ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ

Том 14

ВЫПУСКИ И ТОМА СЕРИИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ

Алгебра. Топология. 1962, М., 1964
Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964
Геометрия. 1963, М., 1965
Математический анализ. 1963, М., 1965
Теория вероятностей. 1963, М., 1965
Алгебра. 1964, М., 1966
Математический анализ. 1964, М., 1966
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1964, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967
Математический анализ. 1965, М., 1966
Алгебра. Топология Геометрия. 1966, М., 1968
Математический анализ. 1966, М., 1967
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1966, М., 1967
Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969
Математический анализ. 1967, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1967, М., 1969
Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970
Математический анализ 1968, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1968, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1970
Математический анализ. 1969, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1969, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971
Математический анализ. 1970, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970, М., 1971
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 10, М., 1972
Математический анализ. Том 10, М., 1973
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 10, М., 1972
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 11, М., 1974
Математический анализ. Том 11, М., 1973
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 11, М., 1974
Современные проблемы математики. Том 1, М., 1973
Современные проблемы математики. Том 2, М., 1973
Современные проблемы математики. Том 3, М., 1974
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 12, М., 1974
Математический анализ. Том 12, М., 1974
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 12, М., 1975
Современные проблемы математики. Том 4, М., 1975
Современные проблемы математики. Том 5, М., 1975
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 13, М., 1975
Математический анализ. Том 13, М., 1975
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 13, М., 1976
Современные проблемы математики. Том 6, М., 1976
Современные проблемы математики. Том 7, М., 1975
Проблемы геометрии. Том 7, М., 1975

МОСКВА 1976

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ

Том 14

Научный редактор
профессор *Р. В. Гамкрелидзе*

МОСКВА 1976

Серия АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ. Том 14 содержит 5 обзоров:

В обзоре В. Д. Мазурова, **«Конечные группы»** отражены работы, прореферированные в РЖ «Математика» с 1970 г. по 1975 г. Особое внимание уделено простым группам, примарным группам и группам автоморфизмов конечных групп.

В обзоре А. В. Михалева, Л. А. Скорнякова, **«Модули»** освещены результаты по теории модулей над кольцами и некоторым примыкающим направлениям (локализации колец, гомологическая классификация колец, отдельные вопросы теории автоматов и систем линейных уравнений над кольцами), отраженные в РЖ «Математика» за 1972—1975 гг.

Обзор В. А. Артамонова, **«Универсальные алгебры»** отражает работы по универсальным алгебрам, прореферированным в РЖ «Математика» в 1967—1975 годах. Рассматриваются различные свойства клонов операций квазимногообразий и многообразий алгебр, алгебраические конструкции. Рассмотрен ряд специальных классов алгебр.

В обзоре В. И. Ведерникова, А. С. Феденко, **«Симметрические пространства и их обобщения»** изложены результаты исследования симметрических пространств (римановых, псевдоримановых, аффинных, пространств образов симметрии и др.), а также их обобщений (субсимметрических, редуктивных, φ-пространств и др.), полученные после 1964 года.

В обзоре В. И. Башкова, **«Классы точных решений уравнений Эйнштейна»** освещаются работы, посвященные нахождению точных решений полевых уравнений общей теории относительности, вышедшие в свет за последние 10 лет.

ОТ РЕДАКЦИИ

Серия «Алгебра. Топология. Геометрия. Том 14» охватывает в основном литературу, прореферированную в Реферативном журнале «Математика» за 1964—1975 гг. К каждой статье прилагается библиография вопроса со ссылкой на реферат.

Редакция обращается ко всем читателям с просьбой прислать свои отзывы и пожелания в отношении дальнейшей формы и содержания выпусков «Итоги науки и техники» по адресу: *Москва, 125219, Балтийская ул., 14, ВИНИТИ, Отдел математики*

УДК 519.44

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

В. Д. Мазуров

Настоящий обзор, составленный преимущественно по материалам Реферативного журнала «Математика» за 1970—1975 гг., является продолжением одноименных обзоров А. И. Кострикина [86] и С. А. Чунихина и Л. А. Шеметкова [232]* и так же, как эти обзоры, не претендует на полноту. В частности, обойдены молчанием представления конечных групп матрицами и подстановками, требующие отдельного обзора. Наличие содержательного обзора Л. А. Шеметкова [242], касающегося результатов о разрешимых группах и их обобщениях, позволило нам не затрагивать эту тему.

ПРОСТЫЕ ГРУППЫ

Спорадические группы. Пятнадцать лет назад многим математикам казалось, что, кроме знакопеременных групп, групп автоморфизмов классических алгебр Ли над конечным полем и их скрещенных аналогов, других конечных простых групп нет. Досадное исключение составляли пять групп Матье, открытые еще в прошлом веке, однако и их при желании можно было рассматривать как мутации классических групп небольших размерностей. Появление в 1966 году новой простой группы [232:500] — мутанта серии групп Ри — не могло поколебать этой уверенности, однако последовавшие затем открытия все новых простых групп полностью ее разрушили. К настоящему времени открыто свыше 20 простых «спорадических» групп, не входящих в известные бесконечные серии конечных простых групп. Сведения о них можно почерпнуть в обзорах [341, 631], а также работах [301, 302, 305, 306, 314—318, 320, 346, 348, 355, 397—399, 409, 449, 452, 457, 459, 460, 467, 502, 503, 506, 514,

* Ссылки [86 : 000] или [232 : 000] указывают на работы, стоящие в списке литературы обзоров [86] или [232] под номером 000. Например, ссылка [232 : 500] обозначает ссылку на работу [500] из обзора [232].

529—531, 592, 632, 641, 663]. Здесь мы лишь укажем их порядки и общепринятые обозначения:

M_{11} $2^4\cdot3^2\cdot5\cdot11$
M_{12} $2^6\cdot3^3\cdot5\cdot11$
M_{22} $2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11$
M_{23} $2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot23$
M_{24} $2^{10}\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot23$
Ja $2^3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot19$
HaJ $2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot7$
HJM $2^7\cdot3^5\cdot5\cdot17\cdot19$
HHM $2^{10}\cdot3^3\cdot5^2\cdot7^3\cdot17$
HiS $2^9\cdot3^2\cdot5^3\cdot7\cdot11$
McL $2^7\cdot3^6\cdot5^3\cdot7\cdot11$
Suz $2^{13}\cdot3^7\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13$
Co_1 $2^{21}\cdot3^9\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot23$
Co_2 $2^{18}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7\cdot11\cdot23$
Co_3 $2^{10}\cdot3^7\cdot5^3\cdot7\cdot11\cdot23$
Fi_{22} $2^{17}\cdot3^9\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot23$
Fi_{23} $2^{18}\cdot3^{13}\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot23$
Fi_{24}' $2^{21}\cdot3^{16}\cdot5^2\cdot7^3\cdot11\cdot13\cdot17\cdot23\cdot29$
Ly $2^8\cdot3^7\cdot5^6\cdot7\cdot11\cdot31\cdot37\cdot67$
Ru $2^{14}\cdot3^3\cdot5^3\cdot7\cdot13\cdot29$
O'N $2^9\cdot3^4\cdot5\cdot7^3\cdot11\cdot19\cdot31$
T $2^{15}\cdot3^{10}\cdot5^3\cdot7\cdot13\cdot31$
HN $2^{14}\cdot3^6\cdot5^6\cdot7\cdot11\cdot19$
Ja_2? $2^{21}\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot11^3\cdot23\cdot29\cdot31\cdot37\cdot43$
F_1? $2^{46}\cdot3^{20}\cdot5^9\cdot7^6\cdot11^2\cdot13^3\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot41\cdot47\cdot59\cdot71$
F_2? $2^{41}\cdot3^{13}\cdot5^6\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot31\cdot47$

Существование некоторых из них было доказано с привлечением счетных машин. Есть очень веские соображения в пользу существования трех последних групп этого списка, но доказательства существования пока нет.

Характеризации силовскими подгруппами. Поскольку каждая неабелева простая группа имеет нетривиальную силовскую 2-подгруппу, «узнавание» простых групп по их силовским 2-подгруппам — важная задача теории простых групп. Говорят, что 2-группа T имеет тип L, где L — данная простая группа, если T изоморфна силовской 2-подгруппе из L. Под характеризацией простой группы L ее силовской 2-подгруппой понимают результат такого сорта: Пусть силовская 2-подгруппа простой группы G имеет тип L. Тогда G изоморфна одной из групп (следует перечисление, включающее, конечно, и группу L). Ниже в таблице приведены известные к настоящему времени характеризации простых групп их силовскими 2-подгруппами.

Тип силовской 2-подгруппы	Простые группы с такой силовской 2-подгруппой
PSL(2, q), q нечетно	PSL(2, r), r нечетно, A_7 [232 : 398]
PSL(2, 2^n)	PSL(2, q), $q\equiv\pm1$ (mod 8), $q>3$, PSL(2, 2^n), Ja, группы типа Ри [232 : 776]
PSL(3, q), q нечетно	PSL(3, r), PSU(3, r), r нечетно, M_{11} [261*, 262]
PSL(3, 2^n), $n>1$	PSL(3, 2^n) [107, **310****]
PSU(3, 2^{2n})	PSU(3, 2^{2n}) [186, 312, 505]
PSL(4, q), q нечетно	PSL(4, r), PSU(4, r^2), r нечетно, M_{22}, M_{23}, McL, A_{10}, A_{11} [525, 526]
PSL(5, q), q нечетно	PSL(5, r), PSU(5, r^2), r нечетно [313]
PSp(4, q), q нечетно	PSp(4, r), r нечетно, A_8, A_9 [390]
PSp(6, q), q нечетно	PSp(6, r), r нечетно [422]
$G_2(q)$, q нечетно	$C_2(r)$, ${}^3D_4(r)$, r нечетно, M_{12} [387]***
$G_2(2^n)$, $n\geqslant2$	$G_2(2^n)$ [527]
Sz(2^n)	Sz(2^n) [186, 309]
HaJ	**HaJ, HJM [384]*****
Ly	Ly [386, 506]
HHM	HHM, M_{24}, PSL(5, 2) [580]
Co_3	Co_3 [602]
HiS	HiS [386]
Suz	Suz [567]

* Эта работа содержит ошибки, см. [263].
** Ошибки этой работы исправлены в [311].
*** Ошибки этой работы исправлены в [414].

Отметим еще следующие неполные характеризации силовскими 2-подгруппами. Пусть G — простая группа с силовской 2-подгруппой T.

Если T типа A_{16}, то G изоморфна A_{16}, A_{17}, или же картина слияния инволюций в G такая же, как в Ω (9, q). Последнее означает, что существует такой изоморфизм T на силовскую 2-подгруппу из Ω (9, q), что две инволюции из T сопряжены в G тогда и только тогда, когда их образы при этом изоморфизме сопряжены в $\Omega(9, q)$ [667, 668].

Если T типа A_{12}, то либо G изоморфна A_{12}, A_{13}, Sp(6, 2), либо существует изоморфизм Θ группы T на силовскую 2-подгруппу некоторой группы B, лежащей в $\mathrm{Aut}\Omega(7, q)$, $q\equiv\pm3(\mathrm{mod}\,8)$, и содержащей $\Omega(7, q)$ как подгруппу нечетного порядка, что $C_G(i)\simeq C_B(i_\Theta)$ для любой инволюции i из T; в частности, G имеет ту же картину слияния инволюций, что и $\Omega(7, 3)$ [600, 601].

Общие свойства силовских 2-подгрупп. Простые группы с абелевыми силовскими 2-подгруппами были перечислены Уолтером [232:776]. Это PSL (2, 2^n), PSL (2, q), $q\equiv\pm3$ (mod 8), группы типа Ри и Ja. Следующий шаг сделали Гилман и Горенстейн [366]: Простая группа с двуступенно нильпотентной силовской 2-подгруппой изоморфна PSL(2, q), $q\equiv\pm7$(mod 16), A_7, Sz(2^n), PSU(3, 2^n), PSL(3, 2^n) или PSp(4, 2^n).

Если коммутант силовской 2-подгруппы простой группы G — нетривиальная циклическая подгруппа, то G изоморфна PSL(2, q), $q\equiv\pm3$(mod 8), PSL(3, q), PSU(3, q^2), q нечетно, A_7 или M_{11} [3, 304]. Этому классу групп принадлежит и любая простая группа, силовская 2-подгруппа которой содержит абелеву подгруппу индекса 2 [380].

Экстраспециальной называют p-группу, в которой центр, коммутант, подгруппа Фраттини совпадают и имеют порядок 2. Если силовская 2-подгруппа простой группы содержит экстраспециальную подгруппу индекса 2, то группа изоморфна $\mathrm{PSL}(2, q)$, $\mathrm{PSL}(3, q)$, $\mathrm{PSU}(3, q^2)$, $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $\mathrm{PSp}(4, q)$ для подходящего нечетного числа q, A_8, A_9, M_{11} или M_{12} [75].

Если силовская 2-подгруппа простой группы G изоморфна неабелевой силовской 2-подгруппе из некоторой группы Шмидта, то G изоморфна $\mathrm{PSU}(3,2^{2n})$ [108].

Если все инволюции силовской 2-подгруппы T простой группы G попарно перестановочны, то либо T абелева, либо G изоморфна $\mathrm{PSU}(3,2^n)$ или $\mathrm{Sz}(2^n)$ для некоторого числа n [380].

Во всех перечисленных здесь результатах методы исследования в случаях, когда силовская 2-подгруппа обладает элементарной подгруппой порядка 8, существенно отличаются от способов рассмотрения групп без больших элементарных подгрупп и восходят к богатой идеями работе Томпсона и Фейта о разрешимости групп нечетного порядка. В это работе впервые были продемонстрированы глобальные методы исследования p-структуры простых групп большого p-ранга, т. е. тех групп, в которых есть абелевы p-подгруппы с большим числом образующих. Эти методы были затем развиты в блестящей работе Томпсона [624], отдельные части которой и вся она в целом еще до её выхода в свет подверглись многочисленным обобщениям многочисленных последователей.

Назовем рангом абелевой группы минимальное число ее образующих. Говорят, что (нормальный) p-ранг группы равен k, если k — максимум рангов ее (нормальных) абелевых p-подгрупп. Секционным p-рангом группы называют максимум рангов абелевых сечений ее силовской p-подгруппы. Таким образом, секционный ранг группы равен k, если её любая p-подгруппа порождается $\leqslant k$ элементами и существует p-подгруппа, которая не порождается k—1 элементами.

Для $p=2$ граница между глобальными и «кустарными» методами обычно пролегает в группах ранга 3 и 4. Именно этим объясняется интерес многих исследователей к группам малого 2-ранга, в особенности к группам нормального 2-ранга 2.

Пусть $\mathcal{A}$ — класс конечных простых групп нормального 2-ранга 2.

Начало исследования класса $\mathcal{A}$ было положено работой Томпсона и Янко [470], в которой описан подкласс $\mathcal{A}$, состоящий из групп, удовлетворяющих условию: централизатор инволюции i из силовской 2-подгруппы T разрешим, если $|T:C_T(i)|\leqslant 2$. Он исчерпывается группами $\mathrm{PSL}(2, q)$, q нечетно, $\mathrm{PSL}(3, 3)$, $\mathrm{PSU}(3, 3^2)$, $\mathrm{PSU}(3, 4^2)$, A_7, M_{11}. Результаты Томпсона и Янко обобщил Сегал [582], заменивший условие разрешимости соответствующих централизаторов инволюций на условие их 2-скованности. (Группа H называется 2-скованной, если для силовской 2-подгруппы P из $O_{2',2}(H)$ выполнено свойство $C_H(P)\subseteq O_{2',2}(H)$. Разрешимые группы всегда 2-скованы). Тем самым к списку Томпсона — Янко добавились группы HaJ, HJM.

Другой путь был избран Мак-Вильямс-Паттерсон [513, 548], которая в результате кропотливого анализа перечислила типы силовских 2-подгрупп простых групп из класса $\mathcal{A}$. Вместе с 2-силовскими характеризациями известных простых групп из класса $\mathcal{A}$, а также с результатами, доказывающими несуществование простых групп с определенными типами силовских 2-подгрупп [388, 413, 593, 594], это дает описание класса $\mathcal{A}$. Конечная простая группа, в силовской 2-подгруппе которой нет нормальных элементарных подгрупп порядка 8, изоморфна одной из следующих групп: $\mathrm{PSL}(2, q)$, $\mathrm{PSL}(3, q)$ $\mathrm{PSU}(3, q^2)$, q нечетно, $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $q\equiv\pm 1 \pmod 8$, $\mathrm{PSL}(4, q)$, $q\equiv -1 \pmod 8$, $\mathrm{PSU}(4, q^2)$, $q\equiv 1 \pmod 8$, $\mathrm{PSp}(4, q)$, $q\equiv\pm 1 \pmod 8$, $\mathrm{PSL}(5, q)$, $q\equiv -1 \pmod 4$, $\mathrm{PSU}(5, q)$, $q\equiv 1 \pmod 4$, $\mathrm{PSU}(3, 4^2)$, A_7, M_{11}, HaJ, HJM, Ly.

В первой из цитированных работ Мак-Вильямс показала также, что любая подгруппа из 2-группы T нормального ранга 2 порождается не более чем 4 элементами. Это свойство, в отличие от свойства быть группой нормального 2-ранга 2, индуктивно, т. е. переносится на подгруппы и факторгруппы, и, выделяя более широкий класс, тем не менее во многих отношениях более удобно, поскольку позволяет проводить классификацию по индукции и иметь дело с группами, у которых композиционные факторы собственных подгрупп — известные группы. Работа по описанию простых групп, в которых любая 2-подгруппа порождена не более чем четырьмя элементами, была проделана Горенстейном и Харадой [389, 391], опиравшимися на многочисленные характеризационные результаты. Соответствующий класс групп состоит из $\mathrm{PSL}(2, q)$, $\mathrm{PSL}(3, q)$, $\mathrm{PSU}(3, q^2)$, $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $\mathrm{PSp}(4, q)$, $\mathrm{PSL}(4, q)$, $q\not\equiv 1 (\mathrm{mod} 8)$, $\mathrm{PSU}(4, q^2)$, $q\not\equiv 7 (\mathrm{mod} 8)$, $\mathrm{PSL}(5, q)$, $q\equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$, $\mathrm{PSU}(5, q^2)$, $q\equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$ (q везде нечетно), $\mathrm{PSL}(2,8)$, $\mathrm{PSL}(2,16)$, $\mathrm{PSL}(3,4)$, $\mathrm{PSU}(3,4^2)$, $\mathrm{Sz}(8)$, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, группы типа Ри, M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, Ja, HaJ, HJM, McL, Ly.

Следует отметить, что список групп в работе [389] неполон: в него не попали группы $\mathrm{PSL}(5, q)$ и $\mathrm{PSU}(5, q^2)$, а некоторые места работы [391] нуждаются в исправлении.

Описание групп секционного 2-ранга 4 позволяет сделать следующий шаг в классификации простых групп, содержащих 2-подгруппу A, совпадающую со своим централизатором. Рассмотрение случая, когда $|A|=4$, было закончено в [232:92]. Оказывается, что секционный ранг 2-группы S, содержащей подгруппу A порядка 8, для которой $C_S(A)\subseteq A$, не превосходит 4 [173, 174, 414, 578].

Классификация простых групп 2-ранга 3 остается пока нерешенной задачей. С. А. Сыскин [185, 188] показал, что группы $PSL(2,8)$, $PSU(3,8^2)$, $Sz(8)$ и $G_2(3)$ исчерпывают список простых групп 2-ранга 3 с разрешимыми централизаторами инволюций.

Важной нерешенной задачей является проверка следующей гипотезы: Если силовская 2-подгруппа некоторой группы — прямое произведение двух нетривиальных множителей, по крайней мере один из которых неабелев, то группа непроста. Эта гипотеза верна, если один из сомножителей — кватернионная группа. Она проверена также в случаях, когда каждый сомножитель является абелевой, диэдральной, полудиэдральной или сплетенной (изоморфной $Z_{2^n} \wr Z_2$) группой [3, 304, 353, 388, 593, 594]. Недавно Р. Ж. Алеев [4, 5] доказал непростоту конечной группы, в которой силовская 2-подгруппа — прямое произведение произвольного числа диэдральных, полудиэдральных и абелевых групп. Частный случай этого результата, когда число сомножителей равно 3 и каждый из них сильно замкнут в силовской 2-подгруппе, получил Харрис [423]. В работе Горенстейна и Харриса [393] указаны некоторые общие условия, при которых отмеченная гипотеза справедлива. Одно из этих условий — сильная замкнутость сомножителей в силовской 2-подгруппе (подгруппа H группы G сильно замкнута в содержащей ее подгруппе S, если для всех $h \in H$ и всех $g \in G$ $g^{-1}hg \notin S-H$). Второе условие является формализацией более ясного, но неформального условия: композиционные факторы подгрупп рассматриваемой группы — известные к настоящему времени простые группы.

Из других результатов о силовских 2-подгруппах простых групп отметим теорему Э. М. Пальчика [138], перечисляющую простые группы с циклической силовской 3-подгруппой и максимальной силовской 2-подгруппой, и исследование А. П. Ильиных [71] характерных свойств силовских 2-подгрупп простых групп $PSL(3,2^n)$.

Пересечения силовских 2-подгрупп. В 1965 году Судзуки [86:340] описал простые группы, в которых любые две различные силовские 2-подгруппы имеют тривиальное пересечение. Исследования групп в зависимости от рангов пересечений их силовских 2-подгрупп были продолжены в [101, 109, 273, 438, 439, 442—445, 447, 492]. Наиболее общий результат для простых групп содержится в [109]. Если ранг любого пересечения двух различных силовых 2-подгрупп простой группы G меньше 3, то G — одна из групп $PSL(3, q)$ для некоторого нечетного числа q, $PSL(2, q)$, $PSU(3, q^2)$, $Sz(2^n)$, A_7, M_{11}, Ja или групп типа Ри. Более того, результат останется прежним, если требовать, чтобы 2-ранг $\leqslant 2$ имели не все пересечения, а только те, которые являются насыщенными подгруппами в G (p-подгруппа D называется насыщенной в G, если $N_G(D)$ — p-скованная группа, и D — силовская p-подгруппа в $O_{p',p}(N_G(D))$).

Если пересечения силовских 2-подгрупп в простой группе коммутативны, то сами силовские диэдральны или двуступенно нильпотентны [608].

Централизаторы инволюций. Существует только конечное число простых групп, в которых централизатор некоторой инволюции изоморфен данной группе. Во многих случаях группа однозначно определяется централизатором любой своей инволюции. Известно несколько пар и троек неизоморфных простых групп, в которых централизаторы инволюций изоморфны, но неизвестно ни одной такой четверки. Ниже перечислены простые группы, для которых получена какая-либо конкретная характеризация централизаторами инволюций. Результаты, полученные до 1970 года, см. в [86, 232, 341, 610].

A_n [476—479, 665]; $PSL(n, q)$ [333, 334, 432, 552, 554, 556, 610, 655]; $PSp(2n, q)$, q нечетно [352, 354, 418, 421, 478, 657—659]; $PSp(6, 2)$ [477, 665, 669]; $\Omega(n, q)$, q нечетно [539, 540, 660, 661]; $PSU(4, q^2)$, q нечетно [553, 555]; $PSU(5, 2^n)$ [615]; $G_2(q)$ [352, 354, 415, 417, 614]; ${}^3D_4(q)$ [352, 354, 415, 419]; $E_n(2^m)$ [534]; $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, q нечетно [557]; ${}^2E_6(2^m)$ [609]. $F_4(q)$ [408, 420]; ${}^2F_4(q)$ [544—546]; M_{12} [172, 627]; M_{24} [334, 432, 433, 610]; HaJ [69, 507, 595]; HHM [334, 432, 433, 610]; HiS [471]; McL [472]; Co_2 [596]; Co_3 [342, 343, 670]; Fi_{22} [458]; Ru [335].

Здесь не отмечены некоторые результаты, непосредственно вытекающие из характеризаций силовскими подгруппами.

Исключительно трудным оказался вопрос о характеризации групп Ри ${}^2G_2(3^{2n+1})$ централизатором инволюции. В ${}^2G_2(3^{2n+1})$ все инволюции сопряжены и централизаторы их изоморфны $Z_2 \times PSL(2, 3^{2n+1})$. В частности, силовская 2-подгруппа из ${}^2G_2(3^{2n+1})$ абелева порядка 8. Пусть G — группа типа Ри, т. е. простая группа с централизатором инволюции как в ${}^2G_2(3^{2n+1})$. Серия работ, имеющих конечной целью отождествление G с ${}^2G_2(3^{2n+1})$, пока не привела к успеху. Известно, в частности, что $|G| = |{}^2G_2(3^{2n+1})|$ [232:503], [232:777]. В двух работах Томпсона [232:756], [621] доказано совпадение больших кусков таблиц умножения G и ${}^2G_2(3^{2n+1})$. Все эти исследования показывают, что G и ${}^2G_2(3^{2n+1})$ настолько близки по строению, что «неизвестность» G не мешает исследованиям, в которых G появляется как композиционный фактор некоторой подгруппы и позволяет считать G группой известного типа.

Конечные простые группы с разрешимыми централизаторами инволюций по-прежнему не поддаются описанию. Одна из серьезных причин этого — неиндуктивность исследуемого класса: сечение группы с разрешимыми централизаторами инволюций может не обладать этим свойством. Наиболее общий из конкретных результатов о простых группах с разрешимыми централизаторами инволюций получен в [100]: Если 2-длина каждого централизатора инволюции конечной простой группы G равна единице, то G изоморфна $PSL(2, q)$ для $q \geqslant 4$, $PSL(3, 2^n)$, $PSU(3, 2^{2n})$, $Sz(2^n)$ или A_7. Не обязательно простые группы с несколько более жесткими ограничениями на централизаторы инволюций были описаны В. М. Ситниковым [169, 171], обобщившим результаты Судзуки [232:732] и Горенстейна [232:392] о группах с 2-замкнутыми и, соответственно, $2'$-замкнутыми централизаторами инволюций. Некоторые частные случаи ситуации, в которой 2-длина централизаторов инволюций равна 2, рассмотрели В. В. Кабанов [74] и В. А. Белоногов [16]. Отметим, что в известных простых группах с разрешимыми централизаторами инволюций 2-длина централизаторов инволюций не превосходит 2.

Аксиоматизации свойств централизаторов инволюций в известных конечных простых группах посвящены работы Горенстейна и Уолтера [395, 396, 648]. В них выражается надежда, что этим аксиомам удовлетворяют все конечные простые группы, поэтому работа с аксиоматизированными свойствами позволит включать в орбиту исследования все известные простые группы, несмотря на то, что класс «известные простые группы» постоянно расширяется.

В некоторых работах содержатся характеризации простых групп, использующие не точную структуру централизаторов инволюций, а лишь знание факторов их нормальных рядов. Пусть G — простая группа, t — инволюция из G. Если t лежит в центре силовской 2-подгруппы из G, а $C_G(t)$ — расщепляемое расширение элементарной группы порядка 2^n посредством $SL(n-1, 2)$, где $n \geqslant 2$, то либо $n=2$ и $G \simeq A_5$, либо $n=4$ и $G \simeq M_{23}$ [332]. Если $C_G(t) = \langle t \rangle \times A_n$, то $n=5$ и $G = \mathrm{Ja}$ [666]. Имеется также ряд работ, в которых доказывается непростота конечных групп с тем или иным нормальным рядом в централизаторе некоторой инволюции [143, 290, 347, 612, 664].

Отметим еще результат В. В. Кабанова и А. И. Старостина [76], перечисливших простые группы, в которых порядок централизатора некоторой инволюции не делится на 32.

Группы заданного порядка. Многие простые группы определяются своими порядками. Этот факт верен для большинства спорадических групп и устанавливается обычно вместе с доказательством существования соответствующей группы. Для групп Матье, HJM, HiS этому были посвящены специальные исследования [291, 543, 547, 656].

Мощной атаке подверглась проблема описания простых групп, порядки которых делятся ровно на 3 различных простых числа p, q, r. Одно из следствий теоремы Томпсона [624] утверждает, что для такой группы G (при подходящих обозначениях) $p=2$, $q=3$, а $r=5$, 7, 13 или 17, и одна из групп A_5, $PSL(2, 7)$, $PSL(2, 8)$, $PSL(2, 17)$, $PSL(3, 3)$ является сечением группы G. Разработке конкретных случаев положил начало Брауэр [232: 248], рассмотревший ситуацию, в которой порядок силовской 5-подгруппы группы G равен 5. Последовавшая затем серия работ [435, 495—497, 642—645] привела к описанию простых групп порядка $p^\alpha q^\beta r^\gamma$, в которых одна из силовских подгрупп циклическая. Список таких групп состоит из A_5, A_6, $PSL(2, 7)$, $PSL(2,8)$, $PSL(2,17)$, $PSL(3,3)$, $PSU(4,3^2)$ $PSp(4,3)$ и исчерпывает все известные простые группы порядка $p^\alpha q^\beta r^\gamma$. Отметим попутно, что в группах порядка $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ порядки некоторых классов сопряженных элементов делятся только на 2 простых числа. А. В. Корлюков [82] показал, что простая группа, в которой порядок каждого класса сопряженных элементов делится только на два простых числа, изоморфна A_5 или $PSL(2,8)$.

В [258] перечислены все простые группы порядка $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \cdot p$, где $ab > 0$, p — простое число, отличное от 2, 3, 7, и силовская p-подгруппа имеет в своем нормализаторе индекс 2: A_5, A_6, $PSL(2,27)$, $PSL(3,4)$.

Еще не получен ответ на следующий вопрос: будет ли простая группа, порядок которой не делится на 3, изоморфна группе $Sz(2^{2n+1})$? Незаконченная работа Томпсона, из которой опубликованы пока только отрывки [625], позволяет надеяться, что это так. Во всяком случае, этот вопрос решается положительно, если предполагать, что в группе нет элементов порядка 10 [524]. Обобщением последнего результата является теорема Н. Д. Подуфалова [146, 147]: простая группа, не содержащая элементов порядка 6 и 10, изоморфна при подходящих q и n $PSL(3,4)$, $PSL(2,q)$, $PSL(3,2^n)$, $PSU(3,2^n)$ или $Sz(2^n)$.

Одним из удачных примеров применения машин в конечных группах явилась попытка Холла [410] перечислить все простые группы, порядок которых меньше 10^6. Хотя эта работа еще не доведена до конца (осталось исследовать несколько чисел вида $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot$ и $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$), однако она привела к построению новой простой группы HaJ порядка 604800.

Группы с разрешимыми локальными подгруппами. Подгруппа H конечной группы G называется p-локальной, если H — нормализатор в G некоторой нетривиальной p-подгруппы. Подгруппа называется локальной, если она p-локальна для некоторого простого числа p. Грандиозный труд Томпсона [624], обобщающий классификацию минимальных простых групп, завершил описание конечных N-групп, т. е. неразрешимых групп, в которых все локальные подгруппы разрешимы. Любая N-группа изоморфна такой группе G, что $\mathrm{Inn}L \lessdot G \leqslant \mathrm{Aut}L$, а L — одна из следующих простых N-групп: $PSL(2,q)$, $q>3$; $Sz(2^{2n+1})$, $n \geqslant 1$; $PSL(3,3)$; M_{11}; A_7; $PSU(3,3^2)$, ${}^2F_4'(2)$. Важность этого результата подчеркивают следствия, из которых мы здесь приведем только два:

1) Любая минимальная простая группа, т. е. конечная простая группа, каждая собственная подгруппа которой разрешима, изоморфна $PSL(2,2^p)$, p — простое число; $PSL(2,3^p)$, p — нечет-

ное простое число, $PSL(2,p)$, p — простое число, большее 3, для которого $p^2+1\equiv 0 \pmod 5$; $Sz(2^p)$, p — нечетное простое число, $PSL(3,3)$.

2) Конечная группа разрешима тогда и только тогда, когда каждая пара ее элементов порождает разрешимую подгруппу.

При чтении этой работы Томпсона бросается в глаза то, что главную роль в исследовании играют 2-локальные подгруппы и что большая часть рассуждений справедлива при одном лишь условии разрешимости 2-локальных подгрупп. Не удивительно, что еще до публикации полного текста этой работы были предприняты многочисленные попытки приспособить доказательство Томпсона к более общей ситуации, когда условие разрешимости накладывается только на 2-локальные подгруппы. Почти одновременно с завершением публикации работы [624] (она выходила частями на протяжении семи лет) закончился штурм проблемы классификации конечных групп с разрешимыми 2-локальными подгруппами, который велся сразу несколькими авторами с разных сторон, определенных планом работы Томпсона. Любая простая группа с разрешимыми 2-локальными подгруппами либо является N-группой, либо изоморфна $PSU(3,2^{2n})$ ([468, 504, 560, 597], находящаяся в печати работа Горенстейна и Лайонса).

Свойства разрешимых подгрупп. Хорошо известно, что 2-длина разрешимой группы с абелевой силовской 2-подгруппой не превосходит единицы. Этот факт, несмотря на свою элементарность, играл большую роль при классификации групп с абелевыми силовскими 2-группами и послужил стимулом для исследования неразрешимых групп в зависимости от свойств их разрешимых подгрупп. Одним из первых исследований такого рода была работа В. Т. Нагребецкого [129]. Группы, в которых разрешимые подгруппы 2-замкнуты или $2'$-замкнуты, исследованы в [106]. Результаты этой работы обобщены в [99]: Если G — конечная простая группа, в которой 2-длина $l_2(H)$ любой разрешимой подгруппы H не превосходит единицы, то $O_{2'}(G/O(G))$ — центральное произведение 2-группы и групп, каждая из которых — расширение своего центра посредством одной из групп $PSL(2,q)$ ($q=2^n$ или $\equiv\pm 1 \pmod 8$), $PSU(3,2^{2n})$, $Sz(2^n)$, Ja или групп типа Ри*. Характеризации простых групп их бипримарными подгруппами (т. е. подгруппами порядка $p^\alpha q^\beta$ (p и q — различные простые числа), которые по классической теореме Бернсайда разрешимы) был посвящен цикл работ В. А. Белоногова [14—19].

Во многих цитированных выше работах использовалось за-

* Через 2 года этот результат был повторен Курцвейлем [489], который накладывал условие $l_2(H)\leqslant 1$ только на разрешимые подгруппы H из 2-локальных подгрупп группы G. Это условие, очевидно, эквивалентно условию: $l_2(H)\leqslant 1$ для всех разрешимых подгрупп H группы G.

мечание Томпсона, позволяющее в некоторых случаях вычислять порядок группы, содержащей несопряженные инволюции. В связи с этим нужно отметить важную нерешенную задачу описания простых групп, в которых все инволюции сопряжены. Из работ, относящихся к этой задаче, заслуживает внимания статья В. В. Кабанова [73] о группах, содержащих самоцентрализуемую подгруппу порядка 6.

Группы, порожденные элементами простого порядка. Пусть ω — множество положительных целых чисел. Множество D группы G называется множеством ω-транспозиций, если D состоит из инволюций, инвариантно в G, порождает G, и при любых x, $y\in D$ порядок произведения xy лежит в $\omega\cup\{1,2\}$. Конечные группы, обладающие множеством 3-транспозиций, описаны в работе Фишера, из которой опубликована пока только первая часть [349]. Если $\omega=\{3\}$, $G'=G''$ и $O_2(G)$, $O_3(G)\subseteq Z(G)$, то $G/Z(G)$ изоморфна одной из следующих групп: симметрической группе S_n, $n\geqslant 5$; симплектической группе $Sp(2n,2)$, $n\geqslant 2$; ортогональной группе $O^\mu(2n,2)$, $\mu\in\{-1,1\}$, $n>2$; унитарной группе $PSU(n,2^2)$, $n\geqslant 4$; группе $M(22)$, $M(23)$, $M(24)$, (так названы открытые в этой работе группы; первые две из них — простые группы Фишера Fi_{22}, Fi_{23}, третья содержит в качестве подгруппы индекса 2 простую группу Fi_{24}'). Если ω состоит из всех нечетных чисел, а G не содержит нормальных разрешимых подгрупп и $G'=G''$, то G изоморфна S_n (D — класс обычных транспозиций); $Sp(n,q)$, $PSU(n,q^2)$, $O^\mu(n,q)$ (q четно, D — класс трансвекций), ${}^\pi O^\mu(n,q)$ $q=3$ или 5, D — класс отражений); $Sz(q)$; сплетению $PSL(2,2^m)$ с S_n или одной из трех групп Фишера [268]. Если, кроме нечетных чисел, в ω включить число 4 и потребовать, чтобы $(xy)^2\in D$ как только xy — элемент порядка 4, то при прежнем условии ($G'=G''$ и в G нет разрешимых нормальных подгрупп) для группы G справедливо такое утверждение [628—630]: G изоморфна прямому произведению $X_1\times\ldots\times X_r$, где для каждого i X_i — простая группа лиева типа характеристики 2, отличная от ${}^2F_4(2^m)$; ортогональная группа над полем порядка 3 или 5; симметрическая группа; сплетение $PSL(2,2^n)$ с S_n; A_6, HaJ или одна из трех групп Фишера.

С несколько другой точки зрения характеризацию групп $Sp(2n,2)$ свойствами порождающего класса инволюций получил Шульт [589]. Интересное наблюдение сделал Н. Т. Петров [140]. Он заметил, что существует такая константа L, что произвольный элемент из любой известной к настоящему времени простой группы G является произведением не более L инволюций из G.

При исследовании групп, порожденных элементами нечетного простого порядка, возникает необходимость не только задавать порядок произведений элементов порождающего класса, но и класс групп, в котором лежит порожденная двумя элементами подгруппа (для групп, порожденных инволюциями, такой необходимости нет, поскольку две инволюции порождают группу диэдра, строение которой вполне определено порядком произведения этих инволюций). Пусть D — множество элементов нечетного простого порядка p, инвариантное в группе G и порождающее G, F—некоторый класс групп. Пусть любые два некоммутирующих элемента из D порождают группу, лежащую в F. Такая ситуация впервые рассматривалась Фишером [232 : 347], [232 : : 350], затем Ашбахером и Холлом [275], Ашбахером [269—271] и Штельмахером [605]. Если $p=3$, $F=\{SL(2, 3), A_4, A_5\}$, а в G центр тривиален и нет нормальных 2-подгрупп, то G изоморфна $Sp(2n, 2)$, $n\geqslant 3$; $O^{\mu}(2n, 2)$, $n\geqslant 3$; A_n, $n\geqslant 5$; $G_2(4)$, HaJ, Suz, Co_1, $PSp(2n, 3)$, $PSU(n, 3^2)$, $PGU(n, 2^2)$ [275, 605]. При $p\geqslant 5$ и F, состоящем из серий $PSL(2, p^m)$ и $SL(2, p^m)$, группа G, не содержащая разрешимых нормальных подгрупп, изоморфна $PSp(2n, q)$ или $PSU(n, q^2)$ с q, являющимся некоторой степенью p [269].

Нечетные характеризации. Идея привлечения к исследованию простых групп нечетных простых чисел принадлежит Томпсону и Фейту [86:181]. Сейчас можно говорить о целом направлении в теории конечных простых групп, когда главное внимание обращается на свойства и вложение в простую группу подгрупп нечетного порядка. Получившее от цикла лекций Хигмэна [448] название «нечетные характеризации» это направление связано, в основном, с попытками перенести те или иные результаты о подгруппах, содержащих инволюции, на подгруппы нечетного порядка. Хотя сейчас каждый шаг в направлении нечетных характеризаций дается с большим трудом, необходимость в развитии этого направления очевидна.

Пусть A — подгруппа нечетного порядка конечной группы G. Если $C_G(a)\subseteq A$ для каждого элемента $a\neq 1$ из A, то A называется сильно изолированной подгруппой (СИП) в G. Понятно, что самоцентрализуемая подгруппа A простого порядка является СИП, и случай, когда $|A|=3$, был рассмотрен еще в работе Томпсона и Фейта. Общая проблема описания простых групп, содержащих СИП, порядок который делится на 3, остается пока нерешенной, хотя недавние результаты Н. Д. Подуфалова [145—147] внушают надежду на ее скорое решение. Если A — СИП в простой группе G, и $|A|$ делится на 3, то $|G|<f(|A|)$, где f — некоторая целочисленная функция. Более того, G изоморфна $PSL(3, 4)$ или $PSL(2, q)$ для некоторого нечетного числа q, если в G есть 2-локальная подгруппа, порядок которой делится на 3. Тот же результат получится при каждом из следующих условий: а) $|A|$ делится на 15, б) в G есть другая СИП, порядок которой делится на 5, в) G не содержит сечений, изоморфных $Sz(2^n)$. Другие результаты о СИП см. в [37, 38, 344, 436, 440, 606]. Подгруппы, близкие к СИП, рассматривались

В. М. Бусаркиным и Б. К. Дураковым в [35, 36, 61] Пусть G—конечная простая группа с одним классом сопряженных инволюций. Если M — такая циклическая подгруппа из G, что $|M|$ делится на 3 и $C_G(m)=C_G(M)$ для любого неединичного элемента m из M, то $G\simeq PSL(2, q)$ для подходящего q, если $|N(M): : M|=2^s\leqslant 4$ [36]. Если простая группа G содержит подгруппу A, порядок которой равен $6k$, где k нечетно, и $C(a)\subseteq A$ для всех нетривиальных элементов a нечетного порядка из A, то при условии $|N(A):C(A)|=2$ G изоморфна $PSL(2, q)$ [61].

Попытки получить для нечетных простых чисел аналог теоремы Брауэра — Фаулера [86:19], доказывающей ограниченность числа простых групп с данным централизатором элемента порядка 2, пока не привели к успеху. Гипотеза, согласно которой $|G|<f(n)$ для простой группы G, в которой порядки централизаторов p-элементов (p — нечетное простое число) ограничены сверху числом n, проверена для всех известных простых групп [288] и доказана при $p=3$ для групп, в которых больше одного класса сопряженных элементов порядка 3 [451]. Перечисление простых групп, в которых централизатор элемента порядка 3 имеет порядок 15, содержится в [607]. Исследованию конечных групп с централизатором элемента x простого порядка p вида $\langle x \rangle \times H$ для некоторых групп H, посвящены работы [307, 626]. В [428, 429] дана характеризация $PSp(4, 3^m)$ свойствами централизатора элемента порядка 3. Строение простых групп, в которых централизаторы нетривиальных 3-элементов являются 3-группами ($C\theta\theta$-групп в обозначениях Хигмэна, поставившего задачу описания таких групп), до конца еще не выяснено. В работе Флетчера [351] доказывается, что в простой $C\theta\theta$-группе силовская 3-подгруппа абелева и тривиально пересекается с любой другой силовской 3-подгруппой. В частности, силовская 3-подгруппа является сильно изолированной и все, что написано выше о группах с СИП, порядок которой делится на 3, справедливо для $C\theta\theta$-групп [350, 441].

Другая интересная задача в направлении нечетных характеризаций — описать простые группы с циклическими централизаторами элементов нечетного порядка — еще очень далека от своего решения. В. М. Бусаркин [34] показал, что в таких группах не более двух классов сопряженных инволюций. Некоторые сведения о простых группах с абелевыми централизаторами элементов нечетного порядка получил В. Р. Майер [110, 113, 114]. Например, если в такой группе G силовские 3- и 5-группы нециклические, то G изоморфна $PSL(2, 3^n)$ для некоторого n.

Неожиданные результаты о группах, в которых $|N(P): :C(P)P|=2$ для силовской p-подгруппы P, получили Смит и Тирер [598]. Если $|P'|=p$, то коммутант всей группы — собственная подгруппа. То же заключение верно, если P — абелева нециклическая группа.

Сильно вложенные подгруппы. Группы, обладающие сильно изолированной подгруппой (подгруппой, содержащей централизаторы всех своих неединичных элементов) четного порядка, были описаны Судзуки в ходе выполнения программы классификации расщепляемых групп. Подгруппу, содержащую централизаторы всех своих нетривиальных p-элементов, называют сильно p-изолированной. Для сильно 2-изолированной собственной подгруппы, совпадающей со своим нормализатором, употребляется термин сильно вложенная подгруппа. Другими словами, подгруппа H группы G сильно вложена в G, если порядок H четен, в $G—H$ есть инволюция и $H \cap x^{-1}Hx$ имеет нечетный порядок для всех $x \in G—H$. Интерес к таким подгруппам обострился в связи с работой Томпсона об N-группах, в которой был продемонстрирован искусный метод построения сильно вложенных подгрупп. Группы, содержащие сильно вложенную подгруппу, были описаны Бендером [281], обобщившим методы, примененные Судзуки для изучения ZT-групп. Если H — сильно вложенная подгруппа конечной группы G, то либо силовская 2-подгруппа группы G циклическая или кватернионная (в этом случае группа G непроста и строение ее известно), либо $O^{2'}(G/O(G))$ изоморфна $\mathrm{PSL}(2, q)$, $\mathrm{Sz}(q)$, $\mathrm{PSU}(3, q)$, где $q=2^n \geqslant 4$. Некоторые достаточные условия для существования в группе сильно вложенной подгруппы указаны в [274].

Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Условие существования в G сильно вложенной подгруппы эквивалентно тому, что нормализаторы нетривиальных подгрупп из S порождают в G собственную подгруппу. Поддаются описанию и группы, в которых собственной является подгруппа, содержащая нормализаторы подгрупп из S, имеющих 2-ранг$\geqslant 2$ [272].

Сигнализаторные функторы. Если A — некоторая p-подгруппа конечной группы G, а B — p'-подгруппа из G, в нормализаторе которой лежит A, то B по терминологии, предложенной Томпсоном [86:349], называется сигнализатором подгруппы A. При определенных условиях все сигнализаторы группы A порождают в G p'-подгруппу, нормализатор H которой содержит нормализаторы многих подгрупп из A, а при $p=2$ H часто оказывается сильно вложенной подгруппой. Такова грубая схема способа построения больших подгрупп в конечной группе, предложенного Томпсоном и Фейтом [86:183] и оформленного затем в работах большой группы математиков.

Пусть A — абелева p-подгруппа группы G. Говорят, что в G задан A-сигнализаторный функтор θ, если для каждого $a \neq 1$ из A определена A-инвариантная p'-подгруппа $\theta(C_G(a)) \subseteq C_G(a)$ и выполнено свойство сбалансированности: для всех неединичных a_1, $a_2 \in A$ имеет место равенство $C_G(a_1) \cap \theta(C_G(a_2)) = \theta(C_G(a_1)) \cap C_G(a_2)$, эквивалентное включению $C_G(a_1) \cap \theta(C_G(a_2)) \subseteq \theta(C_G(a_1))$. Множество $И_\theta(A)$, состоящее из всех таких A-инвариантных p'-подгрупп X, что $C_X(a) \subseteq \theta(C_G(a))$ для всех $a \neq 1$ из A, называется ассоциированным множеством A-сигнализаторов. Функтор θ называется полным, если $И_\theta(A)$ обладает элементом, содержащим все элементы из $И_\theta(A)$. Нахождению условий, при которых θ будет полным, посвящены работы Горенстейна [382, 383], Голдшмидта [377, 378] и Уорда [651]. Доказано, что функтор θ полон при любом из следующих условий: а) $p=2$, минимальное число $m(A)$ образующих $A \geqslant 3$ [383]; б) $p>2$, $m(A) \geqslant 4$, все элементы из $И_\theta(A)$ — разрешимые группы (имеется предварительное сообщение Глаубермана, что здесь неравенство $m(A) \geqslant 4$ можно заменить на $m(A) \geqslant 3$) [382]; в) $m(A) \geqslant 3$, для любого $a \neq 1$ из A элементы взаимно простых порядков, взятые соответственно из $\bigcap_{1 \neq x \in A} \theta(C_G(x))$ и $\theta(C_G(a))$, перестановочны [651]. Удачные попытки расширить сферу применения метода сигнализаторного функтора на основе понятий слоя, сбалансированности, порождаемости, компоненты группы [394] содержатся в работах Горенстейна и Уолтера [395, 396].

Силовизаторы. Подгруппа S конечной группы называется силовизатором p-подгруппы P, если P — силовская p-подгруппа в S и S не содержится в большей подгруппе с таким свойством. Понятие силовизатора было введено Гашюцем в [361], где он изучал вопросы сопряженности силовизаторов в разрешимых группах и выдвинул гипотезу: p'-холловы подгруппы силовизаторов данной p-подгруппы разрешимой группы сопряжены. Оказалось, что эта гипотеза не верна ни для какого p. Противоречащие примеры построили при $p=2$ А. В. Боровик и Е. И. Хухро [31] и Лауш [493], а при $p>2$ — А. В. Боровик и Е. И. Хухро [32].

Другие методы нахождения подгрупп в конечных непростых группах на основе теории индексиалов разработаны в ряде работ С. А. Чунихина [224—229]. Отметим один из результатов: если невозрастающая последовательность P простых чисел является подпоследовательностью последовательности всех индексов некоторого главного ряда конечной группы, то эта группа имеет нильпотентную подгруппу, порядок которой равен произведению всех элементов P. Понятие индексиала рассматривалось также в работах А. В. Романовского [158] и Коупера [319].

ЛОКАЛЬНАЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ

Еще Бернсайду и Фробениусу была известна зависимость между условиями существования нетривиальных p-факторгрупп и картиной сопряженности p-элементов в нормализаторах p-подгрупп. Структура этой связи, просвечивающая в теоремах

Грюна и Виландта о p-факторгруппах и ярких работах Томпсона [86:352], [232:752], была уточнена Алпериным [232:199], указавшим конкретный способ поэтапного сопряжения p-элементов в нормализаторах правильных силовских пересечений, а затем большим кругом автором [232:202], [260, 345, 374, 475, 563]. Приведем одно из уточнений [374] исходной теоремы Алперина. Пусть A и B — подмножества силовской p-подгруппы P конечной группы G, сопряженные в G. Тогда в P существуют подгруппы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и элементы $x_i \in N(H_i)$, $y \in N(P)$ такие, что $A \subseteq H_1; A^{x_1x_2\ldots x_i} \subseteq H_{i+1} (1 \leqslant i \leqslant n-1)$; $A^{x_1x_2\ldots x_n} = B$. При этом $H_1, \ldots, H_n$ могут быть выбраны так, что для каждого i выполнены следующие условия: а) H_i—насыщенная подгруппа в G, б) $H_i = P \cap Q_i$, где Q_i — подходящая силовская p-подгруппа из G, в) $N_P(H_i)$ и $N_Q(H_i)$ — силовские подгруппы в H_i. Более того, при $p=2$ можно дополнительно требовать, чтобы $N(H_i)/H_i$ обладала сильно вложенной подгруппой (исключая, разумеется, случай, когда $H_i = P$).

