ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

для 10 класса

ПРОСВЕЩЕНИЕ 1979

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

для 10 класса

Пособие для учителей

Издание 2-е

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

В. А. ГУСЕВ, Г. Г. МАСЛОВА,
З. А. СКОПЕЦ, М. И. ЯГОДОВСКИЙ

Рекомендовано к изданию
Главным управлением школ
Министерства просвещения СССР

Д44 **Дидактические** материалы по геометрии для 10 класса. 2-е изд. М., «Просвещение», 1979.
95 с. с ил.
На обороте тит. л. авт.: В. А. Гусев, Г. Г. Маслова, З. А. Скопец, М. И. Ягодовский

Д $\frac{60501 - 208}{103(03) - 79}$ инф. письмо 4306020400 513 (07)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дидактические материалы по геометрии включают 25 самостоятельных, 6 контрольных (по четыре варианта в каждой), 25 дополнительных самостоятельных работ (по два варианта в каждой) по курсу геометрии X класса и 14 самостоятельных работ на повторение материала восьмилетней школы и IX класса (по четыре варианта в каждой). Их цель — помочь учителю организовать самостоятельную работу и контроль знаний учащихся.

Для удобства самостоятельные и дополнительные самостоятельные работы к одним и тем же пунктам имеют одинаковую нумерацию. В каждой самостоятельной работе указано, к какому пункту или к каким пунктам она дается. Основное назначение этих работ — обучение учащихся самостоятельному решению задач по только что изученному материалу, его закрепление, а также проведение систематического повторения ранее изученного. Задачи могут быть использованы по усмотрению учителя и в качестве домашних заданий.

1. Так как самостоятельные работы носят обучающий характер, то предполагается, что учитель во время их проведения может консультировать учащихся, рекомендовать, если в этом появится необходимость, прочитать соответствующий материал в учебнике.

Самостоятельные работы приведены практически ко всем пунктам учебника. Но это не означает, что по материалу каждого пункта следует проводить самостоятельную работу. В зависимости от конкретной ситуации (подготовка учащихся, их умение решать задачи) вопрос о проведении самостоятельной работы решает сам учитель.

Выполнение всех самостоятельных работ не является обязательным. Учитель может выбрать по своему усмотрению то или иное задание или даже часть задания.

Самостоятельная работа С-25 дана по материалу «Приложения» и может быть использована для индивидуальных заданий отдельным учащимся.

Самостоятельные работы включают задачи на вычисление, построение, доказательство. Все варианты заданий примерно равноценны по трудности. Время, необходимое для выполнения самостоятельной работы, зависит, во-первых, от того, будет ли предложена для обязательного решения только одна или обе задачи, имеющиеся в большинстве работ. Существенно влияют на время выполнения заданий требования к оформлению решений. Поэтому нужно четко указывать учащимся эти требования, исходя из того, что на уроке, на котором проводится самостоятельная работа, ей следует уделить не более 15—20 минут. Заметим, что эта рекомендация весьма ориентировочна, так как время выполнения одного и того же задания разными учащимися различно.

Рассмотрим некоторые требования к оформлению самостоятельных работ.

Изображение фигур выполняется, как правило, в произвольной параллельной проекции, в некоторых случаях учащиеся могут применить кабинетную или ортогональную проекцию (последнюю, например, при изображении шара и его комбинаций с другими фигурами). Невидимые линии изображаются штриховыми линиями; по соображениям наглядности при изображении комбинаций фигур возможны отступления от этого общего правила.

Рекомендуется систематически обращать внимание на то, чтобы изображение фигур выполнялось в соответствии со свойствами параллельного проектирования. Учитель может допустить выполнение чертежей «от руки», однако в любом случае необходимо добиваться аккуратного их оформления.

При решении задач на построение не следует требовать письменного описания построений: учащиеся могут лишь кратко записать этапы построения, используя символику.

Не следует канонизировать тот или иной способ оформления записи. Учащиеся могут вовсе не записывать этапы построения — это рекомендуется делать в тех случаях, когда правильность выполнения построений может быть проверена по чертежу. Не нужны описания выполнения чертежей к задачам на вычисление и доказательство.

С целью уменьшения времени выполнения работ в некоторых заданиях помещены готовые чертежи (например, С-6 или С-9). В других случаях учащиеся по тексту задачи должны сами составить чертеж и кратко записать данные, а также, что требуется найти или доказать. В отдельных случаях задачи могут быть решены без чертежа (например, С-1, С-2, С-4, С-5, С-13 (задача 1)).

Многие задачи на вычисление, даже если в условии даны конкретные значения величин, рекомендуется сначала решить в общем виде, а затем уже подставить числовые данные. Это упростит запись решения, сделает более удобной его проверку и, наконец, позволит более точно найти числовое значение ответа. В таких случаях в ответах рекомендуется вначале привести выражение искомой величины в общем виде, а затем — ее числовое значение.

При вычислениях учащиеся должны использовать логарифмическую линейку и таблицы; при выполнении действий над приближенными числами (например, в С-13 (задача 1), С-18 и других) пользоваться правилами подсчета верных цифр.

2. В дидактические материалы включены пять контрольных работ по основным темам программы X класса и одна контрольная работа по материалу повторения курса стереометрии. Все варианты контрольных работ примерно одинаковой трудности.

Содержание и число вариантов контрольных работ в соответствии с конкретными условиями (например, при наличии нескольких параллельных классов) может быть изменено по усмотрению учителя. Однако уровень требований, объем и трудность заданий по сравнению с приведенными в контрольных работах этого сборника повышать не следует.

Требования к оформлению контрольных работ такие же, как и для самостоятельных работ.

3. Дополнительные самостоятельные работы составлены также ко всем пунктам учебного пособия. Они могут быть использованы как дополнительные задания для тех, кто справился с основной самостоятельной работой. По усмотрению учителя их можно использовать также и при индивидуальной работе с отдельными учащимися. Однако следует заметить, что трудность выполнения некоторых из этих заданий несколько превышает уровень трудности основных самостоятельных работ.

4. В дидактические материалы включены как отдельный раздел самостоятельные работы на повторение. В некоторых случаях это задачи на повторение свойств и признаков отдельных понятий, в других — это «комплексные» задачи по нескольким разделам программы, нередко изучавшимся в разных классах.

Следует иметь в виду, что варианты 2 и 3 определяют трудность обязательных задач, вариант 1 — несколько легче, а вариант 4 — несколько труднее. Для удобства использования самостоятельных работ ниже приводится их основная тематика.

СП-1 — поворот и центральная симметрия,
СП-2 — осевая симметрия,
СП-3 — действия над векторами,
СП-4 — теорема Фалеса,
СП-5 — построение треугольников,
СП-6 — внутренние и внешние углы многоугольника,
СП-7 — параллелограмм, прямоугольник, трапеция и их площади,
СП-8 — трапеция, площадь трапеции,
СП-9 — метрические соотношения в треугольнике,

СП-10 — окружность и круг,

СП-11 — вписанные углы,

СП-12 — правильные многоугольники,

СП-13 — гомотетия и подобие,

СП-14 — координаты на плоскости и в пространстве, композиция перемещений.

Практически ко всем работам приведены ответы, в некоторых случаях даны указания. При вычислениях были использованы четырехзначные таблицы. Окончательный ответ в задачах с точными данными округлен до трех значащих цифр. Предполагается, что в X классах на уроках геометрии при вычислениях будет систематически использоваться логарифмическая линейка. В этом случае полученные ответы могут несколько отличаться от приведенных в дидактических материалах. Ответы к задачам, данные в которых являются приближенными, округлены в соответствии с правилами подсчета верных цифр.

Иногда приведены ответы и на «легкие» задачи. Это делается в случае, когда есть опасность, что ответы учащихся будут неполными, а иногда и для облегчения работы учителя при проверке выполнения школьниками заданий.

Замечания и пожелания по совершенствованию дидактических материалов просим направлять по адресу: Москва, 129846, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

Авторы

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

С-1

В. 1. 1. $\left(0; \frac{1}{2}; -1\right)$. 2. Нет.

В. 2. 1. $(4; -1; -7)$. 2. Нет.

В. 3. 1. $(5; -1; -1)$. 2. Да.

В. 4. 1. $(-3; 8; 9)$. 2. Нет.

С-2

В. 1. 1. $\sqrt{19} \approx 4{,}36$. 2. $45°$.

В. 2. 1. $\frac{2\sqrt{6}}{9} \approx 0{,}544$. 2. $\sqrt{19} \approx 4{,}36$.

В. 3. 1. $\sqrt{34} \approx 5{,}83$. 2. $60°$.

В. 4. 1. $-\frac{1}{\sqrt{10}} \approx -0{,}316$. 2. $\sqrt{51} \approx 7{,}14$.

С-3

В. 1. 1. $\sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58$. Указание. Воспользуйтесь формулой $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$, где P — середина отрезка MN. 2. $(-1; 0; 1)$. Указание. Центр тяжести пластинки находится в точке G пересечения медиан треугольника ABC. Воспользуйтесь формулой: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

В. 2. 1. $\sqrt{2} \approx 1{,}41$. 2. $(-1; 1; 0)$. Смотрите указание к варианту 1 (задача 2).

В. 3. 1. $\sqrt{5{,}25} \approx 2{,}29$. 2. $(2; -1; 0)$. Смотрите указание к варианту 1 (задача 2).

В. 4. 1. 3. 2. $\left(-1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Смотрите указание к варианту 1 (задача 2).

С-4

В. 1. 1. $x - 3y + 4z + 10 = 0$. Указание. Воспользуйтесь уравнением плоскости: $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$. 2. Плоскость $5x - 3 = 0$ параллельна плоскости Oyz и пересекает ось Ox в точке $(0,6; 0; 0)$.

В. 2. 1. $x - 3y + 2z - 14 = 0$. Указание. В качестве вектора, перпендикулярного плоскости, возьмите $\overrightarrow{OA} = (1; -3; 2)$, затем воспользуйтесь уравнением $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$. 2. $x + 2 = 0$. Указание. Искомая плоскость есть множество точек, имеющих

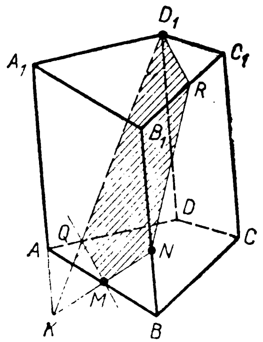


Рис. 1

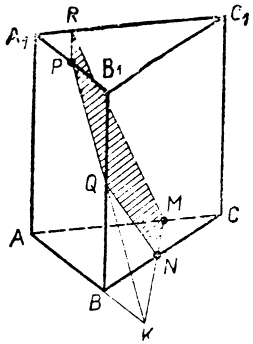


Рис. 2

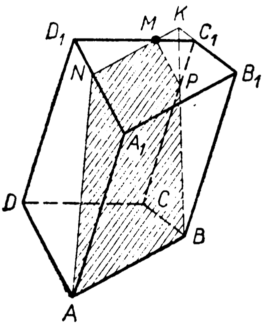


Рис. 3

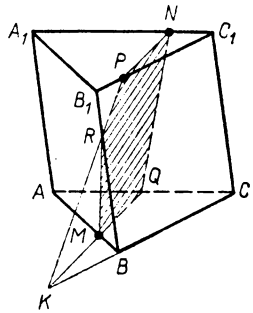


Рис. 4

одну и ту же абсциссу, равную —2. Следовательно, уравнение плоскости: $x = -2$, или $x + 2 = 0$.

В. 3. 1. $-2x + 3z + 5 = 0$. Смотрите указание к задаче 1 варианта 1. 2. Плоскость $2y + 5 = 0$ параллельна плоскости Oxz и пересекает ось Oy в точке $(0; -2{,}5; 0)$.

В. 4. 1. $2y - z - 5 = 0$. 2. $y - 3 = 0$. Смотрите указания к задачам варианта 2.

С-5

В. 1. **1.** $3x - y + 2z - 23 = 0$. **2.** $(1; 1; 3)$. **Указание.** При симметрии относительно плоскости Oxz точка $M(x; y; z)$ отображается на точку $M_1(x; -y; z)$.

В. 2. **1.** $2x + 3y - 6z + 10 = 0$. **2.** $(-3; -1; 2)$. **Указание.** При симметрии относительно оси абсцисс точка $M(x; y; z)$ отображается на точку $M_1(x; -y; -z)$.

В. 3. **1.** $x + 2y - z - 6 = 0$. **2.** $(-2; -1; 3)$. **Указание.** При симметрии относительно плоскости Oyz точка $M(x; y; z)$ отображается на точку $M_1(-x; y; z)$.

В. 4. **1.** $x - 2y - 3z + 1 = 0$. **2.** (1; 2; 3). Указание. При симметрии относительно оси ординат точка $M(x; y; z)$ отображается на точку $M_1(-x; y; -z)$.

С-6

В. 1. См. рис. 1. Указание. Постройте точки $K = (MN) \cap (AA_1)$ и $Q = (KD_1) \cap (AD)$. При построении воспользуйтесь свойством параллельных плоскостей: $(D_1R) \parallel (MQ)$.

В. 2. См. рис. 2.

В. 3. См. рис. 3. Указание. Постройте прямую MN, параллельную (AB).

В. 4. См. рис. 4.

С-7

В. 1. **1.** Указание. Концы M_1 и N_1 искомого отрезка принадлежат соответственно ребрам DD_1 и AA_1, что вытекает из симметричности параллелепипеда относительно точки O.

2. Указание. Пользуясь конгруэнтностью треугольников ACC_1 и BDD_1 (или с помощью тригонометрии), докажите, что $|BD| = |AC|$. Из конгруэнтности треугольников DAB и ADC следует, что $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$.

В. 2. **1.** Указание. Заметьте, что $Z_O(A) = C_1$, $Z_O(B) = D_1$, $Z_O(D) = B_1$. **2.** Указание. Данное пересечение — отрезок, параллельный боковому ребру (смотрите учебное пособие для IX кл., теорема 4). Далее примените теорему о параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости.

В. 3. **1.** Смотрите указание к варианту 1 (задача 1). **2.** Указание. Углы DAB и ABC — линейные углы данных двугранных углов. Из условия следует, что $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$; остается доказать, что $\widehat{DAB} = 90°$.

В. 4. **1.** Смотрите указание к варианту 2 (задача 1). **2.** Указание. Докажите, что углы между диагоналями основания являются линейными углами двугранных углов, образованных плоскостями диагональных сечений. Пользуясь конгруэнтностью треугольников, докажите равенство длин сторон оснований.

С-8

В. 1. $40(3 + \sqrt{3})$ *см*$^2 \approx 189$ *см*^{2}.

В. 2. $8(20 + 3\sqrt{3})$ *см*$^2 \approx 202$ *см*^{2}.

В. 3. ≈ 101 *см*^{2}.

В. 4. 216 *см*^{2}.

С-9

В. 1. **2.** $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\varphi \approx 65°50'$. Указание. Обозначьте длину ребра через m.

1-й способ. Рассмотрим треугольник SMF (рис. 5), где $[MF] \parallel [AC]$, $F \in [BC]$, $|SM| = |SF| = \frac{m\sqrt{3}}{2}$, $|MF| = \frac{1}{2}m\sqrt{2}$ и т. д.

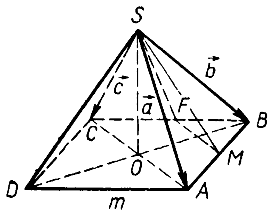


Рис. 5

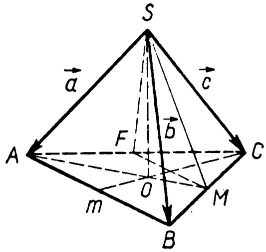


Рис. 6

2-й способ. Обозначим $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, тогда

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a},\ \overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),\ \cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SM}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{SM}|} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}|\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}^2 - \vec{a}\cdot\vec{b}|}{m\sqrt{2}\cdot\frac{m\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}|m^2\cos 60^\circ - m^2 - m^2\cos 60^\circ|}{\frac{m^2\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

В. 2. 1. У к а з а н и е. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей ромба, отсюда следует равенство длин противолежащих ребер пирамиды и конгруэнтность боковых граней (по трем сторонам). 2. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\varphi \approx 73^\circ 13'$. Смотрите рисунок 6 и указания к задаче 2 варианта 1.

В. 3. 1. У к а з а н и е. Пусть O — проекция вершины S на плоскость ABC, тогда $|AO| = |OB|$ и $(OM) \perp (AB)$. 2. $\cos\varphi = \frac{1}{6}$, $\varphi \approx 80^\circ 30'$. У к а з а н и е. Обозначьте длину ребра пирамиды (рис. 7) через m. *1-й способ.* Проведем $[NK] \parallel (SM)$, выразим стороны треугольника DNK через m и найдем $\cos\widehat{KND} = \cos x$ с помощью теоремы косинусов. Так как $\cos x = -\frac{1}{6}$, то $\cos\varphi = \frac{1}{6}$. *2-й способ.* Введем векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, как показано на рисунке 7. Имеем: $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{d}$,

тогда $$\cos\varphi = \frac{\left|\frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c})\cdot(\vec{c} - 2\vec{d})\right|}{\frac{m\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{m\sqrt{3}}{2}} = \frac{|\vec{c}^2 - \vec{d}\cdot\vec{c}|}{3m^2} = \frac{\frac{1}{2}m^2}{3m^2} = \frac{1}{6}.$$

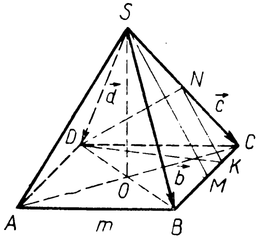


Рис. 7

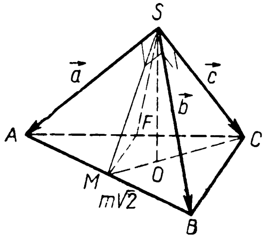


Рис. 8

В. 4. 1. Указание. Не могут быть конгруэнтны углы при параллельных ребрах основания. Можно, например, сравнить тангенсы соответствующих линейных углов. 2. $\varphi = 60°$. Смотрите рисунок 8 и указания к задаче 2 варианта 1.

