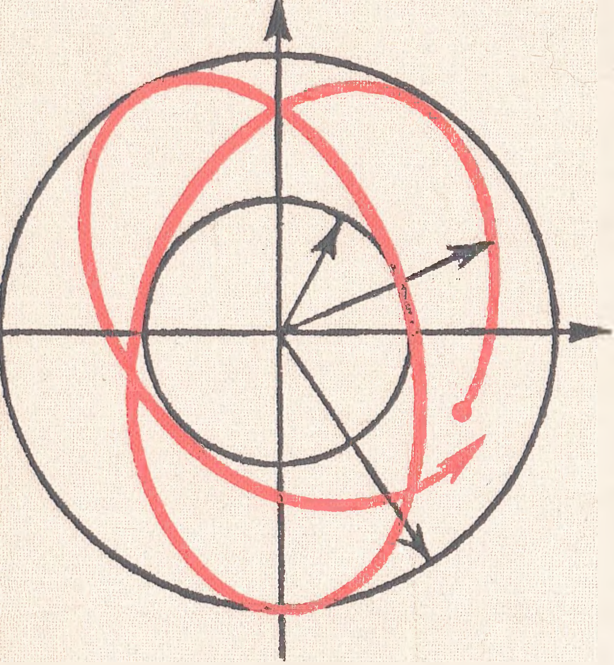

Е.А.ГРЕБЕНИКОВ
Ю.А.РЯБОВ

НОВЫЕ КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

Е. А. ГРЕБЕНИКОВ
Ю. А. РЯБОВ

НОВЫЕ КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1971

521
Г79
УДК 521.1

Новые качественные методы в небесной механике. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Главная редакция физико-математической литературы Издательства «Наука», 1971, 444 стр.

В книге излагаются результаты качественной теории дифференциальных уравнений небесной механики, полученные в последнее десятилетие.

Книга состоит из двух частей. В первой части рассматриваются методы усреднения дифференциальных уравнений движения для многочастотных механических систем, дается математическое обоснование различных схем усреднения в небесной механике. Значительное место занимает изложение результатов Н. Н. Боголюбова, В. М. Волосова и авторов. Даются приложения метода усреднения к построению аналитических теорий движения астероидов в случае резонансных орбит.

Вторая часть посвящена методам построения условно-периодических решений в задачах небесной механики. Дается подробное изложение результатов В. И. Арнольда и Ю. Мозера. Широкие возможности метода ускоренной сходимости ньютоновского типа в небесной механике проиллюстрированы на приложении общих теорем к неограниченной и ограниченной задачам трех тел.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, занимающихся математикой, механикой и небесной механикой.

Книга содержит 12 рисунков и 71 библиографическую ссылку.

$\frac{2\text{-}6\text{-}2}{139\text{—}71}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние десятилетия появился целый ряд исследований, в которых разработаны новые методы качественного анализа и построения решений дифференциальных уравнений, типичных для теории нелинейных колебаний и небесной механики. Наиболее фундаментальными из них являются, по нашему мнению, асимптотические методы теории возмущений, использующие идею усреднения, и методы ускоренной сходимости в теории условно-периодических решений. Из работ монографического характера следует упомянуть прежде всего весьма богатые по содержанию и идеям монографии «Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике» Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского и А. М. Самойленко и «Метод усреднения в теории нелинейных колебаний» В. М. Волосова и Б. И. Моргунова, в основном посвященные анализу принципиальных вопросов теории нелинейных колебаний.

К сожалению, исследования и результаты, имеющие более непосредственное отношение к небесной механике, изложены в различных журнальных статьях и остаются мало доступными для широкого круга научных работников. Особенно это относится к глубоким исследованиям А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда и Ю. Мозера, поставивших впервые теорию условно-периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений на строгую основу. Эти исследования позволили решить некоторые труднейшие проблемы качественной небесной механики.

Что касается асимптотического метода, основанного на принципе усреднения, то оставалось без внимания обоснование его применения в задачах небесной механики и отсутствовало достаточное его развитие для нужд аналитической небесной механики.

Эти соображения были определяющими при выборе материала для предложенной книги.

Книга состоит из двух «автономных» частей.

Первая часть посвящена методам усреднения и их приложениям к одной из сложных проблем небесной механики — исследованию движения астероидов, средние движения которых соизмеримы или почти соизмеримы со средним движением Юпитера.

Вторая часть посвящена вопросам существования и построения условно-периодических решений и она в основном опирается на исследования В. И. Арнольда, как на наиболее полные в этой области.

В последние годы первый из авторов, Е. А. Гребеников, занимался обоснованием метода усреднения для систем дифференциальных уравнений с резонирующими частотами и разработкой связанного с ним аналитического метода исследования движений небесных тел, а Ю. А. Рябова интересовали вопросы практического построения условно-периодических решений аналитическими и численными методами. Соответствующим было и «разделение труда» между авторами.

Мы надеемся, что данная книга будет способствовать дальнейшему развитию указанных методов, особенно в прикладном направлении, а сами методы займут прочное место в современной небесной механике.

Авторы

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МЕТОДЫ УСРЕДНЕНИЯ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основы метода усреднения были заложены в работах основоположников небесной механики в конце XVIII и в первой половине XIX столетий. В хронологическом плане следует прежде всего упомянуть результат П. Лапласа, полученный им в 1773 г., и результат Ж. Лагранжа 1776 г., которые в настоящее время известны под названием «теоремы Лапласа» или «теоремы Лапласа — Лагранжа об отсутствии вековых возмущений первого порядка у больших полуосей». Доказательство этих результатов основано на выделении с помощью операции усреднения по угловым элементам вековой части возмущающей (пертурбационной) функции. В 1814 г. К. Гаусс предложил новый метод определения вековых возмущений первого порядка оскулирующих элементов, также основывающийся на методе усреднения возмущающей функции и ее частных производных. Позже Ш. Делоне, Г. Хилл, А. Пуанкаре, П. Фату, В. Нехвилл, Н. Д. Моисеев и другие авторы рассмотрели некоторые варианты ограниченной круговой задачи трех тел, получаемые в результате усреднения ее пертурбационной функции и многократно доказывали практическую эффективность различных схем усреднения при изучении движения конкретных небесных тел.

В сущности, вся обширная и разнообразная теория возмущений, развитая в небесной механике на протяжении двух последних столетий, либо базируется на методе усреднения либо эффективно использует его основные идеи. В последние годы методы усреднения успешно применяются в теории движения искусственных небесных тел, и в первую очередь для нахождения вековых и долгопериодических неравенств.

С начала XX в. методы усреднения получили большое распространение в нелинейной механике и особенно в той ее части, которую принято называть теорией колебаний.

Без преувеличения можно сказать, что хотя метод усреднения зародился под влиянием запросов небесной механики, в настоящее время его основные идеи и приемы проникли всюду, где используются дифференциальные уравнения.

Сущность метода усреднения заключается в том, что уравнения, описывающие то или иное явление, упрощаются с помощью специального оператора и, следовательно, заменяются более простыми, более удобными для анализа. Естественно, процесс упрощения уравнений должен удовлетворять одному важному условию: упрощенные, усредненные уравнения должны описывать главные черты исследуемого явления.

Хотя формальное использование различных вариантов метода усреднения имеет продолжительную и богатую историю, математические проблемы, возникающие при изменении структуры дифференциальных уравнений в результате применения к ним операции усреднения, долгое время оставались не только неразрешенными, но даже не были строго сформулированы.

Ситуация существенно изменилась в последние три десятилетия, особенно после выхода в свет замечательных работ Н. Н. Боголюбова, в которых проблема обоснования методов усреднения была корректно сформулирована и были получены основополагающие для одного из актуальных направлений современной прикладной математики результаты.

Под влиянием фундаментальных идей Н. Н. Боголюбова принципиальным вопросам метода усреднения большое внимание уделяют многие математики.

Известные работы Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, Д. Н. Зубарева, В. М. Волосова, В. И. Арнольда и других авторов сыграли большую роль в обосновании метода усреднения и в построении асимптотической теории для различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений.

Особые трудности возникают при обосновании метода усреднения в многочастотных системах, которым свойственно явление резонанса. Некоторым математическим аспектам резонансных явлений посвящены исследования В. М. Волосова, Б. И. Моргунова, В. И. Арнольда и Е. А. Гребеникова и эти результаты довольно полно изложены в представленной книге.

Цель первой части монографии — дать достаточно полное, систематическое изложение методов усреднения в небесномеханическом аспекте.

Первая глава — это глава с математическим содержанием, так как в ней мы излагаем математическую постановку проблемы и соответствующие теоремы обоснования метода усреднения для различных типов обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы не приводим здесь во всех подробностях доказательства всех известных теорем обоснования метода усреднения, поскольку многие из них имеются в известных монографиях, а приводим лишь те из них, которые в настоящее время можно найти лишь в журнальных статьях, и, быть может, мало доступны широкому кругу специалистов.

Вторая и третья главы посвящены изложению различных вариантов метода усреднения в небесной механике и обсуждению возможности обоснования конкретных схем усреднения. Следует заметить, что если в математических теоремах видны контуры завершенности, то приложение общих теорем к конкретным схемам, как это часто бывает, сопровождается нетривиальной и в то же время кропотливой работой. В силу этого мы не можем утверждать, что обоснованию всех известных схем усреднения небесной механики характерна какая-либо завершенность, поэтому читатель, научные интересы которого принадлежат небесной механике, может найти для себя интересный объект для исследования.

Особенный интерес для специалистов, работающих в области аналитической и качественной небесной механики, представляет, на наш взгляд, четвертая глава, в которой доказана эффективность применения асимптотических методов теории возмущений, основанных на принципе усреднения, в одной из самых сложных проблем небесной механики — проблеме движения астероидов по резонансным орбитам.

ГЛАВА I

МЕТОДЫ УСРЕДНЕНИЯ В ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1.1. Математическая проблема обоснования методов усреднения

Большое распространение методов усреднения в теории дифференциальных уравнений и их приложениях неизбежно поставило перед математиками проблему математического обоснования их применимости. Эта проблема понимается нами как совокупность математических результатов и теорем, позволяющих оценить тот промежуток времени, в течение которого разность решений точных и усредненных уравнений остается достаточно малой (строгая постановка задачи будет сформулирована ниже). Основополагающие результаты в этом направлении принадлежат Н. Н. Боголюбову, который не только доказал первые общие теоремы обоснования метода усреднения в теории нелинейных колебаний, но и раскрыл тесную связь между точными и усредненными уравнениями, выражаемую в существовании некоторой замены переменных первоначальных искомых функций новыми неизвестными, определяемыми усредненными уравнениями различных порядков.

Пусть имеется n-мерное дифференциальное уравнение *)

$$\frac{dx}{dt}=X(x,\ t), \tag{1.01}$$

где $x \in G_n$, G_n — некоторая n-мерная область евклидова пространства, $t \in I$ $(I=(\infty,\ \infty)$, или $I^+=[0,\ \infty))$, $X(x,\ t) \in G_n \times I$ $(G_n \times I$ — прямое произведение G_n на $I)$. Пусть, кроме того, имеется некоторый оператор усреднения M, действующий над X в $G_n \times I$. Чаще всего в небесной механике и в теории колебаний в качестве операто-

---

*) Здесь и далее под x, $X, \ldots$ мы будем понимать n-мерные векторы $x=(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$, $X=(X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n)$ и т. д.

ра M берется интегральное среднее по t в I (будем его обозначать через M_t) или среднее по некоторым компонентам n-мерного вектора x в области их изменения. Такая схема усреднения используется для автономных систем дифференциальных уравнений и само усреднение выполняется по тем компонентам вектора x (или по части из них), относительно которых вектор X является периодическим.

Наряду с уравнением (1.01) рассмотрим уравнение*)

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = M[X(\bar{x}, t)], \tag{1.02}$$

называемое *усредненным уравнением* для n-мерного дифференциального уравнения (1.01). Заметим, что размерность уравнения (1.02) может быть и меньше n.

Очевидно, что для уравнения (1.01) можно построить бесчисленное множество усредненных уравнений (1.02), однако в прикладных задачах рациональный выбор оператора M, как правило, определяется свойствами изучаемого явления.

Достаточно ясно выделяются три аспекта проблемы сравнения решений уравнений (1.01) и (1.02).

Аспект первый. Выяснение тех условий, которым должен удовлетворять вектор $X(x, t)$, чтобы для нормы разности решений уравнений (1.01) и (1.02) выполнялось неравенство**)

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$$

(ε — произвольное положительное число) для значений t, принадлежащих достаточно большому промежутку (чаще всего промежутку длины $\sim 1/\varepsilon$).

Аспект второй. Пусть $t \in [t_0, T]$, где T — заданное число больше t_0. Необходимо найти

$$\sup_{t \in [t_0, T]} \|x(t) - \bar{x}(t)\|.$$

*) Условимся чертой сверху обозначать интегральные средние рассматриваемых функций по какому-либо из аргументов.

*) Норма вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет обозначаться через $\|x\|$; она равна $\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

Аспект третий. Пусть задано положительное число K. Необходимо определить наибольший промежуток изменения t, в котором

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|<K.$$

Эти проблемы составляют большой раздел теории дифференциальных уравнений и им посвящены многочисленные исследования, но нас интересуют прежде всего аспекты первый и второй, получившие в математической литературе название *проблемы математического обоснования метода усреднения* и поэтому все дальнейшее изложение мы будем строить под этим углом зрения.

Одна из первых работ по обоснованию метода усреднения в изложенной выше трактовке принадлежит Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси. В ней авторы, пользуясь методом малого параметра, доказали, что решения уравнения Ван дер Поля и его усредненного варианта, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, отличаются одно от другого на величину порядка μ (μ — малый параметр). Ими также найдена зависимость между величиной малого параметра и промежутком времени, на котором усредненное решение мало отличается от истинного. В следующем параграфе мы приведем доказательство теоремы Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси для случая более общего, чем тот, который рассмотрен авторами, и укажем на связь метода Ван дер Поля и метода усреднения.

Как мы указывали и выше, настоящий расцвет этого направления начинается с фундаментальных исследований Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова и позже Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского по обоснованию асимптотических методов в нелинейной механике. Уравнения небесной механики и методы, используемые для их решения, дают право рассматривать небесную механику как раздел нелинейной механики, а точнее, как раздел теории нелинейных колебаний. Поэтому теоремы обоснования методов усреднения имеют особую ценность в небесной механике, и особенно в качественной и аналитической. Конечно, рассмотрение небесной механики как раздела нелинейной механики справедливо лишь с точки зрения используемых методов и оно вызвано прежде всего спецификой рассматриваемых вопросов.

§ 1.2. Связь метода Ван дер Поля с методом усреднения. Теорема Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\frac{d^2x_k}{dt^2}+x_k=\mu f_k(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n), \qquad (1.03)$$

$$(k=1,2, \ldots,n),$$

где μ — малый положительный параметр, $f_k(x, \dot{x})$ — аналитические функции переменных $(x, \dot{x})$ в $2n$-мерном открытом шаре K_{2n} радиуса R с центром в начале координат $2n$-мерного фазового пространства $(x, \dot{x})$:

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^2+\dot{x}_k^2)<R^2.$$

Следуя Ван дер Полю [1], введем вместо n неизвестных функций x_k $2n$ новых неизвестных функций u_k, v_k по формулам

$$x_k=u_k\sin t-v_k\cos t \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (1.04)$$

Так как число переменных $u_k(t)$, $v_k(t)$ вдвое больше числа переменных $x_k(t)$, то можно наложить n дополнительных условий. В согласии с методом вариации произвольных постоянных, Ван дер Поль предложил в качестве дополнительных условий следующие тождества относительно t:

$$\frac{du_k}{dt}\sin t-\frac{dv_k}{dt}\cos t=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (1.05)$$

Дифференцируя дважды формулы преобразования (1.04) и учитывая условия (1.05), получим

$$\frac{d^2x_k}{dt^2}=\frac{du_k}{dt}\cos t+\frac{dv_k}{dt}\sin t-u_k\sin t+v_k\cos t,$$

поэтому система (1.03) приведется к следующей системе:

$$\frac{du_k}{dt}\cos t+\frac{dv_k}{dt}\sin t=$$
$$=\mu f_k(u_1\sin t-v_1\cos t; \ldots; u_n\sin t-v_n\cos t; u_1\cos t+v_1\sin t; \ldots; u_n\cos t+v_n\sin t). \qquad (1.06)$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$, получим систему $2n$-го порядка вида

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du_k}{dt} &= \mu\bar{\varphi}_k(u, v) + \mu\sum_{s=1}^{\infty}[\varphi_k^{(s)}(u, v)\cos st + \\ &\quad + \psi_k^{(s)}(u, v)\sin st], \\ \frac{dv_k}{dt} &= \mu\bar{F}_k(u, v) + \mu\sum_{s=1}^{\infty}[F_k^{(s)}(u, v)\cos st + \\ &\quad + \Phi_k^{(s)}(u, v)\sin st], \end{aligned}\right. \tag{1.07}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\bar{\varphi}_k(u, v) = \bar{\varphi}_k(u_1, \ldots, u_n;\ v_1, \ldots, v_n), \ldots, \Phi_k^{(s)}(u, v) = \Phi_k^{(s)}(u_1, \ldots, u_n;\ v_1, \ldots, v_n)$ — аналитические функции своих переменных в $2n$-мерном шаре K'_{2n}

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k^2 + v_k^2) < R^2.$$

Система (1.07) эквивалентна первоначальной системе (1.03).

По методу, предложенному Ван дер Полем [1], вместо системы (1.03) и, следовательно, вместо уравнений (1.07) следует рассматривать систему

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_k}{dt} &= \mu\bar{\varphi}_k(\bar{u}, \bar{v}), \\ \frac{d\bar{v}_k}{dt} &= \mu\bar{F}_k(\bar{u}, \bar{v}), \end{aligned}\right. \tag{1.08}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

Очевидно, что уравнения (1.08) представляют собой усредненную по t систему (1.07), поэтому исследование близости решений систем (1.07) и (1.08) с одинаковыми начальными условиями может трактоваться как проблема обоснования метода усреднения для первоначальных уравнений (1.03).

Доказательство теоремы обоснования метода Ван дер Поля для скалярного случая (x — скалярная функция) было дано, как мы указывали выше, Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси [2]. Здесь мы приведем доказательство теоремы для n-мерного случая.

Прежде чем приступить к строгому изложению результатов, введем удобную для дальнейшего символику.

Введем $2n$-мерные векторы:

$$y = \{u_1, u_2, \ldots, u_n;\ v_1, \ldots, v_n\},$$
$$\bar{y} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n;\ \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\},$$
$$Y = \left\{\bar{\varphi}_1 + \sum_{s=1}^{\infty} (\varphi_1^{(s)} \cos st + \psi_1^{(s)} \sin st), \ldots, \right.$$
$$\left. \bar{F}_n + \sum_{s=1}^{\infty} (F_n^{(s)} \cos st + \Phi_n^{(s)} \sin st)\right\},$$
$$\bar{Y} = \{\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_n; \bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n\}.$$

Тогда системы (1.07) и (1.08) запишутся в виде

$$\frac{dy}{dt} = \mu Y(y, t) \tag{1.09}$$

и

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \mu \bar{Y}(\bar{y}), \tag{1.10}$$

где

$$\bar{Y}(\bar{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y(\bar{y}, t)\, dt. \tag{1.11}$$

Т е о р е м а. *Пусть: 1) вектор-функция $Y(y, t)$ непрерывна вместе со своей производной по y в области G_{2n+1}, являющейся прямым произведением $2n$-мерного открытого шара K'_{2n} $(y \in K'_{2n})$* на $I = (-\infty, \infty)$, *и ее евклидова норма удовлетворяет относительно y в G_{2n+1} условию Липшица с постоянной L:*

$$\| Y(y', t) - Y(y'', t) \| < L \| y' - y'' \|; \tag{1.12}$$

2) *нормы* $\| Y(y, t) \|$ и $\left\| \frac{\partial Y}{\partial y} \right\|$ *ограничены в G_{2n+1} положительной постоянной M:*

$$\| Y(y, t) \| < M, \quad \left\| \frac{\partial Y}{\partial y} \right\| < M; \tag{1.13}$$

3) $\bar{y}(t)\in K'_{2n}$ *при* $t\in I$ *вместе со своей* ϱ*-окрестностью.*

Тогда для любых $\varepsilon>0$ и $D>0$ *существует* $\mu_0(\varepsilon, D, \varrho)>0$ *такое, что при* $0\leqslant\mu<\mu_0$ *и при* $\|t-t_0\|<\frac{D}{\mu}$

$$\|y(t)-\bar{y}(t)\|<\varepsilon, \tag{1.14}$$

если

$$y(t_0)=\bar{y}(t_0)=y_0. \tag{1.15}$$

Доказательство. Представим вектор-функцию $Y(y, t)$ в виде

$$Y(y, t)=\bar{Y}(y)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' Y_k(y)\,e^{ikt} \quad (k\neq 0) \tag{1.16}$$

и построим первое приближение к решению уравнения (1.09) по формуле

$$y_1(t)=y_0+\mu\int_{t_0}^{t}\bar{Y}(\bar{y}(t))\,dt+\mu\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\int_{t_0}^{t}Y_k(\bar{y}(t))\,e^{ikt}dt. \tag{1.17}$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое и учитывая усредненное уравнение (1.10), будем иметь

$$y_1(t)-\bar{y}(t)=\mu\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' Y_k(\bar{y})\frac{e^{ikt}}{k}\Bigg|_{t_0}^{t}-$$
$$-\mu^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial Y_k(\bar{y})}{\partial\bar{y}},\ \bar{Y}(\bar{y})\right)\frac{e^{ikt}}{k}\,dt,$$

откуда

$$\|y_1(t)-\bar{y}(t)\|<2\mu M+\mu^2M^2|t-t_0|. \tag{1.18}$$

При $\mu|t-t_0|<D$ справедливо неравенство

$$\|y_1(t)-\bar{y}(t)\|<\mu(2M+M^2D)=\mu C, \tag{1.19}$$
$$C=2M+M^2D.$$

Норма второго приближения очевидно удовлетворяет неравенству

$$\|y_2(t)-y_1(t)\|<\mu\int_{t_0}^{t}\|Y(y_1,\ t)-Y(\overline{y},\ t)\|\,dt<$$
$$<\mu L\int_{t_0}^{t}\|y_1(t)-\overline{y}(t)\|\,dt,$$
$$\|y_2(t)-y_1(t)\|<\mu LCD.$$

Для s-го приближения имеем

$$\|y_s(t)-y_{s-1}(t)\|<\mu C\frac{(LD)^{s-1}}{(s-1)!},$$

поэтому

$$\|y_s(t)-\overline{y}(t)\|<\mu Ce^{LD}.$$

Совершая предельный переход при $s\to+\infty$, получим

$$\|y(t)-\overline{y}(t)\|\leqslant\mu Ce^{LD}. \qquad (1.20)$$

Пусть теперь задано произвольное $\varepsilon>0$. Тогда очевидно, что $\mu_0(\varepsilon,\ D,\ \varrho)$ определяется из неравенства

$$\mu_0Ce^{LD}<\inf\{\varepsilon,\ \varrho\}. \qquad (1.21)$$

Оно гарантирует и выполнение доказываемого неравенства $\|y-\overline{y}\|<\varepsilon$ и условия принадлежности всех приближений $y_s(t)$ вместе с точным решением $y(t)$ шару K'_{2n}, поскольку из (1.21) для любого s вытекает, как показано выше, условие

$$\|y_s(t)-\overline{y}(t)\|<\varrho.$$

Теорема доказана.

Замечание. 1. Рассмотрим систему вида

$$\frac{d^2x_k}{dt^2}+\omega_k^2x_k=\mu f_k(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \dot{x}_1,\ \ldots,\ \dot{x}_n) \qquad (1.03^*)$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,n)$$

с постоянными частотами $\omega_1,\ \omega_2,\ldots,\ \omega_n$ и введем новые переменные $u_k,\ v_k$ по формулам

$$x_k=u_k\sin\omega_kt-v_k\cos\omega_kt, \qquad (1.04^*)$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,n).$$

Для (1.03*) дополнительные условия Ван дер Поля записываются в форме

$$\frac{du_k}{dt}\sin\omega_k t-\frac{dv_k}{dt}\cos\omega_k t=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

После некоторых преобразований вместо (1.03*) получим систему

$$\frac{dy}{dt}=\mu Y(y, t), \quad Y(y, t)=\bar{Y}(y)+\sum_{\|k\|>0} Y_k(y)e^{i(k,\omega)t}, \tag{1.09*}$$

и систему Ван дер Поля (усредненную систему для (1.09*))

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=\mu\bar{Y}(\bar{y}), \tag{1.10*}$$

где

$$\bar{Y}(\bar{y})=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Y(y, t)\,dt. \tag{1.11*}$$

Если частоты $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ таковы, что вектор-функция $Y(y, t)$ периодична по t, то к уравнению (1.09*) применима доказанная теорема без всяких дополнительных условий. Если же частоты ω_k несоизмеримы, то $Y(y, t)$ будет условно-периодической функцией времени и утверждение теоремы окажется справедливым, если добавить еще одно дополнительное условие, например: $\int Y(y, t)dt$ для любого $y\in K'_{2n}$ также является условно-периодической функцией.

Замечание 2. Уравнения (1.09) являются частным случаем стандартных в смысле Н. Н. Боголюбова систем дифференциальных уравнений, рассматриваемых нами в следующем параграфе, так как в них зависимость правых частей от t вполне определенна.

§ 1.3. Обоснование метода усреднения для стандартных систем

В предыдущем параграфе было дано математическое обоснование метода усреднения для весьма важного, но тем не менее частного класса уравнений, называемых уравнениями Ван дер Поля. К тому же и приведенное доказательство полностью сводится к приближениям метода Пикара, не вскрывающего сущности метода усреднения.

Как мы отмечали выше, сущность метода усреднения была выяснена Н. Н. Боголюбовым, первым доказавшим, что обоснование метода усреднения неразрывно связано с доказательством существования некоторой замены переменных, переводящей первоначальные уравнения в усредненные [3].

Н. Н. Боголюбовым доказана замечательная теорема, выражающая строгое математическое обоснование метода усреднения для так называемых стандартных систем [4]. Упомянутый фундаментальный результат послужил отправной точкой для большого количества исследований в теории нелинейных колебаний (Ю. А. Митропольский [5], Н. Н. Боголюбов и Д. Н. Зубарев [6], В. М. Волосов [7], Г. С. Ларионов и А. Н. Филатов [8], Дж. Хейл [9], Д. Граффи [10]), в небесной механике (Е. А. Гребеников [11, 12, 13]), в теории стохастических дифференциальных уравнений (Р. З. Хасьминский [14], И. М. Вульпе [15]).

Формулировка и подробное доказательство теоремы Н. Н. Боголюбова обоснования метода усреднения для стандартных систем приведены в известной монографии Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний», поэтому здесь мы приведем менее известное, но более компактное доказательство аналогичной теоремы, полученной Г. С. Ларионовым и А. Н. Филатовым [8].

Прежде всего приведем определение стандартной системы.

Определение 1. Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mu X(x, t), \tag{1.22}$$

в которой x, X — точки n-мерного евклидова пространства, μ — малый положительный параметр, называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений в стандартной форме*, или, короче, *стандартной системой* [4].

Как мы отмечали, уравнения (1.09) или (1.09*), к которым приводятся уравнения Ван дер Поля (1.03) и (1.03*), являются частным случаем стандартных систем в смысле Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского, так как в них время t входит лишь посредством тригонометрических функций, а в (1.22) относительно t нет никаких ограничений.

Наряду с системой (1.22) рассматривается соответствующая ей система усредненных по t дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\mu M_t[X(\bar{x}, t)]=\mu\overline{X}(\bar{x}), \tag{1.23}$$

где

$$\overline{X}(\bar{x})=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(\bar{x}, t)\,dt. \tag{1.24}$$

Определение 2. Вектор-функция $\overline{X}(x)$ называется *равномерным средним значением относительно* x для вектор-функции $X(x, t)$ в области $x\in G_n$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое, не зависящее от x, $T(\varepsilon)>0$, что при любом $\tau\geqslant T(\varepsilon)$ неравенство

$$\left\|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau X(x, t)dt-\overline{X}(x)\right\|<\varepsilon \tag{1.25}$$

выполняется для всех $x\in G_n$.

Заметим, что если область G_n ограничена ($\|x_1-x_2\|<C$, где $x_1\in G_n$; $x_2\in G_n$) и в G_n норма $\|X(x, t)\|$ ограничена и удовлетворяет по x условию Липшица с общей постоянной, не зависящей от t, то из существования предела (1.24) в каждой точке $x\in G_n$ следует существование равномерного среднего.

Теорема [8]. *Пусть:*

1) *n-мерная вектор-функция $X(x, t)$ в области*

$$G_{n+1}=\{t\geqslant 0,\ x\in G_n\} \tag{1.26}$$

непрерывна по t, а по x удовлетворяет условию Липшица с постоянной L_1;

2) *в каждой точке* $x \in G_n$ *существует среднее значение* $\overline{X}(x)$, *вычисляемое по формуле* (1.24);

3) *решение* $\overline{x}(t)$, $(\overline{x}(0) = x(0))$ *системы* (1.23) *определено для* $t \geqslant 0$ *и лежит в области* G_n *вместе со своей* ϱ-*окрестностью;*

4) $\overline{X}(x)$ *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* L_2, *причем на каждом конечном отрезке* $[t_1, t_2]$ *вдоль траектории* $\overline{x}(t)$

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \overline{X}(\overline{x}(\tau))\, d\tau \right\| < M(t_2 - t_1), \quad M = \text{const}.$$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ *и* $K > 0$ *существует такое* $\mu_0(\varepsilon, L) > 0$, *что при* $\mu = \mu_0$ *на отрезке*

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{K}{\mu}$$

имеет место неравенство

$$\|x(t) - \overline{x}(t)\| < \varepsilon. \tag{1.27}$$

Доказательство. Обозначим отрезок $0 \leqslant t \leqslant K/\mu$ через I и оценим на нем норму

$$\left\| \mu \int_0^t [X(\overline{x}(t), t) - \overline{X}(\overline{x}(t))]\, dt \right\| = \left\| \mu \int_0^t \varphi(\overline{x}(t), t)\, dt \right\|.$$

Распространим интегрирование на весь отрезок I. Считая, что $\varphi(\tau) \equiv 0$ для $t < \tau \leqslant K/\mu$, разделим I на m равных частей. Получим

$$\left\| \mu \int_0^t \varphi(\overline{x}(t), t)\, dt \right\| =$$

$$= \left\| \mu \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\varphi(\overline{x}(t), t) - \varphi(\overline{x}_k, t)]\, dt + \mu \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(\overline{x}_k, t)\, dt \right\|, \tag{1.28}$$

где $\overline{x}_k = \overline{x}(t_k)$, $t_0 = 0$.

Пользуясь условиями 1) и 4) теоремы, можно вывести оценку

$$\left\| \mu \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\varphi(\bar{x}(t), t) - \varphi(\bar{x}_k, t)]\, dt \right\| \leqslant \frac{(L_1 + L_2) M K^2}{m}.$$

Оценим норму второго слагаемого в (1.28).

Из условия 2) вытекает, что существует такая функция $\alpha(\bar{x}, t)$, которая при каждом фиксированном $\bar{x}$ монотонно стремится к нулю при $t \to +\infty$, и

$$\left\| \int_0^t \varphi(\bar{x}, t)\, dt \right\| \leqslant t\alpha(\bar{x}, t).$$

Если ввести обозначения

$$\alpha_0(\mu, m) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant \frac{K}{m}} \tau\alpha\left(\bar{x}_0, \frac{\tau}{\mu}\right),$$

$$\beta(\mu, m) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant \frac{K}{m}} \tau\alpha\left(\bar{x}_1, \frac{\tau}{\mu}\right),$$

$$\alpha_k(\mu, m) = K\alpha\left(\bar{x}_k, \frac{K}{\mu m}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1),$$

$$(\alpha_0(\mu, m) \to 0,\ \beta(\mu, m) \to 0,\ \alpha_k(\mu, m) \to 0 \text{ при } \mu \to 0),$$

то получим

$$\mu \left\| \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(\bar{x}_k, t)\, dt \right\| \leqslant \alpha_0 + \alpha_1 + \beta + 2 \sum_{k=2}^{m-1} \alpha_k = \gamma(\mu, m).$$

Тогда будем иметь

$$\mu \left\| \int_0^t \varphi(\bar{x}(t), \mathrm{t})\, dt \right\| \leqslant \frac{(L_1 + L_2) M K^2}{m} + \gamma(\mu, m).$$

Как следует из последней оценки, для любого $a > 0$ существует $m(a)$ и $\mu_0(a)$ такие, что при $\mu < \mu_0$ на отрезке I выполняется неравенство

$$\mu \left\| \int_0^t \varphi(\bar{x}(t), t)\, dt \right\| < a. \tag{1.29}$$

Сделаем замену переменных по формуле

$$x(t)=\bar{x}(t)+au(t). \qquad (1.30)$$

Тогда для неизвестной вектор-функции $u(t)$ имеем интегральное уравнение

$$u(t)=\frac{\mu}{a}\int_0^t [X(\bar{x}(t)+au(t),\,t)-\bar{X}(\bar{x}(t))]\,dt,$$

или

$$u(t)=\frac{\mu}{a}\int_0^t [X(\bar{x}(t)+au(t),\,t)-X(\bar{x}(t),\,t)+$$
$$+X(\bar{x}(t),\,t)-\bar{X}(\bar{x}(t))]\,dt.$$

Учитывая условие 1) теоремы, неравенство треугольника для норм и оценку (1.29), получим

$$\|u(t)\|\leqslant \mu L_1\int_0^t \|u(t)\|\,dt+1.$$

Решением этого неравенства является

$$\|u(t)\|\leqslant e^{\mu L_1 t}.$$

Если теперь выбрать $a=e^{-KL_1}\inf\{\varepsilon,\,\varrho\}$, то во-первых, при $t\in I$ решение системы (1.22) $x(t)\in G_n$ и, во-вторых,

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|<\varepsilon \quad \text{при } t\in I.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема Н. Н. Боголюбова доказана (см. [4]) при условии, что $\bar{X}(x)$ является равномерным средним значением $X(x,\,t)$ в смысле приведенного выше определения. В доказанной теореме авторы не пользовались условием равномерного среднего, но зато ввели условие 4), отсутствующее в теореме Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского.

Замечание 2. А. Н. Филатов и Г. С. Ларионов установили [8] также теорему обоснования метода усреднения для отрезка времени $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\frac{K}{\mu}$. Кроме того, в работе [8] содержатся и некоторые интересные результаты, связанные с усреднением по времени не всех правых частей дифференциальных уравнений.

§ 1.4. Случай быстро вращающейся фазы

Для задач небесной механики особый интерес представляют теоремы, обосновывающие метод усреднения для уравнений, в которых не все правые части пропорциональны малому параметру μ.

Первой работой в этом направлении явилось исследование Н. Н. Боголюбова и Д. Н. Зубарева [6], получившее значительные применения в теоретической физике. В работе [6] обобщается метод усреднения на случай системы с быстро вращающейся фазой, или, пользуясь другой терминологией, *одночастотной системы*. Авторы рассмотрели систему дифференциальных уравнений $(n+1)$-го порядка вида

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \mu X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \mu Y(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \end{aligned}\right. \tag{1.31}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $X_k(x_1, \ldots, x_n, y)$, $Y(x_1, \ldots, x_n, y)$ — 2π-периодические функции относительно y, $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — частота системы.

В уравнениях (1.31) производные $\frac{dx_k}{dt}$ пропорциональны малому параметру μ, поэтому мы будем называть x_k медленными переменными, а переменные вида y — быстрыми переменными.

Усреднение функций X_k, Y производится по переменной y, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_k(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_k(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, y)\, dy, \\ \overline{Y}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, y)\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

В процессе интегрирования в формулах (1.32) медленные переменные x_k считаются параметрами. Функции $\overline{X}_k$, $\overline{Y}$ зависят лишь от медленных переменных, поэтому усредненная система для переменных $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} = \mu \bar{X}_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \tag{1.33}$$

является замкнутой и ее интегрирование выполняется независимо от интегрирования уравнения для $\bar{y}$.

В статье [6] Н. Н. Боголюбовым и Д. Н. Зубаревым изложены условия, обеспечивающие близость (порядка ε) $x_k(t)$ и $\bar{x}_k(t)$. Эти результаты получили большое распространение в магнитодинамике.

§ 1.5. Случай многих медленных и быстрых переменных. Теорема В. М. Волосова

В. М. Волосовым показано [7, 16], что метод усреднения, вместе с соответствующими математическими теоремами обоснования, может быть распространен на более общие системы дифференциальных уравнений, а именно, на системы вида

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \mu X(x, y, t, \mu), \\ &\frac{dy}{dt} = \omega(x, y, t) + \mu Y(x, y, t, \mu), \end{aligned}\right. \tag{1.34}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ — m-мерные вектор-функции, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ — n-мерные вектор-функции. Далее мы будем называть вектор ω *вектором частот*, а его компоненты ω_i — *частотами*.

Таким образом, система описывается m-мерным вектором медленных переменных x и n-мерным вектором быстрых движений y. Система (1.34) является многочастотной, точнее, n-частотной, так как вектор частот ω имеет размерность n.

Усредненные дифференциальные уравнения, соответствующие системе (1.34), строятся с помощью оператора усреднения «вдоль порождающего решения», известного в небесной механике как усреднение по Делоне — Хиллу [17].

Наряду с уравнениями (1.34) рассмотрим порождающую (вырожденную) систему, получаемую из (1.34) при $\mu=0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=0, \\ \dfrac{dy}{dt}=\omega(x, y, t). \end{cases} \tag{1.35}$$

Допустим, что общее решение порождающей системы (1.35) известно и представляется равенствами

$$\begin{gathered} x=\text{const}, \\ y=\varphi(x, y_0, t_0, t), \\ \varphi(x, y_0, t_0, t_0)=y_0. \end{gathered} \tag{1.36}$$

Заменим в функциях X, Y вектор y вектором $\varphi(x, y_0, t_0, t)$ и вычислим их средние значения по t:

$$\begin{cases} \overline{X}(x, y_0, t_0, \mu)=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} X(x, \varphi(x, y_0, t_0, t), t, \mu)\,dt, \\ \overline{Y}(x, y_0, t_0, \mu)=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} Y(x, \varphi(x, y_0, t_0, t), t, \mu)\,dt, \end{cases} \tag{1.37}$$

считая в процессе интегрирования x, y_0, t_0 постоянными параметрами. Если теперь заменить в уравнениях (1.34) функции X и Y через $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, получим систему усредненных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt}=\mu\overline{X}(\bar{x}, \mu), \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt}=\omega(\bar{x}, \bar{y}, t)+\mu\overline{Y}(\bar{x}, \mu). \end{cases} \tag{1.38}$$

Функции $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, вообще говоря, зависят от y_0, t_0, но В. М. Волосовым было показано [7], что этот случай может быть приведен к случаю, когда такой зависимости нет.

Пусть $X_1(x, y, t)=X(x, y, t, 0)$, $\overline{X}_1(x)=\overline{X}(x, 0)$. Тогда система дифференциальных уравнений m-го порядка

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\mu\overline{X}_1(\bar{x}) \tag{1.39}$$

называется *системой усредненных уравнений первого приближения* для системы (1.34). Методы построения усредненных уравнений высших приближений в теории нелинейных колебаний достаточно подробно изложены в [4, 7, 16]. Для задач небесной механики этот вопрос будет рассмотрен дальше.

Теорема [7, 16]. *Пусть:* 1) *вектор-функции* $X(x, y, t, \mu)$, $Y(x, y, t, \mu)$ *определены и непрерывны в некоторой открытой* $(m+n+1)$*-мерной области* G_{m+n+1} *при* $0 \leqslant \mu \leqslant \mu'$, *где* μ' — *некоторое положительное число;*

2) X *и* Y *равномерно ограничены в* G_{m+n+1} *и непрерывны по* μ *равномерно относительно всех переменных;*

3) *вектор-функция* $X_1(x, y, t) = X(x, y, t, 0)$ *непрерывна по переменным* (x, y, t) *и удовлетворяет по* (x, t) *условию Липшица с общей для всей области* G_{m+n+1} *постоянной* L_1, *а по переменным* y *имеет непрерывные ограниченные частные производные* $\dfrac{\partial X_1}{\partial y}$;

4) *вектор-функция* $Y(x, y, t, \mu)$ *удовлетворяет по* (x, y, t) *условию Липшица с независимой от* x, y, t, μ *постоянной* L_2, *имеет по* μ *производную* $\dfrac{\partial Y}{\partial \mu}$, *непрерывную по* μ *равномерно относительно всех переменных, а функция* $Y_1(x, y, t) \equiv \left.\dfrac{\partial Y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$ *непрерывна по* (x, y, t), *удовлетворяет по* (x, t) *условию Липшица с общей для области* G_{m+n+1} *постоянной* L_3 *и имеет непрерывные, равномерно ограниченные в* G_{m+n+1} *частные производные по* y;

5) *пределы типа* (1.37) *существуют равномерно относительно всей совокупности начальных условий из* G_{m+n+1} *в смысле определения из* § 1.2;

6) *решение системы* (1.38) *при* $t \geqslant t_0$ *не выходит из области* G_{m+n+1}.

Тогда для произвольных чисел $\varepsilon > 0$, $K > 0$ *существует* $0 < \mu_0 \leqslant \mu'$ *такое, что при* $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$ *для всех значений* $0 \leqslant t < \dfrac{K}{\mu}$ *выполняется неравенство для нормы*

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon. \tag{1.40}$$

Здесь $\bar{x}(t)$ — решение усредненной системы первого приближения (1.39), удовлетворяющее тем же начальным условиям, что и $x(t)$.

Объем книги не позволяет нам, к сожалению, привести доказательство этой фундаментальной теоремы. Интересующегося читателя мы отсылаем к оригинальным и глубоким исследованиям В. М. Волосова, опубликованным в статье [7] и в написанной им совместно с Б. И. Моргуновым монографии «Методы усреднения в теории нелинейных колебаний» [16].

Обобщающие результаты В. М. Волосова, полученные им в 1953—1960 гг., привели к развитию самостоятельного направления в теории нелинейных колебаний со многими частотами. Мы имеем в виду прежде всего исследования В. М. Волосова [18], В. М. Волосова и Б. И. Моргунова [19], содержащие методы расчета стационарных колебательных и вращательных режимов нелинейных систем, «Лекции по асимптотическим методам исследования стационарных резонансных режимов нелинейных колебательных систем» [20] и весьма полезную обзорную статью В. М. Волосова [21].

§ 1.6. Обобщение теоремы В. М. Волосова на случай быстрых переменных

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \mu Y(x, t, \mu), \tag{1.41}$$

где

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n),$$
$$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

— n-мерные векторы и, кроме того, $Y(x, t, \mu)$ аналитична по μ в области $0 \leqslant \mu \leqslant \mu'$, т. е.

$$Y(x, t, \mu) = Y_0(x, t) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s Y_s(x, t). \tag{1.42}$$

Обозначим общее решение порождающего уравнения

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = X(x^{(0)}) \tag{1.43}$$

через

$$x^{(0)}(t)=\varphi(t, x_0^{(0)}). \tag{1.44}$$

Покажем [11] прежде всего, что существует формальная замена переменных $(x \longrightarrow \bar{x})$, преобразующая уравнение (1.41) в уравнение (1.45)

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=X(\bar{x})+\mu\bar{Y}_0(\bar{x})+\sum_{k=2}^{\infty}\mu^k\bar{Y}_k(\bar{x}), \tag{1.45}$$

правая часть которого не содержит в явном виде t.

Преобразование $(x \longrightarrow \bar{x})$ будем искать в виде

$$x=\bar{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k u_k(\bar{x}, t). \tag{1.46}$$

Вектор-функции $u_k(\bar{x}, t)$, $\bar{X}(\bar{x})$, $\bar{Y}_k(\bar{x})$ подлежат определению. Если в уравнении (1.41) перейти к новым искомым функциям $\bar{x}$, то после очевидных, но громоздких выкладок можно вывести уравнение в частных производных первого порядка, определяющее вектор $u_k(\bar{x}, t)$. Оно имеет вид

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+\frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}}X(\bar{x})=\frac{\partial X(\bar{x})}{\partial \bar{x}}u_k+R_k(\bar{x}, t). \tag{1.47}$$

Вектор-функции $R_k(\bar{x}, t)$ зависят от $\bar{Y}_0, \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_{k-1}$ и $u_1, \ldots, u_{k-1}$. В частности, функция $u_1(\bar{x}, t)$, определяющая усредненное уравнение первого приближения, представляет собой решение уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}X(\bar{x})=\frac{\partial X(\bar{x})}{\partial \bar{x}}u_1+Y_0(\bar{x}, t)-\bar{Y}_0(\bar{x}). \tag{1.48}$$

Уравнения (1.47) и (1.48) являются векторными и встречающиеся в них произведения суть скалярные *):

---

*) Если x и y — два n-мерных вектора, то их скалярное произведение равно

$$(x, y)=\sum_{x=1}^{n}x_k y_k.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}} X(\bar{x}) = \sum_{k_1=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_{k_1}} X_{k_1}(\bar{x}),\\ &\frac{\partial X(\bar{x})}{\partial \bar{x}} u_k = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial \bar{x}_s} u_k^{(s)}. \end{aligned}\right. \tag{1.49}$$

Заметим, что пока не определены каким-то образом $\bar{Y}_0$, $\bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_{k-1}$, вектор-функция $R_k(\bar{x}, t)$ также неизвестна.

Таким образом, для формального преобразования уравнения (1.41) в уравнение (1.45) необходимо решить систему уравнений в частных производных (1.47) для $k=1, 2, 3, \ldots$ при условии, что $\bar{Y}_k$ каким-то способом выбраны.

Вместо системы (1.47) рассмотрим характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\bar{x}}{dt} = X(\bar{x}),\\ &\frac{du_k}{dt} = \frac{\partial X(\bar{x})}{\partial \bar{x}} u_k + R_k(\bar{x}, t). \end{aligned}\right. \tag{1.50}$$

Система (1.50) расщепляется на две системы, каждая из которых имеет порядок n. Более того, первые n уравнений составляют порождающую систему (1.43), общее решение которой считается известным (1.44), поэтому для определения характеристик необходимо решить систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{\partial X(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}} u_k + R_k(\bar{x}(t), t). \tag{1.51}$$

Но векторное уравнение

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{\partial X(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}} u_k$$

является уравнением в вариациях для порождающей системы, поэтому, согласно теореме Пуанкаре [22], общий интеграл уравнения в вариациях находится путем дифференцирования общего решения (1.44) по произвольным постоянным. Следовательно, общее решение уравнения (1.51) принципиально определяется в квадратурах.

Если известны $2n$ независимых первых интегралов системы (1.50), то нахождение решения уравнения в частных производных (1.47) не представляет трудностей [23].

Итак, математический формализм теории нелинейных колебаний пригоден и для системы (1.41), в которой искомый вектор x состоит только из быстрых движений.

Усредненным уравнением первого приближения для (1.41) является n-мерное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=X(\bar{x})+\mu\bar{Y}_0(\bar{x}). \tag{1.52}$$

Обоснование метода усреднения для системы (1.41) выражается теоремой, вытекающей из теоремы В. М. Волосова (§ 1.5). Эта теорема формулируется следующим образом.

Теорема [24]. *Пусть:* 1) *вектор-функции* $X(x)$, $Y(x, t, \mu)$ *непрерывны и равномерно ограничены вместе с производными* $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ *в некоторой открытой* $(n+1)$*-мерной области* G_{n+1} *и удовлетворяют в этой области условию Липшица по переменным* x *с общей постоянной* L;

2) *существует равномерное среднее относительно всех начальных условий из* G_{n+1} *вдоль порождающего решения функции*

$$\bar{Y}_0=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}Y(\varphi(t, \bar{x}), t)\,dt,$$

которое не зависит от $x_0^{(0)}, t_0$;

3) *решение системы* (1.52) *для любых* $t\geqslant t_0$ *не выходит из области* G_{n+1}.

Тогда, каковы бы ни были $\varepsilon>0$, $K>0$, *можно найти такое* $0<\mu_0\leqslant\mu'$, *что при любых* $0\leqslant\mu\leqslant\mu_0$ *неравенство*

$$\|x(t, \mu)-\bar{x}(t, \mu)\|<\varepsilon$$

выполняется для всех $t_0\leqslant t\leqslant K/\mu$.

§ 1.7. Теорема В. И. Арнольда для двухчастотной колебательной системы

Рассмотрим систему $(m+2)$-го порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\mu X(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt}=\omega(x)+\mu Y(x, y), \end{cases} \tag{1.53}$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y=(y_1, y_2)$, $\omega(x)=(\omega_1(x), \omega_2(x))$, $X=(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, $Y=(Y_1, Y_2)$.

Наряду с системой (1.53) рассмотрим усредненную систему первого приближения (1.54)

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\mu\bar{X}(\bar{x}), \tag{1.54}$$

где

$$\bar{X}(\bar{x})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\bar{x}; y_1, y_2)\,dy_1dy_2. \tag{1.55}$$

Будем считать, что функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ аналитичны и 2π-периодичны по y в области

$$\{x\in G, \ \|\operatorname{Im} y\|<\varrho<1\},$$

где G — комплексная компактная m-мерная область.

В. И. Арнольдом получена оценка для $\|x(t)-\bar{x}(t)\|$ при $0\leqslant t\leqslant 1/\mu$, где $x(t)$ и $\bar{x}(t)$,— решения систем (1.53) и (1.54), удовлетворяющие условию $x(0)=\bar{x}(0)$. Поскольку этот результат оказался, как будет показано дальше, весьма полезным в качественной небесной механике, мы изложим его здесь достаточно подробно и сопроводим необходимыми доказательствами. Прежде чем привести полное доказательство основной теоремы В. И. Арнольда, приведем некоторые вспомогательные обозначения и леммы [25].

а) Пусть $0<K<1<N<\infty$. Обозначим через G_N множество точек $x\in G$ $(G_N\subset G)$, в которых $(\omega(x), k)=\omega_1k_1+\omega_2k_2\neq 0$ при целых k_1, k_2, удовлетворяющих неравенству $0<\|k\|=|k_1|+|k_2|\leqslant N$.

б) Обозначим через G_{KN} множество точек x, входящих в G_N вместе с окрестностью радиуса K. Тогда для

$x \in G_{KN}$ справедливо неравенство

$$|(\omega(x), k)| > c_1 K, \quad 0 < \|k\| < N. \qquad (1.56)$$

В условии (1.56) c_1 — некоторая постоянная, не зависящая от μ, K, N.

в) Обозначим через $R_{KN} = G \backslash G_{KN}$ (R_{KN} — дополнение множества G_{KN} до множества G).

г) Пусть $x(t)$, $y(t)$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mu}\right)$ — решение первоначальной системы (1.53), причем $x(t) \in G$. Разобьем отрезок $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mu}$ на два множества: g_{KN}, для которого $x(t) \in G_{KN}$, и r_{KN}, для которого $x(t) \in R_{KN}$. Будем называть g_{KN} нерезонансным множеством (в g_{KN} выполнено условие $|(\omega(x), k)| > c_1 K$), а r_{KN} — резонансным множеством (в r_{KN} имеет место $|(\omega(x), k)| \leqslant c_1 K$).

д) Для двухчастотной системы (1.53) будем считать, что при $x \in G$ $\omega_2(x) \neq 0$ Обозначим через

$$\lambda(x) = \frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)}, \quad x \in G$$

и предположим, что

$$c_2^{-1}\mu < \left|\frac{d\lambda(x)}{dt}\right| < c_2\mu, \quad \{x \in G, \ \|\operatorname{Im} y\| < \varrho < 1\}. \qquad (1.57)$$

Вместо (1.57) можно рассматривать следующее условие:

$$A(x, y) = \left|\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}, X\right)\omega_2 - \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}, X\right)\omega_1\right| > 0 \qquad (1.58)$$

при всех y, если $x \in G$.

Условие (1.58) В. И. Арнольд в статье [25] называет *условием А*. Оно, как и условие (1.57), означает, что колебательная система (1.53) не может застрять ни на каком резонансе при $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$ (см. лемму 1).

Если выполняются условия (1.57) и $K < c_0$,то справедливы следующие леммы [25].

Лемма 1. *Множество r_{KN} состоит из не более чем $c_3 N^2$ отрезков, а длина каждого из них не превосходит $c_4 \mu^{-1} K$ (c_3, c_4 — постоянные, не зависящие от K, N, μ).*

Доказательство. Из арифметических лемм В. И. Арнольда [26] вытекает, что число двумерных целочисленных векторов k, для которых $0 < \|k\| \leqslant N$, не превышает 2^2N^2. Чтобы доказать, что множество r_{KN} состоит из не более чем c^3N^2 временны́х отрезков, необходимо показать, что за время $1/\mu$ траектория $x(t)$ может пройти через окрестность любой из резонансных точек не более чем конечное число раз. Рассмотрим наименьшее возможное приращение функции $\lambda(x)$ за время $|t-t_0|=1/\mu$.

На основании теоремы Лагранжа имеем

$$|\Delta\lambda(x)|=|\lambda(x)-\lambda(x_0)|=\left|\frac{\overline{d\lambda}}{dt}\right||t-t_0|,$$

где

$$\frac{\overline{d\lambda}}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}\bigg|_{t=t^*\in(t_0,\ t)}.$$

Из условия (1.57) вытекает, что

$$|\Delta\lambda(x)|>c_2^{-1}\mu|t-t_0|$$

и при $t-t_0=1/\mu$

$$|\Delta\lambda(x)|>c_2^{-1}.$$

Последнее неравенство как раз и указывает на то, что система не может застрять ни на каком резонансе и не может пройти через K-окрестность какой-либо из резонансных точек бесконечное число раз.

Далее, рассмотрим функцию

$$u(t)=|(k,\ \omega(x(t)))|$$

и предположим, что $u(t_1)=0$, $u(t_2)=c_1K$. Оценим $|t_2-t_1|$.

Будем иметь (при $k_1\neq 0$, $k_2\neq 0$), что

$$\begin{aligned}\Delta u&=u(t_2)-u(t_1)=|(k,\ \omega(x(t_2)))|=\\&=|\omega_1(x(t_2))k_1+\omega_2(x(t_2))k_2|=\\&=|\omega_2(x(t_2))||\lambda(x(t_2))k_1+k_2|=\\&=|\omega_2(x(t_2))|\left|\lambda(x(t_1))k_1+k_2+\frac{\overline{d\lambda}}{dt}(t_2-t_1)k_1\right|=\\&=|\omega_2(x(t_2))|\left|\frac{\overline{d\lambda}}{dt}\right||t_2-t_1||k_1|.\end{aligned}$$

В последней формуле $\overline{\frac{d\lambda}{dt}}$ представляет собой значение $\frac{d\lambda}{dt}$ в некоторой точке $\bar{t} \in (t_1, t_2)$.

Из условия $\Delta u = c_1 K$ получаем

$$|t_2 - t_1| = \frac{c_1 K}{|k_1|\,|\omega_2(x(t_2))|\left|\overline{\frac{d\lambda}{dt}}\right|}.$$

Считая, что $|\omega_2(x(t_2))| > \gamma$ и учитывая условие (1.57), которое тем более имеет место для всех $t \in (t_1, t_2)$, будем иметь

$$|t_2 - t_1| < c_4' \mu^{-1} K, \text{ где } c_4' = c_1 c_2 \gamma^{-1}. \qquad (1.59)$$

Последнее неравенство получено при условии, что $\inf |k_1| = 1$, которое, очевидно, всегда выполняется, если $|k_1| \neq 0$. Но k_1 не может равняться нулю, так как в этом случае из условия $u(t_1) = |\omega_2(x(t_1))k_2| = 0$ следовало бы $\omega_2(x(t_1)) = 0$, а это противоречит предположению, что $\omega_2(x) \neq 0$ при $x \in G$.

Если допустить, что $0 < u(t_1) < c_1 K$, то для $|t_2 - t_1|$ получается оценка

$$|t_2 - t_1| < c_4 \mu^{-1} K, \quad c_4 = 2c_4'.$$

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ — *один из отрезков, принадлежащих нерезонансному множеству* g_{KN}. *Если* $\alpha + \tau \leqslant t \leqslant \beta - \tau$ $\left(0 < \tau < \frac{\beta - \alpha}{2}\right)$, то $x(t) \in G_{K(\tau), N}$, где

$$K(\tau) = K + c_5^{-1} \mu \tau. \qquad (1.60)$$

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что по истечении промежутка времени τ приращение $\Delta u(t)$ удовлетворяет условию

$$\Delta u > \gamma c_2^{-1} \mu t.$$

Так как $|(\omega(x(\alpha)), k)| > c_1 K$, $|(\omega(x(\beta)), k)| > c_1 K$, то

$$|(\omega(x(\alpha+\tau)), k)| > c_1 K + \gamma c_2^{-1} \mu \tau, \quad |(\omega(x(\beta-\tau)), k)| > c_1 K + \gamma c_2^{-1} \mu \tau.$$

Вводя обозначение $c_5^{-1}=\gamma c_1^{-1}c_2^{-1}$ и учитывая (1.60), получим требуемое неравенство

$$|(\omega(x(t)),\ k)|>c_1K(\tau),\quad \alpha+\tau\leqslant t\leqslant\beta-\tau. \tag{1.61}$$

Лемма 3. *Если* $|t-t_0|<\dfrac{1}{\mu}$, *то*

$$\|\bar{x}(\bar{x}_0,\ t_0,\ t)-\bar{x}(\bar{x}_0',\ t_0,\ t)\|<c_6\|\bar{x}_0-\bar{x}_0'\|. \tag{1.62}$$

Доказательство. Из усредненной системы (1.54), очевидно, имеем

$$\bar{x}(\bar{x}_0,\ t_0,\ t)=\bar{x}_0+\mu\int_{t_0}^{t}\bar{X}(\bar{x})\,dt,$$

$$\bar{x}(\bar{x}_0',\ t_0,\ t)=\bar{x}_0'+\mu\int_{t_0}^{t}\bar{X}(\bar{x}')\,dt$$

и

$$\|\bar{x}-\bar{x}'\|\leqslant\|\bar{x}_0-\bar{x}_0'\|+\mu\int_{t_0}^{t}\|\bar{X}(\bar{x})-\bar{X}(x')\|\,dt.$$

Полагая, что $\bar{X}(x)$ удовлетворяет условию Липшица в области G с постоянной L, имеем

$$\|\bar{x}-\bar{x}'\|\leqslant e^{\mu L|t-t_0|}\|\bar{x}_0-\bar{x}_0'\|.$$

Если считать, что $e^L=c_6$, то при $|t-t_0|<\dfrac{1}{\mu}$ будем иметь окончательную оценку

$$\|\bar{x}(\bar{x}_0,\ t_0,\ t)-\bar{x}(\bar{x}_0',\ t_0,\ t)\|<c_6\|\bar{x}_0-\bar{x}_0'\|.$$

Лемма 4. *Если имеет место дифференциальное неравенство*

$$\frac{d\|z\|}{dt}\leqslant a\|z\|+b(t),\quad \|z(0)\|<c,$$

где a, c, $b(t)$ — неотрицательные величины, то

$$\|z(t)\|\leqslant e^{at}\left[c+\int_0^t b(t)\,dt\right]. \tag{1.63}$$

Доказательство очевидно.

Лемма 5. *В области* $\left\{x \in G_{KN}, \| \operatorname{Im} y \| < \frac{\varrho}{2}\right\}$ *существует m-мерная вектор-функция $z = x + Z_N(x, y)$, где m-мерная функция $Z_N(x, y)$ — 2π-периодична относительно вектора y, такая, что*

$$\left\| \frac{dz}{dt} - \mu \overline{X}(z) \right\| < c_7 \mu^2 K^{-2}, \quad \| z - x \| < c_8 \mu K^{-1} \tag{1.64}$$

для

$$N = c_9 \ln\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{1.65}$$

и

$$|\mu| < c_{10}^{-1} K^2. \tag{1.66}$$

Доказательство. Приведенные ниже оценки и рассуждения аналогичны оценкам из другой части настоящей книги, с помощью которых В. И. Арнольд строит производящие функции канонических преобразований при доказательстве существования условно-периодических решений гамильтоновых систем.

Дифференцируя векторное равенство $z = x + Z_N(x, y)$, будем иметь

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial Z_N}{\partial x}, \frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial Z_N}{dy}, \frac{dy}{dt}\right) =$$

$$= \mu X(x, y) + \mu\left(\frac{\partial Z_N}{\partial x}, X\right) + \mu\left(\frac{\partial Z_N}{\partial y}, Y\right) + \mu\left(\frac{\partial Z_N}{\partial y}, \omega\right).$$

В написанном равенстве скобки, как обычно, означают скалярные произведения.

Если воспользоваться обозначениями В. И. Арнольда, то можно записать так:

$$\frac{dz}{dt} = \mu \overline{X}(z) + \mu \widetilde{X}_N(x, y) + \left(\frac{\partial Z_N}{\partial y}, \omega\right) + \mu \overline{X}(x) - \mu \overline{X}(z) +$$

$$+ \mu \widetilde{X}(x, y) - \mu \widetilde{X}_N(x, y) + \mu\left(\frac{\partial Z_N}{\partial x}, X\right) + \mu\left(\frac{\partial Z_N}{\partial y}, Y\right), \tag{1.67}$$

где

$$\widetilde{X}=X(x,\ y)-\overline{X}(x)=\sum_{\|k\|\geqslant 1} X_k(x)\,e^{i(k,\ y)},$$

$$\widetilde{X}_N(x,\ y)=\sum_{0<\|k\|\leqslant N} X_k(x)\,e^{i(k,\ y)}.$$

Если, далее, ввести обозначения:

$$\Sigma_1=\mu\widetilde{X}_N(x,\ y)+\left(\frac{\partial Z_N}{\partial y},\ \omega\right),$$

$$\Sigma_2=\mu\overline{X}(x)-\mu\overline{X}(z),$$

$$\Sigma_3=\mu\widetilde{X}-\mu\widetilde{X}_N=\mu\sum_{\|k\|>N} X_k(x)\,e^{i(k,\ y)},$$

$$\Sigma_4=\mu\left(\frac{\partial Z_N}{\partial x},\ X\right),$$

$$\Sigma_5=\mu\left(\frac{\partial Z_N}{\partial y},\ Y\right),$$

то равенство (1.67) примет вид

$$\frac{dz}{dt}=\mu\overline{X}(z)+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5. \qquad (1.68)$$

Будем искать функцию преобразования $Z_N(x,\ y)$ в виде тригонометрического многочлена

$$Z_N(x,\ y)=\sum_{0<\|k\|\leqslant N} Z_k^{(N)}(x)\,e^{i(k,\ y)} \qquad (1.69)$$

с неизвестными коэффициентами $Z_k^{(N)}$, причем функцию $Z_N(x,\ y)$ будем определять из условия

$$\Sigma_1=\mu\widetilde{X}_N(x,\ y)+\left(\frac{\partial Z_N}{\partial y},\ \omega\right)\equiv 0. \qquad (1.70)$$

Из тождества (1.70) имеем

$$Z_k^{(N)}(x)=\frac{i\mu X_k(x)}{(k,\ \omega)},\quad 0<\|k\|\leqslant N. \qquad (1.71)$$

Таким образом, если выполняется тождество (1.70), условие (1.68) приводится к виду

$$\frac{dz}{dt}=\mu\overline{X}(z)+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5. \tag{1.72}$$

В области $\{x\in G_{KN},\ \|\operatorname{Im} y\|<\varrho\}$ будем иметь

$$\|Z_N(x, y)\|\leqslant\frac{\mu}{c_1K}\left\|\sum_{0<\|k\|\leqslant N}X_k(x)e^{i(k, y)}\right\|<\frac{\mu C}{c_1K}=c_{11}\mu K^{-1}, \tag{1.73}$$

$$c_{11}=c_1^{-1}C.$$

Постоянная C ограничивает норму $\|X(x, y)\|$ в первоначальной области.

Чтобы оценить нормы*) $\left\|\frac{\partial Z_N}{\partial y}\right\|$ и $\left\|\frac{\partial Z_N}{\partial x}\right\|$ согласно неравенству Коши, следует рассматривать область несколько меньшую, чем предыдущая [26]. Например, в области $\{x\in G_{0,1K,N},\ \|\operatorname{Im} y\|<0,9\rho\}$ будем иметь

$$\left\|\frac{\partial Z_N}{\partial y}\right\|<10c_{11}\mu K^{-1}\varrho^{-1},\qquad \left\|\frac{\partial Z_N}{\partial x}\right\|<100c_{11}\mu K^{-2}.$$

Вводя обозначение

$$c_8=\sup\{10c_{11}\varrho^{-1},\ 100c_{11}\},$$

можно написать, что при $\{x\in G_{0,1K,N},\ \|\operatorname{Im} y\|<0,9\rho\}$ справедливы одновременно оценки:

$$\|Z_N(x, y)\|<c_8\mu K^{-1},\qquad \left\|\frac{\partial Z_N}{\partial y}\right\|<c_8\mu K^{-1},$$

$$\left\|\frac{\partial Z_N}{\partial x}\right\|<c_8\mu K^{-2}. \tag{1.74}$$

Если $x\in G_{KN}$, $|\mu|<c_{10}^{-1}K^2$, $c_{10}^{-1}c_{11}<0,9$, то весь отрезок $z-x$ принадлежит области $G_{0,1K,N}$, и учитывая первую из

---

*) Если $A=(a_{ik})$ $(i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n)$ матрица размера $m\times n$, то ее норма определяется формулой $\|A\|=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|$.

оценок (1.74), получаем

$$\|z-x\|<c_8\mu K^{-1}.$$

Таким образом, вторая из оценок (1.64) получена.

Для доказательства справедливости первой из оценок (1.64) следует показать, что слагаемые $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_5$ имеют порядок μ^2 при $x \in G_{KN}$.

При $\{x \in G_{KN}, \|\operatorname{Im} y\|<0{,}05\rho\}$ имеем

$$\left\|\sum\nolimits_2\right\|=\mu\left\|\frac{\partial \overline{X}}{\partial y}(z-x)\right\|<c_8\mu^2 C' K^{-1}=c_{12}\mu^2 K^{-1}, \qquad (1.75)$$

где

$$\left\|\frac{\partial \overline{X}}{\partial x}\right\|<C' \text{ при } \{x \in G, \|\operatorname{Im} y\|<\varrho\}.$$

Далее,

$$\left\|\sum\nolimits_4\right\|<\mu\left\|\frac{\partial Z_N}{\partial x}\right\|\|X\|<\mu C c_{11}\mu K^{-2}=c_{13}\mu^2 K^{-2}, \qquad (1.76)$$

$$\left\|\sum\nolimits_5\right\|<\mu\left\|\frac{\partial Z_N}{\partial y}\right\|\|X\|<2\mu C c_{11}\mu K^{-1}\varrho^{-1}=c_{14}\mu^2 K^{-1}. \qquad (1.77)$$

Так как функция $X(x, y)$, а следовательно, и $\tilde{X}=X-\overline{X}$ аналитична в области $\{x \in G, \|\operatorname{Im} y\|<\rho<1\}$, то из этого вытекает, что для достаточно большого $N \|\Sigma_3\|$ будет иметь порядок μ^2. Точнее, если

$$N=c_9 \ln\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

где $c_9=c_9(\varrho)$, то

$$\left\|\sum\nolimits_3\right\|<c_{15}\mu^2. \qquad (1.78)$$

Учитывая теперь оценки (1.75)—(1.78), выполняющиеся по крайней мере при $\{x \in G_{KN}, \|\operatorname{Im} y\|<0{,}5\,\varrho\}$ и равенство (1.72), будем иметь

$$\left\|\frac{dz}{dt}-\mu\overline{X}(z)\right\|<c_7\mu^2 K^{-2},$$

где

$$c_7=c_{12}K+c_{13}+c_{14}K+c_{15}K^2.$$

Таким образом, лемма 5 доказана. Она позволит нам оценить отклонение точного решения $x(t)$ от усредненного $\overline{x}(t)$ на нерезонансном множестве g_{KN}.

Теорема [26]. *Пусть:*

1) *функции* $X(x, y)$, $Y(x, y)$ *аналитичны и* 2π-*периодичны по* y *в области* $\{x \in G, \|\operatorname{Im} y\| < \rho < 1\}$, G — *комплексная компактная* m-*мерная область;*

2) *частоты* $\omega(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x))$ *аналитичны в области* G;

3) *нормы* $\|X(x, y)\|$, $\|Y(x, y)\|$, $\|\omega(x)\|$ *ограничены в заданных областях;*

4) *имеют место условия* (1.57) *или* (1.58).

Тогда существует такое $\mu_0 \ll 1$, *что при всех* $0 \leqslant \mu < \mu_0$ *и всех* $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mu}$ *справедлива оценка*

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < c_{16} \sqrt{\mu} \ln^2\left(\frac{1}{\mu}\right), \tag{1.79}$$

где c_{16} — *некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. Выберем μ и K таким образом, чтобы

$$0 < \mu < c_{10}^{-1} c_3^{-2}, \quad K = \sqrt{c_{10}\mu} < c_0^{-1}.$$

Используя условия леммы 5, построим вектор-функцию $z(x, y)$ и нерезонансную область G_{KN}. Обозначим последовательно отрезки, составляющие временно́е нерезонансное множество g_{KN}, через $[t_r^{\text{л}}, t_r^{\text{п}}]$ $(r = 1, 2, \ldots)$ и для определенности предположим, что $t_1^{\text{л}} = 0 \in g_{KN}$, $t = \frac{1}{\mu} \in r_{KN}$.

Следуя В. И. Арнольду, введем обозначения

$$\alpha = (\text{л}, \text{п}), \quad x(t_r^{\alpha}) = x_r^{\alpha}, \quad \bar{x}(x_r^{\text{л}}, t_r^{\text{л}}, t) = \bar{x}_r(t),$$
$$z(x(t), y(t)) \equiv z(t).$$

Учитывая, что $\bar{x}_r(t_r^{\text{л}}) = x_r^{\text{л}}$, из леммы 3 получаем

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leqslant \sum_r \|\bar{x}_{r+1}(t) - \bar{x}_r(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant c_6 \sum_r \|\bar{x}_{r+1}(t_{r+1}^{\text{л}}) - \bar{x}_r(t_{r+1}^{\text{л}})\| \leqslant c_6 \sum_r \{\|x_{r+1}^{\text{л}} - x_r^{\text{п}}\| +$$
$$+ \|x_r^{\text{п}} - \bar{x}_r(t_r^{\text{п}})\| + \|\bar{x}_r(t_r^{\text{п}}) - \bar{x}_r(t_{r+1}^{\text{л}})\|\}. \tag{1.80}$$

Если отрезок $[t_r^{л}, t_r^{п}]$ относится к нерезонансному множеству g_{KN}, то отрезок $[t_r^{п}, t_{r+1}^{л}]$ относится к резонансному множеству r_{KN}. Поэтому из леммы 1 вытекает

$$\|x_{r+1}^{л}-x_r^{п}\|+\|\bar{x}_r(t_{r+1}^{л})-\bar{x}_r(t_r^{п})\|<c_{17}K. \qquad (1.81)$$

Из условий леммы 5 находим, что при

$$t_r^{л}\leqslant t\leqslant t_r^{п},\quad a=c_{18}\mu,\quad b(t)=\left\|\frac{dz}{dt}-\mu X(z)\right\|$$

справедливо неравенство

$$\left\|\frac{dz}{dt}-\frac{d\bar{x}_r}{dt}\right\|\leqslant a\|z-\bar{x}_r\|+b. \qquad (1.82)$$

Функцию $b(t)$ оценим с помощью лемм 2 и 5. При $t_r^{л}+\tau\leqslant t\leqslant t_r^{п}-\tau$ будем иметь

$$0\leqslant b(t)<c_7\mu^2(K+c_5^{-1}\mu\tau)^{-2}.$$

Поэтому $\int\limits_{t_r^{л}}^{t_r^{п}} b(t)\,dt<c_{19}\mu K^{-1}$, так как $|t_r^{п}-t_r^{л}|\sim K\mu^{-1}$.

Из леммы 5 выводим также

$$\|z(t_r^{л})-\bar{x}(t_r^{л})\|=\|z(t_r^{л})-x_r^{л}\|<c_8\mu K^{-1}. \qquad (1.83)$$

Далее, применяя к неравенству (1.82) лемму 4, находим при $0\leqslant t_r^{п}\leqslant 1/\mu$,

$$\|z(t_r^{п})-\bar{x}_r(t_r^{п})\|\leqslant e^{c_{18}}(c_8+c_9)\mu K^{-1}=c_{20}\mu K^{-1}. \qquad (1.84)$$

Из оценок (1.64) и (1.84) выводим

$$x_r^{п}-\bar{x}_r(t_r^{п})\|\leqslant\|x_r^{п}-z(t_r^{п})\|+\|z(t_r^{п})-\bar{x}_r(t_r^{п})\|<$$
$$<(c_8+c_{20})\mu K^{-1}. \qquad (1.85)$$

Объединяя, наконец, условия (1.80), (1.81), (1.85) и пользуясь условиями леммы 1, при $0\leqslant t\leqslant 1/\mu$ получим

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|<c_6c_3\left(c_9\ln\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)^2(c_8\mu K^{-1}+c_{20}\mu K^{-1}+c_{17}K). \qquad (1.86)$$

При $K=\sqrt{c_{10}\mu}$ будем иметь

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\| < c_{16}\sqrt{\mu}\ln^2\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

где

$$c_{16}=c_3c_6c_9^2c_{10}^{-1/2}(c_8+c_{20}+c_{17}c_{10}).$$

Теорема доказана.

В излагаемой работе В. И. Арнольд показал, кроме того, что при $t=1/\mu$, вообще говоря,

$$\left\|x\left(\frac{1}{\mu}\right)-\bar{x}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right\| > c_{21}\sqrt{\mu}. \tag{1.87}$$

В заключение еще раз подчеркнем, что изложенные результаты имеют место при выполнении условия A [условие (1.57) или (1.58)], обеспечивающего «незастревание» на резонансах. Условие A существенно. Об этом, в частности, говорит и пример, разобранный автором [25]. В § 1.10 мы также рассмотрим пример, указывающий на то, что поведение $\|x(t)-\bar{x}(t)\|$ может быть совсем другим, если условие A не выполняется.

§ 1.8. Случай колебательной системы со многими частотами

В предыдущем параграфе мы неоднократно подчеркивали, что метод усреднения для колебательной системы с двумя частотами (1.53) нельзя обосновать без условия A. Поэтому для колебательных систем с $n>2$ частотами следует прежде всего иметь некий аналог этого условия. Ниже мы покажем, что условия

$$c_2^{-1}\mu < \left|\left(k, \frac{d\omega}{dt}\right)\right| < c_2\mu, \quad 1 \leqslant \|k\| \leqslant N,$$

$$x \in G, \quad \|\operatorname{Im} y\| = \sum_{k=1}^{n} |\operatorname{Im} y_k| < \varrho < 1 \tag{1.88}$$

достаточно для распространения теоремы В. И. Арнольда на n-мерный случай.

Условие (1.88) эквивалентно следующему условию:

$$c_2^{-1} < \left|\left(k, \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}, X\right)\right)\right| < c_2, \quad 1 \leqslant \|k\| \leqslant N, \tag{1.89}$$
$$x \in G, \quad \|\operatorname{Im} y\| < \varrho < 1.$$

Поэтому в качестве аналога условия A для случая

$n>2$ частот будем рассматривать условие (1.88) либо (1.89).

Будем называть условие (1.88) или (1.89) *условием* A',

Сохраним обозначения, приведенные в пп. а) — г) из § 1.7, с той лишь разницей, что

$$(k,\ \omega(x))=\sum_{i=1}^{n} k_i\omega_i(x), \quad n>2.$$

Если выполняются условия A' и $K<c_0^{-1}$, то справедлива следующая лемма.

Лемма 1′. *Множество* r_{KN} *состоит из не более чем* $c_3'N^n$ *отрезков, а длина каждого из них не превосходит* $c_4'\mu^{-1}K$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 из § 1.7. В леммах 2—5 размерность вектора $\omega(x)$ несущественна.

Заметим, что условие A', так же как и условие A, является весьма жестким, так как оно не только не допускает «незастревания» в окрестности резонансных точек, но и не допускает возвращения в окрестность начальной точки через $|t-t_0|=1/\mu$.

Этот факт вытекает из неравенства $|\Delta(k,\ \omega)|>c_2^{-1}$ при $|t-t_0|=1/\mu$ для всех $x\in G$ и для всех k, нормы которых удовлетворяют неравенству $1\leqslant\|k\|\leqslant N$.

Имея в виду эти соображения, можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Рассмотрим колебательную систему* $(m+n)$-го порядка:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\mu X(x,\ y),\\ \frac{dy}{dt}&=\omega(x)+\mu Y(x,\ y), \end{aligned}\right. \tag{1.90}$$

$$X=(X_1,\ X_2,\dots,\ X_m),\quad \omega=(\omega_1,\ \omega_2,\dots,\ \omega_n),$$
$$Y=(Y_1, Y_2,\ \dots,\ Y_n)$$

и пусть:

1) *функции* $X(x,\ y)$, $Y(x,\ y)$ *аналитичны по* x, y *и* 2π*-периодичны по* y *в области*

$$\{x\in G,\ \|\operatorname{Im} y\|<\varrho<1\},$$

G — *комплексная компактная* m*-мерная область;*

2) *вектор частот* $\omega(x)$ *аналитичен в* G;

3) *нормы* $\|X(x, y)\|$, $\|Y(x, y)\|$, $\|\omega(x)\|$ *ограничены в заданных областях;*

4) *имеют место условия* (1.88) *или* (1.89).

Тогда существует такое $\mu_0 \ll 1$, *что при всех* $0 \leqslant \mu < \mu_0$ *и любых* $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mu}$ *справедлива оценка*

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\| < c_{16}' \sqrt{\mu} \ln^n \left(\frac{1}{\mu}\right), \tag{1.91}$$

$$x(0)=\bar{x}(0),$$

где c_{16}' — *некоторая положительная постоянная.*

В оценке (1.91) $\bar{x}(t)$ является решением усредненной системы

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\mu \bar{X}(\bar{x}), \tag{1.92}$$

где

$$\bar{X}(\bar{x})=\frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} X(\bar{x}, y)\, dy_1 \ldots dy_n. \tag{1.93}$$

Мы не будем приводить доказательство сформулированной теоремы, так как оно, в сущности, является повторением доказательства теоремы В. И. Арнольда.

Различие состоит лишь в том, что при использовании оценок (1.80), (1.81), (1.85) и леммы 1′ (а не леммы 1), вместо неравенства (1.86) получается условие

$$x(t)-\bar{x}(t)\| < c_6' c_3' \left(c_9' \ln\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)^n (c_8' \mu K^{-1} + c_{20}' \mu K^{-1} + c_{17}' K). \tag{1.94}$$

§ 1.9. Случай усреднения по части быстрых переменных

Вернемся снова к системе уравнений (1.90):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\mu X(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt}=\omega(x)+\mu Y(x, y) \end{cases}$$

и построим для нее усредненную систему

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \mu\bar{X}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= \omega(\bar{x}) + \mu\bar{Y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}\right. \tag{1.95}$$

с помощью операторов усреднения

$$\bar{X}(x, \bar{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n_1}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} X(x, y)\, dy_1 \ldots dy_{n_1},$$

$$\bar{Y}(x, \bar{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n_1}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} Y(x, y)\, dy_1 \ldots dy_{n_1}, \tag{1.96}$$

$$0 < n_1 < n, \quad \bar{y} = (y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \ldots, y_n).$$

Очевидно, что если система (1.90) имела порядок $m+n$, то соответствующая ей усредненная система (1.95) имеет порядок $m+n-n_1$.

Функции $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ представляются суммами кратности $n-n_1$ и имеют вид:

$$\bar{X}(x, y) = \sum_{\|\bar{k}\|>0} X_{\bar{k}}(x)\, e^{i(\bar{k}, y)},$$

$$\bar{Y}(x, y) = \sum_{\|\bar{k}\|>0} Y_{\bar{k}}(x)\, e^{i(\bar{k}, y)},$$

$$\bar{k} = (0, \ldots, 0;\quad k_{n_1+1}, \ldots, k_n).$$

Математическое обоснование метода усреднения с операторами (1.96) сводится, как и раньше, к оценке нормы

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\|, \quad (x(0) = \bar{x}(0)) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mu},$$

где $\bar{x}(t)$ вместе с $\bar{y}(t)$ составляют решение усредненной системы (1.95).

Вспомогательные леммы и основная теорема В. И. Арнольда, относящиеся к двухчастотным системам, оказались весьма эффективными и для случая частичного усреднения, но прежде чем привести соответствующую теорему, докажем одну лемму, которая является аналогом леммы 5 из § 1.7. Остальные результаты из § 1.7 и лемма 1′ из § 1.8 могут быть использованы здесь без всяких изменений.

Лемма 5″. *Если выполняется условие* (1.88), *то в области* $\{x \in G_{KN},\ \|\operatorname{Im} y\| < 0{,}5\rho\}$ *существуют m-мерная функция* $z = x + Z_N(x, y)$ и *n-мерная функция* $u = y + U_N(x, y)$, *где* $Z_N(x, y)$ *и* $U_N(x, y)$ — 2π*-периодичны относительно* $y = (y_1, \ldots, y_n)$, *такие, что*

$$\left\|\frac{dz}{dt} - \mu\overline{X}(z, u)\right\| < c_7'\mu^2K^{-2}, \quad \|z - x\| < c_8'\mu K^{-1}, \tag{1.97}$$

$$\left\|\frac{du}{dt} - \omega(z) - \mu\overline{Y}(z, u)\right\| < c_7''\mu K^{-1}, \quad \|u - y\| < c_8''\mu K^{-1}, \tag{1.98}$$

для $N = c_9' \ln\left(\dfrac{1}{\mu}\right)$, $|\mu| < c_{10}'K^2$.

Доказательство. Дифференцируя замену $(x, y) \to (z, u)$, получим дифференциальные тождества:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial Z_N}{\partial x}, \frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial Z_N}{\partial y}, \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial U_N}{\partial x}, \frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial U_N}{\partial y}, \frac{dy}{dt}\right),$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \mu\overline{X}(z, u) + \mu\widetilde{X}_N(x, y) + \left(\frac{\partial Z_N}{\partial y}, \omega\right) + \mu\overline{X}(x, y) - \\ - \mu\overline{X}(z, u) + \mu\widetilde{X}(x, y) - \mu\widetilde{X}_N(x, y) + \\ + \mu\left(\frac{\partial Z_N}{\partial x}, X\right) + \mu\left(\frac{\partial Z_N}{\partial y}, Y\right), \tag{1.99}$$

$$\frac{du}{dt} = \omega(z) + \mu\overline{Y}(z, u) + \mu\widetilde{Y}_N(x, y) + \left(\frac{\partial U_N}{\partial y}, \omega\right) + \\ + \mu\overline{Y}(x, y) - \mu\overline{Y}(z, u) + \mu\widetilde{Y}(x, y) - \mu\widetilde{Y}_N(x, y) + \\ + \mu\left(\frac{\partial U_N}{\partial x}, X\right) + \mu\left(\frac{\partial U_N}{\partial y}, Y\right) + \omega(x) - \omega(z). \tag{1.100}$$

В формулах (1.99) и (1.100) использованы следующие обозначения:

$$\widetilde{X}_N(x, y) = \sum_{0<\|k\|\le N} X_k(x) e^{i(k, y)} - \sum_{0<\|\bar{k}\|\le N} X_{\bar{k}}(x) e^{i(\bar{k}, y)} = $$
$$= \sum_{0<\|k^*\|\le N} X_{k^*}(x) e^{i(k^*, y)}, \quad k^* = (k_1, k_2, \ldots, k_{n_1};\ 0, \ldots, 0) \tag{1.101}$$

$$\widetilde{X}(x, y) = \sum_{\|k\|\ge 0} X_k(x) e^{i(k, y)} - \overline{X}(x, y), \tag{1.102}$$

$$\widetilde{Y}_N(x, y) = \sum_{0<\|k^*\|\le N} Y_{k^*}(x) e^{i(k^*, y)}, \tag{1.103}$$

$$\widetilde{Y}(x, y) = \sum_{\|k\|\ge 0} Y_k(x) e^{i(k, y)} - \overline{Y}(x, y). \tag{1.104}$$

Как и в § 1.7, введем обозначения:

$$\left\{ \begin{aligned} &\textstyle\sum_1 = \mu \widetilde{X}_N(x, y) + \left(\frac{\partial Z_N}{\partial y}, \omega\right), \\ &\textstyle\sum_2 = \mu \overline{X}(x, y) - \mu \overline{X}(z, u), \\ &\textstyle\sum_3 = \mu \widetilde{X}(x, y) - \mu \widetilde{X}_N(x, y) = \mu \sum_{\|k\|>N} X_k(x) e^{i(k, y)}, \end{aligned} \right. \tag{1.105}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\textstyle\sum_4 = \mu \left(\frac{\partial Z_N}{\partial x}, X\right), \\ &\textstyle\sum_5 = \mu \left(\frac{\partial Z_N}{\partial y}, Y\right), \\ &\textstyle\sum_6 = \mu \widetilde{Y}_N(x, y) + \left(\frac{\partial U_N}{\partial y}, \omega\right), \\ &\textstyle\sum_7 = \mu \overline{Y}(x, y) - \mu \overline{Y}(z, u), \\ &\textstyle\sum_8 = \mu \widetilde{Y}(x, y) - \mu \widetilde{Y}_N(x, y), \\ &\textstyle\sum_9 = \mu \left(\frac{\partial U_N}{\partial x}, X\right), \\ &\textstyle\sum_{10} = \mu \left(\frac{\partial U_N}{\partial y}, Y\right), \\ &\textstyle\sum_{11} = \omega(x) - \omega(z). \end{aligned} \right. \tag{1.106}$$

С помощью этих обозначений тождества (1.99) и (1.100) приводятся к виду

$$\frac{dz}{dt}=\mu\overline{X}(z, u)+\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3+\sum\nolimits_4+\sum\nolimits_5, \tag{1.107}$$

$$\frac{du}{dt}=\omega(z)+\mu\overline{Y}(z, u)+\sum\nolimits_6+\sum\nolimits_7+\sum\nolimits_8+\sum\nolimits_9+\sum\nolimits_{10}+\sum\nolimits_{11}. \tag{1.108}$$

Будем определять функции преобразования $Z_N(x, y)$ и $U_N(x, y)$ из условий

$$\sum\nolimits_1\equiv 0, \quad \sum\nolimits_6\equiv 0. \tag{1.109}$$

Предполагая, что $Z_N(x, y)$ и $U_N(x, y)$ являются тригонометрическими относительно y многочленами, из (1.109) находим:

$$Z_N(x, y)=\sum_{0<\|k^*\|\leqslant N} Z_{k^*}^{(N)}(x)\,e^{i(k^*, y)}, \quad Z_{k^*}^{(N)}(x)=\frac{i\mu X_{k^*}(x)}{(k^*, \omega)}, \tag{1.110}$$

$$U_N(x, y)=\sum_{0<\|k^*\|\leqslant N} U_{k^*}^{(N)}(x)\,e^{i(k^*, y)}, \quad U_{k^*}^{(N)}(x)=\frac{i\mu Y_{k^*}(x)}{(k^*, \omega)}, \tag{1.111}$$

$$k^*=(k_1, k_2, \ldots, k_{n_1};\ 0, \ldots, 0), \quad n_1<n.$$

Следуя лемме 5 из § 1.7, будем иметь в области $\{x\in G_{K,N},\ \|\operatorname{Im} y\|<\rho\}$.

$$\|Z_N(x, y)\|\leqslant\frac{\mu}{c_1K}\left\|\sum_{0<\|k^*\|\leqslant N} X_{k^*}(x)\,e^{i(k^*, y)}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\mu}{c_1K}\left\|\sum_{\|k\|\geqslant 0} X_k(x)\,e^{i(k, y)}\right\|<\mu c_1^{-1}K^{-1}C=c_{11}\mu K^{-1},$$

и, аналогично,

$$\|U_N(x, y)\|<c_{11}\mu K^{-1}.$$

Постоянная C ограничивает нормы $\|X(x, y)\|$ и $\|Y(x, y)\|$ в первоначальной области $\{x\in G,\ \|\operatorname{Im} y\|<\varrho\}$. Нормы $\left\|\frac{\partial Z_N}{\partial x}\right\|$, $\left\|\frac{\partial Z_N}{\partial y}\right\|$, $\left\|\frac{\partial U_N}{\partial x}\right\|$, $\left\|\frac{\partial U_N}{\partial y}\right\|$ в области $\{x\in G_{0,1K,N},\ \|\operatorname{Im} y\|<0{,}9\varrho\}$ оцениваются так же как и в лемме 5 [см. (1.74)].

Если $x\in G_{KN}$, $\|\operatorname{Im} y\|<\varrho$, $|\mu|<c_{10}^{-1}K^2$, то *отрезки* $z-x$ и $u-y$ принадлежат области $G_{0,1K,N}$ и

$\|\mathrm{Im}\, y\| < 0{,}9\,\rho$ соответственно. Поэтому, учитывая оценки типа (1.74), будем иметь

$$\|z - x\| < c_8'\mu K^{-1}, \quad \|u - y\| < c_8'\mu K^{-1}. \tag{1.112}$$

Далее, аналогично соотношениям (1.75)—(1.77) оцениваются нормы $\|\sum_2\|$, $\|\sum_4\|$, $\|\sum_5\|$, $\|\sum_7\|$, $\|\sum_9\|$, $\|\sum_{10}\|$.

Можно также добиться, чтобы нормы $\|\sum_3\|$ и $\|\sum_8\|$ имели порядок μ^2 благодаря тому, что функции $\tilde{X}(x, y)$, $\tilde{Y}(x, y)$ аналитичны в области $\{x \in G, \|\mathrm{Im}\, y\| < \rho < 1\}$. Это достигается за счет выбора достаточно большого N ($N \sim \ln(1/\mu)$, см. (1.65)). Далее, в $\{x \in G_{KN}, \|\mathrm{Im}\, y\| < 0{,}5\rho\}$

$$\left\|\sum\nolimits_{11}\right\| < \left\|\overline{\frac{\partial \omega}{\partial x}}\right\| \|z - x\| < c_8'\mu K^{-1} C' = c_8''\mu K^{-1}, \tag{1.113}$$

где

$$\left\|\frac{\partial \omega}{\partial x}\right\|_{x \in G} < C',$$

$\left\|\overline{\frac{\partial \omega}{\partial x}}\right\|$ — значение $\left\|\frac{\partial \omega}{\partial x}\right\|$ в точке $\alpha \in (z, x)$, или $\alpha \in (x, z)$.

Таким образом, пользуясь оценками (1.75) — (1.78) и (1.113), из (1.107) и (1.108) получим

$$\left\|\frac{dz}{dt} - \mu\overline{X}(z, u)\right\| < c_7'\mu^2 K^{-2}, \quad c_7' = c_{12}'K + c_{13}' + c_{14}'K + c_{15}'K^2,$$

$$\left\|\frac{du}{dt} - \omega(z) - \mu\overline{Y}(z, u)\right\| < c_7''\mu K^{-1}, \quad c_7'' = c_{12}'\mu + c_{13}'\mu + c_{14}'\mu + c_8'.$$

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть:*

1) *функции* $X(x, y)$ *и* $Y(x, y)$ *аналитичны по* x, y *и* 2π-*периодичны по* y *в области* $\{x \in G, \|\mathrm{Im}\, y\| < \rho < 1\}$;

2) *вектор частот* $\omega(x)$ *аналитичен в* G;

3) *нормы* $\|X(x, y)\|$, $\|Y(x, y)\|$, $\|\omega(x)\|$ *ограничены в заданных областях;*

4) *имеют место условия* (1.88) *или* (1.89).

Тогда существует такое $\mu_0 \ll 1$, *что при всех* $0 \leqslant \mu < \mu_0$ *и* $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mu}$ *справедлива оценка*

$$\|x(t) - \overline{x}(t)\| < c_{16}'\sqrt{\mu}\,\ln^n\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad x(0) = \overline{x}(0),$$

где $(\overline{x}(t), \overline{y}(t))$ — *решение усредненной системы* (1.95).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству В. И. Арнольда из § 1.7. Отличие состоит лишь в том, что вместо леммы 5 из § 1.7 следует воспользоваться леммой 5''.

Замечание 1. Теоремы из §§ 1.7—1.9 можно было выразить и на ε-языке. В этом случае заключение в этих теоремах выглядело бы следующим образом: тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\mu_0(\varepsilon)\ll 1$ такое, что при любых

$$0\leqslant\mu<\bar{\mu}_0=\inf\left\{\mu_0,\ \sqrt{\mu_0}\ln^n\left(\frac{1}{\mu_0}\right),\ \varepsilon\right\}$$

и для всех $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{\mu}$ справедлива оценка

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|<\varepsilon,\quad x(0)=\bar{x}(0).$$

Замечание 2. Вместо операторов усреднения (1.96) можно было бы рассмотреть также общую схему усреднения в небесной механике (см. § 2.2), содержащую в себе как частный случай и усреднение Делоне — Хилла. В этом случае $\bar{X}(x, y)$ и $\bar{Y}(x, y)$ представлялись бы n-кратными тригонометрическими суммами, но индекс суммирования k принимал бы такие значения, для которых $(k, \omega(x_0))=0$ [в обозначениях § 1.12, $\|k\|\in I'$].

§ 1.10. Сравнение операторов усреднения по времени и по быстрым переменным

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений третьего порядка с одной медленной и двумя быстрыми переменными:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\mu\cos(my_1-ny_2), \\ \dfrac{dy_1}{dt}=\omega_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dt}=\omega_2(x), \end{cases} \tag{1.114}$$

где m, n — некоторые положительные числа. Найдем общее решение системы (1.114), в котором произвольными постоянными являются начальные условия $t=0$, $x=x_0$, $y_1=y_{10}$, $y_2=y_{20}$.

Ради удобства введем новые переменные (возмущения):

$$\begin{cases} p = x - x_0, \\ q_1 = y_1 - \omega_1(x_0)t - y_{10} = y_1 - \omega_{10}\ t - y_{10}, \\ q_2 = y_2 - \omega_2(x_0)t - y_{20} = y_2 - \omega_{20}\ t - y_{20}. \end{cases} \tag{1.115}$$

В новых переменных система (1.114) имеет такой вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \mu \cos[(mq_1 - nq_2) + (m\omega_{10} - n\omega_{20})t + \\ \qquad + (my_{10} - ny_{20})], \\ \dfrac{dq_1}{dt} = \omega_1(p + x_0) - \omega_{10}, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \omega_2(p + x_0) - \omega_{20}, \end{cases} \tag{1.116}$$

причем при $t=0$, $p=q_1=q_2=0$.

Интегрирование системы (1.116) сводится к квадратуре

$$\int_0^p \frac{dz}{\sqrt{\mu^2 - \left\{\int\limits_0^z [m\omega_1(z + x_0) - n\omega_2(z + x_0)]\, dz\right\}^2}} = t, \tag{1.117}$$

и к последующему определению q_1 и q_2 как функций времени из последних уравнений системы (1.116).

Чтобы получить явную зависимость $p(t)$, необходимо обратить интеграл (1.117), но для этого следует задать конкретную аналитическую структуру частот $\omega_1(p+x_0)$ и $\omega_2(p+x_0)$.

Рассмотрим некоторые случаи.

Случай a). Пусть выполняется тождество

$$m\omega_1(p+x_0) - n\omega_2(p+x_0) \equiv 0 \tag{1.118}$$

относительно $x = p + x_0$. Мы имеем в данном случае условие тождественной соизмеримости частот. Это выполняется, например, если

$$\omega_1(p+x_0) = n(p+x_0)^\alpha; \quad \omega_2(p+x_0) = m(p+x_0)^\alpha,$$

где α — любое вещественное число.

Тогда

$$p=\mu t, \quad x=\mu t+x_0. \tag{1.119}$$

Существенно заметить, что при тождественном резонансе, по истечении промежутка времени, равного $1/\mu$, медленные переменные достигают величины

$$p=1, \quad x=1+x_0. \tag{1.120}$$

Явную функциональную зависимость y_1 и y_2 от t мы не будем приводить, так как нас интересует прежде всего поведение медленных переменных на достаточно больших промежутках времени.

Случай б). Пусть $m\omega_1(p+x_0)-n\omega_2(p+x_0)=p$. Это условие означает, что вдоль точного решения «малый знаменатель» $m\omega_1(p+x_0)-n\omega_2(p+x_0)$, равный нулю при $t=0$, остается малым, порядка возмущения медленной переменной p.

Обращение квадратуры (1.117) дает

$$p=\sqrt{\mu}\,\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad u=\sqrt{\mu}\,t, \tag{1.121}$$

где $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{dn} u$ — эллиптические функции Якоби с модулем $k=2^{-1/2}$.

Из формулы (1.121) вытекает, что медленная переменная p является *долгопериодической функцией времени* t с вещественным периодом $T=\dfrac{4K}{\sqrt{\mu}}$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k=2^{-1/2}$. Кроме того, имеем, что наибольшее значение модуля возмущения p имеет порядок $\mu^{1/2}$ и первый раз достигается по истечении времени $K/\sqrt{\mu}$. Точнее, получаем

$$|p_{\max}|=2\sqrt{\mu} \quad \text{при} \quad t=\frac{K}{\sqrt{\mu}}. \tag{1.122}$$

Таким образом, здесь, в отличие от случая а), возмущение p ни при каких вещественных значениях времени не достигает значения $p=1$.

При сравнении этих двух случаев напрашивается вывод о том, что если частоты ω_1 и ω_2 удовлетворяют условию резонанса в начальный момент, то амплитуда возмущения будет тем больше, чем дольше частоты «почти удовлетворяют» условию резонанса. Чтобы выполнить количественную оценку, рассмотрим еще один случай.

Случай в). Пусть теперь $m\omega_1(p+x_0)-n\omega_2(p+x_0)=\mu^\alpha p$, $\alpha>0$. Приведенное условие выражает «застревание» вблизи резонанса, причем «застревание» тем «сильнее», чем меньше положительный параметр μ и чем больше α.

Пользуясь интегралом (1.117), находим

$$p=\mu^{\frac{1-\alpha}{2}}\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \tag{1.123}$$

где

$$u=\mu^{\frac{\alpha+1}{2}}t, \quad k=2^{-1/2}.$$

Анализируя равенство (1.123), выводим, что и в этом случае возмущение p имеет долгопериодический характер, причем

$$|p_{\max}|=2\mu^{\frac{1-\alpha}{2}} \quad \text{при} \quad t=\mu^{-\frac{1+\alpha}{2}}K. \tag{1.124}$$

Пользуясь степенными разложениями эллиптических функций [27], находим

$$p=\mu t\left[1+\frac{2k^2-1}{3!}\mu^{\alpha+1}t^2+\frac{16k^4-16k^2+1}{5!}\mu^{2(\alpha+1)}t^4+\ldots\right]. \tag{1.125}$$

Это разложение пригодно и для случая б), когда $\alpha=0$.

Сравним полученные точные решения системы (1.116) с различными вариантами решений усредненных систем.

Усреднение по переменным q_1 и q_2 дает

$$\frac{d\bar{p}}{dt}=0$$

и

$$\bar{p}=0, \text{ или } \bar{x}=x_0. \tag{1.126}$$

Сравнивая точные решения (1.119), (1.121) и (1.123) с усредненным (1.126), делаем вывод, что разность $|p(t)-\bar{p}(t)|$ может стать величиной порядка единицы в промежутке времени $0 \leqslant t < O\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Отсюда следует, что схема усреднения по быстрым переменным q_1 и q_2 в этом случае непригодна.

С другой стороны, уравнения (1.116) при строгой соизмеримости начальных частот $(m\omega_1(x_0)-n\omega_2(x_0)=0)$ инвариантны относительно усреднения по времени, поэтому усредненное значение медленной переменной p (или x), функция $\bar{p}$ (или $\bar{x}$) в точности совпадает с точным решением p (или x). Следовательно, $|p(t)-\bar{p}(t)| \equiv \equiv 0$ при любых вещественных значениях t, если только

$$m\omega_1(x_0)-n\omega_2(x_0)=0.$$

Как показывает рассмотренный пример, усреднение по быстрым переменным (q_1, q_2) не всегда дает удовлетворительный результат для системы с «застреванием» вблизи резонанса. В этом случае более целесообразным является усреднение по времени с учетом соизмеримости начальных частот.

Таким образом, замена систем обыкновенных дифференциальных уравнений со многими частотами системами, усредненными по быстрым переменным, более целесообразна в тех случаях, когда нет «застревания» частот на резонансах, а для последнего случая следует рассматривать усредненные уравнения по времени с учетом соизмеримости частот. В связи с этим возникает необходимость в разработке критериев, оценивающих разность точных и усредненных медленных переменных для случая усреднения по времени с учетом соизмеримости начальных частот. Некоторые из них будут изложены дальше.

§ 1.11. Схема усреднения по времени с учетом соизмеримости начальных частот

Пусть имеется 2π-периодическая функция $f(y)$, зависящая от n переменных $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Если она удовлетворяет условиям теоремы Фурье, то в n-мерном пространстве переменных $\{y\}$ ее можно представить

n-кратным рядом Фурье вида

$$f(y)=\sum_{\|k\|>0} f_k e^{i(k,y)},$$

$$(k,\ y)=\sum_{s=1}^{n} k_s y_s,\qquad \|k\|=\sum_{s=1}^{n}|k_s|, \tag{1.127}$$

где f_k — коэффициенты Фурье функции $f(y)$.

Вычислим среднее значение функции $f(y)$ по переменным $y=\{y_1,\ y_2,\dots,\ y_n\}$. Оно выражается формулой

$$M_y[f]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{(0)}^{(2\pi)} f(y)\,dy=f_0. \tag{1.128}$$

Пусть теперь вектор

$$y=\omega(t-t_0)+y_0, \tag{1.129}$$

где

$$\omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \dots,\ \omega_n\}, \tag{1.130}$$

и вычислим $M_t[f]$ по формуле

$$M_t[f]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} f(\omega(t-t_0)+y_0)\,dt. \tag{1.131}$$

Значение $M_t[f]$ существенно зависит от того факта, соизмеримы или несоизмеримы компоненты $\omega_1,\ \omega_2,\dots$ $\dots,\ \omega_n$ вектора ω.

Если частоты $\omega_1,\ \omega_2,\dots,\ \omega_n$ несоизмеримы, то $(k,\ \omega)\neq 0$ при любом целочисленном векторе k с отличной от нуля нормой ($\|k\|\neq 0$), и

$$M_t[f]=M_y[f]=f_0. \tag{1.132}$$

Если же частоты соизмеримы ($(k,\ \omega)=0$ при некоторых k с неравной нулю нормой $\|k\|\neq 0$), то

$$M_t[f]=\sum_{\|k\|\geqslant 0}{}' f_k e^{i(k,y_0)}\neq M_y[f]. \tag{1.133}$$

В (1.133) штрих при знаке суммирования означает, что норма векторного индекса суммирования $\|k\|$ принимает не все положительные целые значения, а лишь те, для которых $(k,\ \omega)=0$.

Из соотношения (1.133) вытекает, что среднее значение функции f по времени $M_t[f]$ и по переменным y $M_y[f]$ не совпадают на гиперплоскостях $(k, \omega)=0$ в n-мерном пространстве частот $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Если считать полную меру n-мерного единичного куба $\|\omega\|=\sum_{s=1}^{n}|\omega_s|\leqslant n$ равной единице, то относительная мера точек ω, расположенных на гиперплоскостях $(k, \omega)=0$, при любых целочисленных векторах k с нормой $\|k\|>0$ равна нулю. Другими словами, с точки зрения теории меры, множество точек, в которых $(k, \omega)=0$, относительно бедно, но если функции типа $f(y)$ составляют правые части дифференциальных уравнений, это обстоятельство может оказаться чрезвычайно важным.

§ 1.12. Теорема обоснования метода усреднения с учетом соизмеримости частот для уравнений с периодическими многочленами

Существует обширный класс дифференциальных уравнений, содержащих многомерные медленные и быстрые движения, для которых средние значения по времени и по быстрым переменным не совпадают. Мы имеем в виду уравнения вида

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\mu X(x, y),\\ \frac{dy}{dt}&=\omega(x)+\mu Y(x, y), \end{aligned}\right. \tag{1.134}$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а вектор-функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ представляются n-кратными рядами Фурье:

$$\left\{\begin{aligned} X(x, y)&=\sum_{\|k\|\geqslant 0} X_k(x)e^{i(k, y)},\\ Y(x, y)&=\sum_{\|k\|\geqslant 0} Y_k(x)e^{i(k, y)},\\ (k, y)&=\sum_{s=1}^{n}k_s y_s,\quad \|k\|=\sum_{s=1}^{n}|k_s|. \end{aligned}\right. \tag{1.135}$$

Эти уравнения составляли предмет нашего исследования в §§ 1.7—1.9, где были доказаны соответствующие теоремы обоснования принципа усреднения по быстрым переменным y или по части из них. В этих теоремах существенными условиями являлись *условия* A и A'.

Мы еще раз обращаем внимание на левые части неравенств в этих условиях:

$$c_2^{-1}\mu<\left|\frac{d\lambda(x)}{dt}\right|,\quad c_2^{-1}<\left|\left(k,\ \left(\frac{\partial\omega}{\partial x},\ X\right)\right)\right|,\qquad 1\leqslant\|k\|\leqslant N.$$

Именно они обеспечивают «незастревание» в резонансных областях вида $|(\omega(x),k)|<c_1K$, так как согласно леммам 1 и 1′ из §§ 1.7 и 1.8 время нахождения в области $|(\omega(x),k)|<c_1K$ не превышает $c_4\mu^{-1}K$. Из этих условий само собой следует, что $\tilde{c}_2^{-1}<\left|\frac{\partial\omega_s}{\partial x}\right|$.

Представляет самостоятельный интерес рассмотреть тот случай, когда на $\left|\frac{\partial\omega_s}{\partial x}\right|$ наложены условия только *сверху* (*а не снизу*), что, вообще говоря, не исключает «застревания» в резонансных областях, особенно при соизмеримости частот в начальный момент $\omega_s(x_0)$.

Именно этому случаю и посвящены дальнейшие исследования настоящей главы. Мы особенно подробно будем останавливаться на аналитической части доказательств, поскольку они содержат по существу не только качественные стороны принципа усреднения, но и практический метод построения приближенных решений колебательных систем при резонансном соотношении частот. Эти асимптотические методы могут быть использованы (см. главу IV) при построении теории движения астероидов.

Для уравнений (1.134) с функциями (1.135) при усреднении вдоль порождающего решения не выполняется условие равномерного среднего. Это связано с тем, что средние значения функций вида (1.135) по времени вдоль порождающего решения при $n\geqslant2$ не совпадают со средними значениями по y (см. § 1.9), и в конечном итоге связано с появлением малых знаменателей при интегрировании уравнений.

Рассмотрим более подробно этот вопрос.

Обозначим порождающее решение для системы (1.134) через

$$\begin{cases} x^{(0)}=x_0^{(0)}, \\ y^{(0)}=\omega\left(x^{(0)}\right)t+y_0^{(0)}=\omega_0 t+y_0^{(0)}, \end{cases} \tag{1.136}$$

и рассмотрим функцию

$$X\left(x^{(0)},\ y^{(0)}\right)=\sum_{\|k\|>0} X_k\left(x^{(0)}\right)e^{i(k,\ \omega_0)t+i\left(k,\ y_0^{(0)}\right)}. \tag{1.137}$$

Среднее значение функции $X(x^{(0)}, y^{(0)})$ существенно зависит от арифметических свойств вектора ω_0. Если вектор ω_0 имеет несоизмеримые компоненты, то средние значения $M[X]$ по $y^{(0)}$ и по t равны между собой, т. е.

$$M_t[X]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{\|k\|>0} X_k\left(x^{(0)}\right)e^{i(k,\omega_0)t+i\left(k,\ y_0^{(0)}\right)}dt=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{\|k\|>0} X_k\left(x^{(0)}\right)e^{i\left(k,\ y^{(0)}\right)}dy_1^{(0)}\ldots dy_n^{(0)}=$$

$$=X_0(x^{(0)})=M_{y^{(0)}}[X].$$

Если же частоты соизмеримы, то, как было показано в § 1.9, имеем

$$M_t[X]=\sum_{\|k\|\geqslant 0}{}' X_k\left(x^{(0)}\right)e^{i\left(k,\ y^{(0)}\right)},\ (k,\ \omega_0)=0.$$

Из теоремы Дедекинда [28] о «сплошности» множества вещественных чисел вытекает, что в n-мерном пространстве частот $\{\omega\}$ существуют сколь угодно близкие по норме векторы частот $\omega_0'=\omega\left(x_1^{(0)}\right)$ и $\omega_0''=\omega\left(x_2^{(0)}\right)$, для которых

$$\|M_t[X(x_1^{(0)},\ \omega_0't+y_{10}^{(0)})]-M_t[X(x_2^{(0)},\ \omega_0''t+y_{20}^{(0)})]\|>\eta, \tag{1.138}$$

где η — некоторое положительное число. В силу непрерывности функции $\omega\left(x^{(0)}\right)$ из близости векторов частот ω_0' и ω_0'' вытекает близость точек $x_1^{(0)}$ и $x_2^{(0)}$ в области изменения $x^{(0)}$. Сами же векторы частот ω_0' и ω_0''

выбраны нами так, чтобы выполнялись условия $(k, \omega_0') = 0$ и $(k, \omega_0'') \neq 0$.

Таким образом, нельзя для любого $\varepsilon > 0$ указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, чтобы неравенство вида $\| M_t [X(x_1^{(0)})] - M_t [X(x_2^{(0)})] \| < \varepsilon$ выполнялось бы для любой пары точек $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, удаленных друг от друга на расстоянии не более δ, т. е. в этом случае условие «равномерного среднего», не имеет места.

Заметим, что для случая скалярного y $(n=1)$ условие $\| M_t [X(x_1^{(0)})] - M_t [X(x_2^{(0)})] \| < \varepsilon$ выполняется всюду и, следовательно, справедливо условие «равномерного среднего».

В небесной механике большинство задач описывается уравнениями вида (1.134) с функциями вида (1.135), если в качестве искомых функций используются различные системы оскулирующих элементов. В этих задачах частотами являются средние движения небесных тел, а функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ суть частные производные возмущающих функций или их алгебраические комбинации. Поэтому уравнения (1.134) в небесной механике занимают особое место.

Переходим к подробному исследованию систем (1.134).

Ради удобства от уравнений (1.134), которые в дальнейшем будут основным объектом нашего исследования, перейдем к равносильным им уравнениям для возмущений, пользуясь заменой переменных

$$\left\{\begin{aligned} & p = x - x_0, \\ & q = y - \omega(x_0)t - y_0 = y - \omega_0 t - y_0, \\ & \omega_0 = \omega(x_0), \end{aligned}\right. \tag{1.139}$$

где $x = x_0$, $y = \omega_0 t + y_0$ представляет собой решение соответствующей порождающей невозмущенной системы, определенное начальной точкой (x_0, y_0).

В новых переменных система (1.134) имеет вид:

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{dp}{dt} = \mu X(p + x_0,\ q + \omega_0 t + y_0), \\ & \frac{dq}{dt} = \omega(p + x_0) - \omega_0 + \mu Y(p + x_0,\ q + \omega_0 t + y_0). \end{aligned}\right. \tag{1.140}$$

Система (1.140) более удобна для усреднения по t вдоль порождающего решения чем система (1.134), так как она содержит время в явном виде.

Пусть вектор начальных частот ω_0 имеет соизмеримые компоненты, т. е. существуют такие целочисленные векторы $k(c\|k\|\neq 0)$, для которых $(k, \omega_0)=0$. Вычислим средние значения $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ по времени. Будем иметь

$$\overline{X}(x, y)=M_t[X(x, y)]=M_t[X(p+x_0, q+\omega_0 t+y_0)]= \\ =\sum_{\|k\|>0}{}' X_k(p+x_0)\, e^{i(k, q+y_0)}=\sum_{\|k\|>0}{}' X_k(x)\, e^{i(k, y)}, \tag{1.141}$$

$$\overline{Y}(x, y)=\sum_{\|k\|>0}{}' Y_k(x)\, e^{i(k, y)}. \tag{1.142}$$

В последних суммах в (1.141) и (1.142) штрих, как и ранее, означает, что норма вектора суммирования $\|k\|$ принимает лишь те значения, для которых $(k, \omega_0)=0$.

Соответствующая система усредненных уравнений первого приближения для (1.134) имеет вид

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\overline{x}}{dt}=\mu\overline{X}(\overline{x}, \overline{y}), \\ &\frac{d\overline{y}}{dt}=\omega(\overline{x})+\mu\overline{Y}(\overline{x}, \overline{y}). \end{aligned}\right. \tag{1.143}$$

Аналогично, система усредненных уравнений первого приближения для системы (1.140) запишется следующим образом:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\overline{p}}{dt}=\mu\overline{X}(\overline{p}+x_0, \overline{q}+y_0), \\ &\frac{d\overline{q}}{dt}=\omega(\overline{p}+x_0)-\omega_0+\mu\overline{Y}(\overline{p}+x_0, \overline{q}+y_0). \end{aligned}\right. \tag{1.144}$$

Теорема [12, 13]. *Пусть:* 1) *m-мерная вектор-функция $X(x, y)$ и n-мерная вектор-функция $Y(x, y)$ представляются тригонометрическими многочленами*

$$X(x, y)=\sum_{0<\|k\|<N} X_k(x)\, e^{i(k, y)}, \\ Y(x, y)=\sum_{0<\|k\|<N} Y_k(x)\, e^{i(k, y)}, \tag{1.145}$$

определенными в открытой $(m+n)$*-мерной области* $G_{m+n}=P_m\times Q_m$ евклидова пространства с дважды *дифференцируемыми коэффициентами* $X_k(x)$, $Y_k(x)$ *в любой точке* $x\in P_m$;

2) *вектор-функция частот* $\omega(x)$ *дважды дифференцируема в открытой* m*-мерной области* P_m *и в начальный момент* $t=0$ *имеет либо рациональные компоненты* $(\omega_1(x_0),\ \omega_2(x_0),\ldots,\ \omega_n(x_0))$, *либо* $\omega_s(x_0)=\lambda r_s(x_0)$, *где* λ*-произвольное, отличное от нуля, вещественное число,* $r_s(x_0)$ — *рациональные числа* $(s=1,\ 2,\ldots,\ n)$;

$$3)\ \|X(x,\ y)\|_{(x,\ y)\in G_{m+\bar n}}<C,\ \|Y(x,\ y)\|_{(x,\ y)\in G_{m+\bar n}}<C,$$

$$\|\omega(x)\|_{x\in P_m}<C;$$

$$4)\ (\bar x(t),\ \bar y(t))\in G_{m+\bar n},\ t\in[0,\ \infty); \tag{1.146}$$

$$5)\ 0<\alpha_{2N}=\inf_{\|k\|\in I''_{2N}}|(k,\ \omega_0)|,$$

где I''_{2N} — *множество целых положительных чисел, не превышающих* $2N$, *за исключением тех, для которых* $(k,\ \omega_0)=0$;

6) *в области* G_{m+n} *справедливы оценки:*

$$\left|\frac{\partial\omega_s}{\partial x_r}\right|<C_1\alpha_{2N},\quad \left|\frac{\partial^2\omega_s}{\partial x_r\,\partial x_l}\right|<C_2,\quad \left|\frac{\partial X_k^{(r)}}{\partial x_l}\right|<C_2,$$

$$\left|\frac{\partial^2 X_k^{(r)}}{\partial x_l\partial x_{l_1}}\right|<C_2,\quad \left|\frac{\partial Y_k^{(s)}}{\partial x_l}\right|<C_2,\quad \left|\frac{\partial^2 Y_k^{(s)}}{\partial x_l\partial x_{l_1}}\right|<C_2,$$

$$(r,\ l,\ l_1=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\ 0\leqslant\|k\|\leqslant N,$$

здесь C_1 *и* C_2 — *некоторые положительные постоянные.*

Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ *существует* $\mu_0(\varepsilon)>0$ *такое, что при* $0\leqslant\mu<\mu_0(\varepsilon)$ *на отрезке* $0\leqslant t\leqslant 1/\mu$ *справедливы неравенства:*

$$\|p(t)-\bar p(t)\|<\varepsilon,\ \|q(t)-\bar q(t)\|<\varepsilon,$$

или

$$\|x(t)-\bar x(t)\|<\varepsilon,\ \|y(t)-\bar y(t)\|<\varepsilon,$$

где $x(t)=p(t)+x_0,\ \bar x(t)=\bar p(t)+x_0,\quad y(t)=q(t)+\omega_0 t+y_0,$

$\bar{y}(t)=\bar{q}(t)+\omega_0 t+y_0$; $p(t)$, $q(t)$ — *решение системы* (1.140), $\bar{p}(t)$, $\bar{q}(t)$ — *решение системы* (1.144).

Доказательство. Будем искать такую замену переменных

$$\begin{cases} p=\bar{p}+\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s u_s(\bar{p},\ \bar{q},\ t), \\ q=\bar{q}+\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s v_s(\bar{p},\ \bar{q},\ t), \end{cases} \tag{1.147}$$

которая преобразовывает систему (1.140) в систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{p}}{dt}=\mu X(\bar{p}+x_0,\ \bar{q}+y_0)+\sum_{s=2}^{\infty}\mu^s A_s(\bar{p},\ \bar{q}), \\ \dfrac{d\bar{q}}{dt}=\omega(\bar{p}+x_0)-\omega(x_0)+\mu Y(\bar{p}+x_0,\ \bar{q}+y_0)+ \\ \qquad +\sum_{s=2}^{\infty}\mu^s B_s(\bar{p},\ \bar{q}). \end{cases} \tag{1.148}$$

В уравнениях (1.148) функции $A_s(\bar{p},\ \bar{q})$ и $B_s(\bar{p},\ \bar{q})$ пока не определены. Если бы удалось доказать сходимость рядов, составляющих замену (1.147) и уравнения (1.148), то это означало бы эквивалентность уравнений (1.140) и (1.148), однако это сделать не удается. Более того, следует думать, что эти ряды являются асимптотическими и расходятся для $t \in [0,\ \infty)$ при любом положительном значении параметра μ, поэтому нами ставится более частный вопрос, а именно, вопрос о получении оценок вида $\|p(t)-\bar{p}(t)\|<\varepsilon$.