Очень важен вопрос об отыскании небольшого числа подгрупп, чьи нормализаторы осуществляют такое поэтапное сопряжение. Здесь одной из наиболее интересных подгрупп является подгруппа Томпсона. Если P—p-подгруппа, то подгруппой Томпсона $J(D)$ называют подгруппу, порожденную в P абелевыми подгруппами наибольшего порядка (это определение является модификацией исходного определения Томпсона [86:352], обозначавшего через $J(P)$ порождение, осуществленное абелевыми подгруппами наибольшего ранга). Например, в p-разрешимой группе G при $p>3$ сопряжение элементов силовской p-подгруппы S происходит в $C(Z(S))$ и $N(J(S))$, и G допускает факторизацию $G = O_{p'}(G) \cdot C(Z(S)) \cdot N(J(S))$. Работа Томпсона [232:751], где был доказан этот факт, а также другая его работа [86:352] послужили источником большого цикла работ Глаубермана [232:375], [232:382], [232:383], [370, 371], усилившего на основе идей Томпсона его результаты. В частности, Глауберман показал, что для нечетного простого числа p и p-скованной p-устойчивой группы G, в которой $O_p(G) \neq 1$, имеет место факторизация $G = O_{p'}(G) \cdot N(Z(J(S)))$, где S — силовская p-подгруппа из G. Отметим, что в любую не p-устойчивую группу вкладывается одна из квадратичных p-пар, полное описание которых при $p>3$ получил Томпсон [622].

Соединив эти обобщения со своей теоремой о слабо замкнутых инволюциях [232 : 376] и использовав идеи Симса [232 : 719], Глауберман подробно описал ситуацию, возникающую в группе без центра, в которой центр $N(J(S))$ для силовской 2-подгруппы S имеет четный порядок [232:379], [232:384], [367]. Уточнение этой ситуации содержится в работе Э. М. Пальчика [139]. Нахождению других подгрупп из силовских p-подгрупп, нормализаторы которых оказывают сильное влияние на сопряженность p-элементов, посвящена работа [368]. В ней строятся

две характеристические подгруппы $K_1(P)$, $K_2(P)$ произвольной p-группы P, которые обладают при $p \geqslant 5$ тем свойством, что наибольшая p-факторгруппа любой группы, в которую P вкладывается в качестве силовской p-подгруппы, совпадает с наибольшей p-факторгруппой нормализатора $K_i(P)$. Отсюда вытекает, что нетривиальной p-факторгруппой при $p \geqslant 5$ обладает любая конечная группа с нетривиальной силовской p-подгруппой, выделяющейся прямым множителем в своем нормализаторе.

В заметке С. А. Сыскина [189] показано, что в группе G с силовской 2-подгруппой T, в нормализаторе $N(T)$ которой сопряжены любые сопряженные в G элементы из T, 2-длина любой разрешимой подгруппы не превосходит единицы, что дает возможность классифицировать все такие группы G на основе [99]. Если любые два элемента силовской подгруппы S группы G, сопряженные в G, сопряжены уже в нормализаторе некоторой фиксированной подгруппы A из S, то A сильно замкнута в S относительно G, т. е. пересечение с S классов сопряженных элементов группы G, имеющих представителей в A, лежат в A. Голдшмидт [380] показал, что нормальное замыкание абелевой сильно замкнутой подгруппы силовской 2-подгруппы конечной группы допускает исчерпывающее описание. Из этого описания вытекает классификация конечных простых групп, в которой перестановочны любые две инволюции, порождающие 2-подгруппу, а также еще несколько важных результатов, относящихся к характеризации простых групп свойствами их силовских 2-подгрупп.

ГРУППЫ С ФАКТОРИЗАЦИЕЙ

Говорят, что группа G факторизуется своими подгруппами A и B, если $G = AB$. В ряде работ продолжалось изучение строения конечных групп G в зависимости от свойств сомножителей A и B. Известно, что $G = A \cdot B$ разрешима, если A и B нильпотентны. Оказывается, что в этом случае производная длина $G/\Phi(G)$ ограничена суммой ступеней нильпотентности A и B [404]. Не известно, будет ли то же самое верно для производной длины G. Вопрос об этом может быть сведен к случаю p-группы [551]. В частности, ответ на него утвердительный, если порядки сомножителей взаимно просты. Несколько работ В. С. Монахова [122—126] посвящено факторизуемым группам, в которых множители A и B близки к нильпотентным. Например, им описаны группы, в которых нильпотентны все собственные подгруппы сомножителей A и B — результат, поглощающий ряд более ранних теорем [54, 297]. А. Н. Фомин [205] доказал p-разрешимость G, в которой A 2-разложима, а B — p-разложима, что, в частности, обобщает полученные ранее результаты А. В. Романовского [156]. Из результатов И. П. Докторова [53, 55, 57] приведем следующий: группа $G=AB$ π-разрешима, если A и B — π-специальные группы, порядки которых не имеют общих сомножителей, лежащих в π', и силовская π-подгруппа каждого из сомножителей перестановочна с любой π'-подгруппой другого сомножителя. Достаточные условия существования подгруппы индекса 2 в факторизуемой группе приведены в [105]. Из них вытекает непростота группы, факторизуемой группами с циклическими силовскими подгруппами. Вопрос С. А. Чунихина о непростоте группы, факторизуемой централизаторами двух элементов, решен пока только в частных случаях, например, когда один из сомножителей сильно изолирован [465]. Получению признаков разрешимости и простоты групп, представимых в виде произведения ABA своих подгрупп A и B, были посвящены работы Гутермана [407] и И. П. Докторова [56]. Например, G разрешима, если $(|A|, |B|)=1$, A абелева и совпадает со своим нормализатором, а B нильпотентна.

p-ГРУППЫ

Полученные А. И. Кострикиным [85] оценки для порядков наибольших конечных групп $\overline{B}$ (5, 2) периода 5 с двумя образующими были уточнены Хавасом, Уоллом и Уомсли [426], использовавшими машинные алгоритмы Уомсли и Макдональда [511]. Показано, что $\overline{B}$ (5, 2) имеет порядок 5^{34} и ступень нильпотентности 12. Вопрос о конечности произвольной группы периода 5 с двумя образующими открыт.

Хотя конечность конечно порожденных групп периода 4 известна уже давно, точные порядки наибольших групп $B(4, n)$ периода 4 с n образующими были вычислены только для $n\leqslant 2$. Оценки для порядка $B(4, 3)$ получены в [411] и [510]. На второй конференции по теории групп (Канберра, 1973) сообщалось, что $|B(4, 3)|=2^{69}$ и $|B(4, 4)|\geqslant 2^{345}$. Доказано [406], что наибольшая группа периода 4, порожденная n инволюциями, $(n+1)$-ступенно нильпотентна. Предпринята атака [564] на ограниченную проблему Бернсайда для периода 8.

Вопрос Хьюза, будет ли подгруппа H_p группы G, порожденная всеми элементами, порядки которых отличны от данного простого числа p, удовлетворять одному из равенств: $H_p=1$, $H_p=G$, $|G:H_p|=p$, решен положительно Хьюзом и Томпсоном для всех конечных непримарных групп. Для p-групп существуют противоречащие примеры [647]. Нахождению p-групп, в которых справедлива гипотеза Хьюза, посвящены работы [359, 455, 456, 509]. В частности, такими группами являются группы ступени нильпотентности $\leqslant 2p-2$, двуступенно разрешимые группы и p-группы ступени нильпотентности $2p-1$ с двумя образующими.

Оценке числа подгрупп того или иного сорта в конечных p-группах были посвящены работы [22—24, 28, 252—254, 256, 286, 364, 482, 599]. В работе Я. Г. Берковича [28] показано, что в p-группах нечетного порядка число элементарных подгрупп порядка p^4 сравнимо с 1 по модулю p или равно 0. Отсюда, в частности, следует, что среди элементарных подгрупп порядка p^4, лежащих в нормальной подгруппе p-группы G, всегда есть нормальная в G подгруппа. Последний результат справедлив и для элементарных подгрупп порядка p^5 [482]. Гипотезы о том, что для данного фиксированного числа n и достаточно большого простого числа p среди (элементарных) абелевых подгрупп порядка p^n в p-группе всегда есть нормальная и, двойственно, среди (элементарных) абелевых подгрупп индекса p^n есть нормальная (конечно, при условии, что соответствующие множества абелевых подгрупп вообще не пусты), пока не подтверждены. Доказано только, что при $n>3$ p не может быть меньше $2n-3$ во второй из этих гипотез [22]. Кроме того, как показал М. И. Голованов [49], вторая гипотеза справедлива для $n-4$. В этом случае любое простое число $p\geqslant 7$ является достаточно большим.

Серия работ А. Д. Устюжанинова [200—202], посвященная 2-группам нормального ранга 2, т. е. группам, в которых нет нормальных элементарных подгрупп порядка 8, завершилась их классификацией. Любая такая группа, в частности, является расширением метациклической группы посредством подгруппы из группы диэдра порядка 8. Группы нормального ранга 2 играют важную роль в классификации конечных простых групп. Те из них, которые могут быть силовскими 2-подгруппами простых групп, перечислены в работах Мак-Вильямс [513, 548]. Как уже упоминалось, описание Мак-Вильямс послужило базой для классификации простых групп нормального 2-ранга 2. О других подклассах групп нормального ранга 2 см. [10, 200, 473, 483, 484]. Работа А. Н. Фомина [206], описывающая 2-подгруппы, в которых централизатор некоторой инволюции имеет порядок 8, также нашла хорошие приложения в классификации некоторых классов неразрешимых групп.

Строение p-групп с теми или иными свойствами факторов их центральных рядов исследовалось в [267, 360, 498, 532, 533, 584, 639]. Вычисление центральных рядов в конкретных p-группах (конгруэнц-подгруппах и силовских p-подгруппах линейных групп над конечным кольцом) проведено Ю. Е. Вапнэ [39]. Идущая от Дедекинда задача классификации конечных групп по свойствам всех их собственных подгрупп нашла отражение в [52, 243, 405, 516, 517, 637, 638]. В работах М. И. Голованова [46—48] исследовались свойства p-групп в зависимости от свойства пересечений их подгрупп.

Довольно много работ (см., например, [257, 289, 536, 633]) было посвящено такой проблеме: доказать, что порядок коммутанта конечной p-группы G не превышает числа $p^{1/2\, b(G)(b(G)+1)}$, где $b(G)$ — ширина G, т. е. $p^{b(G)}$ — максимум индексов централизаторов элементов группы G. Эта оценка была, наконец, получена в [634]. Там же показано, что почти во всех случаях порядок коммутанта меньше указанного числа. Исключение составляют лишь группы ступеней нильпотентности 2 и 3. Связи между шириной и ступенью нильпотентности группы исследовались в [358, 494, 635]. Зависимости между другими числовыми параметрами группы (числом образующих группы и ее подгрупп, ступенью нильпотентности и др.) рассматривались в [362, 481, 490, 491, 515].

Несколько в стороне от традиционных направлений в конечных p-группах стоит работа Томпсона [618], в которой доказана следующая теорема, получившая немедленный отклик: Пусть A — абелева подгруппа наибольшего порядка p-группы G, B — нормальная абелева подгруппа из G. Если B не нормализует A, то существует другая абелева подгруппа A^* наибольшего порядка, что $B \supset A^* \cap B \supset A \cap B$. Еще до появления работы Томпсона [618] эта теорема попала в книгу [232:391] и подверглась многочисленным обобщениям. Роль ее в доказательстве J-теоремы Томпсона и ее модификаций (ZJ-теоремы Томпсона—Глаубермана) хорошо прослеживается в восьмой главе книги [232:391].

АВТОМОРФИЗМЫ

Неподвижные точки. В какой мере строение подгруппы неподвижных точек некоторого множества автоморфизмов конечной группы определяет строение всей группы? Ответы на этот вопрос в конкретных ситуациях находят многочисленные приложения во всех разделах теории групп. Одна из самых важных гипотез, подтверждение которой могло бы пролить свет на многие нерешенные вопросы теории конечных групп, связана с регулярными группами автоморфизмов. Согласно этой гипотезе, конечная группа G, на которой действует регулярная группа автоморфизмов A порядка, взаимно простого с $|G|$ (регулярность означает, что $C_G(A)=1$), а) разрешима и б) ее нильпотентная длина $h(G)$, т. е. длина ее самого короткого нормального ряда с нильпотентными факторами, не превосходит числа сомножителей в разложении порядка A на простые множители. Результат Томпсона о нильпотентности конечной группы, обладающей регулярным автоморфизмом простого порядка, — первый большой шаг, подтверждающий эту гипотезу для случая $|A|=p$, где p — простое число. Уже следующий случай, $|A|=p_1 \cdot p_2$, где p_1 и p_2 — простые числа, до конца не исследован. Именно, не известно, будет ли разрешимой конечная группа с регулярным автоморфизмом порядка p^2, где p — простое число. Мартино [520, 521] доказал справедливость гипотезы о регулярных группах автоморфизмов при любой элементарной p-группе A. Для циклической группы A порядка $p_1 \cdot p_2$ $(p_1 \neq p_2)$ решение получила Ральстон [566]. Пусть теперь G — группа, A — ее группа автоморфизмов, порядок которой взаимно прост с порядком G. Принципиальный результат Томпсона [86, 351] показывает, что если G разрешима, то нильпотентная длина $h(G)$ ограничена функцией от $h(C_G(A))$ и числа $n(A)$ простых сомножителей, произведение которых равно порядку A. В частности, если A действует регулярно, то нильпотентная длина G зависит только от $n(A)$. Точные оценки для $n(A)$ получены только в частных случаях. Например, если A — нильпотентная группа, свободная от $Z_p \wr Z_p$ и действующая регулярно на A, то $h(G) \leqslant n(A)$ [285] (см. также [281, 283]). То же самое верно для диэдральной группы A порядка 8 [298]. С другой стороны, для любой разрешимой группы A существует разрешимая группа G с $h(G)=n(A)$ и $(|G|, |A|)=1$, допускающая регулярную группу автоморфизмов, изоморфную A [401]. Оценки $h(G)$ для не обязательно регулярных групп A даны в [403, 480, 486—488, 649, 650, 652]. Доказано, что ступень нильпотентности p-группы, на которой регулярно действует группа автоморфизмов A, может быть как угодно большой, если $O^p(A)$ имеет составной порядок [574].

В некоторых случаях разрешимость G удается доказать, используя вместо регулярности A специальные свойства централизаторов в G элементов простого порядка из A [308, 652, 672]. Отметим, что G не может быть простой, если $A \neq 1$ и $C_G(A)$ содержит централизатор некоторой инволюции из G [359].

Случай, когда порядок группы A автоморфизмов не взаимно прост с порядком группы G, значительно более сложен, поскольку уже переход к факторгруппе G связан, вообще говоря, с расширением подгруппы неподвижных точек. Важный случай, когда такое расширение не происходит, рассмотрел Томпсон [86: 350]. Если A — p-группа автоморфизмов конечной p-группы G, подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ которой элементарна и центральна, а $V=G/\Phi(G)$ — свободный Z_pA-модуль, то при $p>2$ $C_V(A) = C_G(A) \cdot \Phi(G)/\Phi(G)$. Е. И. Хухро [214] показал, что условие элементарности и центральности $\Phi(G)$ можно ослабить до $(p-1)$-ступенной нильпотентности G. Примеры, построенные А. В. Боровиком и Е. И. Хухро [32], показывают, что дальнейшее ослабление на ступень нильпотентности здесь невозможно даже для двуступенно разрешимой группы G. Неизвестно, справедливо ли аналогичное утверждение для регулярной группы A.

Автоморфно допустимые подгруппы. Информация о строении групп автоморфизмов, относительно которых допустимы некоторые совокупности подгрупп, часто находит приложения в самых разных разделах теории групп. Хорошо известны теоремы Холла о нильпотентности группы автоморфизмов, стабилизирующей некоторый субнормальный ряд, и теорема Томпсона о делителях порядка группы автоморфизмов, оставляющей неподвижным каждый смежный класс в скачках некоторого ряда. Недавно Л. А. Шеметков [240, 241] доказал сверхразрешимость группы автоморфизмов A, относительно которой инвариантен некоторый ряд C подгрупп конечной группы с простыми индексами. Если C — композиционный ряд и A индуцирует в его факторах сверхразрешимые группы автоморфизмов, то A также сверхразрешима [579]. Связи между автоморфизмами и рядами подгрупп посвящена и работа [276]. Большой цикл работ о строении групп автоморфизмов, централизующих нильпотентные подгруппы, принадлежит Дейду [323—326, 328]. Скажем, что внешний автоморфизм, рассматриваемый как смежный класс по группе внутренних автоморфизмов, централизует множество K, если в этом смежном классе есть автоморфизм, действующий на K тождественно. Пусть A — подгруппа группы внешних автоморфизмов конечной группы G, M — совокупность подгрупп, каждую из которых централизует любой автоморфизм из A. Если M состоит из силовских подгрупп группы G, то A нильпотентна; если M содержит все абелевы подгруппы, то A двуступенно нильпотентна. Если же M состоит из всех нильпотентных подгрупп группы G, то A абелева. Кроме того, любая конечная абелева группа может быть представлена как группа автоморфизмов некоторой конечной группы G, централизующая в G все нильпотентные подгруппы.

Автоморфизмы примарных групп. Многие вопросы теории групп неизбежно приводят к необходимости выяснения строения примарных групп, допускающих автоморфизмы определенного сорта. Так, важную роль в исследованиях Судзуки ZT-групп играли 2-группы, на которых действует циклическая группа автоморфизмов A, транзитивная на инволюциях. Хигмэн, назвавший эти группы 2-группами Судзуки, дал их полное описание. Шоу [586] показал, что в качестве A можно взять и нециклическую группу нечетного порядка, новые 2-группы не появятся. 2-группы T, обладающие автоморфизмом α нечетного порядка, действующим тождественно на каждую инволюцию, рассмотрены В. Д. Мазуровым [102]. В частности, если α действует неприводимо на факторгруппе Фраттини группы T, то T изоморфна силовской 2-подгруппе из $PSU(3, 2^n)$ для некоторого n. Строение групп автоморфизмов p-групп, действующих тривиально на множестве элементов порядка p, изучил Хоукс [427]. Он доказал, что все такие группы разрешимы. Отметим, что p-группа нечетного порядка, которая допускает p'-группу автоморфизмов, действующую на множестве элементов порядка p транзитивно, абелева, а группа автоморфизмов примарной группы нечетного порядка, оставляющая неподвижным каждый элемент простого порядка, содержит только тождественный автоморфизм.

Порядки групп автоморфизмов. Вопрос о существовании p-групп нечетного порядка, группы автоморфизмов которых тоже p-группы, решил М. В. Хорошевский [210]. Он показал, что для произвольного нечетного числа p существует p-группа P, для

которой $\mathrm{Aut}P$ — p-группа. При этом P может иметь любое наперед заданное число образующих, большее 2, и любую ступень нильпотентности, большую единицы. Ступень разрешимости P тоже может быть выбрана сколь угодно большой. Позднее Линденберг [501] построил пример P с двумя образующими. Минимальные примеры содержатся в работе Хейнекена и Либека [430], в которой изучаются условия существования автоморфизма порядка 2 у p-группы нечетного порядка. Позже Хейнекен и Либек [431] показали, что произвольная конечная группа K изоморфна факторгруппе группы всех автоморфизмов по подгруппе центральных автоморфизмов для подходящей p-группы P ступени нильпотентности 2 и периода p^2 (автоморфизм называется центральным, если он действует тождественно в факторгруппе по центру).

Известная гипотеза, согласно которой порядок неабелевой p-группы делит порядок ее группы автоморфизмов, доказана пока только в частных случаях [329, 330, 340], однако известно, что порядок силовской p-подгруппы P группы G ограничен сверху некоторой функцией $f(|A_p|)$ от порядка силовской p-подгруппы A_p группы $\mathrm{Aut}G$. В качестве $f(x)$ можно взять функцию $^1/_2(x^2-x+6)$ [461]. Другой подход к изучению связей между порядками групп и порядками их групп автоморфизмов содержится в работе М. В. Хорошевского [212]. Орбита автоморфизма φ группы G при действии φ на элементы G называется точной, если ее длина равна порядку φ. Оказывается, что точная орбита существует для любого автоморфизма произвольной конечной нильпотентной группы или группы без нормальных разрешимых подгрупп, а также в случаях, когда порядки автоморфизма и группы взаимно просты. В общем случае такой орбиты может и не быть, однако всегда порядок автоморфизма строго меньше порядка группы. Только в патологических случаях порядок автоморфизма может быть близок к порядку неабелевой группы (см., например, в [20] описание p-групп порядка p^n, обладающих автоморфизмом порядка p^{n-1}).

Связь между простыми делителями порядка группы автоморфизмов сплетения и группами автоморфизмов сплетаемых групп выяснена в [211]. В частности, $\pi(\mathrm{Aut}(A \wr B)) = \pi(\mathrm{Aut}\ A) \cup \cup \pi(\mathrm{Aut}\ B) \cup \{p\}$ для любых конечных p-групп A и B (здесь $\pi(G)$ — множество простых делителей G).

Изучены группы автоморфизмов групп Шмидта [130] и их обобщений [27]. Исследован (не до конца) вопрос о существовании дополнения к группе внутренних автоморфизмов конечных групп Шевалье, в их полных группах автоморфизмов [541, 542]. Так, например, для групп типов G_2, F_4 и E_8, а также типов B_l, C_l и E_7 над полями порядков 2^n или p^{2n+1}, типа D_{2l} над полями порядков 2^n или p^{2n+1}, где $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, типа D_{2l+1} над полем четной характеристики дополнение существует, а для групп типов B_l, C_l, D_{2l} и E_7 над полем нечетного порядка p^{2n} — нет.

С группами автоморфизмов тесно связан вопрос о субнормальном вложении групп. Результат Виландта о конечности башни автоморфизмов групп без центра показывает, что любую конечную группу без центра можно изоморфно вложить в качестве субнормальной подгруппы в некоторую конечную совершенную группу. Роуз [571] показал, что условие «без центра» несущественно. Вопрос о том, можно ли осуществить это вложение, не расширяя множества простых делителей порядка исходной непримарной группы (примарные группы — очевидное исключение), решен отрицательно М. В. Хорошевским [213]: Хотя для любого множества ω простых чисел с $|\omega|\geqslant 6$ существует совершенная ω-группа, однако существуют группы нечетного порядка, например, неабелева группа порядка pq, где p и q — нечетные простые числа, не вложимые субнормально ни в одну совершенную группу нечетного порядка. Это вытекает из удивительного свойства каждой конечной группы, в которой есть субнормальная неабелева подгруппа H порядка pq, иметь автоморфизм порядка 2, продолжающий соответствующий автоморфизм H.

ОТДЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выше уже отмечалась роль вычислительных машин в теории конечных групп. В обзоре Ю. П. Васильева [41], а также в работах [40, 299, 300, 321, 363, 535] указаны другие применения машин для вычисления групп автоморфизмов, перечисления смежных классов, нахождения определяющих соотношений, выяснения локального строения подгрупп конечных групп большого порядка и т. д.

В ряде работ [11, 12, 64, 96, 182, 233, 234] нашли воплощение идеи С. Н. Черникова, касающиеся выделения классов групп свойствами широких классов их подгрупп.

Получено основанное на идеях Томпсона сравнительно короткое теоретико-групповое (не зависящее от теории представлений) доказательство классической теоремы Бернсайда о разрешимости групп порядка $p^\alpha q^\beta$ [280, 528]. В свое время Бернсайд заметил дополнительно, что в таких группах при $p^\alpha > q^\beta$ почти всегда существует нетривиальная нормальная p-подгруппа, и привел список исключений. Этот список оказался неполным. В. С. Монахов исправил его, добавив новые замечания о строении разрешимых групп порядка $p^\alpha \cdot n$ [123].

В четвертом издании «Коуровской тетради» [87], сборнике нерешенных вопросов теории групп, наряду с решениями некоторых старых задач приведен ряд новых вопросов, относящихся, в частности, и к конечным группам.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Азлецкий С. П.**, О некоторых классах конечных групп. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1970, № 8, 3—9 (РЖМат, 1971, 1А178)
2. —, Сучков В. К., Классы конечных групп Ω_k и $\overline{\Omega}_k$ при некоторых частных значениях числа k. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1974, № 8, 3—10 (РЖМат, 1975, 2А232)
3. **Алеев Р. Ж.**, Конечные группы с циклическими коммутантами силовских 2-подгрупп. Мат. сб., 1975, **97**, № 3, 323—340 (РЖМат, 1976, 1А220)
4. —, О сопряженности инволюций в конечных группах с разложимыми силовскими 2-подгруппами. Алгебра и логика, 1975, **14**, № 5, 491—522 (РЖМат, 1976, 7А251)
5. —, О конечных группах с разложимыми силовскими 2-подгруппами. Алгебра и логика, 1975, **14**, № 6, 611—646 (РЖМат, 1976, 8А297)
6. **Алексеева Э. С.**, Конечные непримарно факторизуемые группы. В сб. «Группы с системами дополняемых подгрупп». Киев, Ин-т мат. АН УССР, 1972, 147—179 (РЖМат, 1973, 2А187)
7. **Анищенко А. Г.**, О разрешимости конечных групп с z-независимыми подгруппами. Докл. АН БССР, 1974, **18**, № 12, 1063—1066 (РЖМат, 1975, 6А275)
8. —, Шлык В. В., Конечные группы с неинвариантными p-разложимыми zpd-подгруппами. (Редколлегия ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.»). Минск, 1973, 17 с., библиогр. 20 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 18 дек. 1973 г., № 7618—73 Деп.) (РЖМат, 1974, 5А234 Деп.)
9. —, —, Конечные группы с некоторыми p-разложимыми подгруппами. Докл. АН БССР, 1974, **18**, № 2, 108—109 (РЖМат, 1974, 6А256)
10. **Байгулова С. И.**, Об одном классе конечных p-групп. Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-т, 1971, сб. 125, 3—8 (РЖМат, 1972, 4А222)
11. **Барышовец П. П.**, Конечные неабелевы группы, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп. Докл. АН СССР, 1973, **209**, № 2, 269—271 (РЖМат, 1973, 8А179)
12. —, Конечные неабелевы группы, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп. В сб. «Группы с заданными свойствами подгрупп». Киев, 1973, 15—77 (РЖМат, 1974, 10А208)
13. **Белоногов В. А.**, Характеризация простых групп PSL $(2,2^n)$ и Sz (q) бипримарными подгруппами. Мат. заметки, 1970, 8, № 1, 85—93 (РЖМат, 1970, 12А155)
14. —, Характеризация некоторых простых групп. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, **35**, № 4, 789—799 (РЖМат, 1971, 12А231)
15. —, Характеризация некоторых конечных простых групп бипримарными подгруппами. Алгебра и логика, 1971, **10**, № 6, 603—619 (РЖМат, 1972, 9А158)
16. —, Конечные группы с 2-расщепляемыми централизаторами инволюций. Сиб. мат. ж., 1972, **13**, № 4, 761—766 (РЖМат, 1972, 11А134)
17. —, Конечные группы с бипримарными подгруппами определенного вида. Мат. заметки, 1973, **14**, № 6, 853—857 (РЖМат, 1974, 5А232)
18. —, Характеризация групп типа Ри бипримарными подгруппами. Мат. заметки, 1973, **13**, № 2, 317—324 (РЖМат, 1973, 7А203)
19. —, Характеризация некоторых конечных простых групп бипримарными погруппами. II. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37**, № 5, 988—1009 (РЖМат, 1974, 2А202)
20. **Беркович В. Г.**, Группы порядка p^n, допускающие автоморфизм порядка p^{n-1}. Алгебра и логика, 1970, **9**, № 1, 3—8 (РЖМат, 1970, 11А164)
21. **Беркович Я. Г.**, Теорема о разрешимых подгруппах конечной неразрешимой группы. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1969, № 9, 3—10 (РЖМат, 1970, 3А231)
22. —, Об одной нерегулярной p-группе. Сиб. мат. ж., 1971, **12**, № 4, 907—911 (РЖМат, 1971, 11А225)

23. —, Обобщение теорем Ф. Холла и Н. Блэкберна и их применение к нерегулярным p-группам. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, **35**, № 4, 800—830 (РЖМат, 1971 12А232)
24. —, Подгрупповое и нормальное строение конечной p-группы. Докл. АН СССР, 1971, **196**, № 2, 255—258 (РЖМат, 1971, 7А218)
25. —, О конечных метациклических группах. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе. Сообщ. АН ГрузССР, 1972, **68**, № 3, 529—532 (РЖМат, 1973, 6А232)
26. —, Абелевы нормальные делители и автоморфизмы некоторых стандартных сплетений. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 11, 15—20 (РЖМат, 1974, 7А311)
27. —, О группе автоморфизмов одного полупрямого произведения. В сб. «Мат. анализ и его прил.». Т. 5. Ростов-на-Дону, Ростов. ун-т, 1974, 33—36 (РЖМат, 1974, 12А172)
28. —, О подгруппах конечных p-групп. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 9, 9—17 (РЖМат, 1974, 4А163)
29. —, Грамм С. Л., О конечных $\Gamma^{p}{}_{1}$-квазинильпотентных группах. В сб. «Мат. анализ и его прил.». Ростов-на-Дону, Ростовск. ун-т, 1969, 34—39 (РЖМат, 1970, 6А188)
30. —, —, О пересечениях максимальных подгрупп конечной группы. В сб. «Мат. анализ и его прил.». Т. 3. Ростов-на-Дону, Ростов. ун-т, 1971, 159—175 (РЖМат, 1972, 8А263)
31. **Боровик А. В.**, Хухро Е. И., О силовизаторах подгрупп в разрешимых группах. Материалы XIII Всесоюзной студ. конф. (математика). Новосибирск, 1975, 6—7
32. —, —, О группах автоморфизмов конечных p-групп. Мат. заметки, 1976, **19**, № 3, 401—418 (РЖМат, 1976, 11А238)
33. **Боровиков М. Т.**, О π-дополняемости инвариантных подгрупп конечных групп. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1973, № 4, 101—102 (РЖМат, 1973, 12А221)
34. **Бусаркин В. М.**, Конечные группы с циклическими централизаторами элементов нечетного порядка. Всесоюзный алгебраический симпозиум. Тезисы докладов. Гомель, 1975, 9
35. —, Дураков Б. К., Об одном классе конечных неразрешимых групп. Алгебра и логика, 1974, **13**, № 2, 153—167 (РЖМат, 1975, 3А278)
36. —, —, Конечные простые группы с циклическими централизаторами элементов нечетного порядка. Алгебра и логика, 1974, **13**, № 3, 256—264 (РЖМат, 1975, 5А187)
37. —, Подуфалов Н. Д., О простых группах, содержащих сильно изолированную подгруппу. Алгебра и логика, 1971, **10**, № 5, 487—494 (РЖМат, 1972, 6А215)
38. —, —, Некоторые критерии расщепляемости конечных групп. Мат. заметки, 1972, **12**, № 6, 717—725 (РЖМат, 1973, 5А188)
39. **Вапнэ Ю. Е.**, Центральные ряды и ряды коммутантов некоторых матричных групп. Сиб. мат. ж., 1971, **12**, № 3, 497—504 (РЖМат, 1971, 11А232)
40. **Васильев Ю. П.**, Описание конечных непростых групп с помощью ЭВМ. Кибернетика, 1972, № 2, 12—16 (РЖМат, 1972, 9А169)
41. —, Вычислительные машины в теории групп. В сб. «Алгебра». Вып. 2. Иркутск, 1973, 6—25 (РЖМат, 1974, 12А162)
42. —, Описание конечных непростых групп с помощью ЭВМ. II. Кибернетика, 1974, № 2, 57—60 (РЖМат, 1974, 11А264)
43. **Ведерников В. А.**, О группах с определенными свойствами для подгрупп. Докл. АН СССР, 1971, **198**, № 2, 266—268 (РЖМат, 1971, 11А218)
44. —, Кохно А. П., О некоторых классах конечных разрешимых групп. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 6, 12—18 (РЖМат, 1971, 6А234)

45. —, Огарков Е. Т., О конечных группах с независимыми подгруппами. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1973, № 4, 5—11 (РЖМат, 1973, 12А219)
46. **Голованов М. И.**, Некоторые классы конечных p-групп. В сб. «Алгебра. Примарн. группы». Красноярск, 1970, 5—24 (РЖМат, 1971, 8А145)
47. —, Конечные p-группы с условиями инцидентности. В сб. «Некотор. вопр. теории групп и колец». Красноярск, 1973, 37—57 (РЖМат, 1974, 6А250)
48. —, О конечных p-группах с условием $|I_m(P)|=p^{m-1}$. В сб. «Некотор. вопр. теории групп и колец». Красноярск, 1973, 58—82 (РЖМат, 1974, 6А249)
49. —, О существовании абелевых инвариантных подгрупп. В сб. «Некотор. вопр. теории групп и колец». Красноярск, 1973, 83—90 (РЖМат, 1974, 6А251)
50. **Гольденберг М. М.**, Конечные 2-группы с инвариантными не вполне расщепляемыми подгруппами. Мат. заметки, 1971, **10**, № 2, 151—161 (РЖМат, 1971, 12А228)
51. —, Конечные непримарные группы с инвариантными не вполне расщепляемыми подгруппами. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1971, **8**, № 1, 16—29 (РЖМат, 1972, 6А217)
52. —, Сесекин Н. Ф., Конечные примарные группы, $p\neq 2$, с инвариантными не вполне расщепляемыми подгруппами. Мат. заметки, 1971, **9**, № 5, 551—560 (РЖМат, 1971, 11А207)
53. **Докторов И. П.**, Конечные группы с π-специальными подгруппами. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 3, 5—10 (РЖМат, 1971, 1А175)
54. —, Конечные факторизуемые группы. Докл. АН БССР, 1971, **15**, № 8, 673—676 (РЖМат, 1971, 12А234)
55. —, О конечных группах, порожденных двумя нильпотентными подгруппами. Мат. заметки, 1972, **11**, № 3, 293—298 (РЖМат, 1972, 8А264)
56. —, Конечные ABA-группы. Сиб. мат. ж., 1974, **15**, № 1, 28—34 (РЖМат, 1974, 6А255)
57. —, Конечные NB-факторизуемые группы. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1974, № 5, 5—8 (РЖМат, 1975, 4А245)
58. **Долгарев А. И.**, Центральные автоморфизмы специальных групп. Науч. тр. Новосиб. гос. пед. ин-т, 1974, вып. 94, 50—52 (РЖМат, 1974, 12А192)
59. **Дука Н. Г.**, О p-субнормальных подгруппах конечных групп. Докл. АН БССР, 1970, **14**, № 10, 883—884 (РЖМат, 1971, 5А223)
60. —, Огарков Т. Т., Конечные группы с p-субнормальными подгруппами. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 3, 17—24 (РЖМат, 1971, 1А179)
61. **Дураков Б. К.**, Конечные группы с заданными централизаторами элементов порядка 3. Всесоюзный алгебраический симпозиум. Тезисы докладов. Гомель, 1975, 17
62. **Жук А. Н.**, Классы сопряженных подгрупп π-разрешимых групп. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1971, № 6, 119—121 (РЖМат, 1972, 5А195)
63. **Зайцева Н. И.**, Некоторые признаки простоты групп. Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-т, 1971, сб. 125, 32—37 (РЖМат, 1972, 4А226)
64. **Зуб О. Н.**, Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы. В сб. «Группы с ограничениями для подгрупп». Киев, «Наук. думка», 1971, 134—159 (РЖМат, 1971, 8А184)
65. **Ильиных А. П.**, Конечные группы, не порождающиеся недостижимыми 3-максимальными подгруппами. (Редколлегия «Сиб. мат. ж.» Сиб. отд. АН СССР). Свердловск, 1969, 22 стр., библ. 5 (РЖМат, 1970, **4А228 Деп.**)

66. —, Конечные группы, не порождающиеся недостижимыми 3-максимальными подгруппами. Сиб. мат. ж., 1971, **12**, № 4, 912 (РЖМат, 1971, 12А230)
67. —, Конечные неразрешимые группы, не порождающиеся недостижимыми 4-максимальными подгруппами. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1971, **8**, № 1, 50—58 (РЖМат, 1972, 6А216)
68. —, Конечные группы с достижимыми 6-максимальными подгруппами. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1973, 8, № 3, 43—48 (РЖМат, 1973, 9А207)
69. —, Характеризация конечной простой группы Холла—Янко. Мат. заметки, 1973, **14**, № 4, 535—542 (РЖМат, 1974, 4А162)
70. —, О конечных группах, силовская 2-подгруппа которых является расширением метациклической группы с помощью подгруппы из группы диэдра порядка 8. Свердл. гос. пед. ин-т. Свердловск, 1973. 73 с., библиогр. 32 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 26 ноября 1973 г., № 7423—73 Деп.) (РЖМат, 1974, 4А175 Деп.)
71. —, Характеризация групп $L_3(2^n)$. Мат. заметки, 1975, **18**, № 6, 861—868 (РЖМат, 1976, 6А237)
72. **Кабанов В. В.**, О конечных группах с самоцентрализующейся подгруппой порядка 6. Алгебра и логика, 1972, **11**, № 5, 509—515 (РЖМат, 1973, 7А209)
73. —, Конечные группы с самоцентрализующейся подгруппой порядка 6 и одним классом инволюций. Алгебра и логика, 1972, **11**, № 5, 516—534 (РЖМат, 1973, 7А210)
74. —, Конечные простые группы с ограничениями на централизаторы инволюций. Ин-т мат. и мех. Уральск. науч. центра АН СССР. Свердловск, 1973, 40 с., библиогр. 24 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 окт. 1973 г. № 7041—73 Деп.) (РЖМат, 1974, 3А150 Деп.)
75. —, Мазуров В. Д., Сыскин С. А., Конечные простые группы, силовские 2-подгруппы которых обладают экстраспециальной подгруппой индекса 2. Мат. заметки, 1973, **14**, № 1, 127—132 (РЖМат, 1973, 12А213)
76. —, Старостин А. И., Конечные группы, в которых силовская 2-подгруппа централизатора некоторой инволюции порядка 16. Мат. заметки, 1975, **18**, № 6, 869—876 (РЖМат, 1976, 5А218)
77. **Казарин Л. С.** Группы с некоторыми условиями, наложенными на нормализаторы подгрупп. Уч. зап. Перм. ун-т, 1969, № 218, 268—279 (РЖМат, 1970, 12А149)
78. —, О некоторых классах конечных групп. Докл. АН СССР, 1971, **197**, № 4, 773—776 (РЖМат, 1971, 8А165)
79. **Кемхадзе К. Ш.**, Конечные группы, у которых каждая непримарная истинная подгруппа отлична от своего нормализатора. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе, Сообщ. АН ГрузССР, 1971, **62**, № 3, 529—532 (РЖМат, 1971, 11А219)
80. **Коваленко А. П.**, Конечные группы, в которых неинцидентные централизаторы четного порядка имеют циклические пересечения. В сб. «Алгебра». Вып. 1. Иркутск, 1972, 13—20 (РЖМат, 1973, 12А214)
81. **Козулина Е. Б.**, Ненильпотентные конечные группы с тремя JE_n-системами. Уч. зап. Перм. ун-т, 1973, № 271, 77—83 (РЖМат, 1974, 7А264)
82. **Корлюков А. В.** К $p^\alpha q^\beta$-теореме Бернсайда. Мат. заметки, 1975, **17**, № 2, 277—283 (РЖМат, 1975, 6А278)
83. **Косвинцев Л. Ф.**, О конечных группах с данным числом классов сопряженных элементов. Уч. зап. Перм. ун-т, 1969, № 218, 5—10 (РЖМат, 1971, 1А176)
84. —, Конечные группы с максимальными централизаторами элементов. Мат. заметки, 1973, **13**, № 4, 577—581 (РЖМат, 1973, 8А178)
85. **Кострикин А. И.**, Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1955, **19**, № 3, 233—244 (РЖМат, 1956, 5133)

86. —, Конечные группы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия», 1964 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1966, 7—46 (РЖМат, 1967, 5А192)
87. Коуровская тетрадь. (Нерешенные задачи теории групп). Изд. 4-е, доп. (Ин-т мат. Сиб. отд. АН СССР). Новосибирск, 1973, 78 с, (РЖМат, 1974, 9А206К)
88. **Кохно А. П.**, О конечных группах с системными нормализаторами данного вида. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. н., 1971, № 6, 8—12 (РЖМат, 1972, 5А198)
89. —, H-проекторы в π-разрешимых группах. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1971, № 4, 5—10 (РЖМат, 1971, 12А233)
90. **Кравчук М. И.** О признаках разрешимости конечных групп. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 3, 25—29 (РЖМат, 1971, 2А176)
91. —, О некоторых классах факторизуемых конечных групп. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 4, 5—11 (РЖМат, 1971, 3А183)
92. —, Системные нормализаторы π-разрешимых групп. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1971, № 6, 18—27 (РЖМат, 1972, 5А197)
93. **Кузенний М. Ф.**, (Кузенный М. Ф.), Про деякі співвідношення в голоморфах груп порядків p^2 і p^3. Доповіді АН УРСР, 1973, **А**, № 12, 1079—1083, 1150 (РЖМат, 1974, 6А254)
94. —, Конечные элементарные недисперсивные группы. Укр. мат. ж., 1974, **26**, № 6, 818—820 (РЖМат, 1975, 5А193)
95. —, Біпримарні недисперсивні групи, порядок яких ділиться не більше ніж на куб простого числа. Доповіді АН УРСР, 1974, **А**, № 11, 973—977, 1051 (РЖМат, 1975, 5А191)
96. **Левіщенко С. С.**, Скінченні ненільпотентні групи з деякими заданими системами нільпотентних підгруп. Доповіді АН УРСР, 1974, **А**, № 1, 35—37, 92 (РЖМат, 1974, 6А253)
97. **Мазуров В. Д.**, Ослабленная проблема Бернсайда для показателя 30. Алгебра и логика, 1969, 8, № 4, 460—477 (РЖМат, 1970, 6А177)
98. —, Разрешимые подгруппы конечных простых групп. Мат. заметки, 1974, **16**, № 5, 833—842 (РЖМат, 1975, 3А279)
99. —, Конечные группы с единичной 2-длиной разрешимых подгрупп. Алгебра и логика, 1972, **11**, № 4, 438—469 (РЖМат, 1973, 8А177)
100. —, Конечные простые группы с единичной 2-длинной централизаторов инвалюций. Алгебра и логика, 1971, **10**, № 4, 365—375 (РЖМат, 1972, 5А190)
101. —, Конечные простые группы с циклическими пересечениями силовских 2-подгрупп. Алгебра и логика, 1971, **10**, № 2, 188—198 (РЖМат, 1971, 11А211)
102. —, 2-группы, обладающие автоморфизмом нечетного порядка, тождественным на инволюциях. Алгебра и логика, 1969, **8**, № 6, 674—685 (РЖМат, 1970, 11А161)
103. —, О покрытиях силовских подгрупп в конечных группах. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1970, 7, № 3, 129—132 (РЖМат, 1971, 5А216)
104. —, О централизаторах инволюций в простых группах. Мат. сб., 1974, **93**, № 4, 529—539 (РЖМат, 1974, 8А223)
105. —, Замечания о конечных группах. (Редколлегия «Сиб. мат. ж.», АН СССР). Новосибирск, 1974, 7 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 27 февр. 1974 г., № 404—74 Деп.) (РЖМат, 1974, 8А221 Деп.)
106. —, Ситников В. М., Сыскин С. А., Конечные группы, разрешимые подгруппы которых 2-замкнуты или 2′-замкнуты. Алгебра и логика, 1970, **9**, № 3, 313—341 (РЖМат, 1971, 1А168)
107. —, Сыскин С. А., Характеризация $L_3(2^n)$ силовскими 2-подгруппами. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, **38**, № 3, 513—517 (РЖМат, 1974, 9А224)

108. —, —, О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами. Мат. заметки, 1973, **14**, № 2, 217—222 (РЖМат, 1974, 1А209)
109. —, —, Конечные группы с 2-силовскими пересечениями ранга $\leqslant 2$. Мат. заметки, 1974, **16**, № 1, 129—134 (РЖМат, 1974, 11А266)
110. **Майер В. Р.**, О конечных группах с абелевыми централизаторами элементов нечетного порядка. Сиб. мат. ж., 1975, **16**, № 3, 551—562 (РЖМат, 1976, 1А219)
111. —, Об одном классе конечных групп с нетривиальным 2-сигнализатором. В сб. «Материалы 4-й Науч. конф. по мат. и мех. Т. 1». Томск. Томск. ун-т, 1974, 118 (РЖМат, 1974, 10А221)
112. —, Конечные $\mu\alpha'$-группы. В сб. «Алгебра». Вып. 1. Иркутск, 1972, 24—54 (РЖМат, 1974, 2А187)
113. —, Централизаторы элементов нечетного порядка в конечных группах. Всесоюзный алгебраический симпозиум. Тезисы докладов. Гомель, 1975, **38**
114. —, О конечных CA-группах с нециклической силовской 3-подгруппой. (Редколлегия «Сиб. мат. ж.» Сиб. отд. АН СССР). Новосибирск, 1975, 26 с., библиогр. 10 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 2 апр. 1975 г., № 907—75 Деп.) (РЖМат, 1975, 8А252 Деп.)
115. **Маланьина Г. А.**, Хлебутина В. И., Шевцов Г. С., Конечные минимальные не вполне факторизуемые группы. Мат. заметки, 1972, **12**, № 2, 157—162 (РЖМат, 1972, 12А180)
116. —, Шевцов Г. С., Одно обобщение конечных минимальных несверхразрешимых групп. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 7, 59—62 (РЖМат, 1973, 12А222)
117. **Медведева Р. П.**, Разрешимость некоторых инвариантных подгрупп конечной группы. Докл. АН БССР, 1970, **14**, № 3, 204—205 (РЖМат, 1970, 10А145)
118. —, Разрешимые θ-коммутативные группы. Докл. АН БССР, 1970, **14**, № 10, 877—878 (РЖМат, 1971, 3А179)
119. —, Обобщение класса групп с перестановочными силовскими подгруппами. (Редколлегия ж. «Изв. АН БССР». Сер. физ.-мат. н.). Минск, 1975, 14 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 февр. 1975 г., № 469—75 Деп.) (РЖМат, 1975, 7А303 Деп.)
120. **Мерзляков Ю. И.**, Четвертый Всесоюзный симпозиум по теории групп. Академгородок, 5—8 февр. 1973 г. Успехи мат. наук, 1973, **28**, № 3, 235—239 (РЖМат, 1973, 10А144)
121. **Монахов В. С.**, Некоторые признаки разрешимости групп. Докл. АН БССР, 1970, **14**, № 11, 986—988 (РЖМат, 1971, 7А210)
122. —, Инвариантные подгруппы бипримарных групп. Мат. заметки, 1975, **18**, № 6, 877—886 (РЖМат, 1976, 5А201)
123. —, О влиянии свойств максимальных подгрупп на строение конечной группы. Мат. заметки, 1972, **11**, № 2, 183—190 (РЖМат, 1972, 7А176)
124. —, О простых факторизуемых группах. Докл. АН БССР, 1974, **18**, № 7, 584—585 (РЖМат, 1974, 12А169)
125. —, Произведение двух групп Шмидта. Докл. АН БССР, 1975, **19**, № 1, 8—11 (РЖМат, 1975, 6А277)
126. —, О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта. Докл. АН БССР, 1974, **18**, № 10, 871—874 (РЖМат, 1975, 2А260)
127. —, О произведении двух групп, одна из которых содержит циклическую подгруппу индекса $\leqslant 2$. Мат. заметки, 1974, **16**, № 2, 285—295 (РЖМат, 1974, 12А171)
128. —, Шлык В. В., Конечные группы с нормализаторными условиями для подгрупп. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1971, № 6, 13—17 (РЖМат, 1972, 6А219)
129. **Нагребецкий В. Т.**, Конечные группы с заданными разрешимыми подгруппами. Сиб. мат. ж., 1970, **11**, № 1, 137—150 (РЖМат, 1970, 6А187)
130. —, Адамов С. Н., О группе автоморфизмов группы Шмидта. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1970, **7**, № 3, 133—136 (РЖМат, 1971, 5А215)

131. **Новицкий А. И.**, К теоремам Ито и Русакова. Докл. АН БССР, 1973, **17**, № 1, 5—8 (РЖМат, 1973, 5А190)
132. —, Конечные группы с максимальными цепями подгрупп. Докл. АН БССР, 1974, **18**, № 5, 389—390 (РЖМат, 1974, 11А263)
133. —, О конечных группах со сверхразрешимыми подгруппами. Весці АН БССР. Сер. фіз.мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1974, № 2, 11—15 (РЖМат, 1974, 9А220)
134. **Огарков Т. Т.**, О группах, обладающих насыщенными подгруппами. Уч. зап. Перм. гос. пед. ин-т, Орск. гос. пед. ин-т, 1971, вып. 10, 92—98 (РЖМат, 1972, 8А262)
135. **Ольха З. Л.**, Конечные группы, у которых каждая непримарная подгруппа — холловская. Мат. зап. Уральский ун-т, 1969, **7**, № 1, 118—124 (РЖМат, 1970, 7А184)
136. **Пальчик Э. М.**, О конечных группах с 2-замкнутыми подгруппами. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 2, 123—124 (РЖМат, 1970, 11А163)
137. —, О максимальных подгруппах конечных групп. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 3, 11—16 (РЖМат, 1970, 12А157)
138. —, О конечных простых группах с максимальной силовской 2-подгруппой. Докл. АН БССР, 1973, **17**, № 7, 595—596 (РЖМат, 1973, 12А216)
139. —, К теореме Глаубермана. (Редколлегия ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.»). Минск, 1975, 29 с., библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 3 февр. 1974 г., № 247—75 Деп.) (РЖМат, 1975, 6А279 Деп.)
140. **Петров Н. Т.**, О длине простых групп. Докл. АН СССР, 1973, **208**, № 3, 537—540 (РЖМат, 1973, 6А244)
141. **Пилаев В. В.** (Пылаев В. В.), Скінченні групи з щільною системою субінваріантних підгруп. Доповіді АН УРСР, 1974, № 9, 794—797, 861 (РЖМат, 1975, 1А277)
142. **Погребинский Б. М.**, Беркович Я. Г., О θ-длине конечной группы. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 12, 57—63 (РЖМат, 1974, 8А220)
143. **Подуфалов Н. Д.**, О транзитивных группах степени p^n, $2p^n$, $3p^n$. В сб. «Алгебра». Вып. 1. Иркутск, 1972, 87—91 (РЖМат, 1974, 2А207)
144. —, Характеризация линейных групп PSL(2, 11) и PSL(2, 13). Мат. заметки, 1974, **16**, № 2, 247—252 (РЖМат, 1974, 12А170)
145. —, О простых конечных группах с сильно изолированной подгруппой, порядок которой делится на 3. (Редколлегия «Сиб. мат. ж.» АН СССР). Новосибирск, 1975, 18 с., библиогр. 12 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 12 февр. 1975, № 345—75 Деп.) (РЖМат, 1975, 7А302 Деп.); II. Алгебра и логика, 1975, **14**, № 4, 430—440 (РЖМат, 1976, 6А231)
146. —, О централизаторах элементов порядка 3 и 5 в конечных простых группах. Всесоюзный алгебраический симпозиум. Тезисы докладов. Гомель, 1975, 53
147. —, Конечные простые группы без элементов порядка 6 и 10. Алгебра и логика, 1975, **14**, № 1, 79—85 (РЖМат, 1975, 10А248)
148. **Поляков Л. Я.**, Аналог групп О. Ю. Шмидта. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 4, 12—15 (РЖМат, 1971, 1А173)
149. —, Теорема о π-разрешимых группах. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1971, № 6, 116—118 (РЖМат, 1972, 3А162)
150. —, Решение задачи Хупперта. Докл. АН БССР, 1971, **15**, № 5, 392—393 (РЖМат, 1971, 12А236)
151. **Раскина И. Б.**, Об одной E_π-теореме. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1971, **375**, 85—86 (РЖМат, 1972, 5А192)
152. **Решко К. А.**, Конечные группы с модулярными подгруппами. Докл. АН БССР, 1973, **17**, № 6, 489—490 (РЖМат, 1973, 11А182)