С-10

В. 1. $8\sqrt{2}$ *см*$^2 \approx 11{,}3$ *см*^{2}.

В. 2. 6 *см*^{2}.

В. 3. $8\sqrt{3}$ *дм*$^2 \approx 13{,}9$ *дм*^{2}.

В. 4. $36\sqrt{3}$ *см*$^2 \approx 62{,}4$ *см*^{2}.

С-11

В. 1. $S_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}h^2$, $S_2 = 3\sqrt{3}h^2$.

В. 2. $m^2 - n^2$.

В. 3. $\frac{\sqrt{3}(a^2-b^2)}{4\cos\varphi}$.

В. 4. $\frac{a-b}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi - 1}$.

С-12

В. 1. $12\sqrt{7}$ *см*$^3 \approx 31{,}7$ *см*^{3}.

В. 2. 105 *см*^{3}.

В. 3. $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ *см*$^3 \approx 32{,}5$ *см*^{3}.

В. 4. $216\sqrt{2}$ *см*$^3 \approx 306$ *см*^{3}.

С-14

В. 1. 2. $\frac{1}{3}a^2h\sin\alpha$.

В. 2. 2. $\frac{1}{12}c^2h\sin 2\alpha$.

В. 3. 2. $\frac{1}{6}d^2h\sin 2\varphi$.

В. 4. 2. $\frac{1}{3}h^2H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

С-15

В. 1. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. *В. 2.* $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. *В. 3.* $\frac{d^3\sqrt{6}}{24}$. *В. 4.* $\frac{2}{9}h^3$.

С-16

В. 1. См. рис. 9. Указание. $|OM| = \frac{1}{2}|OB|$.

В. 2. См. рис. 10. Указание. $|AM| = |MB|$, $[CC_1] \parallel (OM)$.

В. 3. См. рис. 11. Указание. $[MP] \parallel [CD]$.

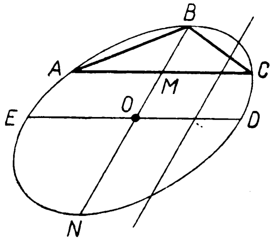


Рис. 9

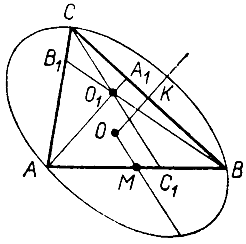


Рис. 10

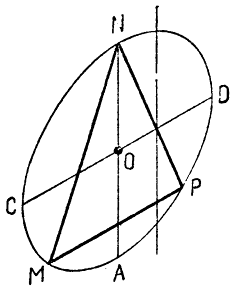


Рис. 11

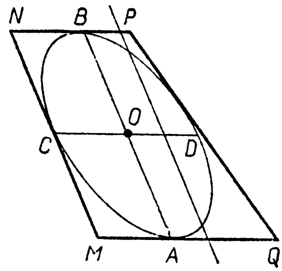


Рис. 12

В. 4. См. рис. 12. Указание. $(MQ) \parallel [CD]$, $(MN) \parallel [AB]$, $(NP) \parallel [CD]$.

С-17

В. 1. $2\pi d^2 \sin\varphi\,(\sin\varphi + \cos\varphi)$.

В. 2. $2\pi h^2 \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ или $2\pi h^2 \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$.

В. 3. $\pi h^2 \operatorname{ctg}\varphi$.

В. 4. $\dfrac{1}{\pi}\sqrt{Q^2 - 4\pi^2 m^2 h^2}$.

С-18

В. 1. 1[1]. $R \approx 13$ *см*, $\alpha \approx 140^\circ$. 2. $\dfrac{3\pi h^2 \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$.

В. 2. 1. $h \approx 8{,}3$ *см*, $D \approx 11$ *см*. 2. $\dfrac{\pi a^2}{\cos\varphi}(3 + 5\cos\varphi)$.

В. 3. 1. $\alpha = 180^\circ$, $D \approx 8{,}7$ *см*. 2. $\pi l^2 \sin\beta$.

В. 4. 1. $h \approx 6{,}6$ *см*, $D \approx 9{,}6$ *см*. 2. $\dfrac{\pi h^2}{\sin\varphi}$.

С-19

В. 1. 1. $x^2 + y^2 + z^2 = 30$. 2. $\sqrt{\dfrac{2Q}{3\pi}}$.

В. 2. 1. Нет. 2. $\pi D \cos\varphi$.

В. 3. 1. $x^2 + y^2 + z^2 = 11$. 2. $2h\sqrt{\pi Q} - \pi h^2$.

В. 4. 1. Да. 2. $\dfrac{Q}{\cos^2\varphi}$.

С-20

В. 1. $4x - 2y + z - 21 = 0$. Указание. В качестве вектора, перпендикулярного искомой плоскости, возьмите вектор $\vec{n} = (4; -2; 1)$, воспользуйтесь уравнением $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$.

---

[1] Значения величин в задачах с практическим содержанием являются приближенными числами. Ответы следует округлять по правилам подсчета верных цифр (см. учебное пособие по алгебре для VIII класса, с. 38—39).

В. 2. $x + 3y - z + 11 = 0$. Смотрите указание к варианту 1.
В. 3. $3x - 2y - z + 14 = 0$. Смотрите указание к варианту 1.
В. 4. $2x + y - 2z - 9 = 0$. Смотрите указание к варианту 1.

С-21

В. 1. ≈ 40 *кг*. *В. 2.* $\approx 5{,}6$ *кг*. *В. 3.* ≈ 210 *м*. *В. 4.* ≈ 20 *кг*.

С-22

В. 1. $\frac{16\pi}{15} \approx 3{,}35$. *В. 2.* $\frac{206\pi}{15} \approx 43{,}1$. *В. 3.* $\frac{81\pi}{10} \approx 25{,}4$.

В. 4. $\frac{83\pi}{15} \approx 17{,}4$.

С-23

В. 1. 1. $\pi\sqrt{3}$ *см*$^3 \approx 5{,}44$ *см*^{3}. 2. $\frac{2}{3}\pi S\sqrt{S\sin 2\alpha}$.

В. 2. 1. $9\pi\sqrt{3}$ *см*$^3 \approx 49{,}0$ *см*^{3}. 2. $\frac{1}{12}\pi a^3 \operatorname{tg}^2 \alpha$.

В. 3. 1. $3\pi\sqrt{3}$ *см*$^3 \approx 16{,}3$ *см*^{3}. 2. $\frac{4}{3}\pi S\sqrt{S\sin 2\alpha}$.

В. 4. 1. $18\pi\sqrt{2}$ *см*$^3 \approx 80$ *см*^{3}. 2. $\frac{1}{3}\pi m^3 \sin^2 \beta$.

С-24

В. 1. 1. Объем шара больше. 2. В $\sqrt{10}$ раз.
В. 2. 1. Модель шара легче. 2. $\sqrt{2}$.
В. 3. 1. Объем шара больше. 2. В $\sqrt{5}$ раз.
В. 4. 1. Масса пирамиды больше. 2. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

С-25

В. 1. 1. $3 : 1$. 2. $(2 - \sqrt{2})\pi R^2 \approx 1{,}84\ R^2$.
В. 2. 1. $20 : 7$. 2. $4\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{4}$.
В. 3. 1. $(\sqrt{2} - 1) : (\sqrt{2} + 1) \approx 0{,}17$. 2. $(2 - \sqrt{3})\pi R^2 \approx 0{,}842\ R^2$.
В. 4. 1. $5 : 27$. 2. $\approx 0{,}746\ m^2$.

ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

К-1

В. 1. **1.** $\sqrt{10} \approx 3{,}16$. **2.** $4x - 8y + 18z - 15 = 0$. **3.** $1{,}5$.
В. 2. **1.** 3. **2.** $3x - y - z - 4 = 0$. **3.** $45°$.
В. 3. **1.** $\sqrt{17} \approx 4{,}12$. **2.** $x - 2y + 3z - 7 = 0$. **3.** $2\sqrt{5} \approx 4{,}47$.
В. 4. **1.** $\sqrt{2}$. **2.** $x + 2y + 3z - 5 = 0$. **3.** $30°$.

К-2

В. 1. **1.** $(70\sqrt{3} + 30\sqrt{6} + 42)$ *см*$^2 \approx 237$ *см*^{2}.
В. 2. **1.** $72(1 + \sqrt{7})$ *см*$^2 \approx 263$ *см*^{2}.
В. 3. **1.** $20(23 + 6\sqrt{3})$ *см*$^2 \approx 668$ *см*^{2}.
В. 4. **1.** $3\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})h^2 \approx 12{,}5h^2$.

К-3

В. 1. **1.** $\frac{1}{6} a^3 \sin\beta \sin\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\varphi$.
В. 2. **1.** $2a^3 \sin\varphi \cos\frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}\beta$.
В. 3. **1.** $\frac{1}{4} c^3 \sin 2\alpha \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi$.
В. 4. **1.** $\frac{1}{12} d^3 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}\beta$.

К-4

В. 1. **1.** Нет. **2.** $S_1 = 225\pi$ *см*^{2}, $S_2 = 81\pi$ *см*^{2}.
В. 2. **1.** $\frac{\pi m^2}{2}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2} + 1}$.
В. 3. **1.** Вокруг стороны длиной b. **2.** $\frac{40}{\sqrt{3}}$ *см* $\approx 23{,}2$ *см*.
В. 4. **1.** $2\pi d^2(2 + \sqrt{\operatorname{tg}^2\beta + 4})$.

К-5

В. 1. $\frac{\pi a^3}{24}\sin^3\alpha \operatorname{tg}\varphi$.
В. 2. $\dfrac{\pi b^2\sqrt{l^2 - 4b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

B. 3. $\dfrac{\pi a^3 \cos\dfrac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi}{24 \sin^3 \dfrac{\alpha}{2}}$.

B. 4. $\dfrac{\pi d^3 \cos^3 \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{8 \sin \dfrac{\alpha}{2}}$.

К-6

B. 1. 2. $\dfrac{3V\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}^3 \dfrac{\varphi}{2}}{4\pi}$.

B. 3. 2. $\dfrac{S \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\beta}{2}}{\pi \cos \beta}$.

B. 2. 2. $2R^2 \sin 2\varphi \sin^2 \varphi$.

B. 4. 2. $\dfrac{\sqrt{3}}{2} R^3 \sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

ДС-1

В. 1. **1.** $(6; -2; -6)$. **2.** $m = -0{,}5$.

В. 2. **1.** $m = -24$. **2.** 9.

ДС-2

В. 1. **1.** $m = \pm 3$. **2.** $135°$.

В. 2. **1.** Таких значений m нет. **2.** $-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$.

ДС-3

В. 1. **1.** $\left(\dfrac{-3 \mp \sqrt{51}}{3};\ 0;\ 0\right)$. **2.** $\sqrt{21} \approx 4{,}58$.

В. 2. **1.** $(0; 0; -1{,}5)$. **2.** 5.

ДС-4

В. 1. **1.** $2x + 3y - 6 = 0$. **2.** $(8; 0; 0)$, $(0; 24; 0)$, $(0; 0; 6)$. **3.** $x - 3y + 5z + 17 = 0$. Указание. Вектор, перпендикулярный искомой плоскости: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (2 - 3;\ 1 - (-2);\ -1 - 4) = (-1, 3, -5)$. Далее примените уравнение плоскости в форме $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$.

В. 2. **1.** $2x + z + 2 = 0$. **2.** $2{,}4$. **3.** $x - 2y + 2z - 10 = 0$. Смотрите указания к задаче 3 варианта 1.

ДС-5

В. 1. **1.** $3x - y - z + 6 = 0$ или $3x - y - z - 6 = 0$. **2.** $x - 2y - 2z - 1 = 0$.

В. 2. **1.** $2x - y + 3z - 1 = 0$. **2.** $x - 3y + 2 = 0$.

ДС-6

В. 1. См. рис. 13. Указание. Спроектируйте точки N и P на плоскость ABC параллельно (CC_1), получите точки N_1 и P_1. Затем постройте $K = (N_1P_1) \cap (NP)$, $Q = (KM) \cap (AB)$ и т. д.

В. 2. См. рис. 14. Указание. Спроектируйте точки N и P на плоскость ABC параллельно (AA_1), затем постройте $K = (N_1P_1) \cap (NP)$ и т. д.

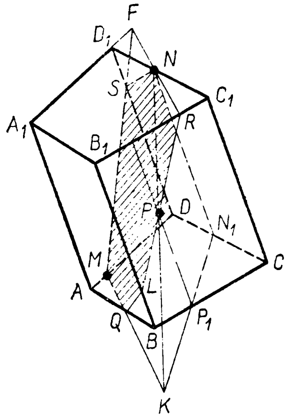


Рис. 13

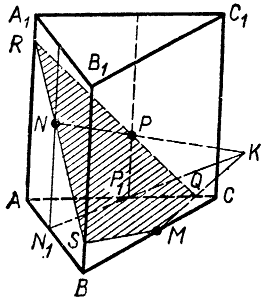


Рис. 14

ДС-7

В. 1. 1. Смотрите указание к С-7 (задача 1). 2. Указание. Пользуясь конгруэнтностью треугольников AA_1B и AA_1D, докажите, что $\widehat{A_1AB} = \widehat{A_1AD}$. Обозначив $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, докажите, что $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$ (смотрите решение задачи 71 из учебного пособия).

В. 2. 1. Смотрите указание к С-7 (задача 1). 2. Указание. Пусть в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ двугранный угол AA_1 прямой. Рассмотрите параллелограмм, вершинами которого служат точки пересечения плоскости линейного угла и боковых ребер (или их продолжений). Этот параллелограмм — прямоугольник. Его диагонали служат высотами параллелограммов ACC_1A_1 и BDD_1B_1, если за их основания принять $[AA_1]$ и $[BB_1]$.

ДС-8

В. 1. $(1 + \sqrt{2})\,ab \approx 2{,}41\ ab$. Указание. Докажите, что третья боковая грань — прямоугольник.

В. 2. $2\sqrt{Q^2 + S^2} + Q$. Указание. Меньшее диагональное сечение — квадрат со стороной $\sqrt{S}$.

ДС-9

В. 1. 1. Указание. Докажите, что плоскость, проходящая через высоту пирамиды и высоту боковой грани, перпендикулярна к плоскости этой грани. 2. $\cos\varphi = \frac{5}{6}$, $\varphi \approx 33°33'$. Указание. Обозначьте $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$ (рис. 15), длину ребра обозначьте через m. Имеем: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{2}(\vec{d} - 2\vec{a})$, $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

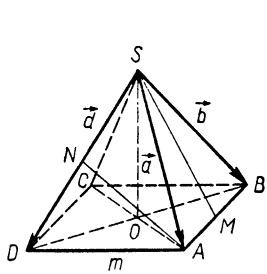


Рис. 15

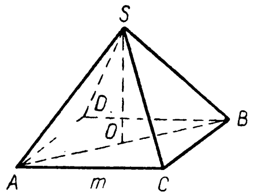


Рис. 16

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{\left|\dfrac{1}{4}\,(\vec{d} - 2\vec{a}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})\right|}{\dfrac{m\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{m\sqrt{3}}{2}}$ и т. д.

В. 2. **1.** Указание. Линейными углами соответствующих двугранных углов служат углы между апофемами противолежащих боковых граней. **2.** $\varphi = 60°$. Указание. *1-й способ.* Достройте данный тетраэдр до правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (рис. 16), затем рассмотрите треугольник SBD, который является равносторонним; $\widehat{SBD} = \varphi$.

2-й способ. Обозначьте $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$ и т. д. (смотрите указание к задаче 2 варианта 1). Этот способ требует более громоздких записей.

ДС-10

В. 1. $3.6\,(3 + 2\sqrt{3})$ *см*$^2 \approx 233$ *см*^{2}. *В. 2.* $6\,(\sqrt{3} + \sqrt{6})$ *см*$^2 \approx 25{,}1$ *см*^{2}.

ДС-11

В. 1. $\dfrac{m^2 - n^2}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{4}{3} - \cos^2\alpha}$. *В. 2.* $\dfrac{Q\sqrt{2} + 2h^2\operatorname{ctg}\varphi}{2h}$ и $\dfrac{Q\sqrt{2} - 2h^2\operatorname{ctg}\varphi}{2h}$.

ДС-12

В. 1. $\dfrac{1}{3}\,l^3\sin^2\beta\sqrt{3 - 4\sin^2\beta} = \dfrac{2}{3}\,l^3\sin^2\beta\sqrt{\cos(30° + \beta)\cos(30° - \beta)}$.

В. 2. $l^3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\varphi$.

ДС-13

В. 1. 2. Указание. Составьте равенство $S_1h_1 = S_2h_2$, каждая часть которого выражает объем данного параллелепипеда.

В. 2. 2. Указание. Достройте данную призму до параллелепипеда и составьте равенство $S_1x_1 = S_2x_2$.

ДС-14

В. 1. 2. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. *В. 2.* 2. $\dfrac{c^3\sqrt{3}}{24}$.

ДС-15

В. 1. 1. $\dfrac{mp\sqrt{3m^2 - p^2}}{12}$. *В. 2.* 1. $\dfrac{abc\sin\varphi}{6}$.

