

ГЕОМЕТРИЯ В VII КЛАССЕ

ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ



ГЕОМЕТРИЯ

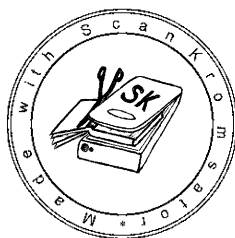
В VII КЛАССЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

513 (07)

Г 36

**В. А. ГУСЕВ, Г. Г. МАСЛОВА, Ф. Ф. НАГИБИН,
А. Ф. СЕМЕНОВИЧ, Р. С. ЧЕРКАСОВ**



Scan AAW

Геометрия в VII классе. Пособие для учителей,
Г 36 М., «Просвещение», 1973.
174 с.

На обороте тит. л. авт.: В. А. Гусев, Г. Г. Маслова,
Ф. Ф. Нагибин и др.

Г 0065—507
М103(03)—73

513 (07)

ВВЕДЕНИЕ

Книга содержит методические рекомендации к учебному пособию «Геометрия, 7»¹. Она состоит из введения, пяти глав, соответствующих главам учебного пособия, и приложений.

Во введении изложены основные идеи, положенные в основу учебника VII класса, даны общие методические установки по использованию его в учебной работе.

Главы² II, IV—VI посвящены комментированию непосредственно пунктов учебника. Параграфы и пункты в этих главах носят те же названия, что и в учебнике. Структура этих разделов аналогична структуре разделов пособия «Геометрия в VI классе. В помощь учителю»³. В книге приведены методические советы по изучению содержания каждого пункта, указан материал, который желательно повторить к уроку. В соответствии со временем, выделяемым на изучение того или иного пункта учебника, перечислены задачи, которые следует рассмотреть на уроке или включить в домашнее задание. Помещены также дополнительные вопросы и задачи. К отдельным пунктам даны рекомендации по использованию таблиц и моделей.

Призваны сэкономить время учителя указания и ответы к задачам, помещенным в конце каждого пункта и главы. Как указания, так и приведенные в книге примеры оформления решения задач носят, естественно, примерный характер. Работу учащихся по отысканию и сравнению различных вариантов решения следует всемерно поощрять.

В пособии даются рекомендации по использованию «Дидактических материалов»⁴.

В приложениях даются ориентировочный план учебной работы по геометрии в VII классе и семь примерных контрольных работ

¹ А. Н. Колмогоров, А. Ф. Семенович, Ф. Ф. Нагибин, Р. С. Черкасов. Геометрия, 7. Учебное пособие, под ред. А. Н. Колмогорова, изд. 2, перераб. М., «Просвещение», 1973.

² Нумерация глав, параграфов, пунктов в книге соответствует нумерации в учебном пособии «Геометрия, 7», под ред. А. Н. Колмогорова.

Глава III из книги изъята, так как ее изучение переносится в VIII класс.

³ В. А. Гусев, Г. Г. Маслова, Ф. Ф. Нагибин, А. Ф. Семенович, Р. С. Черкасов. Геометрия в VI классе. В помощь учителю, под ред. А. Н. Колмогорова. М., «Просвещение», 1972.

⁴ В. А. Гусев, Г. Г. Маслова, Ф. Ф. Нагибин, А. Ф. Семенович, Р. С. Черкасов. Дидактические материалы по геометрии для 7 класса. М., «Просвещение», 1973.

(в четырех вариантах каждая). Выполнение дополнительных заданий в контрольных работах не обязательно. Ученик может получить высший балл (оценку 5) за выполнение только основной части работы.

Содержание курса геометрии VII класса

Учебник геометрии VII класса является непосредственным продолжением учебника VI класса, и в нем развиваются идеи, положенные в основу курса геометрии восьмилетней школы, для которого характерно:

1) последовательное выражение точки зрения на геометрические фигуры как на множества точек;

2) использование понятия расстояния как одного из исходных в геометрии;

3) систематическое развитие представлений о геометрических преобразованиях как обратимых отображениях всей плоскости на себя. В VI классе это — «перемещения» плоскости (изометрии), в VII классе — преобразования подобия и, в частности, гомотетии;

4) последовательная подготовка учащихся к усвоению ими аксиоматического метода.

Программа предусматривает введение понятия вектора (вектор определяется как параллельный перенос) и последующее систематическое использование его при изложении геометрии в старших классах и в курсе физики; изучение и практические приложения тригонометрических функций углов от -180° до 180° .

Учебник содержит следующие главы:

Глава II. Многоугольники (продолжение).

Глава III. Начальные сведения из стереометрии.

Глава IV. Окружность и круг.

Глава V. Векторы.

Глава VI. Подобие.

В теме «Многоугольники» новыми для учителя будут вопросы, связанные с несколько более обстоятельным, чем это было в прежнем курсе геометрии, знакомством с необходимыми и достаточными условиями, а также с рассмотрением площадей как геометрических величин.

При изучении многоугольников широко используются понятия осевой и центральной симметрий. Свойства симметрии применяются и при решении задач.

В главе «Окружность и круг» даются теоремы, ранее входившие в курс геометрии, но здесь оказалось возможным, пользуясь геометрическими преобразованиями, упростить доказательства, уточнить определения. В VII классе вводится понятие угловой величины дуги, которое затем будет использовано в VIII классе при изложении тригонометрии (заметим, что в VIII классе будут рассмотрены еще некоторые вопросы, связанные с окружностью и кругом, — вписанные углы и их измерение, длина окружности и площадь круга и др.).

При изучении материала этой главы систематически используются понятие поворота и его свойства.

Новой для нашей восьмилетней школы является тема «Векторы», изложение которой дается в главе V. Знакомство с векторами необходимо учащимся не только для изучения курса физики. Понятие вектора активно «работает» и в дальнейшем изложении геометрии. Так, его использование позволило внести существенные усовершенствования в изложение главы о подобии фигур.

Вектор определяется как параллельный перенос — перемещение, хорошо известное учащимся из VI класса. В обязательный материал включено понятие о действиях над векторами (сложение, вычитание, умножение на число).

Завершает курс геометрии VII класса тема «Подобие», при изложении которой используется большой круг ранее изученных понятий — геометрическая фигура как множество точек, отображение плоскости на себя, векторы и т. д.

Здесь учащиеся знакомятся с новым видом отображений — гомотетией, — в котором образ X_1 произвольной точки X удовлетворяет соотношению $|\vec{OX}_1| = |k| |\vec{OX}|$, где k — число, отличное от нуля (O — центр гомотетии).

Связь между подобием и гомотетией устанавливается теоремами: «Гомотетичные фигуры подобны» и «Если две фигуры подобны, то существует третья фигура, гомотетичная первой и конгруэнтная второй».

В VII классе появляются новые обозначения для конкретных видов отображений плоскости. Так, параллельный перенос обозначается T или \vec{a} , вводится обозначение для гомотетии H (первые буквы слов translation и homotetia).

При изучении подобия учащиеся вновь встречаются со свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, первое представление о которых на интуитивном уровне они получали еще в VI классе.

В VII классе по-прежнему уделяется много внимания точности формулировок определений и теорем и точности записей с применением теоретико-множественной символики. Вместе с тем, как и в VI классе, в устной речи допускаются некоторые упрощения. Например, еще в VI классе элементами треугольника (сторонами и углами) были названы соответствующие величины — длины **сторон** и величины углов. Для многоугольников в явном виде такого определения не дается, однако и здесь вместо слов «длина стороны», «величина угла» говорится: «сторона», «угол». Однако в записях различие в понятиях «длина стороны» и «сторона» и пр. четко соблюдается.

При изучении уже первого пункта учебника VII класса (п. 46) можно ввести знак следования \Rightarrow . Это позволит упростить многие записи. Заметим, что этот знак используется с VI класса в курсе алгебры.

В главе IV вводится обозначение для дуги окружности: $\smile AB$, $\smile ACB$ (в первом случае запись используется для обозначения дуги, соответствующей центральному углу, меньшему 180° ; второе обозначение удобно использовать, если речь идет о дуге, соответствующей центральному углу, большему 180°). При измерении дуг вводится понятие «угловая величина дуги» и соответствующие обозначения: \widehat{AB} , \widehat{ACB} . Эти обозначения легко запоминаются по аналогии с записями, введенными для углов и величин углов.

Содержание теоретического материала курса VII класса имеет большую практическую значимость и создает определенную базу для решения большого числа практических задач. Эта база получит дальнейшее расширение в VIII классе.

Очень важно, чтобы при работе по новой программе по математике в VII классе была установлена тесная связь с обучением школьников другим предметам, в первую очередь физике и черчению. Учителю необходимо познакомиться с учебниками по этим предметам, обратив внимание на используемый в них математический аппарат, приемы вычислений, терминологию. Желательно, чтобы вопросы межпредметных связей были предметом обсуждения школьных методических объединений.

Структура и некоторые особенности учебника геометрии для VII класса

Учебное пособие «Геометрия, 7» используется в школе в качестве учебника и задачника. Как и в учебнике для VI класса, каждая из пяти глав учебника VII класса разделена на параграфы, которые, в свою очередь, разделены на пункты. Нумерация глав и пунктов сплошная, начиная с VI класса. Такая система позволяет избежать чисто технических трудностей при ссылках на ранее изученный материал при его повторении.

Всего в учебнике VII класса 52 пункта (включая и пункты для необязательного чтения). Каждый из них рассчитан на изучение в течение одного-двух, реже трех уроков. Материал пункта излагается так, что в нем легко выделить текст, предназначенный для одного урока. Соответствующие рекомендации по выбору задач для решения на том или ином уроке (в классе или дома) даются в данном пособии для учителя.

Кроме задач к каждому пункту, в учебнике даны дополнительные задачи к каждой главе. Эти задачи могут быть использованы для текущей работы в классе, а также для внеклассной работы и индивидуальных занятий.

Задачи повышенной трудности отмечены значком *. Для индивидуальной работы с учащимися могут быть использованы и «Дополнительные самостоятельные работы» (ДС), помещенные в «Дидактических материалах» по курсу геометрии VII класса (28 работ, по два варианта в каждой).

Особенности учебника VII класса во многом аналогичны особенностям учебника VI класса.

В том случае, когда учащиеся уже имеют определенное представление о рассматриваемых понятиях, даются ссылки на соответствующие пункты учебника VI класса.

Другой методической особенностью учебника является дальнейшее усиление использования дедуктивного метода. Знакомство учащихся с понятиями «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно» позволяет значительно усилить работу по развитию логической грамотности учащихся. Уделяется внимание четкому выделению учащимися условия и заключения теорем, тех предложений, которые используются при доказательстве теорем и решении задач.

Вместе с тем большое внимание уделяется развитию интуиции школьников, — это достигается не только соответствующим характером изложения материала, но и включением в учебник задач, решение которых имеет несложное обоснование, но само нахождение решения необычно для традиционного обучения (например, задачи на «перекраивание» фигур, задачи-вопросы и т. д.).

Большое внимание в учебнике, главным образом через систему задач, уделяется развитию логического мышления учащихся, их пространственного воображения, интуиции и находчивости.

О геометрических задачах в курсе VII класса

Теоретико-множественный подход в изложении геометрии, включение в курс геометрии новых вопросов, а также расширение целей обучения математике в средней школе, внимание к развитию учащихся на базе прочного овладения знаниями — все это сказалось на содержании упражнений и задач, предлагаемых учащимся. Новыми являются задачи на способы задания точечных множеств, операции над геометрическими фигурами как множествами точек (объединение, пересечение), на употребление в геометрии языка и символики теории множеств, задачи на отображение точечных множеств. В V главу включены совершенно новые задачи по теме «Векторы», при решении которых оказывается возможным опираться на знания, приобретенные учащимися при изучении параллельного переноса.

Обогащение содержания школьного курса геометрии, естественно, привело и к пересмотру методов решения задач. Если ранее основным приемом решения задач было использование конгруэнтности (равенства) треугольников, то теперь многие задачи решаются с применением свойств перемещений (поворот, центральная и осевая симметрии, параллельный перенос) и специального вида отображений — гомотетии и подобия. Причем, как показывает опыт работы по новой программе, учащиеся весьма «естественно» используют эти новые методы, часто предлагая простые и «экономные» способы решения задач. Это позволяет проводить на уроках интерес-

ную и полезную работу по сопоставлению различных способов решения, определения наиболее эффективного из них.

При решении задач (как и при доказательстве теорем) внимание обращается на умение учащихся кратко записать условие и решение задачи (доказательство теоремы). Примеры оформления задач приведены в рекомендациях к отдельным пунктам, однако указанная в них форма записи не должна считаться обязательной.

В зависимости от цели решения задачи учитель в ряде случаев может считать ее решенной, если решение приведено без записи условия и пояснений. В других случаях учитель может предложить ученику кратко записать, на какие теоремы тот ссылается при решении (в ссылке может быть указан лишь номер соответствующей теоремы и пункта учебника). Следует использовать практически целесообразные приемы построений. Иногда полезно сравнить различные приемы решения одной и той же задачи по числу операций, которые нужно выполнить для получения искомой фигуры.

Многие из задач на построение допускают несколько решений, т. е. имеется несколько фигур, удовлетворяющих требованию задачи. Наибольшее число таких задач учитель найдет при изучении многоугольников. Здесь рекомендуется вначале предлагать учащимся конкретные величины заданных элементов, чтобы задача имела одно-два решения, и лишь постепенно подходить к установлению числа решений в зависимости от соотношений между заданными элементами. Как и в VI классе, рассмотрение всех этапов решения задачи на построение (анализ, решение, доказательство, исследование) в VII классе не проводится, но анализ с целью нахождения плана решения приходится проводить во многих случаях. По этому вопросу даны указания в соответствующих разделах данной книги.

Выполнение некоторых заданий требует наличия геометрических моделей (см., например, задания из «Дидактических материалов по геометрии для 7 класса»). Желательно, чтобы на чертеже, который выполняет ученик, было указано, какие элементы им измерены. Вычисления в этом случае должны быть выполнены с использованием правил действий над приближенными числами, изучаемых в курсе алгебры.

В кабинете математики полезно иметь картотеку моделей с указанием для каждого набора моделей соответствующих величин (длин отрезков, площадей, объемов). Это во многом упростит контроль за самостоятельными работами учащихся по выполнению различных измерений и вычислений на основании данных, полученных при измерении.

При решении задач не следует упускать из виду работу по развитию вычислительных навыков, рациональных способов вычислений, глазомерной оценки длин и площадей.

Большое внимание в VII классе должно быть уделено рациональному применению различных средств обучения, и прежде всего наглядных пособий.

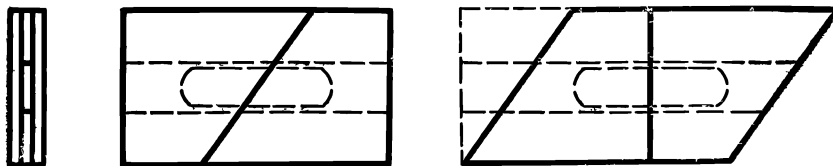


Рис. 1

При изложении нового материала (и дальнейшей работе с ним) часто полезным бывает использование таблиц для создания у учащихся ярких наглядных представлений об изучаемом материале. Таблицы дают возможность сэкономить время учителя при подготовке к уроку и на самом уроке. Многие таблицы могут быть использованы и как справочные. В этом случае рекомендуется вывешивать их в классе. В данной работе приведены некоторые из таких таблиц.

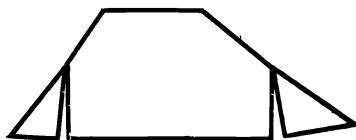


Рис. 2

Вместе с таблицами, а иногда и независимо от них, оказывается необходимым использование моделей.

Так, разъемные модели, изображенные на рисунках 1 и 2, часто помогают учащимся понять (и запомнить) вывод формул площади параллелограмма и трапеции. Использование моделей при выпол-

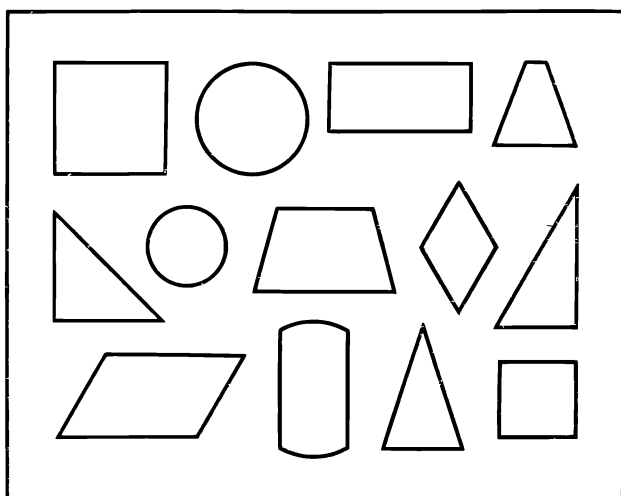


Рис. 3

нении значительного числа упражнений учебника, а также некоторых самостоятельных работ из «Дидактических материалов» помогает школьникам установить соответствие между геометрической фигурой, ее моделью и изображением, что очень важно на первых этапах формирования представлений о геометрических фигурах и отношениях между их элементами.

Для сокращения времени на выполнение чертежей рекомендуется использовать на уроках наборы шаблонов, выпускаемых промышленностью. Один из таких шаблонов представлен на рисунке 3. Шаблоны рекомендуется изготовить и для выполнения чертежей на классной доске.

В связи с уточнением программы изучение темы «Начальные сведения из стереометрии» перенесено из VII в VIII класс. Поэтому методические рекомендации к этой главе в данное пособие не включены.

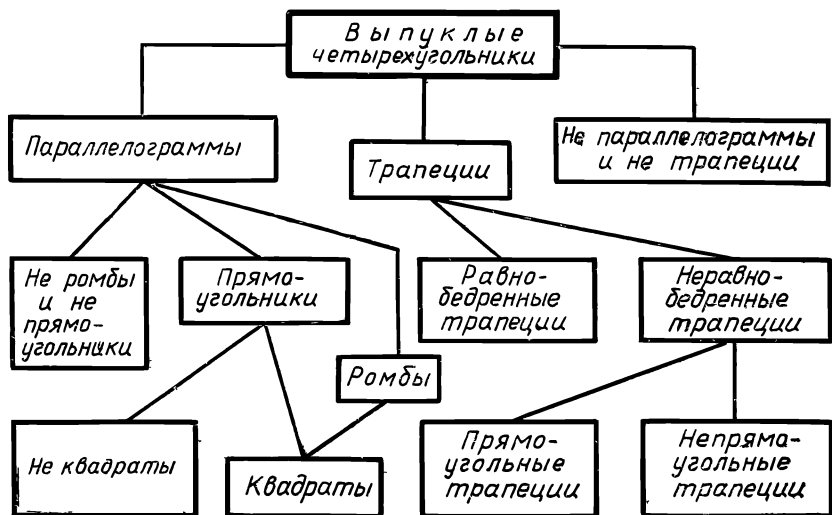
МНОГОУГОЛЬНИКИ (продолжение)

Курс геометрии VII класса начинается с изучения частных видов четырехугольников. В VI классе было дано определение многоугольника, доказаны теоремы о сумме внутренних и о сумме внешних углов выпуклого многоугольника, рассмотрены признаки и свойства параллелограмма общего вида. В VII классе даются определения прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции и выводятся формулы для нахождения их площадей, дается представление о подсчете площади любой фигуры с помощью палетки и вычислении площади произвольного многоугольника.

Изучению частных видов многоугольников предпосылается понятие «необходимых» и «достаточных» условий, которые вводятся на материале, изученном в VI классе, причем в число примеров включаются арифметические, алгебраические и не математические. Эти понятия затем используются на протяжении всего курса геометрии.

В учебнике VII класса сохранена традиционная классификация выпуклых четырехугольников (см. схему).

Вместе с тем в учебнике приведено много задач, при решении которых квадрат рассматривается как частный случай ромба; прямоугольник, квадрат и ромб — как виды четырехугольников. Это поз-



воляет обеспечить более глубокое понимание семиклассниками понятий признаков, необходимых и достаточных условий.

При изучении этой главы и в задачах к соответствующим пунктам существенно используются многие геометрические факты, рассматривавшиеся в VI классе: признаки параллельности прямых, признаки конгруэнтности треугольников, свойства равнобедренного треугольника, теорема Фалеса, свойства и признаки параллелограмма и др. Значительная часть этого материала нуждается в повторении, особенно это относится к теме «Многоугольники», изучавшейся в VI классе последней.

Вопрос о том, что и как должно быть повторено, решается применительно к каждой конкретной ситуации. Поэтому при планировании уроков и домашних заданий нужно весьма внимательно отнестись к организации повторения в связи с изучаемым материалом, определить, что должно быть задано для повторения по учебнику, что может быть повторено в связи с решением задач, какие вопросы могут быть рассмотрены в классе.

46. Необходимые и достаточные условия (2 часа)

На изучение этого материала отводится два урока, но упражнения, предназначенные для его закрепления, должны включаться и в планы последующих уроков.

В результате изучения материала этого пункта учащиеся должны понимать значение терминов «необходимое условие», «достаточное условие», «необходимое и достаточное условие»; уметь назвать достаточное условие для отнесения того или иного объекта к определенному множеству (например, достаточное условие того, чтобы данный четырехугольник был параллелограммом; чтобы площадь треугольника была равна 10 см^2 ; чтобы две прямые были параллельны и т. д.). Учащиеся должны уметь назвать необходимое условие для существования того или иного факта, а также знать, какие предложения должны быть доказаны, чтобы некоторое условие явилось бы необходимым и достаточным.

Весь материал рассматривается только на конкретных примерах (в их число включаются и «не математические»).

По сути, при изучении этого материала учащиеся работают с «предложениями с переменными», первое понятие о которых они получили еще в IV классе. В дальнейшем это понятие систематически использовалось, но значениями переменной были главным образом числа.

Заметим следующее. Одно и то же утверждение «Из P вытекает Q » или «Из P следует Q » может быть выражено словами: « P есть достаточное условие для Q » и « Q есть необходимое условие для P ».

Первый урок может быть посвящен формированию у учащихся навыков в обращении с терминами «необходимое условие» и «достаточное условие» (на простейших примерах).

Вначале может быть рассмотрен вводный пример учебника, затем — такие примеры:

1. Если

натуральное число n делится на четыре, (P)

то

в десятичной записи число n кончается четной цифрой. (Q)

Ученики должны понимать, что (P) достаточно для (Q) и (Q) необходимо для (P).

2. Если

один из углов треугольника тупой, (P)

то

треугольник имеет два острых угла. (Q)

Еще примеры:

3. Натуральное число делится на 6. (P)

Натуральное число делится на 2. (Q)

4. Натуральное число делится на 6. (P)

Натуральное число оканчивается четной цифрой. (Q)

5. Углы вертикальные. (P)

Углы конгруэнтны. (Q)

6. Диагонали параллелограмма конгруэнтны. (P)

Параллелограмм — прямоугольник. (Q)

7. Фигуры симметричны относительно некоторой оси. (P)

Фигуры конгруэнтны. (Q)

Учащиеся и сами могут предложить примеры.

На этом же уроке могут быть рассмотрены упражнения из задач 1 и 6 к пункту.

З а д а н и е н а д о м. Начало п. 46 (первый подпункт), повторить п. 43—45 из учебника VI класса, задача 5.

В т о р о й урок можно начать с разбора на примерах двух возможностей:

а) достаточное условие является в то же время и необходимым;

б) достаточное условие не является необходимым.

К концу урока должна быть усвоена вся терминология: условия «достаточное», «необходимое», «необходимое и достаточное».

Для этой работы могут быть использованы задачи 1—5 к пункту. Вначале выясняется, является ли указанное в задачах условие достаточным, и если оно достаточно, то является ли оно вместе с тем и необходимым. Эта работа проводится устно. Записи делаются на доске.

В том случае, когда условие является и достаточным и необходимым, соответствующая теорема формулируется с помощью термина «необходимо и достаточно». Выясняется (например, в задаче 13), что (какие теоремы) должно быть доказано, если доказываемое пред-

ложение сформулировано с использованием термина «необходимо и достаточно».

Затем могут быть рассмотрены некоторые из заданий в задачах 15 и 17.

З а д а н и е н а д о м. Весь п. 46, по одному вопросу из упражнений 15, 17, упражнение 16 (может быть, в зависимости от условий, его целесообразно вначале частично рассмотреть в классе — рекомендуется кратко записать известные из п. 43 и 44 свойства параллелограмма, а также его определение; каждое из свойств является необходимым условием того, чтобы четырехугольник был параллелограммом. А затем выяснить, какое или какие из перечисленных свойств являются достаточными условиями, чтобы четырехугольник был параллелограммом. Для определенности можно ввести обозначения: $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения его диагоналей). Повторить теоремы A и B о серединном перпендикуляре к отрезку.

В учебнике геометрии знак следования не вводится, но так как он используется на уроках алгебры, то им можно пользоваться и на уроках геометрии.

С помощью знака следования могут быть кратко записаны различные взаимоотношения между двумя предложениями (этот материал интересно рассмотреть дополнительно, например на кружке):

$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$
$Q \Rightarrow P$	$Q \not\Rightarrow P$
<hr/>	
$Q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow Q$
$P \not\Rightarrow Q$	$Q \not\Rightarrow P$

Эта таблица может быть составлена в результате рассмотрения различных конкретных примеров:

1. Если

треугольник равнобедренный, (P)

то

углы при его основании конгруэнтны. (Q)

$$P \Rightarrow Q$$

$$Q \Rightarrow P$$

2. Если

четырехугольник параллелограмм, (P)

то

два его противоположных угла конгруэнтны. (Q)

$$P \Rightarrow Q$$

$$Q \not\Rightarrow P$$

3. Если

два угла конгруэнтны, (P)

то

они вертикальны. (Q)

$$P \not\Rightarrow Q$$

$$Q \Rightarrow P$$

4. Если (P)
треугольник равносторонний,
то (Q)
он остроугольный.
 $P \Rightarrow Q$
 $Q \not\Rightarrow P$

5. Если (P)
фигуры симметричны относительно некоторой оси,
то (Q)
фигуры не конгруэнтны.
 $P \not\Rightarrow Q$
 $Q \not\Rightarrow P$

Аналогичная работа может быть проведена с примерами, данными на странице 13.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. а) Нет, две стороны двух углов могут быть противоположно направленными лучами, однако у углов не будет общей стороны;
б) да; в) да; г) да.

2. Прежде всего, для того чтобы два треугольника были конгруэнтны, достаточно выполнение любого из признаков конгруэнтности треугольников, т. е. признаки конгруэнтности суть достаточные условия конгруэнтности треугольников.

Возможны и другие примеры достаточных условий конгруэнтности треугольников:

конгруэнтность основания, угла, прилежащего к основанию, и высоты, проведенной к этому основанию, одного треугольника — основанию, углу, прилежащему к нему, и высоте, проведенной к этому основанию, другого треугольника и т. д.

З а м е ч а н и е. От учащихся не следует требовать указания большого числа условий, достаточных для того, чтобы два треугольника были конгруэнтны.

3. На вопрос а) учащиеся могут, например, дать ответ: для того чтобы точка была равноудалена от сторон данного угла, достаточно, чтобы она принадлежала биссектрисе этого угла. В этом случае ответ на вопрос б) отрицателен: точка может принадлежать углу, образованному перпендикулярами к сторонам данного угла, проведенными из его вершины, и имеющему с данным углом лишь общую вершину (рис. 4).

Желательно довести разбор задачи до формулировки необходимого и достаточного условия: «точка принадлежит объединению биссектрисы угла и угла, отмеченного на рисунке 4».

4. Для того чтобы площадь прямоугольника была равна 25 см^2 , достаточно,

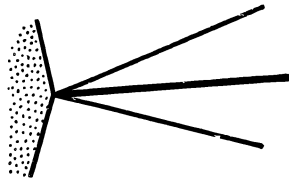


Рис. 4

например, чтобы его стороны были равны 1 см и 25 см. Необходимое и достаточное условие — чтобы произведение длин его сторон, выраженных в сантиметрах, равнялось 25.

5. Называется, например, какой-нибудь из признаков параллелограмма; достаточное условие можно сформулировать также исходя из свойства параллелограмма, например: для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, достаточно, чтобы его диагонали в точке пересечения делились пополам.

6. а) Да; б) да; в) нет, диагонали параллелограмма в общем случае не конгруэнтны; г) нет, из того, что два угла конгруэнтны, не следует, что они вертикальны.

7. Например:

а) конгруэнтность двух пар его противоположных сторон;

б) конгруэнтность двух пар его противоположных углов;

в) конгруэнтность и параллельность двух его противоположных сторон.

8. Например: для того чтобы две прямые были параллельны, необходимо, чтобы при пересечении их третьей прямой соответственные углы были конгруэнтны.

9. Например: одна из сторон одного треугольника конгруэнтна стороне другого треугольника; углы одного треугольника конгруэнтны (попарно) углам другого треугольника.

10. Например: конгруэнтность всех его углов; конгруэнтность всех его медиан; конгруэнтность всех его высот.

11. Например: необходимо, чтобы эти прямые пересекались.

12. Для того чтобы некоторая точка плоскости была равноудалена от двух данных точек A и B , необходимо и достаточно, чтобы эта точка принадлежала серединному перпендикуляру к отрезку AB .

З а м е ч а н и е. Фигура, состоящая из двух различных точек A и B , имеет две оси симметрии. Одна из них — серединный перпендикуляр к отрезку AB , другая — прямая AB .

13. Для того чтобы две различные прямые, лежащие в одной плоскости, были параллельны, необходимо и достаточно, например, чтобы:

а) они были центрально-симметричными;

б) они были перпендикулярны одной и той же прямой;

в) какие-либо два соответственных угла при пересечении данных прямых третьей были конгруэнтны (условие б) является частным случаем условия в)).

14. Например: для того чтобы две окружности касались внешним образом, необходимо и достаточно, чтобы расстояние между центрами этих окружностей было равно сумме радиусов этих окружностей.

15. а) Неверно; это условие необходимо, но не достаточно; б) неверно, если речь идет лишь об одной паре углов; в этом случае условие необходимо, но не достаточно; в) неверно; это условие достаточно, но не необходимо.

16. Например: а) конгруэнтность двух пар противоположных сторон четырехугольника; б) конгруэнтность и параллельность

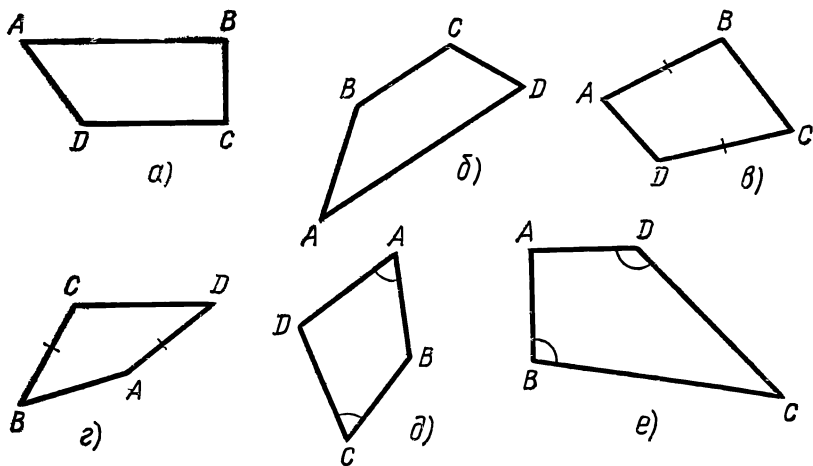


Рис. 5

двух противоположных сторон четырехугольника; в) конгруэнтность двух противоположных углов четырехугольника и равенство 180° суммы величин двух углов, прилежащих к одной стороне этого четырехугольника.

17. а) Достаточно; б) достаточно; в) необходимо; г) необходимо.

18. а) У к а з а н и е. Доказывается, что каждое из этих условий следует из того, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

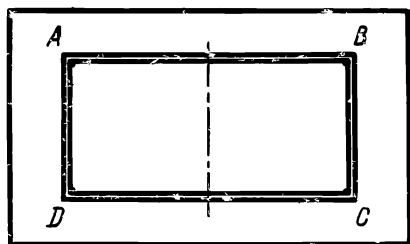
б) У к а з а н и е. Для каждого из 6 условий показывается, что оно может выполняться, и тем не менее четырехугольник $ABCD$ не будет параллелограммом; рекомендуется, чтобы учащиеся дали иллюстрацию каждого из этих случаев (рис. 5).

в) Первая часть задания — комбинаторного характера. Можно показать, что число комбинаций условий по 2 из 6 условий равно 15.

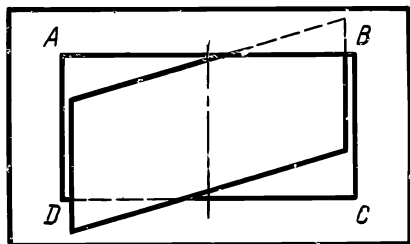
Однако необходимых и достаточных условий для того, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, получается только 9 (в части тиража учебного пособия ошибочно указано, что таких условий 13). Пары (1,4), (2,3), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6) не приводят к необходимым и достаточным условиям. Пары условий (1,4) и (2,3) выполняются для равнобедренных трапеций. Рекомендуется, чтобы учащиеся построили четырехугольник не параллелограмм, для которого удовлетворяется одна из пар условий: (3,5), (3,6), (4,5), (4,6).

47. Прямоугольник (1 час)

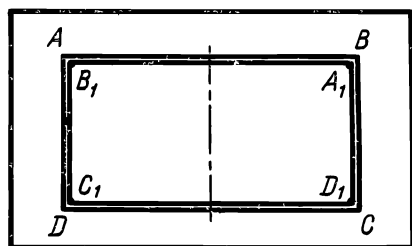
В результате изучения этого пункта учащиеся должны твердо знать определение прямоугольника, уметь провести его оси симметрии, знать свойства прямоугольника как параллелограмма и свойства, присущие из всех видов параллелограммов только прямоугольнику (существование двух осей симметрии и конгруэнт-



a)



б)



в)

Рис. 6

ность диагоналей), и уметь их доказывать.

В учебнике дано «избыточное» определение прямоугольника. Это сделано с целью уменьшения числа доказываемых теорем (если определить прямоугольник как параллелограмм, у которого один из углов прямой, то нужно доказать свойство: у прямоугольника все углы прямые).

Для демонстрации того факта, что прямоугольник при осевой симметрии относительно серединного перпендикуляра, проведенного к одной из его сторон, отображается сам на себя, можно использовать пособие, изготовленное из плотного картона (рис. 6), или разобрать по чертежу (лучше с использованием цветных мелков), на какие точки отобразятся при указанной осевой симметрии не только вершины и стороны прямоугольника, но и внутренние его точки.

После разбора следствия 1 учащимся предлагается начертить прямоугольник и построить оси его симметрии. При этом рекомендуется, чтобы прямоугольники, оси симметрии которых нужно построить, были расположены в плоскости произвольным образом.

В классе могут быть решены задачи 5, 8, дома — 1, 10, 15, 6. При решении ряда задач, в том числе задачи 1, удобно использовать тот факт, что сумма углов параллелограмма (прямоугольник — параллелограмм), прилежащих к одной стороне, равна 180° . Это свойство параллелограмма в VI классе в теоретическом материале не рассматривалось, а было выведено при решении задачи 2 к п. 45. Эта же задача может быть рассмотрена и при повторении материала о параллелограммах — на этом или одном из предыдущих уроков.

Дополнительные задачи

1. Дан прямоугольник $ABCD$, прямая l — его ось симметрии (рис. 7).

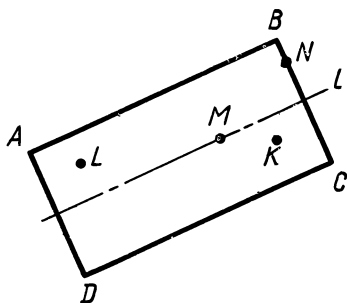


Рис. 7

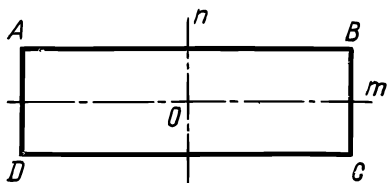


Рис. 8

На какие точки отобразятся точки A , C , K , L , M , N при симметрии относительно оси l ?

2. Дан прямоугольник $ABCD$, прямые m и n — его оси симметрии, $m \cap n = O$ (рис. 8).

1) На какую вершину отобразится каждая из его вершин при осевой симметрии относительно: а) прямой m , б) прямой n ? [а) $A \rightarrow D$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow B$, $D \rightarrow A$; б) $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$, $C \rightarrow D$, $D \rightarrow C$].

2) На какую точку отобразится каждая из вершин прямоугольника $ABCD$ при центральной симметрии относительно точки O ? [$A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$, $C \rightarrow A$, $D \rightarrow B$].

3) На какую фигуру отобразится: а) отрезок AB при осевой симметрии относительно прямой m ; б) прямоугольник с диагональю OA при осевой симметрии относительно прямой n ; в) диагональ BD при осевой симметрии относительно прямой m ; г) прямая m при осевой симметрии относительно прямой n ; д) прямая n при центральной симметрии относительно точки O ? [а) на отрезок DC ; б) на прямоугольник с диагональю OB ; в) на диагональ CA ; г) на себя; д) на себя].

Ответы и указания

1. а) Цель этого задания — показать, что прямоугольник можно определить как параллелограмм, у которого один из углов прямой. Тогда тот факт, что у прямоугольника все углы прямые, может быть доказан.

Ниже приводится одно из возможных решений задачи.

Дано: $[AB] \parallel [DC]$, $[BC] \parallel [AD]$, $\hat{A} = 90^\circ$ (рис. 9).

Доказать: $\hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$.

Доказательство. $\hat{A} = \hat{C}$ как противоположные углы параллелограмма,

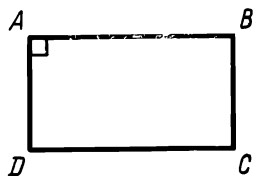


Рис. 9

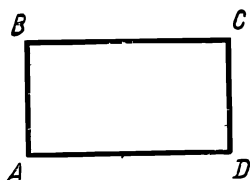


Рис. 10

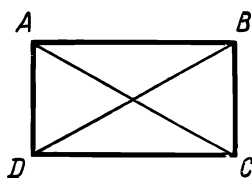


Рис. 11

следовательно, $\hat{C}=90^\circ$; $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ$ как сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной его стороне, следовательно, $\hat{B}=90^\circ$; $\hat{B}=\hat{D}$ как противоположные углы параллелограмма, следовательно, $\hat{D}=90^\circ$.

б) Цель этого задания — показать, что прямоугольник можно определить как четырехугольник, у которого три угла прямые. При решении задачи учащимся понадобятся признаки параллельности прямых (п. 34 учебника VI класса). Их следует повторить.

Ниже приводится одно из возможных решений задачи.

Дано: $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=90^\circ$ (рис. 10).

Доказать: $[AB] \parallel [DC]$, $[BC] \parallel [AD]$, $\hat{D}=90^\circ$.

Доказательство. $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$, следовательно, $\hat{D}=90^\circ$.

Так как $[DA] \perp [AB]$ и $[CB] \perp [AB]$, то $[DA] \parallel [CB]$ (на основании признака параллельности двух прямых); так как $[AB] \perp [BC]$ и $[DC] \perp [BC]$, то $[AB] \parallel [DC]$.

З а м е ч а н и е. Обоснование может быть сделано устно.

2. Можно взять два произвольных конгруэнтных отрезка, пересекающихся в точке, внутренней для каждого отрезка, причем эта точка не делит на два конгруэнтных отрезка по крайней мере один из взятых отрезков, и соединить отрезками последовательно концы этих отрезков.

3. Ниже приведен один из вариантов доказательства и его оформление.

Дано: $[AB] \parallel [DC]$, $[AD] \parallel [BC]$, $[AC] \cong [BD]$ (рис. 11).

Доказать: $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90^\circ$.

Доказательство. $\triangle ABD \cong \triangle DCA$, так как у них сторона AD общая, $[AB] \cong [DC]$ как противоположные стороны параллелограмма, $[AC] \cong [DB]$ по условию. Следовательно, $\angle BAD \cong \angle CDA$. Но $\widehat{BAD} + \widehat{CDA} = 180^\circ$ (как углы, прилежащие к одной стороне параллелограмма), поэтому $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = 90^\circ$. А так как в параллелограмме противоположные углы конгруэнтны, то $\widehat{BCD} = 90^\circ$ и $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Теорема доказана.

4. а) При $n=1$; 2; 3; 4; б) $n=3$; 4.

5. Прямоугольник можно рассматривать как пересечение двух полос, границы которых взаимно перпендикулярны.

6. У прямоугольника диагонали конгруэнтны; серединные перпендикуляры к сторонам являются его осями симметрии.

7. а) Да, существует. Это точка пересечения диагоналей прямоугольника; б) не существует.

8. Возможны два случая: а) 36 см^2 (рис. 12); б) 45 см^2 (рис. 13).

10. У к а з а н и е. Докажите, что биссектрисы углов, прилежащих к одной стороне прямоугольника, взаимно перпендикулярны (рис. 14). (После изучения п. 49 можно предложить учащимся доказать, что образовавшаяся фигура — квадрат.)

11. Нет (рис. 15).

12. а) Проверить, например, являются ли три его угла прямыми; б) проверить, является ли хотя бы один из его углов прямым или конгруэнтны ли его диагонали; в) проверить, конгруэнтны ли его диагонали и делятся ли они в точке пересечения пополам.

13. Продолжим медиану CO прямоугольного треугольника ACB ($\hat{C}=90^\circ$, рис. 16) и на ее продолжении отложим отрезок OD , конгруэнтный отрезку CO ; проведем отрезки AD и DB и определим вид четырехугольника $ADBC$. Точки A и B симметричны относительно точки O , так как они лежат на прямой, проходящей через точку O , и $|AO| = |OB|$ по условию. Точки C и D симметричны относительно точки O , так как они лежат на прямой, проходящей через точку O , и $|CO| = |OD|$ по построению. Следовательно, $ADBC$ — параллелограмм. В нем $\hat{C} = 90^\circ$ по условию. Можно доказать (см. задачу 1, а), что в этом случае четырехугольник $ADBC$ — прямоугольник. Так как в прямоугольнике диагонали конгруэнтны, то $|CO| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|AB|$.

Обратная теорема. Если в треугольнике медиана, проведенная к некоторой стороне, равна ее половине, то треугольник — прямоугольный.

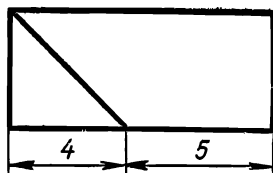


Рис. 12

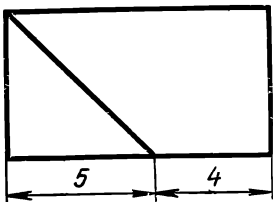


Рис. 13

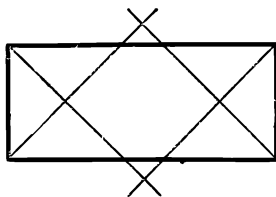


Рис. 14

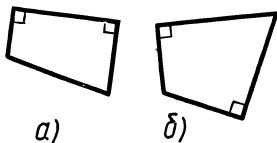


Рис. 15

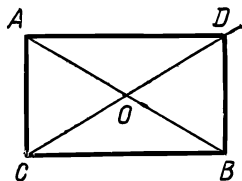


Рис. 16

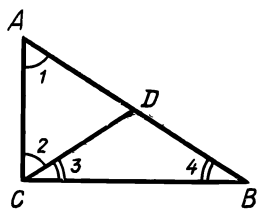


Рис. 17

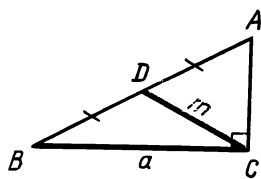


Рис. 18

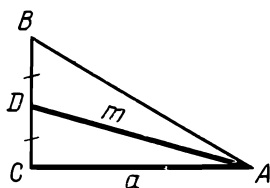


Рис. 19

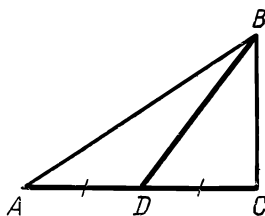


Рис. 20

Дано: $|AD| = |DB|$, $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$
(рис. 17).

Доказать: $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

Доказательство. В треугольнике ACD $|AD| = |CD|$, следовательно, $\hat{1} = \hat{2}$.

В треугольнике CDB $|CD| = |BD|$, следовательно, $\hat{3} = \hat{4}$.

$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$, или $2(\hat{2} + \hat{3}) = 180^\circ$; $\hat{2} + \hat{3} = 90^\circ$, т. е. $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Теорема доказана.

14. а) Предположим, что задача решена и треугольник ABC (рис. 18) искомым, $\widehat{ACB} = 90^\circ$, BC и CD — заданные отрезки, $D \in [AB]$, $|BD| = |AD|$. На основании задачи 13 $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$, т. е. $|AB| =$

$= 2|CD|$. Отсюда построение: строим треугольник ABC по его катету BC и гипотенузе (AB), равной удвоенной медиане CD . Этот треугольник и будет искомым.

б) Строится вспомогательный прямоугольный треугольник ACD (рис. 19), $\hat{C} = 90^\circ$, по катету a и гипотенузе m , который затем дополняется до искомого треугольника ABC , $|CD| = |DB|$.

в) Строится вспомогательный прямоугольный треугольник DBC , $\hat{C} = 90^\circ$ (рис. 20), по катету DC и гипотенузе DB , который затем дополняется до искомого треугольника ABC ($|AD| = |DC|$).

15. а) Первая часть построения приведена на рисунке 21.

б) Так как в прямоугольнике диагонали конгруэнтны, то задача сводится к задаче на построение прямоугольника по его стороне и диагонали, т. е. к задаче на построение прямоугольного треугольника по его катету (заданной стороне прямоугольника) и гипотенузе (заданной его диагонали).

Этот треугольник затем достраивается до прямоугольника.

в) Пусть прямоугольник $ABCD$ — искомым (рис. 22, а). На продолжении луча AD от точки D отложим отрезок DK , конгруэнтный отрезку CD . Длина отрезка AK равна заданной сумме длин двух его неравных сторон. Так как $|CD| = |DK|$, то $\widehat{DCK} = \widehat{CKD} = 45^\circ$.

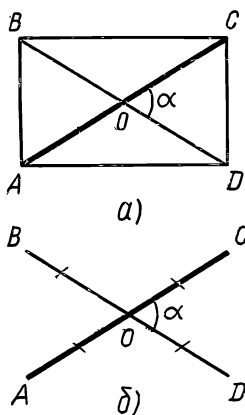


Рис. 21

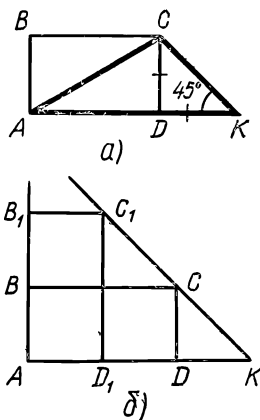


Рис. 22

Отсюда следует построение. Строим треугольник ACK по его сторонам AC и AK и углу $\widehat{CKD} = 45^\circ$ (рис. 22, б). Из точки C (и C_1) проводим перпендикуляр CD (C_1D_1) к отрезку AK , $D \in [AK]$ ($D_1 \in [AK]$). Полученный треугольник ACD (AC_1D_1) достраиваем до прямоугольника $ABCD$ ($AB_1C_1D_1$). Этот прямоугольник искомым. Задача имеет одно решение, так как прямоугольники $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ конгруэнтны.

З а м е ч а н и е. Конгруэнтность этих прямоугольников может быть доказана несколькими способами. Один из них основан на использовании осевой симметрии. Из вершины A треугольника AKL , $L = [AB] \cap [KC]$, проведем $AM \perp KC$, $M \in [KC]$. Так как $\widehat{AKB} = 45^\circ$, то прямая AM — ось симметрии треугольников AKL и ACC_1 . Затем доказывается, что рассматриваемые прямоугольники симметричны относительно этой прямой.

16. Таких перемещений будет четыре: поворот относительно точки пересечения диагоналей на угол 180° , две осевые симметрии (прямоугольник имеет две оси симметрии) и тождественное перемещение.

З а м е ч а н и е. При решении этой задачи полезно использовать модель прямоугольника, вершины которого обозначены с обеих сторон модели (см. рис. 6).

17. Предположим, что даны два конгруэнтных прямоугольника $ABCD$ и $KLMN$. Прямоугольник $KLMN$ может быть совмещен с прямоугольником $ABCD$ четырьмя способами, как это показано на рисунке 23.

18. Возможная последовательность выполнения построений приведена на рисунке 24 (прямая AB подразумевается проведенной).

19. Решение аналогично решению задачи 18.

20. Последовательность выполнения построения дана на рисунке 25.

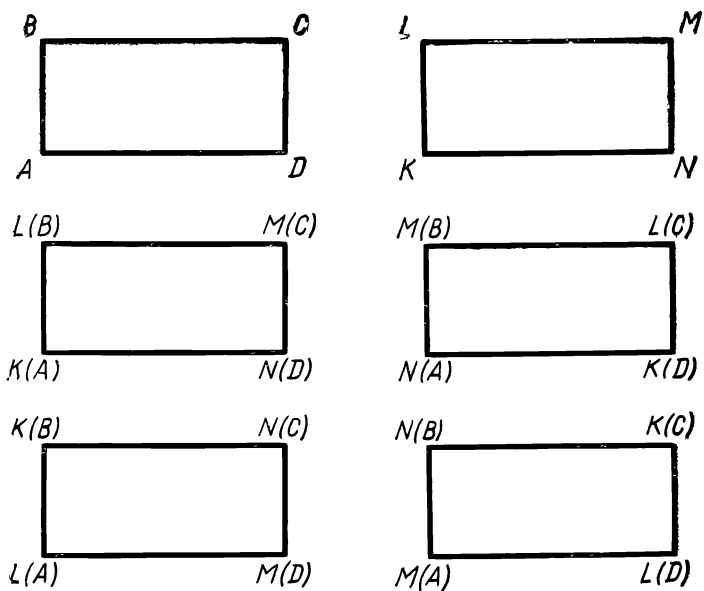


Рис. 23

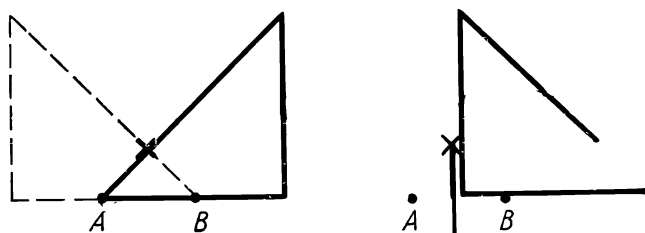


Рис. 24

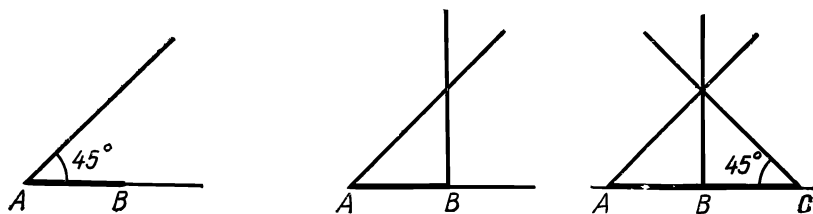


Рис. 25

48. Ромб (2 часа)

В результате изучения этого пункта учащиеся должны знать определение, свойства ромба как параллелограмма, а также свойства, присущие (из всех видов параллелограммов) только ромбу (теорема п. 48 и следствия 1 и 2), уметь доказывать эти свойства, строить оси симметрии и высоты ромба. Изучение признаков ромба не входит в программу. Некоторые из них рассмотрены в задачах 1—3, 4, в. Но это материал необязательный.

