаге квантования — в замкнутом состоянии, а на трех последующих шагах квантования — снова в разомкнутом состоянии, на девятом шаге квантования мгновенного ключа система снова находится в замкнутом состоянии и т.д. С учетом описанной работы системы и принятых обозначений на основании соотношения (4.21) последовательно определим

$$\mathbf{v}(h) = \Phi_1(h, K_0) \mathbf{B}_1 \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\alpha}{b}(h-A)K_0 \\ \alpha AK_0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(h^+) = \mathbf{B}_2 \mathbf{v}(h) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\alpha}{b}(h-A)K_0 \\ \alpha AK_0 \\ 1 - \frac{\alpha}{b}(h-A)K_0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(2h) = \mathbf{H}_2 \mathbf{v}(h) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\alpha}{b}(h-A)K_0 + \alpha A^2 K_0 \\ \alpha ABK_0 \\ 1 - \frac{\alpha}{b}(h-A)K_0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(2h^+) = \mathbf{B}_2 \mathbf{v}(2h) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2 \right] \\ \alpha K_0 AB \\ 1 - \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2 \right] \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(3h) = \mathbf{H}_2^2 \mathbf{v}(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A(1+B) & 0 \\ 0 & 0 & B^2 & 0 \\ 1 & -1 & -A & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(h) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2(1+B) \right] \\ \alpha K_0 AB^2 \\ 1 - \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2 \right] \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(3h^+) = \mathbf{B}_2 \mathbf{v}(3h) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2(1+B) \right] \\ \alpha K_0 AB^2 \\ 1 - \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2(1+B) \right] \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(4h) = \mathbf{H}_2^3 \mathbf{v}(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A(1+B+B^2) & 0 \\ 0 & 0 & B^3 & 0 \\ 1 & -1 & -A(1+B) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(h) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\alpha}{b}(h-A)K_0 + \alpha A^2 K_0(1+B+B^2) \\ \alpha K_0 AB^3 \\ 1 - \frac{\alpha}{b}(h-A)K_0 - \alpha K_0 A^2(1+B) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(4h^+) = \mathbf{B}_1 \mathbf{v}(4h) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\alpha}{b}(h-A)K_0 + \alpha K_0 A^2(1+B+B^2) \\ \alpha K_0 AB^3 \\ 1 - \frac{\alpha}{b}(h-A)K_0 - \alpha K_0 A^2(1+B+B^2) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(5h) = \Phi_1(h, K_4) \mathbf{v}(4h^+) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2(1+B+B^2) \right] + \alpha K_0 A^2 B^3 + \\ + \left\{ 1 - \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2(1+B+B^2) \right] \right\} \frac{\alpha}{b}(h-A)K_4 \\ \alpha K_0 AB^4 + \left\{ 1 - \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2(1+B+B^2) \right] \right\} \alpha AK_4 \\ 1 - \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2(1+B+B^2) \right] \end{bmatrix}.$$

Последнее выражение показывает, что в желаемое конечное состояние равновесия систему можно перевести за пять периодов пре-

рывания мгновенного ключа. Для этого необходимо совместное выполнение двух условий

$$\left. \begin{aligned} x_1(5h) &= \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2(1+B+B^2) \right] + \alpha K_0 A^2 B^3 + \\ &+ \left\{ 1 - \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2(1+B+B^2) \right] \right\} \frac{\alpha}{b}(h-A) K_4 = 1; \\ x_2(5h) &= \alpha K_0 A B^4 + \left\{ 1 - \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2(1+B+B^2) \right] \right\} \alpha A K_4 = 0. \end{aligned} \right\} (4.25)$$

Действительно, при этом

$$\mathbf{v}(5h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 - \alpha K_0 \left[\frac{1}{b}(h-A) + A^2(1+B+B^2) \right] \end{bmatrix},$$

а при таком значении вектора $\mathbf{v}(5h)$ имеем

$$\mathbf{v}(5h^+) = \mathbf{B}_2 \mathbf{v}(5h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(6h) = \Phi_2(h) \mathbf{v}(5h^+) = \mathbf{H}_2 \mathbf{v}(5h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

.....

$$\mathbf{v}(8h) = \mathbf{H}_2^3 \mathbf{v}(5h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{v}(8h^+) = \mathbf{B}_1 \mathbf{v}(8h) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

.....