153. —, О группах, непорождающихся некоторыми $\mathfrak{X}$-абнормальными подгруппами. Мат. заметки, 1974, 16, № 5, 771—776 (РЖМат, 1975, 4А243)
154. —, Харламова В. И., О p-длине произвольной конечной группы. Мат. заметки, 1973, **14**, № 3, 419—427 (РЖМат, 1974, 2А198)
155. —, —, О насыщенности максимальных цепей модулярными подгруппами. Докл. АН БССР, 1973, **17**, № 9, 788—789 (РЖМат, 1974, 2А204)
156. **Романовский А. В.,** О конечных факторизуемых группах. Мат. заметки, 1971, **9**, № 2, 223—231 (РЖМат, 1971, 7А214)
157. —, Существование, сопряженность и вложение подгрупп у конечных факторизуемых групп. Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 5, 5—11 (РЖМат, 1971, 4А146)
158. —, К теории индексиалов Чунихина. Докл. АН БССР, 1974, **18**, № 4, 297—299 (РЖМат, 1974, 11А265)
159. —, Существование холловских нормальных подгрупп у конечных групп. Мат. заметки, 1974, **16**, № 3, 381—385 (РЖМат, 1975, 1А276)
160. **Русаков С. А.,** Критерий разрешимости конечных групп. Докл. АН БССР, 1971, **15**, № 2, 105—107 (РЖМат, 1971, 9А142)
161. —, К теоремам Шмидта—Чунихина. Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1971, № 3, 17—20 (РЖМат, 1971, 11А221)
162. **Салук М. И.,** Нормализаторное условие в конечных группах. Докл. АН БССР, 1973, **17**, № 11, 981—983 (РЖМат, 1974, 4А168)
163. **Селькин М. В.,** Некоторые признаки разрешимости конечных групп. Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1971, № 6, 113—115 (РЖМат, 1972, 5А196)
164. —, О максимальных подгруппах конечных групп. Докл. АН БССР, 1974, 18, № 11, 969—972 (РЖМат, 1975, 4А246)
165. **Сементовский В. Г.,** О пронормальных подгруппах конечных групп. Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1973, № 4, 12—16 (РЖМат, 1973, 12А220)
166. —, Дисперсивные абнормальные подгруппы конечных групп. Докл. АН БССР, 1974, **18**, № 5, 394—397 (РЖМат, 1974, 11А259)
167. **Сергиенко В. И.,** О факторизации конечных групп. Докл. АН БССР, 1970, **14**, № 5, 400—401 (РЖМат, 1971, 1А177)
168. —, Критерий p-разрешимости для конечных групп. Мат. заметки, 1970, **9**, № 4, 375—383 (РЖМат, 1971, 9А151)
169. **Ситников В. М.,** Конечные группы с заданными централизаторами инволюций. Алгебра и логика, 1970, **9**, № 2, 200—219 (РЖМат, 1970, 11А166)
170. —, О конечных группах с 2-замкнутыми или 2′-замкнутыми централизаторами инволюций. Мат. заметки, 1971, **10**, № 4, 437—446 (РЖМат, 1972, 3А175)
171. —, Конечные группы с 2-замкнутыми или 2′-замкнутыми централизаторами инволюций. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, **35**, № 6, 1208—1224 (РЖМат, 1972, 5А189)
172. —, О группе Матье M_{12}. Мат. заметки, 1974, **15**, № 4, 651—660 (РЖМат, 1974, 8А225)
173. —, Конечные группы с силовской 2-подгруппой, содержащей самоцентрализующуюся элементарную абелеву подгруппу порядка 8. Мат. заметки, 1974, **16**, № 6, 899—906 (РЖМат, 1975, 5А190)
174. —, О конечных группах с самоцентрализующейся подгруппой порядка 8. Всесоюзный алгебраический симпозиум. Тезисы докладов, Гомель, 1975, 63
175. —, Старостин А. И., Конечные группы с расщепляемыми централизаторами инволюций. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1970, **7**, № 3, 200—207 (РЖМат, 1971, 5А209)
176. —, Устюжанинов А. Д., Об одном классе конечных групп. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1973, **8**, № 3, 104—115 (РЖМат, 1973, 9А208)

177. **Скопин А. И.,** О некоторых конечных группах. Зап. науч. семинаров, Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1973, **31**, 115—139 (РЖМат, 1973, 9А192)
178. **Смирнова Н. И.,** О конечных группах с метациклическими абелевыми непримарными подгруппами. Науч. тр. Свердл. гос. пед. ин-т, 1974, сб. 219, 63—72 (РЖМат, 1975, 1А273)
179. **Старостин А. И.,** Расщепления и централизаторы в теории конечных групп. (Автореф. дисс. докт. физ.-мат. н.). Мат. заметки, 1969, **6**, № 4, 499—511 (РЖМат, 1970, 4А227)
180. —, О группах Фробениуса. Укр. мат. ж., 1971, **23**, № 5, 629—639 (РЖМат, 1972, 2А266)
181. **Субботин И. Я.,** Конечные группы, в которых каждая подгруппа коммутанта инвариантна. Мат. заметки, 1972, **12**, № 6, 739—746 (РЖМат, 1973, 5А187)
182. —, Скінченні p-групи, в яких кожна підгрупа комутанта інваріантна. Доповіді АН УРСР, 1974, **А**, № 12, 1072—1074, 1148 (РЖМат, 1975, 5А194)
183. **Сучков В. К.,** Конечные группы с заданными свойствами максимальных подгрупп. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1970, № 12, 97—102 (РЖМат, 1971, 7А211)
184. **Сущанський В. І.** (Сущанский В. И.), Вербальні підгрупи силовських p-підгруп скінченних симетричних груп. Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. і мех., 1970, № 12, 134—141 (РЖМат, 1971, 6А206)
185. **Сыскин С. А.,** Простые конечные группы 2-ранга 3 с разрешимыми централизаторами инволюций. Алгебра и логика, 1971, **10**, № 6, 668—709 (РЖМат, 1972, 9А155)
186. —, О конечных группах с разрешимыми централизаторами инволюций. Алгебра и логика, 1971, **10**, № 3, 329—347 (РЖМат, 1972, 1А320)
187. —, О дополняемости в конечных группах. Сиб. мат. ж., 1971, **12**, № 2, 477—480 (РЖМат, 1971, 9А152)
188. —, О конечных группах 2-ранга 3. Докл. АН СССР, 1973, **208**, № 4, 782—784 (РЖМат, 1973, 7А207)
189. —, Замечание о слиянии 2-элементов в конечной группе. Алгебра и логика, 1973, **12**, № 3, 349—350 (РЖМат, 1974, 6А248)
190. —, О нормализаторах силовских 2-подгрупп. Всесоюзный алгебраический симпозиум. Тезисы докладов. Гомель, 1975, 69
191. **Тихоньких В. И.,** О π-композиционных подгруппах. Мат. зап. Красноярск. гос. пед. ин-т, 1970, вып. 3, 36—42 (РЖМат, 1971, 3А185)
192. —, Конечные разрешимые группы с дистрибутивными структурами квазинормальных подгрупп. Мат. зап. Красноярск. гос. пед. ин-т, 1970, вып. 3, 87—91 (РЖМат, 1971, 4А170)
193. **—,** Разрешимые группы с дистрибутивными структурами π-квазинормальных подгрупп. Тр. Зональн. объедин. мат. кафедр пед. ин-тов Сибири, 1972, вып. 2, 83—86 (РЖМат, 1973, 12А198)
194. **Трофимов П. И.,** К теории конечных неразрешимых групп. (Редколлегия «Сиб. мат. ж.» АН СССР). Новосибирск, 1974. 8 с., библиогр. 8 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 16 окт. 1974 г., № 2691—74 Деп.) (РЖМат, 1975, 3А277 Деп.)
195. **Уначев Х. Я.,** Нормализаторная вложимость подгрупп в конечных группах. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе. Сообщ. АН ГрузССР, 1970, **59**, № 3, 529—532 (РЖМат, 1971, 5А221)
196. —, Конечные группы, любая i-максимальная подгруппа которых независима. Сиб. мат. ж., 1971, **12**, № 4, 926—930 (РЖМат, 1971, 11А224)
197. —, Конечные группы с одним классом зависимых подгрупп. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1971, 8, № 1, 95—104 (РЖМат, 1972, 6А218)
198. —, Конечные группы, собственные подгруппы которых f^0-группы. Уч. зап. Кабардино-Балкар. ун-т, 1972, вып. 36, 175—176 (РЖМат, 1974, 3А138)

199. **Устюжанинов А. Д.,** О конечных p-группах, коммутант каждой собственной подгруппы которых метациклический. Сиб. мат. ж., 1971, **12**, № 4, 844—854 (РЖМат, 1971, 11А223)
200. —, Конечные 2-группы с тремя инволюциями. Сиб. мат. ж., 1972, **13**, № 1, 182—197 (РЖМат, 1972, 5А201)
201. —, Конечные 2-группы, каждая абелева инвариантная подгруппа которых метациклическая. Ин-т мат. и мех. АН СССР. Свердловск, 1971, 42 с., библиогр. 12 назв., № 3391—71 Деп. (РЖМат, 1972, 2А273Деп.)
202. —, Конечные 2-группы, в которых множество самоцентрализующихся абелевых инвариантных подгрупп с числом образующих $\geqslant 3$ пусто ($SCN_3(2) = \varnothing$). Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37**, № 2, 251—283 (РЖМат, 1973, 8А181)
203. —, Конечные 2-группы, порожденные точно тремя инволюциями. Всесоюзный алгебраический симпозиум. Тезисы докладов. Гомель, 1975, 72
204. **Фомин А. Н.,** О простых подгруппах симметрических групп подстановок конечной степени. Алгебра и логика, 1972, **11**, № 6, 724—730 (РЖМат, 1973, 8А187)
205. —, Одно замечание о факторизуемых группах. Алгебра и логика, 1972, **11**, № 5, 608—611 (РЖМат, 1973, 7А211)
206. —, Конечные 2-группы, в которых централизатор некоторой инволюции имеет порядок 8. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1973, **8**, № 3, 122—132 (РЖМат, 1973, 9А209)
207. —, Некоторые числовые свойства конечных групп. Науч. тр. Свердл. гос. пед. ин-т, 1974, сб. 219, 73—80 (РЖМат, 1975, 1А272)
208. **Фомина Н. Г.,** Конечные группы с одним коммутаторным условием. Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-т, 1971, сб. 125, 86—90 (РЖМат, 1972, 4А232)
209. **Харламова В. И.,** Классы максимальных подгрупп конечной группы. Докл. АН БССР, 1974, **18**, № 1, 13—16 (РЖМат, 1974, 6А247)
210. **Хорошевский М. В.,** О группах автоморфизмов конечных p-групп. Алгебра и логика, 1971, **10**, № 1, 81—86 (РЖМат, 1971, 12А235)
211. —, О группе автоморфизмов сплетения конечных групп. Сиб. мат. ж., 1973, **14**, № 3, 651—659 (РЖМат, 1973, 10А193)
212. —, Об автоморфизмах конечных групп. Мат. сб., 1974, **93**, № 4, 576—587 (РЖМат, 1974, 8А224)
213. —, О совершенных группах нечетного порядка. Алгебра и логика, 1974, **13**, № 1, 63—76
214. **Хухро Е. И.,** Неподвижные точки P-автоморфизмов конечных p-групп. Алгебра и логика, 1975, **14**, № 6, 697—703 (РЖМат, 1976, 8А288)
215. **Цыбуленко В. В.,** Конечные группы с некоторыми системами n-перестановочных силовских подгрупп. Доповіді АН УРСР, 1973, **А**, № 3, 219—222, 285 (РЖМат, 1973, 8А180)
216. —, Конечные группы с некоторыми системами n-перестановочных силовских подгрупп. В сб. «Группы с заданными свойствами подгрупп». Киев, 1973, 237—269 (РЖМат, 1974, 10А214)
217. —, О строении конечных групп с системами перестановочных примарных подгрупп. Укр. мат. ж., 1973, **25**, № 5, 701—705 (РЖМат, 1974, 2А205)
218. **Чаадаев В. И.,** Конечные простые неабелевы (a)-группы. Сиб. мат. ж., 1971, **12**, № 1, 204—211 (РЖМат, 1971, 6А177)
219. —, Конечные неразрешимые непростые (A)-группы. Мат. заметки, 1971, **10**, № 2, 163—169 (РЖМат, 1971, 12А229)
220. —, Конечные простые неабелевы (H)-группы. В сб. «Алгебра». Вып. 1. Иркутск, 1972, 101—134 (РЖМат, 1974, 2А188)
221. **Черток В. Д.,** О p-длине p-разрешимых групп. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 5, 12—14 (РЖМат. 1971. 4А169)
222. —, Инвариантные дополнения к нильпотентным группам. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1971, № 6, 110—112 (РЖМат, 1972, 5А199)

223. Четвертый Всесоюзный симпозиум по теории групп, 5—9 февр. 1973 г. Тезисы докл. (Ин-т мат. Сиб. отд. АН СССР, Новосиб. ун-т). Новосибирск, 1973. 274 с. (РЖМат, 1973, 7А197К)
224. **Чунихин С. А.,** О композиционных блоках конечных групп. Докл. АН СССР, 1969, **187**, № 5, 1005—1008 (РЖМат, 1970, 1А185)
225. —, О нильпотентных и сверхразрешимых подгруппах конечных групп. Докл. АН СССР, 1970, **193**, № 6, 1255—1258 (РЖМат, 1971, 1А157)
226. —, Индексиалы и подгруппы. Докл. АН СССР, 1971, **197**, № 4, 798—800 (РЖМат, 1971, 8А166)
227. —, О расширении индексиалов. Укр. мат. ж., 1971, **23**, № 5, 672—677 (РЖМат, 1972, 4А234)
228. —, О блочных свойствах конечных групп. Докл. АН СССР, 1971, **198**, № 5, 1032—1035 (РЖМат, 1971, 11А220)
229. —, Нильпотентные и сверхразрешимые подгруппы точного порядка конечных групп. Докл. АН СССР, 1972, **205**, № 3, 542—545 (РЖМат, 1972, 11А135)
230. —, О p-нильпотентных и p-разложимых подгруппах конечных групп. Укр. мат. ж., 1971, **23**, № 5, 666—671 (РЖМат, 1972, 2А268)
231. —, К определению π-разрешимых и π-отделимых групп. Докл. АН СССР, 1973, **212**, № 5, 1078—1081 (РЖМат, 1974, 5А225)
232. —, Шеметков Л. А., Конечные группы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия», 1969 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1971, 7—70
233. **Шатыло Е. И.,** О группах типа CS. Укр. мат. ж., 1971, **23**, № 5, 640—651 (РЖМат, 1972, 2А267)
234. —, О бипримарных минимальных несверхразрешимых группах. Про біпримарні мінімальні ненадрозв'язні групи. Українськ. мат. ж., 1973, **25**, № 6, 841—842 (укр.); Укр. мат. ж., 1973, **25**, № 6, 847—848 (РЖМат, 1974, 7А267)
235. **Шеметков Л. А.,** К теории конечных групп. (Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук). Мат. заметки, 1969, **6**, № 3, 347—360 (РЖМат, 1970, 4А225)
236. —, О существовании π-дополнений к нормальным подгруппам конечных групп. Докл. АН СССР, 1970, **195**, № 1, 50—52 (РЖМат, 1971, 6А191)
237. —, О формационных свойствах конечных групп. Докл. АН СССР, 1972, **204**, № 6, 1324—1327 (РЖМат, 1972, 12А187)
238. —, Дополнения и добавления к нормальным подгруппам конечных групп. Укр. мат. ж., 1971, **23**, № 5, 678—689 (РЖМат, 1972, 3А177)
239. —, О силовских свойствах конечных групп. Докл. АН БССР, 1972, **16**, № 10, 881—883 (РЖМат, 1973, 3А234)
240. —, О дополняемости F-корадикала и свойствах F-гиперцентра конечной группы. Докл. АН БССР, 1974, **18**, № 3, 204—206 (РЖМат, 1974, 8А222)
241. —, Ступенчатые формации групп. Мат. сб., 1974, **94**, № 4, 628—648 (РЖМат, 1975, 2А228)
242. —, Два направления в развитии теории непростых конечных групп. Успехи мат. наук, 1975, **30**, № 2, 179—198 (РЖМат, 1975, 9А173)
243. **Шериев В. А.,** Описание класса конечных p-групп, все дважды максимальные подгруппы которых абелевы. I, II. В сб. «Алгебра. Примарн. группы». Красноярск, 1970, 25—53; 54—76 (РЖМат, 1971, 9А148; 9А149)
244. **Шидов Л. И.,** О максимальных подгруппах конечных групп. Сиб. мат. ж., 1971, **12**, № 3, 682—683 (РЖМат, 1971, 11А217)
245. **Шлык В. В.,** Конечные группы со сверхразрешимыми парами подгрупп. Докл. АН БССР, 1971, **15**, № 4, 299—301 (РЖМат, 1971, 12А237)
246. —, О конечных группах, насыщенных сверхразрешимыми подгруппами. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1972, № 4, 5—10 (РЖМат, 1972, 11А132)
247. —, Конечные группы, насыщенные сверхразрешимыми подгруппами. Докл. АН БССР, 1971, **15**, № 11, 968—969 (РЖМат, 1972, 4А238)

248. —, О влиянии формационных свойств максимальных подгрупп на строение конечной разрешимой группы. Докл. АН БССР, 1973, **17**, № 2, 109—112 (РЖМат, 1973, 6А243)
249. —, О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах. Мат. заметки, 1973, **14**, № 3, 429—439 (РЖМат, 1974, 1А211)
250. **Шокуев В. Н.**, О квазиинвариантных подгруппах конечных групп. Мат. зап. Уральский ун-т, 1969, **7**, № 1, 135—147 (РЖМат, 1970, 7А198)
251. —, К вопросу о числе подгрупп в конечной p-группе. Уч. зап. Кабардино-Балкар. ун-т, 1972, вып. 36, 180 (РЖМат, 1974, 3А139)
252. —, Формула для числа подгрупп данного порядка конечной p-группы. Мат. заметки, 1972, **12**, № 5, 561—568 (РЖМат, 1973, 6А223)
253. —, О перечислении подгрупп в конечных p-группах. Мат. заметки, 1973, **13**, № 1, 107—112 (РЖМат, 1973, 7А200)
254. —, О числе подгрупп конечной p-группы. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1973, **8**, № 3, 133—138 (РЖМат, 1973, 9А210)
255. **Эристова Е. Д.**, О числе элементов данного порядка в сплетении конечных групп. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе. Сообщ. АН ГрузССР, 1972, **68**, № 3, 525—528 (РЖМат, 1973, 8А183)
256. —, О сплетениях некоторых 2-групп. Уч. зап. Кабардино-Балкар. ун-т, 1972, вып. 36, 184—194 (РЖМат, 1974, 3А157)
257. —, О некоторых вопросах сплетений конечных групп. Уч. зап. Кабардино-Балкар. ун-т, 1972, вып. 36, 181—183 (РЖМат, 1974, 4А152)
258. **Alex L. J.**, On simple groups of order $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \cdot p$. J. Algebra, 1973, **25**, № 1, 113—124 (РЖМат, 1973, 10А158)
259. **Alperin J. L.**, On fours groups. Ill. J. Math., 1972, **16**, № 2 349—351 (РЖМат, 1973, 1А192)
260. —, Up and down fusion. J. Algebra, 1974, **28**, № 1, 206—209 (РЖМат, 1974, 11А242)
261. —, Brauer R., Gorenstein D., Finite groups with quasidihedral and wreathed Sylow 2-subgroups. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **151**, № 1, 1—261 (РЖМат, 1971, 5А224)
262. —, —, —, Finite simple groups of 2-rank two. Scr. math., 1973, **29**, № 3-4, 191—214 (РЖМат, 1974, 2А192)
263. —, —, —, The extended ZJ-theorem. Finite Groups'72. Proc. Gainesville Conf., 1972. Amsterdam e. a., 1973, 6—7 (РЖМат, 1973, 10А161)
264. —, Lyons R., On conjugacy classes of p-elements. J. Algebra, 1971, **19**, № 4, 536—537 (РЖМат, 1972, 5А181)
265. **Arad Z.**, π-homogeneity and π'-closure of finite groups. Pacif. J. Math., 1974, **51**, № 1, 1—9 (РЖМат, 1975, 3А271)
266. —, Groups with S_2'-subgroups and S_3'-subgroups. Isr. J. Math., 1974, **17**, № 1, 76—83 (РЖМат, 1975, 2А236)
267. **Arganbright D. E.**, The power-commutator structure of finite p-groups. Pacif. J. Math., 1969, **29**, № 1, 11—17 (РЖМат, 1970, 3А234)
268. **Aschbacher M.**, On finite groups generated by odd transpositions. I. Math. Z., 1972, **127**, № 1, 45—56 (РЖМат, 1973, 2А175); II—IV. J. Algebra, 1973, **26**, № 3, 451—491 (РЖМат, 1974, 5А220—5А222)
269. —, A characterization of the unitary and symplectic groups over finite fields of characteristic at least 5. Pacif. J. Math., 1973, **47**, № 1, 5—26 (РЖМат, 1974, 5А223)
270. —, A characterization of certain Frobenius groups. Ill. J. Math., 1974, **18**, № 3, 418—426 (РЖМат, 1975, 6А261)
271. —, $\mathfrak{F}$-sets and permutation groups. J. Algebra, 1974, **30**, № 1-3, 400—416 (РЖМат, 1975, 3А267)
272. —, Finite groups with a proper 2-generated core. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **197**, 87—112 (РЖМат, 1976, 9А211)
273. —, A class of generalized TI-groups. Ill. J. Math., 1972, **16**, № 3, 529—532 (РЖМат, 1973, 2А184)
274. —, A condition for the existence of a strongly embedded subgroup. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **38**, № 3, 509—511 (РЖМат, 1974, 2А190)

275. —, Hall M., Jr., Groups generated by a class of elements of order 3. Finite Groups'72. Proc. Gainesville Conf., 1972. Amsterdam e. a., 1973, 12—18 (РЖМат, 1973, 10А162)
276. **Baartmans A. H.**, Woeppel J., Groups with a characteristic cyclic series. J. Algebra, 1974, **29**, № 1, 143—149 (РЖМат, 1974, 9А222)
277. **Beidleman J. C.**, Spencer A. E., The normal index of maximal subgroups in finite groups. Ill. J. Math., 1972, **16**, № 1, 95—101 (РЖМат, 1972, 11А129)
278. **Bender H.**, On the uniqueness theorem. Ill. J. Math., 1970, **14**, № 3, 376—384 (РЖМат, 1971, 5А202)
279. —, On groups with Abelian Sylow 2-subgroups. Math. Z., 1970, **117**, № 1-4, 164—176 (РЖМат, 1971, 6А196)
280. —, A group theoretic proof of Burnsides p^aq^b-theorem. Math. Z., 1972, **126**, № 4, 327—338 (РЖМат, 1972, 12А186)
281. —, Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festlässt. J. Algebra, 1971, **17**, № 4, 527—554 (РЖМат, 1972, 5А202)
282. —, Finite groups with large subgroups. Ill. J. Math., 1974, **18**, № 2, 223—228 (РЖМат, 1975, 2А248)
283. **Berger T. R.**, Class two p-groups as fixed point free automorphism groups. Ill. J. Math., 1970, **14**, № 1, 121—149 (РЖМат, 1971, 2А160)
284. —, Odd p-groups as fixed point free automorphism groups. Ill. J. Math., 1971, **15**, № 1, 28—36 (РЖМат, 1972, 1А299)
285. —, Nilpotent fixed point free automorphism groups of solvable groups. Math. Z., 1973, **131**, № 4, 305—312 (РЖМат, 1973, 12А209)
286. **Blackburn N.**, Note on a paper of Berkovich. J. Algebra, 1973, **24**, № 2, 323—334 (РЖМат, 1973, 7А202)
287. **Brauer R.**, Character theory of finite groups with wreathed Sylow 2-subgroups. J. Algebra, 1971, **19**, № 4, 547—592 (РЖМат, 1972, 6А200)
288. —, Fong P., On the centralizers of p-elements in finite groups. Bull. London Math. Soc., 1974, **6**, № 3, 319—324 (РЖМат, 1975, 5А186)
289. **Bride I. M.**, Second nilpotent BFC groups. J. Austral. Math. Soc., 1970, **11**, № 1, 9—18 (РЖМат, 1970, 9А155)
290. **Bryce N.**, A non simplicity criterion for finite groups. J. Austral. Math. Soc., 1969, **10**, № 3-4, 359—362 (РЖМат, 1970, 8А155)
291. —, On the Mathieu groups M_{23}. J. Austral. Math. Soc., 1971, **12**, № 4, 385—392 (РЖМат, 1972, 5А204)
292. **Camina A. R.**, The Wielandt length of finite groups. J. Algebra, 1970, **15**, № 1, 142—148 (РЖМат, 1971, 4А167)
293. —, Finite groups with Sylow 2-subgroups of nilpotency class 2. Bull. London Math. Soc., 1970, **2**, № 6, 290—292 (РЖМат, 1971, 8А151)
294. —, Arithmetical conditions of the conjugacy class numbers of a finite group. J. London Math. Soc., 1971, **5**, № 1, 127—132 (РЖМат, 1972, 12А174)
295. —, Finite groups of conjugate rank 2. Nagoya Math. J., 1974, **53**, 47—57 (РЖМат, 1974, 11А251)
296. —, Collins M. J., Finite groups admitting automorphisms with prescribed fixed points. Proc. London Math. Soc., 1974, **28**, Part 1, 45—66 (РЖМат, 1974, 9А215)
297. —, Gagen T. M., Some non-solvable factorizable groups. Ill. J. Math., 1970, **14**, № 1, 91—98 (РЖМат, 1971, 2А162)
298. —, Lockett F. P., On soluble groups which admitt the dihedral group of order eight fixed-point-freely. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, **8**, № 2, 305—312 (РЖМат, 1973, 12А215)
299. **Cannon J. J.**, Computing local structure of large finite groups. Comput. Algebra and Number Theory. Providence, R. I., 1971, 161—176 (РЖМат, 1972, 10А137)
300. —, Construction of defining relators for finite groups. Discrete Math., 1973, **5**, № 2, 105—129 (РЖМат, 1974, 1А201)

301. —, Havas G., Defining relations for the Held-Higman-Thompson simple group. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, **11**, № 1, 43—46 (РЖМат, 1975 7А289)
302. **Carter R. W.**, Simple groups of Lie type. London e. a., 1972. VIII, 331 pp (РЖМат, 1974, 7А266К)
303. **Cepulić V.**, On finite simple groups of length 8. Ill. J. Math., 1974, **18**, № 3, 389—417 (РЖМат, 1975, 6А260)
304. **Chabot P.**, Groups whose Sylow 2-groups have cyclic commutator groups. J. Algebra, 1971, **19**, № 1, 21—30 (РЖМат, 1972, 4А227); II. J. Algebra, 1972, **21**, № 2, 312—320 (РЖМат, 1972, 9А171); III. J. Algebra, 1974, **29**, № 3, 455—458 (РЖМат, 1975, 2А241)
305. **Choi Chang**, On subgroups of M_{24}. I. Stabilizers of subsets. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **167**, 1—27 (РЖМат, 1973, 3А237)
306. —, On subgroups of M_{24}. II. The maximal subgroups of M_{24}. Trans Amer. Math. Soc., 1972, **167**, 29—47 (РЖМат, 1973, 3А238)
307. **Cohn J. A.**, On the normalizers of elements of prime order in simple groups. J. Algebra, 1974, **29**, № 3, 387—400 (РЖМат, 1975, 2А240)
308. **Collins M. J.**, Finite groups admitting almost fixed-point-free automorphisms. Proc. Symp. Pure Math. Vol. 21. Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R. I., 1971, 25—27 (РЖМат, 1974, 7А269)
309. —, The characterization of the Suzuki groups by their Sylow 2-subgroups. Math. Z., 1971, **123**, № 1, 32—48 (РЖМат, 1972, 5А165)
310. —, The characterization of finite groups whose Sylow 2-subgroups are of type $L_3(q)$, q even. J. Algebra, 1973, **25**, № 3, 490—512 (РЖМат, 1973, 11А186)
311. —, The characterization of finite groups whose Sylow 2-subgroups are of type $L_3(q)$, q even. Erratum. J. Algebra, 1973, **27**, № 1, 199—203 (РЖМат, 1974, 3А148)
312. —, The characterization of the unitary groups $U_3(2^n)$ by their Sylow 2-subgroups. Bull. London Math. Soc., 1972, **4**, № 1, 49—53 (РЖМат, 1973, 3А222)
313. —, Solomon R. M., The identification of finite groups of PSL$(5, q)$-type and PSU$(5,q)$-type. Bull. London Math. Soc., 1975, **7**, № 2, 113—123 (РЖМат, 1976, 3А213)
314. **Conway J. H.**, A characterisation of Leech's lattice. Invent. math., 1969, **7**, № 2, 137—142 (РЖМат, 1970, 2А175)
315. —, A group of order 8, 315, 553, 613, 086, 720, 000. Bull. London Math. Soc., 1969, **1**, № 1, 79—88 (РЖМат, 1970, 2А176)
316. —, A construction for the smallest Fischer group F_{22}. Finite Groups'72. Proc. Gainesville Conf., 1972, Amsterdam e. a., 1973, 27—35 (РЖМат, 1973, 10А164)
317. —, Wales D. B., Construction of the Rudvalis group of order 145, 926, 144, 000. J. Algebra, 1973, **27**, № 3, 538—548 (РЖМат, 1974, 6А244)
318. —, —, Matrix generators for J_3. J. Algebra, 1974, **29**, № 3, 474—476 (РЖМат, 1975, 2А242)
319. **Cooper C. D. H.**, Chunikhin's existence theorem for subgroups of a finite group. Bull. Austral. Math. Soc., 1971, **4**, № 3, 397—406 (РЖМат, 1972, 1А311)
320. **Curtis R. T.**, On subgroups of $\cdot\mathcal{O}$. 1. Lattice stabilizers. J. Algebra, 1973, **27**, № 3, 549—573 (РЖМат, 1974, 6А245)
321. **Czyżo E.**, An attempt of mechanization of Hall collecting process. Algorytmy, 1972, **9**, № 15, 5—17 (РЖМат, 1973, 3А245)
322. **Dade E. C.**, Carter subgroups and Fitting heights of finite solvable groups. Ill. J. Math., 1969, **13**, № 3, 449—514 (РЖМат, 1970, 6А182)
323. —, Locally trivial outer automorphisms of finite groups. Math. Z., 1970, **114**, № 3, 173—179 (РЖМат, 1970, 8А162)
324. —, Locally trivial outer automorphisms of finite groups. Correction. Math. Z., 1972, **124**, № 3, 259—260 (РЖМат, 1972, 6А223)
325. —, Automorphismes extérieurs centralisant tout sous-groupe de Sylow. Math. Z., 1970, **117**, № 1-4, 35—40 (РЖМат, 1971, 6А201)

326. —, Outer automorphisms centralizing every nilpotent subgroup of a finite group. Math. Z., 1973, **130**, № 1, 1—18 (РЖМат, 1973, 9А193)
327. —, Outer automorphisms centralizing every Abelian subgroup of a finite group. Math. Z., 1974, **137**, № 2, 93—127 (РЖМат, 1975, 2А233)
328. —, Sylow-centralizing sections of outer automorphism groups of finite groups are nilpotent. Math. Z., 1975, **141**, № 1, 57—76 (РЖМат, 1975, 8А250)
329. **Davitt R. M.**, The automorphisms group of a finite metacyclic p-group. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, **25**, № 4, 876—879 (РЖМат, 1971, 7А215)
330. —, The automorphism group of finite p-Abelian p-groups. Ill. J. Math., 1972, **16**, № 1, 76—85 (РЖМат, 1972, 9А168)
331. **Deckers M.**, On groups related to Held's simple group. Arch. Math., 1974, **25**, № 1, 23—28 (РЖМат, 1974, 11А248)
332. **Dempwolff U.**, Eine Kennzeichnung der Gruppen A_5 und M_{23}. J. Algebra, 1972, **23**, № 3, 590—601 (РЖМат, 1973, 6А226)
333. —, Zentralizatoren zentraler Involutionen in $L_n(2)$. Ill. J. Math., 1973, **17**, № 3, 465—497 (РЖМат, 1974, 3А146)
334. —, A characterization of $L_n(2^m)$ by the centralizer of one 2-central involution. J. Algebra, 1974, **28**, № 1, 10—14 (РЖМат, 1974, 10А205)
335. —, A characterization of the Rudvalis simple group of order $2^{14}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot\cdot 13\cdot 29$ by the centralizers of noncentral involutions. J. Algebra, 1974, **32**, № 1, 53—88 (РЖМат, 1975, 4А233)
336. **Derr J. B.**, Mukherjee N. P., Generalized Sylow tower groups. II. Pacif. J. Math., 1973, **45**, № 2, 427—434 (РЖМат, 1973, 12А206)
337. **Enguehard M.**, Une caractérisation des groupes π-résolubles. Bull. Soc. math. France, 1970, **98**, № 3, 297—303 (РЖМат, 1971, 6А190)
338. **Fattahi A.**, On generalizations of Sylow tower groups. Pacif. J. Math., 1973, **45**, № 2, 453—478 (РЖМат, 1973, 12А207)
339. —, Groups with only normal and abnormal subgroups. J. Algebra, 1974, **28**, № 1, 15—19 (РЖМат, 1974, 10А212)
340. **Faudree R.**, A note on the automorphism group of a p-group. Proc. Amer. Math. Soc., 1968, **19**, № 6, 1379—1382 (РЖМат, 1971, 7А212)
341. **Feit W.**, The current situation in the theory of finite simple groups. Actes. Congr. int. mathématiciens, 1970. T. 1. Paris, 1971, 55—93 (РЖМат, 1972, 5А166)
342. **Fendel D.**, **A** characterization of Conway's group .3. Bull. Amer. Math. Soc., 1970, **76**, № 5, 1024—1025 (РЖМат, 1971, 6А197)
343. —, A characterization of Conway's group .3. J. Algebra, 1973, **24**, № 1, 159—196 (РЖМат, 1973, 6А235)
344. **Ferguson P. A.**, A theorem on CC-subgroups. J. Algebra, 1973, **25**, № 2, 203—221 (РЖМат, 1973, 11А179)
345. **Finkel D.**, Local control and factorization of the focal subgroup. Pacif J. Math., 1973, **45**, № 1, 113—128 (РЖМат, 1974, 1А200)
346. **Finkelstein L.**, The maximal subgroups of Conway's group C_3 and McLaughlin's group. J. Algebra, 1973, **25**, № 1, 58—89 (РЖМат, 1973, 10А157)
347. —, Finite groups in which the centralizer of an involution is $\cdot 0$. J. Algebra, 1974, **32**, № 1, 173—177 (РЖМат, 1975, 4А237)
348. —, Rudvalis A., The maximal subgroups of Janko's simple group of order 50, 232, 960. J. Algebra, 1974, **30**, № 1-3, 122—143 (РЖМат, 1975, 2А250)
349. **Fischer B.**, Finite groups generated by 3-transpositions. I. Invent. math., 1971, **13**, № 3, 232—246 (РЖМат, 1972, 2А248)
350. **Fletcher L. R.**, A transfer theorem for $C\theta\theta$-groups. Quart. J. Math., 1971, **22**, № 88, 505—533 (РЖМат, 1972, 5А164)
351. —, A note on $C\theta\theta$-groups. Pacif. J. Math., 1971, **39**, № 3, 655—657 (РЖМат, 1972, 9А157)
352. **Fong P.**, A characterization of the finite simple groups PSp$(4, q)$, $G_2(q)$, $D_4^2(q)$. II. Nagoya Math. J., 1970, **39**, 39—79 (РЖМат, 1971, 2А172)

353. —, Some decomposable Sylow 2-subgroups and a non-simplicity condition. Proc. Symp. Pure Math. Vol. 21. Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R. I., 1971, 47—48 (РЖМат, 1974, 7А270)
354. —, Wong W. J., A characterization of the finite simple groups PSp(4, q), $G_2(q)$, $D_4^2(q)$. I. Nagoya Math. J., 1969, **36**, 143—184 (РЖМат, 1970, 6А189)
355. **Frame J. S.,** Computation of characters of the Higman-Sims group and its automorphism group. J. Algebra, 1972, **20,** № 2, 320—349 (РЖМат, 1972, 6А206)
356. **Friesen D. K.,** Normal complements in finite solvable groups. J. Austral. Math. Soc., 1974 **18,** № 3, 262—264 (РЖМат, 1975, 7А283)
357. **Gallagher P. X.,** The number of conjugacy classes in a finite group. Math. Z., 1970, **118,** № 3, 175—179 (РЖМат, 1971, 6А180)
358. **Gallian J. A.,** On the breadth of a finite p-group. Math. Z., 1972, **126,** № 3, 224—226 (РЖМат, 1973, 11А191)
359. —, The H_p-problem for groups with certain central factors cyclic. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **42,** № 1, 39—44 (РЖМат, 1974, 12А168)
360. —, Finite p-groups with homocyclic central factors. Can. J. Math., 1974, **26,** № 3, 636—643 (РЖМат, 1975, 1А271)
361. **Gaschütz W.,** Sylowisatoren. Math. Z., 1971, **122,** № 4, 319—320 (РЖМат, 1972, 4А233)
362. —, Newman M. F., On presentations of finite p-groups. J. reine und angew. Math., 1970, **245,** 172—176 (РЖМат, 1971, 6А192)
363. **Geller E.,** Ein Programm zur Bestimmung der Automorphismengruppen endlicher auflösbarer Gruppen. Ber. Ges. Math. und Datenverarb., 1971, № 51, 105 S. (РЖМат, 1972, 5А194)
364. **Gillam J. D.,** A note on finite metabelian p-groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, **25,** № 1, 189—190 (РЖМат, 1971, 9А136)
365. **Gilman R.,** Complements to solvable Hall subgroups. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **27,** № 2, 241—243 (РЖМат, 1972, 6А213)
366. —, Gorenstein D., Finite groups with Sylow 2-subgroups of class two. I, II. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **207,** № 1, 1—101; 102—126 (РЖМат, 1976, 6А232, 6А233)
367. **Glauberman G.,** Weakly closed elements of Sylow subgroups. II. Math. Z., 1969, **112,** № 2, 89—100 (РЖМат, 1970, 6А176)
368. —, Prime-power factor groups of finite groups. II. Math. Z., 1970, **117,** № 1-4, 46—56 (РЖМат, 1971, 6А195)
369. —, Fixed point subgroups that contain centralizers of involutions. Math. Z., 1972, **124,** № 4, 353—360 (РЖМат, 1972, 8А253)
370. —, Failure of factorization in p-solvable groups. Quart. J. Math., 1973, **24,** № 93, 71—77 (РЖМат, 1973, 8А175)
371. —, A sufficient condition for p-stability. Proc. London Math. Soc., 1972, **25,** № 2, 253—287 (РЖМат, 1973, 2А174)
372. —, Direct factors of Sylow 2-subgroups. I, II. J. Algebra, 1974, **28,** № 1, 133—161; 162—173 (РЖМат, 1974, 11А240, 11А241)
373. —, On groups with a quaternion Sylow 2-subgroup. Ill. J. Math., 1974, **18,** № 1, 60—65 (РЖМат, 1974, 11А249)
374. **Goldschmidt D. M.,** A conjugation family for finite groups. J. Algebra, 1970, **16,** № 1, 138—142 (РЖМат, 1971, 4А172)
375. —, Sylow 2-subgroups with non-elementary centers. Proc. Symp. Pure Math. Vol. 21. Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R. I., 1971, 53—55 (РЖМат, 1974, 7А272)
376. —, An application of Brauer's second main theorem. J. Algebra, 1972, **20,** № 1, 72—77 (РЖМат, 1972, 6А189)
377. —, Solvable signalizer functors on finite groups. J. Algebra, 1972, **21,** № 1, 137—148 (РЖМат, 1972, 9А152)
378. —, 2-signalizer functors on finite groups. J. Algebra, 1972, **21,** № 2, 321—340 (РЖМат, 1972, 9А153)
379. —, Weakly embedded 2-local subgroups of finite groups. J. Algebra, 1972, **21,** № 2, 341—351 (РЖМат, 1972, 9А154)

380. —, 2-fusion in finite groups. Ann. Math., 1974, **99,** № 1, 70—117 (РЖМат, 1974, 7А273)
381. **Gomi Kensaku,** A characterization of the groups PSL(3, 2^n) and PSp(4, 2^n). J. Math. Soc. Jap., 1974, **26,** № 3, 549—574 (РЖМат, 1975, 4А228)
382. **Gorenstein D.,** The flatness of signalizer functors on finite groups. J. Algebra, 1969, **13,** № 4, 509—512 (РЖМат, 1970, 7А194)
383. —, On the centralizers of involutions in finite groups. II. J. Algebra, 1970, **14,** № 3, 350—372 (РЖМат, 1971, 4А165)
384. —, Harada Koichiro, A characterization of Janko's two new simple groups. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1970, Sec. 1, **16,** № 3, 331—406 (РЖМат, 1971, 4А164)
385. —, —, On finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_n, n=8, 9, 10, 11. Math. Z., 1970, **117,** № 1-4, 207—238 (РЖМат, 1971, 6А194)
386. —, —, On finite groups with Sylow 2-subgroups of type $\bar{A}_n$, n=8, 9, 10 and 11. J. Algebra, 1971, **19,** № 2, 185—227
387. —, —, Finite simple of low 2-rank and the families $G_2(q)$, $D_4^2(q)$, q odd. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, **77,** № 6, 829—862 (РЖМат, 1972, 6А201)
388. —, —, Finite groups whose Sylow 2-subgroups are the direct products of two dihedral groups. Ann. Math., 1972, **95,** № 1, 1—54 (РЖМат, 1972, 6А198)
389. —, —, Finite groups of sectional 2-rank at most 4. Finite Groups'72. Proc. Gainesvillle Conf., 1972. Amsterdam e. a., 1973, 57—67 (РЖМат, 1973, 10А166)
390. —, —, Finite groups with Sylow 2-subgroups of type PSp (4, q), q odd. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1973, Sec. IA, **20,** № 3, 341—372 (РЖМат, 1974, 7А290)
391. —, —, Finite groups whose 2-subgroups are generated by at most 4 elements. Mem. AMS, 1974, № 147, VIII, 464 pp. (РЖМат, 1975, 5А192)
392. —, Harris M. E., A characterization of the Higman-Sims simple group. J. Algebra, 1973, **24,** № 3, 565—590 (РЖМат, 1976, 7А253)
393. —, —, Finite groups with product fusion. Ann. Math., 1975, **101,** № 1, 45—87 (РЖМат, 1975, 7А300)
394. —, Walter J. H., The π-layer of a finite group. Ill. J. Math., 1971, **15,** № 4, 555—564 (РЖМат, 1972, 6А197)
395. —, —, Centralizers of involutions in balanced groups. J. Algebra, 1972, **20,** № 2, 284—319 (РЖМат, 1972, 6А199)
396. —, —, Balance and generation in finite groups. J. Algebra, 1975, **33,** № 2, 224—287 (РЖМат, 1975, 7А299)
397. **Greenberg P. J.,** Mathieu groups. New York, 1973, IV, 189 pp., (РЖМат, 1974, 10А226К)
398. **Griess R. L.,** Schur multipliers of finite simple groups of Lie type. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **183,** 355—421 (РЖМат, 1974, 9А213)
399. —, Schur multipliers of some sporadic simple groups. J. Algebra, 1974, **32,** № 3, 445—446 (РЖМат, 1975, 7А291)
400. **Gross F.,** Hall subgroups with cyclic intersections. Math. Z., 1969, **110,** № 5, 335—338 (РЖМат, 1970, 2А179)
401. —, A note on fixed-point-free solvable operator groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1968, **19,** № 6, 1363—1365 (РЖМат, 1971, 7А205)
402. —, p-solvable groups with few automorphism classes of subroups of order p. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **30,** № 3, 437—444 (РЖМат, 1973, 10А183)
403. —, Elementary Abelian operator groups. Bull. Austral. Math. Soc., 1972, **7,** № 1, 91—100 (РЖМат, 1973, 4А276)
404. —, Finite groups which are the product nilpotent subgroups. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, **9,** № 2, 267—274 (РЖМат, 1974, 6А308)
405. **Groves J. R. J., On minimal irregular p-groups. J. Austral. Math. Soc., 1973, 16, № 1, 78—89 (РЖМат, 1974, 6А275)**
406. **Gupta N. D., Mochizuki Horace Y., Weston K. W., On groups**

of exponent four with generators of order two. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, **10**, № 1, 135—142 (РЖМат, 1974, 10А230)
407. **Guterman M. M.**, On *ABA*-groups of finite order. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **139**, May, 109—143 (РЖМат, 1970, 2А191)
408. —, A characterization of the groups $F_4(2^n)$. J. Algebra, 1972, **20**, № 1, 1—23 (РЖМат, 1972, 6А186)
409. **Hall M.**, Construction of finite simple groups. Comput. Algebra and Number Theory. Providence R. I., 1971, 109—134 (РЖМат, 1972, 12А164)
410. —, Simple groups of order less than one million. J. Algebra, 1972, **20**, № 1, 98—102 (РЖМат, 1972, 6А191)
411. —, Notes on groups of exponent four. Lect. Notes Math., 1973, **319**, 91—118 (РЖМат, 1973, 12А242)
412. **Harada Koichiro**, Finite simple groups whose Sylow 2-subgroups are of order 2^7. J. Algebra, 1970, **14**, № 3, 386—404 (РЖМат, 1971, 5А207)
413. —, On some 2-groups of normal 2-rank 2. J. Algebra, 1972, **20**, № 1, 90—93 (РЖМат, 1972, 6А190)
414. —, On finite groups having self-centralizing 2-subgroups of small order. J. Algebra, 1975, **33**, № 1, 144—160 (РЖМат, 1975, 7А297)
415. **Harris M. E.**, A characterization of odd order extensions of the finite simple groups $PSp(4, q)$, $G_2(q)$, $D_4^2(q)$. Nagoya Math. J., 1972, **45**, 79—96 (РЖМат, 1972, 9А159)
416. —, A characterization of odd order extensions of the finite projective symplectic groups $PSp(4, q)$. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **163**, 311—327 (РЖМат, 1972, 9А162)
417. —, A characterization of odd order extensions of $G_2(2^n)$ by the centralizer of one central involution. J. Algebra, 1972, **23**, № 2, 291—309 (РЖМат, 1973, 3А235)
418. —, A characterization of odd order extensions of the finite simple projective symplectic groups $PSp(8, q)$. J. Algebra, 1973, **26**, № 1, 109—124 (РЖМат, 1973, 12А218)
419. —, A characterization of odd-order extensions of the Steinberg groups $D_4^2(q^3)$, $q=2^n$, by the centralizer of one central involution. J. Algebra, 1973, **24**, № 2, 226—244 (РЖМат, 1973, 8А165)
420. —, A characterization of odd order extensions of the finite simple Chevalley groups $F_4(q)$, q odd. J. Algebra, 1974, **30**, № 1-3, 507—534 (РЖМат, 1975, 2А256)
421. —, A characterization of odd order extensions of the finite projective symplectic groups $PSp(6, q)$, q odd. Communs Algebra, 1974, **2**, № 2, 133—142 (РЖМат, 1975, 3А275)
422. —, Finite groups with Sylow 2-subgroups of type $PSp(6, q)$, q odd. Communs Algebra, 1974, **2**, № 3, 181—232 (РЖМат, 1975, 4А231)
423. —, Finite groups with given Sylow 2-subgroups and product fusion. Communs Algebra, 1974, **2**, № 2, 143—179 (РЖМат, 1975, 4А230)
424. **Hartley B.**, Rae A., Finite *p*-groups acting on *p*-soluble groups. Bull. London Math. Soc., 1973, **5**, № 14, Part 2, 197—198 (РЖМат, 1974, 4А161)
425. **Hauptmann W.**, Gruppen mit einer Automorphismengruppe die Transitiv auf den Untergruppen von Primzahlordnung operiert. Mitt. Math. Sem. Giessen. 1973, № 101, 41 S. (РЖМат, 1974, 1А207)
426. **Havas G.**, Wall G. E., Wamsley J. W., The two generator restricted Burnside group of exponent five. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, **10**, № 3, 459—470 (РЖМат, 1975, 6А255)
427. **Hawkes T.**, On the automorphism group of a 2-group. Proc. London Math. Soc., 1973, **26**, № 2, 207—225 (РЖМат, 1973, 9А199)
428. **Hayden J. L.**, A characterization of the finite simple group $PSp_4(3)$. Can. J. Math., 1973, **25**, № 3, 539—553 (РЖМат, 1974, 3А134)
429. —, A characterization of the finite simple groups $PSp_4(3^m)$, m odd. Ill. J. Math., 1974, **18**, № 4, 622—648 (РЖМат, 1975, 7А298)
430. **Heineken H.**, Liebeck H., On *p*-groups with odd order automorphism groups. Arch. Math., 1973, **24**, № 5, 465—471 (РЖМат, 1974, 7А283)