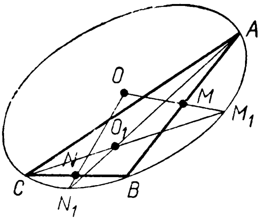


Рис. 17

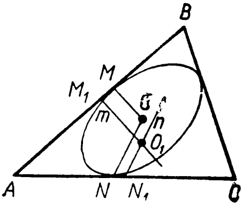


Рис. 18

ДС-16

В. 1. См. рис. 17. Указание. Центр O описанной окружности соедините с серединой M стороны AB, тогда точка $M_1 = \omega \cap [OM)$ делит дугу AB пополам и $[CM_1)$ — биссектриса угла C.

В. 2. См. рис. 18. Указание. Постройте прямую m, проходящую через середину M_1 стороны AB и параллельную радиусу OM, проведенному в точку касания (AB) и данной окружности: m — серединный перпендикуляр к $[AB]$.

ДС-17

В. 1. $\dfrac{\pi\left(a^2 + 2S\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.   *В. 2.* $\dfrac{Q\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\pi}$.

ДС-18

В. 1. 1. $R \approx 95$ *см*, $r \approx 70$ *см*, $\alpha \approx 57°$.   2. $\dfrac{nh^2}{\sqrt{m^2 - n^2}}$.

В. 2. 1. $h \approx 29$ *см*.   2. $\dfrac{Q\sin\beta}{2\pi\cos^2\varphi}$.   3. Да.

ДС-19

В. 1. 1. $\sqrt{74} - 8$. Указание. Точка M не принадлежит шару, поэтому расстояние от M до сферы равно разности расстояния от M до O — центра шара и радиуса. 2. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 29$.

В. 2. 1. $7 - \sqrt{35}$. Указание. Точка M принадлежит шару, поэтому $d = R - |MO|$. 2. Нет.

ДС-20

В. 1. 1. $x - 2y - 3z - 14 = 0$. 2. 16 *см*.

В. 2. 1. $2x - y - 5 = 0$ и $2x - y + 5 = 0$. 2. 1 *см*.

ДС-21

В. 1. Вокруг стороны длиной b. $V \approx 3{,}90$ *дм*^{3}.

В. 2. Больший объем имеет цилиндр с высотой a, $V \approx 93{,}5$ *дм*^{3}.

ДС-22

В. 1. $\frac{136\pi}{15} \approx 28{,}6$. Указание. Предварительно решите уравнение $4x - x^2 = 3$.

В. 2. $\frac{16\pi}{3} \approx 16{,}4$. Указание. Предварительно решите уравнение $2 - x^2 = x^2$.

ДС-23

В. 1. 1. $\frac{1}{12}\pi m(4m^2 + a^2)\operatorname{tg}\varphi$. 2. $\pi S \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{2S\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$.

В. 2. 1. $\dfrac{\pi a^3 \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{3\sin^3\frac{\varphi}{2}}$. 2. $\frac{1}{3}\pi m^3 \sin\varphi\,(3 + 6\cos\varphi + 2\cos^2\varphi)$.

ДС-24

В. 1. 1. Объем тетраэдра больше. 2. $\approx 0{,}0670\,S$.
В. 2. 1. Масса куба больше. 2. $\approx 0{,}354\,S$.

ДС-25

В. 1. 1. 8 : 5. 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^2 \approx 2{,}72R^2$.

В. 2. 1. $\approx 0{,}396$. 2. R.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ НА ПОВТОРЕНИЕ

СП-1

В. 1. 2. См. рис. 19.
В. 2. 1. См. рис. 20. 2. См. рис. 21.
В. 3. 1. См. рис. 22. 2. См. рис. 23.
В. 4. 1. См. рис. 24.

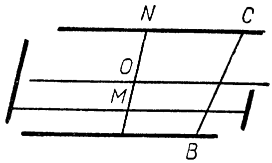


Рис. 20

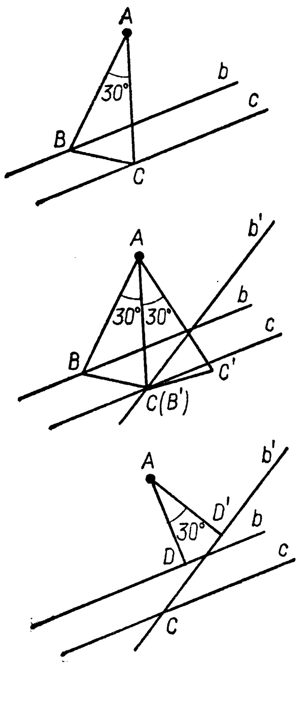


Рис. 19

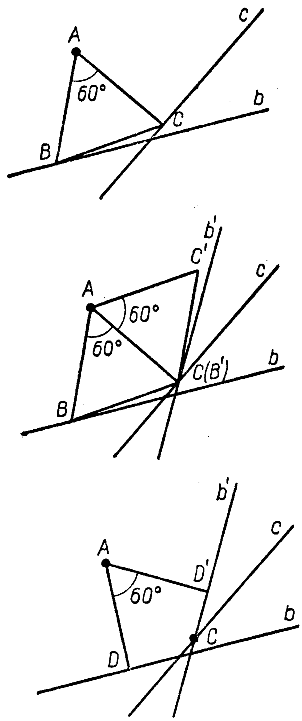


Рис. 21

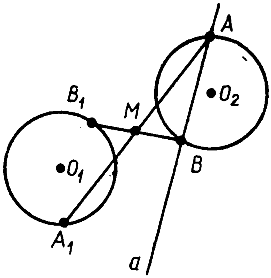


Рис. 22

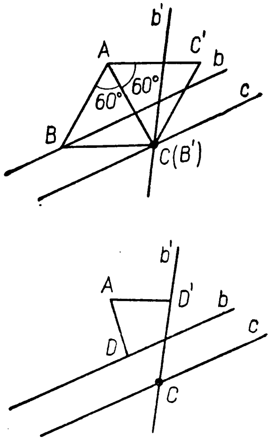


Рис. 23

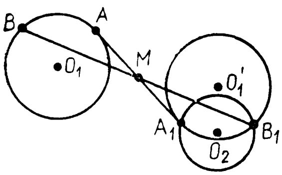


Рис. 24

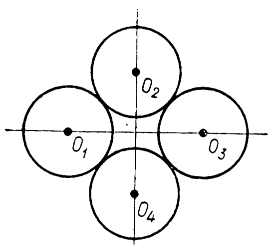


Рис. 25

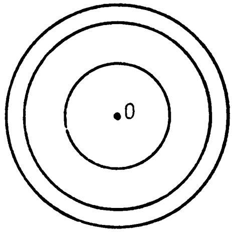


Рис. 26

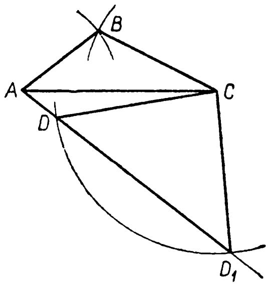


Рис. 27

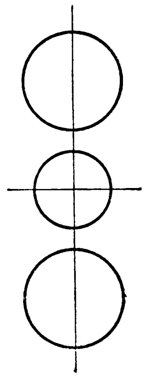


Рис. 28

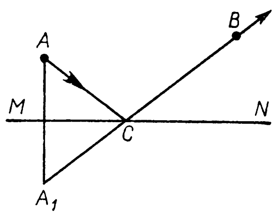


Рис. 29

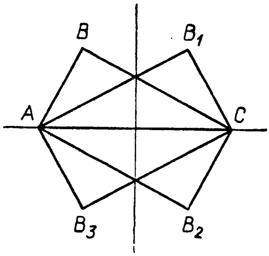


Рис. 30

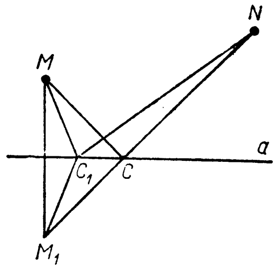


Рис. 31

СП-2

В. 1. **1.** См., например, рис. 25.

В. 2. **1.** Три концентрические окружности (рис. 26). **2.** См. рис. 27.

В. 3. **1.** См., например, рис. 28. **2.** См. рис. 29.

В. 4. **1.** См., например, рис. 30; отрезок. **2.** См. рис. 31.

СП-3

В. 1. **1.** $2\vec{c}$. **2.** $20\sqrt{8}$ *кгс* и $10\sqrt{3}$ *кгс*.

В. 2. **1.** $2\vec{c}$. **2.** 120 *кгс*, $60\sqrt{3}$ *кгс*.

В. 3. **1.** $2\vec{a}$. **2.** $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ *кгс* и $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ *кгс*.

В. 4. **1.** $\vec{0}$. **2.** 15 *кгс*.

СП-4

В. 1. **2.** 3,5 *см*. *В. 2.* **2.** 8 *см*. *В. 3.* **2.** 2,4 *см*. *В. 4.* **2.** $\approx$ 1,67 *см*.

СП-6

В. 1. **1.** 50°, 90°, 130°, 90°. **2.** 4.

В. 2. **1.** 60°, 90°, 90°, 120°. **2.** 8.

В. 3. **1.** 60°, 140°, 70°, 130°, 140°.

В. 4. **2.** Если $\alpha + \beta < 90°$, то α, β и $\alpha + \beta$; если $\alpha + \beta > 90°$, то α, β и $180° - (\alpha + \beta)$.

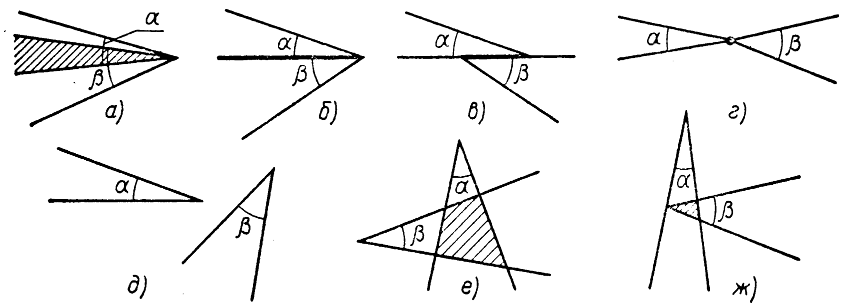


Рис. 32

СП-7

В. 1. **1.** б) Параллелограмм, $30\sqrt{2}$ *см*$^2 \approx 42{,}4$ *см*^{2}. **2.** Параллелограмм. **3.** Угол, луч, отрезок, точка, пустое множество, четырехугольник, треугольник(рис. 32).

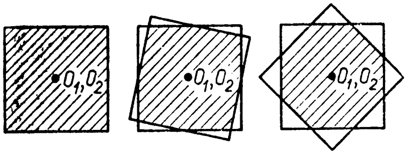


Рис. 33

В. 2. **1.** в) 50 *см*^{2}. **2.** Равнобедренная трапеция. **3.** Квадрат, восьмиугольник (рис. 33).

В. 3. **1.** б) Прямоугольник, $50 \sin 60°$ *см*$^2 = 25\sqrt{3}$ *см*$^2 \approx 43{,}3$ *см*^{2}. **2.** Ромб. **3.** Полуплоскость, полоса, прямая, угол, пустое множество (рис. 34).

В. 4. **1.** б) Ромб, 12 *см*^{2}. **2.** Параллелограмм. **3.** Полоса, прямая, параллелограмм, пустое множество.

СП-8

В. 1. **1.** $36 + 8\sqrt{2} \approx 47{,}3$ *см*, $40\sqrt{2} + 32 \approx 88{,}6$ *см*^{2}. **2.** 4,5 *см*.

В. 2. **1.** 6 *см*. **2.** 15 *см*, 15 *см*, 15 *см*, 25 *см*.

В. 3. **1.** 33 *см*. **2.** $(23 + \sqrt{3})1{,}5 \approx 37{,}1$ *см*^{2}.

СП-9

В. 1. **1.** $\dfrac{P \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\dfrac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **2.** $\sqrt{c^2 + \dfrac{b^2}{4} - bc \cos \alpha}$,

$$\sin x = \frac{c \sin \alpha}{\sqrt{c^2 + \dfrac{b^2}{4} - bc\cos\alpha}}.$$

В. 2. **1.** $\dfrac{a \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$. **2.** $\sqrt{a^2 + l^2 - 2al\cos\dfrac{\gamma}{2}}$, $\sin \hat{B} = \dfrac{l \sin\dfrac{\gamma}{2}}{\sqrt{a^2+l^2-2al\cos\dfrac{\gamma}{2}}}$.

В. 3. **1.** $\dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$. **2.** $\dfrac{h}{\sin\gamma}$, $\sqrt{l^2 + \dfrac{h^2}{\sin^2\gamma} - \dfrac{lh}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}}$.

В. 4. **1.** $a\sqrt{\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin^2(\alpha+\gamma)} + \dfrac{\sin^2\delta}{\sin^2(\beta+\delta)} - \dfrac{2\sin\gamma\sin\delta\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\delta)}}$ или

$$a\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\gamma)} + \frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\beta+\delta)} - 2\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos(\gamma-\delta)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\delta)}}.$$

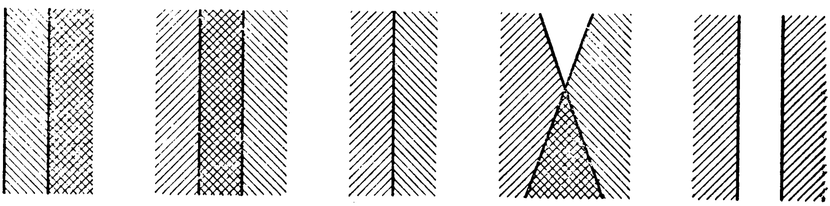


Рис. 34

2. $\frac{h}{\sin\beta}$, $\sqrt{4m^2-h^2}-\frac{h}{\operatorname{tg}\beta}$, если $\beta > 90^\circ$ или $\beta < 90^\circ$; h, $\sqrt{4m^2-h^2}$, если $\beta = 90^\circ$.

Указание. Дополните треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$.

СП-10

В. 1. 3. $2R(1+\pi) \approx 8{,}28\ R$, $\frac{\pi R^2}{4}$.

В. 2. 2. $0{,}5\ R$. 3. $2\pi R$, $\frac{\pi R^2}{4}$.

В. 3. 2. $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$. 3. $\frac{\pi R}{2}(1+\sqrt{2}) \approx 3{,}81R; 0{,}5R^2$.

В. 4. 2. 45°. 3. $0{,}5\ R(4-3\pi+4\pi\sqrt{2})$, $\frac{\pi R^2}{4}(8\sqrt{2}-11)$.

СП-11

В. 1. 1. 0,8 или 1,25, $|KC| = 8$ *см*. 2. $\frac{10}{\sin 70^\circ}$ *см*. 3. $2R(\sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ + \sin 60^\circ)$.

В. 2. 1. $\triangle ABC \sim \triangle AED$, $\triangle DOB \sim \triangle EOC$. 2. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ *см*.
3. $4R\sqrt{2}$.

В. 3. 1. $\triangle KOL \sim \triangle NOM$, $\triangle KON \sim \triangle LOM$. 2. $\frac{2}{\sin 80^\circ}$ *см*. 3. $3R\sqrt{3}$.

В. 4. 1. $\triangle OO_1B \sim \triangle OO_2C$, $\triangle OO_1A \sim \triangle OO_2D$, $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, $\triangle ABC \sim \triangle CAD$. 2. $\frac{5}{\sin 50^\circ}$ *см*. 3. $0{,}5R\sqrt{7}$.

СП-12

В. 1. 1. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. *В. 2.* 1. $2b^2(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}8b^2$. *В. 3.* 1. $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

В. 4. 1. $\sqrt{\frac{6}{\pi\sqrt{3}}}$.

СП-14

В. 1. 1. $A'(-y, x)$. 2. 22.
В. 2. 1. $B'(-x, -y)$. 2. 129.
В. 3. 1. $C'(-y, x)$. 2. 41.
В. 4. 1. $D'(y, x)$. 2. —524.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

С-1 (к § 42)

1. Даны векторы $\vec{a} = (-1;\ 2;\ 0)$, $\vec{b} = (2;\ -3;\ -2)$. Найдите координаты вектора $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

2. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a} = (-2;\ 1;\ -4)$ и $\vec{b} = (3;\ 4;\ -2)$?

С-2 (к § 43)

1. Даны векторы $\vec{a} = (1;\ -2;\ 0)$, $\vec{b} = (2;\ 1;\ -3)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

2. Найдите величину угла между вектором $\vec{a} = (1;\ 2;\ -\sqrt{3})$ и осью Oy.

С-3 (к § 44)

1. Дана прямоугольная система координат $Oxyz$. Постройте точки M $(1;\ 2;\ -1)$, N $(-2;\ 1;\ 1)$. Вычислите расстояние от начала координат до середины $[MN]$.

2. Вершины однородной треугольной пластинки находятся в точках A $(1;\ -1;\ 0)$, B $(-3;\ -1;\ 2)$, C $(-1;\ 2;\ 1)$. Вычислите координаты центра тяжести пластинки.

С-4 (к § 45)

1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $(1;\ 1;\ -2)$ перпендикулярно вектору $\vec{a} = (1;\ -3;\ 4)$.

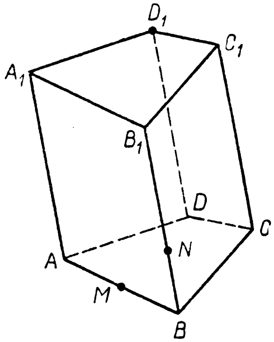
2. Как расположена плоскость $5x - 3 = 0$ по отношению к координатным плоскостям и координатным осям?