В учебнике дано «избыточное» определение ромба. В самом деле, можно определить ромб как параллелограмм, у которого две смежные стороны конгруэнтны. Тогда конгруэнтность в с е х сторон будет свойством ромба. Но с целью уменьшения числа доказываемых в курсе геометрии теорем было принято указанное в учебнике определение.

На п е р в о м уроке может быть рассмотрен весь теоретический материал пункта. Желательно, чтобы доказательство теоремы и свойств (следствий) было проведено самими учащимися. Здесь, как и в VI классе, иногда полезно вначале сформулировать (устно) доказываемое предложение в виде «Если..., то...».

В оставшееся время могут быть рассмотрены задачи 1, 2, 11, 16, б. Особого внимания заслуживает задача 2, так как на нее удобно ссылаться при решении ряда задач к этому пункту (соответствующие указания даны в решениях задач).

Н а д о м могут быть предложены задачи 5 (устно) и 16, а.

В т о р о й урок может быть посвящен повторению теоретического материала и решению задач (например, 6, 8, 16, в, 9, а, в). Задачи на вычисление могут быть составлены аналогично задачам самостоятельной работы к п. 48 из «Дидактических материалов». Н а д о м могут быть предложены задачи 3, 4, 7.

При решении задач 4 и 9 для опровержения высказанных там утверждений могут быть приведены примеры фигур, удовлетворяющих поставленным требованиям, но не являющихся ромбами.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Цель этого упражнения — показать, что ромб можно определить как параллелограмм, у которого две смежные стороны конгруэнтны. В задаче требуется доказать, что из конгруэнтности двух смежных сторон параллелограмма следует конгруэнтность всех его сторон.

2. Цель этой задачи аналогична предыдущей. Требуется показать, что ромб может быть определен как четырехугольник, обладающий особыми свойствами. Вначале доказывается, что такой четырехугольник является параллелограммом. Параллельность противоположных сторон устанавливается из рассмотрения равнобедренных треугольников ABC и ADC (рис. 26). Они конгруэнтны по трем сторонам. Следовательно, $\hat{1}=\hat{2}=\hat{3}=\hat{4}$. На основании результата,

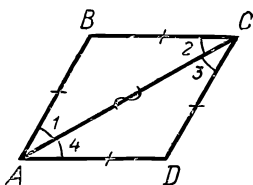


Рис. 26

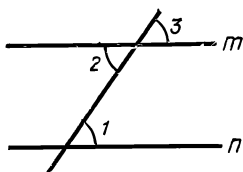


Рис. 27

полученного в последнем задании п. 34 (VI класс), можно утверждать, что $[AB] \parallel [DC]$ и $[BC] \parallel [AD]$.

Перед решением этой задачи целесообразно решить подготовительную задачу, например: «Докажите, что прямые m и n параллельны, если $\hat{1} = \hat{2}$ (рис. 27)».

3. Решение задачи сводится к доказательству двух взаимно обратных теорем:

(1) Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

(2) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны (более подробно: «Если параллелограмм является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны»).

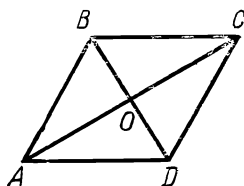


Рис. 28

Рассмотрим теорему (1).

Дано: $[AB] \parallel [CD]$, $[BC] \parallel [DA]$, $[BD] \cap [AC] = O$, $[BD] \perp [AC]$ (рис. 28).

Доказать: $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$.

Ниже приводится один из возможных способов доказательства.

Прямоугольные треугольники ABO , CBO , CDO , ADO конгруэнтны по двум катетам, следовательно, их гипотенузы конгруэнтны: $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$. Теорема доказана.

Теорема (2). Дано: $[AB] \parallel [DC]$, $[BC] \parallel [AD]$, $|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$.

Доказать: $[AC] \perp [BD]$ (см. рис. 28).

Одно из возможных доказательств:

$\triangle ABO \cong \triangle CBO$ по трем сторонам. Следовательно, $\widehat{AOB} = \widehat{COB}$, но $\widehat{AOB} + \widehat{COB} = 180^\circ$, значит, $\widehat{AOB} = \widehat{COB} = 90^\circ$, т. е. $[AC] \perp [BD]$. Теорема доказана.

4. а) Нет. Для решения задачи достаточно указать такой четырехугольник, для которого выполняются указанные в задаче требования, но он не является параллелограммом (рис. 29).

б) Нет. На рисунке 29 изображен четырехугольник, имеющий ось симметрии (прямая, которой принадлежит одна из диагоналей), но этот четырехугольник — не ромб.

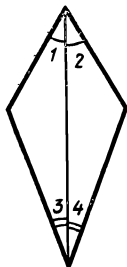


Рис. 29

в) Да. Для доказательства истинности этого предложения должны быть доказаны две взаимно обратные теоремы:

(1) Прямые, содержащие диагонали ромба, являются осями симметрии ромба (теорема 33, п. 48).

(2) Если прямые, содержащие диагонали четырехугольника, являются его осями симметрии, то этот четырехугольник — ромб.

Проведем доказательство предложения (2).

Обозначим через O точку пересечения диагоналей четырехугольника (рис. 30). Так как прямая AC — ось его симметрии, то $|OB| = |OD|$ и точки B и D симметричны относительно точки O . Аналогично докажем, что точки A и C также симметричны относительно точки O . Следовательно, $[AB] \parallel [DC]$ и $[AB] \cong [DC]$ (как центрально-симметричные отрезки). Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (на основании признака параллелограмма). А так как $[DC] \cong [BC]$, то все стороны этого параллелограмма конгруэнтны, значит, по определению, этот четырехугольник — ромб. Другой способ доказательства: выяснив предварительно, что $[AB] \cong [BC] \cong [CD] \cong [DA]$ (из соображений симметрии), сослаться на результат задачи 2.

5. Четыре перемещения: осевая симметрия относительно прямой, которой принадлежит диагональ ромба (два перемещения), поворот на 180° относительно точки пересечения диагоналей ромба (центральная симметрия), тождественное перемещение.

6. а) Перпендикулярность диагоналей, конгруэнтность смежных сторон; б) конгруэнтность противоположных сторон и конгруэнтность противоположных углов.

7. Определения, вытекающие из необходимых и достаточных условий того, что параллелограмм (или какая-нибудь другая фигура) является ромбом.

Параллелограмм, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, называется ромбом.

Параллелограмм, у которого одна из диагоналей принадлежит прямой, являющейся его осью симметрии, называется ромбом (короче: параллелограмм, у которого одна из диагоналей является его осью симметрии, называется ромбом).

Четырехугольник, у которого все стороны конгруэнтны, называется ромбом.

Непустое пересечение двух полос одинаковой ширины, отличное от полосы, называется ромбом.

9. а) Да. Это следует из того, что ромб (параллелограмм) нежесткая фигура. б) Нет. Сторона ромба всегда больше половины его диагонали. В ромбе $ABCD$ проведем диагональ AC . $|AB| + |BC| > |AC|$ (на основании свойства расстояний или на основании тео-

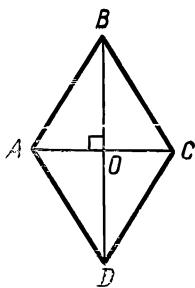


Рис. 30

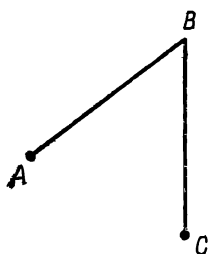


Рис. 31

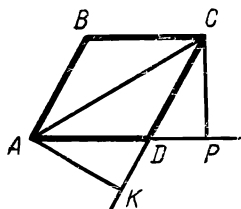


Рис. 32

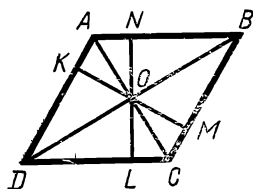


Рис. 33

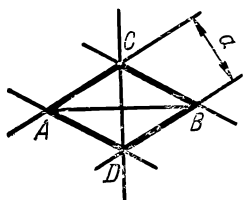


Рис. 34

ремы о длине ломаной, п. 7, VI класс).

При $|AB| = |BC|$ имеем: $|AB| > \frac{1}{2} |AC|$.

в) 1) Нет, так как в треугольнике не может быть больше одного прямого угла. 2) Да, в этом случае острый угол ромба равен 60° .

10. а) Нет, так как в общем случае диагонали ромба не конгруэнтны. б) Да.

11. Строятся два взаимно перпендикулярных отрезка, точка пересечения которых не делит пополам по крайней мере один из этих отрезков, и концы отрезков соединяются отрезками прямых. (Точка пересечения этих отрезков должна быть внутренней для каждого из отрезков, так как отрезки, изображенные на рисунке 31, также пересекаются: $[AB] \cap [BC] = B$. Пропуск учащимися этого утверждения ошибкой считать не следует.)

12. Это следует из конгруэнтности треугольников ACK и CAP , где $[AK]$ и $[CP]$ — высоты ромба (рис. 32). Эти треугольники конгруэнтны, так как они прямоугольные, имеют общую гипотенузу и $\widehat{CAP} = \widehat{ACK}$ (каждый из этих углов равен половине одного из противоположных углов ромба).

13. Проведем через точку O , точку пересечения диагоналей ромба, прямые, перпендикулярные сторонам ромба, и обозначим точки их пересечения со сторонами ромба через K, L, M и N (рис. 33). Длины $|OK|$, $|OL|$, $|OM|$ и $|ON|$ — расстояния точки O до сторон ромба. Их равенство можно доказать различными способами, например из конгруэнтности прямоугольных треугольников AKO , ANO , CLO , CMO (они конгруэнтны по гипотенузе и острому углу). Могут быть использованы и соображения симметрии.

14. а) Проверить конгруэнтность всех сторон четырехугольника. б) Проверить (перегибанием куска материи), являются ли диагонали четырехугольника его осями симметрии.

15. На рисунке 34 ширина линейки a , $a < |AB|$, прямая CD — ось симметрии точек A и B .

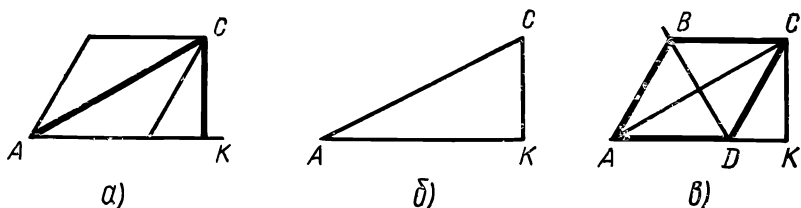


Рис. 35

План доказательства того, что прямая CD — ось симметрии точек A и B : вначале доказываем, что параллелограмм $ADBC$ является ромбом. На основании свойства диагоналей ромба устанавливаем, что прямая CD — ось симметрии точек A и B .

16. а) Задача сводится к построению равнобедренного треугольника по его боковой стороне (заданной стороне ромба) и основанию (заданной диагонали ромба).

д) Вначале строится прямоугольный треугольник ACK по гипотенузе AC (заданной диагонали ромба) и катету CK (заданной высоте ромба) (рис. 35, а, б); дальнейшее построение видно из рисунка 35, в.

49. Квадрат (1 час)

Учащиеся должны уметь определять квадрат как прямоугольник, у которого все стороны равны (определение, данное в учебнике), и как ромб, у которого все углы прямые. Каждое из этих определений, как уже отмечалось относительно определений прямоугольника и ромба, избыточно. В самом деле, можно доказать, что из конгруэнтности двух смежных сторон прямоугольника следует конгруэнтность всех его сторон; если в ромбе один из углов прямой, то и все остальные его углы прямые.

Ученики должны уметь строить оси симметрии квадрата и знать свойства квадрата.

К пункту дано большое число упражнений, из которых желательно в первую очередь рассмотреть 1, 2, 4, 5, 9, 11, 13, 14, 15. Они могут быть предложены в классе, для домашнего задания, при опросе. На дом могут быть даны задания 9, 11.

Дополнительно приводим две задачи на вычисление.

1. Диагональ квадрата со стороной 1 м служит стороной другого квадрата. Найдите диагональ второго квадрата. [2 м.]

2. Диагональ квадрата равна 2 см. Через его вершины проведем прямые, параллельные его диагоналям. Определите вид четырехугольника, образованного проведенными прямыми, и вычислите его сторону. [Квадрат; 2 см.]

Ответы и указания.

1. Возможно несколько определений квадрата через понятие параллелограмма:

Квадратом называется параллелограмм, у которого один угол прямой и две смежные стороны конгруэнтны.

Квадратом называется параллелограмм, у которого диагонали конгруэнтны и взаимно перпендикулярны.

Квадратом называется параллелограмм, у которого диагонали конгруэнтны и принадлежат его осям симметрии и т. д.

При ответах учащихся следовало бы требовать от них проведения доказательства. Однако на это потребуется немалое время. Поэтому рекомендуется ограничиваться иллюстрациями, а если ученик предлагает неверное определение, использовать контрпример.

Перед выполнением этого задания можно разъяснить ученикам, что вначале полезно дать определение ромба (или прямоугольника) через параллелограмм, а затем добавить еще одно условие, которое достаточно для того, чтобы ромб (или прямоугольник) был квадратом (см. задачу 7).

2. В соответствии с принятым определением квадрата нужно доказать, что в этом случае: а) все углы ромба прямые; б) в прямоугольнике все стороны конгруэнтны; в) в четырехугольнике все углы прямые.

3. Квадрат имеет четыре оси симметрии: две как прямоугольник (серединные перпендикуляры к его сторонам) и две как ромб (прямые, которым принадлежат его диагонали).

4. Восемь: четыре осевых симметрии, три поворота (на 90° в обоих направлениях и на 180° — центральная симметрия) и тождественное перемещение.

5. Восемью различными способами (рис. 36).

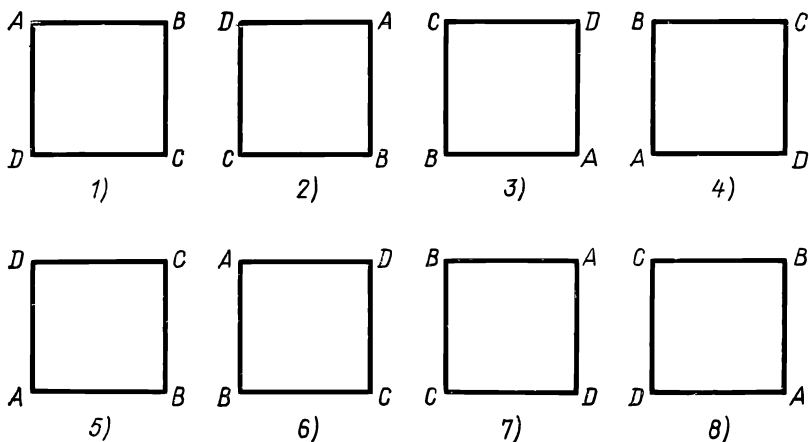


Рис. 36

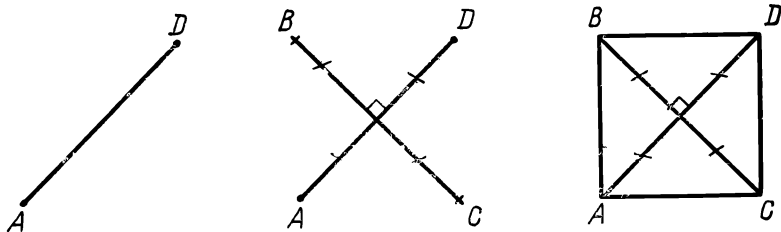


Рис. 37

6. Да. Последовательность построения дана на рисунке 37.

7. а) Для того чтобы прямоугольник был квадратом, необходимо и достаточно, чтобы две его смежные стороны были конгруэнтны.

б) Для того чтобы ромб был квадратом, необходимо и достаточно, чтобы один из его углов был прямым.

8. Квадратом является пересечение двух полос одинаковой ширины, границы которых взаимно перпендикулярны.

9. а) Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.

б) Диагонали квадрата конгруэнтны.

10. Один из способов доказательства и его оформления приводится ниже.

Д а н о: $|AC| = |BD|$,

$$\hat{1}=\hat{2}; \hat{3}=\hat{4}; \hat{5}=\hat{6}; \hat{7}=\hat{8}; [BD] \cap [AC]=O \text{ (рис. 38),}$$

Д о к а з а т ь: $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$,

$$\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = \widehat{DAB} = 90^\circ.$$

(Последнее требование можно записать короче: $\widehat{ABC} = 90^\circ$, см. задачу 2, в к этому пункту.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из симметрии четырехугольника $ABCD$ относительно прямой AC следует, что $[BD] \perp [AC]$, $|BO| = |OD|$. Аналогично доказывается, что точки C и A симметричны относительно прямой BD и $|AO| = |OC|$. А так как $|AC| = |BD|$ по условию, то $|AO| = |BO| = |CO| = |DO|$. Из конгруэнтности равнобедренных прямоугольных треугольников AOB , BOC , COD и DOA следует, что $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$ и каждый из их острых углов равен 45° . Следовательно, в четырехугольнике $ABCD$ $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$.

11. а) Нет. На рисунке 39 $|AC| = |BD|$, $[AC] \perp [BD]$, но $ABCD$ — не квадрат.

б) Нет (не всякий ромб является квадратом.)

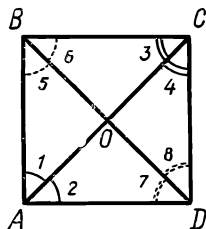


Рис. 38

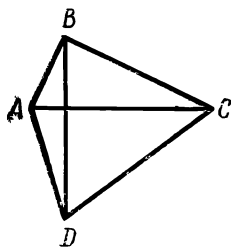
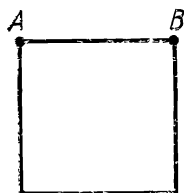
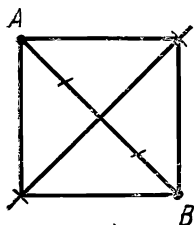


Рис. 39



а)



б)

Рис. 40

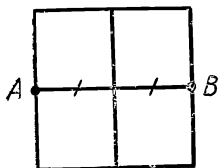


Рис. 41

Для предложения а) может быть добавлено, например, любое из условий: диагонали четырехугольника в точке их пересечения делятся пополам; каждая диагональ четырехугольника является биссектрисой двух углов четырехугольника.

Для предложения б) может быть добавлено условие: диагонали четырехугольника конгруэнтны.

12. Может быть проверено выполнение, например, следующих условий:

а) Все стороны четырехугольника имеют равные длины и один из его углов прямой или: диагонали четырехугольника конгруэнтны, взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам.

б) Четырехугольник имеет три оси симметрии (можно доказать, что в этом случае он будет иметь и четвертую ось симметрии).

З а м е ч а н и е. Ответ «нужно проверить, имеет ли четырехугольник четыре оси симметрии» считается правильным.

в) Диагонали четырехугольника конгруэнтны, и все его стороны конгруэнтны.

13. Треугольники AEL , BFE , CKF , DLK конгруэнтны (по двум катетам), следовательно, $[EF] \cong [FK] \cong [KL] \cong [EL]$, $\angle AEL \cong \angle BFE$, но $\widehat{BEF} + \widehat{BFE} = 90^\circ$, поэтому $\widehat{BEF} + \widehat{AEL} = 90^\circ$, откуда $\widehat{FEL} = 90^\circ$. Следовательно, четырехугольник $EFKL$ — квадрат (см. задачу 2, а).

14. У к а з а н и е. Показать, что точки B и D и точки E и F центрально-симметричны относительно точки O , $O = [BD] \cap [AC]$. Тогда $BFDE$ — параллелограмм, но в нем $[EF] \perp [BD]$, следовательно, этот четырехугольник — ромб (см. задачу 3 к п. 48).

15. а) Два решения (рис. 40);

б) одно решение (рис. 41);

в) одно решение (рис. 42);

г) по заданному центру O и точке A на одной из сторон квадрата можно построить бесконечное множество квадратов; сторона наибольшего из них равна $2|OA|$, наименьшего — $|OA|\sqrt{2}$ (рис. 43).

16. При решении задачи используется тот факт, что при повороте на 90° в направлении

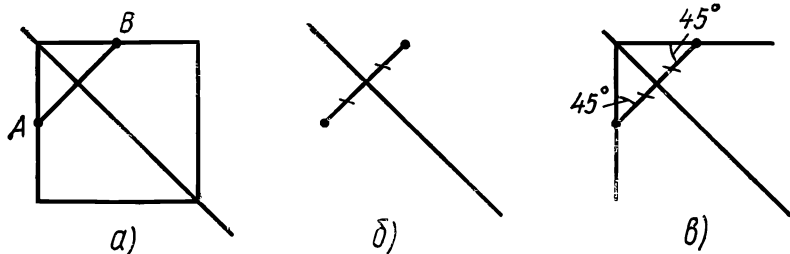


Рис. 42

движения часовой стрелки или в противоположном направлении и на 180° относительно центра квадрата квадрат отображается сам на себя. Таким образом, если даны две точки, принадлежащие сторонам квадрата, и его центр, то можно построить еще 6 точек, лежащих на сторонах квадрата (по две на каждой стороне) (рис. 44). Задача в общем случае имеет два решения; задача имеет бесконечное множество решений, если три заданные точки лежат на одной прямой (см. задачу 15, г). (Если A и B принадлежат одной стороне, то можно провести прямую AB , через O — перпендикуляр к AB и т. д.).

З а м е ч а н и е. Задача необязательная. В классе рекомендуется задачу давать для конкретного расположения точек.

17. а) Предположим, что задача решена и построен квадрат, удовлетворяющий условию задачи (рис. 45). $[AB_1]$ — заданный отрезок, его длина равна сумме длин стороны и диагонали. Так как $|BC| = |CB_1|$, то $\angle B_1BC \cong \angle BB_1C$ и на основании теоремы о внешнем угле треугольника (п. 33, VI класс) $\hat{B}_1 = 22^\circ 30'$.

П л а н п о с т р о е н и я. Строим треугольник ABB_1 , в котором $[AB_1]$ — заданный отрезок, $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B}_1 = 22^\circ 30'$. Точки A и B — вершины искомого квадрата, принадлежащие одной его стороне. Нахождение вершин C и D может быть выполнено различными способами. Здесь интересно рассмотреть предложения учащихся.

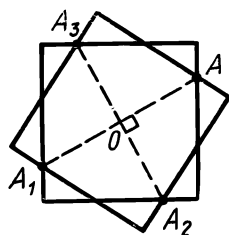


Рис. 43

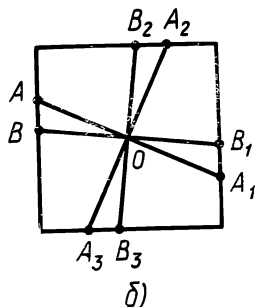
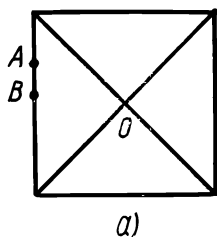


Рис. 44

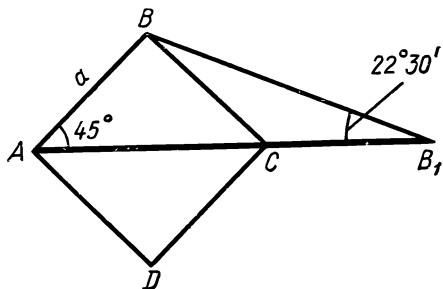


Рис. 45

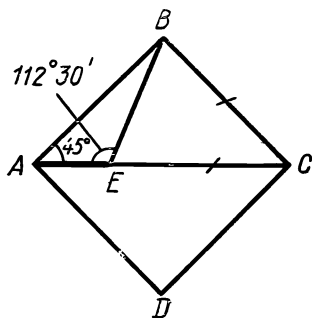


Рис. 46

б) Предположим, что задача решена и по данной разности диагоналей и стороны построен квадрат (рис. 46). Рассмотрим треугольник BEC , в нем $|BC| = |EC|$, следовательно, $\angle BEC \cong \angle CBE$, $\widehat{BEC} = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67^\circ 30'$. Тогда $\widehat{AEB} = 112^\circ 30'$.

П л а н п о с т р о е н и я. Строим треугольник ABE по стороне AE (заданный отрезок), $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{E} = 112^\circ 30'$. Точки A и B — вершины искомого квадрата, прилежащие к одной стороне.

50. Трапеция (2 часа)

Учащиеся должны знать определение трапеции и термины, введенные в пункте.

Обязательной является теорема о средней линии трапеции. К первому уроку рекомендуется повторить теорему Фалеса и теорему о средней линии треугольника (без доказательства). Перед доказательством теоремы о средней линии трапеции рекомендуется решить задачу на применение приема, используемого при доказательстве теоремы.

Например: «В треугольнике ABC через точку D , середину стороны AB , проведена прямая, параллельная стороне AC . Вычислите периметр треугольника, отсеченного от треугольника ABC этой прямой, если $|AB| = 4$ см, $|BC| = 5$ см, $|AC| = 6$ см. [7,5 см.]

При рассмотрении материала этого пункта и при его повторении рекомендуется решить задачи 1, 2, 7, 11—13.

Н а д о м могут быть предложены задачи 13, 6, 14.

При решении задач на построение в связи с ограниченностью времени рекомендуется давать конкретные значения сторон (и других линейных элементов) и углов, с тем чтобы не проводить исследование решения задачи в общем виде.

В работе с учащимися могут быть использованы задачи на вычисление из «Дидактических материалов».

1. Если в четырехугольнике три угла прямые, то прямым является и четвертый угол, так как сумма внутренних углов четырехугольника (слово «выпуклого» здесь можно опустить, эта теорема верна и для невыпуклого четырехугольника) равна 360° . Следовательно, четырехугольник будет прямоугольником, а не трапецией (см. задачу 1, б, п. 47).

2. Д а н о: $[BC] \parallel [AD]$, $|AB| = |CD|$ (рис. 47).

Д о к а з а т ь: а) $\angle A \cong \angle D$, б) $|BD| = |AC|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть для определенности $|AD| > |BC|$. Отложим на стороне AD от точки D отрезок DK , конгруэнтный отрезку BC , и соединим отрезком точки B и K . Получим равнобедренный треугольник ABK , в котором $|AB| = |BK|$. Следовательно, $\angle BAK \cong \angle BKA$. Но $\angle BKA \cong \angle CDA$ как углы, образованные одинаково направленными лучами $[KA]$ и $[DA]$ и лучами $[DC]$ и $[KB]$. Таким образом, мы доказали, что углы при основании равнобедренной трапеции конгруэнтны.

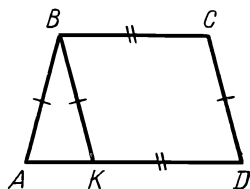


Рис. 47

б) Для доказательства конгруэнтности диагоналей рассмотрим треугольники ABD и DCA . Эти треугольники конгруэнтны (по двум сторонам и углу, заключенному между ними). Следовательно, $|AC| = |BD|$. Теорема доказана.

3. Пусть MN — прямая, проведенная через середину отрезка AD перпендикулярно этому отрезку, $M \in [AD]$, $N \in [BC]$ (рис. 48). Для доказательства того, что прямая MN — ось симметрии трапеции $ABCD$, достаточно доказать, что точки B и C симметричны относительно этой прямой. Так как точки A и D симметричны относительно прямой MN (почему?) и $\hat{A} = \hat{D}$ (см. задачу 2, а), то луч DC отобразится на луч AB ; так как $(MN) \perp (BC)$, то луч NC отобразится на луч NB и точка C отобразится на точку B (почему?). Таким образом, точки B и C симметричны относительно прямой MN , следовательно, прямая MN — ось симметрии трапеции $ABCD$.

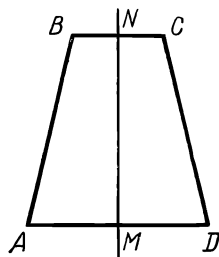


Рис. 48

З а м е ч а н и е. После решения задачи можно предложить учащимся построить точки, симметричные каким-либо точкам трапеции $ABCD$ относительно прямой MN . (Могут быть взяты и внутренние точки трапеции.)

4. З а м е ч а н и е. Задача необязательная, так как рассматриваемый в ней вопрос не входит в программу. Ее желательно рассмотреть на кружке или с сильными учениками.

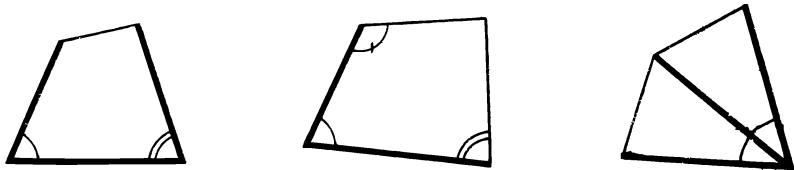


Рис. 49



Рис. 50

Возможны различные подходы к ее решению. Можно, например, поставить вначале более общий вопрос — сколькими элементами определяется произвольный четырехугольник, или начать непосредственно выяснять, сколько элементов определяют трапецию. В обоих случаях делается опора на чертеж. Некоторые из иллюстраций к такой работе приведены на рисунках 49 и 50, на которых выделены элементы, определяющие ту или иную фигуру.

Интересно продолжить эту работу, предложив учащимся выяснить, сколькими элементами определяется равнобедренная трапеция (тремя), прямоугольная трапеция (тремя), параллелограмм (тремя), ромб (двумя), квадрат (одним). В каждом случае подчеркивается необходимость наличия линейного элемента.

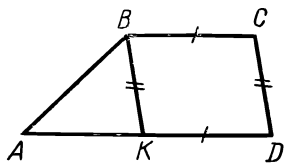
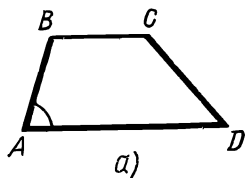
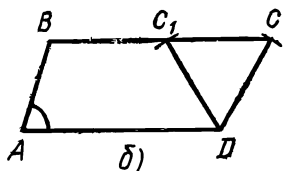


Рис. 51

5. а, в). Задача сводится к установлению соответствующих отношений между сторонами треугольника ABK (рис. 51).



а)



б)

Рис. 52

6. У к а з а н и е. Решение задачи следует начать с анализа, на основании которого определяется план решения. Следует заметить, что в VII классе не проводится выделение всех известных этапов решения задачи на построение.

а) П л а н п о с т р о е н и я. Строим угол A (рис. 52, а) и на его сторонах откладываем заданные отрезки AB и AD ; через точку B проводим луч BC , параллельный прямой AD , и из точки D как из центра заданным радиусом CD на луче BC делаем засечки (рис. 52, б). Так как окружность $(D, |DC|)$ может пересечь луч BC в двух (одной, ни в одной) точ-

ках, то задача может иметь два (одно, ни одного) решения. На рисунке 52, б показан случай двух решений — трапеций $ABCD$ и ABC_1D .

б) П л а н п о с т р о е н и я. По трем заданным элементам строим треугольник ABD (рис. 53, а) и через вершину B проводим луч BK , параллельный отрезку AD (рис. 53, б), далее — как в задаче а).

в) П л а н п о с т р о е н и я. Строим отрезок AD и углы A и D , прилежащие к этому отрезку (рис. 54, а). Затем от точки D на отрезке AD откладываем отрезок DL , конгруэнтный заданному отрезку BC , и проводим через точку L прямую, параллельную лучу DP (рис. 54, б). Точку пересечения лучей AK и LM обозначим через B . Через точку B проводим луч BN , параллельный отрезку AD . Точка пересечения лучей BN и DP (точка C) будет четвертой вершиной искомой трапеции.

г) П л а н п о с т р о е н и я. Строим вспомогательный треугольник ACF (рис. 55), в котором $|AF| = |AD| + |BC|$, $|CF| = |BD|$. Затем на отрезке AF от точки F откладываем отрезок DF , конгруэнтный отрезку BC , через точку D проводим луч DP , параллельный отрезку CF , и через точку C проводим луч CL , параллельный отрезку FA . Точка пересечения этих лучей будет четвертой вершиной искомой трапеции $ABCD$.

7. а) Д а н о: $[BC] \parallel [AD]$, $\angle A \cong \angle D$ (рис. 56).

Д о к а з а т ь: $[AB] \cong [CD]$.

Ниже приведены два варианта решения этой задачи.

Вариант 1. Проведем отрезки BK и CL , перпендикулярные отрезку AD . Треугольники ABK и DCL конгруэнтны, так как $\widehat{BKA} = \widehat{CLD} = 90^\circ$, $|BK| = |CL|$ (высоты трапеции), $\hat{A} = \hat{D}$. Следовательно, $[AB] \cong [CD]$.

Вариант 2. Проведем серединный перпендикуляр MN к основанию AD

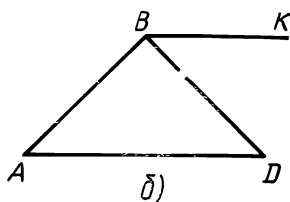
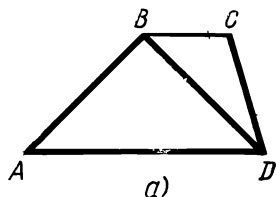


Рис. 53

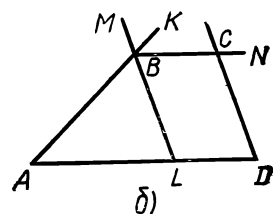
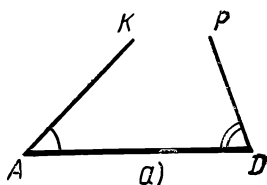


Рис. 54

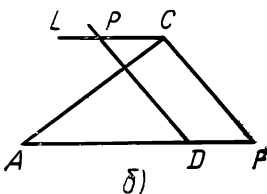
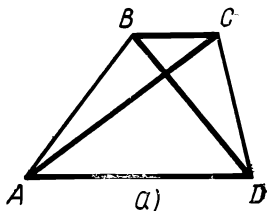


Рис. 55

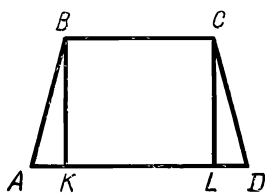


Рис. 56

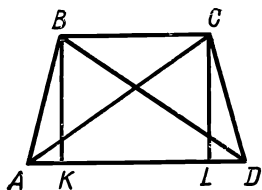


Рис. 57

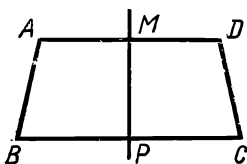


Рис. 58

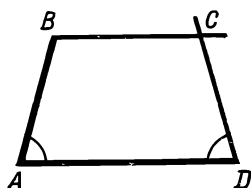


Рис. 59

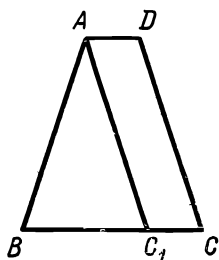


Рис. 60

трапеции $ABCD$, $M \in [AD]$, $N \in [BC]$. Так как $|AM| = |MD|$ и $\hat{A} = \hat{D}$, то при осевой симметрии относительно прямой MN луч DC отобразится на луч AB ; так как $(MN) \perp [BC]$ (почему?), то луч NC отобразится на луч NB и точка C отобразится на точку B (почему?). Следовательно, $[AB] \cong [CD]$ и $|AB| = |CD|$.

б) Доказывается конгруэнтность треугольников BDA и CAD , из которой следует конгруэнтность сторон AB и CD . Для доказательства конгруэнтности этих треугольников могут быть рассмотрены треугольники CAL и BDK (рис. 57).

в) Точки A и D , B и C симметричны относительно прямой MP (рис. 58). Следовательно, отрезки AB и DC симметричны относительно той же прямой, а значит, и конгруэнтны.

8. а) $\angle A = \angle D$ (задача 2,б). Строим углы, равные \hat{A} , с вершинами в концах отрезка AD (рис. 59). На второй стороне угла A откладываем отрезок AB заданной длины $|AB|$ и через точку B проводим луч, параллельный отрезку AD . Точка пересечения этого луча со второй стороной угла D определит четвертую вершину трапеции, точку C .

б) Решение задачи сводится к построению вспомогательного равнобедренного треугольника BAC_1 (в предположении, что $|BC| > |AD|$) по трем сторонам: $|AB| = |AC_1|$, $|BC_1| = |BC| - |AD|$ — и дополнению его до трапеции (рис. 60).

в) Задача сводится к построению треугольника ACD по трем сторонам ($|AB| = |DC|$) и дополнению его до искомой трапеции.

г) Решение задачи сводится к построению вспомогательного равнобедренного треугольника ABD_1 по его основанию AD_1 ($|AD_1| = |AD| - |BC|$) и высоте h (рис. 61) и дополнению его до трапеции.

9. Известно, что четырехугольник, у которого диагонали в точке пересечения делятся пополам, — параллелограмм. Но по определению трапецией называется че-

тырехугольник, у которого только одна пара параллельных сторон. Следовательно, в трапеции диагонали в точке пересечения не делятся пополам.

10. а) Параллелограмм (в частном случае — прямоугольник); б) параллелограмм (если трапеция равнобедренная — ромб); в) параллелограмм; г) прямоугольник; д) ромб; е) квадрат.

11. 5 см.

12. а) 12 см и 8 см; б) 5 см и 2 см.

13. а) Пусть трапеция $ABCD$ — данная, в ней $|BC| = 6,2$ см (рис. 62), $K \in [AC]$ и $L \in [BD]$, $|AK| = |KC|$, $|DL| = |LB|$, $|KL| = 4$ см.

Проведем прямую KL , $(KL) \cap [AB] = P$, $(KL) \cap [CD] = Q$. По теореме Фалеса $|AP| = |PB|$ и $|CQ| = |QD|$. Так как PK — средняя линия треугольника, то $|PK| = 3,1$ см. Из треугольника ABD по свойству средней линии имеем: $|PL| = \frac{1}{2} |AD|$, но $|PL| = 7,1$ см, откуда $|AD| = 14,2$ см.

б) Проведя построение аналогично выполненному при решении задачи 13, а, из треугольника ABC будем иметь $|PK| = 3,1$ см, из треугольника ABD $|PL| = 7,1$ см, следовательно, $|KL| = 4$ см.

14. а) По отрезку KL ; $[KL] \parallel [AB]$, $|CK| = |KD|$ (рис. 63).

б) По отрезку BM ; $|DM| = |MC|$ (рис. 64).

в) По отрезкам KP и MS ; $|BK| = |AK|$, $|CM| = |MD|$ (рис. 65), $[KP] \perp [AD]$, $[MS] \perp [AD]$.

15. Треугольник AKD равнобедренный, так как $\angle 1 \cong \angle 2$ (рис. 66).

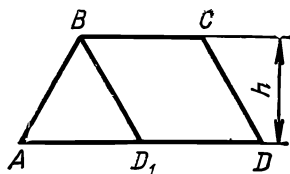


Рис. 61

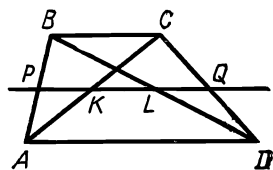


Рис. 62

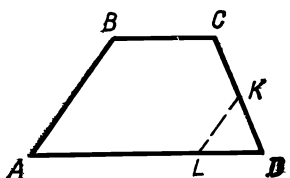


Рис. 63

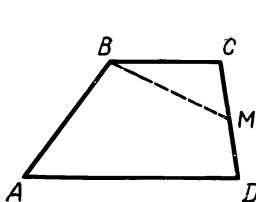


Рис. 64

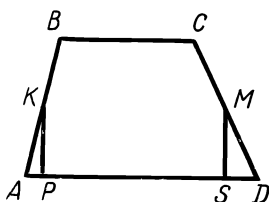


Рис. 65

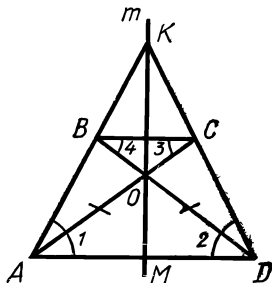


Рис. 66

Проведем через вершину K прямую m , перпендикулярную основанию AD (она будет перпендикулярна и основанию BC), $(AD) \perp m = M$, $|AM| = |MD|$, так как высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является и его медианой.

Прямая m — ось симметрии треугольника AKD . Точки B и C симметричны относительно прямой m (при осевой симметрии луч AK отображается на луч DK , так как $|AM| = |DM|$ и $\angle 1 \cong \angle 2$. Точка B отображается на точку C , так как $|AB| = |DC|$).

Следовательно, отрезки AC и DB симметричны и точка их пересечения принадлежит прямой KM .

§ 4. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

При изложении этого материала считается, что учащиеся уже имеют интуитивное представление о площади, сформированное, по сути, еще в начальной школе и развитое в IV—V классах.

В частности, учащиеся уже знакомы с формулами площади прямоугольника, прямоугольного треугольника и круга¹.

Формула для вычисления площади треугольника была выведена для прямоугольного треугольника. Площадь любого треугольника подсчитывалась как сумма площадей двух прямоугольных треугольников, на которые всегда может быть разбит любой треугольник.

Ниже приводится вывод площади прямоугольного треугольника, данный в учебнике V класса:

«Возьмем два равных прямоугольных треугольника с катетами 3 см и 5 см (рис. 67). Из них можно сложить прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см (рис. 68). Площадь этого прямоугольника равна $3 \cdot 5 \text{ см}^2$. Площадь же одного прямоугольного треугольника равна половине площади прямоугольника, т. е. $\frac{3 \cdot 5}{2} \text{ см}^2$. Так как 3 см и 5 см — длины катетов прямоугольного треугольника, то площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения длин его катетов. Если обозначить буквами a и b длины катетов, а буквой S площадь, то это правило можно записать в виде формулы:

$$S = \frac{a \cdot b}{2}.$$

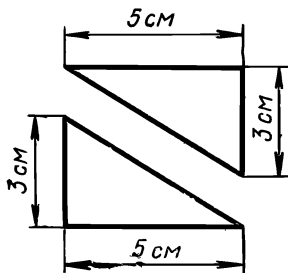


Рис. 67.

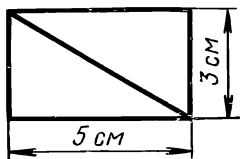


Рис. 68

¹ Пункты 67 и 69 учебника математики для V класса, под ред. А. И. Маркушевича.

В VI классе в учебнике геометрии был введен специальный пункт «Величины и числа» (п. 3), в котором об измерении величин говорилось:

«Выбрав какую-либо величину e данного рода за единицу измерения, можно при ее помощи измерить любую величину a того же рода. В результате измерения находят, что $a = x e$, где x — число. Это число называется числовым значением величины a при единице измерения e ».

«Если $a = xb$ и $b \neq 0$, то число x называют отношением величин a и b и пишут:

$$x = a : b, \text{ или } x = \frac{a}{b} \text{ »}.$$

В VII классе формулируются некоторые свойства площади. Вводятся формулы площадей квадрата, параллелограмма, прямоугольника, треугольника, трапеции и площадь произвольного многоугольника.

Лучшему усвоению второго свойства площади (если многоугольник состоит из неперекрывающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников) может способствовать решение задач, связанных с использованием понятия равноставленности.

51. Общие сведения о площадях фигур (2 часа)

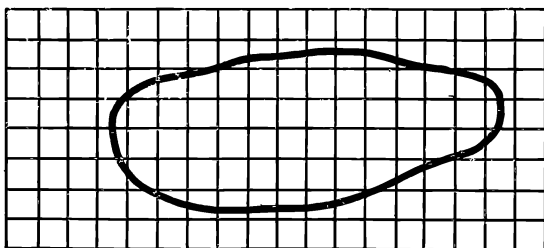
В содержание этого пункта входят следующие основные вопросы:

1. Свойства величин.
2. Свойства площади.
3. Площадь прямоугольника. Площадь квадрата.

Все эти вопросы в той или иной мере знакомы учащимся из младших классов (кроме свойств площади). Поэтому здесь должна быть проведена в основном систематизация этих сведений. Специально повторять материал, ранее изученный, здесь не следует.

В результате изучения этого пункта учащиеся должны знать свойства площади и формулы площади прямоугольника и квадрата.

Лишь в конце п. 51 на конкретном примере дается понятие о возможности оценки сверху и снизу площадей произвольных фигур. Этому материалу по усмотрению учителя и при наличии времени может предшествовать разбор одного-двух примеров подсчета площади фигуры с помощью палетки. Сторону квадрата «демонстрационной» палетки удобно выбрать равной 1 дм. Может быть использована и специальная таблица (см. табл. 1). Желательно, чтобы каждый ученик, кроме того, самостоятельно измерил площадь какой-либо фигуры (ограниченной криволинейным контуром) с помощью палетки, изготовленной из кальки. В случае отсутствия кальки фигуры могут быть начерчены на клетчатой бумаге. Сторону квадрата сетки удобно взять равной 1 см и 0,5 см. Таким образом, площадь одной и той же фигуры будет выражена в



разных единицах измерения. Площадь фигуры в квадратных сантиметрах будет выражаться числом, в 4 раза бóльшим, чем при единице площади в $0,25 \text{ см}^2$ (сторона квадрата $0,5 \text{ см}$).

Полезно обратить внимание учащихся на то, что величина площади фигуры не зависит от способа наложения палетки. Этот факт может быть проиллюстрирован результатом, полученным самими учащимися,— площади фигур в одном и том же варианте заданий оказываются примерно равными. Отклонения объясняются тем, что этот способ дает приближенный результат. Но точность его увеличивается при уменьшении размеров единичных квадратов сетки.

При демонстрации способа определения площади фигуры с помощью палетки ученикам предлагается самим объяснить, почему при определении площади фигуры каждая часть квадрата, не полностью входящего в данную фигуру, принимается за половину, т. е. почему число квадратов, которые пересекаются контуром фигуры, принято при подсчете площади делить на два.

Площадь фигуры находится как среднее арифметическое числа единичных квадратов, все точки которых принадлежат фигуре, и числа единичных квадратов, у которых фигуре принадлежит более чем одна точка.

Здесь могут быть использованы задания из «Дидактических материалов» или подготовлены 2—4 варианта заданий, например: «Пользуясь палеткой, найдите площадь заданной фигуры (рис. 69)». Эти работы могут выполняться лишь при наличии времени.

Рассмотрим теперь более подробно содержание п. 51.

1. В учебнике VI класса (п. 3) приведены свойства величин:

а) величины одного и того же рода можно сравнивать между собой и складывать;

б) величины можно умножать на числа.

Там же в числе примеров величин называется и площадь.

Однако в VI классе этому вопросу в связи с понятием площади не уделялось внимания. Поэтому в VII классе эти свойства величин должны быть рассмотрены

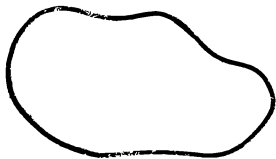
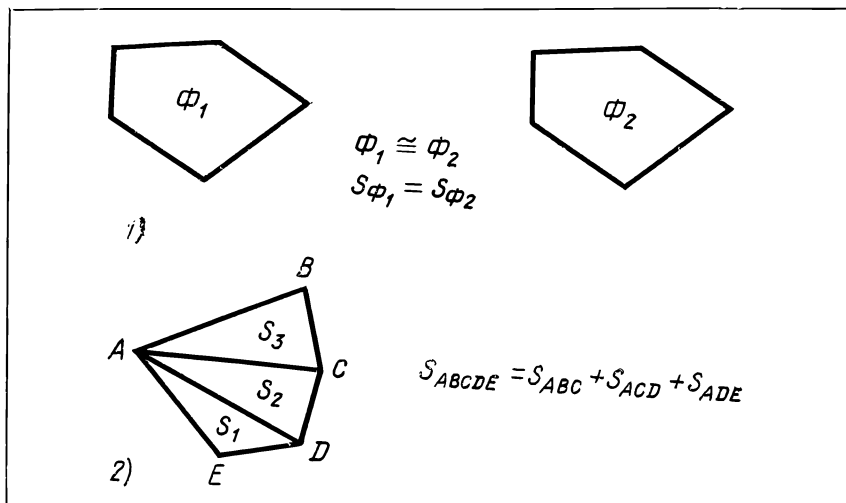


Рис. 69

применительно к площади. Это лучше всего сделать на конкретных примерах, так как указанные свойства величин учащимся кажутся совершенно естественными. Так, можно предложить ученикам найти площадь прямоугольника, составленного из двух прямоугольников, площади которых известны; можно предложить найти площадь участка, составленного из двух или нескольких участков.

2. Свойства площадей разясняются на конкретных примерах. При этом могут быть использованы иллюстрации, аналогичные приведенным на таблице 2.

Таблица 2



В дальнейшем, при выводе формул площади параллелограмма, треугольника, трапеции, внимание учащихся обращается на использование этих свойств.

3. Вывод формулы площади прямоугольника, $S = ah$, дан в учебном пособии лишь для случая целых числовых значений a и h . Полезно проверить ее применимость в случае дробных числовых значений a и h на примерах типа

$$\begin{aligned} 1,4 \text{ м} \cdot 1,6 \text{ м} &= 2,24 \text{ м}^2, \\ 14 \text{ дм} \cdot 16 \text{ дм} &= 224 \text{ дм}^2 = 2,24 \text{ м}^2. \end{aligned}$$

На основе формулы площади прямоугольника и указанных на странице 18 учебного пособия двух допущений вопросы вычисления площадей многоугольников излагаются уже вполне корректно с научной точки зрения.

Существен тот факт, что перемножать числовые значения a и h следует при общей единице измерения. В связи с этим в число устных упражнений по этому материалу рекомендуется включить, например, такие:

1) Вычислить площадь прямоугольника, если:

а) $a = 3 \text{ см}$, $h = 4 \text{ м}$; б) $a = 2 \text{ м}$, $h = 2 \text{ см}$.

