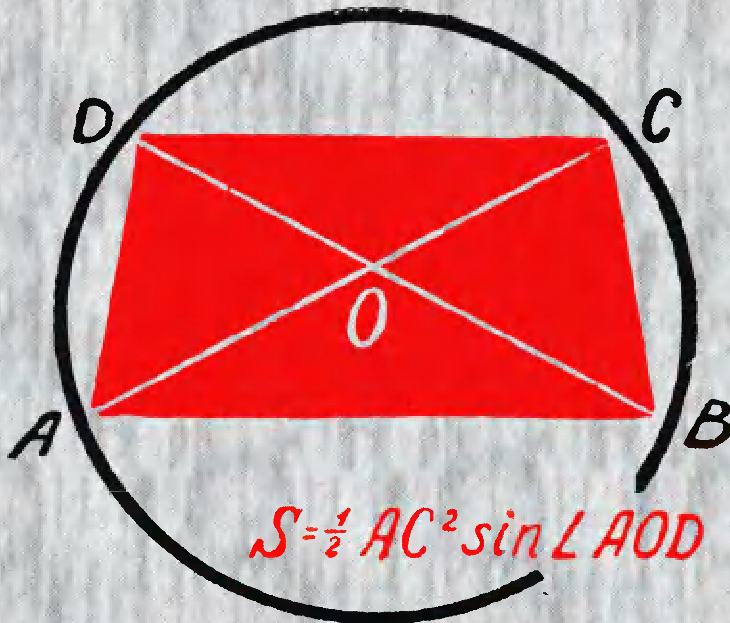
Э. Г. ГОТМАН



УРАВНЕНИЯ ТОЖДЕСТВА НЕРАВЕНСТВА

ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Э. Г. ГОТМАН

УРАВНЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, НЕРАВЕНСТВА

ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ
СТАРШИХ КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1965

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник содержит геометрические задачи и может быть использован учителями математики средней школы в процессе работы с учащимися старших классов.

Сборник состоит из трех глав.

В главе I помещены геометрические задачи по курсу «Алгебра и элементарные функции», приводящие к алгебраическим и тригонометрическим уравнениям, а также задачи на доказательство неравенств и тождеств.

Глава II содержит задачи по основным разделам курса геометрии старших классов. Стереометрические задачи представлены, главным образом, задачами, которые решаются с помощью уравнений.

Глава III содержит задачи для внеклассной работы с учащимися.

Задачи каждой главы разбиты на параграфы в соответствии с темами программы по математике для средней школы. В каждом параграфе задачи расположены по степени возрастающей трудности и приведены по возможности в такую систему, что решение трудной задачи подготавливается решением предыдущих задач. Трудные задачи снабжены краткими решениями или указаниями к решению.

Особое внимание уделено задачам с параметрическими данными. В ответах к этим задачам указываются множества допустимых значений параметров.

В сборнике много новых задач, составленных автором на основе его педагогического опыта. Ряд задач заимствован из различных источников. Литература приведена в конце сборника. В книге [1] и в статьях [7] и [8] изложена методика решения задач с параметрическими данными. Более трудные задачи по теме настоящего сборника можно найти в книгах [2] и [3].

Автор выражает глубокую благодарность профессору З. А. Скопецу за ценные советы и указания по составлению сборника.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе преподавания математики важно научить учащихся применять идеи и методы одной математической дисциплины к другой. Понимание взаимосвязи математических дисциплин поможет учащимся лучше усвоить программный материал, сделает знания их более конкретными, глубокими и прочными.

Учитель имеет широкие возможности использовать взаимосвязь математических дисциплин при решении целесообразно подобранных задач. Предлагаемый сборник содержит такие задачи геометрического характера для решения как на уроках геометрии, так и на уроках алгебры в старших классах средней школы.

Задачи первых двух параграфов сборника рекомендуется решать в IX классе при изучении алгебраического материала.

Решение задач на геометрические неравенства легко связать с изучением числовых неравенств. Покажем это на примере.

З а д а ч а 1. *Доказать, что высоты h_a, h_b, h_c треугольника и радиус r вписанной в него окружности удовлетворяют неравенству*

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r. \tag{1}$$

Для решения задачи можно воспользоваться формулами $h_a = \frac{2S}{a}$ и $r = \frac{S}{p}$ (S — площадь, p — полупериметр треугольника), с помощью которых неравенство (1) приводится к виду

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}. \tag{2}$$

Обратно, из неравенства (2) вытекает неравенство (1). Справедливость неравенства (2) для любых положительных чисел a, b, c можно установить, умножив обе части неравенства на $a + b + c$ и воспользовавшись известным неравенством $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

Таким образом, интересное соотношение между элементами треугольника доказывается средствами алгебры.

Решение подобных задач содействует лучшему усвоению и алгебры и геометрии. Навыки в установлении границ изменения геометрических величин находят в дальнейшем применение при решении задач с параметрическими данными.

В сборник включены разнообразные геометрические задачи, решаемые с помощью тригонометрических функций. Это прежде всего задачи, приводящие к тригонометрическим уравнениям, решение которых поможет уяснить учащимся практическое значение тригонометрических уравнений.

Уже при изучении темы «Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента» в IX классе имеется возможность познакомить учащихся с простыми задачами такого рода. При этом учитель должен иметь в виду, что нередко одна и та же задача может быть решена несколькими способами. Приведем пример.

Задача 2. *Определить угол при основании равнобедренного треугольника, если известны боковая сторона b и расстояние q ортоцентра треугольника от вершины угла при основании.*

Первый способ. Пусть ABC — равнобедренный треугольник (черт. 1), в котором $AC = BC = b$, CD — высота, H — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника, $AH = q$.

Для определения угла α при основании найдем значение какой-либо тригонометрической функции этого угла, например $\cos\alpha = \frac{AD}{AC}$. Обозначим отрезок AD через x. Тогда $CD = \sqrt{b^2 - x^2}$.

Из подобия треугольников ACD и AHD имеем:

$$\frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \frac{q}{b},$$

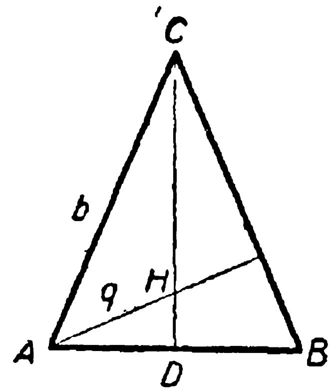
откуда

$$x = \frac{bq}{\sqrt{b^2+q^2}} \text{ и } \cos\alpha = \frac{q}{\sqrt{b^2+q^2}}.$$

Второй способ. Пусть α — угол при основании треугольника (черт. 1), тогда $\angle DAH = 90^\circ - \alpha$. Выражая общую сторону AD треугольников ACD и AHD через b, q и α, получим тригонометрическое уравнение

$$b\cos\alpha = q\cos(90^\circ - \alpha),$$

или $b\cos\alpha = q\sin\alpha$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{q}$.



Черт. 1

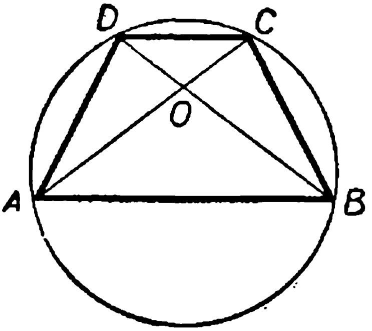
Сравнивая алгебраическое решение с тригонометрическим, замечаем, что последнее является более экономным, а ответ $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{q}$ более простым по форме (тождественность полученных ответов следует из соотношения $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ и может быть установлена учащимися).

Формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{q}$ нетрудно получить и геометрическим путем, без всяких вычислений. Следует построить точку H', симметричную точке H относительно стороны AB, и рассмотреть треугольник BCH'.

Тригонометрические функции иногда можно использовать также при решении задач на вычисление, когда среди данных и искомых элементов фигуры нет углов.

Задача 3. *В окружность радиуса $R = 5$ см вписана трапеция, боковая сторона и диагональ которой соответственно равны 6 см и 9 см. Определить площадь трапеции.*

Нетрудно установить, что трапеция, вписанная в окружность, равнобочная, вследствие чего ее диагонали равны (черт. 2). Для вычисления площади S трапеции достаточно знать угол AOD между диагоналями, так как $S = \frac{1}{2} AC^2 \sin \angle AOD$.



Черт. 2

Обозначим $\angle ABD = \angle BAC = \alpha$, тогда $\angle AOD = 2\alpha$, как внешний угол треугольника AOB. По формуле, выражающей сторону вписанного треугольника через радиус описанной окружности, имеем:

$$AD = 2\ R \sin \alpha,$$

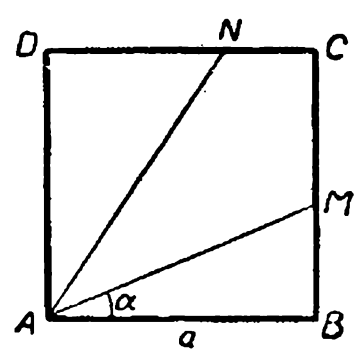
а так как $AD = 6$ и $2R = 10$, то $\sin \alpha = 0{,}6$. Следовательно, $S = \frac{1}{2} AC^2 \sin 2\alpha = AC^2 \sin \alpha \cos \alpha = 81 \cdot 0{,}6 \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 81 \cdot 0{,}48 \approx 39$ ($см^2$).

Решение задачи, основанное на подобии треугольников, несколько сложнее.

По мере изучения теоретического материала круг задач, решаемых с помощью тригонометрических соотношений, может быть расширен.

Обратимся к задачам на доказательство.

Пусть требуется установить некоторое свойство геометрической фигуры. Если можно ввести в рассмотрение углы, то связь между элементами фигуры иногда удается выразить с помощью тригонометрических функций. Решение задачи при этом сводится к выполнению тождественных преобразований.



Черт. 3

З а д а ч а 4. *На стороне BC квадрата ABCD взята произвольная точка M* (черт. 3). *Биссектриса угла DAM пересекает сторону CD в точке N. Доказать, что*

$$AM = BM + DN.$$

Обозначим $AB = a$, $\angle BAM = \alpha$, тогда $\angle DAN = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Из треугольников ABM и ADN имеем:

$$AM = \frac{a}{\cos\alpha}, \quad BM = a \operatorname{tg}\alpha, \quad DN = a \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Требуется доказать, что $AM = BM + DN$. Следовательно, задача сводится к доказательству тождества

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Задача может быть решена также методом вращения вокруг точки. Повернем треугольник ADN вокруг точки A на 90° по часовой стрелке. Тогда точка D перейдет в точку B, вершина N займет положение N' на продолжении стороны BC квадрата. Остается доказать, что в треугольнике AMN' стороны AM и MN' лежат против равных углов и, следовательно, равны.

При решении задач на построение алгебраическим методом обычно за искомую величину принимают некоторый отрезок, связь которого с другими данными отрезками выражают с помощью алгебраического уравнения. Однако иногда целесообразно за неизвестное принять угол, составить и решить тригонометрическое уравнение, затем построить угол на основании полученного выражения. Выполнив еще некоторые дополнительные построения, получим искомую фигуру. Поясним это на соответствующей задаче.

З а д а ч а 5. *Дан отрезок MN и его внутренняя точка A. Построить прямоугольник $ABCD$ так, чтобы сторона AB была вдвое больше стороны AD, а прямые BC* и *CD проходили соответственно через точки N* и *M.*

П е р в ы й с п о с о б. Допустим, что задача решена и $ABCD$ — искомый прямоугольник (черт. 4). Обозначим отрезки AM и AN соответственно через m и n, а неизвестный отрезок AD через x, тогда $AB = 2x$ и $DM = \sqrt{m^2 - x^2}$.

Из подобия треугольников ABN и ADM имеем:

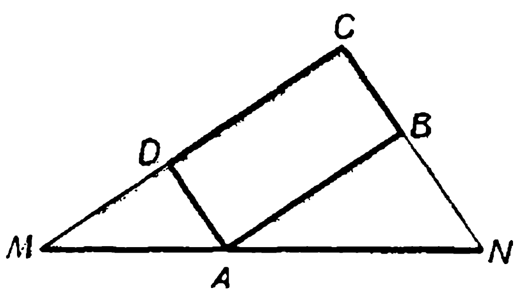
$$\frac{2x}{n}=\frac{\sqrt{m^2-x^2}}{m},$$

откуда

$$x=\frac{mn}{\sqrt{n^2+4m^2}}.$$

Построив отрезок x, можно построить и прямоугольник.

Второй способ. Задача легко решается, если определить один из острых углов треугольника CMN (черт. 4). Обозначим угол CNM через α. Тогда из прямоугольных треугольников ABN и ADM имеем:



Черт. 4

$$AB=n\sin\alpha,\ AD=m\cos\alpha.$$

По условию задачи $AB=2\,AD$, следовательно, приходим к уравнению

$$n\sin\alpha=2\,m\cos\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2m}{n}.$$

Для построения угла α достаточно провести перпендикуляр AE к MN и отложить на нем отрезок $AF=2\,AM$. Угол ANF — искомый.

Доказательство получим, если все преобразования, приведенные в анализе, выполним в обратном порядке.

Нетрудно видеть, что первое решение более громоздкое.

Задачу можно также решить методом геометрических мест. Заметим, что $\operatorname{tg}\angle ACN=2$, следовательно, угол ACN легко построить, а угол MCN — прямой. Поэтому вершина C прямоугольника принадлежит окружности, построенной на отрезке MN как на диаметре, и дуге сегмента, построенного на отрезке AN и вмещающего угол ACN.

Геометрическое решение данной задачи также сложнее, чем тригонометрическое.

Задачи на построение включены в § 7 главы II. При решении их аналитическим методом за неизвестное следует принять отрезок или угол, смотря по тому, что приводит к более простому уравнению и выражению для построения. Крайне желательно отыскать и геометрическое решение, если такое может быть найдено.

В сборник включены также геометрические задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин. Они могут быть решены элементарно, одни—способом выделения полного квадрата в квадратном трехчлене, другие —способом введения переменного угла. Приведем примеры.

З а д а ч а 6. *Из всех прямоугольных треугольников с данной суммой катетов найти треугольник, у которого гипотенуза наименьшая.*

Пусть сумма катетов треугольника равна m. Обозначим один из катетов через x, тогда другой равен $m—x$. Вычислим гипотенузу c треугольника:

$$c^2 = x^2 + (m - x)^2 = 2x^2 - 2mx + m^2 = 2\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m^2}{2}.$$

Отсюда следует, что гипотенуза имеет наименьшее значение при $x = \frac{m}{2}$, т. е. искомый треугольник равнобедренный.

Сущность второго способа заключается в том, что величину, наибольшее или наименьшее значение которой ищут, выражают через данные величины и некоторый переменный угол. Затем непосредственно исследуют множество значений полученной функции и находят те значения вспомогательного угла, при которых функция имеет наибольшее или наименьшее значение.

З а д а ч а 7. *Дан отрезок MN и его внутренняя точка A. Построить прямоугольник $ABCD$ так, чтобы прямые BC и CD проходили соответственно через точки N и M, а площадь прямоугольника $ABCD$ была наибольшей.*

Площадь прямоугольника $ABCD$ есть функция переменного угла CNM (черт. 4). Как и при решении задачи 5 находим:

$$AB = n \sin \alpha,\ AD = m \cos \alpha.$$

Площадь прямоугольника $S = AB \cdot AD = mn \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2} mn \sin 2\alpha$ имеет наибольшее значение при $\alpha = 45°$.

Прежде чем в классе приступить к решению задач, полезно рассмотреть ряд примеров на отыскание наибольших и наименьших значений функций:

$$\text{а) } y = \sin x + \cos x,$$

$$\text{б) } y = \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$

Учитель сам легко составит необходимое число таких примеров.

Решение задач на максимум и минимум элементарными средствами может служить хорошей подготовкой к пониманию учащимися общего метода исследования функций с помощью производной.

Итак, при решении разнообразных геометрических задач алгебра и тригонометрические функции могут найти широкое применение. Аналитический метод решения задач имеет свои достоинства:

а) применимость метода к решению многих задач,

б) естественность хода решения задачи,

в) почти полное отсутствие вспомогательных построений.

Рассмотренные выше типы задач и составляют основное содержание сборника.

Нужно настоятельно советовать учащимся применять различные методы для отыскания наиболее простого решения задачи. Если задача в классе была решена с помощью тригонометрических функций, то учитель может предложить учащимся найти дома геометрическое решение, которое обычно бывает более наглядным. Решение одной и той же задачи различными методами дает возможность полнее исследовать свойства геометрической фигуры и выявить наиболее рациональное решение, а также служит хорошим средством повторения пройденного.

ГЛАВА I

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ «АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ»

§ 1. Уравнения первой степени и неравенства

1. Найти острый угол равнобочной трапеции, если диагональ делит ее на два равнобедренных треугольника.

2. Биссектриса одного из углов треугольника делит его на два равнобедренных треугольника. Найти углы треугольника.

3. Основания трапеции равны 9 *см* и 21 *см*, диагонали равны 12 *см* и 18 *см*. Определить отрезки, на которые диагонали делятся точкой их пересечения.

4. Основание равнобедренного треугольника на a *см* больше его боковой стороны, периметр треугольника равен 36 *см*. Определить боковую сторону.

5. Внутри окружности радиуса $r = 5$ *см* дана точка M на расстоянии 3 *см* от центра. Через точку M проведена хорда AB. Найти BM, если $AM = p$.

6. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Определить расстояния от точки M, лежащей на гипотенузе, до катетов, если сумма этих расстояний равна m.

7. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Их общая внешняя касательная пересекает линию центров в точке L. Найти расстояние между точками K и L, если радиусы окружностей равны r_1 и r_2.

8. (Устно.) Доказать, что высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, не больше половины гипотенузы.

9. (Устно.) Из прямоугольных треугольников с данной гипотенузой найти треугольник наибольшей площади.

10. Доказать, что сумма катетов прямоугольного треугольника меньше суммы гипотенузы и высоты, опущенной на гипотенузу.

11. Доказать, что катеты a и b прямоугольного треугольника и гипотенуза c удовлетворяют неравенству

$$a + b \leqslant c\sqrt{2}.$$

12. Доказать, что во всяком треугольнике медиана меньше полусуммы сторон, между которыми она проведена.

13. Доказать, что сторона c треугольника и медианы m_a и m_b удовлетворяют неравенству

$$m_a + m_b > \frac{3}{2}c.$$

14. В каких границах изменяется сумма медиан треугольника, имеющего периметр $2p$?

15. В каких границах изменяется каждый из углов треугольника ABC, если $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$?

16. Квадрат и правильный шестиугольник имеют равные периметры. Сравнить их площади.

§ 2. Квадратные уравнения

17. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, а сумма высоты и основания равна n. Вычислить основание треугольника, если а) $n = 20$, б) $n = 22$, в) $n = 23$.

18. Определить катеты прямоугольного треугольника, если сумма их равна m, а гипотенуза равна 5.

19. Зная гипотенузу c прямоугольного треугольника и высоту h, опущенную на нее, найти проекции катетов на гипотенузу.

20. Дана окружность радиуса 10 *см* и внутри нее точка M на расстоянии 8 *см* от центра. Через точку M проведена хорда длиной a *см*. На какие отрезки точка M делит хорду?

21. Вне окружности радиуса r взята точка на расстоянии d от центра. Из этой точки проведена секущая так, что ее внутренняя часть равна радиусу. Определить внешнюю часть секущей.

22. В квадрат $ABCD$ со стороной a вписан квадрат $A_1B_1C_1D_1$ со стороной b. Найти отрезки, на которые вершина вписанного квадрата делит сторону квадрата $ABCD$. Доказать, что площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$ не меньше половины площади квадрата $ABCD$.

23. В треугольник с основанием b и высотой h вписан прямоугольник площади S так, что одна сторона его находится на основании треугольника. Определить стороны

прямоугольника. При каком условии вписанный прямоугольник имеет наибольшую площадь?

24. Какой формы должен быть прямоугольный участок, чтобы при данной длине изгороди площадь его была наибольшей?

25. а) В треугольник, периметр которого 18 *см*, вписана окружность, к которой проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной, заключенный внутри треугольника, равен 2 *см*. Определить основание треугольника.

б) В треугольник с данным периметром $2p$ вписана окружность, к которой проведена касательная параллельно одной из сторон треугольника. Найти наибольшую возможную длину отрезка этой касательной (концы отрезка лежат на сторонах треугольника).

26. Внутри прямого угла A дана точка M на расстояниях p и q от сторон угла ($p = 3$, $q = 5$). Прямая, проходящая через точку M, встречает стороны угла в точках B и C. Площадь треугольника ABC равна S. Найти отрезки AB и AC.

Подобрать численные значения S так, чтобы задача имела: а) одно решение, б) два решения. Вычислить соответствующие значения AB и AC.

§ 3. Определения тригонометрических функций и соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

27. (Устно.) Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки, равные m и n. Определить тангенсы острых углов треугольника.

28. (Устно.) Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет в отношении $1:2$. Определить острые углы треугольника.

29. Найти острый угол ромба, если высота его, проведенная из вершины тупого угла, делит диагональ в отношении $m:n$ ($m = 1$, $n = \sqrt{2}$).

30. Найти углы параллелограмма, зная его высоты h_1, h_2 и периметр $2p$ ($h_1 = 4$, $h_2 = 5$, $p = 10$).

31. Вычислить угол при основании равнобедренного треугольника, если даны его высоты $h = 5$ и $h_1 = 3$ (h_1 — высота, опущенная на боковую сторону).

32. Ортоцентр* равнобедренного треугольника делит его высоту пополам. Найти тангенс угла при основании треугольника.

33. Определить острые углы такого прямоугольного треугольника, в котором один из катетов есть среднее пропорциональное между высотой, опущенной на гипотенузу, и другим катетом.

34. Диагональ равнобочной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Определить острый угол и большее основание трапеции, если даны меньшее основание a и высота h ($a = 3$, $h = 2$).

35. Высота CH прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) образует угол α с прямой CD, отсекающей от гипотенузы отрезок AD, равный BH. Определить тангенсы острых углов треугольника ABC, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{6}$.

§ 4. Теорема сложения

36. Внутри острого угла дана точка, расстояния которой от сторон и вершины угла относятся как $2 : 11 : 14$. Определить величину угла (без таблиц).

37. В треугольнике ABC центр вписанной окружности радиуса $r = 1$ отстоит от его вершин A и B на расстояниях, равных соответственно $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Определить угол C (без таблиц).

38. Дан квадрат $ABCD$. На сторонах BC и CD взяты точки M и N такие, что $BM = \frac{1}{2}AB$ и $DN = \frac{1}{3}AB$. Доказать, что $\angle MAN = 45°$.

39. Дан угол AOB, равный $60°$, и внутри него точка M на расстояниях a и b от сторон угла. Вычислить углы AOM и BOM при $a = 2$ и $b = 3$.

40. Гипотенуза прямоугольного треугольника в 5 раз больше радиуса вписанной окружности. Вычислить углы треугольника.

41. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, отношение которых равно 2. Вычислить углы треугольника.

**Ортоцентром* треугольника называется точка пересечения его высот.

42. Доказать, что если $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B > 1$, то треугольник ABC остроугольный.

43. Доказать, что если $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B < 1$, то треугольник ABC тупоугольный.

44. Зная периметр $2p$ и диагональ d прямоугольника ($p = 10$, $d = 9$), найти угол между биссектрисой прямого угла и диагональю, выходящими из одной и той же вершины прямоугольника.

45. Определить углы A и B треугольника ABC, если угол C равен $120°$, а отношение расстояний от центра O вписанной окружности до сторон AC и BC равно k.

§ 5. Функции двойного и половинного аргументов

46. (Устно.) Найти площадь прямоугольного треугольника по гипотенузе c и острому углу α. При каком значении α треугольник с данной гипотенузой имеет наибольшую площадь?

47. Диагональ равнобочной трапеции d образует с основанием угол β. Найти площадь трапеции.

48. Найти острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза $c = 12$ *см* и площадь $S = 20$ *см*^{2}.

49. В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза c и биссектриса l острого угла ($c = 5$, $l = 4$). Определить углы треугольника.

50. В квадрат вписан другой квадрат. Определить меньший угол между сторонами квадратов, если отношение площадей квадратов равно 1,5.

51. Определить острый угол ромба, сторона которого есть среднее пропорциональное между его диагоналями.

52. Медианы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти тангенсы углов треугольника. Построить треугольник по данному основанию.

53. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, равна основанию треугольника. Найти косинусы углов треугольника. Построить треугольник, зная боковую сторону.

54. Определить углы равнобедренного треугольника, зная, что его ортоцентр лежит на вписанной в треугольник окружности.

55. В данный полукруг вписать прямоугольник наибольшей площади.

56. Прямой угол вращается вокруг своей вершины A, расположенной между двумя данными параллельными прямыми. Стороны угла пересекают эти прямые в точках B и C. При каком положении угла треугольник ABC имеет наибольшую площадь?