С-5 (к § 46)

1. Дана плоскость $3x - y + 2z - 4 = 0$. Составьте уравнение ее образа при перемещении $\vec{p} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

2. Найдите координаты точки, симметричной точке A (1; −1; 3) относительно плоскости Oxz.

С-6 (к § 48)



Постройте сечение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину D_1 и точки M и N, соответственно принадлежащие ребрам AB и BB_1.

С-7 (к § 49)

1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки $M \in [BB_1]$, $N \in [CC_1]$. Постройте образ отрезка MN при симметрии относительно середины O диагонали BD_1.

2. Диагонали BD_1 и AC_1 прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ одинаково наклонены к плоскости его основания. Докажите, что данный параллелепипед прямоугольный.

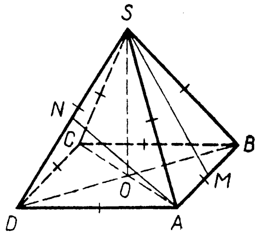
С-8 (к § 49—51)

Две боковые грани наклонной треугольной призмы образуют угол 60°, расстояния от их общего ребра до остальных боковых ребер равны 5 *см* и 10 *см*, боковое ребро равно 8 *см*. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

С-9 (к § 52)

1. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, все боковые ребра пирамиды имеют равные длины. Докажите, что вершина пирамиды проектируется на середину гипотенузы ее основания.

2. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды имеют равные длины. Найдите угол между апофемой SM, лежащей в грани SAB, и диагональю AC основания.



С-10 (к § 50 и 52)

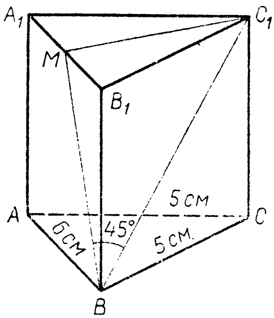
Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, диагональ основания которой равна 4 *см*, а угол между плоскостями боковой грани и основания равен 45°.

С-11 (к § 53)

Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды относятся как 1 : 2; высота усеченной пирамиды равна h, боковое ребро составляет угол 45° с плоскостью основания. Найдите площади оснований.

С-12 (к § 55—56)

Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 5 *см*, 5 *см* и 6 *см*, диагональ меньшей боковой грани составляет угол 45° с большей боковой гранью. Найдите объем призмы.



С-13 (к § 57)

1. Вычислите объем модели наклонного параллелепипеда, произведя необходимые измерения.

2. Докажите, что из всех призм, имеющих данное основание и боковое ребро данной длины, наибольший объем имеет прямая призма.

С-14 (к § 58, первый урок)

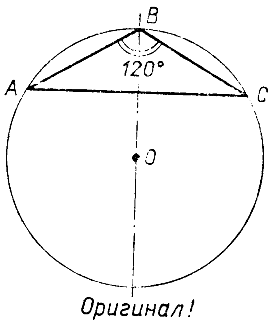
1. Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через (SB) и разбивающей пирамиду на две фигуры с равными объемами.

2. Основание пирамиды — ромб со стороной a и углом α, высота пирамиды равна h. Найдите объем пирамиды.

С-15 (к § 58)

Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно a, плоский угол при вершине пирамиды равен 60°. Найдите объем пирамиды.

С-16 (к § 59)

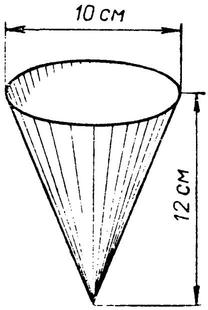


Дано изображение окружности с ее центром. Постройте изображение вписанного в окружность равнобедренного треугольника, угол при вершине которого равен 120°.

С-17 (к § 60)

Диагональ прямоугольника, равная d, образует с его стороной угол φ. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, полученного при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей эту сторону.

С-18 (к § 61)



1. Коническая жестяная воронка должна иметь диаметр 10 *см* и высоту 12 *см*. Вычислите размеры ее заготовки — радиус и угловую величину дуги развертки. Расход материала на швы не учитывается.

2. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которого относятся как 2 : 1, высота равна h, а образующая составляет угол α с плоскостью основания.

С-19 (к § 62—63)

1. Составьте уравнение сферы с центром O (0; 0; 0), проходящей через точку M (—5; 1; 2).

2. Площадь большого круга шара равна Q. На каком расстоянии от центра шара нужно провести сечение, чтобы его площадь была равна $\frac{1}{3}Q$?

С-20 (к § 64)

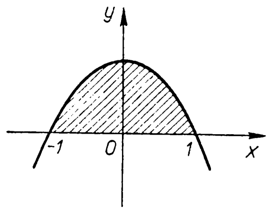
Докажите, что точка A (4; —2; 1) принадлежит сфере $x^2+y^2+z^2=21$. Составьте уравнение плоскости, касательной к сфере и проходящей через точку A.

С-21 (к § 65)

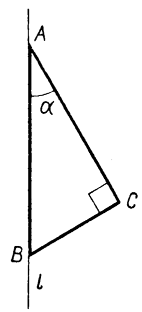
На барабан диаметром 1 *м* намотано в один ряд 50 витков медной проволоки диаметром 3 *мм*. Вычислите массу проволоки (плотность меди 8,9 $г/см^3$).

С-22 (к § 66)

Найдите объем фигуры, образованной вращением около оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=1-x^2$ и осью абсцисс.



С-23 (к § 67)



1. Образующая конуса равна $\sqrt{6}$ *см* и составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем конуса.

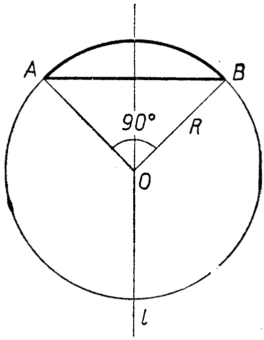
2. Прямоугольный треугольник с площадью S и острым углом α вращается вокруг оси, содержащей гипотенузу. Найдите объем фигуры вращения.

С-24 (к § 68—69)

1. Какая фигура имеет больший объем: шар радиуса 1 *дм* или правильная треугольная призма, каждое ребро которой равно 2 *дм*?

2. Во сколько раз нужно увеличить радиус сферы, чтобы увеличить площадь сферы в 10 раз?

С-25* (к «Приложению»)



1. Радиус OM разбивает полукруг с диаметром AB на два сектора так, что $\smile AM = 120°$. Найдите отношение объемов фигур, образованных вращением этих секторов вокруг оси AB.

2. Круговой сегмент с радиусом R и дугой 90° вращается вокруг своей оси симметрии. Найдите площадь сферической поверхности получившегося шарового сегмента.

ВАРИАНТ 2

С-1 (к § 42)

1. Даны векторы $\vec{c} = (3; -\frac{1}{2}; -4)$, $\vec{d} = (2; 0; -1)$. Найдите координаты вектора $2\vec{c} - \vec{d}$.

2. Перпендикулярны ли векторы $\vec{m} = (1; -3; 0)$ и $\vec{n} = (4; 1; -2)$?

С-2 (к § 43)

1. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}$, если $\vec{a} = (1; 0; 1)$, $\vec{b} = (3; -1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (2; 0; -4)$, $\vec{q} = (-2; 3; -1)$. Найдите длину вектора $\frac{1}{2}\vec{p} - \vec{q}$.

С-3 (к § 44)

1. Дана прямоугольная система координат $Oxyz$. Постройте точки $A(-1; 2; 3)$, $B(3; -2; 1)$. Вычислите расстояние от точки $M(0; 0; 1)$ до середины $[AB]$.

2. Вершины однородной треугольной пластинки находятся в точках $M(-1; 2; 3)$, $N(2; -1; 0)$, $P(-4; 2; -3)$. Вычислите координаты центра тяжести пластинки.

С-4 (к § 45)

1. Составьте уравнение плоскости, зная, что точка $A(1; -3; 2)$ есть основание перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.

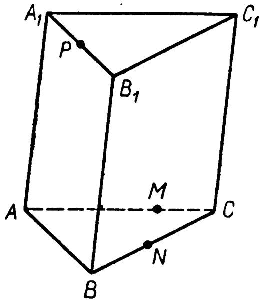
2. Составьте уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz и проходящей через точку $A(-2; 0; 0)$.

С-5 (к § 46)

1. Составьте уравнение образа плоскости $2x + 3y - 6z - 5 = 0$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии $k = -2$.

2. Найдите координаты точки, симметричной точке $B(-3; 1; -2)$ относительно оси абсцисс.

С-6 (к § 48)



Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки $M \in [AC]$, $N \in [BC]$, $P \in [A_1B_1]$.

С-7 (к § 49)

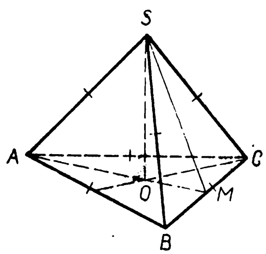
1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте образ угла ABD при симметрии относительно середины O диагонали A_1C.

2. Докажите, что пересечение диагональных сечений прямого параллелепипеда есть отрезок, перпендикулярный к плоскости основания параллелепипеда.

С-8 (к § 49—51)

Стороны основания прямого параллелепипеда 6 *см* и 4 *см*, угол между ними равен 60°. Диагональ большей грани равна 10 *см*. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

С-9 (к § 52)



1. Основание пирамиды — ромб, все боковые грани одинаково наклонены к ее основанию. Докажите, что любые две боковые грани пирамиды конгруэнтны.

2. Все ребра треугольной пирамиды $SABC$ имеют равные длины. Найдите угол между ребром AB и апофемой SM, лежащей в грани SBC.

С-10 (к § 50 и 52)

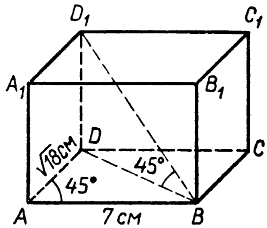
Плоскость боковой грани правильной треугольной пирамиды составляет угол 30° с плоскостью основания, радиус окружности, описанной около основания, равен 2 *см*. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

С-11 (к § 53)

Диагонали оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны m и n ($m > n$), двугранный угол при ребре большего основания равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

С-12 (к § 55—56)

Стороны основания прямого параллелепипеда, равные 7 *см* и $\sqrt{18}$ *см*, образуют угол 45°, меньшая диагональ параллелепипеда составляет угол в 45° с плоскостью основания. Найдите объем параллелепипеда.



С-13 (к § 57)

1. Вычислите объем модели наклонной треугольной призмы, произведя необходимые измерения.

2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскость, проходящая через (BC_1) и точку A, разбивает его на части, имеющие равные объемы.

С-14 (к § 58, первый урок)

1. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм, точка M делит $[AB]$ пополам. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую SM и разбивающей пирамиду на две фигуры с равными объемами.

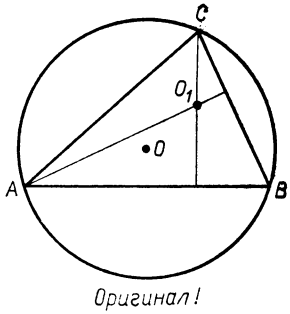
2. Найдите объем пирамиды, высота которой равна h, а основанием служит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α.

С-15 (к § 58)

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a, боковое ребро составляет угол 45° с плоскостью основания. Найдите объем пирамиды.

С-16 (к § 59)

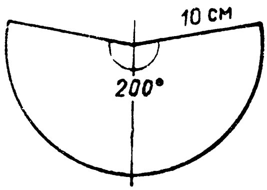
Даны изображения окружности, ее центра и вписанного в нее треугольника. Постройте изображение точки пересечения высот этого треугольника.



С-17 (к § 60)

Сторона прямоугольника равна h, угол между его диагоналями равен φ. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, образованного при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей данную сторону.

С-18 (к § 61)



1. Для изготовления конической воронки из жести вырезан круговой сектор с углом 200° и радиусом 10 *см*. Вычислите высоту и диаметр воронки (без учета шва).

2. Прямоугольная трапеция с основаниями a и $2a$ и острым углом φ вращается вокруг оси, содержащей меньшую из непараллельных сторон. Найдите площадь поверхности полученного усеченного конуса.

С-19 (к § 62—63)

1. Поверхность шара задана уравнением $x^2+y^2+z^2=9$. Принадлежит ли шару точка M (2; 2; 2)?

2. Диаметр сферы равен D; плоскость, проходящая через конец диаметра, составляет с ним угол φ. Найдите длину линии пересечения сферы этой плоскостью.

С-20 (к § 64)

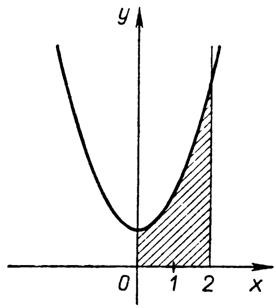
Сфера с центром в начале координат проходит через точку A (—1; —3; 1). Составьте уравнение плоскости, проходящей через данную точку и касательной к сфере.

С-21 (к § 65)

Толщина стенок стальной трубы равна 5 *мм*, длина внешней окружности поперечного сечения трубы равна 160 *мм*. Вычислите массу одного погонного метра трубы ($\rho = 7{,}8$ *г/см*^{3}).

С-22 (к § 66)

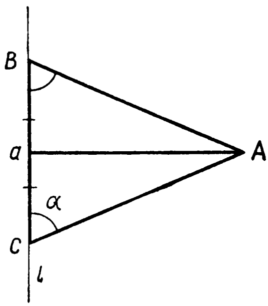
Найдите объем фигуры, образованной вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = 1 + x^2$ и прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$.



С-23 (к § 67)

1. Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной 6 *см*. Найдите объем конуса.

2. Равнобедренный треугольник, основание которого a и угол при основании α, вращается вокруг оси, содержащей это основание. Найдите объем фигуры вращения.

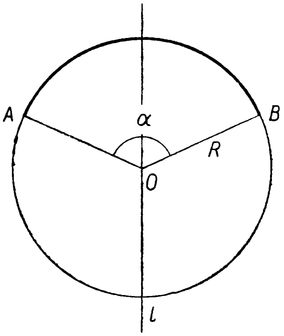


С-24 (к § 68—69)

1. Модель шара диаметром 12 *см* и модель куба с ребром 1 *дм* изготовлены из одного и того же материала. Масса какой из моделей меньше?

2. Отношение площадей двух сфер равно 2. Найдите отношение диаметров этих сфер.

С-25* (к «Приложению»)



1. Сечение шара плоскостью, перпендикулярной его диаметру, делит диаметр в отношении 1 : 2. Найдите отношение объемов частей шара.

2. Дуга окружности радиуса R, содержащая $\alpha°$, вращается вокруг своей оси симметрии. Найдите площадь получившейся сегментной поверхности.

ВАРИАНТ 3

С-1 (к § 42)

1. Даны векторы $\vec{a} = (0;\ 3;\ -6)$, $\vec{b} = (5;\ -2;\ 1)$. Найдите координаты вектора $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$.

2. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a} = \left(-3;\ 2;\ \frac{1}{2}\right)$ и $\vec{b} = (-1;\ -2;\ 2)$?

С-2 (к § 43)

1. Даны векторы $\vec{a} = (2;\ 0;\ -1)$, $\vec{b} = (-1;\ 3;\ 3)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

2. Найдите величину угла между вектором $\vec{a} = (1;\ \sqrt{2};\ 1)$ и осью Ox.

С-3 (к § 44)

1. Дана прямоугольная система координат $Oxyz$. Постройте точки $M\ (2;\ -1;\ 3)$, $N\ (-1;\ 3;\ 1)$. Вычислите расстояние от начала координат до середины $[MN]$.

2. Вершины однородной треугольной пластинки находятся в точках $A\ (0;\ -4;\ 2)$, $B\ (1;\ 2;\ -1)$, $C\ (5;\ -1,\ -1)$. Вычислите координаты центра тяжести пластинки.

С-4 (к § 45)

1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M\ (4;\ -3;\ 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{a} = (-2;\ 0;\ 3)$.

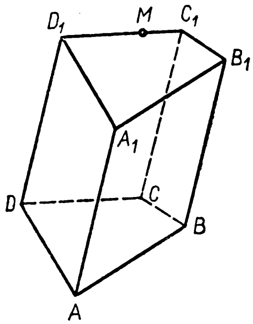
2. Как расположена плоскость $2y + 5 = 0$ по отношению к координатным плоскостям и координатным осям?

С-5 (к § 46)

1. Составьте уравнение образа плоскости $x + 2y - z + 3 = 0$ при перемещении $\vec{a} = (2;\ 3;\ -1)$.

2. Найдите координаты точки, симметричной точке $P\ (2;\ -1;\ 3)$ относительно плоскости Oyz.

С-6 (к § 48)



Дана четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которой ребра AB и DC не параллельны. Постройте ее сечение плоскостью, проходящей через ребро AB и точку M, принадлежащую ребру D_1C_1.

С-7 (к § 49)

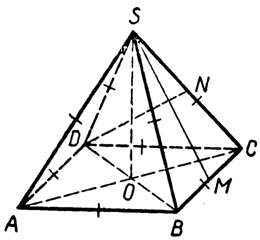
1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки: $M \in [A_1B_1]$, $N \in [B_1C_1]$. Постройте образ отрезка MN при симметрии относительно середины O диагонали DB_1.

2. Двугранные углы при боковых ребрах AA_1 и BB_1 прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ конгруэнтны. Докажите, что параллелепипед прямоугольный.

С-8 (к § 49—51)

Основанием прямой призмы служит треугольник, стороны которого 5 *см*, 5 *см*, 6 *см*; высота призмы равна большей высоте этого треугольника. Найдите площадь полной поверхности призмы.