Если подставить формулы (1.147) в уравнения (1.140) и потребовать, чтобы в конечном счете получились уравнения (1.148), то получится бесконечная система уравнений в частных производных первого порядка для последовательного определения функций u_1, v_1, u_2, $v_2, \ldots, u_s, v_s, \ldots$

Будем иметь:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial \bar{q}}(\omega(\bar{p}+x_0)-\omega_0)=$$

$$=\sum_{0\leqslant\|k\|\leqslant N} X_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}-$$

$$-\sum_{0\leqslant\|k\|\leqslant N}{}' X_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+y_0)}, \tag{1.149}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\partial v_1}{\partial \bar{q}}(\omega(\bar{p}+x_0)-\omega_0)=\frac{\partial\omega(\bar{p}+x_0)}{\partial\bar{p}}\,u_1+$$

$$+\sum_{0\leqslant\|k\|<N} Y_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}-$$

$$-\sum_{0\leqslant\|k\|\leqslant N}{}' Y_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+y_0)}, \tag{1.150}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial \bar{q}}(\omega(\bar{p}+x_0)-\omega_0)=$$

$$=-\left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{p}}\right)\sum_{0\leqslant\|k\|\leqslant N}{}' X_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+y_0)}-$$

$$-\left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{q}}\right)\sum_{0\leqslant\|k\|<N}{}' Y_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+y_0)}+$$

$$+\sum_{0<\|k\|\leqslant N}\frac{\partial X_k(\bar{p}+x_0)}{\partial\bar{p}}\,e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}u_1+$$

$$+\sum_{0<\|k\|\leqslant N} X_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}i(k,\,e)\,v_1-A_2(\bar{p},\,\bar{q}), \tag{1.151}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{\partial v_2}{\partial \bar{q}}(\omega(\bar{p}+x_0)-\omega_0)=$$

$$=-\left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{p}}\right)\sum_{0<\|k\|\leqslant N}{}' X_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+y_0)}-$$

$$-\left(\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}\right)\sum_{0<\|k\|\leqslant N}{}' Y_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+y_0)}+$$

$$+\sum_{0<\|k\|\leqslant N}\frac{\partial Y_k(\bar{p}+x_0)}{\partial\bar{p}}\,e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}\,u_1+$$

$$+\sum_{0<\|k\|<N} Y_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}i(k,\,e)\,v_1+$$

$$+\left(\frac{\partial\omega(\bar{p}+x_0)}{\partial\bar{p}}\right)u_2+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\omega(\bar{p}+x_0)}{\partial\bar{p}^2}\right)u_1^2-B_2(\bar{p},\ \bar{q}), \quad (1.152)$$

$$e=(\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{n})$$

. . . .

$$\frac{\partial u_s}{\partial t}+\frac{\partial u_s}{\partial\bar{q}}(\omega(\bar{p}+x_0)-\omega_0)=$$

$$=U_s(u_1,\ v_1;\ \ldots;\ u_{s-1},\ v_{s-1};\ A_2,\ B_2,\ \ldots,\ A_s),$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{\partial v_s}{\partial\bar{q}}(\omega(\bar{p}+x_0)-\omega_0)=$$

$$=V_s(u_1,\ v_1;\ \ldots;\ u_{s-1},\ v_{s-1};\ u_s;\ A_2,\ B_2,\ \ldots,\ A_s,\ B_s)$$

. . . .

Приведенные уравнения являются векторными, а использованные в них обозначения имеют следующий смысл:

$$u_s=(u_s^{(1)},\ u_s^{(2)},\ \ldots,\ u_s^{(m)}),\quad v_s=(v_s^{(1)},\ v_s^{(2)},\ \ldots,\ v_s^{(n)}),$$

$$X_k=(X_k^{(1)},\ X_k^{(2)},\ \ldots,\ X_k^{(m)}),\quad Y_k=(Y_k^{(1)},\ Y_k^{(2)},\ \ldots,\ Y_k^{(n)}),$$

$$A_s=(A_s^{(1)},\ A_s^{(2)},\ \ldots,\ A_s^{(m)}),\quad B_s=(B_s^{(1)},\ B_s^{(2)},\ \ldots,\ B_s^{(n)}),$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial\bar{p}}\right)\sum_{0<\|k\|<N}{}' X_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+y_0)}=$$

$$=\sum_{r=1}^{m}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial\bar{p}_r}\sum_{0<\|k\|<N}{}' X_k^{(r)}(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+y_0)}\right\},$$

$$\sum_{0<\|k\|<N}\left(\frac{\partial X_k(\bar{p}+x_0)}{\partial\bar{p}}\right)e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}\ u_1=$$

$$=\sum_{r=1}^{m}u_1^{(r)}\sum_{0<\|k\|<N}\left(\frac{\partial X_k(\bar{p}+x_0)}{\partial\bar{p}_r}\right)e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}\Bigg\},$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\bar{p}^2}\right)=\frac{1}{2!}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\bar{p}_r\partial\bar{p}_s}\right),$$

$$(k,\ e)=\sum_{s=1}^{n}k_s.$$

Решая уравнение (1.149), находим, что

$$u_1(\bar{p},\ \bar{q},\ t)=\sum_{1<\|k\|<N}{}'' \frac{X_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{i(k,\ \omega(\bar{p}+x_0))}+\varphi_1(p). \quad (1.153)$$

В (1.153) $\sum''$ означает, что суммирование производится лишь по значениям k, для которых $(k, \omega_0) \neq 0$ (или $\|k\| \in I''_N$), $\varphi_1(\bar{p})$ — произвольная вектор-функция, зависящая только от $\bar{p}$.

Замена переменных (1.147) должна определяться однозначно, поэтому положим $\varphi_1(\bar{p}) \equiv 0$. Подставляя соотношение (1.153) с $\varphi_1(\bar{p}) \equiv 0$ в уравнение (1.150), находим

$$v_1(\bar{p}, \bar{q}, t) = \frac{\partial\omega(\bar{p}+x_0)}{\partial\bar{p}} \sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{\bar{X}_k e^{i(k, \bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{i^2(k, \bar{\omega})^2} + \sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{\bar{Y}_k e^{i(k, \bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{i(k, \bar{\omega})} + \psi_1(\bar{p}), \quad (1.154)$$

$$\bar{X}_k = X_k(\bar{p}+x_0), \quad \bar{Y}_k = Y_k(\bar{p}+x_0), \quad \bar{\omega} = \omega(\bar{p}+x_0).$$

При $\varphi_1 \equiv \psi_1 \equiv 0$ для функций $u_1(\bar{p}, \bar{q}, t)$, $v_1(\bar{p}, \bar{q}, t)$ имеем чисто тригонометрические выражения.

В усредненных уравнениях первого приближения для медленных переменных

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \mu\bar{X}(\bar{p}+x_0, \bar{q}+y_0)$$

отброшены члены $\mu^2 A_2(\bar{p}, \bar{q})$ и более высокого порядка, поэтому для вывода асимптотических оценок необходимо показать, что при $0 \leqslant t < \frac{1}{\mu}$ функции $A_2, A_3, \ldots, A_s, \ldots$ ограничены по норме

$$\|A_2\| < M_2, \quad \|A_3\| < M_3, \ldots, \quad \|A_s\| < M_s, \ldots$$

для

$$(\bar{p}, \bar{q}) \in G_{m+n}.$$

Мы докажем ограниченность $A_2(\bar{p}, \bar{q})$. С этой целью вычислим частные производные функции $u_1(\bar{p}, \bar{q}, t)$ по $\bar{p}$, $\bar{q}$ и подставим их в уравнение (1.151), которое определяет и $A_2(\bar{p}, \bar{q})$ и $u_2(\bar{p}, \bar{q}, t)$. Будем иметь

$$\frac{\partial u_1}{\partial\bar{p}} = \sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{\left[(k, \bar{\omega})\frac{\partial\bar{X}_k}{\partial\bar{p}} - \left(k, \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{p}}\right)\bar{X}_k\right] e^{i(k, \bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{i(k, \bar{\omega})^2}, \quad (1.155)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{q}}=\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{\bar{X}_k(k,\, e)\, e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{(k,\, \bar{\omega})}, \tag{1.156}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial \bar{q}}(\bar{\omega}-\omega_0)=$$

$$=-\left\{\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{\left[(k,\, \bar{\omega})\frac{\partial \bar{X}_k}{\partial \bar{p}}-\left(k,\, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{p}}\right)\bar{X}_k\right] e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{i\,(k,\, \bar{\omega})^2}\right\}\times$$

$$\times\sum_{0\leqslant\|k\|\leqslant N}' \bar{X}_k e^{i(k,\bar{q}+y_0)}-$$

$$-\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{\bar{X}_k(k,\, e)\, e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{(k,\, \bar{\omega})}\sum_{0\leqslant\|k\|\leqslant N}' \bar{Y}_k' e^{i(k,\bar{q}+y_0)}+$$

$$+\sum_{0\leqslant\|k\|\leqslant N}\left(\frac{\partial \bar{X}_k}{\partial \bar{p}}\right) e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{\bar{X}_k e^{i(k,\bar{q}+y_0)}}{i\,(k,\, \bar{\omega})}+$$

$$+\sum_{0\leqslant\|k\|\leqslant N} \bar{X}_k i\,(k,\, e)\, e^{i(k,\, \bar{q}+\omega_0 t+y_0)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{p}}\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{\bar{X}_k e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{i^2\,(k,\, \bar{\omega})^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{\bar{Y}_k e^{i(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{i\,(k,\, \bar{\omega})}\right\}-A_2(\bar{p},\, \bar{q}). \tag{1.157}$$

В равенстве (1.157), как и выше,

$$\bar{X}_k=X_k(\bar{p}+x_0),\quad \bar{Y}_k=Y_k(\bar{p}+x_0),$$

$$\bar{\omega}=\omega(\bar{p}+x_0),\quad (k,\, e)=\sum_{s=1}^{n} k_s.$$

Определим $A_2(\bar{p},\, \bar{q})$ из условия, чтобы в правой части уравнения (1.157) отсутствовало слагаемое, порождающее вековой член (член, пропорциональный t). Другими словами, функцию $A_2(\bar{p},\, \bar{q})$ мы будем определять из условия равенства нулю среднего значения по времени правой части уравнения (1.157), т. е.

$$M_t\,[\text{правая часть уравнения (1.157)}]=0. \tag{1.158}$$

Обозначим множество норм целочисленных векторов, не превышающих число $2N$, но таких, что $k+r\neq 0$, а $(k+r,\, \omega_0)=0$ через I'_{2N}. В таком случае для функции

$A_2(\bar{p}, \bar{q})$ будем иметь следующее явное выражение:

$$A_2(\bar{p}, \bar{q}) = \sum_{1<\|k\|<N}'' \frac{\bar{X}_k \dfrac{\partial \bar{X}_k}{\partial \bar{p}}}{i\,(k, \bar{\omega})} + \sum_{1<\|k\|<N}'' \sum_{1<|r|<N}'' \frac{X_k \dfrac{\partial \bar{X}_r}{\partial \bar{p}} e^{i(k+r, \bar{q}+y_0)}}{i\,(k, \bar{\omega})} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{p}} \sum_{1<\|k\|<N}'' \frac{\bar{X}_k \bar{X}_{-k}}{i^2 (k, \bar{\omega})} +$$
$$+ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{p}} \sum_{1<\|k\|<N}'' \sum_{1<\|r\|<N}'' \frac{\bar{X}_k \bar{X}_r e^{i(k+r, \bar{q}+y_0)}}{i^2 (k, \bar{\omega})^2} +$$
$$+ \sum_{1<\|k\|<N}'' \frac{\bar{Y}_k \bar{X}_{-k}}{i\,(k, \bar{\omega})} + \sum_{1<\|k\|<N}'' \sum_{1<\|r\|<N}'' \frac{\bar{Y}_k \bar{X}_r e^{i(k+r, \bar{q}+y_0)}}{i\,(k, \bar{\omega})}. \quad (1.159)$$

Во всех слагаемых формулы (1.159) двойной штрих означает, что вектор k удовлетворяет условию $(k, \omega_0) \neq 0$, т. е. $\|k\| \in I''_{2N}$.

Докажем теперь, что при выполнении условий теоремы функция $A_2(\bar{p}, \bar{q})$ ограничена при $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$. В отличие от стандартных систем, в выражении (1.159) знаменатели

$$(k, \bar{\omega}) = (k, \bar{\omega}(\bar{p} + x_0))$$

суть функции времени, не равные нулю при $t = 0$, так как

$$(k, \bar{\omega})\big|_{t=0} = (k, \omega_0) \neq 0, \text{ если } \|k\| \in I''_{2N}.$$

Функция $A_2(\bar{p}, \bar{q})$ может стать неограниченной, если хотя бы один из знаменателей может обратиться в нуль [все остальные функции, входящие в (1.159), ограничены при всех $t \geqslant 0$].

Условие $\left|\dfrac{\partial \omega_s}{\partial x_r}\right|_{x \in P_m} < C_1 \alpha_{2N}$ гарантирует то, что ни один из знаменателей, имеющий $\|k\| \in \|k\| I''_{2N}$, не обращается в нуль при $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$. Более того, все знаменатели оказываются ограниченными по модулю снизу положительным числом. Действительно, прежде всего имеем оценку

$$\|u_1(\bar{p}, \bar{q}, 0)\| < \frac{1}{\alpha_{2N}}\Big\| \sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' X_k(\bar{p}+x_0)\, e^{i(k,\,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}\Big\| < \frac{C}{\alpha_{2N}},$$

с помощью которой в первом приближении получим

$$\|\bar{p}(0)\| \leqslant \|p(0)\| + \mu\|u_1(\bar{p}, \bar{q}, 0)\| < \frac{C_\mu}{\alpha_{2N}}.$$

Далее, используя усредненные уравнения для медленных переменных, устанавливаем, что для любого $0\leqslant t\leqslant 1/\mu$ справедлива оценка для нормы

$$\|\bar{p}(t)\| \leqslant \|\bar{p}(0)\| + \mu\int_0^t \|X(\bar{p}+x_0, \bar{q}+\omega_0 t+y_0)\|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \|\bar{p}(0)\| + \mu\int_0^{1/\mu} \|\bar{X}\|\,dt \leqslant C\left(1+\frac{\mu}{\alpha_{2N}}\right) = M_1. \qquad (1.160)$$

С другой стороны, имеем

$$\bar{\omega} = \omega(\bar{p}+x_0) = \omega_0 + \overline{\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{p}}\right)}\bar{p}, \qquad (1.161)$$

где $\overline{\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{p}}\right)}$ — некоторое значение функций $\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{p}}$ в интервале $(0, \bar{p})$.

Для любого вектора k, норма которого $\|k\|\in I''_{2N}$, имеет место неравенство

$$|(k, \bar{\omega})| = \left|(k, \omega_0) + \left(k, \overline{\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{p}}\right)}\bar{p}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant |(k, \omega_0)| - \left|\left(k, \overline{\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{p}}\right)}\bar{p}\right)\right| =$$

$$= |(k, \omega_0)| - \left|\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} k_s \overline{\frac{\partial\bar{\omega}_s}{\partial\bar{p}_l}}\,\bar{p}_l\right| \geqslant$$

$$\geqslant |(k, \omega_0)| - \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} |k_s| \left|\overline{\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{p}_l}}\right| |\bar{p}_l|. \qquad (1.162)$$

Учитывая оценку (1.160) и условия 5) и 6) теоремы, при $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$ будем иметь

$$|(k, \overline{\omega})| \geqslant \alpha_{2N} - M_1 C_1 \alpha_{2N}\, mnN = \\ = \alpha_{2N}(1 - M_1 C_1\, mnN) = C_1^* \alpha_{2N}, \quad (1.163)$$

$$|(k, \overline{\omega})| \geqslant C_1^* \alpha_{2N}.$$

Если постоянная C_1 такова, что $C_1^* > 0$, то все знаменатели с «нерезонансными» векторами k (т. е. с $\|k\| \in I_{2N}''$) при $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$ в области G_{m+n} ограничены по абсолютной величине снизу положительным числом $C_1^* \alpha_{2N}$.

Если воспользоваться оценкой (1.163), условиями теоремы и формулой (1.159), то будем иметь

$$\| A_2(\overline{p}, \overline{q}) \| < \frac{C_3}{\alpha_{2N}}, \quad (1.164)$$

где

$$C_3 = 2CR_N^2 \left(C + C_2 + \frac{1}{mnN} \right), \quad (1.165)$$

R_N — количество слагаемых в сумме $\sum\limits_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N}$.

Нетрудно вывести следующие оценки, справедливые для любой точки из G_{m+n} и для любого $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$:

$$\| u_1(\overline{p}, \overline{q}, t) \| < \frac{2C}{\alpha_{2N}}, \quad (1.166)$$

$$\left\| \frac{\partial u_1}{\partial \overline{p}} \right\| < \frac{4R_N (C_2 CN + 1)}{\alpha_{2N}^2}, \quad (1.167)$$

$$\left\| \frac{\partial u_1}{\partial \overline{q}} \right\| < \frac{2CN}{\alpha_{2N}}, \quad (1.168)$$

$$\| v_1(\overline{p}, \overline{q}, t) \| < \frac{4C}{\alpha_{2N}}. \quad (1.169)$$

Выведем оценку нормы $\| p(t) - p_1(t) \|$, где

$$p_1(t) = \overline{p}(t) + \mu u_1(\overline{p}, \overline{q}, t). \quad (1.170)$$

Функция $p_1(t)$ удовлетворяет следующему векторному дифференциальному уравнению:

$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{d\bar{p}}{dt}+\mu\frac{\partial u_1}{\partial\bar{p}}\frac{d\bar{p}}{dt}+\mu\frac{\partial u_1}{\partial\bar{q}}\frac{d\bar{q}}{dt}+\mu\frac{\partial u_1}{\partial t}=$$

$$=\mu\overline{X}+\mu^2\frac{\partial u_1}{\partial\bar{p}}\overline{X}+\mu\frac{\partial u_1}{\partial\bar{q}}\left[\bar{\omega}-\omega_0+\mu\overline{Y}\right]+\mu\frac{\partial u_1}{\partial t}=$$

$$=\mu^2\frac{\partial u_1}{\partial\bar{p}}\overline{X}+\mu^2\frac{\partial u_1}{\partial\bar{q}}\overline{Y}+\mu X(\bar{p}+x_0,\ \bar{q}+\omega_0 t+y_0)=$$

$$=\mu^2\frac{\partial u_1}{\partial\bar{p}}\overline{X}+\mu^2\frac{\partial u_1}{\partial q}\overline{Y}+$$

$$+\mu\left[X(p+x_0,\ q+\omega_0 t+y_0)-\mu\frac{\overline{\partial X}}{\partial p}u_1-\mu\frac{\overline{\partial X}}{\partial q}v_1\right],$$

или

$$\frac{dp_1}{dt}=\mu^2\frac{\partial u_1}{\partial\bar{p}}\overline{X}+\mu^2\frac{\partial u_1}{\partial\bar{q}}\overline{Y}+\mu\left[X-\mu\frac{\overline{\partial X}}{\partial p}u_1-\mu\frac{\overline{\partial X}}{\partial q}v_1\right],$$

где $\dfrac{\overline{\partial X}}{\partial p}$, $\dfrac{\overline{\partial X}}{\partial q}$ — некоторые средние значения функций $\dfrac{\partial X}{\partial p}$, $\dfrac{\partial X}{\partial q}$ в G_{m+n}.

Поэтому справедливо дифференциальное соотношение

$$\frac{dp}{dt}-\frac{dp_1}{dt}=\mu^2\left[\frac{\overline{\partial X}}{\partial p}u_1+\frac{\overline{\partial X}}{\partial q}v_1-\frac{\partial u_1}{\partial\bar{p}}\overline{X}-\frac{\partial u}{\partial\bar{q}}\overline{Y}\right],$$

или

$$\left\|\frac{dp}{dt}-\frac{dp_1}{dt}\right\|<\mu^2C_4,$$

$$C_4=\frac{2C}{\alpha_{2N}}\left[3C_2+2CN+\frac{R_N(C_2CN+1)}{\alpha_{2N}}\right].$$

Для любого $t\in\left[0,\ \dfrac{1}{\mu}\right]$ будем иметь

$$\|p(t)-p_1(t)\|<\mu C_5,\qquad C_5=C_4+O(\mu).\qquad(1.171)$$

Неравенство (1.171), в сущности, оценивает влияние членов высшего порядка (μ^2u_2, μ^3u_3 и другие) на отрезке $t\in[0,\ 1/\mu]$. Наряду с (1.171) на отрезке $t\in[0,\ 1/\mu]$

справедливо также неравенство

$$\|p_1(t)-\overline{p}(t)\| < \frac{2\mu C}{\alpha_{2N}}. \qquad (1.172)$$

Учитывая неравенства (1.171) и (1.172), на отрезке $t\in\left[0, \frac{1}{\mu}\right]$ получим

$$\|p(t)-\overline{p}(t)\| < \mu C_6, \qquad C_6 = C_5 + \frac{2\mu C}{\alpha_{2N}}. \qquad (1.173)$$

Пусть теперь задано произвольное $\varepsilon>0$. Определим положительное число $\mu_0(\varepsilon)>0$, удовлетворяющее условиям

$$\mu_0(\varepsilon) < \alpha_{2N}\left(\frac{1}{CC_1mnN}-1\right),$$

$$\mu_0(\varepsilon)C_6 < \varepsilon, \qquad \|\mu_0^2(\varepsilon)A_2(\overline{p}, \overline{q})\| < \varepsilon^2.$$

Решение системы трех приведенных неравенств составляют те значения параметра μ, которые заключены между нулем и $\mu_0(\varepsilon)$, где

$$\mu_0(\varepsilon) = \inf\left\{\alpha_{2N}\left[\frac{1}{CC_1mnN}-1\right], \ C_6^{-1}, \ \alpha_{2N}C_3^{-1}\right\}. \qquad (1.174)$$

Итак, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\mu_0(\varepsilon)>0$, что для всех $0\leqslant\mu\leqslant\mu_0(\varepsilon)$ на отрезке $0\leqslant t\leqslant 1/\mu$ выполняются неравенства

$$\|p(t)-\overline{p}(t)\| < \varepsilon, \ \|\mu^2 A_2(\overline{p}, \overline{q})\| < \varepsilon^2.$$

Тем самым утверждение теоремы для медленных движений полностью доказано.

Доказательство теоремы для быстрых переменных аналогично, однако оно сопряжено с громоздкими выкладками. Интересующегося этим читателя мы отсылаем к работам [12, 24].

В доказанной теореме существенным условием было то, что правые части дифференциальных уравнений представляют собой конечные тригонометрические многочлены ($0\leqslant\|k\|\leqslant N$). Если $N=\infty$, доказательство аналогичной теоремы значительно осложняется, так как в общем случае нет необходимых оценок (кроме оценок, основанных на условиях Липшица) для решений дифференциальных уравнений, правые части которых мало отличаются друг от друга в некоторой области, если рассматривается большой (порядка $1/\mu$) интервал изменения времени.

§ 1.13. Лемма Гронуэлла об оценке разности решений

Приведем в этом параграфе известные [29] оценки для разности решений в форме, необходимой нам для дальнейшего.

Лемма. *Пусть даны две системы обыкновенных дифференциальных уравнений $(m+n)$-го порядка:*

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \mu X(p, q), \\ \frac{dq}{dt} &= \omega(p) - \omega_0 + \mu Y(p, q), \end{aligned}\right. \tag{1.175}$$

и

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{dt} &= \mu X_N(\tilde{p}, \tilde{q}), \\ \frac{d\tilde{q}}{dt} &= \omega(\tilde{p}) - \omega_0 + \mu Y_N(\tilde{p}, \tilde{q}). \end{aligned}\right. \tag{1.176}$$

Функции X, X_N, Y, Y_N определены в $(m+n)$-мерной области G_{m+n} и удовлетворяют в этой области по всем переменным условию Липшица с общей постоянной L, т. е.

$$\|X(\bar{p}, \bar{q}) - X(\bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}})\| < L(\|\bar{p} - \bar{\bar{p}}\| + \|\bar{q} - \bar{\bar{q}}\|),$$

$$\|X_N(\bar{p}, \bar{q}) - X_N(\bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}})\| < L(\|\bar{p} - \bar{\bar{p}}\| + \|\bar{q} - \bar{\bar{q}}\|),$$

$$\|Y(\bar{p}, \bar{q}) - Y(\bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}})\| < L(\|\bar{p} - \bar{\bar{p}}\| + \|\bar{q} - \bar{\bar{q}}\|),$$

$$\|Y_N(\bar{p}, \bar{q}) - Y_N(\bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}})\| < L(\|\bar{p} - \bar{\bar{p}}\| + \|\bar{q} - \bar{\bar{q}}\|),$$

$$(\bar{p}, \bar{q}) \in G_{m+n}, \quad (\bar{\bar{p}}, \bar{\bar{q}}) \in G_{m+n},$$

где

$$\|\bar{p} - \bar{\bar{p}}\| = \sum_{i=1}^{m} |\bar{p}_i - \bar{\bar{p}}_i|, \quad \|\bar{q} - \bar{\bar{q}}\| = \sum_{s=1}^{n} |\bar{q}_s - \bar{\bar{q}}_s|.$$

Функция $\omega(p)$ *удовлетворяет условию Липшица в области* $P_m \subset G_{m+n}$ *с той же постоянной* L:

$$\|\omega(\bar{p})-\omega(\bar{\bar{p}})\| < L\|\bar{p}-\bar{\bar{p}}\|.$$

Пусть, кроме того, в G_{m+n} *имеют место неравенства*

$$\|X(p, q)-X_N(p, q)\| < \mu,$$
$$\|Y(p, q)-Y_N(p, q)\| < \mu.$$

Тогда

$$\left\{\begin{array}{l} \|p(t)-\tilde{p}(t)\| < \mu^{3/2} C_1 \left[e^{a\sqrt{\mu}t}-e^{-b\sqrt{\mu}t}\right], \\ \|q(t)-\tilde{q}(t)\| < \mu C_2 \left[C_3 e^{a\sqrt{\mu}t}+C_4 e^{-b\sqrt{\mu}t}\right], \end{array}\right. \tag{1.177}$$
$$p(0)=\tilde{p}(0), \quad q(0)=\tilde{q}(0),$$

где

$$C_1=\frac{m}{2L\sqrt{mn}+\frac{(m+n)^2}{4mn}\mu+O(\mu^2)}, \qquad C_2=\frac{C_1}{2mL},$$

$$C_3=2L\sqrt{mn}+\sqrt{\mu}L(m-n)+\frac{(m+n)^2}{4mn}\mu+O(\mu^2),$$

$$C_4=C_3+2\sqrt{\mu}L(m+n),$$

$$a=2L\sqrt{mn}+\sqrt{\mu}L(m+n)+\frac{(m+n)^2}{4mn}\mu+O(\mu^2),$$

$$b=2L\sqrt{mn}-\sqrt{\mu}L(m+n)+\frac{(m+n)^2}{4mn}\mu+O(\mu^2).$$

Доказательство. Из уравнений (1.175) и (1.176) легко устанавливаются следующие дифференциальные неравенства:

$$\left|\frac{dp_i}{dt}-\frac{d\tilde{p}_i}{dt}\right| < \mu L(\|p-\tilde{p}\|+\|q-\tilde{q}\|)+\mu^2,$$

$$\left|\frac{dq_s}{dt}-\frac{d\tilde{q}_s}{dt}\right| < L\|p-\tilde{p}\|+\mu L(\|p-\tilde{p}\|+\|q-\tilde{q}\|)+\mu^2$$

$$(i=1, 2, \ldots, m; \ s=1, 2, \ldots, n).$$

Суммируя по i и s, будем иметь

$$\left\|\frac{dp}{dt}-\frac{d\tilde{p}}{dt}\right\| < m\mu L(\|p-\tilde{p}\|+\|q-\tilde{q}\|)+m\mu^2,$$

$$\left\|\frac{dq}{dt}-\frac{d\tilde{q}}{dt}\right\| < nL(1+\mu)\|p-\tilde{p}\|+n\mu L\|q-\tilde{q}\|+n\mu^2,$$

или, вводя обозначения

$$\begin{gathered}\|p-\tilde{p}\|=z, \quad \|q-\tilde{q}\|=u,\\ a_{11}=m\mu L, \quad a_{12}=m\mu L,\\ a_{21}=nL(1+\mu), \quad a_{22}=n\mu L,\end{gathered}$$

можно написать два дифференциальных неравенства для норм производных:

$$\begin{aligned}\left|\frac{dz}{dt}\right| &< a_{11}z+a_{12}u+m\mu^2,\\ \left|\frac{du}{dt}\right| &< a_{21}z+a_{22}u+n\mu^2.\end{aligned} \tag{1.178}$$

В результате решения дифференциальных неравенств (1.178) с нулевыми начальными условиями получаем неравенства (1.177).

Из (1.177) вытекает, что на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ справедливы такие оценки:

$$\|p(t)-\tilde{p}(t)\| < \mu^{3/2}\bar{C}_1, \quad \|q(t)-\tilde{q}(t)\| < \mu\bar{C}_2.$$

К сожалению, на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$ оценки вида (1.177) не могут быть эффективно использованы для обоснования метода усреднения.

Заметим также, что если $\|\omega-\tilde{\omega}\| \sim \mu$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$ (как, например, имеет место в случае стандартных систем в смысле Н. Н. Боголюбова), то оценки вида $\|p(t)-\tilde{p}(t)\| < \mu^{3/2}$ справедливы на отрезке $t \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right]$.

§ 1.14. Теорема обоснования метода усреднения в резонансном случае для обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями

Теорема [12, 24]. *Пусть*: 1) *вектор-функции* $X(x, y)$, $Y(x, y)$ *аналитичны по всем переменным и* 2π-*периодичны по* y *в области*

$$G_{m+n}=\{x \in P_m, \ \|\operatorname{Im} y\| < \varrho, \ 0 < \varrho \leqslant 1\};$$

2) $\omega(x)$ *дважды дифференцируема в открытой m-мерной области P_m;*

3) $$\|X(x, y)\| < C, \ \|Y(x, y)\| < C, \ \|\omega(x)\| < C, \quad (x, y) \in G_{m+\bar{n}};$$

4) *вектор начальных частот* $\omega_0 = (\omega_1(x_0), \omega_2(x_0), \ldots, \omega_n(x_0))$, *либо имеет рациональные компоненты либо* $\omega_s(x_0) = \lambda r_s(x_0)$, λ — *произвольное вещественное число, отличное от нуля,* $r_s(x_0)$ — *рациональные числа* $(s = 1, 2, \ldots, n)$;

5) $$(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in G_{m+\bar{n}}, \ t \in [0, \infty);$$

6) $$0 < \alpha = \inf |(k, \omega_0)|, \quad \|k\| \in I'',$$

I'' — *множество целых положительных чисел, за исключением тех, для которых* $(k, \omega_0) = 0$;

7) *в области* G_{m+n} *справедливы неравенства*

$$\left|\frac{\partial \omega_s}{\partial x_r}\right| < C_1 \alpha, \quad \left|\frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x_r \partial x_l}\right| < C_2, \quad \left|\frac{\partial X_k^{(r)}}{\partial x_l}\right| < C_2,$$

$$\left|\frac{\partial^2 X_k^{(r)}}{\partial x_l \partial x_{l_1}}\right| < C_2, \quad \left|\frac{\partial Y_k^{(s)}}{\partial x_l}\right| < C_2, \quad \left|\frac{\partial^2 Y_k^{(s)}}{\partial x_l \partial x_{l_1}}\right| < C_2$$

$$(r, l, l_1 = 1, 2, \ldots, m; \quad s = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда для любого сколько угодно малого $\varepsilon > 0$ *существует* $\mu_0(\varepsilon) > 0$ *такое, что при* $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0(\varepsilon)$ *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ *справедливы оценки:*

$$\|p(t) - \bar{p}(t)\| < \varepsilon, \quad \|q(t) - \bar{q}(t)\| < \varepsilon,$$

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \|y(t) - \bar{y}(t)\| < \varepsilon,$$

где $x(t), y(t), p(t), q(t)$ — *решение первоначальных уравнений,* $\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{p}(t), \bar{q}(t)$ — *решение соответствующих усредненных уравнений.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, что правые части дифференциальных уравнений (1.134) или (1.140), которые в силу условий теоремы предполагаются аналитическими функциями, заменяются такими тригонометрическими многочленами, чтобы при этом погрешность в правых частях уравнений имела бы порядок μ^2. Влияние отброшенных членов будем оценивать с помощью леммы из § 1.13.

Пользуясь обозначениями и оценками В. И. Арнольда [26], представим любую аналитическую функцию $X(x, y)$ в виде

$$X(x, y) = [X(x, y)]_N + R_N X(x, y),$$

где

$$[X(x, y)]_N = \sum_{0 < \|k\| < N} X_k(x) e^{i(x, y)},$$

$$R_N X(x, y) = \sum_{\|k\| > N} X_k(x) e^{i(x, y)}.$$

Имеют место оценки [26]: если для всех точек области G_{m+n} аналитическая функция $X(x, y)$ удовлетворяет неравенству $\|X(x, y)\| < C$, то ее коэффициенты Фурье допускают оценку $\|X_k\| < Ce^{-\|k\|\varrho}$; если $\|X_k\| < Ce^{-\|k\|\varrho}$, то при $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - \delta - \gamma$ (где $0 < 4\delta \leqslant 2\gamma \leqslant \varrho \leqslant 1$) имеем

$$\|R_N X(x, y)\| < \left(\frac{2n}{e}\right)^n \frac{C}{\delta^{n+1}} e^{-N\gamma}. \tag{1.179}$$

В неравенстве (1.179) n — размерность вектора y. Из (1.179) вытекает, что если число N подчинено условию

$$N \geqslant E\left\{\frac{1}{\gamma} \ln \frac{(2n)^n C}{\mu e^n \delta^{n+1}}\right\} + 1 \tag{1.180}$$

($E(\alpha)$ — целая часть числа α), то

$$\|R_N X(x, y)\| < \mu. \tag{1.181}$$

Рассмотрим теперь вместо системы (1.140) с аналитическими функциями $X(p+x_0, q+\omega_0 t+y_0)$ и $Y(p+x_0, q+\omega_0 t+y_0)$ уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{p}}{dt} = \mu [X(\tilde{p}+x_0, \tilde{q}+\omega_0 t+y_0)]_N, \\ \dfrac{d\tilde{q}}{dt} = \omega(\tilde{p}+x_0) - \omega_0 + \mu [Y(\tilde{p}+x_0, \tilde{q}+\omega_0 t+y_0)]_N. \end{cases} \tag{1.182}$$

Согласно теореме обоснования метода усреднения для уравнений с тригонометрическими многочленами, приведенной в § 1.12, на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$ для $\tilde{p}(t)$, $\tilde{q}(t)$ имеем оценки вида

$$\|\tilde{p}(t) - \bar{\bar{p}}(t)\| < \mu C_6, \quad \|\tilde{q}(t) - \bar{\bar{q}}(t)\| < \mu C_6. \tag{1.183}$$

В последних неравенствах $\bar{\bar{p}}(t)$ и $\bar{\bar{q}}(t)$ представляют решение усредненной по t с учетом соизмеримости частот системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе (1.182). Кроме того, существенно, что C_6 зависит от N.

С другой стороны, согласно лемме из § 1.13 на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1/\sqrt{\mu}$ справедливы неравенства

$$\left\{\begin{aligned} &\|p(t) - \tilde{p}(t)\| < \mu^{3/2} C_1, \quad \|\bar{p}(t) - \bar{\bar{p}}(t)\| < \mu^{3/2} \bar{C}_1, \\ &\|q(t) - \tilde{q}(t)\| < \mu \bar{C}_2, \quad \|\bar{q}(t) - \bar{\bar{q}}(t)\| < \mu \bar{C}_2. \end{aligned}\right. \tag{1.184}$$

Поэтому на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1/\sqrt{\mu}$ имеем

$$\left\{\begin{aligned} \|p(t) - \bar{p}(t)\| &\leqslant \|p(t) - \tilde{p}(t)\| + \|\tilde{p}(t) - \bar{\bar{p}}(t)\| + \\ &\quad + \|\bar{p}(t) - \bar{\bar{p}}(t)\| < \mu (C_6 + 2\bar{C}_1), \\ \|q(t) - \bar{q}(t)\| &< \mu (C_6 + 2\bar{C}_2). \end{aligned}\right. \tag{1.185}$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что неравенства

$$\begin{gathered} \mu_0(\varepsilon) < \alpha \left[\frac{1}{CC_1 Nmn} - 1\right] < \varepsilon, \\ \mu_0(\varepsilon)(C_6 + 2\bar{C}_1) < \varepsilon, \\ N \geqslant E\left\{\frac{1}{\gamma} \ln \frac{(2n)^n C}{\mu_0(\varepsilon)\, \delta^{n+1} e^n}\right\} + 1 \end{gathered} \tag{1.186}$$

непротиворечивы, т. е. существуют такие значения малого параметра μ, которые удовлетворяют всем перечисленным условиям. Как уже отмечалось, первое из этих условий выражает то обстоятельство, что малые знаменатели (k, ω), для которых $\|k\| \in I''$, на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$ ограничены снизу положительным числом (см. § 1.12). Второе условие выражает доказуемое утверждение теоремы, а третье — выбор по заданному произвольным образом числу $\varepsilon > 0$ соответствующего числа N, т. е. соответствующего тригонометрического многочлена, равномерно аппроксимирующего в области G_{m+n} аналитическую функцию $X(p+x_0, q+\omega_0 t+y_0)$ с точностью μ.

Из первого условия следует, что число N должно быть не меньше $\dfrac{1}{mnCC_1\left(1+\dfrac{\varepsilon}{\alpha}\right)}$, т. е.

$$N > \frac{1}{mnCC_1\left(1+\dfrac{\varepsilon}{\alpha}\right)}. \qquad (1.187)$$

Выражение C_6, встречающееся в формуле (1.173), зависит от C_4, а следовательно, в конечном счете зависит от N и имеет вид

$$C_6 = K_1 N + K_2,$$

где K_1 и K_2 не зависят от N. В силу этого второе неравенство (1.186) может быть записано в виде

$$\mu_0(\varepsilon)(K_1 N + K_2') < \varepsilon, \qquad K_2' = K_2 + 2\overline{C}_1. \qquad (1.188)$$

Пользуясь первым условием (1.186), можно выбрать $\mu_0(\varepsilon)$ столь малым, чтобы

$$E\left\{\frac{1}{\gamma}\ln\frac{(2n)^n C}{\mu_0(\varepsilon)\,\delta^{n+1}e^n}\right\} + 1 > \frac{1}{mnCC_1\left(1+\dfrac{\varepsilon}{\alpha}\right)}$$

и поэтому остается установить непротиворечивость второго и третьего неравенств (1.186), или, что то же самое:

$$\mu_0(\varepsilon)(K_1 N + K_2') < \varepsilon,$$

$$N \geqslant E\left\{\frac{1}{\gamma}\ln\frac{(2n)^n C}{\mu_0(\varepsilon)\,\delta^{n+1}e^n}\right\} + 1.$$

Если взять ради определенности

$$N = E\left\{\frac{1}{\gamma}\ln\frac{(2n)^n C}{\mu_0(\varepsilon)\,\delta^{n+1}e^n}\right\} + 1, \qquad (1.189)$$

то N можно представить в виде

$$N = K_3 E(|\ln \mu_0(\varepsilon)|) + K_4, \qquad (1.190)$$

где K_3, K_4 — целые положительные числа.

Таким образом, окончательное условие, выражающее возможность такого выбора $\mu_0(\varepsilon)$, при котором удовлетворяются все неравенства (1.186), может быть написано в виде

$$\mu_0(\varepsilon) K_5 + \mu_0(\varepsilon) E(|\ln \mu_0(\varepsilon)|) K_6 < \varepsilon, \tag{1.191}$$

где K_5, K_6 — некоторые постоянные, не зависящие от $\mu_0(\varepsilon)$. В силу того, что

$$\lim_{\mu_0(\varepsilon)\to+0} \mu_0(\varepsilon) E(|\ln \mu_0(\varepsilon)|) = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, неравенство (1.191) имеет решения, и тем самым теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Теоремы, приведенные в § 1.12 и 1.14, доказывались при условии, что норма $\left\| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right\|$ во всей рассматриваемой области имеет порядок α [см. условия 5) и 6) теорем]. Если потребовать, чтобы $\left\| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right\| \sim \mu$, то тогда теорема обоснования метода усреднения для уравнений с аналитическими функциями будет справедлива на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$. Заметим, что α — не всегда малое число. Например, для случая астероидов троянской группы $\alpha \sim 1$.

ГЛАВА II

СХЕМЫ УСРЕДНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 2.1. Медленные и быстрые переменные в основных задачах небесной механики

Основные задачи небесной механики, к которым мы относим задачу о поступательном и вращательном движении трех и большего числа тел, задачу об эволюции и устойчивости планетных, спутниковых и звездных систем, исследование движений искусственных небесных тел, являются, по существу, многочастотными. Но среди них нас интересуют прежде всего задача об исследовании движений в планетной системе и задача о движении спутников, так как они описываются дифференциальными уравнениями вида (1.134) или, что то же самое, вида (1.140), для которых метод усреднения был обоснован в предыдущей главе. В отличие от задачи многих тел, под планетной системой мы понимаем систему, состоящую из конечного числа материальных точек, среди которых одна имеет массу намного бо́льшую, чем все остальные, поэтому роль малых параметров, характерных для уравнений (1.134) и (1.140), выполняют возмущающие массы планет, а в спутниковых задачах в качестве малых параметров чаще всего рассматриваются геометрические или динамические сжатия центрального притягивающего тела.

Конечно, дифференциальные уравнения движения планет и спутников могут быть записаны в различных системах координат [30, 31], но для качественных исследований наиболее удобными являются различные системы оскулирующих элементов: кеплеровы элементы, канонические элементы Ш. Делоне, А. Пуанкаре и А. Андуайе [31, 32].

При использовании оскулирующих элементов в качестве искомых функций мы получаем дифференциальные уравнения вида (1.134), причем четко производится деление фазовых координат на группу медленных переменных (в наших обозначениях переменные x) и группу быстрых переменных (переменные y).

Например, в планетном варианте задачи трех или большего числа тел к медленным переменным x относятся большие полуоси, эксцентриситеты, наклонности, угловые расстояния перицентров и долготы восходящих узлов оскулирующих орбит, а к быстрым переменным y относятся либо средние аномалии, либо средние долготы, либо истинные долготы планет. В плоской ограниченной задаче трех тел медленными переменными x являются большая полуось и эксцентриситет оскулирующей орбиты пассивно гравитирующей точки; быстрыми переменными y будет ее средняя аномалия и некоторая «почти линейная» функция времени, для которой точное выражение будет приведено несколько ниже. Аналогично можно ввести медленные и быстрые переменные в пространственной ограниченной задаче трех тел и в спутниковых задачах.

Для названных задач роль функций $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ играют некоторые алгебраические комбинации частных производных возмущающих функций или функции Гамильтона для случая канонических оскулирующих элементов. Но разложения возмущающих функций в ряд по кратным угловых аргументов (средних аномалий, долгот узлов и перицентров), как показал У. Леверье [34], имеют в точности форму (1.135).

Основная особенность дифференциальных уравнений небесной механики состоит в том, что почти во всех ее задачах, за исключением задачи двух тел, вектор быстрых переменных y является многомерным, что существенно затрудняет непосредственное использование результатов Н. Н. Боголюбова, Д. Н. Зубарева и В. М. Волосова для обоснования методов усреднения в небесной механике. Даже в обобщенной задаче двух неподвижных центров [33], с успехом применяемой в исследованиях движений спутников и интегрируемой в замкнутом виде, вектор y является многомерным (вообще говоря, трехмерным).

Рассмотрим дифференциальные уравнения плоской ограниченной круговой задачи трех тел и введем следующие обозначения: большая полуось оскулирующей орбиты пассивно гравитирующей точки $a=x_1$; оскулирующий фокальный параметр $p=x_2$; ее средняя аномалия $M=y_1$; $\tilde{\omega}-n't=y_2$ ($\tilde{\omega}$ — угловое расстояние перицентра от восходящего узла, n' — среднее движение одного из возмущающих тел). Далее, обозначим частные производные возмущающей функции R по переменным M, $\tilde{\omega}$, a, p через

$$\frac{\partial R}{\partial M}=\mu X_1(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)\frac{\sqrt{fm}}{2\sqrt{a}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}=\mu X_2(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)\frac{\sqrt{fm}}{2\sqrt{p}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial a}=-\mu Y_1(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)\frac{\sqrt{fm}}{2\sqrt{a}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial p}=-Y_2(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)\frac{\sqrt{fm}}{2\sqrt{p}}$$

соответственно, и

$$\frac{\sqrt{fm}}{a^{3/2}}=\omega_1(x_1),\qquad \frac{\sqrt{f(m+\mu)}}{(a')^{3/2}}=-\omega_2$$

(f — постоянная тяготения, m, μ — притягивающие массы ($\mu<m$), a' — радиус круговой орбиты массы μ). Тогда дифференциальным уравнениям плоской ограниченной круговой задачи трех тел, приведенным в [17], можно придать такой вид:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=\mu X_1(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2),\\
\frac{dx_2}{dt}&=\mu X_2(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2),\\
\frac{dy_1}{dt}&=\omega_1(x_1)+\mu Y_1(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2),\\
\frac{dy_2}{dt}&=\omega_2+\mu Y_2(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2).
\end{aligned}\right. \tag{2.01}$$

Введем для пространственной ограниченной круговой задачи трех тел следующие обозначения:

$$a=x_1,\ \ p=x_2,\ i=x_3;\quad \tilde{\omega}=x_4,$$
$$M=y_1,\ \ \Omega-n't=y_2,$$

$$\frac{\sqrt{fm}}{a^{3/2}}=\omega_1, \quad \frac{\sqrt{f(m+\mu)}}{(a')^{3/2}}=\omega_2,$$

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{fm}}\frac{\partial R}{\partial M}=\mu X_1, \quad \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{fm}}\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}=\mu X_2,$$

$$\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{fm}}\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}-\frac{1}{\sqrt{fm}\sin i}\frac{\partial R}{\partial\Omega}=\mu X_3,$$

$$-\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{fm}}\frac{\partial R}{\partial p}-\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{fm}}\frac{\partial R}{\partial i}=\mu X_4,$$

$$-\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{fm}}\frac{\partial R}{\partial a}=\mu Y_1, \quad \frac{1}{\sqrt{fm}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}=\mu Y_2$$

(i — наклонность плоскости орбиты пассивно гравитирующей точки к основной координатной плоскости, Ω — долгота восходящего узла). В этих обозначениях уравнения движения в пространственной ограниченной задаче трех тел, заимствованные нами из статьи [35], записываются также в форме (1.134):

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=\mu X_i(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2),\\ \frac{dy_1}{dt}&=\omega_s+\mu Y_s(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2)\end{aligned}\right. \tag{2.02}$$

$$(i=1, 2, 3, 4; s=1, 2).$$

В планетной задаче о движении n планет (задача $n+1$ тел) имеем $5n$ медленных переменных x и n быстрых переменных y и уравнения могут быть написаны в виде

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=\mu X_i(x_1, \ldots, x_{5n}; y_1, \ldots, y_n),\\ \frac{dy_s}{dt}&=\omega(x_s)+\mu Y_s(x_1, \ldots, x_{5n}; y_1, \ldots, y_n).\end{aligned}\right. \tag{2.03}$$

$$(i=1, 2, \ldots, 5n; s=1, \ldots, n).$$

Функции X_i и Y_s представляются n-кратными рядами Фурье по кратным аргументов $y_1, y_2, \ldots, y_n$, а коэффициенты этих рядов в свою очередь являются степенными рядами относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{5n}$.

Замечание. На самом деле возмущающая функция разлагается в ряд Фурье по кратным не только средних аномалий, которые являются быстрыми переменными, но и долгот перицентров, представляющих собой медленные переменные, однако для теоретических исследований это обстоятельство не является существенным.

§ 2.2. Общая схема усреднения в теории возмущений

Так как правые части дифференциальных уравнений n-планетной задачи, в которых искомыми функциями служат какие-либо оскулирующие элементы, зависят от частных производных возмущающей функции по элементам, то сначала мы рассмотрим общую схему усреднения для возмущающей функции $R(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n)$, зависящей от медленных переменных $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и быстрых переменных $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Рассмотрим прямоугольную числовую матрицу

$$A_{sn}=(a_{ij})\;(i=1, 2, \ldots, s;\; j=1, 2, \ldots, n;\; s<n), \tag{2.04}$$

и вектор-столбец быстрых переменных

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{2.05}$$

Образуем s-мерный вектор D, который мы будем называть *вектором аномалий Делоне,* с помощью равенства

$$D=A_{sn}y. \tag{2.06}$$

Пусть $\operatorname{rang} A_{sn}=s$, и ради определенности мы предположим, что

$$\det(a_{ij})\neq 0 \quad (i, j=1, 2, \ldots, s). \tag{2.07}$$

Тогда, разрешая систему (2.06) относительно $y_1, \ldots, y_s$, будем иметь

$$y_i=f_i(D;\; y_{s+1}, \ldots, y_n) \quad (i=1, 2, \ldots, s). \tag{2.08}$$

Далее, заменим быстрые переменные $y_1, \ldots, y_s$ в возмущающей функции $R(x, y)$ с помощью равенств (2.08). Будем иметь

$$R(x;\ y) = R_1(x,\ D;\quad y_{s+1}, \ldots, y_n). \tag{2.09}$$

Вычислим среднее значение функции $R_1(x;\ D;\ y_{s+1}, \ldots, y_n)$ по переменным $y_{s+1}, \ldots, y_n$, считая в процессе интегрирования x и D неизменными. В результате получим

$$\overline{R}(x,\ D) = \frac{1}{(2\pi)^{n-s}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} R_1(x;\ D;\ y_{s+1}, \ldots, y_n)\, dy_{s+1} \ldots dy_n. \tag{2.10}$$

Формула (2.10) выражает общую схему усреднения в небесной механике, так как она содержит в себе все известные схемы усреднения, применяемые в n-планетной задаче как частные случаи.

Действительно:

1) схема Гаусса вычисления **вековых возмущений** первого порядка получается, если A_{sn} — нулевая матрица, и в этом случае

$$\overline{R}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} R(x;\ y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n; \tag{2.11}$$

2) схемы усреднения Фату и Н. Д. Моисеева [17, 35] получаются из (2.10), если

$$A_{sn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \underbrace{0 & 0 \ldots 1}_{n} \ldots 0 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

поэтому $y_1 = D,\ y_2 = D_2, \ldots, y_s = D_s$ и

$$\overline{R}(x;\ y_1, \ldots, y_s) = \frac{1}{(2\pi)^{n-s}} \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} R(x;\ y_1, \ldots, y_s,\ y_{s+1}, \ldots, y_{s+n})\, dy_{s+1} \ldots dy_n; \tag{2.13}$$

3) Схемы усреднения Делоне — Хилла выражаются непосредственно формулой (2.10), если при подборе элементов матрицы A_{3n} берется во внимание соизмеримость средних движений.

Дальше мы более подробно рассмотрим каждую из названных схем усреднения, но сейчас заметим, что особый интерес представляет схема усреднения Делоне — Хилла, поскольку она является наиболее подходящей при исследовании движения резонансных систем.

§ 2.3. Уравнения для вековых возмущений в задаче о движении n планет

Если для описания движений в n-планетной задаче (задача $n+1$ тел) используются канонические элементы Делоне L_i, G_i, H_i, l_i, g_i, h_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, то, как известно, дифференциальные уравнения задачи имеют следующий вид:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dL_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l_i}, \quad \frac{dl_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L_i}, \\ &\frac{dG_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g_i}, \quad \frac{dg_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G_i}, \\ &\frac{dH_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h_i}, \quad \frac{dh_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H_i} \end{aligned}\right. \qquad (2.14)$$

$$(i=1, 2, \ldots n),$$

где гамильтониан F принципиально представим в виде ряда

$$F(L, G, H, l, g, h)=\sum_{\|k\|>0} F_k(L, G, H, g, h)\, e^{i(k,l)}, \qquad (2.15)$$

$$\|k\|=\sum_{i=1}^{n} |k_i|, \quad (k, l)=\sum_{i=1}^{n} k_i l_i,$$

$$L=(L_1, \ldots, L_n), \ldots, h=(h_1, \ldots, h_n).$$

Из $6n$ уравнений (2.14) $5n$ уравнений являются уравнениями для медленных переменных, и только n уравнений

$$\frac{dl_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L_i} \quad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (2.16)$$

определяют быстрые переменные (в обозначениях предыдущей главы L_i, G_i, H_i, g_i, h_i суть компоненты вектора x, а $l_1, \ldots, l_n$ — компоненты вектора y).

Среднее значение функции F по быстрым переменным l_i выражается формулой

$$\overline{F}(L, G, H, g, h) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} F(L, G, H, l, g, h)\, dl_1 \ldots dl_n; \tag{2.17}$$

или

$$\overline{F}(L, G, H, g, h) = F_0(L, G, H, g, h). \tag{2.18}$$

Таким образом, усредненные уравнения, соответствующие первоначальной системе (2.14), имеют вид

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\overline{L}_i}{dt} = 0, && \frac{d\overline{l}_i}{dt} = -\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{L}_i},\\ &\frac{d\overline{G}_i}{dt} = \frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{g}_i}, && \frac{d\overline{g}_i}{dt} = -\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{G}_i},\\ &\frac{d\overline{H}_i}{dt} = \frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{h}_i}, && \frac{d\overline{h}_i}{dt} = -\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{H}_i}, \end{aligned}\right. \tag{2.19}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Усредненные уравнения (2.19) определяют вековые возмущения в задаче о движении n планет. Вопрос интегрирования усредненных уравнений занимает особое место в аналитической небесной механике и ему посвящены многочисленные исследования. В следующих параграфах этой главы мы рассмотрим наиболее известные схемы усреднения небесной механики, имеющие либо полную либо неполную систему первых интегралов. Качественный же анализ близости решений усредненных уравнений (2.19) к решениям точных уравнений (2.14) будет выполнен в следующей главе, специально посвященной этим математическим вопросам качественной небесной механики.

§ 2.4. Метод Гаусса вычисления вековых возмущений первого порядка в двухпланетной задаче

В 1814 г. К. Гаусс предложил метод вычисления вековых возмущений первого порядка в двухпланетной задаче, не требующий разложения возмущающей функции по степеням эксцентриситетов и взаимных наклонностей [заметим, что в предыдущем параграфе мы также могли бы не пользоваться разложением гамильтоновой функции F в ряд, если бы изыскали какой-либо эффективный способ вычисления интеграла (2.17)].

С точки зрения применяемой схемы усреднения метод Гаусса является частным случаем изложенного в предыдущем параграфе. Будем исходить из уравнений Ньютона [30] для двухпланетной задачи (задачи трех тел).

Пусть a_1, e_1, i_1, Ω_1, π_1, ε_1 — оскулирующие элементы планеты P_1 с массой m_1, а a_2, e_2, i_2, Ω_2, π_2, ε_2 — оскулирующие элементы планеты P_2 с массой m_2. Тогда система уравнений 12-го порядка, описывающая движения в двухпланетной задаче, записывается в таком виде [30, 31]:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{da_1}{dt}=\frac{2}{n_1\sqrt{1-e_1^2}}\left[e_1\sin v_1 S_1+\frac{p_1}{r_1}T_1\right],\\
&\frac{de_1}{dt}=\frac{\sqrt{1-e_1^2}}{n_1a_1}\left[\sin v_1 S_1+(\cos v_1+\cos E_1)T_1\right],\\
&\frac{di_1}{dt}=\frac{1}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}}\,r_1\cos u_1 W_1,\\
&\frac{d\Omega_1}{dt}=\frac{\operatorname{cosec} i_1}{n_1a_1^2\sqrt{1-e_1^2}}\,r_1\sin u_1 W_1,\\
&e_1\frac{d\pi_1}{dt}=2e_1\sin^2\frac{i_1}{2}\,\frac{d\Omega_1}{dt}-\\
&\qquad\qquad-\frac{\sqrt{1-e_1^2}}{n_1a_1}\left[\cos v_1 S_1-\left(1+\frac{r_1}{p_1}\right)\sin v_1 T_1\right],\\
&\frac{d\varepsilon_1}{dt}=2\sqrt{1-e_1^2}\sin^2\frac{i_1}{2}\,\frac{d\Omega_1}{dt}+\\
&\qquad\qquad+\frac{e_1^2}{1-\sqrt{1-e_1^2}}\,\frac{d\pi_1}{dt}-\frac{2}{n_1a_1^2}\,r_1S_1,
\end{aligned}
\right. \qquad (2.20)
$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{da_2}{dt}=\frac{2}{n_2\sqrt{1-e_2^2}}\left(e_2\sin v_2 S_2+\frac{p_2}{r_2}T_2\right),\\
&\frac{de_2}{dt}=\frac{\sqrt{1-e_2^2}}{n_2a_2}\left[\sin v_2S_2+(\cos v_2+\cos E_2)T_2\right],\\
&\frac{di_2}{dt}=\frac{1}{n_2a_2^2\sqrt{1-e_2^2}}\,r_2\cos u_2W_2,\\
&\frac{d\Omega_2}{dt}=\frac{\operatorname{cosec} i_2}{n_2a_2^2\sqrt{1-e_2^2}}\,r_2\sin u_2W_2,\\
&e_2\frac{d\pi_2}{dt}=2e_2\sin^2\frac{i_2}{2}\,\frac{d\Omega_2}{dt}-\frac{\sqrt{1-e_2^2}}{n_2a_2}\times\\
&\qquad\qquad\times\left[\cos v_2S_2-\left(1+\frac{r_2}{p_2}\right)\sin v_2T_2\right],\\
&\frac{d\varepsilon_2}{dt}=2\sqrt{1-e_2^2}\sin^2\frac{i_2}{2}\,\frac{d\Omega_2}{dt}+\frac{e_2^2}{1+\sqrt{1-e_2^2}}\,\frac{d\pi_2}{dt}-\frac{2}{n_2a_2}r_2S_2.
\end{aligned}\right.$$

В уравнениях (2.20) компоненты возмущающих ускорений (S_1, T_1, W_1) и (S_2, T_2, W_2) связаны с возмущающими функциями R_1 и R_2 посредством формул [31]:

$$\left\{\begin{aligned}
&S_1=\frac{\partial R_2}{\partial r_1},\quad T_1=\frac{\partial R_2}{\partial r_{1p}},\quad W_1=\frac{\partial R_2}{\partial r_{1n}},\\
&S_2=\frac{\partial R_1}{\partial r_2},\quad T_2=\frac{\partial R_1}{\partial r_{2p}},\quad W_2=\frac{\partial R_1}{\partial r_{2n}},
\end{aligned}\right. \tag{2.21}$$

где

$$\left\{\begin{aligned}
&R_1=fm_1\left(\frac{1}{\Delta_{12}}-\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_1^3}\right),\\
&R_2=fm_2\left(\frac{1}{\Delta_{12}}-\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_2^3}\right),\\
&\Delta_{12}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\\
&r_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\quad r_2^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2.
\end{aligned}\right. \tag{2.22}$$

В формулах (2.21) r_{1p} — означает длину перпендикуляра к r_1 в плоскости орбиты планеты P_1 (в сторону движения), r_{1n} — нормаль к плоскости орбиты планеты P_1. Аналогичный смысл имеют r_{2p} и $r_{2,n}$.

Из теории вековых возмущений известно [30, 31], что *дополнительная часть возмущающих функций* (2.22) при отсутствии соизмеримости средних движений n_1 и n_2 не содержит вековых членов. Другими словами, вековые возмущения оскулирующих элементов порождаются лишь *главной частью возмущающих функций* $fm_1\Delta_{12}^{-1}$ и $fm_2\Delta_{12}^{-1}$. Введем обозначения:

$$R_{1г}=fm_1\Delta_{12}^{-1}, \tag{2.23}$$

$$R_{2г}=fm_2\Delta_{12}^{-1}. \tag{2.24}$$

Таким образом, чтобы вычислить вековые возмущения первого порядка, следует в уравнениях (2.20) вместо $S_1, \ldots, W_2$ подставить выражения

$$S_1=fm_2\frac{\partial\Delta_{12}^{-1}}{\partial r_1},\quad T_1=fm_2\frac{\partial\Delta_{12}^{-1}}{\partial r_{1p}},\quad W_1=fm_2\frac{\partial\Delta_{12}^{-1}}{\partial r_{1n}}, \tag{2.25}$$

$$S_2=fm_1\frac{\partial\Delta_{12}^{-1}}{\partial r_2},\quad T_2=fm_1\frac{\partial\Delta_{12}^{-1}}{\partial r_{2p}},\quad W_2=fm_1\frac{\partial\Delta_{12}^{-1}}{\partial r_{2n}}, \tag{2.26}$$

и после этого правые части полученных уравнений необходимо усреднить по средним аномалиям M_1 и M_2 планет P_1 и P_2.

Ради удобства рассмотрим лишь дифференциальные уравнения для оскулирующих эксцентриситетов e_1 и e_2 и обозначим их правые части через Φ_1 и Φ_2 соответственно. Получим

$$\frac{de_1}{dt}=\Phi_1(M_1,\ M_2), \tag{2.27}$$

$$\frac{de_2}{dt}=\Phi_2(M_2,\ M_1). \tag{2.28}$$

Заметим, что функции Φ_1 и Φ_2 зависят на самом деле от всех двенадцати оскулирующих элементов, но мы указываем лишь на зависимость от быстрых переменных — средних аномалий M_1, M_2.

Для определения вековых возмущений эксцентриситетов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ необходимо вычислить средние значения Φ_1 и Φ_2 относительно M_1 и M_2 (считая другие элементы в процессе интегрирования постоянными):

$$\frac{d\bar{e}_1}{dt}=\bar{\Phi}_1=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_1(M_1,\ M_2)\,dM_1\,dM_2, \tag{2.29}$$

$$\frac{d\bar{e}_2}{dt}=\bar{\Phi}_2=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_2(M_2,\ M_1)\,dM_1\,dM_2. \tag{2.30}$$

До сих пор предложенная схема усреднения ничем не отличается от схемы построения уравнений для вековых возмущений в n-планетной задаче, изложенной в предыдущем параграфе, но Гаусс заметил, что вычисление вековых возмущений в двухпланетной задаче тесным образом связано с вычислением гравитационного потенциала некоторого эллиптического кольца на внешнюю точку.

Действительно, функциям $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$ можно придать вид

$$\bar{\Phi}_1=\frac{\sqrt{1-e_1^2}}{2\pi n_1 a_1}\int_0^{2\pi}[\sin v_1\bar{S}_1+(\cos v_1+\cos E_1)\bar{T}_1]\,dM_1, \tag{2.31}$$

$$\bar{\Phi}_2=\frac{\sqrt{1-e_2^2}}{2\pi n_2 a_2}\int_0^{2\pi}[\sin v_2\bar{S}_2+(\cos v_2+\cos E_2)\bar{T}_2]\,dM_2, \tag{2.32}$$

где

$$\bar{S}_1=\frac{\partial U_2}{\partial r_1},\qquad \bar{T}_1=\frac{\partial U_2}{\partial r_{1p}},\qquad \bar{W}_1=\frac{\partial U_2}{\partial r_{1n}},$$
$$\bar{S}_2=\frac{\partial U_1}{\partial r_2},\qquad \bar{T}_2=\frac{\partial U_1}{\partial r_{2p}},\qquad \bar{W}_2=\frac{\partial U_1}{\partial r_{2n}}$$

и

$$U_2=\frac{fm_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dM_2}{\Delta_{12}}, \tag{2.33}$$

$$U_1=\frac{fm_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dM_1}{\Delta_{12}}. \tag{2.34}$$

Как видно из формулы (2.33), функция U_2 представляет собой потенциал эллиптического кольца с параметрами (a_2, e_2, i_2, Ω_2, π_2) и с массой m_2 на точку P_1. Аналогично U_1 — это потенциал эллиптического кольца с параметрами (a_1, e_1, i_1, Ω_1, π_1) и с массой m_1 на точку P_2. Массы вдоль эллиптических колец распределены в соответствии с формулами:

$$dm_2 = \frac{m_2}{2\pi} dM_2, \qquad dm_1 = \frac{m_1}{2\pi} dM_1.$$

Таким образом, $\overline{S}_1$, $\overline{T}_1$, $\overline{W}_1$ суть компоненты силы тяготения, производимого эллиптическим кольцом с потенциалом U_2, на материальную точку P_1 с массой $m_1 = 1$, а $\overline{S}_2$, $\overline{T}_2$, $\overline{W}_2$ — компоненты притяжения, производимого эллиптическим кольцом с потенциалом U_1, на материальную точку P_2 с $m_2 = 1$.

Потенциалы эллиптических колец выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода, поэтому однократное усреднение по средним аномалиям может в принципе выполняться аналитически. Для второго интегрирования и, следовательно, для окончательного нахождения коэффициентов вековых возмущений лучше всего воспользоваться численным гармоническим анализом.

Аналогично определяются коэффициенты вековых возмущений и других оскулирующих элементов (очевидно, что в силу теоремы Лапласа — Лагранжа $\frac{d\overline{a}_1}{dt} = \frac{d\overline{a}_2}{dt} = 0$ и последние равенства можно использовать, как контрольные).

Метод Гаусса позволяет определить вековые возмущения первого порядка оскулирующих элементов с любой наперед заданной точностью (независимо от точности определения других возмущений), так как точность вычисления эллиптических интегралов и квадратурных формул может быть произвольной.

Хотя мы изложили метод Гаусса для двухпланетной задачи, он может быть использован и в n-планетной задаче. В этом случае n-кратное интегрирование по средним аномалиям сводится к вычислению потенциалов эллиптических колец и к применению многомерного (точнее, n — 1-мерного) численного гармонического анализа.

В заключение заметим, что идеи Гаусса были подробно разработаны и доведены до рабочего состояния Г. Хиллом, Г. Альфаном и Н. Н. Горячевым.

§ 2.5. Интегрирование дифференциальных уравнений усредненной плоской двухпланетной задачи

Плоскую двухпланетную задачу можно описать канонической системой дифференциальных уравнений восьмого порядка:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dL_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l_i}, \qquad \frac{dl_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L_i},\\ &\frac{dG_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g_i}, \qquad \frac{dg_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G_i} \end{aligned}\right. \qquad (i=1,\ 2). \tag{2.35}$$

В уравнениях (2.35) искомыми функциями являются канонические элементы Делоне L_i, G_i, l_i, g_i. Систему (2.35) можно получить из (2.14), полагая в последней $H_i \equiv h_i \equiv 0$ и придавая индексу i значения 1 и 2.

Усредненная по быстрым переменным l_1 и l_2 система, соответствующая уравнениям (2.35), является частным случаем системы (2.19). Она представляется уравнениями

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\bar{L}_i}{dt}=0, \qquad \frac{d\bar{l}_i}{dt}=-\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{L}_i},\\ &\frac{d\bar{G}_i}{dt}=\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{g}_i}, \qquad \frac{d\bar{g}_i}{dt}=-\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{G}_i} \end{aligned}\right. \qquad (i=1,\ 2). \tag{2.36}$$

Гамильтониан $\bar{F}$ зависит только от L_1, L_2, G_1, G_2, g_1, g_2.

Во второй части книги при исследовании вопроса о существовании условно-периодических решений в плоской двухпланетной задаче существенным фактом является интегрируемость системы (2.36). Сейчас мы покажем, что уравнения (2.36) действительно интегрируются в квадратурах.

Прежде всего очевидны два первых интеграла:

$$\overline{L}_i = c_i \quad (i = 1, 2). \tag{2.37}$$

Далее, система (2.36) имеет интеграл энергии

$$\overline{F} = h. \tag{2.38}$$

Кроме того, она допускает также интеграл сохранения момента количества движения (интеграл площадей)

$$\overline{G}_1 + \overline{G}_2 = c_3. \tag{2.39}$$

Из (2.39) вытекает тождество по времени

$$\frac{d\overline{G}_1}{dt} + \frac{d\overline{G}_2}{dt} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{g}_1} + \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{g}_2} \equiv 0. \tag{2.40}$$

Тождество (2.40) показывает, что $\overline{F}$ (впрочем, как и F) зависит только от разности $\overline{g}_1 - \overline{g}_2$.

Введем вместо канонических переменных $\overline{G}_1$ и $\overline{g_1 - g_2}$ новые канонические переменные, $\overline{K}$ и $\overline{k}$, по формулам

$$\begin{aligned} &\overline{G}_1 = \overline{K}, \\ &\overline{g}_1 - \overline{g}_2 = \overline{k}, \\ &\overline{G}_2 = c_3 - \overline{K}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

С помощью формул (2.41) гамильтониан $\overline{F}$ можно представить как функцию $\overline{L}_1$, $\overline{L}_2$, $\overline{K}$, $\overline{k}$.

Далее будем иметь

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \frac{d\overline{G}_1}{dt} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{g}_1} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{k}},$$

$$\frac{d\overline{k}}{dt} = \frac{d(\overline{g}_1 - \overline{g}_2)}{dt} = -\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{G}_1} + \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{G}_2} = -\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{K}}.$$

Таким образом, канонические переменные $\overline{K}$ и $\overline{k}$ определяются гамильтоновой системой

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\overline{K}}{dt} &= \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{k}}, \\ \frac{d\overline{k}}{dt} &= -\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{K}} \end{aligned} \right. \tag{2.42}$$

с одной степенью свободы.

Уравнения (2.42) обладают интегралом (2.38), который, если учесть (2.41), можно написать в виде

$$\overline{F}(\overline{L}_1, \overline{L}_2, \overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{g}_1-\overline{g}_2)=\overline{F}^*(\overline{K}, \overline{k})=h. \tag{2.43}$$

Из (2.43) можно найти

$$\overline{k}=\varphi(\overline{K})$$

и, следовательно, проинтегрировать до конца систему (2.42). Имея функции $\overline{K}(t)$ и $\overline{k}(t)$ и пользуясь соотношениями (2.41), в системе (2.36) можно выполнить полное разделение переменных и, следовательно, найти общее решение усредненной системы (2.36).

§ 2.6. Схема Гаусса для ограниченной круговой задачи трех тел

Применение метода Гаусса в ограниченной (пространственной и плоской) круговой задаче приводит к одному из интегрируемых усредненных вариантов. Рассмотрим более подробно этот случай.

Возвращаясь к обозначениям § 2.1, отметим, что дифференциальные уравнения движения пассивно гравитирующей точки в рамках ограниченной круговой задачи трех тел в кеплеровых оскулирующих элементах имеют следующий вид:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=2\sqrt{\frac{a}{fm}}\frac{\partial R}{\partial M},\\
\frac{dp}{dt}&=2\sqrt{\frac{p}{fm}}\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
\frac{di}{dt}&=\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{fmp}}\frac{\partial R}{\partial \omega}-\frac{1}{\sqrt{fmp}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega},\\
\frac{dM}{dt}&=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{fm}{a}}-2\sqrt{\frac{a}{fm}}\frac{\partial R}{\partial a},\\
\frac{d\omega}{dt}&=-2\sqrt{\frac{p}{fm}}\frac{\partial R}{\partial p}-\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{fmp}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{d\Omega}{dt}&=-n'+\frac{1}{\sqrt{fmp}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},
\end{aligned}\right. \tag{2.44}$$

где возмущающая функция R для эллиптических движений представляется рядом

$$R(a, p, i, M, \Omega, \omega, t)=$$
$$=fm' \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{k_1,k_2,k_3}(a,p,i)\cos(k_1 M+k_2\widetilde{\Omega}+k_3\omega), \tag{2.45}$$

$$\widetilde{\Omega}=\Omega-l', \quad l'=n't+l'_0, \tag{2.46}$$

а m', l' — масса и долгота возмущающей точки.

В соответствии со схемой усреднения Гаусса, среднее значение возмущающей функции R по быстрым угловым переменным M и l' определяется при условии, что все остальные элементы в процессе интегрирования считаются постоянными. Будем иметь

$$\overline{R}(a, p, i, \omega)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R(a, p, i, M, \Omega, \omega, t)\,dM\,dl', \tag{2.47}$$

или

$$\overline{R}(a, p, i, \omega)=fm' \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{0,0,k_3}(a, p, i)\cos k_3\omega. \tag{2.48}$$

Система уравнений для этого упрощенного усредненного варианта ограниченной круговой задачи трех тел имеет вид

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\overline{a}}{dt}=0, \qquad \frac{d\overline{M}}{dt}=\frac{1}{\overline{a}}\sqrt{\frac{fm}{\overline{a}}}-2\sqrt{\frac{\overline{a}}{fm}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\overline{a}},\\
&\frac{d\overline{p}}{dt}=2\sqrt{\frac{\overline{p}}{fm}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\overline{\omega}}, \qquad \frac{d\overline{\omega}}{dt}=2\sqrt{\frac{\overline{p}}{fm}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\overline{p}}-\frac{\operatorname{ctg}\overline{i}}{\sqrt{fm\overline{p}}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\overline{i}},\\
&\frac{d\overline{i}}{dt}=\frac{\operatorname{ctg}\overline{i}}{\sqrt{fm\overline{p}}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\overline{\omega}},\\
&\frac{d\overline{\Omega}}{dt}=-n'+\frac{1}{\sqrt{fm\overline{p}}\sin\overline{i}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\overline{i}}.
\end{aligned}\right. \tag{2.49}$$

Уравнения (2.49) допускают полную систему первых интегралов. Три первых интеграла выражаются равенствами

$$\bar{a}_1 = c_1, \tag{2.50}$$

$$\sqrt{\bar{p}}\cos\bar{i} = c_2, \tag{2.51}$$

$$\bar{R}(\bar{a}, \bar{p}, \bar{i}, \bar{\omega}) = c_3. \tag{2.52}$$

Интеграл (2.52) можно рассматривать как комбинацию интегралов (2.50) и (2.51) с интегралом Якоби

$$\frac{fm}{2\bar{a}} + \sqrt{fm\bar{p}}\, n' \cos\bar{i} + \bar{R} = c_3', \tag{2.53}$$

который также имеется в этой усредненной схеме.

Выражая, далее, из (2.50) — (2.53) $\bar{p} = \bar{p}(\bar{i})$ и $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\bar{i})$ и подставляя в третье уравнение (2.49), найдем

$$t - t_0 = \int\limits_{\bar{i} = \bar{i}_0}^{\bar{i}} \frac{\sqrt{fm\bar{p}}\,\mathrm{tg}\,\bar{i}}{\dfrac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{\omega}}}\, d\bar{i}. \tag{2.54}$$

Учитывая первые интегралы (2.50)—(2.53) и равенство (2.54), выводим, что правые части последних трех уравнений системы (2.49) будут зависеть только от времени. Следовательно, определение элементов $\bar{M}$, $\bar{\omega}$, Ω сводится к квадратурам.

Таким образом, усреднение по Гауссу, примененное к пространственной ограниченной круговой задаче трех тел, порождает упрощенную схему этой задачи, дифференциальные уравнения которой можно проинтегрировать до конца.

Само собой разумеется, что в случае плоской задачи уравнения схемы Гаусса также интегрируются и общее решение состоит из четырех первых интегралов [35].

§ 2.7. Схема усреднения Фату для ограниченной круговой задачи трех тел

Фату предложил [36] свой упрощенный вариант ограниченной круговой задачи трех тел, получивший некоторые приложения в аналитической и качественной небесной механике. Сущность схемы Фату заключается в том, что возмущающая функция R усредняется по долготе l' возмущающего тела

$$\overline{R}(a,\ p,\ i,\ M,\ \omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} R(a,\ p,\ i,\ \widetilde{\Omega},\ M,\ \omega)\,dl', \qquad (2.55)$$

или

$$\overline{R}(a,\ p,\ i,\ M,\ \omega)= \\ = fm' \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{k_1,0,k_3}(a,\ p,\ i)\cos(k_1M+k_3\omega).$$

Дифференциальные уравнения для схемы Фату имеют вид

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\bar{a}}{dt}=2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\overline{M}}, \quad \frac{d\overline{M}}{dt}=\frac{1}{\bar{a}}\sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}}-2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\bar{a}},\\
&\frac{d\bar{p}}{dt}=2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\bar{\omega}}, \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt}=-2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\bar{p}}-\frac{\operatorname{ctg}\bar{i}}{\sqrt{fm\bar{p}}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\bar{i}},\\
&\frac{d\bar{i}}{dt}=\frac{\operatorname{ctg}\bar{i}}{\sqrt{fm\bar{p}}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\bar{\omega}}, \quad \frac{d\overline{\Omega}}{dt}=-n'+\frac{1}{\sqrt{fm\bar{p}}\sin\bar{i}}\,\frac{\partial\overline{R}}{\partial\bar{i}}.
\end{aligned}\right. \qquad (2.56)$$

К сожалению, интегрирование системы (2.56) не может быть сведено к квадратурам, хотя два ее первых интеграла можно легко получить. Они имеют вид

$$\sqrt{\bar{p}}\cos\bar{i}=c_1, \qquad (2.57)$$

$$\frac{fm}{2}+\overline{R}=c_2. \qquad (2.58)$$

Интеграл (2.58) может рассматриваться вместо интеграла Якоби для схемы Фату вида (2.53), с той лишь разницей, что в нем функция R задается равенством (2.55).

Соотношения (2.57) и (2.58) позволяют понизить порядок системы (2.56) с шести до четырех. Кроме того, так как $\overline{R}$ не зависит от $\overline{\Omega}$, последнее уравнение (2.56) можно рассматривать отдельно, следовательно, для ее полного интегрирования необходимо рассматривать систему третьего порядка. Исключая время из уравнений, получим в конечном итоге систему второго порядка. Согласно теореме Якоби о последнем множителе [23] для полного интегрирования системы (2.56) необходимо иметь еще один первый интеграл. Эти соображения относятся к схеме Фату для пространственной ограниченной круговой задачи трех тел.

Для плоского варианта схемы Фату мы имеем полную систему первых интегралов [17]. В этом случае

$$R(a, p, M, \omega, t) = fm' \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} C_{k_1, k_2}(a, p) \cos(k_1 M + k_2 \tilde{\omega}), \tag{2.59}$$

$$\tilde{\omega} = \omega - l', \quad l' = n't + l'_0, \tag{2.60}$$

$$\overline{R}(a, p, M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(a, p, M, \omega, t)\, dl' = fm' \sum_{k_1=0}^{\infty} C_{k_1, 0}(a, p) \cos k_1 M. \tag{2.61}$$

Уравнения для плоской схемы Фату имеют вид

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = 2\sqrt{\frac{\overline{a}}{fm}} \frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{M}}, \quad \frac{d\overline{M}}{dt} = \frac{1}{\overline{a}}\sqrt{\frac{fm}{\overline{a}}} - 2\sqrt{\frac{\overline{a}}{fm}} \frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{a}},$$

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = 0, \quad \frac{d\overline{\tilde{\omega}}}{dt} = -n' - 2\sqrt{\frac{\overline{p}}{fm}} \frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{p}}. \tag{2.62}$$

Уравнения (2.62) интегрируются до конца. Действительно, очевиден один первый интеграл

$$\overline{p} = c'_1. \tag{2.63}$$

Кроме того, система (2.62) имеет интеграл Якоби

$$\frac{fm}{2\bar{a}}+\sqrt{fm\bar{p}}\,n'+\bar{R}=c_2'. \tag{2.64}$$

Пользуясь формулами (2.63) и (2.64), находим $\bar{a}=\bar{a}(\bar{M})$, а из третьего уравнения (2.62) при помощи квадратуры получаем зависимость средней аномалии $\bar{M}$ от времени t

$$t-t_0=\int\limits_{\bar{M}_0}^{\bar{M}}\frac{d\bar{M}}{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}}-2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{a}}}. \tag{2.65}$$

Таким образом, элементы $\bar{a}$ и $\bar{M}$ можно считать известными функциями времени. Далее, пользуясь последним уравнением (2.62), определяем $\bar{\omega}$ как функцию t:

$$\bar{\omega}-\bar{\omega}_0=-2\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{p}}\,dt. \tag{2.66}$$

§ 2.8. Схема Н. Д. Моисеева для ограниченной круговой задачи трех тел

Н. Д. Моисеевым предложена [17, 35] однократная схема усреднения возмущающей функции ограниченной круговой задачи трех тел по средней аномалии пассивно гравитирующей точки. Согласно этой схеме

$$\bar{R}(a,\,p,\,i,\,\omega,\,\tilde{\Omega})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}R(a,\,p,\,i,\,\omega,\,M,\,\tilde{\Omega})\,dM,$$

и с помощью ряда (2.45) получим

$$\bar{R}(a,\,p,\,i,\,\omega,\,\tilde{\Omega})=$$
$$=fm'\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\sum_{k_3=-\infty}^{\infty}C_{0,k_2,k_3}(a,\,p,\,i)\cos(k_2\tilde{\Omega}+k_3\omega). \tag{2.67}$$

Как и ранее, $\tilde{\Omega}=\Omega-l'=\Omega-n't-l_0'$.

Дифференциальные уравнения для схемы Н. Д. Моисеева имеют такой вид:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\bar{a}}{dt}=0,\\
&\frac{d\bar{p}}{dt}=2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{\omega}},\\
&\frac{d\bar{i}}{dt}=\frac{\operatorname{ctg}\bar{i}}{\sqrt{fm\bar{p}}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{\omega}}-\frac{1}{\sqrt{fm\bar{p}}\sin\bar{i}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{\Omega}},\\
&\frac{d\bar{M}}{dt}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}}-2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{a}},\\
&\frac{d\bar{\omega}}{dt}=-2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{p}}-\frac{\operatorname{ctg}\bar{i}}{\sqrt{fm\bar{p}}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{i}},\\
&\frac{d\bar{\Omega}}{dt}=-n'+\frac{1}{\sqrt{fm\bar{p}}\sin\bar{i}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{i}}.
\end{aligned}\right. \tag{2.68}$$

Система (2.68) имеет два первых интеграла:

$$\bar{a}=c_1, \tag{2.69}$$

$$\sqrt{fm\bar{p}}\;n'\cos\bar{i}+\bar{R}=c_2. \tag{2.70}$$

Последний из них может быть выведен из интеграла Якоби

$$\frac{fm}{2\bar{a}}+\sqrt{fm\bar{p}}\,n'\cos\bar{i}+\bar{R}=c_3.$$

Так же как и в схеме Фату, для нахождения общего решения системы (2.68) недостает одного первого интеграла. Для плоского случая Н. Д. Моисеев нашел общее решение [17].

§ 2.9. Первая схема Делоне — Хилла для ограниченной круговой задачи трех тел

Введем аномалию Делоне D в ограниченной круговой задаче трех тел по формуле

$$D=\bar{k}_1 M+\bar{k}_2(\Omega-l'), \tag{2.71}$$

где $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ — некоторые заданные целые положительные числа.

Из (2.71) будем иметь

$$\tilde{\Omega}=\Omega-l'=\frac{D}{\bar{k}_2}-\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}M,$$

поэтому возмущающая функция R, представленная рядом (2.45), примет вид

$$R(a, p, i, M, \Omega, \omega, t)=R_1(a, p, i, M, \omega, D)=$$
$$=fm'\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\sum_{k_3=-\infty}^{\infty}C_{k_1,k_2,k_3}(a, p, i)\cos\left[\left(k_1-k_2\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\right)M+\right.$$
$$\left.+\frac{k_2}{\bar{k}_2}D+k_3\omega\right]. \tag{2.72}$$

Усредненное значение возмущающей функции по Делоне — Хиллу получается из (2.72) в результате вычисления среднего относительно M, считая в процессе интегрирования a, p, i, D, ω постоянными. Другими словами,

$$\bar{R}(a, p, i, D, \omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R_1(a, p, i, M, \omega, D)\,dM. \tag{2.73}$$

Интегрируя ряд (2.72), получим

$$\bar{R}(a, p, i, D, \omega)=$$
$$=fm'\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k_3=-\infty}^{\infty}C_{s\bar{k}_1, s\bar{k}_2, k_3}(a, p, i)\cos(sD+k_3\omega). \tag{2.74}$$

Система дифференциальных уравнений движения пассивно гравитирующей точки для первой схемы Делоне — Хилла в оскулирующих кеплеровых элементах имеет следующий вид:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\bar{a}}{dt} &= 2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\,\bar{k}_1\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial D},\\
\frac{d\bar{p}}{dt} &= 2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{\omega}},\\
\frac{d\bar{i}}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg}\bar{i}}{\sqrt{fm\bar{p}}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{\omega}} - \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{fm\bar{p}}\sin\bar{i}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial D},\\
\frac{d\bar{M}}{dt} &= \frac{1}{\bar{a}}\sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}} - 2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{a}},\\
\frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{p}} - \frac{\operatorname{ctg}\bar{i}}{\sqrt{fm\bar{p}}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{i}},\\
\frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= -n' + \frac{1}{\sqrt{fm\bar{p}}\sin\bar{i}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{i}}.
\end{aligned}\right. \tag{2.75}$$

Для аномалии Делоне D имеем очевидное дифференциальное уравнение

$$\frac{dD}{dt} = \bar{k}_1\,\frac{d\bar{M}}{dt} + \bar{k}_2\,\frac{d\bar{\Omega}}{dt} - \bar{k}_2 n',$$

или

$$\frac{dD}{dt} = \left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{a}}\sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}} - \bar{k}_2 n'\right) - 2\bar{k}_2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{a}} + \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{fm\bar{p}}\sin\bar{i}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{i}}. \tag{2.76}$$

Легко написать два первых интеграла системы (2.75). Они имеют вид

$$\sqrt{\bar{a}} - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\sqrt{\bar{p}}\cos\bar{i} = c_1, \tag{2.77}$$

$$\frac{fm}{2\bar{a}} + \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1}\,n'\sqrt{fm\bar{a}} + \bar{R} = c_2. \tag{2.78}$$

Комбинация интегралов (2.77) и (2.78) дает нам интеграл Якоби

$$\frac{fm}{2\bar{a}} + n'\sqrt{fm\bar{p}}\cos\bar{i} + \bar{R} = c_3.$$

Других первых интегралов системы (2.75) непосредственно не усматривается, поэтому написать ее общее решение не представляется возможным.

Однако в плоском случае первая схема Делоне — Хилла описывается системой уравнений четвертого порядка, для которой общее решение найдено [17]. Учитывая значение этого результата для построения аналитических теорий движения астероидов в резонансных случаях, мы изложим этот вопрос более подробно.

Первая схема Делоне — Хилла для плоской ограниченной круговой задачи трех тел описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\bar{a}}{dt}=2\bar{k}_1\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial D},\\ &\frac{d\bar{p}}{dt}=2\bar{k}_2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial D},\\ &\frac{d\bar{M}}{dt}=\frac{1}{\bar{a}}\sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}}-2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{a}},\\ &\frac{d\bar{\bar{\omega}}}{dt}=-n'-2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{p}},\end{aligned}\right. \tag{2.79}$$

где [18]

$$\bar{R}(\bar{a},\bar{p},D)=fm'\sum_{s=0}^{\infty}C_{s\bar{k}_1,s\bar{k}_2}(\bar{a},\bar{p})\cos sD, \tag{2.80}$$

$$D=\bar{k}_1M+\bar{k}_2(\omega-l'). \tag{2.81}$$

Как видим, аномалии Делоне для плоского случая (формула (2.81)) и для пространственного случая (формула (2.71)) имеют различный аналитический вид.

Из первых двух уравнений системы (2.79) легко получается первый интеграл:

$$\sqrt{\bar{a}}-\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}\sqrt{\bar{p}}=c_1'. \tag{2.82}$$

Второй интеграл системы (2.79) выражается равенством

$$\frac{fm}{2\bar{a}} + \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} n' \sqrt{fm\bar{a}} + \bar{R} = c_2'. \tag{2.83}$$

Интеграл (2.83) есть результат комбинации интеграла (2.82) и интеграла Якоби.

Первые интегралы (2.82) и (2.83) позволяют в принципе найти функциональные зависимости $\bar{a}=\bar{a}(D)$ и и $\bar{p}=\bar{p}(D)$ и, следовательно, в дифференциальном уравнении для аномалии Делоне

$$\frac{dD}{dt} = \left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{a}}\sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}} - \bar{k}_2 n'\right) - 2\bar{k}_1\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{a}} - 2\bar{k}_2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{p}} \tag{2.84}$$

правая часть может быть выражена как функция, зависящая только от аномалии D. Таким образом, зависимость аномалии D от времени получается из квадратуры

$$t - t_0 = \int_{D_0}^{D} \frac{dD}{\left(\frac{\bar{k}_1}{\bar{a}}\sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}} - \bar{k}_2 n'\right) - 2\bar{k}_1\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{a}} - 2\bar{k}_2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{p}}}. \tag{2.85}$$

Найдя $D=D(t)$, $\bar{a}=\bar{a}(t)$, $\bar{p}=\bar{p}(t)$, далее из квадратуры

$$\bar{\omega} - \bar{\omega}_0 = -2\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{p}}\,dt \tag{2.86}$$

находим зависимость $\bar{\omega}$ от времени t.

Итак, первая схема усреднения Делоне — Хилла для плоской ограниченной круговой задачи трех тел описывается системой дифференциальных уравнений четвертого порядка (2.79), для которой общее решение может быть найдено. Этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем (см. гл. IV).

§ 2.10. Вторая схема Делоне — Хилла для ограниченной круговой задачи трех тел

Введем обобщенную аномалию Делоне $\widetilde{D}$ по формуле

$$\widetilde{D}=\frac{n'}{n}M+\Omega-l', \tag{2.87}$$

где

$$n'=\frac{1}{a'}\sqrt{\frac{f(m+\mu)}{a'}},\quad n=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{fm}{a}}$$

— средние движения возмущающей (с массой μ) и возмущаемой точек соответственно. Если выразить из (2.87) переменную $\widetilde{\Omega}=\Omega-l'$ через $\widetilde{D}$ и M, то тогда будем иметь, что возмущающая функция

$$R(a,\ p,\ i,\ M,\omega,\ \widetilde{\Omega})=R_1(a,\ p,\ i,\ M,\omega,\ \widetilde{D}), \tag{2.88}$$

или, в развернутой форме [см. (2.45)]

$$R_1(a,\ p,\ i,\ M,\ \omega,\ \widetilde{D})=$$

$$=fm'\sum_{k_1=0}^{\infty}\ \sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\ \sum_{k_3=-\infty}^{\infty}C_{k_1,k_2k_3}(a,\ p,\ i)\cos\left[\frac{k_1n-k_2n'}{n}M+\right.$$

$$\left.+k_2\widetilde{D}+k_3\omega\right]. \tag{2.89}$$

Из (2.89) следует, что функция R_1 является почти-периодической функцией в смысле Бора [37] относительно M.

Усредняя теперь функцию (2.89) по M и считая другие элементы в этом процессе постоянными, получим возмущающую функцию для второй схемы усреднения Делоне — Хилла [35]:

$$\overline{R}(a,\ p,\ i,\ \omega,\ \widetilde{D})=\lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}\int_0^P R_1(a,\ p,\ i,\ M,\ \omega,\ \widetilde{D})\,dM. \tag{2.90}$$

Среднее значение $\overline{R}$, вычисленное по формуле (2.90), существенно зависит от арифметических свойств чисел n и n'. Если, например, отношение $n:n'$ является рациональным числом, то вторая схема Делоне — Хилла сводится к первой, рассмотренной в предыдущем параграфе. Если n и n' несоизмеримы, то в этом случае

$k_1 n - k_2 n' = 0$ только при $k_1 = k_2 = 0$ и

$$\overline{R} = fm' \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{0,\,0,\,k_3}(a, p, i) \cos k_3 \omega.$$

Система дифференциальных уравнений для второй схемы усреднения Делоне — Хилла может быть получена из системы (2.44), если заменить в них возмущающую функцию R ее средним значением (2.90).

Н. Д. Моисеев показал [35], что эта система имеет два первых интеграла, которых, однако, недостаточно для полного интегрирования:

$$\frac{fm}{2\overline{a}} + \sqrt{fm\overline{p}} \cos \overline{i} = c_1, \qquad \overline{R} = c_2. \tag{2.91}$$

В заключение заметим, что уравнения второй схемы усреднения Делоне — Хилла для плоской ограниченной круговой задачи трех тел интегрируются полностью в квадратурах [17]. Эти уравнения имеют такой вид:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\overline{a}}{dt} = \frac{2n'\overline{a}^2}{fm} \frac{\partial \overline{R}}{\partial \widetilde{D}},\\
&\frac{d\overline{p}}{dt} = 2\sqrt{\frac{\overline{p}}{fm}} \frac{\partial \overline{R}}{\partial \widetilde{D}},\\
&\frac{d\overline{M}}{dt} = \frac{1}{\overline{a}}\sqrt{\frac{fm}{\overline{a}}} - 2\sqrt{\frac{\overline{a}}{fm}} \left(\frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{a}}\right) - \\
&\qquad\qquad - \frac{3n'\overline{a}\overline{M}}{fm} \frac{\partial \overline{R}}{\partial \widetilde{D}},\\
&\frac{d\overline{\overline{\omega}}}{dt} = -n' - 2\sqrt{\frac{\overline{p}}{fm}} \frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{p}},\\
&\widetilde{D} = \frac{n'}{n} M + \omega - l'.
\end{aligned}\right. \tag{2.92}$$

В третьем уравнении $\left(\frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{a}}\right)$ означает частную производную $\overline{R}$ по $\overline{a}$, входящей явно, а не через посредство $\widetilde{D}$.

Два первых интеграла уравнений (2.92) находим из аналогичных интегралов (2.91) для пространственной задачи, полагая в последних $\bar{i}=0$:

$$\frac{fm}{2\bar{a}}+\sqrt{fm\bar{p}}=c_1', \qquad (2.93)$$

$$\bar{R}=c_2'.$$

Из этих интегралов возможно определить функции $\bar{a}=\bar{a}(\tilde{D})$ и $\bar{p}=\bar{p}(\tilde{D})$. Пользуясь этими зависимостями, обращая квадратуру

$$t-t_0=\int_{D_0}^{D}\frac{d\tilde{D}}{-\frac{2n'\bar{a}^2}{fm}\left(\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{a}}\right)-2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{p}}}, \qquad (2.94)$$

находим функциональную зависимость $\tilde{D}=\tilde{D}(t)$.

Далее, квадратура

$$\bar{\omega}-\bar{\omega}_0=-2\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{p}}dt \qquad (2.95)$$

приводит к полному решению задачи.

§ 2.11. Схема Н. Ф. Рейн для ограниченной плоской эллиптической задачи трех тел

В § 2.7 была изложена схема усреднения, разработанная Фату для ограниченной круговой задачи трех тел. Ему же принадлежит [38] детализация схемы Гаусса вычисления вековых возмущений первого порядка для ограниченной эллиптической задачи трех тел, в основу которой положено усреднение по всем средним аномалиям.

Н. Ф. Рейн предложила [39] другую схему усреднения дифференциальных уравнений ограниченной эллиптической задачи, обладающую двумя достоинствами: во-первых, она более точно учитывает эффект эллиптичности орбит возмущающих точек, а во-вторых, она позволяет получить интеграл Якоби.

В этом смысле схема Н. Ф. Рейн для ограниченной эллиптической задачи трех тел может быть изучена принципиально столь же подробно, как и ограниченная круговая задача трех тел.

Рассмотрим барицентрическую равномерно вращающуюся с угловой скоростью n прямоугольную систему координат Oxy, в плоскости которой движутся притягивающие точки P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2 и возмущаемая точка P. Тогда дифференциальные уравнения движения точки P имеют вид [31]

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}-2n\frac{dy}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x},\\ &\frac{d^2y}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}=\frac{\partial U}{\partial y}.\end{aligned}\right. \tag{2.96}$$

Силовая функция U представляется равенством

$$U=\frac{n^2(x^2+y^2)}{2}+\frac{fm_1}{r_1}+\frac{fm_2}{r_2}, \tag{2.97}$$

где $r_i^2=(x-x_i)^2+(y-y_i)^2 \quad (i=1,\,2)$.

Для круговой задачи

$$x_1=-a_1,\quad x_2=a_2,$$
$$y_1=0,\qquad y_2=0,$$

где a_1, a_2 — радиусы круговых орбит точек P_1 и P_2.

В ограниченной эллиптической задаче притягивающие точки P_1 и P_2 движутся по кеплеровым эллипсам с эксцентриситетом e и средним движением n. В системе Oxy точки P_1 и P_2 движутся по замкнутым кривым, окружающим некоторые «средние» точки $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ с координатами:

$$\bar{x}_1=-a_1,\quad \bar{x}_2=a_2,$$
$$\bar{y}_1=0,\qquad \bar{y}_2=0.$$

Закон движения точек P_1 и P_2 около $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ определяется формулами

$$\left\{\begin{aligned} x_1&=-a_1\frac{(1-e^2)\cos(v-nt)}{1+e\cos v},\\ y_1&=-a_1\frac{(1-e^2)\sin(v-nt)}{1+e\cos v},\\ x_2&=a_2\frac{(1-e^2)\cos(v-nt)}{1+e\cos v},\\ y_2&=a_2\frac{(1-e^2)\sin(v-nt)}{1+e\cos v}.\end{aligned}\right. \tag{2.98}$$

В формулах (2.98) v — истинная аномалия одной из притягивающих точек P_1 и P_2. Очевидно, что

$$
\begin{aligned}
&x_1(0)=x_1(T)=-a_1(1-e) && x_2(0)=x_2(T)=a_2(1-e),\\
&y_1(0)=y_1(T)=0, && y_2(0)=y_2(T)=0,\\
&x_1\left(\frac{T}{2}\right)=-a_1(1+e), && x_2\left(\frac{T}{2}\right)=a_2(1+e),\\
&y_1\left(\frac{T}{2}\right)=0, && y_2\left(\frac{T}{2}\right)=0, \quad T=\frac{2\pi}{n}.
\end{aligned}
$$

Известно, что в задаче двух тел истинная аномалия v, рассматриваемая как явная функция времени t, выражается с помощью бесконечного ряда, коэффициенты которого зависят от эксцентриситета e. Отсюда вытекает, что x_1, x_2, y_1, y_2 также представляются бесконечными рядами. Если в этих рядах сохранить только члены, пропорциональные e, то будем иметь

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_1 &\approx -a_1(1-e\cos nt),\\
y_1 &\approx -2a_1 e\sin nt,\\
x_2 &\approx a_2(1-e\cos nt),\\
y_2 &\approx 2a_2 e\sin nt.
\end{aligned}
\right. \tag{2.99}
$$

Таким образом, следуя Н. Ф. Рейн, мы будем считать, что притягивающие точки P_1 и P_2 движутся не по кривым (2.98), а по эллипсам (2.99), центры которых совпадают с $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ и полуоси которых суть

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 2a_1 e, \quad & A_2 &= 2a_2 e,\\
B_1 &= a_1 e, \quad & B_2 &= a_2 e.
\end{aligned} \tag{2.100}
$$

Вычислим усредненное значение силовой функции U по формуле Н. Ф. Рейн [39]:

$$
\overline{U}=\frac{n^2(x^2+y^2)}{2}+\frac{fm_1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{n\,dt}{r_1}+\frac{fm_2}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{n\,dt}{r_2}. \tag{2.101}
$$

Схема усреднения (2.101) указывает на то, что притяжение масс m_1 и m_2 заменяется притяжением неподвижных эллиптических колец с массами m_1 и m_2 и с размерами (2.100).

В отличие от схемы Фату, в схеме Н. Ф. Рейн усредняется только тот остаток, которым кеплерово эллиптическое движение притягивающих точек P_1 и P_2 отличается от равномерного кругового.

Для схемы Н. Ф. Рейн уравнения имеют вид

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}-2n\frac{d\bar{y}}{dt}=\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{x}},\\ &\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}+2n\frac{d\bar{x}}{dt}=\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}}.\end{aligned}\right. \tag{2.102}$$

Так как $\bar{U}$ не зависит явно от времени, то уравнения (2.102) допускают интеграл Якоби

$$\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2=2(\bar{U}+h). \tag{2.103}$$

Интеграл (2.103) позволяет провести качественный анализ в этом варианте усредненной ограниченной эллиптической задачи, названном автором «полуосредненной ограниченной эллиптической проблемой трех тел».

ГЛАВА III

ОБОСНОВАНИЕ СХЕМ УСРЕДНЕНИЯ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 3.1. Обоснование схемы Гаусса для ограниченной круговой задачи трех тел

В § 2.6 мы показали, что усреднение возмущающей функции ограниченной круговой задачи трех тел по средней аномалии возмущаемой точки и долготе возмущающего тела приводит к одному из интегрируемых вариантов задачи трех тел. Этот упрощенный вариант описывается системой дифференциальных уравнений шестого порядка (2.49).

Уравнения (2.49) составляют усредненную по Гауссу систему первого приближения в терминологии Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского для дифференциальных уравнений (2.44) ограниченной задачи трех тел. С другой стороны, в § 1.7 нами были изложены результаты В. И. Арнольда по обоснованию метода усреднения по быстрым угловым переменным для двухчастотной системы дифференциальных уравнений. Там же было показано, что для оценки разности решений точных и усредненных уравнений существенную роль играют условия (1.57) или (1.58), названные *условием А*. Так как дифференциальные уравнения ограниченной задачи трех тел (2.44) представляют собой частный случай уравнений (1.53), рассмотренных В. И. Арнольдом, а уравнения (2.49), определяющие переменные $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{i}$, $\bar{\omega}$, являются уравнениями вида (1.54), вопрос обоснования метода Гаусса сводится к определению той области шестимерного фазового пространства (a, p, i, M, ω, Ω), в точках которой выполняется условие (1.57) или (1.58). В этой области пространства гарантируется выполнение оценок вида

$$|a(t)-\bar{a}(t)|\sim\sqrt{\mu}\ln^2\left(\frac{1}{\mu}\right),\quad |p(t)-\bar{p}(t)|\sim\sqrt{\mu}\ln^2\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

$$|i(t)-\bar{i}(t)|\sim\sqrt{\mu}\ln^2\left(\frac{1}{\mu}\right),\quad |\omega(t)-\bar{\omega}(t)|\sim\sqrt{\mu}\ln^2\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

где μ — масса возмущающего тела (в §§ 2.6—2.11 для нее было использовано обозначение m').

Положим $f=1$, $m=1$. Функции ω_1 и ω_2, названные в § 1.7 частотами, являются средними движениями пассивно гравитирующей и притягивающей точек, поэтому имеем известные соотношения:

$$n=\omega_1(a)=\frac{1}{a^{3/2}}, \quad n'=\omega_2(a')=\frac{\sqrt{1+m'}}{(a')^{3/2}}. \qquad (3.01)$$

В ограниченной задаче $n'=\omega_2(a')$ — постоянная величина.

Выражение (1.58) для ограниченной задачи трех тел имеет вид

$$A(a, p, i, M, \omega, \Omega)=\left|\frac{3n'}{m'a^2}\frac{\partial R}{\partial M}\right|>0. \qquad (3.02)$$

Таким образом, мы должны найти в фазовом пространстве кеплеровых элементов такие связные области, в которых, во-первых, достаточно долго (в промежутке времени $\sim 1/\mu$) движется возмущаемая точка и, во-вторых, для всех точек этих областей выполняется неравенство (3.02). Заметим также, что условие (3.02) является общим и для ограниченной эллиптической, и для ограниченной круговой задачи, как в пространственном, так и в плоском вариантах; различие появляется лишь при использовании той или иной формы разложения функции R.

Для пространственной ограниченной круговой задачи трех тел условие (3.02) имеет вид

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\sum_{k_3=-\infty}^{\infty} k_1 C_{k_1,k_2,k_3}(a, p, i)\sin(k_1 M+$$
$$+k_2\widetilde{\Omega}+k_3\omega)\,|>0. \qquad (3.03)$$

Аналогично, для плоского варианта круговой задачи будем иметь

$$\left|\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} k_1 C_{k_1,k_2}(a, p)\sin(k_1 M+k_2\widetilde{\omega})\right|>0. \qquad (3.04)$$

В неравенствах (3.03) и (3.04) коэффициенты C_{k_1,k_2,k_3} и $C_{k_1,k}$, как известно, являются степенными рядами, связанными, в конечном итоге, с коэффициентами Лапласа.

Решение неравенств типа (3.03) и (3.04) в общем виде встречает огромные трудности, поэтому представляется разумным наложение каких-либо дополнительных ограничений. Сохраним в разложении возмущающей функции R лишь члены, содержащие e^0, e, e^2 и предположим, что $a/a'=\alpha<1$, $i=0$. Будем иметь [31]:

$$\frac{\partial R}{\partial M}=\frac{m'}{a'}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{2}c_1^{(k)}+\frac{e^2}{8}\left(-4k^2c_1^{(k)}+D\left(c_1^{(k)}\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+D^2\left(c_1^{(k)}\right)\right)\right]k\sin kS-\frac{e}{2}\left[2kc_1^{(k)}+D\left(c_1^{(k)}\right)\right](k-1)\times$$
$$\times\sin(kS+M)+\frac{e^2}{8}\left[4k^2c_1^{(k)}-5kc_1^{(k)}+(4k-3)D\left(c_1^{(k)}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+D^2\left(c_1^{(k)}\right)\right](k-2)\sin(kS+2M)\right\}-\frac{m'a}{(a')^2}\left[\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\sin S+\right.$$
$$+e\sin(S-l+\omega)-\frac{e^2}{8}\sin(S+2l-2\omega)+$$
$$\left.+\frac{9e^2}{8}\sin(S-2l+2\omega)\right], \tag{3.05}$$

где

$$c_1^{(k)}=\frac{2\,(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\alpha^kF\left(\frac{1}{2},\,k+\frac{1}{2},\,k+1;\,\alpha^2\right), \tag{3.06}$$

$$D^s\left(c_1^{(k)}\right)=\frac{d^sc_1^{(k)}}{(d\ln\alpha)^s},\quad (s=1,\ 2) \tag{3.07}$$

$$S=l'-l, \tag{3.08}$$

$$l=M+\omega, \tag{3.09}$$

а $F\left(\frac{1}{2},\,k+\frac{1}{2},\,k+1,\,\alpha^2\right)$ — сумма гипергеометрического ряда, l' — долгота возмущающего тела.

Пользуясь рекуррентным соотношением Ньюкома [31], можно выразить производные $D^s\left(c_1^{(k)}\right)$ также с помощью гипергеометрических рядов. Это соотношение имеет вид

$$D^{s+1}\left(c_1^{(k)}\right)=kD^s\left(c_1^{(k)}\right)+D^s\left(c_1^{k,1}\right), \tag{3.10}$$

где

$$c_1^{k,1}=\frac{2\,(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\alpha^{k+2}F\left(\frac{3}{2},\ k+\frac{3}{2},\ k+2,\ \alpha^2\right). \qquad (3.11)$$

Из формулы (3.10) легко выводятся нужные нам производные $D\left(c_1^{(k)}\right)$ и $D^2\left(c_1^{(k)}\right)$:

$$D\left(c_1^{(k)}\right)=kc_1^{(k)}+c_1^{k,1},\quad D^2\left(c_1^{(k)}\right)=k^2c_1^{(k)}+(k+3)c_1^{k,1}+c_1^{k,2}, \qquad (3.12)$$

где

$$c_1^{k,2}=\frac{6\,(2k+3)!!}{(2k+4)!!}\,\alpha^{k+4}F\left(\frac{5}{2},\ k+\frac{5}{2},\ k+3;\ \alpha^2\right). \qquad (3.13)$$

Подставляя выражения (3.12) в (3.05) и учитывая равенства (3.06), (3.11) и (3.13), мы получаем основное неравенство, являющееся частным случаем неравенства (3.04). Оно имеет вид

$$|I_0+eI_1+e^2I_2|>0, \qquad (3.14)$$

где

$$I_0=-\left[\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^3+\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}\alpha^5+\cdots\right]\sin(M+\tilde{\omega})-$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}kc_1^{(k)}\sin(kM+k\tilde{\omega}), \qquad (3.15)$$

$$\tilde{\omega}=\omega-l',$$

$$I_1=\alpha\sin(2M+\tilde{\omega})+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(3kc_1^{(k)}+c_1^{k,1}\right)(k-1)\sin((k-1)M+k\tilde{\omega}), \qquad (3.16)$$

$$I_2=-\frac{\alpha}{2}\sin(M+\tilde{\omega})+\frac{\alpha}{8}\sin(M-\tilde{\omega})+\frac{9\alpha}{8}\sin(3M+\tilde{\omega})-$$

$$-\frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big\{\left[(-3k^2+1)c_1^{(k)}+(k+4)c_1^{k,1}+c_1^{k,2}\right]k\sin(kM+$$

$$+k\tilde{\omega})+\left[(9k^2-8k)c_1^{(k)}+5kc_1^{k,1}+c_1^{k,2}\right](k-2)\sin((k-2)M+$$

$$+k\tilde{\omega})\Big\}. \qquad (3.17)$$

Неравенство (3.14) должно выполняться для всех $\tilde{M}$ и $\tilde{\omega}$, если a и e принадлежат области G_2, которая может быть выбрана нами. Оно заведомо не выполняется при $\tilde{M}=\tilde{\omega}=0$, какой бы ни была область G_2.

Если область G_2 является прямым произведением отрезка $A=[\alpha a', \beta a']$, $(0<\alpha<\beta<1)$ на отрезок $E=[0, \varepsilon]$, $0\leqslant e\leqslant\varepsilon\ll 1$ (она, очевидно, представляет собой в трехмерном евклидовом пространстве кольцо с радиусами $\alpha a'$ и $\beta a'$, в котором расположены почти круговые орбиты) и движение пассивно гравитирующей точки таково, что на достаточно большом промежутке времени порядка $1/\mu$ элементы $\tilde{M}(t)$ и $\tilde{\omega}(t)$ не обращаются в нуль одновременно, то эти ограничения гарантируют выполнение неравенства (3.14).

Таким образом, принципиально возможно существование областей в четырехмерном пространстве $(a, e, \tilde{M}, \tilde{\omega})$, в которых выполняется условие (3.14).

§ 3.2. Обоснование схемы Гаусса для плоской двухпланетной задачи

Условие (1.58), приведенное в первой главе, для плоской задачи трех тел, среди которых одно имеет намного бо́льшую массу, чем два других тела, называемых планетами, с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$\left|-\frac{n_1}{a_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial M_1}+\frac{n_2}{a_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial M_2}\right|>0. \qquad (3.18)$$

Трансцендентное неравенство (3.18) более громоздко, чем аналогичное условие (3.02) для плоской ограниченной задачи трех тел, поэтому отыскание связных областей восьмимерного фазового кеплерова пространства $(a_1, a_2, e_1, e_2, \omega_1, \omega_2, M_1, M_2)$, в которых оно выполняется, встречает колоссальные трудности. Если одна из планет имеет значительно меньшую, но не равную нулю, массу $(0<m_1\ll m_2\ll 1)$, исследование решений неравенства (3.18) сводится к исследованиям предыдущего параграфа.

В заключение заметим, что условие (1.58) для n-планетной задачи аналогично условию (3.18).

§ 3.3. Обоснование метода Делоне — Хилла

Методы усреднения Делоне — Хилла, подробно изложенные в работах Н. Д. Моисеева [17, 35], принадлежат, как было замечено выше, к схемам усреднения вдоль порождающего решения.

Рассмотрим более подробно так называемую однократно усредненную схему Делоне — Хилла для ограниченной круговой задачи трех тел.

Пусть невозмущенные средние движения (частоты) возмущаемого и возмущающего тел удовлетворяют условию резонанса

$$\bar{k}_1 n_1^{(0)} - \bar{k}_2 n_2^{(0)} = 0, \tag{3.19}$$

где $\bar{k} = (\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ — некоторый конкретный целочисленный вектор с нормой $\|\bar{k}\| \neq 0$. В этом случае будет существовать бесчисленное множество векторов $s\bar{k}$ ($s = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$), коллинеарных с вектором $\bar{k}$, для которых

$$s\bar{k}_1 n_1^{(0)} - s\bar{k}_2 n_2^{(0)} = 0.$$

Если ввести аномалию Делоне для плоского варианта ограниченной круговой задачи трех тел по формуле

$$D = \bar{k}_1 M + \bar{k}_2 \tilde{\omega}, \tag{3.20}$$

то разложение возмущающей функции принимает вид

$$R = fm' \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} C_{k_1,k_2}(a, p)\, e^{i\left(\frac{k_1\bar{k}_2 - k_2\bar{k}_1}{\bar{k}_2} M + \frac{k_2}{\bar{k}_2} D\right)}. \tag{3.21}$$

Вычислим аномалию Делоне для невозмущенной задачи. Будем иметь

$$D^{(0)} = \bar{k}_1 M^{(0)} + \bar{k}_2 \tilde{\omega}^{(0)} = \bar{k}_1 \left(n_1^{(0)} t + M_0^{(0)}\right) + \\ + \bar{k}_2 \left(\omega^{(0)} - n_2^{(0)} t\right) = \bar{k}_1 M_0^{(0)} + \bar{k}_2 \omega^{(0)}. \tag{3.22}$$

Из соотношения (3.22) вытекает, что $D^{(0)}$ постоянна и, следовательно, в возмущенной задаче аномалия Делоне D будет медленной переменной. Таким образом, с помощью соотношения (3.20) мы исключили из разложения возмущающей функции $\tilde{R}$ одну из быстрых переменных $\tilde{\omega}$. Это оказалось возможным благодаря соизмеримости средних движений (3.19) и введению медленной угловой переменной — аномалии Делоне.

В процессе усреднения вдоль порождающего решения быстрая переменная M заменяется выражением $n_1 t + M_0$, а все остальные элементы (a, p, D) считаются постоянными, так как в задаче двух тел $a = \text{const}$, $p = \text{const}$, $D = \text{const}$.

В разложении (3.21) лишь те слагаемые имеют отличные от нуля средние значения, для которых $k_1\bar{k}_2 - k_2\bar{k}_1 = 0$. Отсюда вытекает, что $k_1 = s\bar{k}_1$, $k_2 = s\bar{k}_2$ (s — любое целое число).

Таким образом, среднее значение возмущающей функции R, вычисленное по схеме Делоне — Хилла, представляет собой результат усреднения по части быстрых переменных (см. §§ 1.9—1.11):

$$\bar{R}(a, p, D) = fm' \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{s\bar{k}_1, s\bar{k}_2}(a, p)\, e^{isD}. \qquad (3.23)$$

Аналогичные преобразования можно выполнить и с возмущающей функцией для пространственной ограниченной круговой задачи трех тел, если воспользоваться выражением для аномалии Делоне (2.71).

$$D = \bar{k}_1 M + \bar{k}_2(\Omega - l').$$

В этом случае усредненное значение возмущающей функции (2.74) можно записать следующим образом:

$$\bar{\bar{R}}(a, p, i, D, \omega) = fm' \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} C_{s\bar{k}_1, s\bar{k}_2, k_3}(a, p, i)\, e^{i(sD + k_3\omega)}. \qquad (3.24)$$

Правые части дифференциальных уравнений ограниченной круговой задачи трех тел (2.44) — аналитические функции во всем пространстве, за исключением тех точек, в которых возможно соударение бесконечно малой массы с одним из притягивающих тел. В ограниченной круговой задаче трех тел существуют такие связные области трехмерного пространства, в которых движение происходит вечно без соударений. Например, такой областью является часть трехмерного пространства, расположенная вне квазицилиндрической поверхности Хилла S (рис. 1). Квазицилиндрическая поверхность S соответствует внешнему замкнутому контуру двусвязной кривой h_1 (рис. 2) *). Эта часть евклидова пространства и может быть взята в качестве области G_{m+n}, фигурирующей в наших теоремах из §§ 1.12 и 1.14.

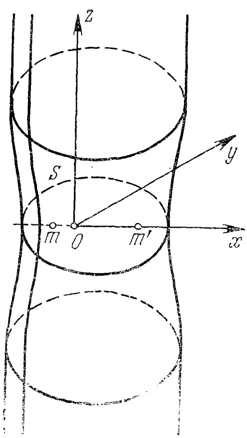

Рис. 1.

В области G_{m+n} выполняются все условия теоремы § 1.14. Действительно:

1. Вектор средних движений (частот) бесконечное число раз дифференцируем.

2. $X(x, y)$, $Y(x, y)$ аналитичны по всем переменным x и y, где компонентами вектора медленных движений x в пространственной ограниченной задаче являются кеплеровы элементы a, p, i, ω, а компонентами вектора быстрых движений y являются средняя аномалия M и $\widetilde{\Omega}=\Omega-l'$ (l' — долгота возмущающего тела). Кроме того, вектор-функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ периодичны по y.

3. В качестве постоянной C, ограничивающей нормы $\|X(x, y)\|$, $\|Y(x, y)\|$, $\|\omega(x)\|$ в G_{m+n} можно взять величину

$$C=\frac{3\sqrt{3fm}}{\inf\limits_{s}\varrho\,[s,m']},$$

где $\inf\limits_{S}\varrho\,[S, m']$ означает точную нижнюю грань расстояния между любой точкой поверхности S и притягивающей массой m'. Выбранное значение C пригодно для любых движений, оскулирующий эксцентриситет которых не превышает 0,96.

*) На рис. 2 через h_1, h_2, h_3, h_4 обозначены различные числовые значения постоянной Якоби h и построены соответствующие граничные кривые Хилла.

4. Так как абсолютные величины частных производных частот $\omega(x)$ по медленным переменным x (в обозначениях §§ 1.12, 1.14) убывают как $\|x\|^{-5/2}$ при $\|x\| \to \infty$, для достаточно далеких движений их можно сделать достаточно малыми и, в частности, они могут стать

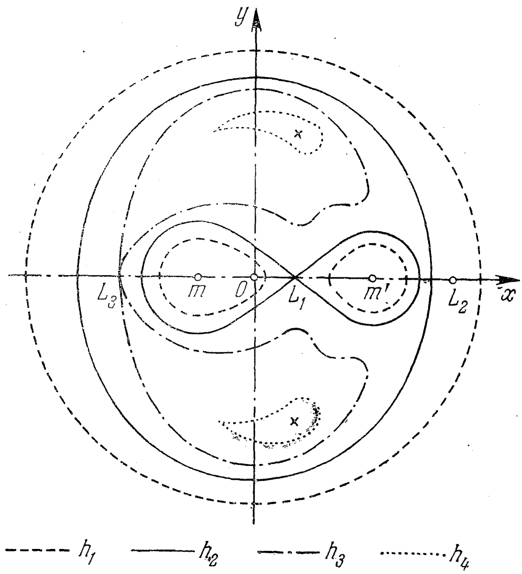

Рис. 2.

меньше величины $\tilde{C}\alpha$ (см. § 1.14), характеризующей резонанс в начальный момент.

5. Движение бесконечно малой массы происходит вечно вне поверхности S, если она была в этой части пространства в начальный момент, следовательно, условие $(x(t), y(t)) \in G_{m+n}$ при $t \in (-\infty, \infty)$ также выполняется.

Перечисленные условия дают возможность использовать выводы теоремы из § 1.14, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\mu_0(\varepsilon) > 0$, что при всех $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0(\varepsilon)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ справедливы неравенства $\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$, $\|y(t) - y(t)\| < \varepsilon$, где $(x(t), y(t))$ — точное решение дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел (2.44), а $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ — решение уравнений (2.75).

Для плоской ограниченной задачи трех тел справедлив также следующий результат. Для некоторых соизмеримостей средних движений на бесконечном интервале времени, а, следовательно, тем более на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1/\mu$, средние движения $\omega(\bar{x})$ отличаются от своих начальных значений на величину порядка μ:

$$\omega(\bar{x}) = \omega_0 + \mu\beta(\bar{x}(t)), \tag{3.25}$$

где $\beta(\bar{x}(t))$ — ограниченная всюду функция. Условие (3.25) означает, что в плоской ограниченной задаче трех тел $\left\| \frac{\partial\omega(\bar{x})}{\partial\bar{x}} \right\|$ может быть величиной не только порядка α, но даже порядка μ (вообще говоря, $\mu < \alpha$).

Определим эти резонансы.

Усредненная по Делоне — Хиллу плоская ограниченная круговая задача имеет первый интеграл [24]

$$\bar{a}(t) = a_0 \frac{\left(\bar{k}_2 - \bar{k}_1\sqrt{1-e_0^2}\right)^2}{\left(\bar{k}_2 - \bar{k}_1\sqrt{1-e^2}\right)^2}, \tag{3.26}$$

где $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ — целые положительные числа, удовлетворяющие условию резонанса $\bar{k}_1 n_1(a_0) - \bar{k}_2 n_2 = 0$, a_0, e_0 — начальные значения большой полуоси и эксцентриситета, соответствующие резонансу.