Решая систему уравнений (4.25) относительно K_0 и K_4 с учетом того, что $A = \frac{1}{b}(1-B)$, после небольших преобразований получаем

$$K_0 = \frac{1}{\frac{\alpha}{b}(1-B^4)}; \quad K_4 = -\frac{K_0 B^4}{1 - \frac{\alpha}{b} K_0 (h - AB^3)}.$$

Вычисляя коэффициенты усиления при заданных параметрах системы, определяем $K_0 = 3,6319$; $K_4 = -18,6891$. Зная значения вектора состояния $\mathbf{v}(nh^+)$ в последовательные дискретные моменты времени, вычисляем последовательность входных и выходных сигналов цифрового фильтра:

$$u_2(0^+) = 1;$$

$$\begin{aligned}
 u_2(h^+) &= 1 - \frac{\alpha K_0}{b} (h - A) = 0,8299; \\
 u_2(2h^+) &= 1 - \frac{\alpha K_0}{b} (h - AB) = 0,5316; \\
 u_2(3h^+) &= 1 - \frac{\alpha K_0}{b} (h - AB^2) = 0,2873; \\
 u_2(4h^+) &= 1 - \frac{\alpha K_0}{b} (h - AB^3) = 0,0873; \\
 u_2(vh^+) &= 0 \text{ при } v \geq 5; \\
 u_2'(0^+) &= K_0 u_2(0^+) = K_0 = 3,6319; \\
 u_2'(4h^+) &= K_4 u_2(4h^+) = -1,6319; \\
 u_2'(vh^+) &= K_v u_2(vh^+) = 0 \text{ при } v = 1, 2, 3 \text{ и } v \geq 5.
 \end{aligned}$$

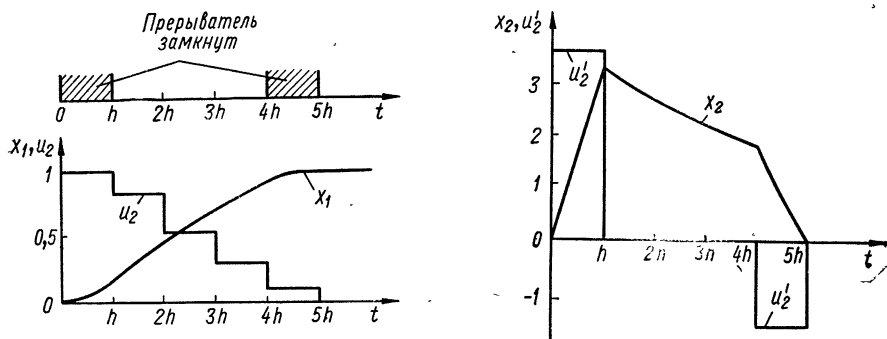


Рис. 4.11

Передаточная функция цифрового фильтра

$$W(z) = \frac{3,6319 - 1,6319z^{-4}}{1 + 0,8299z^{-1} + 0,5316z^{-2} + 0,2873z^{-3} + 0,0873z^{-4}}.$$