С-9 (к § 52)



1. Основание пирамиды $SABC$ — равнобедренный треугольник ($|AC| = |BC|$), ребра SA и SB одинаково наклонены к плоскости основания. Докажите, что вершина пирамиды проектируется на прямую CM, где M — середина $[AB]$.

2. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ имеют равные длины. Найдите угол между апофемой SM, лежащей в грани BSC, и высотой DN грани CSD.

С-10 (к § 50 и 52)

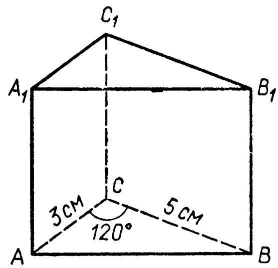
Радиус окружности, вписанной в основание правильной четырехугольной пирамиды, равен $\sqrt{3}$ *дм*, угол между плоскостями основания и боковой грани равен 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

С-11 (к § 53)

Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a > b$), двугранный угол при ребре большего основания равен φ. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

С-12 (к § 55—56)

Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 5 *см* и 3 *см* и углом 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 *см*^{2}. Найдите объем призмы.



С-13 (к § 57)

1. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб. Вычислите объем модели такого параллелепипеда, произведя необходимые измерения.

2. Основанием призмы служит трапеция. Докажите, что плоскость, проведенная через середины параллельных сторон основания этой трапеции параллельно боковому ребру призмы, разбивает ее на части, имеющие равные объемы.

С-14 (к § 58, первый урок)

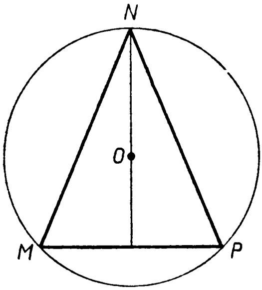
1. Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через (AB) и разбивающей пирамиду на две фигуры с равными объемами.

2. Основание пирамиды — прямоугольник, диагональ которого равна d и образует со стороной угол φ; высота пирамиды равна h. Найдите объем пирамиды.

С-15 (к § 58)

Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна d, боковая грань составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем пирамиды.

С-16 (к § 59)



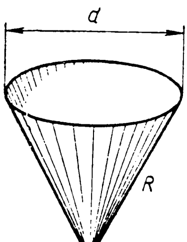
Оригинал!

Даны изображения окружности, ее центра и хорды MN. Постройте изображение равнобедренного треугольника, для которого хорда MN служит боковой стороной.

С-17 (к § 60)

Высота цилиндра равна h, диагональ осевого сечения составляет угол φ с плоскостью основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

С-18 (к § 61)



1. Коническая жестяная воронка должна иметь диаметр, равный радиусу развертки, необходимой для ее изготовления. Вычислите угол развертки. Чему будет равен диаметр воронки, если на ее изготовление затрачено 120 $см^2$ жести (без учета шва).

2. Диагональ осевого сечения усеченного конуса, равная l, перпендикулярна к боковой стороне сечения и составляет угол β с плоскостью основания усеченного конуса. Найдите площадь его боковой поверхности.

С-19 (к § 62—63)

1. Составьте уравнение сферы с центром в начале координат, проходящей через точку M $(1; -1; 3)$.

2. Площадь большого круга шара равна Q. Найдите площадь сечения шара плоскостью, находящейся на расстоянии h от конца диаметра, перпендикулярного плоскости сечения.

С-20 (к § 64)

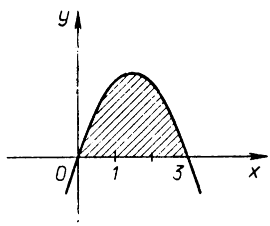
Докажите, что точка A $(-3; 2; 1)$ принадлежит сфере $x^2+y^2+z^2=14$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через данную точку и касательной к сфере.

С-21 (к § 65)

Алюминиевый провод диаметром 4 *мм* имеет массу 6,8 *кг*. Найдите длину провода (плотность алюминия 2,6 *г/см*^{3}).

С-22 (к § 66)

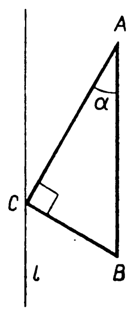
Найдите объем фигуры, образованной вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=3x-x^2$ и осью абсцисс.



С-23 (к § 67)

1. Найдите объем конуса, диаметр основания которого равен 6 *см*, а угол между образующей и плоскостью основания равен 30°.

2. Прямоугольный треугольник с площадью S и острым углом α вращается вокруг оси, проведенной через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найдите объем фигуры вращения.

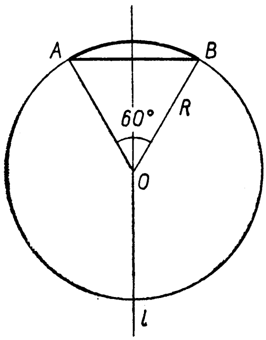


С-24 (к § 68 — 69)

1. Какая фигура имеет больший объем: шар диаметра 6 *дм* или правильная четырехугольная призма, сторона основания которой равна 6 *дм*, а высота 3 *дм*?

2. Во сколько раз нужно уменьшить диаметр сферы, чтобы уменьшить площадь сферы в 5 раз?

С-25* (к «Приложению»)



1. Точка *M* разбивает дугу полуокружности на части, угловые величины которых относятся как 1 : 3. Найдите отношение объемов фигур, полученных при вращении круговых секторов, имеющих эти дуги, вокруг оси, содержащей диаметр полуокружности.

2. Круговой сегмент радиуса *R* с дугой 60° вращается вокруг своей оси симметрии. Найдите площадь сферической поверхности получившегося шарового сегмента.

ВАРИАНТ 4

С-1 (к § 42)

1. Даны векторы $\vec{p} = (-3;\ 2;\ 1)$, $\vec{q} = (0;\ -3;\ -4)$. Найдите координаты вектора $\vec{p} - 2\vec{q}$.

2. Перпендикулярны ли векторы $\vec{c} = (0;\ -5;\ 2)$, $\vec{d} = (-6;\ -3;\ -5)$?

С-2 (к § 43)

1. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (0;\ -1;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ 1;\ 2)$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (0;\ -4;\ 3)$, $\vec{q} = \left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 1\right)$. Найдите длину вектора $\vec{p} + 2\vec{q}$.

С-3 (к § 44)

1. Дана прямоугольная система координат $Oxyz$. Постройте точки $A\ (1;\ -3;\ 2)$, $B\ (-3;\ 3;\ -4)$. Вычислите расстояние от точки $M\ (1;\ -1;\ 1)$ до середины $[AB]$.

2. Вершины однородной треугольной пластинки находятся в точках $M\ (2;\ -2;\ -2)$, $N\ (-3;\ 2;\ 1)$, $P\ (-2;\ 2;\ 2)$. Вычислите координаты центра тяжести пластинки.

С-4 (к § 45)

1. Составьте уравнение плоскости, зная, что точка $A\ (0;\ 2;\ -1)$ есть основание перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.

2. Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной оси Oy и проходящей через точку $B\ (0;\ 3;\ 0)$.

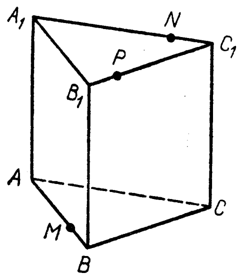
С-5 (к § 46)

1. Составьте уравнение образа плоскости $x - 2y - 3z + 2 = 0$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом, равным 0,5.

2. Найдите координаты точки, симметричной точке $A\ (-1;\ 2;\ -3)$ относительно оси ординат.

С-6 (к § 48)

Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки $M \in [AB]$, $N \in [A_1C_1]$ и $P \in [B_1C_1]$, причем $(NP) \nparallel (A_1B_1)$.



С-7 (к § 49)

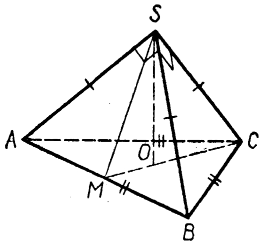
1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте образ угла C_1BC при симметрии относительно середины O диагонали AC_1.

2. Плоскости диагональных сечений прямого параллелепипеда взаимно перпендикулярны. Докажите, что основанием параллелепипеда служит ромб.

С-8 (к § 49—51)

Стороны основания прямого параллелепипеда 8 *см* и 10 *см*, одна из диагоналей основания равна 6 *см*, площадь меньшего диагонального сечения 36 *см*^{2}. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

С-9 (к § 52)



1. Основание пирамиды — трапеция, вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей этой трапеции. Докажите, что двугранные углы при всех ребрах основания пирамиды не могут быть конгруэнтны.

2. Плоские углы при вершине S правильной треугольной пирамиды $SABC$ равны по 90°. Найдите угол между ребром BC и апофемой SM, лежащей в грани SAB.

С-10 (к § 50 и 52)

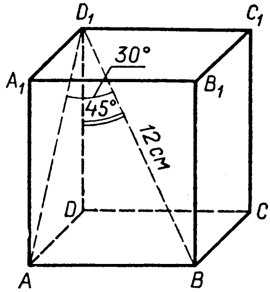
Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, высота основания которой равна 6 *см*, а угол между плоскостями боковой грани и основания равен 60°.

С-11 (к § 53)

Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны a и b $(a > b)$, острый плоский угол боковой грани равен φ. Найдите высоту усеченной пирамиды.

С-12 (к § 55—56)

Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная 12 *см*, составляет угол 30° с плоскостью боковой грани и угол 45° с боковым ребром. Найдите объем параллелепипеда.



С-13 (к § 57)

1. Основанием наклонной призмы служит трапеция. Вычислите объем модели такой призмы, произведя необходимые измерения.

2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскость, проведенная через (AB_1) параллельно (BC), разбивает его на части, имеющие равные объемы.

С-14 (к § 58, первый урок)

1. Основание пирамиды $SABCD$ — трапеция $([AB] \parallel [CD])$, точка M делит $[CD]$ пополам. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через (SM) и разбивающей пирамиду на две фигуры с равными объемами.

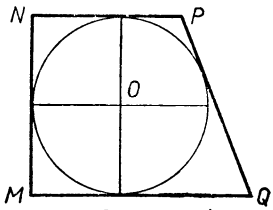
2. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, высота которого равна h, а угол при вершине α. Высота пирамиды равна H. Найдите объем пирамиды.

С-15 (к § 58)

Высота основания правильной треугольной пирамиды равна h, боковое ребро составляет с высотой пирамиды угол 30°. Найдите объем пирамиды.

С-16 (к § 59)

Дано изображение окружности с ее центром. Постройте изображение прямоугольной трапеции, описанной около этой окружности.

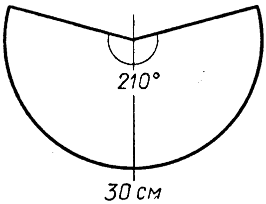


Оригинал!

С-17 (к § 60)

Площадь боковой поверхности цилиндра равна Q, высота цилиндра равна h. Найдите площадь сечения, плоскость которого параллельна оси цилиндра и отстоит от нее на расстоянии m.

С-18 (к § 61)



1. Для изготовления конической воронки из жести вырезан круговой сектор, длина дуги которого равна 30 *см*, а угол 210°. Вычислите высоту и диаметр воронки (без учета шва).

2. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны, высота усеченного конуса равна h, образующая составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

С-19 (к § 62—63)

1. Поверхность шара задана уравнением $x^2+y^2+z^2=6$. Принадлежит ли шару точка M (1; 1; 2)?

2. Плоскость сечения шара составляет угол φ с радиусом, проведенным в общую точку плоскости и сферы; площадь сечения равна Q. Найдите площадь большого круга.

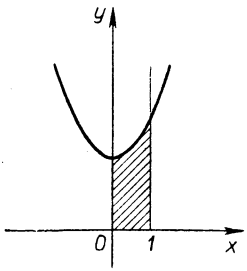
С-20 (к § 64)

Сфера с центром в начале координат проходит через точку A (2; 1; —2). Составьте уравнение плоскости, касательной к этой сфере и проходящей через данную точку.

С-21 (к § 65)

Кабель длиной 340 *м* и диаметром 7,5 *мм* заключен в свинцовую оболочку толщиной 2 *мм*. Вычислите массу оболочки кабеля (плотность свинца 11,4 *г/см*^{3}).

С-22 (к § 66)

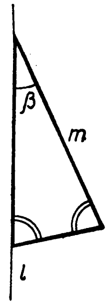


Найдите объем фигуры, образованной вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=2+x^2$ и прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$.

С-23 (к § 67)

1. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 90°, площадь сечения 18 $см^2$. Найдите объем конуса.

2. Равнобедренный треугольник, угол при вершине которого равен β, а боковая сторона равна m, вращается вокруг оси, содержащей боковую сторону. Найдите объем фигуры вращения.



С-24 (к § 68—69)

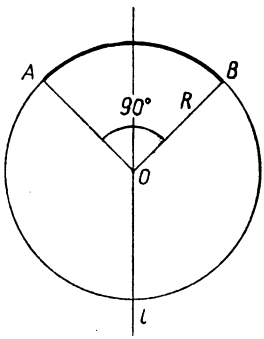
1. Модель правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 12 *см* и высотой 20 *см* изготовлена из такого же материала, как и модель шара радиуса 6 *см*. Масса какой из моделей больше?

2. Отношение площадей двух сфер равно $\frac{1}{8}$. Найдите отношение длин больших окружностей этих сфер.

С-25 (к «Приложению»)

1. Сечение шара плоскостью, перпендикулярной его радиусу, делит радиус пополам. Найдите отношение объемов частей шара.

2. Дуга окружности с угловой мерой 90° вращается вокруг своей оси симметрии. Найдите площадь получившейся сегментной поверхности, если длина дуги равна m.



КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К-1 *Вариант 1*

1. Треугольник ABC задан его вершинами: A (3; 0; 1), B (—1; 4; 2), C (5; 2; 0). Найдите длину медианы AM.

2. Даны точки A (5; —3; 4), B (3; 1; —5). Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину.

3. Дано: A (1; 2; 0), B (—1; 3; 2), $[A_1B_1] = H_O^{\frac{1}{2}}([AB])$. Найдите $|A_1B_1|$.

К-1 *Вариант 2*

1. Дано: A (2; —1; 0), B (—2; 3; 2), C (0; 0; —4), D (—4; 0; 2). Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M (2; 3; —1) и параллельной плоскости $3x - y - z + 1 = 0$.

3. Дано: M (1; 2; 3), N (1; 0; 3), $[M_1N_1] = \vec{a}([MN])$, где $\vec{a} = (0; 1; -1)$. Найдите $\widehat{MM_1N_1}$.

К-1 *Вариант 3*

1. Треугольник ABC задан его вершинами: A (3; —4; 2), B (—3; 2; —4), C (1; 3; —1). Найдите длину медианы CM.

2. Даны точки A (0; 2; —1), B (2; —2; 5). Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину.

3. Дано: M (—1; 3; 1), N (—1; 2; —1), $[M_1N_1] = H_O^{-2}([MN])$.

Найдите $|M_1N_1|$.

К-1 *Вариант 4*

1. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD, если концы отрезков имеют координаты: A (—1; 2; 3), B (1; —4; 1), C (1; —3; 2), D (1; 1; 0).

2. Составьте уравнение плоскости, параллельной плоскости $x + 2y + 3z - 2 = 0$ и проходящей через точку A (0; —2; 3).

3. Дано: $A(-1; 1; -1)$, $B(2; -2; -1)$, $[A_1B_1] = \vec{m}([AB])$, где $\vec{m} = (2; -1; 1)$. Найдите $\widehat{BB_1A_1}$.

К-2 *Вариант 1*

1. Стороны основания прямого параллелепипеда, равные 7 *см* и $\sqrt{18}$ *см*, образуют угол 135°, меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2. Докажите, что плоскости диагональных сечений правильной четырехугольной пирамиды взаимно перпендикулярны.

К-2 *Вариант 2*

1. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 12 *см* и образует угол 60° с плоскостью основания.

2. Через произвольную точку бокового ребра правильной треугольной призмы проведен перпендикуляр к плоскости противолежащей грани. Докажите, что этот перпендикуляр пересекает ось симметрии грани.

К-2 *Вариант 3*

1. Стороны основания прямого параллелепипеда, равные 8 *см* и 15 *см*, образуют угол 60°, меньшая из площадей диагональных сечений равна 130 *см*^{2}. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2. Докажите, что плоскость, проходящая через высоту и боковое ребро SA правильной треугольной пирамиды $SABC$, перпендикулярна прямой BC.

К-2 *Вариант 4*

1. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, высота которой равна h, а двугранный угол при стороне основания равен $45°$.

2. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Докажите, что плоскости диагональных сечений параллелепипеда взаимно перпендикулярны.

К-3 *Вариант 1*

1. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при вершине β, боковая грань, проходящая через основание этого треугольника, перпендикулярна основанию пирамиды. Боковые ребра, лежащие в этой грани, наклонены к плоскости основания под углами φ. Найдите объем пирамиды.

2. Через середины трех боковых ребер призмы проведена плоскость. Докажите, что получившиеся части призмы имеют равные объемы.

К-3 *Вариант 2*

1. Основание прямого параллелепипеда — ромб со стороной a, угол между плоскостями двух боковых граней равен φ, большая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем параллелепипеда.

2. Точки M и N — середины ребер SA и SC пирамиды $SABC$. Докажите, что объем пирамиды $SMNB$ равен $\frac{1}{4}$ объема данной пирамиды.

К-3 *Вариант 3*

1. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $|AB| = c$ и углом $\widehat{A} = \alpha$. Плоскость, проходящая через (AC) и точку B_1, составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем призмы.