57. Около данного прямоугольника описать прямоугольник наибольшей площади.

58. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна m, а ее проекция на гипотенузу равна n. Определить синусы острых углов треугольника.

59. Определить биссектрису острого угла прямоугольного треугольника, если она делит катет на отрезки p и q $(p > q)$.

60. Определить угол при основании и площадь равнобедренного треугольника по высоте h и радиусу r вписанной окружности $(h = 10, \ r = 3)$.

§ 6. Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

61. Отношение сторон прямоугольника равно $\sqrt{2}$. Найти косинус острого угла между его диагоналями.

62. Катеты прямоугольного треугольника относятся, как $1:2$. Найти отношение высоты и медианы, проведенных из вершины прямого угла этого треугольника.

63. Основание равнобедренного треугольника равно b, радиус вписанной окружности равен r. Определить площадь треугольника.

64. Около окружности описана трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$. Расстояния от центра O окружности до вершин A и B равны соответственно a и b. Определить синус угла BAD и высоту трапеции.

65. В прямоугольной трапеции $ABCD$ угол A — острый и $AB \parallel CD$. Биссектриса угла A отсекает на стороне BC отрезок BM, равный CD. Доказать, что сумма оснований трапеции равна сумме ее боковых сторон.

§ 7. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и обратное преобразование

66. Доказать, что для всякого прямоугольного треугольника ABC $(\angle C = 90^\circ)$ справедливо равенство

$$a + b = c\sqrt{2}\sin(45^\circ + A).$$

В каких границах изменяется сумма катетов $a+b$ прямоугольного треугольника с данной гипотенузой c?

67. Определить углы ромба по стороне a и разности d диагоналей ($a = 5$, $d = 2$).

68. Около окружности радиуса r описана трапеция, периметр которой равен $2p$. Найти углы при основании трапеции, если сумма их равна α ($p = 6r$, $\alpha = 120°$).

69. Доказать, что если углы треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\sin A + \sin B = \cos A + \cos B,$$

то треугольник прямоугольный.

70. Доказать, что если углы треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\sin A = 2 \sin B \cos C,$$

то треугольник равнобедренный.

71. Доказать, что если углы треугольника удовлетворяют равенству

$$\sin (A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B,$$

то треугольник или прямоугольный, или равнобедренный.

72. Доказать, что если A, B — острые углы треугольника ABC и $\sin A \sin B > \frac{1}{2}$, то и угол C острый.

73. Доказать, что сторона правильного девятиугольника равна разности между большей и меньшей его диагоналями.

74. Внутри угла 60° дана точка M на расстояниях r_1 и r_2 от его сторон и на расстоянии R от вершины. Доказать, что

$$r_1 + r_2 \leqslant R.$$

75. В данную полуокружность вписать прямоугольник наибольшего периметра.

76. В данный круговой сектор с острым центральным углом вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы его две вершины лежали на одном радиусе.

§ 8. Уравнения и неравенства, содержащие аргумент и его тригонометрические функции

77. Определить центральный угол сектора OAB, если хорда AB делит площадь сектора пополам.

78. Площадь сегмента равна 25 $см^2$, а радиус равен 5 $см$. Найти дугу сегмента в радианной мере.

79. Какой угол составляет хорда окружности AC с диаметром AB, если эта хорда и дуга BC имеют одинаковую длину?

80. Определить острый угол прямоугольного треугольника ABC, зная, что дуга с центром A и радиусом, равным катету AC, делит площадь треугольника пополам.

81. (Уравнение Кеплера.) На диаметре AB полукруга AmB дана точка D. Провести прямую DM так, чтобы она делила площадь полукруга в заданном отношении k. Решить задачу при условии, что $AD = DO$ (O — центр круга) и $k = 1$.

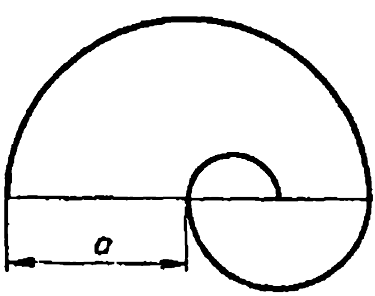
82. Доказать, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

83. К окружности в точке B диаметра AB проведена касательная. Из точки A проведена секущая, встречающая окружность и касательную соответственно в точках C и D. Доказать, что длина дуги BC меньше длины отрезка BD.

§ 9. Предел числовой последовательности

84. На данном отрезке длины $2a$, как на диаметре, построим полуокружность. К этой полуокружности присоединим новую полуокружность вдвое меньшего радиуса по другую сторону отрезка так, как показано на чертеже 5. Если этот процесс продолжить неограниченно, то получится спираль с бесконечным числом витков. Найти длину этой спирали.



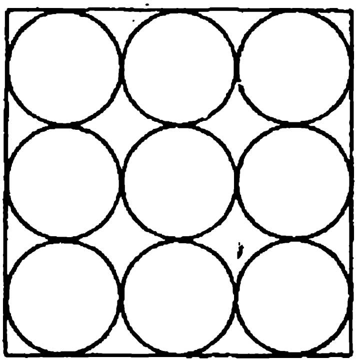
Черт. 5

85. Данный отрезок длины a разделен на n равных отрезков и на каждом отрезке, как на диаметре, построена полуокружность.

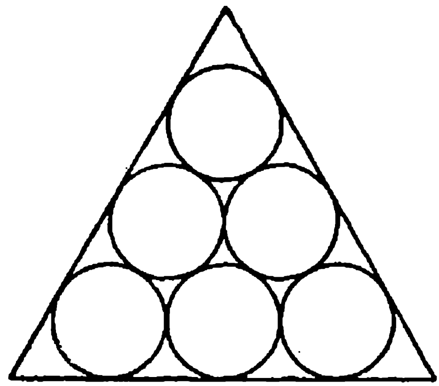
а) Доказать, что общая длина кривой, составленной из полуокружностей, не зависит от n.

б) Найти предел, к которому стремится сумма площадей построенных полукругов при неограниченном увеличении n.

86. В квадрат вписывают окружности равных радиусов так, как показано на чертеже 6. Доказать, что сумма площадей вписанных кругов не зависит от их числа.



Черт. 6



Черт. 7

87. В правильный треугольник со стороной a вписывают окружности равных радиусов так, как показано на чертеже 7. Найти предел, к которому стремится площадь, занимаемая всеми вписанными кругами, когда число кругов неограниченно возрастает.

§ 10. Задачи на повторение

Неравенства (задачи 88—97).

88. Доказать, что сумма расстояний от всякой точки до вершин треугольника больше его полупериметра.

89. Доказать, что сумма расстояний от произвольной точки внутри треугольника или на стороне его до трех сторон треугольника заключена между длинами меньшей и большей высот.

90. Доказать, что сумма медиан прямоугольного треугольника больше его удвоенной гипотенузы.

91. (Устно.) В данном круге с центром O провести хорду AB так, чтобы площадь треугольника ABO была наибольшей.

92. Из круглого бревна требуется выпилить балку прямоугольного сечения так, чтобы количество отходов было наименьшим. Какова должна быть форма сечения?

93. Доказать, что во всяком треугольнике сумма квадратов двух сторон не меньше учетверенной площади треугольника.

94. Доказать, что высота h прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, и радиус r вписанной окружности удовлетворяют неравенствам

$$2r < h \leqslant r(1 + \sqrt{2}).$$

95. Доказать, что если A, B — углы треугольника ABC и $\angle A < \angle B$, то $\sin A < \sin B$, и обратно.

96. Доказать, что если a, b — стороны треугольника и $a < b$, то $a + h_a \leqslant b + h_b$.

При каком условии имеет место равенство?

97. В остроугольный треугольник можно вписать три различных по положению квадрата. Какой стороне треугольника ABC ($BC < AC < AB$) должны принадлежать две вершины вписанного квадрата, чтобы квадрат имел наибольшую площадь?

Квадратные уравнения (задачи 98—101).

98. Площадь прямоугольного треугольника равна S, гипотенуза равна c. Определить радиус вписанной окружности.

99. Определить гипотенузу прямоугольного треугольника по сумме катетов m и высоте h, проведенной к гипотенузе.

100. Доказать, что все прямоугольные треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию, подобны.

101. Вычислить стороны треугольника, зная, что они составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна r (r — радиус окружности, вписанной в треугольник).

Тригонометрические уравнения (задачи 102—114).

102. Определить углы прямоугольного треугольника, если стороны его образуют геометрическую прогрессию.

103. Найти острые углы прямоугольного треугольника, две медианы которого взаимно перпендикулярны.

104. Окружность, вписанная в ромб, делит его площадь пополам. Вычислить острый угол ромба.

105. В прямоугольном треугольнике $\sin 3A = \frac{h}{l}$, где h и l — высота и биссектриса, проведенные из вершины прямого угла C. Определить угол A треугольника.

106. В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов A и B, пересекающиеся в точке O, причем $\sin 2C = \sin \angle AOB$. Определить угол C треугольника.

107. Определить тангенс угла при основании равнобедренного треугольника, если сумма основания и высоты равна удвоенной его боковой стороне. Построить треугольник по данному основанию.

108. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, проходит через центр описанной окружности. Определить косинус угла при основании треугольника.

109. Вычислить углы A и B треугольника ABC, если угол C равен $30°$, а площадь треугольника вдвое меньше площади квадрата, построенного на стороне AB.

110. Площадь равнобочной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием трапеции на $20°$ больше угла между диагональю и боковой стороной. Вычислить углы трапеции, если диагональ трапеции равна 2.

111. Трапеция $ABCD$ делится диагональю AC на два подобных треугольника. Найти углы трапеции, если диагональ AC составляет с основанием угол $\alpha = 45°$, а боковые стороны $AD = 1$ и $BC = \sqrt{2}$.

112. Трапеция вписана в окружность так, что диаметр служит основанием трапеции. Отношение периметра трапеции к радиусу окружности равно k. Найти углы трапеции.

113. Найти координаты точек пересечения двух синусоид

$$y = \sin x,$$
$$y = \sin 2x.$$

114. Две равные силы приложены к материальной точке под некоторым углом друг к другу. Если каждую из сил увеличить вдвое и угол между силами также увеличить вдвое, то величина равнодействующей не изменится. Определить первоначальный угол между силами.

Преобразования тригонометрических выражений (задачи 115—140).

115. Доказать, что острый угол A прямоугольного треугольника и острый угол α между медианами катетов этого треугольника удовлетворяют равенству

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \sin 2A.$$

116. Определить гипотенузу прямоугольного треугольника, если даны биссектриса l острого угла и катет a, прилежащий к этому углу.

117. Выразить площадь S прямоугольного треугольника через высоту h, опущенную на гипотенузу, и острый угол α.

118. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота и биссектриса. Через середину биссектрисы проведен к ней перпендикуляр, который делит высоту треугольника на отрезки, равные p и q $(p > q)$. Найти площадь треугольника.

119. Определить высоту равнобедренного треугольника, зная угол при основании α и периметр $2p$.

120. Высота равнобедренного треугольника ABC $(AB = AC)$ равна h, периметр равен $2p$. Доказать, что $\cos A = \frac{p^2 - h^2}{p^2 + h^2}$.

121. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 и основания их соединены отрезками. Доказать, что углы треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC связаны соотношениями:

$$\operatorname{tg} A_1 = 2 \sin A,$$

$$\cos B_1 = \frac{2\cos B + 1}{2\cos B + 3}.$$

122. Доказать, что если котангенсы половин углов треугольника — последовательные целые числа, то треугольник прямоугольный.

123. Углы треугольника ABC связаны соотношением

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1.$$

Определить вид треугольника.

124. Углы треугольника ABC связаны соотношением

$$\cos C = 2 \sin A \sin B.$$

Доказать, что $|A - B| = 90^\circ$.

125. В треугольнике ABC разность углов A и B равна 90°. Доказать, что $\operatorname{tg} C = \frac{c}{2h_c}$, где h_c — высота треугольника, проведенная к стороне c.

126. Доказать, что если в треугольнике ABC имеет место зависимость

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{b}{a+c},$$

то треугольник прямоугольный.

127. Доказать, что если стороны треугольника связаны соотношением

$$a^2 = b(b+c),$$

то угол A в два раза больше угла B.

128. Стороны и углы треугольника ABC связаны соотношениями:

$$a - b = \frac{1}{2} c,$$

$$A - B = 2C.$$

Вычислить углы треугольника.

129. Доказать, что если стороны треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию и угол C — средний по величине, то

а) $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = 3,$

б) $\angle C \leqslant 60^\circ$.

130. Стороны треугольника связаны зависимостью

$$a + b = 3c.$$

Доказать, что

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = 2.$$

131. Даны углы A и B треугольника ABC. Определить угол ADC, образованный медианой CD со стороной AB треугольника.

132. В треугольнике ABC с углами $A = 105°$ и $B = 30°$ проведены высота CH и медиана CM. Доказать, что углы ACH и BCM равны.

133. «Плоский» треугольник ABC, углы которого $A = 60°$ и $B = 20°$, подвешен на нити, укрепленной в его вершине C. Какой угол составляет с вертикалью сторона AB треугольника?

134. Зная стороны a, b и угол C треугольника ABC, найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины C.

135. Зная стороны a, b и угол C треугольника ABC, найти угол между медианами, проведенными из вершин A и B.

136. Доказать, что если медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны, то

$$\text{а) } a^2 + b^2 = 5c^2,$$

$$\text{б) } \cos C \geqslant \frac{4}{5}.$$

137. В треугольнике ABC сумма стороны AB и высоты CH равна сумме двух других сторон. Доказать, что

$$\text{а) } \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} = 1,$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

138. Высоты треугольника ABC связаны соотношением

$$h_a = h_b + h_c.$$

Доказать, что

$$\cos A \geqslant \frac{7}{8}.$$

139. В окружность с центром O вписан правильный десятиугольник $A_1A_2 \ldots A_{10}$. Доказать, что отрезки OA_1, A_1A_2 и A_1A_3 могут служить сторонами прямоугольного треугольника.

140. Доказать, что если A, B, C, D — последовательные вершины правильного семиугольника, то

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

ГЛАВА II

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

141. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Выразить вектор $\overline{AD}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

142. Точки M и N служат серединами сторон AB и AC треугольника ABC. Выразить вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

143. Доказать, что для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеет место неравенство

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|.$$

При каком условии имеет место равенство?

144. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N являются серединами сторон AD и BC. Доказать, что

$$2\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{DC}.$$

145. Доказать, что отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, не больше полусуммы двух других сторон.

146. Средняя линия четырехугольника, соответствующая одной паре противоположных сторон, равна полусумме двух других сторон. Доказать, что этот четырехугольник — трапеция.

147. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 0.$$

148. Доказать, что любая медиана треугольника меньше суммы двух других его медиан.

149. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Доказать, что

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0.$$

150. Пусть точка M — центр тяжести треугольника ABC и P — произвольная точка. Доказать, что

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=3\overline{PM}.$$

§ 2. Скалярное произведение векторов

151. Доказать, с помощью векторов, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

152. Воспользовавшись условием перпендикулярности двух векторов, доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

153. Доказать, что в прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

154. Доказать, что если CC_1 — высота треугольника ABC, H — ортоцентр, то имеет место равенство

$$CC_1 \quad HC_1 = AC_1 \quad C_1B.$$

155. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны. Доказать, что высота есть среднее пропорциональное между основаниями.

156. Две силы $P = 3$ *кг* и $Q = 5$ *кг* действуют на материальную точку под углом $\alpha = 60^\circ$ друг к другу. Определить величину равнодействующей этих сил.

157. Выразить угол между диагоналями параллелограмма через его стороны и диагонали.

158. Даны три стороны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ четырехугольника $ABCD$ и углы B и C. Найти сторону AD.

159. Даны две стороны $AD = a$, $BC = b$ четырехугольника $ABCD$ и угол γ между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$. Найти отрезок, соединяющий середины двух других сторон четырехугольника.

§ 3. Теорема косинусов

160. Вершина A равностороннего треугольника ABC соединена с точкой D, делящей сторону BC на отрезки $BD=1$ и $DC = 2$. Определить отрезок AD.

161. Вершина C треугольника ABC соединена с точками M и N, делящими сторону AB на три равные части. Определить отрезки CM и CN, если $BC = a$, $AC=b$, $AB = c$.

162. Доказать, что произведение квадратов диагоналей параллелограмма, угол которого равен 45°, равно сумме четвертых степеней двух смежных его сторон.

163. Определить угол между двумя силами, если равнодействующая в 1,5 раза больше одной из них и в два раза больше другой.

164. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB и AC в точках M и N. Определить угол A треугольника, если $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{6}$ и $\frac{AN}{NC}=\frac{1}{7}$.

165. На сторонах треугольника с углом 60° вне его построены равносторонние треугольники. Доказать, что сумма площадей данного треугольника и треугольника, построенного на стороне, противолежащей углу в 60°, равна сумме площадей двух других треугольников.

166. Доказать, что диагонали четырехугольника тогда и только тогда взаимно перпендикулярны, если сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других сторон.

§ 4. Теорема синусов

167. Диагональ параллелограмма делит его угол на части, равные 30° и 45°. Найти отношение сторон параллелограмма.

168. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M. Расстояния точки M от вершин A и B равны соответственно 1 и $\sqrt{2}$. Определить угол ABM и диагональ квадрата; вычислить точное значение $\cos 15°$ и $\cos 75°$.

169. Пользуясь теоремой синусов, доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Доказать обратную теорему.

170. В треугольнике ABC разность углов A и B равна 90°. Доказать, что

$$\operatorname{tg} B=\frac{b}{a}.$$

171. Даны две концентрические окружности. Из какой точки внешней окружности данный радиус внутренней окружности виден под наибольшим углом?

172. Через вершину A треугольника ABC внутри него проведены две прямые, образующие равные углы со сторонами AB и AC и встречающие сторону BC в точках M и N. Доказать, что

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

(Теорема Штейнера.)

§ 5. Многогранники

173. Доказать, что косинус острого угла, образованного двумя диагоналями куба, равен $\frac{1}{3}$.

174. Диагональ правильной четырехугольной призмы $d = 2$ *м*. Боковая поверхность $S = 4$ *м*^{2}. Определить угол наклона диагонали к плоскости основания призмы.

175. Найти высоту правильной четырехугольной призмы со стороной основания a, если сумма углов, образованных диагональю призмы со стороной и с диагональю основания, выходящими из одной и той же вершины, равна $135°$.

176. В прямоугольном параллелепипеде через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, проведено сечение. Углы треугольника, получившегося в сечении, равны α, β, γ. Определить угол наклона сечения к основанию параллелепипеда.

177. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Определить угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды.

178. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны между собой. Определить двугранный угол при боковом ребре.

179. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом α, двугранный угол при основании равен β. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha.$$

180. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен γ. Найти угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

181. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен γ, высота пирамиды равна h. Определить площадь основания пирамиды.

182. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b. Двугранный угол при основании равен β. Определить боковую поверхность пирамиды.

183. В основании пирамиды лежит ромб с острым углом 60°. Каждая из боковых граней пирамиды наклонена к основанию под углом β. Большее боковое ребро пирамиды равно a. Найти боковую поверхность пирамиды.

184. В основании пирамиды $NABCD$ лежит квадрат. Боковые ребра NA и NB пирамиды равны и угол между ними равен α. Грань NAB перпендикулярна основанию, а грань NCD образует с основанием угол α. Доказать, что $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

185. В основании пирамиды $NABC$ лежит равнобедренный треугольник с углом BAC при вершине, равным α. Грани NAB и NAC перпендикулярны основанию. Площади граней NAB и NBC равны. Определить угол наклона грани NBC к плоскости основания.

§ 6. Круглые тела

186. Цилиндр и конус имеют равные основания и равные высоты. Отношение боковой поверхности цилиндра к боковой поверхности конуса равно k. В каких границах может изменяться k? Найти угол наклона образующей конуса к его основанию при $k = 1$.

187. Площадь осевого сечения конуса относится к его полной поверхности, как $m : n$. Определить угол наклона образующей к основанию конуса.

188. Отношение полных поверхностей конусов, полученных от вращения прямоугольного треугольника вокруг катета AC и вокруг катета BC, равно 2. Найти острые углы треугольника.

189. Верно ли следующее утверждение: из всех сечений конуса, проходящих через его вершину, наибольшую площадь имеет осевое сечение?

190. Вычислить длину параллели земного шара с географической широтой $\varphi = 56^\circ$. Длина экватора $C \approx 40\,000$ *км*.

191. Сколько процентов поверхности земного шара занимает поверхность пояса Земли между экватором и параллелью, имеющей широту $\varphi = 45^\circ$?

192. При фотографировании обратной стороны Луны автоматическая межпланетная станция находилась от Лу-

ны на расстоянии, приблизительно равном 65 000 *км*. Под каким углом была видна в это время Луна и какую часть ее сферы (в процентах) можно было видеть с указанного расстояния? Радиус Луны равен 1738 *км*.

193. От вращения кругового сектора около одного из крайних радиусов получается сферический сектор, коническая поверхность которого в 1,5 раза более сферической поверхности. Определить центральный угол кругового сектора.

194. Сферический сектор получен вращением около одного из крайних радиусов, причем объемы его сферической и конической частей равны между собой. Определить центральный угол кругового сектора.

195. В конус вписан шар. Поверхность шара относится к полной поверхности конуса, как 4 : 9. Найти угол между образующей и основанием конуса.

196. В конус вписан шар. Отношение объема конуса к объему шара равно k. Какое наименьшее значение может иметь k?

197. В усеченный конус вписан шар. Объем этого шара составляет половину объема усеченного конуса. Найти тангенс угла наклона образующей к плоскости основания конуса.

§ 7. Задачи на повторение

198. В равнобедренном треугольнике сумма основания a и высоты h равна сумме боковых сторон. Доказать, что

$$h = \frac{2}{3}a.$$

199. Из концов данного отрезка AB радиусом, равным AB, проведены дуги, пересекающиеся в точке M. В полученный криволинейный треугольник AMB вписана окружность радиуса r. Доказать, что

$$r = \frac{3}{8}AB.$$

200. Дана окружность радиуса R и квадрат, две вершины которого лежат на прямой, касающейся окружности, а две другие вершины лежат на окружности. Вычислить сторону квадрата.

201. Доказать, что если равнобочная трапеция описана около окружности, то ее высота есть среднее пропорциональное между основаниями.

202. Две окружности касаются внешним образом. Общие внешние касательные к ним определяют четыре точки касания A, B, C, D. Доказать, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

203. Доказать, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон есть величина постоянная для данного треугольника.

204. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC вне его построен квадрат $ABDE$. Доказать, что расстояние от вершины D до прямой AC равно сумме катетов треугольника.

205. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Доказать, что либо прямоугольник также есть квадрат, либо его стороны параллельны диагоналям квадрата $ABCD$.

206. В точках C и D окружности проведены к ней две касательные. Доказать, что расстояние от любой точки M окружности до прямой CD есть среднее пропорциональное между расстояниями от этой точки до касательных.

207. В треугольнике со сторонами a, b, c через центр вписанной окружности проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Вычислить длины средних отрезков, отсекаемых прямыми на сторонах треугольника. Найти соотношение между этими отрезками в прямоугольном треугольнике.

208. Перпендикуляр, проведенный через середину гипотенузы прямоугольного треугольника, делит его катет на отрезки, отношение которых, считая от вершины прямого угла, равно k. Определить меньший острый угол треугольника.

209. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону CD в точке M, причем $\frac{DM}{MC} = k$ и $\angle CAM = \alpha$. Доказать, что

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (2k+1)\operatorname{tg}\alpha.$$

210. Определить биссектрису угла при основании равнобедренного треугольника, если она делит противоположную сторону на отрезки m и n, считая от вершины.

211. Найти боковую сторону и угол при основании равнобедренного треугольника, если его основание $c = 5$ и биссектриса угла при основании $l = 6$.

212. Медиана, проведенная из вершины одного из равных углов равнобедренного треугольника, делит этот угол в отношении $2:1$, считая от основания. Найти углы треугольника.

213. Сила P разложена на две составляющие так, что отношение их равно $1:2$, а отношение углов между каждой из составляющих и равнодействующей равно $1:3$. Определить эти углы.

214. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = a$, $CD = c$, $DA = d$, $BD = f$. Доказать, что

$$cd = f^2 - a^2.$$

215. Выразить площадь параллелограмма через его стороны a и b и угол α между его диагоналями.

216. Диагонали описанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найти зависимость между радиусами окружностей, описанных около треугольников AOB, BOC, COD и AOD.

217. Доказать, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то сумма квадратов противоположных сторон четырехугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

218. Найти радиус окружности, описанной около равнобочной трапеции, зная основания a и b трапеции и угол α между диагональю и основанием.