431. —, —, The occurence of finite groups in the automorphism group of nilpotent groups of class 2. Arch. Math., 1974, **25**, № 1, 8—16 (РЖМат, 1975, 1А288)
432. **Held D.**, The simple groups related to M_{24}. J. Algebra, 1969, **13**, № 2, 253—296 (РЖМат, 1970, 5А172)
433. —, The simple groups related to M_{24}. II. J. Austral. Math. Soc., 1973, **16**, № 1, 24—28 (РЖМат, 1974, 6А235)
434. **Hering C.**, On finite groups operating doubly transitively on their involutions. Arch. Math., 1971, **22**, № 5, 456—458 (РЖМат, 1972, 6А193)
435. **Herzog M.**, On groups of order $2^\alpha 3^\beta p^\gamma$ with a cyclic Sylow 3-subgroup. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, **24**, № 1, 116—118 (РЖМат, 1971, 8А155)
436. —, On finite groups with a cyclic Sylow subgroup. Ill. J. Math., 1970, **14**, № 2, 188—193 (РЖМат, 1971, 2А165)
437. —, On a problem of E. Artin. J. Algebra, 1970, **15**, № 3, 408—416 (РЖМат, 1971, 2А169)
438. —, Simple groups with cyclic central 2-Sylow intersections. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1971, № 12, 9 pp. (РЖМат, 1972, 6А203)
439. —, Central 2-Sylow intersections. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1971, № 10, 7 pp. (РЖМат, 1972, 6А202)
440. —, Groups with strongly self-centralizing 3-centralizers. Isr. J. Math., 1971, **9**, № 4, 507—510 (РЖМат, 1972, 3А168)
441. —, $C\theta\theta$-groups involving no Suzuki groups. Pacif. J. Math., 1971, **39**, № 3, 687—689 (РЖМат, 1972, 8А240)
442. —, On 2-Sylow intersections. Isr. J. Math., 1972, **11**, № 3, 326—327 (РЖМат, 1972, 11А128)
443. —, Central 2-Sylow intersections. Pacif. J. Math., 1973, **45**, № 2, 535—538 (РЖМат, 1973, 12А208)
444. —, Simple groups with cyclic central 2-Sylow intersections. J. Algebra, 1973, **25**, № 2, 307—312 (РЖМат, 1973, 10А191)
445. —, On simple groups with a cyclic maximal 2-Sylow intersections. Isr. J. Math., 1973, **15**, № 4, 350—355 (РЖМат, 1974, 8А216)
446. —, The influence of 2-Sylow intersections on the structure of finite simple groups. Lect. Notes Math., 1974, **372**, 361—365 (РЖМат, 1975, 6А269)
447. —, Shult E., Groups with central 2-Sylow intersections of rank at most one. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **38**, № 3, 465—470 (РЖМат, 1974, 2А189)
448. **Higman G.**, Odd characterisation of finite simple groups. Univ. Michigan, 1968
449. —, On the simple group of D. G. Higman and C. C. Sims. Ill. J. Math., 1969, **13**, № 1, 74—80 (РЖМат, 1970, 2А177)
450. —, Some nonsimplicity criteria for finite groups. Lect. Notes Math., 1974, **372**, 367—376 (РЖМат, 1975, 6А273)
451. —, Some *p*-local conditions for odd *p*. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic., 1972. Vol. 13. London — New York, 1974, 531—540 (РЖМат, 1975, 7А286)
452. —, McKay J., On Janko's simple group of order 50, 232, 960. Bull. London Math. Soc., 1969, **1**, № 1, 89—94 (РЖМат, 1970, 2А174)
453. **Hill W. M.**, Parker D. B., The nilpotence class of the Frattini subgroup. Isr. J. Math., 1973, **15**, № 3, 211—215 (РЖМат, 1974, 7А261)
454. —, Wright C. R. B., Normal subgroups contained in the Frattini subgroup. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, № 2, 413—415 (РЖМат, 1973, 6А239)
455. **Hogan G. T.**, Elements of maximal order in finite *p*-groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **32**, № 1, 37—41 (РЖМат, 1972, 12А182)
456. —, Kappe W. P., On the H_p-problem for finite *p*-groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **20**, № 2, 450—454 (РЖМат, 1970, 1А186)
457. **Hunt D. C.**, Character tables of certain finite simple groups. Bull. Austral. Math. Soc., 1971, **5**, № 1, 1—42 (РЖМат, 1972, 1А375)
458. —, A characterization of the finite simple group $M(22)$. J. Algebra, 1972, **21**, № 1, 103—112 (РЖМат, 1972, 9А160)

459. —, The character table of an eight-dimensional orthogonal group. Math. Comput., 1974, **28**, № 126, 659—660 (РЖМат, 1975, 1А305)
460. —, The character table of Fischer's simple group $M(23)$. Math. Comput., 1974, **28**, № 126, 660—661 (РЖМат, 1975, 1А306)
461. **Hyde K. H.**, On the order of the Sylow subgroups of the automorphism group of a finite group. Glasgow Math. J., 1970, **11**, № 2, 88—96 (РЖМат, 1971, 6А188)
462. **Ish-Shalom A.**, On 2-Sylow intersections. Isr. J. Math., 1974, **18**, № 3, 235—242 (РЖМат, 1975, 6А268)
463. **Ito Noboru**, On finite groups with given conjugate types. II. Osaka J. Math., 1970, **7**, № 1, 231—251 (РЖМат, 1971, 6А178); III. Math. Z., 1970, **117**, № 1-4, 267—271 (РЖМат, 1971, 6А179)
464. —, Simple groups of conjugate type rank 4. J. Algebra, 1972, **20**, № 2, 226—249 (РЖМат, 1972, 6А205)
465. —, A theorem on factorizable groups. Acta sci. math., 1972, **33**, № 1-2, 49—52 (РЖМат, 1973, 3А228)
466. —, On factorizable groups. Proc. Symp. Pure Math. Vol. 21. Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R. I., 1971, 77—83 (РЖМат, 1974, 7А274)
467. **Janko Z.**, Some new simple groups of finite order. I. Sympos. math. 1967—1968. Vol. 1. Gubbio, 1969, 25—64 (РЖМат, 1970, 2А173)
468. —, Nonsolvable finite groups all of whose 2-local subgroups are solvable. I. J. Algebra, 1972, **21**, № 3, 458—517 (РЖМат, 1972, 12А178)
469. —, A class of simple groups of characteristic 2. Finite Groups'72. Proc. Gainesville Conf., 1972. Amsterdam e. a., 1973, 98—100 (РЖМат, 1973, 10А170)
470. —, Thompson J. G., On finite simple groups whose Sylow 2-subgroups have no normal elementary subgroups of order 8. Math. Z., 1970, **113**, № 5, 385—397 (РЖМат, 1970, 12А145)
471. —, Wong S. K., A characterization of the Higman-Sims simple group. J. Algebra, 1969, **13**, № 4, 517—534 (РЖМат, 1970, 5А176)
472. —, — A characterization of the McLaughlin's simple group. J. Algebra, 1972, **20**, № 2, 203—225 (РЖМат, 1972, 6А204)
473. **Johnsen K.**, Über 2-Gruppen, in denen jede abelsche Untergruppe von höchstens 2 Elementen erzeugt wird. J. Algebra, 1974, **30**, № 1-3, 31—36 (РЖМат, 1975, 1А269)
474. **Johnson C. E.**, Minimal non-splitting groups. Math. Z., 1970, **115**, № 1, 1—3 (РЖМат, 1970, 12А161)
475. **Kantor W. M.**, Seitz G. M., Step-by-step conjugation of p-subgroups of a group. J. Algebra, 1970, **16**, № 2, 298—310 (РЖМат, 1971, 5А201)
476. **Kondo Takeshi**, A characterization of the alternating group of degree eleven. Ill. J. Math., 1969, **13**, № 3, 528—541 (РЖМат, 1970, 6А181)
477. —, On the alternating groups. III. J. Algebra, 1970, **14**, № 1, 35—69 (РЖМат, 1970, 7А191)
478. —, On the alternating groups. IV. J. Math. Soc. Jap., 1971, **23**, № 3, 527—547 (РЖМат, 1972, 3А182)
479. —, A characterization of the alternating groups. Proc. Symp. Pure Math. Vol. 21. Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R. I., 1971, 95—96 (РЖМат, 1974, 7А276)
480. —, Automorphisms of a finite group and their fixed points. Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1973, **23**, № 1, 5—9 (РЖМат, 1974, 2А186)
481. **Konvisser M. W.**, Metabelian p-groups which contain a self-centralizing element. Ill. J. Math., 1970, **14**, № 4, 650—657 (РЖМат, 1971, 6А185)
482. —, Embedding of Abelian subroups in p-groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, **153**, Jan., 468—481 (РЖМат, 1971, 12А243)
483. —, 2-groups of normal rank 2 for which the Frattini subgroup has rank 3. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **165**, March, 451—469 (РЖМат, 1972, 10А139)
484. —, 2-groups which contain exactly three involutions. Math. Z., 1973, **130**, № 1, 19—30 (РЖМат, 1973, 9А194)

485. **Kowol G.**, Über die Struktur einer Klasse von auflösbaren Gruppen. II. Monatsh. Math., 1973, **77**, № 2, 120—131 (РЖМат, 1974, 2А197)
486. **Kurzweil H.**, Endliche Gruppen mit einem Automorphismus, dessen Fixpunktgruppe eine Sylowturmgruppe ist. J. Algebra, 1969, **12**, № 2, 216—226 (РЖМат, 1970, 1А190)
487. —, p-Automorphismen von auflösbaren p'-Gruppen. Math. Z., 1970, **120**, № 4, 326—354 (РЖМат, 1972, 1А309)
488. —, Eine Verallgemeinerung von fixpuntkfreien Automorphismen endlicher Gruppen. Arch. Math., 1971, **22**, № 2, 136—145 (РЖМат, 1972, 1А306)
489. —, Gruppen mit 2-lokalen Untergruppen der 2-Länge 1. J. Algebra, 1974, **32**, № 1, 26—30 (РЖМат, 1975, 4А232)
490. **Laffey T. J.**, The minimum number of generators of a finite p-group. Bull. London Math. Soc., 1973, **5**, № 3, 288—290 (РЖМат, 1974, 4А172)
491. —, A lemma on finite p-groups and some consequences. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1974, **75**, № 2, 133—137 (РЖМат, 1974, 11А257)
492. **Landrock P.**, Finite groups with Sylow 2-intersections of rank $\leqslant 1$. Math. scand., 1973, **32**, № 1, 31—45 (РЖМат, 1974, 10А218)
493. **Lausch H.**, On p-complements of Sylowizers. Math. Z., 1975, **142**, № 1, 25 (РЖМат, 1975, 9А168)
494. **Leedham-Green C. R.**, Neumann P. M., Wiegold J., The breadth and the class of a finite p-group. J. London Math. Soc., 1969, **1**, № 3, 409—420 (РЖМат, 1971, 12А242)
495. **Leon J. S.**, On simple groups of order $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ containing cyclic Sylow subgroup. J. Algebra, 1974, **28**, № 2, 326—341 (РЖМат, 1974, 11А239)
496. —, On simple groups of order $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ containing a cyclic Sylow subgroup. J. Algebra, 1972, **21**, № 3, 450—457 (РЖМат, 1972, 12А173)
497. —, Wales D. B., Simple groups of order $2^a \cdot 3^b \cdot p^c$ with cyclic Sylow p-groups. J. Algebra, 1974, **29**, № 2, 246—254 (РЖМат, 1974, 10А216)
498. **Leong Y. K.**, Odd order nilpotent groups of class two with cyclic centre. J. Austral. Math. Soc., 1974, **17**, № 2, 142—153 (РЖМат, 1975, 1А265)
499. **Liebeck H.**, Groups with an automorphism squaring many elements. J. Austral. Math. Soc., 1973, **16**, № 1, 33—42 (РЖМат, 1974, 6А237)
500. —, MacHale D., Groups of odd order with automorphisms inverting many elements. J. London Math. Soc., 1973, **6**, № 2, 215—223 (РЖМат, 1973, 9А200)
501. **Lindenberg W.**, Eine Klasse von p-Gruppen, deren Automorphismengruppen p-Gruppen sind. Period. math. hung., 1974, **5**, № 2, 171—183 (РЖМат, 1975, 3А273)
502. **Lindsey J. H.**, II, On the Suzuki and Conway groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1970, **76**, № 5, 1088—1090 (РЖМат, 1971, 6А193)
503. —, A correlation between $PSU_4(3)$, the Suzuki group, and the Conway group. Trans. Amer. Math. Soc., 1970 (1971), **157**, 189—204 (РЖМат, 1972, 2А251)
504. **Lundgren J. R.**, On finite simple groups all of whose 2-local subgroups are solvable. J. Algebra, 1973, **27**, № 3, 491—515 (РЖМат, 1974, 6А243)
505. **Lyons R.**, A characterization of the group $U_3(4)$. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **164**, Febr., 371—387 (РЖМат, 1972, 12А176)
506. —, Evidence for a new finite simple group. J. Algebra, 1972, **20**, № 3, 540—569 (РЖМат, 1972, 8А243)
507. —, Woan Wen-jin, A characterization of some groups of characteristic two. J. Algebra, 1974, **31**, № 3, 452—459 (РЖМат, 1975, 4А225)
508. **Macdonald I. D.**, The Hughes problem and others. J. Austral. Math. Soc., 1969, **10**, № 3-4, 475—479 (РЖМат, 1970, 8А158)
509. —, Solution of the Hughes problem for finite p-groups of class $2p-2$. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **27**, № 1, 39—42 (РЖМат, 1972, 5А186)
510. —, Computer results on Burnside groups. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, **9**, № 3, 433—438 (РЖМат, 1974, 10А201)
511. —, A computer application to finite p-groups. J. Austral. Math. Soc., 1974, **17**, № 1, 102—112 (РЖМат, 1974, 11А228)

512. **Machi A.,** Automorphismi che fissano sottogruppi di Sylow. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1972, **52,** № 6, 835—839 (РЖМат, 1974, 2A196)
513. **MacWilliams A. R.,** On 2-groups with no normal Abelian subgroups of rank 3, and their occurrence as Sylow 2-subgroups of finite simple groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **150,** № 2, 345—408 (РЖМат, 1971, 7A207)
514. **Magliveras S.,** The subgroup structure of the Higman-Sims simple group. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, **77,** № 4, 535—539 (РЖМат, 1972, 1A305)
515. **Mann A.,** Generators of 2-groups. Isr. J. Math., 1971, **10,** № 2, 158—159 (РЖМат, 1972, 3A174)
516. —, Regular p-groups. Isr. J. Math., 1971, **10,** № 4, 471—477 (РЖМат, 1972, 6A209)
517. —, Regular p-groups. II. Isr. J. Math., 1973, **14,** № 3, 294—303 (РЖМат, 1974, 3A140)
518. —, On subgroups of finite solvable groups. III. Isr. J. Math., 1973, **16,** № 4, 446—451 (РЖМат, 1974, 11A261)
519. **Martineau R. P.,** A characterization of Janko's simple group of order 175560. Proc. London Math. Soc., 1969, **19,** № 4, 709—729 (РЖМат, 1970, 5A174)
520. —, Solubility of groups admitting a fixed-point-free automorphism group of type (p, p). Math. Z., 1972, **124,** № 1, 67—72 (РЖМат, 1972, 5A180)
521. —, Elementary Abelian fixed point free automorphism groups. Quart. J. Math., 1972, **23,** № 90, 205—212 (РЖМат, 1972, 12A177)
522. —, On 2-modular representations of the Suzuki groups. Amer. J. Math., 1972, **94,** № 1, 55—72 (РЖМат, 1973, 2A180)
523. —, Solubility of groups admitting certain fixed-point-free automorphism groups. Math. Z., 1973, **130,** № 2, 143—147 (РЖМат, 1973, 8A170)
524. —, On simple groups of order prime to 3. Proc. London Math. Soc., 1972, **25,** № 2, 213—252 (РЖМат, 1973, 2A181)
525. **Mason D. R.,** Finite simple groups with Sylow 2-subgroup dihedral wreath Z_2. J. Algebra, 1973, **26,** № 1, 10—68 (РЖМат, 1974, 2A193)
526. —, Finite simple groups with Sylow 2-subgroups of type $\mathrm{PSL}(4, q)$, q odd. J. Algebra, 1973, **26,** № 1, 75—97 (РЖМат, 1974, 2A194)
527. **Mason G.,** Characterizing Chevalley groups of rank two and characteristic two by their Sylow 2-subgroups. I. J. Algebra, 1975, **36,** № 3, 364—394 (РЖМат, 1976, 5A207)
528. **Matsuyama Hiroshi,** Solvability of groups of order $2^a p^b$. Osaka J. Math., 1973, **10,** № 2, 375—378 (РЖМат, 1974, 7A259)
529. **McKay J.,** Computing with finite simple groups. Lect. Notes Math., 1974, **372,** 448—452 (РЖМат, 1975, 7A288)
530. —, W a l e s D., The multipliers of the simple groups of order 604 800 and 50 232 960. J. Algebra, 1971, **17,** № 2, 262—272 (РЖМат, 1971, 8A149)
531. —, —, The multiplier of the Higman-Sims simple group. Bull. London Math. Soc., 1971, **3,** № 9, 283—285 (РЖМат, 1972, 8A249)
532. **Miech R. J.,** Metabelian p-groups of maximal class. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **152,** № 2, 331—373 (РЖМат, 1971, 11A208)
533. —, Some p-groups of maximal class. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **189,** 1—47 (РЖМат, 1974, 12A190)
534. **Mizuno Kenzo,** A characterization of the Chevalley groups $E_n(q)$, q even. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1975, Sec. IA, **22,** № 2, 153—198 (РЖМат, 1976, 5A203)
535. **Neubüser J.,** Computing moderately large groups: some methods and applications. Comput. Algebra and Number Theory. (SIAM-AMS Proc., Vol. 4). Providence R. I., 1971, 183—190 (РЖМат, 1972, 10A138)
536. **Neumann P. M.,** An improved bound for BFC p-groups. J. Austral. Math. Soc., 1970, **11,** № 1, 19—27 (РЖМат, 1970, 9A156)
537. **Olsson J. B.,** Odd-order extensions of some orthogonal groups. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1972, № 16, 18 pp. (РЖМат, 1972, 9A163)

538. —, Odd-order extensions of some orthogonal groups. II. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1972—1973, № 26, 10 pp. (РЖМат, 1973, 10A152)
539. —, A characterization of some orthogonal groups. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1971—1972, № 5, 38 pp. (РЖМат, 1972, 3A178)
540. —, Odd-order extensions of some orthogonal groups. J. Algebra, 1974, **28,** № 3, 573—596 (РЖМат, 1974, 11A230)
541. **Pandya G. N.,** On automorphisms of finite simple Chevalley groups. J. Number Theory, 1974, **6,** № 3, 171—184 (РЖМат, 1975, 2A244)
542. —, Algebraic groups and automorphisms of finite simple Chevalley groups. J. Number Theory, 1974, **6,** № 4, 239—247 (РЖМат, 1975, 2A245)
543. **Parrott D.,** On the Mathieu groups M_{22} and M_{11}. J. Austral. Math. Soc., 1970, **11,** № 1, 69—81 (РЖМат, 1970, 9A158)
544. —, A characterization of the Tits' simple group. Can. J. Math., 1972, **24,** № 4, 672—685 (РЖМат, 1973, 3A223)
545. —, On the simple group of J. Tits. Can. Math. Bull., 1973, **16,** № 1, 87—92 (РЖМат, 1973, 12A197)
546. —, A characterization of the Ree groups ${}^2F_4(q)$. J. Algebra, 1973, **27,** № 2, 341—357 (РЖМат, 1974, 6A238)
547. —, W o n g S. K., On the Higman-Sims simple group of order 44.352.000. Pacif. J. Math., 1970, **32,** № 2, 501—516 (РЖМат, 1970, 12A146)
548. **Patterson A. R.,** On Sylow 2-subgroups with no normal Abelian subgroups of rank 3, in finite fusion-simple groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **187,** № 1, 1—67 (РЖМат, 1974, 11A233)
549. **Peng T. A.,** Normal 2-subgroups of finite groups. J. Algebra, 1973, **27,** № 1, 184—186 (РЖМат, 1974, 4A165)
550. —, Normal p-subgroups of finite groups. J. London Math. Soc., 1974, **8,** № 1, 161—167 (РЖМат, 1974, 11A250)
551. **Pennington E. A.,** On products of finite nilpotent groups. Math. Z., 1973, **134,** № 1, 81—83 (РЖМат, 1974, 6A233)
552. **Phan Kok-Wee,** A characterization of the finite simple group $L_4(3)$. J. Austral. Math. Soc., 1969, **10,** № 1-2, 51—76 (РЖМат, 1970, 3A233)
553. —, A characterization of the finite simple group $U_4(3)$. J. Austral. Math. Soc., 1969, **10,** № 1-2, 77—94 (РЖМат, 1970, 2A182)
554. —, A characterization of four-dimensional unimodular groups. J. Algebra, 1970, **15,** № 2, 252—279 (РЖМат, 1971, 2A155)
555. —, A characterization of the unitary groups $\mathrm{PSU}(4, q^2)$, q odd. J. Algebra, 1971, **17,** № 1, 132—148 (РЖМат, 1971, 8A154)
556. —, A characterization of the finite groups $\mathrm{PSL}(n, q)$. Math. Z., 1972, **124,** № 3, 169—185 (РЖМат, 1972, 6A195)
557. —, On characterizing finite Chevalley groups of type E_6 and their twisted analogs. J. Algebra, 1974, **32,** № 1, 141—152 (РЖМат, 1975, 4A236)
558. **Pic G.,** Zum Satz von Schmidt-Iwasawa. Math. Nachr., 1972, **53,** № 1-6, 53—62 (РЖМат, 1973, 3A224)
559. **Polimeni A. D.,** Groups in which $\mathrm{Aut}(G)$ is transitive on the isomorphism classes of G. Pacif. J. Math., 1973, **48,** № 2, 473—480 (РЖМат, 1974, 9A216)
560. **Pomareda R. J.,** A generalization of a result of J. G. Thompson. J. Algebra, 1975, **37,** № 2, 239—265 (РЖМат, 1976, 4A166)
561. **Puig L.,** Sur le contrôle de fusion des p-sous-groupes. C. r. Acad. sci., 1974, **A278,** № 4, 231—232 (РЖМат, 1974, 9A214)
562. —, Sur les groupes finis p-stables et p-contraints. C. r. Acad. sci., 1974, **A278,** № 17, 1081—1082 (РЖМат, 1974, 11A235)
563. —, Sur un théorême d'Alperin. C. r. Acad. sci., 1974, **A278,** № 16, 1013—1016 (РЖМат, 1974, 11A238)
564. **Quintana R. B.,** An attack on the restricted Burnside problem for groups of exponent 8 on 2 generators. Lect. Notes Math., 1973, **319,** 140—147 (РЖМат, 1973, 12A201)
565. **Rae A.,** Sylow p-subgroups of finite p-soluble groups. J. London Math. Soc., 1973, **7,** № 1, 117—123 (РЖМат, 1974, 2A200)

566. **Ralston E. W.,** Solvability of finite groups admitting fixed-point-free automorphisms of order *rs*. J. Algebra, 1972, **23**, № 1, 164—180 (РЖМат, 1973, 3A229)
567. **Reifart A.,** A characterization of Sz by the Sylow 2-subgroup. J. Algebra, 1975, **36**, № 3, 348—363 (РЖМат, 1976, 5A206)
568. **Rose J. S.,** Absolutely faithful group actions. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1969, **66**, № 2, 231—237 (РЖМат, 1970, 5A170)
569. —, On the splitting of extensions by a group of prime order. Math. Z., 1970, **117**, № 1-4, 239—248 (РЖМат, 1971, 5A210)
570. —, Splitting properties of group extensions. Proc. London Math. Soc., 1971, **22**, № 1, 1—23 (РЖМат, 1971, 11A213)
571. —, A subnormal embedding theorem for finite groups. J. London Math. Soc., 1972, **5**, № 2, 253—259 (РЖМат, 1973, 3A227)
572. —, Universal finite group extensions and a non-splitting theorem. Isr. J. Math., 1973, **15**, № 4, 375—383 (РЖМат, 1974, 8A212)
573. —, Sufficient conditions for the existence of ordered Sylow towers in finite groups. J. Algebra, 1974, **28**, № 1, 116—126 (РЖМат, 1974, 10A213)
574. **Sandling R.,** Fixed point free actions on *p*-groups. Arch. Math., 1971, **22**, № 3, 231—236 (РЖМат, 1972, 2A249)
575. **Schaller K.-U.,** Über normal eingebettete Untergruppen endlicher auflösbarer Gruppen. Arch. Math., 1974, **25**, № 4, 341—343 (РЖМат, 1975, 4A242)
576. **Schenkman E.,** The tower theorem for finite groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **22**, № 2, 458—459 (РЖМат, 1970, 5A168)
577. —, The number of Hall π-subgroups of a finite group. Ill. J. Math., 1970, **14**, № 2, 241—243 (РЖМат, 1971, 2A164)
578. **Schiefelbusch L.,** Sylow 2-subgroups of simple groups. J. Algebra, 1974, **31**, № 1, 131—153 (РЖМат, 1975, 3A265)
579. **Schmid P.,** Untergruppenreihen normalizierende Automorphismengruppen. Arch. Math., 1972, **23**, № 5, 459—468 (РЖМат, 1973, 6A229)
580. **Schoenwaelder U.,** Finite groups with a Sylow 2-subgroup of type M_{24}. I, II, J. Algebra, 1974, **28**, № 1, 20—45; 46—56 (РЖМат, 1974, 10A219, 10A220)
581. **Scimemi B.,** Un'osservazione sui gruppi finiti dotati di automorfismi di ordine p^n privi di coincidenze. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1973, **54**, № 4, 509—510 (РЖМат, 1975, 2A230)
582. **Sehgal S.,** A generalization of a theorem of Z. Janko and J. G. Thompson. J. Algebra, 1973, **25**, № 2, 222—225 (РЖМат, 1973, 10A190)
583. **Seitz G. M.,** Solvable groups having system normalizers of prime order. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **183**, 165—173 (РЖМат, 1974, 7A286)
584. **Serre J. P.,** Sur one question d'Olga Taussky. J. Number Theory, 1970, **2**, № 2, 235—236 (РЖМат, 1970, 12A150)
585. **Shamash J.,** On the Carter subgroup of a solvable group. Math. Z., 1969, **109**, № 4, 288—310 (РЖМат, 1970, 1A193)
586. **Shaw D. L.,** The Sylow 2-subgroups of finite solube groups with a single class of involutions. J. Algebra, 1970, **16**, № 1, 14—26 (РЖМат, 1971, 4A152)
587. **Shinoda Ken-ichi,** The conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of characteristic 2. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1974, Sec. IA, **21**, № 2, 133—159 (РЖМат, 1975, 4A227)
588. **Shoji Toshiaki,** The conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of characteristic $p \neq 2$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1974, Sec. IA, **21**, № 1, 1—17 (РЖМат, 1974, 11A231)
589. **Shult E.,** A characterization theorem for the groups $\mathrm{Sp}(2n, 2)$. J. Algebra, 1970, **15**, № 4, 543—553 (РЖМат, 1971, 2A167)
590. —, A note on Janko's simple group of order 175, 560. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, № 2, 342—348 (РЖМат, 1973, 6A237)
591. —, On subgroups of type $Z_p \times Z_p$. J. Algebra, 1974, **32**, № 1, 119—131 (РЖМат, 1975, 4A234)

592. **Sims C. C.,** The existence and uniqueness of Lyons' group. Finite Groups'72. Proc. Gainesville Conf., 1972. Amsterdam e. a., 1973, 138—141 (РЖМат, 1973, 10A176)
593. **Smith F. L.,** Finite groups whose Sylow 2-subgroups are the direct product of a dihedral and a semi-dihedral group. Ill. J. Math., 1973, **17**, № 3, 352—386 (РЖМат, 1974, 4A158)
594. —, Groups whose Sylow subgroups are the direct product of two semidihedral groups. Ill. J. Math., 1973, **17**, № 3, 387—396 (РЖМат, 1974, 4A159)
595. —, A general characterization of the Janko simple group J_2. Arch. Math., 1974, **25**, № 1, 17—22 (РЖМат, 1974, 11A247)
596. —, A characterization of the .2. Conway simple group. J. Algebra, 1974, **31**, № 1, 91—116 (РЖМат, 1975, 2A257)
597. —, Finite simple groups all of whose 2-local subgroups are solvable. J. Algebra, 1975, **34**, № 3, 481—520 (РЖМат, 1976, 1A218)
598. **Smith S. D.,** Tyrer A. P., On finite groups with a certain Sylow normalizer. I, II. J. Algebra, 1973, **26**, № 2, 343—365; 366—367 (РЖМат, 1974, 4A154, 4A155)
599. **Snapper E.,** Counting *p*-subgroups. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **39**, № 1, 81—82 (РЖМат, 1974, 3A145)
600. **Solomon R.,** Finite groups with Sylow 2-subgroups of type $\mathfrak{A}_{12}$. J. Algebra, 1973, **24**, № 2, 346—378 (РЖМат, 1973, 8A166)
601. —, Finite groups with Sylow 2-subgroups of type $\Omega(7, q), q \equiv \pm 3 \pmod 8$. J. Algebra, 1974, **28**, № 1, 174—181 (РЖМат, 1974, 10A206)
602. —, Finite groups with Sylow 2-subgroups of type .3. J. Algebra, 1974, **28**, № 1, 182—198 (РЖМат, 1974, 10A207)
603. **Specht W. H.,** A factorization theorem for *p*-constrained groups. Pacif. J. Math., 1974, **53**, № 1, 253—258 (РЖМат, 1975, 7A295)
604. **Spencer A. E.,** Finite groups with short nonnormal chains. J. Austral. Math. Soc., 1974, **18**, № 1, 111—118 (РЖМат, 1975, 7A256)
605. **Stellmacher B.,** Einfache Gruppen, die von einer Konjugiertklasse von Elementen der Ordnung drei erzeugt werden. J. Algebra, 1974, **30**, № 1-3, 320—354 (РЖМат, 1975, 3A266)
606. **Stewart W. B.,** Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers. Proc. London Math. Soc., 1973, **26**, № 4, 653—680 (РЖМат, 1973, 12A217)
607. —, Finite simple groups having an element of order three whose centralizer is of order fifteen. Quart. J. Math., 1974, **25**, № 97, 9—17 (РЖМат, 1974, 11A236)
608. **Stroth G.,** Gruppen mit abelschen 2-Sylow Durchschnitten. J. Algebra, 1974, **30**, № 1-3, 436—443 (РЖМат, 1975, 1A270)
609. —, Eine Kennzeichnung der Gruppe ${}^2E_6(2^n)$. J. Algebra, 1975, **35**, № 1-3, 534—547 (РЖМат, 1976, 2A240)
610. **Suzuki Michio,** Characterizations of linear groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1969, **75**, № 6, 1043—1091 (РЖМат, 1970, 12A148)
611. **Szép J.,** Zappa G., Generalizzazione di un teorema di Gaschütz sui sylowizzatori. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1973 (1974), **55**, № 3-4, 167—171 (РЖМат, 1975, 7A279)
612. **Taylor D. E.,** A characterization of the group Aut(PGL (3, 4)). J. Austral. Math. Soc., 1970, **11**, № 2, 195—206 (РЖМат, 1971, 2A163)
613. Theory of finite groups. Eds Brauer R., Sah C. H. New York, Benjamin, 1969, XIII, 263 pp. (РЖМат, 1970, 6A174K)
614. **Thomas G.,** A characterization of the groups $G_2(2^n)$. J. Algebra, 1969, **13**, № 1, 87—118 (РЖМат, 1970, 5A173)
615. —, A characterization of the unitary groups $\mathrm{PSU}_5(q^2)$, $q=2^n$. J. Algebra, 1970, **14**, № 2, 245—259 (РЖМат, 1971, 4A176)
616. —, A characterization of the Steinberg groups $D_4^2(q^3)$, $q=2^n$. J. Algebra, 1970, **14**, № 3, 373—385 (РЖМат, 1971, 4A162)

617. —, An improved characterization of the groups $F_4(2^n)$, $n \geqslant 2$. J. Algebra, 1975, **34**, № 1, 1—13 (РЖМат, 1975, 11А263)
618. **Thompson J. G.**, A replacement theorem for p-groups and a conjecture. J. Algebra, 1969, **13**, № 2, 149—151 (РЖМат, 1970, 5А183)
619. —, Bounds for orders of maximal subgroups. J. Algebra, 1970, **14**, № 2, 135—138 (РЖМат, 1971, 2А168)
620. —, Normal p-complements and irreducible characters. J. Algebra, 1970, **14**, № 2, 129—134 (РЖМат, 1971, 2А170)
621. —, Toward a characterization of $E_2^*(q)$. II. J. Algebra, 1972, **20**, № 3, 610—621 (РЖМат, 1972, 8А242)
622. —, Quadratic pairs. Actes Congr. int. mathématiciens, 1970. T. 1. Paris, 1971, 375—376 (РЖМат, 1972, 5А174)
623. —, Isomorphisms induced by automorphisms. J. Austral. Math. Soc., 1973, **16**, № 1, 16—17 (РЖМат, 1974, 6А234)
624. —, Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**, № 3, 383—437 (РЖМат, 1971, 1А160); II. Pacif. J. Math., 1970, **33**, № 2, 451—536 (РЖМат, 1971, 5А225); III. Pacif. J. Math., 1971, **39**, № 2, 483—534 (РЖМат, 1972. 8А250); IV. Pacif. J. Math., 1973, **48**, № 2, 511—592 (РЖМат, 1974, 9А217); V. Pacif. J. Math., 1974, **50**, № 1, 215—297 (РЖМат, 1974, 11А252); VI. Pacif. J. Math., 1974, **51**, № 2, 573—630 (РЖМат, 1975, 4А229)
625. —, Simple 3′-groups. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic. 1972. Vol. 13. London—New York, 1974, 517—530 (РЖМат, 1975, 7А285)
626. **Thwaites G. N.**, On finite groups having a maximal subgroup isomorphic to $A_5 \times Z_3$. Quart. J. Math., 1970, **21**, № 84, 417—420 (РЖМат, 1971, 7А213)
627. —, A characterization of M_{12} by centralizer of involution. Quart. J. Math., 1973, **24**, № 96, 537—557 (РЖМат, 1974, 7А291)
628. **Timmesfeld F. G.**, Eine Kennzeichnung der linearen Gruppen über $GF(2)$. Math. Ann., 1970, **189**, № 2, 134—160 (РЖМат, 1971, 5А213)
629. —, A characterization of the Chevalley- and Steinberg-groups over F_2. Geom. dedic., 1973, **1**, № 3, 269—321 (РЖМат, 1973, 10А182)
630. —, Groups generated by root-involutions. I. J. Algebra, 1975, **33**, № 1, 75—134 (РЖМат, 1975, 7А296); II. J. Algebra, 1975, **35**, № 1-3, 367—441 (РЖМат, 1976, 2А239)
631. **Tits J.**, Groupes finis simples sporadiques. Lect. Notes Math., 1971, **180**, 187—211 (РЖМат, 1971, 11А209)
632. **Todd J. A.**, Abstract definitions for the Mathieu groups. Quart. J. Math., 1970, **21**, № 84, 421—424 (РЖМат, 1971, 5А229)
633. **Vaughan-Lee M. R.**, Metabelian *BFC* p-groups. J. London Math. Soc., 1972, **5**, № 4, 673—680 (РЖМат, 1973, 6А227)
634. —, Breadth and commutator subgroups of p-groups. J. Algebra, 1974, **32**, № 2, 278—285 (РЖМат, 1975, 6А256)
635. —, Wiegold J., Breadth, class and commutator subgroups of p-groups. J. Algebra, 1974, **32**, № 2, 268—277 (РЖМат, 1975, 6А257)
636. **Waall R. W. van der**, On a theorem of Burnside. Elem. Math., 1970, **25**, № 6, 136—137 (РЖМат, 1971, 5А214)
637. —, On modular p-groups. J. Algebra, 1973, **25**, № 1, 125—127 (РЖМат, 1973, 10А159)
638. —, A note on modular p-groups. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1973, **A76**, № 1, 47—48; Indag. math., 1973, **35**, № 1, 47—48 (РЖМат, 1973, 8А172)
639. —, On finite p-groups whose commutator subgroups are cyclic. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1973, **A76**, № 4, 342—345; Indag. math., 1973, **35**, № 4, 342—345 (РЖМат, 1974, 3А147)
640. —, Certain normal subgroups of the Frattini subgroup of a finite group. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1974, **A77**, № 4, 382—386; Indag. math., 1974, **36**, № 4, 382—386 (РЖМат, 1975, 3А276)

641. **Wales D. B.**, Generators of the Hall-Janko group as a subgroup of $G_2(4)$. J. Algebra, 1969, **13**, № 4, 513—516 (РЖМат, 1970, 5А177)
642. —, Simple groups of order $7 \cdot 3^a \cdot 2^b$. J. Algebra, 1970, **16**, № 4, 575—596 (РЖМат, 1971, 8А150)
643. —, Simple groups of order $17 \cdot 3^a \cdot 2^b$. J. Algebra, 1971, **17**, № 3, 429—433 (РЖМат, 1972, 5А177)
644. —, Simple groups of order $13 \cdot 3^a \cdot 2^b$. J. Algebra, 1972, **20**, № 1, 124—143 (РЖМат, 1972, 6А192)
645. —, Simple groups of order $p \cdot 3^a \cdot 2^b$. J. Algebra, 1970, **16**, № 2, 183—190 (РЖМат, 1971, 5А206)
646. **Wall C. T. C.**, On groups consisting mostly of involutions. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1970, **67**, № 2, 251—262 (РЖМат, 1971, 1А161)
647. **Wall G. E.**, On Hughes' H_p-problem. Proc. Int. Conf. Theory of Groups, Austral. Nat. Univ. Canberra, August, 1965. Gordon and Breach Sci. Publs, Inc., 1967, 357—362
648. **Walter J. H.**, Centralizers of involutions and the classification problem. Finite Groups'72. Proc. Gainessville Conf., 1972. Amsterdam e. a., 1973, 147—155 (РЖМат, 1973, 10А177)
649. **Ward J. N.**, On finite groups admitting automorphisms with nilpotent fixed-point group. Bull. Austral. Math. Soc., 1971, **5**, № 2, 281—282 (РЖМат, 1972, 2А260)
650. —, On finite soluble groups and the fixed-point groups of automorphisms. Bull. Austral. Math. Soc., 1971, **5**, № 3, 375—378 (РЖМат, 1972, 5А187)
651. —, Nilpotent signalizer functors of finite groups. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, **9**, № 3, 367—377 (РЖМат, 1974, 9А219)
652. —, On groups admitting a noncyclic Abelian automorphism group. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, **9**, № 3, 363—366 (РЖМат, 1974, 9А218)
653. **Wiegold J.**, Commutator subgroups of finite p-groups. J. Austral. Math. Soc., 1969, **10**, № 3-4, 480—484 (РЖМат, 1970, 8А157)
654. **Wielandt H.**, Vertauschbarkeit von Untergruppen und Subnormalität. Math. Z., 1973, **133**, № 3, 275—276 (РЖМат, 1974, 4А170)
655. **Woan Wen-Jin**, A characterization of four-dimensional projective special linear groups over finite fields of characteristic 2. J. Algebra, 1972, **21**, № 2, 292—311 (РЖМат, 1972, 9А161)
656. **Wong S. K.**, On a new finite non-abelian simple group of Janko. Bull. Austral. Math. Soc., 1969, **1**, № 1, 59—79 (РЖМат, 1970, 5А175)
657. **Wong W. J.**, A characterization of the finite projective symplectic groups $PSp_4(q)$. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **139**, 1—35 (РЖМат, 1970, 3А232)
658. —, A characterization of the finite simple groups $PSp_6(q)$, q odd. J. Algebra, 1969, **12**, № 4, 494—524 (РЖМат, 1970, 3А223)
659. —, Characterization of the finite simple groups $PSp_{2n}(q)$. J. Algebra, 1970, **14**, № 4, 531—551 (РЖМат, 1971, 2А171)
660. —, A characterization of orthogonal simple groups $P\Omega(2n, q)$. Finite Groups'72. Proc. Gainessville Conf., 1972. Amsterdam e. a., 1973, 156—158 (РЖМат, 1973, 11А177)
661. —, A characterization of finite orthogonal simple groups. J. Algebra, 1974, **28**, № 3, 518—540 (РЖМат, 1974, 11А229)
662. **Wright C. R. B.**, On complements to normal subgroups in finite solvable groups. Arch. Math., 1972, **23**, № 2, 125—132 (РЖМат, 1972, 12А188)
663. **Wright D.**, The irreducible characters of the simple group of M. Suzuki of order 448, 345, 497, 600. J. Algebra, 1974, **29**, № 2, 303—323 (РЖМат, 1974, 10А217)
664. —, The nonexistence of a certain type of finite simple group. J. Algebra, 1974, **30**, № 1-3, 417—420 (РЖМат, 1975, 2А252)
665. **Yamaki Hiroyoshi**, A characterization of the simple group $Sp(6,2)$. J. Math. Soc. Jap., 1969, **21**, № 3, 334—356 (РЖМат, 1970, 3А224)

666. —, On the Janko's simple group of order 175.560. Osaka J. Math., 1972, **9**, № 1, 111—112 (РЖМат, 1973, 2А183)
667. —, Finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_{16}. J. Algebra, 1975, **33**, № 3, 523—566 (РЖМат, 1975, 8А241)
668. —, Finite groups with Sylow 2-subgroups of type the alternating group of degree sixteen. Lect. Notes Math., 1974, **372**, 730—732 (РЖМат, 1975, 6А267)
669. **Yanosko K.**, A characterization of $Sp_6(2)$. Ill. J. Math., 1972, **16**, № 3, 381—397 (РЖМат, 1973, 3А225)
670. **Yoshida Tomoyuki**, A characterization of Conway's group C_3. Hokkaido Math. J., 1974, **3**, № 2, 232—242 (РЖМат, 1975, 7А287)
671. **Zappa G.**, Fondamenti di teoria dei gruppi. Vol. 2. Roma. Ed. Cremonese, 1970, XXI, 411 p. (РЖМат, 1972, 3А161К)
672. **Zara F.**, Une propriété des automorphismes d'ordre 2 des groupes d'ordre impair. Bull. sci. math., 1973 (1974), **97**, № 2, 97—103 (РЖМат, 1974, 7А279)

УДК 519.48

МОДУЛИ

*Л. А. Скорняков, А. В. Михалёв**

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий обзор составлен по материалам реферативного журнала Математика за 1972—1975 гг. и может рассматриваться как продолжение обзоров [137—138, 106 и 112], охватывающих материалы 1961—1962, 1963—1965, 1966—1968 и 1969—1971 гг. соответственно. В частности, при упоминании работ, отраженных в этих обзорах, читатель, как правило, отсылается к соответствующей обзорной статье. Ссылки на библиографию из названных обзоров оформляются как [М62:000, М65:000], [М68::000] и [М71:000] соответственно. Например, [М65:121] означает, что имеется в виду работа [121] из обзора [138], относящегося к 1963—1965 гг. Отметим еще посвященный кольцам эндоморфизмов и структурам подмодулей обзор [104]. Отраженные в нем материалы также не дублируются и цитируются как [КЭ:000]. Ссылка типа п. 3. 1 означает § 3 п. 1 настоящего обзора.

К большому сожалению авторов, стремительный рост числа публикаций по модулям и органиченность объема обзора вынудили нас сознательно оставить вне рассмотрения ряд важных разделов, в которых модули играют существенную роль. В первую очередь, это относится к коммутативной алгебре, гомологической алгебре, алгебраической K-теории, теории представлений (групп, ассоциативных алгебр, порядков, алгебр Ли и т. п.), модулям с полилинейными и квадратичными формами, теории категорий. Субъективна линия размежевания с теорией колец, которой предполагается посвятить обзор в следующем выпуске «Итогов науки».

* Авторы, к которым редакция обратилась с предложением написать настоящий обзор, привлекли к работе В. Т. Маркова и Л. А. Койфмана. Их вклад оказался значительным, за что авторы выражают им свою глубокую благодарность. § 1 написан Л. А. Скорняковым, А. В. Михалевым, В. Т. Марковым, Л. А. Койфманом; § 2 — Л. А. Койфманом; § 3 — В. Т. Марковым; § 4 — А. В. Михалёвым; § 5 — Л. А. Скорняковым.

Так, по традиции, в настоящий обзор включены гомологическая классификация колец, а также локализации колец и модулей (сюда входят и классические кольца частных, поскольку граница с ними представляется слишком расплывчатой). Вместе с тем, в обзор не вошли работы по теории колец, где модули играют служебную роль. В первую очередь, это относится к применению модулей в теории радикалов колец. Мы вынуждены были также отказаться от включения работ по кольцам эндоморфизмов и структурам подмодулей модулей (надеемся, что эта тема, как и раньше, найдет отражение в специальном обзоре). Что касается абелевых групп, то в настоящий обзор включены лишь работы, имеющие теоретико-модульное звучание. Заметим, что абелевым группам посвящены специальные обзорные статьи (см. например, [111]).

Если не оговорено противное, основное кольцо обозначается через R, все рассматриваемые кольца предполагают ассоциативными и имеющими единицу, а модули — левыми и унитарными. Левыми, если не оговорено противное, считаются нётеровость, артиновость и т. п. Слово «идеал» всегда означает двусторонний идеал. Широко используются следующие обозначения:

R-Mod — категория всех R-модулей,
$\prod A_\alpha$ — произведение (полная прямая сумма) модулей A_α,
$\coprod A_\alpha$ — копроизведение (прямая сумма) модулей A_α,
$A \oplus B$ — копроизведение (прямая сумма) модулей A и B,
$S(M)$ — цоколь модуля M,
$Z(M)$ — сингулярный подмодуль модуля M,
$\hat{M}$ — инъективная оболочка модуля M,
$\mathrm{End}_R M$ — кольцо эндоморфизмов R-модуля M,
$M_n(R)$ — кольцо $(n \times n)$-матриц над кольцом R,
$L(M)$ — структура подмодулей модуля M,
$J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R,
$U(R)$ — группа обратимых элементов кольца R,
$\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ — кольца целых, рациональных и действительных чисел,
$|S|$ — мощность множества S,
$\mathrm{Id}(I) = \{r \mid r \in R,\ Ir \subseteq I\}$ — идеализатор левого идеала I кольца R,
$\mathrm{Ann}_R S = \{r \mid r \in R,\ rS = 0\}$ — аннулятор подмножества S R-модуля M.

§ 1. КАТЕГОРИЯ МОДУЛЕЙ

1.1. Книги, общие вопросы, приложения. За рассматриваемый период появилось несколько учебников, уделяющих значительное место теории модулей. Здесь можно назвать книги Адамсона [174], Андерсона и Фуллера [196], Аусландера и Буксбаума [217], Норткотта [1050], Солиана [1306], Фейта

[499]. Третьим изданием вышла известная монография Маклейна [923] (ср. [М68:26, 250]), появился русский перевод книги Бурбаки [23], где уделено большое внимание плоским модулям и локализациям, переизданы оба тома «Коммутативной алгебры» Зарисского и Самюэля [1467]. В русском переводе вышел первый том монографии Фукса [162] (ср. [М71:397]) по абелевым группам, где широко применяются гомологические методы, а на английском опубликован ее второй том [554], Попеску [1115] выпустил английский вариант своей книги [М71:883]. Теоретико-модульные методы широко используются в монографиях Козенса и Фейта [429], Рено [1166], Хилтона и Ву [707]. Назовем также некоторые книги по теории колец [167, 802—804, 1245] и по теории категорий [1095, 1114], [1115, 1118]. Монографии [88, 216, 354, 356, 472, 594, 618, 948, 1015, 1262, 1316, 1390] посвящены тем или иным специальным вопросам теории модулей и упоминаются в соответствующих параграфах настоящего обзора. Теория модулей представлена также в материалах ряда конференций и симпозиумов: [29—31, 1176—1181, 1186].

Теперь остановимся на некоторых результатах, для которых не нашлось места в специализированных параграфах. Так, Зильбер [1283], предполагая основное кольцо коммутативным, рассматривал биортогональную систему $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ элементов из $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ и доказал, что $\bigcap_i \mathrm{Ker}\,\varphi_i \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$ для некоторого $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ влечет за собой возможность выразить φ как $\varphi = \sum \lambda_i \varphi_i$, где $\lambda_i \in R$. С. Виганд [1440] построила аналог теории Галуа для существенных расширений данного модуля. Теоретико-модульный аналог известной теоремы Машке о групповых алгебрах предложил Хартли [683]. Несколькими авторами рассматривалось понятие базисного подмодуля модуля над тем или иным кольцом. Здесь можно назвать Л. Я. Куликова ([29], стр. 148—149) — над коммутативным кольцом главных идеалов, Юзуфуайя [1459] — над дедекиндовым кольцом, А. П. Ераскину [61] — над кольцом дискретного нормирования. Уорфилд [1419, 1422], С. Д. Берман и Н. И. Вишнякова ([26, 30], стр. 290) предложили обобщение теоремы Ульма на случай модуля над кольцом дискретного нормирования (см. также [1025]). И. З. Розенкноп [125, 126] опубликовал доказательства анонсированных ранее результатов [М71:79] о модулях над кольцом многочленов. Модули над кольцом многочленов с коэффициентами из коммутативного нётерова кольца рассматривали Айзенбуд и Ивенс [478], а модули над кольцом Крулля — Джебли [776].

Далее естественно рассмотреть классы модулей, не вошедшие в специализированные разделы. Начнем с классов, введенных по аналогии с некоторыми классами колец. Так, серия работ Филдхауза [519, 521, 525, 529] посвящена регулярным модулям, т. е. таким модулям M, что для любого подмодуля $A\subseteq M$ и любого правого модуля D последовательность $0\to D\otimes A\to D\otimes M$ точна. Из полученных результатов отметим утверждение об изоморфизме проективного регулярного модуля прямой сумме регулярных левых идеалов, порожденных идемпотентами, а также инвариантность класса регулярных модулей относительно перехода к пределу прямого спектра (см. также [1136] и [104, стр 57—58]). А. В. Андрунакиевич [8] определял слабо неймановский модуль как такой модуль M, что для любых $\lambda\in R$ и $a\in M$ при некотором $\xi\in R\lambda R$ справедливо равенство $\xi\lambda a=\lambda a$. Класс слабо неймановских модулей содержит все простые модули и используется для определения радикала Джекобсона. Полупервичным называется такой модуль M, что для каждого ненулевого $a\in M$ найдется гомоморфизм $f: M\to R$, удовлетворяющий условию $f(a)a\neq 0$. Зельманович [1470] доказал, что полупервичный артинов модуль изоморфен конечной прямой сумме минимальных левых идеалов, порожденных идемпотентами. Николя [1039]—[1041] (см. также [M71:829]) рассматривала факториальные модули над коммутативной областью целостности, являющиеся аналогом факториальных колец и в ряде случаев совпадающие с рефлексивными модулями. Факториальные модули над кольцом дискретного нормирования — это модули без кручения, не содержащие элементов бесконечной высоты.

Обращаясь к другим классам модулей, отметим рассматривавшиеся Флёри [537] пустотелые модули, т. е. модули, все собственные подмодули которых малы. В частности, оказалось, что каждый конечно порожденный пустотелый модуль изоморфен фактормодулю R/L, где левый идеал L содержится в таком левом идеале H, что $R\lambda+L=R$ для всех $\lambda\notin H$. Салль [1240] продолжил исследование модулей, являющихся существенным расширением своего цоколя (ср. [M71:975]). Этому же вопросу посвящена работа Тивари и Пандея [1370]. Рибенбойм [1170] рассматривал конструктивные модули над коммутативной областью целостности, определяемые наличием конечного ряда, факторы которого суть циклические модули с конечно порожденными аннуляторами. Н. И. Вишнякова ([30], стр. 290), рассматривая модули над ненётеровыми кольцами нормирования, охарактеризовала точные модули, все конечно порожденные подмодули которых циклические, а хотя бы один из них свободен.