2. Докажите, что объем пирамиды, вершиной которой служит одна из вершин параллелепипеда, а основанием — его противолежащая грань, равен $\frac{1}{3}$ объема параллелепипеда.

К-3 *Вариант 4*

1. Основанием пирамиды служит ромб с тупым углом φ и меньшей диагональю d; все двугранные углы при ребрах основания равны, большее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем пирамиды.

2. Площади граней ABB_1A_1 и BCC_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны. Докажите, что точка D_1 одинаково удалена от плоскостей ABB_1 и BCC_1.

К-4 *Вариант 1*

1. Прямоугольник со сторонами, имеющими длины a и b ($a \neq b$), служит разверткой боковой поверхности цилиндра. Зависит ли площадь осевого сечения цилиндра от того, какая из данных сторон прямоугольника равна образующей цилиндра?

2. Плоскости двух сечений шара взаимно перпендикулярны. Одна из этих плоскостей проходит через центр, а другая удалена от него на 12 *см*, общая хорда сечений равна 18 *см*. Найдите площади сечений.

К-4 *Вариант 2*

1. Хорда окружности основания конуса равна m и стягивает дугу в $90°$. Плоскость, проходящая через эту хорду и вершину конуса, составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2. Через конец A диаметра AB шара проведены две плоскости, одинаково наклоненные к (AB). Докажите, что сечения шара этими плоскостями равновелики.

К-4 *Вариант 3*

1. Дан прямоугольник со сторонами a и b ($a > b$). Вокруг какой из сторон нужно вращать этот прямоугольник, чтобы получить цилиндр с большей полной поверхностью?

2. Два сечения шара имеют единственную общую точку; плоскости сечений составляют угол $60°$, одна из них проходит через центр шара. Расстояние между параллельными диаметрами сечений равно 10 *см*. Найдите диаметр шара.

К-4 *Вариант 4*

1. Хорда окружности основания конуса, удаленная от центра основания на d, стягивает дугу в 120°. Плоскость, проходящая через эту хорду и вершину конуса, составляет с плоскостью его основания угол β. Найдите площадь полной поверхности конуса.

2. Через конец A диаметра AB шара проведены две плоскости, неодинаково наклоненные к (AB). Докажите, что сечение, к плоскости которого диаметр AB наклонен под бóльшим углом, имеет меньший диаметр.

К-5 *Вариант 1*

Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. В пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объем конуса.

К-5 *Вариант 2*

В цилиндр вписана прямая призма, основанием которой служит равнобедренный треугольник с тупым углом, равным α. Найдите объем цилиндра, если известно, что боковая сторона основания призмы равна b, а диагональ большей боковой грани равна l.

К-5 *Вариант 3*

В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольник с меньшей стороной a и углом α между диагоналями. Боковая грань, проходящая через меньшую сторону основания, наклонена к его плоскости под углом φ. Найдите объем конуса.

К-5 *Вариант 4*

Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α и меньшей диагональю d. Плоскость, проходящая через эту диагональ и вершину второго основания призмы, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем цилиндра, вписанного в призму.

К-6 *Вариант 1*

1. Докажите, что для любой правильной призмы существует сфера, проходящая через все ее вершины.

2. Угол между плоскостями основания и боковой грани правильной треугольной пирамиды равен φ, объем шара, вписанного в пирамиду, равен V. Найдите объем пирамиды.

К-6 *Вариант 2*

1. Все ребра куба касаются поверхности шара. Докажите, что объем шара больше объема куба.

2. Правильная шестиугольная пирамида вписана в сферу радиуса R, угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен φ. Найдите площадь большего диагонального сечения пирамиды.

К-6 *Вариант 3*

1. Докажите, что для любого прямоугольного параллелепипеда существует сфера, проходящая через все его вершины.

2. Угол между плоскостями основания и боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равен β, площадь сферы, вписанной в пирамиду, равна S. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

К-6 *Вариант 4*

1. Докажите, что площадь поверхности куба меньше площади сферы, касающейся всех его ребер.

2. Правильная треугольная пирамида вписана в сферу радиуса R. Найдите объем пирамиды, если угол между ее высотой и боковым ребром равен α.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

ДС-1 (к § 42)

1. Даны векторы $\vec{a} = (-4;\ 2;\ 3)$, $\vec{b} = (2;\ 0;\ -3)$. Найдите координаты вектора $(\vec{a} + 2\vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b})$.

2. Найдите значение m, при котором векторы $\vec{a} = (2;\ m;\ -3)$ и $\vec{b} = (1;\ -2;\ 1)$ перпендикулярны.

ДС-2 (к § 43)

1. При каких значениях m длины векторов $\vec{a} = (2m;\ 2;\ 3)$, $\vec{b} = (-6;\ -2;\ m)$ будут равны?

2. Найдите угол между векторами $2\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{b}$, если $\vec{a} = (-4;\ 2;\ 4)$, $\vec{b} = (\sqrt{2};\ -\sqrt{2},\ 0)$.

ДС-3 (к § 44)

1. Найдите координаты точки M, принадлежащей оси Ox, если известно, что расстояние от M до начала координат вдвое меньше, чем расстояние от M до $N\ (3;\ -2;\ 1)$.

2. Треугольник ABC задан его вершинами: $A\ (0;\ 5;\ -2)$, $B\ (1;\ 3;\ 0)$, $C\ (-7;\ 4;\ -1)$. Найдите расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

ДС-4 (к § 45)

1. Составьте уравнение плоскости, если известно, что она проходит через точки $A\ (0;\ 2;\ 0)$, $B\ (3;\ 0;\ 0)$ и перпендикулярна плоскости Oxy.

2. Дана плоскость $3x + y + 4z - 24 = 0$. Найдите координаты точек ее пересечения с осями координат.

3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A\ (-1;\ 2;\ -2)$ и перпендикулярной прямой MN, определяемой точками $M\ (3;\ -2;\ 4)$, $N\ (2;\ 1;\ -1)$.

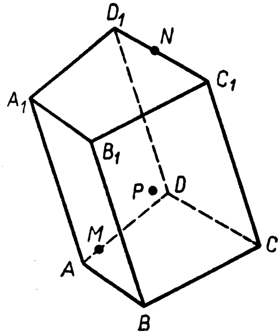
ДС-5 (к § 46)

1. При гомотетии с центром в начале координат плоскость $3x - y - z + 3 = 0$ отображается на плоскость β. Известно, что расстояние от начала координат до плоскости β вдвое больше расстояния от начала координат до данной плоскости. Составьте уравнение плоскости β.

2. Составьте уравнение образа плоскости $x + 2y - 2z + 1 = 0$ при симметрии относительно оси ординат.

ДС-6 (к § 48)

Постройте сечение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N, P, где $M \in [AD]$, $N \in [D_1C_1]$, а точка P является внутренней точкой грани BB_1C_1C.



ДС-7 (к § 49)

1. Точки M, N, P принадлежат соответственно ребрам AB, BC, BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте образ треугольника MNP при симметрии относительно точки $O = [BD_1] \cap [CA_1]$.

2. Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб, точка A_1 одинаково удалена от точек B и D. Докажите, что одно из диагональных сечений является прямоугольником.

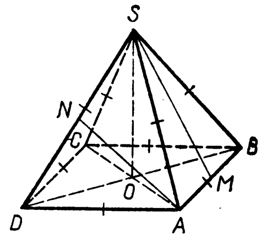
ДС-8 (к § 49—51)

Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной a, одно из боковых ребер равно b и образует с пересекающими его сторонами основания углы по 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

ДС-9 (к § 52)

1. Докажите, что ортогональная проекция высоты пирамиды на плоскость ее боковой грани лежит на прямой, определяемой высотой этой грани, проведенной из вершины пирамиды.

2. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды имеют равные длины. Найдите угол между апофемой SM ($M \in [AB]$) и медианой AN грани ASD.



ДС-10 (к § 50 и 52)

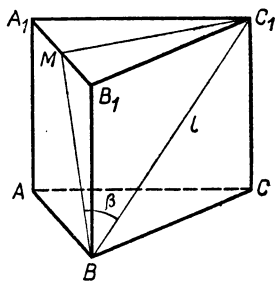
Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 3 *см* и составляет угол 60° с плоскостью боковой грани. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

ДС-11 (к § 53)

Высоты оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны m и n ($m > n$), боковое ребро составляет угол α с плоскостью основания. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

ДС-12 (к § 55—56)

Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы, равная l, составляет угол β с плоскостью другой боковой грани. Найдите объем призмы.



ДС-13 (к § 57)

1. Произведите необходимые измерения и вычислите объем модели наклонной призмы, основанием которой служит произвольный четырехугольник.

2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что расстояния между плоскостями граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1 и ADD_1A_1 обратно пропорциональны площадям этих граней.

ДС-14 (к § 58, первый урок)

1. Дана пирамида $SABCD$, основанием которой служит параллелограмм, точка M принадлежит $[BC]$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через (SM) и разбивающей пирамиду на две фигуры, имеющие равные объемы.

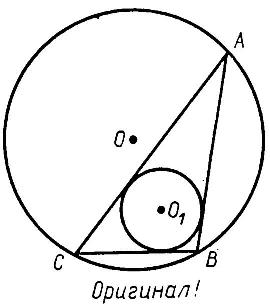
2. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a, две боковые грани — равнобедренные прямоугольные треугольники, имеющие общий катет. Найдите объем пирамиды.

ДС-15 (к § 58)

1. Найдите объем тетраэдра, если длины каждого из пяти его ребер равны m, а длина шестого ребра равна p.

2. Вершиной пирамиды служит центр симметрии данного параллелепипеда, а основанием — одна из его граней. Докажите, что объем пирамиды не зависит от выбора грани.

ДС-16 (к § 59)

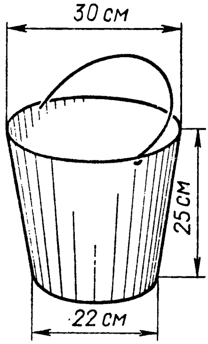


Даны изображения окружности, ее центра и вписанного в нее треугольника. Постройте изображение центра окружности, вписанной в этот треугольник.

ДС-17 (к § 60)

Хорда основания цилиндра равна a и стягивает дугу окружности основания в $\alpha°$, площадь сечения, проведенного через эту хорду перпендикулярно плоскости основания, равна S. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

ДС-18 (к § 61)



1. Высота ведра равна 25 *см*, диаметры оснований 30 *см* и 22 *см*. Вычислите размеры заготовки ведра: радиусы и угловые величины дуг развертки боковой поверхности. Расход материала на швы не учитывайте.

2. Площадь боковой поверхности конуса относится к площади его основания, как $m : n$, высота конуса равна h. Найдите площадь осевого сечения конуса.

3. Через вершину S конуса проведены две плоскости, одинаково наклоненные к высоте конуса и имеющие общую точку с основанием конуса. Докажите, что сечения конуса этими плоскостями равновелики.

ДС-19 (к § 62—63)

1. Дана сфера $x^2+y^2+z^2=64$ и точка M (—3; 7; 4). Найдите расстояние от M до сферы.

2. Составьте уравнение сферы с центром S (3; —4; 2), проходящей через точку M (5; 1; 2).

ДС-20 (к § 64)

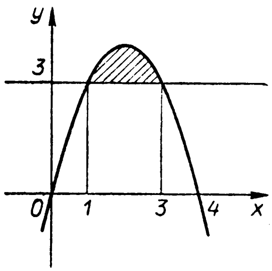
1. Точка A (—1; 2; 3) является концом диаметра сферы, имеющей центр в начале координат. Составьте уравнение плоскости, проходящей через другой конец этого диаметра и касательной к сфере.

2. Все стороны ромба с углом 120° касаются сферы радиуса 8 *см*, плоскость ромба удалена от центра сферы на 4 *см*. Найдите сторону ромба.

ДС-21 (к § 65)

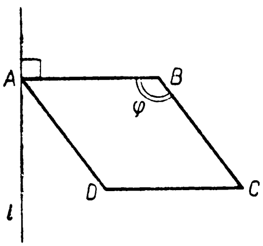
Дан прямоугольник со сторонами a и b ($a > b$). Вокруг какой оси, содержащей сторону, следует вращать этот прямоугольник, чтобы получить цилиндр большего объема? Вычислите объем этого цилиндра при $a = 12{,}3$ *см*, $b = 8{,}2$ *см*.

ДС-22 (к § 66)



Найдите объем фигуры, образованной вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и прямой $y = 3$.

ДС-23 (к § 67)



1. Хорда длиной a, лежащая в основании конуса, удалена от центра на расстояние m; плоскость, проходящая через хорду и вершину конуса, составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем конуса.

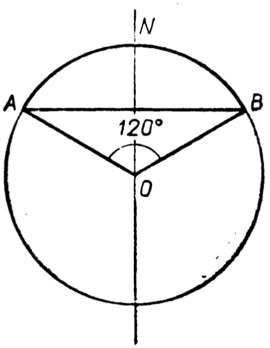
2. Ромб с площадью S и тупым углом φ вращается вокруг оси, проведенной через вершину острого угла перпендикулярно стороне. Найдите объем фигуры вращения.

ДС-24 (к § 68—69)

1. Что больше: объем шара диаметра 1 *дм* или объем правильного тетраэдра с ребром 2 *дм*?

2. Какую часть площади поверхности земного шара составляет площадь сегментной поверхности, отделяемой в северном полушарии географической параллелью в 60° северной широты?

ДС-25* (к «Приложению»)



1. Дуга осевого сечения шарового сектора равна 120°. Найдите отношение объема шарового сектора к объему соответствующего шарового сегмента.

2. Площадь сферической поверхности шарового сектора радиуса R равна площади большого круга шара. Найдите площадь конической поверхности сектора.

ВАРИАНТ 2

ДС-1 (к § 42)

1. Даны векторы $\vec{p}=(4;\ 6;\ m)$, $\vec{q}=\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{3}{4};\ 3\right)$. При каком значении m эти векторы будут коллинеарны?

2. Вычислите $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}$, если $\vec{a}=(6;\ -2;\ 1)$, $\vec{b}=$ $=(-3;\ 1;\ 4)$.

ДС-2 (к § 43)

1. При каких значениях m длина вектора $\vec{p}=(3;\ 0;\ 3m)$ будет вдвое больше длины вектора $\vec{q}=(-2;\ 4m;\ 2)$?

2. Найдите косинус угла между векторами $\frac{1}{3}\vec{b}$ и $-3\vec{a}$, если $\vec{a}=(6;\ -3;\ 6)$, $\vec{b}=(4;\ -2;\ 5)$.

ДС-3 (к § 44)

1. Найдите координаты точки, принадлежащей оси Oz и одинаково удаленной от точек $M\ (2;\ 3;\ -1)$ и $N\ (0;\ -1;\ 2)$.

2. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $B\ (1;\ 2;\ 0)$, $C\ (2;\ 0;\ 3)$. Найдите длину диагонали BD.

ДС-4 (к § 45)

1. Составьте уравнение плоскости, если известно, что она проходит через точки $P\ (-1;\ 0;\ 0)$, $Q\ (0;\ 0;\ -2)$ и перпендикулярна плоскости Oxz.

2. Дана плоскость $4x+3y-z-12=0$. Найдите расстояние от начала координат до линии пересечения данной плоскости с плоскостью Oxy.

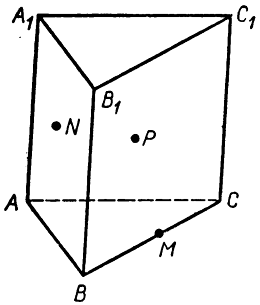
3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M\ (2;\ -3;\ 1)$ и перпендикулярной прямой, проходящей через точки $A\ (0;\ 3;\ -2)$, $B\ (2;\ -1;\ 2)$.

ДС-5 (к § 46)

1. Составьте уравнение образа плоскости $2x-y+3z-$ $-4=0$ при гомотетии с центром $S\ (2;\ 0;\ 1)$ и коэффициентом $k=2$.

2. Составьте уравнение образа плоскости $x+3y-2=0$ при симметрии относительно плоскости Oyz.

ДС-6 (к § 48)



Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N и P, где $M \in [BC]$, а N и P являются соответственно внутренними точками граней ABB_1A_1 и AA_1C_1C.

ДС-7 (к § 49)

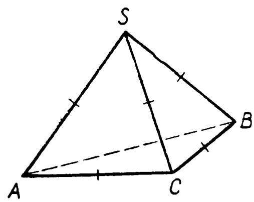
1. Точки M, N, P, Q являются соответственно серединами ребер AB, DC, DD_1, AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте образ четырехугольника $MNPQ$ при симметрии относительно точки $O = [B_1D] \cap [AC_1]$.

2. Двугранный угол при одном из боковых ребер параллелепипеда равен 90°. Докажите, что диагональные сечения параллелепипеда равновелики.

ДС-8 (к § 49—51)

Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площади диагональных сечений равны S и Q ($S < Q$), меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

ДС-9 (к § 52)



1. Докажите, что углы между противолежащими боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равны.

2. Основание пирамиды $SABC$ — равнобедренный прямоугольный треугольник ($\widehat{C} = 90°$); все ребра, кроме $[AB]$, имеют равные длины. Найдите угол между (AC) и (SB).

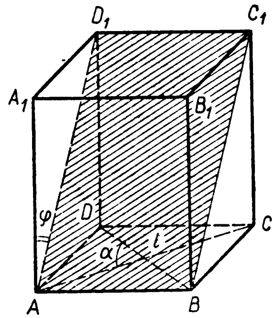
ДС-10 (к § 50 и 52)

Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее боковой грани равен 45°, апофема пирамиды равна 2 *см*. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

ДС-11 (к § 53)

Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна h, площадь диагонального сечения равна Q, двугранный угол при стороне большего основания φ. Найдите стороны оснований.