219. На стороне AB треугольника ABC дана точка D. Определить углы треугольника ABC, если $AD = 1$, $AC = \sqrt{2}$, $AB = \sqrt{3}$, $\angle BCD = 90°$. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ACD, равны. Пользуясь чертежом, вычислить $\sin 15°$.

220. На стороне AB треугольника ABC взята точка M такая, что $AM : MB = 1 : 2$. Известно, что $\angle A = 45°$ и $\angle B = 75°$. Доказать, что $\angle ACM = 15°$.

221. Угол A при вершине равнобедренного треугольника ABC равен $20°$. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки E и F такие, что $\angle CBF = 50°$ и $\angle BCE = 60°$. Доказать, что $\angle CEF = 30°$.

222. На стороне BC квадрата $ABCD$ построить точку M такую, что $AM = MC + CD$.

223. Построить прямоугольный треугольник по катету a и проекции n другого катета на гипотенузу.

224. Построить прямоугольный треугольник, зная отрезки m и n, на которые биссектриса прямого угла делит гипотенузу..

225. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c, зная, что медиана гипотенузы есть среднее пропорциональное его катетов.

226. Построить параллелограмм по двум его высотам h_1 и h_2 и периметру $2p$.

227. Построить равнобедренный треугольник по двум его неравным высотам.

228. Построить равнобедренный треугольник, если даны его боковая сторона b и расстояние q ортоцентра треугольника от вершины угла при основании.

229. Построить равнобедренный треугольник, если даны его высота h и расстояние d ортоцентра треугольника от основания.

230. Построить равнобедренный треугольник по отрезкам боковой стороны, на которые ее делит прямая, проведенная через вершину угла и центр описанной окружности.

231. Дана окружность с центром O и вне ее точка P. На отрезке OP найти точку M такую, чтобы отрезок MN касательной (N — точка касания), проведенной из этой же точки к окружности, равнялся MP.

232. В данный сегмент вписать квадрат.

233. Около данной равнобочной трапеции описать квадрат.

234. Построить прямоугольный треугольник, зная гипотенузу c и биссектрису l острого угла.

235. Построить треугольник ABC, зная биссектрису l угла A и ее расстояния p и q от вершин B и C треугольника.

236. Даны две хорды AB и CD одной окружности и точка M, принадлежащая хорде AB. Через точку M провести прямую, пересекающую хорду CD в точке N так, чтобы произведение отрезков одной хорды равнялось произведению отрезков другой хорды:

$$AM \cdot MB = CN \cdot ND.$$

237. Из конца диаметра данной окружности провести хорду так, чтобы отрезок касательной, проведенной из другого конца хорды до пересечения с продолжением диаметра, был вдвое меньше хорды.

238. Построить равнобедренный треугольник, если даны отрезки p и q, на которые центр вписанной окружности делит биссектрису одного из равных углов треугольника.

239. Через данную внутри окружности точку M провести две перпендикулярные хорды AC и BD так, чтобы четырехугольник $ABCD$ имел а) наибольшую площадь, б) наименьшую площадь.

240. Через данную внутри окружности точку провести две перпендикулярные хорды так, чтобы сумма их длин была а) наибольшей, б) наименьшей.

241. Доказать, что в треугольной пирамиде с прямым трехгранным углом при вершине квадрат площади основания равен сумме квадратов площадей боковых граней.

242. Сумма плоских углов α, β, γ трехгранного угла равна $90°$. Доказать, что двугранный угол, противолежащий углу α, тогда и только тогда прямой, если

$$\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = 1.$$

243. Дана треугольная пирамида $NABC$, грань NAB перпендикулярна плоскости основания, $NA = NB$, $NC = c$. Каждый из плоских углов при вершине пирамиды равен $60°$. Определить объем пирамиды.

244. Стороны параллелограмма равны a и b. Найти отношение объемов тел, полученных при вращении параллелограмма вокруг стороны a и вокруг стороны b.

245. В конус вписан шар. Отношение поверхности шара к площади основания конуса равно n. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

246. Около данного шара описан конус. При каком угле наклона образующей к основанию боковая поверхность конуса имеет наименьшее значение?

247. В данный шар вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

248. Около шара описана прямая призма. Доказать, что отношение боковой поверхности призмы к площади ее основания есть величина постоянная.

249. Найти радиус шара, вписанного в правильную n-угольную пирамиду, зная сторону основания a и плоский угол γ при вершине пирамиды.

250. Доказать, что если центры вписанного и описанного шаров правильной n-угольной пирамиды совпадают, то отношение их радиусов r и R равно $\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}}$.

ГЛАВА III

ЗАДАЧИ ДЛЯ ВНЕКЛАССНОЙ РАБОТЫ

Задачи главы III по тематике связаны с другими задачами сборника, но это, как правило, более трудные задачи. Они могут быть использованы для занятий школьного математического кружка и для индивидуальных занятий с наиболее способными учениками.

На занятиях математического кружка полезно практиковать решение задач, связанных между собой и расположенных в определенной последовательности. Путем введения вспомогательных задач или расчленения трудной задачи на более простые можно добиться того, чтобы учащиеся самостоятельно разыскивали и находили решения задач. Задачи, требующие много времени на обдумывание, лучше давать на дом.

В качестве примера рассмотрим группу задач на доказательство тригонометрических тождеств с помощью геометрии.

1. Доказать геометрически (без использования тригонометрических формул) тождество

$$\operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 75^\circ = 2.$$

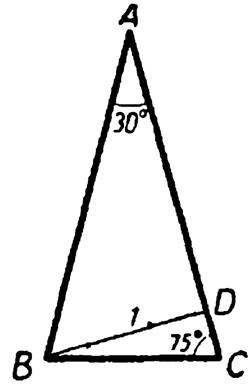
Возьмем треугольник с углами 30° и 75°, тогда третий угол этого треугольника равен 75° (черт. 8). Таким образом, треугольник ABC, содержащий интересующие нас углы, — равнобедренный. Для того чтобы получить прямоугольные треугольники с углами 30° и 75°, из вершины B треугольника ABC опустим высоту BD на боковую сторону. Полагая $BD = 1$, имеем $AB = AC = 2$. С другой стороны, $AD = \operatorname{ctg} 30^\circ$, $CD = \operatorname{ctg} 75^\circ$ и $AD + CD = AC$. Следовательно, $\operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 75^\circ = 2$.

2. Вычислить с помощью чертежа $\operatorname{tg} 15^\circ$.

Угол CBD равен 15° (черт. 8), $AB = AC = 2$, $AD = \sqrt{3}$, $CD = 2-\sqrt{3}$. Следовательно, $\operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{3}$.

Для решения задач 1 и 2 потребовалось равнобедренный треугольник разбить на два прямоугольных треугольника. Возникает вопрос: нельзя ли этот прием использовать для доказательства других тригонометрических тождеств?

Естественно рассмотреть равнобедренный треугольник с углом 45° при вершине, так как в этом случае боковую сторону AB треугольника ABC (черт. 9) можно выразить через высоту BD без привлечения тригонометрических функций.



Черт. 8

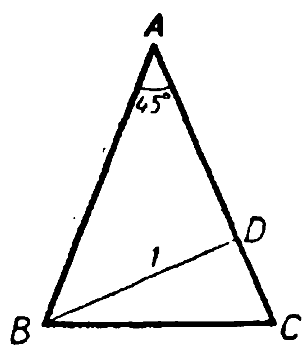
Действительно, если $BD = 1$, то $AB = AC = \sqrt{2}$. С другой стороны, $AD = \operatorname{ctg} 45°$, $CD = \operatorname{ctg} 67{,}5°$ и $AD + CD = AC$. Так что

$$\operatorname{ctg} 45° + \operatorname{ctg} 67{,}5° = \sqrt{2}.$$

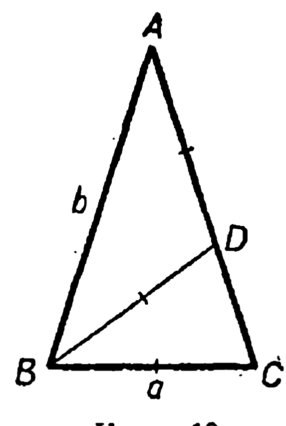
С помощью чертежа 9 решим еще задачу, аналогичную задаче 2: вычислить $\operatorname{tg} 22{,}5°$.

Так как $\angle CBD = 22{,}5°$ и $CD = \sqrt{2} - 1$, то $\operatorname{tg} 22{,}5° = \sqrt{2} - 1$.

Теперь рассмотрим прием разбиения равнобедренного треугольника на два других тоже равнобедренных треугольника. Легко убедиться в том, что не всякий равнобедренный треугольник допускает такое разбиение. Приходим к следующей задаче.



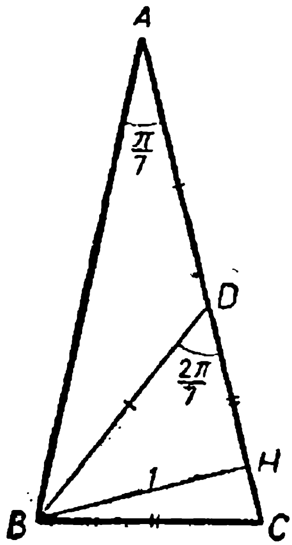
Черт. 9



Черт. 10

3. Определить углы равнобедренного треугольника, если прямая, проходящая через вершину угла при основании, делит его на два равнобедренных треугольника. Сколько решений имеет задача?

Пусть прямая BD делит равнобедренный треугольник ABC на два равнобедренных треугольника ABD и BCD (черт. 10). Рассмотрим попарно стороны треугольника ABD. Так как $AB = AC$ и $AD < AC$, то $AB \neq AD$. Пусть $AB = BD$, тогда нетрудно убедиться в том, что треугольник BCD не может быть равнобедренным. Пусть, наконец, $AD = BD$. Так как в треугольнике BCD углы, прилежащие к стороне BC, не равны, то $BD \neq CD$. Остаются две возможности: $BD = BC$ или $BC = CD$.



Черт. 11

В первом случае $AB = AC$ и $AD = BD = BC$. Обозначив $\angle A = x$, получим уравнение $5x = \pi$, откуда $x = \frac{\pi}{5}$.

Таким образом,

$$\angle A = \frac{\pi}{5}, \ \angle B = \angle C = \frac{2\pi}{5}.$$

Во втором случае при $AD = BD$ и $BC = CD$ получим:

$$\angle A = \frac{\pi}{7}, \ \angle B = \angle C = \frac{3\pi}{7} \text{ (черт. 11).}$$

Воспользуемся полученным результатом для решения ряда задач.

4. Доказать геометрически тождество

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

Обозначив $AD = 1$, из треугольников ABD и BCD (черт. 10) имеем:

$$AB = 2\cos\frac{\pi}{5}, \ CD = 2\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Так как $AB - CD = AD$, то $2\cos\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{2\pi}{5} = 1$,

или

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

5. Найти отношение сторон равнобедренного треугольника, у которого угол при вершине равен 36°.

Снова воспользуемся чертежом 10. Равнобедренные треугольники ABC и BCD подобны. Обозначив для краткости $BC = a$, $AB = AC = b$, получим:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a},$$

или

$$a^2 + ab - b^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

6. Выразить сторону правильного десятиугольника a_{10} через радиус R описанной окружности.

Так как центральный угол правильного десятиугольника равен 36°, то согласно задаче 5 имеем:

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R.$$

7. Вычислить $\cos 36°$ и $\cos 72°$.

Из треугольников ABC и ABD (черт. 10) находим:

$$\cos 72° = \frac{a}{2b}, \quad \cos 36° = \frac{b}{2a}.$$

Следовательно, $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ и $\cos 36° = \frac{1}{\sqrt{5}-1} =$
$= \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

8. Доказать геометрически тождество

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}.$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник с углом $\frac{\pi}{7}$ при вершине (черт. 11). Проведем высоту BH к боковой стороне треугольника. Полагая $BH = 1$, из треугольников ABH, BDH и BCH находим:

$$AB = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}, \; BD = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}, \; BC = \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}};$$

Так как $AB = AC = AD + CD = BD + BC$, то

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}.$$

Пусть R — радиус окружности, описанной около правильного семиугольника $A_1A_2 \ldots A_7$. Тогда $A_1A_2 = 2R\sin\frac{\pi}{7}$, $A_1A_3 = 2R\sin\frac{2\pi}{7}$, $A_1A_4 = 2R\sin\frac{3\pi}{7}$. Следовательно, полученное выше тригонометрическое тождество выражает следующую зависимость между стороной и диагоналями правильного семиугольника:

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}.$$

Таким образом, на примерах можно показать учащимся, как делать различные выводы из решенной задачи, как использовать результат задачи для решения или составления новых задач.

После того как учащиеся на занятиях математического кружка познакомились с некоторыми приемами доказательства тригонометрических тождеств, можно предложить им решить дома более трудные задачи 342—345.

Отметим еще, что приемы доказательства тождеств 4 и 8 можно обобщить.

Всякий равнобедренный треугольник с углом при вершине $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$, где n — натуральное число, большее 1, можно разбить на n равнобедренных треугольников с попарно общими боковыми сторонами, что дает возможность доказать тождество

$$\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \ldots + (-1)^{n+1}\cos n\alpha = \frac{1}{2},$$

где $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$. (Отсюда при $n = 2$ получается тождество 4.)

Равнобедренный треугольник с углом при вершине $\alpha = \frac{\pi}{2^{n+1}+1}$ можно разбить на n равнобедренных треугольников способом, примененным для решения задачи 8. Полученный чертеж позволяет доказать тождество

$$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 4\alpha}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n\alpha},$$

где $\alpha=\frac{\pi}{2^{n+1}+1}$.

§ 1. Различные соотношения между элементами треугольника

Формула для определения угла треугольника по отношению двух его сторон и углу между ними (задачи 251—258).

251. Доказать, что во всяком треугольнике

$$\operatorname{ctg} A=\frac{\frac{b}{a}-\cos C}{\sin C}=\frac{\frac{c}{a}-\cos B}{\sin B}.$$

(формула Тихо де Браге).

252. Поперечный разрез насыпи представляет собой равнобочную трапецию с боковой стороной $b\approx 4{,}2$ *м* и углом при основании $\alpha\approx 32°$. Земляное полотно по верху предполагается расширить с каждой стороны на $c\approx 0{,}8$ *м*, не расширяя его по низу. На сколько градусов при этом увеличится угол при основании?

253. Вершина A равностороннего треугольника ABC соединена с точками D и E, делящими сторону BC на три равные части. Вычислить углы BAD и DAE.

254. Доказать, что если в треугольнике ABC

1) $\frac{b}{a}>\cos C$, то $\angle A<90°$,

2) $\frac{b}{a}=\cos C$, то $\angle A=90°$,

3) $\frac{b}{a}<\cos C$, то $\angle A>90°$.

255. В прямоугольном треугольнике даны катет a и биссектриса l прямого угла. Найти углы треугольника.

256. Определить угол ромба, если известно, что сторона его видна из середины противоположной стороны под углом α.

257. Полуокружность, построенная на стороне AB треугольника ABC, как на диаметре, пересекает две другие стороны AC и BC в точках M и N, причем $\frac{AM}{MC}=\frac{1}{3}$, $\frac{BN}{NC}=$ $=\frac{1}{2}$. Определить углы треугольника.

258. Найти углы треугольника, зная, что они образуют арифметическую прогрессию и что отношение наибольшей стороны треугольника к наименьшей равно 2.

Формулы, выражающие элементы треугольника через радиус описанной окружности (задачи 259—262).

259. Выразить через радиус R описанной окружности и углы A, B, C следующие элементы треугольника ABC: высоту, площадь, полупериметр, радиус вписанной окружности.

260. Доказать, что произведение двух сторон треугольника равно произведению высоты, проведенной к третьей стороне, на диаметр описанной окружности.

261. Найти сторону a треугольника и его площадь S, если даны его углы A и B и полупериметр p.

262. Выразить произведение расстояний от центра вписанной в треугольник окружности до его вершин через радиусы вписанной и описанной окружностей.

263. В треугольник ABC вписана окружность, точки касания которой служат вершинами треугольника $A_1B_1C_1$. Доказать, что площадь треугольника $A_1B_1C_1$ относится к площади треугольника ABC, как $r:2R$ (r — радиус вписанной, R — радиус описанной окружностей треугольника ABC).

Неравенства, имеющие место для элементов треугольника (задачи 264—271).

264. Пользуясь теоремой косинусов, доказать, что во всяком треугольнике имеет место неравенство

$$\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

При каком условии имеет место равенство?

265. Доказать для углов треугольника ABC следующие неравенства:

а) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$,

б) $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$.

266. Доказать неравенства:

$$\text{а) } \cos A \cos B \cos C \leqslant \frac{1}{8},$$

$$\text{б) } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant \frac{9}{4}.$$

267. Доказать, что во всяком треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности не больше $\frac{1}{2}$.

268. Доказать, что во всяком треугольнике имеет место неравенство

$$R^2 \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

269. На стороне AB треугольника ABC построен во внутреннюю его сторону равносторонний треугольник ABC_1. Доказать, что

$$CC_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3},$$

где S — площадь треугольника ABC.

270. Доказать, что во всяком треугольнике имеют место соотношения:

$$1)\ a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3},$$

$$2)\ S \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2.$$

При каком условии имеют место равенства?

271. Доказать, что из всех треугольников, вписанных в окружность данного радиуса, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

272. Доказать, что сумма расстояний от центра вписанной окружности до центров вневписанных окружностей треугольника не больше $6R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

§ 2. Замечательные точки и линии в треугольнике

Центр тяжести и медианы треугольника (задачи 273—279).

273. Доказать, что длина медианы m_a треугольника ABC определяется формулой

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

274. Доказать, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

275. Доказать, что две медианы равнобедренного треугольника равны. Доказать обратную теорему.

276. Доказать, что большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана, и обратно.

277. Медианы разностороннего треугольника ABC пропорциональны его сторонам. Определить коэффициент пропорциональности. Доказать, что

а) между сторонами a, b, c треугольника существует зависимость

$$2b^2 = a^2 + c^2 \text{ (при } a < b < c),$$

б) $\angle B < 60°$.

278. Доказать, что расстояние от любой точки P плоскости до вершин треугольника ABC и до его центра тяжести M связаны соотношением

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3PM^2$$

(теорема Лейбница).

279. В плоскости треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин треугольника имеет наименьшее значение.

Биссектрисы треугольника (задачи 280—287).

280. Доказать, что длина биссектрисы l_a треугольника ABC определяется формулой

$$l_a = \frac{2bc}{b + c} \cos \frac{A}{2}.$$

281. Доказать, что если стороны a, b и биссектриса l_c треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{l_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

то $\angle C = 120°$.

282. Доказать, что если в треугольнике ABC имеет место зависимость

$$\frac{l_a}{b} = \frac{l_b}{a},$$

то либо $a = b$, либо $\angle C = 60°$.

283. Из вершины C равнобедренного треугольника ABC проведены секущая CD (точка D лежит на AB) и биссектрисы CE и CF треугольников ACD и BCD. Доказать,что центр окружности, описанной около треугольника CEF, лежит на CD.

284. Биссектриса CD треугольника ABC встречает описанную около треугольника окружность в точке E. Доказать, что

$$CD \cdot CE = AC \cdot BC.$$

285. Доказать, что квадрат биссектрисы треугольника равен разности между произведением заключающих ее сторон и произведением отрезков третьей стороны, на которые она делится биссектрисой.

286. Прямая, выходящая из вершины C треугольника ABC, делит противоположную сторону в точке D на отрезки m и n такие, что $CD^2 = ab - mn$. Доказать, что либо треугольник ABC равнобедренный, либо CD — биссектриса треугольника.

287. Доказать, что центр вписанной окружности делит биссектрису угла C треугольника ABC в отношении $\frac{a+b}{c}$, считая от вершины.

Ортоцентр и высоты треугольника (задачи 288—295).

288. Доказать, что расстояние от ортоцентра треугольника ABC до его вершины A равно $2R \mid \cos A \mid$.

289. Доказать, что ортоцентр треугольника ABC делит его высоту CC_1 на отрезки, отношение которых, считая

от вершины, равно

$$\frac{\cos C}{\cos A \cos B}.$$

290. Ортоцентр треугольника делит одну из его высот в отношении 2 : 1, считая от вершины, а другую — пополам. Найти тангенсы углов треугольника.

291. В остроугольном треугольнике проведены высоты AA_1, BB_1, причем $AB_1 : B_1C = 1 : 3$ и $CA_1 : A_1B = 1 : 2$. Доказать, что углы треугольника образуют арифметическую прогрессию.

292. Доказать, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от ортоцентра до вершин треугольника равна сумме диаметров описанной и вписанной окружностей. Как изменится теорема, если треугольник тупоугольный? Сформулировать соответствующую теорему для прямоугольного треугольника.

293. В треугольнике ABC основания высот AA_1 и BB_1 соединены отрезком A_1B_1. Доказать, что

$$A_1B_1 = AB\,|\cos C|$$

294. Доказать, что основания высот остроугольного треугольника ABC являются вершинами треугольника $A_1B_1C_1$, отношение периметра которого к периметру треугольника ABC равно отношению радиусов окружностей, вписанной в треугольник ABC и описанной около него.

295. Пусть O — центр окружности радиуса R, описанной около треугольника ABC.

а) Построить вектор $\overline{OH}$, равный сумме векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Доказать, что точка H—ортоцентр треугольника.

б) Построить точку O_1 такую, что $\overline{OO_1} = \frac{1}{2}\,\overline{OH}$. Доказать, что окружность с центром O_1 радиуса $\frac{1}{2}R$ проходит через середины сторон, середины отрезков от ортоцентра до вершины и основания высот треугольника. (Окружность девяти точек.)

в) Построить точку M такую, что $\overline{OM} = \frac{1}{3}\,\overline{OH}$. Доказать, что точка M — центр тяжести треугольника ABC.

г) Доказать что

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

296. Доказать, что алгебраическая сумма расстояний от центра окружности, описанной около треугольника, до его сторон равна сумме радиусов вписанной и описанной окружностей. (Теорема Карно.)

297. Доказать, что во всяком нетупоугольном треугольнике

$$R + r \leqslant h_c,$$

где R и r — радиусы окружностей, описанной и вписанной, h_c — бóльшая из высот треугольника.

298. а) Биссектриса угла C треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Доказать, что если O' — центр вписанной окружности, то $AD = DO'$. Доказать обратную теорему.

б) В равнобедренном треугольнике по данным радиусам R и r окружностей, описанной и вписанной, найти расстояние d между центрами этих окружностей.

в) Доказать, что если около треугольника ABC описана окружность радиуса R и вписана окружность радиуса r, то расстояние d между центрами окружностей определяется по формуле:

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

(Формула Эйлера.)

§ 3. Вписанный четырехугольник. Правильные многоугольники

299. Выразить диагонали вписанного в окружность четырехугольника через его стороны.

300. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что если диагональ BD является биссектрисой одного из углов четырехугольника, то

$$BD^2 = AB \cdot BC + CD \cdot DA.$$

Доказать обратную теорему.

301. Доказать, что произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон. (Теорема Птолемея.)

302. Доказать, что если A, B, C — последовательные вершины вписанного в окружность правильного n-угольника и точка M окружности не лежит на дуге ABC, то

$$MA + MC = 2MB\cos\frac{\pi}{n},$$

если точка M лежит на дуге BC, то

$$MA - MC = 2MB\cos\frac{\pi}{n}.$$

Установить зависимость между отрезками MA, MB и MC для равностороннего треугольника.

303. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC со стороной, равной a. Обозначим расстояния от произвольной точки M окружности до вершин треугольника через x, y, z. Доказать, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2.$$

304. Доказать, что если в окружность вписан правильный n-угольник $A_1A_2...A_n$ с нечетным числом сторон, то сумма расстояний от любой точки дуги A_1A_n до вершин с четными номерами равна сумме расстояний от этой же точки до вершин с нечетными номерами.

305. Около окружности радиуса r описан правильный 12-угольник $A_1A_2 ...A_{12}$. Доказать, что

$$A_1A_2 + A_1A_4 = 2r.$$

306. Доказать, что в правильном n-угольнике $A_1A_2...A_n$ отрезки A_1A_2, A_1A_k и A_1A_{k+2} удовлетворяют равенству

$$A_1A_2 = A_1A_{k+2} - A_1A_k$$

тогда и только тогда, если $n = 3k$.

307. Доказать, что если $A_1A_2 ... A_{15}$ — правильный 15-угольник, то имеет место соотношение

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_5} + \frac{1}{A_1A_8}.$$

308. Доказать, что геометрическое место точек плоскости, сумма квадратов расстояний которых от вершин правильного многоугольника постоянна, есть окружность (существование окружности зависит от постоянной).

Доказать, что сумма квадратов от любой точки окружности до вершин вписанного в окружность правильного n-угольника равна $2nR^2$.