Отметим, что в некоторых работах рассматривались модули над неассоциативными кольцами. Так, К. А. Жевлаков [62], рассматривая представление альтернативных колец, показал, что радикал Джекобсона альтернативного кольца совпадает с пересечением ядер неприводимых представлений. Для йордановых алгебр подобные результаты получил Осборн [1079], а для алгебр, принадлежащих некоторым другим многообразиям, А. М. Слинько и И. П. Шестаков [144]. Кроме того, следует

назвать многочисленные, но не рассматриваемые нами, работы по представлениям алгебр Ли.

Далее рассмотрим работы, касающиеся свойств категории модулей и ее подкатегорий. Харада, Канбара [681] и Тачикава [1348] рассматривали категорию $\mathfrak{P}$ всех проективных R-модулей. Тачикава, в частности, установил эквивалентность следующих свойств: (1) $\mathfrak{P}$ — категория Гротендика; (2) R — полупримарное QF-3 кольцо, $\operatorname{dom.dim.} R\leqslant 2$ и $\operatorname{l.gl.dim.} R\leqslant 2$; (3) R — полупримарное QF-3 кольцо, содержащее точный минимальный правый идеал eR, где $e^2=e$, $R\cong \operatorname{End}_{eRe} eR$ и eRe — артиново слева кольцо с конечным числом конечно порожденных неразложимых левых eRe-модулей, причем каждый из них встречается как одно из прямых слагаемых eRe-модуля eR. Исследования Харады и Канбары позволили получить в качестве следствий многие из известных ранее результатов (см. [M65:51, M68:51, M71:972, M71:485]). Факторкатегория категории $\mathfrak{P}$ по ее радикалу (см. РЖМат, 1972, 1А560) оказалась вполне приводимой C_3-категорией тогда и только тогда, когда кольцо R совершенно. Радикал категории всех R-модулей совпадает с классом всех морфизмов $f: P\to P'$ таких, что P и P' проективны, а подмодуль $\operatorname{Im} f$ мал в P'. По поводу подкатегорий категории модулей, рассматривавшихся в связи с разложением в прямую сумму, см. п. 2. Некоторые свойства категории модулей над групповым кольцом конечной группы установил Грин [630]. Фахруддин [502] рассматривал категорию $\mathfrak{K}$ модулей без кручения конечного ранга над кольцом дискретного нормирования R. Композиционные ряды в $\mathfrak{K}$ — это ряды с факторами ранга 1. Доказывается, что эквивалентность композиционных рядов модулей A и B равносильна наличию изоморфизма $A\otimes\bar{R}\cong B\otimes\bar{R}$, где $\bar{R}$ — непосредственное расширение кольца R. Страттон [1327] исследует аналогичный вопро в теоретико-модульном аспекте. Фуллер [561] указал на интересные связи между эквивалентностями некоторых подкатегорий категории модулей и теоремой плотности. Н. И. Вишнякова и Г. К. Кладов [27] описывают инъективные объекты в некоторой подкатегории категории модулей над весьма специальным кольцом. К. Уокер [1411] рассматривает категорию, объектами которой служат все абелевы группы без кручения, а морфизмы выбраны так, что изоморфизмами оказываются так называемые локальные квазиизоморфизмы. Устанавливается, что проективными объектами этой категории служат группы без кручения, локально изоморфные свободным, и только они. Ак [646, 647] изучает свойства категории модулей вида R/Ra, где $0\neq a\in R$. Огус и Бергман [1061] назвали функтор $F: R\text{-Mod}\to R\text{-Mod}$, где R — коммутативное кольцо, линейным, если гомоморфизм R-модуля $\operatorname{Hom}_R(A, B)$ в $\operatorname{Hom}_R(F(A), E(B))$ оказывается модульным. Ими установлен ряд свойств полуточных линейных функторов, которые можно рассматривать как обобщение леммы Накаямы. В частности, если R нётерово и $F(R/\mathfrak{m})=0$ для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m}$ кольца R, то $F=0$. С категорией всех модулей над всеми кольцами связаны исследования Е. Л. Горбачука [34] и Г. Г. Эмина [170].

Рассмотрение работ, касающихся функторов Hom, $\otimes$, Ext и Tor, начнем с исследований Уебба [1427], заметившего, что естественный гомоморфизм $f: A\otimes_R \prod_\alpha B_\alpha \to \prod_\alpha A\otimes_R B_\alpha$ оказывается изоморфизмом (эпиморфизмом) тогда и только тогда, когда A конечно порожден (конечно связан), и что f — мономорфизм, если R — дедекиндова область и все модули B_α плоские. Свойства модуля A, достаточные для того, чтобы f являлся мономорфизмом, изучал Гудёрл [603]. Хайн [695] называл контравариантный функтор $F: R\text{-Mod}\to\mathfrak{Ab}$ обращающим, если для всякого направленного множества R-модулей $\{B_\alpha\}$ естественный гомоморфизм $F(\varinjlim B_\alpha)\to\varprojlim F(B_\alpha)$ является изоморфизмом, и выяснил, когда этим свойством обладает функтор $\mathrm{Ext}_R^n(-, A)$. Это, в частности, имеет место для всех n, если R коммутативно, а A — модуль конечной длины. При некоторых ограничениях на кольцо R обращаемость функтора $\mathrm{Ext}_R^1(-, R)$ равносильна тому, что R обладает двойственностью Мориты. Полученные результаты используются для нахождения условий обращения Ext в нуль. Л. Я. Куликов [91] и Албу [182] также указали некоторые условия обращения в нуль функторов Ext и Tor. Макконнел и Робсон [959] рассматривали модули над алгеброй Вейля (т. е. алгеброй с образующими x и y, связанными соотношением $xy-yx=1$) и получили ряд результатов, касающихся групп $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ и $\mathrm{Ext}_R^1(A, B)$, где A и B — простые модули. Кон [409] отметил, что функтор $\mathrm{Ext}_R^1(-, R)$ осуществляет двойственность между связанными правыми модулями (модуль M называется связанным, если $\mathrm{Hom}_R(M, R)=0$) проективной размерности не выше 1 и левыми R-модулями с тем же свойством. Связанные в этом смысле модули ранее рассматривал Ишебек (РЖМат, 1972, 2А536), исследовавший двойственность между функторами Ext и Tor. Анализируя ошибку Ротмана [М71 : 954], Гриффитс [634—635] исследовал вопрос об описании функторов, представимых в форме $\mathrm{Hom}_R(A, -)\oplus\mathrm{Ext}_R^1(B, -)$, где A и B — фиксированные модули.

Теперь остановимся на вопросах, касающихся решения систем линейных уравнений с коэффициентами из некоторого кольца. Пусть A — модуль над R, A^n — прямая сумма n его экземпляров и U — $(m\times n)$-матрица над R. Если для каждого n-мерного столбца $\mathfrak{x}$ с компонентами из R положить $\varphi(\mathfrak{x})=U\mathfrak{x}$, то естественным образом можно рассматривать φ как гомоморфизм из A^n в A^m. Дарбо [443] трактует задачу решения системы $U\mathfrak{x}=0$ как отыскание ядра гомоморфизма φ. Ограничиваясь модулями над коммутативной областью главных идеалов, он рассматривает две величины, связанные с системой: ранг модуля $\mathrm{Ker}\,\varphi$ (напомним, что он в рассматриваемом случае свободен) и длину модуля $\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Coker}\,\varphi, A)$, используя которые дает некоторое описание искомого ядра. Несколько позже Молфино [988] отметила, что в случае делимого модуля A вышеупомянутые величины являются инвариантами системы уравнений. Боэро [318, 319] распространил результаты Дарбо на более широкий класс коммутативных областей целостности. Применение результатов Дарбо и Боэро к случаю колец дифференциальных многочленов дает описание решений однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см. [318, 443, 1405]). М. М. Дрогомыжская [45] доказала теорему о зависимости числа линейно независимых решений системы над кольцом Оре от ее ранга. Камион, Леви и Манн [375] и Г. Б. Клейнер [84] исследовали условия разрешимости неоднородной системы линейных уравнений над коммутативным кольцом. Берж [265] исследовал свойства множества решений уравнения $(\Sigma\lambda_i)x=\Sigma\lambda_i a_i$, где λ_i принадлежат некоторому подмножеству кольца R, a_i — некоторому подмножеству данного R-модуля и $\Sigma\lambda_i\neq 0$.

Завершим настоящий раздел рассмотрением теоретико-модульных вопросов, связанных с теорией автоматов. Пусть R — кольцо, а символ $\bigcirc$ означает тензорное произведение модулей или их прямую сумму. В первом случае кольцо R предполагается коммутативным. Под модульным автоматом понимается система (U, S, B, φ, ξ), где U, S и B — R-модули, а φ и ξ — модульные гомоморфизмы из $U\bigcirc S$ в S и B соответственно. Элементы модуля S называются состояниями автомата. Если отмечено начальное состояние s_0, то автомат называется инициальным. Достижимость инициального автомата означает, что, «подавая подходящие входные сигналы» (т. е. выбирая элементы из U), можно от s_0 перейти к любому другому состоянию. Наблюдаемость означает, что любые два состояния можно различить, подавая входные сигналы и наблюдая за элементами, возникающими на выходе B. Если ξ — гомоморфизм из S в B, то мы приходим к определению автомата Мили. Если $\bigcirc=\otimes[=\oplus]$, то, для краткости, будем называть автомат тензорным (прямым). Исследованию тензорных автоматов посвящена часть В книги Будаха и Хёнке [335]. Полагая $us=\varphi(u\otimes s)$ и далее по индукции $(u_1\otimes\ldots\otimes u_n)s=\varphi(u_1\otimes\varphi((u_2\otimes\ldots\otimes u_n)s))$, превращаем абелеву группу S в правый модуль над тензорной алгеброй $T(U)$ модуля U. Множество $\{s \mid s\in S,\ \varphi(u\otimes(u_1\otimes\ldots\otimes u_n)s)=0$ для всех $u\in U$ и $u_1\otimes\ldots\otimes u_n\in T(U)\}$ оказывается подмодулем $T(U)$-модуля S и называется редунданцем рассматриваемого автомата. На редунданц можно смотреть как функтор, производные которого изучаются. Описывается конструкция, позволяющая, задав коммутативное кольцо, поставить в соответствие каждому теоретико-множественному автомату модульный автомат с тем же самым редунданцем, что используется для решения проблемы минимизации. Рассматривается продолжительность жизни автомата, определяемая как наименьшая длина входных слов, аннулирующих все состояния. В работе Брунера и Хаммана [352] исследуется поведение редунданца при последовательном соединении автоматов. Прямые автоматы для случая, когда R — поле, рассматривались еще в ч. IV монографии Калмана, Фалба и Арбиба [73]. Этому же вопросу посвящена монография Экера [472]. Экер и Рашек [473] касались представления событий в таких автоматах. Арбиб и Цейгер [200], считая R произвольным коммутативным кольцом, определили автомат, двойственный данному инициальному автомату Мили, как систему

$$(U, \mathrm{Hom}_R(S, B)\ B, \varphi^+, \xi^+, \xi),$$

где $\varphi^+(u, f)(s) = f(\varphi(u, s))$, а $\xi^+(f) = f(s_0)$, и установили, что этот автомат наблюдаем тогда и только тогда, когда исходный автомат достижим. Рошало и Виман [1217] перенесли на общий случай определение автоматного отображения из вышеупомянутой монографии [73] и доказали, что реализуемость такого отображения автоматом над коммутативной областью целостности вытекает из его реализуемости автоматом над полем частных. Реализуемость автоматных отображений в весьма общем аспекте рассматривал Л. А. Скорняков [143], Несколько иной взгляд на линейные автоматы и автоматные отображения проводится Ю. А. Альпиным и Р. Г. Бихарёвым [6]. Они понимают под линейным автоматом систему (U, S, δ, λ), где U — множество, S — пространство над полем P, δ — отображение из U в кольцо $\mathrm{End}_P S$ и λ — линейный функционал из S в P. Отображение δ естественным образом распространяется на полугруппу $\mathfrak{F}$ слов в алфавите U. Автоматное отображение φ получаем, фиксируя $s \in S$ и полагая $\varphi(u) = \lambda(\delta(u)(s))$ для всех $u \in \mathfrak{F}$. Заметим в заключение, что теория тензорных и прямых автоматов объединяется в рамках теории автоматов над кронекеровыми категориями (см. [199, 355, 381, 942]). Некоторые вопросы алгебраической теории теоретико-множественных автоматов рассматриваются в § 5.

1.2. Свойства прямых сумм. Будем говорить, что подмодуль A модуля M козаменяем относительно разложения $M = \coprod_\alpha C_\alpha$, если равенство $M = A \oplus B$ влечет существование таких подмодулей $C'_\alpha \subseteq C_\alpha$, что $M = A \oplus \left(\coprod_\alpha C'_\alpha\right)$. Если ненулевые C'_α можно выбрать равными C_α, то подмодуль A называется дополняемым. В случае, когда C_α неразложимы, поскольку для каждого $C'_\alpha \neq 0$ имеем $C_\alpha = C_\alpha \cap M = C'_\alpha \oplus \left(C_\alpha \cap \left(A \oplus \left(\coprod_{\beta \neq \alpha} C_\beta\right)\right)\right)$, всегда оказывается $C'_\alpha = C_\alpha$. Таким образом, в этом случае козаменяемость и дополняемость подмодуля A равносильны. Высказанные определения идут от Кроули и Йонсона [431]. Подмодуль A модуля M называется (конечно) козаменяемым, если он козаменяем относительно любого (конечного) разложения модуля M в прямую сумму. Модуль A назовем (конечно) козаменяемым, если он (конечно) козаменяем в любом содержащем его модуле. Уорфилд [1416] доказал, что неразложимый модуль козаменяем тогда и только тогда, когда он вполне неразложим, т. е. его кольцо эндоморфизмов локально. В другой его работе [1420] отмечается, что из козаменяемости модуля R вытекает возможность представить любой проективный R-модуль в виде прямой суммы левых идеалов, порожденных идемпотентами. Он же доказал, что модуль A конечно заменяем в том и только том случае, когда козаменяемо кольцо $\mathrm{End}_R A$. В той же работе установлено, что R козаменяемо, если для всякого $x \in R$ найдется $e^2 = e \in R$ такой, что $Rx + J(R) = Re + J(R)$. Монк [992] привел пример, показывающий, что это условие не является необходимым. Им же указаны свойства кольца $\mathrm{End}_R A$, равносильные конечной козаменяемости модуля A. Андерсон и Фуллер [195] остановились на исследовании разложения модуля M в прямую сумму неразложимых модулей, относительно которого козаменяемы все прямые слагаемые модуля M. Оказалось, что наличие такого разложения у каждого инъективного R-модуля равносильно нётеровости кольца R. Совершенность кольца R равносильна наличию такого разложения у каждого проективного R-модуля, а левая артиновость — как у инъективных, так и у проективных R-модулей. В том же духе характеризуются и полусовершенные кольца. Ямагата [1455] обобщил эти результаты, заменив кольцо прямой суммой неразложимых проективных модулей с локальными кольцами эндоморфизмов. Несколько позже Фуллер [560] доказал, что над обобщенно однорядным кольцом каждый модуль допускает разложение, относительно которого дополняемы все прямые слагаемые. Тачикава [1348], Фуллер и Райтен [562] установили, что каждый правый и каждый левый R-модули разлагаются в прямую сумму неразложимых подмодулей, относительно которой козаменяемы все прямые слагаемые, в том и только в том случае, когда R допускает лишь конечное число неразложимых конечно порожденных модулей. В работе Рингеля и Тачикавы [1185] доказано, что над артиновым кольцом, допускающим лишь конечное число конечно порожденных неразложимых модулей, каждый неразложимый модуль конечно порожден и всякий модуль разлагается в прямую сумму неразложимых.

Исследования, касающиеся козаменяемости относительно разложения в прямую сумму неразложимых слагаемых, ведут свое начало от известной теоретико-структурной теоремы Оре и связанной с именами Веддербарна, Круля, Ремака и Шмидта. В 1950 г. Адзумайя предложил следующий вариант этого результата: если $\coprod_\alpha M_\alpha = \coprod_\beta H_\beta$, где M_α и H_β — вполне разложимые модули, то для любого конечного множества $\{H_{\beta_1}, \ldots, H_{\beta_n}\}$ найдется такое конечное множество $\{M_{\alpha_1}, \ldots, M_{\alpha_n}\}$, что $M_{\alpha_i} \cong H_{\beta_i}$ и $\coprod_\alpha M_\alpha = M_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus M_{\alpha_n} \oplus \left(\coprod_{\beta \neq \beta_1, \ldots, \beta_n} H_\beta\right)$. Если отказаться от условия конечности выбираемого множества слагаемых H_{β_i}, то, как показал Канбара [801], справедливость аналогичного утверждения равносильна локальной T-нильпотентности системы $\{M_\alpha\}$ (т. е. какова бы ни была счетная последовательность $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}, \ldots$ различных слагаемых и гомоморфизмов $f_i : M_{\alpha_i} \to M_{\alpha_{i+1}}$, не являющихся изоморфизмами, для каждого $x \in M_{\alpha_1}$ найдется такой номер n, что $f_n \ldots f_2 f_1(x) = 0$). Ямагата [1454] доказал, что справедливость такого обобщенного варианта теоремы Круля—Ремака—Шмидта—Адзумайя для любого разложения с инъективными неразложимыми слагаемыми равносильна условию максимальности для $\cap$-неприводимых левых идеалов кольца R. Отметим результаты Эллигера [482]: если $A \oplus B = \coprod_{\alpha \in \Omega} C_\alpha$, где C_α — вполне неразложимые конечно порожденные модули, то найдутся разбиение $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$ и автоморфизм φ модуля M такие, что $A = \varphi\left(\coprod_{\alpha \in \Omega'} C_\alpha\right)$ и $B = \varphi\left(\coprod_{\alpha \in \Omega''} C_\alpha\right)$; Уорфилда [1417]: если $M = \widehat{\coprod_{\alpha \in \Omega}} M_\alpha$, где M_α — неразложимые инъективные модули и Q — инъективный подмодуль в M, то $M = Q \oplus \left(\widehat{\coprod_{\alpha \in \Omega'}} M_\alpha\right)$ для некоторого подмножества $\Omega' \subseteq \Omega$; Конлона ([M71:283], [415]): если $M = M_0 \oplus \left(\coprod_\alpha M_\alpha\right) = H_0 \oplus \left(\coprod_\beta H_\beta\right)$, где M_α и H_β — вполне неразложимы, а M_0 и H_0 не содержат вполне неразложимых прямых слагаемых модуля M, то, каков бы ни был вполне разложимый подмодуль U модуля M, мощности множеств слагаемых, входящих в каждое из указанных выше разложений и изоморфных модулю U, совпадают. Некоторые обобщения теоремы Круля—Ремака—Шмидта для довольно узкого класса колец рассматривал Симис [1287]. Амин [192] указал, что эта теорема не имеет места, если R является неполным кольцом дискретного нормирования. Отметим также обобщение теоремы Капланского о прямом слагаемом прямой суммы счетно-порожденных модулей, предложенное Пирсом [1108]. Леви и Робсон [903] исследовали, когда эпиморфизм $\varphi : \coprod_{i=1}^n P_i \to U$, где P_i проективны, $U/\operatorname{rad} U$ разлагается в конечную прямую сумму неприводимых модулей и $U = \coprod_{i=1}^n U_i$, влечет существование такого разложения $P = \coprod_{i=1}^n P'_i$, что $P'_i \cong P_i$ и $\varphi(P'_i) = U_i$. Полученные результаты применяются к исследованию эквивалентности матриц над R.

Харада и Саи ([M71:484, 485]; [680]) разработали теоретико-категорный подход к исследованию вопросов, связанных с теоремой Круля—Ремака—Шмидта—Адзумайя. Они выделили в категории R-Mod полные подкатегории $\langle \mathfrak{M} \rangle$ и $\langle \mathfrak{M} \rangle_f$, объектами которых служат всевозможные, соответственно, конечные прямые суммы модулей из данного семейства вполне неразложимых модулей, и доказали, что факторкатегория каждой из этих категорий по радикалу, понимаемому как идеал, высекающий радикал Джекобсона на каждом из колец $\operatorname{End}_R A$, вполне приводимая категория Гротендика. Поскольку в такой категории доказать теорему Круля—Ремака—Шмидта—Адзумайя легко, то остается лишь «поднять» соответствующее разложение по модулю радикала, что в случае категории $\langle \mathfrak{M} \rangle_f$, где $\mathfrak{M}$ — объединение множеств слагаемых обоих разложений, осуществляется без труда. Категория $\langle \mathfrak{M} \rangle$ используется для получения обобщения теоремы Круля—Ремака—Шмидта—Адзумайя на случай произвольного множества слагаемых, где играет роль уже упоминавшееся понятие локальной T-нильпотентности. Используя эти идеи, Харада [673] доказал, что всякий (конечно порожденный) квазипроективный модуль над (полу-) совершенным кольцом разлагается в прямую сумму вполне разложимых модулей и для таких разложений верна теорема Круля—Ремака—Шмидта—Адзумайя. Он же [676] отметил, что в этих рассмотрениях категория модулей может быть заменена категорией Гротендика с множеством малых образующих, где объект A называется малым, если $\operatorname{Hom}(A, \coprod_\alpha A_\alpha) \cong \coprod_\alpha \operatorname{Hom}(A, A_\alpha)$. В работе К. Уокер [1411] рассматривалось теоретико-категорное обобщение результатов Фукса и Вильоэна [556] о так называемых квазипрямых разложениях абелевых групп.

Очевидно, что козаменяемость модуля относительно разложения в прямую сумму неразложимых модулей влечет его разложимость в прямую сумму некоторых слагаемых исходного модуля. В этой связи интересен результат Харады [672], доказавшего, что локальная T-нильпотентность системы неразложимых слагаемых модуля равносильна разложению в прямую сумму неразложимых подмодулей любого прямого слагаемого этого модуля. Особое внимание привлек частный случай этой задачи, известный как проблема Матлиса [943]: разлагается ли в прямую сумму неразложимых модулей прямое слагаемое прямой суммы неразложимых инъективных модулей? Калон [800] доказал, что ответ положителен, если подмодуль инъективен, или сумма квазиинъективна, или ее сингулярный подмодуль равен нулю. Положительный ответ для случая, когда равен нулю сингулярный подмодуль прямого слагаемого, а также для случая, когда R удовлетворяет условию максимальности для $\cap$-неприводимых или существенных левых идеалов, получил Ямагата [1453—1454]. Первый из его результатов, а также результаты Калона, были передоказаны Харадой [675] с использованием упоминавшейся выше категории. Положительный ответ для некоторых других частных случаев имелся у Фейта и Уокера [М68:138]. Отметим результат Уорфилда [М71:1141] о наличии изоморфных продолжений у любых двух разложений инъективного модуля в прямую сумму. Некоторые свойства прямой суммы некоторого множества экземпляров модулей вида $\widehat{R/P}$ установил Харуи [687].

Другой вариант свойства замены рассматривал Фукс [548]. Он говорит, что модуль A обладает свойством замены, если из равенств $M=A_1\oplus B=A_2\oplus C$, где A_1 и A_2 изоморфны A, вытекает, что $M=D\oplus B=D\oplus C$ для некоторого D, и предложил критерий свойства замены, особенно удобный для квазипроективных модулей. В частности, модуль R обладает свойством замены, если $R/J(R)$ артиново.

Скажем, что модуль A обладает свойством сокращения, если $A\oplus B=A\oplus C$ влечет $B\cong C$. Уорфилд [М71:1140] доказал справедливость этой импликации для случая, когда $\mathrm{End}_R A$ локально. Фукс [550] отметил, что она имеет место для квазиинъективных модулей, все подмодули которых проективны. Свойства сокращения модулей над коммутативными кольцами рассматривали Айзенбуд и Ивенс [478, 490], а также Сето [1344]. Ивенс [490], в частности, привел пример невыполнения теоремы о единственности разложения в конечную прямую сумму неразложимых модулей. Фукс [549] отметил, что существуют абелевы группы со сколь угодно большим числом «нарушителей» этой теоремы. Сюда же относятся более ранние результаты Васконселоса [1380, 1381]. Со свойством сокращения оказался связанным вопрос о единственности кольца коэффициентов для кольца многочленов (см. РЖМат, 1973, 7А377). Хольцзагер и Галахан [718] выясняли, когда $A\cong B+C$ и $B\cong A\oplus D$ влечет $A\cong B$. Положительный ответ получен в следующих случаях: а) A и B конечно порождены и каждое примитивное факторкольцо кольца R нётерово; б) A и B — свободные модули бесконечного ранга; в) R совершенно, а A и B проективны (см. также [1199]). Вильямс [1446] рассматривал такой объект A абелевой категории, что $A=B\oplus C$ влечет $A\cong A\oplus B$. Отношения $A\sim B$ на классе модулей, задаваемые условиями: $A\oplus P'\cong B\oplus P''$ для некоторых проективных модулей P' и P'', исследовал Райн [1175]. В заключение отметим работы Фукса [552], Аббея и Диксона [172], где предлагаются конструкции, позволяющие получать неразложимые модули, большие в том или ином смысле. Наличие большого числа неразложимых модулей над некоторыми кольцами треугольных матриц установила Бреннер [333]. Сохранение свойства выделяемости в качестве прямого слагаемого при замене колец исследовал в весьма частном случае Роггенкамп [1203]. Харуи [684] занимался разложением модуля в прямую сумму однородных. Фрицше [546] предложил теоретико-структурное обобщение теоремы о разложении ограниченной абелевой группы в прямую сумму циклических. Расщепляемость модулей над кольцом дискретного нормирования исследовал Страттон [1327—1330]. Изучение прямых произведений методами математической логики продолжил Олин ([1066]; ср. [М 71:18]).

1.3. Модули с условиями конечности. В книге Матлиса [948] излагается структурная теория артиновых модулей над нётеровым (коммутативным) кольцом Коэна — Макколея. Изучение их основано на том, что любой артинов модуль над таким кольцом разлагается в прямую сумму модуля конечной длины и делимого модуля. Албу [182] исследовал строение артиновых инъективных модулей над дедекиндовыми кольцами, ZPI-кольцами, однородными кольцами. Фишер [529] показал, что проективный (инъективный) артинов (нётеров) модуль не обязан быть нётеровым (артиновым.). Подобные примеры построили также Миллер и Тернидж [980]. Харуи [685] исследовал вопрос о существовании конечно порожденного инъективного модуля без кручения в смысле Леви ([М 71:71], стр. 105) над коммутативным кольцом. Мюллер [1007] описал неразложимые модули над некоторыми артиновыми кольцами.

Изучая конечно порожденные и инъективные модули над нётеровым вполне ограниченным кольцом R, Ятегаонкар [770] в качестве следствия показал, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J(R)^n=0$. Форманек [539] доказал нётеровость некоторых точных модулей над коммутативным кольцом. Некоторое обобщение теоремы Айзенбуда [М71:356] о спуске нётеровости содержится в работе Ятегаонкара и Форманека [541]. Цинк [1474] изучает модули над коммутативным кольцом, нётеровы относительно плотной подкатегории в R-Mod, Е. Ш. Керер [78] — модули над кольцом главных идеалов, Бриан [353] — конечные модули над конечным кольцом. Сюда же примыкает элементарная работа [575].

Хед [693] привел пример булева кольца R мощности $\aleph_1$ и максимального идеала M такого, что $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ сохраняет прямые суммы, но M не $\aleph_0$-порожден. Ософская [1085] рассматривала прямые пределы $\aleph$-порожденных модулей. Здесь же отметим работу Эклофа [481]. А. М. Попова [122] построила алгоритм для нахождения определяющих соотношений некоторых конечно порожденных модулей.

Кирби [820] указал критерий артиновости градуированного модуля, Лангман [869] исследовал локально конечные модули над коммутативным кольцом (т. е. переходящие в конечно порожденные при локализации по любому максимальному идеалу). Маноха [929] рассматривал обобщение размерности Голди, Флёри [538] — двойственную конструкцию, Хонган [719] — ранг модуля M, равный q/p, где $M^{(p)} \cong R^{(q)}$, Рибенбойм [1170] — функции длины со значениями в любой вполне упорядоченной абелевой группе, определенные на некотором классе конечно порожденных модулей. Кон [836] доказал, что для любого конечно порожденного модуля M над коммутативным кольцом R найдется идеал I, порожденный не более чем тремя элементами, такой, что pr. dimR/I = pr. dim M.

Онодера [1075, 1077] и Фахруддин [505] изучали коконечно порожденные модули (модуль M называется коконечно порожденным, если из любого семейства подмодулей в M с нулевым пересечением можно выбрать конечное подмножество с нулевым пересечением).

Грёльц [637] привел обобщение леммы Накаямы. Видаль [1393—1394] исследовал свойства таких R-модулей M, что $M/J(R)M$ — конечно порожденный модуль. Робинсон [1191] рассматривал гиперцентральные идеалы в кольцах (по аналогии с группами). Брюер и Монтгомери [338] показали, например, что если $R[x]/I$, где I — идеал в $R[x]$, есть свободный или конечно порожденный проективный R-модуль, то I — главный левый идеал в $R[x]$. Ру [1225] изучал вопрос о симметрии левой и правой длины простого кольца над своим простым подкольцом, С. В. Миховски [110] — свободные скрещенные бимодули конечного ранга. Размерности простых R-модулей над основным полем k, где $R=kG$ — групповое кольцо, исследовал Роузблейд [1213].

Отметим, что в работах [40, 85, 491—492, 479, 1437] содержатся сведения о системах образующих в модулях.

Читэм и Камби [397] изучали тестовые модули (модуль M называется тестовым, если из того, что $\mathrm{Hom}_R(X^{(\alpha)}, M) \cong \cong \mathrm{Hom}_R(X, M)^{(\alpha)}$ для любого кардинала α, вытекает, что X — малый объект в категории модулей (см. § 1, п. 2)). Показано, что модуль M является тестовым тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_R(X, M) \neq 0$ для любого ненулевого модуля X.

1.4. Проективные и плоские модули. Как и в предыдущем обзоре [М71], вне рассмотрения остались работы по проективным модулям, существенно связанные с алгебраической K-теорией. Исключение составляют работы, касающиеся проблемы Серра или примыкающие к ней. О свойствах проективных и плоских модулей, связанных с локализациями и кручениями см. § 3.

Первыми успехами в решении проблемы Серра для $n=3$ добились Л. Н. Вассерштейн и А. А. Суслин [24], показавшие, что все проективные модули над кольцом $K[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов над полем K свободны, если: 1) $n=3$; либо 2) $n=4$ и char $K \neq 2$; либо 3) $n=5$ и K — алгебраическое расширение конечного поля. Их результаты изложены в докладе Басса [241]. Решение этой же проблемы для $n=3$ и алгебраически замкнутого поля независимо нашли Мурты и Таубер [1013]. Лазар [881] пытался решить ее с помощью ЭВМ (для $n=3$ и $|K|=2$). В настоящее время Квиллен [1128] и А. А. Суслин [146] полностью решили проблему Серра, дав утвердительный ответ на нее для всех K и любых n. Доказательство Л. Н. Вассерштейна и А. А. Суслина [24] существенно опирается на работу второго автора [145], в которой известная оценка Серра модуля проективности кольца $K[x_1, \ldots, x_n]$ понижена вдвое для бесконечного поля K. Суон [1334] перенес этот результат на кольца $B[x_1, \ldots, x_n]$, где B — регулярная аффинная алгебра над полем K и $|K| > \aleph_0$. Оценке модуля проективности различных колец посвящены работы [1286—1287]. В [477—479, 491] развита техника, позволяющая распространить на конечно порожденные модули над конечно порожденными алгебрами над коммутативным кольцом с нётеровым максимальным спектром теорему Серра о модуле проективности, теорему Басса о сокращении и стабильном ранге колец и упростить их доказательства. Там же усиливается теорема Бурбаки о том, что любой конечно порожденный модуль без кручения над нётеровым целозамкнутым кольцом есть расширение идеала кольца с помощью свободного подмодуля. В [492] установлено, что в классе нётеровых колец верно и обратное, а в [40] теорема Бурбаки распространяется на кольца Крулля. В [1335] исследуется вопрос о свободе конечно порожденных проективных $R[x]$-модулей P, для которых свободен модуль $R[x, x^{-1}] \otimes_{R[x]} P$. Любой такой модуль стабильно свободен [1334]. Работы [564,] [578] связаны с нахождением свободных прямых слагаемых некоторых проективных модулей. Интересный факт отмечен в [1065]: если D — некоммутативное тело, что в $D[x, y]$ имеются несвободные проективные идеалы. Кольца, над которыми все проективные модули конечного типа свободны, встретились в [327, 577, 1345]. Так, оказалось, что в этот класс входят кольца многочленов $R[x]$ над кольцами R специальных главных идеалов [577]. Отрицательный ответ на вопрос Басса получил Робертс [1190], показав, что если R — кольцо Крулля, либо нётерово со связным спектром размерности >0, то для любого n над проективной прямой над R существует неразложимое расслоение ранга n, не имеющее вида $P\otimes\mathcal{O}(n)$, где P — проективный модуль конечного ранга. Представимость проективных модулей над вещественным аффинным кольцом с компактным множеством X вещественных точек, как расслоенных пространств на X, установлена в [489]. Лазар [882] характеризует коммутативные кольца R, над которыми любой проективный модуль P имеет постоянный ранг (т. е. $\dim P/\mathfrak{M}P$ одна и та же для всех $\mathfrak{M}\in M.\ \operatorname{Spec} R$). Айзенрайх [480] обобщил на коммутативные нётеровы кольца ряд своих результатов [M71:341] о подмодулях свободного модуля конечного ранга над кольцами многочленов. Нахождением критериев (в терминах матриц) свободны и отщепляемости прямым слагаемым конечно порожденного подмодуля свободного модуля над коммутативной областью занимался И. З. Розенкноп [124, 126], (ср. M71:79). В [910] на множестве Φ всех прямых слагаемых ранга 1 свободного модуля ранга 2 над полулокальным кольцом R определяется двойное отношение, причем всякое отображение множества Φ на себя, сохраняющее это отношение, задается полулинейным отображением. Конечно порожденные проективные модули над дедекиндовым кольцом изучались в [414]. Пусть R — коммутативное кольцо, $B(R)$ — булева алгебра его идемпотентов, $R_x=R/xR$, $x\in\operatorname{Spec}B(R)$. Если все проективные R_x-модули свободны для всех x, то любой конечно порожденный проективный R-модуль P имеет вид $\coprod\limits^{n} Pe_i$, где $e_i\in B(R)$, $R=\coprod\limits_{i=1}^{n} Re_i$ и Pe_i — свободные Re_i-модули [1345]. Кроме того, для конечно порожденных проективных модулей над центральными сепарабельными R-алгебрами справедлива теорема о сокращении. В [1342—1343] при иных условиях на кольца R_x для этих же алгебр доказана конечность числа классов проективных модулей конечного типа. В [1395] расклассифицированы наследственные порядки в конечномерном теле над $\mathbf{Q}$ со свойствами сокращения. О свойствах проективных решеток над квазибассовыми порядками см. [51]. Полугруппу конечно порожденных проективных модулей над копроизведением колец изучал Бергман [269]. Там же показано, как, присоединяя к алгебре R над полем образующие и соотношения ненулевых конечно порожденных проективных R-модулей P и Q, можно получить кольцо $S\supset R$ такое, что $P\otimes_R S\approx Q\otimes_R S$. Доказав что проективный модуль P над произвольным кольцом R свободен, если свободен $(R/J(R))$-модуль $R/J(R)P$, Бек [262] как следствие получил улучшение теорем Басса [M65:43] и Капланского. Гипотеза Ауслендера о том, что над

коммутативным n-мерным нётеровым локальным кольцом R конечно порожденный рефлексивный модуль M с $\operatorname{h.dim} M<\infty$ и свойством $\operatorname{Hom}_R(M, M)\approx M\oplus\ldots\oplus M$ свободен, подтверждена в [198] при условии, что $\operatorname{Ext}^i_R(M, R)=0$ при $1\leqslant i\leqslant n-3$. В [968] показано, что для конечно порожденного модуля M над локальной артиновой алгеброй R с $J(R)^2=0$ и $\operatorname{inj.dim}_R R<\infty$ свойство $\operatorname{Ext}^i_R(M, R)=0$ для $i>1$ равносильно его свободе и, в частности, все рефлексивные модули свободны. Критерии проективности конечно порожденного модуля M содержатся в [231, 232, 422, 1141, 1437]. Обобщая результаты Фландерса [86, стр. 27—28], Рамрас [1141] доказал, что если R коммутативно и $\Lambda^p M$ — конечно порожденный проективный R-модуль, для некоторого $p\geqslant 1$ отличный от 0 при всех локализациях, то M проективен. Его результаты в свою очередь обобщены в [1437]. В [231] проективность модуля над коммутативной областью характеризуется отсутствием кручения в его тензорной (или внешней) алгебре. Попытка распространить результаты Фрелиха [M68:150] на некоммутативный случай предпринята в [1437] (см. [86], стр. 33). Проективные идеалы I коммутативного кольца R изучались в [1382, 1388, 1438]. Оказалось, что если I не лежит ни в каком минимальном простом идеале, то он конечно порожден, а если вдобавок $\operatorname{FPD}(R)=1$, то I представляется в виде произведения проективных примарных идеалов и всякий конечно порожденный проективный идеал 2-порожден [1382], [1388]. Виганд [1435—1438] с помощью построенного им универсального морфизма в категории коммутативных колец кольца R в регулярное в смысле Неймана кольцо $\check{R}$ исследует различные классы R-модулей и в том числе проективные модули. Доказано, что проективность модулей $M\otimes\check{R}$ для всех конечно порожденных ${}_RM$ равносильна нётеровости пространства Spec R. Если M — локально свободный локально конечно порожденный R-модуль и $\check{R}\otimes M$ проективен, то ${}_RM$ проективен. Отсюда следует, что след любого проективного идеала кольца проективен. В любом кольце R идеал H, являющийся чистым левым идеалом, имеет вид $\operatorname{tr}({}_RP)$ для некоторого проективного ${}_RP$, а в коммутативном случае верно и обратное [795]. Условия проективности идеалов полугрупповых колец приведены в [1035]. В ряде работ кольцевые теоремы распространялись на проективные модули. Так, в [1136] доказано, что проективный модуль P над коммутативным кольцом регулярен тогда и только тогда, когда любой его простой фактормодуль инъективен. Фишер [529] перенес на широкий класс проективных модулей теорему Гопкинса. В какой-то мере обратный результат доказан в [580]: над нётеровым справа и слева кольцом нётеров конечно вложимый проективный модуль артинов. Два различных понятия наследственного (и конаследственного модуля ввели и изучали Бергман [207] и Шрикханде [1282]. Работы [681, 226, 440, 672, 1455] касаются совершенных и полусовершенных модулей ([138] стр. 188—189 и [87], стр. 33—34). В [1032] установлено, что свойство конечной замены проективного модуля P равносильно импликации: $P = N \oplus M \Rightarrow P = A \oplus B$, где $A \subseteq N$, $B \subseteq M$. Когда этим свойством обладает полусовершенный модуль, выяснено в [1455]. Теорема о строении регулярных чисто проективных модулей, обобщающая [M71:363], доказана в [521]. Разложимость конечно инъективного проективного модуля в прямую сумму инъективных отмечена в [1139]. Конечно вложимые инъективные проективные модули над линейно компактным кольцом рассматривались в [1076]. Условия, при которых проективное накрытие модуля конечной длины — модуль конечной длины, изучались в [1473]. Необходимые и достаточные условия, при которых наследственный в смысле [1282] модуль обладает свойством сокращения, указаны в [550]. В [409] проективные модули над наследственным кольцом встретились в связи с изучением конечно связанных модулей. Случаи R-проективности полного кольца частных кольца R указаны в [661] и [203] (ср., [99], стр. 24). В [1469] отмечено, что если R имеет артиново левое кольцо частных, то любой конечно порожденный модуль без кручения в смысле Басса вложим в свободный. Рефлексивные модули над узкими (см. п. 2.9) кольцами изучались в [850]. Перейдем к работам по квазипроективным модулям. В [673] показано, что над совершенным слева кольцом любой квазипроективный модуль есть прямая сумма вполне неразложимых модулей и для таких разложений справедлива теорема Крулля—Ремака—Шмидта. Когда подмодули квазипроективного модуля квазипроективны, выяснили Голан [583] и Фуллер [559] (см. п. п. 2.8, 2.9). Теоремы о строении квазипроективных модулей над HNP-кольцами получил Сингх [1295] (см. п. 2.2.). Он также доказал, что квазипроективный конечно порожденный модуль над первичным левым кольцом Голди проективен, если $Z({}_RM) = 0$. Сюда же примыкает результат Рамамурты и Рангасвами [1145], где также доказано, что большие квазипроективные модули без кручения над кольцом без делителей нуля проективны. Там же описаны квазипроективные модули над дедекиндовыми кольцами. Условия на модуль M над дедекиндовым кольцом R, необходимые и достаточные для того, чтобы $\mathrm{Hom}_R(M, N+N') = \mathrm{Hom}_R(M, N) + \mathrm{Hom}_R(M, N')$ для всех $N, N' \subseteq M$, указаны в [322]. (Это свойство равносильно M-проективности модуля M, [1189]). Над кольцом главных идеалов этим свойством обладают все квазипроективные модули [321]. Ослабленный вариант квазипроективности (квазикорациональные модули) изучался в [312] (см. п. 2.8). О других обобщениях проективных модулей см. [496, 559, 1189, 1289, 1291]. В [1289] определены Γ-относительно проективные модули, где Γ — заданное семейство

модулей. Если Γ—{конечно порожденные модули}, то Γ-относительная проективность совпадает с проективностью. В [1289, 1292] даны характеризации $\aleph$-проективных модулей и примеры колец, для которых классы $\aleph_n$- и $\aleph_{n+1}$-проективных модулей различны. В [1189] показано, что если ${}_RP$ — M-проективный модуль, то он $(M \oplus \ldots \oplus M)$-проективен, и дан критерий M-проективности модуля ${}_RP$. Эквивалентность категорий $\mathscr{P}(R)$ и $I(R)$ конечно порожденных R-модулей конечной проективной (соответственно инъективной) размерности над локальным кольцом Коэна — Маколея, являющегося факторкольцом кольца Горенштейна, установил Шарп [1260]. В другой его работе [1261] при иных ограничениях на R он строит функтор $\Delta : I(R) \to \mathscr{P}(R)$ такой, что T и $\Delta(T)$ имеют один и тот же аннулятор для всех $T \in I(R)$. Этот факт играет важную роль в работах Пескина и Спиро [1101], [1102], где, среди прочего, доказана гипотеза Ауслендера (см. [87], стр. 41). В [634—635] при описании функтора $\mathrm{Ext}^1_R(\mathbf{Q}/R)$ над дедекиндовой областью R (см. стр. 62) предлагается конструкция для изучения всех модулей M с $\mathrm{Ext}^1_R(M, R) = 0$.

Переходя к плоским модулям, укажем на новый подход к проблеме плоскостности в [1162], позволяющий получать теоремы о строении плоских модулей. Критерий, с помощью которого устанавливается плоскостность некоторых объектов в категории Гротендика, содержится в [1376]. Простые факты о строго плоских модулях доказаны в [464]. Эти же модули встретились в [261]. Равносильность свойств плоскостности, p-инъективности и инъективности для простого модуля R/M в случае, если M — идеал кольца R, установлена в [1137]. Если же R — PP-кольцо, то два первых свойства равносильны для всякого модуля R/H, где H — идеал в R. Плоские модули E над коммутативным дедекиндовым или артиновым кольцом, для которых отображение $E \otimes \Pi F_i \to \Pi(E \otimes F_i)$ инъективно для любого семейства $\{F_i\}$, изучались в [1427]. Плоские градуированные модули встретились в [997] при изучении алгебр Пуанкаре. В [340] рассматривались условия, при которых подкольцо R обладает свойством спуска относительно кольца S (т. е. любой R-модуль M плоский, если $S \otimes_R E$ — плоский). Доказано, что если R обладает спуском относительно S для циклических модулей, то же самое верно для конечно порожденных модулей. Вместе с тем свойства спуска и спуска для конечно порожденных модулей не эквивалентны. О других работах по спуску и плоским морфизмам колец см. п. 3.6, а о кольцах, над которыми конечно порожденные плоские проективны — п. 2.7. При изучении свойств универсального гомоморфизма $R \to \check{R}$ в регулярное кольцо $\check{R}$ (см. стр. 73) доказано, что для проективности конечно порожденного плоского модуля ${}_RM$ достаточна проективность $\check{R}$-модуля $M \otimes_R \check{R}$. Отметим, что

${}_R\check{R}$ — плоский модуль лишь, если $\check{R}=R$ [1435]. Если $\mathrm{rk}_M(P)$ — непрерывная функция на $\mathrm{Spec}\,R$ (см. [86], стр. 35), то плоский конечно порожденный R-модуль M проективен, [1436] ((ср. М71: 1106), а также [86], стр. 35). В [425] показано, что импликация: «если $\mathrm{rk}_M(P)=0$ для всех $P\in\mathrm{Spec}\,R$ для плоского ${}_RM$, то $M=0$» равносильна как инъективности всякого сюрьективного эндоморфизма плоского модуля с $\mathrm{rk}_M<\infty$, так и T-нильпотентности первичного радикала кольца. В [1064] изучались модули с содержанием (см. стр. 100). Оказалось, что любой проективный модуль — модуль с содержанием, а плоские модули с содержанием — это в точности такие модули с содержанием, что $c(rx)=rc(x)$ для всех $r\in R$, $x\in M$. Если плоский модуль с содержанием есть прямая сумма циклических, то он проективен [1064]. Условия проективности конечно порожденных плоских идеалов указаны в [339]. В [1244] доказано, что в 1-мерном (не обязательно нётеровом) кольце всякий конечно порожденный плоский идеал 2-порожден. (Имеется гипотеза, что это так для прюферовых колец любой размерности). Оценке проективных размерностей плоских модулей посвящены работы [639—640, 779, 1293]. Доказано [1293], что над кольцом R, где $|R|\leqslant\aleph_n$ $(n\geqslant 0)$, $\sup\{\mathrm{h.dim}\,M/M$ — плоский$\}\leqslant n+1$. Этот же результат содержится в [640], где также показано, что для нётерова слева кольца R с $\mathrm{l.k.dim}\,R=n$ любой плоский модуль имеет проективную размерность $\leqslant n$. В [639] приведено улучшенное доказательство теоремы из [М71:913]. Хилл [703] определил квазиплоские модули ${}_RM$, как такие модули, что для любой делимой группы D и $K_R\subset M^*=\mathrm{Hom}_Z(M,D)$ отображение $K\otimes_R M\to M^*\otimes_R M$ инъективно. О характеризациях колец по свойствам этих модулей см. п. 2,7—2.9. Г-относительно плоские и $\aleph$-плоские модули изучал Симсон [1289, 1291]. Он показал, что если в точной последовательности $0\to K\to P_n\to\ldots\to P_0\to M\to 0$, M — плоский, а P_i проективны, то K есть объединение $\aleph_n$-направленной системы $\aleph_n$-порожденных проективных подмодулей. В заключение коснемся результатов о связи между R-чистотой идеала I кольца $R[x]$ многочленов над коммутативным кольцом R (идеал I в $R[x]$ чист, если R-модуль $R[x]/I$ — плоский) и условиями конечности идеала I. Хайнцер и Ом [699], а также Рейно и Грюзон [М71:913] доказали, что если число минимальных простых идеалов в R конечно, то все R-чистые идеалы в $R[x]$ конечно порождены. Всякое кольцо с этим свойством — pf-кольцо (см. п. 2.7), но не наоборот, [699]. Ом и Раш [1062] установили, что если среди многочленов минимальной степени, принадлежащих чистому идеалу I, имеется неделитель нуля, то I конечно порожден. То же самое верно, если $R[x]/I$ — плоский инъективный эпиморфный образ кольца R [1383]. Последнее утверждение справедливо и для колец

многочленов от нескольких переменных [426]. Контрпримеры к гипотезам, выдвинутым в [962] и [1062], построил Алфонси [187]. Иная ситуация имеет место при изучении таких идеалов $I\subset R[x]$, что R-модуль $R[x]/I$ проективен, а именно: свойство «если ${}_RR[x]/I$ проективен, то I конечно порожден» выполняется тогда и только тогда, когда R содержит лишь конечное число идемпотентов [337]. Там же (для любого кольца) описаны не конечно порожденные идеалы I, для которых ${}_RR[x]/I$ проективен. В частности, сами такие идеалы проективны в $R[x]$. В [338] показано, что при условии конечной порожденности R-модуля $R[x]/I$ его проективность равносильна тому, что идеал I главный. Это обобщает результат из [1148]. Кроме того, если $R[x]/I$ — свободный R-модуль, то $I=fR[x]$, где f — унитарный многочлен [338]. Тот же круг вопросов, но для идеалов I в кольце степенных рядов $R[[x]]$ рассматривался в [1402]. Оказалось, что если R — нётерово, то $R[[x]]/I$ — плоский идеал тогда и только тогда, когда I — проективный идеал, а идеал $c(I)$, порожденный коэффициентами рядов из I, порождается идемпотентом. Кроме того, если $c(I)=A$, то проективность модуля $R[[x]]/I$ равносильна его плоскостности и конечной порожденности. Йондруп [792] рассмотрел класс F не обязательно коммутативных колец R, в которых каждый левый идеал I такой, что R/I — плоский R-модуль порождается семейством идемпотентов. Для того, чтобы $R\in F$, достаточна (а если R коммутативно, то и необходима) разложимость каждого проективного левого идеала кольца в прямую сумму конечно порожденных идеалов. Кроме того, если R коммутативно и $R\in F$, то $R[x]$ и $R[[x]]\in F$. В [991] рассматривался вопрос о плоскостности кольца $R[[x]]$ над R и $R[x]$.

1.5. Инъективные модули (и близкие к ним классы модулей)*. Относительно использования инъективных модулей в гомологической классификации колец — см. § 2, в локализациях — см. § 4, в разложениях в прямую сумму — п. 1.2. Те или иные свойства инъективности в абелевых группах и кольца эндоморфизмов инъективных модулей отражаются лишь частично.

а) Инъективные модули. Монография Шарпа и Вамоша [1262] посвящена инъективным модулям. Ру [1221] сводит задачу описания неразложимых инъективных модулей к вопросу о вычислении размерностей некоторых простых колец как векторных пространств над телами. В [1223—1224] он приводит условие, при котором неразложимые инъективные модули имеют конечную длину и дает характеризацию неразложимых инъективных модулей над некоторыми классами артиновых колец. Далее он [1225] приводит эквивалентную переформулировку вопроса о существовании простого кольца R и простого

*** При подготовке этого раздела обзора большую помощь оказал А. А. Туганбаев.**

подкольца S таких, что длины S-модулей $_SR$ и R_S различны (в терминах совпадения длин некоторых неразложимых инъективных модулей или минимальных кообразующих). Лезье [899] сопоставляет неразложимому инъективному модулю E максимальный аннулятор $\mathrm{Ass}E$ ненулевого подмодуля модуля E и изучает свойства отображения $E \to \mathrm{Ass}E$.