2) Заполнить таблицу:

a	h	S
5 см	10 см	20 см ²
10 дм	2 м	6 см ²
2 м	1 см	15 дм ²
	3 м	

Некоторые из этих упражнений рассматриваются и на последующих уроках.

Как устное упражнение (желательно с опорой на чертеж прямоугольника) может быть предложено задание 6.

Желательно на этом (или на последующих) уроке решить некоторые из задач: 3, 5, 10, 14, 15.

Н а д о м может быть дана работа по определению с помощью палетки площади фигуры, ограниченной криволинейным контуром (если такая задача не выполнялась в классе), и задачи 1 (устно), 6, 9, 2.

При решении задач 2—4 рекомендуется, чтобы учащиеся изображали фигуры, которые можно составить из данных, от руки, стремясь выдержать на рисунках соотношения между элементами этих фигур.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Свойства длины отрезка:

- 1) конгруэнтные отрезки имеют равные длины;
- 2) если отрезок составлен из неперекрывающихся отрезков, то его длина равна сумме длин этих отрезков.

Свойства величины угла:

- 1) конгруэнтные углы имеют равные величины;
- 2) если угол составлен из неперекрывающихся углов, имеющих общую вершину, то его величина равна сумме величин этих углов.

2. Равнобедренный прямоугольный треугольник, прямоугольник (отличный от квадрата), параллелограмм (отличный от прямоугольника), равнобедренную трапецию (рис. 70).

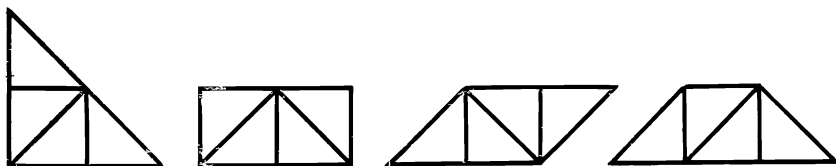
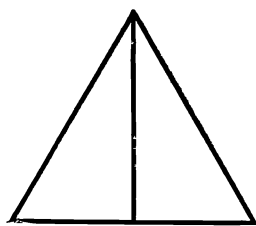
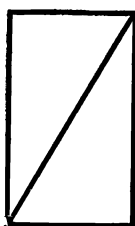


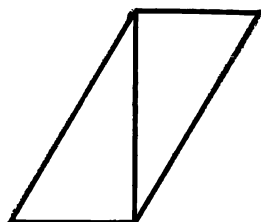
Рис. 70



а)



б)



в)

Рис. 71

З а м е ч а н и е. После решения задачи можно предложить учащимся показать, какие невыпуклые фигуры можно составить из заданных треугольников. Достаточно ограничиться одним-двумя примерами.

3. См. рисунок 71. Эти фигуры равновелики на основании 2-го свойства площади (ученики должны знать формулировки свойств).

4. Решение задачи дано на рисунке 72. Площади фигур равны на основании 2-го свойства площади.

З а м е ч а н и е. Здесь также рекомендуется использовать термин «равновеликие фигуры».

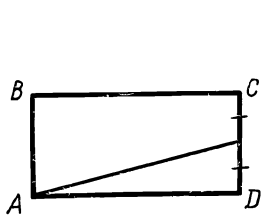
При обосновании ответа на задание в) используется определение квадрата. Удобно определение квадрата как ромба с прямым углом (см. задачу 2, а или 7, б к п. 49).

5. 1) 1; 2) 1 000 000; 3) 10 000.

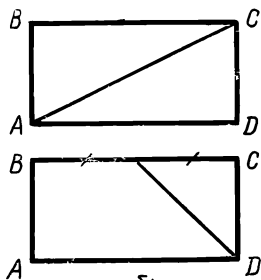
6. а) Увеличится в 4 раза; б) уменьшится в 9 раз; в) останется без изменения; г) увеличится в 3 раза.

7. Площадь пола $22,7 \text{ м}^2$, площадь окон $3,8 \text{ м}^2$. Освещенность недостаточна, так как площадь окон составляет менее 17% площади пола.

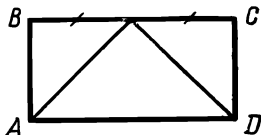
9. Площадь прямоугольника может быть равна 5 см^2 , 8 см^2 , 9 см^2 (стороны его равны 1 см и 5 см ; 2 см и 4 см ; 3 см). Наибольшая площадь будет у квадрата.



а)



б)



в)

Рис. 72

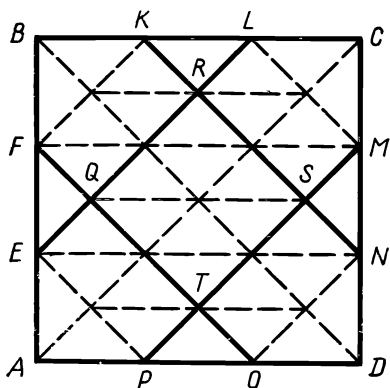


Рис. 73

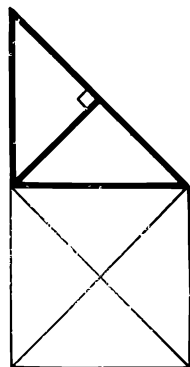


Рис. 74

З а м е ч а н и е. Задача иллюстрирует весьма важное положение: произведение двух чисел a и b , сумма которых равна заданному числу, наибольшее при $a = b$. Доказательство этого факта дается в курсе алгебры.

10. а) 200 га; б) 25 га; в) 1,5 га.

12. Площадь квадрата $ABCD$ в пять раз больше площади квадрата $MNOP$.

13. Решение видно на рисунке 73.

14. Решение дано на рисунке 74.

15. Решение задачи основано на том факте, что сторона искомого квадрата равна диагонали заданного.

52. Площадь параллелограмма (1 час)

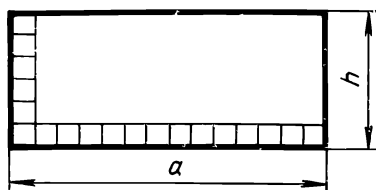
Учащиеся должны знать формулу площади параллелограмма и уметь доказывать ее для любого из трех разобранных в учебнике случаев. С этой целью могут быть использованы иллюстрации таблицы 3.

Из курса VI класса они знают определение высоты параллелограмма (отрезок перпендикуляра, проведенного к противоположным сторонам параллелограмма, заключенный между этими сторонами или их продолжениями). Длина высоты параллелограмма для краткости также называется высотой параллелограмма.

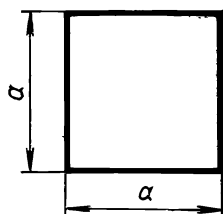
При разборе в классе теоремы о площади параллелограмма следует обратить внимание учащихся на те места, где используются свойства площадей, сформулированные в п. 51.

В число устных могут быть включены, например, упражнения вида:

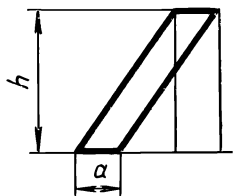
«Вычислите площадь параллелограмма, если расстояние между его сторонами, равными 5 см каждая, равно 3 см (10 см и 3 мм; 2 см и 3 дм соответственно)».



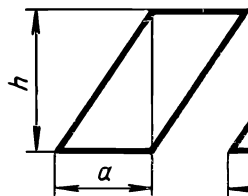
$$S = ah$$



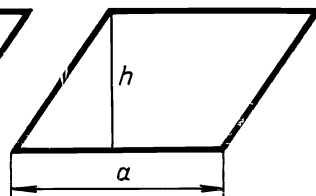
$$S = a^2$$



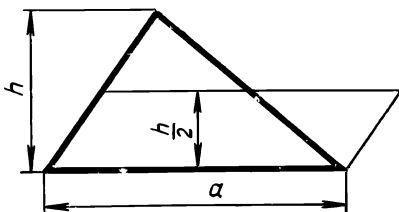
$$S = ah$$



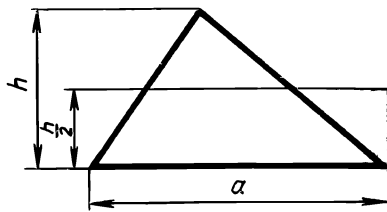
$$S = ah$$



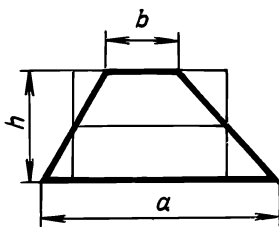
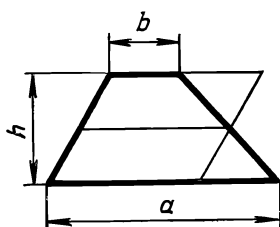
$$S = ah$$



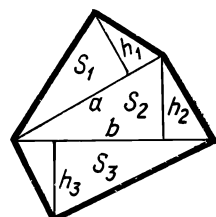
$$S = \frac{1}{2} ah$$



$$S = \frac{1}{2} ah$$



$$S = \frac{a+b}{2} h$$



$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2} (h_1 a + h_2 b + h_3 b)$$

Как устные упражнения, но с иллюстрацией на доске, могут быть решены задачи 1—3.

При решении задач рекомендуется обратить внимание учащихся на удобство использования равенства $ah_a = bh_b$, где a и b — стороны параллелограмма, h_a и h_b — проведенные к ним высоты.

Это равенство используется при решении, например, задач 4 и 5.

В курсе геометрии не выводится специальной формулы площади ромба. Тот факт, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей, выводится на основании решения задачи (задача 9, б), но эту формулу учащимся полезно запомнить (вначале она выводится для частного случая ромба — квадрата, задача 8). В классе могут быть рассмотрены задачи 1, 2, 4, 9б, 10, дома — 5, 6, 8.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Да, если диагональ параллелограмма перпендикулярна его стороне (рис. 75).

2. Решение дано на рисунке 76. После решения этой задачи ставится вопрос: сколько существует равновеликих параллелограммов, имеющих общую сторону? [Бесконечное множество.]

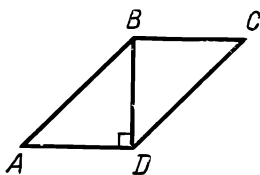


Рис. 75

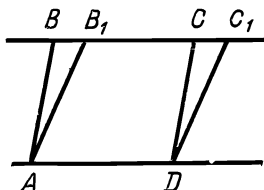


Рис. 76

3. Некоторые решения даны на рисунке 77.

4. 48 см^2 . З а м е ч а н и е. Тот факт, что большей стороне соответствует меньшая высота параллелограмма, можно установить или для этой конкретной задачи, или в общем виде из сравнения двух выражений для площади параллелограмма: $ah_a = bh_b$.

5. $\approx 4,3 \text{ см}$.

6. 20 см .

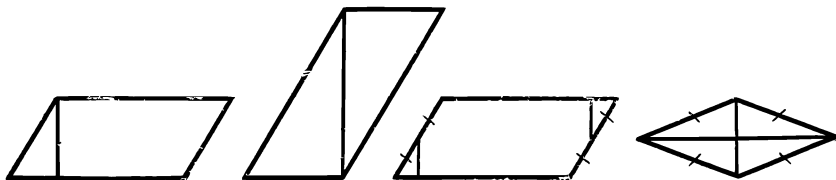


Рис. 77

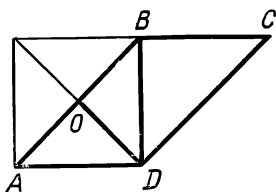


Рис. 78

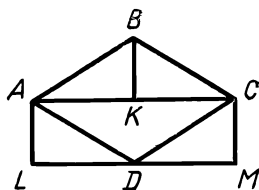


Рис. 79

8. $\frac{d^2}{2}$. У к а з а н и е. Преобразуйте квадрат в равновеликий ему параллелограмм (рис. 78). Его площадь будет равна $|AB| \cdot |OD|$.

9. 1) Решение показано на рисунке 79.

2) $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. У к а з а н и е. Ромб можно преобразовать в равновеликий ему параллелограмм (ABMC, рис. 80, а, б) или в равновеликий ему прямоугольник (ACKL, рис. 80, в), основанием

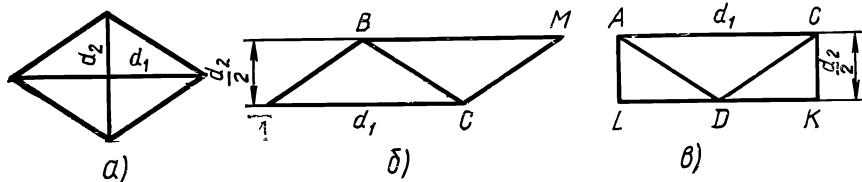


Рис. 80

которого служит одна из диагоналей ромба. В любом случае легко вывести искомую формулу.

10. $\approx 19,2 \text{ см}^2$.

11. 4 см и 6 см. У к а з а н и е. Для составления уравнения используйте формулу площади ромба, выраженной через его диагонали (см. задачу 9,(2)).

53. Площадь треугольника (1 час)

Учащиеся должны знать теорему о площади треугольника и следствия из нее. От них не требуется перечисления следствий, но каждое из следствий ученики должны уметь доказать и уметь ими пользоваться при решении задач. Это следует учитывать при отборе задач для решения в классе и дома.

В VI классе высота треугольника определялась как отрезок перпендикуляра, проведенного из вершины треугольника к противоположащей стороне (или ее продолжению) (п. 23). Длина высоты треугольника для сокращения также называется высотой треугольника.

При решении некоторых задач удобно пользоваться удвоенной площадью треугольника, например, если известны три стороны

треугольника и высота, проведенная к одной из них, и требуется найти остальные высоты. Предположим, что в треугольнике известны его стороны a , b и c и высота h_a . Тогда высоты h_b и h_c находятся из уравнений

$$ah_a = bh_b = ch_c,$$

откуда $h_b = \frac{ah_a}{b}$; $h_c = \frac{ah_a}{c}$.

Эти же уравнения используются для доказательства того, что большей стороне треугольника соответствует меньшая его высота.

Из приведенных к пункту вопросов и задач в классе рекомендуется рассмотреть задания 5, 7, 10, 13.

На дом может быть предложена задача на определение площади заданного треугольника и задачи 11, 12, 3.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Две прямые, параллельные прямой, на которой лежит общее основание равновеликих треугольников, и находящиеся от нее на расстоянии, равном высоте, проведенной из третьей вершины к этому основанию (рис. 81).

2. У к а з а н и е. Произведения диагоналей каждого из равновеликих ромбов — одно и то же число (диагонали измерены в одной единице измерения).

3. Решения даны на рисунке 82: а) по средней линии треугольника; б) по средней линии треугольника, а затем меньший треугольник по его высоте, проведенной к основанию — линии разреза.

5. 15,75 см. П р и м е ч а н и е. При решении этой задачи удобно записать равенство:

$$18 \cdot 21 = 24 \cdot x.$$

6. Площадь треугольника, отсеченного от данного любой его средней линией, равна $\frac{1}{4}$ площади данного треугольника. При доказательстве используется свойство средней линии треугольника и теорема Фалеса (для доказательства того, что высота нового треугольника составляет $\frac{1}{2}$ высоты данного треугольника).

7. $\frac{1}{4}$ площади данного прямоугольника. Для доказательства могут быть использованы свойство средней линии треугольника и формула площади прямоугольника.

9. Доказывается, что высота, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Затем

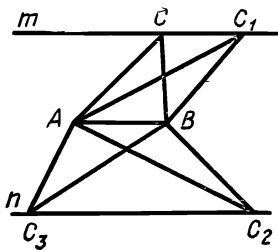
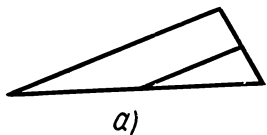


Рис. 81



а)



б)

Рис. 82

используется формула площади треугольника. За основание треугольника принимается его гипотенуза.

10. $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. Возможное доказательство: $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ равнобедренные по условию. Пусть $|AC| = d_1$ и $|BD| = d_2$. Высоты этих треугольников, проведенные из вершин B и D , имеют общее основание, так как каждая из них является медианой, $|AO| = |OC|$.

$$S = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BO| + \frac{1}{2}|AC| \cdot |DO| = \frac{1}{2}|AC|(|BO| + |OD|) = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

11. 24 см².

12. а) 1 : 2; б) площади треугольников, имеющих равные основания, относятся как проведенные к ним высоты. Пусть $S_1 = \frac{a \cdot h_1}{2}$, $S_2 = \frac{a \cdot h_2}{2}$, тогда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1}{h_2}$.

13. Площадь данного треугольника меньше или равна 6 см². Рассмотрим вначале решение задачи в общем виде. Предположим, что в треугольнике ABC известны стороны a и b . Площадь его равна $\frac{1}{2}ah$, где $h \leq b$. Площадь треугольника, очевидно, будет наибольшей, если $h = b$, т. е. всегда она будет меньше или равна половине произведения ab :

$$S_{ABC} \leq \frac{1}{2}ab.$$

Таким образом, возвращаясь к условию заданной задачи, имеем: площадь треугольника будет меньше или равна 6 см².

14. Прямоугольный треугольник с катетами 10 см и 8 см. Его площадь равна 40 см².

15. а) Ромб, его площадь равна 16 см²; б) прямоугольник со сторонами 4 см и 8 см. Его площадь равна 32 см².

54. Площадь трапеции (1 час)

Учащиеся должны знать формулу площади трапеции и уметь ее выводить, а также знать выражение площади трапеции через ее среднюю линию, уметь выполнять простейшие преобразования трапеции в равновеликую ей фигуру, показать на рисунке (чертеже-наброске), как нужно разрезать трапецию, чтобы из получившихся многоугольников можно было бы составить (без перекрытий) заданный многоугольник.

В классе могут быть рассмотрены задачи 1, 8, 4.

Н а д о м предлагаются задачи 2 (решается на основании результата задачи 1), 3, 5, 7.

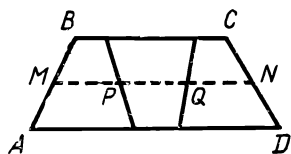


Рис. 83

На этом уроке может быть дана самостоятельная работа на решение задач на вычисление площади трапеции. Для этого могут быть использованы тексты самостоятельной работы из «Дидактических материалов» (может быть взято лишь одно из двух приведенных там заданий).

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Да. Из ранее рассмотренных задач известно, что площадь четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, равна половине произведения его диагоналей.

2. $10,8 \text{ дм}^2$.

3. Одно из возможных решений представлено на рисунке 83. Линии разреза проходят через точки, делящие среднюю линию на три конгруэнтных отрезка, и пересекают основания трапеции. Эти линии могут проходить и через вершины трапеции.

4. 6 см^2 .

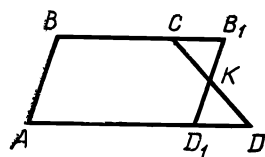
5. 6 см^2 .

6*. 32 см^2 .

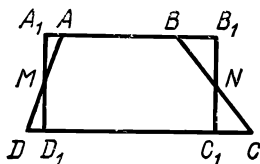
7. Одно из возможных решений дано на рисунке 84. З а м е ч а н и е. Иллюстрация решения возможна и на модели.

8. У к а з а н и е. Используйте следствие теоремы о площади трапеции. Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.

9. Провести прямую через середину средней линии трапеции, пересекающую одно из оснований и проходящую через вершину, принадлежащую другому основанию (рис. 85).



а)



б)

Рис. 84

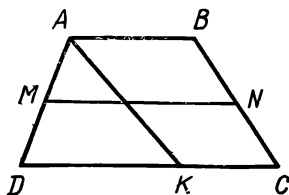


Рис. 85

55. Площадь многоугольника (1 час)

Учащиеся должны ознакомиться с вычислением площади многоугольника с помощью разбиения его на треугольники и вычисления суммы площадей этих треугольников. В число упражнений рекомендуется включить задания на вычисление площадей заданных многоугольников с предварительным самостоятельным выполнением всех необходимых построений и измерений, а также задания, в ко-

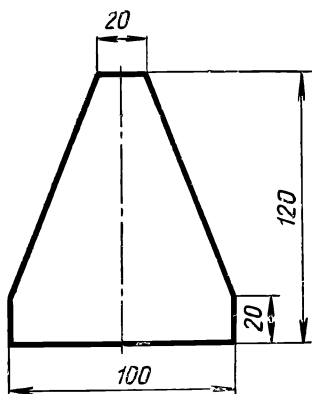


Рис. 86

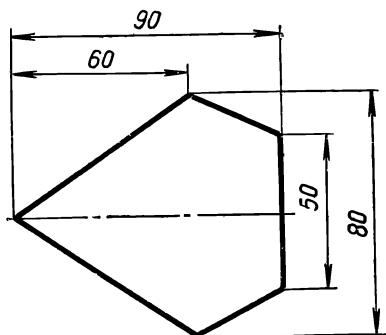


Рис. 87

торых используется разбиение многоугольников на четырехугольники, площади которых учащиеся умеют определять. Такие задания позволяют повторить материал пп. 51—54.

Этими соображениями объясняется и содержание самостоятельной работы, включенной в «Дидактические материалы», в которой предлагается по два задания в каждом варианте:

1. Вычислите площадь фигуры по указанным на чертеже размерам (рис. 86—89, по одному — для варианта).

2. Произведя необходимые построения и измерения, вычислите площадь четырехугольника (дается чертеж четырехугольника общего вида).

Ниже приводятся примеры оформления первого задания (рис. 86).

$$1) S = S_{\text{пр}} + S_{\text{тр.}}$$

$$S = 100 \cdot 20 + \frac{100+20}{2} (120-20) = 2000 + 6000 = 8000; S = 80 \text{ см}^2.$$

$$2) S = S_{\text{пр}} + S_{\text{тр.}} \quad S_{\text{тр.}} = \frac{100+20}{2} \cdot 100 = 6000.$$

$$S_{\text{пр}} = 100 \cdot 20 = 2000. \quad S = 2000 + 6000 = 8000; S = 80 \text{ см}^2.$$

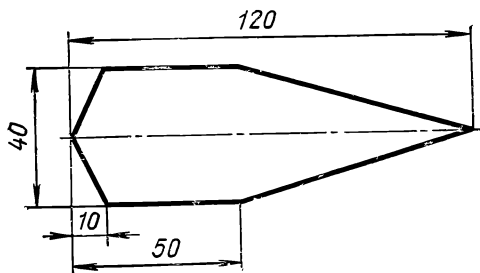


Рис. 88

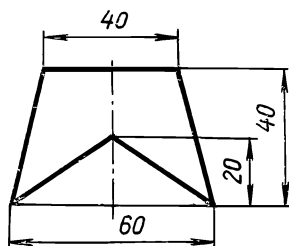


Рис. 89

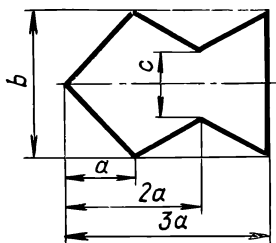


Рис. 90

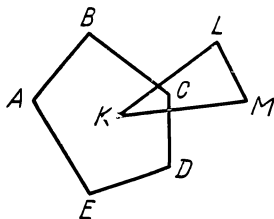


Рис. 91

Может быть предложена задача на вычисление площади многоугольника «в общем виде» (рис. 90). Здесь представляет интерес упрощение результата с помощью тождественных преобразований!

$$S = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{b+c}{2} a + \frac{b+c}{2} a = \frac{1}{2} a(3b+2c).$$

Завершается изучение § 5 (площади многоугольников) контрольной работой.

О т в е т ы и у к а з а н и я

(для задач на повторение к главе II)

1. а) Может быть как выпуклым, так и невыпуклым; б) да; в) нет; г) нет; д) нет.

З а м е ч а н и е. Для случаев в) — д) учащиеся должны показать такие две точки, принадлежащие рассматриваемой фигуре, чтобы отрезок, их соединяющий, не принадлежал полностью этой фигуре.

2. а) Нет; б) да.

З а м е ч а н и е. Для иллюстрации ответа к вопросу а) достаточно привести хотя бы один пример (рис. 91); б) исходя из определения пересечения двух фигур (п. 12), любые две точки фигуры, являющиеся пересечением двух фигур, принадлежат каждой из этих фигур. Следовательно, эти точки всегда можно соединить отрезком прямой, принадлежащим каждой из заданных фигур; эти фигуры по условию выпуклые.

3. а) Да, это пятиугольник; б) да, это семиугольник; в) да, это четырехугольник; г) нет.

П р и м е ч а н и е. Для решения задачи используется выражение числа диагоналей выпуклого многоугольника через число его сторон:

$$\frac{(n-3)n}{2}.$$

4. а) Увеличится на $2d$; б) не изменится.

П р и м е ч а н и е. Для задания б) можно использовать тот факт, что сумма внутренних углов у всех выпуклых многоугольников с одним и тем же числом сторон — постоянная величина.

5. Для выпуклого четырехугольника.

6. Четыре. Такое число внешних выпуклых углов может иметь четырехугольник (прямоугольник). Для многоугольников с числом сторон, большим четырех, наибольшее число внешних прямых углов — три.

7. Три. В самом деле, если у многоугольника все его внешние углы тупые, то каждый внутренний его угол острый. Если обозначим число сторон этого многоугольника, а следовательно, и число его вершин через n , то

$$2d(n-2) < dn,$$

откуда $n < 4$, т. е. $n = 3$.

8. Каждый внутренний угол пятиугольника $ABCDE$ (рис. 92) равен 108° (все углы этого многоугольника конгруэнтны). В четырехугольнике $KAED$ сумма его внутренних углов равна 360° , следовательно,

$$\hat{K} = 360^\circ - 3 \cdot 108^\circ = 36^\circ,$$

а сумма всех острых углов пятиконечной звезды равна:

$$5 \cdot 36^\circ = 180^\circ.$$

9. а) Строятся два неконгруэнтных прямоугольника, у которых равны суммы длин двух смежных сторон; б) в соответствии с условием задачи ученик может ограничиться построением, например, прямоугольника и треугольника, у которого основание конгруэнтно одной из сторон прямоугольника, а высота в два раза меньше длины соответствующей стороны прямоугольника. Более общая постановка задачи: «Построить четырехугольник, равновеликий данному треугольнику» или «Построить треугольник, равновеликий данному четырехугольнику». Этапы решения первой из этих задач приведены на рисунке 93.

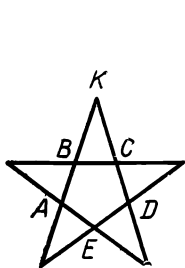


Рис. 92

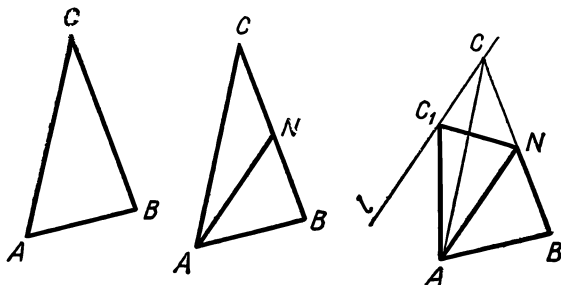


Рис. 93

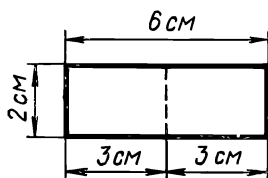


Рис. 94

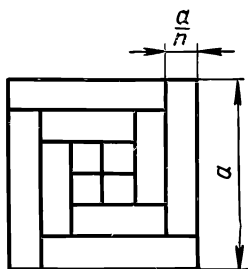


Рис. 95

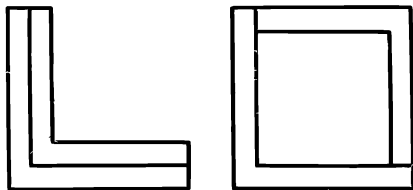


Рис. 96

Первая задача имеет бесконечное множество решений, так как точка C_1 может быть выбрана произвольно на прямой l , искомым четырехугольник может быть и невыпуклым. Кроме того, в приведенном решении одна из сторон четырехугольника конгруэнтна стороне треугольника.

Вторая задача также имеет бесконечное множество решений.

10. Линия разреза указана на рисунке 94.

11. Одно из возможных решений показано на рисунке 95: квадрат разрезается на полосы так, чтобы из них можно было составить четыре полосы равной длины. Ширина всех полос одинакова.

12. Решение задачи показано на рисунке 96.

14. Параллелограмм; $72,8 \text{ см}^2$.

15. Площадь его менее 4 см^2 .

18. а) В четырехугольниках $AKEN$ и $EMCL$ пары противоположных сторон параллельны. Следовательно, эти четырехугольники — параллелограммы. б) Равновеликость этих параллелограммов может быть выведена из сопоставления следующих равенств:

$$\begin{aligned} S_{AKEN} &= S_{ABD} - S_{KBE} - S_{NED}, \\ S_{EMCL} &= S_{BCD} - S_{BME} - S_{ELD}, \end{aligned}$$

учащимся уже известно, что

$$S_{ABD} = S_{BCD}; S_{KBE} = S_{BME}; S_{NED} = S_{ELD}.$$

Следовательно,

$$S_{AKEN} = S_{EMCL}.$$

19. Разделить одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых относятся как 3 : 4, и через точку деления провести прямую, параллельную основанию.

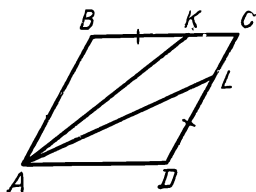


Рис. 97

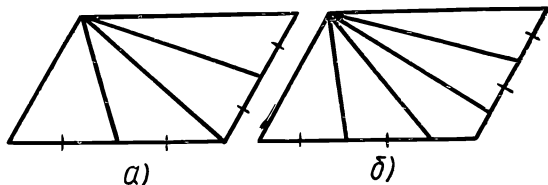


Рис. 98

20. Каждая из двух смежных сторон делится на три конгруэнтных отрезка, полученные точки соединяются с заданной вершиной так, как это указано на рисунке 97.

21. Решение задачи указано на рисунке 98.

22. а) Несколько из возможных решений приведено на рисунке 99, где ABC —заданный треугольник, KL —его средняя линия, $APRC$, AP_1R_1C , AP_2R_2C , ... — искомые параллелограммы. Кроме этих параллелограммов, аналогичным способом могут быть построены параллелограммы, стороны которых конгруэнтны отрезкам AB , BC . Наконец, может быть построено бесконечное множество других параллелограммов, равновеликих треугольнику ABC .

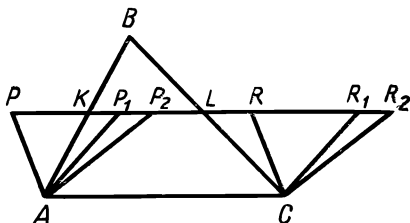


Рис. 99

б) Для построения треугольника, равновеликого данному параллелограмму, достаточно построить треугольник с тем же основанием и одним из прилежащих к этому основанию углов, но с высотой, в два раза большей высоты параллелограмма (рис. 100, а, б). На рисунке 100, в представлены еще два треугольника, равновеликие данному параллелограмму.

23. Способ решения аналогичен использованному в задаче 18:

$$S_{ABO} = S_{ABC} - S_{BOC}, \quad S_{DOC} = S_{DBC} - S_{BOC}.$$

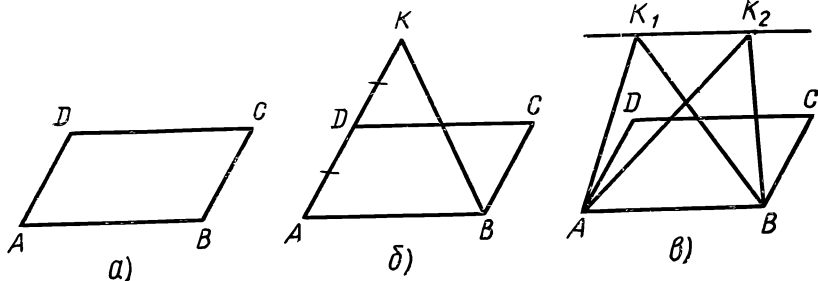


Рис. 100

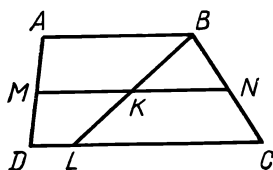


Рис. 101

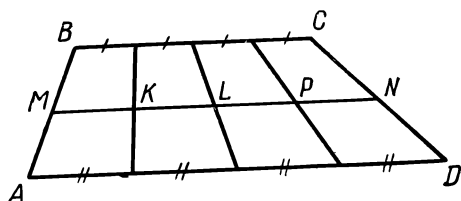


Рис. 102

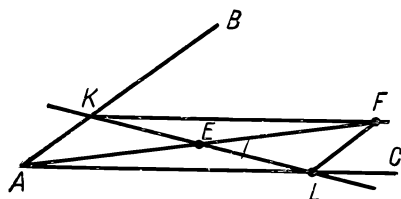


Рис. 103

Но треугольники ABC и DBC равновелики как имеющие одно и то же основание и равные высоты, следовательно, $S_{ABO} = S_{DOC}$.

24. Решение представлено на рисунке 101; MN — средняя линия трапеции, $|MK| = |KN|$.

25. Одно из решений дано на рисунке 102; MN — средняя линия трапеции, $|MK| = |KL| = |LP| = |PN|$. То, что сторона BC (и AD) разделена на конгруэнтные отрезки, несущественно.

26. Учсть, что $S_{ADK} + S_{BKC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. Задача не обязательна.

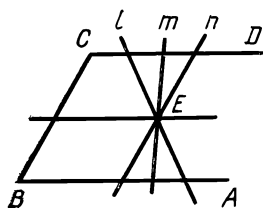
27. Вершины параллелограммов, равновеликих данному и имеющих основание AB , будут расположены на прямой CD .

29. а) Площадь такого параллелограмма меньше или равна $\frac{c \cdot d}{2}$; б) площадь параллелограмма меньше или равна ab .

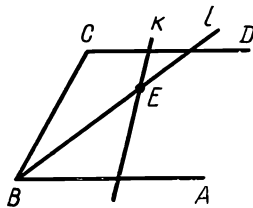
30. Площадь такого ромба: а) меньше или равна a^2 ; б) больше или равна h^2 .

31*. Отрезок искомой прямой, заключенный между сторонами угла, должен делиться в точке b пополам (рис. 103).

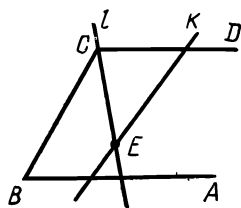
32. а) Любая прямая; б), в) прямая l (рис. 104).



а)



б)



б)

Рис. 104

33. Из соображений симметрии следует, что площадь треугольника, отсекаемого данным отрезком от прямого угла, будет наибольшей, если этот отрезок образует со сторонами угла угол 45° .

К этому выводу можно прийти, если сравнить высоты треугольников, вершинами которых являются концы заданного отрезка и вершина прямого угла.

З а м е ч а н и е. Наибольшее простое обоснование ответа может быть дано с использованием того факта, что геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом, есть окружность. Однако этот факт будет известен учащимся позднее.

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

В главе I учащиеся VI класса уже получили некоторые сведения об окружности и круге. Там были даны определения этих понятий (п. 1), сформулировано условие конгруэнтности двух окружностей (п. 14), указано, что окружность симметрична относительно своего центра (п. 17) и относительно любой прямой, проходящей через ее центр (п. 18). В пунктах 21 и 24 был рассмотрен вопрос о пересечении прямой и окружности, а также двух окружностей.

Глава IV посвящена рассмотрению некоторых свойств окружности и круга. Открывается она вопросом о числе точек, определяющих окружность. Здесь же решается задача об отыскании центра окружности, описанной около данного треугольника. Затем изучается вопрос о пересечении прямой и круга, в связи с которым определяются понятия хорды и касательной. Рассматриваются свойства касательной, проведенной к окружности: а) прямая, перпендикулярная диаметру окружности и проходящая через его конец, является касательной к этой окружности, б) касательная к окружности перпендикулярна диаметру, проходящему через точку касания.

В задачах рассмотрены (не для запоминания учащимися) еще два свойства касательных: 1) отрезки касательных, проведенных из точки вне круга, ограниченные этой точкой и точками касания, конгруэнтны; 2) если через точку проведены две касательные к окружности, то прямая, проходящая через эту точку и центр окружности, делит угол между касательными пополам.

Особо рассматривается «одно замечательное свойство окружности»: множество всех вершин прямоугольных треугольников с гипотенузой AB есть окружность, диаметром которой является отрезок AB . Это свойство дает возможность обосновать известный способ построения касательной, проходящей через точку, данную вне окружности.

Далее доказывается теорема о зависимости между центральными углами и дугами: чтобы две дуги окружности были конгруэнтны, необходимо и достаточно, чтобы они соответствовали конгруэнтным центральным углам. При этом без доказательства используется предположение: при перемещении, отображающем одну из двух конгруэнтных дуг на другую, концы первой отображаются на концы второй.

Затем в учебнике доказывается теорема о конгруэнтности дуг окружности и отмечаются три следствия из симметричности окружности относительно любой прямой, проходящей через ее центр: а) дуги, заключенные между параллельными хордами, конгруэнтны; б) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее и стягиваемые ею дуги пополам; в) диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде, если хорда не проходит через центр.

При решении задач учащиеся знакомятся и с другими свойствами окружности. Например, в задачах 3, 4, 10, 11 к пункту 66 требуется доказать, что: 1) диаметр, проходящий через середину дуги, перпендикулярен хорде, стягивающей эту дугу; 2) если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная; 3) точка касания двух окружностей принадлежит их линии центров; 4) линия центров двух пересекающихся окружностей делит общую хорду пополам.

В этой же главе вводится понятие угловой величины дуги, которое будет использовано при изучении тригонометрии в VIII классе.

Заканчивается глава IV рассмотрением зависимости между расстоянием хорды от центра, ее длиной и угловой величиной стягиваемой ею дуги.

В VIII классе будут рассмотрены еще некоторые свойства окружности и круга, будут изучены вписанные углы, вписанные и описанные многоугольники, формулы длины окружности и площади круга.

62. Число точек, определяющих окружность (1 час)

Изучив этот пункт, учащиеся должны знать формулировку теоремы о числе точек, определяющих окружность, и уметь доказывать эту теорему. Они должны уметь объяснить, что одна и две точки не определяют окружность, уметь построить центр построенной окружности.

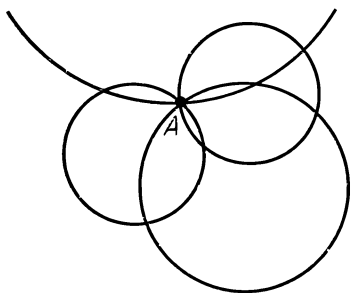
Изложение теоретического материала удобно проводить методом беседы, пользуясь заранее изготовленными цветными чертежами (на доске или в таблицах, см. табл. 4). Эти чертежи могут также копировать рисунки 69, 70 учебника и рисунок 71 учебника, дополненный парами дуг, через точки пересечения которых проходят серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC .

В беседе с учащимися ставится проблема: сколько точек нужно задать, чтобы они определяли окружность, проходящую через эти точки? Эта проблема постепенно исследуется: рассматриваются одна, две и три точки. Исследование ее приводит к выводу, который сформулирован в теореме о задании окружности тремя ее точками.

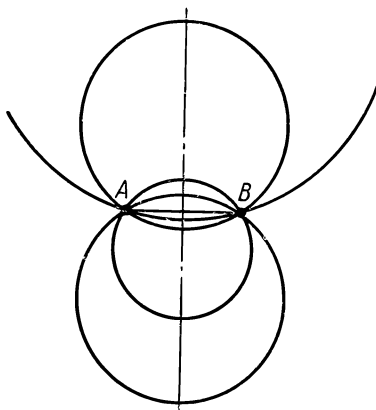
Проблема решена. Но в каких задачах можно применить вновь открытый факт? Каковы его ближайшие следствия?

В учебнике приведены два следствия доказанной теоремы: о возможности описания окружности около любого треугольника и о существовании одной точки пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Учащимся дается задание:

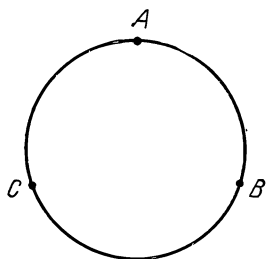
Число точек, определяющих окружность



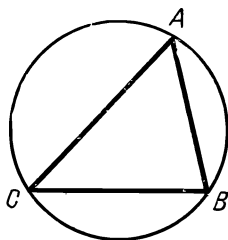
Через точку проходит бесконечно много окружностей



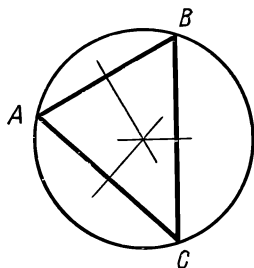
Через две точки проходит бесконечно много окружностей



Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная окружность



Около всякого треугольника можно описать единственную окружность



Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке

по рисунку объяснить способ построения центра окружности. Для этого они должны знать определение окружности, свойство серединного перпендикуляра к отрезку, определение и признак параллельности прямых. Этот материал в случае необходимости нужно повторить с учащимися в начале урока.

Задание, предложенное в тексте учебника, можно дать учащимся в виде двухминутной самостоятельной работы с учебником. Учащиеся должны устно перечислить последовательность выполненных на рисунке 72 построений и обосновать правильность решения задачи.

Интересно было бы проследить на подвижной модели, как меняется положение центра окружности, проходящей через точки A, B, C , когда величина угла ABC увеличивается, а длины отрезков AB и BC не меняются (рис. 105). Это пособие представляет собой две жестко скрепленные планки — AB и OO_1 . Планка OO_1 перпендикулярна планке AB и проходит через ее середину. Две другие планки — BC и OD — скрепляются так же, как и первые. В точке B планки AB и BC скреплены шарнирно.

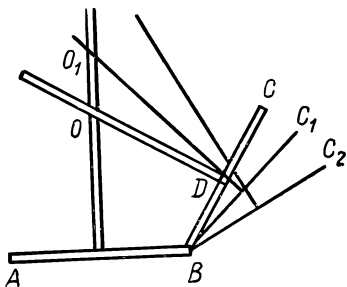


Рис. 105

На уроке можно выполнить упражнения 2, 4, 5 (устно) и 8. Задача 8 является непосредственным развитием упражнения, предложенного в тексте учебника в виде задания.

Учащимся полезно указывать возможные пути отыскания следствий из доказанных теорем. На этом уроке можно рассмотреть следующий пример. Окружность определяется тремя ее точками. Если же задать только две ее точки, то для задания окружности следует указать еще какие-нибудь условия, которым эта окружность должна удовлетворять. Например, если даны две точки A и B , то существует единственная проходящая через них окружность данного радиуса r ($r \geq \frac{1}{2}|AB|$), центр которой расположен в заданной полуплоскости с границей AB . Другое следствие содержится в задаче 7 к пункту 62.

Может быть, полезно подчеркнуть учащимся: окружность определяется тремя ее точками; но окружность можно определить и двумя точками — центром и одной ее точкой. Два вопроса, заданные учащимся, разъясняют им эту «тонкость»: 1) Определяется ли окружность двумя ее точками? 2) Определяется ли окружность двумя точками? Вопросы поучительны. Они еще раз подчеркивают, что о д н о слово может существенно изменить смысл предложения.

В качестве д о м а ш н е г о з а д а н и я можно дать задачи 1, 7, 11, а отдельным учащимся, кроме того, предложить найти какие-нибудь следствия из доказанной на уроке теоремы.

Дополнительные задачи

1. Какую фигуру образует множество всех центров окружностей радиуса a , проходящих через данную точку M ?

[Расстояние от центра такой окружности до точки M равно a . Значит, по определению окружности, множество всех центров окружностей радиуса a , проходящих через данную точку M , есть окружность радиуса a с центром M .]

2. Дан квадрат. Постройте окружность так, чтобы стороны этого квадрата служили для нее хордами.

[Точка пересечения диагоналей квадрата равноудалена от его вершин. Поэтому центр искомой окружности лежит в точке пересечения диагоналей данного квадрата.]

Ответы и указания

1. Для окружности наименьшего радиуса, проходящей через две данные точки A , B , отрезок AB будет ее диаметром. Радиус этой окружности равен $\frac{1}{2}|AB|$. Радиус любой другой окружности, проходящей через точки A и B , будет равен $\frac{|OA| + |OB|}{2}$, что больше $\frac{|AB|}{2}$ (так как $|OA| + |OB| > |AB|$, если точка O не лежит на прямой AB).

2. Точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и BC равноудалена как от точек A и B , так и от точек B и C . Следовательно, она равноудалена от точек A и C и поэтому принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AC . Значит, серединный перпендикуляр к отрезку AC проходит через точку пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и BC .

3. Постройте окружности $(A, |AB|)$ и $(B, |AB|)$. Точки пересечения являются центрами искомых окружностей. Задача всегда имеет два решения.

4. Для построения центра данной дуги окружности достаточно взять три точки A , B , C на этой дуге и построить точку пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и BC . Эта точка равноудалена от точек A , B , C и поэтому является центром окружности, проходящей через точки A , B , C , и центром данной дуги.

5. Через вершины прямоугольника можно провести окружность, так как существует точка — точка пересечения диагоналей, которая равноудалена от всех вершин прямоугольника.

6. Вокруг ромба можно описать окружность при условии, что точка пересечения его диагоналей будет равноудалена от всех его вершин. А это будет в случае, когда диагонали ромба будут конгруэнтны, т. е. ромб будет квадратом. Итак, вокруг ромба можно описать окружность, если он является квадратом.

9. Центр окружности, описанной около остроугольного треугольника, лежит внутри этого треугольника. Центр окружности,

описанной около прямоугольного треугольника, является серединой его гипотенузы. Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, лежит вне этого треугольника.

10. Центр искомой окружности расположен на данной прямой (рис. 106) на расстоянии от данной точки A , равном данному радиусу r . Следовательно, он является точкой пересечения окружности (A, r) и прямой a . Таких точек может быть две (на рис. 106, а — точки O_1 и O_2), одна (на рис. 106, б — точка O), не быть ни одной (рис. 106, в). Задача может иметь два, одно или не иметь ни одного решения.

11. Центр искомой окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему данные точки A и B , и на окружности (A, r) , где r — данный радиус. Задача может иметь два, одно решение и не иметь ни одного решения.

12. а) Наибольшую площадь имеет тот из рассматриваемых треугольников, у которого высота, проведенная к общей стороне, наибольшая. Все высоты параллельны. Одна (и только одна) из них имеет основание в центре окружности. Она равна половине диаметра, любая другая — половине хорды, параллельной диаметру. Поэтому высота, имеющая основание в центре окружности, является наибольшей (диаметр — наибольшая из хорд). Следовательно, наибольшую площадь имеет тот из рассматриваемых треугольников, основание высоты которого лежит в центре окружности. Этот треугольник равнобедренный, так как высота его является и медианой (рис. 107). Угол при его вершине прямой. Действительно, треугольники AOB и BOC равнобедренные. Поэтому $\hat{1} = \hat{2}$ и $\hat{3} = \hat{4}$. Но треугольник ABC также равнобедренный, как мы уже доказали. Поэтому $\hat{1} = \hat{4}$. Значит, $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4}$. Но $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$. Поэтому $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4} = 45^\circ$ и $\widehat{ABC} = \hat{2} + \hat{3} = 90^\circ$.

Итак, из рассматриваемых треугольников наибольшую площадь имеет равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенузой которого служит данный диаметр.

б) Квадрат. См. решение задачи 12, а.

13. Через вершины данного треугольника ABC проведем пря-

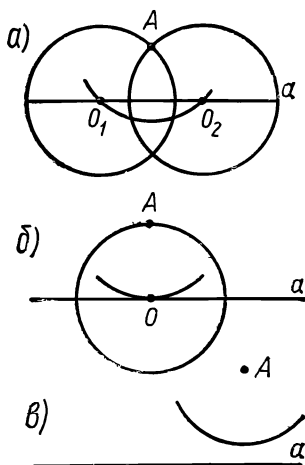


Рис. 106

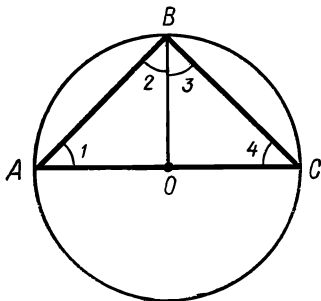


Рис. 107

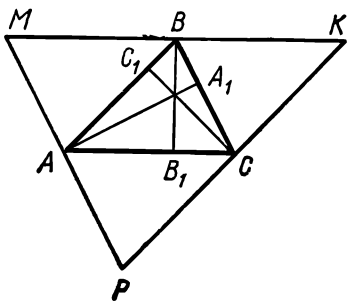


Рис. 108

мые, параллельные противоположным сторонам (рис. 108). Четырехугольники $AMBC$ и $ABKC$ — параллелограммы, так как по построению $(AM) \parallel (BC)$ и $(MB) \parallel (AC)$. Поэтому $|MB| = |AC|$ и $|BK| = |AC|$. Следовательно, точка B есть середина стороны MK .

Высота BB_1 перпендикулярна прямой MK , так как $(BB_1) \perp (AC)$ и $(AC) \parallel (MK)$. Значит, высота BB_1 лежит на серединном перпендикуляре к стороне MK треугольника MKP .

Аналогично, высота AA_1 лежит на серединном перпендикуляре к стороне MP и высота CC_1 — на серединном перпендикуляре к стороне KP . Следовательно, высоты данного треугольника пересекаются в одной точке (центре окружности, описанной около треугольника MKP).

63. Хорды и касательные (2 часа)

В этом пункте учащиеся знакомятся с определениями понятий «хорда», «диаметр», «радиус», «касательная» и с некоторыми их свойствами. Учащиеся должны уметь дать определения этим понятиям, формулировать и доказывать две теоремы, рассмотренные в тексте учебника, и строить касательную к окружности, проходящую через данную на этой окружности точку.

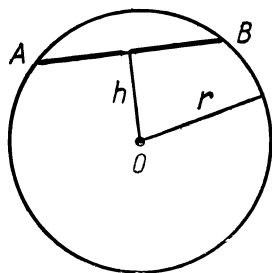
На первом уроке можно изучить теоретический материал этого пункта и решить задачи 1 и 3. На уроке рекомендуется использовать таблицу 5.

При рассмотрении первой теоремы полезно обратить внимание учащихся на подход к доказательству. Надо доказать, что прямая MN имеет с окружностью только одну общую точку — точку A . Для этого достаточно доказать, что все другие точки прямой MN лежат вне окружности, т. е. находятся от центра O на расстоянии, большем радиуса $|OA|$. Поэтому достаточно сравнить расстояние от произвольной точки X прямой MN до центра O с расстоянием $|OA|$.