309. Пусть требуется разделить окружность на n равных частей. На диаметре окружности построим равносторонний треугольник ABC и разделим диаметр точкой D в отношении $AD : AB = 2 : n$. Проведем прямую CD до пересечения с окружностью в точке E. Тогда дуга AE будет составлять примерно $\frac{1}{n}$ часть окружности, с точностью, допустимой во многих практических работах. Доказать, что в случае деления окружности на 3, 4 и 6 частей указанный способ оказывается точным. Вычислить центральный угол AOE при $n = 7$ и сравнить найденное значение с точным значением центрального угла правильного семиугольника.

§ 4. Площади

310. Доказать, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению ее оснований.

311. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков гипотенузы, на которые ее делит точка касания вписанной окружности.

312. Найти площадь треугольника ABC, зная угол A и отрезки m и n, на которые точка касания вписанной окружности делит сторону BC.

313. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника равна произведению его средних линий на синус угла между ними.

314. Доказать, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению средних линий.

315. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки P и Q делят сторону AB на три равные части, а точки R и S делят сторону CD также на три равные части. Доказать, что а) прямые PS и QR делят отрезок, соединяющий середины сторон AD и BC на три равные части , б) площадь четырехугольника $PQRS$ составляет $\frac{1}{3}$ площади данного.

§ 5. Наибольшие и наименьшие значения

316. Из всех треугольников с данной стороной $BC = a$ и данным противолежащим углом A найти треугольник, имеющий наибольший периметр.

317. Доказать, что из всех треугольников с данной стороной $BC = a$ и данным противолежащим углом A равнобедренный треугольник имеет наименьшую медиану m_a, если угол A при вершине тупой, и наибольшую, если угол A острый.

318. а) Прямая MN отсекает от данного угла A треугольник данной площади Q (M и N — точки на сторонах угла A). При каком условии отрезок MN имеет наименьшую длину и какова эта длина?

б) На сторонах AB и AC треугольника ABC найти соответственно точки M и N так, чтобы треугольник ABC делился отрезком MN на две равновеликие части и чтобы отрезок MN имел наименьшую длину.

в) Данный треугольник ABC разделить отрезком наименьшей длины на две равновеликие части.

319. Доказать, что из всех четырехугольников, вписанных в окружность, квадрат имеет наибольшую площадь и наибольший периметр.

320. Через центр O квадрата $ABCD$ проведена прямая l параллельно стороне AB. На прямой l найти точку M такую, чтобы отношение $\frac{AM}{BM}$ имело а) наименьшее значение, б) наибольшее значение.

321. Дана прямая l и вне ее две точки A и B. Найти на прямой l точку M такую, чтобы отношение $\frac{AM}{BM}$ имело а) наименьшее значение, б) наибольшее значение.

322. Пусть M — произвольная точка биссектрисы угла C треугольника ABC. Доказать, что если $AC < BC$, то отношение $\frac{AM}{BM}$ имеет наименьшее значение в точке пересечения биссектрис внутренних углов треугольника и наибольшее — в точке пересечения биссектрис внешних углов A и B.

§ 6. Смешанные задачи

323. В треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 пересекают продолжения сторон BC и AC в точках A_1 и B_1. Середины сторон AC и BC обозначены соответственно через A_2 и B_2. При каком условии прямые A_1A_2 и B_1B_2 а) параллельны, б) перпендикулярны?

324. Высота равнобедренного треугольника в два раза меньше биссектрисы угла при основании. Найти углы треугольника.

325. Высота и медиана треугольника, проведенные из одной вершины внутри его, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из этой же вершины. Доказать, что треугольник прямоугольный.

326. Доказать, что если стороны a, b и медиана m_c треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{m_c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

то $\angle C \geqslant 120°$.

327. Доказать, что если стороны a, b и высота h_c треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{h_c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

то $\angle C \leqslant 120°$.

328. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен $\frac{1}{3}$ одной из высот треугольника. Доказать, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию.

329. Один из углов треугольника равен 60°. Высота треугольника, проведенная из вершины этого угла, равна половине радиуса описанной окружности. Определить два других угла треугольника.

330. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CD. Пусть $CD=h$ и r, r_1, r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, ACD. Доказать, что

а) $\operatorname{tg} A=\frac{r_1}{r_2}$,

б) $r_1^2+r_2^2=r^2$,

в) $r+r_1+r_2=h$.

331. Доказать, что треугольник ABC, у которого разность углов A и B равна 90°, обладает следующими свойствами:

а) $\operatorname{tg} B=\frac{b}{a}$,

б) $c=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

в) $2R=\frac{a^2-b^2}{c}$

(R — радиус окружности, описанной около треугольника).

Построить треугольник, зная, что $BC = a$, $AC = b$ и разность углов A и B равна 90°.

332. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B. Найти сторону c, если даны стороны a и b треугольника. Построить треугольник.

333. В треугольнике ABC угол A втрое больше угла B. Построить треугольник, если даны стороны a и b. Вычислить третью сторону треугольника.

334. В четырехугольнике $ABCD$ угол A равен углу C и диагональ BD делится другой диагональю пополам. Доказать, что четырехугольник — параллелограмм.

335. Три прямые проходят через одну точку O, при которой образуется шесть углов по 60°. Доказать, что сумма расстояний от любой точки до двух прямых равна расстоянию до третьей прямой.

336. Прямые a, b, c проходят через одну точку O, при этом прямая b образует с каждой из двух других прямых угол, равный α. Найти зависимость между расстояниями d_1, d_2, d_3 от любой точки M до прямых a, b, c.

337. К окружности в точке M диаметра MN проведена касательная. Через концы хорды AB, параллельной MN, проведены прямые NA и NB, пересекающие касательную в точках P и Q. Доказать, что

$$MN^2 = MP \cdot MQ.$$

338. Окружности (O_1, r_1), (O_2, r_2) и (O_3, r_3) касаются попарно внешним образом. Общая внешняя касательная окружностей O_1 и O_2 параллельна общей внешней касательной окружностей O_1 и O_3. Доказать, что

$$r_1^2 = 4r_2r_3.$$

339. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Доказать, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны.

340. На сторонах произвольного треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Доказать, что их центры сами образуют равносторонний треугольник.

341. Из середины D основания AB равнобедренного треугольника ABC опущен перпендикуляр DM на сторону BC. Точка N — середина отрезка MD. Доказать, что отрезки AM и CN перпендикулярны.

342. Используя только определение косинуса и чертеж 12, доказать тождество

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

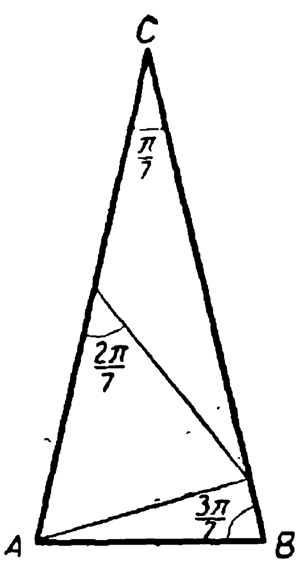
343. Доказать геометрически тождество

$$\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}=\frac{1}{2}.$$

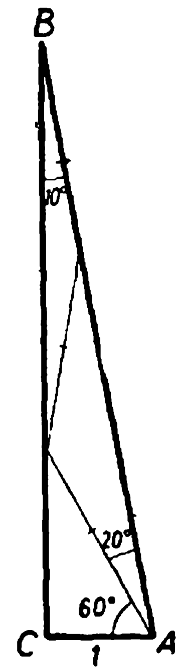
344. С помощью чертежа 13 доказать тождества:

а) $\operatorname{ctg}10^\circ-4\cos 10^\circ=\sqrt{3}$,

б) $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ=1$.



Черт. 12



Черт. 13

345. Доказать геометрически тождество

$$\sqrt{3}\operatorname{ctg}20^\circ-4\cos 20^\circ=1.$$

346. Доказать геометрически справедливость формулы

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

для острого угла α.

347. Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Доказать, что

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

348. Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ служит ромб $ABCD$ со стороной a и углом BAD, равным 60°, боковое ребро MA пирамиды также равно a. Доказать что существует прямоугольный треугольник, стороны которого равны MB, MC и MD.

349. Найти зависимость между неравными двугранными углами правильной треугольной пирамиды.

350. Дан тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$, в котором $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $A_3A_1 = a_3$, $A_3A_4=a_4$; $A_1A_4= a_5$, $A_2A_4 = a_6$.

а) Определить длину отрезка, соединяющего середины противоположных ребер A_1A_2 и A_3A_4.

б) Определить косинус угла между прямыми A_2A_3 и A_1A_4. При каком условии прямые A_2A_3 и A_1A_4 перпендикулярны?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. 72°.

Указание. Обозначив через x градусную меру угла между диагональю и основанием трапеции, составить уравнение $5x = 180$.

2. Два решения: 90°, 45°, 45°; 72°, 72°, 36°.

3. Нет решения (трапеция не существует).

Указание. Обозначив основания трапеции через a и b, установить, что задача имеет решение при $6 < a + b < 30$. Если $a + b \leqslant 6$ или $a + b \geqslant 30$, то задача решения не имеет.

4. $12 - \frac{a}{3}$. $0 < a < 9$.

5. $\frac{16}{p}$, $2 \leqslant p \leqslant 8$.

6. $12 - 3m$, $4m - 12$; $3 < m < 4$.

7. $\frac{2r_1r_2}{r_1 - r_2}$, $r_1 > r_2$. При $r_1 = r_2$ решения нет (общая касательная линию центров не пересекает).

9. Равнобедренный.

10. *Указание.* Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — гипотенуза, h — высота, опущенная на гипотенузу. Установить, что $(a + b)^2 = c^2 + 2ch$.

11. *Указание.* Воспользоваться тождеством $(a + b)^2 = c^2 + 2ch$ и неравенством $h \leqslant \frac{c}{2}$.

12. *Указание.* Продолжить медиану CM треугольника ABC за точку M на отрезок MD, равный CM, и рассмотреть треугольник ACD.

14. $\frac{3}{2}p < m_a + m_в + m_c < 2p$.

Решение. Сложив неравенства

$$m_a < \frac{1}{2}(b + c),$$

$$m_b < \frac{1}{2}(a+c),$$
$$m_c < \frac{1}{2}(a+b)$$

(см. задачу 12), получим:

$$m_a + m_b + m_c < 2p.$$

Воспользуемся результатом задачи 13:

$$m_a + m_b > \frac{3}{2}c,$$
$$m_b + m_c > \frac{3}{2}a,$$
$$m_c + m_a > \frac{3}{2}b,$$

откуда

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{2}p.$$

15. $0° < \angle A \leqslant 60°$, $0° < \angle B < 90°$, $60° \leqslant \angle C < 180°$.

16. Площадь правильного шестиугольника больше.

Указание. Если a — сторона правильного шестиугольника, то площадь его равна $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, площадь квадрата с тем же периметром равна $\frac{9a^2}{4}$.

17. а) 12; б) два решения: 16 и 19,2; в) нет решений.

18. $\frac{m+\sqrt{50-m^2}}{2}$, $\frac{m-\sqrt{50-m^2}}{2}$, $5 < m \leqslant 5\sqrt{2}$.

19. $\frac{c+\sqrt{c^2-4h^2}}{2}$, $\frac{c-\sqrt{c^2-4h^2}}{2}$, $c \geqslant 2h$.

20. $\frac{a+\sqrt{a^2-144}}{2}$, $\frac{a-\sqrt{a^2-144}}{2}$, $12 \leqslant a \leqslant 20$.

21. $\frac{-r+\sqrt{4d^2-3r^2}}{2}$, $d > r$.

22. $\frac{a+\sqrt{2b^2-a^2}}{2}$, $\frac{a-\sqrt{2b^2-a^2}}{2}$, $\frac{a^2}{2} \leqslant b^2 < a^2$.

23. $x = \frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{Sh}{a}}$, $S \leqslant \frac{ah}{4}$, $S_{\max} = \frac{ah}{4}$ при $x = \frac{h}{2}$ (x — сторона прямоугольника, перпендикулярная основанию треугольника).

24. Квадрат.

Решение. Пусть S — площадь, $2p$ — периметр, x — сторона прямоугольника. Имеем:

$$S = x(p - x),$$
$$x^2 - px + S = 0,$$
$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - S}.$$

Отсюда $S_{max} = \frac{p^2}{4}$ при $x = \frac{p}{2}$.

Задачу можно решить также способом выделения полного квадрата. Так как $S = -x^2 + px = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4}$, то $S_{max} = \frac{p^2}{4}$ при условии, что прямоугольник есть квадрат.

Из решенной задачи можно сделать следующий вывод: *произведение двух положительных сомножителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве сомножителей.*

25. а) Два решения: 3 *см*, 6 *см*.

б) $\frac{p}{4}$.

Указание. Обозначим отрезок касательной через y и сторону треугольника, параллельную касательной, через x. Касательная отсекает от данного треугольника подобный ему треугольник, причем периметр отсекаемого треугольника равен $2p - 2x$ (для доказательства этого следует рассмотреть отрезки касательных к окружности). Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{y}{x} = \frac{p - x}{p},$$

откуда
$$y = \frac{x(p - x)}{p}.$$

Используя результат, полученный при решении задачи 24, находим, что y имеет наибольшее значение при равенстве множителей x и $p - x$, т. е. при $x = \frac{p}{2}$. В таком случае, $y = \frac{p}{4}$ (отрезок касательной есть средняя линия треугольника).

26. $\dfrac{S \pm \sqrt{S^2 - 2pqS}}{p}$, $\dfrac{S \mp \sqrt{S^2 - 2pqS}}{q}$, $S \geqslant 2pq$.

Решение. Пусть $MP \perp AB$ и $MQ \perp AC$. Согласно условию $MP = p$ и $MQ = q$. Обозначим $AB = x$, $AC = y$. Тогда удвоенные площади треугольников ABC, ABM и ACM соответственно равны xy, px, qy. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 2S, \\ px + qy = 2S. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение почленно на pq, находим, что px и qy являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - 2Sz + 2pqS = 0,$$

откуда $px = S \pm \sqrt{S^2 - 2pqS}$, $qy = S \mp \sqrt{S^2 - 2pqS}$.

При $S > 2pq$ задача имеет два решения: легко проверить, что условия $x > q$ и $y > p$, которым должны удовлетворять неизвестные, выполняются. При $S = 2pq$ задача имеет одно решение: $AB = 2q$, $AC = 2p$.

27. $\sqrt{\dfrac{n}{m}}$, $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$.

28. 30°; 60°.

Указание. Воспользоваться свойством биссектрисы угла треугольника.

29. 45°.

Указание. Установить, что $\cos A = \dfrac{m}{n}$, где A — острый угол ромба.

30. $\approx 64°10'$, $\approx 115°50'$.

Указание. Обозначив острый угол параллелограмма через x, составить уравнение

$$\frac{h_1}{\sin x} + \frac{h_2}{\sin x} = p,$$

откуда $\sin x = \dfrac{h_1 + h_2}{p}$.

Задача имеет решение, если $h_1 + h_2 \leqslant p$.

31. $\approx 72°32'$.

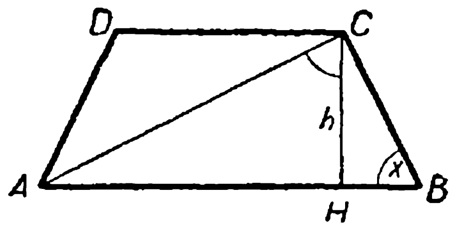
32. $\sqrt{2}$.

33. $\approx 38°10'$, $\approx 51°50'$.

Указание. Задача приводит к уравнению $\operatorname{tg}^2 x = \sin x$, где x — меньший угол треугольника.

34. $\angle A = \angle B \approx 63°26'$, $AB = 5$ (AB — большее основание трапеции).

Решение. Пусть $ABCD$ — трапеция, в которой $AD = BC$, $AC \perp BC$, CH — высота (черт. 14). Согласно условию $CD = a$, $CH = h$. Обозначим через x острый угол трапеции, тогда и $\angle ACH = x$. Из треугольников ACH и BCH найдем $AH = h \operatorname{tg} x$, $BH = h \operatorname{ctg} x$.



Черт. 14

Принимая во внимание, что $AH - BH = CD$, получим уравнение:

$$h \operatorname{tg} x - h \operatorname{ctg} x = a,$$

или

$$h \operatorname{tg}^2 x - a \operatorname{tg} x - h = 0.$$

Положительный корень этого уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}{2h}$ и дает решение задачи.

При $a = 3$ и $h = 2$ имеем $\operatorname{tg} x = 2$, $x = \operatorname{arctg} 2$, $BH = 1$, $AB = 5$.

35. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$.

Указание. Если $\angle A < \angle B$, то $\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \alpha$.

36. $60°$.

37. $90°$.

39. $\approx 23°25'$, $\approx 36°35'$.

Указание. Обозначить угол AOM через x и составить уравнение

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin (60° - x)},$$

откуда

$$\operatorname{ctg} x = \frac{a + 2b}{a\sqrt{3}}.$$

40. $\approx 36°52'$, $\approx 53°8'$.

Указание. Если x — половина одного из острых углов треугольника, то $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} (45° - x) = 5$.

41. $\approx 31°22'$, $\approx 58°38'$.

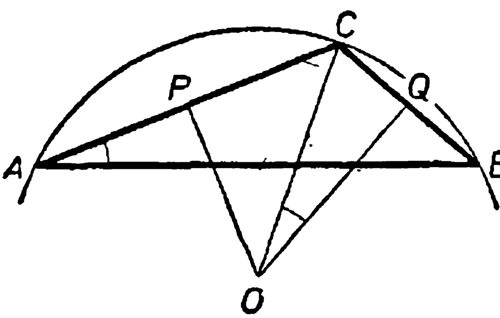
Указание. Составить уравнение $\operatorname{tg}(45^\circ - x) = 2\operatorname{tg} x$, где $2x$ — меньший острый угол треугольника.

42. *Указание.* Воспользоваться формулой $\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - 1}$.

44. $\approx 38^\circ 13'$; $\cos x = \frac{p}{d\sqrt{2}}$, $d < p \leqslant d\sqrt{2}$.

Указание. Искомый угол x определится из уравнения $\sin(45^\circ - x) + \cos(45^\circ - x) = \frac{p}{d}$, $0^\circ < x < 45^\circ$.

45. $\operatorname{tg} A = \frac{2k-1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2} < k < 2$.



Черт. 15

Решение. Пусть $OP \perp AC$ и $OQ \perp BC$ (черт. 15). Тогда $\angle POQ = 180^\circ - \angle ACB = 60^\circ$, $\angle COQ = \angle A$ (каждый из этих углов измеряется половиной дуги BC). По условию $\frac{OP}{OQ} = k$. Обозначив радиус окружности, описанной около треугольника, через R и угол COQ через x, из треугольников COP и COQ находим:

$$OP = R\cos(60^\circ - x),$$
$$OQ = R\cos x.$$

Следовательно, $\frac{\cos(60^\circ - x)}{\cos x} = k$.

Отсюда $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} x = k$ и $\operatorname{tg} x = \frac{2k-1}{\sqrt{3}}$.

Найдем множество допустимых значений k. Так как $0^\circ < x < 60^\circ$, то $0 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$. Решая неравенства $0 < \frac{2k-1}{\sqrt{3}} < \sqrt{3}$ относительно k, находим $\frac{1}{2} < k < 2$.

46. $S=\frac{c^2}{4}\sin 2\alpha$, $S_{max}=\frac{c^2}{4}$ при $\alpha=45°$.

47. $\frac{d^2}{2}\sin 2\beta$.

48. 15°, 75°.

49. $\approx 41°36'$, $\approx 48°24'$; $\cos\frac{A}{2}=\frac{l+\sqrt{l^2+8c^2}}{4c}$, где A — угол, из вершины которого проведена биссектриса; $l<c$.

50. 15°.

Указание. Искомый угол x определится из уравнения

$$(\sin x+\cos x)^2=\frac{3}{2},\ 0°<x<45°.$$

51. 30°.

Указание. Для определения угла ромба составить уравнение

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1,\ 0°<x<90°.$$

52. 3, 3, $\frac{3}{4}$.

Решение. Пусть ABC — равнобедренный треугольник, в котором медианы AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны. Точка пересечения медиан M отсекает от медианы CC_1 отрезок MC_1, равный $\frac{1}{3}$ медианы. С другой стороны, медиана MC_1 прямоугольного треугольника AMB равна половине гипотенузы, т. е. $MC_1=AC_1$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} A=\operatorname{tg} B=\frac{CC_1}{AC_1}=\frac{3MC_1}{MC_1}=3.$$

Далее находим:

$$\operatorname{tg} C=\operatorname{tg}(180°-2A)=-\operatorname{tg} 2A=\frac{2\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg}^2 A-1}=\frac{3}{4}.$$

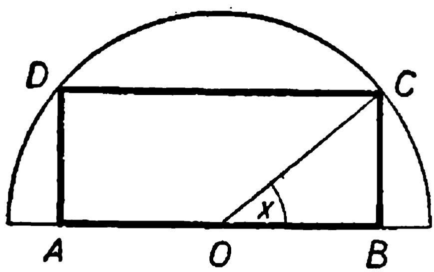
53. $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{3}{4}$.

Указание. Пусть ABC — равнобедренный треугольник, AA_1 — медиана, проведенная к боковой стороне. Обозначив $AC=BC=b$ и $AB=AA_1=c$, установить, что $b=c\sqrt{2}$.

Построение треугольника можно выполнить исходя из того, что $\cos C=\frac{3}{4}$.

54. $\alpha = \arccos\frac{2}{3} \approx 48^\circ 11'$ (α—угол при основании треугольника).

55. Решение. Пусть O — центр полуокружности радиуса R и $ABCD$ — вписанный в полуокружность прямоугольник (черт. 16). Обозначим угол BOC через x, тогда $BC = R\sin x$, $AB = 2R\cos x$. Площадь прямоугольника $S = AB\cdot BC = R^2\sin 2x$ имеет наибольшее значение при $x = 45^\circ$.



Черт. 16.

56. *Указание.* Площадь треугольника $S = \frac{1}{2}AB\cdot BC = \frac{mn}{\sin 2x}$, где m и n — расстояния от точки A до параллельных прямых, x — угол между AB и перпендикуляром, проведенным из A к параллельным прямым. $S_{max} = mn$ при $x = 45^\circ$.

57. *Указание.* Пусть a и b—стороны данного прямоугольника, α—угол между сторонами прямоугольников. Установить, что площадь описанного прямоугольника $S = ab + \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2\alpha$.

58. $\sqrt{\frac{m-n}{2m}}$, $\sqrt{\frac{m+n}{2m}}$, $m > n$.

59. $q\sqrt{\frac{2p}{p-q}}$.

Решение. Пусть A—острый угол треугольника, из вершины которого проведена биссектриса. Тогда $\cos A = \frac{q}{p}$,

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{q}{p}\right)} = \sqrt{\frac{p-q}{2p}},$$

$$l = \frac{q}{\sin\frac{A}{2}} = q\sqrt{\frac{2p}{p-q}}.$$

Задачу можно решить и без применения тригонометрических функций, алгебраически.

60. $\approx 64^\circ 35'$; $15\sqrt{10} \approx 47{,}4$.

Решение. Если BD—высота равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = BC$, то $\cos A = \frac{AD}{AB} = \frac{r}{h-r}$,

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \sqrt{\frac{h}{h-2r}}.$$

Площадь треугольника $S = AD \cdot BD = rh \operatorname{ctg}\frac{A}{2} = rh\sqrt{\frac{h}{h-2r}}$,

$$h > 2r.$$

61. $\frac{1}{3}$.

62. $\frac{4}{5}$.

Указание. Пусть A — меньший острый угол прямоугольного треугольника, h — высота, m — медиана, проведенные из вершины прямого угла. Тогда $\frac{h}{m} = \sin 2A = \frac{2\operatorname{tg} A}{1+\operatorname{tg}^2 A}$.

63. $\frac{b^3 r}{b^2 - 4r^2}$, $b > 2r$.

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{2r}{b},\ 0^\circ < \angle A < 90^\circ,$$

где A — угол при основании треугольника. По формуле тангенса двойного аргумента находим: $\operatorname{tg} A = \frac{4br}{b^2-4r^2}$.

Площадь треугольника $S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{4}b^2\operatorname{tg} A = \frac{b^3 r}{b^2-4r^2}$.

64. $\sin\angle BAD = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, $h = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Указание. Установить, что треугольник AOB прямоугольный, а потому $AB = \sqrt{a^2+b^2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}$ ($\alpha = \angle BAD$).

65. *Указание.* Пусть $AB = a$, $CD = b$, тогда $AD = \frac{a-b}{\cos A}$, $BC = (a-b)\operatorname{tg} A$, причем $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{b}{a}$.

66. $c < a + b \leqslant c\sqrt{2}$.

67. $\approx 106°16'$, $\approx 73°44'$; $\cos(x+45°)=\frac{d\sqrt{2}}{4a}$, где x — половина острого угла ромба; $d<2a$.