Если, кроме того, движение устойчиво в смысле Лагранжа — Хилла [40], т. е. выполняются условия $h < h_{L_2}$, $a_0 < R_{L_2}$ (h — постоянная интеграла Якоби для данной орбиты, h_{L_2} — постоянная интеграла Якоби для точки либрации L_2, R_{L_2} — барицентрическое расстояние точки L_2), то на бесконечном интервале $\bar{a}(t)$ — ограничена и

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \bar{a}(t) = a_0 \frac{\left(\bar{k}_2 - \bar{k}_1\sqrt{1-e_0^2}\right)^2}{\left(\bar{k}_2 - \bar{k}_1\right)^2},$$

$$\inf_{t\in[0,\infty)} \bar{a}(t) = a_0 \frac{\left(\bar{k}_2 - \bar{k}_1\sqrt{1-e_0^2}\right)^2}{\bar{k}_2^2},$$

если $\bar{k}_1 \neq \bar{k}_2$.

Отсюда следует, что наибольшая амплитуда изменения большой полуоси при $t \in [0, \infty)$ равна

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \Delta\bar{a}(t) = \frac{a_0}{2}\left[\frac{\left(\bar{k}_2 - \bar{k}_1\sqrt{1-e_0^2}\right)^2}{(\bar{k}_2 - \bar{k}_1)^2} - \frac{\left(\bar{k}_2 - \bar{k}_1\sqrt{1-e_0^2}\right)^2}{\bar{k}_2^2}\right].$$

Из последней формулы вытекает, что существуют такие резонансы, т. е. такие отношения $\bar{k}_1 : \bar{k}_2$, для которых всегда

$$\sup \Delta\bar{a}(t) = O(\mu).$$

Это имеет место, если $k_1/\bar{k}_2 \sim \mu$. Для таких значений $\tilde{k}_1$ и $\bar{k}_2$ и для всех $t \geqslant 0$ $\bar{a}(t) = a_0 + O(\mu)$ и, следовательно,

$$n_1(\bar{a}(t)) = n_1(a_0) + O(\mu). \tag{3.27}$$

Для рассматриваемых резонансов система дифференциальных уравнений плоской ограниченной задачи трех тел является стандартной в смысле Н. Н. Боголюбова и для построения оценок вида $\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mu}$ можно пользоваться результатами Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [4], А. Н. Филатова и Г. С. Ларионова [8].

Усредненная пространственная круговая задача трех тел имеет интеграл (2.17); анализируя его, можно показать, что, по крайней мере для малых наклонностей, аналогичные результаты имеют место.

§ 3.4. Связь между средними элементами Ганзена и методом усреднения

Известно, что значения произвольных постоянных, появляющихся при интегрировании уравнений возмущенного движения, можно определять из различных условий. Если при построении аналитической или численной теории движения небесных тел воспользоваться дифференциальными уравнениями для оскулирующих элементов и при этом определять произвольные постоянные интегрирования из условия, что в начальный момент $t=0$ возмущения элементов или координат и их производных равны нулю, мы получаем так называемую «систему оскулирующих элементов». Но при сравнении теорий движения с наблюдениями или с результатами численного интегрирования было замечено не один раз, что такие теории удовлетворительны для относительно небольшого интервала времени, хотя для наблюдений, эпоха которых совпадает или близка с начальным моментом, имеется прекрасное согласие.

Это обстоятельство побудило П. Ганзена предложить так называемую «систему средних элементов». По Ганзену, средние элементы определяются не из условия равенства нулю возмущений и их производных в момент $t=0$, а из условия равенства нулю коэффициентов при самых значительных возмущениях. Само собой разумеется, что при $t=0$ возмущения и их производные уже не равны нулю, но зато теории, основанные на средних элементах Ганзена, согласуются с наблюдениями достаточно хорошо на больших промежутках времени. Об этом свидетельствуют системы средних элементов, использованные во многих теориях движения [42, 43, 45].

Этому факту можно дать математическое обоснование.

В §§ 1.12 и 1.14 была изложена основанная на методе усреднения теория возмущений для дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\mu X(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt}=\omega(x)+\mu Y(x, y) \end{cases} \tag{1.134}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt}=\mu X(p+x_0,\ q+\omega_0 t+y_0), \\ \dfrac{dq}{dt}=\omega(p+x_0)-\omega(x_0)+\mu Y(p+x_0,\ q+\omega_0 t+y_0), \end{cases} \tag{1.140}$$

типичных для небесной механики.

Уравнения (1.140) решаются с помощью асимптотических рядов (1.147):

$$p=\bar{p}+\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s u_s(\bar{p},\ \bar{q},\ t).$$

$$q=\bar{q}+\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s v_s(\bar{p},\bar{q},\ t),$$

в которых $(\bar{p}(t),\ \bar{q}(t))$ — решение усредненных уравнений.

При построении теории в первом приближении искомые функции $p(t)$, $q(t)$ определяются соотношениями

$$\left\{\begin{array}{l} p(t)=\bar{p}(t)+\mu u_1(\bar{p},\ \bar{q},\ t), \\ q(t)=\bar{q}(t)+\mu v_1(\bar{p},\ \bar{q},\ t), \end{array}\right. \tag{3.28}$$

где вектор-функции $u_1(\bar{p},\ \bar{q},\ t)$ и $v_1(\bar{p},\ \bar{q},\ t)$ в общем случае определяются формулами

$$u_1(\bar{p},\ \bar{q},\ t)=\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{X_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i\,(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{i\,(k,\omega(\bar{p}+x_0))}+\varphi_1(\bar{p}), \tag{1.153}$$

$$v_1(\bar{p},\bar{q},\ t)=\frac{\partial\omega(\bar{p}+x_0)}{\partial\bar{p}}\times$$

$$\times\left(\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{X_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i\,(k,\bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{i^2(k,\omega(\bar{p}+x_0))^2}+\varphi_1(\bar{p})t\right)+$$

$$+\sum_{1\leqslant\|k\|\leqslant N}'' \frac{Y_k(\bar{p}+x_0)\,e^{i\,(k,\ \bar{q}+\omega_0 t+y_0)}}{i\,(k,\omega(\bar{p}+x_0))}+\psi_1(\bar{p}). \tag{3.29}$$

В формуле (3.29), в отличие от (1.54), фигурирует слагаемое $\varphi_1(\bar{p})t$.

Для построения теории движения конкретных объектов необходимо однозначно определить вектор-функции $\varphi_1(\bar{p})$ и $\psi_1(\bar{p})$.

Если для этого используется система оскулирующих элементов, то $\varphi_1(\bar{p})$ и $\psi_1(\bar{p})$ должны удовлетворять по меньшей мере условиям

$$\left\{\begin{array}{l} \delta_1 p\,|_{t=0}=\mu u_1(\bar{p}(0),\bar{q}(0),\ 0)=0, \\ \delta_1 q\,|_{t=0}=\mu v_1(\bar{p}(0),\bar{q}(0),\ 0)=0. \end{array}\right. \tag{3.30}$$

Из (3.30) вытекает, что $\varphi_1(\bar{p}) \not\equiv 0$, $\psi_1(\bar{p}) \not\equiv 0$, а это в свою очередь приводит к появлению «лишних» вековых членов в формулах для возмущений и делает невозможным построение тригонометрической теории движения небесных тел. Под тригонометрической теорией мы подразумеваем выражение медленных переменных p (большая полуось, эксцентриситет, угловое расстояние перицентра и другие аналогичные им элементы) в виде условно-периодических функций времени, а быстрых переменных q (долготы, аномалии) в виде суммы условно-периодических и линейных функций времени.

Идея средних элементов Ганзена заключается в том, что приравниваются нулю вектор-функции $\varphi_1(\bar{p})$, $\psi_1(\bar{p})$,

$$\varphi_1(\bar{p}) \equiv 0, \quad \psi_1(\bar{p}) \equiv 0, \tag{3.31}$$

порождающие вековые возмущения.

В этом случае

$$\delta_1 p\,|_{t=0} = \mu \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N}'' \frac{X_k(\bar{p}(0) + x_0)\, e^{i(k, \bar{q}(0) + y_0)}}{i\,(k, \omega(\bar{p}(0) + x_0))}, \tag{3.32}$$

$$\delta_1 q\,|_{t=0} = \mu \left[\frac{\partial\omega(\bar{p}(0) + x_0)}{\partial \bar{p}} \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N}'' \frac{X_k(\bar{p}(0) + x_0)\, e^{i(k, \bar{q}(0) + y_0)}}{i^2\,(k, \omega(\bar{p}(0) + x_0))^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{1 \leqslant \|k\| \leqslant N}'' \frac{Y_k(\bar{p}(0) + x_0)\, e^{i(k, \bar{q}(0) + y_0)}}{i\,(k, \omega(\bar{p}(0) + x_0))} \right], \tag{3.33}$$

и, следовательно, $\|\delta_1 p\|_{t=0} = O(\mu)$, $\|\delta_1 q\| = O(\mu)$. При этих условиях в §§ 1.12 и 1.14 были доказаны теоремы о близости решений точных и усредненных уравнений на отрезке

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mu}, \text{ или } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

Таким образом, «средние элементы» Ганзена в принципе позволяют построить тригонометрические теории движения небесных тел, удовлетворительно представляющие решения точных уравнений на достаточно больших отрезках времени, хотя в начальный момент $t=0$ они и не совпадают. Приведенные соображения иллюстрирует рис. 3. Приближенное решение, определяемое «оскулирующими элементами» (кривая (*3*)) за время $t \sim 1/\mu$ может сильно удалиться от кривой (*1*), в ε-окрестности которой

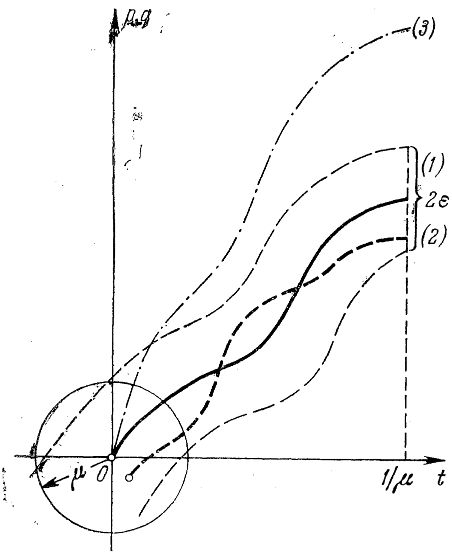

Рис. 3.

располагается приближенное решение, полученное с помощью «средних элементов».

§ 3.5. Оценка нормы разности вековых и долгопериодических возмущений

В аналитических теориях, построенных с помощью классического метода последовательных приближений, вековые члены появляются и в результате интегрирования вековой части возмущающей функции и в процессе интегрирования периодических слагаемых, аргументы которых связаны с точной соизмеримостью начальных условий. Если рассматриваются начальные условия, близкие к резонансным, то в первом приближении они порождают не вековые, а долгопериодические неравенства.

В связи с этим возникает вопрос: какими должны быть размеры начальной резонансной зоны, чтобы на достаточно большом промежутке времени вековые и долгопериодические возмущения отличались друг от друга сколь угодно мало?

Мы докажем [44], что если размеры резонансной зоны имеют порядок μ^2, то на отрезке $t \in [0, 1/\mu]$ вековые и долгопериодические возмущения медленных переменных отличаются по норме не более чем на $C\mu$. Доказательство этого утверждения тесным образом связано с методом усреднения.

Вернемся к усредненным уравнениям (1.144):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{dt} &= \mu \sum_{\|k\| \geqslant 0}{}' X_k(\bar{p} + x_0) e^{i(k,\, \bar{q} + y_0)}, \\ \frac{d\bar{q}}{dt} &= \omega(\bar{p} + x_0) - \omega_0 + \\ &\quad + \mu \sum_{\|k\| \geqslant 0}{}' Y_k(\bar{p} + x_0)\, e^{i(k,\, \bar{q} + y_0)}. \end{aligned}\right. \tag{1.144}$$

В суммах компоненты вектора $\boldsymbol{k}$ принимают лишь такие значения, для которых $(\boldsymbol{k}, \omega_0) = 0$, на что указывает «штрих». Будем решать систему (1.144) методом последовательных приближений, используя для этого резонансные и близкие к ним начальные данные, и оценим разность этих решений при $t \in [0, 1/\mu]$. Пусть $(\bar{p}(t), \bar{q}(t))$ — первое приближение к решению системы (1.144), проходящее через резонансную точку, а $p_1(t)$, $q_1(t)$ — первое приближение к решению с начальными данными, близкими к резонансным.

Теорема. *Пусть:*

1) *вектор-функция $X(p + x_0, q + y_0)$ аналитична по p и q и 2π-периодична по q в открытой $(m+n)$-мерной области G_{m+n}, а $\omega(p + x_0)$ дифференцируема в G_{m+n};*

2) $(\boldsymbol{k}, \omega(x_0)) = (\boldsymbol{k}, \omega_0) = 0$;

3) *нормы* $\|X(p + x_0, q + y_0)\|$, $\|\omega(p + x_0)\|$,

$$\left\|\frac{\partial X}{\partial p}\right\|, \quad \left\|\frac{\partial \omega}{\partial p}\right\|$$

ограничены в G_{m+n}. Тогда для достаточно малых значений μ на отрезке

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mu} \quad \|\bar{p}(t) - p_1(t)\| = O(\mu), \text{ если } \|\bar{p}(0) - p_1(0)\| = O(\mu^2).$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\bar{p}(t)=\mu t\sum_{\|k\|\geqslant 0}{}' X_k(x_0)e^{i(k,y_0)},\quad \bar{q}(t)=\mu t\sum_{\|k\|\geqslant 0}{}' Y_k(x_0)e^{i(k,y_0)}. \tag{3.34}$$

Пользуясь методом усреднения в форме В. М. Волосова (§ 1.5), будем искать такую замену переменных

$$\bar{p}=p_1+\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s u_s(p_1,q_1,t),\quad \bar{q}=q_1+\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s v_s(p_1,q_1,t),$$

которая преобразовывает систему (1.144) к виду

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt}&=\mu\sum_{\|k\|\geqslant 0}{}' X_k(x_0)e^{i(k,y_0)}+\mu^2A_2(p_1,q_1)+\ldots\\ \frac{dq_1}{dt}&=\omega(p_1+x_0)-\omega_0+\mu\sum_{\|k\|\geqslant 0}{}' Y_k(x_0)e^{i(k,y_0)}+\\ &\qquad+\mu^2B_2(p_1,q_1)+\ldots \end{aligned}\right. \tag{3.35}$$

Функция $u_1(p_1, q_1, t)$ определяется из уравнения, аналогичного (1.149), и выражается аналитическим соотношением

$$u_1(p_1,q_1,t)=\sum_{\|k\|\geqslant 0}{}'\left\{\frac{X_k(p_1+x_0)\left[e^{i(k,q_1+\omega_0 t+y_0)}-e^{i(k,y_0)}\right]}{i(k,\omega(p_1+x_0))}-\right.$$
$$\left.-X_k(x_0)e^{i(k,y_0)}t\right\}.$$

Норма $\|\bar{p}(t)-p_1(t)\|$ будет иметь порядок μ для $t\in[0, 1/\mu]$, если $u_1(p_1, q_1, t)$ при $t\in[0, 1/\mu)$, ограничена по норме некоторой постоянной, не зависящей от μ. Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|\sum_{\|k\|\geqslant 0}{}'\left\{\frac{X_k(p_1+x_0)\left[e^{i(k,\omega(p_1+x_0))\frac{1}{\mu}}-1\right]}{i(k,\omega(p_1+x_0))}-X_k(x_0)\frac{1}{\mu}\right\}\right\|<C. \tag{3.36}$$

Разлагая X_k в ряд Тейлора, можно написать

$$\left\|\sum_{\|k\|\geqslant 0}{}'\left\{\left[\left(\frac{\partial X_k}{\partial p_1}\right)_{p_1=0}p_1+\ldots\right]e^{i(k,\omega(p_1+x_0))\frac{1}{\mu}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+X_k\left[\frac{i(k,\omega(p_1+x_0))}{2!\mu}+\frac{i^2(k,\omega(p_1+x_0))^2}{3!\mu^2}+\ldots\right]\right\}\right\|<\mu C. \tag{3.37}$$

Нам нужно показать, что неравенство (3.37) имеет решение $\|p_1\| = O(\mu^2)$. Допустим сначала, что $0 \leqslant \|\boldsymbol{k}\| \leqslant N < \infty$. Неравенство (3.37) тождественно удовлетворяется, если

$$\left\|\left[\left(\frac{\partial X_k}{\partial p_1}\right)_{p_1=0} p_1 + \ldots\right] e^{i(k,\omega(p_1+x_0))\frac{1}{\mu}} + \right.$$
$$\left. + X_k(x_0)\left[\frac{i(k, \omega(p_1+x_0))}{2!\mu} + \ldots\right]\right\| < \frac{\mu C}{R'_N}, \qquad (3.38)$$

где R'_N — количество членов в сумме $\sum\limits_{0 \leqslant \|k\| \leqslant N}'$.

Применяя дифференциальную теорему о среднем и условие соизмеримости, будем иметь

$$(\boldsymbol{k}, \omega(p_1+x_0)) = \left(\boldsymbol{k}, \omega(x_0) + \frac{\overline{\partial\omega}}{\partial p_1} p_1\right) = \left(\boldsymbol{k}, \frac{\overline{\partial\omega}}{\partial p_1} p_1\right)$$

или

$$|(\boldsymbol{k}, \omega(p_1+x_0))| \leqslant MN\widetilde{p}_1,$$

где

$$\widetilde{p}_1 = \sup_{p_1 \in G_{m+n}} \|p_1\|, \quad M = \sup_{p_1 \in G_{m+\bar{n}}} \left\|\frac{\overline{\partial\omega}}{\partial p_1}\right\|.$$

Неравенство (3.38) усилится, если выполняется условие

$$A\widetilde{p}_1 + B\left|e^{\frac{MN\widetilde{p}_1}{\mu}} - 1 - \frac{MN\widetilde{p}_1}{\mu}\right| \frac{\mu}{MN\widetilde{p}_1} < \frac{\mu C}{N}, \qquad (3.39)$$

где

$$\|X_k(x_0)\| \leqslant A, \quad \left\|\frac{\overline{\partial X_k}}{\partial p_1}\right\| \leqslant B.$$

Неравенство (3.39) имеет место, если

$$\widetilde{p}_1 < \mu^2 C_1, \quad C_1 = \frac{2Ce^{MN}}{AMN^2}. \qquad (3.40)$$

Итак, нами доказано, что $\|u_1(p_1, q_1, t)\| = O(\mu)$ при $t \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right]$, если $\|\bar{p}(0) - p_1(0)\| = O(\mu^2)$ для случая тригонометрических многочленов $(0 \leqslant \|\boldsymbol{k}\| \leqslant N)$.

Если $N=\infty$, то, пользуясь результатами В. И. Арнольда [26], можно представить вектор-функцию $X(p_1+x_0,\ q_1+y_0)$ в виде суммы

$$X(p_1+x_0, q_1+y_0)=X^{(0)}(p_1+x_0, q_1+y_0)+\\ +R_N X(p_1+x_0, q_1+y_0),$$

где

$$X^{(0)}=\sum_{0\leqslant\|k\|\leqslant N}{}' X_k(p_1+x_0)e^{i(k, q_1+y_0)},$$

$$R_N X=\sum_{\|k\|>N}{}' X_k(p_1+x_0)e^{i(k, q_1+y_0)}.$$

В этом случае вместо (3.37) следует написать неравенство

$$\Bigg\| \sum_{0\leqslant\|k\|\leqslant N}{}' \left\{\frac{X_k(p_1+x_0)\left[e^{i(k,\omega(p_1+x_0))\frac{1}{\mu}}-1\right]}{i(k,\omega(p_1+x_0))}-X_k(x_0)\frac{1}{\mu}\right\}+\\ +\int\limits_0^{\frac{1}{\mu}}[R_N X(p_1+x_0, t)-R_N X(x_0, t)]\,dt\Bigg\|<C. \qquad (3.41)$$

Если функция $X(p, q)$ в области G_{m+n} является аналитической по p и q и 2π-периодической по q, то всегда существует достаточно большое целое число $N>0$ такое, что $\|R_N X\|<\mu$. Отсюда следует, что

$$\left\|\int\limits_0^{\frac{1}{\mu}}[R_N X(p_1+x_0, t)-R_N X(x_0, t)]\,dt\right\|<2.$$

Дальнейшие рассуждения можно проводить так же, как и в том случае, когда $X(p, q)$ — тригонометрический многочлен относительно q.

ГЛАВА IV

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДОВ В РЕЗОНАНСНЫХ СЛУЧАЯХ

§ 4.1. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения движения астероида

Высокоточные аналитические теории движения небесных тел, пригодные для больших промежутков времени, могут быть созданы лишь на основе разумного сочетания наиболее подходящих аналитических методов и удачного выбора промежуточной орбиты (нулевого приближения), причем последнее обстоятельство может иногда оказаться первостепенным. Общепризнано, например, что кеплеров эллипс является неудовлетворительной промежуточной орбитой в теории движения искусственных спутников, в теории движения Луны. И в теории движения астероидов в резонансном случае кеплеров эллипс не может быть эффективно использован в качестве промежуточной орбиты, так как возмущения элементов такой орбиты достигают больших значений. Эта специфическая трудность, характерная для небесных тел, средние движения которых соизмеримы или почти соизмеримы со средним движением Юпитера, обусловлена появлением малых и нулевых знаменателей в теориях возмущенного движения, если кеплеров эллипс принимается в качестве промежуточной орбиты.

Для астероидов в случае острой соизмеримости средних движений астероидов и Юпитера самой подходящей является такая промежуточная орбита, которая учитывала бы наибольшие возмущения, порождаемые притяжением Юпитера, т. е. для приближенного аналитического решения задачи многих тел, в рамках которой и строится теория движения малых планет, желательно иметь такое нулевое приближение, которое содержало бы вековую и резонансную части возмущающей функции, обусловленной притяжением Юпитера.

Дифференциальные уравнения для кеплеровых оскулирующих элементов астероида имеют такой вид:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 2\sqrt{\frac{a}{fm}}\frac{\partial R}{\partial M} + F_a,\\
\frac{dp}{dt} &= 2\sqrt{\frac{p}{fm}}\frac{\partial R}{\partial \omega} + F_p,\\
\frac{di}{dt} &= \operatorname{ctg} i\sqrt{\frac{1}{fmp}}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \\
&\qquad - \operatorname{cosec} i\sqrt{\frac{1}{fmp}}\frac{\partial R}{\partial \Omega} + F_i,\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \operatorname{cosec} i\sqrt{\frac{1}{fmp}}\frac{\partial R}{\partial i} + F_\Omega,\\
\frac{d\omega}{dt} &= -\operatorname{ctg} i\sqrt{\frac{1}{fmp}}\frac{\partial R}{\partial i} - \\
&\qquad - 2\sqrt{\frac{p}{fm}}\frac{\partial R}{\partial p} + F_\omega,\\
\frac{dM}{dt} &= n - 2\sqrt{\frac{a}{fm}}\frac{\partial R}{\partial a} + F_M,
\end{aligned}
\right. \tag{4.01}
$$

где m — масса Солнца, f — постоянная тяготения.

В уравнениях (4.1) $R(a, p, i, \Omega, \omega, M, t)$ — возмущающая функция, обусловленная притяжением Юпитера, $F_a(a, p, i, \Omega, \omega, M, t), \ldots, F_M(a, p, i, \Omega, \omega, M, t)$ — компоненты возмущающего ускорения, вызванного другими большими планетами. Абсолютные величины $|F_a|, \ldots$ $\ldots, |F_M|$ намного меньше модулей частных производных $\left|\frac{\partial R}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial R}{\partial M}\right|$, поэтому довольно часто строятся теории движения астероидов в рамках ограниченной задачи трех тел. Эти теории основываются на следующей системе дифференциальных уравнений движения:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 2\sqrt{\frac{a}{fm}}\,\frac{\partial R}{\partial M},\\
\frac{dp}{dt} &= 2\sqrt{\frac{p}{fm}}\,\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
\frac{di}{dt} &= \operatorname{ctg} i\sqrt{\frac{1}{fmp}}\,\frac{\partial R}{\partial \omega} - \operatorname{cosec} i\sqrt{\frac{1}{fmp}}\,\frac{\partial R}{\partial \Omega},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \operatorname{cosec} i\sqrt{\frac{1}{fmp}}\,\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{d\omega}{dt} &= -\operatorname{ctg} i\sqrt{\frac{1}{fmp}}\,\frac{\partial R}{\partial i} - 2\sqrt{\frac{p}{fm}}\,\frac{\partial R}{\partial p},\\
\frac{dM}{dt} &= n - 2\sqrt{\frac{a}{fm}}\,\frac{\partial R}{\partial a}.
\end{aligned}
\right.
\tag{4.02}
$$

Третье и четвертое уравнения систем (4.01) и (4.02) имеют особенность при $i=0$. В уравнениях (4.02) эту особенность можно устранить, если вместо наклонности i ввести новую переменную $I=\cos i$.

Тогда вместо системы (4.02) получим систему дифференциальных уравнений:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 2\sqrt{\frac{a}{fm}}\,\frac{\partial R}{\partial M},\\
\frac{dp}{dt} &= 2\sqrt{\frac{p}{fm}}\,\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
\frac{dI}{dt} &= \sqrt{\frac{1}{fmp}}\,\frac{\partial R}{\partial \Omega} - I\sqrt{\frac{1}{fmp}}\,\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= -\sqrt{\frac{1}{fmp}}\,\frac{\partial R}{\partial I},\\
\frac{d\omega}{dt} &= I\sqrt{\frac{1}{fmp}}\,\frac{\partial R}{\partial I} - 2\sqrt{\frac{p}{fm}}\,\frac{\partial R}{\partial p},\\
\frac{dM}{dt} &= n - 2\sqrt{\frac{a}{fm}}\,\frac{\partial R}{\partial a}.
\end{aligned}
\right.
\tag{4.03}
$$

В уравнениях (4.03) для возмущающей функции мы сохранили то же обозначение R, хотя форма ее разложения отличается от разложения, расположенного по степеням a/a', e и $\sin^2\frac{i}{2}$ (мы предполагаем, что движение Юпитера происходит в основной координатной плоскости).

Отсутствие особенностей в правых частях уравнений (4.03) при $i=0$ объясняется тем, что разложение R представляется степенным рядом относительно I, так как $\sin^2\frac{i}{2}=\frac{1-I}{2}$, и, следовательно, любая из частных производных функции R, в том числе и $\frac{\partial R}{\partial I}$, **также представляется** степенным рядом по переменной I.

Заметим, что подстановка $I=\cos i$ не может быть применена к уравнениям (4.01), так как функции $F_a, \ldots, F_M$ в общем случае не являются степенными рядами относительно I.

Представим возмущающую функцию R, обусловленную притяжением Юпитера, орбита которого предполагается круговой, в виде

$$R=R_{\text{в}}+R_{\text{д}}+R_{\text{н}}=$$
$$=fm'\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}C_{k,k',s}(a,e,I)\cos(kM-k'M'+$$
$$+k'\Omega+s\omega), \qquad (4.04)$$

где

$$R_{\text{в}}=fm'C_{0,0,0}(a,e,I), \qquad (4.05)$$

$$R_{\text{д}}=fm'\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}C_{k,k',s}(a,e,I)\cos(kM-k'M'+$$
$$+k'\Omega+s\omega), \qquad (4.06)$$
$$|kn+k'n'|\leqslant\alpha$$

$$R_{\text{н}}=fm'\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k'=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}C_{k,k',s}(a,e,I)\cos(kM-k'M'+$$
$$+k'\Omega+s\omega), \qquad (4.07)$$
$$|kn+k'n'|>\alpha.$$

В формулах (4.3) — (4.7) m', M', n' — масса, средняя аномалия и среднее движение Юпитера, f — постоянная тяготения.

Функция $R_{\text{в}}$ называется *вековой частью* возмущающей функции R Юпитера. Если α — малая положительная величина (например, $\alpha = O(m')$), то назовем функцию $R_{\text{д}}$ *долгопериодической* или *резонансной частью* возмущающей функции R, а $R_{\text{н}}$ — *короткопериодической* или *нерезонансной* частью R.

Выделим в вековой и долгопериодической частях возмущающей функции плоскую и пространственную составляющие и представим $R_{\text{в}}$ и $R_{\text{д}}$ в виде

$$R_{\text{в}} = R_{\text{в}}^{(0)} + R_{\text{в}}^{(1)}, \quad R_{\text{д}} = R_{\text{д}}^{(0)} + R_{\text{д}}^{(1)}, \tag{4.08}$$

где $R_{\text{в}}^{(0)}$, $R_{\text{д}}^{(0)}$ — суммы членов в разложении возмущающей функции, не зависящих от наклонности i, $R_{\text{в}}^{(1)}$, $R_{\text{д}}^{(1)}$ — выражения, содержащие i. Естественно, что аналогичные слагаемые имеются и в нерезонансной части $R_{\text{н}}$.

Обозначим через $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{I}$, $\bar{\Omega}$, $\bar{\omega}$, $\bar{M}$ элементы промежуточной орбиты какого-нибудь из астероидов, для которого показателями соизмеримости являются целые числа $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ ($\bar{k}_1 n^{(0)} - \bar{k}_2 n' = 0$). В этих обозначениях дифференциальные уравнения, определяющие элементы промежуточной орбиты, имеют следующий вид:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\bar{a}}{dt} &= 2\bar{k}_1 \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\frac{\partial \bar{R}}{\partial D}, \\
\frac{d\bar{p}}{dt} &= 2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{\omega}}, \\
\frac{d\bar{I}}{dt} &= \bar{k}_2 \sqrt{\frac{1}{fm\bar{p}}}\frac{\partial \bar{R}}{\partial D} - \bar{I}\sqrt{\frac{1}{fm\bar{p}}}\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{\omega}}, \\
\frac{d\bar{\Omega}}{dt} &= -\sqrt{\frac{1}{fm\bar{p}}}\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{I}}, \\
\frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{p}} + \bar{I}\sqrt{\frac{1}{fm\bar{p}}}\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{I}}, \\
\frac{d\bar{M}}{dt} &= \bar{n} - 2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{a}},
\end{aligned}\right. \tag{4.09}$$

где функция

$$\overline{R}=R_{\text{в}}+R_{\text{д}} \tag{4.10}$$

и представляет собой усредненную возмущающую функцию, полученную на основании первой схемы Делоне — Хилла (см. § 2.9).

Она получена из возмущающей функции R в результате выделения ее вековой и резонансной части с помощью аномалии Делоне (2.71) и формулы усреднения (2.73).

К сожалению, нам неизвестна полная система первых интегралов уравнений (4.09), и это обстоятельство в резонансном случае не позволяет построить аналитические теории движения астероидов, орбиты которых имеют произвольную наклонность.

Для астероидов с достаточно малой наклонностью ($I \approx 1$) в качестве промежуточной орбиты можно взять точное решение уравнений (2.79), описывающих первую схему Делоне — Хилла для плоской ограниченной круговой задачи трех тел:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\overline{a}}{dt} &= 2\overline{k}_1 \sqrt{\frac{\overline{a}}{fm}}\,\frac{\partial \overline{R}^{(0)}}{\partial D}, \\ \frac{d\overline{p}}{dt} &= 2\overline{k}_2 \sqrt{\frac{\overline{p}}{fm}}\,\frac{\partial \overline{R}^{(0)}}{\partial D}, \\ \frac{d\overline{M}}{dt} &= \overline{n} - 2\sqrt{\frac{\overline{a}}{fm}}\,\frac{\partial \overline{R}^{(0)}}{\partial \overline{a}}, \\ \frac{d\overline{\omega}}{dt} &= -2\sqrt{\frac{\overline{p}}{fm}}\,\frac{\partial \overline{R}^{(0)}}{\partial \overline{p}}, \end{aligned}\right. \tag{2.79}$$

где

$$D=\overline{k}_1\overline{M}+\overline{k}_2(\overline{\omega}-l').$$

Усредненная по Делоне — Хиллу возмущающая функция $\overline{R}^{(0)}$ дается соотношением

$$\overline{R}^{(0)}=R_{\text{в}}^{(0)}+R_{\text{д}}^{(0)}. \tag{4.11}$$

Она зависит от единственного углового аргумента D, медленно изменяющегося со временем, и выражается рядом (2.80)

$$\overline{R}^{(0)}(\overline{a},\ \overline{p},\ D)=fm'\sum_{s=0}^{\infty}C_{s\overline{k}_1,\ s\overline{k}_2}(\overline{a},\ \overline{p})\cos sD. \quad (2.80)$$

Вместо третьего уравнения системы (2.79) можно рассмотреть дифференциальное уравнение для аномалии Делоне:

$$\frac{dD}{dt}=(\overline{k}_1\overline{n}-\overline{k}_2n')-2\overline{k}_1\sqrt{\frac{\overline{a}}{fm}}\frac{\partial\overline{R}^{(0)}}{\partial\overline{a}}-2\overline{k}_2\sqrt{\frac{\overline{p}}{fm}}\frac{\partial\overline{R}^{(0)}}{\partial\overline{p}}. \quad (4.12)$$

Во второй главе было показано, что система (2.79) имеет полную систему первых интегралов [формулы (2.82), (2.83), (2.85), (2.86)], которой мы воспользуемся для определения промежуточных орбит.

Таким образом, основная идея метода построения аналитических теорий движения астероидов в резонансных случаях с малыми наклонностями заключается в том, что сначала решаются уравнения (2.79), определяющие промежуточную орбиту (нулевое приближение), и в дальнейшем к этой промежуточной орбите применяется аппарат теории возмущений, характерный для методов усреднения небесной механики [12, 13, 45].

§ 4.2. Промежуточная орбита в резонансном случае

Первые интегралы, составляющие общее решение дифференциальных уравнений (2.79), как было показано в § 2.9, выражаются равенствами

$$\sqrt{\overline{a}}-\frac{\overline{k}_1}{\overline{k}_2}\sqrt{\overline{p}}=c_1, \quad (2.82)$$

$$\frac{fm}{2\overline{a}}+\frac{\overline{k}_2}{\overline{k}_1}n'\sqrt{fm\overline{a}}+\overline{R}^{(0)}=c_2, \quad (2.83)$$

$$t-t_0=\int_{D_0}^{D}\frac{dD}{(\overline{k}_1\overline{n}-\overline{k}_2n')-2\overline{k}_1\sqrt{\frac{\overline{a}}{fm}}\frac{\partial\overline{R}^{(0)}}{\partial\overline{a}}-2\overline{k}_2\sqrt{\frac{\overline{p}}{fm}}\frac{\partial\overline{R}^{(0)}}{\partial\overline{p}}}, \quad (2.85)$$

$$\overline{\omega}-\overline{\omega}_0=-2\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{\overline{p}}{fm}}\frac{\partial\overline{R}^{(0)}}{\partial\overline{p}}dt. \quad (2.86)$$

Интеграл (2.85) является аналогом уравнения Кеплера для усредненного варианта Делоне — Хилла задачи трех тел.

Чтобы иметь промежуточную орбиту, пригодную для построения возмущенной теории, необходимо получить из приведенных выше первых интегралов элементы $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{\omega}$, D в виде явных функций времени t, т. е. $\bar{a}=\bar{a}(t)$, $\bar{p}=\bar{p}(t)$, $\bar{\omega}=\bar{\omega}(t)$, $D=D(t)$. Но прежде всего необходимо получить из соотношений (2.82) и (2.83) явные функциональные зависимости $\bar{a}=\bar{a}(D)$ и $\bar{p}=\bar{p}(D)$.

Из интеграла (2.82) имеем

$$\bar{p}=\frac{\bar{k}_2^2}{\bar{k}_1^2}\left(\bar{a}+c_1^2-2c_1\sqrt{\bar{a}}\right), \tag{4.13}$$

и, подставляя это выражение в интеграл (2.83), получим

$$F(\bar{a},\ D)=c_2. \tag{4.14}$$

Функция $F(\bar{a},\ D)$ является четной относительно D и представляет собой тригонометрический ряд по кратным аномалии Делоне D, коэффициенты которого суть ряды по степеням величины $\sqrt{\bar{a}}$.

Частная производная $\frac{\partial F}{\partial \bar{a}}$ дается равенством

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{a}}=\frac{1}{2\bar{k}_1}\sqrt{\frac{fm}{\bar{a}}}\,(-\bar{k}_1\bar{n}+\bar{k}_2n')+\frac{\partial \bar{R}^{(*)}}{\partial \bar{a}},$$

где

$$\bar{R}^{(*)}(\bar{a},\ D)=\bar{R}^{(0)}(\bar{a},\ \bar{p},\ D).$$

В резонансном случае для астероидов $\frac{\partial F}{\partial \bar{a}}=O(m')$, так как $-\bar{k}_1\bar{n}+\bar{k}_2n'=O(m')$ и $\frac{\partial \bar{R}^{(*)}}{\partial \bar{a}}=O(m')$.

Отсюда вытекает, что к уравнению (4.14) применима теорема о существовании неявной функции и из нее можно получить $\bar{a}=\bar{a}(D)$. Однако из-за малости $\frac{\partial F}{\partial \bar{a}}$ построение явной функции $\bar{a}=\bar{a}(D)$ сопровождается большим объемом выкладок и вычислений, если мы желаем обеспечить достаточно высокую точность теории.

Представим функцию $F(\bar{a}, D)$ в виде

$$F(\bar{a}, D) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s(\bar{a}) \cos sD, \tag{4.15}$$

где $F_s(\bar{a})$ выражаются в конечном итоге через коэффициенты Лапласа и различные целые степени $\sqrt{\bar{a}}$. В этом случае равенство (4.14) принимает вид

$$\sum_{s=0}^{\infty} F_s(\bar{a}) \cos sD = c_2. \tag{4.16}$$

В. Х. Караганчу предложил [46] три метода построения функции $\bar{a} = \bar{a}(D)$.

1-й метод. Представим $\bar{a}$ в виде тригонометрического ряда

$$\bar{a} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \cos sD \tag{4.17}$$

с неизвестными коэффициентами a_s. Коэффициенты a_s определяются из бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений, в каждое из которых входят все a_s. Решение этой бесконечной системы можно получить каким-либо итерационным методом.

2-й метод. Представим $\bar{a}$ в виде ряда, расположенного по степеням массы Юпитера,

$$\bar{a} = \sum_{s=0}^{\infty} (m')^s a_s(D). \tag{4.18}$$

Коэффициент a_0 находится из уравнения

$$fm + 2\frac{\bar{k}_2 n'}{\bar{k}_1} \sqrt{fm} a_0^{3/2} - c_2 a_0 = 0, \tag{4.19}$$

поэтому он не зависит от D. Остальные коэффициенты $a_1, a_2, \ldots$ определяются последовательно в виде тригонометрических рядов по кратным D.

3-й метод. Пусть

$$\bar{R}^{(*)}(\bar{a}, D) = \bar{R}_0^{(*)}(\bar{a}) + \bar{R}_1^{(*)}(\bar{a}, D), \tag{4.20}$$

$$\bar{a} = a_0 + \Delta a,$$

Тогда интегралу (2.83) с учетом формулы (4.20) можно придать форму

$$\frac{fm}{2} + \frac{\bar{k}_2 n'}{\bar{k}_1} \sqrt{fm}\, \bar{a}^{3/2} + \bar{a} \bar{R}_0^{(*)}(\bar{a}) + \bar{a} \bar{R}_1^{(*)}(\bar{a}, D) = c_2 \bar{a}. \tag{4.21}$$

Будем определять a_0 из условия

$$\frac{fm}{2} + \frac{\bar{k}_2 n'}{\bar{k}_1} \sqrt{fm}\, a_0^{3/2} + a_0 \bar{R}_0^{(*)}(a_0) - c_2 a_0 = 0, \tag{4.22}$$

а приращение Δa из уравнения

$$a_0 \bar{R}_1^{(*)}(a_0, D) + \Delta a \left[\frac{3\bar{k}_2 n'}{2\bar{k}_1} \sqrt{fm}\, a_0^{1/2} + a_0 \frac{\partial \bar{R}_0^{(*)}(a_0)}{\partial a_0} + \right.$$
$$\left. + \bar{R}_0^{(*)}(a_0) + a_0 \frac{\partial \bar{R}_1^{(*)}(a_0, D)}{\partial a_0} + \bar{R}_1^{(*)}(a_0, D) \right] - c_2 \Delta a = 0. \tag{4.23}$$

Уравнение (4.23) вытекает из разложения левой части интеграла (2.83) в ряд Тейлора при условии, что сохранены лишь линейные члены относительно Δa. Сохранение только линейных членов в известной мере оправдано тем, что a_0 определяется с учетом вековой части возмущающей функции $\bar{R}_0^{(*)}(\bar{a})$. Из последнего условия Δa получается как результат деления двух тригонометрических рядов, следовательно,

$$\Delta a = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos sD. \tag{4.24}$$

Таким образом, все указанные приемы дают возможность представить $\bar{a}$ в виде ряда (4.17)

$$\bar{a} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \cos sD.$$

Далее, представим элемент $\bar{p}$ также в виде ряда

$$\bar{p} = \sum_{s=0}^{\infty} p_s \cos sD. \tag{4.25}$$

Коэффициенты p_s последовательно определяются из следующей системы уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{k}_1^2 p_0 = \bar{k}_2^2 a_0 + \bar{k}_2^2 c_1 - 2\bar{k}_2^2 a_0^{1/2} + \ldots, \\ \bar{k}_1^2 p_1 = \bar{k}_2^2 a_1 - \bar{k}_1^2 c_1 a_0^{-1/2} a_1 + \ldots, \\ \bar{k}_1^2 p_2 = \bar{k}_2^2 a_2 - \bar{k}_1^2 c_1 a_0^{-1/2} a_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{4.26}$$

Система (4.26) получается из соотношения (4.13), в котором $\bar{a}$ заменено рядом (4.17). Пользуясь соотношением $\bar{p} = \bar{a}(1 - \bar{e}^2)$, можно выразить «эксцентриситет» $\bar{e}$ также в виде тригонометрического ряда по кратным D:

$$\bar{e} = \sum_{s=0}^{\infty} e_s \cos sD. \tag{4.27}$$

Среднее движение $\bar{n}$ астероида в резонансном случае также представляется тригонометрическим рядом

$$\bar{n} = \sum_{s=0}^{\infty} n_s \cos sD. \tag{4.28}$$

Коэффициенты e_s и n_s определяются из систем алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0^{1/2} e_0 + \frac{1}{4} a_0^{-1/2} a_1 e_1 + \frac{1}{4} a_0^{-1/2} a_2 e_2 + \ldots = \\ \qquad\qquad = (a_0 - p_0)^{1/2}, \\ \frac{1}{2} a_0^{-1/2} a_1 e_0 + a_0^{1/2} e_1 + \frac{1}{4} a_0^{-1/2} a_1 e_2 + \ldots = \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2} (a_0 - p_0)^{-1/2} (a_1 - p_1), \\ \frac{1}{2} a_0^{-1/2} a_2 e_0 + \frac{1}{4} a_0^{-1/2} a_1 e_1 + a_0^{1/2} e_2 + \\ \qquad\qquad + \ldots = \frac{1}{2} (a_0 - p_0)^{-1/2} (a_2 - p_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{4.29}$$

$$\left\{\begin{array}{l} n_0=\dfrac{\sqrt{fm}}{a_0^{3/2}}\left[1+\dfrac{15}{16a_0^2}(a_1^2+a_2^2+\ldots)+\ldots\right], \\ n_1=\dfrac{\sqrt{fm}}{a_0^{3/2}}\left[-\dfrac{3}{2}\dfrac{a_1}{a_0}+\dfrac{15}{8}\dfrac{a_1a_2}{a_0^2}+\ldots\right], \\ n_2=\dfrac{\sqrt{fm}}{a_0^{3/2}}\left[-\dfrac{3}{2}\dfrac{a_2}{a_0}+\dfrac{15}{16}\dfrac{a_1^2}{a_0^2}+\ldots\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{4.30}$$

Перейдем в интеграле (2.86) от переменной интегрирования t к новой переменной D. Будем иметь

$$\bar{\omega}-\bar{\omega}_0=$$

$$=-2\int\limits_{D_0}^{D}\frac{\bar{a}^{3/2}\bar{p}^{1/2}\dfrac{\partial\bar{R}^{(0)}}{\partial\bar{p}}\,dD}{\bar{k}_1fm-\bar{k}_2n'\,\bar{a}^{3/2}\sqrt{fm}-2\bar{k}_1\bar{a}^2\dfrac{\partial\bar{R}^{(0)}}{\partial\bar{a}}-2\bar{k}_2\bar{a}^{-3/2}\bar{p}^{1/2}\dfrac{\partial\bar{R}^{(0)}}{\partial\bar{p}}}. \tag{4.31}$$

Подынтегральное выражение можно представить в виде отношения двух тригонометрических рядов по косинусам с аргументами, кратными аномалии D

$$\bar{\omega}-\bar{\omega}_0=\int\limits_{D_0}^{D}\frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty}c_s\cos sD}{\sum\limits_{s=0}^{\infty}d_s\cos sD}\,dD. \tag{4.32}$$

Если произвести операцию деления ряда на ряд и проинтегрировать полученный результат, получим

$$\bar{\omega}-\bar{\omega}_0=A_0^{(0)}+A_0D+A_1\sin D+A_2\sin 2D+\ldots, \tag{4.33}$$

где

$$\left\{\begin{array}{l} c_0=d_0A_0+\dfrac{1}{2}d_1A_1+\dfrac{1}{4}d_2A_2+\ldots, \\ c_1=d_1A_0+\left(d_0+\dfrac{1}{2}d_2\right)A_1+\dfrac{1}{4}d_1A_2+\ldots, \\ c_2=d_2A_0+\dfrac{1}{2}d_1A_1+\dfrac{1}{2}d_0A_2+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{4.34}$$

$$A_0^{(0)}=-A_0D_0-A_1\sin D_0-A_2\sin 2D_0-\ldots \tag{4.35}$$

Наконец, подынтегральное выражение в (2.35) можно представить в виде тригонометрического ряда

$$t-t_0=\int\limits_{D_0}^{D}\sum_{s=0}^{\infty}B_s\cos sD\,dD. \qquad (4.36)$$

Если уравнения (4.34) для коэффициентов A_s составлены, то ими можно пользоваться и для определения коэффициентов B_s. Для этого достаточно в (4.34) заменить c_0, c_1, $c_2, \ldots$ на коэффициенты разложения $\overline{a}^{3/2}$, а A_0, A_1, $A_2, \ldots$ соответственно на B_0, B_1, $B_2, \ldots$

Интегрируя (4.36), получим

$$t-t_0=B_0^{(0)}+B_0D+B_1\sin D+B_2\sin 2D+\ldots \qquad (4.37)$$

Равенство (4.37) может быть названо уравнением Кеплера для усредненного варианта Делоне — Хилла плоской ограниченной круговой задачи трех тел.

Средняя аномалия $\overline{M}$ для промежуточной орбиты определяется из соотношения

$$\overline{M}=\frac{D}{\overline{k}_1}-\frac{\overline{k}_2}{\overline{k}_1}(\overline{\omega}-l').$$

Для орбит конкретных астероидов с малой наклонностью целесообразно считать, что $\Omega=\Omega_0$, где Ω_0 — долгота восходящего узла, взятая из «Эфемерид малых планет» [48]. Поэтому

$$\pi=\omega+\Omega_0,\quad \varepsilon=\Omega_0+\omega+M_0=\Omega_0+\omega+M-\int\limits_{t_0}^{t}n\,dt.$$

Из этих равенств можно получить аналитические выражения для элементов $\overline{\pi}$ и $\overline{\varepsilon}$, которые могут заменить элементы $\overline{\omega}$ и $\overline{M}$ задачи Делоне — Хилла. Будем иметь

$$\overline{\pi}=\overline{\omega}+\Omega_0, \qquad (4.38)$$

$$\overline{\varepsilon}=\overline{\omega}+\overline{M}-\int\limits_{t_0}^{t}\overline{n}\,dt+\Omega_0. \qquad (4.39)$$

В заключение заметим, что на практике нецелесообразно выражать элементы $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{\omega}$ в виде явных функций времени, так как эту операцию можно выполнить лишь после обращения ряда (4.37), что само по себе является весьма громоздким делом. Представляется более разумным находить для каждого заданного момента времени t значение аномалии Делоне D из (4.37) с помощью итерационных методов, а после этого определять $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{\omega}$ из равенств (4.17), (4.25), (4.33).

Впрочем, аналогичная ситуация имеет место и в задаче двух тел.

§ 4.3. Основные свойства промежуточной орбиты

Аналитические представления (4.17), (4.25), (4.26) указывают на то, что элементы $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{e}$, определяющие форму и размеры промежуточной орбиты, изменяются

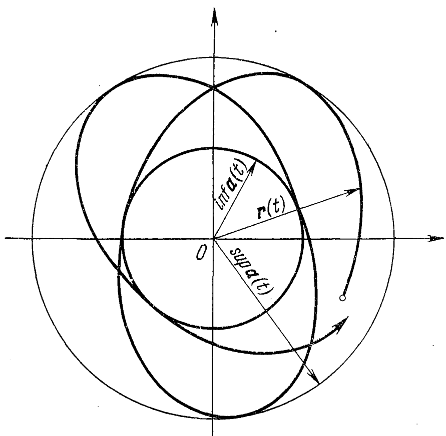

Рис. 4.

колеблющимся, а не вековым образом. В общем случае $A_0 \neq 0$, поэтому элемент $\bar{\omega}$, определяющий ориентацию промежуточной орбиты в координатной плоскости, как показывает равенство (4.33), меняется вековым образом и на это вековое движение налагается периодическое относительно D колебание.

Отсюда вытекает, что промежуточная орбита имеет «периплегматический» характер и всюду плотно заполняет кольцо с радиусами $\inf\limits_{t\in[0,\infty)} \bar{a}(t)$ и $\sup\limits_{t\in[0,\infty)} \bar{a}(t)$, определенными в § 3.3 (см. рис. 4).

Таким образом, основные достоинства построенной нами промежуточной орбиты суть следующие:

1. Она содержит основные возмущения, обусловленные притяжением Юпитера, движущегося по гелиоцентрической круговой орбите.

2. Большая полуось $\bar{a}$ и эксцентриситет $\bar{e}$ содержат лишь тригонометрические неравенства и не содержат вековых неравенств.

3. Формулы для элементов промежуточной орбиты относительно удобны при выполнении расчета движения конкретного астероида. Это соображение подтверждается работами В. Х. Караганчу [46, 47], посвященными аналитической теории движения малых планет семейств Гестии. Более подробно эти результаты мы изложим ниже.

§ 4.4. Точные уравнения для возмущений элементов

Представим элементы орбиты астероида a, p, i, Ω, ω, M, n, рассматриваемые как неизвестные функции в дифференциальных уравнениях (4.1), в виде

$$\left\{\begin{aligned} a &= \bar{a} + \delta a, \\ p &= \bar{p} + \delta p, \\ I &= I_0 + \delta I, \quad I_0 = \cos i_0, \\ \Omega &= \Omega_0 + \delta\Omega, \\ \omega &= \bar{\omega} + \delta\omega, \\ M &= \bar{M} + \delta M, \\ n &= \bar{n} + \delta n, \end{aligned}\right. \tag{4.40}$$

где i_0, Ω_0 следует взять из «Эфемерид малых планет» [48].

В формулах (4.39) $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{\omega}$, $\bar{M}$ определяются уравнениями для промежуточной орбиты и считаются известными функциями времени. Если использовать замену переменных (4.40), то основную систему уравнений (4.1) можно привести к следующему виду:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d(\delta a)}{dt} &= 2\sqrt{\frac{\bar{a}+\delta a}{fm}}\,\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a,\ldots,\bar{M}+\delta M,t)}{\partial M}-\\
&\qquad -2\bar{k}_1\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\,\frac{\partial \bar{R}^{(0)}(\bar{a},\bar{p},D)}{\partial D}+F_a,\\
\frac{d(\delta p)}{dt} &= 2\sqrt{\frac{\bar{p}+\delta p}{fm}}\,\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a,\ldots,\bar{M}+\delta M,t)}{\partial \omega}-\\
&\qquad -2\bar{k}_2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\partial \bar{R}^{(0)}(\bar{a},\bar{p},D)}{\partial D}+F_p,\\
\frac{d(\delta I)}{dt} &= \sqrt{\frac{1}{fm(\bar{p}+\delta p)}}\,\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a,\ldots,\bar{M}+\delta M,t)}{\partial \Omega}-\\
&\qquad -(I_0+\delta I)\sqrt{\frac{1}{fm(\bar{p}+\delta p)}}\times\\
&\qquad \times\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a,\ldots,\bar{M}+\delta M,t)}{\partial \omega}+F_I,\\
\frac{d(\delta \Omega)}{dt} &= -\sqrt{\frac{1}{fm(\bar{p}+\delta p)}}\times\\
&\qquad \times\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a,\ldots,\bar{M}+\delta M,t)}{\partial I}+F_\Omega,\\
\frac{d(\delta \omega)}{dt} &= (I_0+\delta I)\sqrt{\frac{1}{fm(\bar{p}+\delta p)}}\times\\
&\qquad \times\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a,\ldots,\bar{M}+\delta M,t)}{\partial I}-\\
&\qquad -2\sqrt{\frac{\bar{p}+\delta p}{fm}}\,\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a,\ldots,\bar{M}+\delta M,t)}{\partial p}+\\
&\qquad +2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\partial \bar{R}^{(0)}(\bar{a},\bar{p},D)}{\partial \bar{p}}+F_\omega,\\
\frac{d(\delta M)}{dt} &= \delta n-2\sqrt{\frac{\bar{a}+\delta a}{fm}}\times\\
&\qquad \times\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a,\ldots,\bar{M}+\delta M,t)}{\partial a}+\\
&\qquad +2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\,\frac{\partial \bar{R}^{(0)}(\bar{a},\bar{p},D)}{\partial \bar{a}}+F_M.
\end{aligned}
\right.
\tag{4.41}
$$

В третьем уравнении системы (4.41)

$$F_I = \frac{F_i}{\sqrt{1-I^2}}.$$

Подчеркнем особо, что в уравнениях (4.41) возмущающая функция R, обусловленная притяжением Юпитера, зависит от аргументов $\bar{a}+\delta a$, $\bar{p}+\delta p$, $I_0+\delta I$, $\Omega_0+\delta\Omega$, $\bar{\omega}+\delta\omega$, $\bar{M}+\delta M$, t, следовательно, она в конечном итоге зависит от t посредством долготы Юпитера l' и элементов промежуточной орбиты $\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{\omega}$, $\bar{M}$, а также от новых искомых функций δa, δp, δI, $\delta\Omega$, $\delta\omega$, δM.

Уравнения (4.41) являются точными и определяют полные возмущения δa, δp, δI, $\delta\Omega$, $\delta\omega$, δM элементов астероидов всех порядков.

§ 4.5. Уравнения для возмущений, порождаемых неучтенной частью возмущающей функции Юпитера

Если положить в уравнениях (4.41) $F_a, \ldots, F_M$ тождественно равными нулю, то получим дифференциальные уравнения для возмущений $\delta a_{Ю}$, $\delta p_{Ю}$, $\delta I_{Ю}$, $\delta\Omega_{Ю}$, $\delta\omega_{Ю}$, $\delta M_{Ю}$ элементов промежуточной орбиты, порождаемых функцией $R - \bar{R}^{(0)}$. Здесь R — возмущающая функция Юпитера, движущегося по гелиоцентрической эллиптической орбите, $\bar{R}^{(0)}$ — ее часть, которая учитывалась при построении промежуточной орбиты.

Эти уравнения записываются следующим образом:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d(\delta a_{Ю})}{dt} &= 2\sqrt{\frac{\bar{a}+\delta a_{Ю}}{fm}} \times \\
&\quad \times \frac{\partial R(\bar{a}+\delta a_{Ю}, \ldots, \bar{M}+\delta M_{Ю}, t)}{\partial M} - \\
&\qquad - 2\bar{k}_1 \sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}^{(0)}(\bar{a}, \bar{p}, D)}{\partial D}, \\
\frac{d(\delta p_{Ю})}{dt} &= 2\sqrt{\frac{\bar{p}+\delta p_{Ю}}{fm}} \times \\
&\quad \times \frac{\partial R(\bar{a}+\delta a_{Ю}, \ldots, \bar{M}+\delta M_{Ю}, t)}{\partial \omega} - \\
&\qquad - 2\bar{k}_2 \sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}} \frac{\partial \bar{R}^{(0)}(\bar{a}, \bar{p}, D)}{\partial D},
\end{aligned}\right.$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d(\delta I_{\text{Ю}})}{dt} &= \sqrt{\frac{1}{fm(\bar{p}+\delta p_{\text{Ю}})}}\times\\
&\quad\times\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a_{\text{Ю}},\ldots,\bar{M}+\delta M_{\text{Ю}},t)}{\partial\Omega}-\\
&\quad-(I_0+\delta I_{\text{Ю}})\sqrt{\frac{1}{fm(\bar{p}+\delta p_{\text{Ю}})}}\times\\
&\quad\times\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a_{\text{Ю}},\ldots,\bar{M}+\delta M_{\text{Ю}},t)}{\partial\omega},\\
\frac{d(\delta\Omega_{\text{Ю}})}{dt} &= -\sqrt{\frac{1}{fm(\bar{p}+\delta p_{\text{Ю}})}}\times\\
&\quad\times\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a_{\text{Ю}},\ldots,\bar{M}+\delta M_{\text{Ю}},t)}{\partial I},\\
\frac{d(\delta\omega_{\text{Ю}})}{dt} &= (I_0+\delta I_{\text{Ю}})\sqrt{\frac{1}{fm(\bar{p}+\delta p_{\text{Ю}})}}\times\\
&\quad\times\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a_{\text{Ю}},\ldots,\bar{M}+\delta M_{\text{Ю}},t)}{\partial I}-\\
&\quad-2\sqrt{\frac{\bar{p}+\delta p_{\text{Ю}}}{fm}}\,\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a_{\text{Ю}},\ldots,\bar{M}+\delta M_{\text{Ю}},t)}{\partial p}+\\
&\quad+2\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}^{(0)}(\bar{a},\bar{p},D)}{\partial\bar{p}},\\
\frac{d(\delta M_{\text{Ю}})}{dt} &= \delta n_{\text{Ю}}-2\sqrt{\frac{\bar{a}+\delta a_{\text{Ю}}}{fm}}\times\\
&\quad\times\frac{\partial R(\bar{a}+\delta a_{\text{Ю}},\ldots,\bar{M}+\delta M_{\text{Ю}},t)}{\partial a}+2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\,\frac{\partial\bar{R}^{(0)}(\bar{a},\bar{p},D)}{\partial\bar{a}}.
\end{aligned}
\right. \tag{4.42}
$$

В этих уравнениях, так же как и в уравнениях (4.41), R зависит от $\bar{a}+\delta a_{\text{Ю}}$, $\bar{p}+\delta p_{\text{Ю}}, \ldots, \bar{M}+\delta M_{\text{Ю}}$, t.

§ 4.6. Определение возмущений первого порядка, порождаемых неучтенной частью возмущающей функции Юпитера, методом усреднения

В §§ 4.2 и 4.3 мы изложили метод построения промежуточных орбит астероидов, средние движения которых соизмеримы или почти соизмеримы со средним движением Юпитера. Он основывался на точном решении варианта Делоне — Хилла плоской ограниченной круговой задачи трех тел. При этом в разложении возмущающей функции $\overline{R}^{(0)}$ сохранялись только те вековые и резонансные слагаемые, которые не зависят от наклонности орбиты астероида и от эксцентриситета орбиты Юпитера. Для определения возмущений $\delta a_{Ю}, \ldots, \delta M_{Ю}$ элементов промежуточной орбиты $\bar{a}$, $\bar{p}$, I_0, Ω_0, ω, $\overline{M}$ следует найти решение дифференциальных уравнений (4.42). Так как нахождение общего решения уравнений (4.42) в компактной форме не представляется возможным, целесообразно использовать какой-либо способ теории возмущений.

Если бы нам было заранее известно, что при всех $t \geqslant 0$ возмущение $\delta n_{Ю}$ (или $\delta a_{Ю}$) имеет порядок массы Юпитера m' ($\delta n_{Ю} = O(m')$), то в этом случае дифференциальные уравнения (4.42) принадлежали бы к стандартным системам [4], для которых имеется разработанная асимптотическая теория построения решений. Однако a priori это неизвестно, поэтому систему (4.42) следует рассматривать как систему дифференциальных уравнений с медленными «переменными» $\delta a_{Ю}$, $\delta p_{Ю}$, $\delta I_{Ю}$, $\delta\omega_{Ю}$, $\delta\Omega_{Ю}$ и «быстрой» переменной $\delta M_{Ю}$ (в смысле В. М. Волосова [7]).

Это дает нам возможность определить возмущения $\delta a_{Ю}, \ldots, \delta M_{Ю}$ с помощью асимптотической теории возмущений В. М. Волосова [7], типичной для метода усреднения, и развитой нами в работах [12, 13]. Эта теория достаточно подробно изложена в главе I (§§ 1.5, 1.12, 1.14); здесь мы покажем, как ее следует применять в конкретных задачах.

Будем определять возмущения $\delta a_{Ю}, \ldots, \delta M_{Ю}$ в виде

$$\left\{\begin{array}{l} \delta a_{Ю} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (m')^k \delta_k a_{Ю}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta M_{Ю} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (m')^k \delta_k M_{Ю}, \end{array}\right. \tag{4.43}$$

гда m' — масса Юпитера, а $(m')^k\, \delta_k a_{Ю}, \ldots, (m')^k \delta_k M_{Ю}$ — возмущения k-го порядка, порожденные разностью возмущающих функций R и $\overline{R}^{(0)}$. В этом смысле возмущения

$\delta a_{ю}, \ldots, \delta M_{ю}$ можно рассматривать как полные возмущения элементов промежуточной орбиты, порожденные функцией $R - \overline{R}^{(0)}$.

Здесь мы приведем лишь формулы для возмущений первого порядка $m'\delta_1 a_{ю}, \ldots, m'\delta_1 M_{ю}$.

В методе усреднения возмущения медленных переменных $\delta_1 a_{ю}, \ldots, \delta_1 \omega_{ю}$ представляют собой компоненты вектор-функции $u_1\ (\bar{p}, \bar{q}, t)$, а $\delta_1 M_{ю}$ является функцией $v_1(\bar{p}, \bar{q}, t)$, участвующей в замене переменных (1.147). Там же приведены дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка (1.149) и (1.150), которые определяют функции $u_1(\bar{p}, \bar{q}, t)$ и $v_1(\bar{p}, \bar{q}, t)$.

Написав уравнения (1.149) и (1.150) для возмущений $\delta_1 a_{ю}, \ldots, \delta_1 \omega_{ю}, \delta_1 M_{ю}$, будем иметь:

$$\frac{\partial(\delta_1 a_{ю})}{\partial t} + \frac{\partial(\delta_1 a_{ю})}{\partial \overline{M}}(\bar{n} - n_0) = \frac{2}{m'\sqrt{fm}}\left[\sqrt{\bar{a}}\,\frac{\partial R(\bar{a}, \ldots, \overline{M}, t)}{\partial \overline{M}} - \bar{k}_1\sqrt{\bar{a}}\,\frac{\partial \overline{R}^{(0)}(\bar{a}, p, D)}{\partial D}\right], \tag{4.44}$$

$$\frac{\partial(\delta_1 p_{ю})}{\partial t} + \frac{\partial(\delta_1 p_{ю})}{\partial \overline{M}}(\bar{n} - n_0) = \frac{2}{m'\sqrt{fm}}\left[\sqrt{\bar{p}}\,\frac{\partial R(\bar{a}, \ldots, \overline{M}, t)}{\partial \bar{\omega}} - \bar{k}_2\sqrt{\bar{p}}\,\frac{\partial \overline{R}^{(0)}(\bar{a}, \bar{p}, D)}{\partial D}\right], \tag{4.45}$$

$$\frac{\partial(\delta_1 I_{ю})}{\partial t} + \frac{\partial(\delta_1 I_{ю})}{\partial \overline{M}}(\bar{n} - n_0) = \frac{1}{m'\sqrt{fm\bar{p}}}\left[\frac{\partial R(\bar{a}, \ldots, \overline{M}, t)}{\partial \Omega} - \frac{\partial R(\bar{a}, \ldots, \overline{M}, t)}{\partial \bar{\omega}}\right], \tag{4.46}$$

$$\frac{\partial(\delta_1 \Omega_{ю})}{\partial t} + \frac{\partial(\delta_1 \Omega_{ю})}{\partial \overline{M}}(\bar{n} - n_0) = -\frac{1}{m'\sqrt{fm\bar{p}}}\,\frac{\partial R(\bar{a}, \ldots, \overline{M}, t)}{\partial \bar{I}}, \tag{4.47}$$

$$\frac{\partial(\delta_1\omega_{Ю})}{\partial t}+\frac{\partial(\delta_1\omega_{Ю})}{\partial\overline{M}}(\overline{n}-n_0)=$$
$$=\frac{1}{m'\sqrt{fm\overline{p}}}\frac{\partial R(\overline{a},\ldots,\overline{M},t)}{\partial\overline{I}}-$$
$$-\frac{2}{m'}\sqrt{\frac{\overline{p}}{fm}}\left[\frac{\partial R(\overline{a},\ldots,\overline{M},t)}{\partial\overline{p}}-\frac{\partial\overline{R}^{(0)}(\overline{a},\overline{p},D)}{\partial\overline{p}}\right], \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial(\delta_1 M_{Ю})}{\partial t}+\frac{\partial(\delta_1 M_{Ю})}{\partial\overline{M}}(\overline{n}-n_0)=$$
$$=-\frac{3\sqrt{fm}}{2\overline{a}^{5/2}}\delta_1 a_{Ю}-\frac{2}{m'}\sqrt{\frac{\overline{a}}{fm}}\left[\frac{\partial R(\overline{a},\ldots,\overline{M},t)}{\partial\overline{a}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\overline{R}^{(0)}(\overline{a},\overline{p},D)}{\partial\overline{a}}\right]. \quad (4.49)$$

В уравнениях (4.44) — (4.49) n_0 — невозмущенное среднее движение астероида, взятое из «Эфемерид малых планет», а $\frac{\partial R}{\partial\overline{I}}$ — значение производной $\frac{\partial R}{\partial I}$ при $a=\overline{a}$, $p=\overline{p}$, $I=I_0$, $\Omega=\Omega_0$, $\omega=\overline{\omega}$, $M=\overline{M}$.

Если считать, что Юпитер движется по эллиптической гелиоцентрической орбите, то возмущающая функция R допускает представление [32]

$$R=fm'\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}\sum_{k_3=-\infty}^{\infty}\sum_{k_4=-\infty}^{\infty}C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(a,e,e',I)\times$$
$$\times\cos(k_1M+k_2M'+k_3\pi+k_4\pi'), \quad (4.50)$$

где π, π' — долготы перигелиев астероида и Юпитера, отсчитываемые от линии пересечения плоскостей их орбит, $I=\cos J$, J — взаимная наклонность орбит.

Сравнивая разложение (4.50) с разложением (4.03), можно написать

$$R=R_{в}+R_{д}+R_{н}+R_{э}, \quad (4.51)$$

где $R_{в}$, $R_{д}$, $R_{н}$ имеют тот же смысл, что и в § 4.1, а $R_{э}$ — часть возмущающей функции, вызванная эллиптичностью орбиты Юпитера.

Решение уравнений в частных производных (4.44) — (4.49) можно получить, например, путем приведения к системе для характеристик, или же можно воспользоваться решениями (1.153) и (1.154).

Если пренебречь эксцентриситетом орбиты Юпитера, то тогда для возмущающей функции R справедливо представление (4.03) и из формул (1.153) и (1.154) имеем:

$$\delta_1 a_{\text{Ю}} = 2\sqrt{\frac{f\bar{a}}{m}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{k=0 \\ k'=-\infty \\ s=-\infty}}^{\infty}{}^{*} \frac{kC_{k,k',s}(\bar{a}, \bar{e}, \bar{I}) \cos(k\bar{M} + k'\Omega_0 - k'M' + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'}, \tag{4.52}$$

$$\delta_1 p_{\text{Ю}} = 2\sqrt{\frac{f\bar{p}}{m}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{k=0 \\ k'=-\infty \\ s=-\infty}}^{\infty}{}^{*} \frac{sC_{k,k',s}(\bar{a}, \bar{e}, \bar{I}) \cos(k\bar{M} + k'\Omega_0 - k'M' + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'}, \tag{4.53}$$

$$\delta_1 I_{\text{Ю}} = \sqrt{\frac{f}{m\bar{p}}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{k=0 \\ k'=-\infty \\ s=-\infty}}^{\infty} \frac{k'C_{k,k',s}(\bar{a}, \bar{e}, \bar{I}) \cos(k\bar{M} - k'M' + k'\Omega_0 + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'} -$$

$$- \sqrt{\frac{f}{m\bar{p}}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{k=0 \\ k'=-\infty \\ s=-\infty}}^{\infty} \frac{sC_{k,k',s}(\bar{a}, \bar{e}, \bar{I}) \cos(k\bar{M} - k'M' + k'\Omega_0 + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'}, \tag{4.54}$$

$$\delta_1 \Omega_{\text{Ю}} = -\sqrt{\frac{f}{m\bar{p}}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{k=0 \\ k'=-\infty \\ s=-\infty}}^{\infty} \frac{\dfrac{\partial C_{k,k',s}(\bar{a}, \bar{e}, \bar{I})}{\partial \bar{I}} \sin(k\bar{M} - k'M' + k'\Omega_0 + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'}, \tag{4.55}$$

$$\delta_1\omega_{Ю} = \sqrt{\frac{f}{m\bar{p}}} \times$$
$$\times \sum_{\substack{k=0\\k'=-\infty\\s=-\infty}}^{\infty} \frac{\frac{\partial C_{k,k',s}(\bar{a},\bar{e},\bar{I})}{\partial \bar{I}} \sin(k\bar{M} - k'M' + k'\Omega_0 + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'} -$$
$$- 2\sqrt{\frac{f\bar{p}}{m}} \times$$
$$\times \sum_{\substack{k=0\\k'=-\infty\\s=-\infty}}^{*} \frac{\frac{\partial C_{k,k',s}(\bar{a},\bar{e},\bar{I})}{\partial \bar{p}} \sin(k\bar{M} - k'M' + k'\Omega_0 + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'}, \quad (4.56)$$

$$\delta_1 M_{Ю} = -\frac{3f}{\bar{a}^2} \times$$
$$\times \sum_{\substack{k=0\\k'=-\infty\\s=-\infty}}^{*} \frac{kC_{k,k',s}(\bar{a},\bar{e},\bar{I}) \cos(k\bar{M} - k'M' + k'\Omega_0 + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'} -$$
$$- 2\sqrt{\frac{f\bar{a}}{m}} \times$$
$$\times \sum_{\substack{k=0\\k'=-\infty\\s=-\infty}}^{*} \frac{\frac{\partial C_{k,k',s}(\bar{a},\bar{e},\bar{I})}{\partial \bar{a}} \sin(k\bar{M} - k'M' + k'\Omega_0 + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'}. \quad (4.57)$$

Здесь $\bar{a}$, $\bar{e}$ (или $\bar{p}$), $\bar{M}$, $\bar{\omega}$ — элементы плоской промежуточной орбиты, которые считаются известными функциями времени, Ω_0 — берется из «Эфемерид малых планет», $\bar{I} = \cos \bar{I}$, $\bar{I}$ — взаимная наклонность промежуточной орбиты и орбиты Юпитера.

В формулах (4.52)—(4.57) в суммах со «звездочкой» идексы суммирования k и k' принимают лишь такие значения, для которых $kn_0 - k'n' \neq 0$.

Более того, в этих суммах k и k' принимают лишь такие значения, для которых $|kn_0 - k'n'| > O(m')$, т. е. возмущения $\delta_1 a_{Ю}$, $\delta_1 p_{Ю}$, $\delta_1 e_{Ю}$, $\delta_1 M_{Ю}$ состоят лишь из короткопериодических неравенств, пока переменные знаменатели $k\bar{n}(t) - k'n'$ не становятся сколько угодно малыми. Из наших результатов, приведенных в §§ 1.12 и 1.14, следует, что знаменатели $k\bar{n}(t) - k'n'$ могут стремиться к нулю лишь по истечении достаточно большого промежутка времени после начального момента. В остальных суммах k и k' могут принимать любые значения, поэтому в возмущениях $\delta_1 I_{Ю}$, $\delta_1 \Omega_{Ю}$, $\delta_1 \omega_{Ю}$ могут появиться вековые члены вида $t \cos s\omega$, $t \sin s\omega$, или долгопериодические возмущения вида

$$\frac{\cos(k\bar{M} - k'M' + k'\Omega_0 + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'}, \quad \frac{\sin(k\bar{M} - k'M' + k'\Omega_0 + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'}$$

с малыми знаменателями $k\bar{n} - k'n'$. Выражение $t \cos s\bar{\omega}$ должно быть написано вместо $\dfrac{\sin(k\bar{M} - k'M' + k'\Omega_0 + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'}$ при $k = k' = 0$, а $-t \sin s\bar{\omega}$ вместо $\dfrac{\cos(k\bar{M} - k'M' + k'\Omega_0 + s\bar{\omega})}{k\bar{n} - k'n'}$.

Аналогично определяются возмущения $\delta_1 a_{Ю}, \ldots, \delta_1 M_{Ю}$, порождаемые частью возмущающей функции $R_э$. Так, например,

$$\delta_1 a_{Ю,\,э} = 2\sqrt{\frac{f\bar{a}}{m}} \times \\ \times \sum_{\substack{k_1=0\\ k_2=-\infty\\ k_3=-\infty\\ k_4=-\infty}}^{\infty}{}' \frac{k_1 C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\bar{a}, \bar{e}, e', \bar{I}) \cos(k_1\bar{M} + k_2 M' + k_3\bar{\pi} + k_4\pi')}{k_1\bar{n} + k_2 n'}, \tag{4.58}$$

$$\delta_1 p_{Ю,\,э} = 2\sqrt{\frac{f\bar{p}}{m}} \times \\ \times \sum_{\substack{k_1=0\\ k_2=-\infty\\ k_3=-\infty\\ k_4=-\infty}}^{\infty}{}' \frac{k_3 C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\bar{a}, \bar{e}, e', \bar{I}) \cos(k_1\bar{M} + k_2 M' + k_3\bar{\pi} + k_4\pi')}{k_1\bar{n} + k_2 n'}, \tag{4.59}$$

где $\bar{\pi}$, π' — долготы перигелиев промежуточной орбиты астероида и орбиты Юпитера, отсчитываемые от точки их пересечения.

В формулах (4.58) и (4.59) «штрих» над символом суммы означает, что в них включены лишь те члены разложения (4.50), которые пропорциональны e, $(e')^2$, $(e')^3, \ldots$

§ 4.7. Определение возмущений второго порядка

Методика, изложенная в §§ 1.12, 1.14, позволяет определять последовательно возмущения любого порядка. Например, для определения $\delta_2 a_{Ю}$, $\delta_2 p_{Ю}$, $\delta_2 I_{Ю}$, $\delta_2 \Omega_{Ю}$, $\delta_2 \omega_{Ю}$ следует воспользоваться общим уравнением (1.157) для вектор-функции $u_2(\bar{p}, \bar{q}, t)$, в котором вектор-функция $A_2(\bar{p}, \bar{q}, t)$ должна быть заменена в согласии с формулой (1.159). Возмущение $\delta_2 M_{Ю}$ определяется с помощью уравнения для $v_2(\bar{p}, \bar{q}, t)$, приведенного в нашей работе [13] на стр. 297. Там же приведено не только дифференциальное уравнение в частных производных (1.157), определяющее $u_2(\bar{p}, \bar{q}, t)$, но и его решение (формула (34) на стр. 302).

К сожалению, аналитические формулы для возмущений второго порядка являются весьма громоздкими и это обстоятельство не позволяет привести их здесь.

§ 4.8. Возмущения первого порядка, порождаемые притяжением других больших планет

Возмущения первого порядка удовлетворяют принципу линейной суперпозиции, поэтому полные возмущения первого порядка могут быть найдены как суммы возмущений, обусловленных различными возмущающими силами. В задаче многих тел такой случай как раз и имеет место.

Это обстоятельство позволяет находить возмущения первого порядка, порождаемые притяжением каждой большой планеты отдельно, а полные возмущения первого порядка находить как сумму отдельных возмущений.

Поэтому для определения возмущений элементов промежуточной орбиты первого порядка, обусловленных, например, притяжением Сатурна, можно воспользоваться формулами, приведенными в § 4.6. Различие заключается лишь в том, что в общих аналитических выражениях для возмущений не будут встречаться суммы со «звездочками» или со «штрихами», а будут фигурировать полные четырехкратные суммы.

Если обозначить через $R_{С}$ возмущающую функцию Сатурна на астероид, то она допускает представление, аналогичное (4.50), т. е.

$$R_C = f m_C \sum_{\substack{k_1=0\\k_2=-\infty\\k_3=-\infty\\k_4=-\infty}}^{\infty} C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(a, e, e_s, I_C)\cos(k_1 M + k_2 M_C + k_3\pi + k_4\pi_C), \quad (4.60)$$

где m_C, e_C, M_C — масса, эксцентриситет и средняя аномалия Сатурна, π, π_C — долготы перигелиев астероида и Сатурна, отсчитываемые от линии пересечения плоскостей орбит, $I_C = \cos i_C$, i_C — взаимная наклонность орбит астероида и Сатурна.

Пользуясь методом усреднения [46], можно вывести следующие аналитические формулы для возмущений первого порядка $\delta_1 a_C, \delta_1 p_C, \ldots, \delta_1 M_C$, порождаемых притяжением Сатурна:

$$\delta_1 a_C = 2\frac{m_C}{m'}\sqrt{\frac{f\bar{a}}{m}} \times \sum_{\substack{k_1=0\\k_2=-\infty\\k_3=-\infty\\k_4=-\infty}}^{\infty} \frac{k_1 C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\bar{a}, \bar{e}, e_C, I_C)\cos(k_1\bar{M} + k_2 M_C + k_3\bar{\pi} + k_4\pi_C)}{k_1\bar{n} + k_2 n_C}, \quad (4.61)$$

$$\delta_1 p_C = 2\frac{m_C}{m'}\sqrt{\frac{f\bar{p}}{m}} \times \sum_{\substack{k_1=0\\k_2=-\infty\\k_3=-\infty\\k_4=-\infty}}^{\infty} \frac{k_3 C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\bar{a}, \bar{e}, e_C, I_C)\cos(k_1\bar{M} + k_2 M_C + k_3\bar{\pi} + k_4\bar{\pi}_C)}{k_1\bar{n} + k_2 n_C}, \quad (4.62)$$

$$\delta_1 I_C = \frac{m_C}{m'}\sqrt{\frac{f}{m\bar{p}}} \times \sum_{\substack{k_1=0\\k_2=-\infty\\k_3=-\infty\\k_4=-\infty}}^{\infty} \frac{k_4 C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\bar{a}, \bar{e}, e_C, I_C)\cos(k_1\bar{M} + k_2 M_C + k_3\bar{\pi} + k_4\pi_C)}{k_1\bar{n} + k_2 n_C}.$$

$$
-\frac{m_C}{m'}\sqrt{\frac{f}{m\bar{p}}}\times
\sum_{\substack{k_1=0\\k_2=-\infty\\k_3=-\infty\\k_4=-\infty}}^{\infty}\frac{k_3 C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\bar{a},\bar{e},e_C,I_C)\cos(k_1\bar{M}+k_2M_C+k_3\bar{\pi}+k_4\pi_C)}{k_1\bar{n}+k_2n_C},
\tag{4.63}
$$

$$
\delta_1\Omega_C=-\frac{m_C}{m'}\sqrt{\frac{f}{m\bar{p}}}\times
\sum_{\substack{k_1=0\\k_2=-\infty\\k_3=-\infty\\k_4=-\infty}}^{\infty}\frac{\dfrac{\partial C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\bar{a},\bar{e},e_C,\bar{I}_C)}{\partial\bar{I}_C}\sin(k_1M+k_2M_C+k_3\bar{\pi}+k_4\pi_C)}{k_1\bar{n}+k_2n_C},
\tag{4.64}
$$

$$
\delta_1\omega_C=\frac{m_C}{m'}\sqrt{\frac{f}{m\bar{p}}}\times
\sum_{\substack{k_1=0\\k_2=-\infty\\k_3=-\infty\\k_4=-\infty}}^{\infty}\frac{\dfrac{\partial C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\bar{a},\bar{e},e_C,\bar{I}_C)}{\partial\bar{I}_C}\sin(k_1\bar{M}+k_2M_C+k_3\bar{\pi}+k_4\pi_C)}{k_1\bar{n}+k_2n_C}-
$$

$$
-\frac{2m_C}{m'}\sqrt{\frac{f\bar{p}}{m}}\times
\sum_{\substack{k_1=0\\k_2=-\infty\\k_3=-\infty\\k_4=-\infty}}^{\infty}\frac{\dfrac{\partial C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\bar{a},\bar{e},e_C,\bar{I}_C)}{\partial\bar{p}}\sin(k_1\bar{M}+k_2M_C+k_3\bar{\pi}+k_4\pi_C)}{k_1\bar{n}+k_2n_C},
\tag{4.65}
$$

$$\delta_1 M_С = -\frac{3fm_С}{\bar{a}^2 m'}\times$$

$$\times \sum_{\substack{k_1=0\\k_2=-\infty\\k_3=-\infty\\k_4=-\infty}}^{\infty} \frac{k_1 C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\bar{a},\bar{e},e_С,\bar{I}_С)\cos(k_1\bar{M}+k_2M_С+k_3\bar{\pi}+k_4\pi_С)}{k_1\bar{n}+k_2n_С} -$$

$$-\frac{2m_С}{m'}\sqrt{\frac{f\bar{a}}{m}}\times$$

$$\times \sum_{\substack{k_1=0\\k_2=-\infty\\k_3=-\infty\\k_4=-\infty}}^{\infty} \frac{\dfrac{\partial C_{k_1,k_2,k_3,k_4}(\bar{a},\bar{e},e_С,\bar{I}_С)}{\partial\bar{a}}\sin(k_1\bar{M}+k_2M_С+k_3\bar{\pi}+k_4\pi_С)}{k_1\bar{n}+k_2n_С}. \qquad (4.66)$$

В этих соотношениях $n_С$ — среднее движение Сатурна, $m_С/m'$ — отношение массы Сатурна к массе Юпитера, $\bar{I}_С = \cos\bar{J}_С$, $\bar{J}_С$ — взаимная наклонность орбиты Сатурна и промежуточной орбиты астероида, $\bar{\pi}$, $\pi_С$ — долготы перигелиев промежуточной орбиты астероида и орбиты Сатурна, отсчитываемые от линии пересечения плоскостей их орбит.

Формулы (4.61)—(4.66) хотя и записаны в тригонометрической форме, но на самом деле они могут содержать и вековые неравенства, появляющиеся при $k_1 = k_2 = 0$. В этом случае выражение

$$\frac{\sin(k_1\bar{M}+k_2M_С+k_3\bar{\pi}+k_4\pi_С)}{k_1\bar{n}+k_2n_2}$$

следует заменить через $t\cos(k_3\bar{\pi}+k_4\pi_С)$, а выражение

$$\frac{\cos(k_1\bar{M}+k_2M_С+k_3\bar{\pi}+k_4\pi_С)}{k_1\bar{n}+k_2n_С} \text{ — через } -t\sin(k_3\pi+k_4\pi_С).$$

С помощью формул (4.61)—(4.66) можно вычислить возмущения первого порядка, обусловленные притяжением Урана, Нептуна, Марса и других больших планет.

Если обозначить через $\delta_1 a_У, \ldots, \delta_1 M_У$ возмущения со стороны Урана, $\delta_1 a_Н, \ldots, \delta_1 M_Н$ — возмущения со стороны Нептуна и т. д., то в этом случае возмущения $\delta_1 a_У, \ldots, \delta_1 M_У$ пропорциональны отношению $m_У/m'$ ($m_У$ —

масса Урана, m' — масса Юпитера), $\delta_1 a_{\text{Н}}, \ldots, \delta_1 M_{\text{Н}}$ — пропорциональны отношению $m_{\text{Н}}/m'$ и т. д.

Полные возмущения первого порядка элементов промежуточной орбиты ($\bar{a}$, $\bar{p}$, $\bar{I}=I_0$, $\bar{\Omega}=\Omega_0$, $\bar{\omega}$, $\bar{M}$) астероида, движущегося в гравитационном поле Солнца и больших планет, определяются равенствами

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta_1 a = m'(\delta_1 a_{\text{Ю}} + \delta_1 a_{\text{С}} + \delta_1 a_{\text{У}} + \ldots), \\ \Delta_1 p = m'(\delta_1 p_{\text{Ю}} + \delta_1 p_{\text{С}} + \delta_1 p_{\text{У}} + \ldots), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_1 M = m'(\delta_1 M_{\text{Ю}} + \delta_1 M_{\text{С}} + \delta_1 M_{\text{У}} + \ldots). \end{array}\right. \tag{4.67}$$

Если умножить выражения, включенные в скобках, на массу Юпитера m', то каждое из слагаемых будет пропорциональным какой-нибудь из возмущающих масс m', $m_{\text{С}}$, $m_{\text{У}}$ и т. д.

§ 4.9. Выбор основной системы координат

Промежуточная орбита астероида строилась нами на основе решения усредненного варианта Делоне — Хилла плоской ограниченной круговой задачи трех тел. Эта орбита определяется элементами $\bar{a}$, $\bar{p}$ (или $\bar{e}$), $\bar{\omega}$, $\bar{M}$, а ориентация координатной системы в пространстве для нее может быть произвольной.

Однако при построении возмущенной теории мы доопределяли недостающие два элемента промежуточной орбиты $\bar{I}=I_0$, $\bar{\Omega}=\Omega_0$. Другими словами, промежуточная орбита с элементами $\bar{a}$, $\bar{p}$, I_0, Ω_0, $\bar{\omega}$, $\bar{M}$ представляет собой кривую, расположенную в плоскости, определяемой углами i_0, Ω_0 относительно плоскости эклиптики эпохи t_0. В качестве t_0 удобно принять ту эпоху, для которой даны элементы интересующего нас астероида a_0, p_0 (или e_0), i_0, Ω_0, ω_0, M_0 в «Эфемеридах малых планет» [48].

Плоскость эклиптики эпохи t_0 принимается за основную координатную плоскость для гелиоцентрической прямоугольной системы координат $Sxyz$, а ось Sx направлена в точку весеннего равноденствия эпохи $t=t_0$. Поэтому для получения аналитических выражений для возмущений необходимо прежде всего предвычислить элементы больших планет, влияние которых учитывается в возмущенной теории, для момента $t=t_0$.

§ 4.10. Сравнение возмущений, полученных методом последовательных приближений и методом усреднения

Методы П. Лапласа, С. Ньюкома, Г. Хилла, П. Ганзена, типичные для теории возмущений в небесной механике, представляют собой различные модификации метода последовательных приближений. Общим для этих методов является использование кеплерова эллипса (решения задачи двух тел) в качестве нулевого приближения или, что то же самое, в качестве промежуточной орбиты. Полные возмущения, согласно классической схеме, находятся в виде бесконечных степенных рядов относительно возмущающих масс (или иного малого параметра).

Пусть α — один из элементов орбиты какого-либо астероида. Тогда α представляется в виде ряда

$$\alpha=\bar{\alpha}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\Delta_k\alpha(t), \tag{4.68}$$

где μ — возмущающая масса, $\Delta_k\alpha(t)$ — возмущение элемента α k-го порядка, причем известно, что порядок возмущения в точности совпадает с показателем степени μ. Элементы промежуточной орбиты $\bar{\alpha}(t)$ в большинстве своем суть постоянные величины, и только некоторые из них (аномалии, долготы) — функции времени t.

Существенно заметить, что $\bar{\alpha}(t)$ и $\Delta_k\alpha(t)$ не зависят от возмущающей массы μ. Метод последовательных приближений дает для $\Delta_k\alpha(t)$ выражение вида

$$\Delta_k\alpha(t)=\sum_{k_1,\,k_2}\frac{A_{k_1,\,k_2}t^s\cos\left[(k_1n_0+k_2n')\,t+\beta\right]}{(k_1n_0+k_2n')^{\gamma}}, \tag{4.69}$$

где $0\leqslant s\leqslant k$, $0\leqslant\gamma\leqslant k$, n_0, n' — средние движения астероида и возмущающей планеты, β — постоянная.

Как видно из (4.69), в выражения для $\Delta_k\alpha(t)$ входят постоянные *знаменатели* $k_1n_0+k_2n'$, которые иногда могут быть весьма малыми или даже нулевыми. Это относится в первую очередь к астероидам, средние движения которых соизмеримы или почти соизмеримы со средним движением Юпитера. Аппарат классической теории возмущений приводит к вековым, смешанным и периодическим возмущениям, причем часть из них обусловлена несовершенством математического аппарата.

Таким образом, классическая теория возмущений, в основу которой положено решение задачи двух тел, не учитывает специфики движения астероидов в случае резонанса.

В методе усреднения элемент α представляется рядом

$$\alpha = \overline{\alpha}(t, \mu) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \delta_k \alpha(t, \mu). \tag{4.70}$$

Из представления (4.70) вытекает, что элемент промежуточной орбиты (нулевого приближения) $\overline{\alpha}(t, \mu)$ содержит в себе некоторую часть возмущений любого порядка $\Delta_k\alpha(t)$, определенных по классической схеме. Возмущение первого порядка $\delta_1\alpha(t, \mu)$, полученное с помощью метода усреднения, содержит оставшуюся (не вошедшую в промежуточную орбиту) часть классических возмущений первого порядка $\Delta_1\alpha(t)$ и некоторую часть классических возмущений любого порядка выше первого. Иными словами, следует ожидать, что аналитическая теория движения астероидов в резонансном случае, построенная методом усреднения, должна быть точнее классической теории движения, если строятся теории одинакового порядка. Однако это относится к астероидам с малой наклонностью орбит, так как в этом случае уравнения промежуточного движения интегрируются в квадратурах. При больших значениях наклонности прежде всего необходимо получить решение уравнений варианта Делоне — Хилла для пространственной ограниченной круговой задачи трех тел (см. §§ 2.9 и 2.10).

Сами возмущения $\delta_1\alpha(t, \mu)$ имеют аналитический вид, отличный от формы (4.69). Теория возмущенного движения астероида в рамках ограниченной круговой задачи трех тел для элементов a и p (или e) дает чисто тригонометрические представления без вековых и смешанных неравенств

$$\delta_k a,\ \delta_k p \sim \sum_{k_1,\, k_2,\, s} \frac{C_{k_1,\, k_2,\, s}(\overline{a}, \overline{e}, \overline{I}) \cos(k_1\overline{M} + k_2 M' - k_2\Omega_0 + s\overline{\omega})}{(k_1\overline{n} + k_2 n')^k}. \tag{4.71}$$

В рядах типа (4.71), в отличие от рядов (4.69), знаменатели $k_1\bar{n}+k_2n'$ являются *переменными*, так как $\bar{n}=\bar{n}(t)$. Само собой разумеется, что равенства вида (4.71) имеют смысл, пока ни один из знаменателей $k_1\bar{n}+k_2n'$ не обращается в нуль. Наши теоретические оценки [12, 13] показывают, что обращение в нуль одного из знаменателей может осуществиться лишь по истечении времени порядка $T\sim 1/m'$ (или $T\sim 1/\sqrt{m'}$ для бесконечных рядов). Это и представляет собой оценку промежутка времени, на котором аналитическая теория, построенная методом усреднения, может быть использована.

§ 4.11. Промежуточная орбита малой планеты Еулалии

В. Х. Караганчу успешно применил метод усреднения для построения аналитической теории движения малых планет семейства Гестии [46, 47], для которого характерна соизмеримость $n:n'=3:1$.

Многими аналитическими результатами из указанных работ мы воспользовались в предыдущих параграфах этой главы, а сейчас приведем основные формулы аналитической теории движения одной из малых планет семейства Гестии, Еулалии (№ 495).

Система элементов Еулалии [48]:

$$M=341°,655, \qquad \text{эпоха 1957, май 11, } 0^h\, ET$$

$$\left.\begin{aligned} \omega&=205°,046,\\ \Omega&=186°,620,\\ i&=2°,286, \end{aligned}\right\}\quad \text{равноденствие и эклиптика 1950, 0}$$

$$a=2{,}4878,$$
$$e=0{,}1324,$$
$$n=904'',231.$$

Как видно из приведенной системы элементов, астероид Еулалия достаточно интересный объект для исследования с помощью схемы Делоне — Хилла в рамках плоской ограниченной круговой задачи трех тел, так как наклонность орбиты i мала. Кроме того, $n:n'=3{,}0232\approx\approx 3:1$, а относительно большой эксцентриситет позволяет более уверенно определять возмущенное значение элемента ω.

Разложение возмущающей функции, обусловленной притяжением Юпитера при допущении, что оба тела (Юпитер и астероид) движутся в плоскости эклиптики, в обозначениях Леверье [34] с точностью до e^4 включительно имеет вид

$$R^{(0)}=fm'\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\{\left[(1)^{(s)}+(2)^{(s)}\frac{e^2}{4}+(4)^{(s)}\frac{e^4}{16}\right]\cos(sl-sl')+\right.$$
$$+\left[(50)^{(s)}\frac{e}{2}+(51)^{(s)}\frac{e^3}{8}\right]\cos[(s-1)l-sl'+\omega]+$$
$$+\left[(172)^{(s)}\frac{e^2}{4}+(173)^{(s)}\frac{e^4}{16}\right]\cos[(s-2)l-sl'+2\omega]+$$
$$+(240)^{(s)}\frac{e^3}{8}\cos[(s-3)l-sl'+3\omega]+$$
$$\left.+(336)^{(s)}\frac{e^4}{16}\cos[(s-4)l-sl'+4\omega]\right\}, \quad (4.72)$$

где l, l' — средние долготы астероида и Юпитера ($l=\omega+M$, $l'=\omega'+M'$), а выражения для $(1)^{(s)},\ldots,(336)^{(s)}$ будут приведены ниже.

Для соизмеримости $3:1$ аномалия Делоне, вычисленная по формуле (2.81), принимает вид

$$D=M+3(\omega-l'), \quad (4.73)$$

из которой находим

$$l'=\frac{M}{3}+\omega-\frac{D}{3}.$$

Пользуясь последним соотношением, находим для $R^{(0)}$ следующее аналитическое представление:

$$R^{(0)}=fm'\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\{\left[(1)^{(s)}+(2)^{(s)}\frac{e^2}{4}+(4)^{(s)}\frac{e^4}{16}\right]\cos s\left(\frac{2}{3}M+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}D\right)+\left[(50)^{(s)}\frac{e}{2}+(51)^{(s)}\frac{e^3}{8}\right]\cos\left[\left(\frac{2s}{3}-1\right)M+\right.$$
$$\left.+\frac{s}{3}D\right]+\left[(172)^{(s)}\frac{e^2}{4}+(173)^{(s)}\frac{e^4}{16}\right]\cos\left[\left(\frac{2s}{3}-2\right)M+\right.$$
$$\left.+\frac{s}{3}D\right]+(240)^{(s)}\frac{e^3}{8}\cos\left[\left(\frac{2s}{3}-3\right)M+\frac{s}{3}D\right]+$$
$$\left.+(336)^{(s)}\frac{e^4}{16}\cos\left[\left(\frac{2s}{3}-4\right)M+\frac{s}{3}D\right]\right\}. \quad (4.74)$$

Согласно схеме усреднения Делоне — Хилла

$$\overline{R}^{(0)}(a,\ e,\ D)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R^{(0)}(a,\ e,\ M,\ D)\,dM. \qquad (4.75)$$

Заметим, что большая полуось входит в $(1)^{(s)}, \ldots, (336)^{(s)}$.

С точностью до e^4 включительно имеем

$$\overline{R}^{(0)}(a,\ e,\ D)=fm'\left\{(1)^{(0)}+(2)^{(0)}\frac{e^2}{4}+(3)^{(0)}\frac{e^4}{16}+\right.$$
$$\left.+\left[(172)^{(3)}\frac{e^2}{4}+(173)^{(3)}\frac{e^4}{16}\right]\cos D+(336)^{(6)}\frac{e^4}{16}\cos 2D\right\}. \qquad (4.76)$$

Таким образом, с принятой точностью усредненная возмущающая функция $\overline{R}^{(0)}$ зависит от a только посредством выражений $(1)^{(0)}$, $(2)^{(0)}$, $(4)^{(0)}$, $(172)^{(3)}$, $(173)^{(3)}$, $(336)^{(6)}$, которые в свою очередь зависят от a через коэффициенты Лапласа. Эти аналитические зависимости имеют такой вид:

$$(1)^{(0)}=\frac{A^{(0)}}{2},$$
$$(2)^{(0)}=A_1^{(0)}+A_2^{(0)},$$
$$(4)^{(0)}=3A_3^{(0)}+3A_4^{(0)},$$
$$(172)^{(3)}=\frac{21}{2}A^{(3)}+5A_1^{(3)}+A_2^{(3)},$$
$$(173)^{(3)}=-31A^{(3)}-\frac{61}{3}A_1^{(3)}+5A_2^{(3)}+12A_3^{(3)}+4A_4^{(3)},$$
$$(336)^{(6)}=157A^{(6)}+\frac{277}{3}A_1^{(6)}+37A_2^{(6)}+9A_3^{(6)}+A_4^{(6)},$$

где

$$A^{(s)}=\frac{b^{(s)}}{a'}, \qquad A_k^{(s)}=\frac{b_k^{(s)}}{a!k!}$$
$$(s=0,\ 3,\ 6; \quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

a' — большая полуось орбиты Юпитера, $b^{(s)}$ — коэффициенты Лапласа, $b_k^{(s)}$ выражаются через производные коэффициентов Лапласа:

$$b^{(s)}=2\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}\alpha^s F\left(\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}+s,\ s+1,\ \alpha^2\right), \qquad (4.77)$$

$$b_k^{(s)}=\alpha^k\frac{d^k b^{(s)}}{d\alpha^k}; \qquad (4.78)$$

здесь $\alpha=a/a'$ — отношение больших полуосей астероида и Юпитера, $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$ — гипергеометрический ряд.

С помощью первого интеграла (2.82) и соотношения $p=a(1-e^2)$ из усредненной возмущающей функции $\overline{R}^{(0)}$ (4.76) можно исключить эксцентриситет e и получить

$$\overline{R}^{(0)}(a,\ D)=fm'[C_{0,0}(a)+C_{1,3}(a)\cos D+ \\ +C_{2,6}(a)\cos 2D], \qquad (4.79)$$

где

$$\left\{\begin{aligned} C_{0,0}(a)&=\sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{\infty} C_{0,0}^{(k/2)}a^{k/2},\\ C_{1,3}(a)&=\sum_{k=2}^{\infty} C_{1,3}^{(k/2)}a^{k/2},\\ C_{2,6}(a)&=\sum_{k=8}^{\infty} C_{2,6}^{(k/2)}a^{k/2}.\end{aligned}\right. \qquad (4.80)$$

В формулах (4.80) коэффициенты $C_{0,0}^{(k/2)}$, $C_{1,3}^{(k/2)}$, $C_{2,6}^{(k/2)}$ зависят только от большой полуоси орбиты Юпитера a'.

Пользуясь представлением (4.79), выражению (4.13) можно придать конкретный вид:

$$\frac{fm}{2}+3n'\sqrt{fm}(\overline{a})^{3/2}+fm'\overline{a}[C_{0,0}(\overline{a})+ \\ +C_{1,3}(\overline{a})\cos D+C_{2,6}(\overline{a})\cos 2D]=c_2\overline{a}. \qquad (4.81)$$

Функциональная зависимость (4.81) определяет $\overline{a}=\overline{a}(D)$.

В. Х. Караганчу, пользуясь методами, изложенными в § 4.2, нашел для Еулалии, что

$$\overline{a}=2{,}487113+0{,}0010201\cos D-0{,}0000038\cos 2D. \qquad (4.82)$$

Далее, с помощью соотношений (4.24)—(4.28) были вычислены

$$\bar{p}=2{,}442151+0{,}003032\cos D-0{,}0000113\cos 2D, \qquad (4.83)$$

$$\bar{e}=0{,}134438-0{,}0030364\cos D-0{,}0000051\cos 2D. \qquad (4.84)$$

Остальные формулы § 4.2 дают:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}-205^\circ{,}047= &-0{,}2259072(D-D_0)+1{,}269221(\sin D-\\ &-\sin D_0)-0{,}2414625(\sin 2D-\sin 2D_0)+0{,}0497440\times\\ &\times(\sin 3D-\sin 3D_0)-0{,}01039521(\sin 4D-\sin 4D_0)+\\ &+0{,}0019912(\sin 5D-\sin 5D_0), \qquad (4.85)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t-t_0= &\,611691(D-D_0)-504562(\sin D-\sin D_0)+\\ &+80398(\sin 2D-\sin 2D_0)-15232(\sin 3D-\sin 3D_0)+\\ &+3054(\sin 4D-\sin 4D_0)-569(\sin 5D-\sin 5D_0), \qquad (4.86)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M-341^\circ{,}655= &\,2681{,}198(D-D_0)-2206{,}224(\sin D-\\ &-\sin D_0)+351{,}352(\sin 2D-\sin 2D_0)-66{,}810(\sin 3D-\\ &-\sin 3D_0)+13{,}342(\sin 4D-\sin 4D_0)-\\ &-2{,}486(\sin 5D-\sin 5D_0). \qquad (4.87)\end{aligned}$$

В формулах (4.85)—(4.87) $t_0=1957$, июнь 11, 0^hET, а

$$D_0=D(t_0)=M_0+3(\omega_0-l_0'),$$

где l_0' — средняя долгота Юпитера в момент t_0. Важно заметить, что разности вида $D-D_0$ и $\sin kD-\sin kD_0$ остаются малыми на достаточно больших промежутках времени, так как D — медленная переменная. Таким образом, промежуточная орбита малой планеты Еулалии определяется полностью формулами (4.82)—(4.87) и $i_0=2^\circ{,}286$, $\Omega_0=186^\circ{,}620$.

§ 4.12. Возмущения элементов промежуточной орбиты малой планеты Еулалии, полученные методом усреднения

В. Х. Караганчу, пользуясь общими выражениями для возмущений первого порядка, приведенными в §§ 4.6, 4.8, вывел аналитические формулы для возмущений $\delta_1 a_{Ю}, \ldots$ $\ldots, \delta_1 M_{Ю}$, порождаемых частью возмущающей функции Юпитера, пропорциональной e^2, e', η^2 $\left(\eta^2=\frac{1-I}{2}\right)$ и для возмущений $\delta_1 a_С, \ldots, \delta_1 M_С$, порождаемых первыми членами в разложении возмущающей функции Сатурна.

Возмущения имеют довольно громоздкий вид, поэтому мы здесь приведем для иллюстрации лишь одну из формул:

$$\delta_1 \Omega_Ю = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{f}{m\bar{p}}}\sum_{q=1}^{\infty} C_{11,q}^{(0)}\,\bar{a}^{2(q-1)}t - \sqrt{\frac{f}{m\bar{p}}}\sum_{s=-8}^{8}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{C_{11,q}^{(s)}\,\bar{a}^{|s|+2(q-1)}}{2s(\bar{n}-n')}\sin s(\bar{M}-M'+\bar{\Omega}+\bar{\omega}-\pi') - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{f}{m\bar{p}}}\frac{\bar{a}}{(a')^2}\left[\frac{\sin(\bar{M}-M'+\bar{\Omega}+\bar{\omega}-\pi')}{\bar{n}-n'} - \frac{\sin(\bar{M}+M'-\bar{\Omega}-\bar{\omega}+\pi')}{\bar{n}+n'}\right]. \quad (4.88)$$

В двойной сумме $s \neq 0$. Коэффициент

$$C_{11,q}^{(s)} \sim \frac{1}{(a')^{|s|+(2q-2)}}, \text{ поэтому при } \bar{a}/a' < 1$$

ряды, входящие в (4.88), сходятся.

Для определения возмущений $\delta_1 a_Ю, \ldots, \delta_1 M_Ю$, или $\delta_1 a_С, \ldots, \delta_1 M_С$ в виде явных функций времени необходимо заменить в них элементы промежуточной орбиты соответствующими функциями времени, но на практике это нецелесообразно. Экономнее для интересующего нас момента времени t вычислить значения элементов промежуточной орбиты, после чего подставить их значения в формулы для возмущений.

Исследования В. Х. Караганчу показывают, что в возмущениях большой полуоси и эксцентриситета имеются долгопериодические неравенства, обусловленные резонансными слагаемыми в возмущающей функции Юпитера и зависящие от наклонности орбиты астероида и эксцентриситета орбиты Юпитера e'. Эти резонансные слагаемые не были учтены в промежуточной орбите.

Кроме того, в $\delta_1 I_Ю$, $\delta_1 \omega_Ю$, $\delta_1 \Omega_Ю$ содержатся вековые неравенства, преобладающие над периодическими в возмущениях $\delta_1 \omega_Ю$ и $\delta_1 \Omega_Ю$. На промежутке времени в 100 лет вековой член в $\delta_1 \omega_Ю$ достигает $30'$, а в $\delta_1 \Omega_Ю$ достигает $21'$.

Сравнение аналитической теории движения Еулалии с результатами численного интегрирования дифференциальных уравнений ограниченной задачи четырех (Солнце — Юпитер — Сатурн — астероид) и десяти (Солнце — все большие планеты, исключая Плутона, — астероид) тел показало, что аналитические теории движения резонансных астероидов, построенные методами усреднения, эффективны на промежутках времени порядка сотен лет.

Анализ средних движений других астероидов, принадлежащих семействам Троянцев, Гильды, Минервы и Гестии показывает [45], что наиболее значительные долгопериодические возмущения элементов орбит, обусловленные пространственной составляющей резонансной части возмущающей функции Юпитера (не учтенной в промежуточной орбите), могут появиться в элементах орбит астероидов: Гильда (№ 153), Франсетта (№ 1212), Потомак (№ 1345), Ахиллес (№ 588), Патрокл (№ 617), Приам (№ 884), Одиссей (№ 1143), Эней (№ 1172).

Для Гильды, Франсетты и Потомака ($k_1=2$, $k_2=-3$) основным возмущающим слагаемым является член разложения возмущающей функции

$$(80)^{(s)}\frac{e'}{2}\eta^2\cos\left[(s+1)\,l'-s\lambda-\bar{\omega}'\right],$$

приведенный здесь в обозначениях Леверье [50].

Для Ахиллеса, Приама, Одиссея, Энея ($k_1=1$, $k_2=-1$)

$$\left[(12)^{(s)}\left(\frac{e^2}{2}\right)\eta^2+(13)^{(s)}\eta^2+(17)^{(s)}\eta^4\right]\cos(sl'-s\lambda).$$

§ 4.13. О построении аналитических теорий движения астероидов методом усреднения при отсутствии резонанса

Основные идеи изложенного метода построения теории движения астероидов в случае резонанса могут быть использованы и для создания теорий движения астероидов в общем случае.

Будем считать, что резонанс не имеет места, если неравенство $|k_1 n - k_2 n'| \geqslant 0{,}00005$ выполняется при целых положительных k_1, k_2 и таких, что $0<k_1+k_2\leqslant 5$. (Для $k_1+k_2>5$ линейная комбинация $k_1 n - k_2 n'$ может быть и меньше 0,00005.) Здесь n и n' — невозмущенные средние суточные движения астероида и Юпитера в радианах.

При отсутствии резонанса астероидов в качестве промежуточной орбиты целесообразно взять решение дифференциальных уравнений усредненных схем Фату или Н. Д. Моисеева для плоской ограниченной круговой задачи трех тел. Рассмотрим, например, схему Фату.

В § 2.7 приведена полная система первых интегралов для дифференциальных уравнений (2.62) схемы Фату:

$$\bar{p}=c_1', \tag{2.63}$$

$$\frac{fm}{2\bar{a}}+n'\sqrt{fm\bar{p}}+\bar{R}^{(0)}(\bar{a},\ \bar{p},\ \bar{M})=c_2', \tag{2.64}$$

$$t-t_0=\int\limits_{\bar{M}_0}^{\bar{M}}\frac{d\bar{M}}{\bar{n}-2\sqrt{\frac{\bar{a}}{fm}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\bar{a}}}, \tag{2.65}$$

$$\bar{\omega}-\bar{\omega}_0=-2\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\frac{\partial\bar{R}^{(0)}}{\partial\bar{p}}\,dt. \tag{2.66}$$

Пользуясь интегралом (2.63) и зависимостью $\bar{e}=\sqrt{1-\frac{\bar{p}}{\bar{a}}}=\sqrt{1-\frac{c_1'}{\bar{a}}}$, можно привести интеграл (2.64) к виду

$$F(\bar{a},\ \bar{M})=c_2'. \tag{4.89}$$

Выражением для эксцентриситета $\bar{e}$ приходится пользоваться, так как мы не имеем разложение $\bar{R}^{(0)}(\bar{a},\ \bar{p},\ \bar{M})$, а имеем разложение $\bar{R}^{(0)}(\bar{a},\ \bar{e},\ \bar{M})$.

Применяя к неявной функции (4.89) один из методов, изложенных в § 4.2, находим явное выражение для $\bar{a}$:

$$\bar{a}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos k\bar{M}. \tag{4.90}$$

Возвращаясь к эксцентриситету $\bar{e}$ и пользуясь соотношением $\bar{n}=\frac{\sqrt{fm}}{(\bar{a})^{3/2}}$, можно найти аналитические формулы:

$$\bar{e}=\sum_{k=0}^{\infty}e_k\cos k\bar{M}, \tag{4.91}$$

и
$$\bar{n}=\sum_{k=0}^{\infty} n_k \cos k\bar{M}. \tag{4.92}$$

На практике, как и в задаче двух тел, целесообразнее определить $\bar{\omega}$ как функцию $\bar{M}$ и после этого обращать интеграл (2.65).

Для нахождения функциональной зависимости $\bar{\omega}=\bar{\omega}(\bar{M})$ необходимо в интеграле (2.66) перейти к новой переменной интегрирования $\bar{M}$ по формуле

$$dt=\frac{d\bar{M}}{\bar{n}-2\sqrt{\dfrac{\bar{a}}{fm}}\dfrac{\partial\bar{R}^{(0)}}{\partial\bar{a}}}.$$

Тогда будем иметь

$$\bar{\omega}-\bar{\omega}_0=-2\int\limits_{\bar{M}_0}^{\bar{M}}\sqrt{\frac{\bar{p}}{fm}}\,\frac{\dfrac{\partial\bar{R}^{(0)}}{\partial\bar{p}}}{\bar{n}-2\sqrt{\dfrac{\bar{a}}{fm}}\dfrac{\partial\bar{R}^{(0)}}{\partial\bar{a}}}\,d\bar{M}. \tag{4.93}$$

Для непосредственного интегрирования следует в подынтегральном выражении заменить $\bar{a}$ и $\bar{e}$ с помощью (4.91) и (4.92). В результате такой замены под знаком интеграла мы получаем ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \cos k\bar{M}$. После интегрирования получим

$$\bar{\omega}-\bar{\omega}_0=B_0\bar{M}+\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\bar{M}. \tag{4.94}$$

Наконец, из соотношения (2.65) получаем

$$t-t_0=C_0\bar{M}+\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin k\bar{M}. \tag{4.95}$$

Равенство (4.95) является аналогом уравнения Кеплера для схемы Фату.

Методом усреднения можно построить теорию возмущенного движения на основе этой промежуточной орбиты, подобную той, которую мы излагали в резонансном случае движения астероидов.

Конечно, предложенная методика пригодна для исследования движения астероидов, орбиты которых имеют малую наклонность, так как промежуточная орбита строилась на основе плоской ограниченной круговой задачи трех тел.

Применение метода усреднения для построения аналитических теорий движения астероидов с произвольной наклонностью не лишено конструктивной перспективы. На это указывают работы Г. Контопулоса [49] и Г. Бозиса [50], содержащие формальный метод построения недостающих интегралов ограниченной задачи трех тел.

Литература к части I

1. Ван дер Поль Б., Нелинейная теория электрических колебаний. Связьиздат, 1935.
2. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., ЖЭТФ **4**, 117—122, 1934.
3. Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, Изд. АН УССР, 1945.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1963
5. Митропольский Ю. А., Лекции по методу усреднения в нелинейной механике, Киев, «Наукова Думка», 1966.
6. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Укр. матем. ж. **7**, 1955.
7. Волосов В. М., Успехи матем. наук **17**, вып. 6 (108), 1962.
8. Ларионов Г. С. и Филатов А. Н., Изв. АН Уз. ССР, сер. техн. наук, № 2, 1969.
9. Хейл Дж., Колебания в нелинейных системах, «Мир», 1967.
10. Graffi D., Ann. mat. pura ed appl. ser. IV, **49**, 1960.
11. Гребеников Е. А., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга, ГАИШ, **35**, 1966.
12. Гребеников Е. А., Дифференц. уравнения **4**, вып. 3, 459—473, 1968.
13. Гребеников Е. А., Бюлл. Ин-та теор. астрон. АН СССР **11**, № 5 (128), 293—314, 1968.
14. Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, «Наука», 1969.
15. Вульпе И. М., Дифференц. уравнения **7**, вып. 2, 1971.
16. Волосов В. М., Моргунов Б. И., Метод усреднения в теории нелинейных колебаний, Изд-во МГУ, 1971.
17. Моисеев Н. Д., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга **15**, ч. I, 75—99, 1945.
18. Волосов В. М., Ж. вычислит. матем. и матем. физ. **3**, № 1, 3—53, 1963.
19. Волосов В. М., Моргунов Б. И., Ж. вычислит. матем. и матем. физ. **8**, № 2, 251—294, 1968.

20. Волосов В. М., Моргунов Б. И., Лекции по асимптотическим методам исследования стационарных резонансных режимов нелинейных колебательных систем, 5-я летняя матем. школа, Киев, «Наукова думка», 151—223, 1968.
21. Волосов В. М., Механика в СССР за 50 лет, т. I, 115—135, 1968.
22. Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.
23. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1958.
24. Гребеников Е. А., Некоторые качественные исследования дифференциальных уравнений небесной механики, докторская диссертация, МГУ—ГАИШ, 1967.
25. Арнольд В. И., Докл. АН СССР **161**, № 1, 9—12, 1965.
26. Арнольд В. И., Успехи матем. наук **18**, вып. 6(119), 1963.
27. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
28. Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, т. I, II, «Наука», 1968.
29. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, «Наука», 1965.
30. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, «Наука», 1968.
31. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
32. Poincare H., Les methodes nouvelles de la Mécanique céleste, t. 1, Paris, 1892.
33. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Астрон. ж. **40**, вып. 2, 363, 1963.
34. Le Verrier, Ann. Observ. imper., Paris **1**, 1855, **11**, 1856.
35. Моисеев Н. Д., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга **15**, ч. I, 100—132, 1945.
36. Fatou P., Acta Astron., ser. *a*, n⁰ 2, 1931.
37. Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», 1968.
38. Fatou P., Comptes Rendus **186**, séance du 27 fevrier 1928.
39. Рейн Н. Ф., Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга **15**, вып. 1, 1940.
40. Путилин И. И., Малые планеты, Гостехиздат, 1953.
41. Newcomb S., Astron. Papers, vol. III, V, 1891.
42. Проскурин В. Ф., Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР, **2**, 1952.
43. Гребеников Е. А., Астрон. ж. **36**, вып. 2, 1959.
44. Гребеников Е. А., Астрон. ж. **43**, вып. 4, 1966.
45. Гребеников Е. А., Астрон. ж. **47**, вып. 2, 1970.
46. Караганчу В. Х. Построение аналитической теории движения малых планет семейства Гестии, кандидатская диссертация, ГАИШ—МГУ, 1970 г.
47. Караганчу В. Х., Сб. тр. молодых ученых Кишиневск. политехн. ин-та им. С. Лазо, Кишинев, 1969.
48. Эфемериды малых планет, «Наука», 1969.
49. Contopoulos G., Astron. J. **72**, № 5, 669—673, 1967.
50. Bozis G., Astron. J. **72**, № 3; 380—385, 1967.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

ВВЕДЕНИЕ

Условно-периодическими называются функции, представимые тригонометрическими полиномами или рядами вида

$$\sum_{|k_1|+\ldots+|k_n|\geqslant 0} A^{(k_1,\ldots,k_n)} \cos\left[(k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n)t + l^{(k_1,\ldots,k_n)}\right], \tag{0.1}$$

где t — аргумент (время), $A^{(k_1,\ldots,k_n)}$, $l^{(k_1,\ldots,k_n)}$ — постоянные, $k_1, \ldots, k_n$ принимают всевозможные целые значения (ограниченные по модулю сверху в случае полиномов), и $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — фиксированные вещественные числа, несоизмеримые между любой (рационально независимые), т. е. такие, что при любых целых $k_1, \ldots, k_n$, не равных одновременно нулю, имеем

$$k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n \neq 0. \tag{0.2}$$

Совокупность чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$ называется *частотным базисом* или *спектром частот* условно-периодической функции. Характерно, что этот базис (спектр) конечен (число n — конечное).

Термин «условно-периодические функции» был введен еще в 1887 г. О. Штауде [1] на том основании, что при некоторых условиях, налагаемых на $\omega_1, \ldots, \omega_n$, а именно, если величины $T_\sigma = 2\pi/\omega_\sigma$, $(\sigma = 1, \ldots, n)$ соизмеримы между собой, то эти функции будут периодическими с периодом, равным общему наименьшему кратному величин $T_1, \ldots, T_n$.

Условно-периодические функции можно рассматривать как частный случай функций, называемых *почти-периодическими*, обладающих бесконечным частотным базисом и представимых рядами

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} \cos(\lambda_k t + l_k), \tag{0.3}$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — счетная последовательность вещественных чисел.

Общая теория почти-периодических функций изложена подробно, например, в [1]. Основными свойствами почти-периодических функций являются следующие:

1. Область значений любой почти-периодической функции $f(t)$ ограничена, т. е. найдутся такие числа a, b, что при всех t

$$a \leqslant f(t) \leqslant b.$$

2. При любом сколько угодно малом $\varepsilon > 0$ существует для данной почти-периодической функции $f(t)$ такое число $A = A(\varepsilon) > 0$, что в каждом интервале $(t, t+A)$ найдется такое τ, для которого

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon. \tag{0.4}$$

Заметим, что в современной теории почти-периодических функций это свойство рассматривается как определение таких функций, и все остальные свойства, в частности, возможность разложимости их в ряд вида (0.3) выводятся как следствия из этого определения.

3. Если в какой-либо момент $t = t_1$ функция $f(t)$ принимает значение f_1, то найдется бесчисленное множество других моментов $t_2, t_3, t_4, \ldots$, причем $|t_{i+1} - t_i| < A(\varepsilon)$, $(i = 1, 2, 3\ldots)$, при которых значение $f(t)$ отличается от f_1 менее, чем на ε.

Всегда найдется такой момент $t^{(1)}$ и бесчисленное множество других моментов $t^{(2)}, t^{(3)}, \ldots$, при которых значения $f(t)$ сколько угодно близки к любой заданной точке внутри области допустимых значений $f(t)$.