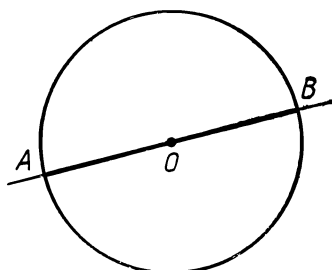
С терминами «радиус» и «диаметр» учащиеся знакомы еще с младших классов. Употреблялись эти термины неоднократно и в VI классе. Однако определений радиуса и диаметра в учебниках IV, V и VI классов не было.

Читая учебник, учащиеся приходят к понятию хорды, рассматривая пересечение прямой и круга. Поэтому вполне естественно предложить им дать определение хорды круга с помощью понятия «пересечение фигур»: хордой круга называется пересечение этого круга и прямой, если оно содержит более одной точки; хорда круга называется также и хордой соответствующей окружности. Эти определения эквивалентны тем, которые приведены в учебнике.

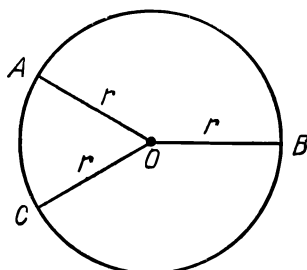
Хорды и касательные



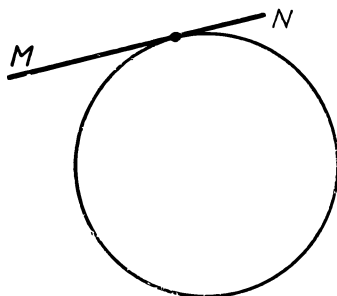
$h < r$
 $[AB]$ - хорда



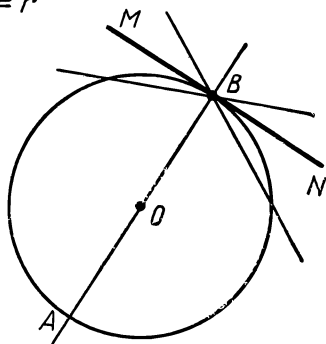
$h = 0$
 $[AB]$ - диаметр



$|OA| = |OB| = |OC| = r$



$h = r$
 (MN) - касательная



$(MN) \perp [OB]$

В качестве домашнего задания к первому уроку можно предложить задачи 2, 4 и 5.

На втором уроке после беседы по материалу первого урока можно решить задачу 6. Домашнее задание — задачи 7, 8 и задача 9 из пункта 62. Задача 10 предлагается для выполнения в течение 5—7 дней.

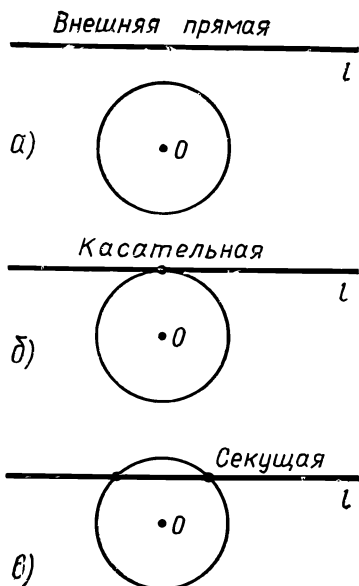


Рис. 109

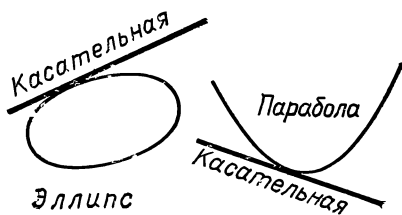


Рис. 110

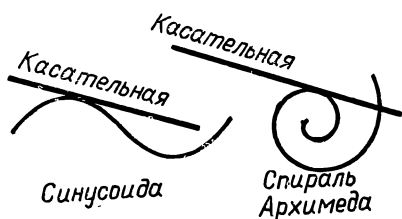


Рис. 111

На этом уроке предлагается самостоятельная работа к пунктам 62—63 из «Дидактических материалов».

При ознакомлении с понятием «касательная к окружности» можно воспользоваться выполненным на таблице или классной доске цветным рисунком (рис. 109). На нем окружности изображены одним цветом, прямые — другим, общие точки окружностей и прямых — третьим.

Рассматривая этот рисунок, учащиеся смогут дать определение касательной к окружности.

Интересно отметить, что аналогичные определения выражают свойство касания лишь для некоторого класса линий (рис. 110). Для других линий определение касательной немного сложнее (рис. 111).

На рисунке 112 прямая a — касательная к кривой линии в точке M , прямая b — секущая к этой линии и проходит через ту же точку M .

Чем же в общем случае характеризуется касательная к кривой?

Пусть точка M лежит на кривой (рис. 113,а). Возьмем на этой кривой другую точку, A . Прямая MA — секущая. Будем приближать точку A к точке M , передвигая точку A по кривой и оставляя неподвижной точку M . Секущая MA будет изменять свое положение. Если при уменьшении расстояния $|MA|$ секущая MA будет стремиться занять положение одной определенной прямой MN , то эта прямая MN и называется касательной к данной кривой в точке M . На рисунке 113,а MA и MB при указанном процессе стремятся занять положение прямой MN .

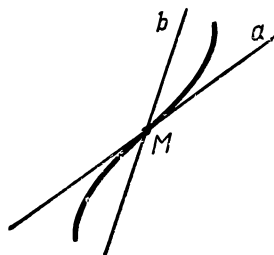


Рис. 112

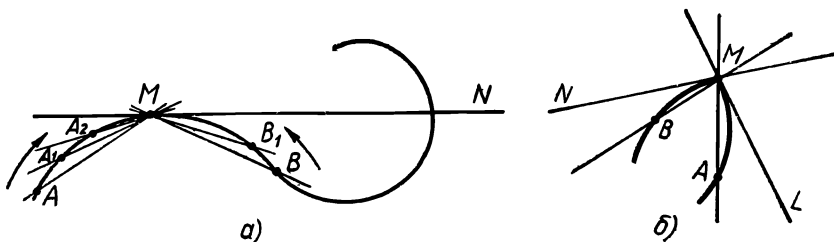


Рис. 113

Далеко не у всякой кривой линии такая секущая при указанном процессе будет стремиться занять положение одной определенной прямой. На рисунке 113, б секущая MA стремится занять положение прямой ML , а секущая MB — положение прямой MN . Кривая на этом рисунке не имеет касательной в точке M .

Эти немногие сведения о касательных к кривым можно дать учащимся во внеурочное время. В старших классах к вопросу о касательной учащиеся еще вернутся.

Дополнительные задачи

1. Какую фигуру образует множество всех центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке?

[Пусть дана прямая MN и точка A на ней.

Множество всех центров окружностей, касающихся данной прямой MN в данной точке A , есть перпендикуляр к прямой MN , проходящий через точку A , за исключением точки A .]

Для доказательства истинности этого высказывания следует доказать две теоремы:

А) Если окружность касается прямой MN в точке A , то ее центр лежит на перпендикуляре к прямой MN , проходящем через точку A .

Б) Если центр окружности, проходящей через точку A прямой MN , лежит на перпендикуляре к прямой MN , проходящем через точку A , то эта окружность касается прямой MN в точке A .

Теорема А следует из теоремы 39. Теорема Б следует из теоремы 40.

2. Какую фигуру образует множество всех центров окружностей данного радиуса a , касающихся данной прямой?

[Множеством всех центров окружностей данного радиуса a , касающихся данной прямой, является фигура, состоящая из двух прямых, параллельных данной прямой и расположенных от нее на расстоянии a .]

3. К окружности проведена касательная. Докажите, что сумма расстояний от концов любого диаметра до этой касательной равна диаметру окружности.

[Пусть прямая a касается в точке M окружности (O, r) , $[AB]$ — диаметр, $[AC]$ и $[BD]$ — отрезки перпендикуляров, проведенных через концы диаметра к касательной. Тогда $[OM]$ — средняя линия трапеции $ABDC$.]

4. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.

[Центр искомой окружности лежит на перпендикуляре к данной прямой, проходящем через данную точку, и находится от данной точки на расстоянии, равном данному радиусу. Задача имеет два решения — две окружности, симметричные друг другу относительно данной прямой.]

5. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, причем одной из них в данной точке.

[Центр искомой окружности является точкой пересечения биссектрисы данного угла и перпендикуляра, проведенного через данную точку к той стороне угла, на которой эта точка расположена. Задача имеет одно решение.]

6*. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой и проходящую через данную точку, не лежащую на этой прямой.

[Пусть даны прямая a и точка M ($M \notin a$). Центр искомой окружности является точкой пересечения окружности (M, r) и прямой b , параллельной прямой a , лежащей в той же полуплоскости с границей a , что и точка M , на расстоянии r от прямой a (r — данный радиус). Задача может иметь два, одно или ни одного решения.]

О т в е т ы и у к а з а н и я

2. Эти касательные перпендикулярны данному диаметру и потому параллельны между собой.

3. Достаточно через данную точку A провести диаметр и к нему через ту же точку провести перпендикуляр. Такая касательная только одна, поскольку через данную точку окружности можно провести только один диаметр и к нему — только один перпендикуляр.

4. Центр окружности с диаметром AB лежит в середине отрезка AB . Радиус этой окружности равен $\frac{1}{2}|AB|$.

6. а) Постройте серединный перпендикуляр к данной хорде. Через точки его пересечения с окружностью проведите к нему перпендикуляры. Они и будут искомыми касательными. Задача имеет всегда два решения. б) Постройте диаметр, параллельный данной прямой. Через его концы проведите перпендикуляры к нему. Они и будут искомыми касательными. Задача имеет всегда два решения. в) Через центр окружности проведите перпендикуляр к данной прямой. Через точки пересечения его с окружностью постройте перпендикуляры к нему. Они и будут искомыми касательными. Задача имеет всегда два решения.

8. а) Проведите прямую через данную точку A и центр окружности O . Эта прямая является осью симметрии окружности (рис. 114). При осевой симметрии с осью OA точка A останется на месте, касательная AB отобразится на касательную, проходящую через точку A , т. е. на прямую AC . Точка касания B отобразится на точку

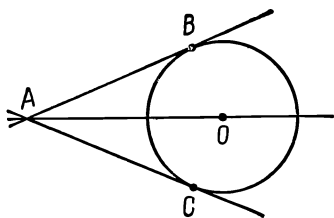


Рис. 114

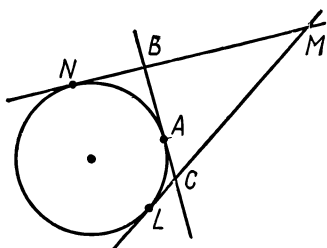


Рис. 115

касания, т. е. на точку C . Следовательно, отрезки AB и AC симметричны относительно прямой AO и поэтому конгруэнтны.

б) Так как лучи AB и AC симметричны относительно оси AO , то углы BAO и CAO тоже симметричны относительно оси AO и, следовательно, $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$.

9. Периметр треугольника BCM (рис. 115) равен $|BM| + |MC| + (|CA| + |AB|) = |BM| + |MC| + (|CL| + |BN|) = (|MB| + |BN|) + (|MC| + |CL|) = |MN| + |ML|$. Значит, периметр треугольника BCM равен постоянной величине $|MN| + |ML|$ и не зависит от положения точки A на дуге NL .

10. Центроискатель представляет собой три закрепленные неподвижно планки. Две из них — «стороны некоторого угла», третья — «биссектриса этого угла». Чтобы найти центр какой-нибудь вычерченной окружности, располагают центроискатель так, чтобы его стороны касались этой окружности. Тогда биссектриса центроискателя проходит через центр окружности. Вдоль края планки — биссектрисы — проводят луч. Затем повторяют эту операцию еще раз при другом расположении центроискателя. Точка пересечения построенных лучей и будет искомым центром.

11. Соединим центр окружности с точками касания A, B, C (рис. 116) и с концами отрезка DE .

Прямые OD и OE — оси симметрии окружности. Точки A и C симметричны относительно оси OE , точки B и C симметричны относительно оси OD . Поэтому $\hat{1} = \hat{2}$ и $\hat{3} = \hat{4}$.

Точки O, A и B лежат на одной прямой, так как прямые OA и OB перпендикулярны параллельным прямым AE и BD и, значит, совпадают. Поэтому угол AOB развернутый.

$$\widehat{AOB} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = \hat{2} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{3} = +2(\hat{2} + \hat{3}) = 180^\circ.$$

Отсюда $\hat{2} + \hat{3} = 90^\circ$.

Но $\hat{2} + \hat{3} = \widehat{EOD}$. Значит, $\widehat{EOD} = 90^\circ$.

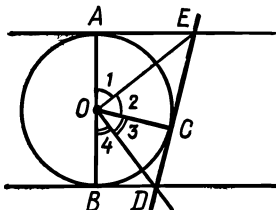


Рис. 116

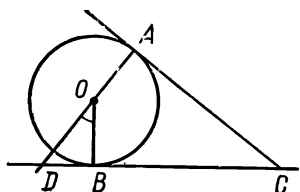


Рис. 117

12. С помощью линейки построим прямые AO и BO (рис. 117). Угол BOD будет искомым. Действительно, в четырехугольнике $OACB$ углы A и B прямые. Поэтому $\widehat{C} + \widehat{AOB} = 180^\circ$. Но и $\widehat{BOD} + \widehat{AOB} = 180^\circ$ как смежные углы. Поэтому $\widehat{BOD} = \widehat{C}$.

64. Одно замечательное свойство окружности (2 часа)

В пункте 64 доказывается, что множество всех вершин прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой AB есть окружность с диаметром AB (теорема 41). Для этого рассматриваются две теоремы: А) вершины любого прямоугольного треугольника с гипотенузой AB лежат на окружности с диаметром AB ; Б) все точки окружности с диаметром AB являются вершинами прямоугольных треугольников с гипотенузой AB .

Учащиеся должны знать формулировку теоремы о множестве всех вершин прямоугольных треугольников с общей гипотенузой, уметь доказывать эту теорему и научиться строить касательную к окружности, проходящую через данную вне окружности точку.

На первом уроке можно изучить теоретический материал в той последовательности, в которой он изложен в учебнике, включая теорему 41. Способ построения касательной к окружности, проходящей через данную точку вне этой окружности, можно рассмотреть на втором уроке.

Учащиеся уже знают, что около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Решая задачу 9 из домашнего задания, учащиеся «выяснили», как располагается центр описанной окружности для треугольников разного вида: остроугольных, прямоугольных, тупоугольных. Выводы их носили интуитивный характер и были лишь предположениями, основанными на результатах построений. При проверке правильности решения этой задачи на уроке учитель обращает особое внимание на обоснование вывода: центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы. Доказательство этого вывода и есть доказательство теоремы А. Таким образом, изложение нового материала является естественным продолжением проверки домашнего задания.

Далее ставится вопрос: все ли точки такой окружности являются вершинами прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой? Ответ на него положителен. Он сформулирован в теореме Б.

Из доказательства теорем А и Б следует теорема 41.

Действительно, чтобы доказать, что фигура Φ есть множество всех точек, обладающих свойством P , нужно убедиться в том, что фигура Φ содержит все точки, обладающие свойством P , и только такие точки. Таким образом, следует доказать две теоремы: А) если точка обладает свойством P , то она принад-

лежит фигуре Φ и Б) если точка принадлежит фигуре Φ , то она обладает свойством P .

Рассмотрим эту общую схему на примере доказательства теоремы 41. Требуется доказать: множество всех точек, обладающих свойством *быть вершиной прямоугольного треугольника с данной гипотенузой AB* , есть окружность с диаметром AB . Для этого следует доказать две теоремы. Теорема А: если точка обладает свойством *быть вершиной* прямоугольного треугольника с гипотенузой AB , то она принадлежит окружности с диаметром AB (это и есть теорема А из учебника). Теорема Б: если точка принадлежит окружности с диаметром AB , то она обладает свойством *быть вершиной* прямоугольного треугольника с гипотенузой AB (это и есть теорема Б из учебника).

При чтении теорем этого пункта иногда ошибочно понимают их содержание — считают, что речь идет лишь о вершинах **п р я м ы х у г л о в** рассматриваемых треугольников, забывая при этом, что концы гипотенузы тоже являются вершинами таких треугольников. Поэтому перед доказательством теоремы А полезно задать вопрос: назовите вершины прямоугольного треугольника, которые лежат на окружности с диаметром AB .

В формулировке теоремы 41 термины «гипотенуза» и «диаметр» понимаются как отрезки (см. замечание об употреблении термина «радиус» в пункте 63 учебника). Поэтому термин «заданная гипотенуза AB » означает «заданный отрезок AB », т. е. считается, что множество точек отрезка AB задано.

При подведении итога в конце первого урока следует четко выделить основной результат, который узнали учащиеся, — теорему 41. Затем подчеркнуть, что для доказательства теоремы 41 следовало доказать два предложения — теоремы А и Б.

На уроке можно решить задачи 4 и 5. В качестве **д о м а ш н е г о з а д а н и я** можно дать задачи 1 и 2.

На **в т о р о м** уроке продолжается изучение текста пункта 64 (после теоремы 41) и решаются задачи 3, 5, 9. Для **д о м а ш н е й** работы можно дать задачи 6 и 7.

Д о п о л н и т е л ь н ы е з а д а ч и

1. Какую фигуру образует множество всех середин отрезка данной длины, концы которого скользят по сторонам данного прямого угла?

[Пусть дан прямой угол AOB . Обозначим через a длину данного отрезка. Тогда искомой фигурой является дуга окружности $(O, \frac{a}{2})$, принадлежащая данному углу AOB .]

2. Из точки A окружности проведены две взаимно перпендикулярные и конгруэнтные между собой хорды, удаленные от центра на расстояние 4 см. Определите длину каждой из этих хорд.

[8 см. У к а з а н и е. Обозначим данные хорды через AB и AC . Тогда отрезок BC будет диаметром данной окружности по теореме 41. Отрезок перпендикуляра, проведенного через центр окружности к

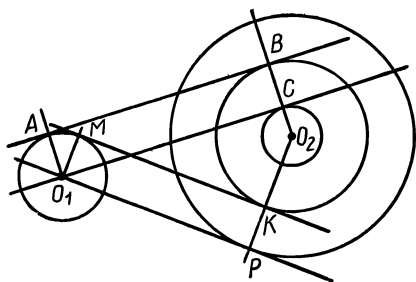


Рис. 118

хорде AB , будет средней линией
треугольника ABC .]

3. На данной прямой найдите такую точку, чтобы отрезки касательных, проведенных через нее к данной окружности, были данной длины.

Рис. 118

[Обозначьте данную длину отрезка касательной через a , радиус данной окружности — через r . Постройте прямоугольный треугольник по катетам a и r . Обозначьте его гипотенузу через c . Искомая точка X находится на расстоянии c от центра данной окружности и лежит на данной прямой. Задача может иметь два, одно решение или не иметь ни одного решения.]

4. С помощью циркуля и линейки постройте общую касательную к двум данным окружностям.

Пусть даны окружности (O_1, r_1) и (O_2, r_2) , которые ограничивают непересекающиеся круги (рис. 118). Предположим, что $r_2 > r_1$ и (AB) — общая внешняя касательная, а (MK) — общая внутренняя касательная к данным окружностям. Точки A, B, M, K — точки касания. Тогда $(O_1A) \perp (AB)$ и $(O_2B) \perp (AB)$. Поэтому $(O_1A) \parallel (O_2B)$.

Если через центр O_1 провести прямую, параллельную прямой AB , и обозначить через C точку пересечения ее с прямой O_2B , то $(O_1C) \perp (O_2B)$ и $|O_2C| = r_2 - r_1$. Поэтому прямая O_1C будет касательной к окружности $(O_2, r_2 - r_1)$.

Отсюда ясен способ построения внешней касательной к данным окружностям:

1) строим окружность $(O_2, r_2 - r_1)$;

2) строим касательную O_1C через точку O_1 к окружности $(O_2, r_2 - r_1)$;

3) строим луч O_2C и обозначаем точку его пересечения с окружностью (O_2, r_2) через B ;

4) строим прямую BA_1 , проходящую через точку B , параллельно прямой O_1C .

Прямая BA искомая.

Рассуждая аналогично, находим способ построения внутренней касательной к данным окружностям:

1) строим окружность $(O_2, r_2 + r_1)$;

2) строим касательную \bar{O}_1P через точку O_1 к окружности $(O_2, r_2 + r_1)$;

3) строим луч O_2P и обозначаем точку его пересечения с окружностью (O_2, r_2) через K ;

4) строим прямую KM , проходящую через точку K , параллельно прямой O_1P .

Прямая KM искомая.

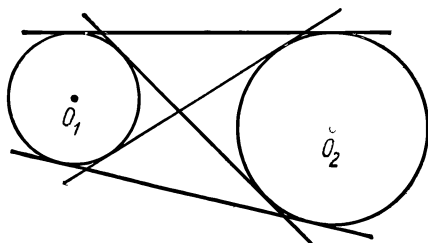


Рис. 119

Если
 круг $(O_1, r_1) \cap \text{круг } (O_2, r_2) = \emptyset$,
 то задача имеет 4 решения (рис. 119).

Если
 круг $(O_1, r_1) \cap \text{круг } (O_2, r_2) = A$,
 о задача имеет 3 решения (рис. 120).

Если
 окр. $(O_1, r_1) \cap \text{окр. } (O_2, r_2) = \{A, B\}$,

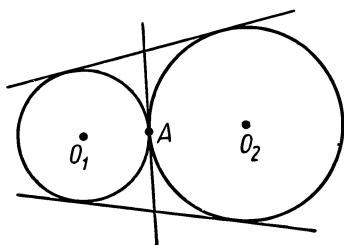


Рис. 120

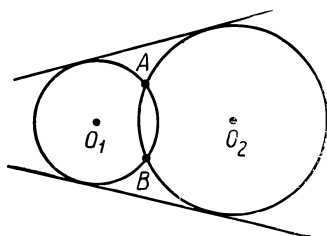


Рис. 121

то задача имеет 2 решения (рис. 121).

Если
 окр. $(O_1, r_1) \cap \text{окр. } (O_2, r_2) = A$
 и
 круг $(O_1, r_1) \subset \text{круг } (O_2, r_2)$,
 то задача имеет 1 решение (рис. 122).

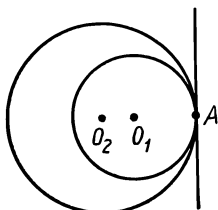


Рис. 122

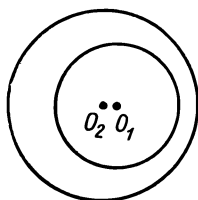


Рис. 123

Если

$$\text{окр. } (O_1, r_1) \cap \text{окр. } (O_2, r_2) = \emptyset$$

и

$$\text{круг } (O_1, r_1) \subset \text{круг } (O_2, r_2),$$

то задача не имеет решений (рис. 123).

Решение этой задачи целесообразно закончить подведением итога, рассматривая таблицу, состоящую из рисунков 119—123.]

Ответы и указания

1. Множество вершин прямых углов всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой AB есть фигура, содержащая все точки окружности с диаметром AB , кроме самих точек A и B .

2. Искомая точка C будет лежать на окружности с диаметром AB (по теореме 41) и на данной прямой l (по условию задачи). Значит, для построения искомой точки достаточно построить точки пересечения данной прямой l и окружности с диаметром AB . Таких точек может быть две, одна и не быть ни одной. Поэтому задача может иметь два, одно решение или не иметь ни одного. Задача имеет два решения, если расстояние h от середины отрезка AB до прямой l меньше половины длины отрезка AB . Задача имеет одно решение, если $h = \frac{1}{2} |AB|$. Задача не имеет решений, если $h > \frac{1}{2} |AB|$.

3. Треугольники OAP и OBP (рис. 124) прямоугольные по теореме о касательной и диаметре (с концом в точке касания). Они имеют общую гипотенузу OP . Следовательно, по теореме о множестве вершин прямоугольных треугольников с общей гипотенузой точки P , A и B лежат на окружности с диаметром OP . Значит, радиус окружности, проходящей через точки P , A и B , равен половине расстояния $|OP|$, т. е. $\frac{a}{2}$.

4. Чтобы построить с помощью чертежного угольника точку окружности, диаметром которой служил бы данный отрезок AB , достаточно расположить угольник так, как показано на рисунке 125. Кромка одной планки угольника должна проходить через точку A , другой — через точку B . Тогда вершина угольника будет находиться в искомой точке C .

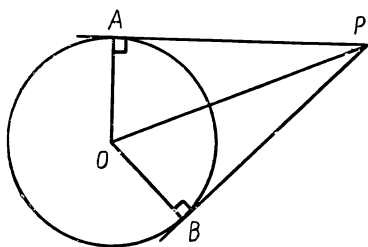


Рис. 124

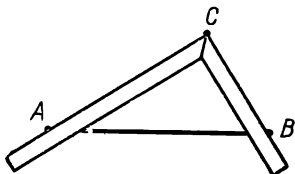


Рис. 125

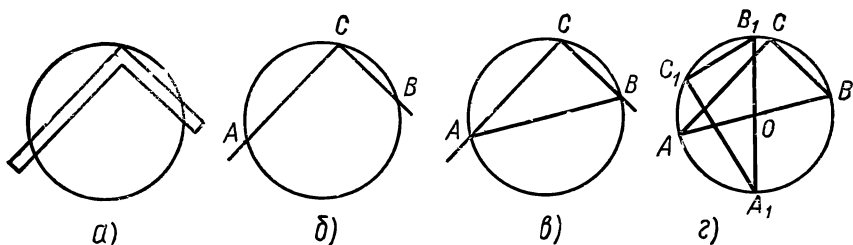


Рис. 126

5. Поместим чертежный угольник так, чтобы его вершина лежала на данной окружности, а планки пересекали ее (рис. 126, а). Проведем вдоль планок прямые и обозначим точки их пересечения с окружностью через A , B и C (рис. 126, б). Построим отрезок AB (рис. 126, в). Он будет гипотенузой прямоугольного треугольника ABC , вписанного в данную окружность. Поэтому отрезок AB будет диаметром данной окружности. Прделаем указанные построения еще раз. Построим второй диаметр A_1B_1 данной окружности (рис. 126, г). Точка пересечения отрезков AB и A_1B_1 является искомым центром.

6. $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (рис. 127). Значит, $[AB]$ — диаметр. $|AD| = |DC|$, $|CM| = |MB|$, $[DM]$ — средняя линия треугольника ABC . Значит, $|DM| = \frac{1}{2} |AB|$. Поэтому $|AB| = 2 |DM| = 2 \cdot 5,6 = 11,2$ (см).

7. Д а н о: в треугольнике ABC отрезок BD — медиана; $|BD| = \frac{1}{2} |AC|$.

Д о к а з а т ь: $\widehat{ABC} = 90^\circ$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $|AD| = |DB|$. Значит, в равнобедренном треугольнике ABD $\hat{A} = \widehat{ABD}$. (1)

$|DC| = |BD|$. Значит, в равнобедренном треугольнике DBC $\hat{C} = \widehat{DBC}$. (2)

Из равенств (1) и (2) следует: $\hat{A} + \hat{C} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC}$.

Значит, $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B}$. Но $(\hat{A} + \hat{C}) + \hat{B} = 180^\circ$.

Поэтому $\hat{B} + \hat{B} = 180^\circ$ и $\hat{B} = 90^\circ$.

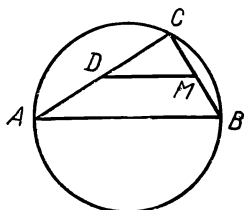


Рис. 127

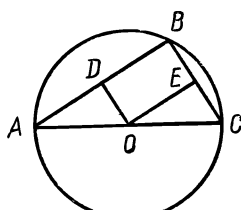


Рис. 128

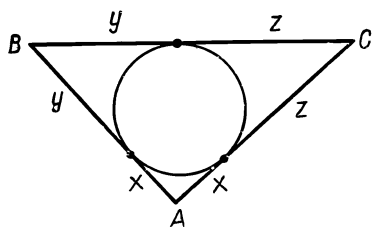


Рис. 129

$$\begin{aligned} x+y &= c, & x-z &= c-a, \\ y+z &= a, & x+z &= b, \\ z+x &= b, \end{aligned}$$

$$x = \frac{-a+b+c}{2},$$

$$y = c - x = c - \frac{-a+b+c}{2} = \frac{a-b+c}{2},$$

$$z = b - x = b - \frac{-a+b+c}{2} = \frac{a+b-c}{2}.$$

10. Дано: $[AA_1] \perp [BC]$,
 $[BB_1] \perp [AC]$ (рис. 130).

Доказать: точки A, B, A_1, B_1 принадлежат одной окружности.

Доказательство. Треугольники ABA_1 и ABB_1 прямоугольные и имеют общую гипотенузу. Значит, по теореме о множестве вершин прямоугольных треугольников с общей гипотенузой точки A, B, A_1, B_1 принадлежат одной окружности. Центр этой окружности находится в середине стороны AB . Радиус ее равен $\frac{1}{2}|AB|$.

Для построения двух высот треугольника ABC достаточно построить окружность с диаметром AB . Она пересечет стороны BC и AC (или их продолжения) в точках A_1 и B_1 , которые являются основаниями высот, проходящих через вершины A и B .

11. Соединим отрезками точку A с точками B и C (рис. 131). Обозначим через P и M точки пересечения отрезков AB и AC с окружностью. Построим отрезки BM и CP , их точка пересечения — D . Проведем прямую AD . Эта прямая искомая.

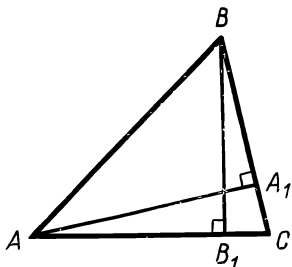


Рис. 130

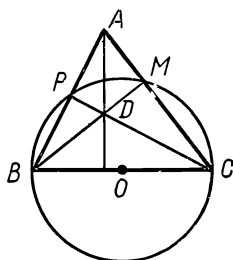


Рис. 131

8. а) Так как $O \in [AC]$, то $[AC]$ — диаметр и $\hat{B} = 90^\circ$ (рис. 128). Значит, в четырехугольнике $ODBE$ углы B, D и E прямые. Поэтому четырехугольник $ODBE$ — прямоугольник. б) $|DE| = |OB| = 15$ см.

9. Отрезки касательных, проведенных из точки к окружности, конгруэнтны (рис. 129).

Действительно, отрезки BM и CP являются высотами треугольника ABC . Поэтому прямая AD , проходящая через третью вершину треугольника ABC и точку пересечения двух его высот, перпендикулярна прямой BC .

65. Центральные углы и дуги (2 часа)

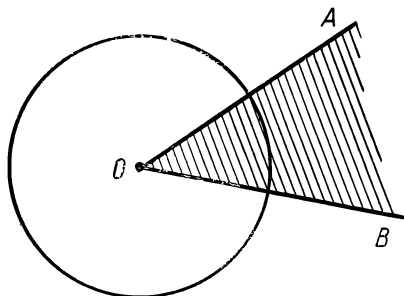
В пункте 65 даются определения понятиям «центральный угол» и «дуга окружности». При этом понятие «дуга» определяется с помощью понятия «центральный угол». Далее, в тексте этого пункта выясняются условия конгруэнтности двух дуг.

Изучив данный пункт учебника, учащиеся должны знать определения центрального угла, дуги окружности и уметь формулировать и доказывать теорему о конгруэнтности двух дуг.

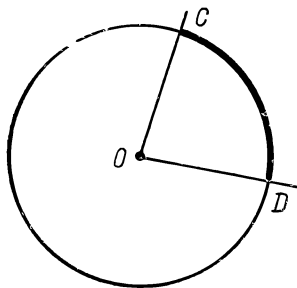
На первом из уроков можно изучить теоретический материал. Рекомендуется использовать таблицу 6.

Таблица 6

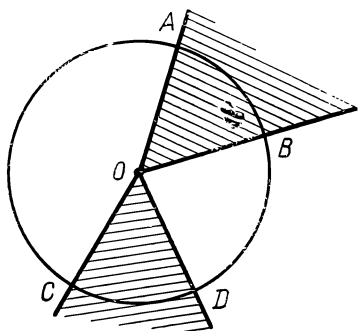
Центральные углы и дуги



Центральный угол



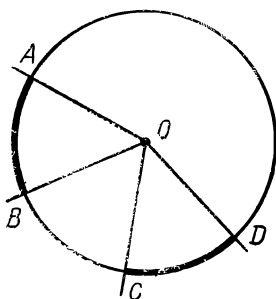
Дуга окружности



$$\angle AOB \cong \angle COD$$



$$\frown AB \cong \frown CD$$



$$\frown AB \cong \frown CD$$



$$\angle AOB \cong \angle COD$$

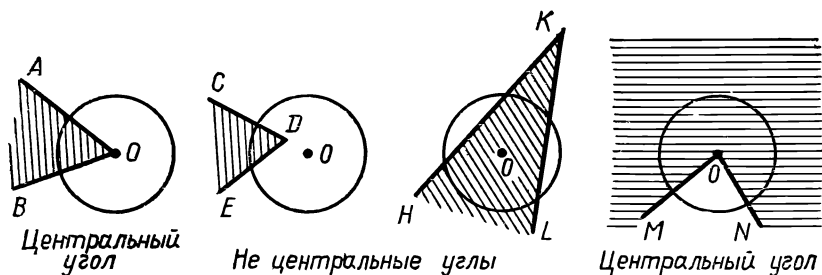


Рис. 132

Определения центрального угла и дуги окружности усваиваются учащимися обычно без затруднений. К ним можно подвести учащихся путем беседы. Показываются готовые цветные чертежи (на таблице или на классной доске), на которых изображены центральные углы и углы, не являющиеся центральными (рис. 132). Затем выясняется характеристический признак центральных углов — вершина каждого из них лежит в центре окружности. Учащиеся формулируют определение центрального угла.

Далее ставится задача: с помощью понятия центрального угла дать определение дуге окружности (рис. 133).

При выяснении условий конгруэнтности двух дуг следует подчеркнуть, что первым из таких условий является принадлежность этих дуг одной окружности или двум конгруэнтным окружностям. Это условие необходимо. Если оно не выполняется, то дуги вообще не могут быть конгруэнтными.

Дальнейшие рассуждения проводятся в предположении, что дуги принадлежат одной окружности. Какое условие в этом

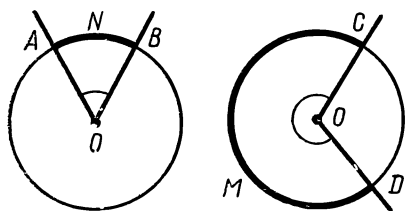


Рис. 133

случае будет достаточным для конгруэнтности двух дуг?

Рассматривается подвижная модель, которую можно изготовить так. На листе плотной бумаги выполняется рисунок 89 из учебника. На этот рисунок накладывается вырезанный из картона сектор AOB , вершина которого шарнирно закрепляется в центре O .

Высказывается предположение: для конгруэнтности двух дуг окружности достаточно, чтобы были конгруэнтны соответствующие им центральные углы. Формулируется и доказывается теорема А.

— Верно ли предположение, обратное теореме А? Как оно формулируется?

Учащиеся формулируют теорему Б. Затем проводится ее доказательство.

После доказательства теорем А и Б полезно еще раз выяснить, которая из них выражает достаточное и которая — необходимое

условие конгруэнтности двух дуг окружности. Затем можно сформулировать окончательный результат — теорему 42.

Некоторые из учащихся могут предложить доказательство этой теоремы с помощью признака конгруэнтности треугольников по трем сторонам. Тогда следует одобрить это доказательство и провести его анализ.

— На какие предложения опирались при данном доказательстве?

— Опирались на два предложения: 1) Радиусы окружности равны между собой. Поэтому $|AO| = |CO|$, $|BO| = |DO|$. 2) Расстояния между концами конгруэнтных дуг равны между собой. Поэтому $|AB| = |CD|$.

— Откуда следует первое предложение?

— Из определения окружности.

— Откуда следует второе предложение?

Может показаться, что второе предложение следует из определения конгруэнтных дуг. Но из этого определения следует лишь, что существует отображение одной дуги на другую, при котором сохраняются расстояния. Однако, может быть, при таком отображении конец первой дуги перейдет во внутреннюю точку второй дуги? То, что такого случая быть не может, следовало бы доказать. Второе предложение, таким образом, следует из определения конгруэнтных дуг только при условии, что перемещение, отображающее одну из двух конгруэнтных дуг на другую, концы первой дуги отображает также на концы второй дуги. Это предложение и принимается без доказательства.

Если учащиеся еще не подготовлены для проведения такого «тонкого» логического анализа, то достаточно лишь обратить их внимание на то, что равенство $|AB| = |CD|$ следует из предложения: при перемещении, отображающем одну из двух конгруэнтных дуг на другую, концы первой отображаются на концы второй. Это предложение мы принимаем без доказательства.

В качестве домашнего задания к первому уроку можно предложить задачу 1 и задачу: разделите данную дугу пополам с помощью циркуля и линейки (учащиеся должны будут разделить пополам соответствующий центральный угол).

На втором уроке решаются задачи 2—4 и выполняется самостоятельная работа. В качестве домашнего задания можно предложить задачи 5, 6 и 7.

Дополнительные задачи

1. Сколько дуг данной окружности определяют: а) два луча с началом в центре; б) две прямые, проходящие через центр?

[а) Две; б) двенадцать.]

2. Постройте окружность с центром в данной точке, которая делила бы данную окружность пополам.

[Пусть даны окружность (O, r) и точка A . Постройте прямую OA и диаметр MN , перпендикулярный прямой OA . Окружность $(A, |AM|)$ искомая.]

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. а) Две дуги, одна хорда. б) Шесть дуг, три хорды; двенадцать дуг, шесть хорд; $n(n-1)$ дуг, $\frac{n(n-1)}{2}$ хорд.

2. Такие дуги конгруэнтны, если радиусы окружностей равны. Они не конгруэнтны, если радиусы окружностей не равны.

3. Такие дуги не конгруэнтны, так как окружности имеют различные радиусы (если эти окружности не совпадают).

4. Так как $\cup BD \cong \cup AC$, то $\angle BOD \cong \angle AOC$ (рис. 134). Тогда и $\widehat{BOD} + \widehat{DOC} = \widehat{AOC} + \widehat{DOC}$.

Значит, $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$.

Так как $\angle BOC \cong \angle AOD$, то $\cup BC \cong \cup AD$.

Кроме этих пар дуг, конгруэнтны пары дуг, дополняющих их до окружности:

$\cup BAD \cong \cup ABC$ и $\cup BAC \cong \cup ABD$.

5. Д а н о: $\cup AB \cong \cup BC$, $\cup AM \cong \cup MB$, $\cup BN \cong \cup NC$ (рис. 135).

Д о к а з а т ь: $\cup MN \cong \cup AB$.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

$$\widehat{MON} = \widehat{MOB} + \widehat{BON} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} + \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \widehat{AOB}.$$

Значит,

$$\angle MON \cong \angle AOB$$

и по теореме о конгруэнтности дуг

$$\cup MN \cong \cup AB.$$

6. Возьмем раствор циркуля несколько больше, чем радиус окружности. От какой-либо точки A отложим дугу AA_1 , расстояние $|AA_1|$ между концами которой равно выбранному раствору циркуля (рис. 136). Такое же построение выполним для точки A_1 . Получим дугу A_1A_2 . Затем построим таким же образом дуги A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 . Углы $\angle OAA_1$, $\angle A_1OA_2$, $\angle A_2OA_3$, $\angle A_3OA_4$ и $\angle A_4OA_5$ конгруэнтны.

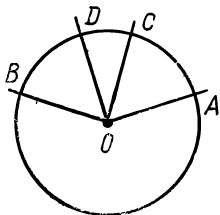


Рис. 134

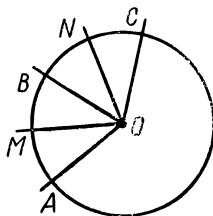


Рис. 135

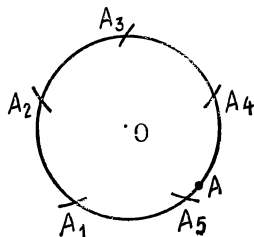


Рис. 136

Поэтому конгруэнтны и построенные дуги. Если точка A_5 совпадает с точкой A , то окружность будет разделена на пять конгруэнтных дуг. В противном случае раствор циркуля нужно увеличить (или уменьшить) и повторить все построения. После нескольких повторений таких построений окружность будет с достаточно большой степенью «чертежной точности» разделена на пять конгруэнтных дуг.

7. Двумя (поворотом и осевой симметрией). При одном из них $A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$, при другом $A \rightarrow B_1$, $B \rightarrow A_1$.

66. Дуги и хорды (2 часа)

В пункте 65 было доказано, что для конгруэнтности двух дуг окружности достаточно, чтобы они соответствовали конгруэнтным центральным углам. В первой части пункта 66 доказывается новое достаточное условие конгруэнтности двух дуг окружности (теорема 43): если две хорды окружности конгруэнтны, то конгруэнтны и стягиваемые ими дуги.

Во второй части данного пункта рассматриваются три следствия из симметричности окружности относительно любой прямой, проходящей через центр этой окружности. Еще несколько следствий (не для запоминания учащимися) указаны в задачах 3, 4, 10, 11.

Учащиеся должны уметь формулировать достаточное условие конгруэнтности дуг окружности, исходя из конгруэнтности стягивающих хорд, и доказывать его. Они должны научиться применять свойство симметричности окружности относительно любой прямой, проходящей через центр, к доказательству теорем и решению задач. В частности, учащиеся должны уметь доказывать следствия 1, 2, 3, указанные в тексте учебника, и делить данную дугу пополам, не прибегая к соответствующему центральному углу.

На первом из уроков можно изучить теоретический материал. Рекомендуются использовать таблицу 7. В т о р о й урок посвящается решению задач.

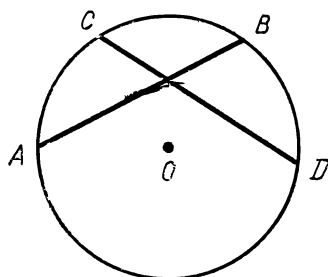
Изложение теоретического материала на первом уроке можно начать с рассмотрения предложения: если две дуги конгруэнтны, то конгруэнтны и стягивающие их хорды. Оно является следствием предложения, принятого без доказательства в пункте 65.

Далее, естественно, ставится вопрос об обратном предложении. Верно ли оно? Формулировка и доказательство этого предложения (теорема 43) не затрудняют учащихся.

В качестве приложения доказанной теоремы хорошо решить задачу 2.

При переходе к изложению второй части нового материала следует предложить учащимся сказать, что они знают о симметрии окружности относительно оси. Учащиеся ответят, что окружность симметрична относительно любой прямой, проходящей через ее центр, или, иначе, любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии.

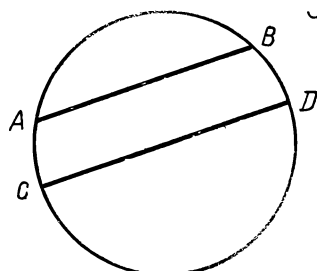
Дуги и хорды



$$[AB] \cong [CD]$$

$$\downarrow$$

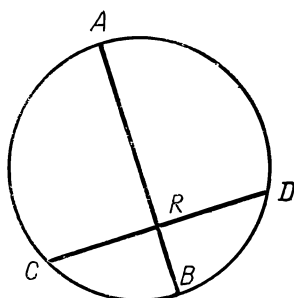
$$\sim AB \cong \sim CD$$



$$[AB] \parallel [CD]$$

$$\downarrow$$

$$\sim AC \cong \sim BD$$

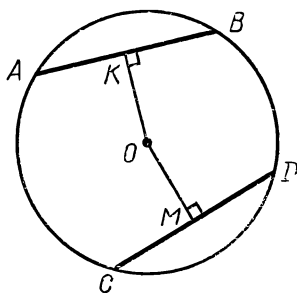


$$[AB] \perp [CD]$$

$$\downarrow$$

$$[CR] \cong [RD]$$

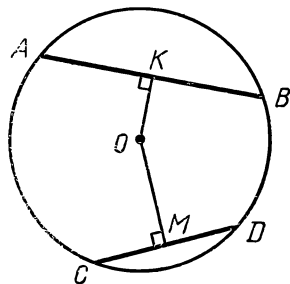
$$\sim CB \cong \sim BD$$



$$|AB| = |CD|$$

$$\downarrow$$

$$|OK| = |OM|$$



$$|AB| > |CD|$$

$$\downarrow$$

$$|OK| < |OM|$$

Затем, показывая соответствующие наглядные пособия, можно предложить учащимся сформулировать какие-нибудь следствия из теоремы об оси симметрии окружности. Простейшим из наглядных пособий, какое можно для этой цели использовать, является лист прозрачной бумаги с выполненным на нем рисунком 93 из учебника. Перегибая этот лист по оси MN , можно иллюстрировать те факты, о которых говорится в следствиях 1 и 2.

Следствия, сформулированные в учебнике под номерами 1, 2 и 3, наглядно очевидны. Но их, разумеется, следует доказать.

С л е д с т в и е 1. Дуги, заключенные между параллельными хордами, конгруэнтны (рис. 137).

Д а н о: $[AB] \parallel [CD]$.

Д о к а з а т ь: $\cup AC \cong \cup BD$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем диаметр MN , перпендикулярный хорде AB . Он перпендикулярен и хорде CD . Прямая MN — ось симметрии окружности. Поэтому в осевой симметрии с осью MN образом точки A является точка B , а образом точки C является точка D . Следовательно, в осевой симметрии с осью MN точки A и C отобразятся соответственно на точки B и D и дуга AC — на дугу BD . Поэтому $\cup AC \cong \cup BD$.

С л е д с т в и е 2. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее и стягиваемую ею дугу пополам (рис. 138).

По условию диаметр MN перпендикулярен хорде AB . Прямая MN — ось симметрии окружности. Поэтому точка B является образом точки A в осевой симметрии с осью MN . Точки же M и F отображаются сами на себя. Следовательно, в осевой симметрии с осью MN дуга AM отобразится на дугу BM и отрезок AF — на отрезок BF . Поэтому $\cup AM \cong \cup BM$ и $[AF] \cong [BF]$, т. е. диаметр MN делит хорду AB и дугу AB пополам.

С л е д с т в и е 3. Диаметр, который делит хорду (отличную от диаметра) пополам, перпендикулярен этой хорде.

Предположим противное: этот диаметр не перпендикулярен хорде. Тогда другой диаметр, который перпендикулярен хорде, разделит ее пополам. У хорды тогда будут две середины, что неверно. Следовательно, предположение неверно.

В качестве домашнего задания можно предложить учащимся задачи 1 и 4.

На втором уроке решаются задачи 5, 6, 3, 8, 10, 12.

Задание на дом. Задачи 7, 8, 11, повторить п. 15; сформулировать определение единицы измерения величины угла — градуса.

На следующем уроке для решения задач потребуются транспортиры.

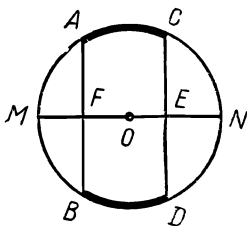


Рис. 137

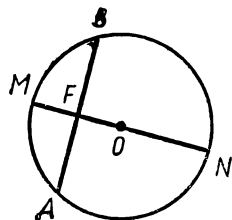


Рис. 138

Дополнительные задачи.

1. Докажите, что касательная, параллельная хорде, делит в точке касания пополам дугу, стягиваемую этой хордой.

[Пусть даны окружность (O, r) , хорда AB и касательная $МК$, параллельная хорде AB . Обозначьте точку касания через C .

Рассмотрите осевую симметрию с осью OC .]

2. Докажите, что параллельные хорды, проведенные через концы одного диаметра, конгруэнтны между собой.

[Воспользуйтесь центральной симметрией.]

3. Из точки, данной на стороне угла, как из центра опишите окружность, которая от другой стороны угла отсечет хорду данной длины.

[Через данную точку проведите перпендикуляр к другой стороне угла и от основания перпендикуляра отложите отрезки, длина каждого из которых составляет половину данной длины.

Если данный угол острый, то задача либо имеет одно решение, либо не имеет решений.

Если данный угол тупой или прямой, то задача не имеет решений.]

Ответы и указания.

1. Один способ решения этой задачи уже известен: разделить пополам соответствующий центральный угол. Второй способ: через центр провести перпендикуляр к хорде, стягивающей данную дугу.

Чтобы разделить окружность на четыре конгруэнтные дуги, достаточно построить два взаимно перпендикулярных диаметра.

2. Из точки C как из центра опишите окружность радиусом, равным $|AB|$. Точки пересечения (или точка касания, если AB — диаметр) ее с данной окружностью искомые. Задача имеет два решения.

3. Предположим противное: этот диаметр не перпендикулярен хорде, стягивающей дугу. Тогда другой диаметр, который перпендикулярен этой хорде, разделит дугу пополам. У дуги, таким образом, будут две середины, что неверно. Следовательно, предположение неверно.

4. Пусть $ABCD$ — трапеция, вписанная в окружность (рис. 139). Тогда хорды BC и AD параллельны. Поэтому дуги AB и CD конгруэнтны. Следовательно, конгруэнтны и хорды AB и CD , т. е. трапеция $ABCD$ равнобедренная.

5. Ни одной, если $a > 2r$. Одна, если $a = 2r$. Две, если $a < 2r$.

6. Проведем диаметр MN , перпендикулярный хорде AB . Прямая MN является осью симметрии для каждой из данных окружностей. В осевой симметрии S_{MN} образами

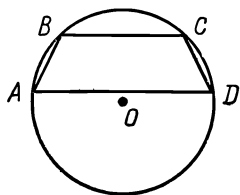


Рис. 139

точек A и C являются точки B и D . Поэтому отрезки AC и BD симметричны относительно оси MN . Следовательно, $[AC] \cong [BD]$.

7. а) Постройте диаметры, проходящие через точки A и B . б) Постройте диаметры, проходящие через точки C и D .

8. Пусть дана точка A . Построим прямую OA и к ней проведем перпендикуляр через точку A . Обозначим через B и C точки пересечения этого перпендикуляра с данной окружностью. Хорда BC искомая.

9. Проведите $[AE]$, $[ED]$ и $[EF]$; имеем: $|EF| < |ED| = |EA| = |FB|$. Поэтому дуги AE , EF и FB не конгруэнтны.

10. Линия центров данных окружностей является их общей осью симметрии. Если бы точка касания этих окружностей не лежала на линии центров, то симметричная ей точка также принадлежала бы каждой из данных окружностей. Окружности имели бы две общие точки, что противоречит условию.

11. Линия центров данных окружностей является их общей осью симметрии. Поэтому образом точки пересечения этих окружностей является вторая их точка пересечения. Следовательно, отрезок, соединяющий точки пересечения данных окружностей, делится осью симметрии пополам, т. е. общая хорда окружностей делится их линией центров пополам.