ДС-12 (к § 55—56)



Диагонали основания прямоугольного параллелепипеда равны l и образуют между собой угол α; плоскость, проведенная через бóльшие стороны оснований, составляет с ребром одной из боковых граней острый угол φ. Найдите объем параллелепипеда.

ДС-13 (к § 57)

1. Произведите необходимые измерения отрезков и вычислите объем модели наклонной призмы, основанием которой служит пятиугольник.

2. Дана призма $ABCA_1B_1C_1$. Докажите, что расстояния от ребер AA_1 и BB_1 до противолежащих граней обратно пропорциональны площадям этих граней.

ДС-14 (к § 58, первый урок)

1. Дана пирамида $SABCD$, основанием которой служит трапеция ($[AB] \parallel [CD]$, $|AB| > |CD|$), $M \in [CD]$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через (SM) и разбивающей пирамиду на две фигуры с равными объемами.

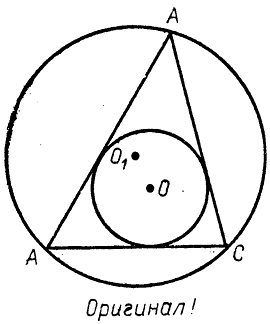
2. Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой c, боковая грань, проходящая через эту гипотенузу,— правильный треугольник, причем его плоскость перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Найдите объем пирамиды.

ДС-15 (к § 58)

1. В треугольной пирамиде два плоских угла при вершине прямые, третий плоский угол равен φ, длины боковых ребер равны a, b, c. Найдите объем пирамиды.

2. Докажите, что объем треугольной пирамиды, отсекаемой от данного параллелепипеда плоскостью, проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, не зависит от выбора этой вершины.

ДС-16 (к § 59)

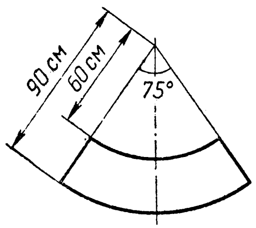


Даны изображения окружности, ее центра и треугольника, описанного около нее. Постройте изображение центра окружности, описанной вокруг этого треугольника.

ДС-17 (к § 60)

Хорда основания цилиндра равна a и стягивает дугу окружности основания в $\alpha°$, площадь боковой поверхности цилиндра равна Q. Найдите площадь сечения, проведенного через данную хорду параллельно оси цилиндра.

ДС-18 (к § 61)



1. Какую высоту будет иметь ведро, если у заготовки его боковой поверхности угловые величины дуг равны 75°, а радиусы — 90 *см* и 60 *см*? (Расход материала на швы не учитывайте.)

2. Площадь основания конуса равна Q, угол наклона образующей к плоскости основания равен φ. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен β.

3. Угол при вершине осевого сечения конуса тупой. Имеются ли среди сечений конуса плоскостями, проходящими через две его образующие, такие, площади которых больше площади осевого сечения?

ДС-19 (к § 62—63)

1. Дана сфера $x^2+y^2+z^2=49$ и точка M (1; 3; 5). Найдите расстояние от точки M до сферы.

2. Поверхность шара задана уравнением $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$. Принадлежит ли шару точка M (1; 1; 1)?

ДС-20 (к § 64)

1. Точки A (2; —1; 0) и B (—2; 1; 0) являются концами диаметра сферы. Составьте уравнения касательных плоскостей к этой сфере, проведенных через точки A и B.

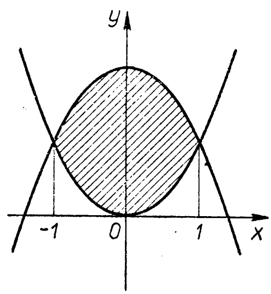
2. Все стороны прямоугольного треугольника с катетами 6 *см* и 8 *см* являются касательными к сфере радиуса $\sqrt{5}$ *см*. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

ДС-21 (к § 65)

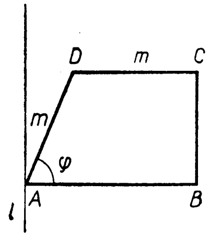
Прямоугольник со сторонами a и b ($a<b$) служит разверткой боковых поверхностей двух цилиндров, высоты которых соответственно равны b и a. Какой из цилиндров имеет больший объем? Вычислите этот объем при $a=0{,}72$ *м*, $b=1{,}28$ *м*.

ДС-22 (к § 66)

Найдите объем фигуры, образованной вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной параболами $y=2-x^2$ и $y=x^2$.



ДС-23 (к § 67)



1. Хорда длиной $2a$, лежащая в основании конуса, стягивает дугу φ, угол при вершине осевого сечения конуса равен β. Найдите объем конуса.

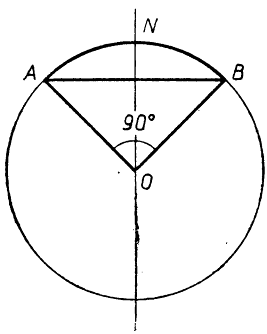
2. Прямоугольная трапеция, у которой меньшее основание и бо́льшая боковая сторона равны m, а острый угол φ, вращается вокруг оси, проведенной через вершину данного угла перпендикулярно основанию трапеции. Найдите объем фигуры вращения.

ДС-24 (к § 68—69)

1. Что больше: масса свинцового шара диаметра 10 *см* или масса деревянного куба с ребром 20 *см*, если плотность свинца в 15 раз больше плотности дерева?

2. Какую часть площади поверхности земного шара составляет площадь поверхности зоны, ограниченной экватором и параллелью в 45°?

ДС-25* (к «Приложению»)



1. Дуга осевого сечения шарового сегмента равна 90°. Найдите отношение объема сегмента к объему соответствующего шарового сектора.

2. Площадь сферической поверхности шарового сегмента в два раза больше площади его основания. Найдите высоту сегмента, если радиус шара равен R.

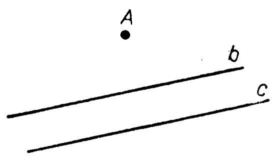
САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ НА ПОВТОРЕНИЕ

ВАРИАНТ 1

СП-1

1. Постройте шестиугольник, имеющий центр симметрии. Каковы особенности в расположении его сторон?

2*. Даны точка A и прямые b и c, $b \parallel c$. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершины B и C принадлежали соответственно прямым b и c, $|AB| = |AC|$, $\widehat{A} = 30°$.



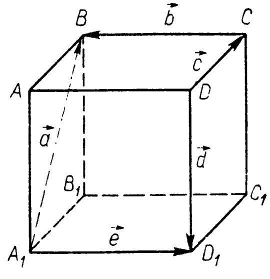
СП-2

1. Постройте фигуру, которая является объединением четырех конгруэнтных окружностей, каждая из которых касается по крайней мере двух других, имеющую не менее двух осей симметрии.

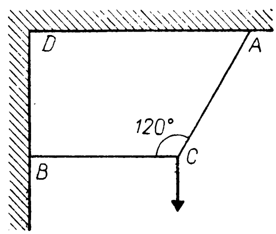
2. Докажите, что если каждая из точек C и D одинаково удалена от точек A и B, то прямая CD является осью симметрии точек A и B.

СП-3

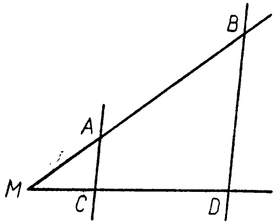
1. Найдите сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$, изображенных на рисунке; $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.



2. Груз массой 30 *кг* поддерживается двумя стержнями AC и BC. Найдите силы, действующие на стержни, если $\widehat{ACB} = 120°$, $\widehat{DBC} = \widehat{ADB} = 90°$.



СП-4



1. $a \cap b \cap c = M$, $\{A_1, A_2\} \subset a$, $\{B_1, B_2\} \subset b$, $\{C_1, C_2\} \subset c$, $(A_1, B_1) \parallel (A_2B_2)$, $(B_1C_1) \parallel (B_2C_2)$. Докажите, что $(A_1C_1) \parallel (A_2C_2)$.

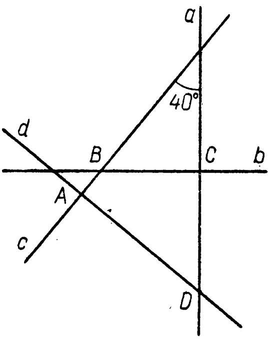
2. Вычислите длину отрезка MC, если $(AC) \parallel (BD)$, $|CD| = 7$ *см*, $|AM| = 5$ *см*, $|BM| = 15$ *см*.

СП-5

1. Постройте треугольник по стороне, равной 5 *см*, прилежащему к ней углу 70° и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла, равной 4 *см*.

2. Постройте треугольник, если известны его основание, равное 6 *см*, угол, прилежащий этому основанию, равный 80°, и радиус окружности, описанной около этого треугольника, равный 5 *см*.

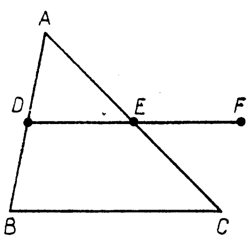
СП-6



1. По данным на рисунке размерам вычислите углы четырехугольника $ABCD$, если $a \perp b$ и $c \perp d$.

2. Сумма внешних углов многоугольника равна сумме его внутренних углов. Вычислите число сторон этого многоугольника.

СП-7



1. В треугольнике ABC $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $|BD| = |DA|$, $|AE| = |EC|$, $F \in (DE)$, $|EF| = |DE|$. а) Докажите, что точки B, D, F и C являются вершинами параллелограмма. б) Определите вид четырехугольника с вершинами A, F, C, D и вычислите его площадь, если $|BC| = 10$ *см*, $|AC| = 12$ *см*, $\widehat{ACB} = 45°$.

2. Какой фигурой является объединение треугольника и фигуры, ему симметричной относительно середины одной из его сторон?

3. Какой фигурой может быть пересечение двух углов? Приведите примеры.

СП-8

1. Вычислите периметр и площадь равнобедренной трапеции, если ее меньшее основание равно 10 *см*, боковая сторона равна 8 *см* и угол между ними равен 135°.

2. Около окружности описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 18 *см*. Вычислите длину ее средней линии.

СП-9

1. Сила P разложена на две составляющие, которые образуют с направлением силы P углы α и β. Найдите эти силы.

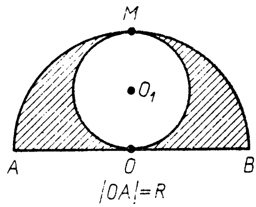
2. В треугольнике ABC $|AC| = b$, $|AB| = c$, $\widehat{A} = \alpha$. Выразите через b, c и α медиану BD треугольника и угол, который образует медиана BD со стороной AC.

СП-10

1. Из концов диаметра окружности по разные стороны от него проведены две параллельные хорды. Докажите, что эти хорды конгруэнтны.

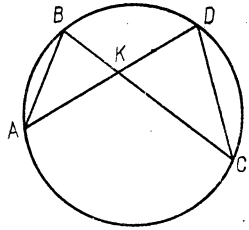
2. Из точки A окружности проведены диаметр AB и хорда AC, которая продолжена за точку C на расстояние $|CK|$, равное $|AC|$. Докажите, что $|AB| = |BK|$.

3. Выразите через R периметр и площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке.



СП-11

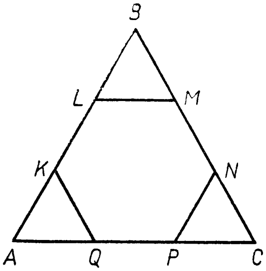
1. Докажите подобие треугольников ABK и KDC, изображенных на рисунке, и вычислите коэффициент подобия, если $|BK| = 4$ *см*, $|KC| = 8$ *см*, $|KD| = 5$ *см*. Какое из данных лишнее?



2. Вычислите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 20 *см*, а угол при вершине 40°.

3. В окружность радиуса R вписан четырехугольник $ABCD$ такой, что величины дуг AB, BC, CD, DA пропорциональны числам 3, 4, 5 и 6. Выразите через R периметр этого четырехугольника.

СП-12



1. От правильного треугольника со стороной a отрезали треугольники (см. рисунок) так, чтобы образовался правильный шестиугольник. Выразите через a его площадь.

2. В круг радиуса 6 *см* впишите треугольник, два угла которого 40° и 60°.

СП-13

1. Постройте треугольник, если длины двух его сторон пропорциональны числам 2 и 3, угол между ними равен 50°, а биссектриса этого угла равна 4 *см*.

2. В данный полукруг впишите прямоугольник, длины сторон которого пропорциональны числам 3 и 4, так, чтобы две его вершины принадлежали диаметру, а две другие — полуокружности.

СП-14

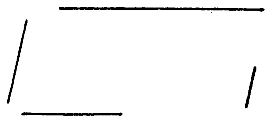
1. Точка A имеет координаты $(x; y)$. Какие координаты имеет образ точки A в композиции $R^{45°} \circ R^{45°}$?

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют соответственно координаты $(4; -2; -4)$ и $(6; -3; 2)$. Вычислите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

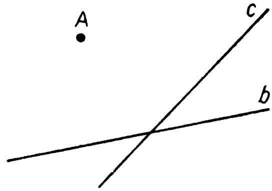
ВАРИАНТ 2

СП-1

1. Постройте центр симметрии параллелограмма, вершины которого не помещаются на чертеже.



2*. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин находилась в данной точке A, а две другие — на двух данных пересекающихся прямых.



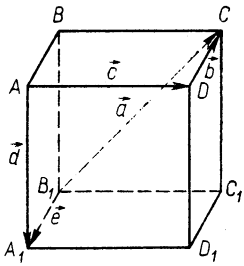
СП-2

1. Постройте фигуру, которая является объединением трех окружностей и имеет бесконечное множество осей симметрии.

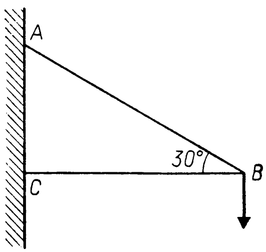
2. Постройте четырехугольник $ABCD$, если $|AB| = 3$ *см*, $|BC| = 4$ *см*, $|AC| = 6$ *см*, $|DC| = 5$ *см*, а диагональ AC делит угол BAD на два конгруэнтных угла.

СП-3

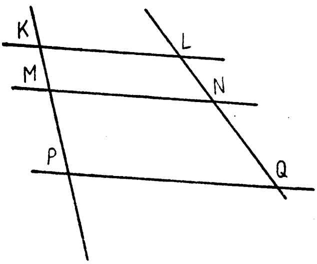
1. Найдите сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$, изображенных на рисунке; $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.



2. Груз массой 60 *кг* поддерживается двумя стержнями AB и CB. Найдите силы, действующие на стержни, если $\widehat{ACB} = 90°$, $\widehat{ABC} = 30°$.



СП-4



1. В треугольнике ABC $M \in [AB]$, $|AM| : |MB| = 1 : 2$. Через точку M проведена прямая MK, параллельная стороне BC, $K \in [AC]$, затем через точку K проведена прямая KD, параллельная стороне AB, $D \in [BC]$. В каком отношении прямая MC делит отрезок KD?

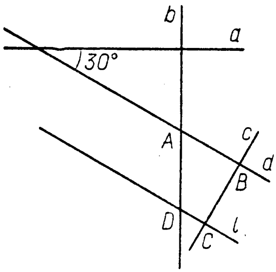
2. Вычислите длину отрезка PQ, если $(KL) \parallel (MN) \parallel (PQ)$, $|KM| : |MP| = 1 : 2$, $|KL| = 5$ *см*, $|MN| = 6$ *см*.

СП-5

1. Постройте треугольник по двум сторонам, равным 4 *см* и 1 *см*, и медиане, равной 3 *см*, проведенной к большей из данных сторон.

2. Постройте треугольник по его основанию, равному 4 *см*, углу при основании 50° и радиусу окружности, описанной около этого треугольника, равному 6 *см*.

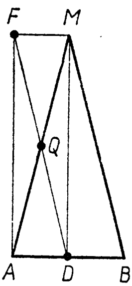
СП-6



1. По данным на рисунке размерам вычислите углы четырехугольника $ABCD$, если $a \perp b$, $c \perp d$, $d \parallel l$.

2. Сумма внешних углов многоугольника в 3 раза меньше суммы его внутренних углов. Найдите число сторон этого многоугольника.

СП-7



1. В треугольнике ABM $|AM| = |BM|$, $D \in [AB]$, $Q \in [AM]$, $|AD| = |DB|$, $(DQ) \parallel [BM]$, $F \in (DQ)$, $|DQ| = |QF|$. Докажите, что: а) точки A, D, M и F являются вершинами прямоугольника; б) точки D, F, M и B являются вершинами параллелограмма. в) Вычислите площадь прямоугольника $ADMF$, если $|AM| = 10$ *см*, $\widehat{B} = 75°$.

2. Какой фигурой является объединение прямоугольной трапеции и фугуры, ей симметричной относительно прямой, на которой лежит ее наименьшая боковая сторона?

3. Какой фигурой может быть пересечение двух конгруэнтных квадратов, имеющих общий центр симметрии?

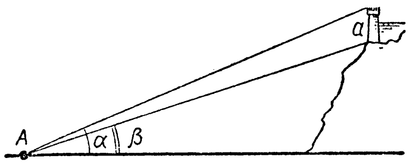
СП-8

1. Основания трапеции равны 4 *см* и 10 *см*, одна из боковых сторон образует с меньшим основанием угол 150°. Вычислите длину этой боковой стороны трапеции, если площадь трапеции равна 21 *см*^{2}.