4. Для любой почти-периодической функции $f(t)$ существует среднее по времени значение f_0, определяемое формулой

$$f_0 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt. \tag{0.5}$$

5. Неопределенный интеграл от почти-периодической функции $f(t)$ имеет вид

$$\int f(t)\,dt = f_0 t + \psi(t), \qquad (0.6)$$

где $\psi(t)$ — функция, которая не всегда (т. е. не для любой $f(t)$) является почти-периодической функцией.

Рассмотрим это свойство подробнее для условно-периодических функций, выраженных рядом вида (0.1). Мы получим

$$\int f(t)\,dt = A^{(0,\ldots,0)}t + \sum_{|k_1|+\ldots+|k_n|>0} \frac{A^{(k_1,\ldots,k_n)}}{k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n} \times$$

$$\times \sin\left[(k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n)t + l^{(k_1,\ldots,k_n)}\right]. \qquad (0.7)$$

Если ряд в правой части этой формулы, представляющий результат почленного интегрирования ряда (0.1) без свободного члена, сходится, то он представит условно-периодическую функцию; если он расходится, то почленно интегрировать ряд (0.1) нельзя и можно лишь записать формулу (0.6), где $\psi(t)$ не является почти-периодической функцией.

Что же касается вопроса о сходимости ряда в формуле (0.7), то он чрезвычайно сложен и ответ на этот вопрос зависит от арифметической природы частот.

Из теории чисел известно, что при любых вещественных $\omega_1, \ldots, \omega_n$ найдется такая комбинация целых чисел $k_1, \ldots, k_n$, что сумма $k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n$ будет достаточно мала. Более того, найдется бесконечная последовательность $\{k_1^{(m)}, \ldots, k_n^{(m)}\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ комбинаций целых чисел такая, что

$$|k_1^{(m)}| + \ldots + |k_n^{(m)}| \to \infty, \quad k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n \to 0$$

при $m \to \infty$. В небесной механике, где встречаются ряды вида (0.7), знаменатели $k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n$, принимающие достаточно малые значения, получили название «малых знаменателей».

Таким образом, в ряде (0.7) найдется бесконечная последовательность членов, знаменатели которых стремятся к нулю. Но $A^{(k_1,\ldots,k_n)}$ — коэффициенты сходящегося ряда (0.1) и $A^{(k_1,\ldots,k_n)} \to 0$ при $|k_1|+\ldots+|k_n| \to \infty$. Поэтому сходимость ряда (0.7) зависит от быстроты стремления суммы $k_1^{(m)}\omega_1+\ldots+k_n^{(m)}\omega_n$ к нулю при $|k_1|+\ldots$ $\ldots+|k_n|\to\infty$. Известно (см. например, [2]—[4], что если взять произвольную совокупность значений $\omega_1^*,\ldots,\omega_n^*$, то в сколько угодно близкой окрестности этих значений найдутся числа $\omega_1^{(1)},\ldots,\omega_n^{(1)}$, для которых ряд (0.7) сходится, и также числа $\omega_1^{(2)},\ldots,\omega_n^{(2)}$, для которых ряд (0.7) расходится. Говорят, что точки $(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ сходимости и расходимости ряда (0.7) в n-мерном пространстве значений $\omega_1,\ldots,\omega_n$ располагаются всюду плотно (образуют всюду плотные множества). Вместе с тем точек сходимости ряда (0.7) в пространстве $(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ в известном смысле больше, чем точек расходимости: лебегова мера множества точек расходимости равна нулю.

В задачах небесной механики *условно-периодическим называется такое решение, в котором так называемые позиционные переменные* (*большая полуось, эксцентриситет, наклонность и др.*), *выражаются условно-периодическими функциями, а угловые переменные* (*долгота перицентра, долгота узла, средняя аномалия и др.*) *выражаются в виде*

$$nt + \textit{условно-периодическая функция},$$

где n — среднее угловое изменение (*движение*) *для данной переменной.* В соответствии со свойствами условно-периодических функций движение по орбите, соответствующей условно-периодическому решению, происходит в ограниченной области пространства и обладает тем свойством, что через некоторые промежутки времени небесное тело возвращается сколько угодно близко к любой точке внутри этой области.

Методы построения формальных решений с помощью тригонометрических рядов вида (0.1) (без исследования сходимости рядов) рассматривались в небесной механике уже давно. Впервые такое решение было получено Ш. Делоне [5] в 1860 г. в задаче о движении Луны с помощью специально развитого им метода, получившего имя автора. К 1883 г. относится работа Линдштедта [6], где рассматривается другой метод, общую форму которому придал затем А. Пуанкаре [7]. Метод построения таких решений в астероидной задаче трех тел в случае соизмеримости средних движений был предложен Болином [8] и более подробно изучен А. Пуанкаре [7]. Изложение этих методов можно найти, например, в [9—11].

Теория движения Луны, построенная Е. Брауном [12], также имеет чисто тригонометрическую форму, что было достигнуто с помощью специального приема.

Характерной особенностью всех этих рядов, строившихся в небесной механике, является то, что их члены располагаются по возрастающим степеням одного или нескольких малых параметров, как в обычных степенных рядах. Однако вопрос о сходимости этих рядов в строгом математическом смысле оставался открытым. Более того, как показали исследования А. Пуанкаре в [7], не совсем, правда, строгие, ряды Линдштедта и К. Болина расходятся. Недавние подробные исследования Г. А. Мермана [13] подтвердили расходимость рядов Линдштедта в плоской ограниченной задаче трех тел. Можно полагать, что все остальные чисто тригонометрические ряды, строившиеся в небесной механике, относятся также к классу расходящихся, так что из существования таких рядов не вытекает доказательства существования условно-периодических решений в тех или иных задачах небесной механики в строгом математическом смысле.

Таким образом, предположение о том, что условно-периодические решения в задачах небесной механики существуют, и что реальные движения небесных тел (точнее говоря, их движения в математических моделях, близких к реальности) должны описываться именно условно-периодическими функциями, требовало доказательства. В работе Г. А. Мермана [13] впервые получено строгое доказательство существования условно-периодического решения в плоской ограниченной задаче трех тел.

Изложение в этой части книги следует в основном результатам В. И. Арнольда [14—18], которому принадлежит разработка опирающегося на идеи А. Н. Колмогорова [19, 20] метода доказательства существования и построения условно-периодических решений гамильтоновых систем дифференциальных уравнений довольно общего вида, в частности таких, которые встречаются в небесной механике.

В работах [14—18] дается строгое доказательство существования при известных условиях условно-периодических решений, а также метод их построения в таких задачах, как плоская ограниченная задача трех тел, задача о движении вблизи треугольных точек либрации ограниченной задачи трех тел, неограниченной задачи движения n планет вокруг центрального тела с очень большой массой.

В нашем изложении большое внимание уделяется представлению метода А. Н. Колмогорова — В. И. Арнольда в таком виде, чтобы был отчетливо виден путь как их практического применения, так и структура получаемых формул. Доказательства различных результатов значительно расширены по сравнению с [14—18] с целью сделать их достаточно полными и доступными. Дополнительно выведены (гл. VIII) для основного варианта метода (невырожденный случай) оценки погрешности получаемых приближенных решений по сравнению с точными.

ГЛАВА I

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

§ 1.1. Постановка задачи

Пусть движение описывается гамильтоновой системой дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (j=1, \ldots, n), \tag{1.01}$$

причем гамильтониан H может быть представлен в виде

$$H = H_0(p_1, \ldots, p_n) + H_1(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n), \tag{1.02}$$

где H_0 — «невозмущенная» часть, а H_1 — относительно малая «возмущающая» часть. Пусть обобщенные импульсы $p_1, \ldots, p_n$ являются позиционными переменными, а обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_n$ — угловыми переменными. Пусть в некоторой области изменения своих переменных, вообще, комплексной, например, при

$$|p_j - a_j| < g, \quad |\operatorname{Im} q_j| \leqslant \varrho_0 \leqslant 1, \tag{1.03}$$

где a_j, g, ϱ_0 — фиксированные числа, гамильтониан H является аналитической функцией. Пусть H_1 разлагается в ряд Фурье

$$H_1 = \sum h_{k_1, \ldots, k_n}(p_1, \ldots, p_n) \cos(k_1 q_1 + \ldots + k_n q_n), \tag{1.04}$$

где суммирование производится по всем комбинациям целых значений $k_1, \ldots, k_n$. Данную область изменения переменных $p_1, \ldots, p_n$, представляющую собой некоторую окрестность значений $p_j = a_j$, обозначим через G^0. Всю область (1.03) обозначим через F^0. Предполагается также, что в области (1.03) функция H_1 имеет порядок μ (μ — малое число), т. е. $H_1 \sim \mu$ или

$$|H_1| < C\mu, \tag{1.05}$$

где $C \sim 1$. Кроме того, пусть гессиан

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_j \partial p_i}\right) \neq 0. \tag{1.06}$$

Последнее требование характеризует именно *невырожденный случай.*

Ставится задача о построении условно-периодических решений системы (1.01) при вещественных начальных значениях $p_j(0) = p_{j0}$, принадлежащих области G^0, и вещественных начальных значениях $q_j(0) = q_{j0}$. *Под условно-периодическим решением системы* (1.01) *понимается такое, в котором позиционные переменные* $p_1, \ldots, p_n$ *выражаются чисто тригонометрическими рядами вида* (0.1), *а каждая угловая переменная* q_j *выражается таким же рядом с вековым членом* $\omega_j t$, *причем числа* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *несоизмеримы между собой.* Эти числа называются *частотами* данного *условно-периодического движения.* Они представляют собой средние скорости изменения угловых переменных.

Используем для удобства векторную форму записи. При этом обозначим через p вектор с компонентами $p_1, \ldots, p_n$, через q — вектор с компонентами $q_1, \ldots, q_n$ и через k — вектор с целочисленными компонентами $k_1, \ldots, k_n$.

Введем в рассмотрение величину

$$\|k\| = |k_1| + \ldots + |k_n|, \tag{1.07}$$

принимающую значения 0, 1, 2, ... и представляющую собой норму вектора k.

Исходная система (1.01) запишется тогда в векторной форме следующим образом:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{1.08}$$

где

$$H(p, q) = H_0(p) + H_1(p, q). \tag{1.09}$$

Ряд Фурье для H_1 запишется в виде

$$H_1(p, q) = \sum_{\|k\| > 0} h_k(p) \cos(k, q). \tag{1.10}$$

Методика построения решения заключается в применении последовательности канонических преобразований специального вида.

§ 1.2. Первый шаг в последовательности канонических преобразований

1. Выделим «вековую» часть функции $H_1(p, q)$ по угловой переменной q, т. е. по всем компонентам вектора q, и обозначим ее через $\overline{H}_1(p)$,

$$H(p, q)=H_0(p)+\overline{H}_1(p)+\widetilde{H}_1(p, q), \qquad (1.11)$$

где $\widetilde{H}_1$ — чисто периодическая по q часть функции H_1. Выделим также остаточный член ряда для $H_1(p, q)$, который обозначим через $R_{N_0}H_1$; соответствующую частную сумму в H_1 обозначим через $[\widetilde{H}_1]_{N_0}$, так что

$$\widetilde{H}_1=[\widetilde{H}_1]_{N_0}+R_{N_0}H_1, \qquad (1.12)$$

где

$$[\widetilde{H}_1]_{N_0}=\sum_{1\leqslant\|k\|<N_0} h_k(p)\cos(k, q),$$

$$R_{N_0}H_1=\sum_{\|k\|\geqslant N_0} h_k(p)\cos(k, q). \qquad (1.13)$$

Тогда $H(p, q)$ запишется в виде

$$H(p, q)=H_0^{(1)}(p)+[\widetilde{H}_1]_{N_0}+R_{N_0}H_1, \qquad (1.14)$$

где

$$H_0^{(1)}=H_0+\overline{H}_1.$$

О выборе числа N_0 мы скажем подробнее ниже, но во всяком случае N_0 должно быть достаточно большим, чтобы остаточный член $R_{N_0}H_1$ имел второй порядок малости по сравнению с H_1.

2. Введем вместо p, q новые переменные $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ по формулам

$$p=P^{(1)}+\frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q^{(1)}=q+\frac{\partial S}{\partial P^{(1)}}, \qquad (1.15)$$

где S является функцией $P^{(1)}$ и q. Переменные $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ являются векторами с компонентами $P_1^{(1)}, \ldots, P_n^{(1)}$ и $Q_1^{(1)}, \ldots, Q_n^{(1)}$ соответственно. Как известно из аналитической механики (см., например, [21]), преобразование такого вида при любой дважды дифференцируемой функции $S(P^{(1)}, q)$ является каноническим, т. е. уравнения относительно новых переменных $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ будут каноническими

$$\dot{P}^{(1)} = -\frac{\partial H^{(1)}}{\partial Q^{(1)}}, \qquad \dot{Q}^{(1)} = \frac{\partial H^{(1)}}{\partial P^{(1)}}, \tag{1.16}$$

где $H^{(1)} = H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)})$ — новый гамильтониан, получающийся из $H(p, q)$ после подстановки вместо p, q их выражений через $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, так что

$$H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}) = H(p(P^{(1)}, Q^{(1)}), q(P^{(1)}, Q^{(1)})). \tag{1.17}$$

Функция $S(P^{(1)}, q)$ полагается равной

$$S(P^{(1)}, q) = \sum_{1 \leqslant \|k\| < N_0} S_k(P^{(1)}) \sin(k, q), \tag{1.18}$$

где

$$S_k(P^{(1)}) = -\frac{h_k(P^{(1)})}{\left(k, \dfrac{\partial H_0^{(1)}(P^{(1)})}{\partial P^{(1)}}\right)}, \tag{1.19}$$

т. е. эта функция получается из разложения $[\tilde{H}_1]_{N_0}$ после замены $\cos(k, q)$ на $\sin(k, q)$, переменной p на $P^{(1)}$ и коэффициентов $h_k(p)$ на $S_k(P^{(1)})$. Через $\partial H_0^{(1)}/\partial P^{(1)}$ обозначается вектор с компонентами $\partial H_0^{(1)}/\partial P_j^{(1)}$ $(j = 1, \ldots, n)$, так что величина в знаменателе формулы для S_k равна

$$\left(k, \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P^{(1)}}\right) = k_1 \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_1^{(1)}} + \ldots + k_n \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_n^{(1)}}. \tag{1.20}$$

Из теории вещественных чисел известно, что при любых вещественных значениях $\partial H_0^{(1)}/\partial P_j^{(1)}$ эта величина будет при соответствующих $k_1, \ldots, k_n$ достаточно малой. Таким образом, функция S может содержать так называемые «малые знаменатели», создававшие всегда трудности при построении решений задач небесной механики.

Если не учитывать эти малые знаменатели, то при таком выборе функции S она будет иметь тот же порядок малости, что и H_1, т. е. $S \sim \mu$, а гамильтониан $H^{(1)}$ может быть представлен, как показывает анализ, в виде

$$H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}) = H_0^{(1)}(P^{(1)}) + H_1^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}), \tag{1.21}$$

где $H_1^{(1)} \sim \mu^2$ в области изменения $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, соответствующей значениям p, q в исходной области (1.03).

Действительно, если обозначить через $\Delta P^{(1)} = \partial S/\partial q$ вектор с компонентами $\Delta P_j^{(1)} = \partial S/\partial q_j$, то согласно (1.14), (1.15) и (1.17)

$$p = P^{(1)} + \Delta P^{(1)},$$

$$H^{(1)} = H_0^{(1)}(P^{(1)} + \Delta P^{(1)}) + [\widetilde{H}_1(P^{(1)} + \Delta P^{(1)},\ q)]_{N_0} + R_{N_0} H_1. \tag{1.22}$$

После разложения по степеням $\Delta P^{(1)}$ получим

$$H_0^{(1)}(P^{(1)} + \Delta P^{(1)}) = H_0^{(1)}(P^{(1)}) + \left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P^{(1)}},\ \Delta P^{(1)}\right) + \ldots, \tag{1.23}$$

$$[\widetilde{H}_1(P^{(1)} + \Delta P^{(1)},\ q)]_{N_0} = [\widetilde{H}_1(P^{(1)},\ q)]_{N_0} + \ldots, \tag{1.23*}$$

где

$$\left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P^{(1)}},\ \Delta P^{(1)}\right) = \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_1^{(1)}}\frac{\partial S}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_n^{(1)}}\frac{\partial S}{\partial q_n}.$$

Без учета малых знаменателей в S мы имеем $S \sim \mu$ и $\Delta P_j^{(1)} \sim \mu$, так что невыписанные члены в (1.23) будут иметь порядок μ^2. Так как $[\widetilde{H}_1]_{N_0} \sim \mu$, то невыписанные члены в (1.23*) будут также иметь порядок μ^2. Вместе с тем при данном выборе функции S

$$\left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P^{(1)}},\ \Delta P^{(1)}\right) + [\widetilde{H}_1(P^{(1)},\ q)]_{N_0} \equiv 0, \tag{1.24}$$

т. е. члены первого порядка относительно μ в $H^{(1)}$ взаимно уничтожаются. В этом нетрудно убедиться, если выписать формулу для компонент вектора $\Delta P^{(1)}$:

$$\Delta P_j^{(1)} = \frac{\partial S}{\partial q_j} = \sum_{1 < \|k\| < N_0} k_j S_k(P^{(1)}) \cos(k,\ q).$$

Следовательно (см. (1.19)),

$$\left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P^{(1)}},\ \Delta P^{(1)}\right)=$$

$$=\sum_{1\leqslant\|k\|<N_0}\left(k_1\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_1^{(1)}}+\ldots+k_n\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_n^{(1)}}\right)S_k(P^{(1)})\cos(k,\ q)=$$

$$=-\sum_{1\leqslant\|k\|<N_0}h_k(P^{(1)})\cos(k,\ q),$$

откуда вытекает (1.24). Таким образом, если обозначить всю совокупность невыписанных членов в (1.23), (1.23*), а также $R_{N_0}H$ через $H_1^{(1)}(P^{(1)},\ Q^{(1)})$, то гамильтониан $H^{(1)}$ запишется в виде (1.21), причем $H_1^{(1)}\sim\mu^2$.

Такая оценка $H_1^{(1)}$ получается, если не учитывать малые знаменатели. Если же их учесть, то оценка $H_1^{(1)}$ ухудшится. Возможно доказать, что если рассматривать не все множество значений $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, соответствующих исходной области (1.03) переменных p, q, а лишь некоторую его часть, где малые знаменатели (1.20) не слишком малы, то для $H_1^{(1)}$ гарантируется оценка

$$|H_1^{(1)}|<\mu_1,$$

где $\mu_1\leqslant\mu^{1+\alpha}$ и α — некоторое число между 0 и 1.

3. Для того чтобы можно было непосредственно выполнить переход от $H(p,\ q)$ к $H^{(1)}(P^{(1)},\ Q^{(1)})$, надо вывести на основании (1.15) формулы, выражающие в явном виде зависимость между p, q и $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$. Кроме того, оказываются необходимыми также выражения $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ через p, q. Чтобы получить все эти формулы, перепишем (1.15), учитывая выражение для функции S:

$$p=P^{(1)}+\sum kS_k(P^{(1)})\cos(k,\ q),\qquad(1.25)$$

$$Q^{(1)}=q+\sum S_k'(P^{(1)})\sin(k,\ q),\qquad(1.25^*)$$

где суммирование распространяется по k от $\|k\|=1$ до $\|k\|<N_0$ и где обозначено для простоты записи $S_k'=\partial S_k/\partial P^{(1)}$. Если требуется найти выражения p, q через $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, то перепишем (1.25*) в виде

$$q=Q^{(1)}-\sum S_k'(P^{(1)})\sin(k,\ q)\qquad(1.26)$$

и будем рассматривать это соотношение как уравнение относительно q (систему уравнений относительно скалярных величин $q_1, \ldots, q_n$ в векторной форме). Это уравнение представляет собой не что иное, как обобщенное уравнение Кеплера в векторной форме. По условиям, при которых справедливы излагаемые результаты, его решение может быть найдено, например, с помощью обычных последовательных приближений:

$$\begin{aligned}
q &= Q^{(1)},\\
q^{(1)} &= Q^{(1)} - \sum S_k'(P^{(1)}) \sin(k, q^0),\\
q^{(2)} &= Q^{(1)} - \sum S_k'(P^{(1)}) \sin(k, q^{(1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

сходимость которых гарантируется. В пределе получим

$$q = Q^{(1)} + \sum \bar{f}_{qk}^{(1)}(P^{(1)}) \sin(k, Q^{(1)}) \tag{1.27}$$

(так как $q - Q^{(1)}$ есть нечетная функция $Q^{(1)}$), где $\bar{f}_{qk}^{(1)}$ — некоторые аналитические функции $P^{(1)}$ и суммирование проводится, вообще, по всем k от $\|k\| = 1$ до $\|k\| = \infty$.

Подставляя далее (1.27) в (1.25), получим

$$p = P^{(1)} + \sum \bar{f}_{pk}^{(1)}(P^{(1)}) \cos(k, Q^{(1)}), \tag{1.27*}$$

где $\bar{f}_{pk}^{(1)}$ — также некоторые аналитические функции и суммирование проводится по всем k от $\|k\| = 0$ до $\|k\| = \infty$. Формулы (1.27), (1.27*) и дают нам явные выражения p, q через $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, которые можно непосредственно использовать при переходе к гамильтониану $H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)})$.

Перепишем теперь (1.25) в виде

$$P^{(1)} = p - \sum k S_k(P^{(1)}) \cos(k, q) \tag{1.28}$$

и рассмотрим это соотношение как обобщенное уравнение Кеплера (в векторной форме) относительно $P^{(1)}$. При условиях, требующихся в теории, его решение можно искать, например, с помощью последовательных приближений

$$\begin{aligned}
P^{(1),0} &= p,\\
P^{(1),1} &= p - \sum k S_k(P^{(1),0}) \cos(k, q),\\
P^{(1),2} &= p - \sum k S_k(P^{(1),1}) \cos(k, q),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

сходимость которых также гарантируется. В пределе получим

$$P^{(1)} = p + \sum_{0 \leqslant \|k\| < \infty} \bar{\varphi}_{pk}^{(1)}(p) \cos(k, q) \tag{1.29}$$

(так как $P^{(1)} - p$ — четная функция q), где $\bar{\varphi}_{qk}^{(1)}$ — некоторые аналитические функции p. Подставляя далее (1.29) в (1.25*), получим разложение для $Q^{(1)}$

$$Q^{(1)} = q + \sum_{1 \leqslant \|k\| < \infty} \bar{\varphi}_{qk}^{(1)}(p) \sin(k, q), \tag{1.29*}$$

где $\bar{\varphi}_{qk}^{(1)}$ — также некоторые аналитические функции p. Если векторы начальных значений для исходной системы (1.01) равны p_0, q_0, то векторы начальных значений переменных системы (1.16) могут вычисляться именно по формулам (1.29), (1.29*), т. е.

$$\begin{aligned} P_0^{(1)} &= p_0 + \sum \bar{\varphi}_{pk}^{(1)}(p_0) \cos(k, q_0), \\ Q_0^{(1)} &= q_0 + \sum \bar{\varphi}_{qk}^{(1)}(p_0) \sin(k, q_0). \end{aligned} \tag{1.30}$$

4. Таким образом, после выполнения канонического преобразования (1.15) к системе (1.01) задача сводится к решению системы (1.16) с начальными значениями (1.30). Если эта система будет решена, то исходные переменные найдутся с помощью формул (1.27), (1.27*).

Гамильтониан системы (1.16) представляется, как мы указывали выше, в виде (1.21), где $H_0^{(1)}(P^{(1)})$ можно рассматривать как невозмущенную часть, а $H_1^{(1)}(P^{(1)}Q^{(1)})$ — как возмущающую. Переменная $Q^{(1)}$ остается угловой, и $H_1^{(1)}$ разлагается в ряд Фурье (так же, как и H_1, по косинусам)

$$H_1^{(1)} = \sum_{0 \leqslant \|k\| < \infty} h_k^{(1)}(P^{(1)}) \cos(k, Q^{(1)}), \tag{1.31}$$

где $h_k^1 \quad ^{(1)})$ — некоторые аналитические функции.

§ 1.3. Первое приближение

После выполнения первого шага мы можем построить первое приближение к искомому условно-периодическому решению системы (1.01). Для этого следует в преобразованных уравнениях (1.16) отбросить возмущающую часть гамильтониана $H^{(1)}$, т. е. вместо (1.16) ограничиться приближенной системой

$$\dot{\overline{P}}^{(1)} = -\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \overline{Q}^{(1)}} \equiv 0, \quad \dot{\overline{Q}}^{(1)} = \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial \overline{P}^{(1)}}, \tag{1.32}$$

которая непосредственно интегрируется. Принимая начальные значения те же, что и для точной системы (1.16), т. е. равными $P_0^{(1)}$, $Q_0^{(1)}$ (см. (1.30)), а также обозначая

$$\omega^{(1)} = \left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P^{(1)}}\right)_{P^{(1)} = P_0^{(1)}},$$

получим

$$\overline{P}^{(1)} = P_0^{(1)} = \text{const}, \quad \overline{Q}^{(1)} = Q_0^{(1)} + \omega^{(1)} t. \tag{1.33}$$

Подставив эти выражения в (1.27), (1.27*) вместо $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ соответственно, получим приближенное решение $p^{(1)}(t)$, $q^{(1)}(t)$ исходной системы (1.01):

$$\begin{aligned} p^{(1)}(t) &= P_0^{(1)} + \sum_{0 < \|k\| < \infty} \overline{f}_{pk}^{(1)}(P_0^{(1)}) \cos\left[(k,\ Q_0^{(1)}) + (k,\ \omega^{(1)})t\right], \\ q^{(1)}(t) &= Q_0^{(1)} + \omega^{(1)} t + \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant \|k\| < \infty} \overline{f}_{qk}^{(1)}(P_0^{(1)}) \sin\left[(k,\ Q_0^{(1)}) + (k,\ \omega^{(1)})t\right]. \end{aligned} \tag{1.34}$$

§ 1.4. Второй шаг

Если мы не хотим ограничиваться первым приближением $p^{(1)}(t)$, $q^{(1)}(t)$, то следует применить к системе (1.16) такое же каноническое преобразование, как и к исходной системе (1.01), т. е. выполнить второй шаг.

Система (1.16) имеет такой же характер, как и исходная система (1.01). Отличие состоит в том, что гамильтониан H рассматривается в области (1.03), где его возмущающая часть имеет порядок малости μ, а гамильтониан $H^{(1)}$ рассматривается лишь в некоторой части области (1.03) и в ней его возмущающая часть имеет порядок малости $\mu_1 \leqslant \mu^{1+\alpha}$, $0<\alpha<1$ (если не учитывать малые знаменатели, то $H_1^{(1)} \sim \mu^2$).

а) Распишем, как и на первом шаге, функцию $H_1^{(1)}$ в виде

$$H_1^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}) = \overline{H}_1^{(1)}(P^{(1)}) + [\widetilde{H}_1^{(1)}]_{N_1} + R_{N_1} H_1^{(1)},$$

где $\overline{H}^{(1)}$ — вековая часть, $[\widetilde{H}^{(1)}]_{N_1}$ — частная сумма, содержащая гармоники порядка не выше N_1, $R_{N_1} H_1^{(1)}$ — остаточный член. Тогда

$$H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}) = H_0^{(2)}(P^{(1)}) + \\ + [\widetilde{H}_1^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)})]_{N_1} + R_{N_1} H_1^{(1)}, \qquad (1.35)$$

где $H_0^{(2)} = H_0^{(1)} + \overline{H}_1^{(1)}$. Относительно выбора N_1 мы скажем ниже; во всяком случае, N_1 таково, что $R_{N_1} H_1^{(1)}$ имеет порядок малости квадрата $H_1^{(1)}$.

б) Вводим новые переменные $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$ по формулам

$$P^{(1)} = P^{(2)} + \frac{\partial S^{(1)}}{\partial Q^{(1)}}, \qquad Q^{(2)} = Q^{(1)} + \frac{\partial S^{(1)}}{\partial P^{(2)}}, \qquad (1.36)$$

где функция $S^{(1)}(P^{(2)}, Q^{(1)})$ получается из разложения $[\widetilde{H}_1^{(1)}]_{N_1}$ после замены $\cos(k, Q^{(1)})$ на $\sin(k, Q^{(1)})$, переменной $P^{(1)}$ на $P^{(2)}$ и коэффициентов $h_k^{(1)}$ на

$$S_k^{(1)}(P^{(2)}) = -h_k^{(1)}(P^{(2)}) \Bigg/ \left(k, \frac{\partial H_0^{(2)}(P^{(2)})}{\partial P^{(2)}}\right), \qquad (1.37)$$

так что

$$S^{(1)}(P^{(2)}, Q^{(1)}) = \sum_{1 \leqslant \|k\| < N_1} S_k^{(1)}(P^{(2)}) \sin(k, Q^{(1)}). \qquad (1.37^*)$$

Величина

$$\left(k, \frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial P^{(2)}}\right) = k_1 \frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial P_1^{(2)}} + \ldots + k_n \frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial P_n^{(2)}} \qquad (1.38)$$

может представить собой, как и величина (1.20) при соответствующих $k_1, \ldots, k_n$, так называемый малый знаменатель.

в) Из соотношений (1.36) мы получим точно так же, как и на первом шаге, бесконечные тригонометрические ряды вида (1.27), (1.27*), (1.29), (1.29*), связывающие старые и новые переменные:

$$P^{(1)}=P^{(2)}+\sum \bar{f}_{pk}^{(2)}\left(P^{(2)}\right)\cos\left(k,\ Q^{(2)}\right),\qquad\qquad (1.39)$$
$$Q^{(1)}=Q^{(2)}+\sum \bar{f}_{qk}^{(2)}\left(P^{(2)}\right)\sin\left(k,\ Q^{(2)}\right)$$

или

$$P^{(2)}=P^{(1)}+\sum \bar{\varphi}_{pk}^{(2)}\left(P^{(1)}\right)\cos\left(k,\ Q^{(1)}\right),\qquad\qquad (1.40)$$
$$Q^{(2)}=Q^{(1)}+\sum \bar{\varphi}_{qk}^{(2)}\left(P^{(1)}\right)\sin\left(k,\ Q^{(1)}\right),$$

где $\bar{f}_{pk}^{(2)},\ \ldots,\ \bar{\varphi}_{qk}^{(2)}$ — некоторые аналитические функции своих переменных.

г) Уравнения относительно переменных $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$ будут также каноническими:

$$\dot{P}^{(2)}=-\frac{\partial H^{(2)}}{\partial P^{(2)}},\qquad \dot{Q}^{(2)}=\frac{\partial H^{(2)}}{\partial P^{(2)}},\qquad\qquad (1.41)$$

где гамильтониан $H^{(2)}(P^{(2)},\ Q^{(2)})$ получается из $H^{(1)}(P^{(1)},\ Q^{(1)})$ после подстановки вместо переменных $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ их выражений (1.39) через $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$. Точно так же, как и на первом шаге, показывается, что можно представить $H^{(2)}$ в виде

$$H^{(2)}\left(P^{(2)},\ Q^{(2)}\right)=H_0^{(2)}\left(P^{(2)}\right)+H_1^{(2)}\left(P^{(2)},\ Q^{(2)}\right),\qquad (1.42)$$

где $H_0^{(2)}$ рассматривается как невозмущенная часть гамильтониана $H^{(2)}$, а $H_1^{(2)}$ — его возмущающая часть. Последняя представима в виде ряда Фурье

$$H_1^{(2)}\left(P^{(2)},\ Q^{(2)}\right)=\sum_{0<\|k\|<\infty} h_k^{(2)}\left(P^{(2)}\right)\cos\left(k,\ Q^{(2)}\right),\qquad (1.43)$$

где $h_k^{(2)}$ — некоторые аналитические функции $P^{(2)}$. С помощью (1.40) найдем начальные значения $P_0^{(2)}$, $Q_0^{(2)}$, соответствующие начальным значениям p_0, q_0 для исходной системы (1.01):

$$\left.\begin{aligned}P_0^{(2)}&=P_0^{(1)}+\sum \bar{\varphi}_{pk}^{(2)}\left(P_0^{(1)}\right)\cos\left(k,\ Q_0^{(1)}\right),\\ Q_0^{(2)}&=Q_0^{(1)}+\sum \bar{\varphi}_{qk}^{(2)}\left(P_0^{(1)}\right)\sin\left(k,\ Q_0^{(1)}\right),\end{aligned}\right\}\qquad (1.44)$$

где $P_0^{(1)}$, $Q_0^{(1)}$ вычисляются согласно (1.30).

Если не учитывать малые знаменатели, то $H_1^{(2)}$ имеет порядок малости квадрата $H_1^{(1)}$, т. е. $H_1^{(2)} \sim \mu^4$ (в области значений $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$, соответствующих исходной области (1.03) переменных p, q). Разности между компонентами старых $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ и новых $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$ переменных имеют тот же порядок малости, что и функция $S^{(1)}$, т. е. (без учета малых знаменателей) $P_j^{(1)} - P_j^{(2)} \sim \mu^2$, $Q_j^{(1)} - Q_j^{(2)} \sim \sim \mu^2$. Если же малые знаменатели учесть, то оказывается, что в некоторой области изменения переменных $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$, соответствующей части исходной области (1.03) переменных p, q, можно гарантировать оценки

$$P_j^{(1)} - P_j^{(2)} \sim \mu_1, \quad Q_j^{(1)} - Q_j^{(2)} \sim \mu_1, \quad H_1^{(2)} \sim \mu_2,$$

где

$$\mu_2 \leqslant \mu_1^{1+\alpha}, \quad \mu_1 \leqslant \mu^{1+\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

§ 1.5. Второе приближение

Второе приближение к искомому условно-периодическому решению мы получим, если в уравнениях (1.41) пренебрежем возмущающей частью гамильтониана $H^{(2)}$, т. е. если заменим (1.41) приближенными уравнениями:

$$\dot{\overline{P}}^{(2)} = -\frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial \overline{Q}^{(2)}} \equiv 0, \quad \dot{\overline{Q}}^{(2)} = \frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial \overline{P}^{(2)}}. \tag{1.45}$$

Начальные значения примем те же, что и для точной системы, т. е. равными $P_0^{(2)}$, $Q_0^{(2)}$ (см. (1.44)). Тогда получим

$$\overline{P}^{(2)} = P_0^{(2)} = \mathrm{const}, \quad \overline{Q}^{(2)} = Q_0^{(2)} + \omega^{(2)} t, \tag{1.46}$$

где

$$\omega^{(2)} = \left.\frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial P^{(2)}}\right|_{P^{(2)} = P_0^{(2)}}.$$

Если мы подставим выражения (1.39) для $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ в формулы (1.27), (1.27*), то можем получить формулы, непосредственно связывающие p, q и $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$:

$$\left\{\begin{aligned} p &= P^{(2)} + \sum_{0 \leq \|k\| < \infty} f^{(2)}_{pk}(P^{(2)}) \cos(k, Q^{(2)}), \\ q &= Q^{(2)} + \sum_{1 \leq \|k\| < \infty} f^{(2)}_{qk}(P^{(2)}) \sin(k, Q^{(2)}), \end{aligned}\right. \tag{1.47}$$

где $f^{(2)}_{pk}$, $f^{(2)}_{qk}$ — некоторые аналитические функции.

Подставив сюда выражения (1.46) вместо $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$, получим второе приближение $p^{(2)}(t)$, $q^{(2)}(t)$ к решению исходной системы:

$$\left\{\begin{aligned} p^{(2)}(t) &= P^{(2)}_0 + \sum f^{(2)}_{pk}(P^{(2)}_0) \cos\left[(k, Q^{(2)}_0) + \right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. + (k, \omega^{(2)})\, t\right], \\ q^{(2)}(t) &= Q^{(2)}_0 + \omega^{(2)} t + \\ &\quad + \sum f^{(2)}_{qk}(P^{(2)}_0) \sin\left[(k, Q^{(2)}_0) + (k, \omega^{(2)})\, t\right]. \end{aligned}\right. \tag{1.48}$$

§ 1.6. Последующие приближения. Замечания о сходимости последовательных приближений

Указанный выше процесс перехода от переменных $P^{(s-1)}$, $Q^{(s-1)}$ к переменным $P^{(s)}$, $Q^{(s)}$ с помощью аналогичных канонических преобразований, а затем построения последовательных приближений $p^{(s)}(t)$, $q^{(s)}(t)$ к искомому условно-периодическому решению можно продолжать неограниченно. При любом $s = 1, 2, 3, \ldots$, мы получим формулы, аналогичные (1.34) или (1.48):

$$\left\{\begin{aligned} p^{(s)}(t) &= P^{(s)}_0 + \sum_{0 \leq \|k\| < \infty} f^{(s)}_{pk}(P^{(s)}_0) \cos\left[(k, Q^{(s)}_0) + \right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. + (k, \omega^{(s)})\, t\right], \\ q^{(s)}(t) &= Q^{(s)}_0 + \omega^{(s)} t + \\ &\quad + \sum_{1 \leq \|k\| < \infty} f^{(s)}_{qk}(P^{(s)}_0) \sin\left[(k, Q^{(s)}_0) + (k, \omega^{(s)})\, t\right], \end{aligned}\right. \tag{1.49}$$

где $f^{(s)}_{pk}$, $f^{(s)}_{qk}$ — аналитические функции, $P^{(s)}_0$, $Q^{(s)}_0$ связаны с начальными значениями p_0, q_0 исходных переменных цепочкой формул вида (1.30), (1.44) и

$$\omega^{(s)} = \left.\frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P^{(s)}}\right|_{P^{(s)} = P_0^{(s)}}, \tag{1.49*}$$

где $H_0^{(s)}$ — невозмущенная часть гамильтониана $H^{(s)}$, полученного после канонических преобразований $(p, q) \to (P^{(1)}, Q^{(1)}) \to \ldots (P^{(s)}, Q^{(s)})$.

Каждое приближенное решение $p^{(s)}(t)$, $q^{(s)}(t)$ является, как мы видим, условно-периодическим и представляет собой бесконечный ряд.

Таков формальный путь построения решения исходной системы.

Остановимся подробнее на выборе чисел $N_0, N_1, \ldots$, определяющих частную сумму и остаточный член, на которые разбивается каждый из гамильтонианов $H(p, q)$, $H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}), \ldots$ при применении указанных выше канонических преобразований. Согласно развитой теории, если $|H_1(p, q)| \leqslant M$ (в соответствие с (1.05) $M = C\mu$, где $C \sim 1$, и μ — малый параметр), то все числа N_s определяются по формуле

$$N_s = (M_s)^{-1/4nT} \ln \frac{1}{M_s} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.50}$$

где

$$M_0 = M, \quad M_i = M_{i-1}^{1+\alpha} \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad T \geqslant \frac{4n+12}{1-\alpha} \tag{1.50*}$$

и α — положительное число между 0 и 1. Число α можно фиксировать, положить его равным, например, 1/2 или 2/3. Конечно, числа (1.50) достаточно велики, так что на практике едва ли возможно их выбирать именно так. Но, во всяком случае, желательно, чтобы выделяемые остаточные члены $R_{N_s} H_1^{(s)}$ (их придется, по-видимому, просто отбрасывать) оставались за пределами выбранной точности вычислений.

При таком выборе чисел N_s оказывается возможным доказать, что если M достаточно мало́ (удовлетворяет некоторым оценкам, зависящим, в частности, от T и α) и если начальные значения p_0, q_0 выбраны благоприятным образом, то приближения $p^{(s)}(t)$, $q^{(s)}(t)$ сходятся при $s \to \infty$ к точному решению исходных уравнений.

Тогда, с одной стороны, стремятся к пределам последовательности значений $p_0, P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, \ldots$ и $q_0, Q_0^{(1)},$

$Q_0^{(2)}, \ldots,$ а также $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots$ и, с другой стороны, стремятся к пределу (при фиксированных $P_0^{(s)}=P_0^*$) коэффициенты $f_{pk}^{(s)}$, $f_{qk}^{(s)}$ в рядах для $p^{(s)}(t)$, $q^{(s)}(t)$. Если обозначить через P_0^∞, Q_0^∞, ω^∞, f_{pk}, f_{qk} соответствующие пределы, то точное решение $p(t)$, $q(t)$, представляющее предел приближений (1.49), запишется в виде

$$\left\{\begin{aligned} p(t) &= P_0^\infty + \sum f_{pk}(P_0^\infty)\cos\left[(k,\ Q_0^\infty)+(k,\ \omega^\infty)t\right],\\ q(t) &= Q_0^\infty + \omega^\infty t + \sum f_{qk}(P_0^\infty)\sin\left[(k,\ Q_0^\infty)+\right.\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+(k,\ \omega^\infty)t\right]. \end{aligned}\right. \tag{1.51}$$

Сходимость $p^{(s)}(t)$, $q^{(s)}(t)$ к точному решению $p(t)$, $q(t)$ имеет своеобразный характер. С одной стороны, если фиксировать произвольный интервал времени $(-t_*, t_*)$, то $p^{(s)}(t)\to p(t)$, $q^{(s)}(t)\to q(t)$ на всем этом интервале равномерно. Другими словами, если задать любое какое-угодно малое число ε, то найдется такое N, что при $s\geqslant N$

$$|p_j^{(s)}(t)-p_j(t)|<\varepsilon, \quad |q_j^{(s)}(t)-q_j(t)|<\varepsilon \quad (j=1,\ldots,n).$$

С другой же стороны, если рассмотреть приближение $p^{(s)}(t)$, $q^{(s)}(t)$ со сколь-угодно большим номером s, то с течением времени значения угловых переменных $q^{(s)}(t)$ и $q(t)$ могут все более и более отличаться друг от друга (из-за отличия $\omega^{(s)}$ от ω^∞). Разность же между позиционными переменными $p^{(s)}(t)$ и $p(t)$ может достичь с течением времени некоторой величины, не зависящей от s, хотя и малой (порядка μ).

Что касается быстроты сходимости, то при отсутствии малых знаменателей рассматриваемые последовательности сходились бы примерно как ряд с общим членом μ^{2^s} (т. е. как ряд $\mu+\mu^2+\mu^4+\mu^8+\ldots$), т. е. весьма быстро. Малые знаменатели ухудшают эту сходимость. Оказывается возможным показать, что последовательности $\{P_0^{(s)}\}$, $\{Q_s^{(s)}\}$ сходятся не медленнее, чем ряд с общим членом $M^{(1+\alpha)^s}$, а последовательности $\{p^{(s)}(t)\}$, $\{q^{(s)}(t)\}$ сходятся на любом фиксированном интервале изменения t не медленнее, чем ряд с общим членом

$2^s M^{(1+\alpha)^s}$, где α — число в формулах (1.50*). (Напомним, что у нас $M = C_\mu$, $C \sim 1$.)

Надо сказать, что полученные теоретические оценки для M, при которых гарантируется сходимость процесса, настолько малы, что на них никак нельзя ориентироваться при рассмотрении тех или иных практических задач (отсюда также вытекает, что невозможно использовать на практике теоретическую формулу (1.50) для чисел N_s). Кроме того, весьма сложным является вопрос о выборе благоприятных начальных значений p_0, при которых обеспечивается сходимость процесса.

Пусть исходные уравнения (1.01) рассматриваются в некоторой области F^0 изменения векторов $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$ (например, области (1.03)). Тогда согласно теории благоприятные значения $p_0\, q_0$ принадлежат некоторой подобласти F_*^0, выделяемой из области F^0. Эта подобласть F_*^0 образуется принципиально путем последовательного исключения из исходной области F^0 «плохих», так сказать, точек p, q. На первом шаге при переходе от переменных (p, q) к переменным $(P^{(1)}, Q^{(1)})$ исключаются из области F^0 точки p_0, q_0, соответствующие таким точкам $P^{(1)}$ (вместе с их малыми окрестностями), при которых знаменатели в функции (1.18) $S(P^{(1)}, q)$, т. е. комбинации

$$k_1 \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_1^{(1)}} + \ldots + k_n \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_n^{(1)}},$$

при $\|k\| = |k_1| + \ldots + |k_n| < N_0$ меньше некоторого предела (пропорционального $\|k\|^{-n-1}$). Величины $\partial H_0^{(1)}/\partial P_j^{(1)} = \omega_j^{(1)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ представляют собой средние скорости изменения переменных q_j в первом приближении. Итак, исключаются такие точки $P^{(1)}$ (и соответствующие p, q), для которых имеет место точная или острая соизмеримость $\omega_1^{(1)}, \ldots, \omega_n^{(1)}$ порядка N_0 и ниже *).

---

*) Если комбинация

$$k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n$$

равна или близка к нулю при $0 < |k_1| + \ldots + |k_n| < N$, то говорят, что для частот ω_j имеет место соизмеримость порядка N.

Поскольку μ мало̀, то необходимо также потребовать, чтобы нулевые приближения для средних скоростей $\omega_j^0 = \partial H_0/\partial p$, вычисляемые по начальным значениям $p_{10}, \ldots, p_{n0}$ (т. е. невозмущенные средние скорости), не находились бы в близкой соизмеримости порядка N_0 и ниже. Другими словами, этот метод не подходит к задачам, в которых наблюдается точная или близкая соизмеримость средних скоростей изменения угловых переменных.

На втором шаге при переходе от $(P^{(1)}, Q^{(1)})$ к $(P^{(2)}, Q^{(2)})$ исключаются точки p, q, соответствующие таким точкам $P^{(2)}$ (вместе с их малыми окрестностями), при которых знаменатели в функции $S^{(1)}(P^{(2)}, Q^{(2)})$, т. е. комбинации

$$k_1 \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_1^{(2)}} + \ldots + k_n \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_n^{(2)}} \quad \text{или} \quad k_1\omega_1^{(1)} + \ldots + k_n\omega_n^{(1)}$$

при $\|k\| = |k_1| + \ldots + |k_n| < N_1$ также не превышают некоторый предел (пропорциональный $\|k\|^{-n-1}$). И так далее.

Поскольку $N_s \to \infty$ при $s \to \infty$, то в пределе следует рассматривать комбинации вида (1.52) при сколь-угодно больших $\|k\|$. Вместе с тем согласно теории вещественных чисел эти комбинации, если никак не ограничивать $k_1, \ldots, k_n$, могут принимать сколь-угодно малые значения. Таким образом, в сколь-угодно малой окрестности любой точки p, q в области F^0 найдутся такие точки, которые на достаточно далеком шаге надо исключить. В результате структура подобласти F_*^0 получается очень сложной и не поддается геометрическому описанию. F_*^0 представляет собой множество точек в F^0, характеризуемое с помощью понятия меры Лебега. Можно утверждать, что мера $\operatorname{Re} F_*^0$ (вещественной части или компоненты области F_*^0) тем меньше отличается от меры $\operatorname{Re} F^0$, чем меньше μ, т. е. что при достаточно малых μ «большинство» вещественных точек F^0 принадлежит F_*^0. Можно сказать, что при малых μ сходимость процесса имеет место для большинства вещественных начальных значений p_0, q_0 в области F^0. Тем не менее, в сколь-угодно малой окрестности любого из благоприятных значений p_0, q_0 находятся p, q, не принадлежащие к F_*^0, и для которых сходимость процесса не гарантируется. Практического критерия, позволяющего выделить точки F_*^0 среди всех вещественных точек исходной области F^0, не существует. Поэтому, какие бы конкретные числовые значения компонент p_{s0}, q_{s0}, $(s=1, \ldots, n)$ векторов p_0, q_0 не были заданы, мы не можем утверждать, что эти p_0, q_0 принадлежат области F_*^0 и что процесс построения решения при этих p_0, q_0 сходится. Можно лишь прибегнуть к вероятностной точке зрения, т. е. утверждать с вероятностью, отличающейся от единицы тем меньше, чем меньше μ, что при произвольных p_0, q_0 в исходной области F^0 указанный процесс построения решения сходится.

Таким образом, на пути применения изложенного метода мы встречаемся со следующими трудностями:

1. Теоретическая оценка значений малого параметра μ, гарантирующая сходимость процесса последовательных приближений, слишком мала.

2. Практически нельзя выбирать числа N_s согласно теоретической формуле (1.50).

3. Ни при каких конкретных начальных значениях p_{s0}, q_{s0} нельзя гарантировать сходимость процесса.

Ввиду этого очень интересно было бы непосредственно построить этим методом решения в той или иной задаче. Возможно, что эти трудности мнимые, т. е. что будут получаться практически быстро сходящиеся приближения не при слишком малом μ и при достаточно произвольных начальных значениях p_{s0}, q_{s0}

Остановимся в заключение на условии $\det(\partial^2 H_0/\partial p^2) \neq 0$. Оно требуется для доказательства существования области F_*^0, т. е. для доказательства существования начальных значений p_{s0}, q_{s0} $(s=1, \ldots, n)$, при которых обеспечивается сходимость приближений $p^{(s)}(t)$, $q^{(s)}(t)$, но не используется непосредственно при построении этих приближений. Поэтому этим условием в некоторых случаях можно было бы пренебречь. Так, например, очень распространенным и важным является случай квазилинейных систем, когда $H_0(p)=H_0(p_1, \ldots, p_n)$ имеет вид

$$H_0(p_1, \ldots, p_n)=\lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n,$$

где λ_j — постоянные числа. Очевидно, что $\det(\partial^2 H_0/\partial p^2) \equiv 0$. Но если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ не находятся друг с другом в острой соизмеримости более или менее низкого порядка, то можно надеяться, что при достаточно малых μ приближения для средних скоростей $\omega'^{(s)}_j = \partial H_0^{(s)}/\partial P_j^{(s)}$ также не будут находиться в такой соизмеримости. Приближения $p^{(s)}(t)$, $q^{(s)}(t)$ при заданных конкретных $p_{10}, \ldots, p_{n0}$, $q_{10}, \ldots, q_{n0}$ могут оказаться тогда практически сходящимися не лучше и не хуже, чем в случае, когда $\det(\partial^2 H_0/\partial p^2) \neq 0$ и когда теоретически можно гарантировать сходимость, но лишь в вероятностном смысле.

ГЛАВА II

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

§ 2.1. Обозначения. Некоторые понятия функционального анализа

1. Пусть дана n-мерная вектор-функция $y=f(x)$ переменной x, являющейся также n-мерным вектором. Если компоненты y и x суть $y_1, \ldots, y_n$ и $x_1, \ldots, x_n$, то записывают

$$y=(y_1(x), \ldots, y_n(x)) \text{ или } y=f(x)=(f_1, \ldots, f_n),$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$.

Производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ такой функции является матрицей

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right),$$

члены которой суть производные функций f_i $(i=1, \ldots, n)$ по x_j $(j=1, \ldots, n)$.

Если $y=f(x)$ — скалярная функция векторной переменной $x=(x_1, \ldots, x_n)$, то производная ее по x является вектором

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Вторая же производная этой функции по x является квадратной матрицей n-го порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right),$$

члены которой суть производные второго порядка от f по $x_1, \ldots, x_n$.

Сумма парных произведений компонент любых двух векторов $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ рассматривается как скалярное произведение этих векторов и обозначается через (x, y), т. е.

$$(x, y)=x_1y_1+\ldots+x_ny_n.$$

Дифференциал dy вектор-функции $y=f(x)=(f_1, \ldots, f_n)$ выражается формулой

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx,$$

где $dx=(dx_1, \ldots, dx_n)$ — вектор, а $\partial f/\partial x$ — матрица. Произведение этой матрицы на вектор dx представляет собой вектор $dy=(dy_1, \ldots, dy_n)$.

2. Рассматриваемые функции мы будем предполагать непрерывными и аналитическими в комплексной области, а вместе с тем и непрерывно дифференцируемыми. Пространство (множество) таких функций можно, как известно из функционального анализа, нормировать. В качестве нормы $\|f\|$ любого вектора $f=(f_1, \ldots, f_n)$ в этом пространстве примем $\max\limits_i |f_i|$ $(i=1, \ldots, n)$, т. е.

$$\|f\|=\max_i |f_i|.$$

В соответствии с этим норма $\|A\|$ любой матрицы $A=(a_{ij})$ определяется формулой

$$\|A\|=\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

где i — номер строки, j — номер столбца. Из свойств нормы следует, что для двух векторов y и z имеем $\|y+z\| \leqslant \|y\|+\|z\|$, $\|y-z\| \geqslant |\,\|y\|-\|z\|\,|$.

3. Для удобства записи и для большей геометрической наглядности мы будем широко пользоваться понятием отображения, а также операторной формой записи. Пусть задана функциональная зависимость $y=f(x)$, определенная, если аргумент x принадлежит множеству (области) U, причем соответствующие значения функции y составляют множество (область) V. Мы будем рассматривать эту функциональную зависимость как отображение области U на область V с помощью некоторого оператора. Обозначив последний, например, через A, запишем это отображение в виде $y=Ax$ или $V=AU$.

Дифференциал dy функции $y=f(x)$ рассматривается так же как дифференциал отображения $y=Ax$ и обозначается следующим образом:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}\,dx,$$

где $\frac{\partial A}{\partial x}$ есть лишь иное обозначение матрицы $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Если функция $y=f(x)$ однозначная и непрерывно дифференцируемая (все ее частные производные существуют и непрерывны), то отображение $y=Ax$, а также оператор A называют однозначным и непрерывно дифференцируемым.

Пусть дана такая функция, рассматриваемая как отображение $y=Ax$ области U на область V, и пусть для всех y в области V существует обратная функция $x=\varphi(y)$, также однозначная и непрерывно дифференцируемая. Тогда скажем, что существует однозначный и непрерывно дифференцируемый оператор A^{-1}, обратный к оператору A, или же обратное отображение $x=A^{-1}y$. Между точками областей U и V тогда существует взаимно однозначная и непрерывно дифференцируемая зависимость. Такую зависимость называют *диффеоморфной*. Говорят, что тогда отображение $y=Ax$ есть *диффеоморфизм области U на область V* или же, что область U отображается на область V с помощью оператора A диффеоморфно. Если переменная x принадлежит множеству (области) U, то обозначают $x \in U$. Если сравнивают две области, U и V, и если все точки области U принадлежат одновременно и области V, то говорят, что U содержится в V или что U является подобластью V. Обозначают $U \subset V$ или $U \subseteq V$, если не исключается случай, когда U совпадает с V.

Символом $U-\varepsilon$ обозначается область, все точки которой вместе со своими ε-окрестностями принадлежат области U. Символом $U \setminus V$ обозначают так называемое *дополнение* области (множества) V к области (множеству) U. Оно состоит из точек (элементов), принадлежащих U, но не принадлежащих одновременно к U и V, т. е. представляет собой как бы разность между U и V.

Если вектор z имеет компоненты $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, а $x_1, \ldots, x_n$ суть компоненты вектора x, $y_1, \ldots, y_n$ суть компоненты вектора y, то обозначают $z=(x,\ y)$. Если $x \in U$, $y \in V$, то говорят, что z принадлежит произведению областей U и V.

§ 2.2. Аналитические леммы

1. Пусть дана скалярная функция $f(q)$ векторной переменной $q=(q_1, \ldots, q_n)$, периодическая и аналитическая по q. Тогда она разлагается в n-кратный ряд Фурье. Этот ряд может быть записан в виде

$$f(q)=\sum_{\|k\|\geqslant 0} f_k e^{i(k,q)}, \tag{2.01}$$

где (k, q) — скалярное произведение вектора q и вектора $k=(k_1, \ldots, k_n)$, компоненты которого суть целые числа, а $\|k\|$ — норма вектора k, за которую примем сумму модулей компонент этого вектора, т. е.

$$\|k\|=|k_1|+\ldots+|k_n|.$$

Суммирование в (2.01) проводится по всем целым значениям $k_1, \ldots, k_n$ от $-\infty$ до ∞. Величина $\|k\|$ принимает лишь целые положительные значения, включая нуль.

Ниже нам будут необходимы оценки коэффициентов f_k в ряде (2.01) в зависимости от оценки верхней грани модуля функции $f(q)$, и наоборот, оценки $|f(q)|$ в зависимости от оценок коэффициентов f_k. Такие оценки могут быть получены с помощью следующих двух лемм.

Лемма 1. *Если при* $|\operatorname{Im} q|\leqslant\varrho$ *всегда* $|f(q)|\leqslant M$, *то*

$$|f_k|\leqslant Me^{-\|k\|\varrho}. \tag{2.02}$$

Лемма 2. *Пусть все коэффициенты* f_k *в ряде* (2.01) *удовлетворяют оценке*

$$|f_k|\leqslant Me^{-\|k\|\varrho},$$

где $M>0$, $0<\varrho<1$. *Тогда при любом положительном* $\delta<\varrho$ *и при* $|\operatorname{Im} q|\leqslant\varrho-\delta$ *справедливо неравенство*

$$|f(q)|<4^n\delta^{-n}M. \tag{2.03}$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим сначала случай однократного ряда Фурье

$$f(q)=\sum_{|k|=0}^{\infty} f_k e^{ikq}, \tag{2.04}$$

где q — скалярная переменная, и

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(q) e^{-ikq} dq. \tag{2.05}$$

Как известно из курса математического анализа, для любой периодической функции $F(q)$ периода T мы имеем при всяком ω

$$\int_0^T F dq = \int_\omega^{T+\omega} F dq.$$

Подынтегральная функция в (2.05) имеет период 2π. Полагая $\omega = i\tau$, получим

$$f_k = \frac{1}{2\tau} \int_{i\tau}^{2\pi + i\tau} f(q) e^{-ikq} dq. \tag{2.06}$$

Пусть $k>0$. Тогда положим в (2.06) $\tau = -\varrho$ и проинтегрируем вдоль отрезка прямой, соединяющего точки $-i\varrho$ и $2\pi - i\varrho$. На этой прямой имеем по условию леммы $|f(q)| \leqslant M$ и вместе с тем $|e^{-ikq}| = e^{-k\varrho}$. Следовательно,

$$|f_k| \leqslant \frac{1}{2\pi} M e^{-k\varrho} \left| \int_{-i\varrho}^{2\pi - i\varrho} dq \right| = M e^{-k\varrho}. \tag{2.07}$$

Пусть теперь $k<0$. Тогда положим в (2.06) $\tau = \varrho$ и проинтегрируем вдоль отрезка прямой, соединяющего точки $i\varrho$ и $2\pi + i\varrho$. В результате придем к неравенству (2.07), где k надо заменить на $|k|$.

Для n-кратного ряда Фурье (2.01)

$$f_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} e^{-ik_1 q_1} dq_1 \ldots \int_0^{2\pi} e^{-ik_n q_n} dq_n.$$

При каждом $k = (k_1, \ldots, k_n)$ выберем $\tau_1, \ldots, \tau_n$ равными $+\varrho$ или $-\varrho$ в зависимости от знаков чисел $k_1, \ldots, k_n$. Так же, как и выше, получим

$$|f_k| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} M e^{-|k_1|\varrho} \ldots e^{-|k_n|\varrho} (2\pi)^n = M e^{-\|k\|\varrho},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 2. При $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - \delta$ $(\varrho > \delta)$ имеем

$$|e^{i(k,q)}| \leqslant e^{\|k\|(\varrho-\delta)}.$$

Поэтому для функции $f(q)$, представимой рядом (2.01), в котором f_k удовлетворяют оценке (2.02), при $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - \delta$ справедливо следующее неравенство:

$$|f(q)| \leqslant \sum_{\|k\| \geqslant 0} M e^{-\|k\|\varrho} e^{\|k\|(\varrho-\delta)} = M \sum_{\|k\| \geqslant 0} e^{-\|k\|\delta}. \qquad (2.08)$$

Можно показать, что сумма ряда в правой части этой оценки равна

$$(1 + e^{-\delta})^n (1 - e^{-\delta})^{-n}.$$

Действительно, рассмотрим ряд

$$\sum_{\|k\| \geqslant 0} d^{\|k\|}, \qquad (2.09)$$

где d — скаляр, и другой ряд

$$\sum_{\|k\| \geqslant 0} d_1^{|k_1|} d_2^{|k_2|} \ldots d_n^{|k_n|}, \qquad (2.10)$$

который совпадает с первым при $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = d$. Запишем ряд (2.10) иначе, выделяя свободный член $(\|k\| = 0)$, члены, содержащие только один из параметров $d_1, \ldots, d_n$, члены, содержащие два параметра из $d_1, \ldots, d_n$ и т. д. Мы получим

$$\sum_{\|k\| \geqslant 0} d_1^{|k_1|} \ldots d_n^{|k_n|} = 1 + \sum_i \sum_{k_1} d_i^{|k_1|} + \sum_{i,j} \sum_{k_1, k_2} d_i^{|k_1|} d_j^{|k_2|} + \ldots$$

Заметим, что при заданных целых положительных $m_1, \ldots, m_\sigma$ имеется 2^σ комбинаций чисел $k_1, \ldots, k_\sigma$, из которых любое k_i принимает лишь два значения, m_i или $-m_i$. Следовательно, при фиксированных $i, j, \ldots$ имеем

$$\sum_{k_1 = \pm 1, \pm 2} d_i^{|k_1|} = 2 \sum_{m_1 = 1}^{\infty} d_i^{m_1},$$

$$\sum_{k_1, k_2 = \pm 1, \pm 2, \ldots} d_i^{|k_1|} d_j^{|k_2|} = 2^2 \sum_{m_1, m_2 = 1}^{\infty} d_i^{m_1} d_j^{m_2}, \ldots,$$

где $m_1, m_2, \ldots$ принимают только целые положительные значения. Но

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} d_i^{m_1} = \frac{d_i}{1-d_i}, \quad \sum_{m_1,\ m_2=1}^{\infty} d_i^{m_1} d_j^{m_2} = \frac{d_i d_j}{(1-d_i)(1-d_j)}, \ldots,$$

так что

$$\sum_{\|k\|\geqslant 0} d_1^{|k_1|} \ldots d_n^{|k_n|} = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{1-d_i} +$$

$$+ 2^2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{d_i d_j}{(1-d_i)(1-d_j)} + \ldots + 2^n \frac{d_1 \ldots d_n}{(1-d_1)\ldots(1-d_n)}.$$

При этом первая сумма содержит n членов, вторая сумма содержит $\frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$ членов (число комбинаций из n индексов по два) и т. д. Следовательно, если положить $d_1 = \ldots = d_n = d$, то получим, что

$$\sum_{\|k\|\geqslant 0} d^{\|k\|} = 1 + C_n^1 \frac{2d}{1-d} + C_n^2 \frac{2^2 d^2}{(1-d)^2} + \ldots + C_n^{n-1} \frac{2^{n-1} d^{n-1}}{(1-d)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2^n d^n}{(1-d)^n} = \left(1 + \frac{2d}{1-d}\right)^n = (1+d)^n (1-d)^{-n}.$$

Положив $d = e^{-\delta}$, придем к равенству

$$\sum_{\|k\|\geqslant 0} e^{-\|k\|\delta} = (1+e^{-\delta})^n (1-e^{-\delta})^{-n}.$$

Так как $1 - e^{-\delta} > \delta e^{-\delta}$ при любом $0 < \delta < 1$, то

$$\sum_{\|k\|\geqslant 0} e^{\|k\|\delta} < \left(\frac{1+e^{-\delta}}{\delta e^{-\delta}}\right)^n = \left(\frac{1+e^{\delta}}{\delta}\right)^n < \left(\frac{1+e}{\delta}\right)^n < \frac{4^n}{\delta^n},$$

откуда с учетом (2.08) и вытекает неравенство (2.03) леммы 2.

2. С помощью приведенных двух лемм можно оценить также остаточный член ряда Фурье (2.01). Обозначим его через $R_N f$, так что

$$R_N f = \sum_{\|k\|\geqslant N} f_k e^{i(k,q)} \text{ *)}. \tag{2.11}$$

*) Мы встетимся ниже со случаем, когда N вообще не является целым числом. Тогда в сумме (2.11) $\|k\|\ \overline{N}$, где $\overline{N}$ — ближайшее целое число, превышающее N.

Лемма 3. *Если коэффициенты f_k в ряде* (2.01) *удовлетворяют оценке* (2.02), *то при* $|\mathrm{Im} q| \leqslant \rho - \gamma - \delta$, *где* $2\delta < \gamma \leqslant 1$, $\varrho > \gamma + \delta$, справедливо неравенство

$$|R_N f| < M \left(\frac{2n}{e}\right)^n \frac{1}{\delta^n} e^{-N\gamma}. \tag{2.12}$$

Доказательство. При $|\mathrm{Im}\, q| \leqslant \varrho - \delta - \gamma$ имеем

$$\left| e^{i(k,q)} \right| \leqslant e^{\|k\|(\varrho-\gamma-\delta)}$$

и в соответствии с оценкой (2.02) для f_k и соотношением (2.11) для $R_N f$ получим

$$|R_N f| \leqslant M \sum_{\|k\| \geqslant N} e^{-\|k\|(\gamma+\delta)}.$$

Если K_n^m — количество векторов $k = (k_1, \ldots, k_n)$ с нормой $\|k\| = m$, то

$$|R_N f| \leqslant M \sum_{m=N}^{\infty} K_n^m e^{-m(\gamma+\delta)}. \tag{2.13}$$

Методом индукции нетрудно показать, что $K_n^m \leqslant 2^n m^{n-1}$. Действительно, при любом m и $n=1$ эта оценка справедлива, так как $K_1^m = 2$. Предположим, что она верна при любом m и некотором $n \geqslant 1$, и покажем, что ее справедливость сохраняется при $n+1$. Для этого совокупность индексов $k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}$ разобьем на $2m+1$ совокупностей, в которых k_{n+1} принимает последовательно значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m$ соответственно, а сумма $|k_1| + |k_2| + \ldots + |k_n|$ — значения $m, m-1, \ldots, 0$ соответственно. Тогда

$$K_{n+1}^m = K_n^m + 2K_n^{m-1} + 2K_n^{m-2} + \ldots + 2K_n^1 + 2K_n^0 \leqslant$$
$$\leqslant 2^n m^{n-1} + 2 \cdot 2^n ((m-1)^{n-1} + (m-2)^{n-1} + \ldots + 1^{n-1}) +$$
$$+ 2 \leqslant 2^{n+1}(m^{n-1} + (m-1)^{n-1} + \ldots + 1) \leqslant 2^{n+1} m^n,$$

что и требовалось доказать (знак равенства в этих соотношениях сохраняется лишь при $n=1$).

Следовательно, (2.13) перепишется в виде

$$|R_N f| \leqslant 2^n M \sum_{m=N}^{\infty} m^{n-1} e^{-m(\gamma+\delta)}. \tag{2.13*}$$

Используем далее следующее неравенство:

$$m^{\nu} \leqslant \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu} \frac{e^{m\delta}}{\delta^{\nu}}, \tag{2.14}$$

справедливое при любых $m>0$, $\nu>0$, $\delta>0$.

Для доказательства можно рассмотреть функцию $f(x)=x-\nu\ln x$. Так как $f'(x)=1-\frac{\nu}{x}$, $f''(x)=\frac{\nu}{x^2}$, то эта функция имеет минимум при $x=\nu$. Следовательно, $\nu-\nu\ln\nu \leqslant x-\nu\ln x$ при любых x, так что

$$\nu-x \leqslant \nu\ln\frac{\nu}{x}, \quad e^{\nu-x} \leqslant \left(\frac{\nu}{x}\right)^{\nu}$$

и

$$x^{\nu} \leqslant \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu} e^{x}. \tag{2.14*}$$

Положив $x=m\delta$, где m и δ — любые положительные числа, придем к неравенству (2.14).

Положив в (2.14) $\nu=n-1$ и заменив в (2.13*) m^{n-1} правой частью неравенства (2.14), получим

$$|R_N f| \leqslant 2^n M\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \frac{1}{\delta^{n-1}} \sum_{m=N}^{\infty} e^{m\delta} e^{-m(\gamma+\delta)}$$

или

$$|R_N f| < 2^n M\left(\frac{n}{e}\right)^{n} \frac{1}{\delta^{n-1}} \frac{e^{-N\gamma}}{1-e^{-\gamma}} < M\left(\frac{2n}{e}\right)^{n} \frac{1}{\delta^{n}} e^{-N\gamma},$$

если $\delta<1-e^{-\gamma}$. Последнее неравенство для δ выполняется при $\gamma\leqslant 1$, во всяком случае, если $2\delta<\gamma$, что и доказывает лемму.

3. Как следствие предыдущих лемм, вытекает.

Лемма 4. *Если при* $|\mathrm{Im}\, q|\leqslant\varrho$ *функция* $f(q)$, *разлагающаяся в ряд Фурье* (2.01), *удовлетворяет оценке* $|f(q)|\leqslant M$, *то остаточный член* $R_N f$ *этого ряда при* $N\geqslant\frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{M}$ *и* $|\mathrm{Im}\, q|\leqslant\varrho-\gamma-\delta$, $2\delta<\gamma\leqslant 1$, $\varrho>\gamma+\delta$ *удовлетворяет оценке*

$$|R_N f| < \left(\frac{2n}{e}\right)^{n} \frac{M^2}{\delta^{n}}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Из условия доказываемой леммы и в силу леммы 1 следует, что коэффициенты Фурье функции $f(q)$ удовлетворяют оценке (2.02). Но тогда применима лемма 3. Положив в (2.12) $N \geqslant \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{M}$, придем к оценке (2.15). Лемма доказана.

Положив в лемме 3 $M=1$ и $N \geqslant \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{\mu}$, где μ — произвольно заданное малое число, придем также к следующему варианту леммы 4.

Лемма 4*. *Если при* $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho$ *функция* $f(q)$ *разлагается в ряд Фурье* (2.01) *и удовлетворяет оценке* $|f(q)| \leqslant 1$, *то остаточный член* $R_N f$ *этого ряда при* $N \geqslant \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{\mu}$ *и* $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho-\gamma-\delta$, $2\delta<\gamma\leqslant 1$, $\varrho>\gamma+\delta$ *удовлятворяет оценке*

$$|R_N f| < \left(\frac{2n}{e}\right)^n \frac{\mu}{\delta^n}. \tag{2.15*}$$

4. Нижеследующие леммы дают возможность оценивать производные аналитических функций, если известны оценки самих функций.

Лемма 5. *Пусть скалярная функция* $f(x)$ *переменной* x *(также скалярной) при* $x \in U$ *аналитична и* $|f(x)| \leqslant M$. *Тогда при* $x \in U-\delta$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant \frac{M}{\delta}, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x}\right| \leqslant \frac{2M}{\delta^2}. \tag{2.16}$$

Доказательство. По формуле Коши в любой точке x внутри области U:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{2f(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^3},$$

где интегрирование производится по контуру области U или же по окружности произвольного радиуса с центром в x и лежащей целиком в U. Вокруг любой точки, принадлежащей области $U-\delta$, можно провести окружность радиуса δ (но не большего радиуса), остающейся внутри U. Вдоль такой окружности и произведем интегрирование. При этом мы получим, переходя в интегралах к переменной φ по формуле $\xi - x = \delta e^{i\varphi}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{f d\varphi}{\delta}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{2 f d\varphi}{\delta^2},$$

откуда и вытекают непосредственно оценки (2.16).

Лемма 5*. *Пусть $f(x)$ в лемме 5 есть скалярная функция векторной переменной x. Тогда для производных от f по компонентам $x_1, \ldots, x_n$ вектора x справедливы неравенства*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{M}{\delta}, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2M}{\delta^2}, & i = j, \\ \dfrac{M}{\delta^2}, & i \neq j, \end{cases} \tag{2.17}$$

если x_i, x_j принадлежат области $U - \delta$.

Доказательство леммы 5 проводится точно так же, как и предыдущей леммы.

Следствие. Пусть $f(x)$ в лемме 5 есть векторная функция скалярной переменной x. Тогда при $x \in U - \delta$ справедливы оценки

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\| \leqslant \frac{M}{\delta}, \quad \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\| \leqslant \frac{2M}{\delta^2} n, \tag{2.18}$$

которые непосредственно вытекают из (2.17).

Если же $f(x)$ в лемме 5 есть векторная функция векторной переменной x, то при $x \in U - \delta$ справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\| \leqslant \frac{M}{\delta} n, \tag{2.19}$$

также вытекающая из (2.17).

Оценки вида (2.16) — (2.19) называются *оценками Коши.*

5. В нижеследующих леммах мы встречаемся с неравенствами, которые в случае функций действительных переменных являются непосредственным следствием формул Лагранжа и Тейлора. Эти неравенства позволяют оценивать сами функции с помощью оценок их производных.

Лемма 6. *Если вектор-функция $f = (f_1, \ldots, f_n)$ переменной (также векторной) $x = (x_1, \ldots, x_n)$ такова, что:*

1) *В окрестности отрезка* $[a, b]$ *эта функция непрерывно дифференцируема и*

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant C, \quad (i, \ j=1, \ldots, n) \tag{$*$}$$

в любой точке этого отрезка.

2) *Дифференциал* df *удовлетворяет на отрезке* $[a, b]$ *неравенству* $\|df\| \leqslant C\|dx\|$. *Тогда соответственно*

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant Cn\|b-a\|; \tag{2.20}$$

или

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant C\|b-a\| ^{*)}. \tag{2.20*}$$

Доказательство. Заметим сначала, что если x — действительная переменная, то для функций $f_i(x)$ справедлива формула Лагранжа

$$f_i(b)-f_i(a)=\sum_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_* (b_j-a_j), \tag{2.21}$$

где производные $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_*$ берутся в некоторых точках отрезка $[a, b]$. Отсюда непосредственно вытекает (2.20). Однако в случае комплексной переменной x формула (2.21) неверна например,

$$f(x)=e^{ix}, \ a=0, \ b=2\pi, \ f(2\pi)-f(0) \neq 2\pi i e^{ix}$$

при любых $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Вместе с тем неравенство (2.20) остается справедливым. Для его доказательства достаточно представить разности $f_i(b)-f_i(a)$ в виде интеграла от дифференциалов df_i:

$$f_i(b)-f_i(a)=\int_a^b df_i=\int_a^b \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n\right). \tag{2.22}$$

Переходя к переменной t с помощью формул $x_i = a_i+(b_i-a_i)t$, $(i=1, \ldots, n)$, что соответствует

---

*) Здесь согласно принятым обозначениям

$$\|f(b)-f(a)\|=\max_i |f_i(b)-f_i(a)|,$$

$$\|b-a\|=\max_i |b_i-a_i|, \quad \|df\|=\max_i |df_i|,$$

$$\|dx\|=\max_i |dx_i|.$$

интегрированию вдоль отрезка $[a, b]$, получим

$$f_i(b)-f_i(a)=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\,dt,$$

откуда

$$|f_i(b)-f_i(a)|\leqslant C\sum_{k=1}^{n}|b_k-a_k| \quad (i=1,\ldots,n),$$

что и доказывает неравенство (2.20). Неравенство (2.20*) также вытекает непосредственно из (2.22), поскольку по условию пункта 2) леммы имеем $|df_i|\leqslant C\|dx\|$.

Замечание 1. Если в лемме 6 функция $f(x)$ удовлетворяет вместо (*) условию

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|\leqslant C,$$

то неравенство (2.20) заменится следующим:

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant C\|b-a\|.$$

Замечание 2. Условия $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|\leqslant C$ и $\|df\|\leqslant C\|dx\|$ эквивалентны друг другу. Действительно, если выполняется первое, то второе непосредственно из него следует в силу определений дифференциала и понятия нормы матрицы. Пусть теперь выполняется второе условие. Предположим, что первое неравенство не выполняется, т. е. при каком-либо i имеем $\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|>C$. Тогда выберем $dx_1,\ldots, dx_n$ такими, что $|dx_1|=\ldots=|dx_n|$, $\operatorname{sign}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)=\operatorname{sign} dx_j$. Поскольку выражение для дифференциала df_i имеет вид

$$df_i=\frac{\partial f_i}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}dx_n,$$

то мы получим

$$df_i=\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right||dx_j|>C\|dx_n\|,$$

чего не может быть, так как $\|df\|\leqslant C\|dx\|$. Следовательно, $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|\leqslant C$, что и надо было показать.

Лемма 7. *Пусть $f(x)$ в лемме 6 есть векторная функция векторной переменной x и пусть в дополнение к условию в пункте 1) леммы 6 функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и*

$$\left|\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i\, \partial x_j}\right| \leqslant \theta, \quad (\sigma, i, j = 1, \ldots, n), \tag{$*$}$$

вдоль отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\left\| f(b) - f(a) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}, (b-a)\right)_a \right\| \leqslant \frac{\theta n^2}{2} \| b - a \|^2, \tag{2.23}$$

где производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ берется в точке a.

Доказательство. В случае функции действительного переменного неравенство (2.23) непосредственно следует из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Если же x — комплексная переменная, то требуется другое доказательство. А именно, рассмотрим функцию

$$F_k(x) = f_k(x) - x_1 \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_1} - \ldots - x_n \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_n}.$$

Разности $F_k(b) - F_k(a)$, максимум модуля которых по k совпадает с левой частью неравенства (2.23), запишем с помощью интеграла от дифференциала dF_k вдоль отрезка $[a, b]$:

$$F_k(b) - F_k(a) = \int_a^b \left(\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_1}\right) dx_1 + \\ + \ldots + \left(\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_n} - \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_n}\right) dx_n.$$

В силу леммы 6

$$\left|\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_i}\right| \leqslant \theta n \max_i |x_i - a_i|$$

и

$$|F_k(b) - F_k(a)| \leqslant \\ \leqslant \theta n \left| \int_a^b \max_i |x_i - a_i|\, dx_1 + \ldots + \max_i |x_i - a_i|\, dx_n \right|.$$

Переходя к интегрированию по переменной t по формулам $x_i = a_i + (b_i - a_i)t$, $(i=1, \ldots, n)$, получим

$$|F_k(b) - F_k(a)| \leqslant \frac{\theta n^2}{2} (\max_i |b_i - a_i|)^2,$$

что и доказывает неравенство (2.23).

Замечание. Если в лемме 7 функция $f(x)$ удовлетворяет вместо $(_*)$ условию

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\| \leqslant \theta,$$

то неравенство (2.23) перепишется в виде

$$\left\| f(b) - f(a) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}, (b-a) \right)_a \right\| \leqslant \frac{\theta}{2} n \|b-a\|^2. \quad (2.23^*)$$

§ 2.3. Геометрические леммы

Нижеследующие леммы гарантируют однозначную обратимость замен переменных.

1. Лемма 8. *Пусть дано отображение $y = Ax$ некоторой области U, определяемое формулой*

$$y = x + f(x), \quad (2.24)$$

где $f(x)$ — векторная функция векторной переменной x, однозначная и аналитическая по x в области U и удовлетворяющая в этой области оценкам

$$\|f(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \leqslant C, \quad C < 1. \quad (2.25)$$

Тогда

1. Это отображение определяет взаимно однозначную и аналитическую зависимость между точками x области $U - 4\varepsilon$ и точками y области U_y, причем $U - 5\varepsilon \subseteq U_y \subseteq \subseteq U - 3\varepsilon$.

2. Зависимость x от y в явном виде можно найти с помощью последовательных приближений вида

$$x^{(0)} = y, \quad x^{(i)} = y - f(x^{(i-1)}), \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

сходящихся равномерно по y в области U_y.

Доказательство. Пусть задана точка $x^* \in U - 4\varepsilon$. Тогда этой точке соответствует согласно (2.24) единственная точка $y^* = x^* + f(x^*)$, причем в силу (2.25)

$$\|y^* - x^*\| = \|f(x^*)\| \leqslant \varepsilon,$$

так что, во всяком случае $y^* \in U - 3\varepsilon$.

Пусть задана теперь произвольная точка $y \in U - 3\varepsilon$. Перепишем (2.24) в виде

$$x = y - f(x) \tag{2.26}$$

и будем искать x как функцию y с помощью следующих итераций:

$$x^{(0)} = y, \quad x^{(1)} = y - f(x^{(0)}), \ldots \tag{2.26*}$$

Нетрудно заметить, что все $x^{(k)}$ остаются в области $U - 2\varepsilon$. Действительно, так как $x^{(0)} = y \in U - 3\varepsilon$, то

$$\|x^{(1)} - y\| = \|f(x^{(0)})\| \leqslant \varepsilon$$

и, следовательно, $x^{(1)}$ принадлежит ε-окрестности точки y. Так как $y \in U - 3\varepsilon$, то $x^{(1)} \in U - 2\varepsilon$. Но тогда

$$\|x^{(2)} - y\| = \|f(x^{(1)})\| \leqslant \varepsilon$$

и поэтому $x^{(2)} \in U - 2\varepsilon$ и т. д.

Для доказательства сходимости итераций (2.26*) рассмотрим сначала разность

$$x^{(2)} - x^{(1)} = f(x^{(1)}) - f(x^{(0)}).$$

Заметим, что поскольку $x^{(0)} \in U - 3\varepsilon$ и $\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leqslant \varepsilon$, то не только $x^{(1)}$, но и весь отрезок $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ остается в сфере радиуса ε с центром в $x^{(0)}$, т. е. принадлежит области $U - 2\varepsilon$. Следовательно, на всем отрезке $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ справедливы оценки (2.25), и для оценки разности $f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})$ можно применить лемму 6. Согласно замечанию к этой лемме получим

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\| = \|f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})\| \leqslant C\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leqslant C\varepsilon, \quad C < 1.$$

Рассмотрим далее разность

$$x^{(3)} - x^{(2)} = f(x^{(2)}) - f(x^{(1)}).$$

Так как

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leqslant \varepsilon, \quad \|x^{(2)} - x^{(0)}\| \leqslant \varepsilon,$$

то обе точки $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, а вместе с тем и весь отрезок $[x^{(1)}, x^{(2)}]$, принадлежат области $U-2\varepsilon$. Таким образом, на всем отрезке $[x^{(1)}, x^{(2)}]$ справедливы оценки (2.25), и опять применима лемма 6. Мы опять получим

$$\|x^{(3)}-x^{(2)}\|=\|f(x^{(2)})-f(x^{(1)})\|\leqslant C\|x^{(2)}-x^{(1)}\|\leqslant C^2\varepsilon.$$

По методу индукции получим при любом целом $k>0$ оценку

$$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|\leqslant C^k\varepsilon,$$

из которой следует сходимость последовательности $\{x^{(k)}\}$, равномерная по y при $y=U-3\varepsilon$.

Обозначим через $x^*=x^*(y)$ предел этой последовательности. Так как все $x^{(k)}\in U-2\varepsilon$, то и $x^*\in U-2\varepsilon$. Из равномерной сходимости в комплексной области следует аналитичность функции $x^*(y)$ по y, что доказывает пункт 2 леммы.

Докажем теперь, что каждому $y\in U-3\varepsilon$ соответствует лишь единственная в области $U-2\varepsilon$ точка x. Действительно, допустим, что при фиксированном $y\in U-3\varepsilon$ имеются в области $U-2\varepsilon$ две точки x_1 и x_2, для которых

$$x_1=y-f(x_1),\quad x_2=y-f(x_2). \tag{2.27}$$

Прежде всего заметим, что эти точки должны удовлетворять условию $\|x_2-x_1\|\leqslant 2\varepsilon$, поскольку

$$\|x_2-x_1\|\leqslant\|f(x_1)\|+\|f(x_2)\|\leqslant 2\varepsilon.$$

Отсюда же вытекает, что если построить сферу радиуса 2ε с центром в x_1, то x_2 не выйдет за границы этой сферы, а вся сфера будет принадлежать области U. (По предположению, $x_1\in U-2\varepsilon$.) Другими словами, весь отрезок $[x_1, x_2]$ принадлежит области U, и на нем справедливы оценки (2.25), значит, при оценке разности $f(x_2)-$ $-f(x_1)$ применима лемма 6. Мы получим

$$\|f(x_2)-f(x_1)\|\leqslant C\|x_2-x_1\|,\quad C_1<1,$$

что противоречит формулам (2.27), согласно которым

$$\|x_2-x_1\|=\|f(x_2)-f(x_1)\|.$$

Таким образом, последовательность (2.26*) определяет единственную точку $x(y)$, соответствующую каждой точке $y\in U-3\varepsilon$.

Из всего сказанного можно заключить, что каждой точке x области $U-4\varepsilon$ соответствует единственная точка y некоторой области $U_y \subseteq U-3\varepsilon$, а каждой точке $y \in U_y$ соответствует единственная точка x, не выходящая из области $U-2\varepsilon$. В силу взаимной однозначности эта точка x будет принадлежать именно области $U-4\varepsilon$, причем зависимость между x и y выражается аналитическими функциями. Кроме того, видно, что область U_y включает в себя область $U-5\varepsilon$, т. е., что если $y \in U-5\varepsilon$, то обязательно $y \in U_y$. Действительно, пусть дана точка $y^* \in U-5\varepsilon$. Тогда согласно доказанному выше ей соответствует одна и только одна точка, принадлежащая во всяком случае области $U-4\varepsilon$, так как $\|y^*-x^*\| \leqslant \varepsilon$. Но каждая точка x области $U-4\varepsilon$, в частности, точка x^* отображается в точку y, принадлежащую области U_y. В силу взаимной однозначности x^* отображается именно в точку y^*, следовательно, $y^* \in U_y$.

Лемма доказана.

2. Пусть область U отображается диффеоморфно с помощью оператора A на область V $(V=AU)$. Ниже у нас будет возникать вопрос о соотношении между размерами таких областей. Но прежде всего надо уточнить само понятие размера той или иной области. Вообще говоря, размер какой-либо области U в n-мерном пространстве переменной $x=(x_1, \ldots, x_n)$ характеризуется значением n-кратного интеграла

$$\int\limits_U dx_1 \cdot \cdot \cdot dx_n, \tag{2.28}$$

взятого по этой области. Если область U имеет обычную геометрическую природу (например, U есть сфера или параллелепипед, или сфера с некоторым конечным числом вырезанных участков и т. д.), то интеграл (2.28) берется в смысле Римана и будет представлять n-мерный объем области U. Если же область U представляет собой измеримое (по Лебегу) множество точек, то интеграл (2.28) берется в смысле Лебега и он равен лебеговой мере $\operatorname{mes} U$ области U. Например, пусть область U есть множество внутри сферы D_R радиуса R в трехмерном евклидовом пространстве, состоящее из точек, координаты которых выражаются рациональными числами. Понятие объема такой области не имеет смысла, но интеграл вида (2.28) по Лебегу имеет смысл и он равен нулю, т. е. $\operatorname{mes} U=0$. Если принять, что U есть множество точек в D_R с иррациональными координатами, то опять об объеме говорить нельзя, но интеграл (2.28), взятый по Лебегу, совпадает (ввиду свойств иррациональных чисел) с объемом сферы D_R, т. е. $\operatorname{mes} U=\frac{4}{3}\pi R^3$.

В случае обычных областей геометрической природы понятие меры Лебега совпадает с понятием объема.

Приведем ряд лемм, позволяющих устанавливать существование взаимно однозначной (и диффеоморфной) связи между различными областями и соотношений между мерами этих областей.

Лемма 9. *Пусть дано линейное преобразование $y=Dx$, где D — невырожденная квадратная матрица n-го порядка с ограниченными элементами, а x — n-мерный вектор. Тогда найдутся числа θ и Θ такие, что*

$$\theta\|x\|\leqslant\|y\|\leqslant\theta\|x\|. \tag{2.29}$$

Доказательство. В силу ограниченности элементов матрицы D найдется число Θ такое, что $\|D\|\leqslant\Theta$. Так как $y=Dx$, то $\|y\|\leqslant\|D\|\cdot\|x\|$ и $\|y\|\leqslant\Theta\|x\|$. Вместе с тем, поскольку матрица D невырожденная, т. е. $\det D\neq 0$, то существует обратная матрица D^{-1} и элементы последней будут ограниченными. Следовательно, найдется число θ такое, что $\|D^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\theta}$. Из $y=Dx$ следует, что $x=D^{-1}y$, $\|x\|\leqslant\|D^{-1}\|\cdot\|y\|$ и $\|x\|\leqslant\frac{1}{\theta}\|y\|$.

Таким образом,

$$\theta\|x\|\leqslant\|y\|\leqslant\Theta\|x\|,$$

что и следовало доказать.

Лемма 10. *Пусть дано линейное преобразование $y=(D+B)x$ и пусть D и B суть квадратные $(n\times n)$-матрицы такие, что*

$$\|D\|\leqslant\Theta,\ \|D^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\theta},\ \|B\|\leqslant\beta, \tag{2.30}$$

где θ, Θ, β — некоторые числа, причем β достаточно мало по сравнению с θ и Θ. Тогда

$$(\theta-\beta)\|x\|\leqslant\|y\|\leqslant(\Theta+\beta)\|x\|. \tag{2.31}$$

Доказательство. Так как $y=Dx+Bx$, то в соответствии со свойствами норм векторов и матриц мы можем выписать следующие неравенства:

$$\|y\| \leqslant \|Dx\| + \|Bx\|, \quad \|y\| \geqslant \|Dx\| - \|Bx\|.$$

В силу условий (2.30) из леммы 9 имеем

$$\theta\|x\| \geqslant \|Dx\| \leqslant \Theta\|x\|, \quad \|Bx\| \leqslant \beta\|x\|,$$

откуда и вытекает справедливость (2.31). Лемма доказана.

Замечание. Из (2.31) вытекает неравенство, относящееся непосредственно к матрице $(D+B)^{-1}$, а именно:

$$\|(D+B)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\theta-\beta}. \tag{2.32}$$

Действительно, так как $y=(D+B)x$, то $x=(D+B)^{-1}y$. Предположим, что

$$\|(D+B)^{-1}\| > \frac{1}{\theta-\beta},$$

т. е. что в матрице $(D+B)^{-1}=(\gamma_{ik})$ найдется строка i, для которой $|\gamma_{i1}|+|\gamma_{i2}|+\cdots+|\gamma_{in}| > \frac{1}{\theta-\beta}$. Выберем компоненты $y_1, \ldots, y_n$ вектора y так, что $\gamma_{ij}y_j > 0$, $|y_1| = \cdots = |y_n| = 1$. Тогда компонента x_i вектора $(x_1, \ldots, x_n)$ будет равна $x_i = \gamma_{i1}y_1 + \cdots + \gamma_{in}y_n$ и мы получим, что $x_i > \frac{1}{\theta-\beta}$, т. е. придем к противоречию с (2.31).

Лемма 11. *Пусть в области $x \in U$ дано однозначное, непрерывно дифференцируемое отображение $y=Ax$ и пусть в этой области* $\det \frac{\partial A}{\partial x} \neq 0$. *Тогда найдутся такие положительные числа θ и Θ, что дифференциал dA удовлетворяет условиям*

$$\theta\|dx\| \leqslant \|dA\| \leqslant \Theta\|dx\|. \tag{2.33}$$

Доказательство. По определению дифференциала

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx, \tag{2.34}$$

где $\frac{\partial A}{\partial x}$ — матрица, элементы которой суть производные

$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}$ и dA, dx суть n-мерные векторы с компонентами $dA_1, \ldots, dA_n$ и $dx_1, \ldots, dx_n$ соответственно. Так как по условию оператор A непрерывно дифференцируем, то матрица $\frac{\partial A}{\partial x}$ имеет ограниченные элементы. Можно рассматривать (2.34) как линейное преобразование dx в dA. Это преобразование удовлетворяет условию леммы 9, откуда и следует справедливость неравенств (2.33).

Замечание. Всегда можно выбрать в качестве чисел θ, Θ такие, что

$$\theta \leqslant 1 \leqslant \Theta < \infty.$$

Лемма 12. *Пусть удовлетворяются условия леммы* 11 *и пусть область U выпуклая**). *Тогда для любых точек x_1, x_2, принадлежащих этой области и соответствующих точек $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$ отображения $y = Ax$ справедливы неравенства*

$$\theta \|x_2 - x_1\| \leqslant \|y_2 - y_1\| \leqslant \Theta \|x_2 - x_1\|, \tag{2.35}$$

где θ и Θ — некоторые положительные числа.

Доказательство. Представим разности $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ как интегралы (криволинейные) от дифференциалов dx, dy:

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx, \quad y_2 - y_1 = \int_{y_1}^{y_2} dy,$$

взятые вдоль отрезков $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$ соответственно (от пути интегрирования эти интегралы не зависят). Так как отрезок $[x_1, x_2]$ целиком принадлежит области U, то вдоль него выполняются неравенства (2.33) леммы 11, т. е. $\theta\|dx\| \leqslant \|dy\| \leqslant \Theta\|dx\|$, откуда и вытекает справедливость (2.35). Лемма доказана.

Замечание. Если бы точки x_1 и x_2 принадлежали U, но нельзя было бы гарантировать, что весь отрезок $[x_1, x_2]$ также принадлежит U, то доказать неравенства (2.35) было бы нельзя.

---

*) *Выпуклой* называется такая область, для которой любые две точки x_1 и x_2 остаются внутри нее вместе с отрезком $[x_1, x_2]$, соединяющим эти точки. Выпуклой областью является, например, n-мерная сфера, n-мерный параллелепипед и т. д.

Лемма 13. *Пусть выполняются условия леммы* 11 *и пусть область U выпуклая. Тогда оператор A осуществляет диффеоморфную связь между точками x области U и соответствующими точками y ее отображения $V = AU$.*

Доказательство. Пусть дана точка $x \in U$. Тогда ей соответствует точка $y = Ax$. Такие точки y, соответствующие всем точкам x области U, составят область V. В силу однозначности оператора A каждой точке $x_* \in U$ соответствует единственная точка $y_* = Ax_* \in V$. Вместе с тем можно показать, что двум различным в U точкам x_1 и x_2 соответствуют обязательно различные точки $y_1 = Ax_1$ и $y_2 = Ax_2$ в U. Действительно, в силу неравенств (2.35) леммы 12 имеем

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \frac{1}{\theta} \|y_2 - y_1\|, \quad \theta > 0,$$

так что, если $\|x_2 - x_1\| \neq 0$, то также $\|y_2 - y_1\| \neq 0$. Но этот результат эквивалентен тому, что каждой точке $y \in V$ соответствует лишь единственная точка x в области U, т. е. что соответствие между точками областей U и V взаимно однозначное.

Таким образом, показано, что существует однозначное отображение $x = A^{-1}y$, обратное к отображению $y = Ax$ и такое, что для каждой точки $y \in V$ получим единственную точку $x = A^{-1} y \in U$.

Обратное отображение A^{-1} мы можем также получить, применив к отображению $y = Ax$, выражающему некоторую функциональную зависимость $y = f(x)$, обычную теорему анализа о существовании обратной функции. Поскольку

$$\det \frac{\partial f}{\partial x} \equiv \det \frac{\partial A}{\partial x} \neq 0$$

при $x \in U$, то согласно этой теореме существует функция $x = \varphi(y)$, обратная по отношению к $y = f(x)$, и такая, что каждой точке $y \in V$ в достаточно малой окрестности любой точки $y_* = f(x_*)$ соответствует единственная точка $x = \varphi(y) \in U$ в достаточно малой окрестности точки $x_* \in U$ *). Функциональная зависимость $x = \varphi(y)$ отож-

*) Но из этой теоремы не вытекает, что во всей области U не могут существовать различные точки $x_1 = A^{-1}y$, $x_2 = A^{-1}y$, соответствующие одной и той же точке $y \in V$, так как эта теорема носит локальный характер.

ществляется с отображением $x = A^{-1}y$. Согласно доказанной выше взаимной однозначности между точками областей U и V функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$, т. е. отображения $y = Ax$ и $x = A^{-1}y$ осуществляют единственную связь между всеми точками этих областей.

Непрерывная дифференцируемость оператора A^{-1} (т. е. функции $\varphi(y)$) следует из теоремы анализа о свойствах обратной функции. Лемма доказана.

Замечание. Леммы 12, 13 доказаны в предположении, что область U выпуклая. Если же U имеет произвольную структуру, то тогда нельзя вообще утверждать, что непрерывно дифференцируемый оператор A, для которого $\det \frac{\partial A}{\partial x} \neq 0$, при $x \in U$ осуществляет взаимно однозначное отображение всей области U.

Лемма 14. *Пусть область U переменной x отображается диффеоморфно на область V переменной y с помощью оператора A, так что $V = AU$, и пусть A удовлетворяет условиям леммы* 11, *т. е. A непрерывно дифференцируемо и*

$$\theta\|dx\| \leqslant \|dA\| \leqslant \Theta\|dx\|, \tag{2.36}$$

где θ, Θ — некоторые положительные числа. Тогда область $U - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, отображается диффеоморфно этим же оператором на область V_1, заключенную между областями $V - \theta\varepsilon$ и $V - \Theta\varepsilon$, т. е.

$$V - \Theta\varepsilon \subseteq V_1 \subseteq V - \theta\varepsilon.$$

Утверждение леммы означает, во-первых, что если точка x принадлежит $U - \varepsilon$, то ее отображение $y = Ax$ принадлежит, во всяком случае, области $V - \theta\varepsilon$. Во-вторых, если $y_* \in V - \Theta\varepsilon$, то эта точка обязательно принадлежит также области V_1, т. е. найдется такая точка x_* в $U - \varepsilon$, которая отображается в y_*. Для иллюстрации утверждения леммы приведем схематический рисунок (рис. 5).

Доказательство. Пусть $x_0 \in U - \varepsilon$ и $y_0 = Ax_0$. По определению области $U - \varepsilon$ имеем, что вся сфера радиуса ε с центром в x_0 (обозначим эту сферу через S_x) принадлежит области U. Следовательно, все точки x этой сферы отображаются в точки y области V. Кроме того, сфера S_x является выпуклой областью и согласно леммам 12, 13 она отображается оператором A взаимно однозначно и непрерывно на область D_y, принадлежащую V. При этом для всех x в S_x и соответствующих y в D_y справедливо неравенство

$$\theta \|x-x_0\| \leqslant \|y-y_0\|.$$

Пусть x стремится к точке x^* поверхности сферы S_x. Тогда y стремится к y^* — точке границы области D_y и

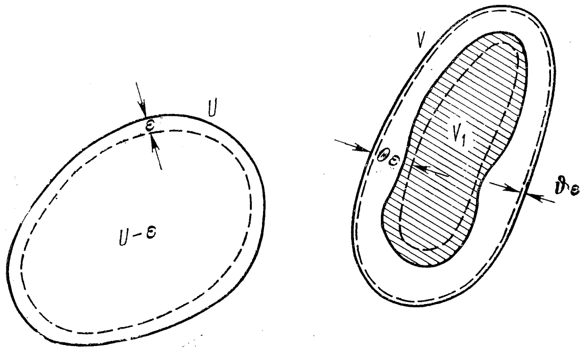

Рис. 5.

так как $\|x^*-x_0\|=\varepsilon$, то $\|y^*-y_0\| \geqslant \theta\varepsilon$. Это значит, что сфера радиуса $\theta\varepsilon$ с центром в y_0 лежит целиком в D_y. Но это также значит, что во всяком случае $\theta\varepsilon$-окрестность точки y_0 принадлежит D_y, а вместе с тем и области V, т. е. $y_0 \in V-\theta\varepsilon$.

Таким образом, если $x_0 \in U-\varepsilon$, то $y_0=Ax_0 \in V-\theta\varepsilon$, что доказывает первую часть леммы.

Рассмотрим теперь точку $y_0 \in V-\Theta\varepsilon$ и сферу S_y радиуса $\Theta\varepsilon$ с центром в y_0. Эта сфера будет лежать целиком в области V по определению области $V-\Theta\varepsilon$. В соответствии с леммой 13 существует отображение $x=A^{-1}y$, обратное к $y=Ax$, которое отображает непрерывно и однозначно все точки сферы S_y на некоторую область D_x в U. Кроме того, если $x_0=A^{-1}y_0$, то для всех точек x, y в

D_x и S_y соответственно справедливы неравенства леммы 12, т. е.

$$\|x-x_0\| \geqslant \frac{1}{\Theta}\|y-y_0\|.$$

Пусть y стремится к точке y^* на поверхности сферы S_y. Тогда соответствующая точка x стремится к точке x^* на границе области D_x, и так как $\|y^*-y_0\|=\Theta\varepsilon$, то $\|x^*-x_0\|\geqslant\varepsilon$. Поскольку все точки D_x принадлежат области U, то и подавно все точки ε-окрестности x_0 также принадлежат U, т. е. $x_0 \in U-\varepsilon$. Таким образом, если $y_0 \in V-\Theta\varepsilon$, то $x_0=A^{-1}y_0 \in U-\varepsilon$, причем $y_0=Ax_0$ в силу взаимной однозначности отображения $y=Ax$. Другими словами, в области $U-\varepsilon$ найдется точка x_0, которая отображается в y_0. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть удовлетворяются условия леммы* 14. *Тогда*

$$\theta^n \operatorname{mes} U \leqslant \operatorname{mes} V \leqslant \Theta^n \operatorname{mes} U. \tag{2.37}$$

Доказательство. По определению меры

$$\operatorname{mes} U=\int_U dx_1 \ldots dx_n, \quad \operatorname{mes} V=\int_V dy_1 \ldots dy_n, \tag{2.38}$$

где интегралы берутся по областям U и $V=AU$ соответственно.

Рассмотрим отображение $y=Ax$ и его дифференциал $dA=dy=(dy_1, \ldots, dy_n)$, а также дифференциал $dx=(dx_1, \ldots, dx_n)$ независимой переменной x. Выберем dx так, что $dx_1= \ldots =dx_n>0$. Тогда согласно (2.36) и в соответствии с определением нормы вектора

$$\max_i |dy_i| \leqslant \|dy\| \leqslant \Theta\|dx\|=\Theta \max_i |dx_i|$$

и

$$|dy_1 \ldots dy_n| \leqslant \Theta^n dx_1 \ldots dx_n,$$

откуда вытекает правое из неравенств (2.37).

Рассмотрим далее обратное отображение $x=A^{-1}y$, отображающее однозначно область V на область U. Теперь роль независимой переменной играет $y=(y_1, \ldots, y_n)$. Выберем $dy_1= \ldots =dy_n>0$. Тогда согласно (2.36)

$$\max_i |dx_i|=\|dx\| \leqslant \frac{1}{\theta}\|dy\|=\frac{1}{\theta}\max_i |dy_i|,$$

откуда вытекает левое из неравенств (2.37), Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть между точками p, ω областей G, Ω соответственно имеет место диффеоморфная зависимость, определяемая с помощью однозначного и непрерывно дифференцируемого отображения $\omega = Ap$, причем*

$$\theta \|dp\| \leqslant \|dA\| \leqslant \Theta \|dp\|, \tag{2.39}$$

где θ, Θ — числа, удовлетворяющие условию $\theta \leqslant 1 \leqslant \Theta < \infty$. Пусть далее дано отображение

$$\omega = A'p = Ap + \Delta p, \tag{2.40}$$

где Δ — однозначный и непрерывно дифференцируемый оператор такой, что

$$\|\Delta p\| < \beta, \quad \|d\Delta p\| < \delta\theta \|dp\|, \ \delta < 1 \tag{2.41}$$

при $p \in G - \beta$. Тогда во всяком случае

1) *оператор A' осуществляет диффеоморфную зависимость между некоторой областью $G_1 \in G - \beta$ переменной p и областью $\Omega_1 = \Omega - d$, $d = \beta\left(\Theta + \frac{2\Theta}{\theta} + 2\right)$ переменной ω;*

2) *в этих областях*

$$\theta(1 - \delta)\|dp\| \leqslant \|dA'\| \leqslant \Theta(1 + \delta)\|dp\|. \tag{2.42}$$

Доказательство. Оператор A' является по условиям леммы однозначным и непрерывно дифференцируемым. Следовательно, для доказательства леммы требуется показать, что существует оператор A'^{-1}, обратный к A' и непрерывно дифференцируемый, с помощью которого область Ω_1 переменной ω отображается однозначно на некоторую область $G_1 \subset G - \beta$ переменной p. С этой целью рассмотрим сначала отображение $p = A^{-1}\omega$, обратное к отображению $\omega = Ap$ и которое при $\omega \in \Omega$ существует и является однозначным и непрерывно дифференцируемым, так как по условию леммы отображение $\omega = Ap$ есть диффеоморфизм области G на область Ω. Из (2.39) далее вытекает, что при $\omega \in \Omega$, $p \in G$

$$\frac{1}{\Theta}\|d\omega\| \leqslant \|dp\| \equiv \|dA^{-1}\|, \quad \|dA^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\theta}\|d\omega\|, \tag{2.43}$$

причем второе неравенство эквивалентно согласно замечанию 2 к лемме 6 следующему:

$$\left\|\frac{\partial A^{-1}}{\partial \omega}\right\| \leqslant \frac{1}{\theta}. \tag{2.43*}$$

Перепишем (2.40) в виде $\omega - \Delta p = Ap$. С помощью оператора A^{-1} это соотношение можно в свою очередь переписать в виде

$$p = A^{-1}(\omega - \Delta p). \tag{2.44}$$

При любом фиксированном ω можно рассматривать (2.44) как уравнение относительно p.

Фиксируем произвольное $\omega \in \Omega_1$ и покажем, что при таком ω это уравнение имеет единственное решение, принадлежащее некоторой области $G_1 \in G - \beta$.

С этой целью будем искать решение (2.44) методом последовательных приближений, полагая

$$p_1 = A^{-1}\omega, \quad p_{k+1} = A^{-1}(\omega - \Delta p_k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

и покажем, что последовательность $\{p_k\}$ сходится к единственному решению уравнения (2.44), если $\omega \in \Omega_1$.

Действительно, если $\omega \in \Omega_1$, то оператор A^{-1} для таких ω однозначен и удовлетворяет неравенствам (2.43). Применим лемму 14. Согласно этой лемме область $\Omega_1 = \Omega - d$ отображается оператором A^{-1} в область $\widetilde{G}$ такую, что $G - \frac{d}{\theta} \subseteq \widetilde{G} \subseteq G - \frac{d}{\Theta}$. Таким образом, во всяком случае

$$p_1 \in G - \frac{d}{\Theta} = G - \beta\left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\Theta}\right) \subset G - \beta$$

и, следовательно, согласно (2.41) $\|\Delta p_1\| < \beta$. Далее имеем

$$\omega - \Delta p_1 \in \Omega - d + \beta = \Omega - \beta\left(\Theta + \frac{2\Theta}{\theta} + 1\right) \subset \Omega.$$

Следовательно, для таких $\omega - \Delta p_1$ оператор A^{-1} опять удовлетворяет неравенствам (2.43), и согласно лемме 14 область $\Omega - d + \beta$ отображается оператором A^{-1} в область, не выходящую за пределы областей $G - \dfrac{d-\beta}{\theta}$ и

$G-\frac{d-\beta}{\Theta}$. Мы опять получим

$$p_2\in G-\frac{d-\beta}{\Theta}=G-\beta\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{1}{\Theta}\right)\subset G-\beta,$$
$$\|\Delta p_2\|<\beta,\quad \omega-\Delta p_2\in\Omega-d+\beta.$$

Точно так же получим

$$p_3\in G-\beta\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{1}{\Theta}\right)$$

и т. д., т. е. все p_k, $k\geqslant 1$ принадлежат области $G-\beta(1+$ $+\frac{2}{\theta}+\frac{1}{\Theta})$.

Рассмотрим разность

$$p_{k+1}-p_k=A^{-1}(\omega-\Delta p_k)-A^{-1}(\omega-\Delta p_{k-1}).$$

Отрезок, проведенный между точками $\omega_k=\omega-\Delta p_k$ и $\omega_{k-1}=\omega-\Delta p_{k-1}$ имеет длину менее 2β, так как $\|\Delta p_i\|<\beta$, а концы его принадлежат, как показано выше, области $\Omega-d+\beta$. Следовательно, весь этот отрезок принадлежит области $\Omega-d+3\beta=\Omega-\beta\left(\Theta+\frac{2\Theta}{\theta}-1\right)\subset$ [так Ω как $\Theta\geqslant 1$ и вдоль всего отрезка выполняется неравенство (2.43*)]. Но тогда по лемме 6 (замечание 1) имеем

$$\|p_{k+1}-p_k\|=\|A^{-1}(\omega_k)-A^{-1}(\omega_{k-1})\|\leqslant\frac{1}{\theta}\|\omega_k-\omega_{k-1}\|=$$
$$=\frac{1}{\theta}\|\Delta p_k-\Delta p_{k-1}\|. \qquad (2.45)$$

Так как все $\|\Delta p_i\|<\beta$, то $\|p_{k+1}-p_k\|<\frac{2\beta}{\theta}$, т. е. что расстояние между любыми последовательными точками не превышает $2\beta/\theta$.

Но отсюда можно сделать и другой вывод. А именно, поскольку длина отрезка $[p_k, p_{k+1}]$ не превышает $2\beta/\theta$, а его концы p_{k+1}, p_k лежат согласно показанному выше в области $G-\beta\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{1}{\Theta}\right)$, то весь отрезок целиком принадлежит области $G-\beta\left(1+\frac{1}{\Theta}\right)\subset G-\beta$. Но тогда вдоль всего отрезка $[p_k, p_{k+1}]$ выполняются условия (2.41), т. е. $\|d\Delta\| \leqslant \delta\theta \|dp\|$, поэтому опять применима лемма 6. Мы получим

$$\|\Delta p_k - \Delta p_{k-1}\| \leqslant \delta\theta \| p_k - p_{k-1}\|. \qquad (2.46)$$

Но тогда согласно (2.45)

$$\|p_{k+1} - p_k\| \leqslant \delta \|p_k - p_{k-1}\|,$$

что свидетельствует, поскольку $\delta < 1$, о сходимости последовательности $\{p_k\}$ к решению уравнения (2.44), принадлежащему области $G - \beta\left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{1}{\Theta}\right) \subset G - 3\beta$.

Покажем теперь единственность этого решения в этой области.

Действительно, предположим, что $\omega \in \Omega_1$ соответствуют две точки $p^{(1)} = A^{-1}(\omega - \Delta p^{(1)})$ и $p^{(2)} = A^{-1}(\omega - \Delta p^{(2)})$ в области $G - \beta\left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{1}{\Theta}\right)$. Рассмотрим разность

$$p^{(2)} - p^{(1)} = A^{-1}(\omega - \Delta p^{(2)}) - A^{-1}(\omega - \Delta p^{(1)}).$$

Можно повторить в точности все рассуждения, которые приведены выше при оценке разности $p_{k+1} - p_k$. Мы придем к неравенствам, аналогичным (2.45), (2.46), а затем и к неравенству

$$\|p^{(2)} - p^{(1)}\| \leqslant \delta \|p^{(2)} - p^{(1)}\|, \qquad (2.47)$$

чего не может быть, так как $\delta < 1$.

Этим доказано, что каждому $\omega \in \Omega_1$ соответствует единственная точка p, принадлежащая некоторой области $G - \beta\left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{1}{\Theta}\right) \subset G - \beta$ и такая, что $\omega = A'p$. Иначе говоря, при $\omega \in \Omega_1$ существует отображение $p = A'^{-1}\omega$, обратное к $\omega = A'p$ и отображающее область Ω_1 однозначно на некоторую область $G_1 \subset G - \beta$.

Теперь надо доказать, что отображение $p = A'^{-1}\omega$ непрерывно дифференцируемо, а для dA' справедливы неравенства (2.42).

Так как по условию леммы $\|d\Delta p\| \leqslant \delta\theta \|dp\|$ при $p \in G - \beta$, то согласно свойствам норм

$$\|dA'\| \leqslant \|dA\| + \|d\Delta\| \leqslant \Theta \|dp\| + \delta\theta \|dp\|,$$
$$\|dA'\| \geqslant \|dA\| - \|d\Delta\| \geqslant \theta \|dp\| - \delta\theta \|dp\|.$$

Из этих неравенств вытекает справедливость (2.42). Вместе с тем неравенство $\|dA'\| \geqslant \theta(1-\delta)\|dp\|$ эквивалентно условию $\det\left(\frac{\partial A'}{\partial p}\right) \neq 0$. Действительно, если бы в какой-либо точке $p \in G$ мы имели бы $\det\frac{\partial A'}{\partial p} = 0$, то из системы скалярных алгебраических уравнений

$$dA'_i = \frac{\partial A'_i}{\partial p_1} dp_1 + \ldots + \frac{\partial A'_i}{\partial p_n} dp_n \quad (i = 1, \ldots, n),$$

мы могли бы найти такие $dp_1, \ldots, dp_n$, не равные нулю одновременно, при которых $dA'_1 = \ldots = dA'_n = 0$, что противоречило бы условию $\|dA'\| \geqslant \theta(1-\delta)\|dp\|$.

Но при условии $\det\left(\frac{\partial A'}{\partial p}\right) \neq 0$ можно применить теорему об обратной функции. По этой теореме существует отображение $p = A'^{-1}\omega$, обратное к отображению $\omega = A'p$, непрерывное и непрерывно дифференцируемое, что и доказывает лемму.

Очевидно, что лемма применима также к любым подобластям областей G и Ω.

Лемма 17. *Пусть выполнены условия леммы* 16, *т. е.* $\omega = Ap$ *есть диффеоморфизм области* G *на область* Ω *и* $\omega = A'p$ *есть отображение, определяемое формулой* (2.40), *причем имеют место неравенства* (2.39) *и* (2.41). *Пусть дана некоторая подобласть* Ω *области* Ω *и пусть* $\Omega = AG_*$. *Тогда*

1) *отображение* $\omega = A'p$ *осуществляет диффеоморфную связь между областью* $\Omega'_* = \Omega_* - d$, $d = \beta\left(\Theta + \frac{}{\theta} + 2\right)$ *переменной* ω *и некоторой областью* $G'_* \subset G_* - \beta$ *переменной* p, *а также между областью* $\Omega' = \Omega'_* - 6\beta\Theta = \Omega_* - \beta\left(7\Theta + \frac{2\Theta}{\theta} + 2\right)$ *и некоторой областью* $G' \subset G'_* - 3\beta$;

2) *в этих областях*

$$\theta(1-\delta)\|dp\| \leqslant \|dA'\| \leqslant \Theta(1+\delta)\|dp\|;$$

3) *относительные «размеры» областей* G' *и* $\Omega' - \beta$ *оцениваются неравенством*

$$\operatorname{mes}(G \setminus G') \leqslant \theta^{-n} \operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega' - \beta). \qquad (2.48)$$

Доказательство. Согласно условию леммы имеем $AG=\Omega$ и $G=A^{-1}\Omega$, где A^{-1} — оператор, обратный к A. Рассмотрим область $G_*=A^{-1}\Omega_*$, являющуюся подобластью G. Области G_*, Ω_* и отображения $\omega=Ap$, $\omega=A'p$ удовлетворяют всем условиям леммы 16. Согласно этой лемме отображение $\omega=A'p$ осуществляет диффеоморфную связь между некоторой областью $G'_* \subset G_*-\beta$ и областью $\Omega'_*=\Omega_*-d$, $d=\beta\left(\Theta+\frac{2\Theta}{\theta}+2\right)$. При этом имеют место неравенства

$$\theta(1-\delta)\|dp\| \leqslant \|dA'\| \leqslant \Theta(1+\delta)\|dp\|. \tag{2.49}$$

Область $\Omega'=\Omega'_*-6\beta\Theta$, являющаяся подобластью Ω'_*, также отображается с помощью оператора A'^{-1}, обратного к A', на некоторую подобласть G' области G'_*. Для отображения $p=A'^{-1}\omega$ имеет место согласно (2.49) неравенство

$$\|dA'^{-1}\| \geqslant \frac{1}{\Theta(1+\delta)}\|d\omega\|. \tag{2.50}$$

Используя лемму 14 и последнее неравенство, получим, что область G' включается в область $G'_*-\frac{6\beta\Theta}{(1+\delta)\Theta}$. Так как $0<\delta<1$, то во всяком случае $G' \subset G'_*-3\beta$. Тем самым пп. 1 и 2 леммы доказаны. Остается доказать п. 3.

Рассмотрим отображение A области G', для которой $A'G'=\Omega'$. Обозначим область AG' через $\overline{\Omega}'$. Так как $\|Ap-A'p\|<\beta$, то граничная поверхность области $\overline{\Omega}'$ не может находиться на расстоянии, большем, чем β, от граничной поверхности области Ω' (т. е. любая точка на границе $\overline{\Omega}'$ будет принадлежать β-окрестности некоторой точки на границе Ω').

Поэтому

$$\Omega'-\beta \subseteq \overline{\Omega}' \subseteq \Omega'+\beta.$$

Таким образом, мы имеем

$$AG'=\overline{\Omega}' \supseteq \Omega'-\beta.$$

Рассмотрим отображение A области, являющейся дополнением G' к G. В силу взаимной однозначности отображения A из $AG=\Omega$, $AG'=\overline{\Omega}'$ вытекает, что

$$A(G\setminus G')=\Omega\setminus\overline{\Omega}'.$$

Поскольку для оператора A имеем согласно (2.39) справедливое неравенство $\theta\|dp\|\leqslant\|dA\|$, то по лемме 15

$$\theta^n \operatorname{mes}(G\setminus G')\leqslant\operatorname{mes}(\Omega\setminus\overline{\Omega}').$$

Кроме того, так как $\overline{\Omega}'\supseteq\Omega'-\beta$, то область $\Omega\setminus\Omega'-\beta$ включает в себя область $\Omega\setminus\overline{\Omega}'$ и

$$\operatorname{mes}(\Omega\setminus\overline{\Omega}')\leqslant\operatorname{mes}(\Omega\setminus\Omega'-\beta),$$

откуда и вытекает справедливость неравенства (2.48). Лемма полностью доказана.

ГЛАВА III

СВОЙСТВА ОСНОВНОЙ ОПЕРАЦИИ

§ 3.1. Алгоритм преобразования

В основе данного метода построения решения системы вида (1.08) лежит операция перехода от канонических уравнений с одним гамильтонианом к аналогичным уравнениям с другим гамильтонианом при помощи специально выбираемого канонического преобразования. Эта операция, которую мы назовем «основной операцией», применяется сначала к исходной системе (1.08), затем к системе (1.16) относительно переменных $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ и т. д. Она однотипна для всех таких канонических систем. Поэтому для анализа ее свойств достаточно рассмотреть ее, например, в применении к системе (1.08).

Пусть даны уравнения (1.08) с функцией Гамильтона

$$H(p, q)=H_0(p)+H_1(p, q), \tag{3.01}$$

причем функция H_1 представима рядом Фурье (в комплексной форме):

$$H_1(p, q)=\sum_{\|k\|\geqslant 0} h_k(p)e^{i(k,q)}. \tag{3.01*}$$

Пусть в области $F^{(0)}$ ($p\in G^{(0)}$, $|Im\ q|\leqslant\rho\leqslant 1$) эта функция аналитична по своим аргументам и

$$|H_1(p, q)|\leqslant M, \tag{3.02}$$

где M — некоторое малое число. Для дальнейшего анализа удобно ввести вместо M число δ, связанное с M формулой

$$M=\delta^T, \tag{3.02*}$$

где число T будет уточнено ниже.

Заметим, что из условия аналитичности $H_0(p)$ при $p\in G^{(0)}$ вытекает ограниченность в $G^{(0)}$ всех производных $\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i\,\partial p_j}$, а вместе с тем и справедливость неравенства

$$\left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \right\| \leqslant \Theta, \tag{3.03}$$

где Θ — некоторая постоянная.

Применяем каноническое преобразование вида (1.15) к новым переменным P, Q (индекс (1) для простоты записи опускаем):

$$p = P + \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = q + \frac{\partial S}{\partial P}. \tag{3.04}$$

Производящую функцию $S = S(P, q)$ представим при этом не в виде (1.18), а в более общей комплексной форме

$$S(P, q) = \sum_{0 < \|k\| < N} S_k(P) e^{i(k, q)}, \tag{3.05}$$

где

$$S_k(P) = \frac{i h_k(P)}{\left(k, \dfrac{\partial H_0^{(1)}(P)}{\partial P}\right)}, \quad H_0^{(1)}(P) = H_0(P) + \overline{H}_1(P), \tag{3.05*}$$

и $\overline{H}_1$ — «вековая» часть функции H_1. Число N (индекс (0) также для простоты опускаем) мы определим ниже.