12. Множество середин всех хорд данной окружности, параллельных данной прямой, есть *открытый диаметр* (диаметр без его концов), перпендикулярный этим хордам (рис. 140).

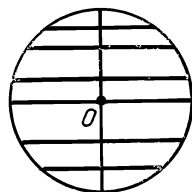


Рис. 140

Докажем это.

1. Если точка является серединой одной из таких хорд, то она принадлежит открытому диаметру, перпендикулярному данным хордам (следствие 3, пункт 66).

2. Если точка X принадлежит указанному открытому диаметру, то она является серединой одной из данных хорд. Действительно, через точку X проходит одна из данных хорд. Эта хорда перпендикулярна диаметру. Точка X — середина этой хорды (см. п. 66).

13. Точки пересечения общих внутренних и внешних касательных к двум данным окружностям лежат на их линии центров. Первая из этих точек лежит между центрами, вторая — вне отрезка, соединяющего центры. Осью симметрии получившейся фигуры является линия центров.

67. Угловая величина дуги (1 час)

В пункте 67 вводится понятие угловой величины дуги окружности как величины соответствующего ей центрального угла.

Учащиеся должны знать, что каждая дуга окружности имеет определенную угловую величину. Числовое значение угловой величины дуги окружности равно числовому значению величины соответствующего центрального угла. Две дуги окружности (или кон-

груэнтных окружностей) конгруэнтны в том и только в том случае, если равны их угловые величины. Учащиеся должны уметь сформулировать определения единиц измерения углов — градуса, минуты, секунды, выполнять действия с угловыми величинами дуг.

Перед изложением нового материала следует повторить с учащимися формулировку теоремы 42 о необходимом и достаточном условии конгруэнтности двух дуг окружности.

Эта теорема показывает, что дуги окружности можно измерять соответствующими им центральными углами. Учащиеся уже имеют некоторое представление об измерении величин — длины отрезка, величины угла, площади многоугольника (строгую теорию измерения величин не представляется возможным рассматривать в VII классе). Они знают, например, два свойства величины угла: 1) конгруэнтные углы имеют равные величины; 2) величина суммы углов равна сумме их величин. Аналогичными свойствами обладают длины отрезков и площади многоугольников. Теорема 42 позволяет обосновать аналогичные свойства и для угловой величины дуги. Первое свойство следует из этой теоремы и определения угловой величины дуги, второе — из теоремы, определения и второго свойства величины угла.

Поэтому на уроке целесообразно обратить внимание на четкое выделение четырех вопросов: 1) Что называется угловой величиной дуги? [Угловой величиной дуги называется величина центрального угла, соответствующего этой дуге.] 2) Каковы угловые величины конгруэнтных дуг? [Конгруэнтные дуги имеют равные угловые величины.] 3) Чему равна угловая величина дуги ABC , если B есть точка этой дуги? [Угловая величина дуги ABC равна сумме угловых величин дуг AB и BC , если B есть точка дуги ABC .] 4) Каковы единицы измерения величины угла? [Градус, минута, секунда. Градусом называется $\frac{1}{180}$ часть величины развернутого угла (см. пункт 15 учебника для VI класса). Минутой называется $\frac{1}{60}$ часть градуса. Секундой называется $\frac{1}{60}$ часть минуты.]

При изучении материала следует обращать внимание учащихся на то, что действия с угловыми величинами дуг и сравнение их возможны лишь для дуг одной и той же окружности или конгруэнтных окружностей.

На уроке рекомендуется решить задачи 1 (а, б), 2, 3 (а, б), 8.

В задаче 3 можно не выполнять построения, а лишь ответить устно на поставленный вопрос.

З а д а н и е н а д о м. Задачи 1 (в, г), 3 (г, д), 6, 10.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. а) 72° ; б) 60° ; в) 36° ; г) $22^\circ, 5$.

2. Следует построить соответствующие центральные углы и измерить их с помощью транспорта.

3. а) Построить два взаимно перпендикулярных диаметра и разделить пополам одну из полученных дуг. б) От какой-либо точки

окружности отложить дугу в 60° и разделить ее пополам. в) Построить дугу в 30° и разделить ее пополам. г) Построить объединение дуг в 90° и 45° , имеющих только одну общую точку. д) Построить объединение полуокружности и дуги в 90° , имеющих только одну общую точку. е) Построить дугу в 15° и разделить ее пополам.

4. Меньшая дуга имеет угловую величину, равную $\frac{360^\circ}{1+4+8+11} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$. Остальные дуги соответственно имеют угловые величины: $15^\circ \cdot 4 = 60^\circ$, $15^\circ \cdot 8 = 120^\circ$, $15^\circ \cdot 11 = 165^\circ$.

5. а) 60° ; б) 45° ; в) $7^\circ, 5$.

6. а) 195° и 165° ; б) 90° и 270° .

7. Постройте центральный угол в 72° . Он определит $\frac{1}{5}$ часть окружности.

8. Поворотом на 15° по часовой стрелке.

9. 90° и 270° .

10. $0', 54$; $0'', 0324$.

11. 160° .

68. Зависимость между расстоянием хорды от центра, ее длиной и угловой величиной стягиваемой ею дуги (3 часа)

В этом пункте доказываются теоремы о зависимости между расстоянием хорды от центра и ее длиной. Без доказательства рассматривается зависимость между расстоянием хорды от центра и угловой величиной дуги, стягиваемой этой хордой.

Учащиеся должны уметь формулировать теоремы о зависимости между расстоянием хорды от центра и ее длиной, доказывать эти теоремы и решать задачи примерно такой трудности, как указанные к этому пункту в учебнике.

Первый урок. Доказать теорему 44 (прямую и обратную). Решить задачи 1, 3.

Задание на дом. Пункт 68, теорема 44; записать доказательство обратной теоремы; решить задачу 2.

Изучение нового материала на первом уроке можно начать с постановки проблемы: высказать предположение о зависимости между расстоянием хорды от центра и ее длиной, рассматривая чертежи или подвижное наглядное пособие.

Подвижное наглядное пособие можно изготовить следующим образом. На листе плотного картона вычерчиваются окружность с центром O , ее хорда AB и отрезок перпендикуляра OX , проведенного через точку O к прямой AB (рис. 141). Затем на другом листе картона вычерчиваются окружность того же радиуса и ее хорда CD , для которой $|CD| = |AB|$. Как и на первом чертеже, строится отрезок перпендикуляра OY , проведенного через центр к прямой CD . Затем вырезается сектор COD так, чтобы «вокруг центра были

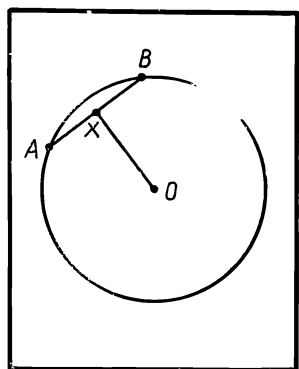


Рис. 141

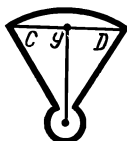


Рис. 142

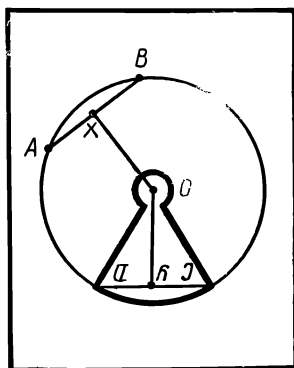


Рис. 143

закрайны» (рис. 142). Сектор COD накладывается на первый лист картона и «центры» сектора и окружности скрепляются шарнирно булавкой (рис. 143).

Аналогично изготавливается еще один сектор COD , для которого $|CD| > |AB|$.

Сперва вращением вокруг центра сравниваются расстояния $|OX|$ и $|OY|$ для хорд AB и CD , имеющих равные длины. Затем, сменив первый «накладной» сектор вторым, сравнивают расстояния $|OX|$ и $|OY|$ для случая, когда $|CD| > |AB|$.

Учащиеся быстро приходят к предположениям об искомой зависимости и формулируют их.

Далее можно поставить задачу отыскать доказательство теоремы 44 (первой части). Исходя из «опыта с подвижной моделью», учащиеся придут, естественно, к тому же доказательству, что и приведенное в учебнике.

Если учитель предпочел чертежи, то у учащихся может появиться другой способ доказательства — с помощью конгруэнтности треугольников AOB и COD . В этом случае следует рассмотреть и второй способ доказательства — с помощью поворота.

Доказательство второй части теоремы 44 можно провести следующим образом.

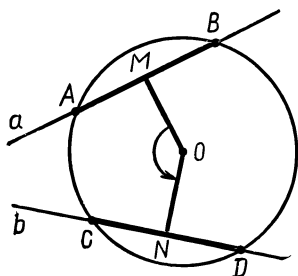


Рис. 144

Пусть хорды AB и CD равноудалены от центра (рис. 144) и пусть отрезки OM и ON перпендикулярны соответственно хордам AB и CD . Тогда по условию теоремы $|OM| = |ON|$. Поворотом вокруг центра O на угол MON отрезок OM отобразится на отрезок ON , точка M — на точку N . При этом повороте перпендикуляр a к отрезку OM , проходящий через точку M , отобразится на перпенди-

куляр b к отрезку ON , проходящий через точку N . Точки A и B пересечения прямой a и окружности отображаются на точки пересечения прямой b и этой окружности, т. е. на точки C и D . Следовательно, отрезок AB отобразится на отрезок CD . Поэтому $|AB| = |CD|$, что и требовалось доказать.

На втором уроке после повторения и опроса продолжается изучение поставленной на предыдущем уроке проблемы. Доказывается теорема 45. Доказательство ее целесообразно проводить, пользуясь чертежом, который учитель выполняет на доске цветными мелками, постепенно строя новые линии по ходу рассуждения. В результате на классной доске появится копия рисунка 101 из учебника, выполненная цветными мелками. Доказательство теоремы 46 учащимся предлагается рассмотреть дома. Решаются задачи 4 и 7.

Задание на дом. Пункт 68, теоремы 45 и 46, задача 8.

На третьем уроке подводится итог изучения зависимости между расстоянием хорды от центра и ее длиной и решается задача 6. Затем предлагается самостоятельная работа.

Задание на дом. Повторить материал главы IV для контрольной работы.

Укажем доказательства теорем о зависимости между длиной хорды и угловой величиной стягиваемой ею дуги. Эти теоремы могут быть даны в качестве индивидуальных заданий отдельным учащимся. В них рассматриваются только дуги, не превышающие полуокружности.

Теорема. Если угловая величина одной дуги больше угловой величины другой дуги той же окружности, то длина хорды, стягивающей первую дугу, больше длины хорды, стягивающей вторую дугу.

Дано: в окружности (O, r) $\widehat{AB} > \widehat{A_1B_1}$ (рис. 145).

Доказать: $|AB| > |A_1B_1|$.

Доказательство. Дугу A_1B_1 поворотом около центра O можно отобразить на такую дугу данной окружности, что один ее конец совпадет с точкой A , а другой будет лежать на дуге AB . Пусть это дуга AC . Тогда хорда A_1B_1 отобразится на хорду AC . $\widehat{A_1B_1} = \widehat{AC}$, $|A_1B_1| = |AC|$.

Теперь достаточно доказать, что $|AB| > |AC|$.

Через точку O проведем перпендикуляры OD и OE к хордам AB и AC . Точки O и E расположены по разные стороны от прямой AB . Поэтому отрезок OE пересечет отрезок AB в некоторой точке F .

В треугольнике ODF отрезок OD — катет, а отрезок OF — гипотенуза. Поэтому $|OF| > |OD|$, значит, и $|OE| > |OD|$. Отсюда следует, что $|AB| > |AC|$ (по теореме о длине хорд, неравноудаленных от центра, — теорема 46). Теорема доказана.

Теорема. Если длина одной хорды больше длины другой хорды той же окружности, то угловая величина дуги, стягиваемой первой хордой, больше угловой величины дуги, стягиваемой второй хордой.

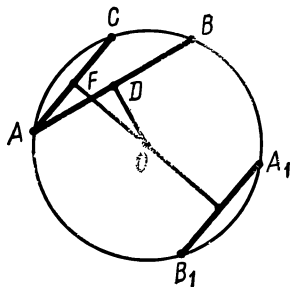


Рис. 145

Пусть $|AB| > |A_1B_1|$.

Требуется доказать, что $\widehat{AB} > \widehat{A_1B_1}$.

Между угловыми величинами дуг \widehat{AB} и $\widehat{A_1B_1}$ может быть только одно из следующих трех соотношений:

- 1) $\widehat{AB} < \widehat{A_1B_1}$,
- 2) $\widehat{AB} = \widehat{A_1B_1}$,
- 3) $\widehat{AB} > \widehat{A_1B_1}$.

Но первое соотношение для дуг \widehat{AB} и $\widehat{A_1B_1}$ не может выполняться, так как тогда, по доказанной теореме, $|AB| < |A_1B_1|$, что противоречит условию.

Не может выполняться и второе соотношение, так как тогда $|AB| = |A_1B_1|$, что тоже противоречит условию.

Следовательно, выполняется третье соотношение: $\widehat{AB} > \widehat{A_1B_1}$, что и требовалось доказать.

Дополнительные задачи

1. Какую фигуру образует множество всех центров окружностей, каждая из которых отсекает на сторонах данного угла конгруэнтные между собой хорды?

[Биссектрису данного угла без его вершины.]

2*. Постройте хорду данной окружности, которая отстояла бы от ее центра в два раза ближе, чем данная хорда. Выясните, будет ли длина построенной хорды в два раза больше длины данной хорды.

Ответы и указания

1. На расстоянии, равном нулю.

2. Строим луч с началом в данном центре O искомой окружности и на нем точку A на данном расстоянии от начала. Через точку A проводим перпендикуляр к лучу OA и на нем от точки A откладываем отрезок AB , длина которого равна половине длины данной хорды. Окружность $(O; |OB|)$ искомая. Задача имеет одно решение.

3. Окружность, центр которой лежит в центре данной окружности, а радиус равен расстоянию от центра до одной из таких хорд.

4. а) Хорда, перпендикулярная радиусу, проходящему через данную точку.

б) Диаметр, проходящий через данную точку.

5. а) Любые две хорды, симметричные относительно прямой, проходящей через центр и данную точку, будут конгруэнтны между собой.

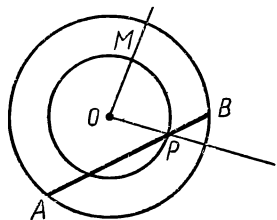


Рис. 146

б) Пусть M — данная точка внутри данной окружности (O, r) . Строим хорду AB данной длины и окружность $(O, |OM|)$. Обозначим через P одну из точек пересечения этой окружности с хордой AB (рис. 146). Тогда поворот около центра O на угол POM хорду AB отобразит на искомую хорду. Задача не имеет решения, если

6. Эти отрезки являются хордами, равноудаленными от центра окружности. Поэтому они конгруэнтны.

8. а) 12 мм, б) 3 мм.

10. 26 *см.*

11. Хорды AC и BD симметричны относительно центра окружности. Поэтому они конгруэнтны и, следовательно, равноудалены от центра окружности.

(для задач на повторение к главе IV)

2. Задача для кружка. Использовать теорему об угле с вершиной внутри круга.

4. $|AB| = |AC|$ как длины отрезков касательных, проведенных к окружности через точку A . Аналогично $|AC| = |AD|$. Следовательно, $|AB| = |AC| = |AD|$.

$$\widehat{OBA} = \widehat{BOC} + \widehat{BCO} \text{ (внешний угол треугольника } OBC).$$
$$\widehat{OBA} = \widehat{BCO} = \widehat{ACD}.$$

$$\widehat{OAC} = 2\widehat{ACD}.$$

$$\widehat{AOD} = \widehat{OAC} + \widehat{ACD} = 2\widehat{ACD} + \widehat{ACD} = 3\widehat{ACD}.$$

$$\widehat{AOD} = 3\widehat{ACD}.$$

6. Пусть даны точка M , прямая a и радиус r . Центр искомой окружности лежит на окружности (M, r) и прямой, параллельной прямой a и находящейся от нее на расстоянии r (таких прямых две). Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

7. Центр искомой окружности лежит на перпендикуляре к прямой BC , проходящем через точку D , и на серединном перпендикуляре к отрезку AD . Задача имеет одно решение.

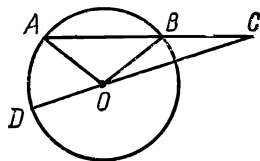


Рис. 147

9. Пусть даны параллельные прямые a и b и секущая прямая c . Обозначим через h расстояние между прямыми a и b . Тогда центр искомой окружности лежит на прямой, параллельной прямым a и b и находящейся от каждой из них на расстоянии $\frac{h}{2}$. Центр лежит также на прямой, параллельной прямой c и находящейся от нее на расстоянии $\frac{h}{2}$ (таких прямых две). Задача всегда имеет два решения.

10. Даны параллельные прямые a и b и окружность (O, r) . Обозначим расстояние между прямыми a и b через c . Тогда центр искомой окружности является точкой пересечения окружности $(O, r + \frac{c}{2})$ и прямой, параллельной прямым a и b и отстоящей от каждой из них на расстоянии $\frac{c}{2}$. Задача может иметь два, одно и ни одного решения.

12. Задача имеет четыре решения.

14. Биссектриса угла A делит дугу BC пополам. Диаметр, проходящий через середину дуги BC , перпендикулярен хорде BC , как и данная высота.

15. Пусть точки D , E , F — точки пересечения с окружностью высоты, биссектрисы и медианы искомого треугольника ABC (рис. 148). Тогда высота AN параллельна прямой OE , а прямая AF пересекает прямую OE в середине M стороны BC .

$$\begin{cases} r_2 + r_3 = a, \\ r_1 + r_2 = b, \\ r_1 + r_3 = c. \end{cases}$$

18. Пусть даны окружности (O_1, r_1) и (O_2, r_2) , пересекающиеся в точке A . Постройте окружность, симметричную окружности (O_1, r_1)

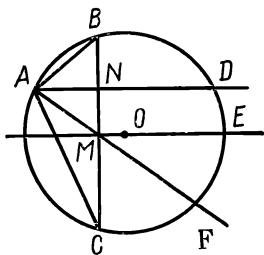


Рис. 148

относительно точки A . Ее вторая точка пересечения с окружностью (O_2, r_2) будет точкой искомой прямой.

19. Постройте образ прямой BC в повороте с центром A на угол в 60° . Точка пересечения этого образа с данной окружностью будет второй вершиной искомого треугольника.

20. $|AB| < |AD|$, где D — точка окружности, отличная от точки B .

21. Воспользуйтесь теоремой об отрезках перпендикуляра и наклонной.

22. а) Прямая, параллельная данным прямым, если эти прямые различны. б) Две прямые, делящие пополам пары вертикальных углов, образованных данными прямыми.

23. Дан угол ABC (рис. 149). Построим луч BM , перпендикулярный лучу BA , и луч BP , перпендикулярный лучу BC . Искомым множеством точек является объединение угла MBP и биссектрисы BD данного угла ABC .

25. а) Пусть дана окружность (O, r) . Множество всех точек, находящихся на расстоянии a от данной окружности, есть: 1) объединение окружностей $(O; r + a)$ и $(O; r - a)$, если $r > a$; 2) объединение окружности $(O; r + a)$ и точки O , если $r = a$; 3) окружность $(O; r + a)$, если $r < a$.

б) Окружность $(O; r + a)$.

26. 70° и 290° .

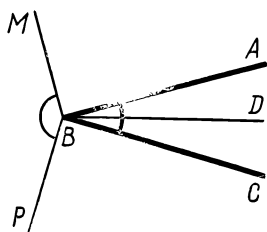


Рис. 149

ВЕКТОРЫ

В настоящей главе вводится понятие вектора и основные действия над векторами (сложение векторов, умножение вектора на число). Здесь же рассматриваются основные законы действий над векторами. Весь этот материал найдет широкое применение в дальнейшем изучении геометрии как в VIII, так и в старших классах. Сведения о векторах будут использоваться при изучении физики.

Вектор определяется как параллельный перенос. Речь идет лишь о новом слове, выражающем уже известное понятие. Параллельный перенос есть (в планиметрии) отображение плоскости на себя, т. е. частный случай соответствия. Как всякое соответствие, параллельный перенос T есть не что иное, как множество всех пар (x, y) вида

$$(x, y = T(x)).$$

Но учащимися параллельный перенос воспринимается непосредственно, без постоянного обращения к его определению как множества пар.

Таким образом, при введении понятия «вектор» учащимся предстоит только освоиться с новым словом. Векторы обозначаются строчными латинскими буквами со стрелкой сверху. Если вектор \vec{a} отображает точку O на точку A , т. е. $\vec{a}(O) = A$, то его можно обозначать \overrightarrow{OA} . Следует заметить, что при таком подходе к делу равенство двух векторов обозначает их полное совпадение; $\vec{a} = \vec{b}$, если через \vec{a} и \vec{b} обозначено одно и то же отображение плоскости на себя. Знак равенства в современных курсах алгебры и геометрии обозначает тождественность названных предметов (чисел, точек, векторов и т. д.).

69. Перемещения. Векторы и способы их задания (3 часа)

Этот пункт посвящен формированию одного из важных математических понятий — понятия вектора.

Учащиеся должны знать определение вектора; понимать, в каком случае две пары точек задают один и тот же параллельный перенос; пользоваться обозначениями векторов; уметь отложить вектор от любой заданной точки O . Обязательными для усвоения понятиями являются также «нулевой вектор» и «длина вектора».

Первый урок целесообразно посвятить повторению материала шестого класса без введения векторной терминологии. Дополнительно при этом вводится обозначение для тождественного отображения плоскости на себя. С этим отображением учащиеся уже встречались, говоря о «повороте на 0° » и о «параллельном переносе на нулевое расстояние». Учащиеся должны ясно понять, что существует одно-единственное тождественное отображение плоскости на себя, а «поворот на 0° » и «параллельный перенос на нулевое расстояние» являются лишь разными его наименованиями.

В классе можно решить задачи 3, 4, 6. На дом дать задачи 5 и 7.

Дополнительные вопросы (которые могут быть даны и на следующих уроках):

1. Почему тождественное отображение есть перемещение?

[При нем сохраняются расстояния: для любых двух точек A и B имеем $E(A)=A$, $E(B)=B$; поэтому

$$|E(A)E(B)| = |AB|.]$$

2. Почему осевая симметрия не есть тождественное отображение?

3. Последовательное выполнение каких двух поворотов (параллельных переносов) дает тождественное отображение плоскости на себя?

4. Последовательное выполнение каких двух осевых симметрий дает тождественное отображение плоскости на себя?

Полезно вспомнить определения направления и параллельного переноса и доказательство того, что параллельный перенос есть перемещение.

Второй урок посвящается введению векторной терминологии. Называя параллельные переносы векторами, принято их обозначать строчными латинскими буквами со стрелкой наверху. Тождественное отображение называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$.

Учитель должен заранее почувствовать законность непривычной для него записи

$$\vec{a}(X) = Y$$

(вектор \vec{a} отображает точку X на точку Y). Для учащихся, которые знакомятся с векторными обозначениями впервые, здесь никакой дополнительной трудности по сравнению с записью $T(X)=Y$ нет.

Вектор, отображающий точку X на точку Y , обозначается \vec{XY} . На рисунке 150 $\vec{XY} = \vec{CD} = \vec{AB}$.

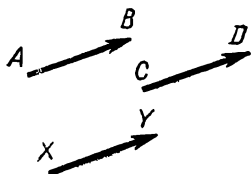


Рис. 150

Отложить вектор \vec{a} от точки X —это значит представить его в виде $\vec{a} = \overrightarrow{XY}$.

Естественно, что при этом $Y = \vec{a}(X)$. В этом случае говорят, что направленный отрезок XY изображает вектор \vec{a} .

На втором уроке можно решить задачи 1, 2, 8, 9. На дом дать задачи 10, 11, 15. В задачах 1 и 2 предполагается, что векторы \vec{a} и \vec{b} заданы геометрически:

$$\vec{a} = \overrightarrow{UV}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{YZ}.$$

Запись $\vec{a} = \vec{b}$ у нас всегда обозначает, что \vec{a} и \vec{b} один и тот же вектор.

Запись $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ обозначает, что пары точек (A, B) и (C, D) , или направленные отрезки AB и CD , являются изображениями одного и того же вектора.

Третий урок посвящается закреплению материала второго урока, знакомству с понятием длины вектора и решению задач. В классе можно решить задачи 16 и 17. В связи с понятием «длина вектора» решить задачи:

1) Точка C принадлежит отрезку AB . Как выразить длину вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ через длины векторов $\vec{x} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$?

Ответ. $|\vec{a}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

2) Точка C не лежит на прямой AB . Что можно сказать, зная длины векторов $\vec{x} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$, о длине вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$?

Ответ. $|\vec{a}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

Дополнительные вопросы.

1. Сколько различных векторов определяет множество точек $\{A, B\}$, $A \neq B$?

[Три вектора: \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BA} и $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.]

2. На плоскости даны три различные точки A, B и C . Сколько различных векторов определяют эти точки?

[Семь или пять (в случае, изображенном на рисунке 151, где $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$).]

3. На плоскости даны четыре различные точки A, B, C и D . Сколько различных векторов могут определить эти точки, взятые попарно?

[13, 11; 9; 7.]

4. На плоскости даны пять точек. Сколько различных векторов задают эти точки, взятые попарно?

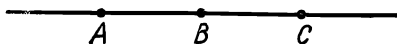


Рис. 151

Эта задача может быть дана более сильным учащимся для домашнего исследования.

З а м е ч а н и е. Часто в имеющейся литературе направленный отрезок и называют вектором. В нашем изложении это не так, у нас вектор — это параллельный перенос, а направленный отрезок — это просто удобное и з о б р а ж е н и е в е к т о р а на чертежах. Здесь следует еще отметить, что у нашего вектора нельзя говорить о начале и конце, так как мы указывали, что вектор — это отображение плоскости, а вот говорить о начале и конце отрезка, изображающего данный вектор, несомненно, можно и часто удобно.

При изучении нового материала, а также при закреплении пройденного удобно пользоваться таблицей 8, где дана сводка основных вопросов, изучаемых в данном пункте. Особенно важно понимать раздел «Задание векторов», здесь по паре точек A и $\vec{a}(A) = B$ строится пара точек (X, Y) , задающая тот же вектор.

О т в е т ы и у к а з а н и я

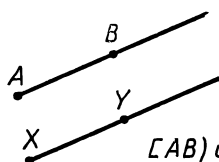
1. На рисунке 152 изображен вектор \vec{a} и даны точки A, B, C . Найти образы точек A, B, C .

Таблица 8

Векторы и способы их задания

Вектор — параллельный перенос

З а д а н и е в е к т о р о в



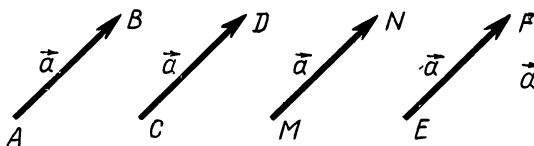
$[AB) \cup [XY) -$
— сонаправленные лучи

$$|\vec{AB}| = |\vec{XY}| = |\vec{a}|$$

$$\begin{array}{ll} A \cup B = \vec{a}(A) & A = B^{\odot} \quad A \cup A = \vec{0}(A) \\ X \cup Y = \vec{a}(X) & X = Y^{\odot} \quad X \cup X = \vec{0}(X) \end{array}$$

$$|\vec{AA}| = |\vec{XX}| = |\vec{0}| = 0$$

И з о б р а ж е н и е в е к т о р о в



$$\vec{a} = \vec{AB} = \vec{CD} = \vec{MN} = \vec{EF}$$

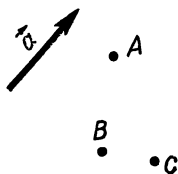


Рис. 152

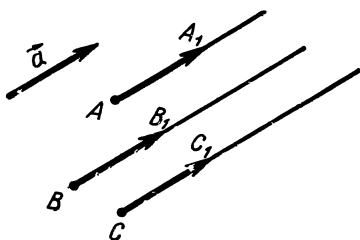


Рис. 153

Строим лучи с началами в точках A, B, C , сонаправленные с вектором \vec{a} , затем откладываем на этих лучах от точек A, B, C расстояния, равные $|\vec{a}|$. Результаты построения записываем так:

$$A_1 = \vec{a}(A), B_1 = \vec{a}(B), C_1 = \vec{a}(C) \text{ (рис. 153).}$$

2. Сначала строим точку $X_1 = \vec{a}(X)$, так, что луч XX_1 сонаправлен \vec{a} и $|XX_1| = |\vec{a}|$, а затем точку $X_2 = \vec{b}(X)$, так, что луч XX_2 сонаправлен \vec{b} и $|XX_2| = |\vec{b}|$.

3. а) Два различных переноса. б) Четыре различных переноса (включая и тождественный).

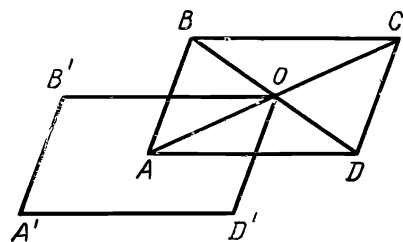
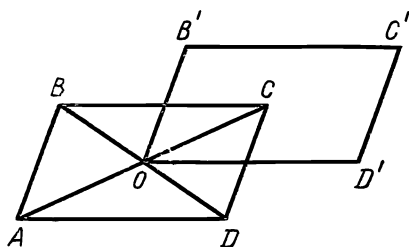


Рис. 154

4. а) 1) $(-5; 4)$; 2) $(-1; 1)$; 3) $(-7; -2)$;

б) 1) $(-3; 14)$; 2) $(-8; 13)$; 3) $(-5; 9)$.

5. В конгруэнтный ему треугольник с вершинами $(0; -1)$; $(2; -5)$; $(-3; -4)$.

6. В случае а) ломаная отображается на себя. В случаях б) и в) учащиеся изображают образ исходной ломаной на схематическом чертеже.

7. Построения видны на чертеже (рис. 154).

В случае 1) точка A отобразилась в точку O и параллелограмм $ABCD$ занял положение $OB'C'D'$. В случае 2) точка O отобразилась в точку A и параллелограмм $ABCD$ занял положение $A'B'OD'$.

З а м е ч а н и е. При рассмотрении этой задачи следует обратить внимание на наличие в каждом случае четырех различных вариантов построения.

8. а) Нет, так как необходимо знать еще направление вектора.

б) Нет, так как необходимо знать еще длину вектора. Вектор (не нулевой) задается своей длиной и направлением.

9. Изобразим на координатной плоскости данные точки (рис. 155).

а) Пары точек (M, N) и (N, M) задают разные векторы, отличающиеся один от другого своим направлением.

б) Пары точек (M, N) и (K, F) определяют различные векторы.

в) Пары точек (M, N) и (K, F) задают один и тот же вектор, так как $[MN]$ и $[KF]$ — сонаправленные лучи и $|MN| = |KF|$.

10. Нет, не следует; лучи AB , CD , KM могут быть не сонаправлены.

11. 1) Четыре различных вектора.

2) Девять различных векторов (включая нулевой вектор).

12. Четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм, так как его стороны AB и CD конгруэнтны и параллельны.

13. Один и тот же вектор определяют следующие пары точек:

(A, B) и (D, C) ; (B, A) и (C, D) ; (B, C) и (A, D) ; (C, B) и (D, A) ; (B, O) и (O, D) ; (O, B) и (D, O) ; (A, O) и (O, C) ; (C, O) и (O, A) .

14. а) Четыре различных вектора,

б) три различных вектора,

в) четыре различных вектора,

г) три различных вектора.

15. Вначале строим лучи с началом в точках K , D и M , сонаправленные \vec{a} , а затем от точек K , D и M откладываем расстояния, равные $|\vec{a}|$. Полученные пары точек искомые.

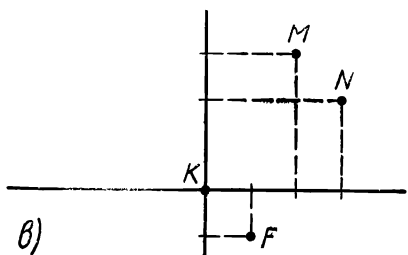
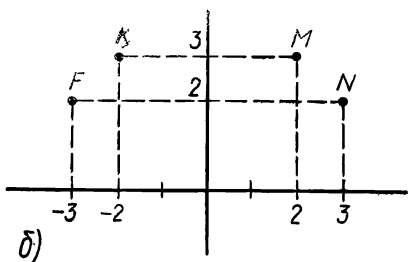
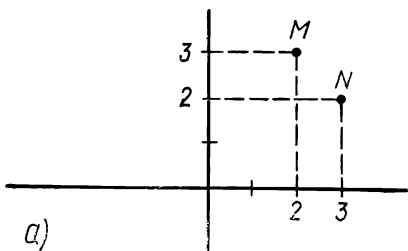


Рис. 155

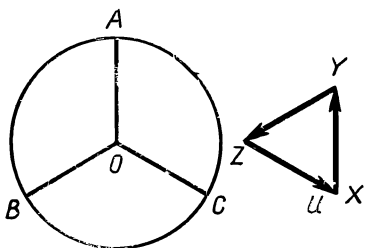


Рис. 156

16. Построение аналогично описанному в предыдущей задаче.

17. Смотри задачи 15 и 16.

18. \vec{AC} и \vec{BD} — один и тот же вектор.

В случае, когда точки лежат на прямой, ответ аналогичен.

19. Отложим от произвольной точки X вектор $\vec{XY} = \vec{OA}$, затем от точки Y вектор $\vec{YZ} = \vec{OB}$.

Заметим, что $\widehat{ZYX} = 60^\circ$. Затем от

точки Z отложим $\vec{ZU} = \vec{OC}$. Во-первых, $\widehat{YZU} = 60^\circ$ и, во вторых, $|\vec{YZ}| = |\vec{ZU}|$, поэтому точка X совпадает с точкой U , т. е. $\vec{UX} = \vec{0}$ (рис. 156).

70. Вектор как частный случай перемещения (1 час)

В этом пункте доказывается необходимое и достаточное условие для того, чтобы перемещение было вектором. Эта теорема понадобится нам при изучении следующего пункта.

Учащиеся должны уметь доказывать теорему этого пункта и применять ее результат при изучении материала следующего пункта, при этом доказательства необходимости условия можно не требовать.

На уроке следует объяснить учащимся новый материал (теорему 47) и разобрать задачи 1, 2, 3, 6. На дом можно дать задачи 4, 5, 7. В классе полезно выполнить самостоятельную работу из «Дидактических материалов» (хотя бы первое задание), — это нужно для подготовки к изучению следующего пункта.

Вспомним доказательство необходимости данного условия.

Мы хотим доказать, что если F — параллельный перенос, то он любой луч отображает на сонаправленный ему луч.

Итак, пусть задан параллельный перенос, например, парой точек A и B , и дан произвольный луч OX (рис. 157).

В данном параллельном переносе точка O отобразится на точку O_1 , а прямая OX на прямую O_1X_1 , параллельную прямой OX . Проведем прямую O_1O (рис. 158). Она делит плоскость на две полуплоскости. Так как прямая YY_1 параллельна прямой OO_1 , то

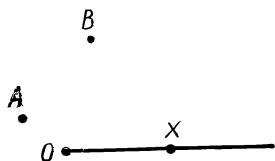


Рис. 157

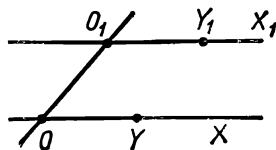


Рис. 158

точка Y_1 лежит в той же полуплоскости, что и точка Y . Значит, и луч O_1X_1 лежит в той же полуплоскости, в которой находится параллельный ему луч OX . А это и значит, что лучи OX и O_1X_1 сонаправлены.

Если времени на уроке не осталось, то целесообразно задать самостоятельную работу для выполнения ее дома, при этом можно разным по уровню успеваемости учащимся дать различные варианты.

При выполнении заданий этой самостоятельной работы следует обратить особое внимание на формулировки первых задач в этих работах:

«Заданы два параллельных переноса \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} и отрезок MN . Постройте образ отрезка MN в результате последовательного выполнения этих переносов. С помощью какого одного вектора можно получить этот образ?»

«Заданы два параллельных переноса \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BD} и отрезок MK . Постройте образ отрезка MK в результате последовательного выполнения этих переносов. Каким одним вектором можно получить этот образ?»

Прежде всего, задание двух параллельных переносов — это задание соответствующих пар точек. В одном случае пары точек расположены так (рис. 159), что точка B входит в обе пары, а в другом случае это пары точек, изображенные на рисунке 160. Вместе с тем следует понимать, что это ни в какой мере не влияет на решение задачи. Воспроизведем примерный вариант оформления второй задачи.

Итак, даны две пары точек (A, C) и (B, D) и отрезок MK (рис. 161). Построения сопровождаются записью: 1) $M_1 = \overrightarrow{AC}(M)$, $K_1 = \overrightarrow{AC}(K)$; $[MK] \cong [M_1K_1]$ и $[MK] \parallel [M_1K_1]$;

2) $M_2 = \overrightarrow{BD}(M_1)$; $K_2 = \overrightarrow{BD}(K_1)$; $[M_1K_1] \cong [M_2K_2]$; $[M_1K_1] \parallel [M_2K_2]$;

3) Отрезок MK можно отобразить на отрезок M_2K_2 с помощью вектора $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{KK_2}$.

З а м е ч а н и е. При решении первой из этих задач можно было бы заметить, что $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{NN_2} = \overrightarrow{AC}$.

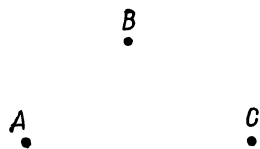


Рис. 159

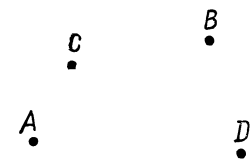


Рис. 160

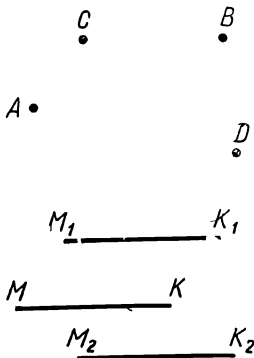


Рис. 161

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Из данной точки можно провести только один луч, сонаправленный с данным.

2. Один из этих лучей можно отобразить на другой с помощью параллельного переноса (вектора) $\overrightarrow{OO_1}$.

З а м е ч а н и е. Говорится об отображении одного луча на другой, а поэтому в качестве ответа может быть и вектор $\overrightarrow{O_1O}$.

3. Каждая прямая отображается на параллельную ей прямую при центральной симметрии и при параллельном переносе.

4. а) Каждый луч отображается на противоположно направленный луч при центральной симметрии.

б) Каждый луч отображается на сонаправленный луч при параллельном переносе.

в) Каждый луч отображается сам на себя при тождественном отображении плоскости.

5. Вектор \vec{a} отобразит луч BC на сонаправленный ему луч с началом в точке $B_1 = \vec{a}(B)$.

Таких лучей можно построить только один, так как из точки B_1 пройдет единственный луч, параллельный лучу BC .

6. Вектор \vec{a} луч AB отображает на сонаправленный ему луч A_1B_1 и луч A_1B_1 на сонаправленный ему луч A_2B_2 (теорема данного пункта), но сонаправленность лучей обладает свойством транзитивности, а поэтому лучи AB и A_2B_2 сонаправлены.

7. Для противоположной направленности лучей не выполняется свойство транзитивности.

71. Сложение векторов (3 часа)

В этом пункте дается определение сложения векторов, рассматриваются два правила их сложения: «правило треугольника» и «правило параллелограмма», кроме того, здесь начинается доказательство теоремы 48 о переместительности (коммутативности) операции сложения для любых двух векторов.

Учащиеся должны знать определение суммы векторов, пользоваться обоими правилами при сложении и знать доказательство теоремы 48.

Первый урок следует начать с разбора самостоятельной работы № 15 (ее первого задания), после чего рассмотреть определение суммы векторов и «правило треугольника» для сложения векторов. В классе следует разобрать задачи 1, 2, 4. Н а д о м можно задать задачи 3, 6, 9.

Второй урок следует начать с повторения материала предыдущего урока и разбора решения домашних задач (обязательно разобрать решение задачи 9). После этого изучается новый материал: доказывается теорема 48 для случая неколлинеарных векторов и как следствие из доказанной теоремы рассматривается «правило

параллелограмма» для сложения векторов. В классе следует рассмотреть задачи 5, 10, на дом можно дать задачи 11 и 13.

Третий урок. После повторения материала всего пункта и разбора домашнего задания можно выполнить самостоятельную работу № 16 из «Дидактических материалов». При этом в зависимости от наличия времени можно разобрать ее на этом же уроке. (Удобно проверить выполнение этой работы, используя переносные доски, на которых чертеж заготовлен заранее.) При составлении домашнего задания можно использовать нерешенные задачи из «Дидактических материалов», а также дополнительные задачи; хорошо успевающим учащимся можно дать задачу 12.

В предыдущем пункте мы советовали провести самостоятельную работу № 15 из «Дидактических материалов», где в первом задании предлагалось последовательно выполнить два заданных параллельных переноса. С рассмотрения в более общем виде такого последовательного выполнения двух параллельных переносов, или векторов, и начинается данный пункт.

Пусть заданы два вектора \vec{a} и \vec{b} . При последовательном отображении точек плоскости эти векторы отображают произвольную точку X на точку Z , при этом $Y = \vec{a}(X)$, а $Z = \vec{b}(Y)$. Возможна, но не обязательно запись: $Z = \vec{b}(\vec{a}(X))$. Эта запись как раз и означает, что точка X отображилась на точку Z в результате последовательного выполнения параллельных переносов \vec{a} и \vec{b} .

Таким образом, мы точку переводим в точку в результате выполнения новой операции — последовательного выполнения двух параллельных переносов; результат этой операции мы и договоримся называть «суммой векторов», т. е.

$$(\vec{a} + \vec{b})(X) = \vec{b}(\vec{a}(X)).$$

Итак, мы определили саму операцию сложения векторов, но необходимо доказать еще, что суммой векторов является вектор.

Доказательство этого факта не обязательно для всех учащихся, оно разбито в учебнике на две части: вначале мы доказываем, что сумма векторов есть перемещение, затем — что она есть параллельный перенос.

Первая часть доказательства опирается только на определение перемещения как отображения, сохраняющего расстояния между соответствующими точками. Во второй части доказательства есть ссылка на транзитивность отношения сонаправленности лучей. Этот материал изучался в п. 31 VI класса. Однако следует понимать, что мы там не доказывали транзитивности отношения сонаправленности лучей, а лишь непосредственно на примерах убеждались в справедливости этого свойства. Здесь также следует на примере убедить учащихся в справедливости такой ссылки. На рисунке 162 мы видим, что в результате последовательного отображения с помощью векторов \vec{a} и \vec{b} луч OA отобразился на луч O_2A_2 ,

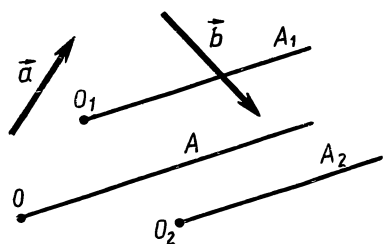


Рис. 162

сонаправленный лучу OA ($[O_1A_1] = \vec{a}$ ($[OA]$)), а $[O_2A_2] = \vec{b}$ ($[O_1A_1]$) и $(\vec{a} + \vec{b})$ ($[OA]$) $= \vec{b}$ (\vec{a} ($[OA]$)) $= [O_2A_2]$.

Итак, мы убедились в том, что точка X перешла в точку Z в результате перемещения, отображающего луч на сонаправленный ему луч; пользуясь теоремой предыдущего пункта, заключаем, что \vec{XZ} — вектор, который мы и

принимаем за сумму векторов \vec{XY} и \vec{YZ} .

В пункте 69 мы уже говорили о возможности отложить вектор от любой точки плоскости. Это и дает нам так называемое «правило треугольника» для сложения векторов. После введения этого правила необходимо поработать с учащимися над его закреплением.

В заключение доказывается первая часть теоремы 48 о свойстве коммутативности сложения векторов. Это доказательство проводится здесь для случая, когда векторы расположены так: $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, т. е. направленные отрезки, изображающие векторы, имеют общую точку O , причем точки A , B и O не лежат на одной прямой. Так расположить векторы мы всегда можем, поэтому случай полностью рассмотрен; случай, когда точки лежат на одной прямой, рассматривается в следующем пункте. Доказанный случай дает нам еще одно правило сложения векторов — «правило параллелограмма».

Приведем задания самостоятельной работы из «Дидактических материалов»:

1) Дан параллелограмм $ABCD$. Найдите сумму векторов: а) \vec{AB} и \vec{AD} ; б) \vec{BA} и \vec{BC} ; в) \vec{AB} и \vec{CD} .

2) Дан параллелограмм $MNPQ$. Найдите сумму векторов: а) \vec{MN} и \vec{MQ} ; б) \vec{MN} и \vec{NP} ; в) \vec{MN} и \vec{QP} .

3) Дан параллелограмм $EFKZ$. Найдите сумму векторов: а) \vec{EF} и \vec{EL} ; б) \vec{EF} и \vec{FK} ; в) \vec{FK} и \vec{EL} .

При выполнении таких задач главное состоит в том, чтобы выбрать правило, по которому следует складывать векторы; так, в задаче 1) сумму векторов \vec{AB} и \vec{AD} следует находить по правилу параллелограмма, а в задаче 2) сумму векторов \vec{MN} и \vec{NP} — по правилу треугольника и т. д. В случае выполнения пунктов в) во всех заданиях учащиеся должны применить соответствующее правило в несколько необычной ситуации; так, в задаче 1) векторы одинаковой длины, но противоположного направления, а в задачах 2) и 3) одной длины и одинакового направления. Эти задания готовят учащихся к более сознательному усвоению дальнейшего материала.

Аналогичную роль преследуют и вторые задания в самостоятельной работе, такие, как: «Для каких двух векторов \vec{a} и \vec{b} выполняется равенство:

- 1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;
- 2) $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a}|$;
- 3) $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{b}|$;
- 4) $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$?

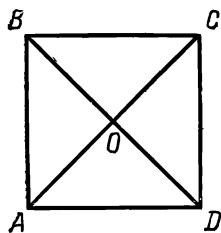


Рис. 163

При решении этих задач учащиеся вырабатывают первые навыки в геометрическом чтении выражений, содержащих векторы. Так, в случае а) векторы \vec{a} и \vec{b} имеют одинаковое направление, а в случае 4) — противоположное направление и т. д. Нельзя никогда забывать о нулевом векторе; в частности, все эти равенства верны, если \vec{a} и \vec{b} — нулевые векторы.

Часто при решении задач приходится выражать один вектор через другой или через другие. Например, при решении таких задач, как:

«Точка O — центр симметрии квадрата $ABCD$. Выразите вектор \vec{BC} через векторы \vec{AO} и \vec{BO} » (рис. 163).

Вектор $\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC}$ (по правилу треугольника), но $\vec{OC} = \vec{AO}$ по определению вектора, а значит, $\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{AO}$.

При изучении материала данного пункта и при его повторении удобно пользоваться таблицей (см., например, табл. 9).

Задачи к этому пункту можно разделить на две основные группы: задачи, решаемые с применением «правила треугольника» (это, например, задачи 2, 6, 9 и 11), и задачи, решаемые (проще) при помощи правила параллелограмма (такие, как 5, 10). Задачи 7 и 8 — физического содержания и требуют для своего решения беседы о сложении скоростей; если учитель найдет время, то такая беседа будет очень полезна. Учитель в этом случае должен обязательно познакомиться с материалом пункта 76 «Векторные величины в физике».

Дополнительные задачи

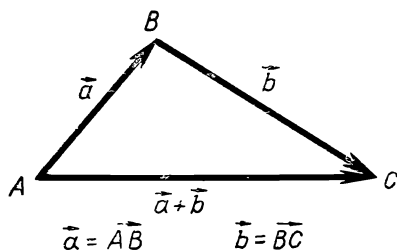
1. Найдите сумму векторов \vec{a} и \vec{b} , изображенных на чертеже (рис. 164).

2. В $\triangle ABC$ найдите суммы двух векторов, определяемых парами его вершин. Найдите сумму трех векторов, определяемых парами его вершин.

3. Может ли длина суммы двух векторов одинаковой длины быть: а) меньше длины каждого вектора; б) равна длине каждого вектора; в) больше длины каждого вектора; г) равна сумме длин векторов? Ответ обосновать.

Сложение векторов

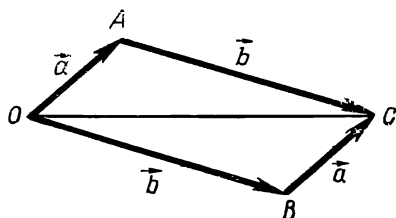
«Правило треугольника»



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Переместительный закон сложения векторов



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$$

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

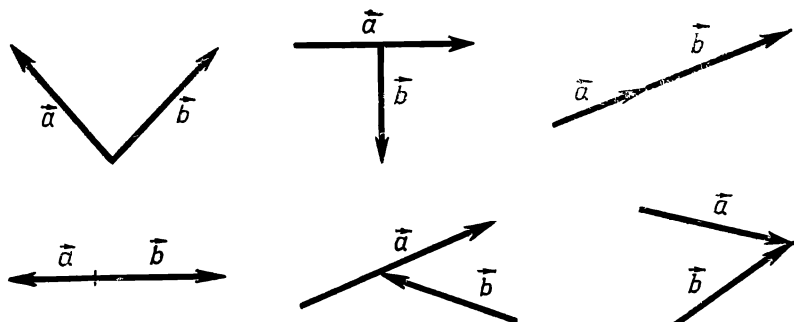


Рис. 164

4. Какой вектор, определяемый парой вершин $\triangle ABC$, в сумме с вектором \overrightarrow{AB} дает вектор \overrightarrow{CB} ?

5. Каковы будут координаты точки $X(x; y)$, если систему координат отобразить на вектор $\vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{a}(0; 1) = (0; 2)$, а $\vec{b}(-2; 1) = (1; 1)$?

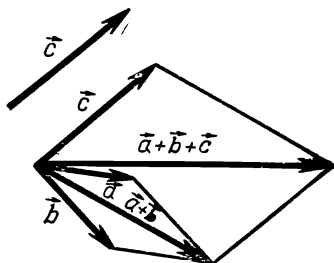


Рис. 165

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. При рассмотрении всех случаев можно пользоваться правилом треугольника для сложения векторов:

а) Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, а затем от точки B вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$; ясно, что точки A и C совпадают, а поэтому вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, т. е. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Аналогично ищем $\vec{b} + \vec{a}$.