2. Диагональ равнобедренной трапеции является биссектрисой ее острого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 7,5 *см* и 12,5 *см*. Вычислите длины сторон трапеции.

СП-9

1. На горе находится башня высотой a *м*. Из точки A вершина и основание башни видны под углами α и β соответственно. Выразите через a, α и β высоту горы.



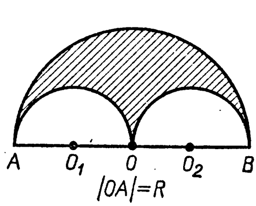
2. В треугольнике ABC $|BC| = a$, $\widehat{C} = \gamma$, биссектриса CD треугольника равна l. Выразите через a, l и γ длину отрезка BD и величину угла B.

СП-10

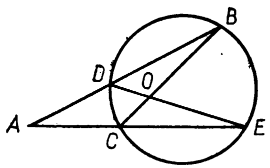
1. Из концов диаметра окружности по разные стороны от него проведены две конгруэнтные хорды. Докажите, что эти хорды параллельны.

2. Из точки A окружности радиуса R проведены две конгруэнтные хорды AB и AC, образующие угол 120°. Вычислите расстояние от центра этой окружности до прямой BC.

3. Выразите через R периметр и площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке.



СП-11

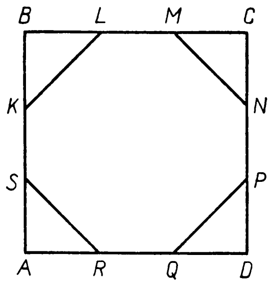


1. Укажите на рисунке подобные треугольники.

2. Вычислите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 10 *см* и углом при основании 30°.

3. В окружность радиуса R вписан восьмиугольник $ABCDEFGH$, $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{E} = \widehat{G}$. Выразите через R периметр четырехугольника $BDFH$.

СП-12



1. От квадрата со стороной b отрезали треугольники (см. рисунок) так, чтобы образовался правильный восьмиугольник. Выразите через b площадь полученного восьмиугольника.

2. В круг радиуса 5 *см* впишите четырехугольник, два угла которого равны 50° и 110°.

СП-13

1. Постройте треугольник по отношению длин двух его сторон, равному 3 : 1, углу между ними 60° и высоте, равной 6 *см*, проведенной к большей из этих двух сторон.

2. В данный сегмент, угловая величина дуги которого меньше 180°, впишите квадрат так, чтобы две его вершины принадлежали хорде, а две другие — дуге сегмента.

СП-14

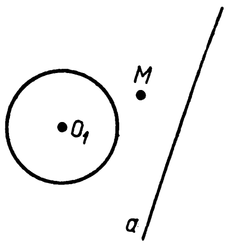
1. Точка B имеет координаты $(x; y)$. Какие координаты имеет образ точки B в композиции $R^{45°} \circ R^{135°}$?

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют соответственно координаты $(4; -2; -4)$ и $(6; -3; 2)$. Вычислите $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

ВАРИАНТ 3

СП-1

1. Даны точка, окружность и прямая. Постройте отрезок, концы которого лежат на прямой и окружности, так, чтобы он делился данной точкой пополам.

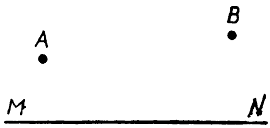


2*. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин находилась в заданной точке A, а две другие — на двух данных параллельных прямых b и c.

СП-2

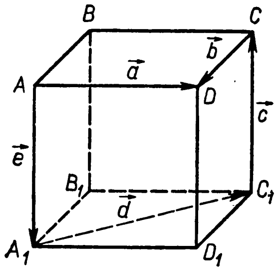
1. Постройте фигуру, которая является объединением трех окружностей и имеет две и только две оси симметрии.

2. В каком направлении должен идти луч света из источника A, чтобы, отразившись от плоского зеркала MN, он попал в точку B?

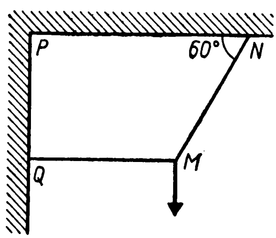


СП-3

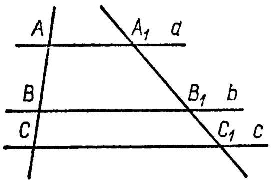
1. Найдите сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$, изображенных на рисунке; $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.



2. Груз массой 20 *кг* поддерживается двумя стержнями NM и QM. Найдите силы, действующие на стержни, если $\widehat{MNP} = 60°$, $\widehat{QPN} = \widehat{PQM} = 90°$.



СП-4



1. В треугольнике ABC через середину стороны AB — точку M проведена прямая MN, параллельная стороне BC, ($N \in [AC]$), и через точку N проведена прямая NK, параллельная (AB) ($K \in [BC]$). Докажите, что отрезок MC делит отрезок NK на два конгруэнтных отрезка.

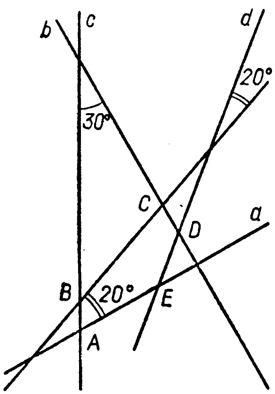
2. Прямые a, b и c параллельны. Вычислите длину отрезка BC, если $|AB| = 4$ *см*, $|A_1B_1| = 5$ *см*, $|A_1C_1| = 8$ *см*.

СП-5

1. Постройте треугольник по двум сторонам 5 *см* и 6 *см* и высоте 4 *см*, проведенной к большей из данных сторон.

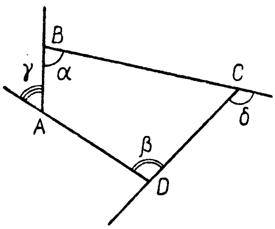
2. Постройте треугольник ABC, если $|AB| = 6$ *см*, $\widehat{A} = 60°$, а радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 2 *см*.

СП-6

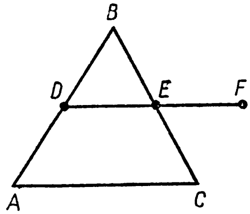


1. По данным на рисунке размерам вычислите углы пятиугольника $ABCDE$, если $a \perp b$.

2. Докажите, что в четырехугольнике $ABCD$ $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.



СП-7



1. DE — средняя линия равностороннего треугольника ABC. $D \in [AB]$, $E \in [BC]$, $F \in (DE)$, $|DF| = 2\,|EF|$.
а) Докажите, что точки A, D, F и C являются вершинами параллелограмма.
б) Определите вид четырехугольника $BDCF$ и вычислите его площадь, если $|AC| = 10$ *см*.

2. Какой фигурой является объединение равнобедренного треугольника и фигуры, ему симметричной относительно середины его основания?

3. Какой фигурой может быть пересечение двух полуплоскостей?

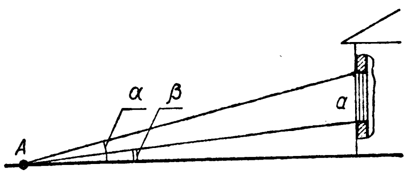
СП-8

1. Основания равнобедренной трапеции равны 6 *см* и 15 *см*. Диагональ трапеции делит ее острый угол пополам. Вычислите периметр трапеции.

2. Боковые стороны трапеции образуют с бóльшим основанием углы в 45° и 60°. Вычислите площадь трапеции, если меньшее основание ее равно 10 *см*, а высота трапеции равна 3 *см*.

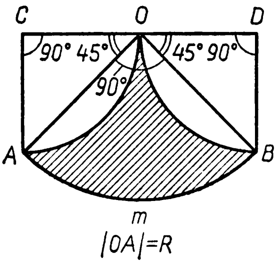
СП-9

1. Найдите расстояние от данной точки A до строения, если из точки A верхний край одного из его окон виден под углом α, а нижний — под углом β, высота окна равна a.



2. В треугольнике ABC $\widehat{C} = \gamma$, $[CK]$ — биссектриса треугольника, равная l. Высота, проведенная из вершины A, равна h. Выразите $|AC|$ и $|AK|$ через γ, l и h.

СП-10

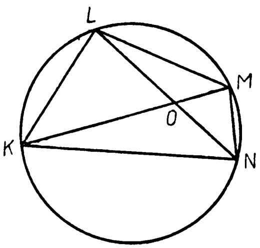


1. Из концов диаметра окружности по разные от него стороны проведены две параллельные хорды. Докажите, что расстояния от центра окружности до этих хорд равны.

2. Через конец A диаметра AB окружности проведена хорда AC, равная радиусу. Вычислите отношение $\frac{|BC|}{|AB|}$.

3. Выразите через R периметр и площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке.

СП-11



1. Укажите на рисунке пары подобных треугольников.

2. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника, величины углов которого пропорциональны числам 2, 3 и 4, если наибольшая его сторона равна 4 *см*.

3. В круг радиуса R вписан шестиугольник $ABCDEF$, $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{E}$. Выразите через R периметр треугольника BDF.

СП-12

1. Найдите отношение периметра квадрата к длине окружности круга, если эти фигуры равновелики.

2. Постройте четырехугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность, если $|AB| = |BC| = 5$ *см*, $\widehat{B} = \widehat{C} = 100°$.

СП-13

1. Постройте треугольник по отношению длин двух его сторон, равному 1 : 3, углу между ними 40° и медиане, проведенной из вершины данного угла, равной 5 *см*.

2. В данный сектор, угловая величина дуги которого меньше 180°, впишите квадрат так, чтобы две его вершины принадлежали дуге сектора, а две другие — его радиусам.

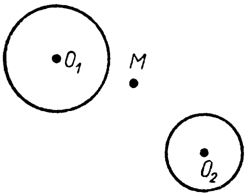
СП-14

1. Точка C имеет координаты $(x;\ y)$. Какие координаты имеет образ точки C в композиции $R^{135^\circ} \circ R^{-45^\circ}$?

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют соответственно координаты $(4;\ -2;\ -4)$ и $(6;\ -3;\ 2)$. Вычислите $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

ВАРИАНТ 4

СП-1

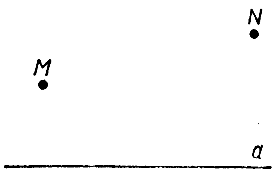


1. Даны две окружности и точка. Через эту точку проведите секущую так, чтобы ее отрезок, концы которого принадлежат данным окружностям, делился данной точкой пополам.

2*. Постройте равнобедренный треугольник с острым углом при вершине, равным 30°, так, чтобы его вершины лежали на трех данных параллельных прямых.

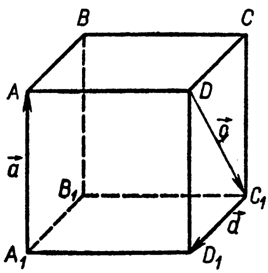
СП-2

1. Постройте фигуру, которая является объединением четырех разносторонних треугольников с общим основанием и имеет две оси симметрии. Какой фигурой является пересечение этих треугольников?



2. На берегу a канала требуется построить водонапорную башню для снабжения водой селений M и N. Выберите место для строительства башни с таким расчетом, чтобы общая длина труб от водонапорной башни до селений была бы наименьшей.

СП-3

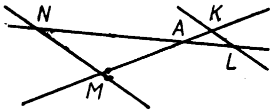


1. Найдите сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, изображенных на рисунке; $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

2. Три силы F_1, F_2 и F_3, приложенные к одной точке, попарно взаимно перпендикулярны. Найдите величину их равнодействующей R, если $F_1 = 2$ *кгс*, $F_2 = 10$ *кгс*, $F_3 = 11$ *кгс*.

СП-4

1. На продолжении диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка M, и через точку M проведены две прямые, пересекающие стороны AB и BC и продолжения сторон CD и AD в точках E, G, F и H соответственно. Докажите, что $(EG) \parallel (FH)$.



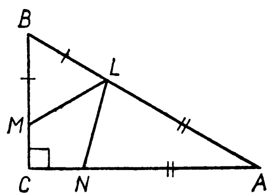
2. $(KL) \parallel (MN)$. Вычислите длину отрезка LA, если $|AN| = 5$ *см*, $|KM| = 4$ *см*, $|MA| = 3$ *см*.

СП-5

1. Постройте равнобедренный треугольник по основанию 4 *см* и высоте, равной 2 *см*, проведенной к боковой стороне.

2. Постройте треугольник ABC, если $\widehat{A} = 70°$, высота, проведенная из вершины C, равна 5 *см*, а радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 2 *см*.

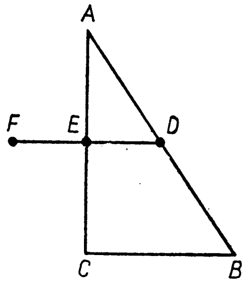
СП-6



1. В треугольнике ABC $\widehat{C} = 90°$, $|AN| = |AL|$, $|BM| = |BL|$. Докажите, что $\widehat{MLN} = 45°$.

2. Через произвольную точку плоскости треугольника ABC проведены в этой плоскости прямые, перпендикулярные сторонам треугольника; $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$. Выразите через α и β углы, образованные этими прямыми, если $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$.

СП-7



1. $[DE]$ — средняя линия прямоугольного треугольника ABC, $\widehat{C} = 90°$, $F \in (DE)$, $|DF| = 2|DE|$. а) Докажите, что точки B, D, F и C являются вершинами параллелограмма. б) Определите вид четырехугольника $ADCF$ и вычислите его площадь, если $|BC| = 4$ *см*, $|AC| = 6$ *см*.

2. Какой фигурой является объединение равнобедренной трапеции и фигуры, ей симметричной относительно середины ее боковой стороны?

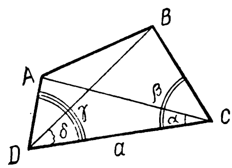
3. Какой фигурой может быть пересечение двух полос?

СП-8

1*. Диагонали AC и BD равнобедренной трапеции $ABCD$ с основанием AB пересекаются в точке O, $\widehat{AOB} = 60°$. Докажите, что середины отрезков AO, OD и BC являются вершинами правильного треугольника.

2. Около круга радиуса R описана трапеция с углами при бо́льшем основании α и β. Выразите через R, α и β площадь трапеции.

СП-9



1. В четырехугольнике $ABCD$ $|CD| = a$, $\widehat{ACD} = \alpha$, $\widehat{BCD} = \beta$, $\widehat{ADC} = \gamma$, $\widehat{BDC} = \delta$. Выразите длину стороны AB через a, α, β, γ и δ.

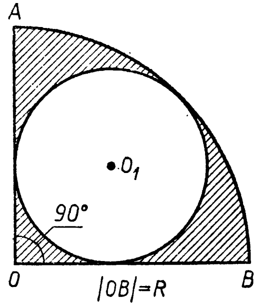
2*. В треугольнике ABC $\widehat{B} = \beta$; медиана, проведенная из вершины B, равна m; высота, проведенная из вершины C, равна h. Выразите через β, m и h длины сторон BC и AB.

СП-10

1. Из концов диаметра окружности по разные от него стороны проведены две хорды, находящиеся на равном расстоянии от центра окружности. Докажите, что эти хорды параллельны.

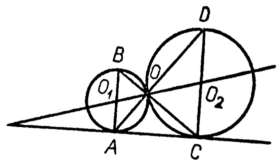
2. Через конец B диаметра AB проведена к окружности касательная, на которой отмечена точка C так, что отрезок AC делится окружностью на два конгруэнтных отрезка. Вычислите величину угла BAC.

3. Выразите через R периметр и площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке.



СП-11

1. Докажите подобие треугольников ABC и ACD (см. рисунок); $O \in [O_1O_2]$, $[AB] \parallel [CD]$, $[AB] \perp (AC)$.



2. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника, величины углов которого пропорциональны числам 5, 6 и 7, если его наименьшая сторона равна 10 *см*.

3. Из точки A к окружности радиуса R проведена касательная и секущая, B — точка касания, D и C — точки пересечения секущей с окружностью, точка D лежит между точками A и C. BD — биссектриса угла B треугольника ABC, ее длина равна R. Выразите через R расстояние от точки A до центра O окружности.

СП-12

1. Найдите отношение периметра правильного шестиугольника к длине окружности круга, если эти фигуры равновелики.

2. Постройте четырехугольник $ABCD$, если известно, что $|AB| = |BC| = 5$ *см*, $\widehat{B} = 100°$, а радиус вписанной в него окружности равен 2 *см*.

СП-13

1. Постройте треугольник, если длины его сторон пропорциональны числам 4, 5 и 6, а медиана, проведенная к большей его стороне, равна 4 *см*.

2. В данный сектор, угловая величина дуги которого меньше 90°, впишите квадрат так, чтобы две его вершины принадлежали одному из радиусов, третья — другому радиусу, а четвертая — дуге сектора.

СП-14

1. Точка D имеет координаты $(x; y)$. Какие координаты имеет образ точки D в композиции $R^{-90^\circ} \circ S_{Ox}$.

2. Даны точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$ и $C(0; 1; -5)$. Вычислите $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) \cdot (2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Валерий Александрович Гусев,
Галина Герасимовна Маслова,
Залман Алтерович Скопец,
Михаил Ильич Ягодовский

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 10 КЛАССА

Редактор *С. В. Пазельский*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректор *Т. Ф. Алексина*

ИБ № 3889

Подписано в печать с матриц 17.05.79. 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 3. Школьн. гарн. Высокая печать. Усл. п. л. 6,0. Уч.-изд. л. 3,79. Тираж 770 000 (300 001—770 000) экз. Заказ № 114. Цена 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

10 к.