Переходные процессы системы

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\alpha}{b^2} (b\tau - 1 + e^{-b\tau}) K_0; \quad x_2 = \frac{\alpha}{b} (1 - e^{-b\tau}) K_0 \text{ при } 0 \leq \tau \leq h; \quad t = \tau; \\
 x_1 &= \frac{\alpha}{b} K_0 (h - Ae^{-b\tau}); \quad x_2 = \alpha AK_0 e^{-b\tau} \text{ при } 0 \leq \tau \leq h; \quad t = \tau + h; \\
 x_1 &= \frac{\alpha}{b} K_0 (h - AB e^{-b\tau}); \quad x_2 = \alpha AB K_0 e^{-b\tau} \text{ при } 0 \leq \tau \leq h; \quad t = \tau + 2h; \\
 x_1 &= \frac{\alpha}{b} K_0 (h - AB^2 e^{-b\tau}); \quad x_2 = \alpha K_0 AB^2 e^{-b\tau} \text{ при } 0 \leq \tau \leq h; \quad t = \tau + 3h; \\
 x_1 &= \frac{\alpha}{b} K_0 (h - AB^3 e^{-b\tau}) + \frac{\alpha}{b^2} (b\tau - 1 + e^{-b\tau}) K_4 \left[1 - \frac{\alpha}{b} K_0 (h - AB^3) \right]; \\
 x_2 &= \alpha K_0 AB^3 e^{-b\tau} + \frac{\alpha}{b} (1 - e^{-b\tau}) K_4 \left[1 - \frac{\alpha}{b} K_0 (h - AB^3) \right] \text{ при } 0 \leq \tau \leq h; \quad t = \tau + 4h; \\
 x_1 &= 0; \quad x_2 = 0 \text{ при } t \geq 5h.
 \end{aligned}$$

Эти переходные процессы изображены на рис.4.11.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артемьев В. М., Ганэ В. А., Степанов В. Л. Управление в системах с разделением времени.— Минск.: Вышейш. шк., 1982.— 224 с.
2. Гостев В. И. К расчету переходных процессов периодических импульсных систем с конечным временем съема данных при детерминированных входных сигналах.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 5, с. 50—53.
3. Гостев В. И. Метод баланса огибающих гармонических составляющих для анализа замкнутых автоматических систем с синхронными множительными устройствами.— Техн. кибернетика, 1970, вып. 10, с. 18—31.
4. Гостев В. И. Области устойчивости и неустойчивости импульсных систем третьего порядка с конечным временем съема данных.— Кибернетика и вычислит. техника, 1977, вып. 38, с. 3—10.
5. Гостев В. И. Области устойчивости и неустойчивости обобщенной двухынтеграторной радиотехнической следящей системы с ключом.— Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника, 1980, № 1, с. 66—70.
6. Гостев В. И. Области устойчивости и неустойчивости периодической колебательной системы второго порядка.— Изв. вузов. Сер. Электромеханика, 1980, № 15, с. 513—518.
7. Гостев В. И. Проблема определения областей устойчивости в плоскости параметров одного класса дискретных систем.— В кн.: Дискретные системы управления. К.: Ин-т кибернетики АН УССР, 1976, с. 38—49.
8. Гостев В. И. Расчет автоматических систем с синхронными множительными устройствами.— К.: Техніка, 1973.— 200 с.
9. Гостев В. И., Ильницкий А. И. Оптимизация параметров и коррекция динамических свойств периодически нестационарных систем.— Изв. вузов. Сер. Электромеханика, 1981, № 8, с. 882—885.
10. Гостев В. И., Ильницкий А. И. Оптимизация параметров линейных периодических нестационарных систем автоматического управления.— Кибернетика и вычислит. техника, 1981, вып. 53, с. 3—7.
11. Гостев В. И., Ильницкий А. И. Численный метод построения переходных процессов периодически нестационарных систем.— Изв. вузов. Сер. Электромеханика, 1980, № 8, с. 868—873.
12. Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами.— М.: Машиностроение, 1974.— 288 с.
13. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.— 472 с.
14. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования.— М.: Физматгиз, 1963.— 456 с.
15. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем.— М.: Наука, 1970.— 704 с.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1974.— 832 с.
17. Кузин Л. Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления.— М.: Машгиз, 1962.— 684 с.
18. Первачев С. В., Валуев А. А., Чиликин В. М. Статистическая динамика радиотехнических следящих систем.— М.: Сов. радио, 1973.— 488 с.
19. Проблемы теории импульсных систем управления/Под ред. Я. З. Цыпкина.— М.: Наука, 1966.— 176 с.
20. Проектирование аналого-цифровых систем на интегральных схемах/Под ред. Б. В. Шамрая.— Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1976.— 256 с.
21. Пышкин И. В. Точный метод расчета переходных процессов и устойчивости импульсных систем с конечным временем съема данных.— Автоматика и телемеханика, 1963, № 10, с. 1303—1316.