Гамильтониан $H^{(1)}(P, Q)$ канонических уравнений относительно новых переменных P, Q получается из $H(p, q)$ после подстановки вместо p, q их выражений через новые переменные P, Q (см. (1.17)).

§ 3.2. Оценка производящей функции преобразования

Переходя к анализу свойств преобразования (3.04), оценим верхнюю грань модуля производящей функции $S(P, q)$, для чего рассмотрим сначала коэффициенты $S_k(P)$ ее полинома Фурье (3.05).

Так как $|H_1(p, q)| \leqslant M$ в области $p \in G^{(0)}$, $|\operatorname{Im} q| \leqslant \rho$, то из леммы 1 § 1 следует, что коэффициенты $h_k(p)$ ряда Фурье (3.01*) для $H_1(p, q)$ удовлетворяют в этой области неравенству

$$|h_k(p)| \leqslant M e^{-\|k\| \rho}. \tag{3.06}$$

Рассмотрим область $G^{(0)}_{KN}$, состоящую из тех точек области $G^{(0)}$, в которых

$$\left|\left(k, \frac{\partial H_0^{(1)}(P)}{\partial P}\right)\right| \geqslant K \|k\|^{-n-1}, \quad 0 < \|k\| < N, \tag{3.07}$$

причем $K=\delta^2$ и δ — постоянная из соотношения (3.02*). Тогда в области $P \in G^{(0)}_{KN}$, $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho$ имеем в соответствии с выражением (3.05*) для $S_k(P)$

$$|S_k(P)| \leqslant \frac{M}{K\|k\|^{-n-1}} e^{-\|k\|\varrho}. \tag{3.08}$$

Используем теперь неравенство (2.14), которое при $m=\|k\|$, $\nu=n+1$ запишется в виде

$$\|k\|^{n+1} \leqslant \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{e^{\|k\|\delta}}{\delta^{n+1}}, \tag{3.09}$$

где в качестве δ выберем именно то число, которое входит в формулу (3.02*). Оценка (3.08) для $S_k(P)$ преобразуется с учетом этого неравенства к виду

$$|S_k(P)| \leqslant \frac{ML_0}{K\delta^{n+1}} e^{-\|k\|(\varrho-\delta)}, \tag{3.10}$$

где

$$L_0 = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Обратимся к лемме 2 гл. II, которая позволяет оценить функцию $S(P, q)$ с помощью оценки (3.10) ее коэффициентов Фурье $S_k(P)$. В области $|\operatorname{Im} q| \leqslant (\varrho - \delta) - \delta = \varrho - 2\delta$ будем иметь

$$|S(P, q)| \leqslant \frac{M}{K} \frac{4^n L_0}{\delta^{2n+1}}. \tag{3.11}$$

Пусть δ таково, что

$$\delta < (4^n L_0)^{-1}. \tag{3.12}$$

(Это первое ограничение, налагаемое на δ, а вместе с тем и на M.) Тогда (3.11) перепишется в более простом виде

$$|S(P, q)| \leqslant \widetilde{M} = \frac{M}{K}\delta^{-2n-2}. \qquad (3.13)$$

Именно эта оценка нам понадобится в дальнейшем. Напомним, что здесь $K=\delta^2$, $M=\delta^T$, причем число T будет уточнено ниже.

§ 3.3. Теорема о каноническом преобразовании

Рассмотрим преобразование (3.04) безотносительно к конкретному виду функции $S(P, q)$ и к конкретной области, где справедлива оценка (3.13). Будем считать, что это преобразование есть отображение некоторой области переменных P, Q на некоторую область переменных p, q. Если обозначить через x и X векторы (p, q) и (P, Q) соответственно (т. е. x есть вектор с компонентами $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, а X — вектор с компонентами $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$), то преобразование (3.04) можно записать символически в виде $x=BX$, где B — некоторый оператор. Справедлива следующая теорема о каноническом пребразовании.

Пусть в некоторой области $F(P \in G, q \in U)$ *функция* $S(P, q)$ *аналитична по своим аргументам и имеет место оценка* $|S| \leqslant \widetilde{M}$, *причем* $\widetilde{M} \leqslant \frac{1}{8n}\beta^2$, *где* β — *некоторое число. Тогда каноническое произведение* (3.04) *определяет взаимно однозначное и взаимно аналитическое отображение* $x=BX$ *области* $F_{PQ}(P \in G-2\beta,\ Q \in U-2\beta)$ *на некоторую подобласть* F_{pq} *области* $p \in G$, $q \in U$, *причем*

$$\|BX - X\| \equiv \|x - X\| \leqslant \frac{\widetilde{M}}{\beta}, \qquad (3.14)$$

$$\|dB\| \equiv \|dx\| < 2\|dX\|^{*)}. \qquad (3.15)$$

Кроме того, при $P \in G-2\beta$, $Q \in U-2\beta-\delta$ *имеем*

$$\|p-P\| < \frac{\widetilde{M}}{\delta}. \qquad (3.16)$$

---

*) В соответствии с введенной нормой вектора имеем

$$\|dx\| = \max(|dp_1|, \ldots, |dq_n|),$$
$$\|dX\| = \max(|dP_1|, \ldots, |dQ_n|),$$
$$\|x - X\| = \max(|p_1 - P_1|, \ldots, |q_n - Q_n|).$$

Доказательство. Прежде всего, используя оценки Коши для производных функции $S(P, q)$, получим (см. гл. II леммы 5, 5* и следствия из них), что в областях $P \in G-\beta$, $q \in U$ и $P \in G$, $q \in U-\beta$

$$\left\|\frac{\partial S}{\partial P}\right\| \leqslant \frac{\widetilde{M}}{\beta} \leqslant \frac{1}{8n}\beta, \quad \left\|\frac{\partial S}{\partial q}\right\| \leqslant \frac{\widetilde{M}}{\beta} \leqslant \frac{1}{8n}\beta \tag{3.17}$$

соответственно. Кроме того, если обозначить через y вектор с компонентами $y_1=P_1, \ldots, y_n=P_n, y_{n+1}=q_1, \ldots \ldots, y_{2n}=q_n$, то в области $P \in G-\beta$, $q \in U-\beta$

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial y_i\, \partial y_j}\right| \leqslant \frac{2\widetilde{M}}{\beta^2} \leqslant \frac{1}{4n}. \tag{3.18}$$

Следовательно, полагая $F_1=\dfrac{\partial S}{\partial q}$, $F_2=-\dfrac{\partial S}{\partial P}$, можно записать исследуемое преобразование в следующем общем виде:

$$p=P+F_1(P, q), \quad Q=q+F_2(P, q), \tag{3.19}$$

где F_1, F_2 — аналитические функции, представимые полиномами Фурье по угловой переменной q и удовлетворяющие неравенствам

$$\|F_i\| \leqslant \frac{\widetilde{M}}{\beta} \leqslant \frac{1}{8n}\beta, \quad P \in G-\beta, \quad q \in U-\beta. \tag{3.20}$$

Кроме того, если мы рассмотрим матрицы $\dfrac{\partial F_i}{\partial P}$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial q}$ $(i=1, 2)$, элементы которых суть производные $\dfrac{\partial^2 S}{\partial q_j\, \partial q_k}$, удовлетворяющие оценке (3.18), то придем к выводу, что нормы этих матриц удовлетворяют неравенству

$$\max\left(\left\|\frac{\partial F_i}{\partial P}\right\|, \left\|\frac{\partial F_i}{\partial q}\right\|\right) \leqslant \frac{2\widetilde{M}}{\beta^2} n \leqslant \frac{1}{4}. \tag{3.21}$$

Рассмотрим второе из соотношений (3.19), фиксируя точку $P \in G-2\beta$ и считая, что оно определяет тогда отображение

$$Q=B_P q \equiv q+F_2(P, q)$$

некоторой области переменной q на некоторую область переменной Q.

Пусть $q \in U - \beta$. Тогда согласно (3.20), (3.21) имеем

$$\|F_2\| \leqslant \frac{1}{8n}\beta, \quad \left\|\frac{\partial F_2}{\partial q}\right\| \leqslant \frac{1}{4}$$

и к отображению $Q = B_P q$ применима лемма 8 гл. II, в которой надо положить $\varepsilon = \beta/8n$, а x и y заменить на q и Q соответственно. Согласно этой лемме 1) каждой точке Q области $U_Q \supseteq U - \beta - 5\varepsilon$ соответствует одна и только одна точка q области $U - \beta - 4\varepsilon$; 2) эту точку можно найти с помощью последовательных приближений

$$q^{(0)} = Q, \quad q^{(1)} = Q - F_2(P, q^{(0)}), \; \ldots, \tag{3.22}$$

сходящихся равномерно по Q (и по P при $P \in G - 2\beta$); 3) в пределе мы получим

$$q = Q + f_2(P, Q), \tag{3.23}$$

где f_2 — аналитическая функция своих аргументов. При этом $\|q - Q\| = \|f_2(P, Q)\| < \varepsilon$.

Подставив далее выражение (3.23) для q в правую часть первого из соотношений (3.19), получим формулу

$$p = P + F_1(P, q)|_{q = Q + f_2(P,Q)} = P + f_1(P, Q), \tag{3.24}$$

определяющую p единственным образом. Так как $f_1(P, Q)$ есть результат подстановки в аналитическую функцию F_1 вместо одного из ее аргументов q аналитической функции (3.23), то f_1 — аналитическая функция. При этом, поскольку $q \in U - \beta - 4\varepsilon$, то к $F_1(P, q) = f_1(P, Q)$ применима оценка (3.20), так что $\|f_1(P, Q)\| < \varepsilon$. Поэтому, если $P \in G - 2\beta$, то во всяком случае $p \in G - 2\beta + \varepsilon$.

Таким образом, при любых заданных $P \in G - 2\beta$, $Q \in U - \beta - 5\varepsilon$ мы получим единственное отображение $x = BX : (P, Q) \to (p, q)$, определяемое в явном виде формулами (3.23), (3.24), причем $p \in G - 2\beta + \varepsilon$, $q \in U - \beta - 4\varepsilon$.

Покажем, что это отображение взаимно однозначное, т. е. что если $(P^*, Q^*) \to (p^*, q^*)$, где $P^* \in G - 2\beta$, $Q^* \in U - \beta - 5\varepsilon$, то обратное отображение $X = B^{-1}x$ существует и оно отображает точку (p^*, q^*) в одну только точку (P^*, Q^*) в области $P \in G - 2\beta$, $Q \in U - \beta - 5\varepsilon$.

Действительно, рассмотрим первое из соотношений (3.19), считая, что при фиксированном q оно определяет отображение

$$p = B_q P \equiv P + F_1(P, q).$$

Пусть фиксированы $P \in G - \beta$, $q \in U - \beta$. Тогда согласно (3.20) и (3.21) имеем

$$\|F_1\| \leqslant \frac{1}{8n}\beta = \varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial F_1}{\partial P}\right\| < \frac{1}{4}$$

и применима лемма 8. По этой лемме каждой точке $P \in G - \beta - 4\varepsilon$ соответствует одна и только одна точка p из области G_*, причем $G - \beta - 5\varepsilon \subseteq G_* \subseteq G - \beta - 3\varepsilon$. Наоборот, каждой точке p области G_*, а тем более области $G - \beta - 5\varepsilon$, соответствует одна и только одна точка $P \in G - \beta - 4\varepsilon$. Последнюю можно найти с помощью последовательных приближений

$$P^{(0)} = p, \quad P^{(1)} = p - F_1(P^{(0)}, q), \ldots, \tag{3.25}$$

сходящихся равномерно по p и q. В пределе получим

$$P = p + \varphi_1(p, q), \tag{3.25*}$$

где φ_1 — аналитическая функция. При этом $\|P - p\| = \|\varphi_1\| < \varepsilon$. Подставив далее это выражение для P в правую часть второго из соотношений (3.19), получим

$$Q = q + F_2(P, q)\,|_{P = p + \varphi_1(p,q)} = q + \varphi_2(p, q), \tag{3.26}$$

откуда Q определяется единственным образом. Здесь φ_2 — аналитическая функция, и $\|\varphi_2\| < \beta/8n = \varepsilon$, так что $\|Q - q\| < \varepsilon$.

Формулы (3.25) и (3.26) соответствуют обратному к $x = BX$ отображению $X = B^{-1}x$.

Таким образом, каждой точке $x = (p, q)$ области $p \in G - \beta - 5\varepsilon$*), $q \in U - \beta$, а тем более области $p \in G - 2\beta + \varepsilon$, $q \in U - \beta - 4\varepsilon$ соответствует* единственная точка $X = (P, Q) = B^{-1}x$, причем $P \in G - \beta - 4\varepsilon \supset G - 2\beta$, $Q \in U - \beta - 3\varepsilon \supset U - \beta - 5\varepsilon$. Это и доказывает взаимную однозначность отображения $x = BX$ области $P \in G - 2\beta$, $Q \in U - \beta - 5\varepsilon$, а значит, и меньшей области F_{pQ} ($P \in G - 2\beta$, $Q \in U - 2\beta$) в некоторую подобласть области $p \in G$, $q \in U$.

Зависимости между P, Q и p, q, т. е. отображения $x = BX$ и $X = B^{-1}x$, выражаются аналитическими функциями согласно (3.23) — (3.26). При этом, так как

---

*) Область $G - \beta - 5\varepsilon$ включает в себя область $G - 2\beta + \varepsilon$, так как $\beta > 6\varepsilon$, $2\beta - \varepsilon > \beta + 5\varepsilon$.

$P \in G-2\beta$ и $q \in U-\beta$, то согласно (3.20)

$$\|x-X\|=\max(\|p-P\|,\quad \|q-Q\|)=\max(\|F_1\|,\quad \|F_2\|)\leqslant \frac{\widetilde{M}}{\beta}.$$

Кроме того, при $Q \in U-2\beta-\delta$ имеем во всяком случае $q \in U-\beta-\delta$ и согласно оценке Коши из $|S|\leqslant\widetilde{M}$ при $q \in U$ вытекает, что

$$\left\|\frac{\partial S}{\partial q}\right\|\leqslant \frac{\widetilde{M}}{\beta+\delta}<\frac{\widetilde{M}}{\delta},$$

откуда

$$\|p-P\|=\left\|\frac{\partial S}{\partial q}\right\|<\frac{\widetilde{M}}{\delta}.$$

Докажем теперь справедливость неравенства (3.15). С этой целью составим на основании (3.19) выражения для дифференциалов dp, dq:

$$\left\{\begin{aligned} dp&=dP+\frac{\partial F_1}{\partial P}\,dP+\frac{\partial F_1}{\partial q}\,dq,\\ dq&=dQ-\frac{\partial F_2}{\partial P}\,dP-\frac{\partial F_2}{\partial q}\,dq. \end{aligned}\right. \tag{3.27}$$

В силу оценки (3.21) и свойств норм получим неравенства

$$\|dp\|-\|dP\|\leqslant\|dp-dP\|\leqslant\frac{1}{4}\|dP\|+\frac{1}{4}\|dq\|,$$

$$\|dq\|-\|dQ\|\leqslant\|dq-dQ\|\leqslant\frac{1}{4}\|dP\|+\frac{1}{4}\|dq\|,$$

откуда

$$\|dq\|\leqslant\frac{4}{3}\|dQ\|+\frac{1}{3}\|dP\|,\quad \|dp\|\leqslant\frac{1}{3}\|dQ\|+\frac{4}{3}\|dP\|,$$

так что

$$\max(\|dp\|,\ \|dq\|)\leqslant\frac{5}{3}\max(\|dP\|,\ \|dQ\|),$$

т. е. $\|dx\|<2\|dX\|$; тем самым теорема полностью доказана.

§ 3.4. Применение теоремы о каноническом преобразовании к основной операции

Применим теорему к рассматриваемому случаю, когда функция $S(P, q)$ представима формулами (3.05), (3.05*) и в области $F^{(0)}(P \in G_{KN}^{(0)}, |\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - 2\delta)$ удовлетворяет оценке (3.13). Прежде всего необходимо потребовать, чтобы $\widetilde{M}$ было не больше, чем $\beta^2/8n$, где β — некоторое число. Поскольку $K = \delta^2$, $M = \delta^T$, получим неравенство

$$\widetilde{M} = \frac{M}{K}\delta^{-2n-2} = \delta^{T-2n-4} \leqslant \frac{1}{8n}\beta^2. \tag{3.28}$$

Положим $\beta = \delta^3$. Тогда это неравенство удовлетворяется, если

$$\delta < \frac{1}{8n}, \quad T \geqslant 2n + 11. \tag{3.28*}$$

(Вместе с (3.12) — это второе ограничение на δ, а также первое указание о возможном значении T.) При таких δ, T придем, применяя теорему, к следующему результату:

Преобразование (3.04) с производящей функцией (3.05) определяет взаимно однозначное и взаимно аналитическое отображение области $P \in G_{kN}^{(0)} - 2\beta$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 2\delta - 2\beta - \delta$ на некоторую подобласть области $p \in G_{kN}^{(0)}, |\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - 2\delta$, причем согласно (3, 14), (3. 16)

$$\|P - p\| < \frac{\widetilde{M}}{\delta} = \frac{M}{K}\delta^{-2n-3}, \quad \|Q - q\| \leqslant \frac{\widetilde{M}}{\beta} = \frac{M}{K}\delta^{-2n-5}, \tag{3.29}$$

$$\|dB\| < 2\|dx\|. \tag{3.29*}$$

Из последнего неравенства и леммы 6 вытекает, что если весь отрезок $[X_1, X_2]$ принадлежит области $P \in G_{KN}^{(0)} - 2\beta$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 2\beta - 3\delta$, то справедливо следующее неравенство:

$$\|BX_1 - BX_2\| < 2\|X_2 - X_1\|. \tag{3.29**}$$

Вместе с тем функциональная зависимость между $x = (p, q)$ и $X = (P, Q)$ выражается формулами (3.23) — (3.26), которые могут быть найдены, например, с помощью итераций вида (3.22), (3.25). Из выражения (3.05) для функции $S(P, q)$ видно, что каждое такое приближение, а также их предел, являющиеся аналитическими функциями своих аргументов, суть периодические с периодом 2π по всем компонентам вектора q (или Q) и, следовательно, разлагаются по q (или Q) в ряды Фурье.

§ 3.5. Анализ преобразованного гамильтониана

Переходим теперь к анализу гамильтониана. Запишем сначала $H(p, q)$ в виде

$$H(d, q)=H_0^{(1)}(p)+\widetilde{H}_1(p, q), \tag{3.30}$$

где

$$H_0^{(1)}(p)=H_0(p)+\overline{H}_1(p),$$

а $\overline{H}_1(p)$ — «вековая» и $\widetilde{H}_1(p, q)$ — чисто периодическая части функции $H_1(p, q)$.

Так как в области $F^{(0)}(p \in G^{(0)}, |\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho)$ имеем, по предположению, $|H_1(p, q)| \leqslant M$, то в этой же области

$$|\overline{H}_1(p)| \leqslant M, \quad |\widetilde{H}_1(p, q)| \leqslant 2M. \tag{3.31}$$

Запишем зависимость между p и P, Q, соответствующую первому из соотношений (3.04), в виде $p=P+\Delta P$, где $\Delta P=\frac{\partial S}{\partial q}$. Тогда

$$H^{(1)}(P, Q)=H_0^{(1)}(P+\Delta P)+\widetilde{H}_1(P+\Delta P, q),$$

где вместо переменной q следует подставить ее выражение через P, Q. Разложим $H^{(1)}$ по степеням ΔP, ограничиваясь для $H_0^{(1)}$ лишь членами первого порядка, а для $\widetilde{H}_1$ лишь членами нулевого порядка относительно ΔP. Получим

$$H^{(1)}(P, Q)=H_0^{(1)}(P)+\left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P}, \Delta P\right)+R_1+ \\ +\widetilde{H}_1(P, q)+R_2, \tag{3.32}$$

где R_1 и R_2 — остаточные члены, причем их можно представить в виде разностей

$$\begin{cases} R_1 = H_0^{(1)}(P+\Delta P) - H_0^{(1)}(P) - \left(\dfrac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P},\ \Delta P\right), \\ R_2 = \widetilde{H}_1(P+\Delta P,\ q) - \widetilde{H}_1(P,\ q). \end{cases} \tag{3.33}$$

Выделим далее в разложении Фурье для $\widetilde{H}_1(P,\ q)$

$$\widetilde{H}_1(P,\ q) = \sum_{\|k\|>0} h_k(P)\, e^{i(k,q)}, \tag{3.34}$$

(получающимся из (3.01) после отбрасывания «вековой» части и замены p на P) все гармоники порядка ниже N. Тогда согласно принятым обозначениям

$$\widetilde{H}_1(P,\ q) = [\widetilde{H}_1(P,\ q)]_N + R_N H_1(P,\ q),$$

где

$$[\widetilde{H}_1(P,\ q)]_N = \sum_{0<\|k\|<N} h_k(P)\, e^{i(k,q)}$$

и $R_N H_1$ — «остаточный» член разложения H_1, содержащий гармоники порядка N (если N — целое число) и выше. После этого перепишем (3.32) в виде

$$H^{(1)}(P,Q) = H_0^{(1)}(P) + \left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P},\ \Delta P\right) + [\widetilde{H}_1(P,\ q)]_N + H_1^{(1)}(P,\ Q), \tag{3.35}$$

где

$$H_1^{(1)} = R_1 + R_2 + R_N H_1,$$

причем аргументы функций R_1, R_2, $R_N H_1$ должны быть выражены через новые переменные P, Q.

Покажем, что если функция $S(P,\ q)$ (от которой зависит ΔP) определяется так, как указывалось выше (см. (3.05), (3.05*)), то второй и третий члены в правой части (3.35), вообще имеющие более низкий порядок малости, чем R_1, R_2 и $R_N H_1$ при достаточно большом N, взаимно уничтожаются, т. е.

$$\left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P},\ \Delta P\right) + [\widetilde{H}_1(P,\ q)]_N = 0.$$

Действительно, представим левую часть последней формулы в скалярной форме, учитывая, что ΔP есть вектор с компонентами $\Delta P_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \Delta P_n = \frac{\partial S}{\partial q_n}$. Мы получим

$$\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_1}\frac{\partial S}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_n}\frac{\partial S}{\partial q_n} + \sum_{0<\|k\|<N} h_k(P)\, e^{i\,(k,q)}. \tag{3.36}$$

Так как (см. (3.05))

$$S(P, q) = \sum_{0<\|k\|<N} S_k(P)\, e^{i\,(k,q)}, \quad (k, q) = k_1q_1 + \ldots + k_nq_n$$

то (3.36) перепишется в виде

$$\sum_{0<\|k\|<N}\left[\left(ik_1\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_1} + \ldots + ik_n\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P_n}\right)S_k(P) + h_k(P)\right]e^{i\,(k,q)}.$$

Если $S_k(P)$ определяются согласно (3.05*), то это выражение обращается тождественно в нуль, что и требовалось доказать.

Таким образом, при подобном выборе $S(P, q)$ функция $H^{(1)}(P, Q)$ может быть записана в виде

$$H^{(1)}(P, Q) = H_0^{(1)}(P) + H_1^{(1)}(P, Q), \tag{3.37}$$

или

$$H_1^{(1)} = R_1 + R_2 + R_NH_1. \tag{3.37*}$$

Оценка R_1.

Оценим сначала $\left\|\frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial P^2}\right\|$, учитывая, что при $P \in G^{(0)}$ имеем $\left\|\frac{\partial^2 H_0}{\partial P^2}\right\| \leqslant \Theta\ (1 \leqslant \Theta < \infty)$ согласно (3.03) и $H_0^{(1)}(P) = H_0(P) + \overline{H}_1(P)$, где $|\overline{H}_1(P)| \leqslant M$ согласно (3.31).

На основании оценок Коши для производных (см. (2.18)) получим, что при $P \in G^{(0)} - \beta$, $M = \delta^T$, $\beta = \delta^3$

$$\left\|\frac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial P^2}\right\| \leqslant \frac{2M}{\beta^2}n = 2n\beta^{T-6} < \delta\Theta, \tag{3.38}$$

если $2n\delta < \Theta$, $T \geqslant 8$. (Последние неравенства для δ и T перекрываются неравенствами (3.28).) Следовательно, для таких δ и T при $P \in G^{(0)} - \beta$ будем иметь

$$\left\| \frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial P^2} \right\| < \left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial P^2} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial P^2} \right\| < (1+\delta)\Theta = \Theta_1. \quad (3.39)$$

Теперь мы можем оценить R_1, исходя из (3.33) и используя лемму 7 гл. II, согласно которой (см. замечание к этой лемме)

$$|R_1| = |H_0^{(1)}(P+\Delta P) - H_0^{(1)}(P) - \\ - \left(\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P}, \Delta P \right) \Bigg| \leqslant C \frac{n}{2} \|\Delta P\|^2, \quad (3.39^*)$$

где постоянная C такова, что $\left\| \frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial P^2} \right\| \leqslant C$ в достаточно малой окрестности любой точки отрезка $[P, P+\Delta P]$, т. е. в окрестности любой точки $P+\lambda\Delta P$, $0<\lambda<1$.

Если мы будем рассматривать область $P \in G_{kN}^{(0)} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\, Q| \leqslant \varrho - 3\delta - 2\beta$, то в ней согласно (3.29)

$$\|\Delta P\| = \|P - p\| \leqslant \frac{M}{K} \delta^{-2n-3} = \delta^{T-2n-5} \text{ (так как } K = \delta^2)$$

и $\|\Delta P\| < \beta = \delta^3$, если $T > 2n+8$ (это неравенство для T слабее, чем (3.28*)). При таком T имеем, следовательно, что если $P \in G_{KN}^{(0)} - 2\beta$, то

$$P + \lambda\Delta P \in G_{KN}^{(0)} - \beta \subset G^{(0)} - \beta$$

и для $\left\| \frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial P^2} \right\|$ в достаточно малой окрестности любой точки $P+\lambda\Delta P$, $0<\lambda<1$ справедлива оценка (3.39). Таким образом, в (3.39) можем положить $C = (1+\delta)\Theta = \Theta_1$ и мы получим окончательно, что в области $P \in G_{KN}^{(0)} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\, Q| \leqslant \varrho - 3\delta - 2\beta$ справедлива оценка

$$|R_1| \leqslant \Theta_1 \frac{n}{2} \left(\frac{M}{K} \delta^{-2n-3} \right)^2$$

или

$$|R_1| < \frac{M^2}{K^2} \delta^{-4n-7}, \quad (3.40)$$

если

$$\Theta_1 \frac{n}{2} \delta < 1. \tag{3.41}$$

(Вместе с (3.12), (3.28) это — третье ограничение на δ.)

Оценка R_2.

Для оценки R_2 будем исходить из (3.33) и используем лемму 6 гл. II, согласно которой

$$|R_2| = |\widetilde{H}_1(P+\Delta P, q) - \widetilde{H}_1(P, q)| \leqslant Cn\|\Delta P\|, \tag{3.42}$$

где C — такое число, что $\left\|\frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial P}\right\| \leqslant C$ в окрестности любой точки $P+\lambda\Delta P$, $0<\lambda<1$.

Поскольку согласно (3.31) $|\widetilde{H}_1(P,q)| \leqslant 2M$ при $P \in G^{(0)}$, $|\mathrm{Im}\, q| \leqslant \varrho$, то см. (2.18))

$$\left\|\frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial P}\right\| \leqslant \frac{2M}{\beta} \tag{3.43}$$

при $P \in G^{(0)} - \beta$, $|\mathrm{Im}\, q| \leqslant \varrho$. Если рассматривать область $|\mathrm{Im}\, Q| \leqslant \varrho - 3\delta - 2\beta$, $P \in G^{(0)}_{KN} - 2\beta$, то $\|\Delta P\| < \beta$, как это было установлено выше при оценке R_1, и $P+\lambda\Delta P \in G^{(0)} - \beta$. Кроме того, во всяком случае при таких Q $|\mathrm{Im}\, q| \leqslant \varrho$, так что оценка (3.43) справедлива для окрестности любой точки $P+\lambda\Delta P$, $0<\lambda<1$, и можно положить $C=2M/\beta$.

Используя для $\|\Delta P\|$ оценку (3.29), получим в области $P \in G^{(0)}_{KN} - 2\beta$, $|\mathrm{Im}\, Q| \leqslant \varrho - 3\delta - 2\beta$

$$|R_2| \leqslant \frac{2M}{\beta} n \frac{M}{K} \delta^{-2n-3} = 2n \frac{M^2}{K} \delta^{-2n-6} < \frac{M^2}{K} \delta^{-2n-7}, \tag{3.44}$$

если $2n\delta < 1$ (это неравенство для δ перекрывается неравенством (3.28)).

Оценка $R_N H_1$.

При оценке $R_N H_1$ надо фиксировать число N, что до сих пор мы не делали. Имея в виду леммы 3 и 4 гл. II, которые дают оценку остаточного члена ряда Фурье, положим

$$N = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{M}, \tag{3.45}$$

где γ удовлетворяет неравенствам

$$2\delta < \gamma \leqslant 1, \quad \gamma + \delta < \varrho, \tag{3.45*}$$

и δ, ϱ — постоянные, встречавшиеся выше.

Коэффициенты $h_k(P)$ ряда (3.34) для $H_1(P, q)$ удовлетворяют при $P \in G^{(0)}$, $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho$ оценке (3.06), т. е. $|h_k(P)| \leqslant Me^{-\|k\|\varrho}$. Следовательно, в соответствии с леммами 3 и 4 гл. II,

$$|R_N H_1(P, q)| < \frac{M^2}{\delta^n}\left(\frac{2n}{e}\right)^n$$

в области $P \in G^{(0)}$, $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - \delta - \gamma$ или

$$|R_N H_1| < \frac{M^2}{\delta^{n-1}}, \tag{3.46}$$

если

$$\delta\left(\frac{2n}{e}\right)^n < 1. \tag{3.47}$$

(Вместе с (3.12), (3.28), (3.41) это — четвертое ограничение на δ.)

Функция $R_N H_1$ зависит от Q посредством переменной q, которая должна быть выражена через P, Q с помощью формул канонического преобразования. Возникает вопрос, при каких Q можно гарантировать, что $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - \delta - \gamma$, а вместе с тем гарантировать справедливость оценки (3.46).

Рассмотрим область $P \in G_{KN}^{(0)} - 2\beta$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - \delta - \gamma - \beta$. Эта область включена в $P \in G_{KN}^{(0)} - 2\beta$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 3\delta - 2\beta$, если $\delta + \gamma + \beta > 3\delta + 2\beta$, т. е. $\gamma > 2\delta + \beta$ или $\gamma > 3\delta$. В этом случае справедливы оценки (3.29), откуда $\|q - Q\| \leqslant \widetilde{M}/\beta = \delta^{T-2n-7} < \beta = \delta^3$, так как согласно (3.25*) $T \geqslant 2n + 11$. Следовательно, $|\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho - \delta - \gamma$. Таким образом, можно гарантировать оценку (3.46) в области $P \in G_{KN}^{(0)} - 2\beta$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - \gamma - \delta - \beta$, если

$$3\delta < \gamma. \tag{3.47*}$$

Общая оценка $H^{(1)}(P, Q)$.

В соответствии с (3.35)

$$|H_1^{(1)}| \leqslant |R_1| + |R_2| + |R_N H_1|.$$

Выше были получены для R_1 и R_2 в области $P \in G_{KN}^{(0)} - 2\beta$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho - 3\delta - 2\beta$ оценки (3.40) и (3.44) соответственно, а для $R_N H_1$ в области $P \in G_{KN}^{(0)} - 2\beta$,

$|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho-\gamma-\delta-\beta$ оценка (3.46). Для простоты рассуждений рассмотрим область $P \in G^{(0)}_{KN}-2\beta$, $|\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho-2\gamma$, которая включает в себя только что указанную область, поскольку $3\delta+2\beta<2\gamma$, $\delta+\beta+\gamma<2\gamma$. (Согласно (3.28) имеем $\delta^2<1/2$, так что

$$2\beta=2\delta^3<\delta, \quad 3\delta+2\beta<4\delta, \quad \delta+\beta<2\delta,$$

а $\delta<\frac{1}{2}\gamma$ согласно (3.45*).)

Естественно, число γ должно удовлетворять неравенству

$$2\gamma<\varrho, \tag{3.48}$$

чтобы выбранная область не была пустой. Тогда в этой области справедливы одновременно оценки (3.40), (3.44), (3.46) и

$$|H^{(1)}(P, Q)|<\frac{M^2}{K^2}\delta^{-4n-7}+\frac{M^2}{K}\delta^{-2n-7}+ \\ +M^2\delta^{-n-1}<\frac{3M^2}{K^2}\delta^{-4n-7},$$

где $M=\delta^T$, $K=\delta^2$ или

$$|H^{(1)}(P, Q)|<\frac{M^2}{K^2}\delta^{-4n-8}=\delta^{2T-12-4n}, \tag{3.49}$$

так как $3\delta<1$. Выберем теперь T, исходя из условия, что $2T-12-4n \geqslant (1+\alpha)T$, где $0<\alpha<1$, т. е. $T \geqslant (12+4n)/(1-\alpha)$. (Неравенство (3.28), налагавшее ограничение на T выше, тем более удовлетворяется.) При таком T неравенство (3.49) перепишется в виде

$$|H^{(1)}(P, Q)|<\delta^{2T-12-4n}=M_1 \leqslant \delta^{(1+\alpha)T}=M^{1+\alpha}. \tag{3.50}$$

В частности, при $\alpha=\frac{1}{2}$ получим $T \geqslant 8n+24$ и

$$|H^{(1)}(P, Q)|<\delta^{12n+36}=M_1 \leqslant \delta^{\frac{3}{2}T}=M^{\frac{3}{2}}. \tag{3.50*}$$

Эта оценка выведена при условии, что δ удовлетворяет неравенствам (3.12), (3.28), (3.41), (3.47):

$$\delta<(4^n L_0)^{-1}=\frac{1}{4^n}\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \delta<\frac{1}{8n}, \tag{3.51}$$

$$\delta<\frac{2}{n\theta_1}=\frac{2}{n(1+\delta)\theta}, \quad \delta<\left(\frac{e}{2n}\right)^n,$$

где $\Theta\,(1 \leqslant \Theta < \infty)$ — постоянная в неравенстве (3.03). Кроме того, число γ, участвующее при выборе числа N, т. е. при построении функции $H^{(1)}(P, Q)$, удовлетворяет неравенствам (3.45*), (3.47), (3.48)

$$3\delta < \gamma \leqslant 1, \quad 2\gamma < \varrho, \tag{3.52}$$

в которых ϱ — постоянная, участвующая в определении исходной области $F^{(0)}$.

Четвертое из неравенств (3.51) перекрывается первым, а третье только усилится, если заменить $2/(1+\delta)$ на 1. Следовательно, можно заменить (3.51) следующими неравенствами, ограничивающими δ:

$$\delta < \frac{1}{4^n}\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \delta < \frac{1}{8n}, \quad \delta < \frac{1}{n\Theta}. \tag{3.53}$$

§ 3.6. Резюме

В соответствии с изложенным можно сформулировать следующие результаты о свойствах основной операции:

Пусть дана каноническая система (1.08) с функцией Гамильтона (3.01)

$$H(p, q) = H_0(p) + H_1(p, q), \tag{3.54}$$

где $H_1(p, q)$ представляется рядом Фурье вида (3.01*) по угловой переменной q. Пусть в комплексной области $F^{(0)}$ $(p \in G^{(0)}, |\operatorname{Im} q| \leqslant \rho \leqslant 1)$ функция $H\,(p, q)$ аналитична по p, q и такова, что удовлетворяются неравенства (3.02), (3.03), т. е.

$$|H_1| \leqslant M, \quad \left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \right\| \leqslant \Theta, \tag{3.55}$$

причем

$$M = \delta^T, \quad T \geqslant \frac{12 + 4n}{1 - \alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3.55*}$$

и δ удовлетворяет неравенствам (3.53). Тогда после канонического преобразования к новым переменным P, Q, описываемого формулами (3.04), (3.05), (3.05*), где

$$N = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{M} \tag{3.56}$$

и γ удовлетворяет условиям (3.52), мы придем к канонической системе относительно P, Q с гамильтонианом

$$H^{(1)}(P,\ Q)=H_0^{(1)}(P)+H_1^{(1)}(P,\ Q), \qquad (3.57)$$

где $H_0^{(1)}=H_0+\overline{H}_1$ ($\overline{H}_1$ — «вековая» часть H_1), причем в области

$$\overline{F}^{(1)}(P\in G_{KN}^{(0)}-2\beta,\ |\operatorname{Im} Q|\leqslant\varrho-2\gamma,\ \beta=\delta^3)$$

(определение области $G_{KN}^{(0)}$ см. выше в § 3.02) имеют место оценки (3.39), (3.50) или (3.50*):

$$|H_1^{(1)}|<M_1=\delta^{2T-12-4n}\leqslant M^{1+\alpha},\ \left\|\frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial P^2}\right\|<(1+\delta)\,\Theta=\Theta_1 \qquad (3.58)$$

В частности, при $\alpha=\frac{1}{2}$, $T\geqslant 8n+24$ имеем $M_1\leqslant M^{3/2}$.

Зависимость между старыми переменными p, q и новыми P, Q взаимно однозначная и взаимно аналитическая, во всяком случае, если P, Q принадлежат области $\overline{F}^{(1)}$ (следовательно, в этой области $H^{(1)}(P,\ Q)$ есть аналитическая функция своих аргументов P, Q). Эта зависимость обозначается в операторной форме

$$x=BX,$$

где x и X суть векторы $(p,\ q)$ и $(P,\ Q)$ соответственно, и описывается непосредственно формулами вида (3.23)—(3.26), причем согласно (3.29), если $X\in\overline{F}^{(1)}$, то

$$\|P-p\|\leqslant\frac{M}{K}\delta^{-2n-3}=\delta^{T-2n-5},$$

$$\|Q-q\|<\frac{M}{K}\delta^{-2n-5}=\delta^{T-2n-7}. \qquad (3.59)$$

Кроме того, если вместо $\overline{F}^{(1)}$ рассмотреть «меньшую» область

$$F^{(1)}(P\in G_{KN}^{(0)}-3\beta,\quad |\operatorname{Im} Q|\leqslant\varrho-3\gamma),$$

то в этой области имеют место дополнительно (согласно леммам 5, 5* гл. II) следующие оценки для производных функции $H_1^{(1)}$:

$$\left\| \frac{\partial H_1^{(1)}}{\partial X} \right\| < \frac{M_1}{\beta}, \quad \left| \frac{\partial^2 H_1^{(1)}}{\partial X_i \partial X_j} \right| < \frac{2M_1}{\beta^2} \quad (i, j = 1, \ldots, 2n), \tag{3.60}$$

где $X_1, \ldots, X_{2n}$ — компоненты вектора $X = (P, Q)$. Естественно, постоянная γ должна при этом удовлетворять неравенству

$$3\gamma < \varrho, \tag{3.61}$$

которым следует заменить второе из неравенств (3.52), чтобы область $F^{(1)}$ не была пустой.

ГЛАВА IV

ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОСНОВНОЙ ОПЕРАЦИИ

§ 4.1. Вывод условий, при которых основная операция применима последовательно неограниченное число раз

В исходной канонической системе (1.08)

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{4.01}$$

гамильтониан $H = H(p, q)$ имеет вид

$$H(p, q) = H_0(p) + H_1(p, q), \tag{4.02}$$

где

$$H_1(p, q) = \sum_{\|k\| > 0} h_k(p) e^{i(k, q)}. \tag{4.02*}$$

В области $F^{(0)}(p \in G^{(0)}, |\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho_0 \leqslant 1)$ имеем согласно (3.02), (3.02*), (3.03) оценки

$$|H_1| \leqslant M = \delta^T, \quad \left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \right\| \leqslant \Theta, \quad (1 \leqslant \Theta < \infty). \tag{4.03}$$

Пусть постоянные δ, γ удовлетворяют неравенствам (3.52), (3.53), (3.61) и $T(1-\alpha) \geqslant 12 + 4n$, $0 < \alpha < 1$. Тогда после применения к (4.01) основной операции и перехода к новым переменным, которые обозначим через $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, придем согласно изложенному в гл. III к системе

$$\dot{P}^{(1)} = -\frac{\partial H^{(1)}}{\partial Q^{(1)}}, \quad \dot{Q}^{(1)} = \frac{\partial H^{(1)}}{\partial P^{(1)}} \tag{4.04}$$

с гамильтонианом

$$H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}) = H_0^{(1)}(P^{(1)}) + H_1^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}), \tag{4.05}$$

причем в области

$$F^{(1)}(P^{(1)} \in G^{(1)} = G_{KN}^{(0)} - 3\beta, \quad |\operatorname{Im} Q^{(1)}| \leqslant \varrho_1 = \varrho - 3\gamma, \ \beta = \delta^3)$$

имеют место оценки (3.58), т. е.

$$\left\| \frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial P^{(1)^2}} \right\| \leqslant (1+\delta)\,\Theta = \Theta_1,$$

$$|H_1^{(1)}| < M_1 = \delta^{2T-4n-12} \leqslant M^{1+\alpha}, \tag{4.06}$$

а также оценки (3.60) для производных функций $H_1^{(1)}$.

Функция H_1 (P, Q) является аналитической в этой области и периодической по компонентам угловой переменной Q с периодом 2π, так что она представляется рядом Фурье

$$H_1^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} h_k^{(1)}(P^{(1)})\, e^{i\,(k,\, Q^{(1)})}. \tag{4.07}$$

Положим $M_1 = \delta^{T1}$, где T — то же самое число, что и в (4.03). Так как $M_1 \leqslant M^{1+\alpha}$, то $\delta_1 \leqslant \delta^{1+\alpha} < \delta$. Применим теперь основную операцию к системе (4.04), гамильтониан которой $H^{(1)}$ имеет тот же вид и удовлетворяет тем же оценкам, что и исходный гамильтониан H (только числа θ, δ, ϱ, M, γ заменены на θ_1, δ_1, ϱ_1, M_1, δ_1, а область $F^{(0)}$ на $F^{(1)}$).

Новые переменные обозначим через $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$. Формулы канонического преобразования к этим переменным будут иметь вид, аналогичный (3.04):

$$P^{(1)} = P^{(2)} + \frac{\partial S^{(1)}}{\partial Q^{(1)}}, \quad Q^{(2)} = Q^{(1)} + \frac{\partial S^{(1)}}{\partial P^{(2)}}, \tag{4.08}$$

где

$$S^{(1)}(P^{(2)}, Q^{(1)}) = \sum_{0 < \|k\| < N_1} S_k^{(1)}(P^{(2)})\, e^{i\,(k,\, Q^{(1)})}, \tag{4.09}$$

$$S_k^{(1)}(P^{(2)}) = \frac{i h_k^{(1)}(P^{(2)})}{\left(k, \dfrac{\partial H_0^{(2)}}{\partial T^{(2)}}\right)}, \quad H_0^{(2)} = H_0^{(1)} + \overline{H}_1^{(1)} \tag{4.09*}$$

и $\overline{H}_1^{(1)}$ — «вековая» часть функции $H_1^{(1)}$.

Положим

$$N_1 = \frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{1}{M_1}, \tag{4.10}$$

а числа δ_1, γ_1 подчиним неравенствам, аналогичным (3.52), (3.53), (3.61):

$$3\delta_1 < \gamma_1 \leqslant 1, \quad 3\gamma_1 < \varrho_1,$$
$$\delta_1 < \frac{1}{4^n}\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \delta_1 < \frac{1}{8n}, \quad \delta_1 < \frac{1}{n\Theta_1}. \tag{4.11}$$

Третье и четвертое из них удовлетворяются в силу (3.53) автоматически, так как $\delta_1 < \delta$.

Но $\delta_1 \leqslant \delta^{1+\alpha}$, $\Theta_1 = (1+\delta)\Theta$, последнее неравенство перепишется в виде $\delta \cdot \delta^\alpha (1+\delta) < \frac{1}{n\Theta}$; поскольку $\delta < \frac{1}{n\Theta}$, $\delta < 1$, то оно выполняется, если $\delta < \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\alpha}$.

Принимая во внимание соотношение $\varrho_1 = \varrho - 3\gamma$, второе неравенство перепишем в виде $3\gamma + 3\gamma_1 < \varrho$. Таким образом, если δ удовлетворяет неравенствам (3.53), а также неравенству

$$\delta < \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\alpha}, \tag{4.12}$$

а γ, γ_1 удовлетворяют неравенствам

$$3\delta < \gamma \leqslant 1, \quad 3\delta_1 < \gamma_1 \leqslant 1, \quad 3\gamma + 3\gamma_1 < \varrho, \tag{4.13}$$

то условия (4.11) выполняются. Тогда после применения основной операции к системе (4.04) мы придем к тем же результатам, что и в случае исходной системы (4.01), а именно, мы придем к системе уравнений

$$\dot{P}^{(2)} = -\frac{\partial H^{(2)}}{\partial Q^{(2)}}, \quad \dot{Q}^{(2)} = \frac{\partial H^{(2)}}{\partial P^{(2)}} \tag{4.14}$$

с гамильтонианом

$$H^{(2)}(P^{(2)}, Q^{(2)}) = H_0^{(2)}(P^{(2)}) + H_1^{(2)}(P^{(2)}, Q^{(2)}),$$

где $H_0^{(2)} = H_0^{(1)} + \overline{H}^{(1)}$ ($\overline{H}^{(1)}$ — «вековая» часть функции $H_1^{(1)}$), причем в области

$$F^{(2)}\,(P^{(2)} \in G^{(2)} = G^{(1)}_{K_1 N_1} - 3\beta_1,$$
$$|\operatorname{Im} Q^{(2)}| \leqslant \varrho_2 = \varrho_1 - 3\gamma_1,\ \beta_1 = \delta_1^3,\ K_1 = \delta_1^2)$$

будут справедливы неравенства

$$
\begin{gathered}
|H_1^{(2)}| < M_2 = \delta_1^{2T-4n-12} \leqslant M_1^{1+\alpha}, \\
\left\| \frac{\partial^2 H_0^{(2)}}{\partial P^{(2)}} \right\| < (1+\delta_1)\Theta_1 = \Theta_2,
\end{gathered} \tag{4.15}
$$

а также выполняются оценки, аналогичные (3.60) для производных функции $H_1^{(2)}$, т. е.

$$
\left\| \frac{\partial H_1^{(2)}}{\partial X^{(2)}} \right\| < \frac{M_2}{\beta_1}, \quad \left| \frac{\partial^2 H_1^{(2)}}{\partial X_i^{(2)} \partial X_j^{(2)}} \right| < \frac{2M_2}{\beta_1^2} \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{4.16}
$$

Область $G_{K_1 N_1}^{(1)}$ состоит из тех точек $P^{(2)}$ области $G^{(1)}$, в которых имеет место неравенство

$$
\left| \left(k, \frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial P^{(2)}} \right) \right| \geqslant K_1 \| k \|^{-k-1}, \quad 0 < \| k \| < N_1. \tag{4.17}
$$

Применим далее основную операцию к системе (4.14), положив

$$
M_2 = \delta_2^T, \quad N_2 = \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{1}{M_2}
$$

и подчинив числа δ_2, γ_2 неравенствам, получающимся из (4.11) после замены ϱ_1 на ϱ_2 и Θ_1 на $\Theta_2 = (1+\delta_1)\Theta_1$. Третье и четвертое из этих неравенств опять удовлетворяются, так как $\delta_2 < \delta_1$. Но $\delta_2 \leqslant \delta_1^{1+\alpha}$, и поэтому последнее неравенство из (4.11) также удовлетворяется, если $\delta_1 < (1/2)^{1/\alpha}$. Последнее имеет место в силу (4.12), поскольку $\delta_1 < \delta$. Остаются неравенства

$$
3\delta_2 < \gamma_2 \leqslant 1, \quad 3\gamma_2 < \varrho_2 = \varrho_1 - 3\gamma_1 = \varrho - 3\gamma - 3\gamma_1.
$$

Таким образом, если δ удовлетворяет неравенствам (3.53) и (4.12), а

$$
3\delta_s < \gamma_s \leqslant 1, \quad (s = 0, 1, 2), \quad 3\gamma_0 + 3\gamma_1 + 3\gamma_2 < \varrho \tag{4.18}
$$

(через δ_0, γ_0 обозначаем δ, γ), то после применения основной операции к системе (4.14) мы придем к тем же результатам, что и в случаях систем (4.01), (4.04).

А именно, выполнив каноническое преобразование к переменным $P^{(3)}$, $Q^{(3)}$, мы получим каноническую систему относительно $P^{(3)}$, $Q^{(3)}$ с гамильтонианом $H^{(3)}(P^{(3)}, Q^{(3)})$, удовлетворяющим в области $F^{(3)}$ неравенствам вида (4.15), (4.16) и т. д.

Очевидно, что если мы построим бесконечную последовательность чисел $\{\gamma_s\}$, удовлетворяющих условиям

$$3\delta_s < \gamma_s \leqslant 1, \quad 3\sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s < \varrho, \tag{4.19}$$

где $\delta_{s+1} \leqslant \delta_s^{1+\alpha}$, $(s=0, 1, 2, \ldots)$ и подчиним $\delta_0=\delta$ неравенствам (3.53) и (4.12), то основную операцию можно применять последовательно неограниченное число раз и получать оценки для всех гамильтонианов $H^{(s)}$, $s\geqslant 1$, аналогичные оценкам (4.15), (4.16).

§ 4.2. Выбор и оценка постоянных из условий § 4.1

Чтобы удовлетворить условиям (4.19), положим $\gamma_s = \delta_s^m$, так что $\gamma_{s+1} \leqslant \gamma_s^{1+\alpha}$, причем m — число, которое надо подобрать.

Из условия $3\delta < \gamma = \delta^m$ $(\gamma=\gamma_0)$ получим тогда неравенство

$$\delta^{1-m} < \frac{1}{3}. \tag{4.19*}$$

Если мы удовлетворим этому неравенству при каком-либо фиксированном m, то, поскольку $\delta > \delta_1 > \delta_2 > \ldots$, все неравенства $3\delta_s < \gamma_s$, $s \geqslant 1$ также будут удовлетворены.

Рассмотрим теперь числовой ряд вида

$$l_0 + l_1 + \ldots + l_s + \ldots, \tag{4.20}$$

в котором члены удовлетворяют неравенству $l_{s+1} \leqslant l_s^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$.

Покажем, что такой ряд сходится и что его сумма не превышает $2l_0$, во всяком случае, если $l_0 \leqslant 2^{-1/\alpha}$.

Действительно, пусть $l_0 \leqslant 2^{-1/\alpha}$, т. е. $l_0^\alpha \leqslant 2^{-1}$. Тогда

$$l_1 \leqslant l_0 \cdot l_0^\alpha \leqslant l_0 \cdot 2^{-1},$$

$$l_2 \leqslant l_1 \cdot l_1^\alpha \leqslant l_0 \cdot 2^{-1} (l_0 \cdot 2^{-1}) \leqslant l_0 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-\alpha} < l_0 \cdot 2^{-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_s < l_0 \cdot 2^{-s},$$

$$\cdots\cdots$$

Следовательно, ряд (4.20) мажорируется рядом

$$l_0+\frac{1}{2}l_0+\frac{1}{2^2}l_0+\frac{1}{2^3}l_0+\ldots,$$

а последний сходится, и его сумма равна $2l_0$, что и нужно было доказать.

Таким образом, если $\gamma\leqslant 2^{-1/\alpha}$, $2\gamma<\frac{1}{3}\varrho$, то ряд $\sum\limits_0^\infty \gamma_s$, $(\gamma_0=\gamma)$ во втором из условий (4.19) сходится и его сумма меньше $\varrho/3$, так что это условие удовлетворяется. Мы подчиним γ даже более сильному условию, а именно, неравенству

$$2\gamma<\frac{2}{9}\varrho.$$

Тогда ряд $\sum\limits_0 \gamma_s$ сходится и его сумма меньше $2\varrho/9$, а последовательность $\{\varrho_s\}=\{\varrho_{s-1}-3\gamma_{s-1}\}=\{\varrho_0-3\gamma_0-\ldots\ldots-3\gamma_{s-1}\}$, где $\varrho_0=\varrho$, сходится к числу ϱ_∞, превышающему $\varrho-3\cdot\frac{2}{9}\varrho=\frac{1}{3}\varrho$ $\left(\text{т. е. } \varrho_\infty>\frac{1}{3}\varrho\right)$.

Мы имеем, таким образом, неравенства

$$\gamma\leqslant 2^{-1/\alpha},\quad 2\gamma<\frac{2}{9}\varrho,$$

которые, поскольку $\gamma=\delta^m$, можно записать в виде

$$\delta\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{1/\alpha m},\quad \delta<\left(\frac{\varrho_0}{9}\right)^{1/m}. \tag{4.21}$$

Если мы выберем число m так, что $0<m<1$, то первое из этих неравенств лишь усиливает неравенство (4.12) для δ.

§ 4.3. Окончательный алгоритм для бесконечной последовательности канонических преобразований и оценки для гамильтонианов и их производных

Из сказанного вытекает, что если δ удовлетворяет неравенствам (3.53), (4.19), (4.21), где $\alpha>0$, $0<m<1$, то мы получим с помощью последовательного применения основной операции бесконечную последовательность переменных $(P^{(s)}, Q^{(s)})$ и соответствующих канонических систем

$$\dot{P}^{(s)} = -\frac{\partial H^{(s)}}{\partial Q^{(s)}}, \quad \dot{Q}^{(s)} = \frac{\partial H^{(s)}}{\partial P^{(s)}} \qquad (s=0, 1, 2, \ldots), \tag{4.22}$$

где гамильтониан $H^{(s)}$ записывается в виде

$$H^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)}) = H_0^{(s)}(P^{(s)}) + H_1^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)}). \tag{4.23}$$

(Исходные переменные p, q и гамильтониан H обозначим для единообразия записи через $P^{(0)}$, $Q^{(0)}$ и $H^{(0)}$ соответственно).

При этом, если рассматривать каждую функцию $H^{(s)}$ в области

$$F^{(s)}\,(P^{(s)} \in G^{(s)} = G^{(s-1)}_{K_{s-1}N_{s-1}} - 3\beta_{s-1},$$
$$|\operatorname{Im} Q^{(s)}| \leqslant \varrho_s = \varrho_{s-1} - 3\gamma_{s-1}),$$

где $\beta_s = \delta_s^3$, $\gamma_s = \delta_s^m$, $(s=0, 1, 2, \ldots)$, а через K_0, N_0, β_0, γ_0, ϱ_0, обозначены K, N, β, γ, ϱ соответственно, то гарантируется аналитичность $H^{(s)}$ по своим аргументам и справедливость оценок

$$|H_1^{(s)}| < M_s, \qquad \left\| \frac{\partial^2 H_0^{(s)}}{\partial P^{(s)2}} \right\| < \Theta_s, \tag{4.24}$$

где

$$M_s = \delta_{s-1}^{2T-4n-12} \leqslant M_{s-1}^{1+\alpha}, \quad \Theta_s = (1+\delta_{s-1})\Theta_{s-1},$$
$$M = \delta^T, \quad T \geqslant \frac{12+4n}{1-\alpha}$$

и $M = M_0$, $\theta = \theta_0$.

Напомним, что область $G^{(s-1)}_{K_{s-1}N_{s-1}}$ состоит из тех точек $P^{(s)}$ области $G^{(s-1)}$, в которых имеет место неравенство

$$\left| \left(k, \frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P^{(s)}} \right) \right| \geqslant K_{s-1} \|k\|^{-n-1}, \quad 0 < \|k\| < N_{s-1}, \tag{4.25}$$

где

$$K_{s-1} = \delta_{s-1}^2, \quad N_{s-1} = \frac{1}{\gamma_{s-1}} \ln \frac{1}{M_{s-1}}.$$

Кроме того, в $F^{(s)}$ производные функции $H_1^{(s)}$ удовлетворяют оценкам

$$\left\|\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial X^{(s)}}\right\| < \frac{M_s}{\beta_{s-1}} = \delta_{s-1}^{2T-4n-15},$$

$$\left|\frac{\partial^2 H_1^{(s)}}{\partial X_i^{(s)} \partial X_j^{(s)}}\right| < \frac{2M_s}{\beta_{s-1}^2} = 2\delta_{s-1}^{2T-4n-18}, \tag{4.26}$$

где $X^{(s)}$ есть вектор $(P^{(s)}, Q^{(s)})$, причем в дальнейшем обозначим

$$\bar{\beta}_{s-1} = \delta_{s-1}^{2T-4n-15}. \tag{4.27}$$

Так как $T \geqslant \frac{4n+12}{1+\alpha}$, $\delta_j \leqslant \delta_{j-1}^{1+\alpha}$, то $2T - 4n - 15 > 0$, $\bar{\beta}_j \leqslant \bar{\beta}_{j-1}^{1+\alpha}$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Ниже нам понадобится оценка для $\left\|\frac{\partial^2 H_0^{(s)}}{\partial P^{(s)^2}}\right\|$, не зависящая от индекса s. Для ее вывода заметим, что в (4.24)

$$\Theta_s = (1+\delta_{s-1})\Theta_{s-1} = (1+\delta_{s-1})(1+\delta_{s-2})\Theta_{s-2} = \ldots = \prod_{k=0}^{s-1}(1+\delta_k)\Theta_0.$$

Как известно из курса математического анализа, бесконечное произведение $\Pi(1+\delta_k)$ сходится к e^L, если ряд $\sum \ln(1+\delta_k)$ сходится к L. Так как $\delta_k < 1$ и $\ln(1+\delta_k) < \delta_k$, то этот ряд мажорируется рядом $\Sigma\delta_k$. Но согласно изложенному в § 4.2 этой главы последний ряд сходится (ибо $\delta_0 < 2^{-1/\alpha}$ и $\delta_{s+1} \leqslant \delta_s^{1+\alpha}$), и его сумма меньше $2\delta_0$. Поэтому при любом s в силу (3.53)

$$\prod_{k=0}^{s-1}(1+\delta_k) < e^{2\delta_0},$$

так что $\Theta_s < 2\Theta_0$.

Таким образом,

$$\left\|\frac{\partial^2 H_0^{(s)}}{\partial P^{(s)^2}}\right\| < 2\Theta_0 \tag{4.28}$$

при любом $(s = 0, 1, 2, \ldots)$.

§ 4.4. Операторная форма записи последовательности канонических преобразований и оценки для соответствующих операторов

Переменные $X^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)})$ и $X^{(s-1)}(P^{(s-1)}, Q^{(s-1)})$ при условии, что $P^{(s)}$, $Q^{(s)}$ принадлежат области $F^{(s)}$, связаны друг с другом однозначной и аналитической зависимостью, определяемой каноническими преобразованиями вида (3.04). В явном виде зависимость между $X^{(s)}$ и $X^{(s-1)}$ определяется формулами вида (3.23)—(3.26), т. е.

$$X^{(s-1)} = X^{(s)} + \bar{f}^{(s)}(X^{(s)}) \tag{4.29}$$

и

$$X^{(s)} = X^{(s-1)} + \bar{\varphi}^{(s)}(X^{(s-1)}), \tag{4.29*}$$

где $\bar{f}^{(s)}$, $\bar{\varphi}^{(s)}$ суть аналитические функции своих аргументов, разлагающиеся в ряды Фурье по $Q^{(s)}$ или $Q^{(s-1)}$ соответственно. Для записи соотношений (4.29), (4.29*) удобно применить операторные обозначения. А именно, представим их как отображения

$$X^{(s-1)} = B_s X^{(s)}, \quad X^{(s)} = B_s^{-1} X^{(s-1)}, \tag{4.30}$$

где B_s^{-1} — оператор, обратный к B_s.

Выше в §§ 3.3, 3.4 были доказаны некоторые свойства таких канонических преобразований. В соответствии с ними (см. (3.14), (3.29), (3.29*)) можем записать:

$$\|B_s X^{(s)} - X^{(s)}\| = \|X^{(s-1)} - X^{(s)}\| \leqslant \frac{M_{s-1}}{K_{s-1}} \delta_{s-1}^{-2n-5} = \delta_{s-1}^{T-2n-7}, \tag{4.31}$$

$$\|dB_s\| < 2\|dX^{(s)}\|, \tag{4.31*}$$

если $X^{(s)} \in F^{(s)}$, причем тогда $X^{(s-1)} = B_s X^{(s)}$ будет принадлежать области $F^{(s-1)}$. Кроме того, если $X_1^{(s)}$, $X_2^{(s)}$ — такие две точки, что весь отрезок $[X_1^{(s)}, X_2^{(s)}]$ принадлежит области $F^{(s)}$, то

$$\|B_s X_2^{(s)} - B_s X_1^{(s)}\| < 2\|X_2^{(s)} - X_1^{(s)}\|. \tag{4.32}$$

Обозначим в дальнейшем

$$\delta_{s-1}^{T-2n-7} = \bar{\bar{\beta}}_{s-1}. \tag{4.33}$$

Поскольку $T \geqslant (4n+12)/(1-\alpha)$, $\delta_j \leqslant \delta_{j-1}^{1+\alpha}$, то будем иметь $T-2n-7 > 0$ и $\bar{\bar{\beta}}_j \leqslant \bar{\bar{\beta}}_{j-1}^{1+\alpha}$.

ГЛАВА V

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

§ 5.1. Уравнения s-го приближения. Операторная связь между исходными переменными и переменными s-го приближения

1. Рассмотрим полученную бесконечную последовательность систем уравнений (4.22), записывая их с учетом выражения (4.23) для их гамильтонианов в виде

$$\dot{P}^{(s)} = -\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial Q^{(s)}}, \quad \dot{Q}^{(s)} = \frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P^{(s)}} + \frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial P^{(s)}}, \qquad (5.01_s^*)$$

или

$$\dot{X}^{(s)} = Y^{(s)}(X^{(s)}) \quad (s=0,\ 1,\ 2, \ldots), \qquad (5.01_s)$$

где $X^{(s)}$ — вектор $(P^{(s)},\ Q^{(s)})$ и $Y^{(s)}$ — вектор с компонентами

$$-\frac{\partial H^{(s)}}{\partial Q^{(s)}} \equiv -\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial Q^{(s)}}, \quad \frac{\partial H^{(s)}}{\partial P^{(s)}} \equiv \frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P^{(s)}} + \frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial P^{(s)}}. \qquad (5.02)$$

Вместе с системами (5.01^*_s), (5.01_s) мы имеем бесконечную последовательность областей $F^{(s)}$ и если каждая из систем (5.01^*_s), (5.01_s) рассматривается в $F^{(s)}$, то для гамильтониана

$$H^{(s)}(X^{(s)}) = H^{(s)}(P^{(s)}) + H_1^{(s)}(X^{(s)}) \qquad (5.03)$$

справедливы оценки (4.24), (4.26). Тогда, если $X^{(s)} \in F^{(s)}$ при всех s, то при $s \to \infty$

$$\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial Q^{(s)}} \to 0, \quad \frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial P^{(s)}} \to 0.$$

Система (5.01^*_s) будет «отличаться» от «упрощенной» невозмущенной и легко интегрируемой системы

$$\dot{\tilde{P}}^{(s)} = 0, \quad \dot{\tilde{Q}}^{(s)} = \frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial \tilde{P}^{(s)}}, \qquad (5.04)$$

тем меньше, чем больше s, если только переменные $P^{(s)}$, $Q^{(s)}$ остаются всегда (т. е. при всех t) в области $F^{(s)}$.

2. Остановимся несколько подробнее на вопросе о переходе от $X^{(s)}$ при каком-либо фиксированном s к $X^{(0)}$ и об обратном переходе от $X^{(0)}$ к $X^{(s)}$.

Как было получено выше, переменные $X^{(s)}$ ($s=0, 1, 2, \ldots$) связаны между собой каноническими преобразованиями, при анализе которых выводятся формулы (4.29) — (4.30). Переход от $X^{(s)}$ к $X^{(0)}$ осуществляется таким образом с помощью цепочки преобразований:

$$\begin{gathered} X^{(0)}=X^{(1)}+\bar{f}^{(1)}(X^{(1)}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X^{(s-1)}=X^{(s)}+\bar{f}^{(s)}(X^{(s)}). \end{gathered} \tag{5.05}$$

Эту цепочку формул можно заменить одной формулой, связывающей непосредственно $X^{(0)}$ и $X^{(s)}$:

$$X^{(0)}=X^{(s)}+f^{(s)}(X^{(s)}). \tag{5.06}$$

К формуле (5.06) мы приходим, исключая последовательно промежуточные переменные $X^{(1)}, \ldots, X^{(s-1)}$:

$$X^{(0)}=X^{(1)}+\bar{f}^{(1)}(X^{(1)})=X^{(2)}+\bar{f}^{(2)}(X^{(2)})+\\ +\bar{f}^{(1)}[X^{(2)}+\bar{f}^{(2)}(X^{(2)})]=\ldots.$$

Аналогичные формулы получим для перехода от $X^{(0)}$ к $X^{(s)}$:

$$\begin{gathered} X^{(1)}=X^{(0)}+\bar{\varphi}^{(1)}(X^{(0)}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X^{(s)}=X^{(s-1)}+\bar{\varphi}^{(s)}(X^{(s-1)}) \end{gathered} \tag{5.07}$$

или

$$X^{(s)}=X^{(0)}+\varphi^{(s)}(X^{(0)}). \tag{5.08}$$

Из самого смысла канонических преобразований вытекает, что если $X^{(0)}(t)$ есть решение исходной системы (5.01_0) при начальном условии $X^{(0)}(0)=X_0^{(0)}$, то функция $X^{(s)}(t)$, определяемая формулой (5.08), есть решение системы (5.01_s) при начальном условии

$$X^{(s)}(0)=X_0^{(0)}+\varphi^{(s)}(X_0^{(0)}).$$

Наоборот, если $X^{(s)}(t)$ есть решение системы (5.01_s) при начальном условии $X^{(s)}(0)=X_0^{(s)}$, то функция $X^{(0)}(t)$, определяемая формулой (5.06), есть решение исходной системы (5.01_s) при начальном условии

$$X^{(0)}(0)=X_0^{(s)}+f^{(s)}(X_0^{(s)}).$$

Для записи всех этих формул удобно применить операторные обозначения, а именно, представим, как это мы делали выше, каждое каноническое преобразование $X^{(j-1)}\to X^j$ как отображение $X^{(j-1)}=B_sX^{(j)}$. Тогда (5.05) представится последовательностью отображений:

$$X^{(0)}=B_1X^{(1)}, \ldots, X^{(s-1)}=B_sX^{(s)}. \qquad (5.09)$$

Эту последовательность отображений можно рассматривать также как результат применения к $X^{(s)}$ произведения операторов $B_1, \ldots, B_s$, которое обозначим через S_s. Тогда можно рассматривать (5.06) как отображение

$$X^{(0)}=S_sX^{(s)}, \qquad (5.10)$$

где $S_s=B_1, \ldots, B_s$.

Аналогичным образом представим переход от $X^{(0)}$ к $X^{(s)}$ в виде последовательности отображений:

$$X^{(1)}=B_1^{-1}X^{(0)}, \ldots, X^{(s)}=B_s^{-1}X^{(s-1)} \qquad (5.11)$$

или в виде отображения

$$X^{(s)}=S_s^{-1}X^{(0)}, \qquad (5.12)$$

где $S_s^{-1}=B_s^{-1}B_{s-1}^{-1}\ldots B_1^{-1}$ — оператор, обратный к S_s.

§ 5.2. Схема доказательства

Схема дальнейшего анализа следующая:

1) Доказывается, что каждая из областей $F^{(s)}$ не оказывается пустой и что существует такая не пустая «предельная» область $F^\infty=\prod\limits_{s\geqslant 0} F^{(s)}$ *), точки которой принадлежат одновременно всем областям $F^{(s)}$, $s\geqslant 0$. При этом

*) Через $\prod\limits_{s\geqslant 0} F^{(s)}$ обозначается пересечение всех областей $F^{(s)}$ $s\geqslant 0$.

меры (по Лебегу) области F^∞ и исходной области $F^{(0)}$ (точнее их вещественных компонент) тем меньше отличаются друг от друга, чем меньше число M в исходной оценке (4.03).

Такое доказательство необходимо, ибо, если какая-либо область $F^{(s)}$ оказалась бы пустой, то тогда нельзя было бы утверждать о существовании точек $X^{(s)}$, для которых выполняются оценки (4.24), (4.26) для $H_1^{(s)}$. Если бы оказалась пустой «предельная» область F^∞, то это означало бы, что использование оценок (4.24), (4.26) в пределе при $s \to \infty$ является незаконным.

2) При условии, что вещественные компоненты всех областей $F^{(s)}$, F^∞ не пустые, легко доказывается существование «предельной» системы уравнений (5.01_s^*) или (5.01_s) при $s \to \infty$, которую обозначим через (5.01_∞^*) или (5.01_∞). Если переменные этой системы обозначить через $X^\infty(P^\infty, Q^\infty)$, то она запишется в виде:

$$\dot{P}^\infty = 0, \quad \dot{Q}^\infty = \frac{\partial H_0^\infty}{\partial P^\infty} \tag{5.01_∞^*}$$

или

$$\dot{X}^\infty = Y^\infty(X^\infty), \tag{5.01_∞}$$

где

$$Y^\infty = \left(0, \ \frac{\partial H_0^\infty}{\partial P^\infty}\right).$$

Решение этой системы получим сразу в виде

$$P^\infty = P_0^\infty = \text{const}, \ Q^\infty = Q_0^\infty + \omega^\infty t, \tag{5.13}$$

где

$$\omega^\infty = \frac{\partial H_0^\infty}{\partial P^\infty}\bigg|_{P^\infty = P_0^\infty}.$$

Если P_0^∞, Q_0^∞ — вещественные и принадлежат области $\operatorname{Re} F^\infty$, то решение (5.13) «предельной» системы остается, как нетрудно установить, при любых t в F^∞.

3) Как следует из изложенного выше, переход от исходной переменной $X^{(0)}$ к «предельной» переменной X^∞ осуществляется с помощью бесконечной последовательности отображений:

$$X^{(1)} = B_1^{-1} X^{(0)}, \ldots, \ X^{(s)} = B_s^{-1} X^{(s-1)}, \ldots$$

или же с помощью предела

$$X^{\infty}=\lim_{s\to\infty} S_s^{-1}X^{(0)},$$

где $S_s^{-1}=B_s^{-1}B_{s-1}^{-1}\ldots B_1^{-1}$.

Возникает вопрос о том, каким образом можно «перейти» от «предельной» переменной X^{∞} к исходной переменной $X^{(0)}$. Показывается, что можно рассматривать $X^{(0)}$ как предел последовательности отображений S_sX^{∞} $(s=1, 2, 3, \ldots)$, где $S_s=B_1, \ldots, B_s$, т. е.

$$X^{(0)}=\lim_{s\to\infty} S_sX^{\infty}. \tag{5.14}$$

Далее устанавливается, что если $X^{\infty}(t)$ есть решение «предельной» системы (5.01^*_{∞}), то функция

$$X^{(0)}(t)=\lim_{s\to\infty} S_sX^{\infty}(t) \tag{5.15}$$

представляет условно-периодическое решение исходной системы (5.01^*_0).

Вместе с тем показывается, что область F^{∞} отображается с помощью (5.14) на некоторую подобласть $F^{(0)}_*$ исходной области $F^{(0)}$. При этом мера $\mathrm{Re}F^{(0)}_*$ не меньше меры $\mathrm{Re}F^{\infty}$. Отсюда вытекает следующее:

Пусть задана в начальный момент точка $X^{(0)}(0)\in \mathrm{Re}\,F^{(0)}_*$. Ей соответствует тогда точка $X^{\infty}(0)=\lim\limits_{s\to\infty} S_s^{-1}X^{(0)}(0)$, принадлежащая области $\mathrm{Re}F^{\infty}$. Решение «предельной» системы $X^{\infty}(t)$ при начальном значении $X^{\infty}(0)$ остается на всей оси t в $\mathrm{Re}\,F^{\infty}$. Соответствующие же точки $X^{(0)}(t)=$ $=\lim\limits_{s\to\infty} S_sX^{\infty}(t)$ остаются на всей оси t в $\mathrm{Re}\,F^{(0)}_*$, и функция $X^{(0)}(t)$ представит условно-периодическое решение исходной системы (5.01_s) при начальном значении $X^{(0)}(0)$.

4) После того как будет доказано существование условно-периодических решений исходной системы, можно обосновать метод приближенного построения этих решений. А именно, можно использовать «упрощенные» системы (5.04), имеющие очевидное решение:

$$\widetilde{P}^{(s)}=P_0^{(s)}=\mathrm{const}, \quad \widetilde{Q}^{(s)}=Q_0^{(s)}+\omega^{(s)}(t), \tag{5.16}$$

где

$$\omega^{(s)} = \left[\frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial \widetilde{P}^{(s)}}\right]_{\widetilde{P}^{(s)} = P_0^{(s)}}.$$

Если $P_0^{(0)}$, $Q_0^{(0)}$ — начальные значения переменных $P^{(0)}$, $Q^{(0)}$ исходной системы, то $P_0^{(s)}$, $Q_0^{(s)}$ находятся, например, согласно (5.12).

Функция

$$\widetilde{X}_s^{(0)}(t) = S_s \widetilde{X}^{(s)}(t), \tag{5.17}$$

где $\widetilde{X}^{(s)}(t) = (\widetilde{P}((^{s)}(t), \widetilde{Q}^{(s)}(t))$ есть решение «упрощенной» системы, будет условно-периодической и она представит приближенное решение исходной системы при начальных значениях $P_0^{(0)}$, $Q_0^{(0)}$. Можно показать, что для любых t при $s \to \infty$

$$\widetilde{X}_s^{(0)}(t) - X^{(0)}(t) \to 0,$$

где $X^{(0)}(t)$ — точное условно-периодическое решение исходной системы при этих же начальных значениях, если только точка $\left(P_0^{(0)}, Q_0^{(0)}\right)$ принадлежит области $\operatorname{Re} F_*^{(0)}$.

ГЛАВА VI

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕПУСТОТЫ ПРЕДЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

§ 6.1. Схема построения последовательности областей $G^{(s)}$

Прежде всего заметим, что любая область $F^{(s)}(P \in G^{(s)}, |\operatorname{Im} Q^{(s)}| < \varrho_s)$ представляет собой произведение области $G^{(s)}$ переменной $P^{(s)}$ на область $U^{(s)}$ переменной $Q^{(s)}$, определяемую неравенством $|\operatorname{Im} Q^{(s)}| \leqslant \varrho_s$, т. е. $F^{(s)} = G^{(s)} \times U^{(s)}$. «Предельная» область F^{∞} есть произведение соответствующих «предельных» областей G^{∞} и U^{∞}. Последняя определяется неравенством $|\operatorname{Im} Q^{\infty}| \leqslant \varrho_{\infty}$, и так как $\varrho_{\infty} > \frac{1}{3}\varrho_0$ (см. § 4.2), то U^{∞} — не пустая область. Остается доказать непустоту области G^{∞}. При этом нас интересует только вещественная компонента $\operatorname{Re} G^{\infty}$ области G^{∞}. Ниже мы будем встречаться с различными областями $G^{(s)}$, $\Omega^{(s)}$ $(s=0, 1, 2, \ldots)$ и др., вообще комплексными. Все выводимые оценки будут относиться к лебеговой мере именно вещественных компонент этих областей. Другими словами, в этой главе под лебеговой мерой $\operatorname{mes} V$, где V — любая область, понимается $\operatorname{mes} \operatorname{Re} V$.

Рассмотрим последовательность областей $G^{(0)}$, $G^{(1)}$, $G^{(2)}, \ldots$ переменных $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, $P^{(2)}, \ldots$ соответственно. Нас интересуют именно относительные «размеры» этих областей и поэтому несущественны обозначения переменных, так что мы можем рассматривать все $G^{(s)}$ $(s=0, 1, 2, \ldots)$ как области значений одной и той же переменной p, а все гамильтонианы $H^{(s)}$ как функции переменных p, q.

Как следует из изложенного выше, схема построения этих областей такова:

Область $G^{(0)}$, в которой рассматривается гамильтониан $H^{(0)}(p, q) = H_0^{(0)}(p) + H_1^{(0)}(p, q)$ исходной системы, считается заданной. Пусть это — выпуклая область, например, сфера. В области $F^{(0)}\left(p \in G^{(0)}, |\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho\right)$ функция $H^{(0)}$, по предположению, аналитична и (см. § 4.1) $|H_1^{(0)}| \leqslant M = \delta^T$, где $T \geqslant (4n+12)/(1-\alpha)$. Следовательно, «вековая» часть $\overline{H}_1^{(0)}(p)$ функции $H_1^{(0)}(p, q)$

удовлетворяет при $p \in G^{(0)}$ этой же оценке

$$|\overline{H}_1^{(0)}(p)| \leqslant M = \delta^T, \tag{6.01}$$

причем $H_0^{(0)}(p)$ и $\overline{H}_1^{(0)}(p)$ суть аналитические функции p. Кроме того, предполагалось (см. 1.06)), что

$$\det \frac{\partial^2 H_0^{(0)}}{\partial p^2} \neq 0. \tag{6.02}$$

Выделяем в $G^{(0)}$ такие точки p, в которых удовлетворяется неравенство

$$\left|\left(k, \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial p}\right)\right| \geqslant K \|k\|^{-n-1}, \quad 0 < \|k\| < N, \tag{6.03}$$

где $H_0^{(1)}(p) = H_0^{(0)}(p) + \overline{H}_1^{(0)}(p)$, $K = \delta^2$, а, число N такое, что

$$N \geqslant \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{M},$$

причем $\gamma = \delta^m$, $0 < m < 1$ (см. § 4.2). Совокупность таких точек составит некоторую подобласть $G_{KN}^{(0)}$ области $G^{(0)}$, а область $G^{(1)}$ определяется как $G_{KN}^{(0)} - 3\beta$, $\beta = \delta^3$.

В области $G^{(1)}$ рассматривается гамильтониан $H^{(1)}(p, q) = H_0^{(1)}(p) + H_1^{(1)}(p, q)$ системы (5.01$_1^*$). В области $F^{(1)}(p \in G^{(1)}, |\operatorname{Im} q| \leqslant \varrho_1)$ функция $H^{(1)}(p, q)$ аналитична и $|H_1^{(1)}| < M_1 = \delta_1^T \leqslant \delta^{(1+\alpha)T}$. Следовательно, «вековая» часть $\overline{H}_1^{(1)}(p)$ функции $H_1^{(1)}(p, q)$ удовлетворяет при $p \in G^{(1)}$ оценке, аналогичной (6.01),

$$|\overline{H}_1^{(1)}(p)| < M_1 = \delta_1^T \leqslant \delta^{(1+\alpha)T}, \tag{6.04}$$

а $H_0^{(1)}(p)$ и $\overline{H}_1^{(1)}(p)$ суть аналитические функции p. Совокупность точек p области $G^{(1)}$, для которых

$$\left|\left(k, \frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial P}\right)\right| \geqslant K_1 \|k\|^{-n-1}, \quad 0 < \|k\| < N_1, \tag{6.05}$$

где

$$H_0^{(2)}(p) = H_0^{(1)}(p) + \overline{H}_1^{(1)}(p), \quad K_1 = \delta_1^2,$$

$$N_1 \geqslant \frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{1}{M_1}, \quad \gamma_1 = \delta_1^m, \quad 0 < m < 1,$$

составит область $G^{(1)}_{K_1 N_1}$. Область $G^{(2)}$ равна $G^{(1)}_{K_1 N_1} - 3\beta_1$, $\beta_1 = \delta_1^3$. Точно так же строятся все другие области

$$G^{(3)},\ G^{(4)}, \ldots$$

§ 6.2. Оценка для mes $(G^{(0)} \setminus G^{(1)})$

Сопоставим друг с другом области $G^{(0)}$ и $G^{(1)}$. С этой целью положим

$$\omega = \frac{\partial H_0^{(0)}(p)}{\partial p}$$

и будем рассматривать это равенство как функциональную зависимость $\omega = f^{(0)}(p)$ между переменными ω и p или же как отображение

$$\omega = A^{(0)} p, \tag{6.06}$$

заданное в области $p \in G^{(0)}$. Так как $H_0^{(0)}(p)$ — аналитическая функция p, то это отображение является непрерывно дифференцируемым в области $G^{(0)}$. Кроме того, согласно (6.02)

$$\det \frac{\partial A^{(0)}}{\partial p} \equiv \det \frac{\partial^2 H_0^{(0)}}{\partial p^2} \neq 0. \tag{6.07}$$

Мы предполагали, что исходная область $G^{(0)}$ определяется согласно (1.03). Эта область, представляющая собой n-мерную сферу радиуса g с центром в точке $(a_1, \ldots, a_n)$, является выпуклой. Из леммы 13 гл. II тогда следует, что отображение (6.06) диффеоморфно. Таким образом, область $G^{(0)}$ переменной p отображается с помощью отображения (6.06) диффеоморфно на некоторую область $\Omega^{(0)}$ переменной ω.

При этом согласно леммам 11, 15 гл. II найдутся такие числа $\theta > 0$, $\Theta > 0$, что

$$\theta \| dp \| \leqslant \| dA^{(0)} \| \leqslant \Theta \| dp \| \text{*)} \tag{6.08}$$

---

*) Эти оценки относятся как к областям $G^{(0)}$, $\Omega^{(0)}$ в целом, так и к любым их подобластям, взаимно однозначно отображаемым друг на друга. Здесь и ниже мы будем рассматривать эти оценки, а также другие аналогичные оценки, как относящиеся к вещественным компонентам соответствующих областей.

(здесь Θ — то же самое число, что и в оценке (4.03)) и

$$\theta^n \operatorname{mes} G^{(0)} \leqslant \operatorname{mes} \Omega^{(0)} \leqslant \Theta^n \operatorname{mes} G^{(0)}). \qquad (6.09)$$

Заметим, что области $G^{(0)}$ и $\Omega^{(0)}$ имеют обычную геометрическую природу, так что понятие меры для них совпадает с понятием n-мерного объема.

Выделим далее в $\Omega^{(0)}$ такие точки ω, где удовлетворяется неравенство, получающееся из (6.03) после замены $\dfrac{\partial H_0^{(1)}}{\partial p}$ на ω

$$|(k, \omega)| \geqslant K \|k\|^{-n-1}, \quad 0 < \|k\| < N, \quad K = \delta^2. \qquad (6.10)$$

Совокупность таких точек составляет некоторую подобласть области $\Omega^{(0)}$. Обозначим ее через $\Omega_{KN}^{(0)}$.

Рассмотрим далее равенство

$$\omega = \frac{\partial H_0^{(1)}(p)}{\partial p},$$

которое будем интерпретировать как функциональную зависимость $\omega = f^{(1)}(p)$ или как отображение

$$\omega = A^{(1)} p. \qquad (6.11)$$

Область $G_{KN}^{(0)}$ можно рассматривать тогда, как состоящую из точек p, отображающихся с помощью (6.11) в точки ω области $\Omega_{KN}^{(0)}$, ибо именно такие точки p удовлетворяют неравенству (6.03).

Таким образом, если задана область $G^{(0)}$, то область $G_{KN}^{(0)}$ (а также область $G^{(1)} = G_{KN}^{(0)} - 3\beta_0$) определяется с помощью двух вспомогательных областей $\Omega^{(0)}$, $\Omega_{KN}^{(0)}$ переменной ω. А именно, сначала определяется $\Omega^{(0)}$ как отображение (6.06) области $G^{(0)}$, т. е. $\Omega^{(0)} = A^{(0)} G^{(0)}$. Затем определяется $\Omega_{KN}^{(0)}$ как подобласть $\Omega^{(0)}$, в которой удовлетворяется неравенство (6.10). После этого $G_{KN}^{(0)}$ определяется как область, которая отображается с помощью оператора $A^{(1)}$ в область $\Omega_{KN}^{(0)}$, т. е. $\Omega_{KN}^{(0)} = A^{(1)} G_{KN}^{(0)}$.

Для того чтобы мы могли сопоставить «размеры» областей $G^{(0)}$ и $G^{(1)}$, необходимо проанализировать сначала свойства отображения (6.11).

Поскольку $H_0^{(1)}=H_0^{(0)}+\overline{H}_1^{(0)}$, то $A^{(1)}p$ можно представить в виде

$$A^{(1)}p=A^{(0)}p+\Delta^{(0)}p,$$

где $\Delta^{(0)}=\frac{\partial\overline{H}_1^{(0)}}{\partial p}$ также рассматривается как оператор. Так как $\overline{H}_1^{(0)}$—аналитическая функция, то этот оператор непрерывно дифференцируем. Кроме того, при $p\in G^{(0)}$ имеет место для $\overline{H}_1^{(0)}$ оценка (6.01). Следовательно, согласно леммам 5, 5* гл. II имеют место для производных этой функции при $p\in G^{(0)}-\beta$ оценки

$$\left\|\frac{\partial\overline{H}_1^{(0)}}{\partial p}\right\|\leqslant\frac{M}{\beta}=\frac{\delta^T}{\beta}=\delta^{T-3}<\beta,$$

$$\max\left|\frac{\partial^2\overline{H}_1^{(0)}}{\partial p_i\partial p_j}\right|\leqslant\frac{2M}{\beta^2}=2\delta^{T-6}.$$

Эти неравенства в применении к оператору $\Delta^{(0)}$ запишутся в виде

$$\|\Delta^{(0)}p\|<\beta,\quad\left\|\frac{\partial\Delta^{(0)}}{\partial p}\right\|\leqslant 2n\delta^{T-6}.$$

Отсюда следует, что $\|d\Delta^{(0)}\|\leqslant 2n\delta^{T-6}\|dp\|$.

Если δ удовлетворяет неравенству $2n\delta<1$ (а это справедливо в силу (3.53)) и

$$\delta^{T-8}<\theta,\tag{6.12}$$

(это еще одно ограничение на δ, которое надо добавить к (3.53), (4.19*), (4.21)), то неравенство для $d\Delta^{(0)}$ перепишется в виде

$$\|d\Delta^{(0)}\|<\delta\theta\|dp\|.$$

Таким образом, имеем:

1) Отображение $\omega=A^{(0)}p$ отображает диффеоморфно область $G^{(0)}$ на область $\Omega^{(0)}$ и при этом

$$\theta\|dp\|\leqslant\|dA^{(0)}\|\leqslant\Theta\|dp\|.\tag{6.13}$$

2) Отображение $\omega = A^{(1)}p = A^{(0)}p + \Delta^0 p$ непрерывно дифференцируемо и при $p \in G^{(0)} - \beta$

$$\|\Delta^{(0)}p\| < \beta, \quad \|d\Delta^{(0)}\| < \delta\theta \|dp\|. \tag{6.14}$$

3) Дана подобласть $\Omega_{KN}^{(0)}$ области $\Omega^{(0)}$, причем $\Omega_{KN}^{(0)} = A^{(0)}G_{KN}^{(0)}$.

Перечисленные свойства отображения совпадают с условиями леммы 17 гл. II. Применяя эту лемму, получим, что отображение $\omega = A^{(1)}p$ осуществляет диффеоморфную связь между областью

$$\Omega'_{KN} = \Omega_{KN}^{(0)} - \bar{d}, \quad \bar{d} = \beta\left(\Theta + \frac{2\Theta}{\theta} + 2\right)$$

и некоторой областью $G'_{KN} \subset G_{KN}^{(0)} - \beta$. Область G'_{KN} состоит таким образом из точек p, в которых справедливо неравенство (6.03), хотя и не исчерпывает всех точек исходной области $G^{(0)}$, в которых может выполняться это неравенство.

Кроме того, по этой лемме отображение $\omega = A^{(1)}p$ связывает диффеоморфно область

$$\Omega^{(1)} = \Omega'_{KN} - 6\beta\Theta = \Omega_{KN}^{(0)} - \bar{d} - 6\beta\Theta$$

и некоторую область $\bar{G}^{(1)} \subset G'_{KN} - 3\beta$, причем, поскольку $G'_{KN} \subset G_{KN}^{(0)}$ и $G^{(1)} = G_{KN}^{(0)} - 3\beta$, то $\bar{G}^{(1)} \subset G^{(1)}$. В этих областях удовлетворяются также неравенства

$$\theta(1-\delta)\|dp\| < \|dA^{(1)}\| \leqslant \Theta(1+\delta)\|dp\| \tag{6.15}$$

и

$$\operatorname{mes}(G^{(0)} \setminus \bar{G}^{(1)}) \leqslant \theta^{-n} \operatorname{mes}(\Omega^{(0)} \setminus \Omega^{(1)} - \beta). \tag{6.16}$$

Вместе с тем, так как $\bar{G}^{(1)} \subset G^{(1)}$, то

$$\operatorname{mes}(G^{(0)} \setminus G^{(1)}) < \operatorname{mes}(G^{(0)} \setminus \bar{G}^{(1)}). \tag{6.16*}$$

Формулы (6.16), (6.16*) и являются искомыми.

§ 6.3. Построение последовательности областей $\overline{G}^{(s)}$ и вывод оценки для mes $(\overline{G}^{(s)} \setminus \overline{G}^{(s+1)})$

Рассмотрим теперь область $\overline{G}^{(1)}$ и отображение $\omega = A^{(1)}p$, отображающее диффеоморфно $\overline{G}^{(1)}$ на $\Omega^{(1)}$, так что $\Omega^{(1)} = A^{(1)}\overline{G}^{(1)}$. Если обозначить $\theta_1 = (1-\delta)\theta$, $\Theta_1 = (1+\delta)\Theta$, то согласно (6.15) имеем для этого отображения неравенства

$$\theta_1 \| dp \| \leqslant \| dA^{(1)} \| \leqslant \Theta_1 \| dp \|.$$

Положим

$$\omega = \frac{\partial H_0^{(2)}(p)}{\partial p},$$

где $H_0^{(2)}(p)$ — невозмущенная часть гамильтониана $H^{(2)}$ и будем считать, что эта формула определяет отображение $\omega = A^{(2)}p$, заданное в области $p \in \overline{G}^{(1)}$. Мы имеем $H_0^{(2)} = H_0^{(1)}(p) + \overline{H}_1^{(1)}(p)$ и так как $\overline{G}^{(1)} \subset G^{(1)}$, то в области $\overline{G}^{(1)}$ функция $\overline{H}_1^{(1)}$ аналитична, и согласно (6.04)

$$| H_1^{(1)} | < M_1 = \delta_1^T \leqslant \delta^{(1+\alpha)T}.$$

Согласно леммам 5,5* гл. II имеем при $p \in \overline{G}^{(1)} - \beta_1$

$$\left\| \frac{\partial H^{(1)}}{\partial p} \right\| < \frac{M_1}{\beta_1} = \delta_1^{T-3} < \beta_1,$$

$$\max \left| \frac{\partial^2 \overline{H}_1^{(1)}}{\partial p_i \partial p_j} \right| < \frac{2M_1}{\beta_1^2} = 2\delta_1^{T-6}.$$

Поэтому $A^{(2)}p$ можно записать в виде

$$A^{(2)}p = A^{(1)}p + \Delta^{(1)}p,$$

где $\Delta_1 = \dfrac{\partial \overline{H}^{(1)}}{\partial p}$ — аналитический по p оператор, причем при $p \in G^{(1)} - \beta_1$ имеют место оценки

$$\| \Delta^{(1)} p \| < \beta_1, \quad \left\| \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial p} \right\| < 2n\delta_1^{T-6}$$

и

$$\| d\Delta^{(1)} \| < \delta_1 \theta_1 \| dp \|,$$

если $2n\delta_1^{T-6} < \delta_1\theta_1$, что выполняется в силу (6.12) и (4.12).

Выделим в $\Omega^{(1)}$ такую подобласть $\Omega^{(1)}_{K_1N_1}$, где

$$|(k,\ \omega)| \geqslant K_1\|k\|^{-n-1},\ 0<\|k\|<N_1,\ K_1=\delta_1^2. \tag{6.17}$$

Мы приходим опять к условиям, аналогичным тем, которые были выше сформулированы в отношении областей $G^{(0)}$, $\Omega^{(0)}$, $\Omega^{(0)}_{KN}$ и отображений $\omega=A^{(0)}p$, $\omega=A^{(1)}p$. А именно, мы имеем:

1) отображение $\omega=A^{(1)}p$ отображает диффеоморфно область $\overline{G}^{(1)}$ на область $\Omega^{(1)}$ и при этом

$$\theta_1\|dp\| \leqslant \|dA^{(1)}\| \leqslant \Theta_1\|dp\|; \tag{6.18}$$

2) отображение $\omega=A^{(2)}p=A^{(1)}p+\Delta^{(1)}p$ непрерывно дифференцируемо и при $p \in \overline{G}^{(1)}-\beta_1$

$$\|\Delta^{(1)}p\|<\beta_1,\quad \|d\Delta^{(1)}\|<\delta_1\theta_1\|dp\|; \tag{6.19}$$

3) дана подобласть $\Omega^{(1)}_{K_1N_1}$ области $\Omega^{(1)}$.

Мы опять пришли к условиям леммы 17 гл. II. Если $\Omega^{(1)}_{K_1N_1}=A^{(1)}\overline{G}^{(1)}_{K_1N_1}$ ($\overline{G}^{(1)}_{K_1N_1}$ является, естественно, подобластью $G^{(1)}_{K_1N_1}$), то по этой лемме получим, что отображение $\omega=A^{(2)}p$ осуществляет диффеоморфную связь между областью

$$\Omega'_{K_1N_1}=\Omega^{(1)}_{K_1N_1}-\overline{d}_1,\quad \overline{d}_1=\beta_1\left(\Theta_1+\frac{2\Theta_1}{\theta_1}+2\right)$$

и некоторой областью $\overline{G}'_{K_1N_1} \subset \overline{G}^{(1)}_{K_1N_1}-\beta_1$. Последняя состоит из точек p, для которых удовлетворяется неравенство (6.05), хотя и не исчерпывает, конечно, всех точек в $G^{(1)}$, в которых это неравенство может выполняться, так что $\overline{G}^{(1)}_{K_1N_1} \subset G^{(1)}_{K_1N_1}$.

Кроме того, по этой лемме отображение $\omega=A^{(2)}(p)$ связывает диффеоморфно область

$$\Omega^{(2)}=\Omega'_{K_1N_1}-6\beta_1\Theta_1=\Omega^{(1)}_{K_1N_1}-\overline{d}_1-6\beta_1\Theta_1$$

и некоторую область $\overline{G}^{(2)} \subset \overline{G}'_{K_1N_1}-3\beta_1$. В этих областях удовлетворяются неравенства

$$\theta_1(1-\delta_1)\|dp\| \leqslant \|dA^{(2)}\| \leqslant \Theta_1(1+\delta_1)\|dp\| \qquad (6.20)$$

и

$$\operatorname{mes}(\overline{G}^{(1)} \setminus \overline{G}^{(2)}) < \theta_1^{-n} \operatorname{mes}(\Omega^{(1)} \setminus \Omega^{(2)} - \beta_1). \qquad (6.21)$$

Так как $\overline{G}'_{K_1N_1} \subset G^{(1)}_{K_1N_1}$ и $G^{(2)} = G^{(1)}_{K_1N_1} - 3\beta_1$, то $\overline{G}^{(2)} \subset G^{(2)}$.

Рассматривая аналогичным образом области $G^{(2)}$ и $\Omega^{(2)} = A^{(2)}\overline{G}^{(2)}$, отображения $\omega = A^{(2)}p$, $\omega = A^{(3)}p\left(= \dfrac{\partial H_0^{(3)}}{\partial p}\right)$ и опять применяя лемму 17 гл. II, придем к областям

$$\Omega^{(3)} = \Omega^{(2)}_{K_2N_2} - \overline{d}_2 - 6\beta_2\Theta_2, \quad \overline{d}_2 = \beta_2\left(\Theta_2 + \frac{2\Theta_2}{\theta_2} + 2\right)$$

и $\overline{G}^{(3)} \subset G^{(3)}$, а также к неравенствам, аналогичным (6.20), (6.21) и т. д.

Таким образом, наряду с последовательностью областей $G^{(0)}, G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots$ мы получим последовательность областей $\overline{G}^{(0)}, \overline{G}^{(1)}, \ldots$, для которых $\overline{G}^{(s)} \subset G^{(s)}$, $s \geqslant 1$. При этом

$$\operatorname{mes}(\overline{G}^{(s)} \setminus \overline{G}^{(s+1)}) \leqslant \theta_s^{-n} \operatorname{mes}(\Omega^{(s)} \setminus \Omega^{(s+1)} - \beta_s), \qquad (6.22)$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots), \quad \overline{G}^{(0)} = G^{(0)},$$

где $\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \ldots$ — вспомогательные области переменной ω такие, что

$$\Omega^{(s+1)} = \Omega^{(s)}_{K_sN_s} - d_s, \quad d_s = \overline{d}_s + 6\beta_s\Theta_s = \beta_s\left(7\Theta_s + \frac{2\Theta_s}{\theta_s} + 2\right), \qquad (6.23)$$

а $\Omega^{(s)}_{K_sN_s}$ есть подобласть $\Omega^{(s)}$, в которой

$$|(k, \omega)| \geqslant K_s\|k\|^{-n-1}, \quad 0 < \|k\| < N_s,$$
$$K_s = \delta_s^2 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (6.24)$$

§ 6.4. Оценка для mes $(G^{(0)} \setminus G^{(k)})$

Мы будем оценивать «размеры» области $G^{(0)} \setminus G^{(k)}$ при любом $k \geqslant 1$. Очевидно, что

$$\operatorname{mes}(G^{(0)} \setminus G^{(k)}) < \operatorname{mes}(G^{(0)} \setminus \overline{G}^{(k)})$$

а так как

$$G^{(0)}\setminus\overline{G}^{(k)}=(G^{(0)}\setminus\overline{G}^{(1)})+(\overline{G}^{(1)}\setminus\overline{G}^{(2)})+\ldots+(\overline{G}^{(k-1)}\setminus\overline{G}^{(k)}),$$

то

$$\operatorname{mes}(G^{(0)}\setminus G^{(k)})<\sum_{s=0}^{k-1}\operatorname{mes}(\overline{G}^{(s)}\setminus\overline{G}^{(s+1)}),\quad \overline{G}^{(0)}=G^{(0)},$$

и в соответствии с (6.22), (6.23)

$$\operatorname{mes}(G^{(0)}\setminus G^{(k)})<\sum_{s=0}^{k-1}\theta_s^{-n}\operatorname{mes}(\Omega^{(s)}\setminus\Omega^{(s+1)}-\beta_s). \qquad (6.25)$$

Оценим $\theta_s=\theta_0(1-\delta_0)(1-\delta_1)\ldots(1-\delta_{s-1})$, исходя из того, что бесконечное произведение $\prod\limits_0^\infty(1-\delta_k)$ сходится к e^{-L}, если ряд $\sum\limits_0^\infty\ln(1-\delta_k)$ сходится к $-L$. При $k>0$ имеем

$$\ln(1-\delta_k)=-\left(\delta_k+\frac{\delta_k^2}{2}+\frac{\delta_k^3}{3}+\ldots\right)>-\frac{\delta_k}{1-\delta_k}>-\frac{\delta_k}{1-\delta_0}.$$

Следовательно (см. § 4.2),

$$\sum_0^\infty\ln(1-\delta_k)>-\frac{1}{1-\delta}(\delta+\delta_1+\ldots)>-\frac{2\delta}{1-\delta},\quad \delta_0=\delta$$

и

$$\prod_0^\infty(1-\delta_k)>e^{-2\delta/(1-\delta)}>e^{-2/7}>\frac{1}{2},$$

так как $\delta<1/8$. Тогда при любом $s\geqslant1$ будем иметь

$$\theta_s>\theta_0/2,\quad \theta_0=\theta.$$

Таким образом, неравенство (6.25) можно заменить следующим:

$$\operatorname{mes}(G^{(0)}\setminus G^{(k)})<\left(\frac{\theta}{2}\right)^{-n}\sum_{s=0}^{k-1}\operatorname{mes}(\Omega^{(s)}\setminus\Omega^{(s+1)}-\beta_s). \qquad (6.26)$$

Оно позволяет свести анализ областей $G^{(s)}$ к анализу областей $\Omega^{(s)}$, $s\geqslant0$.

§ 6.5. Схема построения вспомогательных областей $\Omega^{(s)}$

Переходя к областям $\Omega^{(s)}$, остановимся еще раз на их определении, соответствующем формуле (6.23). Область $\Omega^{(0)}$ есть отображение $\Omega^{(0)}=A^{(0)}G^{(0)}$ исходной области $G^{(0)}$, предполагавшейся выпуклой. Тогда $\Omega^{(0)}$ будет представлять собой связную область в пространстве переменной ω, ограниченную некоторой замкнутой кусочно-гладкой поверхностью (гладкость гарантируется в силу непрерывной дифференцируемости отображения). При этом имеют место неравенства (6.09):

$$\theta^n \operatorname{mes} G^{(0)} \leqslant \operatorname{mes} \Omega^{(0)} \leqslant \Theta^n \operatorname{mes} G^{(0)}, \qquad (6.27)$$

где θ, Θ — некоторые положительные числа. (Области $G^{(0)}, \Omega^{(0)}$ имеют обычную геометрическую природу и обладают объемом, так что применение понятия меры служит лишь для удобства сравнения их с предельными областями G^{∞}, Ω^{∞}.)

Область $\Omega^{(0)}_{KN}$ получается из $\Omega^{(0)}$, если мы исключим из последней области точки, для которых

$$|(k,\ \omega)| < K\|k\|^{-n-1}, \quad 0 < \|k\| < N, \quad K = \delta^2,$$

и совокупность которых образует так называемые *«резонансные зоны»*.

Область $\Omega^{(1)} = \Omega^{(0)}_{KN} - d$ получается из $\Omega^{(0)}$, если мы исключим из $\Omega^{(0)}$ не только «резонансные зоны», но дополнительно также d-окрестность каждой «резонансной зоны», а также d-окрестность граничной поверхности.

Область $\Omega^{(1)}_{K_1N_1}$ получится из $\Omega^{(1)}$, если мы исключим из последней «резонансные зоны», в которых

$$|(k,\ \omega)| < K\|k\|^{-n-1}, \; 0 < \|k\| < N_1, \; K_1 = \delta_1^2.$$

Так как в $\Omega^{(1)}$ «резонансные зоны» с $0<\|k\|<N$ уже отсутствуют (ранее исключены), то достаточно исключить «резонансные зоны» с $N \leqslant \|k\| < N_1$.

Область $\Omega^{(2)} = \Omega^{(1)}_{K_1N_1} - d_1$ получается из $\Omega^{(1)}$, если, кроме «резонансных зон», мы исключим из $\Omega^{(1)}$ также d_1-окрестность каждой такой зоны и d_1-окрестность граничной поверхности.

Аналогичным образом получим $\Omega^{(3)}$ из $\Omega^{(2)}$, если исключим из $\Omega^{(2)}$ «резонансные зоны» с $N_1 \leqslant \|k\| < N_2$ и d_2-окрестности каждой такой зоны вместе с d_2-окрестностью граничной поверхности и т. д.

Таков принцип построения областей $\Omega^{(s)}$, $s>0$.

§ 6.6. Лемма о лебеговой мере множества несоизмеримых между собой чисел

Перед более подробным анализом структуры областей $\Omega^{(s)}$, $s>0$ познакомимся сначала с одной леммой о мере множества несоизмеримых между собой чисел.

Если k — вектор с целочисленными компонентами $k_i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а ω — вектор с компонентами $\omega_1, \ldots, \omega_n$, то, как известно из теории вещественных чисел [21], величина

$$(k, \omega) = k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n$$

при любых вещественных $\omega_1, \ldots, \omega_n$ может принимать сколько угодно малое по модулю значение при соответствующем выборе вектора k. Вместе с тем также известно [22], что почти для всех $\omega_1, \ldots, \omega_n$, за исключением множества лебеговой меры нуль, имеем $(k, \omega) \neq \neq 0$. Этот результат уточняется следующей леммой:

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве векторной переменной $\omega = (\omega_1 \ldots, \omega_n)$ дана область Ω, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью Σ. Тогда, если обозначить через $\overline{\Omega}$ множество вещественных точек ω области Ω, для которых

$$|(k, \omega)| < K \|k\|^{-n-1}, \tag{6.28}$$

где K — некоторое фиксированное (и малое по сравнению с единицей) число, то $\overline{\Omega}$ составляет малую часть (в смысле меры Лебега) множества всех вещественных точек, принадлежащих Ω, т. е.

$$\operatorname{mes} \overline{\Omega} < \chi \operatorname{mes} \Omega\ ^{*}), \tag{6.29}$$

где постоянная χ пропорциональна K.

---

*) Напомним, что в этой главе мы отождествляем всюду $\operatorname{mes} V$ с $\operatorname{mes} \operatorname{Re} V$ для любой области V.

Эта лемма не используется непосредственно в дальнейшем, но она позволяет лучше понять получаемые ниже результаты.

Доказательство. Рассмотрим для простоты сначала двумерный случай, когда $(k, \omega)=k_1\omega_1+k_2\omega_2$, а область Ω есть область на декартовой плоскости (ω_1, ω_2), ограниченная кусочно-гладкой кривой L. Очевидно, что неравенство

$$|k_1\omega_1+k_2\omega_2|<a, \tag{6.30}$$

где a — фиксированная малая постоянная, удовлетворяется внутри полосы Γ, которая заключена между двумя прямыми

$$k_1\omega_1+k_2\omega_2=a, \quad k_1\omega_1+k_2\omega_2=-a. \tag{6.30*}$$

Расстояние h между этими прямыми (т. е. ширина полосы Γ) определяется по формуле аналитической геометрии

$$h=\frac{2a}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}} \tag{6.31}$$

и при $\|k\|=|k_1|+|k_2|=m\geqslant 1$ не превышает $2a/\sqrt{m}$. Часть полосы Γ, лежащую внутри Ω (рис. 6), т. е. общую часть областей Ω и Γ, обозначим через Γ_Ω (согласно принятым в теории множеств обозначениям $\Gamma_\Omega=\Omega\cap\Gamma$) и назовем *«резонансной зоной»*. Очевидно, что мера Γ_Ω (совпадающая с площадью) не превышает $h\delta_0$, где δ_0 — наибольший диаметр области Ω. Более грубая оценка

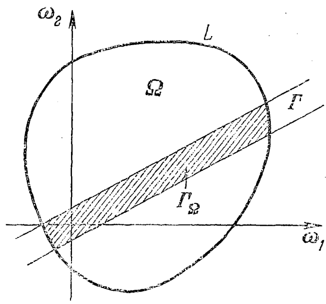

Рис. 6.

$$\text{mes } \Gamma_\Omega<hl, \tag{6.32}$$

где l — длина всей кривой L, ограничивающей область Ω, и h — ширина полосы Γ. Если обозначить через D отношение l к площади области Ω и учесть, что площадь совпадает в данном случае с мерой, то (6.32) перепишется в виде

$$\text{mes}\,\Gamma_\Omega<hD\,\text{mes}\,\Omega, \tag{6.33}$$

где $h\leqslant 2a\sqrt{m}$.

Рассмотрим теперь неравенство

$$|k_1\omega_1+k_2\omega_2|<K\|k\|^{-3}, \tag{6.34}$$

где $\|k\|$ равно целому числу $m\geqslant 1$. Нетрудно подсчитать (см. лемму 3, гл. II), что найдется 2^2m различных комбинаций целых чисел k_1 и k_2, удовлетворяющих уравнению $|k_1|+|k_2|=m$. Другими словами, при $\|k\|=m$ имеется 2^2m полос $\Gamma^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, 2^2m)$, заключенных между прямыми

$$k_1\omega_1+k_2\omega_2=a, \quad k_1\omega_1+k_2\omega_2=-a,$$

где $a=-Km^{-3}$, причем внутри этих полос удовлетворяется неравенство (6.34). Каждая из полос $\Gamma^{(i)}$ вырезает из Ω «резонансную зону» $\Gamma_\Omega^{(i)}=\Omega\cap\Gamma^{(i)}$ и согласно (6.33)

$$\operatorname{mes}\Gamma_\Omega^{(i)}<\frac{2Km^{-3}}{\sqrt{m}}D\operatorname{mes}\Omega. \tag{6.35}$$

Для всех же $\Gamma_\Omega^{(i)}$, число которых равно 2^2m, получим

$$\sum_{i=1}^{2^2m}\operatorname{mes}\Gamma_\Omega^{(i)}<\frac{2^3K}{m^2\sqrt{m}}D\operatorname{mes}\Omega. \tag{6.36}$$

Рассмотрим теперь совокупность всех полос $\Gamma^{(i)}$ при всевозможных $\|k\|=1, 2, 3, \ldots$ Здесь существенно отметить, что если при любом конечном $\|k\|$ мы имеем дело с конечным числом геометрических полос, вырезающих из Ω «резонансные зоны», то при переходе к пределу ($\|k\|\to\infty$) геометрическая интерпретация «резонансных зон» (их количество неограниченно возрастает, а их ширина стремится к нулю) становится затруднительной. Действительно, если $\|k\|\to\infty$, то целые числа k_1 и k_2 могут быть сколько угодно большими по абсолютной величине. Тогда при любых рациональных числах ω_1 и ω_2 найдутся такие целые числа k_1 и k_2, что $k_1\omega_1+k_2\omega_2=0$. Следовательно, в сколько угодно близкой окрестности любой вещественной точки $\omega=(\omega_1, \omega_2)$ области Ω найдутся другие точки, в которых при соответствующих k_1 и k_2 неравенство (6.34) удовлетворяется. Внутри Ω нельзя выделить геометрические подобласти, одни из которых состоят только из точек, удовлетворяющих (6.34), а другие из точек, не удовлетворяющих (6.34) при любых k_1

и k_2, точно так же, как, например, нельзя выделить из числовой прямой промежутки, состоящие целиком из рациональных или из иррациональных точек. Поэтому можно говорить лишь о множестве точек области Ω, в которых удовлетворяется или не удовлетворяется (6.34) при любых k_1, k_2 и о мере (в смысле Лебега) этих множеств. По этой причине мы с самого начала говорили о мере полос Γ и «резонансных зон», а не просто об их площади.

Суммарную меру всех «резонансных зон» $\Gamma_\Omega^{(l)}$ при $0<\|k\|<\infty$, т. е. меру множества $\overline{\Omega}_0$ получим, суммируя левую и правую части неравенства (6.36) по m от 1 до ∞:

$$\operatorname{mes}\overline{\Omega}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2^2 m}\operatorname{mes}\Gamma_\Omega^{(l)}<\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^3K}{m^2\sqrt{m}}D\operatorname{mes}\Omega=\chi\operatorname{mes}\Omega, \tag{6.37}$$

где

$$\chi=2^3KD\sigma,\quad \sigma=\sum_{m=1}^{\infty}m^{-5/2}<2. \tag{6.37*}$$

Постоянная χ мала вместе с K по сравнению с единицей, что и требовалось доказать.

Доказательство в общем n-мерном случае остается таким же. Вместо двумерных полос рассматриваются n-мерные полосы (или «слои») $\Gamma^{(i)}$, заключенные между гиперплоскостями

$$k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n=a,\quad k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n=-a, \tag{6.38}$$

где $a=K\|k\|^{-n-1}$. Расстояния между этими гиперплоскостями, т. е. «ширина» полосы, определится по формуле

$$h=2a\,/\,(k_1^2+\ldots+k_n^2)^{1/2} \tag{6.39}$$

и $h<2a/\sqrt{m}$ при $\|k\|=m$. Для оценки меры «резонансной зоны» $\Gamma_\Omega^{(l)}=\Omega\cap\Gamma^{(l)}$ можно опять использовать неравенство (6.33) и мы получим вместо (6.35) оценку

$$\operatorname{mes}\Gamma_\Omega^{(l)}<\frac{2Km^{-n-1}}{\sqrt{m}}D\operatorname{mes}\Omega, \tag{6.40}$$

где $D \geqslant S_\Omega / V_\Omega$ и S_Ω — «площадь» поверхности Σ, ограничивающей Ω, а V_Ω — «объем» области Ω.

Количество различных комбинаций целых чисел $k_1, \ldots, k_n$, удовлетворяющих условию $|k_1| + \ldots + |k_n| = m$, а вместе с тем и количество «резонансных зон» $\Gamma_\Omega^{(i)}$ при фиксированном целом $m \geqslant 1$, не превышает $2^n m^{n-1}$ (см. доказательство леммы 3 гл. II). Их ширина не превосходит $2Km^{-n-1}/\sqrt{m}$. Следовательно, для меры всех «зон» $\Gamma_\Omega^{(i)}$ с $\|k\| = m$ получим

$$\sum_{\|k\|=m} \operatorname{mes} \Gamma_\Omega^{(i)} < 2^n m^{n-1} \frac{2Km^{-n-1}}{\sqrt{m}} D \operatorname{mes} \Omega =$$

$$= \frac{2^{n+1}K}{m^2\sqrt{m}} D \operatorname{mes} \Omega. \qquad (6.41)$$

Для меры множества $\overline{\Omega}$, представляющего собой совокупность всех «резонансных зон» при всевозможных $\|k\| = 1, 2, 3, \ldots$, получим после суммирования обеих частей неравенства (6.41) от 1 до ∞ следующую оценку, аналогичную (6.37):

$$\operatorname{mes} \overline{\Omega} < \chi \operatorname{mes} \Omega, \qquad (6.42)$$

где

$$\chi = 2^{n+1} K D \sigma \qquad (6.42^*)$$

и σ — то же число, что и в (6.37*). Лемма доказана.

Заметим, что, как и в двумерном случае, множество $\overline{\Omega}$, состоящее из совокупности точек, удовлетворяющих неравенству (6.28) при всех $\|k\| = 1, 2, 3, \ldots$, не поддается геометрической интерпретации, и для характеристики этого множества приходится прибегать к понятию меры Лебега.

Следствие. Если обозначить через Ω_k множество точек ω области Ω, в которых

$$|(k, \omega)| \geqslant K \|k\|^{-n-1},$$

то

$$\operatorname{mes} \Omega_k > (1 - \chi) \operatorname{mes} \Omega, \qquad (6.43)$$

где χ — то же число, что и в неравенстве (6.42).

§ 6.7. Понятие области типа D

Пусть дана какая-либо область Ω рассмотренного в § 6.5 типа, а также произвольное (вообще, достаточно малое) положительное число d. Тогда согласно принятым обозначениям $\Omega - d$ есть область, точки которой принадлежат области вместе со своей d-окрестностью. Другими словами, эта область получается из Ω, если из последней исключить n-мерный пояс L ширины d, построенной внутри Ω вдоль граничной поверхности Σ. Так как L есть часть области Ω, не входящая в $\Omega - d$, т. е. дополнение Ω к $\Omega - d$, то в обозначениях теории множеств $L = \Omega \setminus (\Omega - d)$. Очевидно, что мера пояса L (совпадающего с его объемом) не превышает $S_\Omega d$, где S_Ω — площадь граничной поверхности Σ. Если через D обозначить отношение S_Ω к объему области Ω, то

$$\operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega - d) \leqslant Dd \operatorname{mes} \Omega. \tag{6.44}$$

Все области, для которых имеет место такое неравенство при одном и том же фиксированном D, назовем областями типа D.

§ 6.8. Анализ структуры областей $\Omega^{(s)}$

После приведенных в §§ 6.6 и 6.7 предварительных соображений рассмотрим теперь непосредственно последовательность областей $\Omega^{(s)}$, определяемых согласно (6.23). Мы имеем

$$\Omega^{(s+1)} = \Omega^{(s)}_{K_s N_s} - d_s, \tag{6.45}$$

где d_s — число, определяемое согласно (6.23). Очевидно, что область $\Omega^{(0)}$, являющаяся, по предположению, ограниченной замкнутой, кусочно-гладкой поверхностью, будет областью типа D, причем D — фиксированное число.

Выше в § 6.5 мы рассмотрели принцип построения областей $\Omega^{(s)}$. Проиллюстрируем на примере как непосредственно строятся эти области, используя изложенное в § 6.6.

Например, пусть $\Omega^{(0)}$ — квадрат на декартовой плоскости (ω_1, ω_2) с центром в начале координат и стороной

R. Построим области $\Omega^{(1)}=\Omega^{(0)}_{KN}-d$, $\Omega^{(2)}=\Omega^{(1)}_{K_1N_1}-d_1$, причем целые части чисел N, N_1 примем равным 1 и 2 соответственно.

Тогда $\Omega^{(0)}_{KN}$ получится из $\Omega^{(0)}$ после исключения «резонансных зон», в которых $|k_1\omega_1+k_2\omega_2|<K\|k\|^{-3}$ при $\|k\|=1$. Хотя имеется всего четыре комбинации чисел k_1, k_2 таких, что $\|k\|=|k_1|+|k_1|=1$, а именно $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, но эти комбинации соответствуют лишь двум различным «резонансным зонам» Γ^{11}_{Ω}, Γ^{12}_{Ω} ширины $h=K$. Они ограничены двумя парами прямых:

$$\omega_1=h,\qquad \omega_2=h,$$
$$\omega_1=-h,\qquad \omega_2=-h$$

соответственно и имеют ширину h. Если мы дополнительно исключим из $\Omega^{(0)}$ пояс L_d ширины d вдоль внешней границы квадрата, а также d-окрестности резонансных зон Γ^{11}_{Ω} и Γ^{12}_{Ω}, т. е. полосы ширины d по обе стороны каждой резонансной зоны, то получим область $\Omega^{(1)}=\Omega^{(0)}_{KN}-d$ (рис. 7). Область $\Omega^{(1)}_{K_1N_1}$ получается из $\Omega^{(1)}$ исключением резонансных зон, в которых при $\|k\|=2$ $|k_1\omega_1+k_2\omega_2|<K\|k\|^{-3}$. Мы имеем при этом восемь комбинаций чисел k_1, k_2, а именно $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$. Из них первые четыре соответствуют полосам, попадающим внутрь зон Γ^{11}_{Ω}, Γ^{12}_{Ω}, а последние четыре соответствуют лишь двум резонансным зонам Γ^{21}_{Ω}, Γ^{22}_{Ω}, которые ограничены следующими парами прямых:

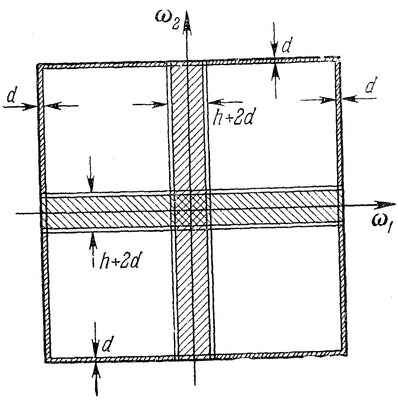

Рис. 7.

$$\omega_1+\omega_2=a,\qquad \omega_1-\omega_2=a,\qquad a=\frac{1}{8}K_1.$$
$$\omega_1+\omega_2=-a,\qquad \omega_1-\omega_2=-a,$$

Ширина этих зон равна $h_1=a\sqrt{2}$.

Если мы дополнительно исключим из $\Omega^{(1)}_{K_1N_1}$ кольцо L_{d_1} ширины d_1 вдоль границы, а также d-окрестности резонансных зон Γ^{21}_{Ω} и Γ^{22}_{Ω}, то получим область $\Omega^{(2)}=\Omega^{(1)}_{K_1N_1}-d_1$. Способ построения дальнейших областей $\Omega^{(2)}_{K_2N_2}$, $\Omega^{(3)}=\Omega^{(2)}_{K_2N_2}-d_2$ и т. д. очевиден.