Харуи [686] выясняет, когда над коммутативным кольцом с нётеровым кольцом частных существует конечно порожденный инъективный модуль без кручения или циклический инъективный модуль. Макконел и Робсон [959] отметили, что над алгеброй R над полем характеристики 0 с образующими x, y и соотношением $xy - yx = 1$ (т. е. над алгеброй Вейля) не существует конечно порожденных инъективных R-модулей. Миллер и Тёрнидж [980] строят пример инъективного нётерова модуля, не являющегося артиновым. Фишер [529] показывает, что для некоторых классов инъективных модулей из нётеровости все же следует артиновость. Сарат и Варадараян [1251] приводят пример, показывающий, что фактормодуль конечно порожденного инъективного модуля над полунаследственным кольцом не всегда инъективен. Ятегаонкар [770] исследует инъективные модули над вполне ограниченными слева нётеровыми кольцами, описывает конечно порожденные подмодули неразложимого инъективного модуля и показывает, как неразложимый инъективный модуль может быть построен из неразложимых инъективных модулей над подходящими артиновыми кольцами. Если R субкоммутативно (т. е. $Rx = xR$ для всех $x \in R$), то Шорес [1271] доказывает, что всякий нётеров инъективный R-модуль обладает конечным композиционным рядом, и выясняет, когда инъективная оболочка R-модуля R/M, где M — максимальный идеал, нётерова. Строение инъективных модулей над дедекиндовыми, однорядными и др. кольцами рассматривает Албу [182], над прюферовыми — Хиши [714]. Описание инъективных модулей над горенштейновыми порядками (в частности, над целочисленными групповыми кольцами конечных групп) приводит Роггенкамп [1206]. Сингх [1295], [1296] исследует, развивая работу Марубайаши [933], строение неразложимых инъективных модулей без периодических элементов над нётеровыми первичными наследственными кольцами.

Читэм [395] выясняет, когда для несингулярного слева кольца R прямой предел несингулярных модулей инъективен (одно из равносильных условий: кольцо R конечномерно в смысле Голди). Сарат и Варадараян [1252] анализируют условия на прямую сумму фиксированного множества I инъективных модулей M_i, равносильные ее инъективности (при этом отмечается, что если $\coprod_{k \in K} M_k$ — инъективный модуль для любого счетного $K \subseteq I$, то $\coprod_{i \in I} M_i$ — инъективный модуль; ср. [М68: 138]).

Некоторый класс «приятных» инъективных модулей рассматривает Ламбек [856] (в качестве определения взяты «хорошие» свойства, которыми обладают инъективные модули над наследственными кольцами, несингулярные инъективные модули, инъективные оболочки модулей вида R/P, где P — простой идеал коммутативного кольца). Пример инъективного модуля, не являющегося «приятным», приводит Михлер [975].

Интенсивно изучались кольца R, над которыми все простые (полупростые, квазиинъективные) модули инъективны, называемые V-кольцами (SSI-кольцами, QII-кольцами). По поводу этих классов см. также § 2. Им уделено много внимания в монографии Шарпа и Вамоша [1262]. Шрикханде [1282] охарактеризовал V-кольца, как кольца, над которыми все коконечно порожденные (см. стр. 80) R-модули инъективны. Гудёрл [609] рассматривает кольца, над которыми все точные простые модули инъективны, Ю-Ша-Мин [1461] и Рамамурты [1137] — кольца, над которыми инъективны (инъективны относительно вложений главных правых идеалов в кольцо) все простые или некоторые циклические модули, Рамамурты и Рангасвами [1138] — кольца, над которыми все простые модули либо проективны, либо инъективны (в доказательствах последней работы есть неточности). Бёрд [361], а также Сарат и Варадараян [1251] отмечают, что свойство быть SSI-кольцом равносильно свойству быть нётеровым справа V-кольцом, а наследственное нётерово SSI-кольцо является QII-кольцом. Сюда же примыкает другая статья Бёрда [360]. QII-кольца встречаются у Фейта [500]. Фейт [498] описывает кольца, над которыми все собственные циклические модули инъективны. Бойль [330] изучает наследственные QII-кольца (в частности, в классе наследственных нётеровых колец QII-кольца совпадают с V-кольцами), Гудёрл [602] и Л. А. Койфман [М71:54, 55] выясняют, когда все сингулярные модули инъективны, а Бернхардт [М71:196] и Бленд [314] — когда все периодические или полупростые модули инъективны относительно некоторого кручения. О других работах, примыкающих сюда, см. п. 2.3 и § 3.

Джейн [759] изучает FP-инъективные модули M (т. е. модули M, для которых $\mathrm{Ext}_R^1(F, M) = 0$ для всех конечно представимых R-модулей F) и кольца R, над которыми модуль $_RR$ FP-инъективен, и устанавливает связь этого класса колец с кольцами, над которыми все инъективные модули плоские. Рассматривая модули над некоторым классом градуированных алгебр, Мур и Петерсон [997] отмечают совпадение классов инъективных, плоских и проективных градуированных модулей.

Необязательно унитарные инъективные модули встречаются в [664]. Об инъективных упорядоченных модулях см. § 4, стр. 124—125.

б) Инъективные оболочки. Элементарное доказательство хорошо известного результата об описании инъективной оболочки кольца верхних треугольных матриц над телом приводят Брей, Бёрд и Бернхардт [332]. Длаб и Рингель [461] указали общий способ построения колец таких, что: 1) R совпадает со своим полным левым кольцом частных; 2) модуль ${}_RR$ не является инъективным; 3) ${}_R\hat{R}$ допускает структуру кольца, продолжающую структуру модуля ${}_RR$ (пример Особской [М65: 191] оказывается частным случаем). Если K — поле, то Норткотт [1051] приводит доказательство известных утверждений о том, что ${}_S\hat{K}=K[X_1^{-1},\ldots,X_q^{-1}]={}_S\hat{K}$, где $R=K[X_1,\ldots,X_q]$ и $S=K[[X_1^{-1},\ldots,X_q^{-1}]$, а также, что S — инъективный R-модуль. Харди [684] исследует конеприводимые модули M (т. е. модули M, у которых $\hat{M}$ — неразложимый модуль), рассматривает вопрос о возможности разложения модуля в прямую сумму конеприводимых модулей и описывает строение модуля $\widehat{R/P}$, где R — коммутативное кольцо и P — максимальный идеал. Санкар [1249] приводит описание строения инъективной оболочки модуля над областью главных идеалов. Лезье [899] формулирует некоторые свойства инъективных оболочек конечно порожденных модулей над нётеровым слева кольцом. В. К. Захаров [65] предлагает функциональное представление инъективных оболочек некоторых инъективных модулей над полупримитивным коммутативным кольцом (с хаусдорфовым максимальным спектром). Инъективные оболочки модулей без кручения рассматривает Зельманович [1469]. Албу [183] выясняет, когда инъективные оболочки простых модулей над коммутативным кольцом содержат только циклические собственные подмодули. Ятегаонкар [768] показал, что над вполне ограниченным нётеровым кольцом конечно порожденные подмодули инъективных оболочек простых модулей имеют конечную длину. Шрикханде [1282] изучает коконечно порожденные модули, т. е. модули, инъективная оболочка которых изоморфна прямой сумме конечного числа инъективных оболочек простых модулей (см. также статью Онодеры [1077]). Оценки мощности инъективной оболочки модуля приводит Эклоф [481]. Бойль [329] охарактеризовала однорядные кольца как кольца, над которыми инъективная оболочка и проективное накрытие каждого правого и левого конечно порожденного модуля изоморфны.

Мадер [924] вводит «p-адическую» оболочку абелевых групп.

в) Инъективные резольвенты и размерности. Результаты об инъективных размерностях и инъективных резольвентах модулей содержатся в статьях: Маккерроу [960] (модули степенных рядов); Шарпа [1260—1261] (конечно порожденные модули конечной инъективной размерности); Паппа [1094] (верхняя грань инъективных размерностей подмодулей); Бека [261] (инъективные резольвенты, несколько первых членов которых являются Σ-инъективными модулями); Боратынского [324] (оценка инъективной размерности полного, топологизированного цепью подмодулей модуля через соответствующие размерности факторов) и [325] (инъективная размерность $\aleph_\alpha$-инъективных модулей); Хилла [702] (характеризация QF-3-колец в терминах доминантных и кодоминантных размерностей).

г) Обобщения инъективных модулей: Рамамурты и Рангасвами [1139] рассматривают инъективные модули относительно вложений конечно порожденных модулей; Джейн [759] и Рамдиал [1140] — относительно вложений конечно представимых модулей; Фахруддин [503, 505] — относительно чистых (по Кону) вложений; Фуллер [559] — относительно вложений полупростых модулей; О. Доннел [1060] — относительно некоторого класса мономорфизмов; Н. И. Вишнякова [27] — относительно некоторого класса модулей над кольцами нормирований; Бичи [248—249] — относительно кручений и предрадикалов; И. Д. Бунц [30, стр. 288], [22] — относительно некоторых функций на классах модулей (обобщая результаты Бичи, Рамамурты и Рангасвами); Ион [745] выясняет, когда инъективна прямая сумма счетного числа ε-инъективных модулей, где ε — радикальный фильтр. Изучались различные понятия инъективности в категориях абелевых групп (см., например, Мегиббен [967] и др.). Армендариц [201], Армендариц и Макдональд [208] рассматривают Q-делимые модули, где Q — кольцо частных Утуми кольца R (т. е. модули M такие, что $\mathrm{Hom}_R(Q, M)=0$). У Уотерхауза [1425] и Н. И. Вишняковой [30, стр. 290, 291] встречаются p-делимые и делимые локально циклические модули над кольцами нормирования. Тепли [1361] вводит и изучает τ-делимые и τ-инъективные модули, где τ — кручение, в частности, выясняет, когда совпадают эти классы модулей. См. также [30, стр. 334], [248, 1144, 1361, 1326].

Если любой частичный эндоморфизм модуля M продолжается до эндоморфизма всего модуля, то M называется квазиинъективным. В ряде работ выясняется, когда квазиинъективны: модули характеров и сингулярные модули над совершенным кольцом (Голан [538]); все циклические модули (частично Асан [178, 179] и полностью Кёлер [831]); все левые идеалы (А. М. Иванов [748], Хилл [701], см. также [986, 987]). М. Кильп [79] описал квазиинъективные абелевы группы (этот результат передоказывался Фуксом [550], Сандерсоном [1246] и Линтоном [914]). Харада [674] изучает квазиинъективные модули с условиями на цепи подмодулей. Санкар [1250] отмечает хорошо известный факт: квазиинъективный модуль без кручения над коммутативной областью инъективен. Тиссерон [1368] изучает кольца, над которыми прямое произведение копий квазиинъективного модуля квазиинъективно, а Хилл [703] выясняет, когда прямая сумма квазиинъективных модулей квазиинъективна. Некоторые обобщения квазиинъективных модулей предлагают Бишо [297], Джереми [781] и Боннард [323].

Бицан [286] охарактеризовал QF-3′-модули (введенные и изучавшиеся Г. М. Цукерман [М 73:122] под названием псевдоинъективных модулей). Этот же результат получил и А. И. Кашу [76].

Инъективные модули относительно некоторого фиксированного модуля рассматривали Роберт [1189] и Адзумайя, Мбинтум и Варадараян [227].

Кавада [811] отметил, что если W — кообразующий в R-Mod, то модуль $_RW$ абсолютно чист и инъективен над $\mathrm{End}_R M$. Ру [1220, 1222] использует кообразующие при гомологической классификации колец. Катефорис [380] изучает минимальные инъективные кообразующие в классе несингулярных модулей. Онодера [1075] показывает, что модуль $_SS$ — инъективный кообразующий, где $S=\mathrm{End}_R P$, P — проективный инъективный R-модуль, $S(P)$ — конечно порожденный большой подмодуль и каждый простой фактормодуль модуля P изоморфен модмодулю модуля P. В другой статье [1076] он рассматривает связи между линейно компактными модулями и инъективными кообразующими с большими цоколями, а в [1077] показывает, что $_RR$ — инъективный образующий тогда и только тогда, когда каждый точный R-модуль — образующий. Хилл [701] исследует строение таких полусовершенных колец R, что $_RR$ — инъективный кообразующий и все левые идеалы в R квазиинъективны. Сюда примыкают статьи Като [810], Каша и Парейгиса [806].

Инъективные модули тесно связаны с рядом задач о разложении модулей в прямую сумму подмодулей (см. [195, 675, 687, 800, 1370, 1417, 1453—1456], а также § 1, п. 2).

Пары модулей (P, Q), где P — проективный, Q — инъективный модули и $\mathrm{Hom}\,(P, X)=0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}\,(X, Q)=0$, исследует Парра [1097]. Саббах и Эклоф [1239] показали, что класс инъективных модулей определим в логике $L_{\infty\omega}$ тогда и только тогда, когда он является элементарным.

Вилланиева [1396] изучает инъективные оболочки в категориях Гротендика, Роберт [1187] разбирает свойства квазиинъективных объектов абелевой категории.

§ 2. ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КОЛЕЦ

Некоторые работы по гомологической классификации, связанные с кольцами частных, локализациями и кручениями, освещены также в § 3. О работах по гомологической классификации моноидов см. § 5.

2.1. Гомологические размерности колец и алгебр. Введение в теорию гомологической размерности содержится в [1082, 1463]. Обзору результатов о роли мощности в изучении глобальных размерностей посвящены работы [1109, 1082, 1084]. В первой

из них подробно изложены все известные результаты по глобальной размерности булевых колец. Приложения теории производных функторов функтора $\varprojlim$ к вычислению гомологических размерностей колец и модулей содержатся в монографии Йенсена [779]. Проблему Чейза о вычислении глобальной размерности кольца обобщенных треугольных матриц решили Палмер и Роос [1091—1092] (подробнее см. [87], стр. 9). Решение этой же проблемы содержится в [542—543], в которых, в частности, даны оценки для финитной проективной размерности такого кольца. В ряде работ изучалась глобальная размерность колец дифференциальных операторов.

Пусть R — регулярное нётерово коммутативное кольцо, являющееся алгеброй над полем k. Если $\mathrm{char}\,k=0$, или если R — поле, то $\mathrm{gl.\,dim}\,R[[x_1, \ldots, x_n]]\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]=n+\mathrm{gl.\,dim}\,R$ [306], [1210]. В случае поля ненулевой характеристики и $h=1$ соответствующие формулы получил Гудёрл [610]. Пусть, далее, $\Delta=\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ — семейство коммутирующих k-дифференцирований кольца R $(\Delta\subset \mathrm{Der}_k(R, R))$ и $R[\Delta]$ — соответствующее кольцо дифференциальных операторов. Если R — расширение поля k и $\mathrm{char}\,k=0$, то $\mathrm{gl.\,dim}\,R[\Delta]=s$ (см. [430]). Для $\Delta=\{\delta\}$, в [281] выясняются условия, при которых $\mathrm{gl.\,dim}\,R[\delta]=\mathrm{gl.\,dim}\,R$. Общая формула для $\mathrm{gl.\,dim}\,R[\delta]$ для поля k произвольной характеристики указана в [610]. Там же приведен пример кольца R с $\mathrm{gl.\,dim}\,R=\infty$, но $\mathrm{gl.\,dim}\,R[\delta]<\infty$. Формулу для $\mathrm{gl.\,dim}\,R[\Delta]$ в случае, если $R/\mathfrak{m}$ — алгебраическое расширение поля k для всех $\mathfrak{m}\in M.\,\mathrm{Spec}\,R$, получил Бьёрк [306—307]. В другой работе [308] Бьёрк показал, что если к тому же R-модуль $\mathrm{Der}_k(R, R)$ конечно порожден, то k-алгебра всех дифференциальных операторов с коэффициентами из R нётерова и ее глобальная размерность равна n. В общем случае формулу для вычисления глобальной размерности колец дифференциальных операторов, порожденных некоммутирующими дифференцированиями, получил Г. Л. Фельдман [155]. В работах [628, 957] изучалась глобальная размерность тензорного произведения $A\otimes_F B$ алгебр над полем F. В частности, если $\mathrm{char}\,F=0$, $A=F[x]\left[\frac{\partial}{\partial x}\right]$ и B — тело, то $\mathrm{gl.\,dim}\,A\otimes B\leqslant 2$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда A может быть вложена в алгебру матриц над B. Глобальную размерность тензорной алгебры проективного бимодуля вычислил Ю. В. Роганов [123]. Его результаты обобщают одну теорему из книги Митчелла [М 68 : 267] В. Е. Говоров [32] дает оценку слабой глобальной размерности факторалгебры $R=\Lambda/P$ свободной алгебры Λ над полем F по идеалу P. В другой его работе [33] для случая, когда Λ конечно порождена, а P — однородный идеал, приводятся необходимые и достаточные условия (в терминалах характеристики Эйлера — Пуанкаре) для того, чтобы $\mathrm{gl.\,dim}\, R<\infty$. Смитс [1303] показал, что если $\mathrm{char}\, F=0$, $\Lambda=F(x, y)$ — свободная алгебра и $P=(x^2-2xy+y^2)$, то $\mathrm{gl.\,dim}\, R=2$. Формулу для глобальной размерности копроизведения R семейства колец $\{R_v\}$ с объединенным полупростым кольцом R_0 получил Бергман [270], показав, что $\mathrm{l.\,gl.\,dim}\, R\leqslant\sup(1, \mathrm{l.\,gl.\,dim}\, R_v)$, причем неравенство превращается в равенство, если $\sup(\mathrm{l.\,gl.\,dim}\, R_v)\neq 0$. Глобальную размерность свободного произведения колец специального вида вычислял Смитс [1304]. Пусть R — регулярное локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем частных K. В [773], [775], [1142], [1174] изучалась глобальная размерность R-порядков. Порядок Λ в K_n называется черепичным, если он содержит n ортогональных идемпотентов. Если же он имеет вид $(\mathfrak{m}^{\lambda_{ij}})$, где $\lambda_{ij}\in\mathbf{Z}$, $\lambda_{ij}=0$ для $i\leqslant j$, то порядок называется треугольным. В [775] показано, что если R — кольцо дискретного нормирования и $\Lambda=(\mathfrak{m}^{\lambda_{ij}})$ — черепичный R-порядок конечной глобальной размерности, то $\lambda_{ij}\leqslant n-1$ для всех i, j. В другой работе [773], отвечая на вопрос Тарси [М 71:1076], Ятегаонкар показывает эквивалентность для треугольного порядка Λ следующих условий: 1) $\mathrm{gl.\,dim}\,\Lambda<\infty$; 2) $\Omega_n\subset\Lambda$; 3) $\mathrm{gl.\,dim}\,\Lambda\leqslant n-1$ (здесь $\Omega_n=(\mathfrak{m}^{\lambda_{ij}})$, где $\lambda_{ij}=\left.=\frac{i-j+|i-j|}{2}\right)$ и для $n\geqslant 4$ приводит описание треугольных порядков Λ в K_n с $\mathrm{gl.\,dim}\,\Lambda=n-1$. (Ср. [87], стр. 25). При этом оценка 3) не улучшаема. В дальнейшем [774] он распространил эти понятия и результаты на порядки над коммутативными нётеровыми регулярными областями. К этому же направлению примыкают некоторые из результатов работы [385]. Глобальным размерностям дополненных алгебр посвящены работы [907], [909]. Пусть $\Delta\xrightarrow{\varepsilon}K$ — дополненная алгебра размерности 1, удовлетворяющая условиям E_1 и E_2 из книги Картана и Эйленберга («Гомологическая алгебра», гл. X, торема 6.1). Тогда [909], если $\ker\varepsilon$ — конечно порожденный идеал, то $\mathrm{gl.\,dim}\,\Lambda=\mathrm{gl.\,dim}\, K+1$. Кроме того, $\mathrm{w.\,gl.\,dim}\, A[[x]]\geqslant\mathrm{w.\,gl.\,dim}\, A+1$ для любого кольца A с $\mathrm{w.\,gl.\,dim}\, A<\infty$. Если над K все проективные модули свободны, то для алгебры Хопфа $\Lambda\xrightarrow{\varepsilon}K$ над K доказано, что $\mathrm{l.\,gl.\,dim}\,\Lambda=\mathrm{gl.\,dim}\, K+\mathrm{l.\,h.\,dim}_\Lambda(K)$ [907]. В случае, когда K — совершенное локальное кольцо, такое же равенство справедливо для слабых размерностей. Эти результаты применяются для вычисления глобальных размерностей обёртывающих алгебр Ли $\mathfrak{G}$ над кольцом K. Например, если K наследственно и $\mathfrak{G}$ — K-проективная алгебра, то $\mathrm{l.\,gl.\,dim}\,\mathfrak{G}^e\leqslant 1+ +\mathrm{l.\,h.\,dim}_{\mathfrak{G}^e}K$. Этому же вопросу посвящены работы Рооса [1211, 1212]. Когомологическая размерность алгебр и ее связь с глобальной размерностью рассматривалась в [153, 224, 404,

1428, 1229, 1430]. Ряд результатов о конечномерных алгебрах над полем Уелен [1429, 1430] переносит на конечно порожденные (как модули) алгебры A над регулярным коммутативным кольцом K, устанавливая соотношения между $\mathrm{gl.\,dim}\, A^e$, $\mathrm{gl.\,dim}\, A$ и $\dim A$ (соответственно между $\mathrm{w.\,gl.\,dim}\, A^e$, $\mathrm{w.\,gl.\,dim}\, A$ и $\mathrm{w.\,dim}_A A$). Кроме того, в [1430] описано строение проективных K-алгебр размерности Хохшильда $\leqslant 1$ и их гомоморфных образцов в терминах структуры их идеалов и идемпотентов. Когомологическую размерность расширений полей вычисляла Ософская [1083]. В работе [153] обобщаются результаты Штаммбаха [87, стр. 13] и Грюнберга [М 71:459]. Работа [404] посвящена изложению доказательства теоремы Столлингса — Суона о свободе групп когомологической размерности 1. Точную оценку для слабой глобальной размерности скрещенного произведения группы и коммутативной алгебры над нётеровым коммутативным кольцом аннонсировал Г. Л. Фельдман [154]. Среди других работ о глобальной размерности отметим работу Сандомирского [1247], в которой он, обобщая результаты Филдса ([87], стр. 12), показал, что если $\{I_n\}$ — T-нильпотентная справа последовательность идеалов кольца (т. е. для любой последовательности $\{x_n|x_n\in I_n|\}$ найдется такое N, что $x_N\cdot x_{N-1}\ldots x_1=0$), то $\mathrm{l.\,gl.\,dim}\, R\leqslant\sup\{\mathrm{l.\,h.\,dim}_R R/I_n+\mathrm{l.\,gl.\,dim}\, R/I_n\}$. Аналогичное неравенстно верно для слабой размерности. Настасеску [1016] изучал глобальную размерность полуартиновых колец конечной длины Лоева. Нико [1033] предложил вычисление глобальной размерности полугрупповых колец конечных регулярных полугрупп S с единицей (см. [М73:828] и [87], стр. 11). Симсон [1290] показал, что если кольцо R — $\aleph_{\alpha+}$-нетерово слева, в котором все $\aleph_\alpha$-порожденные идеалы проективны, то $\mathrm{l.\,gl.\,dim}\, R\leqslant \leqslant n+1$. Гудёрл [604, 605] доказал, что если R — прямое произведение первичных колец, не являющиееся артиновым, то $\mathrm{g.\,dim}\, R\geqslant K.\,\dim R+1$. Глобальная размерность различных колец вычислялась также в [487, 611, 631, 1192, 1435]. В [1192] при изучении идеализаторов $\mathrm{Id}\,(J)$ левых идеалов J кольца R оказалось, что если J полумаксимален (т. е. R/J — полупростой R-модуль) и $\mathrm{Id}(J)\neq R$, то $\mathrm{l.\,gl.\,dim}\,\mathrm{Id}(J)= =\sup\{1, \mathrm{l.\,gl.\,dim} R\}$. Там же показано, что эта формула неверна, если J не полумаксимален. Гудёрл [611] распространил этот результат на так называемые ручные подидеализаторы (подидеализатором левого идеала J называется любое подкольцо $S\subset\mathrm{Id}(J)$, содержащее J; подидеализатор S называется ручным, если S/J полупросто и артиново). Инъективные размерности колец рассматривались в [543, 904, 1142, 1212]. В [627] для гомоморфизма колец $f: R\to S$ дан критерий равенства нулю относительно глобальной размерности S над R. Гомологические размерности когерентных колец обсуждаются в [277, 278, 1140]. Оценке верхней границы проективных размерностей плоских модулей посвящены работы [639, 640, 1293]. Продолжая изучение чистой глобальной размерности l. p. gl. dim, начатое Гриффитом [M73:454], Келпински и Симсон [818, 817] показали, что $\mathrm{l.p.gl.dim}R \leqslant n+1$, если $|R| \leqslant \aleph_n$, $n \geqslant 0$, и охарактеризовали все кольца с $\mathrm{l.p.gl.dim}=0$. Фильдхаус [520] и Папп [1094] изучали соответственно абсолютно чистую и строгую гомологические размерности модулей и колец. Если A — коммутативное кольцо, $B=A/I$, где I — собственный конечно порожденный идеал, то говорят, что для него справедливо CR-свойство, если $\mathrm{h.dim}_A E = \mathrm{h.dim}_B E + \mathrm{h.dim}_A B$ для любого B-модуля E с $\mathrm{h.dim}_B E < \infty$. Васконселос [1386] доказал справедливость CR-свойства для сверхплотного идеала (т. е. такого, что каноническое отображение $A \to \mathrm{Hom}\ (I, A)$ — изоморфизм) с $\mathrm{h.dim}_A I = 1$ (ср. [87], стр. 12). Гомологические размерности банаховых алгебр изучал А. Я. Хелемский [165, 166].

2.2. Наследственные, полунаследственные кольца и их обобщения. В этом пункте, если не оговорено противное, кольцо будем называть дедекиндовым, нётеровым или наследственным, если оно обладает соответствующим свойством с обеих сторон. Строение (полу)наследственных слева колец, обладающих полной системой примитивных идемпотентов, выяснил Ю. А. Дрозд [31]. Следствием этих результатов является представимость нётерова слева наследственного кольца в виде кольца $\begin{pmatrix} A & O \\ V & B \end{pmatrix}$, где A — артиново, а B — конечное прямое произведение первичных колец. Отсюда, в свою очередь, вытекает теорема Четтерса [391, 394] о разложимости наследственного нётерова кольца в прямое произведение артинова и конечного числа первичных колец. Некоторые результаты Ю. А. Дрозда [31] вытекают также из работы [621]. Строению и классификации HNP-колец (=наследственных нётеровых первичных колец) посвящена работа [767]. Для изучения HNP-колец Робсон [1192] применил технику идеализаторов полумаксимальных левых идеалов. При этом он по единой схеме получил как ранее известные, так и новые результаты о строении этих колец. В частности, получено полное описание HNP-колец с ненулевым радикалом. При этом Робсон опирается на теорему из [655] о том, что дедекиндово справа кольцо (определение см. в [87], стр. 16) с $J(R) \neq 0$ есть кольцо матриц над ограниченной областью главных левых и правых идеалов. Кроме того, в [1192] строится пример HNP-области, с единственным собственным идеалом, являющимся к тому же идемпотентным, что опровергает гипотезы, выдвинутые в [M71:338] и [M71:340]. Аналогичный пример указал Ленаган [894], который в той же работе показал, что если R — нётерово наследственное кольцо, являющееся ограниченным слева, то любой двусторонний идеал кольца R содержит обратимый идеал. Техника идеализаторов и ее применения к строению HNP-колец получили дальнейшее развитие в [486, 1194]. В частности, в [1194] доказано, что если

$A_1, \ldots, A_n$ — полумаксимальные идеалы HNP-кольца R, то $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Id}(A_i)$ — HNP-кольцо тогда и только тогда, когда $\mathrm{Id}(A_i) \cap \mathrm{Id}(A_j)$ — HNP-кольцо для всех i, j, что дает ответ на вопрос Харады. В [486] передоказан результат Ятегаонкара [767] о том, что HNP-кольцо, любой ненулевой идеал которого содержит обратимый идеал, Морита-эквивалентно кольцу вида $\begin{pmatrix} D & \cdot & I_{ij} \\ \vdots & \ddots & \\ D & \ldots & D \end{pmatrix}$, где D — первичное дедекиндово кольцо, а I_{ij} — его полупервичные идеалы. Критерий дедекиндовости HNP-кольца указан в [848]. В работе [1231] показано, что любое надкольцо Г HNP-кольца R, лежащее в кольце частных Q кольца R, также является HNP-кольцом. Строение пополнений дедекиндовых справа колец по максимальному идеалу изучалось в [645] и [933] (см. п. 3.1). Марубайаши [933] распространил на модули над ограниченными дедекиндовыми кольцами многие результаты о строении абелевых групп. Некоторые из его результатов Сингх [1295, 1296] распространил на HNP-кольца. В частности, он получил теоремы о строении квазипроективных модулей над ними, аналогичные результатам [M71:400] для групп, и полностью выяснил строение не примитивных справа HNP-колец, кольцо частных Q которых является квазипроективным R-модулем. О дедекиндовых кольцах со свойством сокращения для проективных модулей см. [903]. Многие результаты о HNP-кольцах опираются, как показал Закс [1465], лишь на наличие двойственности ${}_R M \to \mathrm{Ext}_R^1(M, R)$ между конечно порожденными сингулярными левыми и правыми модулями. Указанная двойственность имеет место для любого нётерова первичного кольца R такого, что $\mathrm{l.inj.dim}_R R = \mathrm{r.\ inj.\ dim} R_R = 1$. В частности, установлено, что любой первичный идеал такого кольца R максимален и для любого обратимого идеала J кольцо R/J квазифробениусово. В работе [1462] Закс продолжал изучение строения LD-колец (т. е. конечномерных слева, ограниченных слева колец, все собственные факторкольца которых являются артиновыми кольцами главных левых идеалов). В частности, он установил, что первичное конечномерное слева кольцо R, не являющееся артиновым, наследственно и нётерово слева в каждом из следующих случаев: 1) R — LD-кольцо; 2) все собственные факторкольца кольца R квазифробениусовы. Позднее к аналогичным результатам пришли Хайарнавис [656] и Хирано [713]. Робсон и Смолл [1195] доказали, что центр Z наследственного справа первичного PI-кольца R является дедекиндовым, а само R — конечно порожденным Z-модулем. Более того, первичная наследственная справа PI-алгебра (над нётеровым кольцом) является HNP-кольцом. Наследственные нётеровы кольца рассматривались также в [330, 358, 349, 361, 371, 427, 429, 609, 669, 682, 959, 971, 977, 1145]. Коззенс [429] доказал, что простое нётерово слева кольцо R наследственно слева тогда и только тогда, когда l. gl. dim $R \leqslant 2$ и любой его однородный левый идеал рефлексивен. В другой работе [427] он построил пример простой области главных левых идеалов, не являющейся нётеровой справа. В [371] он совместно с Камилло доказал, что правое кольцо Голди R, являющееся кольцом главным левых идеалов, будет также кольцом главных правых идеалов, если для любого левого идеала J модуль R/J артинов. Пирс [1108] дал новое доказательство теоремы Бергмана [M71:191] о наследственности так называемого суббулева подкольца наследственного слева кольца. Элементарное доказательство другого его результата о (полу)наследственности кольца инвариантов конечной группы автоморфизмов коммутативного (полу)наследственного кольца опубликовал Йондруп [793]. Новые характеризации наследственных (слева) колец даны в [328, 1282]. В работах [268, 273, 406, 409, 407] рассматриваются кольца свободных левых идеалов (FI-кольца). Бергман [268] описывает бесконечные произведения идеалов в $\aleph_0$-наследственном (с обеих сторон) кольце и строит пример $\aleph_0$-FI-кольца, не являющегося правым FI-кольцом. Нётеровы слева кольца, для любого ненулевого левого идеала J которых существуют числа p и q такие, что $J^{(p)} \approx_R R^{(q)}$, рассматривались в [719]. Выявляя общие свойства полунаследственных и n-FI-колец, Бергман [267] приходит к понятиям слабо и сильно (полу-α-)наследственных колец (α — любая мощность). Среди многочисленных результатов о связи этих понятий с обычными и о строении колец указанных типов, полученных Бергманом, укажем один: колько R сильно наследственно тогда и только тогда, когда R — полупримарно и наследственно. Наследственные артиновы алгебры (т. е. артиново слева и справа кольцо, конечно порожденное как модуль над своим центром) являются важным инвариантом стабильной эквивалентности артиновых алгебр, которой посвящены работы [216, 220, 221] (артинова алгебра A стабильно эквивалентна некоторой наследственной алгебре тогда и только тогда, когда каждый неразложимый подмодуль неразложимого проективного A-модуля либо проективен, либо прост, а каждый непроективный минимальный идеал S вложим в модуль вида $E/J(A)E$, где E инъективен). Артиновы слева кольца, все факторкольца которых наследственны, описал Фуллер [559]. Достаточные (необходимые и достаточные) условия наследственности групповых колец бесконечной нильпотентной (соответственно локально конечной) группы содержатся в [625] (соответственно [624]). В [625] также получены некоторые факты о строении полунаследственных групповых колец. Наследственность полугрупповых колец полугрупп специального вида изучал Нико [1035]. Элегантное доказательство известных характеризаций наследственных порядков в сепарабельных алгебрах над дедекиндовым кольцом содержится в [51]. Этой же теме посвящен обзор Харады [671]. В [52] наследственные кольца возникают при характеризации целочисленных полупростых порядков конечного типа. Наследственные порядки со свойством сокращения (см. п. 1.4) описаны в [1395]. В ряде работ [631, 1384, 1386, 1389] изучались коммутативные кольца R с gl.dim$R=2$. Оказалось, что в таком кольце R любой конечно порожденный неминимальный простой идеал P порождается 3 элементами и R/P нётерово. Если к тому же R когерентно, то конечно порожден любой его идеал, содержащий два несравнимых простых идеала (см. [1264]). Гринберг [631], улучшив результаты Васконселоса, полностью охарактеризовал зонтичные кольца, т. е. ненётеровы локальные области R с gl.dim$R \leqslant 2$, не являющиеся кольцами нормирования. Он также рассматривал обобщения зонтичных колец. Полунаследственные кольца рассматривались в работах [31, 267, 487, 493, 494, 574, 611, 621, 759, 1139, 1251, 1373]. Одну из характеризаций Эндо [M62:16] полунаследственных коммутативных колец перенес на субкоммутативные слева кольца Трикуар [1373]. Критерий регулярности (по Нейману) полунаследственного кольца указал Жантиль [574]. Гулёрл [611] нашел необходимые и достаточные условия полунаследственности ручных подидеализаторов (определение см. стр. 85). PP-кольца рассматривались в [543, 420, 494, 493, 156, 204, 1137, 1282, 1466]. Обобщая результаты Чейза и Харады о треугольных кольцах матриц, Уелен (РЖМат, 1974, 5А446) доказывает, что кольцо A, являющееся конечно порожденной проективной R-алгеброй над дедекиндовым кольцом R, треугольно тогда и только тогда, когда A — PP-кольцо. В работе [1282] были введены полуконаследственные кольца. При этом оказалось, что этот класс совпадает с классом левых V-колец (см. п. 2.3). Кольца, в которых все левые идеалы плоские, под названием квазинаследственных колец рассматривались в [1466]. В [1346] понятие почти-наследственного кольца, введенного в коммутативном случае Васконселосом [1388], распространяется на некоммутативные кольца (кольцо R называется почти-наследственным, если оно приведено и любой его левый идеал, не лежащий ни в каком первичном идеале, проективен). Установлено [1346], что такое кольцо является левым PP-кольцом, а его центр $\aleph_0$-круллевым PP-кольцом. Коммутативное кольцо почти-наследственно тогда и только тогда, когда оно $\aleph_0$-наследственно. Это дополняет результаты Васконселоса [1382, 1388], получившего среди прочего, характеризацию коммутативных наследственных колец, как почти-наследственных колец, полное кольцо частных которых наследственно. Наследственные коммутативные кольца встретились также в [402] и [577]. Камилло [368] охарактеризовал коммутативные полунаследственные кольца свойством проективности всех идеалов с двумя образующими. Из результатов Камилло [369] и Маккарти [956] вытекает, что коммутативное кольцо R регулярно по Нейману тогда и только тогда, когда $R[x]$ полунаследственно. Сюда же примыкает результат Армендарица [204], показавшего, что приведенное кольцо R является бэровским (левым PP-кольцом) тогда и только тогда, когда этим свойством обладает $R[x]$ (ср. результат Йондрупа [87], стр. 19). Коммутативные полунаследственные кольца изучались также в [339, 874, 1238, 1276], а коммутативные PP-кольца — в [1308, 1386]. Так, Васконселос [1386] установил, что свойство кольца быть PP-кольцом равносильно плоскостности всех главных идеалов и компактности его минимального спектра.

2.3. V-кольца и близкие к ним классы колец. Напомним, что кольцо R называется (левым) V-кольцом, если все левые простые R-модули инъективны. Обзору результатов о V-кольцах и их связях с регулярными кольцами посвящен доклад Фишера [530]. Хансен [670] установил, что V-кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов разлагается в прямую сумму простых колец, что обобщает результат Фейта [M71:356]. В другой его работе [669] изучаются условия, при которых V-кольцом является частичное кольцо частных V-кольца. Михлер и Вильямайер [977] заметили, что центр V-кольца регулярен и показали, что над левым V-кольцом с $\mathrm{l.K.dim}R \leqslant 1$ все сингулярные модули инъективны. Некоторые результаты их работы переносятся в [1461] на кольца R, над которыми все простые модули S p-инъективны (т. е. $\mathrm{Ext}^1_R(R/Rx, S)=0$ для всех $x\neq 0$). Эти же кольца рассматривались в [1137]. Фаркаш и Снайдер [510] выяснили, когда групповое кольцо счетной группы над полем является V-кольцом. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы скрученное групповое кольцо бесконечной циклической группы над полем было V-кольцом, нашел Коззенс [428]. Регулярные V-кольца изучались также в работах [206, 1088, 1251]. Установлено [206], что регулярное кольцо R является V-кольцом тогда и только тогда, когда такой будет каждая локализация относительно мультипликативной системы $Z(R)\setminus M$, где M M. Spec $Z(R)$. О V-кольцах см. также [214, 347, 360, 361, 370, 559, 833, 1120, 1234, 1138, 1251, 1282, 1403, 1452]. В [1134] и [1452] охарактеризованы полуартиновы V-кольца. В частности, замечено, что такое кольцо регулярно. В [1120] ошибочно утверждается, что каждое полуартиново V-кольцо будет правым V-кольцом. Кольца, над которыми каждый простой модуль либо инъективен, либо проективен, изучались в [559, 669, 1138]. Фейт [498] рассмотрел PCI-кольца, т. е. кольца, все собственные циклические R-модули которых инъективны, и показал, что такое кольцо либо классически полупросто, либо является простой левой областью Орэ. Изучение PCI-колец продолжила Бойл [330], установившая, что нётеровы PCI-кольца суть наследственные QII-кольца (т. е. квази-

инъективные модули инъективны). Выясняя строение QII-колец, она доказала, что для наследственного нётерова справа кольца свойства быть «левым QII-кольцом» и «нётеровым слева левым V-кольцом» равносильны. О QII-кольцах см. также [360, 500]. Современное состояние вопроса о строении PCI-колец подробно изложено в [429]. В [1452] изучались кольца, над которыми все простые модули чисто инъективны. Кольца, над которыми все сингулярные R-модули инъективны, встретились в [403, 583, 609, 669, 670, 977]. (Напомним, что этот класс колец полностью описан Л. А. Койфманом [M71:54; 55] и Гудёрлом [602]). Первыми пример расщепляющего кольца R (т. е. кольца, над которым сингулярное кручение расщепляемо) с $\mathrm{gl.dim}R=2$ построили Фулберт и Тепли [558]. Проблема строения расщепляющих колец (по модулю первичных колец с этим свойством) решена в серии работ Гудёрла [606, 607, 609, 611] и Тепли [1364]. При этом расщепляющие HNP-кольца охарактеризованы Гудёрлом [609] как итерированные идеализаторы полупервичного расщепляющего кольца. Кольца, над которыми первичных колец, над которыми сингулярные модули инъективны. В [1364] установлена регулярность (по Нейману) центра сингулярное кручение конечно расщепляемо, описаны в [557].

2.4. QF-кольца и их обобщения. В работах [19, 21, 142, 305, 781, 1077, 1236] получены новые характеризации квазифробениусовых (-QF) колец. Например, квазифробениусовость кольца R эквивалентна каждому из следующих свойств: 1) модуль ${}_RR^{(N)}$ инвариантен относительно операторов проектирования своей инъективной оболочки [781]; 2) конечно порожденные левые и правые идеалы кольца эндоморфизмов любого проективного образующего (инъективного кообразующего) аннуляторные [21]; 3) R артиново слева и справа и любой конечно порожденный левый R-модуль вкладывается в свободный [1236]. В [666, 667] развивается техника, опирающаяся на результаты Фуллера [M71 : 105] (ср. [87], стр. 37) и позволяющая строить QF-кольцо из циклических QF-колец, используя контекст Мориты. Многие из этих результатов перенесены Мюллером [1005] на кольца, являющиеся двусторонними кообразующими. О фробениусовых и квазифробениусовых алгебрах (в том числе в связи с исследованиями алгебр с конечным числом представлений) см. [30, 51, 222, 629, 842, 843, 1007]. В. В. Кириченко [30] и Купиш [842] описали обобщенно однородные QF-алгебры над совершенным полем k как кольца, Морита-эквивалентные факторкольцам колец вида

$$H_n(\mathcal{O})=\begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathfrak{m} & \mathfrak{m} & \dots & \mathfrak{m} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathfrak{m} & \dots & \mathfrak{m} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \cdots & & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{O}=D[[x, \sigma]] \text{ — пополненная область}$$

многочленов Орэ и $\mathfrak{m}=J(\mathcal{O})$. К этой же теме примыкает и другая работа Купиша [843]. Обобщенные версии гипотезы Накаямы о квазифробениусовости конечномерной алгебры A с dom.dim $A=\infty$ рассматривались в [222] и [1347]. В [1464] QF-кольца возникают в связи с изучением расщепляемости артиновых колец (см. [87], стр. 8). Изучение алгебр Пуанкаре (см. [997]) показывает, что при некоторых условиях они квазифробениусовы. Сохранение свойств кольца при переходе к фробениусовым и квазифробениусовым расширениям изучалось в [823, 824]. Кольца, над которыми все чисто инъективные модули чисто проективны (и наоборот), описаны в [817, 818]. Современное состояние структурной теории QF-1, QF-3 колец и их обобщений отражено в книге Тачикавы [1347]. Начнем с работ Длаба и Рингеля [454, 455, 456, 460, 462], в которых полностью выяснено строение сбалансированных колец. Напомним основные определения. Пусть R — кольцо, ${}_RM$ — модуль, $B=\mathrm{End}({}_RM)$, $C=\mathrm{End}(M_B)$, $c_M: R\to C$ — канонический гомоморфизм. Говорят, что ${}_RM$ сбалансирован, если c_M — наложение. Кольцо R называется сбалансированным (соответственно QF-1) кольцом, если сбалансирован любой (соответственно точный) левый R-модуль. Оказалось [455], что сбалансированные слева кольца — это в точности прямые суммы однорядного кольца и колец матриц над локальными кольцами R_i такими, что $J(R_i)^2=0$ и либо 1) $\dim_{\Delta_i} J(R_i)=2$, $\dim J(R_i)_{\Delta_i}=1$, где $\Delta_i=R_i/J(R_i)$, и $J(R_i)=R_iv+u\,\mathrm{Id}(R_iv)$ для любых независимых слева $u, v\in J(R_i)$; либо 2) R_i антиизоморфно кольцу первого типа. Отсюда, в частности, следует частичное подтверждение гипотезы Джанса: сбалансированное кольцо, конечно порожденное над своим центром, однорядно. Методы, развитые в указанной выше серии работ, применялись для изучения QF-1 колец (см. [372, 1182, 1184]). Для артинова кольца R с $J(R)^2=0$ Рингель [1182] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы оно было QF-1 кольцом. Им также получен положительный ответ на вопрос Флойда (QF-1-алгебра обладает не более одним конечно порожденным точным модулем и в этом случае она квазифробениусова) и доказано, что локальная артинова QF-1 алгебра квазифробениусова. Последний результат был ранее установлен Камилло и Фуллером [372]. Квазифробениусовым оказывается и коммутативное нётерово QF-1 кольцо [1184]. В работе [1183] доказано, что артиново QF-1 кольцо R с gl. $\dim R\leqslant 2$ является QF-3-кольцом. Более того, в этом случае [1185] $R=\mathrm{End}(M_A)$, где A — артиново кольцо, над которым каждый неразложимый правый модуль проективен или инъективен. Нетрудно видеть, что A — это в точности почти полупростое справа кольцо (см. [87], стр. 7), строение которых полностью выяснено в [M71:52]. Условие сбалансированности модуля ${}_RM$, как показали Морита и Судзуки

(см. например, [1347]), распадается на два условия: 1) $\mathrm{Hom}_R(C/c_M(R), M)=0$; 2) M-dom. $\dim({}_{\bar R}\bar R)\geqslant 2$, где $\bar R=R/\mathrm{ann}M$, — первое из которых называется F_h-условием. Если в определении QF-1 (соответственно сбалансированного) кольца условие сбалансированности заменить на более слабое F_h-условие, то получим кольца, удовлетворяющие F_h-условию (соответственно левые F_h-кольца). Оказалось, [753, 1347, 1350], что многие результаты, доказанные для QF-1 (и сбалансированых) колец верны также и для этих классов колец. В то же время изучение F_h-колец показывает, что ситуация здесь отлична от случая сбалансированных колец, например: 1) F_h-кольцо не обязательно F_h-кольцо справа; 2) любое артиново (слева) левое и правое F_h-кольцо Морита-эквивалентно прямой сумме колец трех типов: а) локальных; б) однорядных; в) рядных с $J(R)^2=0$ (см. [1350]). В случае конечномерных алгебр над алгебраически замкнутым полем удается полностью описать строение левых F_h-колец, [1350]. Иное обобщение сбалансированных колец рассматривалось в [689]: требуется, чтобы $c_M(R)$ было плотным подкольцом кольца C для всех $M\in R$-mod. Кольцо R называется (левым) QF-3 (соответственно QF-3$^+$, QF-3$'$) кольцом, если существует наименьший точный модуль (соответственно, если $\hat R$- проективный R-модуль или модуль без кручения (в смысле Басса)). Строению QF-3-колец (т. е. левых и правых QF-3-колец) посвящена работа Рингеля и Тачикавы [1185]. Вопрос о строении QF-3 колец они сводят к соответствующему вопросу для QF-3 колец, являющихся максимальными кольцами частных, и показывают, что последние — это в точности кольца эндоморфизмов линейно компактных образующих и кообразующих модулей ${}_AM$. При этом по каждому QF-3 максимальному кольцу частных кольцо A и модуль M определены однозначно с точностью до эквивалентности Мориты. Изучение условий обрыва для левых QF-3 колец показывает [1347], что если R нётерово слева и справа, то R артиново слева и справа. В той же работе рассматриваются QF-13 кольца (т. е. являющиеся одновременно QF-1 и QF-3 кольцами). Доказано, например, что такое кольцо полусовершенно. Похожее описание левых QF-3 колец получил Като [808, 809]. При этом под левым QF-3 кольцом понимается кольцо R, содержащее такие идемпотенты e и f, что Re — точный инъективный левый идеал, а fR — доминантный правый идеал (см. [87], стр. 27) (каждое QF-3 кольцо является левым QF-3 кольцом в этом смысле [1347]). Неожиданная связь между кольцами конечного типа (т. е. артиновыми слева кольцами, обладающими конечным числом неизоморфных конечно порожденных неразложимых модулей) и полупримарными QF-3 максимальными кольцами частных R с l. gl. $\dim R\leqslant 2$, обнаруженная первоначально Ауслендером для артиновых алгебр, устанавливается в общем случае в [1347, 1348]. Иванага [754] полностью описал класс ограниченных нетёровых колец, все факторкольца которых являются QF-3 кольцами. Обобщения артиновых QF-3 колец рассматривались в [380] и [1401], а QF-3, QF-3+, QF-3′ кольца изучались также в [203, 286, 475, 661, 702, 1077, 1218, 1219, 1236]. Армендариц [203] описал полупервичные QF-3′ кольца с нулевым сингулярным идеалом. Его результаты обобщены в [661]. Для изучения полусовершенных QF-3 колец Хилл [702] привлекает понятие codom. dim, введенное в [M71:587]. Многие из его результатов получил Эеркес [475], как следствие такого утверждения: если R совершенно слева, то dom.$\dim_R P \geqslant n$ для любого проективного $_RP$ тогда и только тогда, когда codom. $\dim_R Q \geqslant n$ для любого инъективного модуля $_RQ$. Кроме того, в [474] доминантные и кодоминантные размерности однорядных колец выражены как функции рядов Купиша. Доминантные размерности артиновых алгебр изучаются в [542, 543]. В [750] описаны полусовершенные QF-3 кольца с нулевым сингулярным идеалом. Для совершенного слева кольца R проективность модуля $_R\hat{R}$ эквивалентна вложимости его конечно порожденных подмодулей в свободный модуль [1236]. Характеризация самоинъективных слева колец содержатся в [297], [1139]. В [805] доказано, что в самоинъективном слева кольце R любой проективный максимальный **левый идеал M имеет вид** $M=Re+J(R)$, где $e^2=e \in R$. Строение локальных самоинъективных колец выясняется в [450]. Регулярные самоинъективные слева кольца изучались в [209, 358, 603, 604, 624, 793, 987, 1165, 1167, 1469]. Изучая строение модулей над самоинъективными кольцами, Зелманович [1469] установил, что R регулярно и самоинъективно слева тогда и только тогда, когда для любого конечномерного (в смысле Голди) модуля M имеет место разложение $M \approx Z(M) \oplus N$, где N — прямая сумма инъективных левых идеалов кольца. Проблеме, будет ли самоинъективным справа регулярное самоинъективное слева кольцо, в котором обратимы все элементы, обратимые слева, посвящены работы [624, 1165, 1167]. В [209] доказано, что центр регулярного самоинъективного кольца регулярен и самоинъективен. Этот же класс колец исследовал Гудёрл [603, 604, 608]. В частности, в [608] указано на ошибочность результата Эллигера [483] об артиновости простого самоинъективного слева и справа кольца. Кроме того, в [604] предложен критерий разложимости самоинъективного слева регулярного кольца в прямое произведение первичных колец. Йондруп [793] показал, что кольцо инвариантов конечной группы автоморфизмов коммутативного кольца самоинъективно и регулярно, если таким является само кольцо. Самоинъективные кольца рассматривались также в [832, 1149, 1150, 1298, 1378]. Свойства самоинъективных N-регулярных колец и S-колец изучались в [1044, 1045]. Общий метод построения колец, инъективную оболочку которых можно превратить в кольцо, указан в [461]. Самоинъективные булевы кольца изучает Карсон [379]. Несколько новых характеризаций инъективных кообразующих колец получил Онодера [1077]. Эти же кольца рассматривались в [701], [904]. Частный случай теоремы Т. С. Тольской [M71:105] (см. [87], стр. 46) доказан в [1445]. В [509] Фаркаш доказывает, что групповая алгебра FG над полем F p-инъективна (см. стр. 90) тогда и только тогда, когда G локально конечна. Он же [508] привел простое доказательство критерия из [M71:922] самоинъективности группового кольца. Частный случай этой теоремы доказан в [938]. Мюллер [1006] выяснил, когда самоинъективен центр групповой алгебры конечной группы G над полем. Вюрфель [1451], Джейн [759] и Колби [413] исследовали само-FP-инъективные кольца (см. стр. 79), а также правые IF-кольца (=кольца, над которыми все правые инъективные модули плоские). Этот класс объединяет регулярные и QF-кольца. Установлено, что R—FP-инъективно слева (привое IF-кольцо) тогда и только тогда, когда любой конечно представимый модуль не имеет кручения в смысле Басса ([750]) (является подмодулем свободного R-модуля ([413]). Далее, R — левое и правое IF-кольцо тогда и только тогда, когда оно двусторонне когерентно и FP-самоинъективно [413].