б) В этом случае мы получаем вектор того же направления, что и векторы \vec{a} и \vec{b} , имеющий вдвое бóльшую длину.

2. Эту задачу можно решать, пользуясь правилом треугольника, но для нахождения суммы векторов \vec{a} и \vec{b} удобнее воспользоваться правилом параллелограмма. В этом случае решение, например, будет выглядеть так (рис. 165).

3. Вначале изобразим в системе координат указанные точки.

Суммой векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BD} является вектор \overrightarrow{AD} . Суммой векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} является вектор \overrightarrow{AC} (рис. 166).

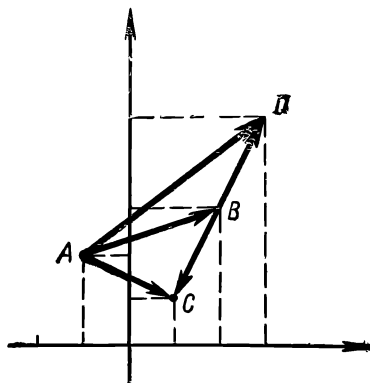


Рис. 166

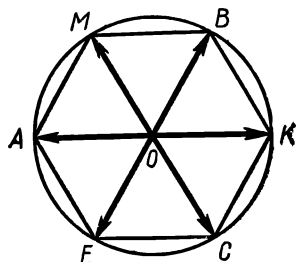


Рис. 167

4. $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{CO}$ (рис. 167).

$\vec{y} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AO}$, $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

$\vec{z} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BO}$.

5. Нам нужно найти сумму векторов $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Сначала сложим векторы \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{OB} по правилу параллелограмма, а затем по

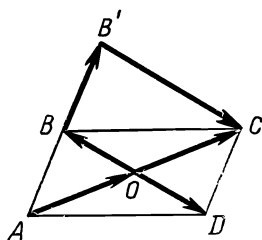


Рис. 168

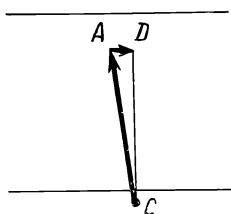


Рис. 169

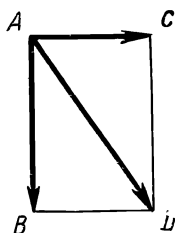


Рис. 170

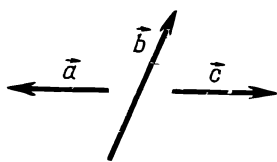


Рис. 171

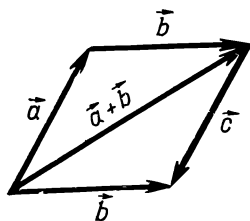


Рис. 172

этому же правилу к полученной сумме прибавим вектор \vec{OC} .

6. 1) $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OC} + \vec{OB}$, но $\vec{OC} = \vec{AO}$, а тогда $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$.

2) $\vec{OD} + \vec{AO} = \vec{AO} + \vec{OD} = \vec{AD}$.

3) $\vec{AC} + \vec{DB} = \vec{AC} + \vec{CB'}$, так как $\vec{DB} = \vec{CB'}$ по построению, а тогда $\vec{AC} + \vec{DB} = \vec{AB'} = 2\vec{AB}$ (рис. 168).

7. На рисунке 169 вектор \vec{AD} изображает скорость течения реки. Ближайшую точку противоположного берега определяет направление луча CD ($[CD] \perp [AD]$). Построив прямоугольный треугольник ACD ($|\vec{AD}| = 5$, $|\vec{AC}| = 40$), получим вектор \vec{CA} , в направлении которого следует направить катер.

8. На рисунке 170 в масштабе вектор \vec{AB} изображает скорость, с которой спускается груз, вектор \vec{AC} — скорость ветра. Вектор \vec{AD} изображает истинное направление движения спускаемого груза. $\angle BAD$ является искомым углом ($|\vec{AB}| = 3$; $|\vec{AC}| = 2$).

9. Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} могут располагаться, например, так (рис. 171):

1) векторы \vec{a} и \vec{c} имеют одинаковую длину, но противоположные направления; тогда $\vec{a} + \vec{c} = \vec{0}$, а $\vec{0} + \vec{b} = \vec{b}$;

2) возможен такой случай (рис. 172):

Пользуясь правилом треугольника для сложения векторов, получаем, что

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{b}.$$

10. Находим сумму векторов \vec{a} и \vec{b} , а затем к ней прибавляем вектор \vec{c} ;

$$\vec{y} = \vec{a} + \vec{b} \quad \vec{y} + \vec{c} = \vec{x} \quad (\text{рис. 173}).$$

Итак, $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

11. Если при сложении нескольких векторов начало первого вектора совпало с концом последнего вектора, то сумма

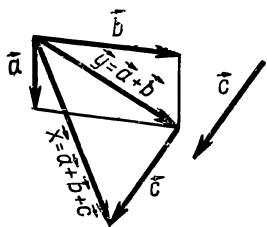


Рис. 173

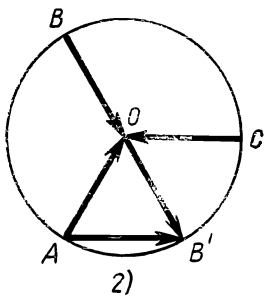
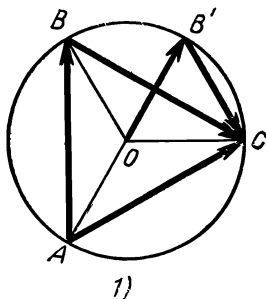


Рис. 174

векторов есть вектор, определяемый парой совпавших точек, т. е. нулевой вектор.

12. а) Найдем сумму векторов $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{OB}$ на рисунке 174, 1. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Отложим вектор \vec{OB} от точки C, $\vec{CB'} = \vec{OB}$, тогда вектор $\vec{AC} + \vec{CB'} = \vec{AB'}$. Итак, окончательно $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{OB} = \vec{AB'} = 2\vec{AO}$.

б) $\vec{AO} + \vec{BO} = \vec{AB'}$, так как $\vec{OB'} = \vec{BO}$; но $\vec{AB'} = \vec{OC}$, так как $[AB'] \parallel [OC]$ и $|AB'| = |OC|$, а тогда $\vec{AB'} + \vec{CO} = \vec{0}$ (рис. 174, 2).

Итак, $\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} = \vec{0}$.

в) $\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{OC} = 2\vec{OC}$ (см. предыдущий пункт данной задачи).

13. Ясно, что $\vec{BD} = \vec{CE}$ (рис. 175), а поэтому $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AC} + \vec{CE} = \vec{AE}$, но $\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{BC}$, так как $\vec{BC} = \vec{DE}$, т. е. $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$.

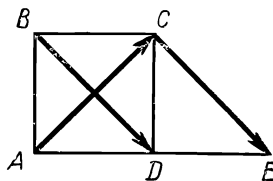


Рис. 175

Докажем теперь, что $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{CE}$.

Дело в том, что $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$, а $\vec{AB} + \vec{CE} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$. Это и доказывает требуемое.

72. Коллинеарные векторы (1 час)

Учащиеся должны уметь давать определение коллинеарным векторам, понимать, в каком случае направленные отрезки прямой задают один и тот же вектор, и доказывать теорему 49 для случая коллинеарных векторов.

В классе следует решить задачи 1, 3, 5, на дом можно дать задачи 2, 4 и 6.

Прежде всего следует обратить внимание на определение коллинеарных векторов. В учебнике говорится, что это не нулевые век-

торы, направления которых совпадают или противоположны. Отсюда следует, что пары точек, задающих коллинеарные векторы, лежат на параллельных прямых, т. е. отрезки, изображающие эти векторы, параллельны. По определению параллельности совпадающие прямые считаются параллельными, а поэтому все коллинеарные векторы можно изобразить на одной прямой.

Следует обратить внимание на вводимые в данном пункте обозначения. Через $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$ мы обозначаем вектор единичной длины, при этом длину этого вектора обозначаем просто e . Направление луча OE принимается за положительное, и в связи с этим каждая точка прямой получает свою координату x_A (координата точки A на прямой). После всего этого мы выясняем два вопроса: 1) Как записать расстояние между любыми двумя точками прямой A и B ?

2) При каком условии два направленных отрезка AB и CD прямой OE являются изображениями одного и того же вектора?

В первом случае мы получаем:

$$|AB| = |x_B - x_A|e.$$

Во втором случае получаем равенство:

$$x_B - x_A = x_D - x_C.$$

Равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, записанное в координатах, следует пояснить на конкретных примерах. Например, пусть $x_A = -3$, $x_B = -2$, $x_C = 2$, $x_D = 3$, тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ равносильно равенству $x_B - x_A = x_D - x_C$. Проверим его: $-2 - (-3) = 3 - 2$.

При доказательстве коммутативности сложения для коллинеарных векторов следует правильно использовать рисунок учебника. И в случае 1) и в случае 2) исходная — точка A . В первом случае мы сначала откладываем вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, а затем вектор $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и во втором случае сначала откладываем вектор $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$, а затем вектор $\vec{a} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$.

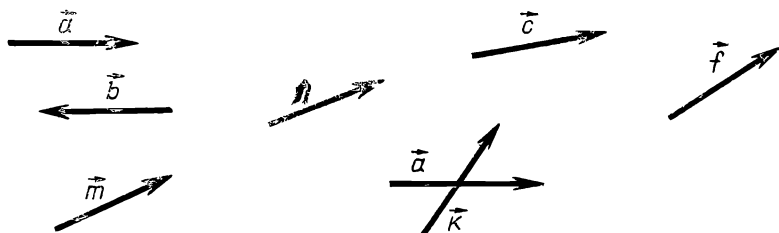
Нам надо установить совмещение точек C и E , а это следует из координатной записи наших условий $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

При изучении этого пункта можно использовать таблицу (см. табл. 10), где дается полная сводка основных положений этого пункта.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Пар точек, задающих такие векторы, можно изобразить сколько угодно. Следует указать хотя бы по одной паре. Если длину \vec{e} мы принимаем за единицу длины, то на прямой мы получим следующую картину (см. рис. 129 учебника), а поэтому искомые векторы задаются следующими парами точек: а) (L, B) ; б) (A, C) ; в) (O, K) ; г) (E, L) ; д) (D, L) .

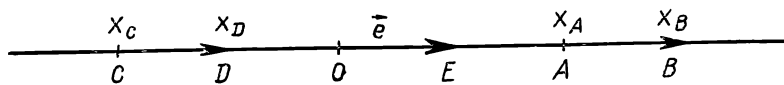
Коллинеарные векторы



\vec{a} и \vec{b}
 \vec{m} и \vec{n} } Коллинеарные
 векторы

\vec{a} и \vec{n} — неколлинеарные
 векторы

Координаты на прямой



1) $|\vec{AB}| = |x_A - x_B| e$
 $|\vec{CD}| = |x_C - x_D| e$

$e = |\vec{e}|$

2) $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$, если
 $x_B - x_A = x_D - x_C$

З а м е ч а н и е. Векторы с координатами x_1 и x_2 — направленные отрезки прямой, у которых один конец имеет координату x_1 , а другой — x_2 . При этом модуль разности координат задает длину вектора.

2. Это векторы, полученные в результате сложения трех, восьми, четырех и семи единичных векторов.

3. а) $\vec{a} = \vec{KD}$; б) $\vec{b} = \vec{KM}$; в) $\vec{c} = \vec{OD}$; г) $\vec{d} = \vec{0}$; д) $\vec{f} = \vec{RE}$.

З а м е ч а н и е. В этой задаче ответ может быть записан различными способами.

4. а) \vec{KL} ; б) \vec{AO} ; в) \vec{BK} ; г) \vec{KD} ; обратите внимание на замечание к предыдущей задаче.

5. а) $\vec{ON} + \vec{BD} = \vec{DB}$; б) $\vec{BD} + \vec{DO} = \vec{DA}$; в) $\vec{BD} + \vec{EB} = \vec{LA}$; г) $\vec{BD} + \vec{EL} = \vec{LM}$; д) $\vec{BD} + \vec{DC} = \vec{NM}$.

6. 1) Равенство $|x_A - x_C| = |x_K - x_M|$ будет выполняться.
 2) Равенство $|x_B - x_N| = |x_D - x_L|$ также будет выполняться.

73. Сочетательность сложения векторов. Противоположный вектор. Вычитание векторов (3 часа)

В этом пункте доказываемся сочетательный закон сложения векторов, вводится понятие противоположного вектора, закон поглощения нуля, а также рассматривается разность векторов.

Учащиеся должны уметь доказывать сочетательный закон сложения векторов, определять противоположный вектор. Кроме этого, они должны уметь объяснить справедливость закона поглощения нуля, уметь определять разность векторов.

Первый урок. Урок начинается с повторения: определения сложения векторов, правил сложения векторов, переместительности сложения векторов. После этого доказываемся сочетательный закон сложения векторов и закрепляется при решении задач. На уроке следует решить задачу 1, а также задачи, предложенные в данном пособии. На дом можно дать задачи на сложение векторов и задачи из раздела «Дополнительные задачи». Задать повторить определение перемещения и обратимости перемещения.

Второй урок. После повторения понятия перемещения и обратимости перемещения изучается понятие противоположного вектора, доказываемся закон поглощения нуля и вводится понятие разности векторов.

В классе следует решить задачи 2, 3, 4 (не все случаи). На дом дать задачи 3, 4 (остальные случаи), задачи 5, 6. Кроме этих задач, можно пользоваться задачами из раздела «Дополнительные задачи».

Третий урок. Повторяется пройденный материал и проводится самостоятельная работа.

На дом следует дать задачи 7, 8.

Пункт начинается с доказательства сочетательности сложения векторов. Доказательство проведено для векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, но ведь в пункте 69 мы показали, что любую тройку векторов можно изобразить таким образом. Следовательно, мы доказали сочетательный закон для любых трех векторов. Мы уже располагаем двумя законами сложения векторов: коммутативным и ассоциативным. Эти законы сложения удобно использовать при сложении трех и более векторов. Они позволяют рациональным способом выбирать пары нужных нам векторов. Например:

1. Даны три вектора (см. рис. 171). Нам нужно найти их сумму. Мы видим, что векторы \vec{a} и \vec{c} имеют одинаковую длину, но противоположно направлены, ясно, что их сумма равна нулевому вектору, а тогда сумма трех векторов $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{b}$. Мы проделали следующие операции:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{b} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b}.$$

Замечание. Эта запись не обязательна, в пункте 75 мы об этом будем говорить особо.

2. Нам надо найти сумму векторов $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB}$ (рис. 176). Опять было бы нерационально складывать все эти векторы по порядку, так как мы видим, что $\vec{OB} + \vec{OA} = \vec{OC}$, а тогда $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OC} = 2\vec{OC} = \vec{OC}'$.

В подпункте 2 этого пункта вводится понятие противоположного вектора.

В VI классе мы обращали внимание учащихся на то, что перемещения, изучаемые там, обратимы. А что же будет, если выполнить последовательно перемещение, а затем ему обратное?

Выполним, например, параллельный перенос квадрата $ABCD$ на отрезок AB в направлении луча AB , а затем обратное перемещение.

Мы замечаем, что фигура отобразилась сама на себя (возвратилась в свое первоначальное положение), т. е., как мы называем, «произошло тождественное отображение».

Вектор есть параллельный перенос, а перенос, обратный данному, и есть противоположный вектор. Результат отображения с помощью вектора, а затем ему противоположного вектора есть нулевой вектор, т. е. тождественное отображение.

При рассмотрении третьего раздела данного пункта следует вспомнить запись нулевого вектора в таком виде: $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB} = \vec{XX}$ и т. д., а тогда закон поглощения нуля становится понятным.

Наконец, в подпункте 4 вводится понятие разности векторов. Здесь используются все результаты, полученные в этом пункте, а также необходимые навыки в сложении векторов.

Мы рассматриваем вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Этот вектор обладает свойством

$$\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}.$$

При доказательстве справедливости этого равенства мы пользуемся переместительным и сочетательным законами сложений, законом поглощения нулевого вектора.

Вектор \vec{c} , который в сумме с вектором \vec{b} дает нам вектор \vec{a} , и называют разностью векторов \vec{a} и \vec{b} , $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

При построении разности двух векторов можно всегда пользоваться равенством $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Однако в задачах часто приходится вычитать векторы, отложенные от одной точки. В этом случае в учебнике дается удобное правило.

К материалу этого пункта в «Дидактических материалах» приведена самостоятельная работа. В конце третьего урока

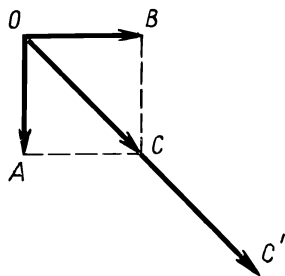


Рис. 176

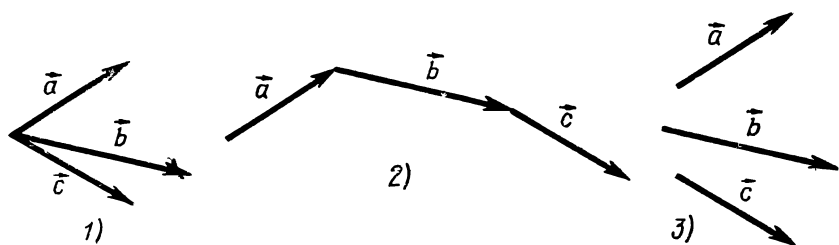


Рис. 177

целесообразно провести эту работу; если времени окажется недостаточно, то задачи этой самостоятельной работы можно использовать при изучении материала данного пункта, при опросе, для домашних заданий.

При решении первых задач самостоятельной работы к этому пункту:

«Задайте три неколлинеарных вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , постройте вектор: 1) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; 2) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; 3) $\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$; 4) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ » — все зависит от того, как задать эти векторы. Здесь учитель может подсказать учащимся, как это следует сделать. Векторы не коллинеарные, и поэтому отрезки, их изображающие, не параллельны. Возможны, например, такие ситуации (рис. 177).

Все эти случаи можно свести один к другому (в смысле общей картины рисунка). Пусть мы все векторы отложили от одной точки и выполняем задание 2, т. е. ищем $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ (рис. 178). Найдем сначала $\vec{a} + \vec{c}$ (по сочетательному закону $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c}) - \vec{b}$), по ходу преобразований мы воспользовались также коммутативностью сложения, когда переходили от $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ к $\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$.

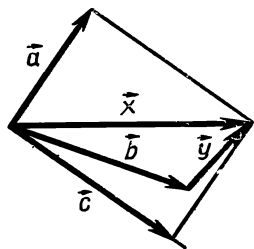


Рис. 178

Итак, $\vec{x} = \vec{a} + \vec{c}$, а теперь найдем $\vec{x} - \vec{b}$, это будет вектор \vec{y} : $\vec{y} = \vec{x} - \vec{b}$. Итак, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{y}$.

Решение выполняется на чертеже и сопровождается краткой записью:

$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$ (коммутативный закон).

$\vec{a} + \vec{c} - \vec{b} = (\vec{a} + \vec{c}) - \vec{b}$ (сочетательный закон).

$\vec{x} - \vec{b} = \vec{y}$ (разность векторов).

Итак, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{y}$.

Во вторых заданиях этой самостоятельной работы даются задачи на использование

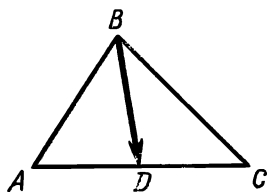


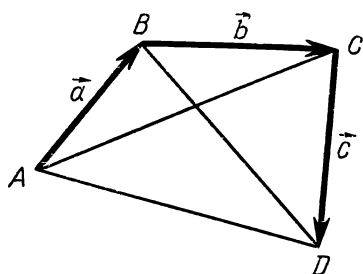
Рис. 179

правила нахождения разности векторов, например: «В треугольнике ABC проведена медиана BD . Выразите вектор \vec{BD} через векторы \vec{BC} и \vec{AD} » (рис. 179). Из чертежа следует, что $\vec{BD} = \vec{CD} - \vec{CB}$, но $\vec{CD} = \vec{DA}$, а $\vec{DA} = -\vec{AD}$ и $-\vec{CB} = \vec{BC}$. Поэтому $\vec{BD} = -\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{BC} - \vec{AD}$.

При изучении этого пункта можно пользоваться таблицей 11. Материал, представленный в данной таблице, полностью охватывает основное содержание данного пункта.

Таблица 11

Сочетательный закон сложения векторов



$$\vec{a} = \vec{AB}$$

$$\vec{b} = \vec{BC}$$

$$\vec{c} = \vec{CD}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$$

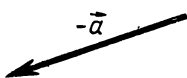
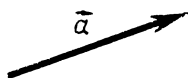
$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{BD}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$$

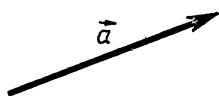
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Противоположный вектор



$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

Закон «поглощения нулевого вектора»



$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{AB} + \vec{AA} = \vec{AB}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Задачи к пункту закрепляют рассмотренные законы и определения. Так, задача 1 закрепляет усвоение сочетательного закона, задачи 2, 6 — понятие противоположного вектора; задачи 3, 4, 5, 7, 8 — на использование разности векторов.

Дополнительные задачи

1. Начертите три произвольных вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} и проверьте на них справедливость сочетательного закона для сложения.

2. Справедливо ли равенство $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$? (Да, справедливо, так как $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + (\vec{c} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$. Мы воспользовались как сочетательным, так и переместительным законом сложения.)

3. Найдите разность векторов \vec{a} и \vec{b} (рис. 180).

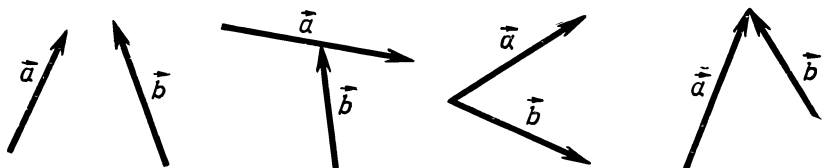


Рис. 180

Ответы и указания

1. Надо доказать, что $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Так как $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}$, а $\vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$, то $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{OC}$.

С другой стороны, $\vec{b} + \vec{c} = \vec{AC}$, а $\vec{a} + \vec{AC} = \vec{OC}$. Мы видим, что $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

2. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, но $\vec{AC} + \vec{CA} = \vec{0}$, значит, $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$.

3. Даны векторы \vec{a} и \vec{b} (рис. 181).

а) Можно сложить векторы \vec{a} и $-\vec{b}$ (рис. 182). Можно найти разность $\vec{a} - \vec{b}$, как показано на рисунке 183.

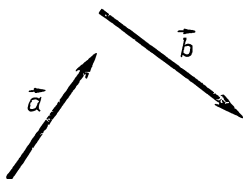


Рис. 181

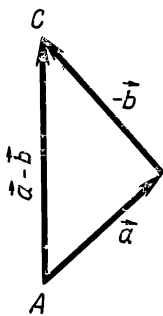


Рис. 182

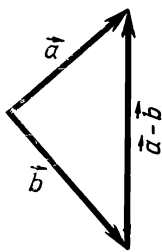


Рис. 183

б) Решение аналогично решению а).

в) Надо сложить два вектора: $-\vec{a}$ и $-\vec{b}$.

4. Указанные векторы можно задать несколькими способами. Это могут быть:

1) одинаковые векторы;

2) противоположные векторы;

3) векторы, имеющие разные длины и одинаковые направления;

4) векторы, имеющие разные длины и разные направления.

З а м е ч а н и е. Целесообразно нескольким учащимся дать разные случаи и показать всему классу, что в разных случаях получаются и разные ответы.

5. Так как $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$ независимо от выбора точки O , то и $|\vec{AB}| = |\vec{OB} - \vec{OA}|$.

6. Так как $\vec{AB} = \vec{CD}$, то $\vec{AC} = \vec{BD}$, но $\vec{BD} = -\vec{DB}$.

7. $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$; $\vec{AD} - \vec{AC} = \vec{CD}$; $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$.

8. $\vec{CA} = \vec{BA} - \vec{BC} = -(\vec{AB} + \vec{BC})$; $\vec{AD} = \vec{BD} - \vec{BA} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$.

Векторы \vec{DB} , \vec{BE} , \vec{EC} выражаются через векторы \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} , \vec{DE} аналогичными способами.

74. Умножение вектора на число (2 часа)

Учащиеся должны знать определение умножения вектора на число, понимать, при каких условиях $x\vec{a} = \vec{0}$, уметь геометрически изображать числа на прямой.

Первый урок. На этом уроке вводится определение произведения вектора на число и условие равенства нулевому вектору произведения вектора на число. В классе можно решить задачи 3,4—6,5 (не обязательно все случаи). На дом можно дать задачи 2, 4, 6 (оставшиеся случаи).

На втором уроке разбирается материал, связанный с введением координат точки на прямой. В классе решаются задачи 1 (не все случаи), 7, 10 (не все случаи).

При наличии времени проводится самостоятельная работа из «Дидактических материалов». На дом можно дать задачи 1 и 7 (оставшиеся случаи) и задачи 8 и 9.

Начало пункта подводит учащихся к определению умножения вектора на число. Это осуществляется при помощи сложения одинаковых векторов, а также рассмотрения противоположного вектора. Здесь же обращается внимание учащихся на направление получаемого вектора. После такой подготовки вводится определение умножения вектора на число.

После этого на базе равенства $|x\vec{a}| = |x| |\vec{a}|$ выводятся два случая равенства произведения вектора на число нулевому вектору — это

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0} \text{ и } x\vec{0} = \vec{0}.$$

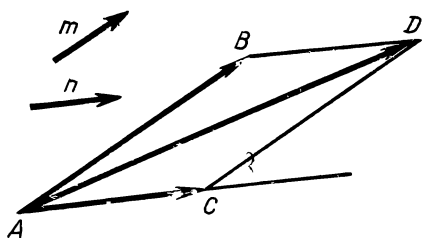


Рис. 185

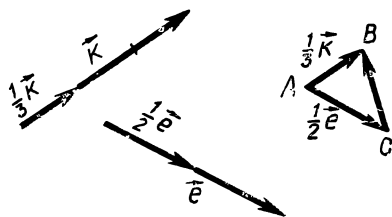


Рис. 186

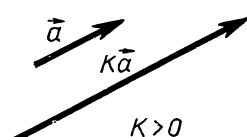
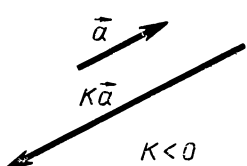
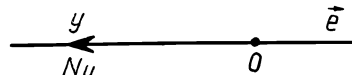
При работе с наиболее способными учащимися могут быть разобраны и более трудные задачи, такие, как:

« В треугольнике ABC точки M и K — середины сторон AB и BC соответственно. Докажите, что $\vec{MK} = \frac{1}{2}(\vec{BC} - \vec{BA})$ ». «В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны AD . Выразите вектор \vec{KC} через векторы \vec{AB} и \vec{AD} ». Эти задачи рассмотрены в дополнительных самостоятельных работах, помещенных в «Дидактических материалах».

Изложение материала данного пункта удобно сопровождать таблицей 12.

Задачи к этому пункту можно расчлениить на задачи: 1) с коллинеарными векторами (это задачи 1 и 8) и 2) с неколлинеарными век-

Таблица 12

Умножение вектора на число		
 <p>$k > 0$ $k\vec{a} = k \vec{a}$</p>	<p>$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$</p>	 <p>$k < 0$ $k\vec{a} = k \vec{a}$</p>
Координата точки на прямой		
 <p>$\vec{OM}_x = x\vec{e}$ $\vec{ON}_y = y\vec{e}$</p>		<p>$\vec{OM}_x = x$ $\vec{ON}_y = y$</p>

торами. Вначале следует решать как раз последние, так как теоретический материал, относящийся к коллинеарным векторам, рассматривается на втором уроке. Все задачи закрепляют определение произведения вектора на число.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Пользуясь определением умножения вектора на число, находим искомые векторы. Необходимые измерения и построения производятся с помощью линейки и циркуля.

3. а) Если $k > 0$; б) если $k < 0$; в) при $k = 1$; если же $\vec{a} = \vec{0}$, то k — любое число.

4. а) $|\vec{nc}| < |\vec{c}|$ при $|n| < 1$;

б) $|\vec{nc}| > |\vec{c}|$ при $|n| > 1$;

в) $|\vec{nc}| = |\vec{c}|$ при $|n| = 1$.

5. Построение выполняется аналогично построению в задаче 1. Деление отрезка пополам и на три части можно осуществить с помощью измерительной линейки и циркуля.

Операции над векторами здесь следует производить в следующем порядке:

а) умножаем вектор \vec{b} на $\frac{1}{2}$ и ищем разность $\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}$;

б) ищем разность $\vec{a} - \vec{b}$, а затем полученный вектор умножаем на $\frac{1}{3}$;

в) умножаем вектор \vec{a} на 2, вектор \vec{b} на 3 и ищем разность получившихся векторов.

6. а) $k > -1$; б) $k < -1$; в) $k = -1$; если же $\vec{c} = \vec{0}$, то k — любое число; г) $k = 0$; если $\vec{c} = \vec{0}$, то k — любое число.

7. Решение этой задачи зависит от расположения данных векторов \vec{a} и \vec{b} . О возможных случаях расположения этих векторов смотрите в задаче 4 к п. 73.

$$8. \vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}; \quad \vec{AK} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}; \quad \vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}.$$

9. Можно не задавать вектор $\vec{b} = \vec{AC}$, так как $\vec{c} + \vec{a} = \vec{b}$.

$$10. \vec{AR} = \vec{OB} - \vec{OA} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a};$$

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a};$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b};$$

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}.$$

Мы получили три различных выражения, так как $\vec{BC} = \vec{AD}$.

75. Основные законы векторной алгебры (3 часа)

Этот пункт посвящен перечислению ранее доказанных и доказательству новых законов действий с векторами (сложения векторов и умножения вектора на число). При изучении материала этого пункта учащиеся должны уметь формулировать эти законы, доказывать некоторые из них, в случае второго распределительного закона доказательство рассматривается только для натуральных x . Кроме этого, учащиеся должны уметь правильно ссылаться на соответствующие законы при решении задач, где приходится производить преобразования выражений с векторами.

Первый урок. Этот урок следует посвятить повторению действий с векторами (сложению и умножению на число), выяснению уже известных законов действий с векторами и формулировке всех семи указанных в пункте законов. В классе, кроме задач, повторяющих пройденный материал, следует рассмотреть задачи 1 и 2 (не все пункты). На дом можно задать оставшиеся задачи из этих номеров и им аналогичные, кроме этого, к следующему уроку учащиеся должны вспомнить доказательства уже встречавшихся нам законов (все три закона сложения векторов).

Второй урок. Урок начинается с доказательства законов, известных учащимся, после чего рассматривается доказательство группы законов, связанных с умножением вектора на число. В классе следует решить задачи 5, 6, 7. На дом следует задать задачи 4, 8.

Третий урок. Этот урок следует посвятить подготовке к контрольной работе и закреплению пройденного материала. В конце урока можно по усмотрению учителя провести самостоятельную работу № 19 из «Дидактических материалов».

В начале пункта перечисляются законы сложения векторов. Доказательству первых двух законов были посвящены целые пункты в данной главе. Целесообразно к этому уроку предложить учащимся повторить эти пункты. Закон поглощения нулевого вектора рассматривался раньше, он следует непосредственно из определения суммы двух векторов.

В этом пункте впервые перечисляются и доказываются законы умножения вектора на число (их четыре). В предыдущем пункте разбирался седьмой закон. Остальные законы подробно доказываются в тексте данного пункта. При доказательстве второго распределительного закона от учащихся в обязательном порядке требуется знание доказательства лишь для случая натурального x .

Разбирая самостоятельную работу к этому пункту, следует обратить внимание при выполнении первых и вторых заданий на правильность ссылок на соответствующие законы.

Рассмотрим, например, следующие задачи.

1. Упростите выражение $3(\vec{a} + \vec{b}) - 4(\vec{a} - \vec{b})$.
2. $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$. Выразите через векторы \vec{a} и \vec{b} вектор $3\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$.

Р е ш е н и е.

1. $3(\vec{a} + \vec{b}) - 4(\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b} + (-4)\vec{a} + (-4)(-1)\vec{b} =$
 (второй распределительный закон) $= 3\vec{a} + 3\vec{b} + (-4\vec{a}) + ((-4)(-1))\vec{b} = 3\vec{a} + 3\vec{b} + (-4)\vec{a} + 4\vec{b} =$ (сочетательный закон для умножения вектора на число) $= 3\vec{a} + (-4)\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{b} =$ (переместительный закон) $= (3 + (-4))\vec{a} + (3 + 4)\vec{b} = -\vec{a} + 7\vec{b} = 7\vec{b} - \vec{a}$
 (переместительный закон, первый распределительный закон).

З а м е ч а н и е. Несомненно, можно предложить и другой вариант записи, однако следует требовать понимания каждого преобразования.

2. $3\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} = 3(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = 3(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{a} + (-1)\vec{b}) =$ (второй распределительный закон) $= 3\vec{a} + 3(2\vec{b}) + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}((-1)\vec{b}) = 3\vec{a} + (3 \cdot 2)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + (\frac{1}{2}(-1))\vec{b} =$ (сочетательный закон умножения вектора на число) $= 3\vec{a} + 6\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + (-\frac{1}{2})\vec{b} = 3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b} + (-\frac{1}{2})\vec{b} =$ (переместительный закон) $= (3 + \frac{1}{2})\vec{a} + (6 + (-\frac{1}{2}))\vec{b} = 3\frac{1}{2}\vec{a} + 5\frac{1}{2}\vec{b} =$ (первый распределительный закон) $= 3\frac{1}{2}\vec{a} + 5\frac{1}{2}\vec{b}.$

Задачи к этому пункту в основном отрабатывают применение законов векторной алгебры при преобразованиях с векторами.

Задача 1 устная. Задачи 2, 4, 5, 6, 7 закрепляют применение законов. В классе целесообразно разобрать задачи 2 и 5.

Задачи 7 и 8 — повышенной трудности.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. 1) а) Закон поглощения нулевого вектора;
 б) переместительный закон сложения;
 в) сочетательный закон сложения.
- 2) а) Закон поглощения нуля и нулевого вектора;
 б) сочетательный закон;
 в) первый распределительный закон;
 г) второй распределительный закон.

$$\begin{aligned} 2. \quad \vec{OA} &= 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \\ \vec{CB} &= \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \\ \vec{OA} + \vec{OB} &= 6\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 \\ \vec{OB} + \vec{OC} &= 7\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 \\ \vec{OC} + \vec{OA} &= 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad 1) \quad \vec{CD} &= 2\vec{b} \\ \vec{OD} &= 3\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} \\ \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = 3\vec{b} - 3\vec{a} \\ \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = 3\vec{b} - \vec{a} \\ \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = 3\vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

$$4. \quad 3\vec{a} = 9\vec{e}, \quad 5\vec{b} = (-10)\vec{e}, \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{e}, \quad 2\vec{a} + 3\vec{b} = 6\vec{e} + (-6)\vec{e} = 0.$$

$$5. \quad x\vec{a} = \vec{0}, \text{ если } x = 0 \text{ или } \vec{a} = \vec{0}.$$

6. Сложим векторы $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (x_1 + x_2 + x_3)\vec{a} + (y_1 + y_2 + y_3)\vec{b}$ (воспользовались первым распределительным законом).

Для того чтобы $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, необходимо и достаточно, чтобы $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, так как векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарные.

7. Найдем сумму векторов $\vec{a} + (-1)\vec{a}$. Пользуясь первым распределительным законом, получаем $\vec{a} + (-1)\vec{a} = (1 + (-1))\vec{a} = 0 \cdot \vec{a}$, но $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ согласно закону поглощения нуля и нулевого вектора.

8. Подставим вместо \vec{c} в равенство $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ выражение $c = a + (-1)b$. Докажем, что $\vec{b} + (\vec{a} + (-1)\vec{b}) = \vec{a}$.

Воспользуемся сочетательным законом сложения $\vec{b} + (\vec{a} + (-1)\vec{b}) = (\vec{b} + (-1)\vec{b}) + \vec{a} = (1 + (-1))\vec{b} + \vec{a} = 0 \cdot \vec{b} + \vec{a} = \vec{a}$ (мы воспользовались еще первым распределительным законом и законом поглощения нуля и нулевого вектора).

$$9. \quad k(\vec{a} - \vec{b}) = k(\vec{a} + (-1)\vec{b}) = k\vec{a} + k((-1)\vec{b}) = k\vec{a} + + (k(-1))\vec{b} = k\vec{a} + (-k)\vec{b} = k\vec{a} - k\vec{b}.$$

О т в е т ы и у к а з а н и я

(для задач на повторение к главе V).

$$1. \quad \vec{0}.$$

$$2. \quad 2) \text{ У к а з а н и е. Вначале упростите заданное выражение: } \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}) - \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{z}) + \frac{1}{2}(\vec{y} + \vec{z}) - \vec{x} = -\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}.$$

$$3. \quad \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}, \text{ т. е. } \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

4. От некоторой точки A отложим векторы $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$. Неравенства $|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ следуют из основных свойств расстояний.

5. П р и м е ч а н и е. Задача не обязательная. Ниже приведен один из приемов преобразований:

$$3\vec{x} + 2\vec{a} = 5\vec{a}; \quad 3\vec{x} + 2\vec{a} - 5\vec{a} = 5\vec{a} - 5\vec{a};$$

$$\begin{aligned} \vec{3x} - \vec{3a} &= \vec{0}; & 3(\vec{x} - \vec{a}) &= 0; \\ \vec{x} - \vec{a} &= \vec{0}; & \vec{x} &= \vec{a}. \end{aligned}$$

6. Ниже приведено аналитическое доказательство:

$\vec{MN} + \vec{MX} + \vec{XN} = \vec{MN} + (\vec{MX} + \vec{XN}) = \vec{MN} + \vec{MN} = 2\vec{MN}$.
Следовательно, заданная сумма действительно не зависит от положения точки X .

Этот же результат может быть получен из наглядных соображений.

7. В соответствии с «правилом параллелограмма» $\vec{XA} + \vec{XB} = \vec{XC} = 2\vec{XM}$. Таким образом, при заданных точках X и M сумма векторов \vec{XA} и \vec{XB} ($|AM| = |MB|$) не зависит от длины и положения отрезка AB .

8. См. решение задачи 7.

9. Ниже приводится один из вариантов решения: $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AD} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AD}$;

$$\vec{AD} = \vec{AO} + \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{AO} + \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = -\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{CB};$$

$$\vec{CB} = \vec{CO} + \vec{OB} = -\vec{c} + \vec{b}.$$

Окончательно получаем:

$$\vec{OE} = \vec{a} + \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}(-\vec{c} + \vec{b})) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Этот же результат мы получим для любой медианы треугольника ABC , следовательно, точка E — общая точка трех медиан.

10. Задача не обязательная.

$$\vec{OM} = \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB};$$

$$\frac{2}{3}\vec{OM} - \frac{2}{3}\vec{OA} = \frac{1}{3}\vec{OB} - \frac{1}{3}\vec{OM};$$

$$\frac{2}{3}\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{MB};$$

$$2\vec{AM} = \vec{MB},$$

т. е. при любом положении точки O точка M лежит на отрезке AB и делит его в отношении $1 : 2$, считая от точки A .

11. 1) Данные точки не лежат на одной прямой;

а) направление вектора $\vec{AB} + \vec{A_1B_1}$ параллельно оси l ;

б) направление вектора $\vec{AB} - \vec{A_1B_1}$ (при $|\vec{AA_1}| \neq |\vec{BB_1}|$) перпендикулярно оси l ;

при $|\vec{AA_1}| = |\vec{BB_1}|$ вопрос задачи теряет смысл.

2) Данные точки лежат на одной прямой:

а) вектор $\vec{AB} + \vec{A_1B_1} = \vec{0}$, и вопрос задачи теряет смысл;

б) направление вектора $\vec{AB} - \vec{A_1B_1}$ перпендикулярно оси l .

Таким образом, направления векторов $\vec{AB} + \vec{A_1B_1}$ и $\vec{AB} - \vec{A_1B_1}$ либо взаимно перпендикулярны, либо о них ничего нельзя сказать (нулевой вектор не имеет направления).

ПОДОБИЕ

Глава VI является заключительной по курсу геометрии VII класса. Основное теоретическое значение этой главы состоит в том, что в ней рассматриваются новые для учащихся виды отображений плоскости на себя — гомотетия (произносится гомотэтия) и подобие — и на этой основе вводится и изучается понятие подобия фигур. Конгруэнтность фигур — частный случай подобия.

Рассматриваемая глава имеет также очень важное практическое значение. В окружающей нас обстановке, в практической деятельности постоянно приходится встречаться с подобными фигурами (рисунки, фотографии, планы, карты, проектирование изображений на экран, многочисленные применения подобия и метрических соотношений в разнообразных конструкциях, разного рода приборах и приспособлениях, в измерительных работах на местности и т. д.).

Дидактическое значение рассматриваемой главы определяется богатыми возможностями использования этого материала для повторения и закрепления изученного ранее. В ходе работы учащиеся снова встретятся с отображениями точечных множеств, обратными отображениями, перемещениями, векторами, периметрами и площадями многоугольников, с изученными ранее простейшими метрическими зависимостями между элементами некоторых фигур, признаками конгруэнтности треугольников и т. д.

Существенно и то, что эта глава позволяет более широко и разносторонне привлекать алгебраические знания и навыки учащихся к решению геометрических вопросов (отношения, пропорциональность, уравнения, тождества, квадратные корни, геометрическое истолкование некоторых алгебраических соотношений и т. д.). Открываются также значительные возможности для дальнейшего развития вычислительных навыков учащихся.

К сказанному о дидактическом значении темы «Подобие» можно добавить хорошие возможности для наглядного иллюстрирования изучаемых вопросов, для создания проблемных ситуаций и для активизации познавательной деятельности учащихся.

Общая схема главы «Подобие» такова. В самом начале ее вводится понятие подобия фигур, затем изучается гомотетия и пропорциональность отрезков. На этой основе выясняется связь между подобием, гомотетией и конгруэнтностью, излагаются признаки подобия треугольников, теорема Пифагора и другие метрические зависи-

мости между элементами прямоугольного треугольника, подобие многоугольников, отношение периметров и площадей подобных многоугольников, «метод подобия» при решении задач на построение. Последние пункты главы посвящены некоторым практическим применениям гомотетии и подобия.

Общей основой рассмотрения различных вопросов главы служат отображения подобия и гомотетии.

Понятие подобия фигур вводится в самом начале главы. Предложенное определение охватывает не только треугольники и многоугольники, но и любые фигуры.

Значительную роль в изложении многих вопросов играет гомотетия. Она рассматривается на первых уроках, посвященных этой главе. По определению, *гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется отображение плоскости на себя, при котором образом произвольной точки X является такая точка X_1 , что $\vec{OX}_1 = k \vec{OX}$.*

Использование векторов в определении гомотетии позволяет доказать теоремы о пропорциональных отрезках. Векторы эффективно используются и при изложении других вопросов темы.

С использованием гомотетии доказываются признаки подобия треугольников.

В тексте главы нет особого пункта, посвященного метрическим соотношениям в круге. Некоторые сведения по этому вопросу учащиеся получают при решении задач. Как и в предшествующих главах, упражнения этой главы призваны не только служить закреплению теоретического материала, но и быть источником новых знаний.

Практическим применением гомотетии и подобия, как указывалось выше, посвящены заключительные пункты главы. Эти применения в необходимой степени отражены в задачах по многим пунктам. Кроме того, предполагается, что по заключительным пунктам учитель проведет с учащимися практические работы в классе и основные измерительные работы на местности (определение высот и расстояний на местности, мензульная съемка плана земельного участка).

Значительное внимание уделяется построению учащимися гомотетичных и подобных фигур, а также разбору разнообразных вопросов, призванных обеспечить сознательное усвоение понятий главы и связей между новыми и ранее усвоенными понятиями: конгруэнтность как частный случай подобия, тождественное отображение и центральная симметрия как частные случаи гомотетии, подобие как последовательное выполнение (композиция) гомотетии и перемещения.

В главе «Подобие», как и в предшествующих главах учебника, большое внимание уделяется развитию речи учащихся, усвоению символики и терминологии. Вводятся знак подобия, обозначение гомотетии и некоторые другие символы. Закрепляются навыки учащихся в употреблении ранее введенных обозначений.

На уроках по главе VI, как и по предшествующим главам, предполагается постоянное привлечение разнообразных средств наглядности (вырезанных из картона или фанеры фигур, настенных таблиц, диафильмов, кодоскопа, рисунков учебника, выполнение рисунков учащимися, моделей некоторых приборов и приспособлений практического назначения и т. д.). В частности, при выполнении на доске и в тетрадах рисунков подобных и гомотетичных фигур постоянно следует пользоваться цветными мелками, цветными карандашами. (Конкретные рекомендации по использованию средств наглядности даются в методических указаниях к урокам по теме.)

§ 1. ПОДОБИЕ И ГОМОТЕТИЯ

Этот параграф является основным. В нем вводятся особенно важные для всей шестой главы понятия подобия, гомотетии и выясняется связь между подобием, гомотетией и перемещением. Здесь же рассматриваются теоремы о пропорциональности отрезков. Последующие параграфы главы по существу непосредственно опираются на первый и могут рассматриваться как его применения. Поэтому уроки по первому параграфу особенно ответственны.

Пункт 84 не обязателен, однако его следует рекомендовать (для самостоятельного изучения) учащимся, проявляющим склонность к математике (содержание этого пункта может быть также изучено на занятиях математического кружка). Дело в том, что в предшествующих пунктах шла речь о подобии фигур. Гомотетия же рассматривалась как определенного вида отображение плоскости на себя. Поэтому весьма желателен еще один шаг — рассмотреть подобие как определенного вида отображение плоскости на себя и разъяснить связь между подобием, гомотетией и перемещением. Такой подход был типичным для изучения перемещений; он целесообразен и для главы VI.

78. Подобные фигуры (1 час)

Основное содержание этого пункта — введение понятия подобных фигур, коэффициента подобия, выяснение основных свойств подобия (рефлексивность, симметричность и транзитивность) и связи между конгруэнтностью и подобием.

Учащиеся должны знать определение подобия, его основные свойства и уметь находить коэффициент подобия.

Введение и формирование понятия подобных фигур требует обязательного обращения к наглядности. Учителю следует подготовить к уроку наборы подобных, неподобных моделей фигур, среди которых должны быть модели и конгруэнтных фигур: можно использовать два куба разных размеров и прямоугольный параллелепипед, заметно отличающийся от куба, несколько вырезанных из картона или фанеры подобных и неподобных треугольников, кругов разных радиусов, подобных и неподобных прямоугольников, квадратов разных размеров. Могут быть использованы планы одного и того же участка местности, выполненные в разных масштабах.

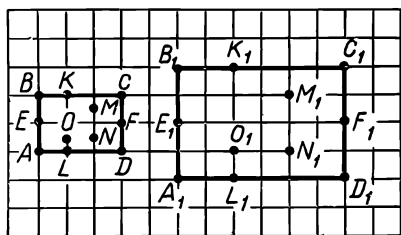


Рис. 187

Используя эти наглядные средства, учитель начнет с формирования наглядных представлений о подобных фигурах как имеющих одинаковую форму, но, может быть, отличающихся размерами. При этом подобные фигуры следует сопоставлять с неподобными.

Затем ставится вопрос:

«Как математически выразить, что две фигуры имеют одинаковую форму?»

Постановка такого вопроса натолкнет учащихся на сравнение расстояний между точками одной фигуры и соответствующими точками другой. Если этого не случится, то сам учитель порекомендует такое сравнение. Для проведения этого сравнения может быть использован легко изготавливаемый плакат-рисунок двух прямоугольников, расположенных на квадратной сетке (рис. 187). Выводом из проведенного сравнения будет данное в этом пункте определение подобных фигур.

Определение подобных фигур сразу же следует сопоставить с известным учащимся определением конгруэнтных фигур. В случае конгруэнтности расстояния между двумя точками одной фигуры и соответствующими точками другой сохраняются. В случае подобия они изменяются в одном и том же отношении (могут сохраняться). Поэтому конгруэнтность фигур — частный случай подобия.

Здесь же следует ввести новый для учащихся математический знак: \sim — знак подобия. Следует ввести и запись $\Phi_1 \stackrel{k}{\sim} \Phi$ (фигура Φ_1 подобна фигуре Φ с коэффициентом подобия k).

Рекомендуется записывать подобие многоугольников так, чтобы буквы, обозначающие соответственные вершины многоугольников, занимали в обозначениях этих многоугольников одни и те же места. При этом условии запись: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ будет означать, что треугольники ABC и DEF подобны и соответствующие вершины их — A и D , B и E , C и F . Тем самым в дальнейшем существенно облегчится составление соответствующих пропорций.

Сразу же после введения понятия подобия фигур учащимся может быть указана основная цель последующей учебной работы по геометрии в VII классе. Цель эта — изучение подобия и свойств подобных фигур. При этом учитель подчеркнет, конечно, особенно важное значение подобия фигур для практической деятельности людей. Подтверждением будут служить наглядные иллюстрации, рассмотренные в начале урока. С той же целью полезно привести примеры задач, решаемых с помощью подобия (например, пункт 87, задачи 6 и 9, пункт 90, задача 11).

Дальше выясняется понятие коэффициента подобия. Здесь существенно подчеркнуть, что коэффициент подобия фигур F_1 и F — это отношение расстояния между двумя произвольными точками образа (F_1) к расстоянию между соответствующими им точками данной фигуры (F). Коэффициент подобия — всегда положительное число.

Понятие коэффициента подобия следует отработать, пользуясь использованными в начале урока рисунками-плакатами, а также рисунками учебника.

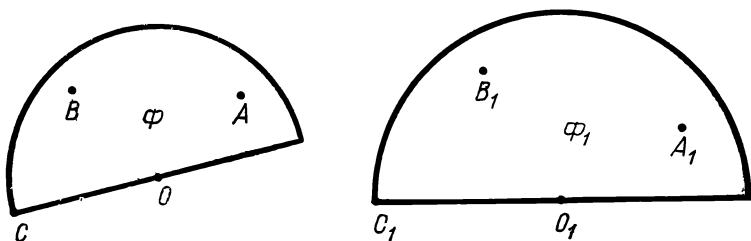
Подчеркнем, что понятие коэффициента подобия во всей изучаемой главе играет важную роль. Учащимся придется пользоваться им и в последующих классах, а также в жизни, в труде, и поэтому оно должно быть прочно усвоено.

Изучение основных свойств подобных фигур особых затруднений не вызовет. Первое свойство (рефлексивность) следует из определения подобия. Обоснование второго и третьего свойств — симметричности и транзитивности — дано в учебнике петитом, и его можно опустить, ограничившись поясняющими примерами (см. табл. 13).