Основной интересующий нас результат в отношении этих областей заключается в том, что при соответствующих d, d_1, $d_2, \ldots$ и N, N_1, $N_2, \ldots$ любая область $\Omega^{(s)}$, а также предельная область Ω^{∞} не пустые и даже обладают мерой, мало отличающейся при малом K от меры исходной области $\Omega^{(0)}$. Другими словами, суммарная мера всех исключаемых из $\Omega^{(0)}$ резонансных зон и их d_s-окрестностей и d_s-окрестностей граничной поверхности мала по сравнению с мерой всей области.

Можно также сказать, что эти исключаемые зоны не исчерпывают в известном смысле всю область $\Omega^{(0)}$.

Совокупность зон, которые надо исключить из $\Omega^{(s)}$, чтобы получить $\Omega^{(s+1)}$, представляет собой дополнение $\Omega^{(s+1)}$ к $\Omega^{(s)}$, т. е. $\Omega^{(s)}\setminus\Omega^{(s+1)}$.

Совокупность зон, которые надо исключить из $\Omega^{(0)}$, чтобы получить $\Omega^{(k)}$, $k\geqslant 1$, т. е. $\Omega^{(0)}\setminus\Omega^{(k)}$, может быть представлена суммой

$$\Omega^{(0)}\setminus\Omega^{(k)}=(\Omega^{(0)}\setminus\Omega^{(1)})+(\Omega^{(1)}\setminus\Omega^{(2)})+\ldots+(\Omega^{(k-1)}\setminus\Omega^{(k)}).$$

Полученный результат говорит о том, что каждая $\operatorname{mes}(\Omega^{(s)}\setminus\Omega^{(s+1)})$, а также сумма $\sum\limits_{s=0}^{k-1}\operatorname{mes}(\Omega^{(s)}\setminus\Omega^{(s+1)})$, при любом k остается малой по сравнению с $\operatorname{mes}\Omega^{(0)}$, если числа d, $d_1, \ldots$, N, $N_1, \ldots$, K выбраны соответствующим образом.

§ 6.9. Оценка меры всех зон, исключаемых из областей $\Omega^{(s)}$

Мы не будем останавливаться на результате, указанном в предыдущем параграфе, так как в правой части интересующего нас прежде всего неравенства (6.25) выписаны не $\operatorname{mes}(\Omega^{(s)}\setminus\Omega^{(s+1)})$, а $\operatorname{mes}(\Omega^{(s)}\setminus\Omega^{(s+1)}-\beta)$, т. е. бо́льшие величины. Поэтому непосредственно докажем, что

$$\sum_{s=0}^{k-1} \operatorname{mes}\left(\Omega^{(s)} \diagdown \Omega^{(s+1)} - \beta_s\right)$$

при соответствующих выбранных $d, d_1, \ldots, N, N_1, \ldots, K$ и при любом k остается малой по сравнению с $\operatorname{mes} \Omega^{(0)}$.

Покажем сначала, что справедлива следующая.

Лемма. *Если области $\Omega^{(s)}$, $s \geqslant 1$ определяются согласно* (6.23), *а $\Omega^{(0)}$ есть область с указанными в начале* § 6.8 *свойствами, то при любом $s \geqslant 0$ имеет место оценка*

$$\operatorname{mes}\left(\Omega^{(s)} \diagdown \Omega^{(s+1)} - \beta_s\right) < 2^{n+2} D_1 \left(K_s \sigma_s + (d_s + \beta_s) N_s^n\right) \operatorname{mes} \Omega^{(0)}, \tag{6.46}$$

где $\sigma_s = \sum\limits_{N_s \leqslant m < N_{s+1}} m^{-5/2}$, *и D_1 — некоторая постоянная.*

Доказательство. Прежде всего рассмотрим последовательность областей $\widetilde{\Omega}^{(1)} = \Omega^{(0)} - d$, $\widetilde{\Omega}^{(2)} = \widetilde{\Omega}^{(1)} - d_1, \ldots$, которые отличаются от $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \ldots$ лишь отсутствием резонансных зон. Граничная же поверхность любой области $\widetilde{\Omega}^{(s)}$ та же самая, что и области $\Omega^{(s)}$, если не учитывать в последней резонансные зоны. Мы имеем

$$\widetilde{\Omega}^{(s)} = \Omega^{(0)} - d - d_1 - \ldots - d_{s-1}.$$

Пусть числа d_j таковы, что ряд Σd_j сходится к числу $\tilde{d}$, малому по сравнению с линейными размерами области $\Omega^{(0)}$ (по всем направлениям). Тогда все области $\widetilde{\Omega}^{(s)}$ будут находиться внутри $\Omega^{(0)}$, а их поверхности и объем ограничены сверху и снизу. Следовательно, найдется число D_1, превышающее отношение поверхности к объему для любой области $\widetilde{\Omega}^{(s)}$, а также для любой из областей $\Omega^{(s)}$, $\Omega^{(0)}$ без учета в них резонансных зон. Тогда для $\widetilde{\Omega}^{(s)}$, $s \geqslant 1$ имеем согласно (6.44)

$$\operatorname{mes}\left(\widetilde{\Omega}^{(s)} \diagdown \widetilde{\Omega}^{(s)} - d_s - \beta_s\right) \leqslant$$
$$\leqslant D_1 (d_s + \beta_s) \operatorname{mes} \widetilde{\Omega}^{(s)} < D_1 (d_s + \beta_s) \operatorname{mes} \Omega^{(0)}, \tag{6.47}$$

где D_1 не зависит от s.

Вместе с тем для оценки меры резонансной зоны $\Gamma_\Omega(s)$, вырезаемой какой-либо полосой Γ ширины h из области $\Omega^{(s)}$, $s \geqslant 0$, можно использовать то же число D_1

и формулу (6.33), так что

$$\operatorname{mes}\Gamma_{\Omega^{(s)}} < hD_1 \operatorname{mes}\Omega^{(0)}. \tag{6.48}$$

Рассмотрим теперь какую-либо область $\Omega^{(s)}_{K_sN_s}$. Мы получим ее, если исключим из $\Omega^{(s)}$ резонансные зоны, соответствующие полосам $\Gamma^{(i)}$, внутри которых

$$|(k,\ \omega)| < K_s\|k\|^{-n-1},\quad N_{s-1} \leqslant \|k\| < N_s. \tag{6.49}$$

При фиксированном $\|k\| = m$ мы имеем не более $2^n m^{n-1}$ таких резонансных зон, ширина которых не превосходит $2K_s m^{-n-1}/\sqrt{m}$. Для их общей меры получим оценку, совпадающую с (6.41):

$$\sum_{\|k\|=m} \operatorname{mes}\Gamma^{(i)}_{\Omega^{(s)}} < \frac{2^{n+1}K_s}{m^2\sqrt{m}} D_1 \operatorname{mes}\Omega^{(0)}. \tag{6.50}$$

Суммируя далее по целым m от $m = N_{s-1}$ до $m < N_s$, получим оценку меры всех резонансных зон, соответствующих условию (6.49), т. е. оценку меры дополнения области $\Omega^{(s)}$ к $\Omega^{(s)}_{K_sN_s}$

$$\operatorname{mes}(\Omega^{(s)} \setminus \Omega^{(s)}_{K_sN_s}) =$$

$$= \sum_{N_{s-1}\leqslant m<N_s} \sum_{\|k\|=m} \operatorname{mes}\Gamma^{(i)}_{\Omega^{(s)}} < 2^{n+1} K_s D_1 \sigma_s \operatorname{mes}\Omega^{(0)}, \tag{6.51}$$

где

$$\sigma_s = \sum_{N_{s-1}\leqslant m<N_s} m^{-5/2} < 2.$$

Рассмотрим далее область $\Omega^{(s+1)} - \beta_s = \Omega^{(s)}_{K_sN_s} - d_s - \beta_s$, которая получается из $\Omega^{(s)}_{K_sN_s}$ после исключения пояса ширины $d_s + \beta_s$ вдоль граничной поверхности и $(d_s+\beta_s)$-окрестностей каждой резонансной зоны. Так как для этих зон $0 < \|k\| < N_s$, то их количество не превосходит

$$2^n \sum_{1\leqslant m<N_s} m^{n-1} < 2^n N_s^n.$$

Таким образом, из $\Omega^{(s)}_{K_sN_s}$ исключается не более $2 \cdot 2^n N_s^n$ полос ширины $d_s + \beta_s$, а также кольца ширины $d_s + \beta_s$ вдоль граничной поверхности (без учета резонансных зон). Для оценки меры всех этих исключаемых из $\Omega^{(s)}_{K_sN_s}$ участков можно использовать формулы (6.47) и (6.48), так что

$$\operatorname{mes}(\Omega^{(s)}_{K_sN_s}\setminus\Omega^{(s)}_{K_sN_s}-d_s-\beta_s)<$$
$$<D_1(d_s+\beta_s)(1+2^{n+1}N_s^n)\operatorname{mes}\Omega^{(0)}. \quad (6.52)$$

Если добавить к правой части еще оценку (6.51) меры самих резонансных зон, то придем к оценке

$$\operatorname{mes}(\Omega^{(s)}\setminus\Omega^{(s+1)}-\beta_s)<$$
$$<D_1[(d_s+\beta_s)(1+2^{n+1})N_s^n+2^{n+1}K_s\sigma_s]\operatorname{mes}\Omega^{(0)},$$

из которой и вытекает (6.46). Лемма доказана.

Как следствие этой леммы, получим при любом k оценку

$$\sum_{=0}^{k-1}\operatorname{mes}(\Omega^{(s)}\setminus\Omega^{(s+1)}-\beta_s)<$$
$$<D_1 2^{n+2}\sum_{s=0}^{\infty}[K_s\sigma_s+(d_s+\beta_s)N_s^n)\operatorname{mes}\Omega^{(0)}. \quad (6.53)$$

Так как $K>K_1>K_2>\ldots$,

$$\sum_{s=0}^{\infty}\sigma_s=\sum_{1<m<N}m^{-5/2}+\sum_{N<m<N_1}m^{-5/2}+\ldots=\sum_{1}^{\infty}m^{-5/2}<2,$$

то (6.53) перепишется в виде

$$\sum_{s=0}^{k-1}\operatorname{mes}(\Omega^{(s)}\setminus\Omega^{(s+1)}-\beta_s)<\chi_1\operatorname{mes}\Omega^{(0)}, \quad (6.53^*)$$

где

$$\chi_1=D_1 2^{n+2}\left(2K+\sum_{s=0}^{\infty}(d_s+\beta_s)N_s^n\right). \quad (6.53^{**})$$

Если ряд $\sum(d_s+\beta_s)N_s^n$ сходится, и его сумма, а также и K достаточно малы по сравнению с $D_1 2^{n+2}$, то постоянная χ_1 мала по сравнению с единицей; тогда $\sum_0^{k-1}\operatorname{mes}(\Omega^{(s)}\setminus\Omega^{(s+1)}-\beta_s)$ составляет малую долю меры области Ω^0, что и утверждалось выше.

§ 6.10. Окончание доказательства непустоты области F^∞

Возвращаемся теперь к неравенству (6.26), которое перепишется с учетом (6.53*) в виде

$$\operatorname{mes}(G^{(0)}\setminus G^{(k)})<\left(\frac{\theta}{2}\right)^{-n}\chi_1\operatorname{mes}\Omega^{(0)}.$$

Поскольку же согласно (6.09) $\operatorname{mes}\Omega^{(0)}\leqslant\Theta^n\operatorname{mes}G^{(0)}$, то

$$\operatorname{mes}(G^{(0)}\setminus G^{(k)})<\left(\frac{2\Theta}{\theta}\right)^{n}\chi_1\operatorname{mes}G^{(0)}. \tag{6.54}$$

Так как χ_1 не зависит от k, то это же неравенство справедливо и для предельной области G^∞, т. е.

$$\operatorname{mes}(G^{(0)}\setminus G^{\infty})<\chi\operatorname{mes}G^{(0)}, \tag{6.54*}$$

где

$$\chi=\left(\frac{2\Theta}{\theta}\right)^{n}\chi_1.$$

Выведем условие, при котором χ, а тем более и χ_1, малы по сравнению с единицей.

Рассмотрим для этого произведение $\delta_s N_s^n$, учитывая, что (см. § 4.3)

$$N_s=\frac{1}{\gamma_s}\ln\frac{1}{M_s},$$

где

$M_s=\delta_s^T,\ \gamma_s=\delta_s^m,\ T\geqslant(4n+12)/(1-\alpha),\ 0<m<1,\ 0<\alpha<1.$

Так как при любых ν, δ имеет место неравенство

$$\ln\frac{1}{\delta}\leqslant\frac{\nu}{e}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/\nu},$$

(оно вытекает из неравенства (2.14), если положить в нем $x=\ln\frac{1}{\delta}$), то

$$\delta_s N_s^n=\delta_s\left[\frac{1}{\gamma_s}\ln\frac{1}{M_s}\right]\leqslant\delta_s\left[\frac{1}{\gamma_s}\,\frac{\nu}{e}\left(\frac{1}{M_s}\right)^{1/\nu}\right]^n=$$

$$=\delta_s^{1-mn-\frac{Tn}{\nu}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^n.$$

Если мы положим, например, $\nu=4nT$, $m=\frac{1}{4n}$, то

$$\delta_s N_s^n \leqslant \delta_s^{1/2}\left(\frac{4nT}{e}\right)^n,$$

и при условии

$$\delta^{1/2}=\delta_0^{1/2}<\left(\frac{4nT}{e}\right)^{-n}, \tag{6.55}$$

имеем $\delta_s N_s^n<1$ при любых $s=0, 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\sum_{s=0}^{\infty}(d_s+\beta_s)N_s^n=\sum_{s=0}^{\infty}\delta_s^3\left(7\Theta_s+\frac{2\Theta_s}{\theta_s}+3\right)N_s^n<$$

$$<\left(14\Theta+\frac{8\Theta}{\theta}+3\right)\sum_{s=0}^{\infty}\delta_s^2,$$

так как $\Theta_s<2\Theta_0=2\Theta$, $\theta_s>\theta_0/2=\theta/2$ при любых $s\geqslant 1$. Но, как следует из § 4.2,

$$\sum_{s=0}^{\infty}\delta_s^2<2\delta_0^2=2\delta^2,$$

поскольку $\delta_s\leqslant\delta_{s-1}^{1+\alpha}$, $\delta_0<2^{-1/\alpha}$ [см. (4.12)]. Таким образом, если

$$\left(14\Theta+\frac{8\Theta}{\theta}+3\right)\delta<1, \tag{6.56}$$

то

$$\sum_{s=0}^{\infty}(d_s+\beta_s)N_s^n<2\delta.$$

Но тогда постоянная χ в оценке (6.54*) удовлетворяет неравенству

$$\chi<\left(\frac{2\Theta}{\theta}\right)^n D_1 2^{n+2}(2K+2\delta)<\left(\frac{\Theta}{\theta}\right)^n D_1 2^{2n+4}\delta,$$

так как $K=\delta^2<\delta$. Отсюда вытекает, что если δ удовлетворяет неравенствам (6.55), (6.56) и, кроме того,

$$\delta\ll\left(\frac{\theta}{\Theta}\right)^n\frac{1}{D_1}\frac{1}{4^{n+2}}, \tag{6.57}$$

то χ мало̀ по сравнению с единицей. Тогда ввиду (6.54), (6.54*) мера области $G^{(0)}\diagdown G^{(k)}$ при любом $k>0$, а также мера дополнения $G^{(0)}$ к предельной области G^∞ составляет малую долю χ меры $G^{(0)}$. Мера же самой области G^∞ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mes} G^\infty > (1-\chi) \operatorname{mes} G^{(0)},$$

т. е. мало отличается от меры области $G^{(0)}$.

Напомним, что в соответствии с замечанием в начале главы под $\operatorname{mes} G^\infty$, $\operatorname{mes} G^{(0)}$ мы подразумеваем фактически меры их вещественных компонент $\operatorname{mes} \operatorname{Re} G^\infty$, $\operatorname{mes} \operatorname{Re} G^{(0)}$. Тем самым мы вывели условие непустоты вещественных компонент любой области $G^{(s)}$, $s > 0$ и предельной области G^∞, а вместе с тем и условие непустоты вещественной компоненты области F^∞, мера которой равна $\operatorname{mes} \operatorname{Re} F^\infty = \operatorname{mes} \operatorname{Re} U^\infty \operatorname{mes} G^\infty = (2\pi)^n \operatorname{mes} G^\infty$.

ГЛАВА VII

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

§ 7.1. Сходимость последовательности канонических систем к предельной системе

Рассмотрим последовательность уравнений (5.01_s), обозначая переменные одной и той же буквой X:

$$\dot{X}=Y^{(0)}(X), \tag{7.01_0}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\dot{X}=Y^{(s)}(X), \tag{7.01_s}$$

где

$$X=(P,\ Q), \quad Y^{(s)}=\left(-\frac{\partial H^{(s)}}{\partial Q},\ \frac{\partial H^{(s)}}{\partial P}\right). \tag{7.02}$$

Покажем, что, если $X\in F^{\infty}$, то последовательность этих уравнений стремится к некоторым «предельным» уравнениям. Действительно, согласно вычислениям, проводимым при выполнении основной операции, имеем

$$H_0^{(s+1)}(P)=H_0^{(s)}(P)+\overline{H}_1^{(s)}(P), \tag{7.03}$$

где $\overline{H}_1^{(s)}$ — вековая часть функции $H_1^{(s)}(P,\ Q)$.

Предположим, что $X\in F^{\infty}$ $(P\in G^{\infty},\ Q\in U^{\infty})$. Тогда X принадлежит одновременно всем областям $F^{(s)}$, и для всех $H^{(s)}(X)$ справедливы оценки (4.24), (4.26). Следовательно,

$$|H_1^{(s)}|<M_s=\delta_s^T, \quad \left\|\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial X}\right\|<\delta_{s-1}^{2T-4n-15}=\overline{\beta}_{s-1}, \tag{7.04}$$

где $M_s\leqslant M_{s-1}^{1+\alpha}$, $0<\alpha<1$, а $M_0=M=\delta^T$ согласно оценкам для δ мало́ по сравнению с единицей. Отсюда вытекает, что при $s\to\infty$ и $X\in F^{\infty}$

$$H_1^{(s)}(X)\to 0, \quad \frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial X}\to 0.$$

Кроме того, этим же оценкам удовлетворяет и функция H , так что согласно (7.03)

$$|H_0^{(s+1)} - H_0^{(s)}| = |\overline{H}_1^{(s)}| < \delta_s^T,$$

$$\left\| \frac{\partial H_0^{(s+1)}}{\partial P} - \frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P} \right\| = \left\| \frac{\partial \overline{H}^{(s)}}{\partial P} \right\| < \delta_{s-1}^{2T-4n-15} = \overline{\beta}_{s-1}. \qquad (7.05)$$

Рассматривая ряды $\sum \delta_s^T$, $\sum \overline{\beta}_{s-1}$, можем заключить [см. анализ ряда (4.20)], что эти ряды сходятся. Отсюда следует, что последовательности $\{H_0^{(s)}(P)\}$ и $\left\{\frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P}\right\}$ сходятся равномерно в области $P \in G^\infty$, причем, если обозначить предел последовательности $\{H_0^{(s)}\}$ через H_0^∞, то $\frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P} \to \frac{\partial H_0^\infty}{\partial P}$.

Таким образом, при $s \to \infty$ имеем

$$\frac{\partial H^{(s)}}{\partial P} = \frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P} + \frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial P} \to \frac{\partial \quad ^\infty}{\partial}, \quad \frac{\partial H^{(s)}}{\partial Q} = \frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial Q} \to 0,$$

так что вектор $Y^{(s)}(X)$ стремится при $s \to \infty$ к

$$Y^\infty = \left(0, \frac{\partial H_0^\infty}{\partial P}\right).$$

Система (7.01_s) в пределе при $s \to \infty$ примет вид (5.01_∞), т. е.

$$\dot{X} = Y^\infty(X) \qquad (7.06)$$

или

$$\dot{P} = 0, \quad \dot{Q} = \frac{\partial H_0^\infty}{\partial P^\infty}, \qquad (7.06^*)$$

что и надо было показать.

В дальнейшем нам понадобится также оценка нормы вектора $Y^{(s)} - Y^\infty$. Компоненты этого вектора равны

$$\frac{\partial H^{(s)}}{\partial P} - \frac{\partial H_0^\infty}{\partial P} = \frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P} - \frac{\partial H_0^\infty}{\partial P} + \frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial P}$$

и $\dfrac{\partial H_1^{(s)}}{\partial Q}$ соответственно. Но согласно (7.04) и (7.05)

$$\left\|\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial X}\right\| < \bar{\beta}_{s-1}, \quad \left\|\frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P} - \frac{\partial H_0^{\infty}}{\partial P}\right\| < \sum_{k=s-1}^{\infty} \bar{\beta}_k < 2\bar{\beta}_{s-1}, \quad s \geqslant 1, \tag{7.07}$$

поскольку $\bar{\beta}_k \leqslant \bar{\beta}_{k-1}^{1+\alpha}$, $\bar{\beta}_{s-1} < \delta_{s-1} \leqslant \delta_0 < 2^{-1/\alpha}$ (см. §§ 4.1—4.3). Следовательно,

$$\|Y^{(s)} - Y^{\infty}\| < \left\|\frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P} - \frac{\partial H_0^{\infty}}{\partial P}\right\| + \left\|\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial X}\right\| < 3\bar{\beta}_{s-1}. \tag{7.08}$$

§ 7.2. Постановка вопроса о переходе от решения «предельной» системы уравнений к решению исходной системы

Обозначив опять переменную «предельных» уравнений через $X^{\infty}(P^{\infty}, Q^{\infty})$, запишем их решение в виде

$$X^{\infty}(t) = (P^{\infty}(t),\ Q^{\infty}(t)), \tag{7.09}$$

где

$$P^{\infty}(t) = P_0^{\infty} = \mathrm{const},\ Q^{\infty}(t) = Q_0^{\infty} + \omega^{\infty} t, \tag{7.09*}$$

$$\omega^{\infty} = \left.\frac{\partial H_0^{\infty}}{\partial P^{\infty}}\right|_{P^{\infty} = P_0^{\infty}}.$$

Очевидно, что это решение обладает тем свойством, что если начальные значения P_0^{∞}, Q_0^{∞} вещественны и принадлежат области $\mathrm{Re}F^{\infty}$, то оно будет оставаться в этой области при всех $t > 0$.

Как следует из самого построения области G^{∞}, вектор ω^{∞} будет обладать свойством, что $(k, \omega^{\infty}) \neq 0$ для любого вектора $k = (k_1, \ldots, k_n)$ с целочисленными компонентами, иначе говоря, компоненты $\omega_1^{\infty}, \ldots, \omega_n^{\infty}$ векторы ω^{∞} несоизмеримы между собой.

Дальнейшая задача заключается в том, чтобы от решения (7.09) «предельной» системы возвратиться к решению исходной системы (5.01_0).

Напомним, что переход от любого $X^{(s)}$ к $X^{(0)}$ осуществляется с помощью отображения (5.10), т. е.

$$X^{(0)} = S_s X^{(s)}, \tag{7.10}$$

где оператор S_s равен произведению операторов $B_1 \ldots B_1$. При этом, если $X^{(s)}(t)$ есть решение системы (5.01_s), то $X^{(0)}(t)=S_s X^{(s)}(t)$ есть решение исходной системы (5.01_0) при начальном условии $X^{(0)}(0)=S_s X^{(s)}(0)$.

Переход от $X^\infty(t)$ к $X^{(0)}(t)$ при заданном $X^\infty(t)$ нельзя осуществить с помощью конечного числа операций. Его можно, однако, рассматривать как предел бесконечной последовательности $S_1 X^\infty(t)$, $S_2 X^\infty(t)$, ..., т. е.

$$X^{(0)}(t)=\lim_{s\to\infty} S_s X^\infty(t). \tag{7.11}$$

Надо доказать, что: 1) предел (7.11) существует; 2) если $X^\infty(t)$ есть решение (7.09) системы (5.01_∞), то предельная функция $X^{(0)}(t)$ удовлетворяет исходной системе (5.01_s).

§ 7.3. Вспомогательная оценка для отображения $S_s z$

Выведем сначала вспомогательные оценки для отображения $\zeta=S_s z$ при условии, что z принадлежит области $F^{(s)}$.

Для этого представим рассматриваемое отображение в виде эквивалентной цепочки отображений, вытекающей из самого определения оператора S_s:

$$\zeta_{s-1}=B_s z,\ \zeta_{s-2}=B_{s-1}\zeta_{s-1},\ \ldots,\ \zeta_1=B_2\zeta_2,\ \zeta=B_1\zeta_1. \tag{7.12}$$

Пусть $z \in F^{(s)}$. Тогда согласно свойствам операторов B_j канонических преобразований (см. §§ 3.3, 3.4 и 4.4) для первого из отображений в этой цепочке справедлива оценка (4.31*), т. е.

$$\|d\zeta_{s-1}\|=\|dB_s\|<2\|dz\|$$

и при этом $\zeta_{s-1} \in F^{(s-1)}$. Но тогда эта же оценка применима и к следующему отображению в этой цепочке:

$$\|d\zeta_{s-2}\|=\|dB_{s-1}\|<2\|d\zeta_{s-1}\|<2^2\|dz\|,$$

причем $\zeta_{s-2} \in F^{(s-2)}$. Переходя также к отображению $\zeta_{s-3}=B_{s-2}\zeta_{s-2}$ и т. д., получим, что все $\zeta_k \in F^{(k)}$ $(k=1, \ldots, s-1)$ и

$$\|d\zeta\|=\|dS_s\|<2^s\|dz\|, \tag{7.13}$$

причем $\zeta \in F^{(0)}$,

Пусть даны две точки y и z такие, что весь отрезок $[y, z]$ принадлежит области $F^{(s)}$. Тогда из (7.13) следует, если использовать лемму 6 гл. II, оценка

$$\|S_s y - S_s z\| < 2^s \|y - z\|. \tag{7.13*}$$

Рассмотрим теперь разность $\zeta - z = S_s z - z$. Согласно (7.12) имеем

$$\zeta - z = (B_1\zeta_1 - \zeta_1) + (B_2\zeta_2 - \zeta_2) + \ldots + (B_s z - z).$$

Так как $z \in F^{(s)}$, $\zeta_k \in F^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, s-1)$, то можно применить оценки (4.31), откуда

$$\|\zeta - z\| = \|S_s z - z\| \leqslant \overline{\overline{\beta}} + \overline{\overline{\beta}}_1 + \ldots + \overline{\overline{\beta}}_{s-1}. \tag{7.14}$$

Оценки (7.13) — (7.14) понадобятся нам в дальнейшем.

§ 7.4. Лемма о пределе последовательности $\{S_s z\}$

Докажем с помощью выведенных оценок следующую лемму.

Лемма. *Пусть задана точка $z \in F^\infty$ (вообще, комплексная). Тогда последовательность $\zeta^{(s)} = S_s z$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ при тех ограничениях, которые были наложены выше на число δ, сходится и ее предел ζ^∞ (единственный) является аналитической функцией z, причем $\zeta^\infty \in F^{(0)}$ и справедлива оценка*

$$\|\zeta^\infty - z\| < 2\overline{\overline{\beta}}, \tag{7.15}$$

где согласно (4.33)

$$\overline{\overline{\beta}} = \delta^{T-2n-7}.$$

Доказательство. Рассмотрим соседние точки $\zeta^{(s)} = S_s z$ и $\zeta^{(s+1)} = S_{s+1} z$ данной последовательности. По определению, оператор S_s

$$\zeta^{(s)} = B_1 B_2 \cdot \cdot \cdot B_s z = S_s z,$$

$$\zeta^{(s+1)} = B_1 B_2 \cdot \cdot \cdot B_s B_{s+1} z = S_s B_{s+1} z = S_s y,$$

где $y = B_{s+1} z$. Поскольку $z \in F^\infty \subset F^{(s+1)}$, то согласно (4.31), (4.33)

$$\|y - z\| = \|B_{s+1} z - z\| \leqslant \overline{\overline{\beta}}_s < \beta_s. \tag{7.16}$$

Таким образом, точка y находится внутри сферы с центром z и радиусом β_s. Вместе с тем из определения областей

$$F^{(s)}\left(p \in G^{(s)},\quad q \in U^{(s)}\right),\quad F^{(s+1)}\left(p \in G^{(s)}_{K_s N_s} - 3\beta_s = G^{(s+1)},\ q \in U^{(s)} - 3\gamma_s\right)$$

вытекает, что во всяком случае $F^{(s+1)} + 3\beta_s \subset F^{(s)}$. Следовательно, точка z, а также весь отрезок $[y, z]$, принадлежат области $F^{(s)}$. Но тогда применима оценка (7.13*), и

$$\|\zeta^{(s+1)} - \zeta^{(s)}\| = \|S_s y - S_s z\| < 2^s \|y - z\| < 2^s \overline{\overline{\beta}}_s.$$

Рассмотрим далее числовой ряд

$$\sum_1^\infty 2^s \overline{\overline{\beta}}_s. \tag{7.17}$$

Так как $\delta_s \leqslant \delta_{s-1}^{1+\alpha}$, $\delta_0 = \delta < 2^{-1/\alpha}$, то можно показать (см. § 4. 2), что $\delta_s < 2^{-s}\delta$. Вместе с тем

$$\overline{\overline{\beta}}_s = \delta_s^{T-2n-7},\quad T \geqslant \frac{(4n+12)}{1-\alpha}$$

и $\overline{\overline{\beta}}_s < \delta_s^{2n+15}$. Следовательно,

$$2^s \overline{\overline{\beta}}_s < 2^s (2^{-s}\delta)^{2n+15} = \delta^{2n+15}\, 2^{-s(2n+14)},$$

и ряд (7.17) сходится. Из сходимости же этого ряда вытекает сходимость последовательности $\{\zeta^{(s)}\}$ для $z \in F^s$, равномерная по z. Обозначим предел этой последовательности через ζ^∞. Так как z — комплексное, то ζ^∞ есть аналитическая функция z. Единственность ζ^∞ вытекает из однозначности каждого из операторов B_j ($j = 1, 2, 3, \ldots$), а вместе с тем и каждого отображения $\zeta^{(s)} = S_s z$.

Для доказательства неравенства (7.15) используем (7.14), откуда

$$\|\zeta^\infty - z\| \leqslant \sum_{k=0}^\infty \overline{\overline{\beta}}_k. \tag{7.18}$$

Поскольку $\overline{\overline{\beta}}_k < \overline{\overline{\beta}}_{k-1}^{1+\alpha}$, $\overline{\overline{\beta}}_0 = \overline{\overline{\beta}} < 2^{-1/\alpha}$, то ряд в правой части сходится и его сумма меньше $2\overline{\overline{\beta}}$, откуда вытекает оценка (7.15).

Остается показать, что $\zeta^\infty \in F^{(0)}$. Мы имеем, что во всяком случае $F^{(s+1)} + 3\beta_s \subset F^{(s)}$ и тем более

$F^{(s+1)}+\overline{\overline{\beta}}_s\subset F^{(s)}$. Следовательно,

$$F^{(s+1)}+\overline{\overline{\beta}}_0+\cdots+\overline{\overline{\beta}}_s\subset F^{(0)},\quad F^{\infty}+\sum_0^{\infty}\overline{\overline{\beta}}_k\subset F^{(0)}.$$

Таким образом, если $z\in F^{\infty}$, то $\zeta^{\infty}\in F_*^{(0)}$ согласно (7.18). Лемма полностью доказана.

§ 7.5. Взаимно однозначное соответствие между точками предельной области F^{∞} и подобласти $F_*^{(0)}$ исходной области $F^{(0)}$

Из § 7.4 вытекает, что каждая точка X^{∞} области F^{∞} отображается однозначно и аналитически с помощью отображения $S_{\infty}=\lim\limits_{s\to\infty}(B_1\cdots B_s)$, т. е. с помощью бесконечной последовательности канонических преобразований B_j, в точку $X^{(0)}$ области $F^{(0)}$. Вся область F^{∞} отображается с помощью отображения S_{∞} в некоторую подобласть $F_*^{(0)}$ области $F^{(0)}$, т. е. $F_*^{(0)}=S_{\infty}F^{\infty}$. Каждая точка $X_*^{(0)}$ области $F_*^{(0)}$ является отображением S_{∞} некоторой точки X_*^{∞} области F^{∞}.

Остановимся опять на переходе от $X^{(0)}$ к X^{∞}. Этот переход осуществляется, как указывалось выше, при помощи бесконечной последовательности канонических преобразований:

$$X^{(0)}=B_1X^{(1)},\ X^{(1)}=B_2X^{(2)},\ldots,\ X^{(s-1)}=B_sX^{(s)},\ldots \tag{7.19}$$

Для этих преобразований, при условии, что $X^{(1)}\in F^{(1)},\ldots$ $\ldots, X^{(s)}\in F^{(s)},\ldots$, были выведены оценки (4.31). Оказывается, что для справедливости этих оценок достаточно одного условия $X^{(0)}\in F_*^{(0)}$. Другими словами, достаточно, чтобы исходная переменная $X^{(0)}$ принадлежала области $F_*^{(0)}$. Действительно, пусть дана точка $X_*^{(0)}\in F_*^{(0)}$, являющаяся по определению области $F_*^{(0)}$ отображением S_{∞} некоторой точки $X_*^{\infty}\in F^{\infty}$, т. е.

$$X_*^{(0)}=\lim_{s\to\infty}B_1B_2\cdots B_sX_*^{\infty}. \tag{7.20}$$

Перепишем эту формулу в виде

$$X_*^{(0)}=B_1\lim_{s\to\infty}B_2\cdots B_sX_*^{\infty}. \tag{7.20*}$$

Точно так же как и при доказательстве леммы в §7.4, можно показать, что в силу условия $X^\infty_* \in F^\infty$ существует единственный предел $\lim\limits_{s\to\infty} B_2 \cdot\cdot\cdot B_s X^\infty_*$. Обозначив его через $X^{(1)}_*$, получим

$$X^{(1)}_* = \lim_{s\to\infty} B_2 B_3 \cdot\cdot\cdot B_s X^\infty_*,$$

причем $X^{(1)}_* \in F^{(1)}$ и

$$\|X^{(1)}_* - X^\infty_*\| < 2\bar{\bar{\beta}}_1.$$

Вместе с тем из (7.20) вытекает, что $X^{(0)}_* = B_1 X^{(1)}_*$, т. е. что $X^{(0)}_*$ и $X^{(1)}_*$ связаны между собой первым из последовательности канонических преобразований (7.19). Так как $X^{(1)}_* \in F^{(1)}$, то оценка (4.31) для этого преобразования справедлива.

Перепишем теперь формулу для $X^{(1)}_*$ в виде

$$X^{(1)}_* = B_2 \lim_{s\to\infty} B_3 \cdot\cdot\cdot B_s X^\infty_*. \qquad (7.20^{**})$$

Опять, как и при доказательстве леммы, можно показать, что в силу условия $X^\infty_* \in F^\infty$ существует единственный предел $\lim B_3 \cdot\cdot\cdot B_s X^\infty_*$. Если обозначить его через $X^{(2)}_*$, то получим

$$X^{(2)}_* = \lim_{s\to\infty} B_3 \cdot\cdot\cdot B_s X^\infty_*,$$

причем $X^{(2)}_* \in F^{(2)}$ и

$$\|X^{(2)}_* - X^\infty_*\| < 2\bar{\bar{\beta}}_2.$$

Вместе с тем из (7.20) видно, что $X^{(1)}_* = B_2 X^{(2)}_*$, т. е. $X^{(1)}_*$ и $X^{(2)}_*$ связаны между собой вторым из последовательности канонических преобразований (7.19). Так как $X^{(2)}_* \in F^{(2)}$, то (4.31) для этого преобразования справедливо.

Идя далее аналогичным путем, получим последовательность точек $X^{(k)}_*$ ($k=0, 1, 2, \ldots$), связанных между собой последовательностью преобразований (7.19), причем

$$\|X^{(k)}_* - X^\infty_*\| < 2\bar{\bar{\beta}}_k. \qquad (7.21)$$

Отсюда следует, что если $X_*^{(0)}$ есть отображение S_∞ точки X_*^∞, то последовательность отображений (7.19) сходится именно к точке X_*^∞. Кроме того, все $X_*^{(k)} \in F^{(k)}$.

Отсюда также вытекает взаимная однозначность отображения $X^{(0)} = S_\infty X^\infty$, т. е. что оператор S_∞^{-1}, обратный к S_∞, однозначен. Действительно, при заданном $X^\infty \in F^\infty$ мы получим, как было показано выше, единственное $X^{(0)} \in F_*^{(0)}$. Предположим теперь, что двум точкам $X_1^\infty \in F^\infty$ и $X_2^\infty \in F^\infty$ соответствует одна и та же точка $X^{(0)} = S_\infty X_i^\infty$ $(i=1, 2)$. Тогда, если мы построим точки $X_i^{(k)} = \lim\limits_{s\to\infty} B_{k+1} \cdots B_s X_i^\infty$ $(i=1, 2)$, то при любом $k=1, 2, 3, \ldots$, с одной стороны, согласно (7.21)

$$\|X_i^{(k)} - X_i^\infty\| < 2\overline{\overline{\beta}}_k \qquad (7.21^*)$$

и, с другой стороны, $X_i^{(k)} = B_k^{-1} \cdots B_1^{-1} X^{(0)}$.

В силу взаимной однозначности канонических преобразований $x = B_j X$ обязательно $X_1^{(k)} = X_2^{(k)}$ при любом фиксированном k. Однако, если $X_1^\infty \neq X_2^\infty$, то ввиду $\overline{\overline{\beta}}_k \to 0$ при $k \to \infty$, можно выбрать такое k, при котором не будет выполняться условие (7.21*), и мы придем к противоречию.

§ 7.6 Аналитическая структура отображений S_s и S_∞

Можно сделать также заключение о структуре отображений S_s и предельного отображения S_∞. А именно, при заданном $X = (P, Q) \in F^{(s)}$, в соответствии с (5.06) и (5.10), мы получим, что

$$S_s X = X + f^{(s)}(X)$$

и что функция $f^{(s)}(X)$ является аналитической по X. Переменная Q является угловой с периодом 2π по всем ее компонентам $Q_1, \ldots, Q_n$. Следовательно, можно представить $f^{(s)}(X)$ в виде ряда Фурье

$$S_s X = X + \sum_{\|k\| \geq 0} f_k^{(s)}(P)\, e^{i(k,Q)}, \qquad (7.22)$$

где $f_k^{(s)}(P)$ — аналитические функции P.

Предельное отображение $S_\infty X$ при условии $X \in F^\infty$ получим в силу аналитичности по X и периодичности по Q

в таком же виде:

$$S_\infty X = X + f(X) \tag{7.23}$$

или

$$S_\infty X = X + \sum_{\|k\| \geqslant 0} f_k(P)\, e^{i(k,Q)}, \tag{7.23*}$$

где $f(X)$, $f_k(P)$ — аналитические функции X и P соответственно, представляющие собой пределы функций $f^{(s)}(X)$ и $f_k^{(s)}(P)$ при $s \to \infty$. При этом справедлива при любом s, а также при $s \to \infty$ оценка (7.12)

$$\|S_s X - X\| < 2\overline{\overline{\beta}}_0, \tag{7.24}$$

с помощью которой можно на основании леммы 1 § 2.2 оценить коэффициенты Фурье в рядах (7.23*).

§ 7.7. Равенство мер областей $F^{(\infty)}$ и $F_*^{(0)}$

Покажем теперь, что $\operatorname{mes} F_*^{(0)} = \operatorname{mes} F^\infty$.

Сначала заметим, что поскольку область F^∞ является произведением области G^∞ переменной P^∞ на область U^∞ угловой n-мерной переменной Q, то при $\operatorname{mes} G^\infty = M$

$$\operatorname{mes} F^\infty = (2\pi)^n M.$$

Возникает теперь вопрос о мере области $F_*^{(0)}$ исходных переменных. К этой области мы приходим, возвращаясь от предельной переменной $X^\infty(P^\infty, Q^\infty)$ к X с помощью отображения

$$S_\infty = \lim_{s\to\infty} S_s.$$

Как известно (см., например, [20], гл. 10), канонические преобразования инвариантны по отношению к мере области изменения переменных. Это значит, что если $x = (p, q)$ и $X = (P, Q)$ суть «старые» и «новые» переменные, связанные каноническим преобразованием $x = BX$, и если X изменяется в области с мерой M_0, то совокупность соответствующих точек x составит область с мерой, равной также M_0.

Такой результат получается следующим образом.

Пусть F_0 и F_1 суть области изменения x и X соответственно. Тогда

$$\operatorname{mes} F_1 = \int\limits_{(F_1)} dX_1 \ldots dX_{2n}, \quad \operatorname{mes} F_0 = \int\limits_{(F_0)} dx_1 \ldots dx_{2n},$$

где интегралы (вообще в смысле Лебега) берутся по областям F_1, F_0. (Если F_1, F_0 — геометрические области, обладающие объемом, то это — интегралы в смысле Римана и они равны объемам областей.)

По правилу замены переменных в кратных интегралах

$$\int\limits_{(F_0)} dx_1 \ldots dx_{2n} = \int\limits_{(F_1)} I\, dX_1 \ldots dX_{2n},$$

где

$$I = \frac{\partial (x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial (X_1, \ldots, X_{2n})} = \det \frac{\partial B}{\partial x},$$

есть якобиан преобразования $x = BX$. Однако вычисления (см. [20], гл. 10, § 8) показывают, что $I \equiv 1$, откуда следует, что $\operatorname{mes} F_0 = \operatorname{mes} F_1$.

Рассмотрим теперь преобразование (отображение)

$$X = S_\infty X^\infty, \tag{7.25}$$

причем $X^\infty \in F^\infty$. Выше было показано, что это преобразование (отображение) взаимно однозначное, т. е. что точки X и X^∞ областей $F_*^{(0)}$ и F^∞ связаны взаимно однозначной зависимостью. Рассмотрим область F_*^0. Каждой точке $X \in F_*^{(0)}$ соответствует точка $X^\infty \in F^\infty$, и это соответствие можно записать не только в виде (7.25), но и в виде бесконечной последовательности преобразований (отображений):

$$X = B_1 X^{(1)}, \; X^{(1)} = \\ = B_2 X^{(2)}, \; \ldots, \; X^{(s-1)} = B_s X^{(s)}, \ldots \tag{7.26}$$

Рассмотрим выражения для мер областей $F_*^{(0)}$ и F^∞:

$$\operatorname{mes} F_*^{(0)} = \int\limits_{(F_*^{(0)})} dx_1 \ldots dx_{2n},$$

$$\operatorname{mes} F^\infty = \int\limits_{(F^\infty)} dX_1^\infty \ldots dX_{2n}^\infty.$$

По правилу замены переменных

$$\int\limits_{(F_*^{(0)})} dx_1 \ldots dx_{2n} = \int\limits_{(F^\infty)} \bar{I}_\infty \, dX_1^\infty \ldots dX_{2n}^\infty,$$

где

$$\bar{I}_\infty = \frac{\partial (x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial \left(X_1^\infty, \ldots, X_n^\infty\right)}.$$

Обозначим через $I_1, I_2, \ldots$ якобианы последовательных отображений (7.26):

$$I_1 = \det \frac{\partial B_1}{\partial X^{(1)}}, \quad I_2 = \det \frac{\partial B_2}{\partial X^{(2)}}, \ldots$$

Тогда, в соответствии со свойствами якобианов,

$$\bar{I}_s = \frac{\partial (x_1, \ldots, x_{2n})}{\partial \left(X_1^{(s)}, \ldots, X_{2n}^{(s)}\right)} = I_1 I_2 \ldots I_s.$$

Якобиан $\bar{I}_\infty$ мы получим как предел

$$\bar{I}_\infty = \lim_{s \to \infty} \bar{I}_s = \prod_{s=1}^{\infty} I_s,$$

и так как $I_s \equiv 1$ при всех s, то $\bar{I}_\infty \equiv 1$. Следовательно, $\operatorname{mes} \operatorname{Re} F_*^{(0)} = \operatorname{mes} \operatorname{Re} F^\infty$. Так как $\operatorname{mes} \operatorname{Re} F^\infty = (2\pi)^n \operatorname{mes} \operatorname{Re} G^\infty$ и $\operatorname{mes} \operatorname{Re} F^{(0)} = (2\pi)^n \operatorname{mes} \operatorname{Re} G^{(0)}$, то из § 6.10 вытекает, что $\operatorname{mes} \operatorname{Re} F_*^{(0)}$ мало отличается от $\operatorname{mes} \operatorname{Re} F^{(0)}$.

§ 7.8. Обоснование справедливости перехода от решения «предельной» системы к решению исходной системы с помощью отображения S_∞

Из изложенного в §§ 7.2—7.5 следует, что если дана вещественная функция $X^\infty(t)$, определяемая формулами (7.09) и $X^\infty(t) \in F^\infty$, то отображение $X^{(0)}(t) = S_\infty X^\infty(t) = \lim S_s X^\infty(t)$ существует при всех $0 \leqslant t < \infty$; между значениями функций $X^{(0)}(t)$ и $X^\infty(t)$ при любом фиксированном t имеет место взаимно однозначное соответствие. Если начальное значение $X^\infty(0)$, а также и все точки $X^\infty(t)$, принадлежат области $\operatorname{Re} F^\infty$, то функция $X^{(0)}(t)$ будет принадлежать целиком области $\operatorname{Re} F_*^{(0)}$.

Докажем теперь, что функция $X^{(0)}(t)$, полученная таким путем, есть решение исходной системы дифференциальных уравнений (7.01) при начальном условии $X^{(0)}(0)=S_\infty X^\infty(0)$.

Для этого сопоставим друг с другом систему (7.01_s) при каком-либо фиксированном $s\geqslant 1$ и систему (7.06), т. е.

$$\dot{X}=Y^{(s)}(X),\qquad \dot{X}=Y^\infty(X), \tag{7.27}$$

и сравним их решения $X^{(s)}(t)$ и $X^\infty(t)$ соответственно при одних и тех же начальных условиях: $X^{(s)}(0)=X^\infty(0)$.

Выше было получено (см. § 7.1), что если $X\in F^\infty$, то разность между правыми частями этих систем удовлетворяет оценке (7.08)

$$\|Y^{(s)}(X)-Y^\infty(\overline{X})\|<3\overline{\beta}_{s-1},\quad \overline{\beta}_{s-1}=\delta_{s-1}^{2T-4n-18}. \tag{7.28}$$

С помощью этой оценки может быть доказана следующая лемма:

Лемма. *Существует конечный отрезок* $[0, t^*]$, *на котором для разности решений систем* (7.27) *справедлива оценка*

$$\|X^{(s)}(t)-X^\infty(t)\|\leqslant 3\overline{\beta}_{s-1}, \tag{7.28*}$$

причем t^* *не зависит от* s.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y(t)=$ $=X^{(s)}(t)-X^\infty(t)$ и уравнение для $y(t)$:

$$\dot{y}=Y^{(s)}(X^\infty+y)-Y^\infty(X^\infty). \tag{7.29}$$

В начальный момент $t=0$ имеем $y(0)=0$. Поэтому неравенство $\|y(t)\|<3\overline{\beta}_{s-1}$ будет оставаться справедливым, во всяком случае в некотором промежутке $0\leqslant t<t^*$. Через $t=t^*$ обозначим ближайший к $t=0$ момент, в который достигается равенство $\|y(t^*)\|=3\overline{\beta}_{s-1}$. Но тогда функция $X^{(s)}(t)=X^\infty(t)+y(t)$ не выходит при $0\leqslant t\leqslant t^*$ за пределы $3\overline{\beta}_{s-1}$-окрестности функции $X^\infty(t)$. Для рассматриваемой же выше последовательности областей $F^{(s)}$ $(s=0, 1, 2, \ldots)$ мы имеем $F^{(s+1)}+3\beta_{s-1}\subset F^{(s)}$, и так как $\overline{\beta}_{s-1}<\beta_{s-1}$, то $F^{(s+1)}+3\overline{\beta}_{s-1}\subset F^{(s)}$ и тем более $F^\infty+3\overline{\beta}_{s-1}\subset F^{(s)}$ (т. е. любая точка области F^∞ принадлежит области $F^{(s)}$ вместе с $3\overline{\beta}_{s-1}$-окрестностью). Следовательно, поскольку $X^\infty(t)\in F^\infty$, то $X^\infty(t)+y(t)$, а также и весь отрезок с концами X^∞, $X^\infty+y$ принадлежат области $F^{(s)}$ при $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Применяя формулу Лагранжа к разности $Y^{(s)}(X^\infty + y) - Y^{(s)}(X^\infty)$, получим, что при $0 \leqslant t \leqslant t^*$

$$\| Y^{(s)}(X^\infty + y) - Y^{(s)}(X^\infty) \| \leqslant C \| y \|,$$

где $C \geqslant \left\| \dfrac{\partial Y^{(s)}}{\partial X} \right\|$ в области $F^{(s)}$. В соответствии с (5.02), (4.26), (4.28) и с определением нормы матрицы, имеем

$$\left\| \frac{\partial Y^{(s)}}{\partial X} \right\| \leqslant \left\| \frac{\partial^2 H_0^{(s)}}{\partial P^2} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 H_1^{(s)}}{\partial X^2} \right\| < 2\Theta + 2n 2\delta_{s-1}^{2T-4n-18}.$$

Так как $\Theta \geqslant 1$ и $4n\delta_{s-1}^{2T-4n-18} < 1$ согласно имеющимся оценкам для δ и T, то можно положить

$$C = 3\Theta.$$

Поскольку в соответствии (7.28 *) имеем на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t^*$

$$\| y \| \leqslant 3 \overline{\beta}_{s-1},$$

то на этом отрезке

$$\| Y^{(s)} (X^\infty + y) - Y^{(s)} (X^\infty) \| \leqslant 3\Theta \| y \| \leqslant 9\, \Theta\, \overline{\beta}_{s-1},$$

а правая часть системы (7.29) ввиду (7.28) удовлетворяет неравенству

$$\| Y^{(s)} (X^\infty + y) - Y^\infty (X^\infty) \| < (1 + 3\,\Theta) 3\, \overline{\beta}_{s-1}.$$

Мы имеем, следовательно, $y(0) = 0$ и

$$\left\| \frac{dy}{dt} \right\| < (1 + 3\Theta) \cdot 3\, \overline{\beta}_{s-1}$$

при $0 \leqslant t \leqslant t^*$. По формуле Лагранжа

$$\| y(t^*) \| = \| y(t^*) - y(0) \| < (1 + 3\Theta)\, 3\, \overline{\beta}_{s-1} t^*,$$

так что из $\| y(t^*) \| = 3\, \overline{\beta}_{s-1}$ вытекает

$$t^* > \frac{1}{1 + 3\Theta}.$$

Мы получили, следовательно, что неравенство (7.28*) соблюдается, во всяком случае на конечном отрезке $0 \leqslant t \leqslant t^*$, длина которого не зависит от индекса s. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь отображение S_s функций $X^{(s)}(t)$ и $X^{\infty}(t)$ при условии $X^{\infty}(t) \in F^{\infty}$. Поскольку мы принимали $X^{(s)}(0) = X^{\infty}(0)$, то отображение $X^{(0)}(t) = S_s X^{(s)}(t)$ есть точное решение исходной системы (5.01_0) при начальном условии $X^{(0)}(0) = S_s X^{\infty}(0)$. Отображение же $S_s X^{\infty}(t)$ не является точным решением системы (5.01_0). Оценим разность $S_s X^{(s)}(t) - S_s X^{\infty}(t)$, используя свойство оператора S_s, согласно которому (см. 7.13*)

$$\| S_s X_2 - S_s X_1 \| < 2^s \| X_2 - X_1 \|, \tag{7.30}$$

если отрезок $[X_1, X_2]$ принадлежит области $F^{(s)}$.

Как было показано выше, весь отрезок с концами $X^{\infty}(t)$, $X^{(s)}(t) = X^{\infty}(t) + y(t)$ принадлежит при $0 \leqslant t \leqslant t^*$ области $F^{(s-1)}$. Следовательно, согласно (7.30) и (7.28*)

$$\| S_s X^{(s)}(t) - S_s X^{\infty}(t) \| < 2^s 3 \beta_{s-1} \tag{7.31}$$

на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t^*$.

Пусть теперь $s \to \infty$. Последовательность $S_s X^{(s)}(t)$ $(s = 1, 2, 3, \dots)$ представляет собой последовательность решений исходной системы (7.01_0) при начальных условиях $S_s X^{(s)}(0)$ $(s = 1, 2, \dots)$ соответственно. Так как мы принимаем при всех s $X^{(s)}(0) = X^{\infty}(0)$, то $S_s X^{(s)}(0) = S_s X^{\infty}(0) \to S_{\infty} X^{\infty}(0)$ при $s \to \infty$. В силу же непрерывности решения по начальным условиям эта последовательность решений стремится на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant t^*$ к решению $X^{(0)}(t)$ системы (7.01) при начальном условии $S_{\infty} X^{\infty}(0)$. Вместе с тем $2^s 3 \beta_{s-1} \to 0$ при $s \to \infty$, поэтому в силу (7.31) пределы последовательностей $S_s X^{(s)}(t)$ и $S_s X^{\infty}(t)$ совпадают между собой на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Следовательно,

$$\lim_{s \to \infty} S_s X^{\infty}(t) = S_{\infty} X^{\infty}(t) = X^{(0)}(t)$$

на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t^*$, причем $X^{(0)}(t)$ есть решение исходной системы (7.01_0) при начальном условии $S_{\infty} X^{\infty}(0)$.

Но отсюда вытекает, что $S_{\infty} X^{\infty}(t)$ есть решение исходной системы (7.01_0) на любом как угодно большом отрезке времени t. Действительно, пусть дан отрезок $0 \leqslant t \leqslant L$. Разобьем его на равные отрезки $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ... такие, что длина каждого из них равна t^*. Строим $X^{\infty}(t)$ на всем отрезке $0 \leqslant t \leqslant L$. При $0 \leqslant t \leqslant t_1$ имеем $X^{(0)}(t) = S_{\infty} X^{\infty}(t)$, где $X^{(0)}(t)$ — решение исходной системы при начальном условии $X^{(0)}(0)=S_\infty X^\infty(0)$. Пусть $X^\infty(t_1)=X_1^\infty$, $X^{(0)}(t_1)=X_1^{(0)}$. Тогда в силу взаимной однозначности $X_1^{(0)}=S_\infty X_1^\infty$. Рассмотрим $X^\infty(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$. Функция $S_\infty X^\infty(t)$ представит на этом отрезке решение системы (7.01_0) с начальными условиями $S_\infty X_1^\infty=X_1^{(0)}$ и в силу единственности по начальным условиям она представляет собой продолжение решения $X^{(0)}(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$. Рассматривая далее отрезки $[t_2, t_3]$, $[t_3, t_4], \ldots$ и т. д., придем к заключению, что $S_\infty X^\infty(t)$ есть решение системы (7.01_0) на всем отрезке $0\leqslant t\leqslant L$ при начальном условии $S_\infty X^\infty(0)$.

§ 7.9. Анализ характера решения исходной системы

Проанализируем характер полученного решения исходной системы. Переменную исходной системы будем обозначать опять, как и в гл. III, через $x=(p, q)$.

Пусть дана вещественная точка $X^\infty=(P^\infty, Q^\infty)$ области F^∞. Ее отображение $S_\infty X^\infty$ мы получим как предел при $s\to\infty$ отображений $S_s X^\infty$. В соответствии с (7.23*) имеем

$$x=X^\infty+\sum_{\|k\|\geqslant 0} f_k(P^\infty)e^{i(k,Q^\infty)}, \tag{7.32}$$

где $f_k(P^\infty)$ — аналитические функции P^∞. Если записать эту формулу отдельно для векторов p, q, получим

$$\begin{aligned} p&=P^\infty+\sum_{\|k\|\geqslant 0} f_{pk}(P^\infty)\,e^{i(k,Q^\infty)},\\ q&=Q^\infty+\sum_{\|k\|\geqslant 0} f_{qk}(P^\infty)\,e^{i(k,Q^\infty)}, \end{aligned} \tag{7.32*}$$

где f_{pk}, f_{qk} — аналитические функции P^∞. При этом в соответствии с оценкой (7.15) леммы § 7.4

$$\|p-P^\infty\|<2\bar{\bar{\bar{\beta}}},\quad \|q-Q^\infty\|<2\bar{\bar{\bar{\beta}}}. \tag{7.33}$$

Подставив в (7.32*) выражения (7.09*) для P^∞, Q^∞, получим искомое решение $x(t)=(p(t), q(t))$ исходной системы в виде

$$\left\{\begin{aligned} p(t)&=P_0^\infty+\sum_{\|k\|\geqslant 0} f_{pk}(P_0^\infty)\,e^{i(k,Q_0^\infty+\omega^\infty t)},\\ q(t)&=Q_0^\infty+\omega^\infty t+\sum_{\|k\|\geqslant 0} f_{qk}(P_0^\infty)\,e^{i(k,\,Q_0^\infty+\omega^\infty t)}, \end{aligned}\right. \tag{7.34}$$

определенное на всей оси t, причем позиционная переменная $p(t)$ представлена в чисто тригонометрической форме, а компоненты $\omega_1^\infty, \ldots, \omega_n^\infty$ вектора ω^∞ несоизмеримы между собой (см. § 7.2). Это решение зависит от $2n$ произвольных постоянных, какими являются компоненты векторов P_0^∞, Q_0^∞, связанных с начальными векторами p_0, q_0 формулами (7.32*).

§ 7.10. Формулировка окончательного результата

Мы можем сформулировать окончательно следующий результат.

Пусть дана каноническая система (1.08) с функцией Гамильтона

$$H(p, q) = H_0(p) + H_1(p, q),$$

где p — позиционная и q — угловая переменные. Пусть в области $F^{(0)}$ ($p \in G^{(0)}$, $|\operatorname{Im} q| \leqslant \rho_0 \geqslant 1$), где G^0 — некоторая выпуклая область переменной p, функция $H(p, q)$ аналитична и

$$|H_1(p, q)| \leqslant M, \quad \det \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \neq 0.$$

Пусть число δ, связанное с M соотношением $M = \delta^T$, удовлетворяет неравенствам (3.53), (4.19*), (4.21), (6.12), (6.55) — (6.57), из которых вытекают следующие неравенства для M:

$$\left\{\begin{array}{l} M < \left[\dfrac{1}{4n}\left(\dfrac{e}{n+1}\right)^{n+1}\right]^T, \quad M < \left(\dfrac{1}{8n}\right)^T, \quad M < \left(\dfrac{1}{n\Theta}\right)^T, \\[2ex] M < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{T}{1-m}}, \quad M < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{T}{\alpha m}}, \quad M < \left(\dfrac{\varrho_0}{9}\right)^{\frac{T}{m}}, \\[2ex] M < \left(\dfrac{4nT}{e}\right)^{-2nT}, \quad M < \left(14\Theta + \dfrac{8\Theta}{\theta} + 3\right)^{-T}, \\[2ex] \qquad M \ll \left(\dfrac{\theta}{\Theta}\right)^{Tn} \cdot \left(\dfrac{1}{D_1} \cdot \dfrac{1}{4^{n+2}}\right)^T, \quad M < \theta^{\frac{T}{T-8}}, \end{array}\right. \tag{7.35}$$

где α — любое положительное число между 0 и 1, $m = 1/4n$, $T \geqslant (4n+12)/(1-\alpha)$, числа θ и Θ находятся при анализе матрицы $\frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2}$ (см. § 6.2), а число D_1 находится при анализе областей $\Omega^{(s)}$ (см. § 6.8).

Если M удовлетворяет всем этим неравенствам, то существует область $F_*^{(0)}$ векторов p, q такая, что решение исходной системы при начальных условиях $p_0, q_0 \in \operatorname{Re} F_*^{(0)}$ является условно-периодическим, описываемым формулами (7.34). При этом мера (по Лебегу) области $\operatorname{Re} F_*^{(0)}$ мало отличается от меры области $\operatorname{Re} F^{(0)}$.

Надо, конечно, признать, что оценки (7.35) для M очень малы, и они имеют лишь теоретическое значение. Поэтому актуальным является вопрос об улучшении этих оценок и построения рассматриваемых условно-периодических решений в конкретных задачах.

§ 7.11. Интерпретация результатов с точки зрения теории динамических систем

Полученные результаты можно интерпретировать с точки зрения теории динамических систем, т. е. систем, описываемых дифференциальными уравнениями вида (1.01) или более общими не обязательно каноническими.

Как известно, движение динамической системы, соответствующее формулам

$$p_i = p_{i0}, \quad q_i = q_{i0} + \omega_i t \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7.36}$$

где p_i — позиционные, а q_i — угловые координаты, называется движением на n-мерном торе. Сам тор определяется числами $p_1, \ldots, p_n$, а положение точки на торе определяется угловыми координатами $q_1, \ldots, q_n$. Если частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ несоизмеримы между собой, то движение на торе называется условно-периодическим. Так, например, в двумерном случае $n=2$ тор может иметь вид, изображенный на рис. 8. Координаты p_1, p_2 определяют размеры тора, а координаты q_1, q_2 суть географические координаты точки на торе. Траектория $x(t)$ условно-периодического движения целиком заполняет при $t \to \infty$ всю поверхность тора или, как говорят, всюду плотная на торе. Иначе говоря, для любой заданной на торе точки R и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое t^* и даже бесчисленное множество значений t_j^* $(j=1, 2, 3, \ldots)$ таких, что расстояние между точками $x(t_j^*)$ и R на торе меньше ε.

Выше мы получили, что в пространстве переменных P^∞, Q^∞ движение, соответствующее начальным условиям в вещественной компоненте области $F^{(0)}$, описывается формулами именно вида (7.36). Таким образом, что движение есть движение на торе, определяемом вектором $P^\infty=\mathrm{const}$. Обозначим этот тор через T_{P^∞}. В пространстве исходных переменных p, q это движение описывается формулами (7.34). Его можно также рассматривать как условно-периодическое движение с несоизмеримыми между собой частотами $\omega_1^\infty, \ldots, \omega_n^\infty$ на «неправильном» торе T_p, определяемом формулами (7.32*), параметры $p_1, \ldots, p_n$ которого вдоль поверхности не постоянны, а являются функциями угловых координат $q_1, \ldots, q_n$. Правда, изменения $p_1, \ldots, p_n$ в зависимости от $q_1, \ldots, q_n$ малы.

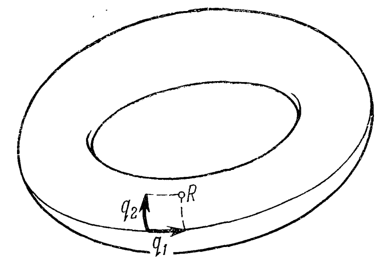

Рис. 8.

В теории динамических систем имеется понятие инвариантного множества по отношению к системе дифференциальных уравнений. Так называется множество, обладающее тем свойством, что если ему принадлежит одна какая-либо точка интегральной кривой рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, то тогда эта интегральная кривая неограниченно продолжаема на всей оси t (при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$) и вся она принадлежит этому множеству.

Полученная нами область $\operatorname{Re} F_*^{(0)}$ представляет собой инвариантное множество по отношению к исходной системе уравнений.

Действительно, пусть рассматривается интегральная кривая $x(t)=(p(t), q(t))$ этих уравнений такая, что одна из ее точек, например $x(0)$, принадлежит области $\operatorname{Re} F_*^{(0)}$. Тогда этой точке соответствует в области F^∞ одна и только одна вещественная точка $X^\infty(0)$ такая, что $x(0)=S_\infty X^\infty(0)$. В пространстве переменной X^∞ интегральная кривая $X^\infty(t)=(P^\infty(t),\ Q^\infty(t))$ с начальной вещественной точкой $X^\infty(0)$ определена на всей оси t, т. е. неограниченно продолжаема и описывается формулами:

$$P^\infty(t)=P^\infty(0)=\mathrm{const},\quad Q^\infty(t)=Q^\infty(0)+\omega^\infty t, \tag{7.37}$$
$$\omega^\infty=\left(\frac{\partial H_0^\infty}{\partial P^\infty}\right)_{P^\infty=P^\infty(0)},$$

причем $X^\infty(t)\in\operatorname{Re}F^\infty$ при всех $-\infty<t<\infty$ и вещественном $Q^\infty(0)$. Интегральная кривая $x(t)=(p(t),\ q(t))$ в пространстве переменной x представится как отображение $S_\infty X^\infty(t)$ и в силу взаимно однозначной зависимости между точками областей $F_*^{(0)}$ и F^∞ имеем $x(t)\in\operatorname{Re}F_*^{(0)}$ при всех t. Таким образом, область $\operatorname{Re}F_*^{(0)}$ представляет собой инвариантное множество.

Из таких же рассуждений вытекает, что не только область $F^{(0)}$, но каждый тор T_{P^∞} или T_p представляют собой инвариантные множества.

Действительно, пусть в момент $t=0$ точка траектории $x(t)=(p(t),\ q(t))$ лежит на «неправильном» торе T_p. Тогда эта точка соответствует некоторой точке $X^\infty(0)$ в пространстве X^∞, а последняя определяет в этом пространстве единственный тор T_{P^∞}. При всех t траектория движения в пространстве переменной X^∞ остается на торе T_{P^∞}, а следовательно, в пространстве x она остается на торе T_p, который является отображением S_∞ тора T_{P^∞}. Эта траектория является условно-периодической с фиксированным для тора T_p частотным базисом $\omega_1^\infty, \ldots, \omega_n^\infty$. Существенно отметить, что этот базис определяется обеими начальными векторами p_0, q_0.

ГЛАВА VIII

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ

§ 8.1. Схема построения условно-периодических решений исходной системы

Методика построения решения исходной системы (1.08), описанная в предыдущем параграфе и приведшая нас к формулам (7.34), основана на построении последовательности отображений $S_s X^\infty(t)$, где $X^\infty(t)$ — решение «предельной» системы (5.01_∞). Однако $X^\infty(t)$, а вместе с тем и все $S_s X^\infty(t)$ ($s=1, 2, \ldots$), мы практически найти не можем. Мы имеем здесь дело с теоретическим построением решения, не осуществимым практически. Для практического же построения решения, выражаемого формулами (7.34), следует избрать несколько иной путь. Конечно, речь может идти лишь о приближенном построении решения.

Рассмотрим вместо точных систем уравнений (5.01_s) приближенные системы:

$$\dot{\overline{X}}^{(s)}=\overline{Y}^{(s)}(\overline{X}^{(s)}), \tag{8.01}$$

где

$$\overline{X}^{(s)}=(\overline{P}^{(s)}\overline{Q}^{(s)}),\ \overline{Y}^{(s)}=\left(0,\ \frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial \overline{P}^{(s)}}\right),$$

или

$$\dot{\overline{P}}^{(s)}=0,\ \dot{\overline{Q}}^{(s)}=\frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial \overline{P}^{(s)}}, \tag{8.02}$$

получающиеся из (5.01_s), если отбросить «возмущающую» часть $H^{(s)}$ гамильтониана $H^{(s)}$. Пусть начальное значение исходной переменной $x=(p,\ q)$ вещественно и равно $x_0=(p_0,\ q_0)$. Тогда все рассматриваемые ниже функции и числа будут вещественными. Предполагаем, что $x_0 \in F_*^{(0)}$ (проверить это мы, к сожалению, не можем). Начальное значение $X_0^{(s)}=(P_0^{(s)},\ Q_0^{(s)})$ для системы (5.01_s)

ищется с помощью последовательности канонических преобразований:

$$X_0^{(1)} = B_1^{-1} x_0, \quad X_0^{(2)} = B_2^{-1} X_0^{(1)}, \ldots, \quad X_0^{(s)} = B_s^{-1} X_0^{(s-1)},$$

сводящихся к отображению $X_0^{(s)} = S_s^{-1} x_0$. Если $x_0 \in F_*^{(0)}$, то согласно доказанному выше $X_0^{(s)} \in F^{(s)}$.

Решение уравнений (8.02) при этих начальных условиях получим сразу в виде

$$\overline{P}^{(s)} = P_0^{(s)}, \quad \overline{Q}^{(s)} = Q_0^{(s)} + \omega^{(s)} t, \tag{8.03}$$

где

$$\overline{\omega}^{(s)} = \left(\frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial \overline{P}^{(s)}} \right)_{P^{(s)} = P_0^{(s)}}.$$

При этом очевидно, что $(\overline{P}^{(s)}, \overline{Q}^{(s)}) \in F^{(s)}$ при всех t.

Возвратившись к $x = (p, q)$ с помощью тех же канонических преобразований, т. е. построив

$$\overline{X}^{(s-1)}(t) = B_s \overline{X}^{(s)}(t), \ldots, x^{(s)}(t) = B_1 \overline{X}^{(1)}(t),$$

получим приближенное решение:

$$x^{(s)}(t) = (p^{(s)}(t), \quad q^{(s)}(t)) = S_s \overline{X}^{(s)}(t)$$

исходной системы при начальном значении $x_0 = (p_0, q_0)$. В соответствии с (7.22) это решение будет иметь вид

$$x^{(s)} = X^{(s)} + \sum_{\|k\| \geqslant 0} f_k^{(s)} (\overline{P}^{(s)}) e^{i(k, \overline{Q}^{(s)})}, \tag{8.04}$$

или

$$\left\{ \begin{aligned} p^{(s)} &= \overline{P}^{(s)} + \sum_{\|k\| \geqslant 0} f_{pk}^{(s)} (\overline{P}^{(s)}) e^{i(k, \overline{Q}^{(s)})}, \\ q^{(s)} &= \overline{Q}^{(s)} + \sum_{\|k\| \geqslant 0} f_{qk}^{(s)} (\overline{P}^{(s)}) e^{i(k, \overline{Q}^{(s)}} \end{aligned} \right. \tag{8.04*}$$

где $\overline{P}^{(s)}$ и $\overline{Q}^{(s)}$ выражаются согласно (8.03), а f_{pk}, f_{qk} аналитические функции $\overline{P}^{(s)}$. В соответствии с изложенным в гл. VII (в частности, см. § 7.6), функции $f_{pk}^{(s)}$, $f_{qk}^{(s)}$ и постоянные $P_0^{(s)}, Q_0^{(s)}, \overline{\omega}^{(s)}$ стремятся при $s \to \infty$ к функциям f_{pk}, f_{qk} и постоянным $P_0^{\infty}, Q_0^{\infty}, \omega^{\infty}$, выписанным в точном решении (7.34).

§ 8.2. Вывод оценок погрешностей приближенного решения

Оценим погрешность приближенного решения $x^{(s)}(t)$, построенного таким путем, по отношению к точному решению.

Для этого сначала оценим разность между решением $X^{(s)}(t)$ точных уравнений (5.01_s) и решением $\overline{X}^{(s)}(t) = (\overline{P}^{(s)}(t), \overline{Q}^{(s)}(t))$ упрощенных уравнений (8.01). С этой целью заметим, что точное решение исходной системы связано с решением $X^{(s)}(t)$ $(s=1, 2, \dots)$ систем (5.01_s) и с вещественным решением $X^{\infty}(t)$ «предельной» системы (5.01_{∞}) формулами:

$$x(t)=S_s X^{(s)}(t), \tag{8.05}$$

$$x(t)=S_{\infty}X^{\infty}(t)=\lim_{s\to\infty} S_s X^{\infty}(t). \tag{8.06}$$

При этом, так как $x(t) \in F_*^{(0)}$, то $X^{(s)}(t) \in F^{(s)}$ для всех t. Заметим также, что мы можем рассматривать последовательность систем (5.01_0), (5.01_1), ..., начиная с любой системы (5.01_s), т. е. считая какую-либо фиксированную систему (5.01_s) исходной. Тогда, если $X^{(s)}(t)$ есть решение этой системы, то оно связано с $X^{\infty}(t)$ по формуле, аналогичной (8.06):

$$X^{(s)}(t)=\lim_{j\to\infty} B_{s+1}B_{s+2}\cdot\,\cdot\,\cdot B_j X^{\infty}(t).$$

Можно применить оценку (7.21), согласно которой

$$\|X^{(s)}(t)-X^{\infty}(t)\|<2\overline{\overline{\beta}}_s=2\delta^{T-2n-7} \tag{8.07}$$

при всех t.

Отдельно для векторов $(P^{(s)}, Q^{(s)})$, (P^{∞}, Q^{∞}) оценка (8.07) перепишется в виде

$$\|P^{(s)}(t)-P^{\infty}(t)\|<2\overline{\overline{\beta}}_s, \tag{8.08}$$

$$\|Q^{(s)}(t)-Q^{\infty}(t)\|<2\overline{\overline{\beta}}_s, \tag{8.08*}$$

где $P^{\infty}(t)=P_0^{\infty}=\mathrm{const}$, $Q^{\infty}(t)=Q_0^{\infty}+\omega^{\infty}t$ (см. (7.37)).

Начальные условия для решения (8.03) упрощенной системы и для решения $X^{(s)}(t)$ соответствующей точной системы мы выбираем одинаковыми. Следовательно, $\overline{P}^{(s)}=P^{(s)}(0)$ и для $\overline{P}^{(s)}$ справедлива оценка (8.08)

$$\|\overline{P}^{(s)}-P^{\infty}\|<2\overline{\overline{\beta}}_s. \tag{8.09}$$

Из (8.08) и (8.09) вытекает оценка разности между $\overline{P}^{(s)}$ и $P^{(s)}(t)$, справедливая при всех t:

$$\|\overline{P}^{(s)}-P^{(s)}(t)\|<4\overline{\overline{\beta}}_s. \tag{8.10}$$

Из (8.08) и (8.09) следует также, что, поскольку $P^\infty \in G^\infty$, точка $P^{(s)}(t)$ при любом t и точка $\overline{P}^{(s)}$ лежат внутри сферы с центром P^∞ и радиусом $2\overline{\overline{\beta}}_s$. Так как $\beta_s=\delta_s^3$, $\overline{\overline{\beta}}_s=\delta_s^{T-2n-7}$, $T>4n+12$, то $2\overline{\overline{\beta}}_s<3\beta_s$. Вместе с тем $G^\infty+3\beta_s\subset G^{(s+1)}+3\beta_s\subset\mathfrak{G}^{(s)}$ (см. § 7.4). Следовательно, отрезок $[P^{(s)}, \overline{P}^{(s)}]$ лежит целиком в области $G^{(s)}$ при всех t. Поскольку $\overline{Q}^{(s)}(t)$, $Q^{(s)}(t)$ — вещественные, то точки отрезка $[\overline{Q}^{(s)}, Q^{(s)}]$ всегда принадлежат области $|\operatorname{Im} q|\leqslant\varrho_s$. Таким образом, отрезок $[\overline{X}^{(s)}, X^{(s)}]$ принадлежит целиком области $F^{(s)}$.

Для разности между $\overline{P}^{(s)}$ и $P^{(s)}(t)$ мы можем получить также другую оценку, если рассмотрим непосредственно дифференциальные уравнения для $P^{(s)}$ и $\overline{P}^{(s)}$:

$$\dot{P}^{(s)}=-\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial Q^{(s)}},\quad \dot{\overline{P}}^{(s)}=0, \tag{8.11}$$

учитывая, что при $(P^{(s)}, Q^{(s)})\in F^{(s)}$ справедлива оценка (4.26):

$$\left\|\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial Q^{(s)}}\right\|<\overline{\beta}_{s-1}=\delta_{s-1}^{2T-4n-15}.$$

Отсюда получим, что $\|\dot{P}^{(s)}-\dot{\overline{P}}^{(s)}\|<\overline{\beta}_{s-1}$ и

$$\|P^{(s)}(t)-\overline{P}^{(s)}\|<\overline{\beta}_{s-1}t. \tag{8.12}$$

Найдем теперь оценку разности $Q^{(s)}(t)-\overline{Q}^{(s)}(t)$, для чего опять рассмотрим непосредственно дифференциальные уравнения:

$$\dot{Q}^{(s)}=\frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial P^{(s)}}+\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial P^{(s)}},\quad \dot{\overline{Q}}^{(s)}=\frac{\partial H_0^{(s)}}{\partial\overline{P}^{(s)}}\bigg|_{\overline{P}^{(s)}=P_0^{(s)}},$$

учитывая, что при $(P^{(s)}, Q^{(s)})\in F^{(s)}$ имеют место оценки (4.26), (4.28):

$$\left\|\frac{\partial H_1^{(s)}}{\partial P^{(s)}}\right\|<\overline{\beta}_{s-1},\quad \left\|\frac{\partial^2 H_0^{(s)}}{\partial P^{(s)2}}\right\|<2\Theta.$$

С их помощью находим

$$\|\dot{Q}^{(s)}-\dot{\overline{Q}}^{(s)}\|\leqslant 2\Theta\,\|P^{(s)}-\overline{P}^{(s)}\|+\overline{\beta}_{s-1}$$

и ввиду (8.10)

$$\|Q^{(s)}(t)-\overline{Q}^{(s)}(t)\|<(8\,\Theta\overline{\overline{\beta}}_s+\overline{\beta}_{s-1})\,t. \qquad (8.13)$$

Эта оценка перекрывает оценку (8.12), так что можно выписать общую оценку для разности векторов

$$\|X^{(s)}(t)-\overline{X}^{(s)}(t)\|<(8\,\Theta\overline{\overline{\beta}}_s+\overline{\beta}_{s-1})\,t, \qquad (8.14)$$

причем при всех t имеем $X^{(s)}$, $\overline{X}^{(s)}\in F^{(s)}$.

Мы получили оценку погрешности решения $\overline{X}^{(s)}$ упрощенных уравнений (8.01) по сравнению с решением $X^{(s)}$ точных уравнений (5.01_s). Теперь нам надо сравнить точное $x(t)$ и приближенное $x^{(s)}(t)$ решения исходной системы, определяемые формулами

$$x(t)=S_s X^{(s)}(t), \qquad x^{(s)}(t)=S_s\overline{X}^{(s)}(t).$$

Мы показали выше, что все отрезки $[X^{(s)},\ \overline{X}^{(s)}]\in F^{(s)}$ при всех t. Но тогда в соответствии с (7.13*) будем иметь

$$\|x(t)-x^{(s)}(t)\|<2^s\|X^{(s)}(t)-\overline{X}^{(s)}(t)\|$$

или, учитывая (8.14),

$$\|x(t)-x^{(s)}(t)\|<2^s(8\Theta\overline{\overline{\beta}}_s+\overline{\beta}_{s-1})\,t. \qquad (8.15)$$

Это и есть искомая оценка погрешности s-го приближения $x^{(s)}(t)$ по отношению к точному решению $x(t)$ исходной системы на заданном промежутке времени. Из нее также вытекает, что, действительно, последовательность приближенных решений (8.04*), построенных указанным путем, стремится при $s\to\infty$ к точному решению на всей оси t (точнее сказать, на любом сколько угодно большом промежутке времени t).

Оценку (8.15) можно переписать в несколько ином виде, если вспомнить, что

$$\overline{\beta}_{s-1}=\delta_{s-1}^{2T-4n-15},\quad \overline{\overline{\beta}}_s=\delta_s^{T-2n-7},\quad M_s=\delta_s^T,$$

$$T\geqslant(4n+12)/(1-\alpha),\qquad \delta_s\leqslant\delta_{s-1}^{1+\alpha}\qquad (s=1,\,2,\,\ldots).$$

Так как $\overline{\beta}_{s-1} < \overline{\overline{\beta}}_s$, то (8.15) перепишется в виде

$$\|x(t) - x^{(s)}(t)\| < L \cdot 2^s M^{d\,(1+\alpha)^s}\, t, \tag{8.16}$$

где

$$d = 1 - \frac{2n+7}{T}, \quad L = 1 + 4\Theta.$$

Чем больше T и чем меньше M, тем скорость убывания погрешности с ростом s больше.

Оценки (8.15), (8.16) вполне отражают характер погрешности угловой переменной $q^{(s)}$. Компоненты этой переменной изменяются, грубо говоря, линейным образом по отношению ко времени t со скоростью, несколько отличающейся от истинной скорости. Однако компоненты переменной p, а также $p^{(s)}$ испытывают лишь небольшие колебания около своих средних значений. Поэтому оценки (8.15), (8.16) целесообразны для $p^{(s)}(t)$ лишь на некотором промежутке изменения t. Оценку верхнего предела погрешности $p^{(s)}(t)$ на любом сколько угодно большом промежутке времени t можно получить следующим образом.

Рассмотрим выражения для $x = S_s X^{(s)}$ и $x^{(s)} = S_s \overline{X}^{(s)}$ в виде тригонометрических рядов по угловым переменным $Q^{(s)}$, $\overline{Q}^{(s)}$. В соответствии с (7.22) мы получим для $p^{(s)}$, $q^{(s)}$ ряды (8.04) или (8.04*), а для p, q аналогичные ряды:

$$p = P^{(s)} + \sum_{\|k\| > 0} f_{pk}^{(s)}\left(P^{(s)}\right) e^{i\,(k, Q^{(s)})}, \tag{8.17}$$

$$q = Q^{(s)} + \sum_{\|k\| > 0} f_{qk}^{(s)}\left(P^{(s)}\right) e^{i\,(k, Q^{(s)})},$$

где коэффициенты $f_{pk}^{(s)}$, $f_{qk}^{(s)}$ в рядах для p, q и для $p^{(s)}$, $q^{(s)}$ суть одни и те же функции величин $P^{(s)}$ и $\overline{P}^{(s)}$ соответственно. При этом согласно (7.14), поскольку $P^{(s)}$, $Q^{(s)} \in F^{(s)}$, $\overline{P}^{(s)}$, $\overline{Q}^{(s)} \in F^{(s)}$, имеем

$$\begin{aligned} &\|p - P^{(s)}\| < 2\overline{\overline{\beta}}_0, \quad \|q - Q^{(s)}\| < 2\overline{\overline{\beta}}_0, \\ &\|p^{(s)} - \overline{P}^{(s)}\| < 2\overline{\overline{\beta}}_0, \quad \|q^{(s)} - \overline{Q}^{(s)}\| < 2\overline{\overline{\beta}}_0, \end{aligned} \tag{8.18}$$

так что совокупности тригонометрических членов, стоящих под знаком суммы в (8.04) и (8.17), не превышают $2\overline{\overline{\beta}}_0$. Так как к тому же $\|P^{(s)} - \overline{P}^{(s)}\| < 4\overline{\overline{\beta}}_s$ (см. (8.10)), то согласно (8.04) и (8.18)

$$\|p(t)-p^{(s)}(t)\| < \|P^{(s)}-\overline{P}^{(s)}\| + 2\cdot 2\overline{\overline{\beta}}_0 < 4\overline{\overline{\beta}}_s + 4\overline{\overline{\beta}}_0. \quad (8.19)$$

Это и есть искомая оценка погрешности $p^{(s)}(t)$.

Эта оценка гарантирует, что любое приближение $p^{(s)}(t)$ испытывает на любом промежутке времени лишь сравнительно небольшие отклонения от $p(t)$, не превышающие

$$4M_s^{\left(1-\frac{2n+7}{T}\right)} + 4M^{\left(1-\frac{2n+7}{T}\right)}.$$

Вместе с тем она указывает, что если не ограничиваться каким-либо фиксированным промежутком времени t, то любое как угодно далекое приближение $p^{(s)}(t)$ может отклониться от точного решения $p(t)$ с течением времени на конечную величину, не зависящую от s.

ГЛАВА IX

СЛУЧАЙ СОБСТВЕННОГО ВЫРОЖДЕНИЯ (ВАРИАНТ I). ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ

§ 9.1. Постановка задачи

Рассмотренный в предыдущей главе невырожденный случай характеризуется тем, что невозмущенная часть H_0 гамильтониана H исходной системы канонических уравнений зависит от всех позиционных переменных, которые здесь и ниже будем обозначать через $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$, и только от них, причем $\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathrm{p}_i \partial \mathrm{p}_j}\right) \neq 0$. Этот случай с точки зрения методики последовательного применения однотипных канонических преобразований вида (1.15) является основным. Однако в небесной механике встречаются чаще всего такие канонические системы, в которых невозмущенная часть гамильтониана зависит лишь от части позиционных переменных. Тогда H можно записать в виде

$$H = H_{00}(\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_{n_0}) + \mu H_1(\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n, \mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_n),$$

где H_{00} — невозмущенная часть, зависящая от $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_{n0}$ $(n_0 < n)$, а μH_1 — возмущающая часть порядка малости μ (т. е. $H_1 \sim 1$), зависящая также от угловых переменных $\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_n$. Очевидно, что $\det\left(\frac{\partial^2 H_{00}}{\partial \mathrm{p}_i \partial \mathrm{p}_j}\right) \equiv 0$. Такой случай, когда этот определитель обращается в нуль из-за того, что H_{00} зависит не от всех позиционных переменных, называется *случаем собственного вырождения.*

В дальнейшем мы будем пользоваться для простоты снова векторной формой записи. Для этого обозначим опять через p, q векторы с компонентами $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$ и $\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_n$ соответственно и разобьем эти векторы на составляющие $p_0 = (\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_{n_0})$, $p_1 = (\mathrm{p}_{n_0+1}, \ldots, \mathrm{p}_n)$, $q_0 = (\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_{n_0})$, $q_1 = (\mathrm{q}_{n_0+1}, \ldots, \mathrm{q}_n)$.

Тогда $H=H(p, q)$ запишется в виде

$$H(p, q)=H_{00}(p_0)+\mu H_1(p, q). \tag{9.01}$$

Исходная каноническая система уравнений запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{p}_0=-\mu\dfrac{\partial H_1}{\partial q_0}, & \dot{q}_0=\dfrac{\partial H_{00}}{\partial p_0}+\mu\dfrac{\partial H_1}{\partial p_0}, \\ \dot{p}_1=-\mu\dfrac{\partial H_1}{\partial q_1}, & \dot{q}_1=\mu\dfrac{\partial H_1}{\partial p_1}. \end{cases} \tag{9.02}$$

Так как $H_1\sim 1$, то из этих уравнений видно, что q_1 изменяется значительно медленнее, чем q_0, так что q_0 можно считать вектором «быстрых» угловых переменных, а q_1 — вектором «медленных» угловых переменных.

Выделим в $H_1(p, q)$ «вековую» часть $\bar{H}_1(p, q_1)$ по отношению к вектору q_0 быстрых угловых переменных. Тогда

$$H(p, q)=H_{00}(p_0)+\mu\bar{H}_1(p, q)+\mu\tilde{H}_1(p, q), \tag{9.03}$$

где $\tilde{H}_1(p, q)$ — чисто периодическая по q_0 часть функции $H_1(p, q)$.

Рассматриваемый ниже процесс построения условно-периодических решений оказывается применимым тогда, когда усредненная система (см. часть I), получающаяся из (9.02), если в гамильтониане (9.03) отбросить $\mu\tilde{H}_1$ интегрируема или близка к интегрируемой. Эта усредненная система запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{p}_0=0, & \dot{q}_0=\dfrac{\partial H_{00}}{\partial p_0}+\mu\dfrac{\partial \bar{H}_1}{\partial p_0}, \\ \dot{p}_1=-\mu\dfrac{\partial \bar{H}_1}{\partial q_1}, & \dot{q}_1=\mu\dfrac{\partial \bar{H}_1}{\partial p_1}. \end{cases} \tag{9.03*}$$

Если она будет интегрируемой или близкой к интегрируемой, то это значит, что возможно найти каноническую замену переменных $(p, q)\to(P, Q)$, после выполнения которой новый гамильтониан представится в виде

$$H^{(1)}(P, Q)=H_{00}(P_0)+\mu H_1^{(1)}(P)+\mu H_2^{(1)}(P, Q),$$

где $H_2^{(1)}$ имеет более высокий порядок малости, чем $H_1^{(1)}$

(случай, близкий к интегрируемому) или же $H_2^{(1)}\equiv 0$ (интегрируемый случай). Наиболее простыми из этих случаев будут те, когда сама функция $\overline{H}_1$ в (9.03) или вовсе не зависит от q_1 или же может быть непосредственно представлена в виде

$$\overline{H}_1(p, q_1)=H_{01}(p)+H_{11}(p, q_1), \tag{9.04}$$

где H_{11} малò по сравнению с H_{01}, например, $H_{11}\sim\mu$. Для удобства изложения мы ограничимся этими простыми случаями. Таким образом, ставится вопрос о построении условно-периодических решений системы вида (9.02) с гамильтонианом (9.03), причем $\overline{H}_1$ представимо в виде (9.04). При этом предполагается также, что в некоторой области изменения переменных p, q, например, при

$$|\mathrm{p}_j-a_j|<g, \quad |\mathrm{Im}\, \mathrm{q}_j|<\varrho_0 \quad (j=1, \ldots, n), \tag{9.05}$$

где a_j, g, ϱ_0 — фиксированные числа, гамильтониан $H(p, q)$ является аналитической функцией и разлагается в ряд Фурье по угловой переменной q по косинусам. Кроме того, в указанной области

$$\det \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2} \neq 0, \quad \det \frac{\partial^2 \overline{H}_{01}}{\partial p_1^2} \neq 0. \tag{9.06}$$

Заметим, что для рассматриваемой системы (9.02) можно получить непосредственно приближенное решение, если в гамильтониане (9.03) пренебречь функцией $\tilde{H}_1$ (т. е. чисто периодической частью по быстрой угловой переменной), а также членами в $\overline{H}_1(p, q)$, зависящими от q_1 (они, по предположению, малы или равны нулю). Тогда мы получим приближенные уравнения:

$$\dot{p}_0=0, \quad \dot{q}_0=\frac{\partial H_{00}}{\partial p_0}+\mu\frac{\partial H_{01}}{\partial p_0},$$

$$\dot{p}_1=0, \quad \dot{q}_1=\qquad \mu\frac{\partial H_{01}}{\partial p_1},$$

откуда

$$p=p_{00}=\mathrm{const}, \quad q=q_{00}+\omega^{(0)}t, \tag{9.07}$$

где

$$\omega^{(0)} = (\omega_1^{(0)}, \ \omega_2^{(0)}, \ldots, \omega_n^{(0)}),$$

$$\omega_j^{(0)} = \frac{\partial}{\partial p_j}(H_{00} + \mu H_{01})|_{p=p_{00}}, \quad \omega_k^{(0)} = \mu \left.\frac{\partial H_{01}}{\partial p_k}\right|_{p=p_{00}}$$

$$(j = 1, \ldots, n_0), \qquad (k = n_0 + 1, \ldots, n)$$

и p_{00}, q_{00} — начальные значения переменных p, q. Это решение отличается качественно от невозмущенного решения исходной системы (9.02) при $\mu = 0$, для которого

$$\omega_j^{(0)} = \left.\frac{\partial H_{00}}{\partial p_j}\right|_{p=p_{00}} \qquad (j = 1, \ldots, n_0), \tag{9.07*}$$

$$\omega_k^{(0)} = 0, \qquad (k = n_0 + 1, \ldots, n).$$

Решение (9.07) можно назвать, как это принято в небесной механике, *промежуточным решением* (в отличие от невозмущенного). Именно к этому промежуточному решению оказывается близким по своему характеру строящиеся далее точные условно-периодические решения исходной системы.

Методика построения таких решений основана, как и в невырожденном случае, на применении последовательных канонических преобразований. Отличие состоит в том, что на первом шаге выполняется, так сказать, предварительное преобразование. После него гамильтониан системы приобретает такой вид, что все дальнейшие канонические преобразования могут быть выбраны такими же, как и в невырожденном случае.

§ 9.2. Усреднение по быстрым переменным

Упомянутое предварительное каноническое преобразование представляет собой *усреднение по быстрым переменным* (см. ч. I). По существу, оно имеет тот же характер, как и основное преобразование, и отличается тем, что роль угловой переменной играет фактически лишь q_0.

Запишем разложение Фурье функции $H_1(p, q)$ — возмущающей части гамильтониана (9.01), в виде

$$H_1(p, q) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} h_k(p) \cos(k_0 q_0 + k_1 q_1), \tag{9.08}$$

где через k_0 и k_1 обозначены векторы с целочисленными компонентами $\mathrm{k}_1, \ldots, \mathrm{k}_{n_0}$ и $\mathrm{k}_{n_0+1}, \ldots, \mathrm{k}_n$ соответственно. Выделим в H_1 вековую часть $\overline{H}_1(p, q_1)$ по отношению к «быстрой» угловой переменной (отсюда и название этого преобразования), а также остаточный член $R_N H_1$ и соответствующую частную сумму $[\widetilde{H}_1(p, q)]_N$ (также по отношению к q_0). Мы получим:

$$\begin{gathered}\overline{H}_1(p, q_1) = \sum_{\|k_0\|=0} h_k(p)\cos(k, q_1),\\ [\widetilde{H}_1(p, q)]_N = \sum_{1\leqslant\|k_0\|<N} h_k(p)\cos(k_0 q_0 + k_1 q_1),\\ R_N H_1 = \sum_{\|k_0\|\geqslant N} h_k(p)\cos(k_0 q + k_1 q_1),\end{gathered} \tag{9.09}$$

где $\|k_0\| = |\mathrm{k}_1| + \cdots + |\mathrm{k}_{n_0}|$, $\|k_1\| = |\mathrm{k}_{n_0+1}| + \cdots + |\mathrm{k}_n|$, и

$$H(p, q) = H_{00}(p_0) + \mu\overline{H}_1(p, q_1) + \mu[\widetilde{H}_1(p, q)]_N + \mu R_N H_1. \tag{9.10}$$

Вместо p, q введем новые переменные $P = (P_1, \ldots, P_n)$, $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ по формулам

$$p = P + \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = q + \frac{\partial S}{\partial P}, \tag{9.11}$$

где

$$S(P, q) = \mu \sum_{1\leqslant\|k_0\|<N} S_k(P)\sin(k_0 q_0 + k_1 q_1), \tag{9.12}$$

$$S_k(P) = -\frac{h_k(P)}{\left(k_0, \dfrac{\partial H_{00}(P_0)}{\partial P_0}\right)}. \tag{9.12*}$$

Функция $S(P, q)$ получается, как мы видим, из $\mu[\widetilde{H}_1(p, q)]_N$ после замены p на P, коэффициентов $h_k(p)$ на $S_k(P)$ и $\cos(k_0 q_0 + k_1 q_1)$ на $\sin(k_0 q_0 + k_1 q_1)$. Число N определяется согласно теории по формуле

$$N = \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{\mu}, \tag{9.13}$$

где

$$1 > \gamma > 3\mu^{1/T}, \quad T \geqslant 8n + 20.$$

С учетом выражений, определяющих функцию S, формулы (9.11) можно переписать в виде следующей системы соотношений:

$$\mathrm{p}_j = P_j + \mu \sum_{\|k\| \geqslant 0} k_j S_k(P) \cos(k_0 q_0 + k_1 q_1),$$
$$(j = 1, \ldots, n),$$
$$Q_j = \mathrm{q}_j + \mu \sum_{\|k\| \geqslant 1} S'_{kj}(P) \sin(k_0 q_0 + k_1 q_1), \tag{9.14}$$

где через S'_{kj} обозначена производная S_k по P_j. Эти соотношения отличаются от аналогичных соотношений (1.25), (1.25*) невырожденного случая лишь структурой коэффициентов S_k. Поэтому мы придем точно так же, как и в невырожденном случае, к следующим формулам, выражающим явно старые и новые переменные друг через друга:

$$\left\{\begin{aligned} p &= P + \mu \sum_{\|k\| \geqslant 0} \bar{f}^{(1)}_{pk}(P) \cos(k_0 Q_0 + k_1 Q_1), \\ q &= Q + \mu \sum_{\|k\| \geqslant 1} \bar{f}^{(1)}_{qk}(P) \sin(k_0 Q_0 + k_1 Q_1), \end{aligned}\right. \tag{9.15}$$

$$\left\{\begin{aligned} P &= p + \mu \sum_{\|k\| \geqslant 0} \bar{\varphi}^{(1)}_{pk}(p) \cos(k_0 q_0 + k_1 q_1), \\ Q &= q + \mu \sum_{\|k\| \geqslant 1} \bar{\varphi}^{(1)}_{qk}(p) \sin(k_0 q_0 + k_1 q_1), \end{aligned}\right. \tag{9.15*}$$

где $f^{(1)}_{pk}, \ldots, \bar{\varphi}^{(1)}_{qk}$ — некоторые аналитические функции своих переменных.

Уравнения относительно новых переменных P, Q будут также каноническими:

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}, \tag{9.16}$$

где $H' = H'(P, Q)$ — новый гамильтониан, получаемый из $H(p, q)$ после подстановки вместо p, q их выражений (9.15) через P, Q. Если обозначить

$$p_0 - P_0 = \Delta P_0, \quad p - P = \Delta P, \quad q_1 - Q_1 = \Delta Q_1,$$

то в соответствии с (9.10)

$$H'(P, Q) = H_{00}(P_0 + \Delta P_0) + \mu \bar{H}_1(P + \Delta P, Q_1 + \Delta Q_1) + \\ + \mu\left[\tilde{H}_1(P + \Delta P, q)\right]_N + \mu R_N H_1(p, q),$$

где ΔP, ΔP_0, ΔQ_1, q, p должны быть выражены через P, Q.

Выделяя в H_{00} члены первого порядка относительно ΔP_0, а в $\overline{H}_1$, $[\widetilde{H}_1]_N$ члены нулевого порядка относительно ΔP, ΔQ_1, получим:

$$\begin{aligned}
&H_{00}(P_0+\Delta P_0)=H_{00}(P_0)+\left(\frac{\partial H_{00}}{\partial P_0},\ \Delta P_0\right)+\ldots,\\
&\mu\overline{H}_1(P+\Delta P,\ Q_1+\Delta Q_1)=\mu\overline{H}_1(P,\ Q_1)+\ldots,\\
&\mu\left[\widetilde{H}_1(P+\Delta P, q)\right]_N=\mu\left[\widetilde{H}_1(P,\ q)\right]_N+\ldots
\end{aligned}\tag{9.17}$$

По условию $\mu\overline{H}_1\sim\mu$, $\mu[\widetilde{H}_1]_N\sim\mu$, так что, если не учитывать в функции S «малые знаменатели» $\left(k_0,\ \dfrac{\partial H_{00}}{\partial P_0}\right)$ [см. (9.12)], то $S\sim\mu$, $\Delta P\sim\mu$, $\Delta Q_1\sim\mu$. Следовательно, невыписанные члены в (9.17) имеют порядок малости μ^2 и выше. Вместе с тем функция S такова, что

$$\left(\frac{\partial H_{00}}{\partial P_0},\ \Delta P_0\right)+\mu\left[\widetilde{H}_1(P,\ q)\right]_N\equiv 0,$$

а при выбранном числе N имеем $\mu R_N H_1\sim\mu^2$. Таким образом, если переписать $H'(P,\ Q)$ в виде

$$H'(P,\ Q)=H_{00}(P_0)+\mu\overline{H}_1(P, Q_1)+\mu\overline{\overline{H}}_1(P,\ Q),\tag{9.18}$$

где в $\overline{\overline{H}}_1$ включена совокупность невыписанных в (9.17) членов и $\mu R_N H_1$, то $\mu\overline{\overline{H}}_1\sim\mu^2$ (без учета малых знаменателей в S).

Согласно (9.04) имеем

$$\overline{H}_1(P,\ Q_1)=H_{01}(P)+H_{11}(P,\ Q_1),$$

где $H_{01}\sim 1$, $H_{11}\sim\mu$. Следовательно, можно $H'(P,\ Q)$ переписать в виде

$$H'(P,\ Q)=H_{00}(P_0)+\mu H_{01}(P)+\mu H_2(P,\ Q),\tag{9.19}$$

где

$$H_2=H_{11}+\overline{\overline{H}}_1.$$

Если не учитывать малые знаменатели в S, то $\mu H_2\sim\mu^2$ (в области изменения переменных P, Q, соответствующей области (9.05) исходных переменных p, q). Если же малые знаменатели учитывать, то оказывается, что в некоторой области F' изменения P, Q, соответствующей части исходной области (9.05), справедлива при достаточно малом μ и для $T\geqslant 4n+10/(1-\alpha)$, $0<\alpha<1$, где T — число в (9.13*), оценка

$$\mu|H_2|<\mu^{1+\alpha}. \tag{9.20}$$

В частности, при $\alpha=1/2$ получим $T=8n+20$, а также $\mu|H_2|<\mu^{3/2}$ или

$$|H_2|<\bar{\mu}, \quad \bar{\mu}=\sqrt{\mu}. \tag{9.20*}$$

Что касается характера ряда Фурье для функции $H_2(P, Q)$, то нетрудно обнаружить, что, поскольку ΔP, H_1, $\bar{H}_1$ представляются рядами Фурье по косинусам, таким же рядом представится и функция $H_2(P, Q)$

$$H_2(P, Q)=\sum_{\|k\|\geqslant 0} h_k^{(0)}(P)\cos(k, Q), \tag{9.21}$$

где $h_k^{(0)}(P)$ — аналитические функции P.

§ 9.3. Первое приближение к условно-периодическому решению

После выполнения усреднения по быстрым переменным мы можем получить первое приближение к искомому условно-периодическому решению. Для этого отбросим в гамильтониане (9.19) возмущающую часть μH_2. Тогда вместо точных уравнений (9.16) получим приближенные:

$$\dot{\bar{P}}=0, \quad \dot{\bar{Q}}=\frac{\partial(H_{00}+\mu H_{01})}{\partial\bar{P}}, \tag{9.22}$$

откуда

$$\bar{P}=P_{00}=\text{const}, \quad \bar{Q}=Q_{00}+\omega^{(1)}t. \tag{9.22*}$$

Здесь P_{00}, Q_{00} — вещественные начальные значения переменных P, Q, соответствующие начальным значениям p, q и вычисляемые по формулам (9.15*), а $\omega^{(1)}$ — вектор с компонентами:

$$\omega_j^{(1)}=\frac{\partial}{\partial P_j}(H_{00}+\mu H_{01})\Big|_{P=P_{00}}, \quad \omega_k^{(1)}=\mu\frac{\partial H_{01}}{\partial P_k}\Big|_{P=P_{00}},$$

$$(j=1, \ldots, n_0), \qquad (k=n_0+1, \ldots, n), \tag{9.23}$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — компоненты вектора P.

Среди частот (средних скоростей) $\omega_1^{(1)}, \ldots, \omega_n^{(1)}$ первые n_0 являются «быстрыми», а остальные $n-n_0$ — «медленными».

Подставив в (9.15) вместо P, Q выражения (9.22*), мы и получим первое приближение $p^{(1)}(t)$, $q^{(1)}(t)$, которое можно записать (не выделяя отдельно векторы Q_0 и Q_1) в виде

$$p^{(1)}(t)=P_{00}+\mu\sum_{0<\|k\|<\infty}\bar{f}^{(1)}_{pk}(P_{00})\cos[(k,Q_{00})+(k,\omega^{(1)})t],$$
$$q^{(1)}(t)=Q_{00}+\omega^{(1)}t+\mu\sum_{1\leqslant\|k\|<\infty}\bar{f}^{(1)}_{qk}(P_{00})\sin[(k,Q_{00})+(k,\omega^{(1)})t], \qquad (9.24)$$

где $\bar{f}^{(1)}_{pk}$, $\bar{f}^{(1)}_{qk}$ — аналитические функции.

§ 9.4. Применение последовательности канонических преобразований, аналогичных основной операции. Первый шаг

К системе с гамильтонианом (9.19) применим процесс последовательных канонических преобразований того же типа, какие использовались в невырожденном случае. Функция μH_2 рассматривается при этом как возмущающая часть, а функция $H_{00}+\mu H_{01}$ как невозмущенная часть этого гамильтониана.

Рассмотрим первое такое преобразование (соответствующее первому шагу в невырожденном случае).

1. Выделим в разложении функции $H_2(P, Q)$ вековой член $\bar{H}_2(P)\equiv h_0^{(0)}(P)$ (по всем компонентам угловой переменной q), частную сумму $[\tilde{H}_2]_{N_0}$ и соответствующий остаточный член $R_{N_0}H_2$. Таким образом, получим

$$H'(P,Q)=H_{00}(P_0)+\mu H^{(1)}_{01}(P)+$$
$$+\mu[\tilde{H}_2(P,Q)]_{N_0}+\mu R_{N_0}H_2, \qquad (9.25)$$

где $H^{(1)}_{01}=H_{01}+\bar{H}_2$.

Число N_0 выбирается согласно теории по формуле, совпадающей с (1.50), если заменить M_s на $\bar{\mu}=\sqrt{\mu}$ [см. (9.20*)],

$$N_0=(\bar{\mu})^{-1/4nT}\ln\frac{1}{\bar{\mu}}, \qquad T\geqslant\frac{4n+12}{1-\alpha} \qquad (9.26)$$

и $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

2. Вместо P, Q вводим новые переменные $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ по формулам

$$P = P^{(1)} + \frac{\partial S^{(0)}}{\partial Q}, \quad Q^{(1)} = Q + \frac{\partial S^{(0)}}{\partial P^{(1)}}. \tag{9.27}$$

Здесь $S^{(0)} = S^{(0)}(P^{(1)}, Q)$ получается из $\mu\left[\widetilde{H}_2(P, Q)\right]_{N_0}$ после замены P на $P^{(1)}$, коэффициентов $h_k^{(0)}(P)$ на

$$S_k^{(0)}(P^{(1)}) = -h_k^{(0)}(P^{(1)}) \Big/ \left(k, \frac{\partial\left(H_{00} + \mu H_{01}^{(1)}\right)}{\partial P^{(1)}}\right) \tag{9.28}$$

и $\cos(k, Q)$ на $\sin(k, Q)$, так что

$$S^{(0)}(P^{(1)}, Q) = \mu \sum S_k^{(0)}(P^{(1)}) \sin(k, Q). \tag{9.29}$$

3. Из (9.27) находятся формулы, выражающие явно переменные P, Q и $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ друг через друга. Так как соотношения (9.27) ничем не отличаются по своей структуре от соотношений (1.25), (1.25*) невырожденного случая, то и упомянутые формулы будут отличаться от (1.27), (1.27*), (1.29), (1.29*) лишь обозначениями. Будем иметь:

$$\begin{aligned} P &= P^{(1)} + \mu \sum_{\|k\| > 0} \overline{f}_{pk}^{(2)}(P^{(1)}) \cos\left(k, Q^{(1)}\right), \\ Q &= Q^{(1)} + \mu \sum_{\|k\| > 0} \overline{f}_{qk}^{(2)}(P^{(1)}) \sin\left(k, Q^{(1)}\right), \end{aligned} \tag{9.30}$$

и

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= P + \mu \sum_{\|k\| > 0} \overline{\varphi}_{pk}^{(2)}(P) \cos(k, Q), \\ Q^{(1)} &= Q + \mu \sum_{\|k\| > 0} \overline{\varphi}_{qk}^{(2)}(P) \sin(k, Q), \end{aligned} \tag{9.30*}$$

где $\overline{f}_{pk}^{(2)}, \ldots, \overline{\varphi}_{qk}^{(2)}$ — некоторые аналитические функции своих переменных.

4. Уравнения относительно новых переменных $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ будут каноническими:

$$\dot{P}^{(1)} = -\frac{\partial H^{(1)}}{\partial Q^{(1)}}, \quad \dot{Q}^{(1)} = \frac{\partial H^{(1)}}{\partial P^{(1)}}, \tag{9.31}$$

где гамильтониан $H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)})$ получается из $H^{(1)}(P,Q)$ после подстановки вместо переменных P, Q их выражений (9.30) через $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$.

Обозначив $P-P^{(1)}=\Delta P, P_0-P_0^{(1)}=\Delta P_0^{(1)}$, где $P_0^{(1)}$ — вектор с компонентами $P_1^{(1)}, \ldots, P_{n_0}^{(1)}$, запишем сначала $H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)})$ в виде

$$H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)})=H_{00}(P_0^{(1)}+\Delta P_0^{(1)})+\mu H_{01}^{(1)}(P^{(1)}+\Delta P^{(1)})+ \\ +\mu\,[\widetilde{H}_2(P^{(1)}+\Delta P^{(1)}, Q)]_{N_0}+\mu R_{N_0}H_2(P, Q),$$

где $\Delta P_0^{(1)}$, $\Delta P^{(1)}$, P, Q должны быть выражены через $P^{(1)}, Q^{(1)}$. Выделяем далее в H_{00} и в H_{01} члены первого порядка относительно $\Delta P_0^{(1)}$, $\Delta P^{(1)}$ соответственно и в $[\widetilde{H}_2]_{N_0}$ — члены нулевого порядка относительно $\Delta P^{(1)}$:

$$H_{00}(P_0^{(1)}+\Delta P_0^{(1)})=H_{00}(P_0^{(1)})+\left(\frac{\partial H_{00}}{\partial P^{(1)}}, \Delta P_0^{(1)}\right)+\ldots, \quad (9.32_1)$$

$$\mu H_{01}^{(1)}(P^{(1)}+\Delta P^{(1)})=\mu H_{01}^{(1)}(P^{(1)})+ \\ +\mu\left(\frac{\partial H_{01}^{(1)}}{\partial P^{(1)}}, \Delta P^{(1)}\right)+\ldots, \quad (9.32_2)$$

$$\mu\,[H_2(P^{(1)}+\Delta P^{(1)}, Q)]_{N_0}=\mu\,[H_2(P^{(1)}, Q)]_{N_0}+\ldots \quad (9.32_3)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\left(\frac{\partial H_{00}}{\partial P_0^{(1)}}, \Delta P_0^{(1)}\right)+\mu\left(\frac{\partial H_{01}^{(1)}}{\partial P^{(1)}}, \Delta P^{(1)}\right)+ \\ +\mu\,[\widetilde{H}_2(P^{(1)}, Q)]_{N_0}\equiv 0. \quad (9.33)$$

Действительно, в соответствии с формулами (9.27)—(9.29), определяющими $\Delta P_0^{(1)}$, $\Delta P^{(1)}$ и S^0, имеем

$$\left(\frac{\partial H_{00}}{\partial P_0^{(1)}}, \Delta P_0^{(1)}\right)= \\ =\mu\sum_{1\leqslant\|k\|<N^0}\left(k_1\frac{\partial H_{00}}{\partial P_1^{(1)}}+\ldots+k_{n_0}\frac{\partial H_{00}}{\partial P_{n_0}^{(1)}}\right)S_k^{(0)}\cos(k, Q),$$

$$\left(\frac{\partial H_{01}^{(1)}}{\partial P^{(1)}}, \Delta P^{(1)}\right)= \\ =\mu\sum_{1\leqslant\|k\|<N_0}\left(k_1\frac{\partial H_{01}^{(1)}}{\partial P_1^{(1)}}+\ldots+k_n\frac{\partial H_{01}^{(1)}}{\partial P_n^{(1)}}\right)S_k^{(0)}\cos(k, Q).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial H_{00}}{\partial P_0^{(1)}},\ \Delta P_0^{(1)}\right)+\mu\left(\frac{\partial H_{01}^{(1)}}{\partial P^{(1)}},\ \Delta P^{(1)}\right)=$$
$$=\mu\sum_{1\leqslant\|k\|<N_0}\left(k,\ \frac{\partial\left(H_{00}+\mu H_{01}^{(1)}\right)}{\partial P^{(1)}}\right)S_k^{(0)}\left(P^{(1)}\right)\cos(k,Q)=$$
$$=-\mu\sum_{1\leqslant\|k\|<N_0}h_k^{(0)}\left(P^{(1)}\right)\cos(k,Q)$$

в силу (9.29). Отсюда вытекает (9.33).

Обозначив через $\mu H_2^{(1)}$ совокупность невыписанных в (9.32_1) — (9.32_3) членов, а также $\mu R_{N_0}H_2$, в которых все переменные должны быть выражены через $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, запишем $H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)})$ в виде

$$H^{(1)}\left(P^{(1)}, Q^{(1)}\right)=H_{00}\left(P_0^{(1)}\right)+\mu H_{01}^{(1)}\left(P^{(1)}\right)+$$
$$+\mu H_2^{(1)}\left(P^{(1)}, Q^{(1)}\right). \qquad (9.34)$$

Функция $H_2^{(1)}$ в силу структуры функции H_2 и формул перехода от P, Q к $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ представится, как и H_2, рядом Фурье по косинусам:

$$H_2^{(1)}\left(P^{(1)}, Q^{(1)}\right)=\sum_{\|k\|\geqslant 0}h_k^{(1)}\left(P^{(1)}\right)\cos(k,\ Q), \qquad (9.35)$$

где $h_k^{(1)}$ — некоторые аналитические функции $P^{(1)}$.

5. Если бы малые знаменатели в функции $S^{(0)}(P^{(1)}, Q)$ отсутствовали, то эта функция имела бы тот же порядок малости, что и μH_2, т. е. $\mu\bar\mu$ [см. (9.20*)]. Тогда компоненты $\Delta\bar P^{(1)}$ вектора $\Delta P^{(1)}$ имели бы также порядок малости $\mu\bar\mu$, а невыписанные члены в (9.32_1), (9.32_2), (9.32_3) — тот же порядок малости, что и $\|\Delta P^{(1)}\|^2$, $\mu\|\Delta P^{(1)}\|^2$ и $\mu H_2\|\Delta P^{(1)}\|$, т. е. $\mu^2\bar\mu^2$, $\mu^3\bar\mu^2$, $\mu^2\bar\mu^2$ соответственно. Остаточный член $R_{N_0}H_2$ при выбранном N_0 имеет порядок малости не ниже $\bar\mu^2$. Таким образом, функция $\mu H_2^{(1)}$ в (9.34) имела бы порядок малости не ниже $\mu\bar\mu^2$, а сама функция $H_2^{(1)}$ — порядок не ниже $\bar\mu^2$ (естественно, в области значений $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, соответствующих области F' переменных P, Q).

Если же малые знаменатели в функции $S^{(0)}$ учитывать, то оказывается возможным доказать, что в области изменения $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, соответствующей некоторой части области F' переменных P, Q, справедлива оценка

$$|H_2^{(1)}| < \overline{\mu}^{1+\alpha},$$

где $\alpha = \frac{1}{2}$ — число, входящее в (9.26).

§ 9.5. Второе приближение к условно-периодическому решению

Второе приближение к искомому условно-периодическому решению исходной системы (9.02) мы получим, если в гамильтониане (9.34) пренебрежем его возмущающей частью $\mu H_2^{(1)}$. Тогда уравнения (9.31) заменятся приближенными:

$$\dot{\overline{P}}^{(1)} = 0, \quad \dot{\overline{Q}}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \overline{P}^{(1)}} (H_{00} + \mu H_{01}^{(1)}). \tag{9.36}$$

Если $P_{00}^{(1)}, Q_{00}^{(1)}$ — начальные значения переменных $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, соответствующие начальным значениям p_{00}, q_{00}, то

$$\overline{P}^{(1)} = P_{00}^{(1)} = \text{const}, \quad \overline{Q}^{(1)} = Q_{00}^{(1)} + \omega^{(2)} t, \tag{9.37}$$

где

$$\omega^{(2)} = \frac{\partial}{\partial P^{(1)}} (H_{00} + \mu H_{01}^{(1)}) \Big|_{P^{(1)} = P_{00}^{(0)}}. \tag{9.37*}$$

Выразим далее p, q непосредственно через $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ с помощью формул (9.15) и (9.30):

$$\left.\begin{aligned} p &= P^{(1)} + \mu \sum_{\|k\| \geqslant 0} f_{pk}^{(2)} (P^{(1)}) \cos (k, Q^{(1)}), \\ q &= Q^{(1)} + \mu \sum_{\|k\| \geqslant 1} f_{qk}^{(2)} (P^{(1)}) \sin (k, Q^{(1)}), \end{aligned}\right\} \tag{9.38}$$

где $f_{pk}^{(2)}$, $f_{qk}^{(2)}$ — некоторые аналитические функции $P^{(1)}$. Подставив сюда вместо переменных $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ их выражения (9.37), придем к искомому второму приближению

$p^{(2)}(t)$, $q^{(2)}(t)$:

$$p^{(2)}(t)=P_{00}^{(1)}+\mu\sum_{\|k\|>0} f_{pk}^{(2)}(P_{00}^{(1)})\cos\left[(k, Q_{00}^{(1)})+(k, \omega^{(2)})t\right],$$

$$q^{(2)}(t)=Q_{00}^{(1)}+\omega^{(2)}t+$$

$$+\mu\sum_{\|k\|>1} f_{qk}^{(2)}(P_{00}^{(1)})\sin\left[(k, Q_{00}^{(1)})+(k, \omega^{(2)})t\right]. \qquad (9.39)$$

Качественно это приближение не отличается от первого приближения (9.24) и тем ближе к нему, чем меньше $\bar{\mu}$.

§ 9.6. Дальнейшие приближения. Замечания о их характере и о сходимости процесса

Для нахождения последующих приближений применяются канонические преобразования, вполне аналогичные (9.27). Все формулы будут отличаться от формул (9.27)—(9.35) лишь соответствующими индексами. После третьего шага (перехода к переменным $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$) мы придем к системе с гамильтонианом

$$H^{(2)}(P^{(2)}, Q^{(2)})=H_{00}(P_0^{(2)})+\mu H_{01}^{(2)}(P^{(2)})+\mu H_2^{(2)}(P^{(2)}, Q^{(2)}),$$

после четвертого шага — к системе с гамильтонианом

$$H^{(3)}(P^{(3)}, Q^{(3)})=H_{00}(P_0^{(3)})+\mu H_{01}^{(3)}(P^{(3)})+\mu H_2^{(3)}(P^{(3)}, Q^{(3)})$$

и т. д. Любое приближение $p^{(s)}(t)$, $q^{(s)}(t)$, $s\geqslant 2$ представится в виде, аналогичном (9.39).

Можно заметить, что последовательности функций $H_0^{(s)}$ и $H_2^{(s)}$ $(s=1, 2, 3, \ldots)$ строятся точно так же, как последовательности функций $H_0^{(s)}$ и $H_1^{(s)}$ в невырожденном случае. Поэтому оказывается возможным применить результаты, полученные в невырожденном случае. В соответствии с этими результатами, если $\bar{\mu}(=\sqrt{\mu})$ достаточно мало́ и начальные P_{00}, Q_{00} (а вместе с тем и p_{00}, q_{00} выбраны благоприятным образом, то приближения $p^{(s)}(t)$, $q^{(s)}(t)$ сходятся при $s\to\infty$ к точному условно-периодическому решению системы (9.02). Это решение представится формулами, отличающимися от (9.39) лишь соответствующими индексами. Из структуры этих формул видно, что по своему характеру оно является близким (при малом μ) к промежуточному решению (9.07). В решении

(9.07) p_j постоянные, а q_j изменяются с ростом t линейно со скоростью $\omega_j^{(0)}$. В точном решении p_j испытывают малые условно-периодические колебания около некоторых своих средних значений, а q_j изменяются с ростом t в среднем линейно со скоростью ω_j^{∞} (близкой к $\omega_j^{(0)}$), но на это линейное изменение накладываются малые условно-периодические колебания.

Относительно характера сходимости приближений справедливо все то, что было сказано в § 1.6 для невырожденного случая. Доказательство существования благоприятных значений P_{00}, Q_{00} отличается лишь деталями от доказательства в невырожденном случае. Именно это доказательство требует выполнения условий (9.06).