2.5. Кольца и порядки с конечным числом представлений. После положительного решения А. В. Ройтером гипотезы Брауэра — Тролла (см. [87], стр. 32) предпринимались попытки, с одной стороны, подтвердить или опровергнуть вторую гипотезу Брауэра — Тролла, а с другой, развить методы для ответов на обе гипотезы для более общих структур и, в частности, для артиновых слева колец. Л. А. Назарова и А. В. Ройтер [1481] подтвердили вторую гипотезу Брауэра — Тролла в случае алгебраически замкнутого поля K. Опираясь на результаты, изложенные в [114], С. А. Кругляк [89] указал критерий для того, чтобы конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем с $J(A)^2=0$ имела конечный тип. Аналогичный результат получил Габриэль (РЖМат, 1972, 5А324, 9А270; 1974, 7А455). Длаб и Рингель [458, 459, 463] обобщили результаты из [114], что позволило им описать алгебры конечного типа над произвольным полем в классах наследственных алгебр и алгебр A с $J(A)^2=0$ и показать справедливость для них первой гипотезы Брауэра — Тролла. Под сложностью K-алгебры A Ю. А. Дрозд [48] понимает наличие функтора $F: C_0 \to C(A)$ из категории K-конечномерных модулей над свободной алгеброй $K\langle x, y\rangle$ в такую же подкатегорию $C(A)$ A-модулей, переводящего неизоморфные объекты в неизоморфные, и описывает все несложные алгебры. Переходя к кольцам конечного типа (определение см. на стр. 93), отметим уже упоминавшееся (см. п. 2.4) соответствие между кольцами конечного типа и QF-3 кольцами [1347, 1348], обнаруженное первоначально Ауслендером для артиновых алгебр. Это соответствие позволило доказать, что над кольцом конечного типа каждый модуль разлагается в прямую сумму неразложимых, а каждый неразложимый модуль конечно порожден. С другой стороны, как показал недавно Ауслендер, над артиновой алгеброй не конечного типа, существует бесконечномерный неразложимый модуль [463]. Более того, из результатов [1347] и [1348] и из работы [562] вытекает характеризация колец конечного типа как колец, над которыми любой (левый и правый) модуль обладает разложением, дополняющим прямые слагаемые. В работах [218, 219] установлено, что артиново слева кольцо R имеет конечный тип, если любой неразложимый модуль ${}_RM$ неприводим или имеет талию (т. е. подмодуль, отличный от 0 и M и сравнимый со всеми подмодулями). В частности, если $J(R)^2=0$, то последнее равносильно условию: любой неразложимый левый R-модуль или однoряден, или проективен, или инъективен. Пусть $\Lambda_n(R)$ — кольцо $(n\times n)$-матриц над кольцом R, у которых всюду, кроме диагонали и нижней строки, стоят нули и $\Lambda_n^1(R)=\Lambda_n(R)$, $\Lambda_n^{(m+1)}(R)=\Lambda_n(\Lambda_n^{(m)}(R))$. Бреннер [333], [334] подтвердила следующие две гипотезы Ауслендера: 1) существует артинова алгебра R конечного типа с $J(R)^2=0$ такая, что $\Lambda_2(R)$ не является алеебрoй конечного типа; 2) существует число m, для которого $\Lambda_2^{(m)}$г(R) не является алгеброй конечного типа ни для какой артинов ой алгебры R. Грин [628], исследуя вопрос о нахождении необходимых условий и достаточных условий для того, чтобы артиново кольцо имело конечный тип, обобщил результаты работ [463, 459,] [458] на факторкольца артиновых колец. Мюллер [1007] для описания неразложимых модулей над артиновым кольцом R со свойствами $J(R)^2=0$, ${}_R\mathrm{Hom}_R(J(R)_R,\ R/J(R)_R)_R\approx{}_R\mathrm{Hom}_R({}_RJ(R),\ {}_RR/J(R))_R$ строит его расширения $\alpha: R\to S$, где S — слабо симметричное QF-кольцо (т. е. $S(Re)\cong Re/J(R)e$ для любого примитивного идемпотента e) с цоколем, равным $J(S)^2$, которое индуцирует биекцию из множества неразложимых непростых R-модулей на такое же множество S-модулей. Описаны также неразложимые модули над SQF-кольцами и SQF-кольца конечного типа (S — слабо симметричное). Алгебры и кольца конечного типа изучались также в [30, 456, 542, 543, 629]. В [629], в частности, дан ответ на вопрос Диксона [M71:312] и построен контрпример к гипотезе: если над K-алгеброй все неразложимые модули изоморфны левым идеалам, то цоколь любого неразложимого модуля свободен от квадратов. Густавсон [643] и И. С. Понизовский [121] приводят критерии для того, чтобы некоторые полугрупповые и групповые алгебры имели конечный тип. Переходя к обзору результатов по порядкам конечного типа (т. е. имеющим конечное число родов неразложимых решеток), прежде всего упомянем работу [223]. В ней аналогично алгебрам конечного типа устанавливается соответствие между R-поряд-

ками Λ с конечным числом неразложимых представлений и R-порядков Γ с $\mathrm{l.gl.dim}\,\Gamma\leqslant 2$ и $\mathrm{r.gl.dim}\,\Gamma\leqslant 2$ в случае, если R — дедекиндово кольцо. Когда $\mathbf{Z}$-порядки Λ в полупростой алгебре, такие, что Λ_p примарен для любого простого идеала P из его центра, имеют конечный тип, полностью выяснено в [52]. Частный случай этого результата анонсирован в [1204]. Сюда же примыкает результат из [1201]. Порядки с одним неразложимым представлением и порядки конечного типа над полным локальным дедекиндовым кольцом описаны соответственно в [49] и [53]. Роггенкамп [1200] отметил, что конечный тип имеет любой R-порядок в расщепляющейся алгебре, где R — дедекиндово кольцо с конечной группой классов. Из других результатов о представлениях порядков отметим следующие. П. М. Гудивок [39] описал все имеющие конечный тип скрещенные произведения конечной группы с кольцом целых p-адических чисел $\hat{\mathbf{Z}}_p$. А. В. Яковлев [171] получил описание всех неразложимых представлений группового кольца $\hat{\mathbf{Z}}_2G$ циклической группы порядка 8, сведя эту задачу к задаче описания неразложимых объектов некоторой категории. Порядки, все представления которых вполне разложимы, рассматривал А. Г. Завадский [64]. Обзору результатов по этой теме посвящена работа [757]. Обзорный доклад о бассовых порядках и, в частности, об их связи с порядками конечного типа опубликовал Роггенкамп [1202]. Этой же теме посвящены работы Ю. А. Дрозда и В. В. Кириченко [47, 51]. В [51] доказано, что бассов порядок Λ над полным кольцом дискретного нормирования Морита-эквивалентен прямой сумме наследственных порядков и порядков, в которых каждый идеал порождается 2 элементами. Далее в [51] определяются квазибассовы порядки, бассовы и квазибассовы алгебры и исследуются их свойства.

2.6. Рядные, однорядные кольца и кольца с прямыми разложениями конечно порожденных модулей. Еще одно доказательство того, что над обобщенно однорядными кольцами все левые модули полуцепные, опубликовал Купиш [841]. Фуллер [560] доказал, что над обобщенно однорядным кольцом каждый модуль обладает разложением, относительно которого дополняемы все прямые слагаемые. Представление обобщенно однорядных слева колец в виде обобщенных колец матриц над однорядными слева кольцами получено в [749]. Обобщенно однорядные QF-алгебры изучались в [30, 842, 843] (см. п. 2.4). Новые характеризации однорядных колец представлены в [18, 329, 1188, 1305]. Коммутативные однорядные кольца, встретившиеся также в [492] и [1427], описаны в [684] (соответственно [1418]) как кольца, над которыми каждый модуль разлагается в прямую сумму однородных (соответственно неразложимых) модулей. Кроме того, если всякий R-модуль есть прямое слагаемое прямой суммы модулей с числом образующих $\leqslant m$ (m — мощность), то R однорядно [1418], что дает ответ на вопрос из [M71:454]. Кольцо

R называется рядным (слева), если каждый (левый) конечно представимый R-модуль разлагается в прямую сумму цепных. Строение нётеровых рядных колец выясняется в [50, 81, 82, 1421]. Наиболее общие результаты получил В. В. Кириченко [81, 82], установивший, что рядность нётерова слева кольца R эквивалентна каждому из следующих условий: 1) всякий конечно порожденный левый R-модуль полуцепной; 2) R изоморфно прямой сумме артинова рядного кольца, конечного числа полусовершенных HNP-колец и колец, Мори-та-эквивалентных факторкольцам колец вида $H(\mathcal{O}, m,n) = \begin{pmatrix} H_m(\mathcal{O}) & 0 \\ M_{m,n}(D) & T_n(D) \end{pmatrix}$, где $\mathcal{O}$ — кольцо дискретного нормирования, $H_m(\mathcal{O})$ определено на стр. 91, $T_n(D)$ — кольцо нижних треугольных матриц над телом D (D — тело частных кольца $\mathcal{O}$), а $M_{m,n}(D)$ — множество всех $(m\times n)$-матриц над D. Тем не менее над нётеровым слева рядным кольцом конечно порожденные правые модули необязательно полуцепные. Строение нётеровых слева колец с этим свойством полностью выяснено в [82], откуда вытекает и строение нётеровых (слева и справа) рядных колец, полученное также в [1421]. Там же [1421] изучались полунаследственные рядные кольца и конечно порожденные алгебры над нётеровым кольцом, над которыми любой конечно порожденный модуль есть прямая сумма проективного и артиновых цепных модулей. Рядное кольцо, являющееся прямой суммой примарных колец, В.В. Кириченко [81] называет однорядным и доказывает теоремы об их строении и свойствах. Перейдем теперь к работам, касающимся проблемы Капланского о строении коммутативных колец, над которыми всякий конечно порожденный (или конечно представимый) модуль — прямая сумма циклических. Они называются FGC (FPC)-кольцами соответственно. Обзору результатов по этим кольцам (см. [87], стр. 28—29) посвящены работы [851], [852], [1275]. В [851] и [852] результаты, известные для локальных колец, переносятся на глобальный случай. Всякий собственный гомоморфный образ FGC-кольца без делителей нуля линейно компактен [331]. В [1275] исследуются условия для того, чтобы прюферово кольцо обладало этим свойством и решаются задачи Матлиса [M62:49]. Кольцо R называется кольцом с теорией элементарных делителей (т. э. д.), если каждая $(m\times n)$-матрица над R эквивалентна диагональной матрице (d_{ij}), в которой $d_{i+1,i+1}$ делится на $d_{i,i}$. Кольцо, над которым всякая (1×2)-матрица эквивалентна диагональной, называется эрмитовым. Оказалось, что эрмитовы кольца — это в точности такие кольца, над которыми всякий конечно представимый модуль с одним соотношением является прямой суммой циклических [851, 852], а кольца с т. э. д. суть FPC-кольца [874]. В связи с этими результатами в ряде работ [851, 852, 874, 1276, 1281, 1432] выясняется, когда те или иные кольца являются эрмитовыми или кольцами с т. э. д. Например, [1276] полунаследственное кольцо Безу R с $K.\dim R\leqslant 1$ — кольцо с т. э. д. С другой стороны, эрмитовым будет всякое кольцо Безу, являющееся полунаследственным или с конечным числом минимальных простых идеалов. Все названные классы колец и их свойства изучались также в [1439], где, в частности, доказано, что эрмитово кольцо является кольцом с т. э. д. тогда и только тогда, когда каждый конечно порожденный модуль n-порождаем, если n-порождаемы все его локализации. Шорес и Виганд [1275, 1280] называют R CF-кольцом, если всякий модуль M, разлагающийся в прямую сумму циклических, представим в виде $M=R/I_1\oplus\ldots\oplus R/I_n$, где $I_1\subseteq I_2\subseteq\ldots\subseteq I_n\neq R$. Доказано, что CF-кольцо разлагается в конечное прямое произведение арифметических колец трех типов, и выяснено строение колец, над которыми любой конечно порожденный модуль представим в таком виде. Далее, авторы выдвигают гипотезу: любое FGC-кольцо является прямой суммой FGC-колец, каждое из которых имеет минимальный простой идеал и проверяют ее справедливость для колец с числом простых идеалов $<2^c$. Некоммутативные кольца Безу и эрмитовы кольца изучались в [72]. В [944, 947] Матлис продолжал исследовать строение D-колец (=коммутативных областей, над которыми всякий модуль без кручения конечного ранга разлагается в прямую сумму модулей ранга 1). Доказано, что целозамкнутое кольцо R — D-кольцо тогда и только тогда, когда R — пересечение не более двух максимальных колец нормирования. Целое замыкание D-области является прюферовым. Обратно, если целое замыкание F локальной области $(R, \mathfrak{m})$ является максимальным кольцом нормирования, R-модуль F 2-порожден и $\mathfrak{m}\cdot F=F$, то R — D-кольцо. Вамош [1379] называет коммутативное кольцо SISI-кольцом, если все его подпрямо неразложимые факторкольца самоинъективны и классическим кольцом — если $\widehat{R/\mathfrak{m}}$ линейно компактны для всех $\mathfrak{m}\in \mathrm{M.Spec}\,R$ (этот класс включает в себя как нётеровы, так и регулярные кольца). Оказалось, что классическое кольцо R — SISI-кольцо и для категории конечно вложимых R-модулей имеет место примарное разложение. Классические прюферовы кольца суть кольца, над которыми $\widehat{R/\mathfrak{m}}$ — цепные модули для всех $\mathfrak{m}\in \mathrm{M.Spec}\,R$. Кольца, над которыми каждый модуль является прямой суммой неразложимых, встретились в [684, 1418, 1473]. В [195, 560, 562, 1456] различные кольца характеризуются свойствами некоторых классов модулей обладать прямыми разложениями, относительно которых дополняемы прямые слагаемые (см. стр. 64—65, 97). Кольца, для которых модуль $_RR$ заменяем, изучались в [992, 1032, 1420]. При этом выяснено, что достаточные для этого условия, приведенные в [1420], не являются необходимыми ([992]). Критерий заменяемости ${}_RR$ нашел Николсон [1032]: это равносильно поднимаемости идемпотентов по модулю любого левого идеала. В [1453, 1456] изучались свойства прямых сумм неразложимых инъективных модулей.

2.7. pf-кольца, когерентные кольца и их обобщения. pf-(соответственно, n-pf, pc-)-кольцами называются кольца, над которыми конечно порожденные (соответственно n-порожденные, циклические) плоские модули проективны. Эти кольца рассматривались в [149, 187, 339, 699, 791, 795, 882, 1064, 1135, 1382, 1388]. В [339] установлено, что коммутативное кольцо R такое, что $J(R)$ содержит пересечение конечного числа простых идеалов, является pf-кольцом. Полное доказательство анонсированных в [M71 : 108) результатов (см. [87], стр. 22) появилось в [149]. Васконселос [1382, 1388] охарактеризовал коммутативные pc-кольца свойством разложимости всякого проективного идеала в прямую сумму конечно порожденных. В частности, отсюда следует, что кольцо непрерывных функций на отрезке не является pc-кольцом. Йондруп [791], изучая n-pf-кольца, показал что если w. gl. $\dim R\leqslant 1$, то левое n-pf-кольцо R является n-pf-кольцом справа. В общем случае это не так уже для pc-колец (ср. [87], стр 23). В [1064] модуль M над коммутативным кольцом R называется модулем с содержанием, если $x\in c(x)M$ для всех $x\in M$, где $c(x)=\bigcap\{I\mid I$ — идеал в R, для которого $x\in IM\}$. Оказывается, если R — прямое произведение полей, то конечно порожденные плоские R-модули с содержанием проективны. Верхняя граница проективных размерностей плоских модулей оценивалась в [639], [640], [1293]. Ряд авторов выяснял, когда когерентны или равномерно когерентны кольца многочленов и степенных рядов. Установлено, что если R — полу-FI-кольцо с левым условием ACC_n, то $R[[x]]$ когерентно слева [794]. То же самое верно для кольца многочленов от любого множества переменных над приведенной алгебраической алгеброй над $\mathbf{R}$ [378]. Касаясь коммутативного случая, отметим результат из [1238]: кольцо $R[X]$ многочленов от любого множества переменных когерентно, если R регулярно по Нейману или прюферово (ср. [87], стр. 24). Более того, если R — кольцо нормирования ранга $\neq 1$, то кольцо $R[[x]]$ не всегда когерентно [794]. Другие подобные результаты содержатся в [378, 1127, 1389]. Когерентные кольца и их обобщения рассматривались также в [277, 278, 305, 376, 413, 507, 703, 759, 897, 991, 1140, 1264, 1450]. Кольца, все факторкольца которых когерентны, охарактеризованы в [703]. В [507] с использованием ультрапроизведений доказано, что n-когерентность кольца равносильна n-инъективности индуктивных пределов n-инъективных модулей. Когда кольцо конечно столбцовых матриц ко-

герентно, выяснил Ленцинг [897]. Коммутативные когерентные кольца R с gl. $\dim R<\infty$ изучались в [277, 278] и [1264]. Так, когерентная область с $\mathrm{FPD}(R)\leqslant 1$ нётерова [1264].

2.8. Совершенные, полусовершенные, полуартиновы, артиновы и полупростые кольца. Из новых условий, эквивалентных левой совершенности кольца R и содержавшихся в [195, 703, 1097, 1120, 1145, 1272], приведем три: 1) прямой предел квазипроективных левых модулей квазипроективен [1145]; 2) левые квазиплоские модули квазипроективны (см. стр. 76) [703]; 3) каждый левый проективный модуль обладает разложением, относительно которого дополняемы все прямые слагаемые [195]. В [1147] описаны совершенные слева кольца, длина Лоева любого конечно порожденного идеала которых конечна. Бланд [312] обобщил теорему Куртера ([87], стр. 5). Совершенные кольца рассматривались также в [305, 559, 475, 583, 642, 673, 980, 1046, 1134]. Как показано в [583], совершенные слева кольца, над которыми подмодули квазипроективных модулей квазипроективны, — это в точности наследственные полупримарные кольца R с $J(R)^2=0$, что обобщает результат Фуллера [559]. Доминантные и кодоминантные размерности совершенных колец исследуются в [475]. Еще одно доказательство критерия совершенности групповых колец предложено в [623]. В [623, 373, 1442] продолжалось выяснение как необходимых, так и достаточных условий полусовершенности группового кольца. Обзор по этой теме опубликовал Рено [1164]. Полусовершенные кольца рассматривались в [30, 81, 195, 701, 1030, 1031, 1046, 1234, 1421]. Критерий полусовершенности указан в [195]: каждый левый модуль обладает разложением, относительно которого дополняемы максимальные прямые слагаемые. Полуартиновы (в том числе и регулярные полуартиновы) кольца и их свойства изучались в [373, 689, 1046, 1111, 1117, 1134, 1152, 1156, 1240, 1241, 1270, 1272, 1273]. Камилло и Фуллер [373] на примерах показали, что для примитивных колец свойства левой и правой полуартиновости независимы. Кольца, над которыми все сингулярные модули лоевы, встретились в [328]. Характеризация артиновых колец посвящены работы [195, 580, 1152, 1156, 1240]. Установлено, что если левый цоколь нётерова (слева и справа) кольца R существенен слева или справа, то R артиново [580]. Прямые суммы примарных артиновых слева колец охарактеризованы Макино [925] как нётеровы слева кольца, над которыми сердцевина и цоколь любого модуля совпадают. Левая артиновость кольца равносильна существованию у левых инъективных и проективных модулей прямых разложений, относительно которых дополняемы прямые слагаемые [195]. Свойство модулей, равносильное артиновости коммутативного кольца, указал Уэбс [1427]. Критерий нётеровости артинова кольца без единицы приведен в [1267]. Кольцо R Миллер и Тернидж [981] называют конётеровым (коартиновым) слева, если ${}_RS$ нётеров (артинов) модуль для любого простого ${}_RS$ (ср. [87], стр. 35), и доказывают равносильность следующих условий в случае, когда $R/J(R)$ артиново: 1) R коартиново слева; 2) R конётерово слева и $J(R)$ — T-нильпотентен. Коартиновы кольца (под названием конётеровых) изучались также в [505]]. Новые характеризации классически полупростых колец даны в [156, 203, 583, 1145, 1139].

2.9. Разное. Новые условия, эквивалентные левой нётеровости кольца R, содержатся в [195, 328, 973, 1139]. Например, кольцо нётерово слева тогда и только тогда, когда всякий инъективный левый модуль имеет разложение, относительно которого дополняемы прямые слагаемые [195]. В [1243] доказано, что всякий идеал коммутативного одномерного нётерова кольца, целое замыкание которого конечно порожденно и стабильно, 2-порожден, что дает ответ на вопрос Басса. (R называется стабильным, если каждый идеал I проективен над $\mathrm{End}_R(I)$). В [1244] результаты Матлиса [M71:729] распространяются на кольца с делителями нуля. Бек [261] ввел n-нётеровы кольца и изучал их свойства (R—n-нётерово, если в минимальной инъективной резольвенте модуля ${}_RR$ первые n-членов Σ-инъективны). Новые характеризации регулярных колец приводятся в [52, 519, 583, 703]. Например, регулярность кольца эквивалентна квазиплоскостности всех левых модулей [703]. Строение модулей над регулярными кольцами исследовал Оширо [1081]. Регулярные кольца рассматривались также в [525, 661, 1044, 1137, 1460, 1435]. В [1137] доказана регулярность центра кольца, над которым все простые левые модули плоские. Ряд авторов занимался классификацией колец по свойствам квазиинъективных, квазипроективных и квазиплоских модулей [145, 373, 559, 583, 673, 674, 703, 1368, 1369] (см. также п. п. 1.4, 1.5, 2.8). Хилл [703] и Тиссерон [1368, 1369] изучали кольца, над которыми прямые степени любого квазиинъективного модуля квазиинъективны. Кольца, над которыми квазиплоскостность наследуется прямыми степенями, охарактеризованы в [703] как кольца, все факторкольца которых когерентны справа. Асан [178] и Келер [831] выяснили строение колец, над которыми все циклические левые модули квазиинъективны. Строение q-колец ([87], стр. 37) исследовалось в [701] и [748]. Полный ответ опубликован в [748]. Сюда же примыкают работы [986, 987]. Критерии левой конечномерности кольца R с $Z({}_RR)=0$ установили Армендариц [201] и Читам [395] — это равносильно любому из условий: 1) $Z(\varinjlim M_i)=0$, если $Z(M_i)=0$ для всех $i\in I$, $M_i\in R$-mod; 2) если $Z({}_RE_i)=0$ и E_i инъективны, то инъективен и модуль $\varinjlim E_i$. Характеризации полупервичных колец Голди даны в [250] и [256]. Кольца R с $Z({}_RR)=0$, над которыми всякий конечно порожденный

модуль M с $Z(M)=0$ вкладывается в свободный, описаны в [601]. Для некоторых классов коммутативных колец (например нётеровых) наличие двойственности Мориты равносильно обращаемости прямых пределов функтором $\mathrm{Ext}^1_R(-, R)$. В [697, 850, 1372], по аналогии с абелевыми группами, были введены и изучались узкие кольца.

§ 3. ЛОКАЛИЗАЦИИ, РАДИКАЛЫ И ЧИСТОТА

3.1. Радикалы и локализации. Подфунктор σ тождественного функтора на абелевой категории $\mathfrak{A}$ называется предрадикалом. Положим $\mathfrak{P}(\sigma)=\{M\mid M\in\mathfrak{A},\ \sigma(M)=0\}$, $\mathfrak{R}(\sigma)=\{M|M\in\mathfrak{A},\ \sigma(M)=M\}$. Предрадикал σ на R-Mod называется: (ко)наследственным, если $\sigma(N)=\sigma(M)\cap N$ $(\sigma(M/N)=(\sigma(M)+N)/N)$, где $N\subseteq M$; стабильным (костабильным), если $\sigma(M)$ — прямое слагаемое в любом инъективном (проективном) модуле M; идемпотентным, если $\sigma(\sigma(M))=\sigma(M)$; радикалом, если $\sigma(M/\sigma(M))=0$ при всех $M\in R$-Mod. Точный слева предрадикал называется ядерным функтором [M71:436], наследственный радикал — кручением. Условия, равносильные стабильности и костабильности наследственного предрадикала, получены в [294], идемпотентности предрадикала и того, что он является радикалом, — в [291]; условия костабильности и наследственности радикала указал А. И. Кашу [74]. В [296] установлены связи между теорией радикалов и теорией гомологической размерности модулей: именно, для двух классов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ модулей над R положим: $\dim(\mathcal{A}, \mathcal{B})=\inf\{n\mid(A\in\mathcal{A}\wedge B\in\mathcal{B})\Rightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_R(A, B)=\mathrm{Ext}^{n+2}_R(A, B)=\ldots=0\}$. Доказывается, например, что если σ — радикал и $\sigma(R)=0$ $(\sigma(\hat{R})=\hat{R})$, то $\mathrm{l.gl.dim}\, R\leqslant\dim(\mathfrak{P}(\sigma), \mathfrak{P}(\sigma))+1$ $(\mathrm{l.gl.dim}\, R\leqslant\dim(\mathfrak{R}(\sigma), \mathfrak{R}(\sigma))+1)$, а равенство $\dim(\mathfrak{P}(\sigma), \mathfrak{R}(\sigma))=0$ равносильно расщепляемости σ, т. е. тому, что $\sigma(M)$ — прямое слагаемое в любом модуле M. В [292] определяются и изучаются некоторые операции над предрадикалами, например, композиция $\sigma\circ\tau(M)=\sigma(\tau(M))$, расширение $\sigma\Delta\tau(M)=X$, где $X/\sigma(M)=\tau(M/\sigma(M))$, а также сумма и пересечение семейства предрадикалов. Типичный результат: если τ — радикал, то $(\sigma_1\Delta\sigma_2)\circ\tau=(\sigma_1\circ\tau)\Delta(\sigma_2\circ\tau)$. Поведение этих операций при замене колец изучалось в [293]. А. И. Кашу [75] исследовал связь между радикалами (идемпотентными предрадикалами) и кообразующими (образующими) в R-Mod, Эллигер [485] — связь между подмодулем $\sigma(M)$, где σ — предрадикал, и $J(\mathrm{End}_R M)$, получив в качестве следствий некоторые результаты о кольцах эндоморфизмов. Он же [484] указал условия, при которых предрадикал σ имеет свойство: $\sigma(M)\neq 0$, если $M\neq 0$. Новое описание радикальных классов дал Ж. Файзуллаев [152]. В. П. Елизаров [56] описал радикальные классы и аналог радикальных фильтров для сильных предкручений, а также построил соответствующие кольца частных. Шелтер и Робертс [1257] показали, что если t — кручение и $\mathscr{E}(t)$ имеет счетную базу, то $\mathfrak{R}(t)=\{M \mid U\underset{R}{\otimes}M=0\}$, где U — плоский правый R-модуль, Ямбор [762] изучал ортогональные относительно $\otimes$ классы модулей над коммутативным кольцом. Полупростые классы встречаются также у Като [810]. В ряде работ изучалась связь свойств кольца R и множества всех предрадикалов определенного типа в R-Mod. Так, Бронович и Тепли [344] получили условия, близкие к совершенности и полуартиновости, Е. И. Тэбырце описал кольца, над которыми все кручения образуют импликативную дистрибутивную структуру с дополнениями [150] или цепь [151]. В случае коммутативного кольца с условием максимальности для частных идеалов существует тесная связь между спектром кольца R и решеткой кручений в R-Mod, изучавшаяся Е. И. Тэбырце и Ю. М. Рябухиным [30, стр. 356], Е. И. Тэбырце [30, стр. 356]. Здесь же упомянем работу Ниты [1048]. Кепка [815] показал, что каждый (конаследственный) предрадикал в R-Mod костабилен тогда и только тогда, когда R — прямая сумма конечного числа простых колец. В [295] рассматривались кольца, над которыми каждый (наследственный) идемпотентный радикал стабилен. Кольцо R называется ATF-кольцом, если $\sigma(R)=0$ или $\sigma(R)=R$ для любого ядерного функтора σ. Такие кольца изучали Рубин [1231—1232], Виола-Приоли [1403], Хэнделмен и Лоуренс [663]. Для коммутативного кольца R это условие равносильно тому, что R — область целостности, в общем случае — сильной первичности кольца R (кольцо называется сильно первичным, если для любого $x\in R\setminus\{0\}$ существуют такие $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} l_R(r_i x)=0$). Хэнделмен [662] показал, что каждый собственный ядерный функтор в R-Mod содержится в собственном кручении тогда и только тогда, когда R — конечное подпрямое произведение ATF-колец. К тому же кругу вопросов относятся работы Бицана, Ямбора, Кепки и Немеца [290], где изучаются такие кольца, что $t(R)=0$ или $t(R)=R$ для любого кручения t в R-Mod, и Рубина [1230], где приведен пример примитивного кольца, не обладающего этим свойством. Виола-Приоли [1404] изучает кольца, над которыми каждый ядерный функтор — кручение. Коммутативные кольца с этим свойством — прямые произведения полей. Фенрик [513] рассмотрел кольца, удовлетворяющие более сильному условию. Из работ, относящихся к радикально-полупростым классам, упомянем статью Е. Л. Горбачука [36] и обзор Адзумайи [225]. Курата [844] определил n-кратный радикал как набор $(T_1, \ldots, T_n)$ таких классов модулей, что при $i=1, 2, \ldots, n-1$ существуют радикалы r_i, удовлетворяющие условиям: $T_i=\mathfrak{R}(r_i)$, $T_{i+1}=\mathfrak{P}(r_i)$. Доказывается, например, что $n\leqslant 4$. Трех- и четырех-кратные радикалы изучались в [1235] и [845].

Перейдем к работам, в которых изучаются различные понятия, связанные с фиксированным радикалом. Кузик [442] охарактеризовал периодический идеал кольца. Бичи [248] и Тепли [1361] изучали различные варианты t-делимости модулей, где t — кручение. Блэнд [313] определил для радикала σ понятие σ-коделимого модуля: M называется σ-коделимым, если для любой точной последовательности $0\to K\to A\to B\to 0$, где $\sigma(K)=0$, гомоморфизм $\mathrm{Hom}_R(M, A)\to \mathrm{Hom}_R(M, B)$ сюръективен. Кроме того, определяется σ-коделимое накрытие модуля и показывается, что если каждый модуль из класса $\mathfrak{R}(\sigma)$ имеет проективное накрытие, то замкнутость класса $\mathfrak{R}(\sigma)$ относительно проективных покрытий эквивалентна замкнутости класса $\mathfrak{P}(\sigma)$ относительно гомоморфных образов. Миллер [979] изучал последнее условие в случае, когда σ — кручение; Тепли [1362] выяснил, когда существование σ-коделимого накрытия для любого R-модуля влечет совершенность кольца R; Рангасвами [1144], рассматривая такой радикал σ, что все левые идеалы, лежащие в $\sigma(R)$, σ-радикальны, показал, что все R-модули имеют σ-коделимое накрытие тогда и только тогда, когда кольцо $R/\sigma(R)$ совершенно слева, а σ-коделимость всех R-модулей эквивалентна классической полупростоте кольца $R/\sigma(R)$. Блэнд [314] получил аналогичные результаты, когда σ — кручение, а также, определив в [315] σ-делимую и σ-коделимую размерность модуля, указал достаточные условия их равенства. В работах Голана и Тепли [591], Тепли [1366] и Читэма [396] изучались свободные от кручения накрытия модулей. Ряд работ посвящен обобщению проективности и инъективности в связи с теорией радикалов и изучению возникающих при этом классов модулей (Бичи [249], Л. Ш. Иоффе [71], Йираско [782]). А. И. Пономарев [30, стр. 334] для кручения t установил эквивалентность t-инъективности и t-проективности всех R-модулей, а также указал ряд других условий, определяющих классическую t-полупростоту кольца R. Аналогичные вопросы для ядерного функтора рассматривал Рубин [1233]. Людеман [921] показал, что кольцо R классически t-полупросто тогда и только тогда, когда $R=t\text{-soc}(R)$ ($M=t\text{-soc}(M)$ для всех $M\in R$-Mod, где t-цоколь $t\text{-soc}(M)$ определяется как пересечение таких существенных подмодулей $N\subseteq M$, что $M/N\in\mathfrak{R}(t)$. Катаяма [807] рассмотрел понятие σ-цоколя для любого ядерного функтора σ и показал, что если $\mathfrak{R}(\sigma)$ — радикально-полупростой класс, то $\sigma\text{-soc}(M)$ равен сумме таких подмодулей $N\subseteq M$, что $N/N'\in\mathfrak{R}(\sigma)$ влечет $N'=N$ для любого $N'\subseteq N$.

Несколько работ связано со свойствами расщепления предрадикалов, радикалов и кручений. Фулберт и Тепли [557] и

Гудёрл [602] указали необходимые и достаточные условия того, что сингулярный предрадикал (обычно его называют сингулярным радикалом, хотя он радикалом, вообще говоря, не является) обладает свойством SP или FGSP. Тепли в [1360] изучал расщепление кручения Голди и кручения Диксона, а в [1365] — расщепление произвольного кручения, содержащего кручение Диксона, на циклических и конечно порожденных модулях (кручение Диксона есть наименьшее кручение, относительно которого все простые модули периодичны). Раттер [1234] показал, что радикал $\sigma(P)$ над полусовершенным кольцом R выделяется прямым слагаемым в каждом проективном модуле P тогда и только тогда, когда $\mathfrak{P}(\sigma)$ замкнут относительно проективных накрытий (ср. [M71:196]).

Гудёрл (РЖМат, 1974, 1А247) исследовал вопрос о переносе свойства SP для сингулярного предрадикала Z_l на существенное произведение колец и доказал, что если R — наследственное нётерово первичное кольцо, то Z_l имеет свойство SP тогда и только тогда, когда R содержит минимальный идеал и каждый простой точный R-модуль инъективен [609]. Достаточное условие того, что Z_l обладает свойством SP, указал также Зелманович [1469]. Свойства расщепления копериодических радикалов исследовал Рамамурти [1135], А. М. Иванов [69] изучал радикалы абелевых групп, расщепляющиеся на группах ограниченного ранга, Л. А. Койфман ([31], стр. 33) описал кручения, обладающие свойствами BSP, FGSP и CSP, над коммутативным кольцом, Е. Л. Горбачук [35] — коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляются. Сюда же примыкают работы [274] и [1328].

Мазе (РЖМат, 1975, 7А563), Голан [588], Голан и Тепли [590] изучали t-артиновы и t-нётеровы кольца и модули, где t — кручение. К этим же вопросам близка работа Рангасвами и Ваная [1146]. Вюрфель рассмотрел соответствующее обобщение когерентности [1450]. Балле изучал такие кручения t, что радикальный фильтр $\mathscr{E}(t)$ удовлетворяет условию, аналогичному условию Артина — Рисса [230]. Сюй [724] доказал, что предрадикал σ над дедекиндовым кольцом, перестановочный с операцией взятия обратного предела, имеет вид $\sigma(M) = \{m \in M \mid Im = 0\}$ для некоторого идеала I. Бицан [285] изучал модули без кручения над кольцами матриц.

Радикалам в категории модулей над кольцом без 1 посвящены работы Кертеса [816], Хансена [668] и Саса [1337, 1338].

Пусть $\tau_M(\chi_M)$ — наибольшее (наименьшее) кручение, относительно которого модуль M полупрост (периодичен). Бицан [284, 286] и А. И. Кашу [76] рассматривали радикал $\rho_M(N) = \bigcap\{\ker f \mid f \in \mathrm{Hom}_R(N, M)\}$ и получили ряд условий, при которых он является кручением. Например, это эквивалентно квазиинъективности модуля M. Кон [409] называет ρ_R-радикальные R-модули связанными, а τ_R-радикальные — строго связанными и указывает ряд свойств этих модулей в случае, когда R — наследственное кольцо, например: каждый конечно связанный модуль — расширение проективного модуля с помощью конечно связанного строго связанного модуля.

Г. М. Бродский [19] исследовал кручение Басса, т. е. радикал $\rho\mathrm{End}_S F$, где F — свободный S-модуль бесконечного ранга, и указал на его связь с некоторым другим конкретным кручением.

Бъёрк [305] изучает свойства косовершенного радикала модуля $\dot{M}$, равного наибольшему подмодулю в M, удовлетворяющему условию минимальности для конечно порожденных подмодулей. Папп [1093] рассмотрел класс таких R-модулей M, что любой гомоморфный образ модуля $\hat{M}$ инъективен. Если кольцо R — нётерово, то это радикальный класс, а если артиново — полупростой. Тепли [1358] изучал разложение периодических в смысле Диксона модулей в прямую сумму χ_S-периодических подмодулей, где S — пробегает множество простых модулей. Аналогичным вопросам посвящены работы Альбу [181, 182], Настасеску и Альбу [1023], Шореса [1274].

Бичи [254] исследовал связь кручений в R-Mod с так называемыми подкатегориями Жиро. Уинтроп [1447] применил предрадикалы к изучению широких подгрупп в абелевых группах. Периодические модули над некоммутативными дедекиндовыми кольцами изучались в [959] и [1296]. Фахруддин [502] рассматривает группу Гротендика и композиционные ряды модулей без кручения конечного ранга над коммутативным кольцом нормирования.

Понятия, в некотором смысле двойственные понятию кручения, исследовали Бронн [343] и Макмастер [961]. Кепка [814] привел ряд характеризаций радикального фильтра, порожденного заданным множеством левых идеалов.

Упомянем работы [9, 10, 34, 38, 239, 240, 354, 356, 377, 565, 566, 568, 648, 760, 826, 865, 1150, 1151, 1277, 1337, 1397, 1410], в которых изучались (пред) радикалы в категориях, отличных от категории модулей. По поводу локализаций моноидов и полигонов см. § 5.

Перейдем к работам, связанным с кольцами и модулями частных. Этим вопросам посвящены книги Голана [587], Ван Ойстаэйена [1086], Штейштрёма [1316], статья Уокеров [1412], известная как препринт с 1964 года, и В. П. Елизарова [54], а также обзоры Мориты [999] (по результатам, примыкающим к [M71:789—792]) и Ламбека [859].

Кольцо частных кольца R, определенное кручением t (радикальным фильтром $\mathscr{F}$), будем обозначать $Q_t(R)$ (соответственно, $Q_{\mathscr{F}}(R)$), канонический гомоморфизм колец — $\rho(t, R): R \to Q_t(R)$ ($\rho(\mathscr{F}, R): R \to Q_{\mathscr{F}}(R)$). Аналогичные обозначения будем использовать для модулей частных. Кроме того, обозначим через R-tors множество всех кручений в R-Mod , через $\Phi(R)$ — множество радикальных фильтров левых идеалов кольца R.

Наиболее близкими к классическим являются локализации, обладающие свойством (T) Голдмана (см. [M71:436]). Они и соответствующие им кручения (и радикальные фильтры) называются также совершенными. Совершенные кручения исследовали Рубин [1230, 1232] (в [1232] он показал, например, что каждое кручение над коммутативным кольцом R совершенно тогда и только тогда, когда высота каждого простого идеала в R не больше 1), Бичи [248, 255], Сим [1284]. Пэйдж [1089] для любого (совершенного) $t \in R$-tors установил, когда $Q_t(R)$ — классически полупростое, однорядное, квазифробениусово, артиново (первичное, обобщенно однорядное) кольцо. В. П. Елизаров [57] дал аксиоматическое описание кольца частных относительно сильного фильтра и обобщил в [58] на случай сильного фильтра результаты Пэйджа. Критерий когерентности кольца $Q_t(R)$ нашел Кэмпбелл [376]. Шелтер [1255] предложил конструкцию кольца частных кольца R относительно двух радикальных фильтров $\mathcal{F}_r$ и $\mathcal{F}_l$ правых и левых идеалов, соответственно, которая является функтором на категории с объектами $(R, \mathcal{F}_r, \mathcal{F}_l)$ и естественно определенными морфизмами. Другой случай, когда локализация кольца функториальна, рассмотрел В. Т. Марков [102].

Баттс и Спахт [359] определяют кольца частных коммутативных колец относительно обобщенных мультипликативных систем идеалов. Лемэр [887], обобщая локализацию Габриэля, ввел полулокализации модулей и применил их для исследования частичных гомоморфизмов модулей.

Каан [365] указал представление модуля $Q_t(M)$ в виде модуля сечений некоторого квазикогерентного пучка (R — коммутативное кольцо) и привел условие (в терминах этого представления), эквивалентное совершенности $Q_t(R)$. В. К. Харченко (РЖМат, 1976, 2А314) показал, что если $G \subseteq \mathrm{Aut}(R)$, $|G| < \infty$, $\mathcal{F} \in \Phi(R)$, $g(F) \in \mathcal{F}$ при любых $F \in \mathcal{F}$, $g \in G$, и $|G| R \in \mathcal{F}$, то $\mathcal{F}^G = \{F \cap R^G \mid F \in \mathcal{F}\} \in \Phi(R^G)$ и $Q_{\mathcal{F}}(R)^G = Q_{\mathcal{F}^G}(R^G)$ (где R^G — кольцо инвариантов). Бёрджес [357] доказал изоморфизм $Q_{\mathcal{F}_G}(RG) \cong Q_{\mathcal{F}}(R)G$, где G — группа, а фильтр $\mathcal{F} \in \Phi(R)$ содержит кофинальное подмножество конечно порожденных левых идеалов. Отметим также работы Ламбека [857—858] и Мори [950—951], содержание которых отражено в [99] по анонсам [M71:652], [M71:738].

Продолжаются исследования различных обобщений локализации коммутативного кольца относительно простого идеала. Ламбек и Михлер [862] определили кручение t_P, ассоциированное с первичным идеалом P нётерова кольца R, условием

$t_P = \tau_{R/P}$, показав, что соответствующий радикальный фильтр $\mathcal{F}_P = \{A \subseteq R \mid \forall x,\ x \in R \Rightarrow Ax^{-1} \cap S(P) \neq \varnothing\}$, где $S(P) = \{s \in R \mid x \in R \wedge \wedge xs \in P \Rightarrow x \in P\}$. Пусть $R_P = Q_{t_P}(R)$, $\rho(t_P, R) = \rho_P$, $M_P = R_P \rho_P(P)$. Доказана эквивалентность следующих условий: 1) $M_P = J(R_P)$; 2) элементы множества $\rho_P(S(P))$ обратимы в R_P; 3) кольцо R удовлетворяет условию Оре относительно системы $S(P)$. При выполнении этих условий локализацию R_P и идеал P назовем классическими. Заметим, что третье условие имеет смысл и для ненётерова кольца. Файндли [526] показал, что если $t \leqslant t_P$, $Q = Q_t(R)$, $Q/J(Q)$ — простое артиново кольцо и $P = \rho(t, R)^{-1} \cdot (J(Q))$, то $Q = R_P$ и R_P — классическая локализация. Хайнике [696] выяснил, при каких условиях кручение t_P совершенно. Чэттерс и Хайнике [394] показали, что если R — наследственное нётерово с обеих сторон первичное кольцо, то либо R_P — нётерово неартиново простое кольцо, либо $R_P/J(R_P)$ — простое кольцо, R_P — кольцо главных левых и главных правых идеалов, и P содержит обратимый идеал. При этом идеал P обратим тогда и только тогда, когда R_P — классическая локализация. Ламбек и Михлер [861] для некоторых случаев описали M_P-адическое пополнение кольца R_P как второй централизатор неразложимого инъективного t_P-полупростого R-модуля. Ятегаонкар [769] и Ламбек и Михлер [863] рассмотрели аналогичную локализацию R_S нётерова кольца R относительно полупервичного идеала S. Ятегаонкар [771] указал условия (в терминах инъективных R- и R_S-модулей), при которых R_S — классическая локализация. Мори [951, ч. III] установил, когда R_P, где P — минимальный первичный идеал нётерова максимального ограниченного порядка R в теле, совпадает со своим правым аналогом. Шамари [386] рассматривает кручение $t = \cap\{t_P \mid P$ — минимальный первичный идеал$\}$, где R — нётерово с обеих сторон первичное кольцо. Равенство $t = 0$ оказывается эквивалентным тому, что R — порядок Асано в своем кольце частных. Рэйно [1159, 1161] показал, что максимальные собственные кручения над нётеровым с обеих сторон кольцом R имеют вид t_P, где P — минимальный первичный идеал. Различные обобщения этого утверждения предложил Бичи [251—252]. В коммутативном случае этот вопрос изучал Нгуен Тронг Кхам [1027]. Отметим также книгу Нилла [1043] и обзор Михлера [974], посвященные близким вопросам.

Значительное число работ посвящено изучению и применению простых кручений в смысле Голдмана [M71:436]. Множество простых кручений в R-Mod обозначается $\mathrm{Speg}\, R$. Голан указал четыре способа введения топологии на $\mathrm{Speg}\, R$ [584] и изучал свойства этих топологий. Каан [363], [366] определил копростые кручения двойственным образом и указал некоторые достаточные условия существования биекции между ними и простыми кручениями, а в [364] изучал подмножества в $\mathrm{Speg}\, R$, связанные с простыми идеалами кольца A, где R — A-алгебра. Рэйно [1157—1158] исследовал свойства $\operatorname{Speg} R$, равносильные полунётеровости кольца R. Сюда же примыкают работы Албу [184] и Попеску [1113]. Голан [585—586] рассматривает функцию δ, которая каждому подмножеству $U \subseteq \operatorname{Speg} R$ ставит в соответствие периодический класс модулей M таких, что $\varnothing \neq \operatorname{Ass}(M/N) \subseteq U$ для любого $N \subsetneq M$, где $\operatorname{Ass}(M) = \{\pi \in \operatorname{Speg} R \mid M$ содержит носитель кручения $\pi\}$ (модуль K называется носителем кручения t, если $K/L \in \mathfrak{R}(t)$ для любого $0 \neq L \subseteq K$). Функция δ определяет аналог размерности Крулля. Полуартиновы кольца характеризуются тем, что δ биективна. Голан и Рэйно [589] установили связь между введенной размерностью и размерностью Габриеля (см. ниже). Гудёрл [609] рассматривал кручения t такие, что $\mathfrak{R}(t) = \delta(X)$, $X \subseteq \{\tau_S \mid S$ — простой модуль$\}$, и свойства соответствующих колец частных, когда R — наследственное нётерово первичное кольцо.

Голдман [597] определил t-цепь подмодулей нётерова модуля M как последовательность подмодулей $0 \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots M_n = M$ такую, что M_{i+1}/M_i — носитель кручения t, и показал, что ни набор $\{\tau_{M_{i+1}/M_i}, i = 0, 1, \ldots, n-1\}$, ни число n (называемое t-длиной модуля M) не зависят от выбора t-цепи. Результаты Голдмана обобщил Голан [588].

В работах [382, 384, 731, 732, 899 и 976] изучались вполне ограниченные нётеровы кольца. Оказались эквивалентными следующие условия на нётерово кольцо R: 1) R является FBN-кольцом, т. е. каждое первичное факторкольцо кольца R ограничено; 2) R является T-кольцом, т. е. каноническое отображение множества первичных идеалов кольца R в множество типов неразложимых инъективных R-модулей биективно; 3) если E — неразложимый инъективный R-модуль, P — максимальный среди аннуляторов элементов из E, то $(0:P)$ — конечномерное подпространство сердцевины $C(E)$ над телом, ассоциированным с E (определение сердцевины см. [87]); 4) каждый фильтр $\mathcal{F} \in \Phi(R)$ содержит кофинальное подмножество, состоящее из произведений первичных идеалов, принадлежащих $\mathcal{F}$; 5) если $t \in \operatorname{Speg} R$, то $t = t_P$ для некоторого первичного идеала P.

Ряд работ касался перенесения свойств локализаций при замене колец. Рэйно [1159, 1161] определил фильтр $\mathcal{F}' \in \Phi(Q_{\mathcal{F}}(R))$ как наименьший радикальный фильтр, содержащий $Q_{\mathcal{F}}(R)\rho(\mathcal{F}, R)(F)$ при всех $F \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F} \in \Phi(R)$, и доказал, что $\mathcal{F}'$ наследует многие свойства $\mathcal{F}$. Аналогичное соответствие между $\Phi(R)$ и $\Phi(\rho(\mathcal{F}, R)(R))$ установлено в [1160]. Продолжая исследования Тёрниджа [М71:1098], Каннингэм, Раттер и Тёрнидж [441] показали, что если M — конечно порожденный проективный R-модуль и $S = \operatorname{End}_R M$, то существует инъективное отображение S-tors$\to R$=tors, причем если t' и t — соответствующие кручения, и $M' = Q_t(R) \underset{R}{\otimes} M$, то $\operatorname{End}_{Q_t(R)} M' = Q_{t'}(S)$.

Каннингэм [438] охарактеризовал конечные локализации [М68:362] как вторые централизаторы проективных модулей; Ламбек [856] установил, что если E — «приятный» инъективный модуль, то $Q_{\tau_E}(R)$ — плотное подкольцо в бикоммутаторе E. А. И. Кашу [77] выяснил, когда бикоммутатор псевдоинъективного модуля E совпадает с $Q_{\tau_E}(R)$. Людеман [919—920] и Шелтер [1256] рассматривали локализации топологических модулей и колец.

Продолжалось исследование размерностей некоммутативных колец, начатое Габриелем [М64:99], Габриелем и Рентшлером [М71:924]. Пусть $\operatorname{dev} S$ — девиация любого частично упорядоченного множества S (см. определение в [87]). Размерностью Крулля модуля M (кольца R) называется девиация структуры подмодулей в M (левых идеалов в R). Подробное изложение теории колец и модулей, имеющих размерность Крулля, содержится в книге Гордона и Робсона [618]. Некоторые результаты о таких кольцах приводятся в обзорах Голди [593—594] и докладах Краузе [839] и Гордона [614]. Ятегаонкар [772] рассматривал девиацию множества подмодулей в модуле M, замкнутых относительно некоторого кручения, и использовал ее для изучения первичных идеалов нётерова кольца. Р. Уокер [1414] доказал совпадение размерности Крулля с левой глобальной размерностью для некоторого класса некоммутативных колец. Краузе [838] и Леммонье [893] обобщали теорему Жордана — Гёльдера на модули, имеющие размерность Крулля. Ленаган [895—896] доказал нильпотентность нильрадикала кольца, имеющего размерность Крулля. Голди и Смолл [595], а также Гордон и Робсон [619] показали, что полупервичное кольцо, имеющее размерность Крулля, является кольцом Голди. Кольца, имеющие размерность Крулля, встречаются также у В. Т. Маркова [101].