В классе решаются задачи 1—3, 6, 7.

Таблица 13

Подобные фигуры



$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|OC|}{|O_1C_1|} = \frac{|CA|}{|C_1A_1|} = k > 0$$

$F \stackrel{k}{\sim} F_1$

Свойства подобия фигур

1. $F \stackrel{1}{\sim} F$
2. $F_1 \stackrel{k}{\sim} F \Leftrightarrow F \stackrel{\frac{1}{k}}{\sim} F_1$
3. $F_1 \stackrel{k_1}{\sim} F$ и $F_2 \stackrel{k_2}{\sim} F_1 \Leftrightarrow F_2 \stackrel{k_1 k_2}{\sim} F$

Дополнительные задачи.

1. Фигура F — две данные точки A и B . Постройте подобную ей фигуру с коэффициентом подобия: $2; \frac{1}{2}$.

2. Фигура F — три точки: A, B и C , лежащие на одной прямой. Постройте подобную ей фигуру с коэффициентом подобия 1.

Задание на дом. Задачи 9, 10 и 11.

Ответы и указания

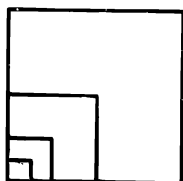
2. Любые две конгруэнтные фигуры подобны. Две неконгруэнтные фигуры могут быть подобными. Пример — два квадрата с неконгруэнтными сторонами.

3. Две подобные фигуры конгруэнтны, если коэффициент подобия этих фигур равен 1.

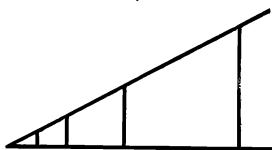
6. $k = 1$. 7. Да. 10. Коэффициенты подобия $\frac{1}{10}$ и 10.

11. Вопрос задачи: каков коэффициент подобия второго макета и самой плотины? (Образ — второй макет.) $k = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{400}$.

13. В условии задачи опечатка. Должно быть: n — целое число. Примером фигуры, удовлетворяющей условию задачи, является бесконечное множество квадратов со стороной $a_n = 2^n$, где n — целое число (рис. 188, а). На рисунке 188, б — другой пример.



а)



б)

Рис. 188

79. Определение гомотетии (2 часа)

Основное содержание этих уроков — выяснение понятия гомотетии.

Учащиеся должны усвоить определение гомотетии и запись ее, два частных случая ($k = 1$ и $k = -1$), уметь строить точки, гомотетичные данным (при заданном центре и коэффициенте), а также находить отображение, обратное данной гомотетии.

До рассмотрения вопроса о гомотетии проверяется усвоение учащимися понятия подобия фигур и коэффициента подобия. В ходе этого повторения учитель еще раз может разъяснить, что если коэффициент подобия фигур равен 1, то такие фигуры конгруэнтны. В этой повторительной беседе могут быть использованы привлекавшиеся на предшествующем уроке наглядные пособия.

Усвоение понятия гомотетии требует подготовительной работы. Суть ее — построение учащимися гомотетичных фигур. Первое по-

строение целесообразно выполнить на классной доске, например для произвольного треугольника. Начать это построение (для одной вершины) следует учителю, продолжат и завершат его вызываемые к доске ученики. Рассмотрение выполненного построения и получившегося чертежа приведет учащихся к выводу, что получаются подобные фигуры, особым образом расположенные. Этот вывод учитель подчеркнет, но оставит его пока без доказательств.

Далее целесообразно самостоятельное выполнение учащимися построений гомотетичных фигур. Для таких построений следует каждому ученику использовать целую страницу тетради, изображающую плоскость. Центр гомотетии и коэффициент ее для всех построений у каждого ученика должны быть заданы одними и теми же. Данными фигурами могут быть две и три фиксированные точки, прямоугольник, прямоугольный треугольник и другие. Выполнение этой работы поможет учащимся осознать, что изучается особого вида отображение плоскости на себя.

После выполнения всех этих построений можно рассмотреть рисунки 159—162 учебника. Важно разобраться, как они выполнялись, какая точка в каждом случае служила центром гомотетии и каким был коэффициент гомотетии.

В заключение учитель сформулирует и пояснит определение гомотетии, вызовет для повторения одного-двух учеников и познакомит учащихся с принятым обозначением гомотетии: $A_1 = H_O^k(A)$ — точка A_1 гомотетична точке A с центром O и коэффициентом k , $F_1 = H_O^k(F)$ — фигура F_1 гомотетична фигуре F с центром O и коэффициентом k .

В классе рассматриваются вопросы 1—3 к пункту 1.

З а д а н и е н а д о м. П. 79, задачи 4, 5 (устно).

Основное содержание в т о р о г о урока — построение (на классной доске и в тетрадях) фигур, гомотетичных данным. Можно взять прямоугольник и задать два центра гомотетии O_1 и O_2 . Коэффициент гомотетии для этих центров целесообразно взять один и тот же, например $k=2$. На втором чертеже, наоборот, центр гомотетии остается одним и тем же, а коэффициенты изменяются. Можно взять, например, $\frac{1}{2}$ и -2 . Учащиеся приходят к выводу, что гомотетия определяется заданием ее центра и коэффициента гомотетии.

При выполнении этих построений повторяется определение гомотетии и двух частных случаев ее: $k = 1$ и $k = -1$. При этом следует выполнять символические записи данных точек и точек, соответствующих им в заданной гомотетии.

¹ При решении задачи 2 задается центр гомотетии, точка X и коэффициент гомотетии k .

В отличие от коэффициента подобия коэффициент гомотетии может быть и отрицательным.

Оставшееся время этого урока используется для решения задач, может быть также проведена самостоятельная работа.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Гомотетия при $k = 1$ — тождественное отображение, при $k = -1$ — центральная симметрия.

3. Центр гомотетии отображается сам на себя.

4. Коэффициент гомотетии равен отношению расстояния от центра гомотетии до точки образа (отличной от центра) к расстоянию от центра до соответствующей точки данной фигуры, взятому со знаком $-$, если центр гомотетии лежит между соответствующими точками, и со знаком $+$, если центр гомотетии не лежит между соответствующими точками.

5. а) Центром гомотетии является любая точка прямой, проходящей через данные точки, за исключением самих данных точек.

б) Если данные точки не лежат на одной прямой, то центр гомотетии — точка пересечения двух прямых, определяемых парами соответствующих точек.

6. Фигура Φ может быть получена из фигуры Φ_1 при гомотетии с центром O и коэффициентом гомотетии $\frac{1}{k}$.

8. 1) $H_0^{\frac{1}{3}}(Y) = X$, 2) $H_0^2(Y) = X$.

9. Пусть гомотетия H^{k_1} отображает точку X (отличную от центра гомотетии O) на точку X_1 : $H^{k_1}(X) = X_1$ и, следовательно, $\vec{OX}_1 = k_1 \vec{OX}$. Гомотетия H^{k_2} точку X_1 отобразит на точку X_2 ; $X_2 = H^{k_2}(X_1)$, и поэтому $\vec{OX}_2 = k_2 \vec{OX}_1$. Имеем: $\vec{OX}_2 = k_2 \vec{OX}_1 = k_2 k_1 \vec{OX}$. Полученное равенство означает, что композиция гомотетий H^{k_1} и H^{k_2} есть гомотетия с тем же центром и с коэффициентом, равным $k_2 k_1$.

З а м е ч а н и е. Композиция гомотетий H^{k_1} и H^{k_2} — гомотетия с центром O и коэффициентом $k_1 k_2 = k_2 k_1$, т. е. композиция гомотетий с одним и тем же центром, — переместительна.

10. Возьмите две гомотетии, например $H_{O_1}^2$ и $H_{O_2}^3$, с различными центрами. Пусть X — произвольная точка (отличная от O_1 и O_2). Найдите $X_1 = H_{O_1}^2(X)$ и $X_2 = H_{O_2}^3(X_1)$, а также $X_3 = H_{O_3}^3(X)$ и $X_4 = H_{O_1}^2(X_3)$. Точки X_2 и X_4 в общем случае не совпадут (рис. 189).

Композиция гомотетий в этом случае не является переместительной.

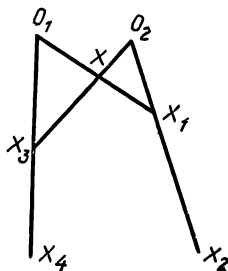


Рис. 189

80. Основные свойства гомотетии (2 часа)

На двух уроках по этому пункту учащиеся познакомятся с основными свойствами гомотетии.

Учащимся на этих уроках предстоит усвоить основные свойства гомотетии и доказательство теоремы 49 и следствия из нее.

Первый урок естественно начать с повторения изученного на предыдущих уроках: определения подобных фигур, гомотетии, нахождения коэффициента гомотетии, построения точки, гомотетичной данной, при заданных центре и коэффициенте гомотетии. В ходе этого повторения необходимо сопоставление подобия и гомотетии, выявление сходств и различий между ними.

Рассмотрению свойств гомотетии может быть предпослан разбор следующей задачи. Даны два одинаково направленных (или противоположно направленных) вектора (разной длины) \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} (рис. 190, а, б).

1) Выразите вектор \overrightarrow{OD} через вектор \overrightarrow{OB} , вектор \overrightarrow{OC} через вектор \overrightarrow{OA} .

2) Выразите вектор \overrightarrow{CD} через вектор \overrightarrow{AB} , вектор \overrightarrow{AB} через вектор \overrightarrow{CD} . Ответы на вопросы этой задачи могут быть даны на основании определения гомотетии. Отрезок AB переводят в отрезок CD гомотетии с центром O и коэффициентами а) $k_1 = \frac{|CD|}{|AB|}$ и б) $k_2 = -\frac{|CD|}{|AB|}$.

Легко находятся и выражения для векторов \overrightarrow{OD} и \overrightarrow{OC} : $\overrightarrow{OD} = k_1 \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC} = k_1 \overrightarrow{OA}$ (для случая а); $\overrightarrow{OD} = k_2 \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC} = k_2 \overrightarrow{OA}$ (для случая б). Чтобы найти выражение \overrightarrow{CD} через \overrightarrow{AB} (в случае а), можно поступить так: $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$ или $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$. Но $\overrightarrow{OD} = k_1 \overrightarrow{OB}$, а $\overrightarrow{OC} = k_1 \overrightarrow{OA}$, и поэтому $\overrightarrow{CD} = k_1 \overrightarrow{OB} - k_1 \overrightarrow{OA} = k_1 (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$. Так как $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$, то окончательно $\overrightarrow{CD} = k_1 \overrightarrow{AB}$. Рассуждения для случая б) аналогичны.

Коллективный разбор решения этой задачи подготовит учащихся к выводу основных свойств гомотетии. Первые два из них просты. Они легко следуют из определения гомотетии. Для подтверждения их можно еще раз обратиться к рисункам 159—162 учебника (см. также табл. 14).

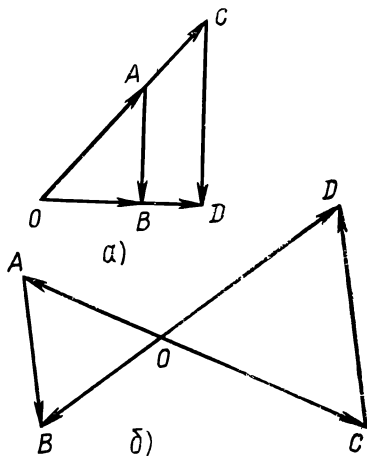
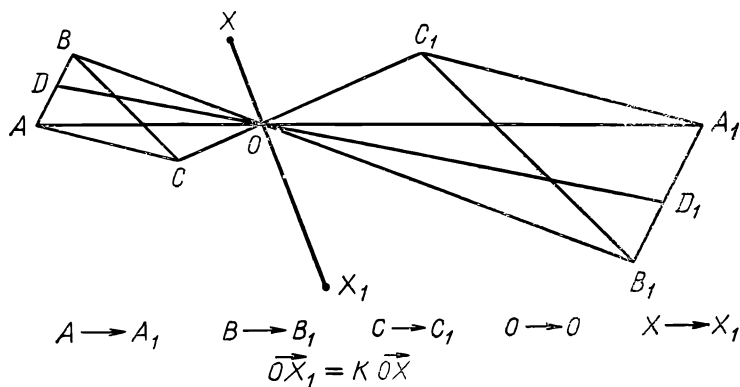
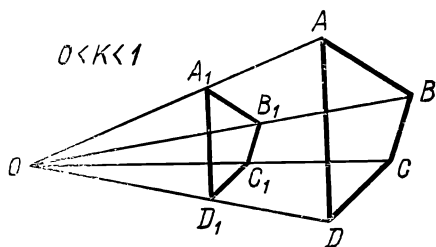
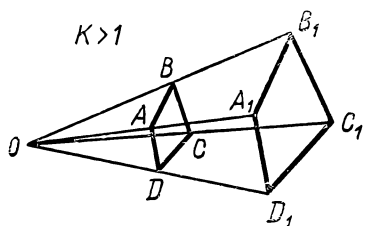
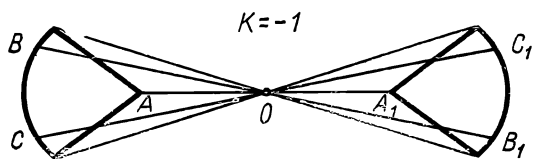
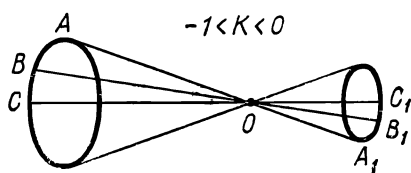
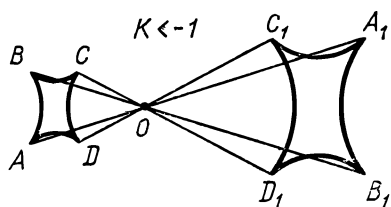


Рис. 190

Гомотетия



Свойства гомотетии



Третье свойство гомотетии дается в виде теоремы: Если при гомотетии с коэффициентом k точки X и Y отображаются на точки X_1 и Y_1 , то $\overrightarrow{X_1Y_1} = k \overrightarrow{XY}$. Возможно, что эту теорему учащиеся сформулируют и докажут сами, так как их к этому подготовило решение только что рассмотренной задачи. Если решение этой задачи учащимися будет усвоено хорошо, то для доказательства теоремы 49 будет достаточно сослаться на это решение. Можно также предложить прочитать доказательство по учебнику.

После доказательства теоремы следует отметить, что векторы \overrightarrow{XY} и $\overrightarrow{X_1Y_1}$ одинаково направлены (или противоположно направлены), т. е. отрезки XY и X_1Y_1 параллельны.

В классе решаются задачи 1—5.

Задание на дом. П. 80, задачи 7, 8.

Рассмотрение основных свойств гомотетии заканчивается на втором уроке. Оставшуюся часть второго урока нужно посвятить решению задач и самостоятельной работе.

Задание на дом. Пункт 80, задача 9.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Соответственные точки и центр гомотетии лежат на одной прямой. а) При $k < 0$ центр гомотетии находится между соответственными точками. в) При $0 < k < 1$ соответственные точки лежат с одной стороны от центра гомотетии и данная точка расположена дальше от центра, чем ее образ. г) При $k > 1$ соответственные точки лежат с одной стороны от центра: точка-образ находится дальше от центра, чем данная точка.

2. а) Увеличиваются; б) уменьшаются.

3. При $k = 1$ и $k = -1$.

4. Сохраняется. (Это следует из теоремы 49.)

5. Коэффициент подобия равен: а) 2,5; б) 3; в) $|m|$.

6. $C = H_0^3(A)$; $D = H_0^4(A)$. Можно также записать: $C = H_0^{\frac{3}{2}}(B)$; $D = H_0^2(B)$; $E = H_0^5(A)$; $D = H_A^3(B)$ и т. д.

7. а) На угол; б) на полосу; в) на параллелограмм; г) на трапецию.

8. Точка L_1 — середина отрезка AM_1 , точка K_1 — середина отрезка AL_1 ;

а) A гомотетична A с любым коэффициентом, $L = H_A^2(K)$, $M = H_A^4(K)$, $M = H_A^2(L)$, $L_1 = H_A^2(K_1)$, $M_1 = H_A^4(K_1)$ и т. д.

10. Пусть X , X_1 , Y и Y_1 расположены на данной прямой так, как показано на рисунке 191 (X и Y — данные точки, X_1 и Y_1 — гомотетичные им). Требуется построить центр этой гомотетии O . Искомая точка O , принадлежащая данной прямой, должна удовлетворять условиям: $\frac{|X_1Y_1|}{|XY|} = |k|$ и $\frac{|OX_1|}{|OX|} = |k|$, где k — коэффициент

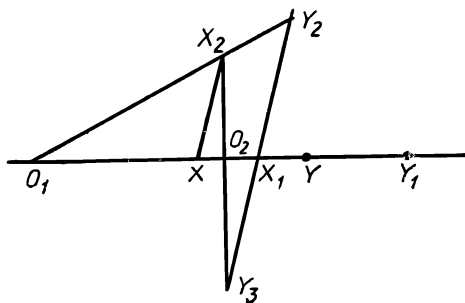


Рис. 191

гомотетии, т. е. $\frac{|X_1Y_1|}{|XY|} = \frac{|OX_1|}{|OX|}$. Проведем через точки X и X_1 произвольные параллельные прямые (отличные от данной прямой) и отложим на них соответственно отрезки $[XX_2] \cong [XY]$, $[X_1Y_2] \cong [X_1Y_1]$, $[X_1Y_3] \cong [X_1Y_1]$. Пусть $O_1 = (X_2Y_2) \cap (XX_1)$, и $O_2 = (X_2Y_3) \cap (XX_1)$. Одна из точек O_1 и O_2 искомая. В случае, рассмотренном на рисунке 191, искомой точкой является O_1 . Действительно, $\frac{|X_1Y_1|}{|XY|} = \frac{|X_1Y_2|}{|XX_2|} = \frac{|O_1X_1|}{|O_1X_2|}$.

11. Пусть дан $[AB]$. Рассмотрим случай, когда центр гомотетии O не принадлежит прямой, определяемой этим лучом (рис. 192). Возьмем на этом луче произвольную точку X (отличную от A). Найдем точки A_1 и X_1 , на которые отображаются в заданной гомотетии соответственно точки A и X . Точки X и X_1 лежат в одной полуплоскости с границей (OA) . По свойствам гомотетии имеем $\vec{A_1X_1} = k\vec{AX}$. Так как $k > 0$, то векторы $\vec{A_1X_1}$ и \vec{AX} сонаправлены. Но X — произвольная точка луча $[AB]$, а X_1 — соответствующая точка луча $[A_1B_1]$, и поэтому луч $[AB]$ и его образ $[A_1B_1]$ — сонаправлены. Случай, когда $O \in (AB)$, аналогичен рассмотренному.

12. Пусть центры двух гомотетий $H_{o_1}^{h_1}$ и $H_{o_2}^{h_2}$ различны (рис. 193). Возьмем произвольный отрезок AB . В гомотетии $H_{o_1}^{h_1}$ этот отрезок

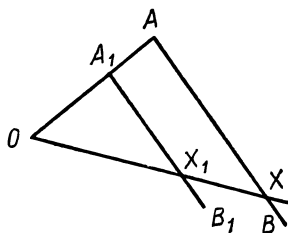


Рис. 192

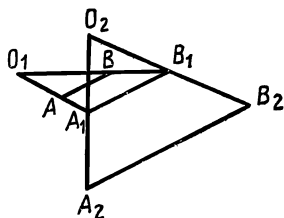


Рис. 193

перейдет в некоторый отрезок A_1B_1 ; $|A_1B_1| = |k_1| \cdot |AB|$ и $[A_1B_1] \parallel [AB]$. В гомотетии $H_{O_1}^{k_1}$ отрезок A_1B_1 перейдет в некоторый отрезок A_2B_2 ; $|A_2B_2| = |k_2| \cdot |A_1B_1|$ и $[A_2B_2] \parallel [A_1B_1]$. Имеем $[AB] \parallel [A_2B_2]$ и $|A_2B_2| = |k_2k_1| \cdot |AB|$. Если $k_2k_1 \neq 1$, то композиция $H_{O_1}^{k_1}$ и $H_{O_2}^{k_2}$ дает гомотетию. Если же $k_2k_1 = 1$ (отрезки AB и A_1B_1 параллельны и конгруэнтны), то получаем параллельный перенос. При $k_2k_1 = -1$ получим гомотетию — центральную симметрию.

Докажем первое из этих высказываний. Обозначим через Π композицию $H_{O_1}^{k_1}$ и $H_{O_2}^{k_2}$. Чтобы при отображении Π построить образ произвольной точки M , не лежащей на прямой AB , достаточно провести через A_2 и B_2 прямые, соответственно параллельные прямым AM и BM , и взять их точку пересечения.

Теперь рассмотрим гомотетию H_O^k , определяемую парами соответственных точек $A \rightarrow A_2$, $B \rightarrow B_2$. Центр O и коэффициент k этой гомотетии существуют и однозначно определены.

$O = (AA_2) \cap (BB_2)$. Прямые AA_2 и BB_2 не параллельны, так как при условии $k_2k_1 \neq 1$ имеем $|A_2B_2| \neq |AB|$.

$|k| = \frac{|A_2B_2|}{|AB|}$; $k > 0$, если лучи A_2B_2 и AB сонаправлены; $k < 0$, если лучи A_2B_2 и AB противоположно направлены.

При гомотетии H_O^k образ точки M можно строить точно так же, как и при отображении Π . Поэтому отображение Π и есть гомотетия H_O^k . (Если точка M лежит на прямой AB , то построение ее образа при отображениях Π и H_O^k сводится к построению точки, делящей отрезок A_2B_2 в данном отношении.)

Рассмотрение доказательства для случаев $k_2k_1 = 1$ и $k_2k_1 = -1$ оставляем читателю.

81. Пропорциональные отрезки (2 часа)

На двух уроках учащиеся должны усвоить определение пропорциональных отрезков, две теоремы о таких отрезках, следствия из этих теорем и научиться строить отрезок, четвертый пропорциональный к трем данным. Основой для выяснения всех этих вопросов является гомотетия фигур.

Содержанием первого урока может быть понятие пропорциональных отрезков, теорема о пропорциональных отрезках (50), следствие из нее и построение по трем данным отрезкам a , b и c отрезка x , удовлетворяющего пропорции $a : b = c : x$.

Первый урок начинается с повторения. Следует вспомнить, что называется отношением двух отрезков. Правильнее было бы говорить об отношении длин двух отрезков, но для сокращения речи слово «длин» часто опускают.

Для проверки усвоения учащимися понятия отношения двух отрезков могут быть выполнены упражнения:

1. (У с т н о.) Длина отрезка AB — $0,4$ дм, а длина отрезка CD — 16 см. Вычислите: а) $\frac{|AB|}{|CD|}$; б) $\frac{|CD|}{|AB|}$. [а) $\frac{1}{4}$; б) 4].

2. Начертите два отрезка, выполните необходимые измерения и вычислите отношение длины первого отрезка к длине второго и длины второго к длине первого.

3. Постройте такие два отрезка AB и CD , чтобы $|AB| : |CD| = \frac{1}{2}$. (Если учащиеся ранее хорошо усвоили понятие отношения, то эти упражнения можно и не выполнять.)

Отметим, что, говоря об отношении отрезков, имеют в виду отношение двух отрезков.

Записывать отношение двух отрезков AB и CD можно двумя способами: $\frac{|AB|}{|CD|}$ или $|AB| : |CD|$.

Понятие пропорциональных отрезков обычно усваивается учащимися без больших затруднений. Однако, хотя пропорциональность рассматривалась уже на уроках алгебры, ограничиться одним определением нельзя. Нужны упражнения. Они могут быть, например, такими.

1. (У с т н о.) Какие длины имеют отрезки, пропорциональные данным отрезкам в 2 см, 3 см и 4 см, если коэффициент пропорциональности $1,5$?

[3 см; $4,5$ см; 6 см].

2. (У с т н о.) Проверьте, пропорциональны ли отрезки в 2 см и 3 см отрезкам: а) в 8 дм и 12 дм; б) в 6 см и 10 см?

[а) Да; б) нет.]

3. Начертите три произвольных отрезка и постройте пропорциональные им отрезки с коэффициентом пропорциональности 2 .

Доказательство теоремы (50) о пропорциональных отрезках, если хорошо усвоена гомотетия, учащихся не затруднит, и, может быть, оно будет проведено ими самостоятельно. Запись доказательства этой теоремы может быть такой (рис. 166 учебного пособия).

Д а н о: $\angle AOB$; $(A_1B_1) \parallel (AB)$. Д о к а з а т ь: $|OA_1| : |OA| = |OB_1| : |OB|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим гомотетию H_0^k , заданную центром O и парой точек $A \rightarrow A_1$.

1. $H_0^k(|OA|) = |OA|$; $H_0^k(|OB|) = |OB|$;
 $(H_0^k(AB)) = (A_1B_1) \Rightarrow ((AB) \parallel (A_1B_1)) \Rightarrow (H_0^k(B) = B_1)$.

2. $(|OA_1| = |k| \cdot |OA|; |OB_1| = |k| \cdot |OB|) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (|k| = |OA_1| : |OA|; |k| = |OB_1| : |OB|) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (|OA_1| : |OA| = |OB_1| : |OB|)$.

Следствие из этой теоремы может быть выведено так. Если $[DH] \parallel [AB]$ (рис. 194), то треугольник CDH гомотетичен треугольнику CAB с центром C и коэффициентом

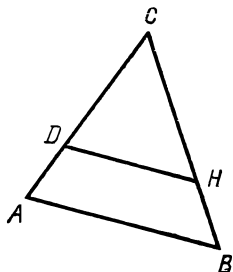


Рис. 194

$$k = \frac{|CD|}{|CA|}. \text{ Поэтому } \frac{|DH|}{|AB|} = k, \frac{|CH|}{|CB|} = k \text{ и, следовательно, } \frac{|CH|}{|CB|} = \frac{|DH|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CA|}.$$

Решение данной в тексте пункта задачи опирается на теорему о пропорциональных отрезках. Необходимо разъяснить учащимся, как строить по трем данным отрезкам a , b и c отрезок x , удовлетворяющий пропорциям: а) $a:b = x:c$; б) $a:x = b:c$; в) $x:a = b:c$. В каждом из этих случаев путем перестановок частей и членов данная пропорция может быть легко преобразована к уже рассмотренному виду.

З а д а н и е н а д о м. П. 81 (до теоремы 51), задачи 3, 4.

Оставшиеся вопросы пункта 81 (теорема 51 и следствие из нее) составляют основное содержание второго урока.

После теоремы о пропорциональных отрезках следует поставить вопрос об утверждении, обратном ей. Это утверждение верно; оно составляет содержание теоремы 51, изучаемой на этом уроке.

Следствие из этой теоремы очевидно. По данному в учебнике рисунку 167 учащиеся легко сформулируют его.

Оставшаяся часть урока — решение задач по этому пункту. Набор этих задач (задачи 6—12) таков, что позволяет учителю выбрать для работы с его точки зрения наиболее подходящие. К оставшимся задачам можно обратиться на последующих уроках. Некоторые задачи этого пункта могут быть решены устно, например 6 и 8. По усмотрению учителя на этом же уроке может быть предложена самостоятельная работа. Письменные пояснения к этой работе не требуются. О качестве ее выполнения можно судить по результату построения.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. В случае, если отношения $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$, $\frac{c}{c_1}$, $\frac{d}{d_1}$ равны.

2. Утверждение верно. На основании теоремы о пропорциональных отрезках имеем: $\frac{|OA_1|}{|OA|} = \frac{|OB_1|}{|OB|}$, а так как $|OA_1| = |OA| + |A_1A|$ и $|OB_1| = |OB| + |B_1B|$, то $\frac{|OA| + |A_1A|}{|OA|} = \frac{|OB| + |B_1B|}{|OB|}$. Отсюда $1 + \frac{|A_1A|}{|OA|} = 1 + \frac{|B_1B|}{|OB|}$ и, следовательно, $\frac{|A_1A|}{|OA|} = \frac{|B_1B|}{|OB|}$, или $\frac{|OA|}{|A_1A|} = \frac{|OB|}{|B_1B|}$ (см. рис. 166 учебного пособия).

З а м е ч а н и е. Для сокращения записей используемые в этом рассуждении длины отрезков можно обозначить малыми буквами.

3. Можно воспользоваться параллельным переносом.

З а м е ч а н и е. Задачи 2 и 3 приведут учащихся к выводу, что параллельные прямые отсекают на двух пересекающихся прямых

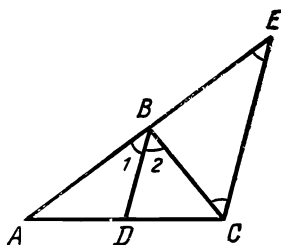


Рис. 195

пропорциональные отрезки. Этот вывод полезно сопоставить с теоремой Фалеса, изученной в VI классе.

4. а) 0,75. б) 0,3. в) 0,06. г) 0,08.

5. а) 0,5. б) Не изменится. При изменении мер длины новые длины отрезков будут пропорциональны заменяемым длинам.

6. $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 2.

7. а) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; б) $|AM| = 3 \text{ см}$, $|MB| = 6 \text{ см}$.

8. 2, 1 см и 5,6 см.

10. 300 м. Масштаб карты — коэффициент пропорциональности расстояний на карте и соответствующих им расстояний на местности.

11. $|DM| = 6 \text{ см}$ ($|AC| : |DM| = |BC| : |BD|$).

12. 2 : 3. Следует воспользоваться гомотетией с центром A.

13. Пусть BD — биссектриса угла ABC и $(CE) \parallel (BD)$ (рис. 195). По решению задачи 2 имеем: $|AD| : |DC| = |AB| : |BE|$. Треугольник CBE — равнобедренный, так как $\angle BCE \cong \angle 2$ и $\angle BEC \cong \angle 1$, но $\angle 1 \cong \angle 2$ и поэтому $\angle BCE \cong \angle BEC$. Следовательно, $|BE| = |BC|$ и, значит, $|AD| : |DC| = |AB| : |BC|$.

82. Построение гомотетичных фигур (2 часа)

Основная цель двух уроков по пункту 82 — приобретение учащимися навыков построения фигуры, гомотетичной данной, с помощью проведения параллельных прямых. Второй целью этих уроков следует считать повторение и систематизацию всего, что учащиеся узнали о гомотетии.

В начале первого из двух уроков по этому пункту может быть проведена самостоятельная работа по предшествующему пункту.

Основное содержание этого урока — повторение теоремы: гомотетичные фигуры — подобны. Стоит обратить внимание учащихся на то, что коэффициент подобия одной фигуры, гомотетичной другой, равен модулю их коэффициента гомотетии.

Рассмотренная теорема приводит к важному вопросу. А верно ли обратное утверждение, т. е. гомотетичны ли любые две подобные фигуры? Чтобы учащиеся нашли ответ на этот вопрос, достаточно предложить им начертить, например, два непараллельных отрезка. Они подобны, но не гомотетичны, так как гомотетичные отрезки обязательно параллельны. Отсюда следует вывод, что подобные фигуры могут быть и не гомотетичны.

Один способ построения гомотетичных фигур уже известен. Но он довольно громоздок. После рассмотрения второго способа (объяснение проводит учитель) учащимся предлагается самостоятельно выполнить построение гомотетичных фигур, например, решить

задачу 3, а, для $k = 2$ и $k = -1$. Здесь же может быть рассмотрена задача 2.

З а д а н и е н а д о м. Задачи 3, б), г), 4, б) при $k = -1$ и $k = 2$.

В т о р о й урок по этому пункту отводится упражнениям в построении фигур, гомотетичных данным. Здесь же может быть проведено повторение всего материала по гомотетии — определения гомотетии, центра и коэффициента гомотетии, ее основных свойств.

На уроке могут быть решены задачи, аналогичные задачам 3 и 4, может быть предложена самостоятельная работа. Письменных пояснений к ее выполнению от учащихся не требуется. Следует отметить, что решение этих задач подготавливает учащихся к изучению теоремы 52 пункта 83. Поэтому одну из задач 2—4 варианта рекомендуется решить в классе, даже если эта самостоятельная работа не будет проведена.

Д о п о л н и т е л ь н ы е з а д а ч и

1. Даны две точки A и B и соответствующие им в некоторой гомотетии точки A_1 и B_1 . Как построить центр этой гомотетии? Как найти ее коэффициент? [Центр гомотетии — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 . Коэффициент гомотетии равен $\frac{|A_1B_1|}{|AB|}$. Можно особо рассмотреть случай, когда данные точки принадлежат одной прямой (см. задачу 10 п. 80).]

2. Гомотетичны ли два ромба, имеющие общий угол? [Гомотетичны.]

3. Гомотетичны ли два прямоугольника, имеющие общий угол? [В общем случае нет.]

4. Гомотетичны ли два равнобедренных треугольника, имеющие общий угол при вершине (при основании)? [Гомотетичны.]

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Можно воспользоваться гомотетией. Достаточно построить многоугольник, гомотетичный данному.

2. Утверждение а) ошибочно. Подобные фигуры могут быть и не гомотетичными. Утверждение б) верно. Убедиться в этом можно так. Пусть A_2 и B_2 — произвольные различные точки фигуры Φ_2 . Если соответствующие им точки фигуры Φ_1 (гомотетичной фигуре Φ_2) — A_1 и B_1 , то $|A_1B_1| = |k| \cdot |A_2B_2|$ (k — коэффициент этой гомотетии). Пусть далее A и B точки фигуры Φ (конгруэнтной Φ_1), соответствующие точкам A_1 и B_1 . Следовательно, $|A_1B_1| = |AB|$. Получаем: $|AB| = |k| \cdot |A_2B_2|$. Это означает, что фигура Φ подобна фигуре Φ_2 .

Верное утверждение в) можно обосновать аналогично.

З а м е ч а н и е. Решение этой задачи для утверждений б) и в) — хорошая подготовка к изучению следующего, 83-го пункта. Но для экономии времени рассмотрение двух этих утверждений можно и опустить.

83. Построение подобных фигур (2 часа)

На первом уроке начинается выяснение связи между подобием фигур, гомотетией и перемещением.

Учащиеся должны усвоить, что если две фигуры подобны, то существует третья фигура, гомотетичная первой и конгруэнтная второй (т. 52).

Как вывод из этой теоремы следует, что если две фигуры подобны, то любую из них можно получить из другой, выполняя последовательно гомотетию и перемещение.

Основное содержание этого урока — теорема 52 о существовании для двух подобных фигур такой третьей фигуры, которая гомотетична одной из данных и конгруэнтна другой. Эта теорема приводит к двум важным выводам.

Первый из них состоит в том, что если две фигуры подобны, то любую из них можно получить из другой, выполняя последовательно гомотетию и перемещение. В самом деле, пусть $\Phi \sim \Phi_2$. По теореме 52 существует фигура Φ_1 , гомотетичная Φ и конгруэнтная Φ_2 (рис. 176 учебного пособия). Рассмотрим фигуру Φ_1 . Она получается из Φ с помощью гомотетии. Так как Φ_1 конгруэнтна Φ_2 , то Φ_2 можно получить из Φ_1 с помощью перемещения. Следовательно, фигуру Φ_2 можно получить из фигуры Φ , выполнив последовательно гомотетию и перемещение.

Второй вывод (следствие) — соответственные углы подобных фигур конгруэнтны. В случае подобных многоугольников соответственные углы это не только углы этих многоугольников при соответственных вершинах. Для иллюстрации удобно воспользоваться рисунком 176 учебного пособия. Так, для многоугольников Φ и Φ_2 соответственными являются не только $\angle A$ и $\angle A_1$, $\angle C$ и $\angle C_1$ и другие, но также $\angle DAM$ и $\angle D_1A_1M_1$, $\angle ACD$ и $\angle A_1C_1D_1$ и другие. Если бы мы обозначили точки пересечения диагоналей буквами K и K_1 , то соответственными также являются $\angle DKM$ и $\angle D_1K_1M_1$, $\angle AKM$ и $\angle A_1K_1M_1$ и другие.

На этом же уроке можно рассмотреть, например, задачи 3, 4.

Второй урок следует использовать для повторения теоремы 52 и ее следствия. Доказав теорему: «Если $\Phi_1 = H^k(\Phi)$ и $\Phi_1 \cong \Phi_2$, то $\Phi_2 \sim \Phi$ », — полезно еще раз вернуться к построению подобных фигур. Может быть также выполнена самостоятельная работа.

О т в е т ы и у к а з а н и я

3. Если фигура F_1 подобна фигуре F_2 , то она может быть получена из фигуры F_2 последовательным выполнением гомотетии и перемещения. Но гомотетия и перемещение не изменяют величин углов. Поэтому любой угол фигуры F_2 перейдет в конгруэнтный ему угол фигуры F_1 .

4. Любой равносторонний треугольник.

5. Луч; угол; n прямых, пересекающихся в одной точке.

6. а) Например, прямая (центр гомотетии принадлежит ей), а также две пересекающиеся прямые (центр гомотетии — точка их пересечения). б) Луч (центр гомотетии — начало луча); угол (центр гомотетии — вершина угла).

7. а) Один из двух данных отрезков (любой) может быть получен из другого последовательным выполнением гомотетии и перемещения. г) Воспользуйтесь следствием теоремы 52.

9. Нельзя. Любые две окружности гомотетичны.

Д о п о л н и т е л ь н ы е з а д а ч и

1. Как расположены две окружности, если центром гомотетии их является: а) точка одной из этих окружностей; б) центр одной из них? [а) Окружности касаются или совпадают; б) окружности имеют один и тот же центр.]

2. Могут ли две конгруэнтные (несовпадающие) фигуры быть гомотетичными? [Могут. Таковы, например, любые две центрально-симметричные фигуры.]

У к а з а н и е к з а д а ч е 3 п у н к т а 84

Предварительно выполните поворот одного из квадратов на 45° . Центром поворота можно выбрать: а) центр квадрата; б) середину стороны большего квадрата.

§ 2. ПОДОБНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Как указывалось выше, второй параграф главы VI посвящен применениям материала первого параграфа к выводу признаков подобия треугольников и многоугольников (с числом сторон больше 3). Эти признаки используются далее для установления метрических зависимостей между элементами прямоугольного треугольника. В конце параграфа рассмотрены отношения периметров и площадей подобных многоугольников.

При изучении признаков подобия треугольников желательно их сопоставлять с соответствующими признаками конгруэнтности треугольников. Общему признаку подобия многоугольников в этом параграфе предпосылается рассмотрение одного частного признака конгруэнтности четырехугольников, от него совершается переход к соответствующему признаку подобия четырехугольников и на этой основе формулируется (но не доказывается) общее условие подобия многоугольников.

Теорема об отношении площадей подобных фигур сформулирована в общем виде, но доказана она лишь для подобных многоугольников.

85. Признак подобия треугольников по трем сторонам (1 час)

На этом уроке начинается изучение признаков подобия треугольников. Учащиеся должны знать формулировку признака подобия треугольников по трем сторонам, уметь его доказывать и применять при решении задач.

Цель предстоящей учебной работы может быть поставлена так. Желательно иметь достаточно простые признаки подобия для часто встречающихся фигур, и прежде всего таких простых фигур, как треугольники. Можно напомнить учащимся, что так же обстояло дело и в случае признаков конгруэнтности треугольников.

Для подведения учащихся к формулировке теоремы этого пункта можно воспользоваться настенной таблицей (рис. 196). Целесообразно спросить у учащихся, всегда ли будут подобны два треугольника, если две стороны одного из них пропорциональны двум сторонам другого. Сравнение треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ приводит к выводу, что такие треугольники могут быть и не подобными. Если же

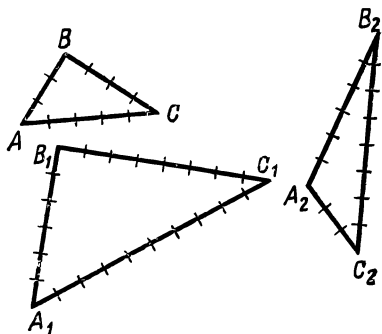


Рис. 196

сравнить треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых не две, а три стороны одного пропорциональны трем сторонам другого, то они, по-видимому, подобны. Это предположение и формулируется в виде теоремы.

Прежде чем приступать к доказательству теоремы, следует наметить тот его путь, которым придется идти: нужно суметь построить третий треугольник, гомотетичный одному из данных и конгруэнтный другому. Как построить такой третий треугольник (гомотетичный одному из данных), учащиеся, наверное, предложат сами. Останется доказать конгруэнтность этого третьего треугольника второму.

Закрепление изученного на этом уроке проводится при коллективном разборе вопросов и некоторых задач по этому пункту, например 1—5.

З а д а н и е н а д о м. Задачи 8 и 9.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Подобны, так как стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого.

2. Если основание и боковая сторона одного равнобедренного треугольника пропорциональны основанию и боковой стороне другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники подобны.

3. Соответственные углы конгруэнтны.
4. а), в) Подобны. б) Не подобны.
5. 6,4 дм; 5,76 дм; 4 дм.
6. 4 см; 3 см.
7. 5,25 см; 1,2 см.
8. 18 м; $\approx 25,7$ м; $\approx 23,6$ м.
9. а) 27 см; 40,5 см; 54,5 см. б) 10,8 см; 16,2 см; 21,8 см.

86. Признак подобия треугольников по двум углам (1 час)

Цель этого урока — усвоение признака подобия треугольников по двум углам, его доказательство и применение этого признака.

Чтобы подвести учащихся к формулировке этого наиболее часто используемого признака подобия треугольников, можно предложить рассмотреть выполненный на доске или листе бумаги чертеж двух треугольников с двумя соответственно конгруэнтными углами. Формулировку «открытой» учащимися теоремы могут дать сами учащиеся. Желательно, чтобы доказательство этой теоремы также провели сами учащиеся.

В записи доказательства теоремы этого пункта на доске учитель может использовать знак \Rightarrow . (Рис. 180 учебного пособия.)

Д а н о: в треугольниках ABC и $A_2B_2C_2$

$$\hat{A} = \hat{A}_2, \hat{B} = \hat{B}_2.$$

Д о к а з а т ь: $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|A_2B_2| = k |AB|$. Рассмотрим H_0^k .

1. $(\triangle A_1B_1C_1 = H_0^k(\triangle ABC)) \Rightarrow (|A_1B_1| = k |AB|)$
2. $(|A_2B_2| = k |AB|; |A_1B_1| = k |AB|) \Rightarrow (|A_1B_1| = |A_2B_2|)$
3. $(\hat{A}_1 = \hat{A} = \hat{A}_2) \Rightarrow (\hat{A}_1 = \hat{A}_2); (\hat{B}_1 = \hat{B} = \hat{B}_2) \Rightarrow (\hat{B}_1 = \hat{B}_2);$
 $(|A_1B_1| = |A_2B_2|; \hat{A}_1 = \hat{A}_2; \hat{B}_1 = \hat{B}_2) \Rightarrow (\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2)$
4. $(\triangle ABC \text{ и } \triangle A_1B_1C_1 \text{ гомотетичны, } \triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2).$

В классе решаются задачи 1—4 (устно), 7.

З а д а н и е на дом. Задачи 8 и 9.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Если угол при основании (вершине) одного равнобедренного треугольника конгруэнтен углу при основании (вершине) другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники подобны.

2. Если острый угол одного прямоугольного треугольника конгруэнтен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.

3. Подобны. Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен 42° , то второй острый угол его равен $90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$.

Следовательно, два данных прямоугольных треугольника таковы, что острый угол одного из них конгруэнтен острому углу другого, и поэтому они подобны.

4. Подобны, так как каждый из данных прямоугольных треугольников имеет угол в 45° .

$$7. \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|BA|}{|BA_1|}; \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|BC|}{|BC_1|}; \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|BD|}{|BD_1|}$$

и так далее.

8. а) Подобны. б) Подобны. в) З а м е ч а н и е. Имеются в виду два таких равнобедренных треугольника, что острый угол одного из них конгруэнтен острому углу другого. Если это углы при основаниях (вершинах), то треугольники подобны. Если же один из углов находится при основании одного из треугольников, а второй при вершине другого, то треугольники могут быть и не подобными.

9. Данный прямоугольный треугольник подобен каждому из двух, на которые он рассекается проведенной к гипотенузе высотой. Всего получаются 3 пары подобных треугольников.

10. Разносторонний остроугольный или тупоугольный — нельзя. У к а з а н и е. Следует рассмотреть случаи: а) Секущая прямая, проходящая через одну из вершин, рассекает данный треугольник на два прямоугольных. б) Один из полученных треугольников остроугольный, второй тупоугольный. в) Оба тупоугольные.

87. Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу (2 часа)

Завершается изучение признаков подобия треугольников.

Основная цель этих двух уроков — изучение признака подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними и применение всех признаков подобия треугольников при решении задач.

На первом уроке следует изучить признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними. Формулировка теоремы, выражающей этот признак, может быть найдена учащимися при рассмотрении настенной таблицы-плаката (рис. 197), аналогичной таблице, примененной при изучении признака подобия треугольников по трем сторонам. Здесь,

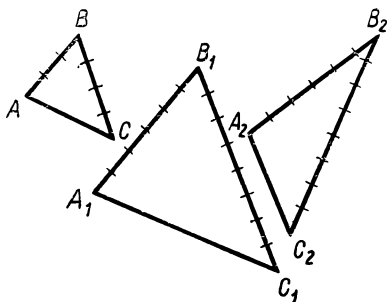


Рис. 197

как и там, можно начать с установления того факта, что если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, то треугольники могут быть и не подобными. Так, треугольник ABC не подобен треугольнику $A_2B_2C_2$ ($\widehat{ABC} \neq \widehat{A_2B_2C_2}$). Если же углы, заключенные между этими парами сторон, будут конгруэнтны, то,

по-видимому, треугольники окажутся подобными. Высказывается предположение: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, если $\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|}$ и $\widehat{ABC} = \widehat{A_1B_1C_1}$.

Желательно, чтобы доказательство этой теоремы учащиеся провели сами (рассуждения остаются теми же, что и при доказательствах теорем, выражающих первые два признака подобия треугольников).

Затем решаются задачи 2—4 к этому пункту.

З а д а н и е н а д о м. Задачи 5 и 9.

В т о р о й урок по пункту 87 следует проводить как тренировочный в применении признаков подобия треугольников.

Начать его можно с устного выполнения упражнений в отыскании подобных треугольников по рисункам 181—182 учебника и настенным таблицам. Содержание этих таблиц может быть таким, как показано на рисунке 198 а) — е).

Из задач по пункту 87 значительный интерес представляет задача 11. Указывается важный факт. Сходственные линейные элементы подобных треугольников (высоты, биссектрисы, медианы, а также радиусы вписанных и описанных окружностей) относятся как сходственные стороны.

Рекомендуется сопоставить признаки подобия треугольников с признаками конгруэнтности. Учащимся известно, что треугольник определяется тремя данными элементами, из которых хотя бы один линейный. Если отвлечься от размеров треугольника, а характеризовать только его «форму», то достаточно двух данных. Поэтому во всех признаках подобия фигурируют два условия (каждую пропорцию следует считать за одно условие).

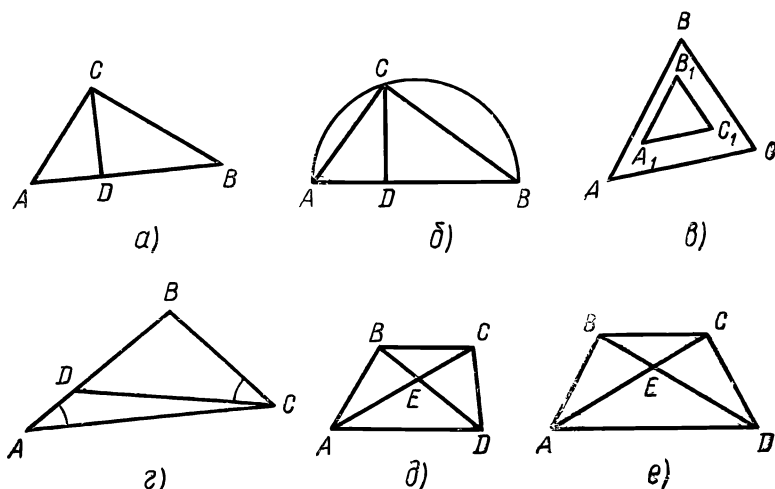


Рис. 198

Результаты сопоставления признаков подобия и конгруэнтности треугольников можно оформить в виде таблицы.

Признаки подобия

Признаки конгруэнтности

$$1. \left(\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|C_1A_1|}{|CA|} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC)$$

$$1. \left([A_1B_1] \cong [AB]; [B_1C_1] \cong [BC]; [C_1A_1] \cong [CA] \left(\text{или } \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|C_1A_1|}{|CA|} = 1 \right) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC)$$

$$2. (\angle A_1 \cong \angle A; \angle B_1 \cong \angle B) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC)$$

$$2. (\angle A_1 \cong \angle A; \angle B_1 \cong \angle B; [A_1B_1] \cong [AB]) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC)$$

$$3. \left(\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|}; \angle B_1 \cong \angle B \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC)$$

$$3. ([A_1B_1] \cong [AB]; [B_1C_1] \cong [BC]; \angle B_1 \cong \angle B) \Rightarrow (\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC)$$

Эта таблица показывает, что между признаками подобия и признаками конгруэнтности существует, как и следовало ожидать, тесная связь. Признаки конгруэнтности треугольников можно считать частными случаями признаков подобия.

Заключительная часть урока — решение данных ниже задач или выполнение самостоятельной работы.

З а д а н и е н а д о м. Составить и решить задачу на применение признаков подобия треугольников. Необязательная часть: попытаться найти некоторые признаки подобия прямоугольников, ромбов, параллелограммов.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1°. Например: «Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны».

П р и м е ч а н и е. Возможно, что в связи с задачей 1 у учащихся возникнет вопрос: подобны ли прямоугольные треугольники, если гипотенуза и катет одного из них пропорциональны гипотенузе и катету другого? Если это случится, то на возникший вопрос учитель даст утвердительный ответ и добавит, что обоснование будет дано на одном из ближайших уроков. Можно предложить учащимся самим найти доказательство соответствующей теоремы.

2. Треугольники ACD и ABF подобны, так как $|AC| : |AF| = |AD| : |AB|$ и $\angle A$ общий.

3. $|DD_1| = 9$ см, $|C_1D_1| = 5,25$ см.

4. 1) Смотрите решение задачи пункта 81 (2 и 3). У к а з а н и е. Каждую из данных пропорций удобно вначале преобразовать к виду пропорции *случая 1*.