ГЛАВА X

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА В СЛУЧАЕ ПЕРВОГО ВАРИАНТА СОБСТВЕННОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

§ 10.1. Точная формулировка условий

Остановимся сначала на строгой постановке задачи. Пусть дана каноническая система

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{10.01}$$

с гамильтонианом

$$H(p, q) = H_{00}(p_0) + \mu H_1(p, q), \tag{10.02}$$

где

$$p = (p_0, p_1),\ q = (q_0, q_1),\ p_0 = (\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_{n_0}),\ q_0 = (\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_{n_0})$$

$$p_1 = (\mathrm{p}_{n_0+1}, \ldots, \mathrm{p}_n), \quad q_1 = (\mathrm{q}_{n_0+1}, \ldots, \mathrm{q}_n)$$

и μ — малый параметр. Пусть в некоторой области

$$F\,(p_0 \in G^{00},\ \ p_1 \in G^{01},\ \ |\operatorname{Im} q_0| \leqslant \varrho_{00} < 1,\ \ |\operatorname{Im} q_1| \leqslant \varrho_{01} < 1) \tag{10.03}$$

функция H аналитична по своим аргументам и q — угловая переменная с периодом 2π по всем своим компонентам. Функция $H_1(p, q)$ может быть, таким образом, представлена в области F рядом Фурье по переменной q. Нас будет интересовать непосредственно ряд Фурье этой функции по переменной q_0, и мы запишем этот ряд в виде

$$H_1(p, q) = \sum_{\|k_0\| \geqslant 0} h_{k_0}(p, q_1)\, e^{i\,(k_0,\, q_0)}, \tag{10.04}$$

где h_{k_0} — некоторые аналитические функции p, q_1.

Выделим в этом разложении вековую часть $\overline{H}_1(p, q_1) = h_0(p, q_1)$ и периодическую $\widetilde{H}_1(p, q)$; тогда (10.02) перепишется в виде

$$H(p, q) = H_{00}(p_0) + \mu \overline{H}_1(p, q_1) + \mu \widetilde{H}_1(p, q). \tag{10.02*}$$

В силу аналитичности все функции H_1, $\overline{H}_1$, $\tilde{H}_1$ будут ограничены в F:

$$|H_1|<C, \quad |\overline{H}_1|<C, \quad |\tilde{H}_1|<C, \tag{10.05}$$

причем постоянную C можно положить равной единице. (Если $C>1$, то, введя новый параметр $\tilde{\mu}=\mu C$ вместо μ, придем к оценкам (10.05) с $C=1$.)

Мы рассмотрим наиболее простой вариант случая собственного вырождения, характеризующийся тем условием, что функция $\overline{H}_1$ или вовсе не зависит от q_1 или может быть представлена в виде

$$\overline{H}_1(p, q_1)=H_{01}(p)+H_{11}(p, q_1), \tag{10.06}$$

где

$$|H_{01}|\sim 1, \quad |H_{11}|<\mu.$$

Кроме того, предполагается также, что для p_0, p_1, принадлежащих области F,

$$\det \frac{\partial^2 H_{00}}{\partial p_0^2}\neq 0, \quad \det \frac{\partial^2 H_{01}}{\partial p_1^2}\neq 0 \tag{10.07}$$

и что область $G^0=G^{00}\times G^{01}$ выпуклая. Например, пусть G^0 — n-мерная сфера $|p_s-a_s|<g$ $(s=1, \ldots, n)$, где a_s, q — фиксированные числа.

В этих предположениях оказывается возможным после предварительного канонического преобразования — усреднения по быстрым переменным — распространить на этот случай доказательство существования и методику построения условно-периодических решений, рассмотренных в невырожденном случае.

§ 10.2. Анализ операции усреднения по быстрым переменным

Усреднение по быстрым переменным представляет собой каноническое преобразование $(p, q)\to(P, Q)$ по формулам

$$p=P+\frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q=q+\frac{\partial S}{\partial P}, \tag{10.08}$$

где $S=S(P, q)$ и P, Q — векторы с компонентами $P_1, \ldots$ $\ldots, P_n$ и $Q_1, \ldots, Q_n$ соответственно. Отличие от основного канонического преобразования вида (3.04) гл. III состоит в том, что в производящей функции $S(P, q)$ угловыми переменными считаются только компоненты вектора q_0. Если разложение Фурье имеет вид (10.04), то $S(P, q)$ полагается равной

$$S(P, q)=\mu \sum_{1<\|k_0\|<N} S_{k_0}(P, q_1) e^{i(k_0, q_0)}, \qquad (10.09)$$

где

$$S_{k_0}=ih_{k_0}(P, q_1) \Big/ \left(k_0, \frac{\partial H_{00}(P_0)}{\partial P_0}\right), \qquad (10.10)$$

а P_0 — вектор с компонентами $P_1, \ldots, P_{n_0}$ и N — число, которое подбирается ниже. Векторы P, Q разобьем так же, как и векторы p, q на аналогичные составляющие P_0, P_1, Q_0, Q_1.

1. Рассмотрим подобласть G^{00}_{kN} области G^{00}, представляющую совокупность точек p_0, в которых

$$\left|\left(k_0, \frac{\partial H_{00}}{\partial p_0}\right)\right| \geqslant K\|k_0\|^{-n-1}, \qquad (10.11)$$

где K — некоторая постоянная.

Так как $|H_1|<1$, то в соответствии с леммой 1 гл. II коэффициенты h_{k_0} разложения (10.04) удовлетворяют в области F неравенству

$$|h_{k_0}|<e^{-\|k_0\|\varrho_{00}}. \qquad (10.12)$$

Исходя же из (10.11) и (10.12) и применяя лемму 2 гл. II, можем вывести точно так же, как это было сделано в § 3.2, оценку для S. Мы получим, что в области

$$P_0 \in G^{00}_{KN}, \quad P_1 \in G^{01}, \quad |\operatorname{Im} q_0| \leqslant \varrho_{00}-2\delta, \quad |\operatorname{Im} q_1| \leqslant \varrho_{01} \qquad (10.13)$$

функция $S(P, q)$ удовлетворяет оценке, аналогичной (3.13)

$$|S(P, q)| \leqslant \widetilde{M}=\frac{\mu}{K}\delta^{-2n-2}, \qquad (10.14)$$

если положительное число δ подчиняется неравенству

$$\delta \leqslant \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{4^n}. \qquad (10.15)$$

Положим далее

$$\delta=\mu^{1/T}, \quad K=\delta, \tag{10.15*}$$

где T — некоторое число, которое подберем ниже.

К преобразованию (10.08) можем применить теорему о каноническом преобразовании (гл. III), поскольку в ней не накладывается каких-либо специальных предположений о конкретной структуре функции S, и можно опираться лишь на свойство аналитичности S и на оценку (10.14).

Согласно этой теореме формулы (10.08), в которых функция $S(P, q)$ удовлетворяет оценке (10.14), определяют взаимно однозначное и взаимно аналитическое отображение $x = BX$ *) области

$$F_{PQ}\begin{pmatrix} P_0 \in G_{KN}^{(0)}-2\beta, & |\operatorname{Im} Q_0| \leqslant \varrho_{00}-3\delta-2\beta, \\ P_1 \in G^{01}-2\beta, & |\operatorname{Im} Q_1| \leqslant \varrho_{01}-2\beta, \ \beta=\delta^3 \end{pmatrix}$$

на некоторую подобласть F_{pq} области

$$p_0 \in G_{KN}^{00}, \quad p_1 \in G^{01}, \quad |\operatorname{Im} q_0| \leqslant \varrho_{00}-2\delta, \quad |\operatorname{Im} q_1| \leqslant \varrho_{01}.$$

При этом будут справедливы неравенства

$$\|P-p\| \leqslant \frac{\widetilde{M}}{\delta}=\frac{\mu}{K}\,\delta^{-2n-3}, \quad \|Q-q\| \leqslant \frac{\widetilde{M}}{\beta}=\frac{\mu}{K}\,\delta^{-2n-5}, \tag{10.16}$$

$$\|dx\|=\|dB\|<2\|dX\|, \tag{10.17}$$

если δ и T удовлетворяют неравенствам, аналогичным (3.28*), т. е.

$$\delta<\frac{1}{8n}, \quad T \geqslant 2n+10. \tag{10.18}$$

2. Рассмотрим новый гамильтониан $H'(P, Q)$, получающийся в результате преобразования (10.08).

Обозначая

$$p-P=\Delta P, \quad p_0-P_0=\Delta P_0, \quad q_1-Q_1=\Delta Q_1,$$

---

*) Через x, X обозначаются векторы (p, q), (P, Q) соответственно.

будем иметь

$$H'(P,Q)=H_{00}(P_0+\Delta P_0)+\mu H_1(P+\Delta P,\ Q_1+\Delta Q_1)+ \\ +\mu\widetilde{H}_1(P+\Delta P,\ q)$$

где ΔP, ΔP_0, ΔQ, q должны быть выражены через новые переменные. Это выражение можно переписать в виде

$$H'(P,\ Q)=H_{00}(P_{00})+\left(\frac{\partial H_{00}}{\partial P_0},\ \Delta P_0\right)+\mu\overline{H}_1(P,\ Q_1)+ \\ +\mu[\widetilde{H}_1(P,\ q)]_N+R_1+\mu R_2+\mu R_3+\mu R_N H_1, \qquad (10.19)$$

где

$$R_1=H_{00}(P_0+\Delta P_0)-H_{00}(P_0)-\left(\frac{\partial H_{00}}{\partial P_0},\ \Delta P_0\right),$$

$$R_2=\overline{H}_1(P+\Delta P,\ Q_1+\Delta Q_1)-\overline{H}_1(P,\ Q_1), \qquad (10.20)$$

$$R_3=\widetilde{H}_1(P+\Delta P,\ q)-\widetilde{H}_1(P,\ q)$$

и $R_N H_1$ — остаточный член ряда Фурье (10.04) для H_1.

Рассматривая (10.19), мы прежде всего заметим, что в силу указанного выше выбора функции $S(P,\ q)$, имеем

$$\left(\frac{\partial H_{00}}{\partial P_0},\ \Delta P_0\right)+\mu[\widetilde{H}_1(P,\ q)]_N\equiv 0.$$

Таким образом мы можем записать $H'(P,\ Q)$ в виде

$$H_1(P,\ Q)=H_{00}(P_0)+\mu\overline{H}_1(P,\ Q_1)+\mu\overline{\overline{H}}_1, \qquad (10.21)$$

где

$$\overline{\overline{H}}_1=\frac{1}{\mu}R_1+R_2+R_3+R_N H_1. \qquad (10.21^*)$$

Проведем далее оценки функций R_1, R_2, R_3, $R_N H_1$, аналогичные тому, как это было сделано в § 3.5.

3. Мы получим, используя (10.16), оценку

$$|R_1|\leqslant\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 H_{00}}{\partial P_0^2}\right\|\|\Delta P_0\|^2\leqslant\frac{\Theta_{00}}{2}\frac{\mu^2}{K^2}\delta^{-4n-6}<\frac{\mu^2}{K^2}\delta^{-4n-7}, \qquad (10.22)$$

в области F_{PQ}, если $\delta<2/\Theta_{00}$ и Θ_{00} такая постоянная, что

$$\left\|\frac{\partial^2 H_{00}}{\partial P_0^2}\right\|\leqslant\Theta_{00}.$$

(Такая постоянная в силу аналитичности функции H_{00} в F обязательно найдется.)

4. Обозначим через X_1 вектор (P, Q_1). Тогда, используя (10.05) (с $C=1$) и (10.16), а также имея в виду оценки для производных функции $\overline{H}_1$, вытекающие из лемм 5, 5* § 2.2, получим неравенство

$$|R_2| \leqslant \left\| \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial X_1} \right\| (n+n_0) \| \Delta X_1 \| < \frac{1}{\beta} 2n \frac{\mu}{K} \delta^{-2n-5} < \\ < \frac{\mu}{K} \delta^{-2n-10}, \quad (10.23)$$

в области F_{PQ} при условии $2n\delta < 1$.

5. Аналогично получим, что в области F_{PQ}

$$|R_3| \leqslant \left\| \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial P} \right\| n \| \Delta P \| \leqslant \frac{1}{\beta} n \frac{\mu}{K} \delta^{-2n-3} < \frac{\mu}{K} \delta^{-2n-8}, \quad (10.24)$$

если $n\delta < 1$.

6. В соответствии с леммой 4* § 2.2 (см. рассуждения при оценке $R_N\widetilde{H}_1$ в § 3.5)

$$|R_N H_1| < \mu \delta^{-n-1} \quad (10.25)$$

в области

$$P_0 \in G_{KN}^{00} - 2\beta, \quad P_1 \in G^{01} - 2\beta,$$
$$|\operatorname{Im} Q_0| \leqslant \varrho_{00} - \gamma - \delta - \beta, \quad |\operatorname{Im} Q_1| \leqslant \varrho_{01} - 2\beta,$$

если

$$\delta \left(\frac{2n}{e} \right)^n < 1, \quad N = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{\mu}, \quad 3\delta < \gamma \leqslant 1. \quad (10.26)$$

Исходя из оценок (10.22)—(10.25), мы получим, что в области

$$\overline{F}' (P_0 \in G_{KN}^{00} - 2\beta, \quad P_1 \in G^{01} - 2\beta,$$
$$|\operatorname{Im} Q_0| \leqslant \varrho_{00} - 2\gamma, \quad |\operatorname{Im} Q_1| \leqslant \varrho_{01} - 2\beta) \quad (10.27)$$

(рассуждения при определении этой области те же, что и в случае общей оценки функции $H^{(1)}$ в § 3.5) справедлива оценка

$$|\overline{\overline{H}}_1| < \frac{\mu}{K^2}\delta^{-4n-7} + \frac{\mu}{K}\delta^{-2n-10} + \frac{\mu}{K}\delta^{-2n-8} + \\ + \mu\delta^{-n-1} < 4n\delta^{-4n-9}. \qquad (10.28)$$

В соответствии со свойствами данного преобразования функция $H'(P, Q)$ является аналитической в этой области по своим аргументам.

7. Функция $\overline{H}_1(P, Q)$ в гамильтониане (10.21) отличается лишь обозначениями переменных от функции $\overline{H}_1(p, q_1)$ в гамильтониане (10.02) исходной системы.

Следовательно, согласно (10.06)

$$\overline{H}_1(P, Q) = H_{01}(P) + H_{11}(P, Q),$$

причем $H_{01} \sim 1$, $|H_{11}| < \mu$ в области $P, Q \in F$ и тем более в области $P, Q \in \overline{F}'$. Таким образом, мы можем переписать (10.21) в виде

$$H'(P, Q) = H_{00}(P_0) + \mu H_{01}(P) + \mu H_2(P, Q), \qquad (10.29)$$

где

$$H_2(P, Q) = H_{11}(P, Q_1) + \overline{\overline{H}}_1(P, Q).$$

При этом мы получим, исходя из (10.28), оценку

$$|H_2| < 4\mu\delta^{-4n-9} + \mu < \mu\delta^{-4n-10} = \delta^{T-4n-10}, \qquad (10.30)$$

так как $5\delta < 1$.

Число T подчиняется неравенству (10.18). Подчиним его более сильному неравенству

$$T \geqslant 4n + 10/(1-\alpha),$$

где α — произвольное число между 0 и 1. Тогда

$$|H_2| < \delta^{T\alpha} = \mu^{\alpha}. \qquad (10.30^*)$$

В частности, положив $\alpha = 1/2$, будем иметь

$$|H_2| < \sqrt{\mu}. \qquad (10.30^{**})$$

Будем в дальнейшем рассматривать μH_2 как возмущающую часть гамильтониана (10.29), а $H_{00} + \mu H_{01}$ как невозмущенную его часть.

§ 10.3. Обоснование применимости основной операции при построении бесконечной последовательности преобразований

1. Применим к системе с гамильтонианом (10.29) основную операцию в том же виде, как и в невырожденном случае.

Для удобства изложения рассмотрим вместо области $\overline{F}'$ область

$$F'(P \in G', \quad |\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho_0),$$

где

$$G' = (G^{00}_{KN} - 2\beta) \times (G^{01} - 2\beta), \quad \varrho_0 = \min(\varrho_{00} - 2\gamma, \ \varrho_{01} - 2\beta).$$

Очевидно, что $F' \subseteq \overline{F}'$, так что выписанные выше оценки для H_2 остаются в F' справедливыми.

Таким образом, гамильтониан (10.29) $H'(P, Q)$ обладает в F' следующими свойствами:

1) $H'(P, Q)$ является аналитической функцией своих переменных;

$$2) \ |H_2| < \bar{\mu} = \sqrt{\mu}, \quad H_{01} \sim 1; \tag{10.31}$$

3) поскольку Q — угловая переменная, то $H_2(P, Q)$ разлагается в ряд Фурье

$$H_2(P, Q) = \sum_{\|k\| > 0} h^0_k(P) e^{i(k, Q)}, \tag{10.32}$$

где h^0_k — аналитические функции P;

4) в силу аналитичности функций H_{00}, H_{01} найдутся конечные положительные числа Θ_{00}, Θ_{01}, не зависящие от μ и такие, что

$$\left\| \frac{\partial^2 H_{00}}{\partial P_0^2} \right\| \leqslant \Theta_{00}, \qquad \left\| \frac{\partial^2 H_{01}}{\partial P^2} \right\| \leqslant \Theta_{01}. \tag{10.33}$$

Основная операция в применении к системе с гамильтонианом (10.29) представит собой каноническое преобразование к новым переменным $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ по формулам (3.04), (3.05):

$$P = P^{(1)} + \frac{\partial S}{\partial Q}, \quad Q^{(1)} = Q + \frac{\partial S}{\partial P^{(1)}}, \tag{10.34}$$

где функция $S(P^{(1)}, Q)$ строится с помощью разложения возмущающей части исходного гамильтониана, за которую мы принимаем $\mu H_2(P, Q)$. А именно,

$$S(P^{(1)}, Q)=\mu \sum_{1\leqslant\|k\|<N_0} S_k(P^{(1)}) e^{i(k, Q)}. \tag{10.35}$$

Здесь

$$S_k(P^{(1)})=ih_k^0(P^{(1)}) \Big/ \left(k, \frac{\partial(H_{00}+\mu H_{01}^{(1)})}{\partial P^{(1)}}\right), \tag{10.35*}$$

$$H_{01}^{(1)}(P^{(1)})=H_{01}(P^{(1)})+\overline{H}_2(P^{(1)}), \tag{10.35**}$$

$\overline{H}_2$ — вековая часть функции H_2 по отношению ко всем компонентам угловой переменной Q, и N_0 — некоторое число. Это число определим согласно (3.45), исходя из оценки (10.31) для H_2 (т. е. без учета множителя μ в возмущающей части μH_2) по формулам

$$\bar{\mu}=\delta_0^{T_0}, \quad N_0=\frac{1}{\gamma_0}\ln\frac{1}{\bar{\mu}}, \tag{10.36}$$

где δ_0, γ_0 удовлетворяют неравенствам $2\delta_0+\gamma_0\leqslant 1$, $\gamma_0+\delta_0\leqslant\varrho_0$, а T_0 — число, подбираемое ниже.

Теорема о каноническом преобразовании (§ 3.3) остается в применении к преобразованию (10.34) справедливой и формулируется без изменений. Уточним лишь некоторые оценки.

Рассмотрим прежде всего оценку для $S_k(P^{(1)})$. Для этого, исходя из (10.35*) и из оценки (10.31), которой удовлетворяет, естественно, и $\overline{H}_2$, запишем скалярное произведение в знаменателе для S_k в виде

$$\left(k, \frac{\partial(H_{00}+\mu H_{01}^{(1)})}{\partial P^{(1)}}\right)=\left(k_0, \frac{\partial H_{00}}{\partial P_0^{(1)}}\right)+\mu\left(k, \frac{\partial H_{01}^{(1)}}{\partial P^{(1)}}\right), \tag{10.37}$$

где k_0 — вектор с компонентами $k_1, \ldots, k_{n_0}$. Это скалярное произведение представляет собой «малый знаменатель», появляющийся в новом гамильтониане после преобразования (10.34). Если следовать точно невырожденному случаю, то этот малый знаменатель надо было бы ограничить неравенством вида (3.07)

$$\left|\left(k, \frac{\partial(H_{00}+\mu H_{01}^{(1)})}{\partial P^{(1)}}\right)\right|\geqslant K_0\|k\|^{-n-1}, \quad 0<\|k\|<N_0,$$
$$K_0=\delta_0^2. \tag{10.38}$$

Однако очевидно, что при $\|k_0\|=0$ величина (10.37) будет иметь порядок μ и не может удовлетворять неравенству (10.38). Поэтому в данном случае ограничим (10.37) этим неравенством лишь при $\|k_0\|\neq 0$, а при $\|k_0\|=0$, $\|k\|\neq 0$ потребуем, чтобы

$$\left|\left(k,\ \frac{\partial(H_{00}+\mu H_{01}^{(1)})}{\partial P^{(1)}}\right)\right| \geqslant \mu K_0\|k\|^{-n-1},\quad 0<\|k\|<N_0. \tag{10.38*}$$

Часть области G' переменной $P^{(1)}$, в которой выполняется (10.38) при $\|k_0\|\neq 0$, а (10.38*) при $\|k_0\|=0$, $\|k\|\neq 0$, обозначим через $G'_{K_0N_0}$. В этой области мы получим в соответствии с (10.38), (10.38*) и (10.35*) так же, как и в § 3.4, оценки

$$|S_k| \leqslant \frac{\bar{\mu}}{\mu K_0}\delta_0^{-2n-2},\quad \|k_0\|=0,\ \|k\|\neq 0, \tag{10.39}$$

$$|S_k| \leqslant \frac{\bar{\mu}}{K_0}\delta_0^{-2n-2},\quad \|k_0\|\neq 0, \tag{10.39*}$$

из которых вторая перекрывает, очевидно, первую. На основании этой оценки получим для $\|P^{(1)}-P\|$, $\|Q^{(1)}-Q\|$ так же, как и в гл. III, оценки, аналогичные (3.29):

$$\|P^{(1)}-P\| \leqslant \frac{\bar{\mu}}{K_0}\delta_0^{-2n-3},\quad \|Q^{(1)}-Q\| \leqslant \frac{\bar{\mu}}{K_0}\delta^{-2n-5}. \tag{10.40}$$

Вместе с тем, поскольку

$$P_0-P_0^{(1)}=\frac{\partial S}{\partial Q_0^{(1)}},$$

так что в соответствии с (10.35) $P_0-P_0^{(1)}\neq 0$ лишь при $\|k_0\|\neq 0$, то для оценки $\|P_0-P_0^{(1)}\|$ можно использовать (10.39*). Тогда будем иметь

$$\|P_0-P_0^{(1)}\| \leqslant \mu\frac{\bar{\mu}}{K_0}\delta_0^{-2n-3}. \tag{10.40*}$$

Все остальное изложение в § 3.4 остается без изменений.

2. Перейдем теперь к анализу гамильтониана $H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)})$, к которому приходим после преобразования

(10.34). Мы получим, так же как и в § 3.5, что

$$H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}) = H_{00}(P^{(1)}) + \mu H_{01}^{(1)}(P^{(1)}) + \mu H_2^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}), \tag{10.41}$$

где

$$H_2^{(1)} = \frac{1}{\mu} R_1 + R_2 + R_3 + R_{N_0} H_2,$$

$$R_1 = H_{00}(P_0^{(1)} + \Delta P_0^{(1)}) - H_{00}(P_0^{(1)}) - \left(\frac{\partial H_{00}}{\partial P_0^{(1)}}, \Delta P_0^{(1)}\right),$$

$$R_2 = H_{01}^{(1)}(P^{(1)} + \Delta P^{(1)}) - H_{01}^{(1)}(P^{(1)}) - \left(\frac{\partial H_{01}^{(1)}}{\partial P^{(1)}}, \Delta P^{(1)}\right),$$

$$R_3 = \widetilde{H}_2(P^{(1)} + \Delta P^{(1)}, Q) - \widetilde{H}_2(P^{(1)}, Q), \tag{10.42}$$

$$H_{01}^{(1)}(P^{(1)}) = H_{01}(P^{(1)}) + \overline{H}_2(P^{(1)}),$$

$$\Delta P_0^{(1)} = P_0 - P_0^{(1)}, \quad \Delta P^{(1)} = P - P^{(1)},$$

и $\overline{H}_2$, $\widetilde{H}_2$, $R_{N_0}H_2$ суть вековая и периодическая части и остаточный член функции H_2 соответственно.

Точно так же как и в § 3.5, учитывая (10.33), (1040), (10.40*), приходим к оценкам

$$|R_1| < \mu^2 \frac{\bar{\mu}^2}{K_0^2} \delta_0^{-4n-7}, \quad |R_2| < \frac{\bar{\mu}^2}{K_0^2} \delta_0^{-4n-7},$$
$$|R_3| < \frac{\bar{\mu}^2}{K_0} \delta_0^{-2n-7}, \quad |R_{N_0} H_2| < \bar{\mu}^2 \delta^{-n-1}. \tag{10.43}$$

Они оказываются справедливыми, если δ_0 удовлетворяет тем же неравенствам, что и δ в § 3.5. Отсюда вытекает общая оценка для $H_2^{(1)}$, аналогичная (3.49) для $H^{(1)}$:

$$|H_2^{(1)}| < \frac{\bar{\mu}^2}{K_0^2} \delta_0^{-4n-8} = \delta^{2T_0 - 4n - 12}, \tag{10.44}$$

или

$$|H_2| < \bar{\mu}_1 < \bar{\mu}^{1+\alpha}, \tag{10.44*}$$

если

$$T_0 \geqslant \frac{(12n+4)}{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{10.44**}$$

Эта оценка, а также оценки для производных функции $H_2^{(1)}$ аналогичные (3.60), справедливы в области

$$F^{(1)}(P^{(1)} \in G'_{K_0 N_0} - 3\beta_0, \ |\operatorname{Im} Q^{(1)}| \leqslant \varrho_0 - 3\gamma_0, \ \beta_0 = \delta_0^3),$$

где число γ_0 удовлетворяет тем же условиям, что и γ в § 3.5.

Вторая производная функции $H_{01}^{(1)}$ будет удовлетворять той же оценке, что и вторая производная функции $H_0^{(1)}$ в § 3.6, т. е.

$$\left\| \frac{\partial^2 H_{01}^{(1)}}{\partial P^{(1)}} \right\| < (1+\delta_0)\Theta_{01} = \Theta_{01}^{(1)}. \tag{10.45}$$

3. Таким образом, результаты применения основной операции к системе с гамильтонианом (10.29) те же, по существу, что и в невырожденном случае. Отличие состоит лишь в структуре гамильтонианов и области $G'_{K_0N_0}$.

Напомним, что в невырожденном случае (см. § 3.6) исходный гамильтониан записывался в виде

$$H(p, q) = H_0(p) + H_1(p, q) \tag{10.46}$$

и рассматривался в области $F^0(p \in G^0, \ |\mathrm{Im}\, q| \leqslant \varrho \leqslant 1)$, причем предполагалась справедливость в этой области оценок

$$|H_1| \leqslant M, \quad \left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \right\| \leqslant \Theta \quad (1 \leqslant \Theta < \infty). \tag{10.46*}$$

Новый гамильтониан после преобразования к переменным P, Q записывался в виде

$$H^{(1)}(P, Q) = H_0^{(1)}(P) + H_1^{(1)}(P, Q), \tag{10.47}$$

где $H_0^{(1)} = H_0 + \overline{H}_1$ ($\overline{H}_1$ — вековая часть H_1), и рассматривался в области

$$F^{(1)}(P \in G^{(1)} = G_{KN}^0 - 3\beta, \ |\mathrm{Im}\, Q| \leqslant \varrho_1 = \varrho - 3\gamma),$$

причем в этой области оказывались справедливыми оценки

$$|H_1^{(1)}| < M_1 \leqslant M^{1+\alpha}, \quad \left\| \frac{\partial^2 H_0^{(1)}}{\partial P^2} \right\| < (1+\delta_0)\Theta = \Theta_1 \tag{10.47*}$$

и соответствующие оценки (3.60) для производных функции $H_1^{(1)}$.

В данном же случае исходный гамильтониан записывается в виде

$$H'(P, Q) = H_{00}(P_0) + \mu H_{01}(P) + \mu H_2(P, Q) \tag{10.48}$$

и рассматривается в области

$$F'(P \in G', \ |\operatorname{Im} Q| \leqslant \varrho_0 \leqslant 1),$$

причем в этой области справедливы оценки

$$|H_2| < \bar{\mu}, \quad \left\| \frac{\partial^2 H_{00}}{\partial P_0^2} \right\| \leqslant \Theta_{00}, \quad \left\| \frac{\partial^2 H_{01}}{\partial P^2} \right\| \leqslant \Theta_{01}. \tag{10.48*}$$

Новый гамильтониан после преобразования к переменным $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ принимает вид

$$H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}) = H_{00}(P_0^{(1)}) + \mu H_{01}^{(1)}(P^{(1)}) + \\ + \mu H_2^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}), \tag{10.49}$$

где $H_{01}^{(1)} = H_{01} + \overline{H}_2$ ($\overline{H}_2$ — вековая часть функции H_2), и рассматривается в области

$$F^{(1)}(P^{(1)} \in G^{(1)} = G'_{K_0 N_0} - 3\beta_0, \ |\operatorname{Im} Q^{(1)}| \leqslant \varrho_1 = \varrho_0 - 3\gamma_0, \\ \beta_0 = \delta_0^3).$$

В этой области оказываются справедливыми оценки

$$|H_2^{(1)}| < \mu_1 < \bar{\mu}^{1+\alpha}, \quad \left\| \frac{\partial^2 H_{01}^{(1)}}{\partial P^{(1)^2}} \right\| < (1+\delta_0)\,\Theta_{01} = \Theta_{01}^{(1)} \tag{10.49*}$$

и соответствующие оценки для производных. При этом постоянные $\delta_0 = \overline{\mu_1}^{1/T_0}$, T_0, γ_0 удовлетворяют тем же условиям, что и постоянные δ, T, γ в гл. III.

Мы видим, что переход от функций H_{01}, H_2 к функциям $H_{01}^{(1)}$, $H_2^{(1)}$ в данном случае полностью идентичен переходу от H_0, H_1 к $H_0^{(1)}$, $H_1^{(1)}$ в невырожденном случае. Отличие состоит лишь в наличии множителя μ при H_{01} и H_2, а также в дополнительном одном и том же слагаемом H_{00}. Это позволяет применить, как и в гл. IV, основную операцию последовательно бесконечное число раз и получить бесконечную последовательность канонических систем с гамильтонианами

$$H^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)}) = H_{00}(P_0^{(s)}) + \mu H_{01}^{(s)}(P^{(s)}) + \mu H_2^{(s)}(P^{(s)}, Q^{(s)}) \tag{10.50}$$

$$(s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Каждый из этих гамильтонианов рассматривается в области

$$F^{(s)}(P^{(s)} \in G^{(s)} = G^{(s-1)}_{K_{s-1}N_{s-1}} - 3\beta_{s-1},$$
$$|\operatorname{Im} Q^{(s)}| \leqslant \varrho_s = \varrho_{s-1} - 3\gamma_{s-1}),$$
$$G^0_{K_0N_0} = G'_{K_0N_0},$$

причем постоянные $\beta_{s-1} = \delta^3_{s-1}$, γ_{s-1} такие же, как и в § 4. При этом, если δ_0 удовлетворяет оценкам (3.53), (4.19*), (4.21), то функции $H^{(s)}_{01}$, $H^{(s)}_2$ удовлетворяют тем же оценкам, что и $H^{(s)}_0$, $H^{(s)}_1$ в невырожденном случае.

§ 10.4. Доказательство непустоты предельной области $G^{(\infty)}$
Заключение

1. Проанализируем теперь структуру областей G', $G'_{K_0N_0}$, $G^{(1)}_{K_1N_1}$, ..., сопоставляя их с соответствующими областями G^0, $G^0_{K_0N_0}$, $G^{(1)}_{K_1N_1}$ в невырожденном случае.

Область G^0 считалась в гл. III—VI заданной и выпуклой. Область G' получается после применения операции усреднения по быстрым переменным из заданной области $p_0 \in G^{00}$, $p_1 \in G^{01}$ (т. е. нельзя считать G' заданной и выпуклой).

Область $G^0_{K_0N_0}$ в невырожденном случае представляет собой множество таких точек p области G^0, в которых удовлетворяются неравенства (6.03):

$$\left|\left(k, \frac{\partial H^{(1)}_0}{\partial p}\right)\right| \geqslant K\|k\|^{-n-1}, \quad 0 < \|k\| < N_0, \quad K_0 = \delta_0. \tag{10.51}$$

Область $G'_{K_0N_0}$ определяется как такая подобласть G', в которой точки p удовлетворяют неравенствам (10.38), (10.38*):

$$\left|\left(k, \frac{\partial (H_{00} + \mu H^{(1)}_{01})}{\partial p}\right)\right| \geqslant$$
$$\geqslant \begin{cases} K_0\|k\|^{-n-1}, & \|k_0\| \neq 0, \\ \mu K_0\|k\|^{-n-1}, & \|k_0\| = 0, \ \|k\| \neq 0. \end{cases} \tag{10.52}$$

Заменив в (10.51) и в (10.52) $H^{(1)}_0$, $H^{(1)}_{01}$, K_0, N_0, δ_0 на

$H_0^{(s+1)}$, $H_{01}^{(s+1)}$, K_s, N_s, δ_s, мы получим неравенства, определяющие любые области $G_{K_sN_s}^{(s)}$, $s \geqslant 1$ в невырожденном и вырожденном случаях соответственно.

Задача состоит в доказательстве непустоты области в вырожденном случае. Оказывается, что это доказательство может быть выполнено по той же схеме, как и в невырожденном случае, если удовлетворяются условия § 10.1, т. е. если область $G^0 = G^{00} \times G^{01}$ выпуклая и если при $p \in G^0$

$$\det \frac{\partial^2 H_{00}}{\partial p^2} \neq 0, \quad \det \frac{\partial^2 H_{01}}{\partial p_1^2} \neq 0.$$

2. Напомним, как проводилось доказательство непустоты G^∞ в невырожденном случае (гл. VI).

Рассматривалась последовательность областей

$$G^{(0)}, \quad G^{(1)} = G_{K_0N_0}^{(0)} - 3\beta_0, \quad G^{(2)} = G^{(1)} - 3\beta_1, \ldots$$

переменной p, причем постоянные β_s были связаны с постоянными δ_s формулой $\beta_s = \delta_s^3$, а $\delta_{s+1} < \delta_s^{1+\alpha}$, где $\alpha > 0$. Далее рассматривалась последовательность отображений

$$\omega = A^{(s)} p = \frac{\partial H_0^{(s)}(p)}{\partial p}, \tag{10.53}$$

где $H_0^{(s)}$ — невозмущенная часть гамильтониана $H^{(s)}$; эти отображения определяются при $p \in G^{(s)}$ соответственно.

При доказательстве мы исходили из того, что отображение $\omega = A^{(0)} p$ является диффеоморфизмом области $G^{(0)}$ на некоторую область $\Omega^{(0)}$ переменной ω, причем

$$\theta_0 \| dp \| \leqslant \| dA^{(0)} \| \leqslant \Theta_0 \| dp \|, \tag{10.54}$$

где θ_0, Θ_0 — некоторые положительные постоянные. Справедливость этого вытекает из условия $\det \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \neq 0$ при $p \in G^{(0)}$ и из предположения о выпуклости области $G^{(0)}$.

Такое свойство отображения $\omega = A^{(0)}(p)$, а также близость между любыми соседними отображениями $\omega = A^{(s)} p$, $\omega = A^{(s+1)} p$, вытекающая из оценок возмущенных частей H_1, $H_1^{(1)}$, $H_1^{(2)}, \ldots$ гамильтонианов H, $H^{(1)}$, $H^{(2)}, \ldots$ соответственно, позволяло применить к отображениям (10.53) последовательно лемму 17, гл. II. Это дает возможность построить последовательность вспомогательных областей $\Omega^{(0)}$, $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}, \ldots$ переменной ω, для которых [см. (6.26)]

$$\operatorname{mes}(G^{(0)} \setminus G^{(k)}) < \left(\frac{\theta_0}{2}\right)^{-n} \sum_{s=0}^{n} \operatorname{mes}(\Omega^{(s)} \setminus \Omega^{(s-1)} - \beta_s), \tag{10.55}$$

и свести анализ областей $G^{(s)}$ к анализу областей $\Omega^{(s)}$. Переход от любой области $\Omega^{(s)}$ к $\Omega^{(s+1)}$ осуществлялся при этом по формуле (6.23)

$$\Omega^{(s+1)} = \Omega^{(s)}_{K_s N_s} - d_s, \tag{10.55*}$$

где

$$d_s = \beta_s\left(7\Theta_s + \frac{2\Theta_s}{\theta_s} + 2\right),$$

$$\beta_s = \delta_s^3, \quad \theta_{s+1} = (1-\delta_s)\,\theta_s, \quad \Theta_{s+1} = (1+\delta_s)\,\Theta_s,$$

причем θ_0, Θ_0 — коэффициенты в неравенствах (10.54), а $\Omega^{(s)}_{K_s N_s}$ есть подобласть области $\Omega^{(s)}$, в которой

$$|(k, \omega)| \geqslant K_s \|k\|^{-n-1}, \quad 0 < \|k\| < N_s, \quad K_s = \delta_s^2. \tag{10.56}$$

Последнее неравенство получается из условия, выделяющего из области $G^{(s)}$ подобласть $G^{(s)}_{K_s N_s}$, если заменить в нем $\dfrac{\partial H_0^{(s+1)}}{\partial p}$ на ω.

После получения неравенства (10.55) мы переходили к анализу области $\Omega^{(s)}$ и резонансных зон $\Gamma^{(i)}_{\Omega^{(s)}}$ в этих областях, представляющих совокупности точек, где не выполняется (10.56). В § 6.6 мы получили, что «ширина» одной такой зоны, соответствующей какому-либо вектору $k = (k_1, \ldots, k_n)$, составляет

$$h = \frac{2K_s \|k\|^{-n-1}}{(k_1^2 + \ldots + k_n^2)^{1/2}}, \tag{10.57}$$

так что при фиксированном $\|k\| = m$

$$h < \frac{2K_s m^{-n-1}}{\sqrt{m}}. \tag{10.58}$$

Мера каждой зоны оценивалась согласно (6.48) неравенством

$$\operatorname{mes}\Gamma^{(l)}_{\Omega(s)} < hD_1 \operatorname{mes}\Omega^{(0)}, \qquad (10.59)$$

где D_1 — число, определяемое при анализе областей

$$\tilde{\Omega}^{(s)} = \Omega^{(0)} - d_0 - \ldots - d_{s-1}, \quad s \geqslant 1$$

без учета резонансных зон. Число зон, соответствующих фиксированному $\|k\| = m$, не превышает $2^n m^{n-1}$, так что суммарная их мера оценивалась неравенством (6.50), т. е.

$$\sum_{\|k\|=m} \operatorname{mes}\Gamma^{(l)}_{\Omega(s)} < 2^n m^{n-1} \frac{2K_s m^{-n-1}}{\sqrt{m}} D_1 \operatorname{mes}\Omega^{(0)}. \qquad (10.60)$$

Так как в области $\Omega^{(s)} = \Omega^{(s-1)}_{K_{s-1}N_{s-1}} - d_{s-1}$ уже исключены зоны для $0 < \|k\| < N_{s-1}$, то при переходе от $\Omega^{(s)}$ к $\Omega^{(s)}_{K_s N_s}$ достаточно дополнительно исключить лишь зоны для $N_{s-1} \leqslant \|k\| < N_s$. Другими словами, дополнение $\Omega^{(s)}$ к области $\Omega^{(s)}_{K_s N_s}$ есть совокупность зон $\Gamma^{(l)}_{\Omega(s)}$ при $N_{s-1} \leqslant \|k\| < N_s$. Следовательно, согласно (10.60)

$$\operatorname{mes}\left(\Omega^{(s)} \setminus \Omega^{(s)}_{K_s N_s}\right) =$$

$$= \sum_{N_{s-1} \leqslant m < N_s} \sum_{\|k\|=m} \operatorname{mes}\Gamma^{(l)}_{\Omega(s)} < 2^{n+1} K_s \sigma_s D_1 \operatorname{mes}\Omega^{(0)}, \qquad (10.61)$$

где

$$\sigma_s = \sum_{N_{s-1} \leqslant m < N_s} m^{-5/2} < 2.$$

Принимая во внимание соотношение $\Omega^{(s+1)} - \beta_s = \Omega^{(s)}_{K_s N_s} - d_s - \beta_s$, с помощью (10.61) была получена далее оценка

$$\operatorname{mes}\left(\Omega^{(s)} \setminus \Omega^{(s+1)} - \beta_s\right) < 2^{n+2} D_1 (K_s \sigma_s +$$

$$+ (d_s + \beta_s) N_s^n) \operatorname{mes}\Omega^{(0)}, \qquad (10.62)$$

а затем с помощью (10.55) оценка

$$\operatorname{mes}\left(G^{(0)} \setminus G^{\infty}\right) < \chi \operatorname{mes} G^{(0)}, \qquad (10.63)$$

где

$$\chi = \left(\frac{2\Theta_0}{\theta_0}\right)^n D_1 2^{n+2} \left(2K_0 + \sum (d_s + \beta_s) N_s^n\right). \qquad (10.63^*)$$

Далее было выведено неравенство для δ_0 (6.57), при выполнении которого $\chi \ll 1$, что гарантирует непустоту, области G^∞.

3. Перейдем теперь к рассматриваемому вырожденному случаю.

Мы имеем последовательность областей

$$G', \ G^{(1)} = G'_{K_0 N_0} - 3\beta_0, \quad G^{(2)} = G^{(1)}_{K_1 N_1} - 3\beta_1, \ldots$$

еременной p, причем $\beta_s = \delta_s^3$, $\delta_{s+1} < \delta_s^{1+\alpha}$, как и в невырожденном случае. Подобласти $G'_{K_0 N_0}$, $G^{(1)}_{K_1 N_1}, \ldots$ определяются согласно (10.52).

Введем новую переменную $\xi = (\xi_0, \xi_1)$ и рассмотрим последовательность отображений:

$$\begin{aligned} \xi &= A^{(0)} p = \left(\xi_0 = \frac{\partial (H_{00} + \mu H_{01})}{\partial p_0}, \ \xi_1 = \frac{\partial H_{01}}{\partial p_1} \right), \\ \xi &= A^{(s)} p = \left(\xi_0 = \frac{\partial (H_{00} + \mu H_{01}^{(s)})}{\partial p_0}, \ \xi_1 = \frac{\partial H_{01}^{(s)}}{\partial p_1} \right). \end{aligned} \tag{10.64}$$

Как и в невырожденном случае, можно показать, что отображение $\xi = A^{(0)} p$ является диффеоморфизмом области G' на некоторую область $\Xi^{(0)}$ переменной ξ и что, кроме того, при всех $0 < \mu < \mu^*$ (μ^* — достаточно мало̀) справедливы неравенства, аналогичные (10.54):

$$\theta_0 \| dp \| \leqslant \| dA^{(0)} \| \leqslant \Theta_0 \| dp \|. \tag{10.65}$$

Для этого рассмотрим область $G^{(0)} = G^{00} \times G^{01}$ являющуюся, по предположению, выпуклой, и отображение $\xi = A^{(0)} p$ при $\mu = 0$. Поскольку

$\det \left(\dfrac{\partial^2 H_{00}}{\partial p_0^2} \right) \neq 0$, $\det \left(\dfrac{\partial^2 H_{01}}{\partial p_1^2} \right) \neq 0$, то и $\det \left(\dfrac{\partial A^{(0)}}{\partial p} \right) \neq 0$ при $\mu = 0$. В соответствии с леммой 11 гл. II найдутся числа $\bar\theta_0$, $\bar\Theta_0$ такие, что для $dA^{(0)}$ при $\mu = 0$

$$\bar\theta_0 \| dp \| \leqslant \| dA^{(0)} \| \leqslant \bar\Theta_0 \| dp \|.$$

В силу непрерывности матрицы $\dfrac{\partial A^{(0)}}{\partial p}$ по μ эти неравенства с некоторыми числами θ_0, Θ_0, близкими к $\bar\theta_0$, $\bar\Theta_0$, удовлетворяются и при $0 < \mu < \mu^*$, где μ^* — достаточно мало̀. Согласно лемме 13 гл. II отображение $\xi = A^{(0)} p$

является диффеоморфизмом области $G^{(0)}$, а вместе с тем и ее подобласти G'. Неравенства (10.65) справедливы, естественно, и в G' *).

Вместе с тем оценки для возмущающих частей $H_2^{(s)}$ гамильтонианов $H^{(s)}$ получаются такие же, как и в невырожденном случае, т. е. сохраняются все неравенства, обеспечивающие близость между любыми соседними отображениями $\xi=A^{(s)}p$, $\xi=A^{(s+1)}p$. Следовательно, мы имеем возможность применить лемму 17 гл. II к последовательности отображений (10.64), так же как и в невырожденном случае. Мы получим при этом последовательность областей, аналогичных областям $\Omega^{(s)}$. Так как это — области переменной ξ, то обозначим их иначе, например, через $\Xi^{(0)}$, $\Xi^{(s)}$ $(s=1, 2, \ldots)$. Но формулы, связывающие $\Xi^{(s)}$ и $\Xi^{(s+1)}$, останутся теми же, т. е. [см. (10.55*)]

$$\Xi^{(s+1)}=\Xi^{(s)}_{K_sN_s}-d_s, \tag{10.66}$$

где d_s — те же числа, что и в (10.55*).

Отличие от невырожденного случая состоит лишь в определении области $\Xi_{K_sN_s}$ в соответствии с условием (10.52).

Производная $\partial(H_{00}+\mu H_{01})/\partial p$ имеет компоненты

$$\partial(H_{00}+\mu H_{01})/\partial p_0, \quad \mu\partial H_{01}/\partial p.$$

Эти компоненты можно заменить согласно (10.64) на ξ_0, $\mu\xi_1$ соответственно и тогда (10.52) запишется в виде

$$\begin{gathered}|(k_0, \xi_0)+\mu(k_1, \xi_1)|\geqslant K_0\|k\|^{-n-1}, \ \|k_0\|\neq 0, \\ |(k_1, \xi_1)|\geqslant K_0\|k\|^{-n-1}, \ \|k_0\|=0, \ \|k\|\neq 0, \\ 0<\|k\|<N_0.\end{gathered} \tag{10.67}$$

Эти неравенства определяют подобласть $\Xi^{(0)}_{K_0N_0}$ области $\Xi^{(0)}$. Заменив K_0, N_0 на K_s, N_s, получим аналогичные неравенства, определяющие любую подобласть $\Xi^{(s)}_{K_sN_s}$ области $\Xi^{(s)}$, $s\geqslant 1$. Исходя из них, мы получим несколько

*) Можно было бы вывести неравенства для $dA^{(0)}$ в явном виде, выразив в конечном итоге θ_0, Θ_0 через μ и параметры оценок для соответствующих матриц при $\mu=0$. Мы ограничились соображениями о непрерывности в целях сокращения изложения, поскольку указанные оценки имеют все же лишь теоретическое значение.

другую оценку для «ширины» h резонансных зон. А именно, вместо (10.57) получим формулы:

$$h = 2K_s \|k\|^{-n-1} / [k_1^2 + \ldots + k_{n_0}^2 + \mu^2 k_{n_0+1}^2 + \ldots + \mu^2 k_n^2]^{1/2},$$
$$\|k_0\| \neq 0,$$
$$h = 2K_s \|k\|^{-n-1} / [k_{n_0+1}^2 + \ldots + k_n^2]^{1/2}, \quad \|k_0\| = 0, \quad \|k\| \neq 0,$$

откуда при $\|k\| = m \geqslant 1$ во всяком случае

$$h < 2K_s m^{-n-1}.$$

Это неравенство приводит нас к оценке для $\operatorname{mes}(\Xi^{(s)} \setminus \Xi^{(s)}_{K_s N_s})$, совпадающей с (10.61), но где

$$\sigma_s = \sum_0^\infty m^{-2}, \quad N_{s-1} \leqslant m < N_s.$$

Так как $\sum\limits_0^\infty m^{-2} < 2$, а соотношения между всеми постоянными δ_s, β_s, d_s, N_s и т. д. те же, что и в невырожденном случае, то оценка для $\operatorname{mes}(G' \setminus G^\infty)$ целиком совпадает с (10.63), где χ выражается согласно (10.63*). Если δ_0 удовлетворяет неравенству (6.57), то непустота области G^∞ гарантируется.

4. Дальнейшее доказательство существования условно-периодических решений остается без всяких изменений по сравнению с невырожденным случаем. Таким образом, можно гарантировать существование условно-периодических решений, принадлежащих некоторому подмножеству F^* исходной области F, если μ достаточно мало.

Можно было бы выписать непосредственно все неравенства, которым должно удовлетворять μ. Правда, эти неравенства дают практически неэффективную оценку, в чем мы убедились при анализе невырожденного случая.

ГЛАВА XI

УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВБЛИЗИ ТОЧЕК РАВНОВЕСИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 11.1. Постановка задачи

1. Рассмотрим каноническую систему:

$$\dot{x}_j = -\frac{\partial H}{\partial y_j}, \quad \dot{y}_j = \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j=1, \ldots, n), \qquad (11.01)$$

где гамильтониан $H=H(x_1, \ldots, y_n)$ разлагается в окрестности начала координат $x_j=y_j=0$ в ряд по степеням своих переменных с постоянными коэффициентами, начинающийся с членов второго порядка:

$$H(x_1, \ldots, y_n) = \sum A^{(m_1, \ldots, m_{2n})} x_1^{m_1} \ldots y_n^{m_{2n}}. \qquad (11.02)$$

Начало координат является, очевидно, точкой равновесия этой системы.

Выделяя в ряде (11.02) совокупности членов различных порядков (второго, третьего и т. д.) и обращаясь к векторной форме записи, можем представить H в виде

$$H(x, y) = \sum_{m=2}^{\infty} H_m(x, y), \qquad (11.02^*)$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ — векторы и каждое H_m — совокупность членов m-го порядка (форма m-й степени) относительно $x_1, \ldots, y_n$. Саму систему (11.01) запишем также в векторной форме:

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}. \qquad (11.01^*)$$

Предполагается, что линейная система, получающаяся из (11.01*), если сохранить в гамильтониане H только H_2,

$$\dot{x} = -\frac{\partial H_2}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H_2}{\partial x}, \qquad (11.03)$$

имеет лишь ограниченные решения, а характеристическое уравнение для этой системы имеет лишь взаимно несоизмеримые чисто мнимые корни. Такую точку равновесия называют *устойчивой в первом (линейном) приближении и эллиптического типа.* Уравнениями такого типа являются, например, уравнения движения в окрестности треугольных точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел.

Если обозначить корни характеристического уравнения через $\pm\lambda_1 i, \ldots, \pm\lambda_n i$ $(i=\sqrt{-1})$, то предположение об их взаимной несоизмеримости означает, что сумма

$$k_1\lambda_1+\ldots+k_n\lambda_n$$

не обращается в нуль ни при каких целых значениях $k_1, \ldots, k_n$, не равных одновременно нулю. Это будет иметь место для иррациональных и не кратных друг другу $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *).

Как известно из теории линейных систем с постоянными коэффициентами, общее решение системы (11.03) представится в виде линейной комбинации косинусов и синусов аргументов $\lambda_j t$ $(j=1, \ldots, n)$:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} A_j\cos\lambda_j t+B_j\sin\lambda_j t,\\ y &= \sum_{j=1}^{n} C_j\cos\lambda_j t+D_j\sin\lambda_j t,\end{aligned}\right. \tag{11.04}$$

где $A_j, \ldots, D_j$ — постоянные коэффициенты. Это условно-периодические функции с частотами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Такой случай представляет значительный интерес по той причине, что исследование произвольных решений точной системы (11.01*) сталкивается с большими трудностями, связанными опять с проблемой «малых знаменателей». До сих пор оставался полностью открытым вопрос о существовании условно-периодических решений точной системы (11.01*) и о построении этих решений. Метод, излагаемый в этой книге, оказался эффективным и в этом случае. Он позволяет, как и в предыдущих параграфах, непосредственно строить бесконечную последовательность приближенных условно-периодических

*) Одно из чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ может быть рациональным, но если рациональны два числа, то данное условие заведомо не выполняется.

решений исходной системы (11.01*). При этом доказывается, что при произвольно выбранных начальных значениях в достаточно малой окрестности положения равновесия можно ожидать с вероятностью, близкой к единице, что эта последовательность сходится к точному условно-периодическому решению системы (11.01*).

Метод построения решения заключается, по существу, в том, что исходные уравнения (11.01*) приводятся сначала с помощью некоторых предварительных преобразований к такому виду, когда становится применимым процесс последовательных канонических преобразований, рассмотренных в невырожденном случае.

Прежде всего следует выполнить линейное каноническое преобразование $(x, y) \rightarrow (x', y')$ (согласно теории канонических линейных систем с постоянным коэффициентом оно всегда существует), чтобы система в новых переменных имела нормальную форму, т. е. чтобы функция H_2 в новых переменных имела вид

$$H_2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{x_j'^2 + y_j'^2}{2}.$$

Для упрощения изложения мы предположим, что это преобразование было уже выполнено заранее, так что гамильтониан (11.02*) уже имеет вид

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{x_j^2 + y_j^2}{2} + H_3(x, y) + \ldots \qquad (11.05)$$

В этом выражении можно рассматривать функцию $H_2 = \frac{1}{2} \sum \lambda_j (x_j^2 + y_j^2)$ как невозмущенную часть гамильтониана $H(x, y)$, а совокупность остальных членов $H_3 + \ldots$ как возмущающую его часть. В достаточно малой окрестности начала координат $x = y = 0$ возмущающая часть будет иметь третий порядок малости относительно x, y.

Последующие преобразования, играющие вспомогательную роль в рамках рассматриваемого метода, носят имя Дж. Биркгофа [23]. Их цель — перейти к системе с гамильтонианом, в котором возмущающая часть имела бы еще более высокий порядок малости в окрестности точки $x = y = 0$.

§ 11.2. Преобразование Биркгофа

Преобразование Биркгофа в общем случае заключается в следующем (см. [23]).

Пусть дана каноническая система

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \tag{11.06}$$

где гамильтониан H представляется степенным рядом по компонентам $\xi_1, \ldots, \eta_n$ векторов ξ, η и пусть этот ряд имеет следующую структуру:

$$H = H_2(\xi, \eta) + H_m(\xi, \eta) + H_{m+1}(\xi, \eta) + \ldots, \tag{11.06*}$$

где H_k — однородная форма k-й степени. Пусть

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \lambda_s (\xi_s^2 + \eta_s^2),$$

так что система в первом приближении имеет нормальную форму:

$$\dot{\xi}_j = -\lambda_j \eta_j, \quad \dot{\eta}_j = \lambda_j \xi_j.$$

Здесь λ_j — вещественные числа, для которых сумма

$$k_1\lambda_1 + \ldots + k_n\lambda_n \tag{11.07}$$

при целых $k_1, \ldots, k_m$, удовлетворяющих условию $1 \leqslant |k_1| + \ldots + |k_n| \leqslant m$, отлична от нуля.

Форма $H_m(\xi, \eta)$ может быть записана в виде

$$H_m(\xi, \eta) = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \beta_n = m} D_{\alpha_1, \ldots, \beta_n} \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n} \eta_1^{\beta_1} \ldots \eta_n^{\beta_n}, \tag{11.07*}$$

где $D_{\alpha_1 \ldots \beta_n}$ — постоянные коэффициенты.

Применим к (11.06) каноническое преобразование к новым переменным:

$$\xi = u + \frac{\partial S}{\partial \eta}, \tag{11.08}$$

$$v = \eta + \frac{\partial S}{\partial u}, \tag{11.08*}$$

где функцию $S = S(u, \eta)$ постараемся подобрать так, чтобы в новом гамильтониане не было бы, кроме H_2, других членов ниже $(m+1)$-го порядка относительно u, v.

Забегая вперед, скажем, что при нечетном m это удается сделать, но при четном m в новом гамильтониане все же остаются некоторые члены порядка m, имеющие определенную структуру.

Будем искать функцию S в виде однородной формы m-й степени

$$S(u, \eta) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\beta_n=m} K_{\alpha_1\ldots\beta_n} u_1^{\alpha_1}\ldots u_n^{\alpha_n}\eta_1^{\beta_1}\ldots\eta_n^{\beta_n}, \tag{11.09}$$

где K — подлежащие выбору коэффициенты. Из структуры соотношений (11.08), (11.08*) видно, что в некоторой окрестности начала координат $u=v=0$ переменные ξ, η являются тогда аналитическими функциями u, v (так как тогда соотношение (11.08*), рассматриваемое как уравнение относительно η, удовлетворяет при достаточно малых u, v условиям теоремы о существовании аналитической неявной функции $\eta=\eta(u, v)$. Другими словами, компоненты векторов ξ и η представляются рядами по целым, положительным степеням компонент векторов u, v, сходящимся в некоторой окрестности начала координат. Отсюда вытекает, что, поскольку производные $\frac{\partial S}{\partial u_s}$, $\frac{\partial S}{\partial \eta_s}$ имеют $(m-1)$-й порядок малости относительно u, η, то

$$\xi_s = u_s + \frac{\partial S(u, v)}{\partial v_s} + \ldots, \quad \eta_s = v_s - \frac{\partial S(u, v)}{\partial u_s} + \ldots \tag{11.10}$$
$$(s=1, \ldots, n),$$

где невыписанные члены имеют порядок выше $(m-1)$-го.

Гамильтониан $\overline{H}(u, v)$ системы относительно переменных u, v

$$\dot{u} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial v}, \quad \dot{v} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial u}, \tag{11.11}$$

получается из $H(\xi, \eta)$ после подстановки вместо $\xi_1, \ldots, \eta_n$ выражений (11.10). Мы получим

$$\overline{H} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} \lambda_s (u_s^2 + v_s^2) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} 2\lambda_s \left(u_s \frac{\partial S(u, v)}{\partial v_s} - v_s \frac{\partial S(u, v)}{\partial u_s}\right) + \overline{H}_m(u, v) + \ldots, \tag{11.12}$$

где невыписанные члены имеют порядок выше m-го относительно u, v.

В соответствии с (11.07)

$$\overline{H}_m(u,\ v)=\sum_{\alpha_1+\ldots+\beta_n=m} D_{\alpha_1\ldots\beta_n} u_1^{\alpha_1}\ldots u_n^{\alpha_n} v_1^{\beta_1}\ldots v_n^{\beta_n}. \qquad (11.13)$$

Для того чтобы облегчить определение коэффициентов в разложении функции S, заменим в выражении (11.09) η на v и введем вспомогательные комплексные переменные, положив

$$u=\overline{u}+i\overline{v}, \quad v=\overline{u}-i\overline{v}. \qquad (11.14)$$

В этих переменных

$$u_s\frac{\partial S(u,\ v)}{\partial v_s}-v_s\frac{\partial S(u,\ v)}{\partial u_s}=\frac{1}{2}\left[\overline{u}_s\frac{\partial\overline{S}(\overline{u},\ \overline{v})}{\partial\overline{u}_s}-\overline{v}_s\frac{\partial\overline{S}(\overline{u},\ \overline{v})}{\partial\overline{v}_s}\right],$$

где $\overline{S}(\overline{u},\ \overline{v})=S(\overline{u}+i\overline{v},\ \overline{u}-i\overline{v})$. Подставив (11.14) в выражения (11.09) для $S(u,\ v)$, и (11.13) для $\overline{H}_m\ (u,\ v)$, получим

$$\overline{S}(\overline{u},\ \overline{v})=\sum\overline{K}_{\alpha_1\ldots\beta_n}\overline{u}_1^{\alpha_1}\ldots\overline{u}_n^{\alpha_n}\overline{v}_1^{\beta_1}\ldots\overline{v}_n^{\beta_n}, \qquad (11.15)$$

$$H_m(\overline{u}+i\overline{v},\ \overline{u}-i\overline{v})=\sum_{\alpha_1+\ldots+\beta_n=m}\overline{D}_{\alpha_1\ldots\beta_n}\overline{u}_1^{\alpha_1}\ldots\overline{u}_n^{\alpha_n}\overline{v}_1^{\beta_1}\ldots\overline{v}_n^{\beta_n}, \qquad (11.16)$$

где $\overline{K}$, $\overline{D}$ — комплексные коэффициенты.

Таким образом,

$$\sum_{s=1}^{n}2\lambda_s\left(u_s\frac{\partial S(u,\ v)}{\partial v_s}-v_s\frac{\partial S(u,\ v)}{\partial u_s}\right)+\overline{H}_m(u,\ v)=$$
$$=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\left(\overline{u}_s\frac{\partial\overline{S}(\overline{u},\ \overline{v})}{\partial\overline{u}_s}-\overline{v}_s\frac{\partial\overline{S}(\overline{u},\ \overline{v})}{\partial\overline{v}_s}\right)+\overline{H}_m(\overline{u}+i\overline{v},\ \overline{u}-i\overline{v}). \qquad (11.17)$$

Это равенство выполняется тождественно в силу формул (11.14) связи между u, v и $\overline{u}$, $\overline{v}$.

Подставив в первую часть этого тождества выражения (11.15), (11.16) для $\overline{S}(\overline{u},\ \overline{v})$ и $\overline{H}_m(\overline{u}+i\overline{v},\ \overline{u}-i\overline{v})$, запишем ее после простых выкладок в следующем виде:

$$\sum\{[\lambda_1(\beta_1-\alpha_1)+\ldots+\lambda_n(\beta_n-\alpha_n)]\overline{K}_{\alpha_1\ldots\beta_n}+$$
$$+\overline{D}_{\alpha_1\ldots\beta_n}\}\overline{u}_1^{\alpha_1}\ldots\overline{v}_n^{\beta_n}. \qquad (11.18)$$

Числа $\alpha_1, \ldots, \beta_n$ являются целыми положительными (или равными нулю) и удовлетворяют условию $\alpha_1+\ldots+\beta_n=m$. Следовательно, числа $(\beta_1-\alpha_1), \ldots$ $\ldots, (\beta_n-\alpha_n)$ также целые (положительные, отрицательные или нуль), причем

$$(\beta_1-\alpha_1)+\ldots+(\beta_n-\alpha_n)\leqslant\beta_1+\alpha_1+\ldots+\beta_n+\alpha_n=m.$$

Кроме того, если m — нечетное, то

$$|\beta_1-\alpha_1|+\ldots+|\beta_n-\alpha_n|\neq 0 \qquad (\text{т. е.} \geqslant 1).$$

Действительно, равенство нулю может иметь место лишь при $\alpha_s=\beta_s$, $s=1, \ldots, n$. Но тогда $\alpha_1+\ldots+\beta_n=$ $=2\alpha_1+\ldots+2\alpha_n$ равно четному числу, что противоречит предположению о нечетности m.

Таким образом, для нечетного m коэффициент при $\overline{K}_{\alpha_1\ldots\beta_n}$ в (11.18) представляет собой комбинацию чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ вида (11.07). По условию эта комбинация отлична от нуля. Следовательно, мы можем положить тогда при всех $\alpha_1+\ldots+\beta_n=m$ коэффициенты $\overline{K}_{\alpha_1\ldots\beta_n}$ равными

$$\overline{K}_{\alpha_1\ldots\beta_n}=-\overline{D}_{\alpha_1\ldots\beta_n}\Big/\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(\beta_s-\alpha_s). \qquad (11.19)$$

Выражение (11.18) обратится тождественно в нуль. Тогда, согласно (11.12), гамильтониан примет вид

$$\overline{H}(u, v)=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(u_s^2+v_s^2)+\overline{H}_{m+1}(u, v)+\ldots \qquad (11.20)$$

Пусть теперь m четное. В этом случае в (11.18) могут встретиться члены, для которых $\alpha_s=\beta_s$ $(s=1, \ldots, n)$ и $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m/2$. Для этих членов коэффициент при $\overline{K}_{\alpha_1\ldots\beta_n}$ обращается в нуль и их совокупность запишется в виде

$$\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m/2}\overline{D}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(\overline{u}_1\overline{v}_1)^{\alpha_1}\ldots(\overline{u}_n\overline{v}_n)^{\alpha_n}. \qquad (11.21)$$

В переменных u, v эта совокупность членов в $H_m(u, v)$ такова:

$$\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m/2} \overline{D}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(u_1^2+v_1^2)^{\alpha_1}\ldots(u_n^2+v_n^2)^{\alpha_n}. \tag{11.21*}$$

Для всех остальных членов в (11.18) $m \geqslant |\beta_1-\alpha_1|+\ldots$ $\ldots+|\beta_n-\alpha_n| \geqslant 1$, и мы можем, определив $\overline{K}_{\alpha_1\ldots\beta_n}$ по формуле (11.19), обратить их в нуль.

Гамильтониан $\overline{H}(u, v)$ примет тогда вид

$$\overline{H}(u, v)=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(u_s^2+v_s^2)+$$
$$+\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m/2} D_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(u_1^2+v_1^2)^{\alpha_1}\ldots(u_n^2+v_n^2)^{\alpha_n}+$$
$$+\overline{H}_{m+1}(u, v)+\ldots, \tag{11.22}$$

В силу сходимости исходного ряда для $H(\xi, \eta)$ в некоторой окрестности точки $\xi=\eta=0$, а также сходимости рядов (11.10) для ξ_s, η_s в некоторой окрестности точки $u=v=0$, ряды (11.20) и (11.22) для $\overline{H}(u, v)$ также будут сходиться в некоторой окрестности точки $u=v=0$.

Что касается функции S, то в переменных $\bar{u}$, $\bar{v}$ она записывается в виде (11.15), где коэффициенты $\overline{K}_{\alpha_1\ldots\beta_n}$ определяются согласно (11.19). Эти коэффициенты, вообще, комплексные. Возвратившись к переменным u, v, по формуле $\bar{u}=(u+v)/2$, $\bar{v}=(u-v)\,2i$ и положив $v=\eta$, получим выражение этой функции в переменных u, η в виде (11.09), где коэффициенты $K_{\alpha_1\ldots\beta_n}$ будут вещественными.

Мы предполагали выше, что числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ несоизмеримы между собой, чего достаточно для применения этих преобразований.

2. Применим теперь преобразование Биркгофа к системе с гамильтонианом (11.05). Пусть

$$H_3(x, y)=\sum_{\alpha_1+\ldots+\beta_n=3} A_{\alpha_1\ldots\beta_n}x_1^{\alpha_1}\ldots y_n^{\beta_n}. \tag{11.23}$$

Перейдем к новым переменным x', y' по формулам

$$x=x'+\frac{\partial S}{\partial y}, \quad y'=y+\frac{\partial S}{\partial x'}, \tag{11.24}$$

где

$$S(x',\ y)=\sum K_{\alpha_1\ldots\beta_n} x_1'^{\alpha_1}\ldots x_n'^{\alpha_n} y_1^{\beta_1}\ldots y_n^{\beta_n}, \qquad (11.25)$$

и коэффициенты K определяются с помощью формул п. 1 по коэффициентам A в (11.23). Тогда будем иметь уравнения

$$\dot{x}'=-\frac{\partial H'}{\partial y'}, \quad \dot{y}'=\frac{\partial H'}{\partial x'}, \qquad (11.\ 6)$$

где

$$H'=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\left(x_s'^2+y_s'^2\right)+H_4'(x',\ y')+\ldots \qquad (11.27)$$

Для того чтобы можно было непосредственно составить форму H_4', достаточно выразить x, y через x', y' с точностью до членов третьего порядка. Из (10.24) мы получим

$$\begin{aligned} y&=y'-\left(\frac{\partial S}{\partial x'}\right)_{y=y'}+\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x'\,\partial y},\ \frac{\partial S}{\partial x'}\right)_{y=y'}+\ldots,\\ x&=x'+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{y=y'}-\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2},\ \frac{\partial S}{\partial x'}\right)_{y=y'}+\ldots, \end{aligned} \qquad (11.28)$$

причем тут невыписанные члены имеют порядок малости относительно x', y' выше третьего. С помощью этих формул мы найдем коэффициенты формы H_4' и запишем эту формулу, выделив члены, для которых

$$\alpha_s=\beta_s \quad (s=1,\ldots,n),\ \alpha_1+\ldots+\beta_n=\frac{4}{2}=2:$$

$$H_4'=\sum_{s,\ \sigma=1,\ldots,n} c_{s\sigma}\left(x_s'^2+y_s'^2\right)\left(x_\sigma'^2+y_\sigma'^2\right)+$$
$$+\sum_{\alpha_1+\ldots+\beta_n=4} B_{\alpha_1\ldots\beta_n} x_1'^{\alpha_1}\ldots y_n'^{\beta_n}, \qquad (11.29)$$

где $c_{s\sigma}$ — постоянные, причем $c_{s\sigma}=c_{\sigma s}$ и для членов во второй сумме всегда $4\geqslant|\beta_1-\alpha_1|+\ldots+|\beta_n-\alpha_n|\geqslant 1$.

Выполним теперь второе каноническое преобразование

$$x'=x''+\frac{\partial S^{(1)}}{\partial y'}, \quad y''=y'+\frac{\partial S^{(1)}}{\partial x''}, \qquad (11.30)$$

где

$$S^{(1)}(x'', y') = \sum_{\alpha_1+\ldots+\beta_n=4} K^{(1)}_{\alpha_1\ldots\beta_n} x''^{\alpha_1}_1 \ldots x''^{\alpha_n}_n y'^{\beta_1}_1 \ldots y'^{\beta_n}_n \quad (11.31)$$

и коэффициент K также определяются в зависимости от коэффициентов B по формулам п. 1. Мы получим уравнения:

$$\dot{x}'' = -\frac{\partial H''}{\partial y''}, \quad \dot{y}'' = \frac{\partial H''}{\partial x''} \quad (11.32)$$

с гамильтонианом

$$H'' = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} \lambda_s (x''^2_s + y''^2_s) + \\ + \sum_{s,\sigma=1,\ldots,n} c_{s\sigma}(x''^2_s + y''^2_s)(x''^2_\sigma + y''^2_\sigma) + H''_5(x'', y'') + \ldots, \quad (11.33)$$

Из изложенного выше вытекает, что это разложение функции H'' в степенной ряд сходится в некоторой окрестности начала координат $x'' = y'' = 0$.

Первые две суммы в H'' можно рассматривать как невозмущенную часть этого гамильтониана, а совокупность членов $H''_5 + \ldots$ как возмущающую часть. В окрестности точки $x'' = y'' = 0$ последняя имеет пятый порядок малости относительно x'', y'' и этого оказывается достаточно, чтобы процесс последовательных канонических преобразований, рассмотренных при анализе невырожденного случая, был применим.

З а м е ч а н и е. Преобразования Биркгофа можно продолжать неограниченно, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — иррациональные числа, несоизмеримые между собой. Можно перейти по тем же формулам к переменным $x^{(3)}$, $y^{(3)}$, уничтожив в гамильтониане $H^{(3)}(x^{(3)}, y^{(3)})$ члены пятого порядка малости, затем к переменным $x^{(4)}$, $y^{(4)}$, уничтожив в $H^{(4)}$ члены шестого порядка, за исключением тех, которые имеют вид (11.21*) с $m=6$, и т. д. Переходя формально к пределу, получим систему

$$\dot{x}^\infty = -\frac{\partial H^\infty}{\partial y^\infty}, \quad \dot{y}^\infty = \frac{\partial H^\infty}{\partial x^\infty}, \quad (11.34)$$

где

$$H^\infty(x^\infty, y^\infty)=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}(x_s^{\infty 2}+y_s^{\infty 2})+$$

$$+\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2}^{\infty} c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1^{\infty 2}+y_1^{\infty 2})^{\alpha_1}\ldots(x_n^{\infty 2}+y_n^{\infty 2})^{\alpha_n}. \quad (11.34^*)$$

Если мы положим

$$x_s^\infty=\sqrt{2p_s}\cos q_s,\ y_s^\infty=\sqrt{2p_s}\sin q_s\ (s=1,\ldots,n), \qquad (11.35)$$

то, как нетрудно установить, это преобразование является каноническим. Мы получим уравнения

$$\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s},\quad \dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}\qquad (s=1,\ldots,n), \qquad (11.36)$$

где

$$H=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s p_s+\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2}^{\infty} 2c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}. \qquad (11.37)$$

Система (11.36) непосредственно интегрируется:

$$p_s=p_{s0}=\mathrm{const},\quad q_s=q_{s0}+\omega_s t, \qquad (11.38)$$

причем

$$\omega_s=\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right)_{p_1=p_{10},\ldots,\ p_n=p_{n0}}.$$

Однако последовательность преобразований

$$(x,\ y)\to(x',\ y')\to\ldots\to(x^{(k)},\ y^{(k)})\to\ldots$$

расходится (как показано, например, в [24]). Поэтому таким путем можно получить лишь так называемое формальное условно-периодическое решение исходной системы.

§ 11.3. Преобразование к полярным координатам

Для непосредственного применения к системе (11.32) последовательных преобразований, рассмотренных в гл. IV, следует перейти сначала к полярным координатам по формулам, аналогичным (11.35):

$$x''=\sqrt{2p}\cos q,\quad y''=\sqrt{2p}\sin q \qquad (11.39)$$

(здесь p, q — векторы с компонентами $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_n$ соответственно, причем в вещественной области все $p_s > 0$).

Мы придем тогда к системе

$$\dot{p} = -\frac{\partial H^{(0)}}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H^{(0)}}{\partial p}, \tag{11.40}$$

где $H^{(0)}(p, q) = H''(x''(p, q), y''(p, q))$, а p и q играют роль позиционной и угловой переменной соответственно. Если через (λ, p) обозначить скалярное произведение вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ на вектор p, то можно записать $H^{(0)}$ в виде

$$H^{(0)}(p, q) = H_0^{(0)}(p) + H_1^{(0)}(p, q), \tag{11.41}$$

где

$$H_0^{(0)}(p) = (\lambda, p) + \sum_{s, \sigma=1}^{n} \lambda_{s\sigma} p_s p_\sigma,$$

$$H_1^{(0)}(p, q) = H_5^{(0)}(p, q) + H_6^{(0)}(p, q) + \ldots \tag{11.41*}$$

и $\lambda_{s\sigma}$ — некоторые постоянные коэффициенты.

Каждая функция $H_m^{(0)}(p, q)$ представляет собой тригонометрический полином относительно угловой переменной q. Коэффициенты же полинома представляют собой формы m-й степени относительно $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}$. Функция $H_1^{(0)}(p, q)$ представляется рядом Фурье по угловой переменной q.

Остановимся кратко на свойствах преобразования (11.39) к полярным координатам.

Как указано выше, разложение (11.33) для $H''(x'', y'')$ сходится в некоторой окрестности точки $x'' = y'' = 0$. Пусть это имеет место, например, для $|x''_s| \leqslant R$, $|y''_s| \leqslant R$ $(s = 1, \ldots, n)$, причем x''_s, y''_s могут считаться комплексными. Другими словами, пусть $H''(x'', y'')$ есть аналитическая функция в области V $(|x''_s| \leqslant R, \ |y''_s| \leqslant R)$. Рассмотрим теперь формулы замены переменных (11.39), положив $r = \sqrt{2p}$. Переменные x'', y'' являются аналитическими функциями r и q для всех r и q. Тогда функция H'' $(x''$ (r, q), y'' $(r, q))$ согласно результатам теории аналитических функций сохранит аналитичность по r, q в той области значений r, q, где значения

$x''(r, q)$, $y''(r, q)$ остаются в области V. Если же $|\operatorname{Im} q_s| \leqslant 1$, $|r_s| \leqslant R/2$ $(s=1, \ldots, n)$, то, во всяком случае, $|r_s \cos q_s| \leqslant R$, $|r_s \sin q_s| \leqslant R$. Следовательно, H'' при таких r_s, q_s есть аналитическая функция этих переменных.

Рассмотрим теперь какую-либо величину $r_s = \sqrt{2p_s}$ как функцию p_s. Представим p_s формулой

$$p_s = \varepsilon \left(1 + \frac{p_s - \varepsilon}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon = \frac{R^2}{16}.$$

Если $|p_s - \varepsilon| < \varepsilon$, то, во-первых, $|p_s| < 2\varepsilon$ и $|r_s| < \sqrt{4\varepsilon} = R/2$, а во-вторых, r_s разлагается в ряд по степеням $(p_s - \varepsilon)$. Итак, функция $H''(x''(p, q), y''(p, q))$ будет аналитической по p, q в области $|\operatorname{Im} q_s| < 1$, $|p_s - \varepsilon| < \varepsilon$.

§ 11.4. Применение основной операции при построении условно-периодического решения

К системе (11.40) применяются теперь с некоторыми изменениями те же самые канонические преобразования, что и в невырожденном случае.

Рассмотрим первый шаг.

Пусть ряд Фурье для функции $H_1^{(0)}(p, q)$ имеет вид

$$H_1^{(0)}(p, q) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} h_k(p) \cos(k, q) + l_k(p) \sin(k, q), \tag{11.42}$$

где h_k, l_k — аналитические функции p. Выделим в $H_1^{(0)}$ вековую часть $\overline{H}_1^{(0)}$, остаточный член $R_N H_1^{(0)}$ и частную сумму $[\widetilde{H}_1^{(0)}]_N$, так что

$$H_1^{(0)}(p, q) = \overline{H}_1^{(0)}(p) + [\widetilde{H}_1^{(0)}(p, q)]_N + R_N H_1^{(0)}. \tag{11.43}$$

Число N определяется по формулам, аналогичным тем, которые приводились в гл. I—III. Однако, как мы говорили выше, эти формулы имеют лишь теоретическое значение. При практическом построении решения желательно брать N настолько большим, чтобы учитывать все выписанные явно члены разложения (11.42) (коэффициенты которых не равны нулю в пределах принятой точности вычислений).

Выполним замену переменных $(p, q) \to (P^{(1)}, Q^{(1)})$ по формулам

$$p = P^{(1)} + \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q^{(1)} = q + \frac{\partial S}{\partial P^{(1)}}, \tag{11.44}$$

где

$$\boldsymbol{S}(P^{(1)}, q) = \sum_{1 \leqslant \|k\| < N} S_k(P^{(1)}) \sin(k, q) + \boldsymbol{R}_k(P^{(1)}) \cos(k, q), \tag{11.44*}$$

$$S_k(P^{(1)}) = -h_k(P^{(1)}) \Big/ \left(k, \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P^{(1)}}\right),$$

$$R_k(P^{(1)}) = l_k(P^{(1)}) \Big/ \left(k, \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P^{(1)}}\right),$$

$$H_0^{(1)}(P^{(1)}) = H_0^{(0)}(P^{(1)}) + \overline{H}_1(P^{(1)}).$$

Относительно переменных $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ получим уравнения

$$\dot{P}^{(1)} = -\frac{\partial H^{(1)}}{\partial Q^{(1)}}, \quad \dot{Q}^{(1)} = \frac{\partial H^{(1)}}{\partial P^{(1)}}, \tag{11.45}$$

где

$$H^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}) = H_0^{(1)}(P^{(1)}) + H_1^{(1)}(P^{(1)}, Q^{(1)}) \tag{11.46}$$

где $H_1^{(1)}$ — аналитическая функция в некоторой области изменения своих переменных, причем $H_1^{(1)}$ при достаточно малом ε значительно меньше по порядку малости, чем $H_1^{(0)}$.

Первое приближение $p^{(1)}(t)$, $q^{(1)}(t)$ к искомому условно-периодическому решению системы (11.40) мы получим так же, как и в гл. I, если пренебрежем в гамильтониане $H^{(1)}$ его возмущающей частью $H_1^{(1)}$.

Аналогичным образом производятся второй, третий и последующие шаги и строятся приближения $p^{(s)}(t)$, $q^{(s)}(t)$ $(s = 2, 3, \ldots)$. Оказывается возможным установить, что если в (11.41)

$$\det(\lambda_{s\sigma}) \neq 0,$$

то при достаточно малом ε и при благоприятно выбранных значениях $p_{s0} = p_s(0)$ $(s = 1, \ldots, n)$ эти приближения сходятся к точному условно-периодическому решению системы (11.40). От переменных p, q нетрудно возвратиться к исходным переменным x, y и мы получим для большинства *) начальных значений в достаточно малой окрестности точки равновесия $x=y=0$ условно-периодическое решение.

Замечание 1. Относительно корней характеристического уравнения для системы (11.03) первого приближения мы предполагали, что они взаимно несоизмеримые и чисто мнимые. Однако все результаты этого параграфа остаются справедливыми и в том случае, если эти корни $\pm\lambda_s i$ $(s=1, \ldots, n)$ таковы, что комбинация $k_1\lambda_1+\ldots+k_n\lambda_n$ с целыми (не равными одновременно нулю) числами $k_1, \ldots, k_n$ отлична от нуля лишь при $|k_1|+\ldots+|k_n|\leqslant 4$. Этого условия достаточно при выполнении двух преобразований Биркгофа в § 11.2.

Вместе с тем, если для чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеет место острая соизмеримость при $|k_1|+\ldots+|k_n|\leqslant 4$, то рассмотренные преобразования становятся практически мало удобными. Тогда некоторые коэффициенты для функций S, $S^{(1)}$, а значит, и в гамильтониане $H''(x'', y'')$ вследствие малых знаменателей могут оказаться достаточно большими. Поэтому область применения данного метода будет очень малой.

Замечание 2. Предварительные преобразования Биркгофа требуются для строгого доказательства сходимости рассматриваемого процесса последовательных канонических преобразований. Но, по существу, при практическом построении решений результаты мало изменятся, если сразу преобразовать систему (11.05) к полярным координатам, а затем применить последовательные преобразования вида (11.44).

§ 11.5. Доказательство сходимости процесса последовательных канонических преобразований

В предыдущем параграфе мы рассмотрели схему построения условно-периодического решения системы вида (11.01). Переход от системы (11.01) к системе (11.40) был достаточно обоснован.

Теперь мы остановимся на анализе системы (11.40) и укажем, как доказывается сходимость применяемого

*) Если оценить множество благоприятных начальных значений с точки зрения меры Лебега.

процесса последовательных канонических преобразований.

Пусть дана система вида (11.40)

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{11.47}$$

где p, q — векторы с компонентами $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_n$ соответственно,

$$H(p, q) = H_0(p) + H_1(p, q), \tag{11.48}$$

$$H_0(p) = (\lambda, p) + \sum_{s,\sigma=1}^{n} \lambda_{s\sigma} p_s p_\sigma. \tag{11.48*}$$

Функция $H_1(p, q)$, с одной стороны, представима рядом Фурье по угловой переменной q, и, с другой стороны,

$$H_1(p, q) = H_5(p, q) + H_6(p, q) + \ldots, \tag{11.48**}$$

где H_m — форма m-й степени относительно $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}$. Через (λ, p) обозначается здесь скалярное произведение числового вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ на вектор p. Предполагается, что $H_0(p)$, $H_1(p, q)$ — аналитические функции в области

$$\| p - \varepsilon \| < \varepsilon, \quad \| \operatorname{Im} q \| < 1, \tag{11.49}$$

и ε — малое число.

В соответствии со структурой ряда для $H_1(p, q)$ будем иметь в области (11.49) оценку

$$| H_1 | < C p^{5/2}, \tag{11.50}$$

где c — некоторая постоянная. Предполагается также, что числа $\lambda_{s\sigma}$ удовлетворяют условию

$$\det(\lambda_{s\sigma}) \neq 0. \tag{11.50*}$$

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ можно считать произвольными, вещественными. Таковы исходные предположения относительно системы (11.47).

Выполним замену переменной $p \to \bar{p}$ по формуле

$$p = \varepsilon (1 + \bar{p}) \tag{11.51}$$

(т. е. $p_s = \varepsilon(1 + \bar{p}_s)$ $(s = 1, \ldots, n)$ в скалярной форме). Относительно переменных $\bar{p} = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$

получим уравнения

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H^0}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H^0}{\partial \bar{p}}, \tag{11.52}$$

где

$$H^0(\bar{p}, q) = \frac{1}{\varepsilon} H(\varepsilon(1+\bar{p}), q). \tag{11.53}$$

Выделяя явно параметр ε, запишем H^0 в виде

$$H^0(\bar{p}, q) = (\lambda, \varepsilon) + (\lambda, \bar{p}) + \varepsilon \sum_{s,\sigma=1}^{n} \lambda_{s\sigma}(1+\bar{p}_s)(1+\bar{p}_\sigma) + \\ + \varepsilon^{3/2} H_5(1+\bar{p}, q) + \varepsilon^2 H_6(1+\bar{p}, q) + \ldots \tag{11.53*}$$

Отбрасывая далее постоянную часть (λ, ε), перепишем $H^0(\bar{p}, q)$ в виде

$$H^0(\bar{p}, q) = H_0^0(\bar{p}) + \varepsilon H_1^0(\bar{p}, q, \varepsilon), \tag{11.54}$$

где

$$H_0^0(\bar{p}) = (\lambda, p) + \varepsilon \sum_{s,\sigma=1}^{n} \lambda_{s\sigma}(1+\bar{p}_s)(1+\bar{p}_\sigma), \tag{11.54*}$$

$$H_1^0(\bar{p}, q, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} H_5(1+\bar{p}, q) + \ldots \tag{11.54**}$$

В области $F^{(0)}$

$$\|\bar{p}\| = \frac{\|p-\varepsilon\|}{\varepsilon} < 1, \quad \|\operatorname{Im} q\| < 1. \tag{11.55}$$

Функция $H_1^0(\bar{p}, q, \varepsilon)$ будет аналитической относительно своих аргументов, представимой рядом Фурье по угловой переменной q:

$$H_1^0(\bar{p}, q) = \sum_{\|k\| \geqslant 0} h_k^0(\bar{p})\, e^{i(k,q)}, \tag{11.56}$$

где h_k^0 — аналитические функции p.

Из формулы (11.54**), определяющей структуру функции H_1^0, и из неравенства (11.50) вытекает оценка

$$|H_1^0(\bar{p}, q, \varepsilon)| < \mu, \quad \mu = C\varepsilon^{1/2}, \tag{11.56*}$$

справедливая в $F^{(0)}$. В соответствии же с (11.51) и (11.54) получим

$$\det \frac{\partial^2 H_0^0}{\partial \bar{p}^2} = 2^n \varepsilon \det(\lambda_{s\sigma}) \neq 0. \tag{11.57}$$

Вместе с тем в силу аналитичности H_0^0 найдется постоянная $\Theta\,(1 \leqslant \Theta < \infty)$ такая, что

$$\left\| \frac{\partial^2 H_0^0}{\partial \bar{p}^2} \right\| \leqslant \varepsilon\Theta. \tag{11.58}$$

Применим к системе (11.52) основную операцию, рассмотренную в невырожденном случае, т. е. выполним каноническое преобразование $(\bar{p}, q) \to (P, Q)$ по формулам

$$\bar{p} = P + \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = q + \frac{\partial S}{\partial P}, \tag{11.59}$$

где функция $S = S(P, q)$ строится с помощью ряда (11.56). А именно, пусть $\overline{H}_1^0(\bar{p})$ — вековая часть ряда (11.56) и $[\widetilde{H}_1^0(\bar{p}, q)]_N$ — частная сумма чисто тригонометрических членов с гармониками порядка меньше N, т. е.

$$[\widetilde{H}_1^0(\bar{p}, q)]_N = \sum_{1 \leqslant \|k\| < N} h_k^0(\bar{p})\, e^{i(k, q)}. \tag{11.60}$$

Тогда

$$\begin{gathered} S(P, q) = \varepsilon \sum_{1 \leqslant \|k\| < N} S_k(P)\, e^{i(k, q)}, \\ S_k(P) = i h_k(P) \Bigg/ \left(k, \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P}\right), \\ H_0^{(1)}(P) = H_0^{(0)}(P) + \varepsilon \overline{H}_1^{(0)}(P). \end{gathered} \tag{11.61}$$

Число N определим при этом по формуле

$$N = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{M}, \tag{11.62}$$

где $M = \varepsilon\mu$ (так что функция εH_1^0 удовлетворяет в области F^0 оценке $\varepsilon |H_1^0| < M$),

$$\gamma = \delta^{1/4n}, \quad \delta = \mu^{1/T}, \quad T > \frac{4n + 12}{1 - \alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{11.63}$$

Знаменатель в выражении для S_k ограничим неравенством

$$\left|\left(k, \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial P}\right)\right| \geqslant \varepsilon K \| k \|^{-n-1}, \quad K = \delta^2. \tag{11.64}$$

Для удобства записи обозначим также область изменения переменной $\bar{p}$, определяемую согласно (11.55) через G^0. Из (11.55) видно, что G^0 представляет собой n-мерную сферу с центром в начале координат $\bar{p}=0$ и радиусом, равным единице.

Тогда, повторяя все рассуждения и вычисления, приведенные в гл. III (отличие состоит лишь в замене постоянных M, Θ, K на $\varepsilon\mu$, $\varepsilon\Theta$, εK), придем к канонической системе относительно P, Q с гамильтонианом

$$H^{(1)}(P, Q) = H_0^{(1)}(P) + \varepsilon H_1^{(1)}(P, Q). \tag{11.65}$$

Для гамильтониана (11.65) в области

$$F^{(1)}\left(P \in G_{KN}^0 - 3\beta, \ \| \operatorname{Im} q \| \leqslant 1 - 3\gamma, \ \beta = \delta^3\right)$$

имеет место оценка

$$\varepsilon \left| H_1^{(1)} \right| < M_1 < \varepsilon\mu^{1+\alpha} = \varepsilon\mu_1, \tag{11.66}$$

а также выполняются другие выписанные в гл. III оценки, если число δ удовлетворяет соответствующим неравенствам. Применяя далее основную операцию, придем к последовательности систем относительно переменных $P^{(s)}$, $Q^{(s)}$ с гамильтонианами

$$H^{(s)}\left(P^{(s)}, Q^{(s)}\right) = H_0^{(s)}\left(P^{(s)}\right) + \varepsilon H_1^{(s)}\left(P^{(s)}, Q^{(s)}\right), \tag{11.67}$$

причем в области $F^{(s)}$, получающейся из $F^{(s-1)}$ точно так же, как и в гл. III,

$$\varepsilon \left| H_1^{(s)} \right| < M_s < \varepsilon\mu_{s-1}^{1+\alpha} = \varepsilon\mu_s. \tag{11.68}$$

Отличие от изложения для невырожденного случая заключается лишь в замене постоянных M_s, Θ_s, K_s на εM_s, $\varepsilon\Theta_s$, εK_s.

Что касается доказательства непустоты области G^∞, то в отличие от невырожденного случая, здесь вместо отображения (см. гл. VI)

$$\omega = A^0 p = \frac{\partial H_0}{\partial p} \tag{11.69}$$

рассматривается отображение

$$\xi = A^0 \bar{p} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_0^0}{\partial \bar{p}}. \qquad (11.69^*)$$

В соответствии с (11.57)

$$\det \frac{\partial A^0}{\partial \bar{p}} = 2^n \det (\lambda_{s\sigma}) \neq 0$$

и, следовательно, найдутся такие числа θ_0, Θ_0 (не зависящие от ε), что

$$\theta_0 \| d\bar{p} \| \leqslant \| dA^0 \| \leqslant \Theta_0 \| dp \|. \qquad (11.70)$$

Знаменатель в формуле для S_k [см. (11.61)] примет вид $(k, \varepsilon\xi)$, откуда становится ясным, почему в неравенство (11.64) введен множитель ε.

Все последующие рассуждения, имеющиеся в гл. VI—VIII, остаются без изменений. Мы получим в результате, что при достаточно малых μ [удовлетворяющих неравенствам (7.35)] и при начальных $\bar{p}_0$, принадлежащих «большинству» значений в исходной области $\|\bar{p}\| < 1$, процесс последовательных основных операций позволяет получить условно-периодическое решение системы (11.52) и вместе с тем и системы (11.47). Соответствующие начальные значения вектора p найдем по формуле

$$p_0 = \varepsilon (1 + \bar{p}_0),$$

т. е. благоприятные значения p_0 составляют «большинство» в малой сфере радиуса ε с центром $p = \varepsilon$ ($\bar{p} = 0$).

ГЛАВА XII

СЛУЧАЙ СОБСТВЕННОГО ВЫРОЖДЕНИЯ (ВАРИАНТ II)

§ 12.1. Постановка задачи

Пусть дана каноническая система относительно векторных переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$:

$$\dot{x}=-\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial x} \tag{12.01}$$

с гамильтонианом

$$H(x, y)=H_{00}(x_0)+\mu H_1(x_0, x_1, y_0, y_1). \tag{12.02}$$

Здесь μ — малый параметр, а через x_0, x_1, y_0, y_1 обозначены векторы

$$\begin{aligned} x_0&=(x_1, \ldots, x_{n_0}), & y_0&=(y_1, \ldots, y_{n_0}), \\ x_1&=(x_{n_0+1}, \ldots, x_n), & y_1&=(y_{n_0+1}, \ldots, y_n), \end{aligned} \qquad n_0<n,$$

причем y_0 — угловая переменная (с периодом 2π по всем ее компонентам), а остальные переменные x_0, x_1, y_1 — позиционные.

Функции $H_{00}(x, y)$ и μH_1 являются невозмущенной и возмущающей частями гамильтониана H соответственно.

Пусть функция $H(x, y)$ является аналитической по отношению к своим переменным в некоторой области

$$x_0 \in G^{00}, \quad |x_1| \leqslant R, \quad |y_1| \leqslant R, \quad |\operatorname{Im} y_0| \leqslant \varrho \tag{12.02*}$$

и может быть представлена в этой области также в виде сходящегося степенно̀го ряда по переменным x_1, y_1. Коэффициенты такого ряда — аналитические функции x_0, y_0. Пусть область G^{00} выпуклая.

Поскольку H_{00} зависит лишь от x_0, то мы имеем дело со случаем собственного вырождения.

Выделим в H_1 вековую часть $\overline{H}_1$ по отношению к переменной y_0 (быстрой угловой переменной) и запишем H в виде

$$H(x, y)=H_{00}(x_0)+\mu\overline{H}_1(x_0, x_1, y_1)+\mu\widetilde{H}_1(x, y), \quad (12.03)$$

где $\widetilde{H}_1$ — чисто периодическая часть по y_0 функции H. Предположим, что в области (12.02*)

$$|\overline{H}_1|<1, \ |\widetilde{H}_1|<1, \ \det\frac{\partial^2 H_{00}}{\partial x_0^2}\neq 0. \quad (12.03^*)$$

В гл. IX мы рассмотрели один вариант случая собственного вырождения, когда функция $\overline{H}_1$ или вовсе не зависит от y_1 или представима в виде суммы

$$H_{01}(x_0, x_1)+H_{11}(x_0, x_1, y_1), \quad (12.04)$$

где H_{01} не зависит от y_1, а H_{11} мало́ по сравнению с H_{01}.

При анализе общей (неограниченной) задачи трех или многих тел мы встречаемся с более сложным случаем. В этих задачах функция $\overline{H}_1$ может быть записана в виде

$$\overline{H}_1=\overline{H}_{10}+\overline{H}_{12}+\overline{H}_{14}+\overline{H}_{16}+\ldots, \quad (12.04^*)$$

где $\overline{H}_{1m}$ — однородная форма m-й степени относительно x_1, y_1 с коэффициентами, зависящими от x_0. ($\overline{H}_{10}$ зависит только от x_0.) В целом $\overline{H}_1$ — степенной ряд по x_1, y_1, содержащий лишь четные степени переменных.

Очевидно, что $\overline{H}_1$ нельзя представить непосредственно в виде (12.03). Вместе с тем функция $\overline{H}_1$ аналогична по своей структуре гамильтониану системы, рассмотренной в гл. XI с тем отличием, что коэффициенты форм $\overline{H}_{1m}$ в гл. XI были постоянными, а здесь они зависят от переменной x_0. Таким образом, этот случай представляет собой как бы комбинацию случаев, рассмотренных в гл. IX—XI.

При построении условно-периодических решений исходной системы (12.01) методом, рассматриваемым в этой главе, необходимо выполнить сначала ряд предварительных преобразований.

§ 12.2. Предварительное преобразование

Рассмотрим уравнения относительно x_1, y_1, ограничившись в гамильтониане лишь функцией $\overline{H}_{12}$:

$$\dot{x}_1 = -\frac{\partial \overline{H}_{12}}{\partial y_1}, \qquad \dot{y}_1 = \frac{\partial \overline{H}_{12}}{\partial x_1}. \tag{12.05}$$

Функция $\overline{H}_{12}(x_0, x_1, y_1)$ представляет собой квадратичную форму относительно x_1, y_1, так что эти уравнения линейные. Требуется найти линейное преобразование $(x_1, y_1) \to (x_1', y_1')$, приводящее эту систему к нормальной форме. Из теории линейных канонических систем известно [21], что такое преобразование всегда существует и в гл. XI мы предполагали, что оно уже выполнено заранее. Но здесь существенно, чтобы это преобразование имело определенную структуру. Поэтому мы рассмотрим этот вопрос подробнее и покажем, как непосредственно строится это преобразование.

1. Пусть дана произвольная линейная система m-го порядка (в матричной форме)

$$\dot{\xi} = A\xi \tag{12.06}$$

и линейное преобразование к переменной u

$$\xi = Bu, \tag{12.07}$$

где A, B — постоянные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \ldots b_{1m} \\ \ldots\ldots \\ b_{m1} \ldots b_{mm} \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что корни характеристического уравнения $\chi_1, \ldots, \chi_m$ для системы (12.06), т. е. характеристические числа матрицы A все различны, потребуем, чтобы система относительно u имела нормальную форму

$$\dot{u} = \chi u, \tag{12.07*}$$

где χ — диагональная матрица $\mathrm{diag}(\chi_1, \ldots, \chi_m)$. Тогда мы получим уравнения:

$$\dot{\xi} = B\dot{u} = B\chi u, \quad \dot{\xi} = A\xi = ABu,$$

откуда

$$ABu = B\chi u, \quad (AB - B\chi)u = 0.$$

Так как последнее равенство должно выполняться при произвольном u, т. е. тождественно, то мы придем к следующим m системам скалярных уравнений относительно элементов матрицы B:

$$\begin{matrix} b_{1s}(a_{11}-\chi_s)+\ldots+b_{ms}a_{1m}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1s}a_{m1}+\ldots+b_{ms}(a_{mm}-\chi_s)=0. \end{matrix} \quad (s=1,\ldots, m) \quad (12.08)$$

Определитель каждой из этих m систем равен нулю. Мы получим для $b_{1s}, \ldots, b_{ms}$ при каждом $s=1, \ldots, m$ решение с точностью до коэффициента пропорциональности k_s. [Ранг матрицы $(A - E\chi_s)$ равен $m-1$, так как все характеристические числа $\chi_1, \ldots, \chi_m$ матрицы A, по предположению, различны.]

2. Рассмотрим теперь линейную каноническую систему

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial H_2}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = \frac{\partial H_2}{\partial \xi}, \qquad (12.09)$$

где $H_2 = H_2(\xi, \eta)$ — квадратичная форма и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — векторы. Эта система запишется также в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + B\eta, \\ \dot{\eta} &= C\xi + K\eta, \end{aligned}\right\} \qquad (12.10)$$

где A, B, C, K — матрицы n-го порядка, причем $C = -B'$ (через B' обозначается транспонированная матрица по отношению к B).

Обозначим корни характеристического уравнения для этой системы через $\chi_1, \ldots, \chi_n, -\chi_1, \ldots, -\chi_n$. Пусть все $\chi_1, \ldots, \chi_n$ различны и пусть найдено (например, так, как это указано в п. 1) какое-либо одно линейное преобразование

$$\left.\begin{aligned} \xi &= Du + EV, \\ \eta &= Fu + GV, \end{aligned}\right\} \qquad (12.11)$$

приводящее систему (12.10) к нормальной форме

$$u = -\chi u, \quad v = -\chi v. \qquad (12.11^*)$$

Здесь D, E, F, G — некоторые матрицы с элементами D_{jk}, E_{jk}, F_{jk}, G_{jk}, соответственно и $\chi=\operatorname{diag}(\chi_1, \ldots, \chi_n)$.

В аналитической механике показывается (см. [21]), что система вида (12.09) может быть заменена эквивалентным ей вариационным уравнением

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\xi\dot{\eta} - H_2(\xi, \eta)]\, dt = 0, \tag{12.12}$$

где t_0, t_1 — некоторые фиксированные значения времени t, а δ — символ операции варьирования. Левая часть этого уравнения представляет собой вариацию действия по Гамильтону:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [\xi\dot{\eta} - H_2(\xi, \eta)]\, dt.$$

Через $\xi\dot{\eta}$ обозначается скалярное произведение

$$\xi\dot{\eta} = \sum_{s=1}^{n} \xi_s \dot{\eta}_s.$$

Пусть дано некоторое преобразование $\xi=\xi(u, v)$, $\eta= =\eta(u, v)$ к новым переменным u, v. Из аналитической механики известно [21], что если в силу этого преобразования

$$\xi\dot{\eta} = cu\dot{v} + \frac{d\Phi}{dt}, \tag{12.13}$$

причем $\dfrac{d\Phi}{dt}$ есть полная производная по t некоторой функции $\Phi(u, v)$, а c — некоторый скаляр, то этой производной после подстановки (12.13) в (12.12) можно пренебречь. (Интеграл от этой производной зависит только от значений t на концах интервала интегрирования, а его вариация тождественно обращается в нуль.) Тогда (12.12) приведется к виду

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [cu\dot{v} - H_2(\xi(u, v), \eta(u, v))]\, dt = 0. \tag{12.14}$$

Разделив (12.14) на c, получим уравнение

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[u\dot{v}-\frac{1}{c}H_2(\xi(u, v), \ \eta(u, v))\right]dt=0, \qquad (12.15)$$

эквивалентное канонической системе

$$\dot{u}=-\frac{\partial H_2^*(u, v)}{\partial v}, \qquad \dot{v}=\frac{\partial H_2^*(u, v)}{\partial u}, \qquad (12.15^*)$$

где

$$H_2^*(u, v)=\frac{1}{c}H_2(\xi(u, v), \ \eta(u, v)).$$

Таким образом, преобразование $\xi=\xi(u, v)$, $\eta=\eta(u, v)$ будет тогда каноническим. Коэффициент $1/c$ называется валентностью такого преобразования.

Доказывается, что среди преобразований вида (12.11), нормализующих систему (12.10), возможно подобрать такое, которое будет каноническим.

С этой целью рассматривается какое-либо одно преобразование (12.11), составляются выражения

$$\xi\dot{\eta}=(Du+Ev)(F\dot{u}+G\dot{v}),$$
$$H(\xi(u, v), \ \eta(u, v))$$

и подставляются в (12.12). В скалярной форме эти выражения имеют вид

$$\xi\dot{\eta}=\sum_{s=1}^{n}\xi_s\dot{\eta}_s=\sum_{s,k=1}^{n}(K_{sk}u_s\dot{u}_k+L_{sk}v_s\dot{u}_k+M_{sk}u_s\dot{v}_k+N_{sk}v_s\dot{v}_k),$$
$$(12.16)$$
$$H(\xi(u, v), \ \eta(u, v))=\sum_{s,k=1}^{n}(R_{sk}u_su_k+S_{sk}u_su_k+T_{sk}v_sv_k).$$

После подстановки этих выражений в (12.12) мы придем к вариационному уравнению относительно u, v. Вместе с тем переменные u, v удовлетворяют уравнениям (12.11), откуда, в частности,

$$u_s=C_se^{-\chi_st}, \quad v_s=\tilde{C}_se^{-\chi_st} \qquad (s=1, \ldots, n), \qquad (12.17)$$

где C_s и $\tilde{C}_s$ — произвольные постоянные.

Функции $u_s(t)$, $v_s(t)$ при произвольных C_s, $\bar{C}_s$ должны, естественно, удовлетворять и вариационному уравнению относительно u_s, v_s. Это условие накладывает ограничения на коэффициенты $K_{sk}, \ldots, T_{sk}$ в (12.16). Как показывает анализ, эти коэффициенты оказываются такими, что

$$\xi\dot{\eta}=\sum_{s=1}^{n}\bar{\varrho}_s u_s \dot{v}_s + \text{полная производная по } t \text{ от некоторой функции,}$$

где коэффициенты $\bar{\rho}_s$ выражаются явно через элементы матриц D, E, F, G по формуле

$$\bar{\rho}_s=\sum_{k=1}^{n}(D_{ks}G_{ks}-E_{ks}F_{ks}). \qquad (12.18)$$

При этом все $\bar{\rho}_s$ $(s=1, \ldots, n)$ отличны от нуля.

Следовательно, вариационное уравнение относительно u, v может быть записано следующим образом:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\bar{\varrho}_s u_s \dot{v}_s - H_2(\xi(u, v), \eta(u, v))\right]dt=0. \qquad (12.19)$$

Функция $H_2(\xi(u, v), \eta(u, v))$ приобретает при этом вид

$$H_2(\xi(u, v), \eta(u, v))=\sum_{s=1}^{n}\bar{\varrho}_s u_s v_s. \qquad (12.19^*)$$

Нас интересует случай, когда все $\chi_1, \ldots, \chi_n$ — чисто мнимые, т. е. $\chi_s=i\lambda_s$ $(s=1, \ldots, n)$, где λ_s — вещественные. Тогда все числа $\bar{\rho}_s$ также должны быть чисто мнимыми, т. е. $\bar{\rho}_s=i\rho_s$. К этому выводу мы придем, заметив, что переменные ξ, η — вещественные, а переменные u, v согласно (12.11*) комплексно сопряженные. Следовательно, матрицы D и E, а также F и G, должны быть также комплексно сопряженными:

$$\begin{aligned} D&=D_1+iD_2, & E&=D_1-iD_2, \\ F&=F_1+iF_2, & G&=F_1-iF_2. \end{aligned} \qquad (12.20)$$

Кроме того, можно считать, что все $\varrho_s>0$. Если какое-либо ϱ_s, определенное согласно (12.18), окажется отрицательным, то достаточно поменять ролями u_s и v_s и при таких переменных получим $\varrho_s>0$.

Положим далее

$$\bar{u}_s = \sqrt{\varrho_s}\,u_s, \quad \bar{v}_s = \sqrt{\varrho_s}\,v_s \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{12.21}$$

Дифференциальные уравнения относительно $\bar{u}_s$, $\bar{v}_s$ в векторной форме сохранят вид (12.11*), а уравнение (12.19) примет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [i\bar{u}\dot{\bar{v}} - H_2(\xi(\bar{u}, \bar{v}), \eta(\bar{u}, \bar{v}))]\, dt = 0, \tag{12.22}$$

где $\xi(\bar{u}, \bar{v})$, $\eta(\bar{u}, \bar{v})$ — выражения переменных ξ, η через $\bar{u}$, $\bar{v}$.

Перейдем далее к вещественным переменным $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ по формулам

$$\bar{u} = \frac{\tilde{u} + i\tilde{v}}{\sqrt{2}}, \qquad \bar{v} = \frac{\tilde{u} - i\tilde{v}}{\sqrt{2}}. \tag{12.23}$$

Составим выражение

$$\bar{u}\dot{\bar{v}} = \frac{1}{2}\left[\tilde{u}\dot{\tilde{u}} + \tilde{v}\dot{\tilde{v}} + i(-\tilde{u}\dot{\tilde{v}} + \tilde{v}\dot{\tilde{u}})\right] = -i\tilde{u}\dot{\tilde{v}} + \\ + \frac{d}{dt}\left(\frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{4} + \frac{i}{2}\tilde{u}\tilde{v}\right).$$

Следовательно, уравнение (12.22) при переходе к переменным $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ примет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\tilde{u}\dot{\tilde{v}} - H_2(\xi(\tilde{u}, \tilde{v}), \eta(\tilde{u}, \tilde{v}))]\, dt = 0, \tag{12.24}$$

где $\xi(\tilde{u}, \tilde{v})$, $\eta(\tilde{u}, \tilde{v})$ — выражения ξ, η через $\tilde{u}$, $\tilde{v}$. Эти выражения мы получим, исходя из (12.11), (12.20), (12.23):

$$\xi = R\tilde{u} + T\tilde{v}, \quad \eta = C\tilde{u} + K\tilde{v}, \tag{12.25}$$

где

$$R = D_1\alpha, \; T = -D_2\alpha, \; C = F_1\alpha, \; K = -F_2\alpha, \\ \alpha = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\frac{2}{\varrho_1}}, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\varrho_n}}\right). \tag{12.25*}$$

Так как $\chi_s = i\lambda_s$ $(s = 1, \ldots, n)$, то уравнения (12.11*) при переходе к переменным $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ примут вид

$$\dot{\tilde{u}} = -\lambda\tilde{v}, \quad \dot{\tilde{v}} = \lambda\tilde{u}, \tag{12.26}$$

где $\lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Для функции $H_2(\xi(u, v), \eta(u, v))$ в соответствии с (12.19*), (12.21), (12.23) будем иметь

$$H_2(\xi(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad \eta(\tilde{u}, \tilde{v})) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(\tilde{u}_s^2 + \tilde{v}_s^2). \qquad (12.27)$$

Таким образом, преобразование (12.25), примененное к исходной линейной системе (12.09), является нормализующим, приводящим эту систему к виду (12.26). Вместе с тем это преобразование, как это видно из уравнения (12.24), будет каноническим унивалентным ($c=1$).

3. Рассмотрим теперь произвольную каноническую систему:

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial H(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = \frac{\partial H(\xi, \eta)}{\partial \xi} \qquad (12.28)$$

и линейное каноническое преобразование (12.25). Для простоты записи новые переменные обозначим через u, v. Выведем условия, которым удовлетворяют матрицы этого преобразования.

Дифференцируя с этой целью (12.25) по t, получим

$$R\dot{u} + T\dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad C\dot{u} + K\dot{v} = \frac{\partial H}{\partial \xi}.$$

Поскольку новые переменные u, v должны удовлетворять уравнениям

$$\dot{u} = -\frac{\partial F(u, v)}{\partial v}, \qquad \dot{v} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u}, \qquad (12.29)$$

где

$$F(u, v) = H(\xi(u, v), \eta(u, v)), \qquad (12.29^*)$$

то

$$-R\frac{\partial F}{\partial v} + T\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad -C\frac{\partial F}{\partial v} + K\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial \xi}. \qquad (12.30)$$

Вместе с тем в соответствии с (12.29*) и с правилом дифференцирования сложной функции векторной переменной находим, что

$$\frac{\partial F}{\partial u} = R'\frac{\partial H}{\partial \xi} + C'\frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = T'\frac{\partial H}{\partial \xi} + K'\frac{\partial H}{\partial \eta}, \text{*)}$$

*) Если $f = f(x)$ и $x = x(y)$, где f — скалярная функция, а x и y — векторы, то $\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)' \frac{\partial f}{\partial x}$, где $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)'$ — матрица, транспонированная к $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$.

где R', C', T', K' — транспонированные по отношению к R, C, T, K матрицы.

Подставляя эти выражения в (12.30), получим равенства:

$$(-RT'+TR')\frac{\partial H}{\partial \xi}+(-RK'+TC')\frac{\partial H}{\partial \eta}=-\frac{\partial H}{\partial \eta},$$
$$(-CT'+KR')\frac{\partial H'}{\partial \xi}+(-CK'+KC')\frac{\partial H}{\partial \eta}=\frac{\partial H}{\partial \xi}.$$

Поскольку формулы преобразования не должны зависеть от гамильтониана H преобразуемых уравнений, то последние равенства должны удовлетворяться тождественно. Следовательно,

$$\begin{aligned} -RT'+TR'&=0, & RK'-TC'&=E,\\ -CK'+KC'&=0, & -CT'+KR'&=E, \end{aligned} \tag{12.31}$$

где E — единичная матрица. Эти равенства и представляют собой искомые условия каноничности линейного преобразования (12.25).

Заметим, что последние два равенства эквивалентны друг другу, поскольку

$$E'=E, \quad (-CT'+KR')'=-TC'+RK'$$

в соответствии с известными формулами из теории матриц:

$$(AB)'=B'A', \quad (A')'=A.$$

4. Постараемся представить каноническое преобразование (12.25) с помощью производящей функции $S(u, \eta)$ или $S(v, \eta)$.

Как известно, из аналитической механики (см. [21]), преобразование $(\xi, \eta)\to(u, v)$ является унивалентным каноническим тогда и только тогда, если хотя бы одно из выражений

$$\xi\, d\eta - u\, dv, \tag{12.32$_1$}$$
$$\xi\, d\eta - v\, du, \tag{12.32$_2$}$$
$$-\eta\, d\xi + v\, du, \tag{12.32$_3$}$$
$$-\eta\, d\xi - u\, dv \tag{12.32$_4$}$$

представляет собой полный дифференциал в силу формул, связывающих переменные ξ, η и u, v.

Из (12.32) вытекает, что для произвольной дважды дифференцируемой функции $S(u, \eta)$ формулы

$$\xi = \frac{\partial S}{\partial \eta}, \quad v = \frac{\partial S}{\partial u} \tag{12.33}$$

определяют каноническое преобразование. Точно так же из (12.32) следует, что для функции $S(v, \eta)$ формулы

$$\xi = \frac{\partial S}{\partial \eta}, \quad u = -\frac{\partial S}{\partial v} \tag{12.33*}$$

также определяют каноническое преобразование.

Рассмотрим теперь формулы (12.25) и выразим с их помощью ξ и v через u и η. Предполагая, что $\det K \neq 0$, получим

$$\begin{aligned} v &= -K^{-1}Cu + K^{-1}\eta, \\ \xi &= (R - TK^{-1}C)u + TK^{-1}\eta. \end{aligned} \tag{12.34}$$

Сопоставляя эти выражения с (12.33), видим, что если существует функция $S(u, \eta)$, для которой

$$\frac{\partial S}{\partial u} = -K^{-1}Cu + K^{-1}\eta, \quad \frac{\partial S}{\partial \eta} = (R - TK^{-1}C)u + TK^{-1}\eta, \tag{12.35}$$

то преобразование (12.25) может быть записано в виде (12.33). Соотношения (12.35) представляют собой не что иное, как дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $S(u, \eta)$ вида

$$\frac{\partial S}{\partial u} = F(u, \eta), \quad \frac{\partial S}{\partial \eta} = \Phi(u, \eta),$$

где $F(u, \eta)$, $\Phi(u, \eta)$ — заданные функции u, η (в данном случае это функции линейные). Как известно из теории дифференциальных уравнений, такие уравнения имеют решение тогда и только тогда, если

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)' = \frac{\partial \Phi}{\partial u}.$$

Применяя этот критерий к (12.35), получим, что функция $S(u, \eta)$ существует, если

$$(K^{-1})' = R - TK^{-1}C.$$

Поскольку $(K^{-1})'=(K')^{-1}$ и в силу (12.31) $CK'=KC'$, это равенство можно переписать в виде

$$RK'-TK^{-1}CK'=RK'-TC'=E.$$

Согласно (12.31) это равенство удовлетворяется.

Таким образом, если в (12.25) $\det K\neq 0$, то это преобразование может быть выражено формулами (12.33), где $S(u, \eta)$ — функция, определяемая при интегрировании уравнений (12.35).

5. Возвратимся теперь к системе (12.05). Это — линейная система с коэффициентами, зависящими от вектора x_0, играющего роль параметра. Линейное каноническое преобразование $(x_1, y_1)\to(x_1', y_1')$, приводящее эту систему к нормальной форме, запишется как

$$x_1=Rx_1'+Ty_1', \quad y_1=Cx_1'+Ky_1', \tag{12.36}$$

где R, T, C, K — некоторые матрицы, зависящие от x_0 и аналитические по x_0 в той же области G^{00}, в которой рассматривался исходный гамильтониан. Предположим, что характеристическое уравнение для системы (12.05) имеет при любом фиксированном x_0 в некоторой области $x_0\in G^{00}$ лишь чисто мнимые и различные корни $\pm i\lambda_1(x_0), \ldots, \pm i\lambda_m(x_0)$, $m=n-n_0$. Пусть также матрица K в этой области невырожденная, т. е. $\det K\neq 0$. Тогда согласно изложенному в пп. 1—4 преобразование (12.36) может быть представлено с помощью формул

$$x_1=\frac{\partial S}{\partial y_1}, \quad y_1'=\frac{\partial S}{\partial x_1'}, \tag{12.37}$$

где $S=S(x_0, x_1', y_1)$ — производящая функция этого преобразования, зависящая, естественно, от x_0 как от параметра. Уравнения же относительно x_1', y_1' запишутся в виде

$$\dot{x}_1'=-\frac{\partial \overline{H}_{12}'}{\partial y_1'}=-\lambda y_1', \quad \dot{y}_1'=\frac{\partial \overline{H}_{12}'}{\partial x_1'}=\lambda x_1', \tag{12.38}$$

где $\lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$,

$$\overline{H}_{12}'=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\,(x_{1s}'^2+y_{1s}'^2) \tag{12.38*}$$

и x_{1s}', y_{1s}' — компоненты вектора (x_1', y_1'). . Кроме того, величины $\lambda_s=\lambda_s(x_0)$ как простое решение (все $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различные) характеристического уравнения с коэффициентами, аналитическими по x_0, сами будут аналитическими по x_0.

6. Дополним преобразование (12.37) формулами перехода от переменных x_0, y_0 к новым переменным x_0', y_0':

$$x_0=x_0', \quad y_0'=y_0+\frac{\partial S}{\partial x_0}. \tag{12.39}$$

Заметим, что формулы (12.37), (12.39) можно объединить, записав их в виде

$$x=\frac{\partial S^*}{\partial y}, \quad y'=\frac{\partial S^*}{\partial x'}, \tag{12.40}$$

где

$$x=(x_0, x_1),\ y=(y_0, y_1),\ x'=(x_0', x_1'),\ y'=(y_0', y_1'),$$
$$S^*=S^*(x', y)=x_0'y_0+S(x_0, x_1', y_1).$$

Преобразование (12.40) представляет собой каноническое преобразование исходной системы (12.01), линейное по x_1', y_1' и аналитическое по x_0 в области G^{00}. Функция $S^*(x', y)$ является производящей функцией этого преобразования.

Рассмотрим каноническую систему относительно новых переменных

$$\dot{x}'=-\frac{\partial H'}{\partial y'}, \quad \dot{y}'=\frac{\partial H'}{\partial x'}, \tag{12.41}$$

и ее гамильтониан $H'(x', y')$, получаемый из $H(x_0, x_1, y_0, y_1)$ после замены x_0, x_1, y_0, y_1 их выражениями через новые переменные.

Так как $x_0=x_0'$, то функция $H_{00}(x_0)$ и $\overline{H}_{10}(x_0)$ в гамильтониане (12.02) не изменятся. Переменные x_1', y_1' подбирались так, чтобы линейная часть новых уравнений имела нормальную форму. Тогда в соответствии с (12.38*)

$$\overline{H}_{12}(x_0, x_1, y_1)\big|_{(x_1,y_1)\to(x_1', y_1')}=$$
$$=\overline{H}_{12}'(x_0', x_1', y_1')=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s(x_{1s}'^2+y_{1s}'^2). \tag{12.41*}$$

Далее, поскольку $y_0 = y_0' - \frac{\partial S}{\partial x_0}$, где $\frac{\partial S}{\partial x_0}$ не зависит от y_0', то функция $\tilde{H}_1$ при переходе к новым переменным будет также чисто периодической по отношению к y_0' не содержащей свободного члена при разложении в ряд Фурье по y_0'). Таким образом,

$$H'(x', y') = H_{00}(x_0') + \mu \overline{H}_1'(x_0', x_1', y_1') + \mu \tilde{H}_1'(x', y'), \tag{12.42}$$

где $\tilde{H}_1'$ — чисто периодическая по y_0' часть гамильтониана H',

$$\overline{H}_1' = \overline{H}_{10} + \overline{H}_{12}' + \overline{H}_{14}' + \overline{H}_{16}' + \ldots, \tag{12.42*}$$

причем $\overline{H}_{1m}'$ — однородные формы степени m относительно x_1', y_1' с коэффициентами, зависящими от x_0' и $\overline{H}_{12}'$, выражаются согласно (12.41*). В той области изменения новых переменных, которая соответствует области (12.02*) старых переменных x, y, т. е. в некоторой окрестности $\|x_1'\| \leqslant R'$, $\|y_1'\| \leqslant R'$ точки $x_1' = y_1' = 0$ и при $x_0 \in G^{00}$, $\|\operatorname{Im} y_0'\| \leqslant \varrho'$, гамильтониан $H'(x', y')$ будет аналитической функцией своих переменных.