68. $30°, 90°$; $\cos\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)=\left(k+\sqrt{k^2+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$, где x — угол при основании трапеции, $k=\frac{2r}{p}\leqslant\frac{1}{2}$, $0<\alpha<180°$.

Указание. Так как суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны между собой, то сумма боковых сторон трапеции равна p. Задача приводит к уравнению $\frac{2r}{\sin x}+\frac{2r}{\sin(\alpha-x)}=p$.

70. *Указание.* Преобразовать произведение $2\sin B\cos C$ в сумму.

72. Решение. Имеем $2\sin A\sin B>1$. Преобразовав произведение синусов в сумму, получим $\cos(A-B)-\cos(A+B)>1$,

или $$\cos(A-B)+\cos C>1.$$

Отсюда $$\cos C>1-\cos(A-B)\geqslant 0,$$
$$\cos C>0,\quad C<90°.$$

73. *Указание.* Пусть $A_1A_2\ldots A_9$ — правильный девятиугольник, R — радиус описанной окружности. На основании формулы, выражающей зависимость между диаметром окружности, ее хордой и синусом вписанного угла, опирающегося на эту хорду, имеем:
$A_1A_2=2R\sin 20°$, $A_1A_3=2R\sin 40°$, $A_1A_5=2R\sin 80°$. Таким образом, задача сводится к доказательству тождества

$$\sin 20°=\sin 80°-\sin 40°.$$

Существует несколько геометрических решений этой задачи. Укажем одно из кратких решений. Пусть диагонали A_1A_5 и A_2A_7 пересекаются в точке M. Тогда нетрудно установить, что треугольники A_1A_2M и A_5A_7M равносторонние. Следовательно, $A_1M=A_1A_2$ и $A_5M=A_5A_7$, откуда $A_1A_5=A_1A_2+A_5A_7$. Полученное равенство и доказывает теорему.

75. Периметр прямоугольника (черт. 16) имеет наибольшее значение при $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$.

76. *Указание.* Пусть $ABCD$ — прямоугольник, вписанный в сектор, вершины A и B лежат на радиусе OM, вершина C — на дуге. Если обозначить радиус дуги через R, угол сектора через α и угол MOC через x, то

$$S_{ABCD} = \frac{R^2 \sin x \sin(\alpha - x)}{\sin \alpha}.$$

Отсюда вывести, что площадь прямоугольника будет наибольшей, если вершина C делит дугу сектора пополам.

77. $\approx 1{,}89$ рад.

Решение. Площадь сектора OAB с центральным углом α в радианной мере равна $\frac{1}{2}R^2\alpha$, а площадь треугольника OAB равна $\frac{1}{2}R^2 \sin\alpha$.

По условию задачи имеем:

$$\frac{1}{2}R^2 \sin\alpha = \frac{1}{4}R^2\alpha,$$

откуда $\sin\alpha = \frac{1}{2}\alpha, \quad 0 < \alpha < \pi.$

Полученное уравнение можно решить приближенно графически и методом проб.

78. $\approx 2{,}55$ рад.

Указание. По формуле $S_{\text{сег}} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$ составить уравнение

$$\sin\alpha = \alpha - 2, \quad 0 < \alpha < 2\pi.$$

79. $\approx 0{,}74$ рад.

Указание. Радианная мера x угла BAC определится из уравнения

$$\cos x = x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

80. $\approx 1{,}15$ рад.

Указание. Пусть угол A треугольника содержит x радиан. Тогда

$$\operatorname{tg} x = 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

81. $\angle BOM \approx 1{,}12$ рад. (M—точка пересечения прямой DM с окружностью.)

Указание. Обозначив радианную меру угла BOM через x, получить уравнение $\sin x = \pi - 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

83. *Указание.* Воспользоваться неравенством задачи 82.

84. $2\pi a$.

85. б) 0.

87. $\frac{\pi a^2}{8}$.

Указание. Пусть каждой стороны треугольника касается n кругов, тогда в треугольнике их будет $\frac{n(n+1)}{2}$. Установить, что радиус каждого круга равен $\frac{a}{2(n-1+\sqrt{3})}$, и найти сумму площадей всех кругов.

89. *Указание.* Установить, что для всякой точки внутри треугольника или на стороне его выполняется равенство

$$ad_a + bd_b + cd_c = 2S,$$

где d_a, d_b, d_c — расстояния от данной точки соответственно до сторон a, b, c треугольника, а S — площадь треугольника.

91. $\angle AOB = 90°$.

92. Сечение — квадрат.

93. *Указание.* Воспользоваться неравенством $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ и формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2} ab \sin C$.

94. *Указание. Первый способ.* Установить, что $h = \frac{2pr}{c}$, где $2p$ — периметр и c — гипотенуза прямоугольного треугольника, после чего воспользоваться неравенством

$$c < a + b \leqslant c\sqrt{2} \quad \text{(см. задачу 66).}$$

Второй способ. Вывести соотношение $h - r = r\sqrt{2}\cos(A - 45°)$, где A — один из острых углов треугольника.

95. Решение. Так как $\angle A < \angle B$, то $a < b$ и $2R\sin A < 2R\sin B$, т. е. $\sin A < \sin B$. Все преобразования можно выполнить и в обратном порядке.

96. Равенство имеет место при $a = b$ или $\angle C = 90°$.

Указание. Установить, что для всякого треугольника справедливо соотношение $h_a - h_b = (b - a) \sin C$.

97. Меньшей стороне треугольника.

Указание. Установить, что если две вершины квадрата лежат на стороне BC треугольника, то сторона вписанного квадрата равна $\frac{2S}{a+h_a}$, где S—площадь треугольника ABC.

98. $\frac{-c+\sqrt{c^2+4S}}{2}$, $S \leqslant \frac{c^2}{4}$.

Решение. Пусть p — полупериметр прямоугольного треугольника, r — радиус вписанной окружности. Тогда

$$p = c + r,$$
$$S = pr.$$

Отсюда $S = (c + r)\, r$,
или $r^2 + cr - S = 0$.
Полученное уравнение имеет один положительный корень:

$$r = \frac{-c+\sqrt{c^2+4S}}{2},$$

который удовлетворяет условию задачи, если $S \leqslant \frac{c^2}{4}$.

99. $-h+\sqrt{h^2+m^2}$, $m \geqslant 2h\sqrt{2}$.

Решение. Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника. Так как $(a+b)^2 = c^2 + 2ch$, то, подставляя $a + b = m$, придем к уравнению $c^2 + 2ch - m^2 = 0$,

откуда $c = -h + \sqrt{h^2+m^2}$.

Задача имеет решение, если $c \geqslant 2h$, т. е. при $-h + \sqrt{h^2+m^2} \geqslant 2h$ или $m \geqslant 2h\sqrt{2}$.

100. *Указание.* Обозначив больший катет треугольника через a и разность прогрессии через d, получить уравнение

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2,\ a > 0,\ d > 0.$$

101. $3r$, $4r$, $5r$.

Указание. Пусть $a < b < c$. Принимая за неизвестное среднюю по величине сторону b, имеем: $a = b - r$, $c = b + r$. На основании формулы $S = pr$ (S—площадь треугольника, p—его полупериметр) и формулы Герона составить уравнение $r = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{b}{2}-r\right)\left(\frac{b}{2}+r\right)}$, откуда $b = 4r$.

102. $\approx 38^\circ 10'$, $\approx 51^\circ 50'$,

Указание. Задача приводит к уравнению $\cos^2\alpha = \sin\alpha$, где α — меньший острый угол треугольника.

103. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35^\circ 16'$, $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2} \approx 54^\circ 44'$.

104. $\approx 39^\circ 32'$.

Решение. Пусть x—острый угол ромба, a—его сторона, r—радиус вписанной окружности. Тогда $\sin x = \frac{2r}{a}$. По условию $\pi r^2 = ar$, или $a = \pi r$. Следовательно, $\sin x = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366$.

105. Два решения: $23^\circ 30'$, $33^\circ 45'$.

Указание. Составить уравнение

$$\sin(A + 45^\circ) = \sin 3A,$$

откуда $3A = (-1)^n (A + 45^\circ) + 180^\circ n$.

При $n = 0$ и $n = 1$ находим: $A = 22^\circ 30'$ и $A = 33^\circ 45'$. Других корней, удовлетворяющих условию задачи, уравнение не имеет.

106. Два решения: 36°, 60°.

Указание. Установить, что $\angle AOB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$.

107. $\frac{4}{3}$.

Указание. Задача приводит к уравнению $\sin x + 2\cos x = 2$, где x — угол при основании треугольника.

108. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Указание. Обозначив через x угол при основании треугольника, получить уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\operatorname{tg} 2x$.

109. $\approx 6^\circ 28'$, $\approx 143^\circ 32'$.

Указание. Воспользоваться формулой площади треугольника

$$S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2\sin C}.$$

110. Два решения: 40°, 140°; 100°, 80°.

Указание. Пусть α—угол между диагональю и основанием трапеции, тогда $S = \frac{1}{2}d^2 \sin 2\alpha$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

111. $\angle B = 45^\circ$.

Указание. Из подобия треугольников ABC и ACD получить, что $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$. Затем воспользоваться теоремой синусов.

112. $\cos\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5-k}}{2}$, $4 < k \leqslant 5$.

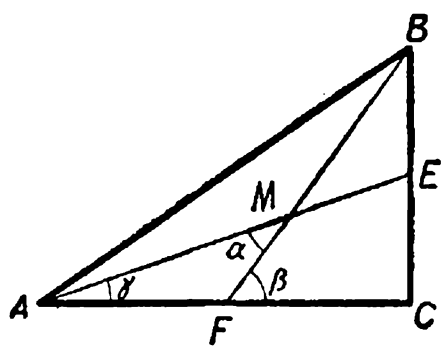
Задача имеет одно решение, если $4 < k \leqslant 2(\sqrt{2}+1)$ или $k = 5$. При $2(\sqrt{2}+1) < k < 5$ задача имеет два решения.

113. $(n\pi, 0)$; $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pm\right.$ $\left.\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

114. $\approx 65^\circ 6'$.

Указание. Для определения первоначального угла α между силами составить уравнение $\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\alpha$,

$0^\circ < \alpha < 180^\circ$.



Черт. 17

115. Решение. Обозначим через M точку пересечения медиан AE и BF треугольника ABC (черт. 17). По условию $\angle AMF = \alpha$. Введем еще следующие обозначения: $\angle BFC = \beta$, $\angle EAC = \gamma$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тогда $\alpha = \beta - \gamma$, причем из треугольников BCF и ACE следует, что $\operatorname{tg}\beta = \frac{2a}{b}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{2b}$.

По формуле тангенса разности двух аргументов получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{3ab}{2(a^2+b^2)} = \frac{3ab}{2c^2}.$$

Но $\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \cos A$, $\sin A\cos A = \frac{1}{2}\sin 2A$, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}\sin 2A$.

Так как $\sin 2A = \sin 2B$, то A — любой из острых углов треугольника.

116. $\frac{al^2}{2a^2 - l^2}$, $a < l < a\sqrt{2}$.

Решение. Если B—угол, из вершины которого проведена биссектриса, то $\cos\frac{B}{2}=\frac{a}{l}$ и $\cos B=2\cos^2\frac{B}{2}-$ $-1=\frac{2a^2-l^2}{l^2}$. Следовательно, при $a<l<a\sqrt{2}$ имеем: $c=\frac{a}{\cos B}=\frac{al^2}{2a^2-l^2}$.

117. $S=\frac{h^2}{\sin 2A}$.

118. $\frac{(p+q)^2 p}{q}$, $p>q$.

Указание. Установить, что $\sin 2A=\frac{q}{p}$, где A—острый угол треугольника, затем воспользоваться результатом задачи 117.

119. $p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Указание. Первый способ. Обозначив высоту треугольника через h, составить уравнение $\frac{h}{\sin\alpha}+h\operatorname{ctg}\alpha=p$.

Второй способ. Применить метод спрямления.

120. *Указание.* Установить, что $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{h}{p}$ (см. задачу 119).

121. Решение. Пусть прямые BB_1 и A_1C_1 пересекаются в точке M (черт. 18). Тогда $\operatorname{tg}A_1=\frac{B_1M}{A_1M}$, $\sin A=$ $=\frac{B_1M}{A_1C}$.

Так как в треугольнике A_1C_1C углы A_1CC_1 и A_1C_1C равны, то $A_1C=A_1C_1$, или $A_1C=2A_1M$, следовательно,

$$\operatorname{tg}A_1=2\sin A.$$

Второе соотношение доказывается так:

$$\cos B_1=-\cos 2A_1=\frac{\operatorname{tg}^2A_1-1}{\operatorname{tg}^2A_1+1}=\frac{4\sin^2A-1}{4\sin^2A+1}=\frac{4\cos^2\frac{B}{2}-1}{4\cos^2\frac{B}{2}+1}=$$
$$=\frac{2\cos B+1}{2\cos B+3}.$$

122. *Указание.* Пусть $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=n$, $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=n+1$, $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=$ $=n+2$. Исходя из соотношения $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$, установить, что $n=1$.

123. Прямоугольный.

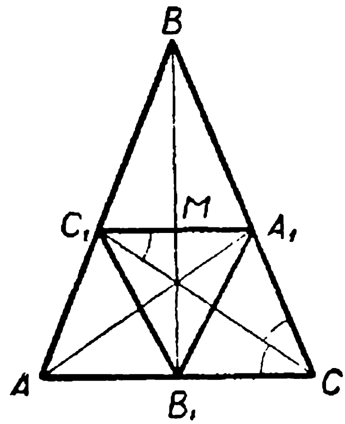
125. *Указание.* Так как $\frac{c}{2h_c}=\frac{c}{2a\sin B}=\frac{\sin C}{2\sin A\sin B}$, то остается показать, что при $A-B=90^\circ$ имеет место соотношение $2\sin A\sin B=\cos C$.

127. *Указание.* Разделив обе части равенства $a^2=b^2+bc$ на $4R^2$(R— радиус описанной около треугольника окружности), получим: $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin B\sin C$,

или

$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin B\sin C$,

откуда $\sin(A-B)=\sin B$.



Черт. 18

128. $\approx 104^\circ 29'$, $\approx 46^\circ 33'$, $\approx 28^\circ 58'$.

129. *Указание.* Согласно условию задачи $2c=a+b$. Разделив обе части этого равенства на $2R$, получим $2\sin C=\sin A+\sin B$, откуда $2\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}$.

131. $\operatorname{ctg}\angle ADC=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}A)$.

Указание. Применить теорему синусов к треугольникам ACD и BCD.

132. *Указание.* Воспользоваться формулой задачи 131 и установить, что угол AMC равен 45°.

133. $\approx 47^\circ 20'$.

134. Если $a\geqslant b$ и γ — угол между медианой и биссектрисой, то

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}C.$$

Указание. Составить и решить уравнение.

$$a\sin\left(\frac{C}{2}-\gamma\right)=b\sin\left(\frac{C}{2}+\gamma\right).$$

135. $\operatorname{ctg}\angle AMB=\frac{5ab\cos C-2a^2-2b^2}{3ab\sin C}$, где M — точка пересечения медиан треугольника.

136. *Указание.* а) Если медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны, то $5\,ab\cos C-2a^2-2b^2=$

$= 0$ (см. задачу 135). Выразив $\cos C$ через стороны треугольника на основании теоремы косинусов, получить равенство $a^2 + b^2 = 5c^2$.

б) Из равенства $5ab \cos C - 2(a^2 + b^2) = 0$ следует, что $\cos C = \frac{2(a^2+b^2)}{5ab} = \frac{2}{5}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant \frac{4}{5}$, так как $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

137. *Указание.* Равенство $a + b = c + h_c$ с помощью формул $a = 2R \sin A$ и $h_c = 2R \sin A \sin B$ преобразуется к виду

$$\sin A + \sin B = \sin(A + B) + \sin A \sin B.$$

Затем функции синуса и косинуса выразить через тангенсы половинных углов.

138. *Указание.* Данное соотношение привести к виду $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Затем воспользоваться теоремой косинусов.

139. *Указание.* Задача сводится к доказательству тождества

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} - \sin^2 \frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}.$$

140. *Указание.* Задача сводится к доказательству тождества

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}.$$

141. $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

142. $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB})$.

143. Равенство имеет место тогда и только тогда, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельны (или лежат на одной прямой) и направлены в одну сторону.

144. Решение. Имеем:

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN},$$
$$\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DC} + \overline{CN}.$$

Учитывая, что $\overline{MA} = -\overline{MD}$ и $\overline{BN} = -\overline{CN}$, сложим полученные равенства почленно и находим:

$$2\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{DC}.$$

146. Решение. Согласно задаче 145 имеет место неравенство

$$MN \leqslant \frac{1}{2}(AB + CD),$$

где MN — отрезок, соединяющий середины сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$; равенство имеет место только тогда, когда стороны AB и CD параллельны.

147. *Указание.* Воспользоваться результатом задачи 141.

148. Решение. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Так как $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 0$ (см. задачу 147), то $\overline{A_1A} = \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$. Векторы $\overline{BB_1}$ и $\overline{CC_1}$ не коллинеарны, следовательно,

$$AA_1 = |\overline{A_1A}| = |\overline{BB_1} + \overline{CC_1}| < \overline{BB_1} + \overline{CC_1}.$$

150. Решение. Пусть точка M — центр тяжести треугольника ABC и P — произвольная точка. Согласно правилу сложения векторов имеем:

$$\overline{PA} = \overline{PM} + \overline{MA},$$
$$\overline{PB} = \overline{PM} + \overline{MB},$$
$$\overline{PC} = \overline{PM} + \overline{MC}.$$

Складывая эти равенства почленно и учитывая, что $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$, получим:

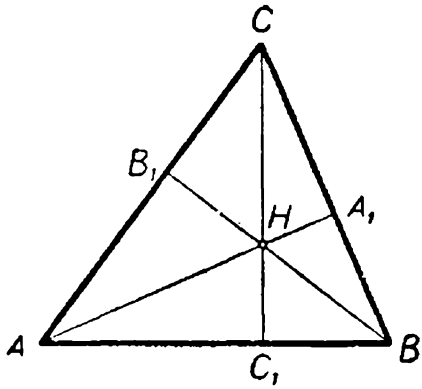
$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = 3\overline{PM}.$$

151. Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$. Тогда $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{DB} = \overline{a} - \overline{b}$.
Отсюда

$$AC^2 + BD^2 = (\overline{a} + \overline{b})^2 + (\overline{a} - \overline{b})^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

152. Решение. Пусть $ABCD$ — ромб, $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$. Тогда $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{DB} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = (\overline{a} + \overline{b})(\overline{a} - \overline{b}) = a^2 - b^2 = 0$, так как $a = b$. Следовательно, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

154. Решение. Пусть ABC — произвольный треугольник (черт. 19). Имеем: $\overline{CA} = \overline{CC_1} + \overline{C_1A}$, $\overline{HB} = \overline{HC_1} + \overline{C_1B}$.



Черт. 19

Так как $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, то $\overline{CA} \cdot \overline{HB} = 0$, или $(\overline{CC_1} + \overline{C_1A}) \cdot (\overline{HC_1} + \overline{C_1B}) = 0$.

Учитывая, что $\overline{HC_1} \perp \overline{AC_1}$ и $\overline{CC_1} \perp \overline{BC_1}$, получим:

$$\overline{CC_1} \cdot \overline{HC_1} + \overline{C_1A} \cdot \overline{C_1B} = 0,$$

или $\overline{CC_1} \cdot \overline{HC_1} = \overline{AC_1} \quad \overline{C_1B}$.

155. *Указание.* Воспользоваться условием перпендикулярности двух векторов.

156. 7 *кг.*

157. $\cos\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{d_1 d_2}$, где a, b — стороны, d_1, d_2 — диагонали, α — угол, обращенный к стороне b.

158. $AD^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos B + 2ac\cos(B + C) - 2bc\cos C$.

Указание. Равенство $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ возвести в квадрат.

159. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}$.

160. $\sqrt{7}$.

161. $\frac{1}{3}\sqrt{6a^2 + 3b^2 - 2c^2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3a^2 + 6b^2 - 2c^2}$.

163. $\approx 62°43'$.

164. $120°$.

166. *Указание.* Обозначив через α угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$, с помощью теоремы косинусов получить формулу:
$AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = \pm 2\, AC \cdot BD \cos\alpha$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

167. $\sqrt{2}$.

168. $\angle ABM = 30°$, $AC = 1 + \sqrt{3}$, $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

$\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

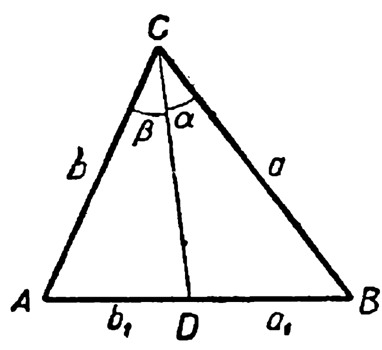
169. Решение. Пусть CD — биссектриса треугольника ABC (черт. 20). Обозначим $AD = b_1$, $BD = a_1$, $\angle ACD = \beta$, $\angle BCD = \alpha$, $\angle ADC = \gamma$. По теореме синусов из треугольников ACD и BCD имеем:

$$\frac{b_1}{b} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{\sin \alpha}{\sin (180^\circ - \gamma)}.$$

Но $\alpha = \beta$ и $\sin (180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$, следовательно,

$$\frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a}.$$



Черт. 20

Обратно. Пусть имеет место равенство $\frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a}$.

Отсюда получаем: $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha}{\sin (180^\circ - \gamma)}$,

или $\sin \alpha = \sin \beta$.

Так как $\alpha + \beta < 180^\circ$, то из полученного равенства следует, что $\alpha = \beta$, т. е. CD — биссектриса треугольника ABC.

171. *Указание.* Из конца данного радиуса внутренней окружности провести к ней касательную до встречи с внешней окружностью в двух искомых точках.

172. Решение. Обозначим $\angle BAM = \angle CAN = \alpha$, $\angle BAN = \angle CAM = \beta$. Из треугольников ABM и ACM находим:

$$\frac{BM}{AM} = \frac{\sin \alpha}{\sin B}, \quad \frac{AM}{CM} = \frac{\sin C}{\sin \beta}.$$

Аналогично, из треугольников ABN и ACN имеем:

$$\frac{BN}{AN} = \frac{\sin \beta}{\sin B}, \quad \frac{AN}{CN} = \frac{\sin C}{\sin \alpha}.$$

Перемножив полученные четыре равенства почленно и учитывая, что $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AB}{AC}$, окончательно получим:

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

174. Два решения: $22^\circ 30'$, $67^\circ 30'$.

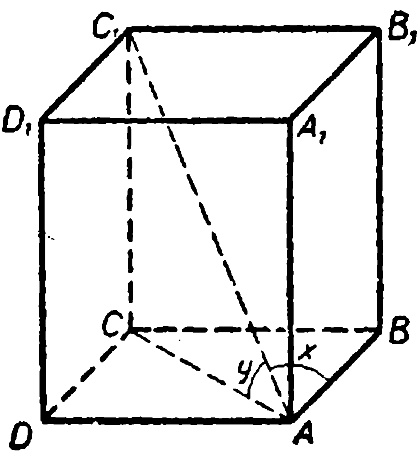
Указание. Обозначив угол между диагональю и основанием призмы через x, составить уравнение

$$2\sqrt{2}\, d^2 \sin x \cos x = S, \quad 0^\circ < x < 90^\circ.$$

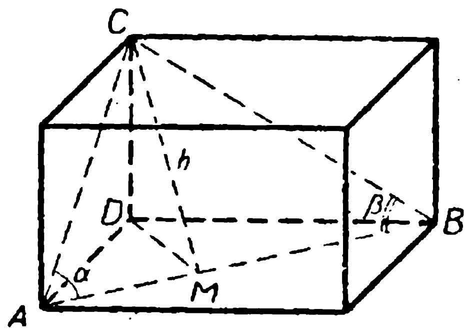
175. $2a\sqrt{2}$.

Решение. Обозначив $\angle BAC_1 = x$, $\angle CAC_1 = y$ (черт. 21), по условию имеем $x + y = 135°$. Из треугольников ABC_1 и ACC_1 находим:

$$AB = AC_1 \cos x,$$
$$AC = AC_1 \cos y$$



Черт. 21



Черт. 22

Разделив почленно первое из этих равенств на второе, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\cos x}{\cos y}.$$

Но $x = 135° - y$, следовательно, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\cos(135° - y)}{\cos y}$.

Решая это уравнение, найдем $\operatorname{tg} y = 2$.

Поэтому $CC_1 = a\sqrt{2}\operatorname{tg} y = 2a\sqrt{2}$.

176. $\cos x = \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta}$, α, β, γ — острые углы.