5. Данные задачи таковы, что наибольшая сторона треугольника AC . Точка B берется на этой стороне. Построение, о котором говорится в задаче, выполнимо (рис. 199). Имеем: $\triangle ABD \sim \triangle ACB$. Составляем пропорции для вычисления $|DB|$ и $|AD|$: $|DB| : |CB| = |AB| : |AC|$ и $|AD| : |AB| = |AB| : |AC|$. Из этих пропорций получаем: $|DB| = \frac{|CB| \cdot |AB|}{|AC|}$ и $|AD| = \frac{|AB|^2}{|AC|}$.

Ответы: 1) 8 см; $\frac{16}{3}$ см $\approx 5,3$ см; $\frac{32}{9}$ см $\approx 3,6$ см. 2) 12 см; $\approx 4,6$ см; $\approx 11,1$ см.

6. 80 м.

7. 42 м.

8. 30 м.

11. У к а з а н и е. Воспользуйтесь определением подобных фигур.

12. $|DE| = \frac{ma}{m+n}$; 1) 7,5 см; 2) 1,5 см; 3) 5,4 см.

Решение (рис. 200). Так как $|CD| : |DA| = m : n$, то можно ввести обозначения: $|CD| = mx$; $|DA| = nx$, где x — длина неизвестного отрезка, содержащегося m раз в $[CD]$ и n раз в $[DA]$. Поэтому $|CA| = mx + nx = (m + n)x$. Но $\triangle CDE \sim \triangle CAB$ и, следовательно, $|DE| : |AB| = |CD| : |CA|$, т. е. $\frac{|DE|}{a} = \frac{mx}{(m+n)x} = \frac{m}{m+n}$, откуда $|DE| = \frac{am}{m+n}$.

Дополнительные задачи

1. Можно ли вычислить длины сторон треугольника, если он подобен треугольнику с известными длинами сторон и дано отношение большей стороны первого треугольника к меньшей стороне второго? [Можно.]

2. На стороне треугольника отмечена точка (отличная от вершин). Сколько прямых можно провести через эту точку так, чтобы каждая из них отсекала от треугольника подобный ему треугольник?

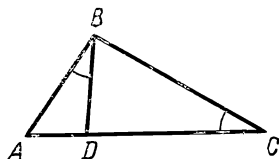


Рис. 199

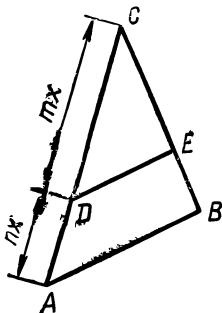


Рис. 200

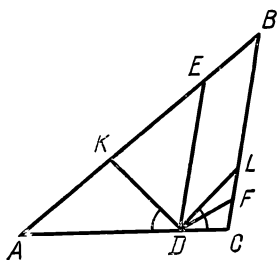


Рис. 201

[В общем случае 4 (рис. 201). Полезно рассмотреть особо равнобедренный, равносторонний и прямоугольный треугольники.]

3. Гомотетичны ли любые два равносторонних треугольника? Подобны ли они? [Подобны. но могут быть не гомотетичными.]

88. Теорема Пифагора (2 часа)

На двух уроках по пункту 88 изучаются важные метрические зависимости между элементами прямоугольного треугольника, и в их числе теорема Пифагора.

В начале первого урока могут быть повторены зависимости между элементами треугольника: сумма величин внутренних и сумма величин внешних углов треугольника, зависимость между острыми углами прямоугольного треугольника, зависимость между углами равнобедренного треугольника, зависимость между величиной внешнего угла треугольника и величиной внутренних его углов, не смежных с этим внешним, зависимость между длиной

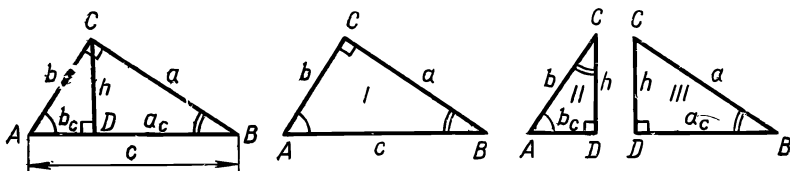


Рис. 202

медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, и длиной гипотенузы; связь между длиной катета, лежащего против угла в 30° , и длиной гипотенузы, а также между длиной высоты прямоугольного равнобедренного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, и длиной гипотенузы.

Рассмотрение рисунка 202 приводит учащихся к выводу, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$ (*).

Пользуясь подобием (*) и беря отношения сторон, лежащих против конгруэнтных углов, получаем: $b : b_c = a : h = c : b$; $b : h = a : a_c = c : a$; $b : a = h : a_c = b_c : h$. Из полученных равных отношений составим пропорции, в которых какой-нибудь элемент встречается дважды. Получаем: 1) $b : b_c = c : b$; 2) $a : a_c = c : a$; 3) $h : a_c = b_c : h$, откуда $b^2 = cb_c$; $a^2 = ca_c$; $h^2 = a_c b_c$, или $b = \sqrt{cb_c}$; $a = \sqrt{ca_c}$; $h = \sqrt{a_c b_c}$ (**).

Для краткости формулировки найденных зависимостей целесообразно ввести понятие *среднего пропорционального (среднего геометрического) двух отрезков*. Данное в учебнике определение можно сформулировать и иначе: отрезок ¹ x называется *средним пропорциональным отрезков m и n* , если $x^2 = mn$, или $x = \sqrt{mn}$.

¹ Имеется в виду длина отрезка.

Доказательство теоремы Пифагора учащиеся могут изучить самостоятельно.

В классе рекомендуется решить 2—3 задачи.

З а д а н и е н а д о м. Задачи 1, 3.

В т о р о й урок по пункту 88 используется для закрепления изученных метрических зависимостей между элементами прямоугольного треугольника. Решаются задачи 4, 8.

Представляют интерес некоторые дополнительные вопросы и задачи по пункту 88.

Легко могут быть доказаны теоремы, выражающие признаки конгруэнтности и подобия прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету. В самом деле, если даны гипотенуза c и катет a прямоугольного треугольника, то второй катет его имеет вполне определенную длину $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Поэтому если два прямоугольных треугольника таковы, что гипотенуза и катет одного из них соответственно конгруэнтны гипотенузе и катету другого, то у таких треугольников конгруэнтны и вторые катеты. Поэтому такие прямоугольные треугольники конгруэнтны (по трем сторонам или по двум катетам). Тем самым мы нашли доказательство теоремы о конгруэнтности прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

Точно так же если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то катеты одного из них пропорциональны катетам другого. Пусть

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} = k, \text{ т. е. } c_1 = kc_2 \text{ и } a_1 = ka_2. \text{ По теореме Пифагора } b_1 = \sqrt{c_1^2 - a_1^2} = \\ = \sqrt{k^2 c_2^2 - k^2 a_2^2} = k \sqrt{c_2^2 - a_2^2} \text{ и } b_2 = \sqrt{c_2^2 - a_2^2}. \text{ Следовательно, } \frac{b_1}{b_2} = \frac{k \sqrt{c_2^2 - a_2^2}}{\sqrt{c_2^2 - a_2^2}} = k.$$

Остается применить признак подобия прямоугольных треугольников по двум катетам (или признак подобия треугольников по трем сторонам).

В конце этого урока, при наличии времени, может быть проведена самостоятельная работа.

З а д а н и е н а д о м. Задачи 11, 13, 15.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. а) Равенство $h = \frac{ab}{c}$ следует из пропорции $b : c = h : a$. Но его можно вывести и так: $h = \sqrt{a_c b_c}$, но $a_c = \frac{a^2}{c}$; $b_c = \frac{b^2}{c}$, и поэтому $h = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{c^2}} = \frac{ab}{c}$. Можно было бы также воспользоваться формулой площади прямоугольного треугольника. Имеем: $\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ch$, откуда $h = \frac{ab}{c}$. б) Так как $a^2 = ca_c$ и $b^2 = cb_c$, то $c = \frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$. в) Равенство $h^2 = a_c b_c$ следует из пропорции $h : a_c = b_c : h$.

2. Отложите на луче OK от его начала данные отрезки так, чтобы у них была только одна общая точка B (рис. 203). На полученном отрезке OA , как на диаметре, постройте полуокружность. Из точки

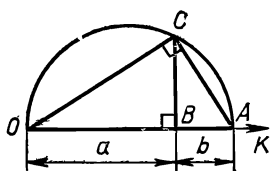


Рис. 203

В проведите перпендикуляр к диаметру OA до пересечения с полуокружностью в точке C . Отрезок BC и будет искомым средним пропорциональным данных отрезков ($\widehat{OCA} = 90^\circ$).

З а м е ч а н и е. Полезно измерить длину среднего пропорционального данных отрезков, затем вычислить ее по известной формуле и результаты сравнить. По-

добные сравнения желательны и в некоторых других аналогичных случаях.

3. $c = 5$ см; $a = \sqrt{15} \approx 3,9$ (см); $b = \sqrt{10} \approx 3,2$ (см); $h = \sqrt{6} \approx 2,4$ (см).

4. $b_c = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $a_c = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

5. $p^2 : q^2$. Следует воспользоваться теоремой задачи 13 пункта 81. Отношение катетов равно отношению отрезков, на которые биссектриса прямого угла пересекает гипотенузу, т. е.

$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$. Проекция катетов на гипотенузу относятся как квадраты катетов (задача 16). $\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2}$, т. е. $\frac{a_c}{b_c} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, откуда $\frac{a_c}{b_c} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$ (второй ответ: $\frac{q^2}{p^2}$).

6. Воспользуйтесь решением задачи 2.

7. Если квадрат длины стороны треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон его, то такой треугольник прямоугольный. Пусть треугольник ABC — данный и для него $a^2 + b^2 = c^2$ (a, b и c — длины сторон его). Построим прямоугольный треугольник с длинами катетов a и b . По теореме Пифагора гипотенуза его имеет длину $\sqrt{a^2 + b^2}$. Но такую же длину имеет и наибольшая из сторон данного треугольника ABC . Поэтому построенный прямоугольный треугольник и данный конгруэнты (по трем сторонам), значит, углы их соответственно конгруэнты. Следовательно, данный треугольник ABC прямоугольный.

8. а) Квадрат со стороной h ; площадь его — h^2 ; ≈ 220 см². Прямоугольник со сторонами a_c и b_c ; площадь его — $a_c b_c$; ≈ 220 см².

б) Прямоугольник со сторонами a и b ; площадь его — ab ; 608 см².

Прямоугольник со сторонами c и h ; площадь его — ch ; ≈ 608 см².

в) Квадрат со стороной b ; площадь его — b^2 ; 256 см². Прямоугольник со сторонами c и b_c ; площадь его — cb_c ; 256 см².

9. ≈ 175 см²; ≈ 311 см².

10. Следует воспользоваться теоремой, обратной теореме Пифагора. Стороны треугольника обозначим так: $13x, 12x, 5x$. Имеем: $(12x)^2 + (5x)^2 = 169x^2$, $(13x)^2 = 169x^2$. Выполняется соотношение $(12x)^2 + (5x)^2 = (13x)^2$, т. е. треугольник прямоугольный.

11. $\approx 3,9$ см.

12. По теореме Пифагора высота равностороннего треугольника равна $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ (a — длина стороны), и поэтому площадь равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (кв. единиц).

13. $\approx 48,9$ см, если хорды лежат по разные стороны от центра, и $\approx 0,9$ см, если по одну сторону.

14. $|AC| = 5$ см; $|AE| = 13$ см; $|CE| \approx 11,3$ см.

15. 1) 15; 2) 18; 3) 5; 4) 13.

16. а) $\sqrt{20} \approx 4,5$; б) $\sqrt{2} \approx 1,4$; в) $5\sqrt{2} \approx 7,1$.

17. а) 24 см; ≈ 21 см; б) ≈ 17 см; 12 см.

19. $\frac{k(k+l)}{\sqrt{k^2+l^2}}$; $\frac{l(k+l)}{\sqrt{k^2+l^2}}$.

20. $\approx 7,7$ см.

21. Следует воспользоваться тем, что радиусы, проведенные в точки касания, перпендикулярны касательным, и свести дело к применению теоремы Пифагора. Так, для случая внутренней касательной имеем (рис. 204): $|O_1B| = 6$ см; $|O_2C| = 2$ см; $|O_1O_2| = 10$ см; $(O_1A) \parallel (CB)$; $A = (O_2C) \cap (O_1A)$; $|AC| = |O_1B| = 6$ см; $|AO_2| = 8$ см; $|CB| = |O_1A| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - |AO_2|^2} = 6$ (см). Отрезок внешней касательной равен $\approx 9,2$ см.

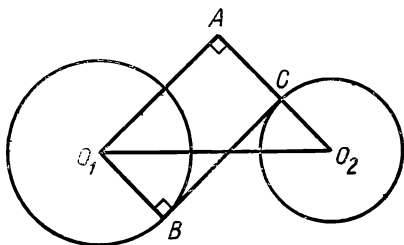


Рис. 204

22. $\sqrt{3}r$.

23. 1) а) Могут. б) Не могут. 2) а) Не могут. б) Могут.

24. Задача приводит к уравнению: $(n+1)^2 = n^2 + (n-1)^2$, или $n^2 - 4n = 0$, откуда $n = 4$ и, следовательно, длины сторон прямоугольного треугольника выражаются числами: 3, 4, 5. Другие прямоугольные треугольники, удовлетворяющие условию задачи, не существуют.

25. $\approx 13,3$ мм.

Дополнительные задачи

1. Какая существует зависимость между длинами диагоналей ромба и его стороны? $|d_1^2 + d_2^2| = 4a^2$

2. Составьте 1—2 практические задачи на применение теоремы Пифагора.

3. Докажите, что площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей равносторонних треугольников, построенных на его катетах.

89. Подобные многоугольники (1 час)

Основное содержание урока по пункту 89 — признак подобия многоугольников и теорема об отношении периметров подобных многоугольников.

Учащиеся должны усвоить общий признак подобия многоугольников, теорему об отношении периметров подобных многоугольников и ее доказательство, а также научиться пользоваться этой теоремой для решения задач.

В первой части урока учащиеся узнают, что в отличие от треугольников пропорциональность сторон двух многоугольников (с числом сторон больше 3) недостаточна для их подобия. Этому служит, например, сопоставление квадрата и ромба, отличного от квадрата. Хотя стороны двух этих многоугольников и пропорциональны, но многоугольники не подобны.

Точно так же конгруэнтность соответствующих углов, образованных сторонами контуров двух многоугольников (с числом сторон больше 3), недостаточна для подобия многоугольников. (Сопоставляют квадрат и отличный от квадрата прямоугольник. Углы двух этих фигур конгруэнтны (все они прямые), но фигуры не подобны.)

Общий признак подобия многоугольников принимается без доказательства. Здесь еще раз подчеркивается, что для подобия многоугольников в общем случае недостаточно пропорциональности соответствующих сторон. Точно так же недостаточна и конгруэнтность соответствующих углов. Объединение же этих двух условий дает необходимое и достаточное условие подобия многоугольников: если стороны одного многоугольника пропорциональны соответственно сторонам другого многоугольника и соответственные углы этих многоугольников конгруэнтны, то такие многоугольники подобны.

Если задать учащимся вопрос, как относятся периметры подобных многоугольников, то, наверное, на него учащиеся дадут верный ответ. Догадаться, каким должен быть ответ на этот вопрос, им может помочь сравнение периметров двух квадратов. Если сторона первого квадрата a см, то сторона второго квадрата (подобного первому, с коэффициентом подобия k) ka см и отношение периметров равно $4ka : 4a = k$.

Формулировка соответствующей теоремы и доказательство ее уже не затрудняют учащихся.

Эту теорему можно изучать и как задачу: многоугольник $ABCDE$ подобен многоугольнику $A_1B_1C_1D_1E_1$ с коэффициентом подобия k . Выразите через k отношение их периметров. Выводом из решения этой задачи и будет теорема: отношение периметров двух подобных многоугольников равно коэффициенту их подобия (и, значит, отношению любых двух соответственных сторон).

Завершить урок по рассматриваемому пункту можно разбором дополнительных вопросов и решением задач, например 8, 9. К задачам по этому пункту придется возвращаться и на последующих уроках.

Дополнительные задачи

1. Подобны ли два четырехугольника, если стороны одного из них пропорциональны сторонам другого? [Могут быть и не подобными.]

2. Подобны ли два прямоугольника, если стороны одного из них пропорциональны сторонам другого? [Подобны.]

3. Нужно начертить план четырехугольного участка земли. Достаточно ли для этого знать длины всех сторон этого участка? Что еще нужно знать? [Нужно знать еще 3 угла.]

4. При каком условии подобны: а) два ромба; б) два прямоугольника; в) два параллелограмма? [а) Два ромба подобны, если угол одного из них конгруэнтен углу другого. Два ромба подобны, если диагонали одного из них пропорциональны диагоналям другого. б) Два прямоугольника подобны, если две смежные стороны одного из них соответственно пропорциональны двум смежным сторонам другого. в) Два параллелограмма подобны, если две смежные стороны одного из них пропорциональны соответственно двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, конгруэнтны. (Учащиеся могут предложить и иные признаки подобия ромбов, прямоугольников и параллелограммов.)]

Задание на дом. Задачи 11, 12.

Ответы и указания

2. 1) Для обоснования подобия всех конгруэнтных многоугольников можно воспользоваться определением подобия или основным признаком подобия многоугольников.

2) Два любых квадрата подобны, так как стороны их пропорциональны, а соответственные углы конгруэнтны. Можно также воспользоваться связью между гомотетией, перемещением и подобием.

3. Ошибочные утверждения.

4. а) Могут. б) Не могут.

9. Не подобны, так как стороны прямоугольников не пропорциональны.

10. Нужно длину и ширину листа разделить на одно и то же число равных частей.

11. 105 см.

12. 2 м; 4 м; 5 м.

13. 6,4 дм; 8 дм; 11,2 дм.

14. 60 см; 100 см.

15. (Рис. 205.) Чтобы прямоугольники, на которые рассекается данный прямоугольник, были подобны, должна выполняться пропорция $x : 2 = 2 : (5 - x)$. Получаем уравнение $x^2 - 5x + 4 = 0$,

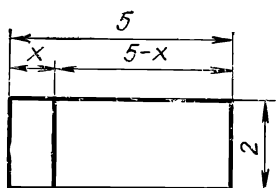


Рис. 205

корни которого $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Прямоугольники при этих значениях x действительно будут подобными. Искомая прямая должна проходить через точку, делящую большую сторону данного прямоугольника в отношении $1 : 4$, перпендикулярно этой стороне.

16. При условии $a > b$ на стороне a от вершины следует отложить отрезок длиной $\frac{a^2}{b}$ и через конец его провести прямую, параллельную стороне b . Отрезок длиной $\frac{a^2}{b}$ удовлетворяет пропорции $b : a = a : x$.

90. Отношение площадей подобных фигур (2 часа)

Основное содержание первого урока — формулирование и разъяснение важного свойства подобных фигур — отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия (квадрату отношения соответствующих сторон).

На этом уроке учащиеся должны усвоить теорему об отношении площадей подобных многоугольников и ее доказательство.

Чтобы подготовить формулирование теоремы об отношении площадей подобных фигур, целесообразно рассмотреть два квадрата. Они подобны. Если длина стороны первого a , а второго a_1 , то коэффициент подобия второго первому равен $k = \frac{a_1}{a}$, т. е. $a_1 = ka$. Площадь первого — a^2 , второго — $a_1^2 = (ka)^2 = k^2a^2$, и поэтому отношение площадей их равно

$$\frac{a_1^2}{a^2} = \frac{k^2a^2}{a^2} = k^2.$$

Точно так же могут быть рассмотрены два подобных прямоугольника. Пусть стороны первого имеют длины a и b , а второго a_1 и b_1 . Так как прямоугольники подобны, то $\frac{a_1}{a} = k$ и $\frac{b_1}{b} = k$, т. е. $a_1 = ka$ и $b_1 = kb$. Отношение их площадей равно $\frac{a_1b_1}{ab} = \frac{kakb}{ab} = k^2$. Можно ограничиться и одним примером, приведенным в начале пункта 90.

Рассмотренные примеры приводят к предположению, что вообще отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента их подобия.

Для подобных многоугольников полученный вывод может быть обоснован. Этому и посвящена теорема 58. Доказательство ее разбивается на две части. Сначала она доказывается для подобных треугольников. После примеров, разобранных в начале урока, это доказательство учащихся не затруднит и они могут провести его сами.

Во второй части доказательства рассматриваются подобные многоугольники с числом сторон больше 3.

В заключение доказательства целесообразно отметить, что теорема 58 доказана лишь для подобных многоугольников. Для подобных фигур, отличных от многоугольников, она тоже верна, но принимается без доказательства.

Оставшееся время урока следует использовать для решения задач по этому пункту. Задачи 1, 2, 3, 11, 12 могут быть предложены для устного решения.

З а д а н и е н а д о м. Задачи 4, 5 (3, 4).

На втором уроке по пункту 90 решаются задачи 7, 11. В конце этого урока может быть проведена самостоятельная работа № 28 или в классе решены предлагаемые в ней задачи. К задачам этого пункта следует обращаться и на последующих уроках.

З а д а н и е н а д о м. Задачи 6 (2), 8.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{9}$; 5) $\frac{k^2}{e^2}$.

2. 1) $2:3$; $\sqrt{3}:2$; 3) $1:2$; 4) $\sqrt{p}:\sqrt{t}$.

3. 1) Возрастет в n^2 раз. 2) Уменьшится в k^2 раз.

4. $9:1$; $9:4$.

5. $\frac{b^2 S}{a^2}$. 1) $121,5 \text{ см}^2$, 2) 96 см^2 , 3) 36 см^2 , 4) $\approx 66,7 \text{ см}^2$.

6. $h_1 = \frac{2S_1}{a_1}$; $a_2 = a_1 \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}$; $h = \frac{2\sqrt{S_1 S_2}}{a_1}$.

7. $14,4 \text{ м}^2$.

8. 1) Следует построить квадрат, сторона которого конгруэнтна половине стороны данного квадрата. 2) Следует построить квадрат, сторона которого конгруэнтна половине диагонали данного квадрата.

9. а) На стороне a данного треугольника следует отложить от вершины отрезок $a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{a}{2}} a$ (среднее пропорциональное отрезков $\frac{a}{2}$ и a) и через полученную точку провести прямую, параллельную стороне, противолежащей этой вершине. б) Искомый треугольник отсекает любая средняя линия данного.

10. Обозначим сторону вписанного квадрата через x . Имеем: $x:a = (h-x):h$, откуда $x = \frac{ah}{a+h}$ и, следовательно, площадь квадрата равна $\frac{a^2 h^2}{(a+h)^2}$; 1) 16 см^2 ; 2) 9 см^2 ; 3) 100 дм^2 .

11. В 10^6 раз.

12. В $4 \cdot 10^6$ раз.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ГОМОТЕТИИ И ПОДОБИЯ

Третий параграф VI главы является заключительным. Первый пункт его посвящен «методу подобия» при решении задач на построение. В последующих пунктах (в их текстах и задачах) описаны некоторые имеющие практическое значение приспособления и устройства, основанные на гомотетии и подобии (пропорциональный циркуль, поперечный масштаб, пантограф и другие), а также применения гомотетии и подобия для определения высот, расстояний и для мензульной съемки планов земельных участков.

Рассмотрение пунктов этого параграфа покажет учащимся большую практическую значимость гомотетии и подобия. Оно позволит также провести содержательное повторение основного материала VI главы.

Важную роль при изучении этого параграфа призваны играть содержащиеся в нем практические работы, и особенно проведение мензульной съемки планов земельных участков.

91. «Метод подобия» при решении задач на построение (3 часа)

Содержание уроков по пункту 91 — «метод подобия» при решении задач на построение, повторение основных вопросов первого и второго параграфов главы, а также решение задач к основным пунктам этих параграфов.

Первые два урока целесообразно уделить изучению «метода подобия» при решении задач на построение и практике его применения. Учащиеся должны научиться пользоваться этим методом для решения несложных задач.

В начале п е р в о г о урока по этому пункту можно рассмотреть задачу 3. Она послужит основанием для выявления сущности «метода подобия». Для первичного закрепления понимания учащимися этого метода может быть решена еще задача 5 по этому пункту.

В связи с решением этих задач и выяснением сущности «метода подобия» при решении задач на построение полезно поставить перед учащимися несколько вопросов: какие элементы и соотношения между элементами определяют форму треугольника (прямоугольника, ромба, параллелограмма)? Для ответов на эти вопросы учащимся придется воспользоваться признаками подобия этих фигур. Существенность этих вопросов объясняется тем, что первый этап решения задачи на построение «методом подобия» как раз и состоит в выделении данных задачи, определяющих искомую фигуру «с точностью до подобия». Для закрепления изученного можно провести в конце урока работу с учебником, предложив учащимся прочитать текст этого пункта и разобраться в решении двух изложенных в нем задач.

Н а д о м можно предложить учащимся задачи 6 и 7.

В начале второго урока следует продолжить решение приведенных в этом пункте задач на применение «метода подобия», а затем рассмотреть задачи на вписывание в данную фигуру другой фигуры. Таковы задачи 8, 9, 10, 11. Прием решения всех этих задач один и тот же. Основой его служит гомотетия. Сначала строится фигура, удовлетворяющая требованиям задачи частично, а затем с помощью гомотетии — искомая фигура. Здесь важен удачный выбор центра гомотетии.

З а м е ч а н и е. Нет необходимости для каждой решаемой задачи выполнять построение. Для некоторых задач достаточно проведения анализа и составления плана построения.

З а д а н и е н а д о м. Задачи 8 и 10 из п. 90.

В начале третьего урока можно решить 1—2 задачи из оставшихся по п. 91 и повторить вопросы параграфов 1 и 2 этой главы, которые по ряду причин учащимися усвоены недостаточно, затем решить задачи по изученному материалу VI главы. Эти задачи не должны быть случайными. Из оставшихся задач и задач на повторение по этой главе нужно взять для решения на этом уроке именно такие, которые, по наблюдениям учителя, затрудняют учащихся.

Может быть проведена самостоятельная работа.

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Можно построить треугольник $A_1B_1C_1$ по стороне B_1C_1 , конгруэнтной данному отрезку, и прилежащим к ней углам $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1B_1$, соответственно конгруэнтным углам ABC и ACB .

3, 4, 5. Вначале следует построить треугольник, подобный искомому, а затем по известному линейному элементу и искомый.

6. Сначала постройте ромб (по отношению диагоналей), подобный искомому.

7. Сначала постройте параллелограмм, подобный искомому (по отношению диагоналей и углу между ними).

8. Сначала следует построить прямоугольник с заданным отношением его сторон так, чтобы две вершины лежали на основании треугольника, а одна на боковой стороне. Останется построить прямоугольник, гомотетичный получившемуся, вершины которого лежали бы как требуется.

9. Постройте квадрат, для которого диагонали ромба были бы осями его симметрии, перпендикулярными сторонам. Точки пересечения диагоналей этого квадрата (или их продолжений) со сторонами ромба будут вершинами искомого квадрата.

10. Пусть дан угол ABC и D — внутренняя точка его. Проведите через D прямую, параллельную прямой BC . Пусть точка пересечения ее с прямой BA — E . От точки E на стороне BA (в направлении от B к A) отложите отрезок EF , длины $\frac{m}{n} |BE|$. Прямая FD — искомая.

11. У к а з а н и е. Сначала впишите в данный угол окружность произвольного радиуса, постройте прямую, соединяющую данную точку с вершиной угла, и проведите два радиуса построенной окружности в точки пересечения ее с построенной прямой. Из данной точки проведите лучи, параллельные этим радиусам, до пересечения с биссектрисой угла. Вы получите два центра искомых окружностей. Решение упрощается, если данная точка лежит на биссектрисе угла. (В случае развернутого угла задача имеет единственное решение.)

92—93. Пропорциональный циркуль. Поперечный масштаб (1 час)

Рассмотренные в этих пунктах приборы изучаются на одном уроке. О пропорциональном циркуле достаточно рассказать учащимся. Важна идея его устройства.

Разговор с учащимися о поперечном масштабе будет более продолжительным. В распоряжении каждого ученика должен быть транспортир с поперечным масштабом и измерительный циркуль. Кроме того, следует подготовить по рисунку 207 учебника настенный плакат-таблицу и воспользоваться им в ходе объяснений устройства поперечного масштаба. Конечно, необходимы упражнения в использовании поперечного масштаба. Им должны предшествовать упражнения на определение длин отрезков по меткам плаката-таблицы и рисунка 207 учебника. Можно также вернуться к задаче 13 пункта 90 и решить ее, воспользовавшись поперечным масштабом. Позднее поперечным масштабом учащимся придется воспользоваться при вычерчивании планов по результатам мензульной съемки участка местности.

На этом же уроке могут быть решены задача 1 к этому параграфу и некоторые другие задачи из предшествующих пунктов учебника.

Д о м а ш н е е з а д а н и е. Задачи 3, 4 к этому параграфу и одна из задач, взятая из предшествующих пунктов.

94—95. Определение высоты предмета. Определение расстояния до недоступной точки (1 час)

Решения двух задач этих пунктов в общем виде смогут предложить сами учащиеся. Существенно найти несколько основанных на подобии способов определения высот предметов и расстояний до недоступных точек.

На этом уроке (и на последующих) следует продолжать решение задач из учебника по всей изучаемой главе. Из этих задач выбирают и задачи для домашнего задания.

К следующему уроку группам учащихся могут быть даны задания по измерению высот находящихся в окрестности школы строений, деревьев, мачт, а также расстояний, недоступных для непосредственного измерения.

96. Мензульная съемка плана земельного участка (2 часа)

Первый из уроков по этому пункту имеет своей целью подробный инструктаж учащихся об основах мензульной съемки и тех приемах проведения их, которые описаны в учебнике. Должны быть показаны и объяснены школьные модели мензулы. Желательна также демонстрация геодезической мензулы.

На этом же уроке проводится организационная подготовка к проведению выхода на местность. Учащиеся разбиваются на несколько звеньев, по 5—6 человек в каждом. Проверяется также подготовленность всего, что потребуется для съемки плана заранее выбранного учителем участка земли (школьного двора, спортивной площадки, школьного сада, огорода, площади поселка и т. п.).

Необходимое оборудование по указанию учителя учащиеся могут подготовить дома и в школьных мастерских. Учебные мензулы, если их не окажется, могут быть заменены обычными трехгранными линейками.

Второй урок отводится для проведения съемок простых планов организованными для этого звеньями учащихся. Обработка полученных материалов (вычерчивание планов) проводится дома.

97. Пантограф

С пантографом учащиеся могут познакомиться по описанию его в учебнике. Особого урока на это не отводится. Но на одно из последующих уроков (по повторению за VII класс) желательно продемонстрировать хотя бы простейший (планочный) пантограф и показать, как им можно пользоваться для построения фигур, подобных данным.

О т в е т ы и у к а з а н и я
(для задач на повторение к главе VI).

1. У к а з а н и е. Докажите гомотетичность равносходных треугольников относительно точки пересечения диагоналей трапеции. Из доказанного будет следовать, что прямая, соединяющая третьи вершины этих треугольников, проходит через центр гомотетии — точку пересечения диагоналей трапеции.

2. Докажите гомотетичность относительно точки пересечения диагоналей трапеции соответственных вершин квадратов.

3. Любые два квадрата из построенных — гомотетичны. Центрами гомотетии служит точка пересечения диагоналей прямоугольника или общая вершина квадратов.

4. 1) Воспользовавшись теоремой Пифагора, получаем: $\left(\frac{l}{2}\right)^2 =$

$$= r^2 - (r - h)^2 \text{ или } \frac{1}{4} l^2 = 2rh - h^2, \text{ откуда } r = \frac{l^2}{8h} + \frac{h}{2}; \quad 2) \quad r = \frac{25}{6} \text{ см} \approx 4,2 \text{ см}.$$

5. Следует воспользоваться теоремой Пифагора. а) 10 см; б) $2\sqrt{13}$ см $\approx 7,2$ см; в) $\sqrt{200}$ см $\approx 14,1$ см; г) $\sqrt{200} - 10$ см $\approx 4,1$ см; д) $4\sqrt{2}$ см $\approx 5,7$ см; $6\sqrt{2}$ см $\approx 8,5$ см.

6. $\approx 6,4$ см; $\approx 4,8$ см.

7. У к а з а н и е. Выразите квадраты длин сторон четырехугольника через длины отрезков его диагоналей.

8. У к а з а н и е. Выразите квадраты длин двух сторон треугольника через длины проекций этих сторон на третью сторону и длину проведенной к ней высоты.

9. Можно воспользоваться методом координат. Прямоугольник со сторонами a и b можно расположить на координатной плоскости так, чтобы вершинами его были точки: $A(0; 0)$, $B(0; b)$, $C(a; b)$, $D(a; 0)$. Пусть O — произвольная точка с координатами x и y . Останется найти квадраты расстояний от O до соответствующих вершин и сравнить их суммы.

10. а) x — гипотенуза треугольника с катетами a и b ; б) x — катет треугольника с гипотенузой a и вторым катетом b .

11. 1) Воспользуйтесь теоремой Пифагора. 2) Окружность, диаметром которой служит данный отрезок.

12. $(a + h)^2 : h^2$; 1) $\frac{25}{9}$; 2) $\frac{324}{25}$.

13. $\frac{a^2 h^2}{(a + 2h)^3}$; 36 см².

14. Вершинами ромба являются точки пересечения контура параллелограмма с биссектрисами углов, образованных диагоналями параллелограмма.

15. У к а з а н и е. Постройте вначале трапецию, подобную искомой (по двум прилежащим к основанию углам и отношению этого основания к высоте), затем воспользуйтесь гомотетией. Можно поступить и иначе. Постройте высоту (по данному основанию и отношению его к этой высоте), затем постройте искомую трапецию (по основанию, двум углам при нем и высоте).

16. У к а з а н и е. Сначала постройте трапецию, подобную искомой (по двум углам при основании и отношению оснований).

17. У к а з а н и е. Сначала впишите в угол данного сектора квадрат, подобный искомому, так, чтобы биссектриса этого угла была осью симметрии квадрата, перпендикулярной двум противоположным сторонам, затем воспользуйтесь гомотетией.

18. У к а з а н и е. Сначала постройте квадрат, подобный искомому, так, чтобы одна из сторон его лежала на хорде сегмента, средние точки этой стороны и хорды совпадали.

19. У к а з а н и е. Решение этой задачи сводится к построению такого отрезка x , чтобы: 1) $c : a = b : x$; 2) $c : a = a : x$.

20. В каждом из данных треугольников проведите по одной высоте (к сторонам, заключающим конгруэнтные углы), запишите отношение площадей треугольников и замените в нем отношение высот отношением соответствующих сторон.

21. $\frac{2Qmn}{(m+n)^2}$. У к а з а н и е. Длины сторон данного треугольника, заключающих общий с ромбом угол, обозначьте через mx и nx и воспользуйтесь заключением предшествующей задачи. (В ходе преобразований x сократится.)

22. У к а з а н и е. Воспользуйтесь теоремой Пифагора и теоремой об отношении площадей подобных фигур.

Контрольная работа № 1 (пп. 47—50)

Вариант 1

1. Диагонали прямоугольника образуют угол в 120° . Найдите длину каждой диагонали, если меньшая сторона прямоугольника равна 5 см.

2. Постройте ромб по стороне в 4 см и углу в 40° .

Дополнительное задание. Из каких четырех конгруэнтных треугольников можно составить квадрат? Выполните чертёж.

Вариант 2

1. Диагональ делит параллелограмм на два равнобедренных треугольника. Определите вид этого параллелограмма; вычислите его углы и угол, который образует большая его диагональ со сторонами параллелограмма.

2. Постройте квадрат по его диагонали, равной 5 см.

Дополнительное задание. Из каких четырех конгруэнтных ромбов можно составить ромб?

Вариант 3

1. Найдите высоту прямоугольной трапеции с основаниями в 4 см и 8 см, один из углов которой равен 135° .

2. Постройте параллелограмм по его сторонам в 2 см и 4 см и диагонали в 3 см.

Дополнительное задание. Из каких четырех конгруэнтных параллелограммов (отличных от ромба) можно составить ромб?

Вариант 4

1. Основания трапеции равны 10 см и 15 см. На какие отрезки делит ее среднюю линию диагональ трапеции?

2. Постройте прямоугольник по стороне в 5 см и диагонали 7 см. Проведите все его оси симметрии.

Дополнительное задание. Из каких четырех конгруэнтных четырехугольников можно составить ромб? Выполните чертёж.

Контрольная работа № 2 (к § 4 гл. II)

Вариант 1

1. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см, 6 см. Высота, проведенная к меньшей стороне треугольника, равна 4,8 см. Вычислите остальные высоты треугольника.

2. Найдите площадь ромба, составленного из двух конгруэнтных прямоугольных треугольников, катеты которых равны 4 см.

Дополнительное задание. (См. «Дидактические материалы», контрольная работа № 2, задание 3.)

Вариант 2

1. Две стороны треугольника равны 6 см и 10 см; высота, проведенная к меньшей из этих сторон, равна 5 см. Вычислите высоту, проведенную к другой из данных сторон.

2. Вычислите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 2,6 см и 4,6 см, а одна из боковых сторон образует с основанием угол в 45° .

Дополнительное задание. (См. указание к 1-му варианту работы.)

Вариант 3

1. Площадь параллелограмма равна 41 см², стороны его равны 5 см и 10 см. Найдите обе высоты параллелограмма.

2. Площадь трапеции равна 36 см², высота ее 2 см. Одно из оснований 10 см. Найдите второе основание трапеции.

Дополнительное задание. (См. указание к 1-му варианту работы.)

Вариант 4

1. Вычислите площадь четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны 4 см и 6 см.

2. Стороны параллелограмма равны 2,6 см и 5,2 см. Высота, проведенная к большей стороне параллелограмма, равна 3 см. Найдите вторую высоту параллелограмма.

Дополнительное задание. (См. указание к 1-му варианту работы.)

Контрольная работа № 3 (к IV гл.)

Вариант 1

1. Начертите прямоугольный треугольник. Опишите около него окружность.

2. Сформулируйте и докажите достаточное условие того, чтобы две дуги окружности были конгруэнтны (используйте центральные углы).

Дополнительное задание. Докажите, что величина угла между хордой и диаметром, проведенными из одной точки окружности, равна половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

Вариант 2

1. Начертите тупоугольный треугольник. Опишите около него окружность.

2. Сформулируйте и докажите теорему о расстояниях конгруэнтных хорд от центра окружности.

Дополнительное задание. В параллелограмме проведены диагонали. С помощью одного циркуля постройте основание высоты этого параллелограмма, проведенной из вершины тупого угла.

Вариант 3

1. Разделите данную дугу пополам.

2. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, проходящей через три точки.

Дополнительное задание. Стороны треугольника касаются окружности в точках A_1 , B_1 , C_1 . На дуге A_1B_1 окружности взята точка M и через нее проведена касательная к той же окружности. Докажите, что периметр треугольника, отсекаемого этой касательной, не зависит от положения точки M на окружности.

Вариант 4

1. Две точки окружности определяют на ней две дуги, угловые величины которых относятся как 11 : 13. Вычислите угловые величины этих дуг.

2. Сформулируйте и докажите теорему о прямой, перпендикулярной диаметру окружности и проходящей через его конец.

Дополнительное задание. Докажите, что две вершины треугольника и основания его высот, проведенные из этих вершин, принадлежат одной окружности.

Контрольная работа № 4 (к пп. 69—75)

Вариант 1

1. Задайте два неколлинеарных вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AB . Выразите вектор \overrightarrow{CM} через векторы \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{CD} .

Вариант 2

1. Задайте два неколлинеарных вектора $\vec{m} = \overrightarrow{MN}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{MK}$. Постройте вектор $-\vec{m} + \vec{n}$.

2. В ромбе $ABCD$ точка M — середина стороны CD . Выразите вектор \overrightarrow{AM} через векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AD} .

Вариант 3

1. Задайте два неколлинеарных вектора $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{BD}$. Постройте вектор $-\vec{c} - \vec{b}$.

2. В квадрате $ABCD$ точка O — середина стороны BC . Выразите вектор \overrightarrow{DO} через векторы \overrightarrow{DA} и \overrightarrow{DC} .

Вариант 4

1. Задайте два неколлинеарных вектора $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$ и $\vec{k} = \overrightarrow{DB}$. Постройте вектор $\vec{d} - 2\vec{k}$.

2. В параллелограмме $MKED$ точка A — середина стороны MK . Выразите вектор \overrightarrow{DA} через векторы \overrightarrow{MD} и \overrightarrow{DE} .

Контрольная работа № 5 (к § 1 гл. VI)

Вариант 1

1. Дан треугольник и точка O , лежащая вне его. Постройте фигуру, гомотетичную данному треугольнику, относительно центра O с коэффициентом гомотетии $k = 1,5$.

2. Дан отрезок. Разделите его на части, пропорциональные числам 1, 3 и 4.

Вариант 2

1. Дана трапеция $ABCD$, $[AD] \parallel [BC]$. Постройте фигуру, гомотетичную той трапеции, с центром в точке D и коэффициентом $k = -\frac{2}{3}$.

2. Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к его основанию как 5 : 7. Периметр этого треугольника равен 85 см. Вычислите длины сторон треугольника.

Вариант 3

1. Дан параллелограмм и точка M внутри его. Постройте фигуру, гомотетичную этому параллелограмму, с центром M и коэффициентом гомотетии $k = \frac{4}{3}$.

2. Сторона BC треугольника ABC разделена на три конгруэнтных отрезка и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне AB , длина которой 12 см. Вычислите длины отрезков этих прямых, заключенных между сторонами BC и AC треугольника.

Вариант 4

1. Дана трапеция $ABCD$ и точка S внутри нее. Постройте фигуру, гомотетичную этой трапеции, относительно S с коэффициентом гомотетии $k = \frac{2}{3}$.

2. Основания трапеции равны 36 см и 48 см, а одна из боковых сторон равна 21 см. Вычислите длину продолжения этой боковой стороны до пересечения с другой боковой стороной.

Контрольная работа № 6 (к § 2 гл. VI)

Вариант 1

1. Начертите произвольный треугольник и построьте подобный ему (но не гомотетичный) с коэффициентом подобия k , равным 1,5.

2. Вычислите боковую сторону равнобедренной трапеции, если высота трапеции равна 12 см, а основания — 23 см и 13 см.

Дополнительное задание. Диаметр окружности делится точкой на два отрезка в 4 см и 6 см. Через точку деления проведена хорда, перпендикулярная этому диаметру. Вычислите ее длину.

Вариант 2

1. Постройте треугольник, подобный данному (но не гомотетичный) с коэффициентом подобия k , равным $\frac{3}{2}$.

2. Основания трапеции равны 11 см и 17 см, ее высота равна 8,4 см. Вычислите расстояние точки пересечения диагоналей трапеции от ее оснований.

Дополнительное задание. Отношение катетов треугольника равно $\frac{3}{4}$, длина его гипотенузы равна 3,5 см. Вычислите длину каждого катета.

Вариант 3

1. Постройте параллелограмм, подобный данному (но не гомотетичный) с коэффициентом гомотетии k , равным $\frac{3}{2}$.

2. В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие — на боковых сторонах. Основание треугольника 10 см, высота 15 см. Вычислите сторону квадрата.

Дополнительное задание. Расстояние между центрами двух конгруэнтных окружностей радиуса 5 см равно 8 см. Вычислите длину общей хорды этих окружностей.

Вариант 4

1. Постройте трапецию, подобную данной (но не гомотетичную) с коэффициентом подобия k , равным $\frac{2}{3}$.

2. Высота трапеции $ABCD$ ($[AD] \parallel [BC]$, $|AD| > |BC|$) равна $5,6$ см. Боковые стороны этой трапеции продолжены до их пересечения (точка E). Вычислите высоту h_b треугольника AED , если $|CD| = 7,6$ см, $|CE| = 1,9$ см.

Дополнительное задание. В угол вписаны две внешне касающиеся окружности. Центры этих окружностей отстоят от вершины угла на 3 см и 9 см. Вычислите радиусы этих окружностей.

Контрольная работа № 7 (к § 3 гл. VI)

Вариант 1

1. Вычислите длину озера $|AB|$ (рис. 206), если $[CD] \parallel [AB]$, $C \in [AE]$, $D \in [BE]$, $|AE| = 102$ м, $|CE| = 68$ м и $|CD| = 86$ м.

2. Постройте треугольник по углу, отношению двух заключающих этот угол сторон и медиане, проведенной к третьей стороне.

3. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Вычислите медиану, проведенную к гипотенузе.

Вариант 2

1. Вычислите длину озера $|AB|$ (рис. 207), если $[CD] \parallel [AB]$, $C \in [AE]$, $D \in [BE]$, $|AC| = 42$ м, $|CE| = 56$ м, $|CD| = 48$ м.

2. Постройте прямоугольный треугольник по двум данным отрезкам, являющимся проекциями его катетов на гипотенузу.

3. Стороны треугольника, образующие угол в 120° , равны $3,5$ см и 4 см. Вычислите третью сторону этого треугольника.

Вариант 3

1. Вычислите длину озера $|AB|$ (рис. 208), если $[CD] \parallel [AB]$, $C \in [AE]$, $D \in [BE]$, $\frac{|AC|}{|CE|} = \frac{5}{6}$ и $|CD| = 96$ м.

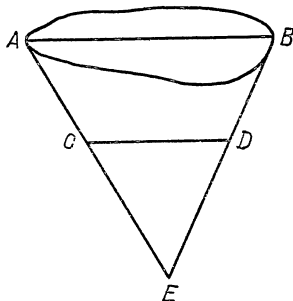


Рис. 206

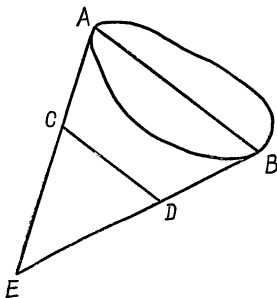


Рис. 207

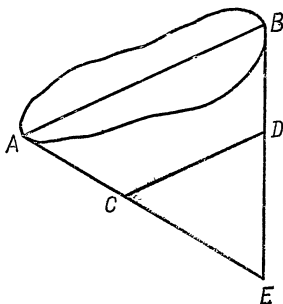


Рис. 208

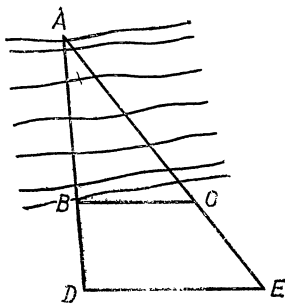


Рис. 209

2. Постройте треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

3. В четырехугольнике $ABCD$ $\hat{C}=60^\circ$. Вычислите диагональ $|BD|$, если $|BC|=10$ см и $|CD|=12$ см.

Вариант 4

1. Вычислите ширину реки $|AB|$ (рис. 209), если $|BC| \parallel |DE|$, $B \in [AD]$, $C \in [AE]$, $|BC|=18$ м, $|DE|=26$ м, $|BD|=84$ м.

2. Постройте треугольник, если дана сумма двух его сторон $a+b$, отношение этих сторон $a:b$ и угол, заключенный между этими сторонами.

3. В параллелограмме $ABCD$ $\hat{D}=120^\circ$, $|AB|=20$ см, $|BC|=12$ см. Вычислите диагональ $|AC|$.

ПРИМЕРНЫЙ КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН

Глава II. Многоугольники (продолжение)

46. Необходимые и достаточные условия	2
47. Прямоугольник	1
48. Ромб	2
49. Квадрат	1
50. Трапеция	2
<i>Контрольная работа</i>	1
51. Общие сведения о площадях фигур	2
52. Площадь параллелограмма	1
53. Площадь треугольника	1
54. Площадь трапеции	1
55. Площадь многоугольника	1
<i>Контрольная работа</i>	1

Глава IV. Окружность и круг

62. Число точек, определяющих окружность	1
63. Хорды и касательные	2
64. Одно замечательное свойство окружности	2
65. Центральные углы и дуги	2
66. Дуги и хорды	2
67. Угловая величина дуги	1
68. Зависимость между расстоянием хорды от центра, ее длиной и угловой величиной стягиваемой ею дуги	3
<i>Контрольная работа</i>	1

Глава V. Векторы

69. Перемещения. Векторы и способы их задания	3
70. Вектор как частный случай перемещения	1
71. 72. Сложение векторов. Коллинеарные векторы	4
73. Сочетательность сложения векторов. Противоположный вектор. Вычитание векторов	3
74. Умножение вектора на число	2
75. Основные законы векторной алгебры	3
<i>Контрольная работа</i>	1

Глава VI. Подобие

78. Подобные фигуры	1
79. Определение гомотетии	2
80. Основные свойства гомотетии	2
81. Пропорциональные отрезки	2
82. Построение гомотетичных фигур	2
83. Построение подобных фигур	2

<i>Контрольная работа</i>	1
85. Признак подобия треугольников по трем сторонам	1
86. Признак подобия треугольников по двум углам	1
87. Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу	2
88. Теорема Пифагора	2
89. Подобные многоугольники	1
90. Отношение площадей подобных фигур	2
91. «Метод подобия» при решении задач на построение	3
<i>Контрольная работа</i>	1
92. 93. Пропорциональный циркуль.	
Поперечный масштаб	1
94. 95. Определение высоты предмета.	
Определение расстояния до недоступной точки	1
96. Мензульная съемка плана земельного участка	2
97. Пантограф	
Повторение	7
Резерв времени	5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава II. Многоугольники (продолжение)	11
§ 4. Площади многоугольников	40
Глава IV. Окружность и круг	60
Глава V. Векторы	96
Глава VI. Подобие	127
§ 1. Подобие и гомотетия	129
§ 2. Подобные многоугольники	145
§ 3. Некоторые применения гомотетии и подобия	160
Приложения	166

*Валерий Александрович Гусев
Галина Герасимовна Маслова
Федор Федорович Нагибин
Александр Федорович Семенович
Ростислав Семенович Черкасов*

ГЕОМЕТРИЯ В VII КЛАССЕ
(пособие для учителей)

Редактор *Г. С. Уманский*

Художественный редактор *Е. Н. Карасик*

Технический редактор *В. Ф. Коскина*

Корректоры *К. А. Иванова* и *В. Г. Соловьева*

Сдано в набор 4/VI 1973 г. Подписано к печати
22/VIII 1973 г. 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 3.
Печ. л. 11,0. Уч.-изд. л. 11,13. Тираж 300 тыс. экз.
Заказ № 6303.

Издательство «Просвещение»
Государственного комитета
Совета Министров РСФСР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Ордена Трудового
Красного Знамени Первой Образцовой типографии
имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
в областной типографии управления издательств,
полиграфии и книжной торговли Ивановского
облисполкома, г. Иваново-8, ул. Типографская, 6,

30 коп.