22. Теория автоматического управления/Под ред. А. А. Воронова.— М.: Высш. шк., 1977.— Ч.1. 304 с.; Ч.2. 228 с.
23. Ту Ю. Современная теория управления.— М.: Машиностроение, 1971.—472 с.
24. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления.— М.: Машиностроение, 1964.— 704 с.
25. Физический энциклопедический словарь.— М.: Сов. энцикл., 1965.— Т.4. 592 с.
26. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем.— М.: Физматгиз, 1963.— 968 с.
27. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.— 720 с.
28. Bongiorno J. J. Real-Frequency Stability Criteria for Linear Time-Varying Systems.— Proc. of the IEEE, 1964, vol. 52, N 7, p.832—841.
29. Ganti Prasada Rao. Analysis of a Class of Non-linear and Time-Varying Parameter Feedback Systems.—Intern. Journal of Control, 1970, vol. 12, N 5, p. 857—867.
30. Hirai K., Hamasaki Y. The Stability of a System with Periodically Varying Parameters.—IEEE Trans. on Circuit Theory, 1967, vol. CT-14, N 1, p.56—60.
31. Unbehauen R. Bestimmung der Übertragungsfunktion linearer Systeme mit sich periodisch ändernden Parametern.—AEÜ, 23, 1969, H, 10, Mai, s. 516—520.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Глава 1. Устойчивость импульсных систем с конечным временем съема данных	5
1. Условия устойчивости и неустойчивости систем	5
2. Расчет областей устойчивости и неустойчивости систем второго порядка	21
3. Расчет областей устойчивости и неустойчивости систем третьего порядка	35
4. Некоторые достаточные условия устойчивости и неустойчивости систем	45
Глава 2. Расчет переходных процессов импульсных систем с конечным временем съема данных	49
5. Расширенная переходная матрица. Реакция систем на детерминированные воздействия	49
6. Расчет переходных процессов импульсных систем с периодически работающими прерывателями	59
7. Численные методы расчета переходных процессов систем. Оптимизация параметров систем на основе интегральных показателей качества	77
Глава 3. Эквивалентные частотные характеристики импульсных систем с конечным временем съема данных	86
8. Эквивалентные передаточные матрицы и эквивалентные частотные характеристики импульсных систем	86
9. Расчет систем в частотной области. Анализ устойчивости и качества систем на основе эквивалентных передаточных функций	104
Глава 4. Расчет импульсных систем с конечным временем съема данных с цифровыми вычислительными устройствами	127
10. Системы с простейшими импульсными элементами (системы с мгновенными ключами)	127
11. Системы с цифровыми вычислительными устройствами	138
Список литературы	151

Владимир Иванович Гостев, д-р техн. наук
Сергей Владимирович Гусовский, канд. техн. наук

**Расчет и оптимизация систем
с конечным временем съема данных**

Редактор Н. М. Корнильева
Формлиение художника В. С. Крюкова
Художественные редакторы Л. А. Дикарев, В. С. Шапошников
Технический редактор С. В. Иванов
Корректор Л. А. Москаленко

Информ. бланк № 2671

Сдано в набор 03.04.84. Подписано в печать 30.08.84. БФ 36918. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типогр. № 3. Гарн. лит. Печ. выс. Усл. печ. л. 9,5. Усл. кр.-отг. 9,94 Уч. изд. л. 9,67. Тираж 2000 экз. Зак. 4-427. Цена 60 к

Издательство «Техніка» 252601, Киев, 1, Крещатик, 5.

Отпечатано с матриц Харьковской книжной фабрики им. М. В. Фрунзе на Харьковской книжной фабрике «Коммунист», 310012, Харьков-12, Энгельса, 11.