Решение. Пусть ABC есть сечение параллелепипеда, $\angle CMD$ — искомый угол (черт. 22). Обозначим $CM = h$ и $\angle CMD = x$. Имеем:

$$AM = h \operatorname{ctg}\alpha, \quad BM = h \operatorname{ctg}\beta.$$

Так как DM — высота прямоугольного треугольника ABD опущенная на гипотенузу AB, то $DM = \sqrt{h\operatorname{ctg}\alpha \cdot h\operatorname{ctg}\beta}$. Таким образом,

$$\cos x = \frac{DM}{CM} = \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta}.$$

Углы α и β — острые. Это следует из того, что в треугольнике ABC основание высоты CM (точка M) лежит между вершинами A и B. Аналогично находим, что угол γ также острый.

177. $\approx 35°16'$.

178. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109°28'$.

180. $$\cos\alpha = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}, \quad 0 < \gamma < \frac{2\pi}{n}.$$

181. $$\frac{4h^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

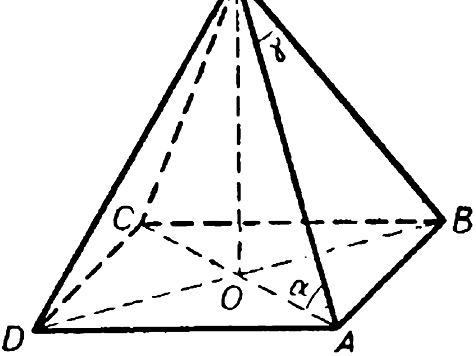
Решение. *Первый способ.* Пусть $NABCD$ — данная пирамида (черт. 23). Определим вспомогательный угол α наклона бокового ребра к основанию пирамиды. Воспользовавшись результатом задачи 180, получим $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Из треугольника AOD находим $AO = h\operatorname{ctg}\alpha$. Площадь основания пирамиды $S = 2AO^2 = 2h^2\operatorname{ctg}^2\alpha$, где $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Так как $$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma},$$

то можно получить выражение для S непосредственно через угол γ:

$$S = \frac{4h^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}.$$

Второй способ. Если отрезок AC обозначить через $2x$, то площадь основания пирамиды равна $2x^2$. Рассмотрим треугольник ABN: $AB^2 = 2x^2$, $AN^2 = h^2 + x^2$,



Черт. 23

$\angle ANB = \gamma$. По теореме косинусов получим уравнение

$$x^2 = (h^2 + x^2)(1 - \cos\gamma),$$

откуда

$$S = 2x^2 = \frac{2h^2(1-\cos\gamma)}{\cos\gamma} = \frac{4h^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}.$$

182. $\dfrac{4b^2\cos\beta}{1+\cos^2\beta}$. $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

Указание. Первый способ. Задачу можно решить способом введения вспомогательного угла. Выразить угол наклона α бокового ребра к основанию пирамиды через угол β : $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{2}}$. Затем найти площадь основания $S_{осн} = 2b^2\cos^2\alpha$. Боковая поверхность пирамиды

$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\beta} = \frac{2b^2\cos^2\alpha}{\cos\beta}, \quad \text{где} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{2}}.$$

Второй способ. Если через x обозначить половину стороны основания, то $S_{осн} = 4x^2$. По теореме Пифагора составим уравнение

$$x^2 + \frac{x^2}{\cos^2\beta} = b^2,$$

откуда

$$x^2 = \frac{b^2\cos^2\beta}{1+\cos^2\beta}, \quad S_{бок} = \frac{4x^2}{\cos\beta} = \frac{4b^2\cos\beta}{1+\cos^2\beta}.$$

183. $\dfrac{2a^2\cos^2 x}{\sqrt{3}\cos\beta}$, где $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

184. *Указание.* Задача приводит к уравнению

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{tg}\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

185. $\sin x = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Пусть $NABC$ — данная пирамида (черт. 24), $\angle AMN$ — линейный угол двугранного угла BC. Обозначим $\angle AMN = x$. По условию площади треугольников NAB и NBC равны, следовательно,

$$\frac{1}{2}AB \cdot AN = BM \cdot MN,$$

откуда

$$\frac{AN}{MN}=\frac{2BM}{AB},$$

или

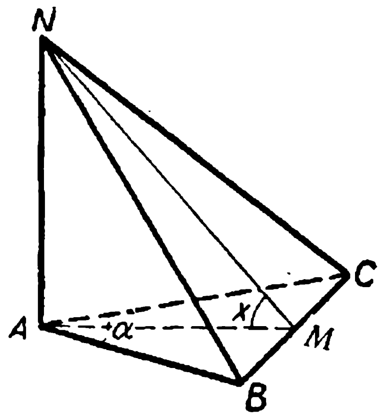
$$\sin x = 2\sin\frac{\alpha}{2},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{3}.$$

186. $0<k<2$, $30°$.

187. $2\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi m}{n}$, $n>\pi m$.

188. $\approx 31°22'$, $\approx 58°38'$.

Указание. Если полную поверхность конуса, полученного от вращения прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AC, обозначить через S_{AC}, гипотенузу треугольника — через c, то



Черт. 24

$$S_{AC}=\pi c^2\sin A\,(1+\cos B),$$
$$S_{AC}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

$$\frac{S_{AC}}{S_{BC}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

189. Нет. Если угол при вершине осевого сечения конуса тупой, то наибольшую площадь имеет сечение, проходящее через две взаимно перпендикулярные образующие конуса.

190. $\approx 22\,380$ *км*.

191. $\approx 35{,}4\%$.

192. $\approx 48{,}7\%$.

193. $\approx 36°52'$

Указание. Обозначив через x искомый угол кругового сектора, получить уравнение

$$\sin x = 3\,(1-\cos x),\ 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

194. $\approx 51°50'$.

195. Два решения: $60°$, $\approx 78°28'$.

Указание. Обозначив через x угол наклона образующей конуса к его основанию, получить уравнение

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=\frac{2}{9}.$$

196. $k \geqslant 2$.

Указание. Пусть α — угол наклона образующей конуса к его основанию. Установить, что $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2k}}$. Отсюда вывести, что наименьшее значение k равно 2 при $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$.

197. 2.

Указание. Пусть R и r — радиусы оснований усеченного конуса, H — его высота. Установить, что $R^2 + Rr + r^2 = H^2$ и $4Rr = H^2$. Отсюда вывести соотношение $R - r = \frac{1}{2} H$.

200. $\frac{4}{5} R$.

Указание. Обозначив сторону квадрата через $2x$, составить уравнение

$$(2x - R)^2 + x^2 = R^2.$$

202. *Указание. Первый способ.* Выразить стороны четырехугольника $ABCD$ через радиусы окружностей и угол между радиусом OA и линией центров. Установить, что суммы противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ равны между собой.

Второй способ. В точке касания окружностей провести к ним общую касательную.

203. *Указание.* Установить, что сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон равна высоте треугольника, опущенной на боковую сторону.

Задача может быть решена различными способами.

204. *Указание.* Выразить сумму катетов прямоугольного треугольника через гипотенузу и острый угол.

Задача имеет также весьма простое геометрическое решение.

205. Решение. Пусть прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписан в квадрат $ABCD$ так, что вершина A_1 лежит на стороне AB, вершина B_1 — на стороне BC и т. д. Обозначим $A_1B_1 = a$, $B_1C_1 = b$, $\angle A_1B_1B = \alpha$, тогда

$$AB = a \sin \alpha + b \cos \alpha.$$
$$BC = a \cos \alpha + b \sin \alpha,$$

откуда

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = a \cos \alpha + b \sin \alpha,$$

или

$$(a-b)(\sin\alpha-\cos\alpha)=0,\quad 0^\circ<\alpha<90^\circ.$$

Следовательно, либо $a=b$, т. е. вписанный прямоугольник — квадрат, либо $\sin\alpha-\cos\alpha=0$, так что $\operatorname{tg}\alpha=1$, т. е. $\alpha=45^\circ$ и стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

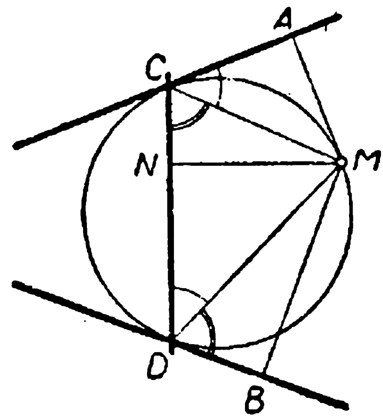
206. Р е ш е н и е. Пусть MN — расстояние от точки M до прямой CD, MA и MB — расстояния до касательных (черт. 25). Обозначив $MN=m$, $\angle ACM=\angle CDM=\alpha$, $\angle BDM=\angle DCM=\beta$, из прямоугольных треугольников ACM и CMN находим:

$$AM=CM\sin\alpha=\frac{m\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Аналогично находим:

$$BM=\frac{m\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Следовательно, $AM\cdot BM=m^2$.



Черт. 25

207. $\frac{a^2}{2p}$, $\frac{b^2}{2p}$, $\frac{c^2}{2p}$, где $2p=a+b+c$.

В прямоугольном треугольнике отрезок, отсекаемый на гипотенузе, равен сумме отрезков, отсекаемых на катетах.

208. $\frac{1}{2}\arccos k$.

Указание. Пусть перпендикуляр, проведенный через середину гипотенузы AB треугольника ABC, пересекает катет AC в точке M. Тогда $AM=BM$ и $\cos 2A=\frac{CM}{BM}=k$.

209. *Указание.* Применить теорему синусов к треугольнику ACD и составить уравнение

$$\frac{k+1}{k}=\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}-\alpha\right)}.$$

210. $n\sqrt{\frac{2m+n}{m}}$, $n<2m$.

Указание. Пусть A — один из равных углов треугольника. По теореме синусов

$$\frac{l_a}{n}=\frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}},$$

откуда

$$l_a=2n\cos\frac{A}{2}.$$

Затем использовать теорему о биссектрисе угла треугольника и установить, что $\cos A=\frac{n}{2m}$.

211. 20; $\arccos\frac{1}{8}\approx 82°48'$.

Указание. Обозначив угол при основании треугольника через $2x$, составить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{c}{l},$$

откуда

$$\cos x=\frac{c+\sqrt{c^2+4l^2}}{4l}.$$

Боковая сторона треугольника равна $\frac{c}{2\cos 2x}$.

212. $\approx 74°2'$, $\approx 74°2'$, $\approx 31°56'$.

Решение. Пусть $\angle A=\angle B=3x$, AM — медиана треугольника, тогда $\angle CAM=x$. По теореме синусов из треугольника ACM имеем:

$$\sin 5x=2\sin x,$$

или

$$\sin 5x-\sin x=\sin x.$$

Отсюда

$$4\cos^2 2x+2\cos 2x-3=0,$$

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{13}-1}{4}\approx 0{,}6514.$$

213. 90°, 30°.

214. *Указание.* Применить теорему косинусов к треугольникам ABD и BCD.

215. Если $a < b$ и угол α лежит против стороны a, то

$$S = \frac{b^2 - a^2}{2} \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha \leqslant 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}.$$

216. Решение. Обозначив радиусы окружностей, описанных около треугольников AOB, BOC, COD, AOD соответственно через R_1, R_2, R_3, R_4 и угол AOB через α, будем иметь:

$$AB = 2R_1 \sin \alpha, \quad BC = 2R_2 \sin (180° - \alpha) = 2R_2 \sin \alpha,$$
$$CD = 2R_3 \sin \alpha, \quad AD = 2R_4 \sin \alpha.$$

На основании свойства сторон описанного четырехугольника имеем:

$$AB + CD = BC + AD.$$

Подставив в это равенство найденные выражения для сторон четырехугольника, получим:

$$R_1 + R_3 = R_2 + R_4.$$

217. Решение. *Первый способ.* Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, взаимно перпендикулярны (черт. 26). Обозначим $\angle ADB = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, тогда $\alpha + \beta = 90°$. Из треугольников ABD и ACD находим:

$$AB = 2R \sin \alpha,$$
$$CD = 2R \sin \beta = 2R \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$AB^2 + CD^2 = 4R^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4R^2.$$

Второй способ. Повернем хорду AB вокруг центра O окружности на угол BOC против часовой стрелки в положение A_1C. Тогда

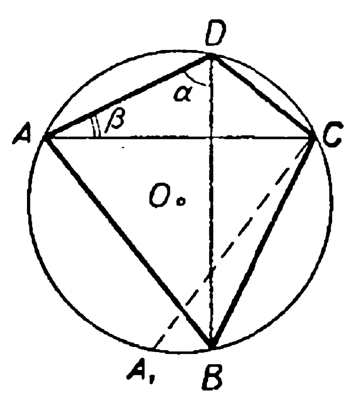
$$\smile A_1CD = \smile AB + \smile CD = 180°.$$

Значит, треугольник A_1CD — прямоугольный, и по теореме Пифагора находим:

$$A_1C^2 + CD^2 = 4R^2,$$

или

$$AB^2 + CD^2 = 4R^2.$$



Черт. 26

218. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 2\alpha}}{2\sin 2\alpha}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

Указание. Выразить через a, b и α боковую сторону трапеции и воспользоваться тем, что сторона треугольника равна диаметру описанной окружности, умноженному на синус противолежащего угла.

219. 45°, $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Указание. Первый способ. Из прямоугольного треугольника BCD имеем:

$$BC=\left(\sqrt{3}-1\right)\cos B.$$

Затем применить теорему косинусов к треугольнику ABC.

Второй способ. Около треугольника ABC описать окружность, провести ее диаметр BF и обозначить отрезок AF через x. Из подобия треугольников ACD и BDF получить уравнение

$$\frac{1+x^2}{3+x^2}=\frac{1}{2},$$

откуда $x=1$.
Затем установить, что $\angle ADF=\angle BDF=45^\circ$

и $\angle ABF=\angle ACF=30^\circ$.

220. *Указание.* С помощью теоремы синусов установить подобие треугольников ABC и BCM.

221. Решение. По теореме синусов из треугольников ABF и BCE имеем:

$$\frac{AB}{AF}=\frac{\sin 130^\circ}{\sin 30^\circ}=2\cos 40^\circ,$$

$$\frac{CE}{BC}=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}=2\cos 40^\circ.$$

Но $CF=BC$ ($\angle CFB=\angle CBF=50^\circ$), следовательно, также

$$\frac{CE}{CF}=2\cos 40^\circ.$$

Отсюда следует, что треугольники ABF и CEF подобны, так как $\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{CE}{CF}$ и $\angle A=\angle FCE$. Поэтому $\angle CEF=\angle ABF=$ $=30^\circ$.

В журнале «Математика в школе», 1961, № 5, стр. 92—93, опубликовано несколько интересных геометрических решений задачи.

222. $CM = \frac{1}{4} AB.$

223. Р е ш е н и е. Обозначим через x гипотенузу треугольника и составим уравнение

$$x(x - n) = a^2,$$

или

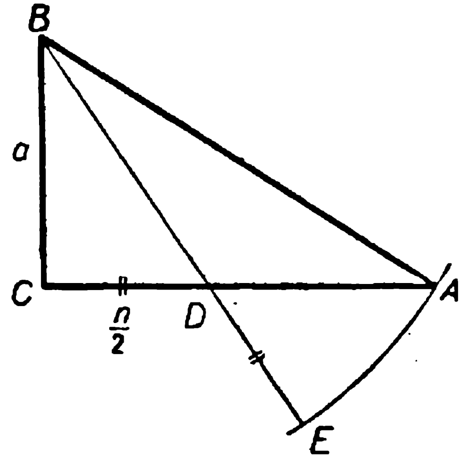
$$x^2 - nx - a^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + a^2}.$$

Построение. На сторонах прямого угла от его вершины C отложим отрезки $CB = a$ и $CD = \frac{n}{2}$ (черт. 27). Тогда $BD = \sqrt{\frac{n^2}{4} + a^2}$. Затем строим отрезок $BE = BD + CD$. Радиусом BE из точки B, как из центра, проведем дугу, пересекающую CD в точке A. Треугольник ABC искомый.

Для доказательства достаточно вычислением показать, что проекция катета AC на гипотенузу равна n. При любых a и n задача имеет единственное решение.



Черт. 27

224. *Указание.* По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника тангенс острого угла, вершиной которого служит конец отрезка m, равен $\frac{n}{m}$.

225. *Указание.* Установить, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна $\frac{1}{4} c.$

226. Р е ш е н и е. *Первый способ.* Пусть $ABCD$ — искомый параллелограмм. Положим $AB = x$, тогда $BC = p - x$.

Выразив двумя способами площадь параллелограмма, получим уравнение

$$h_1x = h_2(p - x),$$

откуда

$$AB = x = \frac{ph_2}{h_1 + h_2}.$$

Отрезок x строим как четвертый пропорциональный к отрезкам p, h_2 и $h_1 + h_2$.

Второй способ. Обозначив через α острый угол параллелограмма, из прямоугольных треугольников ADE и CDF (DE и DF — высоты параллелограмма) находим:

$$AD = \frac{h_1}{\sin\alpha}, \quad CD = \frac{h_2}{\sin\alpha}.$$

По условию $AD + CD = p$, значит, $\frac{h_1 + h_2}{\sin\alpha} = p$,

откуда

$$\sin\alpha = \frac{h_1 + h_2}{p}.$$

Угол α, а затем параллелограмм строим обычным образом. Задача имеет единственное решение, если $h_1 + h_2 \leqslant p$ (при $h_1 + h_2 = p$ получим прямоугольник), если $h_1 + h_2 > p$, то задача не имеет решения. Геометрическое решение задачи методом спрямления совпадает со вторым решением.

227. *Указание.* Установить, что

$$\cos\alpha = \frac{h_1}{2h}, \; h_1 < 2h,$$

где α — угол при основании треугольника, h_1 — высота, опущенная на боковую сторону.

Геометрическое решение можно получить, если из основания высоты провести перпендикуляр к боковой стороне треугольника.

229. *Указание.* Обозначив основание треугольника через $2x$, установить, что

$$x = \sqrt{dh}.$$

230. *Указание.* Пусть ABC — равнобедренный треугольник, в котором $AC = BC$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника, прямая AO пересекает BC в точке P, BP и CP — данные отрезки. Обозначим $\angle C = 2x$, $BP = u$, $CP = v$, тогда

$$\angle CAP = x \text{ (так как } AO = CO\text{) и } AC = u + v.$$

По теореме синусов из треугольника ACP имеем:

$$\frac{u+v}{v} = \frac{\sin 3x}{\sin x},$$

откуда

$$\cos 2x = \frac{u}{2v}, \quad u < 2v.$$

Таким образом, угол C треугольника можно построить, как угол при основании равнобедренного треугольника со сторонами u, u, v.

231. *Указание.* По теореме синусов выразить угол OPN через отрезок OP и радиус окружности.

Существуют и другие решения задачи (см. журнал «Математика в школе», 1962, № 1, стр. 92).

232. *Указание.* Пусть сторона AB квадрата $ABCD$ лежит на хорде, точка O — середина AB. Тогда

$$\operatorname{tg} \angle BOC = 2.$$

233. *Указание.* Определить угол между основанием трапеции и стороной квадрата. Задача имеет одно решение, если диагонали трапеции не перпендикулярны, в этом случае искомый угол равен 45°. Если диагонали трапеции перпендикулярны, то задача имеет бесчисленное множество решений.

234. *Указание.* Обозначив угол треугольника, из вершины которого проведена биссектриса, через $2x$, составить уравнение

$$c \cos 2x = l \cos x,$$

откуда

$$\cos x = \frac{l + \sqrt{l^2 + 8c^2}}{4c}.$$

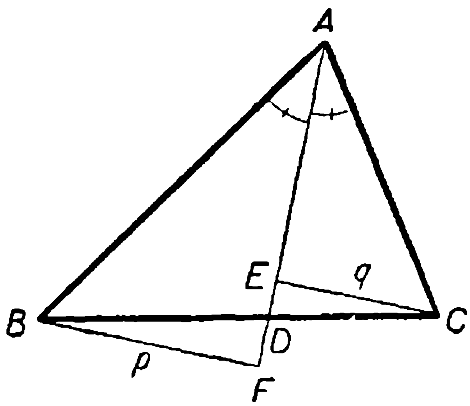
235. Решение. Пусть $AD = l$ — биссектриса угла A треугольника ABC, BF и CE — перпендикуляры к прямой AD (черт. 28). Принимая за неизвестное угол A треугольника, получаем:

$$AB = \frac{p}{\sin\frac{A}{2}}, \quad AC = \frac{q}{\sin\frac{A}{2}},$$

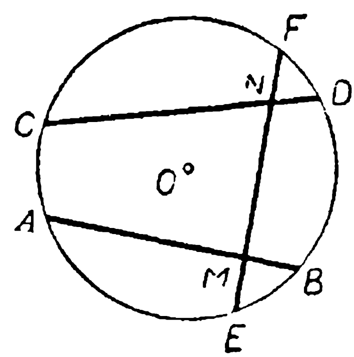
$$2S_{ABC} = AB \cdot AC \sin A = \frac{pq \sin A}{\sin^2\frac{A}{2}} = 2pq \operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

С другой стороны,

$$2S_{ABC} = l(p+q).$$



Черт. 28



Черт. 29

Так что $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{l(p+q)}{2pq}$. Построение лучше начать с отрезка $AF = p \operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{l(p+q)}{2q}$.

236. Решение. *Первый способ.* Пусть искомая прямая MN пересекает окружность в точках E и F (черт. 29). Обозначим $AM = a$, $BM = b$, $CN = c$, $DN = d$, $MN = l$, $EM = m$, $FN = n$. По теореме о хордах окружности, имеющих общую точку, находим:

$$ab = m(l+n),$$
$$cd = n(l+m).$$

По условию $ab = cd$, поэтому $m(l+n) = n(l+m)$, откуда следует, что $m = n$.

Для построения точки N заметим еще, что треугольники OEM и OFN, где O — центр окружности, равны, и, следовательно, $ON = OM$.

Построение. Радиусом OM строим окружность, концентрическую с данной. Точка пересечения N этой окружности с хордой CD является искомой.

Задача имеет два, одно или ни одного решения в зависимости от того, будет ли расстояние от центра O окружности до хорды CD меньше, равно или больше OM.

Второй способ. К такому же построению можно прийти с помощью следующих рассуждений. Повернем хорду CD вокруг центра так, чтобы она прошла через точку M. Тогда $CM \cdot MD = AM \cdot MB$. Значит, точка N, делящая хорду CD на два отрезка, произведение которых равно произведению отрезков хорды AB, отстоит от центра окружности на таком же расстоянии, что и точка M.

237. *Указание.* По теореме синусов составить уравнение

$$\frac{\sin(90^\circ - 2\alpha)}{\sin\alpha} = 2,$$

где α — угол между диаметром и искомой хордой.

238. *Указание.* Обозначив через $2x$ угол при основании треугольника, по теореме синусов составить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{p}{q},$$

откуда

$$\cos x = \frac{p-q}{2q}, \quad q < p < 3q.$$

239. *Указание.* Если обозначить радиус окружности через R, расстояние от центра O окружности до точки M через d и угол между OM и одной из хорд через α, то площадь четырехугольника $ABCD$ равна $\sqrt{4R^4 - 4d^2R^2 + d^4\sin^2 2\alpha}$.

240. *Указание.* Установить, что сумма квадратов длин перпендикулярных хорд AC и BD постоянна. Затем воспользоваться тождеством

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 4S$$

(где $a = AC$; $b = BD$ и S — площадь четырехугольника $ABCD$) и результатом задачи 239.

242. *Указание.* Установить, что двугранный угол A, противолежащий углу α, связан с углами α, β, γ следующей зависимостью:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

243. $\frac{c^3}{27}\sqrt{2}$.

Указание. Обозначив $AB = x$, $AC = y$, составить систему уравнений

$$y^2 = c^2 + x^2 - cx,$$
$$y^2 = c^2 - \frac{x^2}{2},$$

откуда

$$x = \frac{2}{3}a.$$

244. $\frac{b}{a}$.

245. $\arccos\frac{4-n}{4+n}$, $n < 4$.

Указание. Установить, что $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{n}{4}$, где α — угол наклона образующей конуса к его основанию.

246. $\approx 65°32'$.

Указание. Пусть r — радиус шара, α — угол между образующей и основанием конуса. Установить, что боковая поверхность конуса равна $\frac{\pi r^2}{\cos\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, и исследовать знаменатель полученного выражения.

247. Осевое сечение цилиндра — квадрат.

249. $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, где $\cos x = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $0<\gamma<\frac{2\pi}{n}$.