Применим теперь к системе с гамильтонианом (12.42) преобразование Биркгофа (см. § 11.2). Оно строится в данном случае при анализе системы

$$\dot{x}_1' = -\lambda y_1' - \frac{\partial \overline{H}_{14}'}{\partial y_1'}, \quad \dot{y}_1' = \lambda x_1' + \frac{\partial \overline{H}_{14}'}{\partial x_1'}. \tag{12.43}$$

Это преобразование представляет собой каноническое преобразование к переменным x_1'', y_1'':

$$x_1' = x_1'' + \frac{\partial S_1}{\partial y_1'}, \quad y_1' = y_1' + \frac{\partial S_1}{\partial x_1''}, \tag{12.43*}$$

где функция $S_1 = S_1(x_1', x_1'', y_1')$ подбирается по коэффициентам формы $\overline{H}_{14}'$ так, как это было показано в § 11.2. При этом уравнения в новых переменных имеют вид

$$\dot{x}_1'' = -\lambda y_1'' - \frac{\partial H_{14}''}{\partial y_1''} - \ldots, \quad \dot{y}_1'' = \lambda x_1'' + \frac{\partial \overline{H}_{14}''}{\partial x_1''} + \ldots, \tag{12.44}$$

где

$$\overline{H}_{14}'' = \sum_{s,\sigma=1}^{n} d_{s\sigma}(x_0')\left(x_{1\sigma}''^2 + y_{1\sigma}''^2\right)\left(x_{1s}''^2 + y_{1s}''^2\right), \qquad (12.44^*)$$

$d_{s\sigma}(x_0')$ — некоторые коэффициенты, аналитические по x_0', невыписанные члены имеют порядок пятый и выше относительно x_1'', y_1'' и $x_{1\sigma}''$, $y_{1\sigma}''$, x_{1s}'', y_{1s}'' суть компоненты векторов x_1'', y_1''.

Дополним преобразование (12.43*) формулами перехода от x_0', y_0' к новым переменным:

$$x_0' = x_0'', \quad y_0'' = y_0' + \frac{\partial S_1}{\partial x_0'}. \qquad (12.45)$$

Формулы (12.43*), (12.45) можно объединить, записав их в виде

$$x' = \frac{\partial S_1^*}{\partial y'}, \quad y'' = \frac{\partial S_1^*}{\partial x''}, \qquad (12.46)$$

где

$$S_1^*(x'', y') = x_0''y_0' + x_1''y_1' + S_1(x_0'', x_1'', y_1''). \qquad (12.46^*)$$

Мы получим, таким образом, каноническое преобразование $(x', y') \to (x'', y'')$ системы (12.41), причем S_1^* — производящая функция этого преобразования. Уравнения относительно новых переменных запишутся в виде

$$\dot{x}'' = -\frac{\partial H^*}{\partial y''}, \quad \dot{y}'' = \frac{\partial H''}{\partial x''}, \qquad (12.47)$$

причем гамильтониан $H''(x'', y'')$ этой системы мы получим из $H'(x', y')$, выражая переменные x', y' через x'', y''.

Рассуждая так же, как в § 12.3, находим

$$H''(x'', y'') = H_{00}(x_0'') + \mu\overline{H}_1''(x_0'', x_1'', y_1'') + \mu\widetilde{H}_1''(x'', y''), \qquad (12.47^*)$$

где функция $\widetilde{H}_1''$ — чисто периодическая по y_0'' часть H'':

$$\overline{H}_1'' = \overline{H}_{10} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} \lambda_s\left(x_{1s}''^2 + y_{1s}''^2\right) + \sum_{s,\sigma=1}^{n} d_{s\sigma}(x_0'')\left(x_{1s}''^2 + y_{1s}''^2\right)\left(x_{1\sigma}''^2 + y_{1\sigma}''^2\right) + \overline{H}_{16}'' + \ldots \qquad (12.47^{**})$$

и $\overline{H}_{1m}$, $(m=6, 8, \ldots)$ — формы m-й степени относительно x_1'', y_1'' с коэффициентами, зависящими от x_0''.

В выражении для $\overline{H}_1''$ отсутствуют формы нечетной степени. В целом $\widetilde{H}_1''$ — степенной ряд по переменным x_1'', y_1''. Функция $\widetilde{H}_1''$ также может быть представлена в виде степенного ряда общего вида по x_1'', y_1'' с коэффициентами, зависящими от x_0'', y_0''.

В области изменения x_1'', y_1'', которая соответствует области (12.02*) исходных переменных x, y, т. е. в некоторой окрестности точки $x_1''=y_1''=0$,

$$\|x_1''\| \leqslant R'', \quad \|y_1''\| \leqslant R'' \tag{12.48}$$

и при

$$x_0 \in G^{00}, \quad \|\operatorname{Im} y_0''\| \leqslant \varrho'', \tag{12.48*}$$

где ϱ'' — некоторое число; гамильтониан (12.47*) аналитичен по своим переменным. Кроме того, в силу (12.03*) имеют место следующие оценки:

$$|\overline{H}_1''| < 1, \quad |\widetilde{H}_1''| < 1. \tag{12.49}$$

§ 12.3. Усреднение по быстрым переменным

К системе с гамильтонианом $H''(x'', y'')$ применим операцию усреднения по быстрой переменной y_0'', рассмотренную в § 10.2. Все вычисления остаются без изменений, за исключением обозначения переменных. В § 10.2 исходные переменные обозначались через $p=(p_0, p_1)$, $q=(q_0, q_1)$ и новые переменные через $P=(P_0, P_1)$, $Q=(Q_0, Q_1)$. Здесь мы обозначим новые переменные через $X=(X_0, X_1)$, $Y=(Y_0, Y_1)$.

Эта операция усреднения представляет собой каноническое преобразование:

$$x''=X+\frac{\partial S}{\partial y''}, \qquad Y=y''+\frac{\partial S}{\partial X}, \tag{12.50}$$

где функция $S=S(X, y'')$ подбирается по разложению Фурье функции $H''(x'', y'')$. Если

$$\widetilde{H}''(x'', y'')=\sum_{\|k_0\|>0} h_{k_0}(x'', y_1'')\, e^{i\,(k_0,\, y_0'')}, \tag{12.51}$$

то

$$S(X,\ y'')=\mu \sum_{1\leqslant\|k_0\|<N} S_{k_0}(X,\ y_1'')\, e^{i\,(k_0,\, y_0'')}, \tag{12.51*}$$

$$S_{k_0}(X,\ y_1'')=ih_{k_0}(X,\ y_1'') \Bigg/ \left(k_0,\ \frac{\partial H_{00}(X_0)}{\partial X_0}\right), \tag{12.51**}$$

где N — некоторое число, зависящее от μ. Это число определяется формулой (10.26)

$$N=\frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{\mu}, \tag{12.52}$$

причем $3\delta<\gamma\leqslant 1,\quad \delta=\mu^{1/T}.\quad T>2n+10.$

Повторяя без изменений все выкладки и рассуждения, приведенные в § 10.2, мы придем к следующим результатам:

Уравнения относительно новых переменных X, Y запишутся в виде

$$\dot{X}=-\frac{\partial H^*}{\partial y},\qquad \dot{Y}=\frac{\partial H^*}{\partial X}, \tag{12.53}$$

где

$$H^*(X,\ Y)=H'(x''(X,\ Y),\ y''(X,\ Y))$$

или

$$H^*(X,\ Y)=H_{00}(X_0)+\mu\overline{H}_1''(X_0,\ X_1,\ Y_1)+\mu\overline{\overline{\overline{H}}}_1(X,\ Y), \tag{12.53*}$$

причем функции H_{00}, $\overline{H}_1''$ — те же, что и в гамильтониане H''. Гамильтониан H^* рассматривается в области

$$X_0\in G_{KN}^0-2\beta,\ \|X_1\|\leqslant R''-2\beta=R_1,\ \|Y_1\|\leqslant R''-2\beta=\dot{R}_1,$$
$$\|\operatorname{Im} Y_0\|\leqslant\varrho''-2\gamma, \tag{12.54}$$

где

$$\beta=\delta^3,\ 3\delta<\gamma\leqslant 1,\ \delta=\mu^{1/T},\ T\geqslant 2n+10$$

и ϱ то же, что в (12.48*).

Область G_{KN}^{00} строится так, как это было указано в § 10.2. Если δ удовлетворяет некоторым неравенствам, указанным в § 10.2, то в области (12.54) функция $\overline{\overline{\overline{H}}}_1$, а вместе с тем и весь гамильтониан H^*, сохраняют аналитичность по своим переменным, причем имеет место оценка

$$|\overline{\overline{H}}_1| < 4\mu\delta^{-4n-9} = 4\delta^{T-4n-9}. \tag{12.55}$$

Кроме того, в соответствии с (12.49)

$$|\overline{H}_1''| < 1. \tag{12.55*}$$

§ 12.4. Переход к полярным координатам

Заменим теперь переменные X_1, Y_1 полярными координатами $\bar{p}_1$, q_1 по формулам

$$X_1 = \sqrt{2\bar{p}_1}\cos q_1, \qquad Y_1 = \sqrt{2\bar{p}_1}\sin q_1 \tag{12.56}$$

и обозначим также $X_0 = \bar{p}_0$, $Y_0 = q_0$.

Такое преобразование является каноническим, и мы получим следующие уравнения относительно векторов $\bar{p} = (\bar{p}_0, \bar{p}_1)$, $q = (q_0, q_1)$:

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H^{**}}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H^{**}}{\partial \bar{p}}, \tag{12.57}$$

где

$$H^{**}(\bar{p}, q) = H_{00}(\bar{p}_0) + \mu H_1^{**}(\bar{p}, q_1) + \mu\overline{\overline{H}}_1^{**}(\bar{p}, q) \tag{12.57*}$$

и H_1^{**}, $\overline{\overline{H}}_1^{**}$ получаются из $\overline{H}_1''$, $\overline{\overline{H}}_1$ соответственно после замены X, Y их выражениями через $\bar{p}$, q.

В соответствии с выражением (12.47**) для $\overline{H}_1''$ мы можем представить H_1^{**} в следующей форме:

$$H_1^{**}(\bar{p}, q_1) = H_{01}^{**}(\bar{p}) + H_{11}^{**}(\bar{p}, q_1), \tag{12.58}$$

где

$$H_{01}^{**}(\bar{p}) = \overline{H}_{10}(\bar{p}_0) + (\lambda, \bar{p}_1) + \sum_{s,\sigma=1}^{n} 4d_{s\sigma}(\bar{p}_0)\,\bar{p}_{1s}\,\bar{p}_{1\sigma}, \tag{12.59}$$

$$H_{11}^{**}(\bar{p}, q_1) = \overline{H}_{16}''(X(\bar{p}, q_1), Y(\bar{p}, q_1)) + \ldots \tag{12.59*}$$

и $\bar{p}_{1s}$, $\bar{p}_{1\sigma}$ — компоненты вектора $\bar{p}_1$.

Функция H_{11}^{**} будет представлять собой ряд по степеням компонент вектора $\bar{p}_1$, q_1 с коэффициентами, зависящими от $\bar{p}_0$. Этот ряд начинается с членов третьего порядка.

Свойства преобразования (12.56) к полярным координатам таковы (см. § 11.3), что новый гамильтониан H^{**} сохраняет аналитичность по переменным $\bar{p}_1$, q_1 в области

$$\|\bar{p}_1-\varepsilon\|<\varepsilon, \quad \|\operatorname{Im} q_1\|\leqslant 1, \tag{12.60}$$

где ε — некоторое (вообще, малое) число, выражающееся через R_1 [см. (12.54)], и при $\bar{p}_0=X_0$, $q_0=Y_0$ в области, определяемой условиями (12.54). Отсюда следует, что ряд для H_{11}^{**} в указанной области сходится и

$$|H_{11}^{**}|<C\varepsilon^3, \tag{12.61}$$

где C — некоторая постоянная. Вместе с тем согласно (12.49) $|H_1^{**}|<1$, так что

$$|H_{01}^{**}|<1-C\varepsilon^3=C_1. \tag{12.61*}$$

Перепишем H^{**} в виде

$$H^{**}(\bar{p},\ q)=H_{00}(\bar{p}_0)+\mu H_{01}^{**}(\bar{p})+\mu H_2^{**}(\bar{p},\ q), \tag{12.62}$$

где согласно (12.57*) и (12.58)

$$H_2^{**}(\bar{p},\ q)=H_{11}^{**}(\bar{p},\ q_1)+\overline{H}_1^{**}(\bar{p},\ q).$$

В соответствии с оценками (12.55), (12.61) в указанной области

$$|H_2^{**}|<C\varepsilon^3+4\mu\delta^{-4n-9}, \quad \mu=\delta^T.$$

Если $T-4n-10>\frac{3}{4}T$, или, иначе, $T>16n+40$, то $\delta^{T-4n-10}<\delta^{\frac{3}{4}T}$ и, если $\delta^T=\mu<\varepsilon^4$, то $\delta^{T-4n-10}<\varepsilon^3$. Следовательно, при

$$T>16n+40, \quad \mu<\varepsilon^4, \tag{12.63}$$

$|H_2^{**}|<C\varepsilon^3+4\delta\varepsilon^3$ и, во всяком случае,

$$|H_2^{**}|<\varepsilon^{2,5}, \tag{12.64}$$

если C и δ таковы, что

$$C\varepsilon^{0,5}+4\delta\varepsilon^{0,5}<1. \tag{12.65}$$

Таким образом, при $\bar{p}_1$, q_1, $\bar{p}_0 = X_0$, $q_0 = Y_0$ в области, определяемой согласно (12.54) и (12.60), т. е. при

$$\begin{gathered} \|\bar{p}_1 - \varepsilon\| < \varepsilon, \ \|\operatorname{Im} q_1\| \leqslant 1, \\ \bar{p}_0 \in G_{KN}^{00} - 2\rho, \ \|\operatorname{Im} q_0\| \leqslant \varrho'' - 2\gamma \end{gathered} \tag{12.66}$$

будем иметь:

1) гамильтониан (12.62) $H''(\bar{p}, q)$ аналитичен по своим переменным;

2) для H_{01}^{**} имеет место оценка (12.61*);

3) для H_2^{**} имеет место оценка (12.64), если выполняются неравенства (12.63), (12.65);

4) в силу аналитичности функций H_{00}, H_{11}^{**} найдутся такие конечные постоянные Θ_{00}, Θ_{01} ($\geqslant 1$), что

$$\left\| \frac{\partial^2 H_{00}}{\partial \bar{p}_0^2} \right\| \leqslant \Theta_{00}, \quad \left\| \frac{\partial^2 H_{01}^{**}}{\partial \bar{p}^2} \right\| \leqslant \Theta_{01}. \tag{12.67}$$

Для удобства анализа выполним еще одну замену переменных, положив

$$\bar{p}_0 = \varepsilon p_0, \quad \bar{p}_1 - \varepsilon = \varepsilon p_1. \tag{12.68}$$

Мы получим систему относительно p, q:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H^0}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H^0}{\partial p} \tag{12.69}$$

с гамильтонианом

$$H^0(p, q) = \frac{1}{\varepsilon} H^{**}(\bar{p}(p), q). \tag{12.69*}$$

Если обозначить

$$\begin{gathered} \frac{1}{\varepsilon} H_{00}(\varepsilon p_0) = H_0^0(p_0), \\ \frac{1}{\varepsilon} H_{01}^{**}(\bar{p}(p)) = \frac{1}{\varepsilon} \bar{H}_{10}(\varepsilon p_0) + (\lambda, p_1) + \\ + \varepsilon \sum_{s, \sigma = 1}^{n} 4 d_{s\sigma}(\varepsilon p_0)(1 + p_{1s})(1 + p_{1\sigma}) = H_{01}^0(p), \\ \frac{1}{\varepsilon} H_2^{**}(\bar{p}(p), q) = \varepsilon H_2^0(p, q), \end{gathered} \tag{12.70}$$

то $H^0(p, q)$ запишется в виде

$$H^0(p, q) = H_0^0(p_0) + \mu H_{01}^0(p) + \mu\varepsilon H_2^0(p, q). \tag{12.71}$$

Этот гамильтониан рассматривается в соответствии с (12.66) в области

$$F^0(p \in G^0, \ \|\operatorname{Im} q\| < \varrho_0 \leqslant 1), \qquad (12.71^*)$$

где G^0 — произведение областей $\|p_1\| < 1$, $p_0 \in \frac{1}{\varepsilon}(G^{00}_{KN} - 2\beta)$ и $\varrho_0 = \min(1, \varrho'' - 2\gamma)$. В этой области:

1) $H^0(p, q)$ есть аналитическая функция своих переменных, причем q — угловая переменная;

2) согласно (12.64) и (12.70)

$$|H^0_2(p, q)| < \sqrt{\varepsilon}. \qquad (12.72)$$

Согласно (12.03), (12.67), (12.70)

$$\det \frac{\partial^2 H^0_0}{\partial p^2_0} \neq 0, \quad \left\| \frac{\partial^2 H^0_0}{\partial p^2_0} \right\| \leqslant \varepsilon\Theta_{00}, \quad \left\| \frac{\partial^2 H^0_{01}}{\partial p^2} \right\| \leqslant \varepsilon\Theta_{01}, \qquad (12.73)$$

где Θ_{00} Θ_{01} — конечные постоянные ($\geqslant 1$).

§ 12.5. Анализ окончательной системы

Подведем итоги.

Мы имели исходную систему (12.01):

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (12.74)$$

где

$$H(x, y) = H_{00}(x_0) + \mu \overline{H}_1(x_0, x_1, y_1) + \mu \widetilde{H}_1(x, y), \quad (12.74^*)$$

$\widetilde{H}_1$ — чисто периодическая по y_0 часть H с периодом 2π. По переменным x_1, y_1 функции $\overline{H}_1$ и $\widetilde{H}_1$ разлагаются в степенные ряды, причем $\overline{H}_1$ содержит только члены четного порядка:

$$\overline{H}_1 = \overline{H}_{10} + \overline{H}_{12} + \overline{H}_{14} + \ldots,$$

где $\overline{H}_{1m}$ — форма m-й степени относительно x_1, y_1 с коэффициентами, зависящими от x_0. Предполагалось, что в некоторой области

$$x_0 \in G^{00}, \ \|x_1\| \leqslant R, \ \|y_1\| \leqslant R, \ \|\operatorname{Im} y_0\| \leqslant \varrho \quad (12.75)$$

эти ряды сходятся и что весь гамильтониан является аналитической функцией своих переменных. Предполагалось также, что в этой области

$$|\overline{H}_1|<1, \quad |\widetilde{H}_1|<1, \quad \det\frac{\partial^2 H_{00}}{\partial x_0^2}\neq 0, \qquad (12.76)$$

а область G^{00} — выпуклая.

Исходную систему мы подвергли нескольким преобразованиям, а именно:

1) преобразованию (12.40) к переменным x', y', причем $x_0' = x_0$;

2) преобразованию Биркгофа (12.45) к переменным x'', y'', причем $x_0'' = x_0$;

3) операции усреднения по быстрой угловой переменной y_0'', определяемой формулами (12.50);

4) преобразованию (12.56) к полярным координатам $\bar{p} = (\bar{p}_0, \bar{p}_1)$, $q = (q_0, q_1)$;

5) вспомогательному преобразованию (12.68), представляющему собой перенос начала координат для $\bar{p}_1$ и изменение масштаба для $\bar{p}_0$, $\bar{p}_1$ в ε раз.

В результате этих преобразований мы пришли к системе (12.69) относительно переменных p, q с гамильтонианом (12.71). При выполнении ряда условий, выведенных в ходе этих преобразований и налагающих ограничения на малый параметр μ, этот гамильтониан в области (12.71*) является аналитической функцией своих переменных. В этой области удовлетворяются условия (12.72), (12.73). Кроме того, предположим, что в этой области

$$\det\frac{\partial^2 H_{01}^0}{\partial p_1^2} = 4\det\left(d_{s\sigma}(\varepsilon p_0)\right)\neq 0. \qquad (12.73^*)$$

§ 12.6. Распространение результатов предыдущих глав на преобразованную систему

К полученной системе с гамильтонианом (12.71) применим непосредственно метод последовательных канонических преобразований, использованных в невырожденном случае, с небольшими изменениями, указанными в гл. X и XI.

Покажем прежде всего, что дает в применении к этой системе основная операция.

Следуя рассуждениям, приведенным в § 10.3, обозначим

$$\sqrt{\varepsilon}=\bar{\mu}=\delta_0^{T_0}, \quad N_0=\frac{1}{\gamma_0}\ln\frac{1}{\bar{\mu}}, \tag{12.77}$$

где δ_0, γ_0 удовлетворяют неравенствам $2\delta_0<\gamma_0\leqslant 1$, $\gamma_0+\delta_0<\varrho_0$, а T_0 — некоторое число, подбираемое ниже. Обозначим через $\overline{H}_2^0(p)$ вековую часть функции $H_2^0(p, q)$ и через $H_{01}^{(1)}$ функцию

$$H_{01}^{(1)}(p)=H_{01}^0(p)+\varepsilon\overline{H}_2^0(p). \tag{12.78}$$

Если разложение Фурье функции $H_2^{(0)}(p, q)$ имеет вид (мы проведем все рассуждения, используя лишь комплексную форму ряда Фурье)

$$H_2^0(p, q)=\sum_{\|k\|>0} h_k^0(p)\, e^{i(k,q)}, \tag{12.79}$$

то основная операция представляет собой каноническое преобразование к переменным P, Q:

$$p=P+\frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q=q+\frac{\partial S}{\partial P}, \tag{12.80}$$

где

$$S(P, q)=\mu\varepsilon \sum_{1\leqslant\|k\|<N_0} S_k(P)\, e^{i(k,q)}, \tag{12.80*}$$

$$S_k(P)=ih_k^0(P)\Bigg/\left(k, \frac{\partial\left(H_0^0+\mu H_{01}^{(1)}\right)}{\partial P}\right). \tag{12.80**}$$

Ограничим снизу знаменатели в последней формуле неравенством

$$\left|\left(k, \frac{\partial\left(H_0^0+\mu H_{01}^{(1)}\right)}{\partial P}\right)\right| \geqslant \begin{cases} \varepsilon K_0\|k\|^{-n-1}, & \|k_0\|\neq 0, \\ \mu\varepsilon K_0\|k\|^{-n-1}, & \|k_0\|=0, \quad \|k\|\neq 0, \end{cases} \tag{12.81}$$

где $K_0=\delta_0^2$.

Дальнейшие рассуждения и выкладки те же, что и в § 10.3. Отличие состоит в том, что постоянные Θ_{00}, Θ_{01}, $\Theta_{01}^{(1)}$ заменяются на $\varepsilon\Theta_{00}$, $\varepsilon\Theta_{01}$, $\varepsilon\Theta_{01}^{(1)}$.

Мы придем к системе с гамильтонианом

$$H^{(1)}(P, Q)=H_0^0(P_0)+\mu H_{01}^{(1)}(P)+\mu\varepsilon H_2^{(1)}(P, Q), \quad (12.82)$$

рассматриваемым в области

$$F^{(1)}\left(P\in G^0_{K_0N_0}-3\beta_0,\ \|\operatorname{Im} Q\|\leqslant\varrho_0-3\gamma_0,\ \beta_0=\delta_0^2\right), \quad (12.83)$$

причем $G^0_{K_0N_0}$ есть подобласть области G^0, где удовлетворяются неравенства (12.81). В этой области $H^{(1)}(P, Q)$ есть аналитическая функция своих переменных, и имеют место оценки

$$|H_2^{(1)}|<\mu_1\leqslant\mu^{-1+\alpha}, \quad \left\|\frac{\partial^2 H_{01}^{(1)}}{\partial P^2}\right\|<\varepsilon(1+\delta_0)\Theta_{01}=\varepsilon\Theta_{01}^{(1)}. \quad (12.84)$$

Так же как и в невырожденном случае, можно применить основную операцию в силу этих оценок последовательно неограниченное число раз.

При доказательстве непустоты предельной области выкладки будут такими же, как и в гл. VI (с учетом указаний из § 10.4). Отличие состоит в том, что вместо отображений (10.64) рассматриваются отображения

$$\xi=A^0p=\left(\xi_0=\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial\left(H_0^0+\mu H_{01}^0\right)}{\partial p_0},\quad \xi_1=\frac{\partial H_{01}^0}{\partial p_1}\right), \quad (12.85_0)$$

$$\xi=A^{(s)}p=\left(\xi_0=\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial\left(H_0^0+\mu H_{01}^{(s)}\right)}{\partial p_0},\quad \xi_1=\frac{\partial H_{01}^{(s)}}{\partial p_1}\right), \quad (12.85_s)$$

а неравенства (12.81) для малых знаменателей записываются в виде

$$|(k, \varepsilon\xi)|\geqslant\begin{cases}\varepsilon K_0\|k\|^{-n-1}, & \|k_0\|\neq 0,\\ \mu\varepsilon K_0\|k\|^{-n-1}, & \|k_0\|=0,\ \|k\|\neq 0\end{cases} \quad (12.86)$$

или точно так же, как и (10.67),

$$\begin{aligned}&|(k_0, \xi_0)+\mu(k_1, \xi_1)|\geqslant K_0\|k\|^{-n-1}, && \|k_0\|\neq 0,\\ &|(k_1, \xi_1)|\geqslant K_0\|k_1\|^{-n-1}, && \|k_0\|=0.\end{aligned} \quad (12.87)$$

Учитывая выражения (12.70) и условия (12.73), (12.73*), можно заключить, что найдутся постоянные θ_0, Θ_0 (не зависящие от μ, ε при достаточно малых значениях этих параметров), для которых

$$\theta_0\|dp\|\leqslant\|dA^0\|\leqslant\Theta_0\|dp\|. \quad (12.88)$$

Дальнейшие рассуждения те же, что и в § 11.5.

ГЛАВА XIII

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 13.1. Движения вблизи треугольной точки либрации в ограниченной круговой задаче трех тел

1. Рассмотрим задачу о движении вблизи треугольной точки либрации в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел. Соответствующие уравнения движения во вращающейся декартовой системе координат с началом в точке либрации имеют вид (см., например, [25—27]):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial y}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z}, \end{cases} \tag{13.01}$$

где $U=U(x, y, z)$ — силовая функция. Эта функция выражается формулой

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - m + x\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + y\right)^2 - \\ - \frac{1}{2}(3 - m + m^2) + (1-m)(1 + x \pm \sqrt{3}y + x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \\ + m(1 - x \pm \sqrt{3}y + x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}, \tag{13.02}$$

где m — масса тела, движущегося по круговой орбите вокруг центрального тела с массой $1-m$. Знак «+» перед $\sqrt{3}$ в этой формуле соответствует точке либрации L_4, а знак «—» — точке либрации L_5.

Функция $U(x, y, z)$ может быть разложена в окрестности начала координат в ряд по степеням x, y, z, начинающийся с членов второго порядка.

Вводим новые переменные x_k, y_k $(k=1, 2, 3)$ по формулам

$$\begin{gathered} x_1=x, \quad x_2=y, \quad x_3=z, \\ y_1=\frac{dx}{dt}-y, \quad y_2=\frac{dy}{dt}+x, \quad y_3=\frac{dz}{dt}, \end{gathered} \tag{13.03}$$

после чего придем к каноническим уравнениям

$$\frac{dx_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k=1, 2, 3), \tag{13.04}$$

где

$$H=U(x_1, x_2, x_3)-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+ \\ +x_1y_2-y_1x_2. \tag{13.05}$$

Если в функции H ограничиться лишь членами второго порядка, то система (13.04) будет линейной. При выполнении условия $27m(1-m)<1$ соответствующее характеристическое уравнение для этой системы имеет все чисто мнимые корни $\pm\lambda_k i$ $(i=\sqrt{-1})$ $(k=1, 2, 3)$, причем

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1^2&=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-27m(1-m)}\right), \\ \lambda_2^2&=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-27m(1-m)}\right), \quad \lambda_3=1. \end{aligned}\right. \tag{13.06}$$

Тогда начало координат $x_k=y_k=0$ $(k=1, 2, 3)$ является точкой равновесия эллиптического типа, и система (13.04) совпадает по своему характеру с системой (11.01), рассмотренной в главе XI, поэтому возможно применить изложенные в этой главе результаты.

В соответствии с этими результатами, если

$$k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_3\neq 0, \quad |k_1|+|k_2|+|k_3|\leqslant 4, \tag{13.07}$$

при целых k_1, k_2, k_3 и если выполняется условие (11.50*), то система (13.04) обладает условно-периодическим решением в достаточно малой окрестности начала координат для большинства (по мере Лебега) начальных значений. Построение этих решений может быть выполнено так, как это изложено в гл. XI.

Условие (13.07) может нарушаться лишь для некоторых «резонансных» значений m (см. анализ этих значений в [28—29]).

2. Если ограничиться случаем плоской задачи трех тел ($z=0$), то в (13.04) надо положить $x_3=y_3=0$, и мы будем иметь каноническую систему с двумя степенями свободы. Тогда при выполнении указанных выше условий можно гарантировать не только существование условно-периодических решений для большинства начальных значений, но также ограниченность всех решений в достаточно малой окрестности начала координат, т. е. устойчивость точки либрации.

Для доказательства рассмотрим уравнения движения не в виде (13.04) относительно прямоугольных координат x_k, y_k, а в виде (11.40) относительно угловых и позиционных переменных p, q:

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H^{(0)}}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt}=\frac{\partial H^{(0)}}{\partial p}, \tag{13.08}$$

где $p=(p_1, p_2)$, $q=(q_1, q_2)$,

$$H^{(0)}=H^{(0)}(p, q)=\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2+\lambda_{11}p_1^2+2\lambda_{12}p_1p_2+ \\ +\lambda_{22}p_2^2+H_5^{(0)}(p, q)+H_6^{(0)}(p, q)+\ldots, \tag{13.09}$$

λ_1, λ_2 даются формулами (13.06), $H_m^{(0)}(p, q)$, $m\geqslant 5$, формы m-й степени относительно $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$ ($p_1\geqslant 0$; $p_2\geqslant 0$) с периодическими по q_1, q_2 коэффициентами. К таким уравнениям мы можем прийти после указанных в гл. XI преобразований.

Прежде всего заметим, что эти уравнения обладают интегралом

$$H^{(0)}(p, q)=h=\text{const}. \tag{13.10}$$

Значение постоянной интеграла $h=0$ соответствует состоянию равновесия $p_1=p_2=0$ ($x_1=x_2=y_1=y_2=0$). При достаточно малых p_1, p_2 постоянная h также мала. Из структуры функции $H^{(0)}(p, q)$ вытекает, что для движения с достаточно малыми начальными p_1, p_2 [соответствующими начальным значениям x_k, y_k ($k=1, 2$) в достаточно малой окрестности точки либрации] мы можем выразить, например, p_2 через p_1, q_1, q_2 и h. Мы получим

$$p_2 \equiv p\,(p_1,\ q_1,\ q_2,\ h) = \frac{h}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}p_1 - \left(\frac{\lambda_{11}}{\lambda_2}p_1^2 + 2\frac{\lambda_{12}}{\lambda_2}hp_1 + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_2^2}h^2\right) + \ldots \quad (13.11)$$

При анализе движения мы можем исключить из рассмотрения переменную p_2, запомнив, что она выражается через p_1, q_1, q_2, h и обращается в нуль при $p_1=h=0$.

В пространстве предельных переменных P_1^∞, P_2^∞, Q_1^∞, Q_2^∞ (ниже мы опустим для сокращения записи верхний индекс ∞) гамильтониан H^∞, как вытекает из способа его построения, не зависит от Q_1, Q_2 и

$$H^\infty = H^\infty(P) = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_{11}P_1^2 + 2\lambda_{12}P_1P_2 + \lambda_2 P_2^2 + \ldots, \quad (13.12)$$

где невыписанные члены имеют порядок не ниже третьего относительно P_1, P_2. В этом пространстве искомое условно-периодическое движение описывается формулами

$$\left\{\begin{aligned} &P_s = \mathrm{const} > 0,\quad Q_s = \omega_s^\infty t + \mathrm{const},\\ &\omega^\infty = \frac{\partial H^\infty(P)}{\partial P}. \end{aligned}\right. \quad (13.13)$$

Имеется также интеграл

$$H^\infty(P) = h, \quad (13.14)$$

где h — та же постоянная, что и в (13.10). Из (13.14) мы также выразим P_2 через P_1:

$$P_2 = \frac{h}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}P_1 - \ldots \quad (13.15)$$

Исходные переменные p, q выражаются через P, Q формулами вида (7.32*), поэтому

$$p_s = p_s(P,\ Q),\quad q_s = q_s(P,\ Q) \quad (s=1,\ 2). \quad (13.16)$$

При подстановке сюда вместо P, Q выражений (13.13) получим условно-периодическое решение $p_s(t)$, $q_s(t)$ исходных уравнений (13.08) с базисными частотами

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_1^\infty = \lambda_1 + 2\lambda_{11}P_1 + 2\lambda_{12}P_2 + \ldots,\\ &\omega_2^\infty = \lambda_2 + 2\lambda_{12}P_1 + 2\lambda_{22}P_2 + \ldots, \end{aligned}\right. \quad (13.17)$$

где невыписанные члены имеют порядок выше первого относительно P_1, P_2.

Мы предполагаем, естественно, что начальные значения исходных переменных p_1, p_2 принадлежат «хорошему» множеству. Тогда при выполнении условия (13.07) и условия (11.50*), записывающегося в виде

$$\lambda_{11}\lambda_{12}-\lambda_{12}^2\neq 0, \tag{13.18}$$

можно гарантировать существование взаимно однозначной зависимости между исходными переменными p, q и предельными переменными P, Q [выражаемой формулами (13.16)] и существование искомого условно-периодического решения уравнений (13.08).

Так как переменная p_2 выражается с помощью (13.11) через p_1, q_1, q_2, а переменная P_2 — с помощью (13.14) через P_1, то возможно рассматривать траекторию движения при фиксированном h в пространствах переменных p_1, q_1, q_2 и P_1, Q_1, Q_2.

В пространстве (P_1, Q_1, Q_2) движение определяется формулами (13.13) и его можно интерпретировать как движение на двумерном торе T_{P_1}, для которого средний радиус кольца произволен, радиус поперечного сечения равен P_1, а Q_1, Q_2 — угловые координаты на поверхности.

Надо теперь гарантировать, что «хорошее» множество значений P_1, при которых торы T_{P_1} существуют, т. е. при которых существует условно-периодическое движение, найдется на достаточно малом интервале $0<P_1<\delta$ при любом фиксированном сколько угодно малом h.

Как следует из гл. VI, такое «хорошее» множество значений P_1 отвечает условию, что соответствующие значения предельных частот ω_1^∞, ω_2^∞, зависящих от P_1, рационально независимы или, точнее, удовлетворяют оценке вида (6.28).

Если рассматривать на плоскости (P_1, P_2) малый квадрат $0<P_s<a$ ($s=1$, 2), то в соответствии с общими результатами гл. XI в этом квадрате большинство (по мере Лебега) точек принадлежат именно «хорошему» множеству. Но при фиксированном h переменные P_1 и P_2 связаны между собой интегралом (13.14), и совокупность возможных значений P_1, P_2 лежит на некоторой кривой.

Точки этой кривой образуют множество меры нуль по сравнению с множеством точек упомянутого квадрата, и можно априори допустить, что именно на такой кривой при достаточно малом h нет точек «хорошего» множества, а для всех P_1 на этой кривой отношение $\omega_1^\infty/\omega_2^\infty$, как говорят, «застревает» на резонансе, т. е. остается постоянным и равным числу, не удовлетворяющему оценке вида (6.28).

Указанный случай невозможен, если при изменении P_1 в малом, но конечном интервале $0<P_1<\delta$ значения отношения $\omega_1^\infty/\omega_2^\infty$ заполняют целиком некоторый конечный интервал l, так как тогда в силу свойств вещественных чисел большинство (по мере Лебега) среди этих значений удовлетворяют оценке вида (6.28). Для этого достаточно, чтобы

$$\frac{d}{dP_1}\left(\frac{\omega_1^\infty}{\omega_2^\infty}\right)\neq 0, \quad 0<P_1<\delta \tag{13.19}$$

при h и δ, не превышающих некоторого малого предела

Исходя из (13.15) и (13.17), получим

$$\frac{d}{dP_1}\left(\frac{\omega_1^\infty}{\omega_2^\infty}\right)=\frac{1}{\lambda_2\left(\omega_2^\infty\right)^2}\left[2\left(\lambda_{11}\lambda_2^2-2\lambda_{12}\lambda_1\lambda_2+\lambda_{22}\lambda_1^2\right)+\right.$$
$$\left.+4h\left(\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}^2\right)+\ldots\right], \tag{13.20}$$

где невыписанные члены имеют порядок малости не ниже второго относительно P_1 и h. Так как $P_1\to 0$ вместе с $h\to 0$, то для выполнения условия (13.19) достаточно, чтобы

$$\lambda_{11}\lambda_2^2-2\lambda_{12}\lambda_1\lambda_2+\lambda_{22}\lambda_1^2\neq 0. \tag{13.21}$$

Проверка этого условия, которое записывается также в виде

$$\begin{vmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_1\\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_2\\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0\end{vmatrix}\neq 0,$$

была проведена в [30].

(Заметим, что если рассматривать совокупность траекторий движения при произвольных h, т. е. соответствующих любым P_1, P_2 внутри квадрата $0<P_s<a$ ($s=1, 2$), то для выполнения (13.19) достаточно условия $\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}^2\neq 0$, которое выписывалось выше.)

Таким образом, при каждом сколько угодно малом h существует множество торов T_{P_1} (рис. 9), на которых лежат траектории движения, соответствующие этому h.↓ По определению эти торы, отвечающие большинству (по мере Лебега) значений P_1 в некотором малом интервале

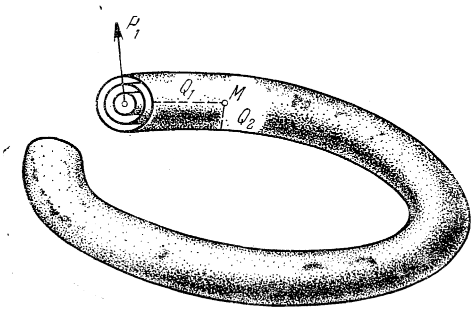

Рис. 9.

$0<P_1<\delta$, вложены один в другой и не имеют общих точек.

Торы T_{P_1} отображаются взаимно однозначно в торы (неправильные) T_{P_1} в пространстве p_1, q_1, q_2. На этих торах, имеющих произвольный средний радиус кольца, параметр p_1, представляющий радиус-вектор в плоскости поперечного сечения тора, определяется с помощью формул (13.16). При этом p_1 зависит от q_1, q_2, так что поперечные сечения этих торов не будут, вообще, окружностями и будут изменяться с продвижением вдоль трубки тора (рис. 10). Следовательно, в пространстве переменных p_1, q_1, q_2 мы также получим при любом сколько угодно малом h множество торов T_{P_1}, вложенных один в другой. Эти торы, не имеющие общих точек в силу взаимной однозначности отображения $T_{P_1}\leftrightarrow T_{P_1}$ образуют, как показывалось выше в § 7.11, инвариантные множества. Начальным точкам на каждом торе T_{P_1} соответствует условно-периодическая траектория движения, лежащая целиком на торе и заполняющая при $t\to\infty$ всю его поверхность. Если же начальная точка находится в «щели» между торами T_{P_1} (т. е. не принадлежит «хорошему» множеству), то, хотя соответствующая траектория может и не быть условно-периодической, она во всяком случае не выйдет ни при каких t из этой «щели». Пересечь ближайшие поверхности торов траектория не может в силу

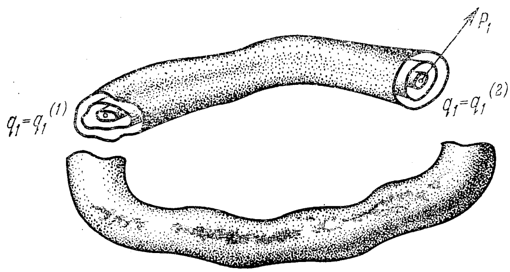

Рис. 10.

свойств инвариантных множеств. Следовательно, значения p_1, а также значения p_2, зависящие от p_1, остаются вдоль таких траекторий при всех t ограниченными в некоторой малой окрестности справа от $p_1=p_2=0$. Отсюда вытекает утверждение об ограниченности всех движений в достаточно малой окрестности точки либрации.

§ 13.2. Частные случаи задачи трех тел

1. Рассмотрим плоскую ограниченную круговую задачу трех тел S (центральное тело с массой $m_0=1$), I (возмущающее тело с массой μ) и A (тело с бесконечно малой массой). Если отнести движение A и I к центральному телу S и использовать так называемую первую систему канонических переменных Пуанкаре с видоизмененными угловыми переменными

$$L=k\sqrt{a}, \qquad \bar{\lambda}=\lambda-\lambda',$$
$$\Gamma=L\left(1-\sqrt{1-e^2}\right), \qquad \varphi=-(g-\lambda'),$$

где k — постоянная тяготения, a — большая полуось, e — эксцентриситет, λ — средняя долгота, g — долгота перицентра, λ' — средняя долгота возмущающего тела I, то уравнения движения A могут быть записаны в виде (см. [31, 32]):

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{dL}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\bar{\lambda}}, & \frac{d\bar{\lambda}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial L}, \\ \frac{d\Gamma}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\varphi}, & \frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\Gamma}, \end{array}\right. \tag{13.22}$$

где

$$\left\{\begin{array}{l} H(L,\ \Gamma,\ \bar{\lambda},\ \varphi)=H_0(L,\ \Gamma)+\mu H_1(L,\ \Gamma,\ \bar{\lambda},\ \varphi), \\ H_0(L,\ \Gamma)=-\frac{k^4}{2L^2}+n'(\Gamma-L), \end{array}\right. \tag{13.23}$$

n' — среднее движение тела I (так что $\lambda'=n't$), а μH_1 — возмущающая функция. Эта функция, выражаемая в конечном виде формулой

$$\mu H_1=k^2\mu\left(\frac{r}{a'^2}\cos\varphi-\frac{1}{\Delta}\right), \tag{13.24}$$

где a' — радиус круговой орбиты тела I, r — текущее расстояние SA и Δ — взаимное расстояние между I и A, может быть представлена [31, 32] тригонометрическим рядом по угловым переменным $\bar{\lambda}$, φ:

$$\mu H_1=k^2\mu\sum_{|k_1|+|k_2|\geqslant 0} B^{(k_1,\ k_2)}\cos(k_1\bar{\lambda}+k_2\varphi), \tag{13.25}$$

причем коэффициенты $B^{(k_1,\ k_2)}$, зависящие от L, Γ, разлагаются в степенные ряды по Γ.

Существенное значение имеет вековая часть этой функции, равная с точностью до членов порядка Γ^2 (см. [31, 32]):

$$\mu\bar{H}_1=k^2\mu B^{(0,\ 0)}=-k^2\mu\left[\frac{1}{2}A^{(0)}+(A_1^{(0)}+A_2^{(0)})\frac{\Gamma}{2L}+\right.$$
$$\left.+(-A_1^{(0)}-A_2^{(0)}+3A_3^{(0)}+3A_4^{(0)})\frac{\Gamma^2}{4L^2}\right], \tag{13.26}$$

где коэффициенты $A^{(0)}$, $A_s^{(0)}$ выражаются через отношение $\alpha=a/a'$, если $a<a'$. Разложение $A^{(0)}$ в ряд по степеням α имеет вид

$$A^{(0)}=\frac{2}{a'}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\alpha^4+\ldots\right], \tag{13.27}$$

а $A_s^{(0)}$ $(s=1, 2, \ldots)$ связаны с $A^{(0)}$ соотношением

$$A_s^{(0)}=\frac{\alpha^s}{s!}\frac{d^sA^{(0)}}{d\alpha^s}. \tag{13.27*}$$

(Если $a>a'$, то во всех формулах надо поменять местами a и a'.) Уравнения (13.22) представляют собой каноническую систему с двумя степенями свободы. Обозначив через p и q векторы с компонентами L, Γ и $\bar{\lambda}$, φ соответственно, запишем (13.22) в виде системы (1.08)

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}, \tag{13.28}$$

где $H=H(p, q)=H_0(p)+\mu H_1(p, q)$.

Отличие от системы (1.08), рассматривавшейся в гл. I—VIII, состоит в том, что в данном случае не удовлетворяется условие

$$\det\frac{\partial^2 H_0}{\partial p^2}\neq 0, \tag{13.29}$$

так как $\partial H_0/\partial\Gamma=n'=\text{const}$ и вторые производные $\partial^2H_0/\partial\Gamma^2$, $\partial^2H_0/\partial\Gamma\partial L$ равны нулю. Однако из изложенного в гл. III—V видно, что при последовательных канонических преобразованиях, соответствующих невырожденному случаю, условие (13.29) непосредственно не требуется. Кроме того, так как знаменатели (k, ω) в соответствующих производящих функциях $S^{(1)}$, $S^{(2)}, \ldots$ будут иметь вид $k_1\omega_1+k_2\omega_2$, где

$$\omega_1=\frac{k^4}{L^3}-n'+\frac{\partial\overline{H}_1}{\partial L}+\ldots, \quad \omega_2=n'+\mu\frac{\partial\overline{H}_1}{\partial\Gamma}+\ldots, \tag{13.30}$$

то их можно ограничить неравенством того же вида (6.10), что и в невырожденном случае [см. также (10.52)] при $\|k_0\|\neq 0$), т. е.

$$|(k, \omega)|\geqslant K\|k\|^{-n-1}, \quad n=2, \quad 0<\|k\|\leqslant N_s, \quad s=1, 2, \ldots, \tag{13.31}$$

не содержащими множитель μ *). Следовательно, все

---

*) Так как $k^4/L^3=n$ — оскулирующее среднее движение тела, то при анализе областей значений L исключаются точки, соответствующие точной или близкой соизмеримости n и n'.

оценки, выписывавшиеся в гл. III—V, сохраняются. Видоизменению подлежит лишь доказательство непустоты области F^∞ предельных переменных $P^{(\infty)}$, $Q^{(\infty)}$, требующее выполнение условия (13.29). Мы можем применить при этом рассуждения главы X, посвященной первому варианту вырожденного случая. А именно, первую основную операцию, применяемую к исходным уравнениям (13.22), будем интерпретировать как усреднение по быстрым переменным (так как такими являются обе угловые переменные $\overline{\lambda}$, φ). Мы придем после этого к системе относительно переменных $P=(L', \Gamma')$, $Q=(\overline{\lambda}', \varphi')$ с гамильтонианом (см. § 3.6 и 10.2)

$$H^{(1)}(P, Q)=H_0(P)+\mu\overline{H}_1(P)+\mu H_1^{(1)}(P, Q). \qquad (13.32)$$

При этом, если в области $F^{(0)}(p\in G^{(0)}, \|\operatorname{Im} q\|<\varrho)$ имеет место оценка $|\mu H_1|\leqslant\mu$, то в соответствующей области $F^{(1)}(P\in G^{(1)}, \|\operatorname{Im} Q\|<\varrho_1)$ имеем

$$|\mu H_1^{(1)}|<\mu\sqrt{\mu}. \qquad (13.33)$$

Область $G^{(0)}$ переменных L, Γ можно задать, например, как некоторый прямоугольник (представляющий собой выпуклую область) на плоскости (L, Γ):

$$L_1\leqslant L\leqslant L_2, \quad 0\leqslant\Gamma\leqslant\Gamma_1, \qquad (13.34)$$

где Γ_1 определяется сходимостью разложения (13.25) возмущающей функции. Область $G^{(1)}$ получается из $G^{(0)}$, если исключить резонансные зоны, где нарушается неравенство (13.31).

Вместо (10.64) рассмотрим отображение

$$\xi=A^{(0)}P=\left(\xi_0=\frac{\partial(H_0+\mu\overline{H}_1)}{\partial L}, \quad \xi_1=\frac{n'}{\mu}+\frac{\partial\overline{H}_1}{\partial\Gamma}\right) \qquad (13.35)$$

и аналогичные отображения $\xi=A^{(s)}P$. Так же как и в § 10.2, можно убедиться, что в области $G^{(0)}$, а вместе с тем и в ее подобласти $G^{(1)}$ справедливо при достаточно малом μ неравенство вида (10.65), т. е.

$$\theta_0\|dP\|\leqslant\|dA^{(0)}\|\leqslant\Theta_0\|dP\|, \qquad (13.36)$$

где θ_0, Θ_0 отличны от нуля и конечны при $\mu=0$. Выкладки, упоминаемые в примечании к § 10.4, но с заменой соответствующих матриц на скалярные величины (так как ξ_0, ξ_1, L, Γ — скаляры), позволяют заключить, что если в области $G^{(0)}$ имеют место оценки (их можно вывести с помощью (13.26))

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial L^2}\right| = \left|\dfrac{k^2}{L^3} - n'\right| \leqslant \bar{d}_0, \quad \left|\dfrac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial L^2}\right| \leqslant d_1, \quad \left|\dfrac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial L \partial \Gamma}\right| = b, \\ \left|\dfrac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial \Gamma^2}\right| = \bar{l}, \quad \left|\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial L^2}\right|^{-1} \leqslant \dfrac{1}{d_0}, \quad \left|\dfrac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial \Gamma^2}\right|^{-1} \leqslant \dfrac{1}{l}, \end{array}\right. \tag{13.37}$$

то

$$\Theta_0 = \max(\bar{d}_0 + \mu d_1 + \mu b,\ b + \bar{l}), \quad \frac{1}{\theta_0} = \max(A_1, A_2), \tag{13.38}$$

где

$$A_1 = \frac{1}{l - \mu d}\left(1 + \frac{b}{d_0 - \mu d_1}\right), \quad A_2 = \frac{1}{d_0 - \mu d_1}(1 + \mu b A_1),$$
$$d = \frac{b^2}{d_0 - \mu d_1}.$$

Следовательно, при значениях μ в некотором интервале $\mu_1 < \mu < \mu_2$, где A_1 и A_2 остаются положительными и конечными, отображение (13.35) является диффеоморфизмом области $G^{(0)}$, а также и ее подобласти $G^{(1)}$ на соответствующие области переменной ξ. Пусть $\Xi^{(0)} = A^{(0)} G^{(0)}$. Последовательность областей $\Xi^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ определяется далее с помощью неравенств

$$|k_1 \xi_0 + \mu k_2 \xi_1| \geqslant K_s \|k\|^{-3}, \quad 0 \leqslant \|k\| < N_s. \tag{13.39}$$

Поэтому дальнейшие рассуждения при доказательстве непустоты области F^∞ аналогичны приведенным в гл. VI для невырожденного случая.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что при значениях возмущающей массы в некотором интервале (μ_1, μ_2), где μ_1 и μ_2 вообще достаточно малы, и для большинства (по мере Лебега) начальных значений переменных L, Γ в прямоугольнике (13.34), исходные уравнения (13.22) обладают условно-периодическим решением.

Кроме того, поскольку (13.22) есть система с двумя степенями свободы, то можно, как и в § 13.1, проверив выполнение дополнительных условий, сделать вывод об ограниченности всех движений.

С этой целью мы используем интеграл

$$H(L,\ \Gamma,\ \bar{\lambda},\ \varphi)=h, \tag{13.40}$$

которым обладает исходная система (13.22). Учитывая вид функции H [см. (13.23), (13.25)], мы можем выразить Γ через L, $\bar{\lambda}$, φ. В пространстве предельных переменных L^∞, Γ^∞, $\bar{\lambda}^\infty$, φ^∞ (к которым придем в пределе после бесконечной последовательности замен переменных) гамильтониан H^∞ не зависит от λ^∞, φ^∞, а его невозмущенная часть и вековая часть порядка μ сохраняются без изменений. Поэтому интеграл (13.40) запишется в виде

$$H^\infty(L^\infty,\ \Gamma^\infty)\equiv$$
$$\equiv -\frac{k^4}{2L^{\infty 2}}+n'(\Gamma^\infty-L^\infty)+\mu\bar{H}_1(L^\infty,\ \Gamma^\infty)+\ldots=h, \tag{13.41}$$

где $\bar{H}_1$ выражается согласно (13.26) и где отброшены члены порядка $\mu^{3/2}$ и выше.

Из этого интеграла можно выразить Γ^∞ только через L^∞:

$$\Gamma^\infty=\frac{1}{n'}\left(h+\frac{k^4}{2L^{\infty 2}}+L^\infty+\ldots\right), \tag{13.42}$$

где отброшены члены порядка μ и выше.

Дальнейшие рассуждения те же, что и в предыдущем параграфе. Основным моментом является вычисление производной по L^∞ от отношения предельных базисных частот ω_1^∞, ω_2^∞ с учетом зависимости $\Gamma^\infty=\Gamma^\infty(L^\infty)$.

Так как согласно (13.41), (13.42)

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1^\infty&=\frac{\partial H^\infty}{\partial L^\infty}=\frac{k^4}{L^{\infty 3}}-n'+\mu\left[\frac{\partial\bar{H}_1}{\partial L^\infty}+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\partial\bar{H}_1}{\partial\Gamma^\infty}\left(1-\frac{k^4}{n'L^{\infty 3}}+\ldots\right)\right],\\ \omega_2^\infty&=\frac{\partial H^\infty}{\partial\Gamma^\infty}=n'+\mu\frac{\partial\bar{H}_1}{\partial\Gamma^\infty}+\ldots, \end{aligned}\right. \tag{13.43}$$

то

$$\frac{d}{dL^\infty}\left(\frac{\omega_1^\infty}{\omega_2^\infty}\right)=-\frac{3k^4}{n'L^{\infty 4}}+\mu(\ldots), \tag{13.43*}$$

где невыписанные члены имеют порядок μ и выше. Во всяком случае, при достаточно малых μ эта производная отлична от нуля, откуда следует ограниченность всех движений при начальных значениях L, Γ в некоторой области (13.34).

Замечание. Мы полагаем, что малость возмущающей функции определяется малостью возмущающей массы μ [см. оценку (13.33)]. Это справедливо, если не происходит тесных сближений между A и I. В случае же таких сближений возмущающая функция μH_1 может достигать больших значений за счет малости взаимного расстояния Δ. Следовательно, чем меньше допустимое расстояние между A и I, определяемое исходной областью (13.34) переменных L, Γ, тем меньше верхний предел значений μ, при которых гарантируется малость возмущающей функции μH_1 и справедливость всех изложенных результатов. При любом же фиксированном малом μ возможны такие сближения между A и I (т. е. такие начальные значения L, Γ), что эти результаты неприменимы, и движение тела A окажется неограниченным. Таким примером может служить переход кометы с эллиптической орбиты на гиперболическую после близкого прохождения около Юпитера.

2. Анализ пространственной ограниченной круговой задачи тех же трех тел S, A, I, которые рассматривались в п. 1, несколько отличается от случая плоской задачи. Мы используем здесь канонические переменные Делоне (с одной видоизмененной угловой переменной):

$$\begin{aligned} &L = k\sqrt{a}, && l \text{ — средняя аномалия},\\ &G = L\sqrt{1-e^2}, && g \text{ — угловое расстояние перицентра от узла},\\ &\Theta = G\cos i, && \bar{h} = \Omega - n't, \end{aligned} \tag{13.44}$$

где Ω — долгота узла, i — наклонность, а смысл символов k, a, e, n' тот же, что и в п. 1. Уравнения движения запишутся в таком виде (см. [31]):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial l}, && \frac{dl}{dt} = \frac{\partial H}{\partial L},\\ &\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial g}, && \frac{dg}{dt} = \frac{\partial H}{\partial G},\\ &\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{h}}, && \frac{d\bar{h}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Theta}, \end{aligned}\right. \tag{13.45}$$

где

$$H(L, \ldots, \bar{h}) = H_0(L, \Theta) + \mu H_1(L, \ldots, \bar{h}), \quad (13.46)$$

$$H_0(L, \theta) = -\frac{k^4}{2L^2} - n'\Theta, \quad (13.47)$$

а μH_1 — возмущающая функция. Эта функция выражается в конечном виде формулой, аналогичной (13.24),

$$\mu H_1 = k^2\mu\left(\frac{r}{a'^2}\cos\psi - \frac{1}{\Delta}\right), \quad (13.48)$$

где a', r, Δ — те же величины, что и в (13.24), а ψ — угол между направлениями из S на I и A. Она может быть представлена [31] тригонометрическим рядом по угловым переменным $l, g, \bar{h}$:

$$\mu H_1 = k^2\mu \sum B^{(k_1, k_2, k_3)} \cos(k_1 l + k_2 g + k_3 \bar{h}), \quad (13.49)$$

где коэффициенты B зависят от L, G, Θ.

В отношении этого ряда заметим следующее. А именно, так как угол ψ (рис. 11) определяется из сферического треугольника NAI, где $NI = -h$, $NA = g + l + (v - l)$, v — истинная аномалия, а $\Delta^2 = r^2 + a'^2 - 2a'r\cos\psi$, то H_1 разлагается в тригонометрический ряд по углам, кратным $\bar{h}$, $l+g$ и l. Другими словами, аргумент косинуса в (13.49) правильнее записать в виде

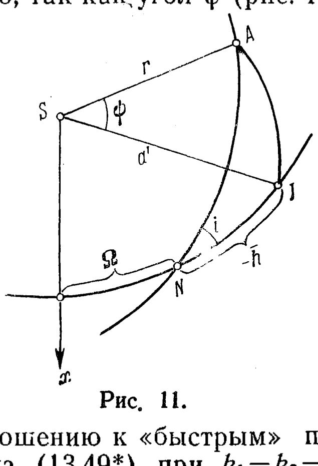

Рис. 11.

$$k_1 l + k_2(l + g) + k_3\bar{h}. \quad (13.49^*)$$

Отсюда вытекает, что вековая часть функции H_1 по отношению к «быстрым» переменным l, $\bar{h}$ [получающаяся из (13.49*) при $k_1 = k_2 = k_3 = 0$] не содержит также и медленной переменной g. Эта вековая часть представляется с точностью до членов четвертого порядка относительно эксцентриситета и наклонности в виде [32];

$$\mu H_1 = k^2\mu B^{(0,0,0)} = -k^2\mu\left[\frac{1}{2}A^{(0)} + \frac{1}{4}(A_1^{(0)} + A_2^{(0)})e^2 + \frac{3}{16}(A_3^{(0)} + A_4^{(0)})e^4 - \frac{1}{2}B^{(1)}\eta^2 - \frac{1}{4}(B_1^{(1)} + B_2^{(1)})e^2\eta^2 + \frac{3}{8}(2C^{(0)} + C^{(2)})\eta^4\right], \tag{13.50}$$

где e и $\eta^2 = \sin^2\frac{i}{2}$ выражаются через L, G, Θ по формулам

$$e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2}, \qquad \eta^2 = \frac{1}{2} - \frac{\Theta}{2G}, \tag{13.51}$$

а $A^{(0)}$, $A_s^{(0)}$, $B^{(1)}, \ldots$ выражаются, как и для функции (13.26) в плоской задаче, через отношение $\alpha = a/a'$, если $a < a'$.

Формулы для $A^{(0)}$ и $A_s^{(0)}$ были даны выше в п. 1. Величины $B^{(1)}$, $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$, $C^{(0)}$, $C^{(2)}$ выражаются следующим образом:

$$\left\{\begin{aligned}
B^{(1)} &= \frac{3\alpha^2}{a'}\left[1 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\alpha^2 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{4\cdot 6}\alpha^4 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{5\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 6\cdot 8}\alpha^6 + \ldots\right],\\
B_1^{(1)} &= \alpha\frac{dB^{(1)}}{d\alpha}, \qquad B_2^{(1)} = \frac{\alpha^2}{2}\,\frac{d^2B^{(1)}}{d\alpha^2},\\
C^{(0)} &= \frac{2\alpha^2}{a'}\left[1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\alpha^2 + \left(\frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}\right)^2\alpha^4 + \ldots\right],\\
C^{(2)} &= \frac{2\alpha^4}{a'}\cdot\frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}\left[1 + \frac{5}{2}\cdot\frac{9}{6}\alpha^2 + \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}\cdot\frac{9\cdot 11}{6\cdot 8}\alpha^4\ldots\right].
\end{aligned}\right. \tag{13.52}$$

Точные формулы для $A^{(0)}$, $B^{(1)}$, $C^{(i)}$ можно получить с помощью эллиптических интегралов первого и второго рода (см. [25]).

Уравнения (13.45) представляют собой каноническую систему с тремя степенями свободы, причем l, $\bar{h}$ — «быстрые» переменные, а g — «медленная» переменная. Обозначив через p_0 вектор с компонентами L, Θ, через

q_0 — вектор с компонентами l, $\bar{h}$, а через p_1, q_1 — переменные G, g соответственно, запишем (13.45) в виде системы (9.01), рассматривавшейся в гл. IX и X:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{13.53}$$

где

$$H = H(p, q) = H_0(p_0) + \mu H_1(p, q). \tag{13.53*}$$

Так как вековая часть H_1 по отношению к l, $\bar{h}$ не зависит от g, то

$$\mu \overline{H}_1 = \mu \overline{H}_1(p),$$

и мы приходим к случаю, рассмотренному в гл. IX, X, когда [см. (9.01), (9.04)]

$$H(p, q) = H_0(p_0) + \mu \overline{H}_1(p) + \mu \widetilde{H}_1(p, q). \tag{13.54}$$

Для того чтобы в полной мере применить результаты, изложенные в гл. IX и X, надо проверить условия (10.07), т. е.

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_0^2}\right) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial p_1^2} \equiv \frac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial G^2} \neq 0. \tag{13.55}$$

Вместе с тем первое из этих условий не выполняется, так как $\partial H_0/\partial \Theta = -n' = \mathrm{const}$ и среди вторых производных отлична от нуля лишь производная $\partial^2 H_0/dL^2$. Однако опять, как и в случае плоской задачи, все последовательные канонические преобразования, указанные в гл. IX, X, выполнимы. При усреднении по быстрым переменным в появляющихся знаменателях $(k, \omega) = k_1\omega_1 + k_3\omega_3$ имеем

$$\omega_1 = \frac{k^4}{L^3} + \mu \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial L} + \ldots, \quad \omega_3 = -n' + \mu \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial \Theta} + \ldots \tag{13.56}$$

Следовательно, их можно ограничить неравенством вида (10.11) без множителя μ. Все оценки, полученные при этом преобразовании, а также при всех дальнейших преобразованиях типа основной операции, сохраняются, так как они не требуют условий (13.55).

При доказательстве непустоты предельной области F^∞ необходимо видоизменить отображения (10.64).

А именно, вместо них рассмотрим отображение

$$\xi = A^{(0)}p = \left(\xi_1 = \frac{\partial(H_0 + \mu\bar{H}_1)}{\partial L}, \quad \xi_2 = \frac{\partial\bar{H}_1}{\partial G}, \quad \xi_3 = -\frac{n'}{\mu} + \frac{\partial\bar{H}_1}{\partial\Theta}\right) \tag{13.57}$$

и аналогичные отображения $\xi = A^{(s)}p$. Знаменатели

$$(k, \omega) = k_1\xi_1 + \mu(k_2\xi_2 + k_3\xi_3)$$

ограничиваются неравенствами (10.67).

Так как обратная величина производной $\partial^2H_0/\partial L^2 = -3k^4/L^4$ ограничена в заданной конечной области $L_1 < L < L_2$, то все рассуждения гл. X (см. § 10.4) применимы, если в некоторой области

$$G^{(0)}(L_1 < L < L_2, \quad G_1 < G < G_2, \quad \Theta_1 < \Theta < \Theta_2) \tag{13.58}$$

якобиан

$$\frac{D(\xi_2, \xi_3)}{D(G, \Theta)} \tag{13.59}$$

всюду отличен от нуля. Производные $\partial\xi_i/\partial G$, $\partial\xi_i/\partial\Theta$ нетрудно составить на основании выражения для $\bar{H}_1$, причем, чтобы получить в этих производных члены нулевого порядка относительно эксцентриситета e и наклонности i, достаточно ограничиться именно выражением (13.50).

Таким образом, когда якобиан (13.59) отличен в области (13.58) от нуля, что не связано с малостью e и i, можно гарантировать, что при достаточно малых μ большинству (по мере Лебега) начальных значений L, G, Θ в этой области соответствуют условно-периодические решения исходных уравнений (13.45).

Конечно, как и в п. 1, надо сделать замечание относительно нарушения условия существования таких решений при тесных сближениях A и I.

Резонансные значения L, G, Θ, при которых нарушается неравенство вида (10.11) для ω_1, ω_3 или (10.67) для ξ_1, ξ_2, ξ_3, исключаются в ходе построения областей $F^{(s)}$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ при выполнении последовательных канонических преобразований. В частности, исключаются значения L, при которых соизмеримы средние движения $n = k^4/L^3$ и n'.

3. Рассмотрим задачу о движении двух тел, A_1 и A_2, со сравнительно малыми массами m_1 и m_2 вокруг центрального тела S с массой $m_0=1$ (например, двух планет вокруг Солнца или двух спутников вокруг центральной планеты) с учетом взаимных возмущений между A_1 и A_2. Пусть при этом A_1 находится ближе к S, чем A_2.

Используем систему координат Якоби, относя движение тела A_1 (более близкого к S) к системе координат с началом в S, а движение тела A_2 — к системе координат с началом в центре масс C тел S и A_1 (см. [9]). Уравнения движения запишем в так называемой второй системе канонических элементов Пуанкаре (см. [9, 31]) L_s, $\xi_s, \ldots$ $(s=1, 2)$, но для удобства выделения в возмущающей функции членов различного порядка относительно малых масс несколько видоизменим эти переменные А именно, положим $m_1=\mu\overline{m}_1$, $m_2=\mu\overline{m}_2$, где μ — малый параметр (играющий роль масштабного множителя), и разделим переменные L_1, L_2, а также гамильтониан системы на μ. Тогда эти переменные (мы сохраним за ними те же обозначения L_s, $\xi_s, \ldots$) выразятся через $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$ и обычные оскулирующие элементы орбит a, e, i, π, Ω по формулам

$$\left\{\begin{array}{l} L_s=\beta_s\sqrt{a_s}, \quad \lambda_s=l_s+\pi_s \text{ — средняя долгота}, \\ \xi_s=\sqrt{2L_s(1-\sqrt{1-e_s^2})}\cos\pi_s, \\ \eta_s=-\sqrt{2L_s(1-\sqrt{1-e_s^2})}\sin\pi_s, \\ p_s=\sqrt{2L_s\sqrt{1-e_s^2}(1-\cos i_s)}\cos\Omega_s, \\ q_s=-\sqrt{2L_s\sqrt{1-e_s^2}(1-\cos i_s)}\sin\Omega_s \end{array}\right. \tag{13.60}$$

$$(s=1,\ 2),$$

где

$$\beta_1=\frac{k\overline{m}_1}{\sqrt{1+\mu\overline{m}_1}}, \quad \beta_2=k\overline{m}_2\sqrt{\frac{1+\mu\overline{m}_1}{1+\mu\overline{m}_1+\mu\overline{m}_2}},$$

k — постоянная Гаусса. При этом в соответствии с характером координат Якоби элементы a_1, $e_1, \ldots$ определяют оскулирующую орбиту тела A_1 относительно S, а элементы a_2, $e_2, \ldots$ — орбиту тела A_2 относительно центра масс C.

Уравнения движения имеют обычную каноническую форму:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dL_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \lambda_s}, \quad \frac{d\lambda_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial L_s}, \\ &\frac{d\xi_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \eta_s}, \quad \frac{d\eta_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \xi_s}, \\ &\frac{dp_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \frac{dq_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_s}. \end{aligned}\right. \tag{13.61}$$

Гамильтониан этой системы может быть записан в виде

$$H(L_1, \ldots, q_2)=H_0(L_1, L_2)+H_1(L_1, \ldots, q_2), \tag{13.62}$$

где

$$H_0=-\frac{k^4\overline{m}_1}{2(1+\mu\overline{m}_1)L_1^2}-\frac{k^4\overline{m}_2^3(1+\mu m_1)}{2(1+\mu\overline{m}_1+\mu\overline{m}_2)L_2^2}=$$

$$=-\frac{k^2\overline{m}_1}{2a_1}-\frac{k^2\overline{m}_2}{2a_2}, \tag{13.63}$$

а точное выражение для возмущающей функции H_1 — следующее:

$$H_1=-k^2\left(\mu\frac{\overline{m}_1\overline{m}_2}{\Delta}+\frac{\overline{m}_2}{r_2}-\frac{\overline{m}_2}{\varrho_2}\right), \tag{13.64}$$

причем через Δ, r_2, ϱ_2 обозначаются текущие расстояния P_1P_2, SP_2, CP_2 соответственно (рис. 12).

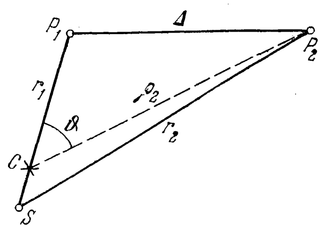

Рис. 12.

Из треугольника CSP_2, в котором $SC=\dfrac{m_1}{1+m_1}r_1$, $r_1=SP_1$, имеем

$$r_2^2=\frac{m_1^2}{(1+m_1)^2}r_1^2+\varrho_2^2-\frac{2m_1}{1+m_1}r_1\varrho_2\cos(180^\circ-\theta), \tag{13.65}$$

где θ — угол между направлениями CP_1 и CP_2. Тогда

$$\frac{1}{r_2}-\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{\varrho_2}\left[\left(1+\frac{2m_1}{1+m_1}\frac{r_1}{\varrho_2}\cos\theta+\frac{m_1^2}{(1+m_1)^2}\frac{r_1^2}{\varrho_2^2}\right)^{1/2}-1\right]. \tag{13.66}$$

Следовательно, можно переписать выражение (13.64) для H_1 в виде

$$H_1=-k^2\mu\left(\frac{\overline{m}_1\overline{m}_2}{\Delta}-\frac{\overline{m}_1\overline{m}_2}{\varrho_2^2}r_1\cos\theta\right)+H_1'', \tag{13.67}$$

где

$$H_1''=-\frac{k^2\overline{m}_2}{\varrho_2}\left[\left(1+\frac{2\mu\overline{m}_1}{1+m_1}\frac{r_1}{\varrho_2}\cos\theta+\frac{\mu^2\overline{m}_1^2}{(1+m_1)^2}\frac{r_1^2}{\varrho_2^2}\right)^{-1/2}-\right.$$
$$\left.-1-\frac{\mu\overline{m}_1}{\varrho^2}r_1\cos\theta\right], \tag{13.67*}$$

так что H_1'' имеет второй порядок малости относительно μ. Обычно в задачах небесной механики о движении двух планет вокруг Солнца (или двух спутников вокруг центральной планеты) пренебрегают в возмущающей функции H_1 членами выше первого порядка малости относительно возмущающих масс и принимают для H_1 выражение (13.67) при $H_1''=0$. Мы поступим так же, ибо это не влияет на выводы качественного характера о существовании условно-периодических решений в таких задачах. Но надо заметить, что при построении как можно более точных решений в указанных задачах подобное упрощение возмущающей функции не является целесообразным или необходимым, особенно, если иметь в виду использование электронных вычислительных машин.

Разложение функции H_1 (при $H_1''=0$) может быть получено [9], [31] в виде

$$H_1=\sum_{|k_1|+|k_2|\geqslant 0}[A^{(k_1,k_2)}\cos(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2)+$$
$$+B^{(k_1,k_2)}\sin(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2)], \tag{13.68}$$

где $A^{(k,k_2)}$, $B^{(k_1,k_2)}$ — ряды по степеням переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, q_2$, причем A содержат лишь четные, а

$B^{(k_1, k_2)}$ — лишь нечетные члены относительно η_1, η_2, q_1, q_2 (см. [31], г. IV). Коэффициенты этих рядов являются функциями L_1 и L_2.

Вековая часть функции H_1 по отношению к «быстрым» переменным λ_1, λ_2 равна

$$\overline{H}_1 = A^{(0,0)}(L_1, L_2, \xi, \ldots, q_2), \tag{13.69}$$

где $A^{(0,0)}$ — четный ряд относительно каждой из пар переменных (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2), (p_1, p_2), (q_1, q_2). С точностью до членов второго порядка относительно $\xi_1, \ldots, q_2$ разложение для $\overline{H}_1$ выписано в [9]:

$$\overline{H}_1 = -k^2\mu\left[\frac{1}{2}A_0^{(0)} + \frac{1}{8}B^{(1)}\left(\frac{\xi_1^2+\eta_1^2}{L_1} + \frac{\xi_2^2+\eta_2^2}{L_2}\right) - \right.$$
$$- \frac{1}{4}B^{(2)}\left(\frac{\xi_1\xi_2}{\sqrt{L_1L_2}} + \frac{\eta_1\eta_2}{\sqrt{L_1L_2}}\right) -$$
$$\left. - \frac{1}{8}B^{(1)}\left(\frac{p_1^2+q_1^2}{L_1} + \frac{p_2^2+q_2^2}{L_2} - \frac{2(p_1p_2+q_1q_2)}{\sqrt{L_1L_2}}\right)\right], \tag{13.70}$$

где $A^{(0)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ зависят от a_1, a_2 и не зависят от $\xi_1, \xi_2, \ldots, q_2$, $\alpha = a_1/a_2$ (или $\alpha = a_2/a_1$). В [32] разложение для $\overline{H}_1$ выписано как функция оскулирующих элементов a_s, e_s, i_s с точностью до членов шестого порядка относительно e_s, i_s. Принципиально несложно преобразовать это разложение к виду (13.69).

Если обозначить через x_0, y_0, x_1, y_1 векторы (L_1, L_2), (λ_1, λ_2), (ξ_1, ξ_2, p_1, p_2), $(\eta_1, \eta_2, q_1, q_2)$ соответственно, а через x, y — векторы (x_0, x_1), (y_0, y_1), то система (13.61) запишется в виде (12.01):

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}, \tag{13.71}$$

где гамильтониан H определяется формулами (12.03), (12.04*), т. е.

$$H(x, y) = H_{00}(x_0) + \mu\overline{H}_1(x_0, x_1, y_1) + \mu\widetilde{H}_1(x, y), \tag{13.72}$$

$$\overline{H}_1 = \overline{H}_{10} + \overline{H}_{12} + \overline{H}_{14} + \ldots, \tag{13.73}$$

где $\overline{H}_{1m}$ — однородные формы m-й степени относительно x_1, y_1 с коэффициентами, зависящими от x_0, а $\widetilde{H}_1$ — чисто периодическая функция по отношению к быстрой угловой переменной y_0.

Известно (см., например, [9]), что система (12.05), т. е. система

$$\frac{dx_1}{dt} = -\mu \frac{\partial \overline{H}_{12}}{\partial y_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial \overline{H}_{12}}{\partial x_1} \tag{13.74}$$

в случае планетной или аналогичной спутниковой задачи имеет чисто тригонометрическое решение. Проверка остальных условий, при которых применимы все результаты гл. XII, также не встречается с принципиальными трудностями (для плоской задачи это сделано в несколько иной форме в [18]). Таким образом, в этой задаче можно прийти к выводу о существовании при достаточно малых μ условно-периодических решений для большинства начальных значений L_s, ξ_s, η_s, p_s, q_1 в некоторой области. Более подробно на требованиях, накладываемых на начальные значения эксцентриситетов и наклонностей, мы останавливаться здесь не будем (краткие указания о них имеются в [18]).

Заметим также, что в случае задачи о движении n планет вокруг S мы приходит к аналогичным уравнениям (см. [9]) и к аналогичному анализу (ряд интересных замечаний и указаний имеется также в [18]).

ГЛАВА XIV

УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 14.1. Условно-периодические решения дифференциальных уравнений на торе

После работ А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда появился целый ряд работ других авторов, посвященных существованию и построению условно-периодических решений дифференциальных уравнений [33—47]. Мы остановимся главным образом на наиболее интересных в теоретическом отношении результатах Ю. Мозера (см. [35, 36]).

1. Пусть дана система (в векторной форме) дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\omega+f(x), \tag{14.01}$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — вектор угловых переменных, $f(x)$ — вещественная аналитическая вектор-функция x с периодом 2π по всем компонентам $x_1, \ldots, x_n$, а $\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — постоянный вектор. Предполагается, что числа $\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_n$ рационально независимы и удовлетворяют неравенству

$$|(k,\ \omega)|^{-1} \leqslant c_0\|k\|^{\tau}, \quad \tau > n-1, \qquad (14.02$$

где $k=(k_1, \ldots, k_n)$ — произвольный вектор с целочисленными компонентами и c_0 — некоторая положительная постоянная, не зависящая от $\|k\|$ и τ. (Это — несколько более слабое ограничение, накладываемое на ω, чем использовавшееся в § 6.6).

Если рассмотреть область изменения ω, ограниченную кусочно-гладкой поверхностью, то согласно теории вещественных чисел «большинство» (по мере Лебега) точек ω удовлетворяет неравенству (14.02).

Пусть $f(x)$ в области

$$D_0(\|\mathrm{Im}\, x\| < s_0 = h < 1) \tag{14.03}$$

удовлетворяет оценке

$$\|f(x)\| < M, \tag{14.04}$$

где M — некоторое число. Справедлива (см. [35])

Теорема 1. *Если число M в* (14.04) *достаточно мало, причем*

$$M < C^* h^{\sigma+1}, \quad \sigma = \tau + 1 > n\ ^{*}), \tag{14.05}$$

где постоянная C^* мала и зависят от n, τ, c_0, то существует постоянный вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и преобразование

$$x = \xi + u(\xi), \tag{14.06}$$

где $u(\xi)$ — аналитическая и 2π-периодическая функция в области

$$\|\operatorname{Im} \xi\| < \frac{h}{2}, \tag{14.07}$$

которое переводит систему, называемую модифицированной по отношению к (14.01),

$$\frac{dx}{dt} = \omega + f(x) + \lambda, \tag{14.08}$$

в тривиально интегрируемую систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega. \tag{14.09}$$

При этом

$$\|\lambda\| < 2M, \tag{14.10}$$

а функция $u(\xi)$ удовлетворяет в области (14.07) *оценке*

$$\frac{\|u\|}{h} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\| \leqslant c \frac{M}{h^{\sigma+1}}, \tag{14.11}$$

где постоянная c зависит от n, τ, c_0 и не зависит от M и h **).

---

*) Мы будем предполагать σ (а так же и τ) целым числом, хотя вообще это не обязательно.

**) В дальнейших формулах будут встречаться аналогичные, хотя и различные, постоянные. Мы будем их обозначать для простоты записи одной и той же буквой c.

Так как согласно (14.09) $\xi=\xi_0+\omega t$, $\xi_0=\text{const}$, то из этой теоремы вытекает, что вектор-функция

$$x=\xi_0+\omega t+u(\xi_0+\omega t) \tag{14.12}$$

является условно-периодическим решением системы (14.08) с частотным базисом $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

2. Доказательство теоремы 1 достигается с помощью построения бесконечной последовательности однотипных преобразований переменных, обладающей ускоренной сходимостью. Подобный результат был доказан ранее В. И. Арнольдом [14]. Существенным является то, что частотный базис искомого условно-периодического решения фиксируется заранее. Идея такого построения принадлежит А. Н. Колмогорову [19, 20]. Доказательство Мозера видоизменено с целью его использования в случае дифференцируемых (а не аналитических) функций $f(x)$ в правой части (14.01).

Первое преобразование

$$x=V_0x^{(1)}, \quad \lambda^{(1)}=W_0\lambda$$

в упомянутой последовательности определяется формулами

$$\begin{cases} x=x^{(1)}+v^{(1)}(x^{(1)}), \\ \lambda^{(1)}=\lambda+\bar{f}, \end{cases} \tag{14.13}$$

где $\bar{f}$ — «вековая» часть функции $f(x)$, а $v^{(1)}$ является решением (аналитическим) уравнения в частных производных

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^{(1)}}\,\omega=\tilde{f}(x^{(1)}), \tag{14.14}$$

причем $\tilde{f}(x^{(1)})$ — чисто периодическая часть разложения $f(x^{(1)})$ в ряд Фурье.

Если коэффициенты Фурье для $f(x)$ обозначить через γ_k, то

$$v^{(1)}(x^{(1)})=\sum_{\|k\|>0}\frac{\gamma_k}{(k,\,\omega)}\,e^{i(k,\,x^{(1)})}\,. \tag{14.15}$$

С учетом (14.02) и оценок для γ_k, аналогичных (2.02), (2.16), выводятся оценки

$$\|v^{(1)}\| \leqslant c\frac{M}{(s_0-s_1)^\sigma}, \quad \left\|\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x^{(1)}}\right\| \leqslant c\frac{M}{(s_0-s_1)^{\sigma+1}}, \qquad (14.16)$$

$$(\sigma=\tau+1>n)$$

справедливые в области

$$\|\operatorname{Im} x^{(1)}\| < s_1 = \frac{h}{2}(1+2^{-1}). \qquad (14.17)$$

(Напомним, что в этих двух оценках коэффициенты пропорциональности, зависящие от n, τ (или σ), c_0, различны, хотя и обозначаются в соответствии с примечанием на стр. 424 одной буквой c.)

Из (14.04) и (14.13) видно, что

$$\|\lambda-\lambda^{(1)}\| \leqslant M. \qquad (14.18)$$

Уравнение относительно новой переменной $x^{(1)}$ записывается в виде

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = \omega + f^{(1)}(x^{(1)}, \lambda^{(1)}) + \lambda^{(1)}, \qquad (14.19)$$

где функция $f^{(1)}$ зависит от $x^{(1)}$ и $\lambda^{(1)}$. Показывается, что в области (14.17) и при

$$\|\lambda^{(1)}\| < 2M_1, \qquad (14.20)$$

где

$$M_1 = c\frac{M^2}{(s_0-s_1)^{\sigma+1}} = 4^{\sigma+1}c\frac{M^2}{h^{\sigma+1}}, \qquad (14.21)$$

функция $f^{(1)}(x^{(1)}, \lambda^{(1)})$ является аналитической по своим аргументам $x^{(1)}$, $\lambda^{(1)}$ и удовлетворяет оценке

$$\|f^{(1)}(x^{(1)}, \lambda^{(1)})\| < M_1. \qquad (14.22)$$

Уравнение (14.19) отличается от первоначального уравнения (14.08) лишь тем, что функция $f^{(1)}$ зависит не только от $x^{(1)}$, но также и от параметра $\lambda^{(1)}$ (причем аналитически). Поэтому дальнейшие преобразования, применяющиеся к уравнению (14.19), а также к последующим уравнениям, аналогичны. Любое из этих уравнений можно записать в виде

$$\frac{dx^{(k)}}{dt}=\omega+f^{(k)}(x^{(k)},\ \lambda^{(k)})+\lambda^{(k)}\quad (k=1,\,2,\,3,\,\ldots), \tag{14.23}$$

где в области

$$\|\operatorname{Im} x^{(k)}\|<s_k=\frac{h}{2}(1+2^{-k}),\quad \|\lambda^{(k)}\|<2M_k \tag{14.24}$$

имеет место оценка

$$\|f^{(k)}\|<M_k. \tag{14.25}$$

Преобразование $x^{(k)}=V_k x^{(k+1)}$, $\lambda^{(k+1)}=W_k\lambda^{(k)}$ определяется формулами

$$\begin{gathered} x^{(k)}=x^{(k+1)}+v^{(k+1)}(x^{(k+1)},\ \lambda^{(k+1)}),\\ \lambda^{(k+1)}=\lambda^{(k)}+\bar{f}^{(k)}(\lambda^{(k)}), \end{gathered} \tag{14.26}$$

где функция $v^{(k+1)}$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial x^{(k+1)}}\omega=\tilde{f}^{(k)}(x^{(k+1)},\ \lambda^{(k)}), \tag{14.27}$$

а $\bar{f}^{(k)}$, $\tilde{f}^{(k)}$ — «вековая» и чисто периодическая части разложения функции $f^{(k)}$ в ряд Фурье. Решение уравнения (14.27) записывается в виде, аналогичном (14.15). Явная зависимость $v^{(k+1)}$ от $\lambda^{(k+1)}$ может быть отражена, если выразить из (14.26) $\lambda^{(k)}$ явно через $\lambda^{(k+1)}$.

В области

$$\|\operatorname{Im} x^{(k+1)}\|<s_{k+1},\quad \|\lambda^{(k+1)}\|<2M_{k+1}, \tag{14.28}$$

где

$$s_{k+1}=\frac{h}{2}(1+2^{-k+1}),$$

$$M_{k+1}=c\,\frac{M_k^2}{(s_k-s_{k+1})^{\sigma+1}}=4^{\sigma+1}\cdot 2^{k\,(\sigma+1)}c\,\frac{M_k^2}{h^{\sigma+1}}, \tag{14.28*}$$

функция $v^{(k+1)}(x^{(k+1)},\ \lambda^{(k+1)})$ является аналитической по своим аргументам. Кроме того,

$$\|v^{(k+1)}\|\leqslant c\,\frac{M^k}{(s_k-s_{k+1})^{\sigma}},\quad \left\|\frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial x^{(k+1)}}\right\|\leqslant c\,\frac{M_k}{(s_k-s_{k+1})^{\sigma+1}}. \tag{14.29}$$

В уравнении относительно новой переменной $x^{(k+1)}$

$$\frac{dx^{(k+1)}}{dt}=\omega+f^{(k+1)}(x^{(k+1)},\ \lambda^{(k+1)})+\lambda^{(k+1)} \tag{14.30}$$

функция $f^{(k+1)}$ в области (14.28) является аналитической по своим аргументам, причем имеет место оценка, аналогичная (14.25),

$$\|f^{(k+1)}\|<M_{k+1}. \tag{14.31}$$

Можно показать, что если $M/h^{\sigma+1}$ достаточно мало́ и $k\to\infty$, то $\|f^{(k)}\|\to 0$, $s_k\to h/2$. При надлежащем выборе λ также и $\|\lambda^{(k)}\|\to 0$, а последовательность преобразований (14.26) сходится. Отсюда и вытекает существование преобразования

$$\begin{aligned} x&=\lim_{k\to\infty}(x^{(k)}+u^{(k)}(x^{(k)},\ \lambda^{(k)}))=\xi+u(\xi,\ 0),\\ \lambda&=\lim_{k\to\infty}(\lambda^{(k)}+w^{(k)}(\lambda^{(k)}))=w(0), \end{aligned} \tag{14.32}$$

связывающего непосредственно x, λ с «предельной» переменной $x^{(\infty)}=\xi$ и с $\lambda^{(\infty)}=0$ и приводящего уравнение (14.08) к виду (14.09). При этом в области $\|\operatorname{Im}\xi\|<h/2$ функция $u(\xi,\ 0)$ является аналитической по ξ и

$$\begin{gathered} \|w\|<2M,\\ \|u\|\leqslant c\frac{M}{h^{\sigma}},\quad \left\|\frac{\partial u}{\partial\xi}\right\|\leqslant c\frac{M}{h^{\sigma+1}}, \end{gathered} \tag{14.33}$$

что соответствует оценкам (14.10), (14.11) в условии теоремы 1.

Заметим также (см. замечание к лемме 9 гл. II), что

$$\left\|\left(I+\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^{-1}\right\|\leqslant\frac{1}{1-\beta}, \tag{14.34}$$

где I — единичная матрица и число β такое, что

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial\xi}\right\|\leqslant\beta.$$

При достаточно малом M норма $\|\partial u/\partial\xi\|$ также мала. Следовательно, норма матрицы $(I+\partial u/\partial\xi)^{-1}$ оценивается сверху числом, тем менее отличающимся от единицы, чем меньше M.

3. Пусть функция $f(x)$ в правой части первоначального уравнения (14.01) зависит от малого параметра ε,

причем аналитически, и обращается в нуль вместе с ε, т. е. пусть это уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=\omega+\varepsilon f(x, \varepsilon), \tag{14.35}$$

где f — аналитическая функция x, ε в некоторой области. Модифицированное уравнение (14.08) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt}=\omega+\varepsilon f(x, \varepsilon)+\lambda. \tag{14.36}$$

Тогда теорему 1 можно переформулировать следующим образом:

Пусть в области $\|\operatorname{Im} x\|<h<1$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, *функция* $f(x, \varepsilon)$ *является аналитической по своим аргументам, периодической по компонентам вектора* x *с периодом* 2π *и удовлетворяет оценке*

$$\|f(x, \varepsilon)\|\leqslant 1, \tag{14.37}$$

и пусть вектор ω *удовлетворяет оценке* (14.02). *Тогда, если* ε *не превосходит по модулю некоторого предела* ε^* ..., *то существует аналитическая функция* $\lambda(\varepsilon)$, *причем* $\lambda(0)=0$, *и преобразование*

$$x=\xi+u(\xi, \varepsilon), \tag{14.38}$$

аналитическое по ξ, ε *в области* $\|\operatorname{Im}\xi\|<\frac{h}{2}$, $|\varepsilon|<\varepsilon^*$, *которое переводит модифицированное уравнение* (14.36) *при* $\lambda=\lambda(\varepsilon)$ *в уравнение*

$$\frac{d\xi}{dt}=\omega.$$

При этом для $\lambda(\varepsilon)$, $u(\xi, \varepsilon)$ *выполняются оценки, аналогичные* (14.10), (14.11), *где* M *надо заменить на* ε.

Справедливость этого результата вытекает из того факта, что каждое преобразование вида (14.26) и правые части уравнений вида (14.23) являются аналитическими по своим аргументам при достаточно малом ε. Сходимость же последовательности преобразований (14.26) равномерна по ε в некотором интервале $0<\varepsilon<\varepsilon^*$. Отсюда вытекает аналитичность по ε предельного преобразования вида (14.32).

4. Ю. Мозер распространил результаты, формулируемые в теореме 1, на случай лишь дифференцируемой

(а не аналитической) правой части исходного уравнения (14.01). Впервые им это было сделано в [34], где применялась так называемая техника сглаживания. При этом функция $f(x)$, предполагаемая дифференцируемой, например, r раз, заменяется бесконечно дифференцируемой функцией, а именно, тригонометрическим полиномом порядка N, а остаток $R_N f$ относится к членам, которые входят в правую часть преобразованного уравнения (14.19). В этом новом уравнении функция $f^{(1)}$ опять заменяется тригонометрическим полиномом, но уже другого порядка N_1, а остаток $R_{N_1} f^{(1)}$ включается в уравнение следующего приближения и т. д. На каждом шаге происходит при этом так называемая «потеря гладкости» правой части уравнения, т. е. вообще функция $f^{(1)}$ дифференцируема меньшее число раз, чем f, функция $f^{(2)}$ — меньшее число раз, чем $f^{(1)}$ и т. д. Если r достаточно велико, то удается так подобрать порядки полиномов $N, N_1, N_2, \ldots$, что последовательность преобразований вида (14.26) сходится. В [34] получено, что надо положить $r \geqslant 333$.

В [40] А. М. Самойленко применил аналогичную технику сглаживания, и доказательство аналогичного результата получено при $r \geqslant 65+32n$ (n — порядок исходной системы уравнений).

В [35] Мозер применил другую технику сглаживания. При этом функции, имеющие конечное число производных, аппроксимируются аналитическими функциями, точнее говоря, пределами последовательностей тригонометрических полиномов. Используется следующая лемма из теории приближения функций [48].

Лемма. *Любая n-мерная вещественная вектор-функция $f(x)$, дифференцируемая r раз, т. е. принадлежащая функциональному пространству C^r, может быть представлена при вещественных x как предел*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x), \tag{14.39}$$

где $f_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ — аналитические функции, удовлетворяющие при $\|\operatorname{Im} x\| < h_k = 4^{-k}$ неравенству

$$\|f_{k+1}(x) - f_k(x)\| \leqslant c\|f\|_r h_{k+1}^r \quad (k=0,1,2,\ldots), \tag{14.40}$$

причем $f_0=0$, постоянная c зависит только от r и n, а че-

рез $\|f\|_r$ *обозначена наибольшая из норм всех производных функций* $f(x)$ *порядка* $\leqslant r$.

Наоборот, если вещественная функция $f(x)$ *допускает аппроксимацию* (14.39) *аналитическими функциями* $f_k(x)$ *и при* $\|\operatorname{Im} x\| < h_k = 4^{-k}$ *имеем*

$$\|f_{k+1}(x) - f_k(x)\| \leqslant A h_{k+1}^r \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\ f_0 = 0,$$

где A *не зависит от* h_k, *то*

$$f(x) \in C^r, \quad \|f(x)\|_r \leqslant c' A, \tag{14.40*}$$

причем постоянная c' *зависит только от* r *и* n.

В качестве аппроксимирующих функций, удовлетворяющих условиям (14.39), (14.40) леммы, Мозер выбирает тригонометрические полиномы

$$f_k(x) = P_{N_k}(x) = \sum_{\|j\| < N_k} a_j e^{i(j,\, x)} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{14.41}$$

причем $N_k = 4^k = h_k^{-1}$.

Уравнению (14.01) ставится в соответствие бесконечная последовательность уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \omega + f_k(x) + \lambda_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{14.42}$$

каждое из которых рассматривается в области D_k ($\|\operatorname{Im} x\| < h_k$). При каждом k к такому уравнению применима в силу аналитичности $f_k(x)$ теорема 1. По этой теореме существует аналитическое преобразование

$$x = \xi + U_k(\xi) \quad (U_0 = 0), \tag{14.43}$$

переводящее каждое из уравнений (14.42) при соответствующем λ_k в уравнение $d\xi/dt = \omega$.

Детальный анализ показывает, что существование таких преобразований гарантируется при достаточно малых $\|f_k\|_r$, а сходимость их при $k \to \infty$ гарантируется для вещественных ξ, если $r - \sigma \geqslant 1$, где σ — показатель, входящий в оценку (14.05) теоремы 1. При этом функции $U_k(\xi)$ по норме также малы и, кроме того, имеет место оценка

$$\|U_{k+1} - U_k\| \leqslant \frac{c}{h^\sigma} \left\| \left(I + \frac{\partial U_k}{\partial \xi} \right)^{-1} \right\| \cdot \|f_{k+1} - f_k\|. \tag{14.44}$$

При достаточно малых $\|f_k\|_r$ норма

$$\left\|\left(I+\frac{\partial U_k}{\partial \xi}\right)^{-1}\right\|$$

мало отличается от единицы (см. замечание в конце п. 2), а к $\|f_{k+1}-f_k\|$ применима оценка (14.40). Следовательно,

$$\|U_{k+1}-U_k\| \leqslant c\|f_k\|_r h_{k+1}^{r-\sigma}. \tag{14.45}$$

В соответствии со второй частью леммы предельная функция

$$U^*(\xi)=\lim_{k\to\infty} U_k(\xi)$$

принадлежит функциональному пространству $C^{r-\sigma}$, т. е. дифференцируема $r-\sigma$, если σ — целое. Из (14.45) вытекают также соответствующие оценки для U^+.

Не останавливаясь на других деталях доказательства, приведем формулировку окончательной теоремы.

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (14.01) ω *удовлетворяет оценке* (14.02), *а функция* $f(x)$ *принадлежит пространству* C^r, *причем* r — *целое и* $r \geqslant \tau+2>n+1$. *Тогда найдется такое достаточно малое число* $\delta>0$, *что при*

$$\|f(x)\|_r<\delta \tag{14.46}$$

существует постоянная λ *и преобразование*

$$x=\xi+u(\xi), \tag{14.47}$$

переводящее модифицированное уравнение (14.08) *в уравнение*

$$\frac{d\xi}{dt}=\omega.$$

При этом гарантируется, что $u(\xi)\in G^{r-\sigma}$, $\sigma=\tau+1$ *и*

$$\|u\|_{r-\sigma}<c\delta, \quad \|\lambda\|<c\delta, \tag{14.48}$$

где постоянная c *зависит только от* c_0, τ, r, n.

Таким образом, функция $u(\xi)$ по сравнению с $f(x)$ теряет $\tau+1$ производных. Положив $\tau=n$, получим, что для существования условно-периодического решения уравнения (14.08) достаточно, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой $n+2$ или бо́льшее число раз.

5. Изложенные в этой главе результаты обладают с практической точки зрения тем недостатком, что доказывается существование и указывается путь построения условно-периодического решения не заданных уравнений (14.01) или (14.35), а близких к ним модифицированных уравнений (14.08) или (14.36). Кроме того, частотный базис $\omega_1, \ldots, \omega_n$ искомого решения заранее фиксируется. Но как быть, если мы хотим найти условно-периодическое решение именно заданного уравнения, например,

$$\frac{dx}{dt} = a + f(x), \tag{14.49}$$

где постоянный вектор a и достаточно малая по норме вектор-функция $f(x)$ заданы?

Вообще, тогда можно было бы записать модифицированное уравнение в виде

$$\frac{dx}{dt} = \omega + f(x) + \lambda, \tag{14.50}$$

где ω и λ — буквенные параметры. Применяя указанную в этой главе методику последовательных замен переменных

$$x \to x^{(1)} \to x^{(2)} \to \ldots,$$

мы найдем приближенно (остановившись на каком-то шаге) выражение [см. (14.12), (14.32)] для параметра λ, зависящее от ω и коэффициентов разложения функции $f(x)$,

$$\lambda = \lambda(\omega), \tag{14.51}$$

и выражение для условно-периодического решения уравнения (14.50)

$$x = \omega t + b + u(\omega t + b, \omega), \tag{14.52}$$

где b — произвольная постоянная. Если ω удовлетворяет соотношению

$$a = \omega + \lambda(\omega), \tag{14.53}$$

то (14.52) представит условно-периодическое решение именно исходного уравнения (14.49), так что можно рассматривать (14.53) как уравнение относительно ω. Однако это уравнение имеет сложную структуру, так как функция $\lambda(\omega)$, которая строится путем последовательных подстановок в $f(x)$ выражений вида (14.15), обладает бесконечным числом разрывов в как угодно малой окрестности любой точки ω. Поэтому вообще открыт вопрос о возможности непосредственного решения уравнения (14.53) при заданном a.

По-видимому, возможен аналогичный изложенному в гл. III—VI путь составления последовательности уравнений вида (14.50) и (14.53), так что на каждом шаге функция $\lambda(\omega)$ непрерывна по ω в некоторой области, и находится последовательность значений $\omega_1, \omega_2, \ldots$, стремящихся к пределу, который удовлетворяет точному предельному соотношению (14.53). Заметим, что если в функцию f входит малый параметр ε, как это имеет место в случае уравнения (14.35), то ω не будет аналитической функцией ε.

§ 14.2. Условно-периодические решения неканонических систем более общего вида

1. В работе Мозера [36] рассматривается система уравнений достаточно общего вида, характерная для задач теории нелинейных колебаний, в которых выделены группы угловых и позиционных переменных, а именно, система

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega + \varepsilon f(x, y, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= \Omega y + \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{aligned}\right. \tag{14.54}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор угловых переменных, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — вектор позиционных переменных, f и g — аналитические функции своих аргументов в некоторой области, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — постоянный вектор, Ω — постоянная квадратная матрица m-го порядка, приводимая к диагональному виду. Область D аналитичности функций f, g может быть задана неравенствами

$$\|\operatorname{Im} x\| < r, \quad \|y\| < s, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0, \tag{14.55}$$

где $r (\leqslant 1)$, s, ε_0 — некоторые числа.

Предполагается также, что вектор ω и собственные значения $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ — матрицы Ω — удовлетворяют условию

$$|i(j, \omega)+\Omega_s-\chi\Omega_\sigma| \geqslant \gamma(\|j\|^\tau+1)^{-1}, \tag{14.56}$$
$$\tau > n-1, \quad 0<\gamma<1 \quad (i=\sqrt{-1}),$$

где $j=(j_1, \ldots, j_n)$ — произвольный вектор с целочисленными компонентами, не равными одновременно нулю, Ω_s и Ω_σ — любые из чисел $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, а χ равно нулю или единице.

Условие (14.56) означает, что вещественные части чисел $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ могут быть любыми, а чисто мнимые части этих чисел вместе с $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально независимы. Наряду с (14.54) рассматривается модифицированная система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\omega+\varepsilon f(x, y, \varepsilon)+\lambda, \\ \dfrac{dy}{dt}=\Omega y+\varepsilon g(x, y, \varepsilon)+My+\mu, \end{cases} \tag{14.57}$$

где λ — n-мерный постоянный вектор, μ — m-мерный постоянный вектор и M — постоянная квадратная матрица m-го порядка, удовлетворяющие условиям

$$\Omega\mu=0, \quad \Omega M=M\Omega. \tag{14.58}$$

Окончательный результат состоит в доказательстве утверждения, что при значениях ε, не превосходящих некоторого предела, существуют однозначно определяемые функции $\lambda(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, $M(\varepsilon)$ [причем $\lambda(0)=\mu(0)=0$] и преобразование

$$\begin{cases} x=\xi+\varepsilon u(\xi, \varepsilon), \\ y=\eta+\varepsilon[v_0(\xi, \varepsilon)+V(\xi, \varepsilon)\eta], \end{cases} \tag{14.59}$$

аналитическое по ξ, ε (и линейное по η), переводящее (14.57) при $\lambda=\lambda(\varepsilon)$, $\mu=\mu(\varepsilon)$, $M=M(\varepsilon)$ в систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt}=\omega+\varphi, \\ \dfrac{d\eta}{dt}=\Omega\eta+\psi, \end{cases} \tag{14.60}$$

где φ, ψ — аналитические функции ξ, η, ε такие, что

$$\varphi=\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0 \quad \text{при } \eta=0. \tag{14.61}$$

Система (14.60) обладает условно-периодическим решением

$$\begin{cases} \xi=\omega t+\mathrm{const}, \\ \eta=0 \end{cases} \tag{14.62}$$

с частотным базисом $\omega_1, \ldots, \omega_n$, а формулы

$$\begin{cases} x=\omega t+\mathrm{const}+\varepsilon u(\omega t+\mathrm{const},\ \varepsilon), \\ y=\varepsilon v_0(\omega t+\mathrm{const},\ \varepsilon) \end{cases} \tag{14.63}$$

определяют условно-периодическое решение системы (14.57) с этим же частотным базисом.

2. Преобразование (14.59) может быть представлено как предел бесконечной последовательности замен переменных того же типа, что и в предыдущем параграфе.

Пусть после $k \geqslant 1$ преобразований

$$(x,\ y)\to(x^{(1)},\ y^{(1)})\to\ldots\to(x^{(k)},\ y^{(k)})$$

получены уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{dx^{(k)}}{dt}=\omega+\varepsilon f^{(k)}+\lambda^{(k)}, \\ \dfrac{dy^{(k)}}{dt}=\Omega y^{(k)}+\varepsilon g^{(k)}+\mu^{(k)}+M^{(k)}y^{(k)}, \end{cases} \tag{14.64}$$

где $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ — постоянные векторы, $M^{(k)}$ — постоянная матрица, а функции $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ зависят вообще от $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$, $M^{(k)}$. Тогда $(k+1)$-е преобразование $(x^{(k)},\ y^{(k)})\to$ $\to(x^{(k+1)},\ y^{(k+1)})$ запишется в виде

$$\begin{cases} x^{(k)}=x^{(k+1)}+\varepsilon u^{(k+1)}, \\ y^{(k)}=y^{(k+1)}+\varepsilon\left(v_0^{(k+1)}+V^{(k+1)}y^{(k+1)}\right), \end{cases} \tag{14.65}$$

где вектор-функции $u^{(k+1)}$, $v_0{}^{(k+1)}$ и матрица $V^{(k+1)}$ не зависят от $y^{(k+1)}$ и удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^{(k+1)}}{\partial x^{(k+1)}}\omega=\tilde{f}_0^{(k)}, \\ \dfrac{\partial v_0^{(k+1)}}{\partial x^{(k+1)}}\omega-\Omega v_0^{(k+1)}=\tilde{g}_0^{(k)}, \\ \dfrac{\partial V^{(k+1)}}{\partial x^{(k+1)}}\omega+V^{(k+1)}\Omega-\Omega V^{(k+1)}=\widetilde{\left(\dfrac{\partial g^{(k)}}{\partial y^{(k)}}\right)_0}. \end{cases} \tag{14.66}$$

Правые части этих уравнений, отмеченные символом $\sim$ и нижним индексом «0», представляют собой совокупности чисто периодических членов разложений Фурье для функций $f^{(k)}$, $g^{(k)}$, $\partial g^{(k)}/\partial y^{(k)}$, в которых $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ заменены на $x^{(k+1)}$ и 0 соответственно.

Уравнения относительно новых переменных записываются в виде

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx^{(k+1)}}{dt} &= \omega + \varepsilon f^{(k+1)} + \lambda^{(k+1)}, \\ \frac{dy^{(k+1)}}{dt} &= \Omega y^{(k+1)} + \varepsilon g^{(k+1)} + \mu^{(k+1)} + M^{(k+1)} y^{(k+1)}, \end{aligned}\right. \tag{14.67}$$

где $\lambda^{(k+1)}$, $\mu^{(k+1)}$, $M^{(k+1)}$ определяются по формулам

$$\left\{\begin{aligned} \lambda^{(k+1)} &= \lambda^{(k)} + \bar{f}_0^{(k)}, \\ \mu^{(k+1)} &= \mu^{(k)} + \bar{g}_0^{(k)}, \\ M^{(k+1)} &= M^{(k)} + \left(\overline{\frac{\partial g^{(k)}}{\partial y^{(k)}}}\right)_0, \end{aligned}\right. \tag{14.68}$$

где в правых частях выписаны свободные члены разложений Фурье для тех же функций, что и в (14.66).

Показывается, что если в уравнениях (14.57) положить $\lambda = \lambda(\varepsilon)$, $\mu = \mu(\varepsilon)$, $M = M(\varepsilon)$, где $\lambda(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, $M(\varepsilon)$ — аналитические функции, являющиеся решениями некоторых функциональных уравнений, то при ε, не превосходящих по модулю некоторого предела, последовательность преобразований вида (14.66) обладает ускоренной сходимостью (характерной для ряда типа $\sum \varepsilon^{\alpha^n}$, $\alpha = 3/2$), а в последовательности уравнений (14.64) $\lambda^{(k)} \to 0$, $\mu^{(k)} \to 0$, $M^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда вытекает существование преобразования (14.59).

Одновременно устанавливается, что процесс замены переменных вида (14.65) можно рассматривать лишь как средство для доказательства существования преобразования (14.59) и что можно при желании непосредственно искать это преобразование и функции $\lambda(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, $M(\varepsilon)$ с помощью формальных разложений в степенные ряды по ε. Во всяком случае, если потребовать, чтобы разложения Фурье для функций $u(\xi, \varepsilon)$, $v_0(\xi, \varepsilon)$, $V(\xi, \varepsilon)$ не содержали свободных членов, то преобразование

(14.59), находимое в виде формальных разложений по степеням ε, оказывается тождественно с тем, которое возможно получить при достаточно малых ε с помощью сходящихся построений (14.65).

3. Мозер показал также, что в некоторых случаях дополнительные параметры μ, M в модифицированных уравнениях (14.57) могут быть положены равными нулю. Например, это имеет место для систем вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a(y)+\varepsilon f(x,\ y,\ \varepsilon), \\ \dfrac{dy}{dt}=\varepsilon g(x,\ y,\ \varepsilon), \end{cases} \tag{14.69}$$

где a, f, g — аналитические функции своих аргументов, причем f — четная, а g — нечетная функции угловой переменной x. Именно таковы уравнения в ряде задач небесной механики.

Изложенные в этой главе результаты непосредственно применимы, если и x и y суть n-мерные векторы и

$$\det \frac{\partial a}{\partial y} \neq 0. \tag{14.70}$$

Это условие соответствует рассмотренному в главах III—VII невырожденному случаю для гамильтоновых систем.

Анализ системы (14.69) выполняется следующим образом. Положим

$$y=c+\sqrt{\varepsilon}Y, \tag{14.71}$$

где c — постоянная (пока произвольная), после чего уравнения (14.69) преобразуются к виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a(c)+[a(c+\sqrt{\varepsilon}Y)-a(c)]+ \\ \qquad\qquad\qquad +\varepsilon f(x,\ c+\sqrt{\varepsilon}Y,\ \varepsilon), \\ \dfrac{dY}{dt}=\varepsilon g(x,\ c+\sqrt{\varepsilon}Y,\ \varepsilon) \end{cases} \tag{14.72}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(c) + \bar{\varepsilon} F(x, Y, \bar{\varepsilon}, c), \\ \dfrac{dY}{dt} = \bar{\varepsilon} G(x, Y, \bar{\varepsilon}, c), \quad \bar{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}; \end{cases} \tag{14.73}$$

где F, G — аналитические функции x, Y, $\bar{\varepsilon}$, c.

Зафиксируем вектор $c^0 = (c_1^0, \ldots, c_n^0)$, т. е. точку c^0 в n-мерном пространстве переменных $c_1 \ldots, c_n$ таким образом, что числа $\omega_s = a_s(c^0)$ $(s = 1, \ldots, n)$ были бы рационально независимы и удовлетворяли бы условию (14.56) при $\Omega_1 = \Omega_\sigma = 0$. Если условие (14.70) выполняется, например, в n-мерном шаре $U_R(\|c\| < R_0)$, то большинство (по мере Лебега) точек c внутри этого шара удовлетворяет согласно теории вещественных чисел условию (14.56) (см. § 6.6 и начало этой главы). Вместе с тем такие точки образуют в этом шаре нигде не плотное множество.

Рассмотрим далее наряду с (14.73) модифицированную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \omega + \bar{\varepsilon} F(x, Y, \bar{\varepsilon}, c) + \lambda, \\ \dfrac{dY}{dt} = \bar{\varepsilon} G(x, Y, \bar{\varepsilon}, c), \end{cases} \tag{14.74}$$

где $\omega = a(c^0)$, причем

$$\det \frac{\partial a(c^0)}{\partial c^0} \neq 0,$$

если c выбрано внутри шара U_R.

Для системы (14.74) можно построить преобразование (14.59), функцию $\lambda = \lambda(\bar{\varepsilon}, c)$, аналитическую по $\bar{\varepsilon}$, c, причем $\lambda(0, c) = 0$, и затем условно-периодическое решение (14.63) с частотным базисом $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Соотношение

$$a(c) - \omega - \lambda(\bar{\varepsilon}, c) = 0 \tag{14.75}$$

определяет постоянный вектор c, при котором исходная система (14.73) совпадает с модифицированной системой (14.74) и обладает, следовательно, построенным для

(14.74) условно-периодическим решением. Это соотношение можно рассматривать как уравнение относительно c, которое имеет при $\varepsilon=0$ решение $c=c^0$ (так как $\omega=a(c^0)$, $\lambda(0, c^0)=0$) и для которого якобиан при $\varepsilon=0$, $c=c^0$, сводящийся к

$$\det \frac{\partial a(c^0)}{\partial c^0},$$

отличен от нуля. Следовательно, по теореме о существовании неявной функции это уравнение имеет при достаточно малых ε решение $c = c(\omega, \varepsilon)$, аналитическое по ε.

Отсюда вытекает существование при достаточно малых ε условно-периодических решений исходной системы (14.73), аналитических по ε, для большинства (по мере Лебега) точек $c=(c_1, \ldots, c_n)$ в шаре U_R. Эти точки c не образуют однако нигде в U_R плотное множество.

Заметим, что такой вывод не противоречит результатам Г. А. Мермана [13], а также других авторов о расходимости условно-периодических рядов по степеням малых параметров в задачах небесной механики, так как эти результаты относятся к анализу формальных решений для плотных в себе множеств начальных значений.

Интересны результаты Мозера [36] о существовании условно-периодических решений с меньшим числом базисных частот, чем количество степеней свободы системы. Показано, что при выполнении некоторых условий гамильтонова система с N степенями свободы обладает условно-периодическими решениями с любым числом k базисных частот от $k=2$ до $k=N$.

Эти результаты были применены Мозером и другими авторами [36, русск. перев.], [42, 43] для доказательства существования условно-периодических решений в ограниченной и неограниченной задачах трех тел. В этих работах имеются также указания о построении таких решений с различным числом базисных частот.

В заключение всего изложенного мы, повторяя слова, сказанные во введении, выразим надежду, что эта книга будет способствовать дальнейшему развитию методов усреднения и методов теории условно-периодических решений в небесной механике, особенно в прикладном направлении. Весьма важным является, на наш взгляд, конкретное построение решений для различных схем усреднения в задачах небесной механики, построение в этих задачах условно-периодических решений как в аналитической, так и в полуаналитической форме, а также анализ сходимости получаемых рядов или последовательных приближений. Очень актуальным является применение для этих построений современных вычислительных машин, что представляется совсем не тривиальным. Требуются новые разложения возмущающих функций, разработка алгоритмов, с помощью которых возможно осуществить построение решений, разработка методов аналитического программирования и т. д.

Литература к части II

1. Staude O., Math. Ann. **32**, 1887.
2. Левитан Б. М., Почти-периодические функции, Гостехиздат, 1953.
3. Bruns K., Astron. Nachr. **109, № 2606, 1884.**
4. Silahara R., Publs Astron. Soc. Jap. **3**, **№ 3—4**, 1952.
5. Delaunay C., Théorie du mouvement de la Lune, Paris, 1860.
6. Lindstedt C., Mém. de l'Acad. de St.-Pétersbourg **21**, № 4, 1883.
7. Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1—3, Paris, 1892—1899.
8. Bohlin K., Ueber eine neue Annaherungsmethode in der Störungs-theorie, 1888.
9. Шарлье К., Небесная механика, «Наука», 1966.
10. Брауэр Д., Клеменс Дж., Методы небесной механики, «Мир», 1964.
11. Смарт У. М., Небесная механика, «Мир», 1965.
12. Brown E. W., Mem. Roy. Astron. Soc. **53**, 1897; **54**, 1900; **57**, 1905; **59**, 1908.
13. Мерман Г. А., Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 8, 5—133, 1961.
14. Арнольд В. И., Изв. АН СССР, сер. матем. 25, № 1, 21—86, 1961.
15. Арнольд В. И., Докл. АН СССР, **137**, № 2, 255—257, 1961.
16. Арнольд В. И., Успехи матем. наук **18**, № 5, 13—39, 1963.
17. Арнольд В. И., Докл. АН СССР, **145**, № 3, 487—490, 1960.
18. Арнольд В. И., Успехи матем. наук **18**, № 6, 92—191, 1963.
19. Колмогоров А. Н., Докл. АН СССР, **98**, № 4, 527—530, 1954.
20. Колмогоров А. Н., Общая теория динамических систем и классическая механика. Международный математический конгресс в Амстердаме, Физматгиз, 1961.
21. Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

22. Хинчин А. Я., Цепные дроби, ОНТИ, 1935.
23. Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, Гостехиздат, 1941.
24. Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, ИЛ, 1959.
25. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
26. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы, «Наука», 1964.
27. Рябов Ю. А., Астрон ж. **33**, № 6, 936—952, 1956.
28. Deprit A., Deprit-Bartholome A., Astron. J. **72**, № 2, 73, 1967.
29. Маркеев А. П., Прикл. матем. и механ. **33**, № 1, 412, 1969.
30. Леонтович А. М., Докл. АН СССР **143**, № 3, 525—528, 1962.
31. Пуанкаре А., Лекции по небесной механике, «Наука», 1965.
32. Le Verrier U. J., Ann. Observ. Imperial de Paris, v. I, 1855.
33. Мозер Ю., Сб. перев. «Математика» **6**, № 4, 3—10, 1962.
34. Мозер Ю., Сб. перев. «Математика» **6**, № 5, 51—67, 1962.
35. Moser J., Ann. Scuola Norm. Super. de Pisa, ser. III, **20**, № 2, 265—315; № 3, 499—535, 1966. (Имеется русск. перев.: Успехи матем. наук **23**, № 4, 179—238, 1968).
36. Moser J., Mathem. Ann. **169**, 136—176, 1967. (Имеется русск. перев.: Успехи матем. наук **24**, № 2, 165—211, 1969).
37. Боголюбов Н. Н., Труды Первой летней математической школы, «Наукова думка», Киев, 1964.
38. Митропольский Ю. А., Укр. матем. ж. **16**, № 4, 41—64, 1966.
39. Мельников В. К., Докл. АН СССР **165**, № 6, 1245—1249, 1965.
40. Самойленко А. М., Укр. матем. ж. **18**, № 6, 41—64, 1966.
41. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, «Наукова думка», Киев, 1969.
42. Jeffreys W., Moser J., Astron. J. **7**, 568—578, 1966.
43. Liberman B. B., Differential equations and dynamical systems. New York—London, Acad. Press, 27—34, 1967.
44. Рябов Ю. А., Proc. of the Fourth Conference on nonlinear oscillations, 231—236, Prague, 1968.
45. Толмачев И. Л., кандид. дисс., Универс. дружбы народов, 1970.
46. Гребеников Е. А., Васкан Ф. К., Изв. АН СССР, сер. матем., № 1, 1971.
47. Гребеников Е. А., Васкан Ф. К., Дифференц. уравнения **6**, № 3, 1970.
48. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, «Наука», 1965.

Гребеников Евгений Александрович
Рябов Юрий Александрович

НОВЫЕ КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ
В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

М., 1971 г., 444 стр. с илл.

Редактор *В. Г. Демин*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *Е. А. Белицкая, Н. Д. Дорохова*

Сдано в набор 25/XII 1971 г. Подписано к печати 7/VII 1971 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 13,875. Условн. печ. л. 23,31.
Уч-изд. л. 22,06.
Тираж 2700 экз. Т-09699. Цена книги 2 р. 02 к. Заказ 1691

Издательство «Наука»
Главная редакция
Физико-математической литературы
Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»
Москва Г-99, Шубинский пер. 10

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка или номер формулы	Напечатано	Должно быть
33	1-я снизу	$\sum_{x=1}^{n} x_k y_k$	$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$
54	13-я снизу	$\frac{du}{dt} - \omega(z) -$ $- \mu \overline{Y}(z, u) \Big\|$	$\Big\| \frac{du}{dt} - \omega(z) -$ $- \mu Y(z, u) \Big\|$
66	2-я сверху	Q_m	$Q_{\underline{n}}$
69	1-я снизу	$\varphi_1(p)$	$\varphi_1(\overline{p})$
72	7-я сверху	Во всех слагаемых формулы (1.159)	В равенстве (1.159) $\\| k + r \\| \in I^{\circ}_{2N}$, а
88	(2.02)	$\frac{dy_1}{dt}$	$\frac{dy_s}{dt}$
90	(2.10)	$d \;_{s+1} \ldots dy_n$	$dy_{s+1} \ldots dy_n$
209	2-я снизу	$\\| k \\| \; \overline{N}$	$\\| k \\| \geqslant \overline{N}$
225	(2.36)	$\leqslant \theta \\| dx \\|$	$\leqslant \Theta \\| dx \\|$
273	12-я снизу	$\\| d\Delta^{(0)} \leqslant$	$\\| d\Delta^{(0)} \\| \leqslant$
295	12-я снизу	$\rightarrow \frac{\partial \;\; ^{\infty}}{\partial} ,$	$\rightarrow \frac{\partial H^{\infty}}{\partial P}$
306	5-я снизу	$< \beta_{s-1}$	$< \beta_s$
306	6-я снизу	$+ 3\beta_{s-1}$	$+ 3\beta_s$
343	12-я сверху	$\subseteq F'$	$\subseteq \overline{F}'$

Зак. 1691