250. Решение. Пусть AB — сторона основания правильной n-угольной пирамиды (черт. 30), CN — высота, MN — апофема, точка O — общий центр вписанного и описанного шаров. Тогда

$$CO = r, \quad AO = NO = R, \quad \angle ACM = \frac{\pi}{n}.$$

Обозначим угол CMN через $2x$. Согласно теореме о биссектрисе угла треугольника имеем:

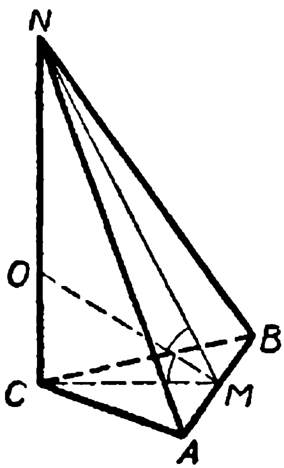
$$\frac{r}{R} = \frac{CM}{NM} = \cos 2x.$$

Из треугольника OAC следует, что $\cos\angle AOC = \frac{r}{R}$, следовательно, и $\angle AOC = 2x$. Теперь из треугольников ACO, ACM и CMO получаем:

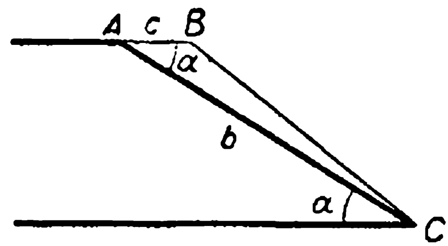
$$\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Разделив обе части этого уравнения на $\cos x$, после несложных преобразований находим:

$$\cos 2x = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}}.$$



Черт. 30



Черт. 31

251. Решение. $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin(A+C)}{\sin A} = \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A$,

откуда

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\frac{b}{a} - \cos C}{\sin C}.$$

252. Решение. Рассмотрим треугольник ABC (черт. 31). Имеем:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{k - \cos 32^\circ}{\sin 32^\circ},$$

где $k = \frac{b}{c} \approx \frac{4,2}{0,8} = 5,25$.

Отсюда $x = 7^\circ$ (с точностью до $0,5^\circ$).

253. $\approx 19^\circ 6'$, $\approx 21^\circ 48'$.

255. $\operatorname{ctg} B = \frac{a\sqrt{2} - l}{l}$, $0 < l < a\sqrt{2}$.

256. $\sin A = \frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha, \quad 0 < \alpha < \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$.

Решение. Пусть M — середина стороны AB ромба $ABCD$. Обозначим $\angle ADM = x$, $\angle BCM = y$. Из треугольников ADM и BCM находим:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{2 - \cos A}{\sin A}, \quad \operatorname{ctg} y = \frac{2 + \cos A}{\sin A},$$

так что

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = \frac{3}{4\sin A},$$

или $\sin A = \frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

257. $\approx 71°34'$, $\approx 63°26'$, $45°$.

Указание. Показать, что $\frac{BC}{AC} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ и угол C равен $45°$.

258. $30°$, $60°$, $90°$.

Решение. Пусть $a < b < c$, тогда по условию $\frac{c}{a} = 2$ и $2\angle B = \angle A + \angle C$. Следовательно, $\angle B = 60°$. По формуле $\operatorname{ctg} C = \frac{\frac{a}{c} - \cos B}{\sin B}$ находим, что $\operatorname{ctg} C = 0$ и $\angle C = 90°$.

259. $h_a = 2R\sin B\sin C$,

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C) = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r = \frac{S}{p} 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

261. $a = \dfrac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}, \quad S = p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Указание. Воспользоваться формулами задачи 259.

262. Решение. Обозначим через O центр вписанной в треугольник ABC окружности, тогда

$$OA \cdot OB \cdot OC = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} \cdot \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Учитывая, что $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, получим:

$$OA \cdot OB \cdot OC = 4Rr^2.$$

263. Решение. Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ выразим через радиус вписанной окружности и углы треугольника ABC:

$$S_1 = \frac{1}{2}r^2\sin(180° - A) + \frac{1}{2}r^2\sin(180° - B) + \frac{1}{2}r^2\sin(180° - C) = \frac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Площадь треугольника ABC выразим так:

$$S = pr = Rr(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Отсюда

$$\frac{S_1}{S} = \frac{r}{2R}.$$

264. Решение. Выполним следующие преобразования:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos A) = (b - c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2},$$

откуда $a \geqslant 2\sqrt{bc}\sin\frac{A}{2}$.

Равенство имеет место только при $b = c$.

265. Решение. а) На основании неравенства задачи 264 имеем:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{8}.$$

Равенство выполняется только при $a = b = c$.

б) *Первый способ.*

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant 1 + 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

Второй способ. Так как $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$ и $\cos B + \cos C = 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \leqslant 2\sin\frac{A}{2}$, то

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}=\frac{3}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}\left(1-2\sin\frac{A}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{2}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, если $\angle B=\angle C$ и $2\sin\frac{A}{2}=1$, т. е. при условии, что треугольник ABC равносторонний.

Неравенство можно также получить, пользуясь скалярным произведением векторов (см. «Математика в школе», 1963, № 2, стр. 91).

266. Решение. а) Если $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$, то

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\frac{1}{8}\quad\text{(неравенство 265, а)}$$

и $\sin\alpha=\cos(\beta+\gamma)$. Следовательно,

$$\cos(\beta+\gamma)\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha+\beta)\leqslant\frac{1}{8}.$$

Полагая $\beta+\gamma=A$, $\alpha+\gamma=B$, $\alpha+\beta=C$, получим:

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8},$$

где $A+B+C=2(\alpha+\beta+\gamma)=180^\circ$.

б) Воспользоваться тождеством

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C$$

и неравенством $\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$.

267. Решение. Так как $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, то

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.$$

Равенство выполняется только в равностороннем треугольнике.

268. *Указание.* Воспользоваться неравенством 266, б.

269. *Указание.* Воспользоваться теоремой косинусов и формулой, выражающей площадь треугольника через две его стороны и угол между ними.

270. *Указание.* 1) Воспользоваться формулой задачи 269.

2) Из неравенств 270 (1) и 268 следует, что

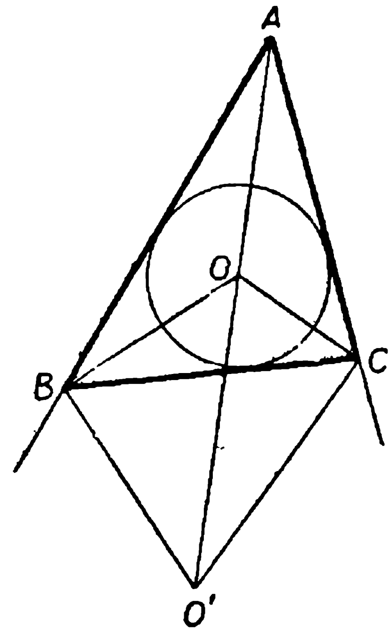
$$S \leqslant \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Равенство имеет место только для равностороннего треугольника.

271. *Указание.* Воспользоваться неравенством 270 (2).

272. Р е ш е н и е. Пусть O и O_1 — центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC (черт. 32). Так как углы OBO_1 и OCO_1 — прямые, то около четырехугольника $BOCO_1$ можно описать окружность и OO_1 — диаметр этой окружности. Обозначим $OO_1=d$ и из треугольника COO_1 находим:

$$d_1 = \frac{OC}{\cos\angle COO_1} = \frac{OC}{\cos\frac{A+C}{2}} = \frac{OC}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}.$$



Черт. 32

Аналогично, если d_2 и d_3 — расстояния от центра вписанной окружности до центров вневписанных окружностей, касающихся сторон AC и AB, то

$$d_2 = 4R\sin\frac{B}{2} \text{ и } d_3 = 4R\sin\frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$d_1+d_2+d_3 = 4R\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

и задача сводится к доказательству неравенства.

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Если $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, то

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant \frac{3}{2} \text{ (неравенство 265, б)},$$

или

$$\sin(90^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \beta) + \sin(90^\circ - \gamma) \leqslant \frac{3}{2}.$$

Полагая здесь $90^\circ - \alpha = \frac{A}{2}$, $90^\circ - \beta = \frac{B}{2}$, $90^\circ - \gamma = \frac{C}{2}$, получим:

$$A + B + C = 180^\circ \text{ и } \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

273. *Указание.* Воспользоваться теоремой о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

276. *Указание.* С помощью формулы задачи 273 доказать соотношение

$$m_a^2 - m_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2),$$

откуда вывести теоремы 275 и 276.

277. Решение. Представляет интерес предварительно решить задачу на построение треугольника по его медианам. После чего поставить вопрос о нахождении условий, при которых треугольник, составленный из медиан, подобен данному треугольнику.

Пусть $a < b < c$, тогда $m_c < m_b < m_a$. Поэтому должно быть:

$$\frac{m_c}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_a}{c} = k,$$

откуда

$$m_c = ak,\ m_b = bk,\ m_a = ck.$$

Возпользуемся равенством $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Подставив выражения медиан и разделив обе части равенства на $a^2 + b^2 + c^2$, получим:

$$k^2 = \frac{3}{4}, \quad k = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Зависимость между сторонами треугольника найдем, если в формулу $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ подставим $m_b^2 = \frac{3}{4}b^2$. Получим:

$$2b^2 = a^2 + c^2.$$

Теперь по теореме косинусов имеем:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\angle B < 60°$.

278. Решение. Экономный вывод соотношения достигается средствами векторной алгебры.

Имеем:

$$\overline{PA} = \overline{PM} + \overline{MA},$$
$$\overline{PB} = \overline{PM} + \overline{MB},$$
$$\overline{PC} = \overline{PM} + \overline{MC}.$$

Возведя обе части равенств в квадрат и складывая их, получим:

$$\overline{PA^2} + \overline{PB^2} + \overline{PC^2} = 3\overline{PM^2} + \overline{MA^2} + \overline{MB^2} + \overline{MC^2} + $$
$$+ 2\overline{PM}\left(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\right).$$

Но $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$ (см. задачу 149). Следовательно, требуемое соотношение найдено.

279. Центр тяжести треугольника. *Указание.* Воспользоваться теоремой Лейбница.

280. *Указание.* Двумя способами выразить площадь треугольника ABC и приравнять полученные выражения.

282. *Указание.* Воспользоваться формулой задачи 280.

283. *Указание.* Обозначив $\angle ECD = \alpha$, $\angle FCD = \beta$, установить, что $\frac{CE}{\cos\alpha} = \frac{CF}{\cos\beta}$.

Геометрическое решение задачи основано на теоремах о пропорциональных отрезках.

284. *Указание.* Из подобия треугольников ACE и BCD следует, что

$$\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{BC},$$

откуда

$$CD \cdot CE = AC \cdot BC.$$

285. Решение. Пусть биссектриса CD треугольника ABC встречает описанную окружность в точке E. Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $CD = l_c$, $AD = m$, $BD = n$. Согласно задаче 284 имеем:

$$l_c \cdot CE = ab.$$

Произведение отрезков хорд AB и CE, пересекающихся в точке D, равны, следовательно, $l_c(CE - l_c) = mn$.

Отсюда $l_c \cdot CE = l_c^2 + mn$.

Окончательно получим $l_c^2 = ab - mn$.

286. *Указание.* Применив теорему косинусов к треугольникам ACD и BCD, получить равенство:

$$(a - b)(an - bm) = 0.$$

287. *Указание.* Дважды воспользоваться свойством биссектрисы угла треугольника.

288. Решение. Пусть AA_1, CC_1 — высоты треугольника, H — ортоцентр. Тогда $\angle AHC_1 = \angle B$, как углы с перпендикулярными сторонами. Из треугольника AHC имеем:

$$AH = \frac{AC_1}{\sin B}.$$

Если $\angle A \leqslant 90°$, то $AC_1 = AC\cos A$, если $\angle A > 90°$, то $AC_1 = AC\cos(180° - A) = -AC\cos A$. Следовательно,

$$AC_1 = AC\,|\cos A| = 2R\sin B\,|\cos A|$$

и

$$AH = 2R\,|\cos A|.$$

289. Решение. Считая отрезки CH и CC_1 направленными, имеем:

$$\frac{CH}{HC_1} = \frac{CH}{CC_1 - CH} = \frac{2R\cos C}{2R(\sin A\sin B - \cos C)} = \frac{\cos C}{\cos A\cos B}.$$

290. 1, 2, 3.

291. *Указание.* Используя подобие треугольников AA_1C и BB_1C, установить, что $\cos C = \frac{1}{2}$.

292. *Указание.* Если треугольник ABC нетупоугольный, то

$$AH + BH + CH = 2R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Остается доказать тождество $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

Будем отрезок AH считать положительным, если векторы $\overline{AH}$ и $\overline{AA_1}$ (AA_1 — высота треугольника) одинаково направлены, и отрицательным — в противном случае. Тогда из решения задачи 288 следует, что $AH = 2R\cos A$ в любом треугольнике. Следовательно, указанный вывод можно применить и в случае тупоугольного треугольника. Причем в тупоугольном треугольнике один из отрезков AH, BH, CH (отрезок, соединяющий ортоцентр с вершиной тупого угла) будет отрицательным.

В прямоугольном треугольнике ABC ортоцентр совпадает с вершиной C прямого угла, т. е. $AH = AC$, $BH = BC$ и $CH = 0$. Поэтому *сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров описанной и вписанной окружностей.*

293. Решение. Пусть в треугольнике ABC угол C острый. Из прямоугольных треугольников AA_1C и BB_1C имеем:

$$\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC} = \cos C.$$

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, так как имеют общий угол C и стороны, заключающие его, пропорциональны, $\cos C$ — коэффициент пропорциональности. Следовательно,

$$A_1B_1 = AB \cos C.$$

Если угол C тупой, то аналогично найдем:

$$A_1B_1 = AB \cos (180^\circ - C) = -AB \cos C.$$

Если угол C прямой, то $A_1B_1 = 0$. Окончательно имеем:

$$A_1B_1 = AB |\cos C|.$$

294. Решение. На основании формулы задачи 293 имеем:

$$A_1B_1 = c \cos C, \ B_1C_1 = a \cos A, \ C_1A_1 = b \cos B,$$

так что $2p_1 = a \cos A + b \cos B + c \cos C = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R \sin A \sin B \sin C = \frac{2S}{R}$,

где S — площадь треугольника ABC. Таким образом,

$$p_1 = \frac{S}{R} \text{ и } p = \frac{S}{r},$$

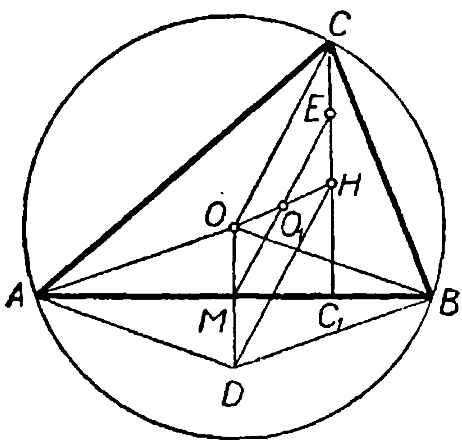
откуда

$$\frac{p_1}{p} = \frac{r}{R}.$$

295. *Указание.* а) Построить вектор $\overline{OD}$, равный сумме векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ (черт. 33). Тогда $AOBD$ — ромб и $OD \perp AB$. Далее построить вектор $\overline{OH}$:

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OD} + \overline{OC}.$$

Так как $CHDO$ — параллелограмм и $CH \parallel OD$, то $CH \perp AB$. Следовательно, точка H лежит на высоте CC_1 треугольника ABC. Точно так же доказывается, что точка H лежит на высотах BB_1 и AA_1 треугольника и поэтому H есть точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника.



Черт. 33

б) Пусть $\overline{OO_1} = \frac{1}{2}\overline{OH}$.

Ясно, что O_1 есть точка пересечения диагоналей параллелограмма $CHDO$, через нее проходит средняя линия ME параллелограмма. Поэтому

$$O_1M = O_1E = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}R.$$

Нетрудно установить также, что и $O_1M = O_1C_1$, т. е. окружность с центром O_1 и радиусом $\frac{1}{2}R$ проходит через точки M, E и C_1.

Аналогично доказывается, что эта окружность проходит и через середины двух других сторон AC и BC, через середины отрезков AH и BH и через основания высот AA_1 и BB_1.

г) Возведем равенство $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ в квадрат. Учитывая, что $OA = OB = OC = R$ и $\angle AOB = 2\angle C$ или $\angle AOB = 360° - 2\angle C$, получим:

$$OH^2 = 3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C).$$

Выражение в скобках преобразуем по формуле $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, тогда получим:

$$OH^2 = 9R^2 - 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

296. *Указание.* Воспользоваться равенством

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{CH} \text{ (черт. 33)}$$

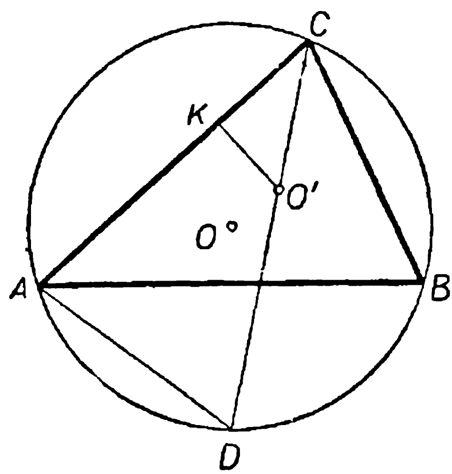
и соотношением

$$AH + BH + CH = 2(R + r) \text{ (см. задачу 292).}$$

297. *Указание.* Воспользоваться теоремой Карно и результатом задачи 89.

298. *Указание.* а) Достаточно установить, что в треугольнике ADO' углы, лежащие против сторон AD и DO', равны (черт. 34). Для доказательства обратной теоремы можно воспользоваться способом от противного.

б) Пусть ABC — равнобедренный треугольник, $AC = BC$, O — центр описанной окружности, O' — центр вписанной окружности. Проведем перпендикуляр $O'K$ к стороне AC и продолжим высоту треугольника до пересечения с описанной окружностью в точке D.



Черт. 34

Требуется найти связь между отрезками $CO = R$, $KO = r$ и $OO' = d$. Из подобия треугольников ACD и KCO' имеем:

$$\frac{CO'}{CD} = \frac{KO'}{AD},$$

или, учитывая, что $AD = DO'$,

$$CO' \cdot DO' = CD \cdot KO',$$

$$CO' \cdot DO' = 2Rr.$$

При любом порядке точек C, O и O' на прямой

$$CO' \cdot DO' = (R + d)(R - d) = R^2 - d^2.$$

Значит,

$$R^2 - d^2 = 2Rd$$

и $\quad d = \sqrt{R^2 - 2Rd}.$

в) Продолжим биссектрису угла C треугольника ABC до встречи с окружностью, описанной около треугольника, в точке D (черт. 34). Произведение отрезков CO' и $O'D$ равно произведению отрезков диаметра окружности, проходящего через точку O' (на чертеже диаметр не проведен). Поэтому, так же как в равнобедренном треугольнике, имеем:

$$CO' \cdot O'D = R^2 - r^2,$$

или $$CO' \cdot AD = R^2 - r^2.$$

Остается показать, что $CO' \cdot AD = 2Rr$.

Из треугольников ACD и KCO' находим:

$$AD = 2R \sin\frac{C}{2} \quad \text{и} \quad CO' = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Поэтому

$$CO' \cdot AD = 2Rr,$$
$$2Rr = R^2 - d^2,$$
$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Если провести диаметр DE и воспользоваться подобием треугольников ADE и KCO', то формулу можно получить и без использования тригонометрических функций.

299. Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$, тогда

$$e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}, \quad f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Указание. Воспользоваться теоремой косинусов.

301. *Указание.* Воспользоваться формулами задачи 299.

302. *Указание.* Воспользуемся теоремой Птолемея или теоремой косинусов.

304. Решение. Пусть M — произвольная точка дуги A_1A_n (черт. 35). Обозначим для краткости $MA_i = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), сумму расстояний от точки M до вершин с нечетными номерами — через S_1, а сумму расстояний до вершин с четными номерами — через S_2. Согласно теореме 302 имеем:

$$2x_1 \cos\frac{\pi}{n} = x_2 - x_n,$$

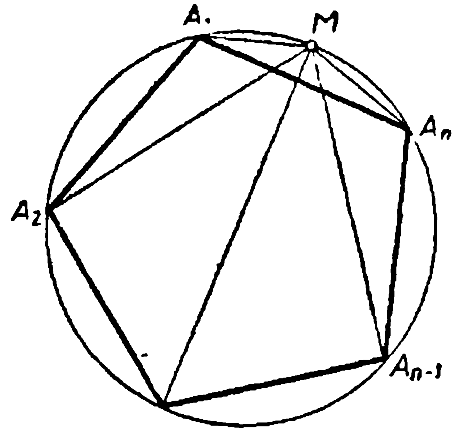
$$2x_2 \cos\frac{\pi}{n} = x_1 + x_3,$$

$$2x_3\cos\frac{\pi}{n}=x_2+x_4,$$

. . . .

$$2x_{n-1}\cos\frac{\pi}{n}=x_{n-2}+x_n,$$

$$2x_n\cos\frac{\pi}{n}=x_{n-1}-x_1.$$



Черт. 35

Пусть n — нечетное число. Почленно складывая равенства, начиная с первого, через одно, получим:

$$2(x_1+x_3+\ldots+x_n)\cos\frac{\pi}{n}=2(x_2+x_4+\ldots x_{n-1})-$$
$$-(x_1+x_n),$$

или

$$2S_1\cos\frac{\pi}{n}=2S_2-(x_1+x_n).$$

Складывая почленно остальные неравенства, получим:

$$2S_2\cos\frac{\pi}{n}=2S_1-(x_1+x_n).$$

Из двух последних равенств имеем:

$$(S_1-S_2)\cos\frac{\pi}{n}=S_2-S_1,$$

или

$$(S_1-S_2)\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)=0.$$

Но $1+\cos\frac{\pi}{n}\neq 0$ ни при каком $n\geqslant 3$, следовательно,

$$S_1=S_2.$$

Другое решение задачи можно получить с помощью формулы

$$MA_i=2R\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{(i-1)\pi}{n}\right),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

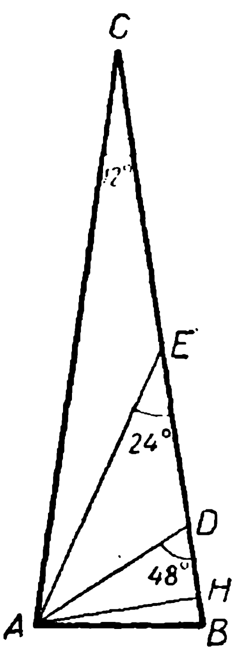
где $\smile MA_1=\varphi$, и суммирования синусов углов, составляющих арифметическую прогрессию.

305. *Указание.* Если R — радиус окружности, описанной около многоугольника, то $A_1A_2 = 2R \sin 15°$, $A_1A_4 = 2R \sin 45°$, $r = R \cos 15°$, и задача сводится к доказательству тождества

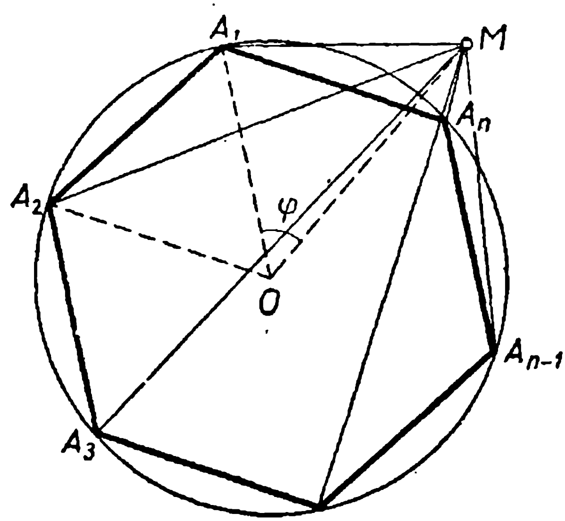
$$\sin 15° + \sin 45° = \cos 15°.$$

306. *Указание.* Рассмотреть равенство

$$\sin \frac{(k+1)\pi}{n} - \sin \frac{(k-1)\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{n}.$$



Черт. 36



Черт. 37

307. Решение. Пусть правильный 15-угольник вписан в окружность, радиус которой равен $\frac{1}{2}$. Тогда имеем:

$$A_1A_2 = \sin 12°,\ A_1A_3 = \sin 24°,\ A_1A_5 = \sin 48°,$$
$$A_1A_8 = \sin 84°.$$

Таким образом, задача сводится к доказательству тригонометрического тождества

$$\frac{1}{\sin 12°} = \frac{1}{\sin 24°} + \frac{1}{\sin 48°} + \frac{1}{\sin 84°}.$$

Тождество докажем геометрически. Равнобедренный треугольник ABC (черт. 36) с углом при вершине, равным 12°, прямыми AD и AE можно разбить на три равнобедренных треугольника, так что

$$AB = BD,\ AD = DE,\ AE = EC,$$

и, следовательно,

$$AC = BC = AB + AD + AE.$$

Проведем высоту AH к боковой стороне треугольника, и пусть $AH = 1$.
Тогда

$$AC = \frac{1}{\sin 12^\circ}, \quad AE = \frac{1}{\sin 24^\circ}, \quad AD = \frac{1}{\sin 48^\circ},$$

$$AB = \frac{1}{\sin 84^\circ}.$$

Остается подставить значения AC, AB, AD, AE в полученное выше равенство.

308. Решение. Пусть точка O есть центр правильного n-угольника $A_1 A_2 \ldots A_n$, а точка M принадлежит искомому геометрическому месту точек (черт. 37).

Для определенности будем считать, что луч OM пересекает дугу A_1A_n. Обозначим $\angle MOA_1 = \varphi$, $\angle A_1OA_2 = \alpha$, $OA_1 = R$ и $OM = x$.
По теореме косинусов имеем:

$$MA_1^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi,$$
$$MA_2^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos(\varphi + \alpha),$$
$$MA_3^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos(\varphi + 2\alpha),$$
$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$
$$MA_n^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos(\varphi + (n-1)\alpha).$$

Складывая почленно эти равенства, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = n(R^2 + x^2) - 2Rx[\cos\varphi + \cos(\varphi+\alpha) + \ldots +$$
$$+ \cos(\varphi + (n-1)\alpha)] = n(R^2 + x^2),$$

так как при $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ $\cos\varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \ldots + \cos(\varphi + (n-1)\alpha) = 0$ (доказательство этого тождества не приводим).

Пусть сумма квадратов расстояний от точки M до вершин правильного многоугольника есть величина постоянная, равная a^2, т, е. $n(R^2 + x^2) = a^2$.

Отсюда $x = \sqrt{\frac{a^2 - nR^2}{n}} = \text{const}.$

Полученное равенство означает, что точка M принадлежит окружности с центром O (при условии, что $a^2 > nR^2$).

Обратно. Если точка M лежит на окружности радиуса x с центром O, то $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = n(R^2 + x^2) = a^2$.

Если точка M лежит на окружности, описанной около правильного n-угольника, то $x = R$ и $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = 2nR^2$.

309. *Указание*. Обозначив $\angle AOE = \alpha$, $1 - \frac{4}{n} = k$, составить уравнение

$$\sqrt{3}\cos\alpha - k\sin\alpha = k\sqrt{3}.$$

При $n = 7$ получаем:

$$7\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = 3,$$

откуда $\alpha \approx 51°31'$.

Точное значение центрального угла $\frac{360°}{7} \approx 51°28'$.

312. $mn \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$.

Решение. Имеем $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. С помощью формул $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$ и $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ (S—площадь треугольника) преобразуем правую часть равенства. Получим:

$$a^2 = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos A) = (b-c)^2 + 4S\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Принимая во внимание, что $b - c = |m - n|$ и $a = m + n$, имеем:

$$(m+n)^2 = (m-n)^2 + 4S\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

откуда

$$mn = S\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Заметим, что формулы $a^2 = (b-c)^2 + 4S\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ и $a^2 = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2}$ (см. решение задачи 264), вытекающие из теоремы косинусов, находят применение и при решении некоторых других задач.

313. *Указание.* Воспользоваться тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

315. *Указание.* б) *Первый способ.* Воспользоваться результатом задачи 313.

Второй способ. Показать, что площадь треугольника PQS равна полусумме площадей треугольников ADP и BRQ, а площадь треугольника QRS — полусумме площадей треугольников DPS и BCR.

Третий способ. Установить, что четырехугольники $PQRS$ и $BSDQ$ равновелики, площадь треугольника BDS составляет $\frac{1}{3}$ площади треугольника BCD и площадь треугольника BDQ составляет $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABD.

316. Равнобедренный.

Указание. Выполнить преобразования

$$b+c=2R(\sin B+\sin C)=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

317. *Указание.* Воспользоваться формулой

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}.$$

318. *Указание.* а) Воспользоваться формулой

$$MN^2=(AM-AN)^2+4Q\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

(см. решение задачи 312).

б) Пусть $AC=b$, $AB=c$ и $b\leqslant c$. Тогда $AM=AN=\sqrt{\frac{bc}{2}}$, если $b\leqslant c\leqslant 2b$; $AM=\frac{1}{2}c$, $AN=b$, если $c>2b$.

в) Пусть $a\leqslant b\leqslant c$, тогда $AM=AN=\sqrt{\frac{bc}{2}}$.

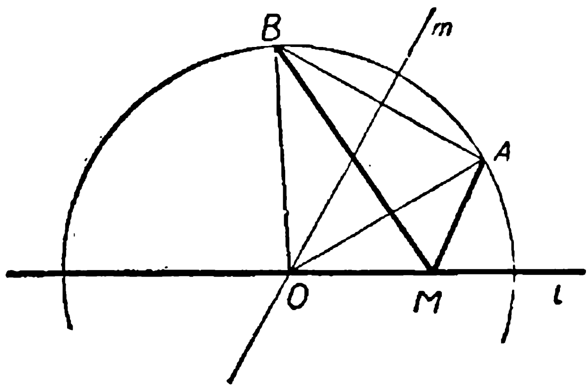
319. *Указание.* Выразить площадь и периметр вписанного в окружность четырехугольника через радиус окружности и центральные углы α, β, γ, δ. Убедиться в том, что

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta\leqslant 4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4},$$

причем равенство имеет место только при $\alpha=\beta=\gamma=\delta$.

320. Около квадрата описать окружность. Точки пересечения окружности с прямой l удовлетворяют условию.

321. Решение. Пусть перпендикуляр m к отрезку AB, проведенный через его середину, пересекает прямую l в точке O (черт. 38). Тогда на основании известной теоремы $\frac{AO}{BO} = 1$. Возьмем на прямой l некоторую точку M. Для определенности будем считать, что точки M и A ле-



Черт. 38

жат по одну сторону от прямой m, так что $\angle AOM < \angle BOM$ и $\frac{AM}{BM} < 1$. Обозначим $OM = x$, $OA = OB = r$, $\angle AOM = \alpha$, $\angle BOM = \beta$. По теореме косинусов из треугольника AOM находим:

$$AM^2 = r^2 + x^2 - 2rx\cos\alpha = (r - x)^2 + 4rx\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично $BM^2 = (r - x)^2 + 4rx\sin^2\frac{\beta}{2}$.

Требуется определить, при каком значении x дробь $\frac{AM}{BM}$ имеет наименьшее значение. Воспользуемся известным неравенством $\frac{a+m}{b+m} \geqslant \frac{a}{b}$ при $0 < a < b$ и $m > 0$. Получим:

$$\left(\frac{AM}{BM}\right)^2 = \frac{(r - x)^2 + 4rx\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(r - x)^2 + 4rx\sin^2\frac{\beta}{2}} \geqslant \frac{4rx\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4rx\sin^2\frac{\beta}{2}},$$

или

$$\frac{AM}{BM} \geqslant \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x = r$. Таким образом, при $OM = OA = OB$ отношение $\frac{AM}{BM}$ имеет наименьшее значение $\left(\text{а отношение } \frac{BM}{AM} \text{ — наи-}\right.$ большее).

Отсюда вытекает следующее построение. Строим прямую m, проходящую через середину отрезка AB и перпендикулярную этому отрезку. Из точки O пересечения прямых m и l радиусом OA проведем окружность. Эта окружность пересечет прямую l в двух искомых точках. Обозначим через M ту из них, которая лежит вместе с точкой A по одну сторону от прямой m, а через M' — вторую точку. Тогда отношение $\frac{AM}{BM}$ — наименьшее, а отношение $\frac{AM'}{BM'}$ — наибольшее из возможных.

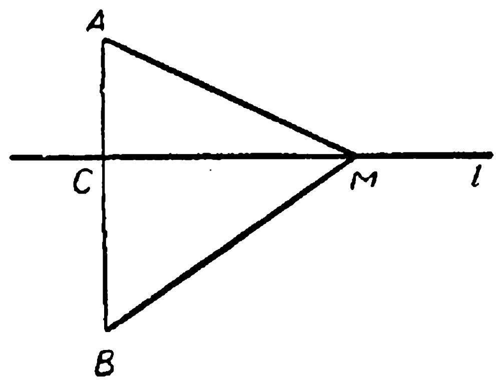
Это построение не применимо, если отрезок AB перпендикулярен прямой l (черт. 39). В этом случае решение задачи упрощается.

Пусть M — произвольная точка прямой l и C — точка пересечения прямых AB и l. Обозначим $CM = x$, $AC = a$, $BC = b$. Считая, что $a < b$, имеем:

$$\left(\frac{AM}{BM}\right)^2 = \frac{a^2 + x^2}{b^2 + x^2},$$

отсюда $\frac{AM}{BM} \geqslant \frac{a}{b}$.

Итак, отношение $\frac{AM}{BM}$ при $AC < BC$ имеет наименьшее значение в точке C. При удалении точки M от точки C по прямой l отношение $\frac{AM}{BM}$, возрастая,



Черт. 39

стремится к 1. Очевидно, что при $AC > BC$ отношение $\frac{AM}{BM}$ в точке C имеет наибольшее значение и при удалении точки M от точки C это отношение, убывая, стремится к 1.

322. Решение. Пусть l есть биссектриса внутреннего угла C треугольника ABC, I — центр окружности, вписанной в треугольник, I_1 — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB. Так как биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны, то $\angle IAI_1 = 90°$ и $\angle IBI_1 = 90°$. Следовательно, около четырехугольника $AIBI_1$ можно описать окружность с центром O на прямой l. Если $AC < BC$, то точки A и I лежат по одну сторону от перпендикуляра, проведенного к стороне AB через ее середину. В таком случае на основании задачи 321 приходим к выводу, что отношение $\frac{AI}{BI}$ — наименьшее, а отношение $\frac{AI_1}{BI_1}$ — наибольшее из возможных.

323. а) $\angle ACB = 120°$, б) $\angle ACB = 150°$.

324. 36°, 36°, 108°.

Указание. Через основание высоты треугольника провести прямую параллельно биссектрисе угла при основании до встречи с боковой стороной.

325. *Указание*. *Первый способ*. Если CH — высота и CD — медиана треугольника ABC, то по условию $\angle BCD = \angle ACH = 90° - \angle A$ и $\angle ACD = \angle BCH = 90° - \angle B$. Применив теорему синусов к треугольникам ACD и BCD, получить равенство $\frac{\sin A}{\cos B} = \frac{\sin B}{\cos A}$. Откуда вывести, что $\angle A + \angle B = 90°$.

Второй способ. Около данного треугольника ABC описать окружность, продолжить медиану CD до встречи с окружностью в точке M. Доказать, что CM есть диаметр окружности, а точка D — ее центр.

326. Решение. Воспользуемся формулой $l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$ и неравенством $l_c \leqslant m_c$. Имеем:

$$m_c = \frac{ab}{a+b} = \frac{l_c}{\cos\frac{C}{2}},$$

так что

$$2\cos\frac{C}{2} = \frac{l_c}{m_c} \leqslant 1, \ \cos C \leqslant \frac{1}{2}, \ \angle C \geqslant 120°.$$

327. Решение. Пусть S—площадь треугольника ABC. Умножив обе части равенства $\frac{1}{h_c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ на $2S$, получим:

$$c=h_a+h_b.$$

Так как $h_a=c\sin B$ и $h_b=c\sin A$, то отсюда имеем:

$$\sin A+\sin B=1,$$

$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=1,\ 2\cos\frac{C}{2}\geqslant 1.$$

Следовательно, $\angle C\leqslant 120°$.

328. *Указание*. Выразить высоту и радиус вписанной окружности через площадь и стороны треугольника.

329. 15°, 105°.

Указание. Пусть x — один из искомых углов треугольника, тогда другой равен $120°-x$. Согласно условию задачи получим уравнение:

$$2\sin x\sin(120°-x)=\frac{1}{2}.$$

Преобразовав произведение синусов в сумму, найдем:

$$\cos(2x-120°)=0,$$

откуда $x=15°$ или $x=105°$.

330. Решение. Треугольники ABC, BCD и ACD подобны, следовательно, $\frac{r_1}{a}=\frac{r_2}{b}=\frac{r}{c}$. Так как $a^2+b^2=c^2$, то $r_1^2+r_2^2=r^2$. Затем находим $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{r_1}{r_2}$.

Составим производную пропорцию $\frac{r_1+r_2+r}{a+b+c}=\frac{r}{c}$, откуда

$$r_1+r_2+r=\frac{2pr}{c}=h.$$

331. Решение. По условию $\angle A-\angle B=90°$. Поэтому $\angle A=90°+\angle B$, $\angle C=90°+2\angle B$. Имеем:

$$a=2R\sin A=2R\cos B,\ b=2R\sin B.$$

Отсюда

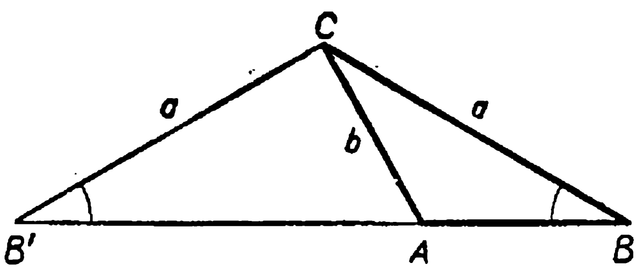
$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg} B \text{ и } a^2+b^2=4R^2.$$

Так как $\cos 2B = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 B}{1 + \operatorname{tg}^2 B}$ и $2R = \sqrt{a^2 + b^2}$, то

$c = 2R \sin(90° - 2B) = 2R \cos 2B = 2R \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Теперь из равенства $c = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ находим $c = \frac{a^2 - b^2}{2R}$, или

$$2R = \frac{a^2 - b^2}{c}, \ b < a.$$



Черт. 40

Построение треугольника можно выполнить исходя из формулы $\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$; оно видно на чертеже 40, где $\angle ACB' = 90°$, $AC = b$, $BC = B'C = a$.

332. $c = \frac{a^2 - b^2}{b}$, $b < a < 2b$.

Решение. *Первый способ.* Так как $\angle A = 2\angle B$, то $\angle C = 180° - 3\angle B$. По теореме синусов имеем:

$$\frac{a}{\sin 2B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin 3B}.$$

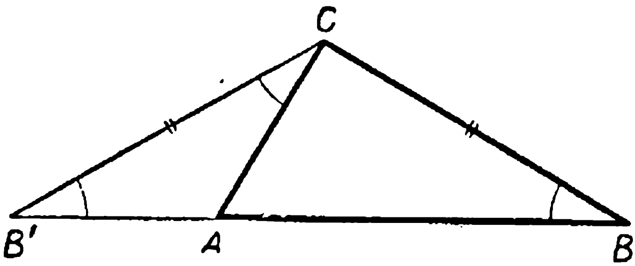
Отсюда $2\cos B = \frac{a}{b}$, причем $b < a < 2b$. Далее находим:

$$c = \frac{b \sin 3B}{\sin B} = b\,(4\cos^2 B - 1) = \frac{a^2 - b^2}{b}$$

Второй способ. Провести биссектрису AD треугольника ABC. Воспользоваться тем, что треугольники ABC и ACD подобны, а треугольник ABD равнобедренный.

Третий способ. Продолжим сторону AB треугольника ABC за точку A и построим точку B' так, чтобы $AB' = b$ (черт. 41). Нетрудно видеть, что $\angle AB'C = \angle B$. Следовательно, $B'C = BC$, а треугольники $BB'C$ и $AB'C$ подобны. Из пропорции $\frac{b+c}{a} = \frac{a}{b}$ находим:

$$c = \frac{a^2 - b^2}{b}.$$



Черт. 41

Построение треугольника вытекает из чертежа 41 или из формулы $\cos B = \frac{a}{2b}$.

333. $c^2 = \frac{1}{b}(a - b)(a^2 - b^2)$, $b < a < 2b$.

Указание. Через вершину A провести секущую, образующую со стороной AB треугольника угол, равный углу B.

Другие решения задач 331 — 333 помещены в журнале «Математика в школе», 1963, стр. 92 — 93.

334. *Указание. Первый способ.* Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке O, тогда по условию $BO = OD$. Обозначив $\frac{AO}{BO} = k_1$, $\frac{CO}{BO} = k_2$, выразить котангенсы равных углов A и C через k_1, k_2 и угол между диагоналями по формуле $\operatorname{ctg} A = \frac{\frac{b}{a} - \cos C}{\sin C}$. Установить, что $k_1 = k_2$.

Второй способ. Повернуть треугольник BCD вокруг середины отрезка BD на 180°.

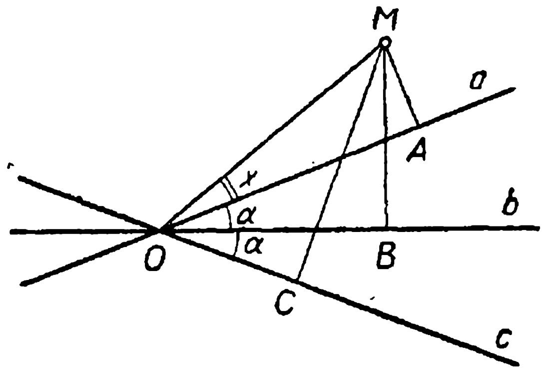
336. Решение. *Первый способ.* Пусть M — внешняя точка каждого из вертикальных углов, внутри которых проходит прямая b (черт. 42), и MA, MB, MC — расстояния от точки M соответственно до прямых a, b, c: $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. Обозначим $MO = d$ и $\angle AOM = x$,

тогда $\angle BOM = \alpha + x$, $\angle COM = 2\alpha + x$. Из прямоугольных треугольников AOM, BOM и COM находим:

$$d_1 = d \sin x, \quad d_2 = d \sin(\alpha + x), \quad d_3 = d \sin(2\alpha + x).$$

Отсюда $d_1 + d_3 = d[\sin x + \sin(2\alpha + x)] = 2d \sin(\alpha + x) \cos \alpha$, или

$$d_1 + d_3 = 2d_2 \cos \alpha.$$



Черт. 42

Если M — внутренняя точка одного из рассматриваемых вертикальных углов, то аналогично получим:

$$|d_1 - d_3| = 2d_2 \cos \alpha.$$

Второй способ. Построить окружность на отрезке MO, как на диаметре. Показать, что эта окружность пройдет через точки A, B, C, и убедиться в том, что $AB = BC$ и $\frac{AC}{AB} = 2 \cos \alpha$. Затем воспользоваться теоремой Птолемея или теоремей косинусов.

337. *Указание.* Обозначим $\angle ANM = \alpha$, $\angle BNM = \beta$. Тогда

$$MP = MN \operatorname{tg} \alpha, \quad MQ = MN \operatorname{tg} \beta,$$

$$MP \cdot MQ = MN^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Остается показать, что $\alpha + \beta = 90°$.

338. *Указание.* Установить, что

$$\cos \angle O_2O_1O_3 = \frac{4r_1\sqrt{r_2r_3} - (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}{(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)}$$

и применить теорему косинусов к треугольнику $O_1O_2O_3$.

339. *Указание.* С помощью теоремы косинусов и формулы $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ установить, что

$$AA_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}.$$

340. Решение. Пусть ABC — данный треугольник и O_1, O_2, O_3 — центры равносторонних треугольников (черт. 43). Треугольник O_1BO_2 подобен треугольнику ABA_1, так как

$$BO_1 = \frac{AB}{\sqrt{3}}, \quad BO_2 = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{BA_1}{\sqrt{3}} \text{ и } \angle O_1BO_2 = \angle ABA_1 = \\ = \angle C + 60°.$$

Следовательно,

$$O_1O_2 = \frac{AA_1}{\sqrt{3}}.$$

Аналогично

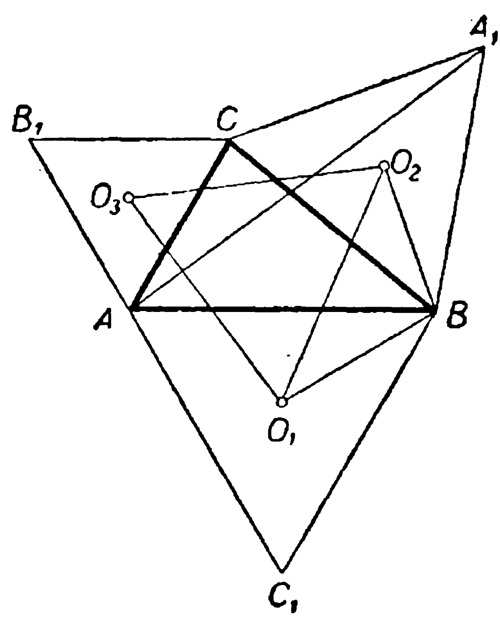
$$O_2O_3 = \frac{BB_1}{\sqrt{3}} \text{ и } O_1O_3 = \frac{CC_1}{\sqrt{3}}.$$

На основании задачи 339 заключаем, что $O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3$.

341. *Указание.* *Первый способ.* Установить, что сумма квадратов двух противоположных сторон четырехугольника $ACMD$ равна сумме квадратов двух других его сторон, для чего выразить отрезки AC, AD, CM, DM через $CD = h$ и $\angle ACD = \gamma$.

Второй способ. Провести высоту AE треугольника ABC и воспользоваться подобием треугольников ABE и CDM.

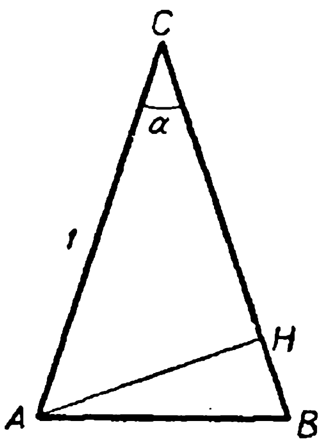
343. *Указание.* Равнобедренный треугольник с углом $\frac{\pi}{11}$ при вершине разбить на 5 равнобедренных треугольников с попарно общими боковыми сторонами.



Черт. 43

345. *Указание.* Прямоугольный треугольник с острым углом в 20° разбить на три треугольника, два равнобедренных и один прямоугольный.

346. Решение. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с углом C при вершине, равным α, и AH его высота, проведенная к боковой стороне (черт. 44). Полагая $AC = BC = 1$, найдем, что $AH = \sin\alpha$, $CH = \cos\alpha$, $BH = 1 - \cos\alpha$. Так как $\angle BAH = \frac{\alpha}{2}$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{BH}{AH} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.



Черт. 44

348. *Указание.* Дважды воспользоваться формулой

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

349. *Указание.* Пусть S — площадь основания пирамиды, S_1 — площадь боковой грани, α — двугранный угол при основании, β — двугранный угол, образованный двумя боковыми гранями. По теореме проекций имеем:

$$S = 3S_1\cos\alpha,$$

$$S_1 = 2S_1\cos\beta + S\cos\alpha.$$

Исключив S и разделив обе части равенства на S_1, получим:

$$3\cos^2\alpha + 2\cos\beta = 1.$$

350. а) $d^2 = \frac{1}{4}(a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_1^2 - a_4^2)$.

Указание. Воспользоваться формулой, выражающей медиану треугольника через его стороны.

б) $\cos(\widehat{a_2, a_5}) = \frac{a_1^2 + a_4^2 - a_3^2 - a_6^2}{2a_2a_5}$.

Указание. Рассмотреть треугольник KLM, где K, L, M — соответственно середины ребер A_1A_2, A_3A_4, A_3A_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Гибш, Исследование решений задач с параметрическими данными, изд. АПН РСФСР, 1952.

2. С. И. Зетель, Задачи на максимум и минимум, Гостехиздат, 1948.

3. З. А. Скопец, В. А. Жаров, Задачи и теоремы по геометрии, Учпедгиз, 1962.

4. М. Грабовский и П. Котельников, Задачи на составление тригонометрических уравнений. «Математика в школе», 1938, № 5—6, стр. 71—79.

5. И. М. Кипнис, Геометрические и физические задачи, приводящие к тригонометрическим уравнениям. «Математика в школе», 1952, № 2, стр. 52—59.

6. Б. А. Кордемский, Деление окружности. «Математика в школе», 1953, № 1, стр. 50—51.

7. С. И. Новоселов, Об исследовании стереометрических задач на вычисление с параметрическими данными. «Математика в школе», 1955, № 4, стр. 32—41.

8. Л. М. Фридман, О требованиях к решению геометрических задач на вычисление. «Математика в школе», 1955, № 4, стр. 7—19.

9. Э. Г. Готман, О решении геометрических задач различными методами. «Математика в школе», 1962, № 1, стр. 91—93.

СОДЕРЖАНИЕ

Эдгар Готлибович Готман

УРАВНЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, НЕРАВЕНСТВА
ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Редактор *Г. С. Уманский*
Обложка *М. Ф. Ольшевского*
Художественный редактор *А. В. Сафонов*
Технический редактор *В. Ф. Егорова*
Корректор *Р. К. Куркина*

Сдано в набор 26/III 1965 г. Подписано к печати 11/VIII 1965 г.
Формат $84\times108^1/_{32}$. Печ. *л.* 3,75 (6,3). Уч.-изд. *л.* 4,81. Тираж 92 000 экз.
Пл. 1965 г. № 212. А05183. Заказ 263.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати.
г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена 13 коп.