Более широкий класс колец образуют кольца, имеющие размерность Габриеля, известные также под названием полунётеровых колец. Пусть A_0 — радикальный класс, состоящий из одного модуля, равного нулю, $A_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma$, если α — предельный ординал, $A_{\alpha+1} \supseteq A_\alpha$ — наименьший радикальный класс, содержащий все A_α-простые модули. По определению, $G\dim M = \inf\{\alpha \mid M \in A_\alpha\}$. Размерность Габриеля для модулей изучалась в [617] и [620]. В частности, получено неравенство $K\dim M \leqslant G\dim M \leqslant K\dim M + 1$, а также известные в коммутативной алгебре неравенства для размерности колец и модулей многочленов. Размерность Габриеля кольца многочлено в от n переменных над полуартиновым кольцом вычислил Настасеску [1019]. Роос определил и исследовал размерность Габриэля категорий Гротендика [1209].

3.2. Чистота. Начнем с работ, посвященных чистотам в смысле [M71:71] и их обобщениям. Бицан [283—284] получил ряд результатов о проективно и инъективно замкнутых чистотах, а также (в частном случае) [287] один результат А. И. Генералова [M71:23]. Чистоты в категории абелевых групп исследовали И. В. Самсонова [134] и А. А. Мановцев [96]. А. М. Иванов [68] выяснил, когда для радикала r класс $\mathfrak{R}(r)$ ($\mathfrak{P}(r)$) совпадает с классом ω-делимых (ω-плоских) модулей для некоторой чистоты ω. Бицан [282] изучал ω-делимые оболочки и ω-чистые замыкания. В [760, 761, 506] рассматриваются чистоты в абелевых категориях. Гарднер [566] для любого класса объектов U абелевой категории $\mathfrak{A}$ называет подобъект A объекта B U-чистым, если из того, что $A\subseteq X\subseteq B$ и $X/A\in U$, следует, что A — прямое слагаемое в X, и изучает, например, случай, когда $U=\mathfrak{R}(r)$ для некоторого радикала r. В категории модулей эту чистоту рассматривал Гроссман [638], в категории абелевых групп — Меггибен [967]. Близкие чистоты изучал Кепка [813]. Чистотам в категории модулей посвящен обзор Филдхауза [523]. Подмодуль $A\subseteq B$ называется (абсолютно) чистым, если последовательность $0\to M\underset{R}{\otimes}A\to M\underset{R}{\otimes}B$ точна для любого правого модуля M. Циммерман [1483] и Цошингер [1475] выясняли, когда чистые подмодули выделяются прямым слагаемым. Вюрфель [1451] нашел некоторые свойства кольца R, чистого в $\hat{R}$, и выяснил, например, когда групповое кольцо обладает этим свойством. Фукс и Хауптфляйш [555] перенесли на модули одну теорему Л. С. Понтрягина об объединении чистых подгрупп. Арнольд [212] выяснил, при каких условиях все чистые подмодули ограниченного p-ранга над дискретным кольцом нормирования R с $J(R)=pR$ свободны. А. П. Ераскина [59—61] рассматривала λ-чистоту в категории модулей над кольцом дискретного нормирования. Брюер и Раттер [341] изучали чистые расширения коммутативных колец. Серия работ Филдхауза [517—522, 525] посвящена регулярным модулям (т. е. модулям, каждый подмодуль которых чист). Упомянем следующие результаты. Равносильны следующие свойства кольца R: 1) кольцо R регулярно как левый R-модуль; 2) кольцо R регулярно в смысле фон Неймана; 3) каждый R-модуль регулярен. Прямой предел регулярных модулей — регулярный модуль. Регулярный цоколь модуля (сумма всех регулярных подмодулей) — ядерный функтор, но, вообще говоря, не радикал. Проективный конечно порожденный регулярный модуль — прямая сумма левых идеалов, порожденных идемпотентами. Кольцо R полусовершенно тогда и только тогда, когда $R/J(R)$ — артиново кольцо, и регулярный цоколь любого R-модуля M совпадает с Soc$M$ (см. также § 1.1). В [520] Филдхауз определяет абсолютно чистую размерность модуля M формулой apd $M=\inf\{n\,|\,\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N, M)=0$ для любого конечно связанного $N\in R$-Mod$\}$ и доказывает, что apd$M=0$ тогда и только тогда, когда M чист в любом своем расширении. В [524] охарактеризованы с помощью абсолютно чистой размерности регулярные кольца, в [1140] — некоторые классы ненётеровых колец, например, прюферовы. Глобальную абсолютно чистую размерность колец многочленов и групповых колец абелевых групп вычислили Кильпинский и Симсон [818]. Лемэр [888] изучал подмодули, подобные сервантным подгруппам, в модулях без кручения над коммутативным кольцом. Йондруп и Тросборг [795] показали, что чистый идеал кольца — след некоторого проективного модуля.

Лунстра [915] исследовал вопрос о совпадении сервантных оболочек некоторых подмножеств абелевой группы без кручения. Тотальную проективность абелевых групп и модулей над кольцами главных идеалов изучали Уокер [1413] и Нунке [1069]. Отметим также работу Уокер [1409], в которой рассмотрены классы абелевых групп, проективных относительно точных последовательностей данного класса, и классы точных последовательностей, относительно которых все группы данного класса проективны.

Некоторое отношение к чистым подмодулям имеют работы Боу [328], Иона [745], Холтена [716], Мерли [1011], Уорфилда [1419], Юсуфзая [1458].

3.3. Примарные разложения. Продолжались исследования по аксиоматической теории примарных разложений, начатые Райли [M65:207]; Китинг [812] доказал, что некоторая теория разложения — терциарная. Попеску [1112] перенес теорию Райли в категорию Гротендика. К этому же кругу вопросов относятся работы Ицуми [755], Кирби [821], Мура [995] и И. К. Щербацкого [169]. Критерии артиновости и нётеровости модуля, связанные с примарным разложением, указал Лангман [869]. В работе Макдональда [922] используется теория вторичного разложения, двойственная теории примарного разложения. Хольцапфель [717] рассматривает примарность для R-структур; Могами и Томинага [985] — для бимодулей вида ${}_RM_{R'}$; Бэр [228] — для бимодулей вида ${}_RM_G$, где G — группа. Кошон [383] изучал конечные и бесконечные терциарные и примарные разложения. Сас [1339] исследовал P-примарность относительно радикала Куроша — Амицура в категории колец, предполагая, что P — первичный идеал. И. М. Гоян [37] рассматривал примарные разложения модулей над кольцом с условием максимальности для идеалов. Классические и близкие к ним примарные разложения изучались также в [362, 732, 733, 821, 949, 1028]. Примарные разложения в смысле Голдмана [M71:436] использовал Удри [729], описав с их помощью классические и

8—5221

ламбековские порядки в кольце эндоморфизмов линейного пространства над телом. В [727] он изучал модули, в которых каждый подмодуль есть приведенное пересечение примарных и показал, что они образуют радикальный класс некоторого кручения, а в [734] — связь классического и голдмановского примарного разложения. Попеску [1116] исследовал примарное разложение в модулях над полунётеровыми кольцами, Салль [1242] — над полуартиновыми кольцами, Краузе [737] и Гордон [615] — над FBN-кольцами. Мори [950] изучал примарное разложение главного левого идеала.

В работах Марубаяши [934], Шореса [1270], Сингха [1296] на различные классы периодических модулей (например, в смысле Диксона) обобщаются известные теоремы о периодических абелевых группах, связанные с их разложением в p-примарные компоненты.

3.4. Полное кольцо частных. Полное левое кольцо частных кольца R будет обозначаться через $Q(R)$. В работе Армендарица [201] модуль M назван Q-делимым, если $\mathrm{Hom}_R(Q(R), N)\neq 0$ для любого ненулевого фактормодуля N модуля M. В [201] и [208] получено несколько результатов о Q-делимых модулях, например: если $Q(R)$ — квазифробениусово, M — фактормодуль инъективного модуля и $M/\tau_R(M)$ — инъективный модуль, то $\tau_R(M)$ — прямое слагаемое в M. Армендариц и Макдональд [207] указали условия, при которых $Q(R)$ классически полупросто, артиново, является S-кольцом, самоинъективно, квазифробениусово, Като [808] выяснил, когда оно имеет доминантный модуль, Стейнберг [1314] — когда $Q(R)$ строго регулярно или является простым регулярным конечным (т. е. $xy=1 \Rightarrow yx=1$) кольцом. Конечность кольца $Q(R)$ в случае, когда R — конечное самоинъективное справа регулярное кольцо, доказали Гурсо и Джереми [624], указавшие также связь $Q(R)$ с пополнением R по некоторой метрике. Артиновость $Q(R)$ встречается у Джабали [452]. Осиро [1081] доказал, что для регулярного кольца R равносильны следующие условия: 1) любой идемпотент кольца $Q(R)$ лежит в R; 2) любой τ_R-полупростой модуль проективен. Там же получен ряд результатов о разложении τ_R-полупростых модулей. О'Мира [1073] выяснил в некоторых случаях, когда $Q(R)$ — истинное справа расширение R (т. е. $A\cap R\neq 0$ для любого правого идеала $A\neq 0$ кольца $Q(R)$). Хэнделмен [662] охарактеризовал кольца с нулевым сингулярным идеалом такие, что $Q(R)$ — проективный R-модуль, и привел пример, в котором $Q(R)$ — циклический проективный R-модуль, однако $R\neq Q(R)$. Зельманович [1469] и Марубаяши [935] изучали вопрос о совпадении кольца $Q(R)$ с полным правым кольцом частных кольца R. Судзуки [1333] показал, что если R — артиново кольцо, то $Q(R)$ изоморфно второму централизатору пересечения всех точных слева идеалов кольца R, Штенштрём [1315] описал строение полного кольца частных кольца матриц вида $\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где ${}_AM_B$ — точный A-модуль. Полное кольцо частных кольца S, входящего в ситуацию Мориты $(R, {}_RM_S, {}_SN_R, S)$, где M_S — точный правый модуль, и $[N, m]\neq 0$ при $m\neq 0$, рассматривалось в [739]. Показано, например, что $Q(S)$ классически полупросто тогда и только тогда, когда ${}_RM$ — конечномерный несингулярный модуль. Кроме того, выясняется, когда $Q(S)$ — произведение полных линейных колец над телами (полное линейное кольцо над телом), а также получены аналогичные результаты для классического кольца частных кольца S.

Полные кольца частных полупервичных PI-колец изучали Фишер [528], Армендариц и Стейнберг [209], Фишер и Роуен [531], Роуен [1228, 1229], В. Т. Марков [102]. Их строение описывается следующей теоремой: полное кольцо частных полупервичного PI-кольца R удовлетворяет всем полилинейным тождествам кольца R, совпадает с правым полным кольцом частных кольца R и изоморфно прямому произведению конечного числа колец матриц над строго регулярными самоинъективными кольцами, каждое из которых — свободный модуль конечного ранга над своим центром. Полные кольца частных полупервичных колец появлялись также в [1018] и [100], колец, порожденных идемпотентами, — в [632]. Надкольца кольца R в $Q(R)$ изучал Шторрер [1326], показавший, что коммутативная область целостности R прюферова тогда и только тогда, когда любое ее надкольцо в $Q(R)$ имеет вид $Q_{\mathcal{F}}(R)$ для некоторого $\mathcal{F}\in\Phi(R)$. Полное кольцо частных прюферова кольца рассматривал Бойзен [320]. Китамура [823] показал, что если S — фробениусово расширение кольца R, порожденное, как R-модуль, элементами централизатора R в S, то $Q(S)$ — фробениусово расширение кольца $Q(R)$, причем $Q(S)\cong Q(R)\otimes_R S\cong S\otimes_R Q(R)$. Мюллер (1004) вводит, обобщая эквивалентность Мориты, контекстную эквивалентность колец и доказывает, что она сохраняется при переходе к полным кольцам частных. Некоторое отношение к полным кольцам частных имеют работы [380] и [437]. Ланг [867, 868] выяснил, при каких условиях структуру кольца R можно продолжить на $\hat{R}$. Длаб и Рингель [461] построили серию несамоинъективных рационально замкнутых колец, обладающих этим свойством. Гоншор [598, 599] получил с помощью нестандартного анализа полное кольцо частных кольца непрерывных функций. Полное кольцо частных топологического кольца изучали Хальтер-Кох [658] и Экштейн [474]. Стейнберг [1313] исследовал полное кольцо частных структурно упорядоченного кольца, Джонсон [787] — полное кольцо частных Ф-алгебры. Хафнер [653] показал, что при некоторых условиях инволюция продолжается с конечного $*$-бэровского кольца R на $Q(R)$. Этому же вопросу посвящена работа Пайла [1126]. Форманек [540] показал, что если группа H субнормальна в G, то $Q(FH)\subseteq\subseteq Q(FG)$, где F — поле, $Q(F\Delta(G))\supseteq Z(Q(FG))$, а если FG — полупервичное кольцо, то $Q(Z(FG))=Z(Q(FG))$ ($\Delta(G)$ — множество элементов группы G с конечным числом сопряженных, $Z(R)$ — центр кольца R).

К. А. Бейдар ([30], стр. 279) доказал, что если $G\subseteq \mathrm{Aut}(R)$, $|G|<\infty$, причем R — полупервичное кольцо, и существует элемент $\gamma\in Z(R)$ такой, что $\sum\limits_{g\in G} g(\gamma)=1$, то $Z_l(R)=0$ тогда и только тогда, когда $Z_l(R^G)=0$, и при этом условии $Q(R)^G=Q(R^G)$.

3.5. Классические кольца частных. Классическое (левое) кольцо частных кольца R обозначается через $Q_{cl}(R)$, кольцо частных относительно мультипликативной системы S — через $Q_{cl}(R, S)$. Вопросы существования $Q_{cl}(R)$ изучались в [215, 834, 1131]. Борегар [260] для любой области R строит расширение Q такое, что $Qa\subseteq aQ$, где $a\in Q\setminus\{0\}$, влечет обратимость a в Q. Кон [408] изучает универсальное тело дробей некоммутативной области. Хатчинсон [738] для некоторого класса колец строит расширение кольца R в $Q(R)$, свойства которого близки к свойствам $Q_{cl}(R)$, и кольца треугольных матриц. Блэр [309, 310] доказал существование кольца $Q_{cl}(R)$, если R — целое над подкольцом своего центра A, или является конечно порожденным проективным A-модулем. Шок [1269] привел достаточные условия равенства $Q(R)=Q_{cl}(R)$. Смит [1301] показал, что если F — поле рациональных, действительных или комплексных чисел, G — группа, H — подгруппа в G, Z_H — ее централизатор в FG, причем $Q_{cl}(FG)$ существует, то и $Q_{cl}(Z_H)$ существует и совпадает с централизатором H в $Q_{cl}(FG)$. Существование артинова кольца $Q_{cl}(RG)$, где R имеет артиново классическое кольцо частных, а G имеет (трансфинитный) нормальный ряд с циклическими и/или конечными факторами, доказал Хьюз [736]. В. К. Харченко [164] показал, что если $G\subseteq \mathrm{Aut}(R)$, $|G|<\infty$ и R не имеет аддитивного $|G|$-кручения, то $Q_{cl}(R)^G=Q_{cl}(R^G)$ (где R либо R^G — полупервичное кольцо Голди). Адамс [173] и Сингх [1295] изучают свойства $Q_{cl}(R)$ как левого R-модуля. Бергман [271] и В. Т. Марков [100] привели (различные) примеры полупервичных PI-колец, не имеющих ни левого, ни правого классического кольца частных.

Пусть для любого мультипликативного множества Σ матриц над кольцом R, R_Σ — универсальное Σ-обращающее кольцо в смысле [M71:276]. Кон [411] показал, что если справедлива импликация $AB\in\Sigma\Rightarrow A\in\Sigma\wedge B\in\Sigma$ и R — полу-FI-кольцо, то и R_Σ — полу-FI-кольцо. Для полупервичного идеала S нётерова кольца обозначим через Γ множество матриц,

регулярных по модулю S, тогда $R_\Gamma/J(R_\Gamma)=Q_{cl}(R/S)$ (Кон, [410]), и существует гомоморфизм $\varphi: R_S\to R_\Gamma$ (R_S — локализация кольца R в S в смысле [863]), причем φ — изоморфизм тогда и только тогда, когда $R_\Gamma=R_S=Q_{cl}(R, R\cap\Gamma)$. Кольцо $Q_{cl}(R, R\cap\Gamma)$ (если оно существует) будем называть классической локализацией кольца R относительно S, а идеал S-классическим. Лезьё [898] изучал классические локализации относительно такого идеала P кольца R, что R/P — область. Брангс [350] рассматривал классические локализации субкоммутативных колец (т. е. $Rr=rR\,\forall r\in R$). Вариант классической локализации относительно полупервичного идеала описал Ятегаонкар [768]. Достаточные условия того, что первичный идеал PI-кольца является классическим, содержится в [97, 393, 526].

Локализации максимальных порядков изучал Шамари [387, 388]. Хаджарнавис и Ленаган [657] показали, что если R — порядок Асано, то $R=S\cap T$, где $T=\bigcap R_M\subseteq Q=Q_{cl}(R)$, M пробегает множество максимальных идеалов в R (все они классические), S — простое нётерово кольцо, причем T — ограниченный порядок. Справедлива следующая теорема глобализации: если $U\underset{R}{\otimes}S=0$ и $U\underset{R}{\otimes}R_M=0$ для всех M, то $U=0$. Аналогичные результаты в случае (некоммутативных) дедекиндовых колец получил Кузманович [847, 848], причем у него S и T оказываются дедекиндовыми кольцами. Некоторые обобщения этих результатов на HNP-кольца получил Закс [1465]. Мори [952] показал, что все первичные идеалы максимального порядка в центральной простой алгебре классические. Сюда же примыкают работы [336, 645, 951, 1193].

Хаджарнавис [655] и Смит [1302] охарактеризовали порядки в артиновых кольцах, Шок [1268] — в инъективных кообразующих, О'Мира [1074] и Удри [729, 735] — в полных линейных кольцах над телами, Данн [471] — в квазифробениусовых кольцах, подчинённых некоторому условию на идемпотенты, Парк [1096] — в q-кольцах (см. [M71:11], стр. 37). О'Мира [1071] показал, что если V — линейное пространство над телом D размерности d, то все порядки в $\mathrm{End}_D V$ первичны тогда и только тогда, когда $d\leq\aleph_0$. Хорн [720] описал групповые кольца RG такие, что $Q_{cl}(RG)$ квазифробениусово. Гордон рассматривал порядки в артиновых и примарных кольцах [613], в [616] он показал, что если R является FBN-кольцом справа и слева, причем $K\dim R=K\dim A$ для любого ненулевого левого идеала $A\subseteq R$, то R — порядок в артиновом кольце. В. П. Елизаров [55] выяснил, когда обобщенное кольцо частных является кольцом главных идеалов, локальным или вполне примарным кольцом. Алев [186] обобщил на рефлективные (т. е. $ba=0\Rightarrow ab=0$) нётеровы кольца несколько теорем коммутативной алгебры. Альвани

[659] указал ряд условий, при которых двусторонний порядок в простом артиновом кольце является порядком Асано. Зельманович [1471] обобщил теорему Фейта — Уцуми. Борегар [257—259] изучал классические кольца частных колец главных идеалов и их обобщений, показав, например, что если R — область Безу слева и справа, т. е. сумма и пересечение любых двух односторонних главных идеалов — главные односторонние идеалы, и $R\subseteq T\subseteq Q_{cl}(R)$, то $T=Q_{cl}(R, S)$ для некоторой системы $S\subseteq R$ и T — область Безу. Ивамото [752] и Мурата [1008] рассматривали R-подмодули в $Q_{cl}(R)$. Здесь же отметим работы Бэллью [233] и Эли [486].

Локализации PI-колец относительно некоторых первичных идеалов рассматривались в [98, 390, 1227]. Голди [592] дал новое доказательство теоремы Познера, Амицур [194] — ее обобщение. Армендариц, Фишер и Стейнберг [206] использовали локализации $R_{\mathfrak{m}}=Q_{cl}(R, Z(R)\setminus\mathfrak{m})$, где $Z(R)$ — центр кольца R, а $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $Z(R)$. Доказано, например, что R регулярно (является V-кольцом) тогда и только тогда, когда все кольца $R_{\mathfrak{m}}$ регулярны (являются V-кольцами). Для представления колец и модулей пучками подобные локализации использовал Ламбек [854]. Роуен [1226] получил точный аналог теоремы Познера для PI-колец с инволюцией. Работы [796, 797] и [1078] посвящены изучению тел частных универсальных обертывающих алгебр разрешимых алгебр Ли. В [97, 740, 741] и [972] рассматривались различные варианты локализации Голди.

3.6. Плоские морфизмы колец. В этом и следующем пункте, если не оговорено противное, A, B, C ... — коммутативные кольца, R, S, T, ... — не обязательно коммутативные кольца, f, g, h, ... — гомоморфизмы колец. Гомоморфизм $f:R\to S$, в частности, эпиморфизм (в категории колец), называется плоским, если S — плоский правый R-модуль. Плоским эпиморфизмам локальных колец посвящена книга Нагаты [1015]. Оливье [1069] изучал плоские и абсолютно плоские гомоморфизмы колец и аффинных схем, в частности, поведение операции целого замыкания при действии плоского гомоморфизма. Ферран [515, 516] исследовал эпиморфизмы локальных колец, получая результаты следующего типа: если A — локальное нётерово кольцо, B — локальное кольцо и $f:A\to B$ — эпиморфизм, то B — локально конечная A-алгебра. Ряд работ (например, Оливье [1067, 1068]) посвящен изучению спуска и подъема свойств колец относительно плоских гомоморфизмов. В [1070] рассматривается спуск относительно неразветвленных и чистых гомоморфизмов коммутативных колец. Бек [261] исследовал связь между нётеровой глубиной колец R и S, если $f:R\to S$ — плоский эпиморфизм. Некоторое отношение к плоским гомоморфизмам колец имеют работы [904, 908, 909].

Пусть $f:R\to S$ — гомоморфизм колец. Его доминион определяется как подкольцо $\operatorname{Dom} f=\{d\in S\mid \forall\ h:S\to T,\quad g:S\to T,\ hf=gf\Rightarrow h(d)=g(d)\}$. Доминионы вложений колец и эпиморфные расширения исследовал Шторрер [1325]. Ак [651] изучал разложение плоского гомоморфизма $f:R\to S$ в композицию $R\to T\to S$, где $T=\operatorname{Dom} f$.

Ряд работ посвящается плоской эпиморфной оболочке колец. Ак [649], изучая свойства локализаций в абелевых категориях, получил в качестве следствия существование плоских эпиморфизмов с различными свойствами универсальности. О'Мира [1071] выяснил, когда плоская эпиморфная оболочка кольца есть полное линейное кольцо над телом. Ивенс [494] — когда она регулярна. Шторрер [1321—1323] изучал насыщенные коммутативные кольца, т. е. кольца, не имеющие собственных эпиморфных расширений. Например, нётерово кольцо насыщенное тогда и только тогда, когда оно артиново, полупервичное — когда оно регулярно. Инграо [742, 743] и Гарднер [571] показали, что все эпиморфизмы в категории регулярных колец сюръективны. Рибенбойм [1171, 1172] доказал существование универсального плоского эпиморфизма $f:R\to S$, переводящего элементы заданной мультипликативной системы $M\subseteq R$ в обратимые элементы кольца S. Регулярную оболочку кольца изучал Виганд [1435—1437], который рассматривал также подкольцо определенного вида в кольце $\Pi=\prod\limits_{x\in\operatorname{Spec} A} k_x$, где $k_x=Q_{cl}(A/x)$; полученные результаты прилагаются к изучению проективности и чистоты. Гомоморфизмы из кольца R в кольца матриц над коммутативными кольцами изучал Прочези [1125]. К этим же вопросам близка работа Брауна [345]. Шпулбер [1310] нашел критерий плоскостности над A кольца B такого, что $A\subseteq B\subseteq Q(A)$. Д. В. Круминг [90] выяснил, когда функтор $V_\varphi:R\text{-Mod}\to S\text{-Mod}$, где $\varphi:R\to S$ — гомоморфизм колец, сохраняет проективность. Васконселос [1383] показал, что если вложение $i:A\to A[x]/I$ является плоским эпиморфизмом, то I — конечно порожденный идеал в $A[x]$ (см. также § 1, п. 4).

3.7. Разные вопросы. Хукаба [726] передоказал известное условие целозамкнутости кольца A в $Q_{cl}(A)$. Куреши [1129] рассматривал обобщенные расширения Оре. Х. М. Наккар [115, 116] построил локализацию некоторых мультипликативных структур относительно мультипликативных подмножеств. Монтгомери [993] изучала аналог условия Оре в йордановых кольцах, Бриттен [342] доказал аналог теоремы Голди для первичного йорданова кольца. Ук [737] обобщил конструкцию полного кольца частных на коммутативные полукольца, Бертьом [275] — на коммутативные полугруппы (двумя различными способами). Ак [650] получил ряд теорем о квазикомпактных подмножествах аффинных схем, Настасеску [1018] — о гомеоморфизме спектров коммутативных колец. Ламбек [854] рассматривал представление пучками сечений таких модулей M, что $mrs=0 \Rightarrow msr=0$ для всех $m \in M$, $r, s \in R$. Бессерр [279] рассматривала пары A-модулей $E' \subseteq E$, удовлетворяющие условию $\mathfrak{a}E \cap E' = \mathfrak{a}E'$ для любого идеала $\mathfrak{a} \subseteq A$. Джебли [776—778] рассматривает линейные топологии на поле частных коммутативной области, Каан и Шобер [367] исследовали модули без полиномиального кручения над областью A (модуль ${}_AE$ не имеет полиномиального кручения, если для любого $f \in E[x]$ из $f(A)=0$ следует, что $f=0$) и показали, например, что это свойство сохраняется при локализации.

Гриффит [634, 635] показал, что ковариантный, полуточный, сохраняющий прямые произведения, аннулирующий инъективные модули и переводящий проективные модули в редуцированные функтор $F: A\text{-Mod} \to H\text{-Mod}$, где A — дедекиндова область, имеет вид $F \approx \mathrm{Ext}^1_A(T, -)$, где T — периодический модуль. Де Мюнтер-Киль [449] переносит некоторые результаты об абелевых группах на модули ранга 2 над дедекиндовой областью. Сюй [725] описал классы абелевых групп, замкнутые относительно взятия подгрупп прямых пределов. Арнольд [210, 211] исследовал двойственности, т. е. такие функторы F, что F^2 изоморфен тождественному функтору, на некоторых классах абелевых групп и модулей над кольцом дискретного нормирования.

§ 4. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И УПОРЯДОЧЕННЫЕ МОДУЛИ

4.1. Топологические модули. В настоящем разделе топологические абелевы группы затронуты лишь частично. Как правило, не включены работы по модулям над банаховыми алгебрами и когомологиям банаховых алгебр. О топологических полигонах см. § 5.

Понятие локальной сходимости в локально выпуклых топологических векторных пространствах переносится Маскартом [937] на топологические модули.

Уорнер [1423] выясняет, когда модуль допускает недискретную линейную топологию. В. И. Арнаутов [11] доказал, что на бесконечном модуле M над кольцом R с дискретной топологией можно задать недискретную топологию, превращающую его в топологический R-модуль. В [1042] отмечено, что бесконечная абелева группа допускает полную недискретную групповую топологию. ДеМарко и Орзатти [448] дают критерий существования на абелевой группе метризуемой полной линейной недискретной хаусдорфовой топологии. Янкирман, Миллер и Райагопалан [763] оценивают мощность интервала в частично упорядоченном множестве локально компактных топологий абелевой группы (либо $\geqslant C$, либо 2^n). Килтинен [819] показал, что на бесконечной абелевой группе G существует $2^{|G|}$ хаусдорфовых топологий.

В [998] рассмотрены топологии в абелевых группах, определяемые большими подгруппами.

Диссертация Телина [1367] посвящена локально ограниченным топологическим модулям.

Роос [1209] изучает категории линейно топологизируемых модулей над линейно топологизируемым кольцом в связи с рассмотрением локально нётеровых категорий. Балле [230] приводит различные характеризации свойства Артина — Рисса линейной топологии τ кольца R (одна из них: для любого инъективного R-модуля E подмодуль E_τ элементов, аннулируемых открытыми идеалами кольца R, чист в E).

В связи с изучением функторов $\varprojlim^{(i)}$ Грузон и Йенсен [640] затрагивают алгебраически компактные модули. Достаточное условие конечномерности компактной абелевой группы приводит Лоутон [877]. Коэн [405] получил ряд свойств категории проконечных R-модулей (т. е. обратных пределов дискретных модулей конечной длины с топологией обратного предела).

Пусть τ — линейно компактная топология в R-модуле E. Уорнер [1424] отмечает, что в множестве всех более сильных, чем τ, линейно компактных топологий на E существует максимальный элемент τ^*. Он же исследует свойства модулей, линейно компактных в дискретной топологии. Балле [229] изучает линейно компактные модули в дискретной топологии над полным локальным нётеровым кольцом. Оберст и Шнайдер [1059] несколько варьируют определение линейной компактности. Онодера [1076] приводит ряд условий, равносильных линейной компактности модуля и отмечает, что в линейно компактном модуле M для любого подмодуля N существует подмодуль N' такой, что $M=N+N'$ и N' — минимальный с этим свойством. Показано также, что линейно компактные модули конечномерны. Рассмотрены связи линейно компактных модулей с инъективными образующими с существенными цоколями. В [1076] он использует линейно компактные модули для изучения кообразующих. Миллер и Тёрнидж [980] строят пример линейно компактного нётерова (артинова) модуля над совершенным кольцом, который не является артиновым (нётеровым). Если R — нётерова коммутативная h-локальная область с топологией, в которой база окрестностей нуля состоит из пересечения конечного числа степеней максимальных идеалов, то Фахруддин [504] приводит описание линейно компактных R-модулей (обобщающее известную классификацию линейно компактных абелевых групп). Штёр [1319] рассматривает пополнение категории локально компактных модулей. Рёдер [1198] использует методы гомологической алгебры для доказательства теоремы двойственности Понтрягина для локально компактных абелевых групп. Некоторые свойства характеров некоторых классов топологических абелевых групп (продолжаемость с замкнутой подгруппы и др.) приводит Венкатарам [1391].

Пусть, далее, R — кольцо целых величин несвязного локально компактного поля K, E—компактный R-модуль и E^*—топологический модуль гомоморфизмов модуля E в дискретный модуль K/R. Б. М. Рудык [130] изучает связи между E и E^*. Ряд теорем, аналогичных теоремам Понтрягина, устанавливает Левин [902] для локально компактных R-модулей над дискретным коммутативным кольцом R (в частности, получен ряд структурных теорем, аналогичных теоремам о локально компактных абелевых группах). Вудкок [1448] заметил, что если R — полное локальное нётерово кольцо с конечным полем вычетов, то дуальные R-модули в смысле Понтрягина и в смысле Макдональда [M68:249] локально линейно компактного R-модуля топологически изоморфны (хотя и нефункториально). Мюллер [1003] показал, что все теории двойственности для линейно топологизированных модулей индуцируются двойственностями Мориты. Арагона [197] сформулировал ряд утверждений, обобщающих теоремы двойственности Понтрягина для топологических хаусдорфовых R-модулей, где R — коммутативное локально компактное кольцо.

Риффель [1173] получил аналоги теорем Мориты для C-алгебр и W^*-алгебр (описаны эквивалентности категорий невырожденных $*$-представлений на гильбертовых пространствах (нормальных в случае W^*-алгебр)).

Продолжалось систематическое изучение свободных топологических модулей (см. [103, стр. 4]) С. Ф. Алексей [30, стр. 268—269], [4] установил существование свободного топологического модуля M_X над нульмерным топологическим пространством X в классе $\mathfrak{M}_1$ ($\mathfrak{M}_2$) топологических R-модулей с базисом окрестностей нуля из подгрупп (подмодулей) и описал в явном виде его топологию. В [2] он дал критерий связности свободного топологического модуля M_X в классе $\mathfrak{M}$ всех топологических модулей, а в [3] выяснил, когда M_X — m-пространство (т. е. пересечение менее чем m открытых подмножеств открыто), и дал некоторые необходимые и некоторые достаточные условия ограниченности модуля M_X (необходимое условие приведено также в статье С. Ф. Алексея, В. И. Арнаутова, М. И. Водинчара [5]). В. И. Арнаутов и М. И. Водинчар [12] выясняют, когда свободный топологический модуль M_X локально компактен или компактен. Несколько иное понятие свободного топологического модуля рассмотрено Нумелой [1055] (не предполагается, что M_X содержит пространство X, а допускается лишь существование непрерывного отображения $X \to M_X$). Сопоставляя результаты С. Ф. Алексея и Нумелы, можно получить совпадение этих понятий для вполне регулярных пространств X. Нумела [1053, 1054] строит свободные объекты в категории K-групп (т. е. компактно порожденных пространств с непрерывной группой операций). Он же [1052] показал ранее, что проективная размерность компактной абеле-

вой группы равна 1 (в категории топологических абелевых групп с непрерывными эпиморфизмами, допускающими расщепление). Свободным компактным абелевым группам посвящена работа Морриса [1000]. Свойства свободных топологических абелевых групп рассматриваются В. К. Бельновым [14]. Фульп [563] изучает функтор Ext в категории всех локально компактных абелевых групп. Объект A конкретной категории называется минимальным, если всякий мономорфизм из A в произвольный объект категории является вложением. Банашевский [236] затрагивает ряд вопросов о минимальных объектах в некоторых категориях, в частности в категории топологических модулей.

Амин [193] устанавливает ряд свойств пополнения по p-адическим топологиям модулей над полными кольцами дискретного нормирования. В связи с изучением локализаций Ламбек [857] рассматривает конечные топологии на модулях гомоморфизмов. Топологические глобальные модули рассмотрел Лангман [872]. Чанг [401] рассматривает категорию хаусдорфовых R-модулей с дифференцированием (в связи с изучением модулей дифференцирований). Камен [381] использует топологические модули над кольцом обобщенных функций в теории контроля.

4.2. Упорядоченные модули. В этом пункте упорядоченные абелевы группы отражены лишь частично.

Некоторые свойства конусов положительных элементов частично упорядоченных модулей отмечаются Бержем [266]. Фляйшер [536] заметил, что результаты Рибенбойма [M71:929] о возможности продолжения частичного порядка модуля до линейного предпочтительнее получать, исходя из результатов Лоренцена (Lorenzen P., Math. Z., 1952, 55, 269—275). Миллер [978] выясняет, когда в абелевой l-группе G для любых элементов $x, y \in G$ существует элемент $u \in x^{\perp} = \{a \in G \mid |a| \wedge |x| = 0\}$ такой, что $y \in (|u| + |x|)^{\perp\perp}$.

Педерсен [1099] исследует абелеву l-группу G, являющуюся l-группой действительнозначных функций на множестве X максимальных l-идеалов группы G (в частности, выясняет, когда X — локально связное топологическое пространство). Дэвис [444] рассматривает отношения ортогональности $\perp$ на абелевой группе G, включающее, как частный случай, отношение $x \perp y \equiv |x| \wedge |y| = 0$ в l-группе G (в частности, выясняется, когда отношение $\perp$ реализуется таким образом). Фляйшер [535] изучает представления частично упорядоченных абелевых групп в виде групп действительнозначных функций и обобщает результаты Конрада.

Хилл и Мотт [706] выясняют, когда упорядоченная абелева группа может быть вложена в лексикографическое произведение своих компонент.

Счетномерные векторные структуры над линейно упорядоченным телом рассматривает Конрад [419]. Некоторые сведения о линейно упорядоченных модулях включены в книгу А. И. Кокорина и В. М. Копытова [88].

Минасян [982] отмечает, что одна из теорем Тэ (РЖМат, 1962, 3А212) о конструкции архимедовых порядков в абелевых группах неверна.

Стейнберг [131] строит теорию f-модулей M (т. е. подпрямых сумм линейно упорядоченных модулей), аналогичную теории абелевых l-групп (важную роль играют оценки элемента $x \in M$, т. е. максимальные l-подмодули в M, не содержащие элемента x), в частности, приводит условие разложимости f-модуля M в прямую сумму линейно упорядоченных R-модулей. А. В. Михалёв и М. А. Шаталова [108] изучают строгие f-модули (т. е. f-модули, в которых произведение ненулевого положительного элемента кольца на ненулевой положительный элемент модуля отлично от нуля). Стейнберг [1312] выясняет, когда инъективная оболочка $\hat{M}$ f-модуля M без кручения может быть превращена в f-модуль с f-подмодулем M. Конрад [418] изучает эпиархимедовы группы, т. е. абелевы l-группы, все l-гомоморфные образы которых архимедовы. Группы Рисса затронуты в [917] и [581].

Хилл [704], обобщая Вайнберга (РЖМат, 1966, 1А250), показал, что если G — абелева группа без кручения с тривиальным порядком и F — свободная абелева l-группа над G, то F является l-подгруппой кардинального произведения линейно упорядоченных групп целых чисел тогда и только тогда, когда G — подгруппа произведения групп целых чисел. В другой работе [705] он приводит некоторое обобщение утверждения о том, что свободная абелева l-группа над свободной абелевой группой свободна. Бигар [303] доказал, что для линейно упорядоченного кольца R без делителей нуля равносильны условия: 1) R — левая область Оре; 2) для любого o-модуля M без кручения (над R) существует свободный f-модуль над M. А. В. Михалев и М. А. Шаталова [108] в предположении условия Оре лишь на конус P_R направленного кольца R показали, что свободный f-модуль над o-модулем M существует тогда и только тогда, когда конус P_M полузамкнут (т. е. из $rm \in P_M$, где $0 \neq r \in P_R$, $m \in M$, следует, что $m \in P_M$). Ряд замечаний о базисах модуля из положительных элементов приводит Камьон [374].

Спорел [1309] рассматривает проективные объекты в категории упорядоченных модулей и изучает связь между расширениями и проективными размерностями упорядоченных модулей. Бигар [302, 304] анализирует свойство Хана — Банаха для упорядоченных модулей и вводит два типа инъективных o-модулей (o-инъективность связана с продолжением o-гомоморфизмов с кофинальных o-подмодулей, а q-инъективность — с больших o-подмодулей M на весь o-модуль N), «большой»

здесь означает, что $\forall x \in N\ \exists y_1,\ y_2 \in M\,|\,y_1 \leqslant x \leqslant y_2$. Стейнберг [1312] описывает $\aleph_\alpha$-инъективные объекты в категории f-модулей. Свойства делимой оболочки l-модуля рассматривает В. К. Захаров [66].

Пирс [1106] изучает амальгамы, а Мартинец [932, 931] — функторы Hom и $\otimes$ в категории упорядоченных абелевых групп. Ортоморфизм архимедовых структурно упорядоченных пространств рассмотрел Бигар [301]. Блайер и Конрад [316] описывают свойства структуры $K(G)$ замкнутых l-идеалов абелевой l-группы G, рассматривают расширения G l-подгруппы H, при которых отображение $K \to K \cap H$ осуществляет биекцию $K(G) \to K(H)$, и устанавливают существование максимальных замкнутых расширений такого типа.

Браун [346] рассматривает векторные пространства с нормированиями, значения которых лежат в линейно упорядоченных множествах, и применяет эти результаты к линейно упорядоченным делимым абелевым группам. Некоторые топологические вопросы упорядоченных абелевых групп рассмотрены Н. П. Зимаковым [67], Шерманом [1265] и Конрадом [417]. Полуупорядоченные модули над полуполями встречаются у Р. Рустамова [131—132]. Т. С. Фофанова [161] рассматривает упорядоченные полигоны над дистрибутивной структурой.

§ 5. ОБОБЩЕНИЯ МОДУЛЕЙ

Общие соображения, касающиеся тематики этого параграфа, уже высказывались ([140], стр. 22).

Начнем с рассмотрения полигонов над моноидами. С гомологической характеризацией моноидов связаны работы М. П. Дорофеевой, Манепали и Сатинарьяна [42 1478, 1479], в которых изучаются полунаследственные, наследственные, прюферовы и дедекиндовы моноиды, определяемые аналогично одноименным кольцам. Среди полученных результатов отметим эквивалентность следующих свойств моноида R: (1) R наследственный; (2) все левые подполигоны любого проективного R-полигона проективны; (3) свойство слабой инъективности (т. е. инъективности относительно вложения левых идеалов в R) наследуется факторполигонами. Аналогичный результат справедлив и для полунаследственного моноида. Коммутативный (полу-) наследственный моноид описывается как связка (прюферовых) дедекиндовых моноидов. Прюферовость коммутативного моноида с сокращением, не являющегося группой, эквивалента каждому из следующих свойств: (1) идеалы моноида R образуют цепь; (2) $A(B \cap C) = AB \cap AC$ для любых идеалов моноида R; (3) все моноиды, лежащие между R и его группой частных, плоские ([140], стр. 24). При тех же ограничениях на моноид дедекиндовость характеризуется разрешимостью уравнения $A = BX$, где

A, B, X — идеалы, а также тем, что все идеалы оказываются главными. Есть и другие характеризации. Доказано, что дедекиндов моноид оказывается или группой, или прямым произведением группы и свободного моноида с одним образующим. Описаны коммутативные моноиды, над которыми факторполигоны инъективных полигонов инъективны (ср. [140], стр. 24, а также [447]). В работах [43], [44] М. П. Дорофеева доказала, что свобода всех инъективных R-полигонов может иметь место лишь для одноэлементного моноида R, и описала моноиды, над которыми все проективные полигоны свободны. Манепали и Сатинарьян [928] рассмотрели обобщенные дедекиндовы моноиды, отказавшись от требования, что рассматриваемые моноиды являются моноидами с сокращением. Установлен ряд свойств такого моноида, связанных с его максимальным идеалом. М. А. Кильп [1480], исследовал коммутативные моноиды с проективными или плоскими главными идеалами. В частности, оказалось, что из плоскостности всех главных идеалов коммутативного моноида R вытекает его сепаративность (т. е. $x^2=xy=y_2$ влечет $x=y$). Обратное неверно. В работе [80] он охарактеризовал моноиды, над которыми все конечно порожденные левые идеалы проективны или являются сильно плоскими ([140], стр. 24). Исбелл [747] и Фонтайн [544] изучают моноиды, над которыми все полигоны инъективны. Впрочем, бóльшая часть их результатов, относящихся к этому вопросу, была получена ранее ([140], стр. 24). Полуструктуры, над которыми инъективны все циклические полигоны, описали Джонсон и Макморис [784]. Они же [785] изучали самоинъективные и слабо самоинъективные полуструктуры. Далеко идущее обобщение описания моноидов с инъективными (а также и с проективными) полигонами на языке категорий предложено С. В. Полиным [118]. В других его работах [119—120] содержится обобщение результата Кнауэра [М73:50, 602] об эквивалентности полигонов над моноидом в смысле Мориты. Нико [1036—1037] называет подполигон A полигона B обобщенной орбитой, если для любых $x, y \in A$ найдется $b \in B$ такой, что $x, y \in Rb$. Если каждая обобщенная орбита содержится в объединении других обобщенных орбит, то полигон называется насыщенным. Установлена эквивалентность следующих свойств моноида R: (1) среди R-полигонов нет насыщенных; (2) каждый R-полигон удовлетворяет условию максимальности для главных левых идеалов; (3) каждая обобщенная орбита любого R-полигона является орбитой орбит (т. е. циклических полигонов); (4) каждый R-полигон распадается в несократимое объединение максимальных орбит; (5) каждый R-полигон допускает неприводимое покрытие максимальными орбитами. Выяснено также, когда множество орбит моноида удовлетворяет условию максимальности. В работах [1034, 1038] Нико исследовал моноиды, все полигоны над которыми удовлетворяют условию максимальности или минимальности для орбит. Хотцель [723] отметил ряд свойств 0-простой полугруппы, связанных с изоморфизмом любых двух циклических полигонов над ней.

Бертьом [275—276] и Макморрис [963—964] перенесли на случай полугрупп известные построения полного кольца частных как бикоммутатора и как предела гомоморфизмов групп плотных левых идеалов в кольцо. Правда, оказалось, что в случае полугрупп эти конструкции приводят к различным результатам. Отмечается связь с сингулярными конгруэнциями, аналогичными сингулярным идеалам. Ромпке [1207] выяснил, когда одна из этих полугрупп частных регулярна. Макморрис [962] доказал, что при переходе к полугруппе частных сохраняются свойства быть полуструктурой групп и инверсной клиффордовой полугруппой. В более общей ситуации этот результат получил Хинкле [708, 711], который в своей диссертации [709] (см. также [710, 712]) по аналогии с теорией колец обобщил конструкцию полугруппы частных на случай фильтра циклических левых полигонов, подчиненного определенным требованиям. Установлена связь с обобщенными бикоммутаторами и кручениями, определяемыми как подчиненная определенным требованиям функция, отмечающая в каждом левом полигоне некоторую конгруэнцию. Различные связи полугруппы частных с инъективными оболочками тех или иных полигонов рассматривал Алло [191]. Он же [190] предложил конструкцию полугруппы частных, по-видимому, не укладывающуюся в схему Хинкле.

Моноид эндоморфизмов свободного полигона рассматривал В. Г. Фляйшер [157], давший абстрактную характеризацию этой полугруппы и выяснивший, когда она регулярна. Кнауэр и А. В. Михалёв [828] доказали, что в случае мноидов с нулем, не содержащих нетривиальных идемпотентов, изоморфизм моноидов эндоморфизмов свободных полигонов ранга $\geqslant 2$ индуцируется полулинейным изоморфизмом самих полигонов. Аналогичные результаты справедливы как для топологических, так и для частично упорядоченных полигонов. В. Г. Фляйшер [158] доказал аналогичный результат при отсутствии сигнатурных нулей и заметил, что наложенное Кнауэром и А. В. Михалёвым требование об отсутствии идемпотентов не существенно. Позже Кнауэр [827] доказал, что эквивалентность в смысле Мориты моноидов эндоморфизмов свободных R- и S-полигонов влечет эквивалентность в смысле Мориты моноидов R и S. Алло [189] выяснил, когда моноид эндоморфизмов циклического полигона оказывается группой. Лампе [866] охарактеризовал полугруппу эндоморфизмов простого полигона. Некоторые свойства моноида эндоморфизмов конечного полигона установил В. З. Амхинич [7]. Дейсен [451] рассматривал связи между структурой конгруэнций и группой автоморфизмов конечного полигона. Гржимайло-Буссе [641] предложил алгоритм, позволяющий по данному подмоноиду E моноида всех отображений множества

A в себя найти все такие моноиды R, что E совпадает с моноидом всех эндоморфизмов R-полигона A. В. А. Фортунатов [160] исследовал полигоны, каждая конгруэнция θ которых обладает следующим свойством: если K — смежный класс по θ, то для каждого $\lambda \in R$ множество λK также является смежным классом по θ.

Далее отметим работу Джонсона и Макморриса [783], предложивших конструктивное описание инъективной оболочки полигона над полуструктурой. На некоторые свойства циклических полигонов указал Алло [189]. Е. Н. Ройз [127] получил некоторые результаты о подпрямо неразложимых полигонах. Куроки [846] исследовал чистоту подполигона A в R-полигоне B, определяемую условием $A \cap \lambda B \subseteq \lambda A$ для всех $\lambda \in R$. Банашевский [235] описал эквационально компактные полигоны над группой. Боррего и Де Вун [326] перенесли на топологический случай некоторые результаты Б. М. Шайна [М71:127], среди которых возможность представить любой полигон как гомоморфный образ объединения непересекающихся циклических полигонов, причем на каждом из них выбранный гомоморфизм взаимно однозначен. Беднарек и Норрис [263] установили некоторые факты, которые можно трактовать как изучение категории всех полигонов над всеми моноидами. Беннет [264] охарактеризовал категорию полигонов над группой (ср. [М71 : 97]).

С алгебраической теорией автоматов связана следующая задача: для каких моноидов существует полигон, обладающий данным свойством $\mathfrak{P}$. Б. М. Шайн [168] решил эту задачу в классе конечных моноидов, если $\mathfrak{P}$ — транзитивность (т. е. для любых a и b из полигона имеем $b = \lambda a$ для некоторого $\lambda \in R$) или симметричность (т. е. $b = \lambda a$ влечет $a = \mu b$ для некоторого $\mu \in R$). Можно ставить и в некотором смысле обратную задачу: можно ли для данного R-полигона A найти такую конгруэнцию θ моноида R, что $\lambda \theta \mu$ влечет $\lambda a = \mu a$ для всякого $a \in A$, а фактормоноид R/θ обладает данным свойством $\mathfrak{Q}$. Г. К. Войков и Т. Т. Войкова [28], а также Масунага, Ногухи и Оицума [941] решают эту задачу для случая, когда $\mathfrak{Q}$ означает быть группой. Л. А. Скорняков [141] выяснил, когда распознаваемо (в смысле теории автоматов) одноэлементное подмножество моноида. Свойства автоматов, допускающих интерпретацию на языке полигонов, изучались в работах [198, 1001, 1288, 1457] (см. также [1], [1258]). В частности, вопросы, касающиеся алгоритмов, устанавливающих эквивалентность автоматов, рассматривали А. А. Летичевский [92—94] и М. А. Тайцлин [147]. По поводу линейных автоматов см. п. 1. 1.

Обратимся к рассмотрению модулей над полукольцами. Здесь большая серия работ принадлежит Поятосу [1121—1124], доказавшему, в частности, аналог теоремы Жордана — Гёльдера для этого случая. Хук [737] обобщил на случай полуколец конструкцию полного кольца частных, предложенную Ламбеком. В. Г. Фляйшер [159] выясняет, когда все модули над полукольцом проективны, обобщая классический результат теории колец и результат Л. А. Скорнякова о полигонах над моноидом [М71: 96]. Голаб и Мирон [582] предложили аксиоматику линейного пространства, полученную пополнением некоторой независимой системы аксиом модуля над полукольцом. Компактные модули над компактным полукольцом изучает Уоллес [1415]. Т. С. Фофанова [161] перенесла на модули над дистрибутивной структурой известные результаты о свободном расширении частично упорядоченного множества. В качестве следствия получено, что в категории модулей над дистрибутивной структурой эпиморфизмы совпадают с наложениями. Кисс [822] получил тот же результат для категории модулей под полукольцом с коммутативной аддитивной полугруппой. Новые результаты о модулях над структурой с умножением получил Джонсон ([788—789]; ср. [140], стр. 23). Упомянем, наконец, работу Дулина и Мошера [470], рассматривавших полукольца, аналогичные дедекиндовым кольцам, а также доклад Месегуера и Сольса ([381], стр. 93), использовавших модули над полукольцами в алгебраической теории автоматов. Ясно, что каждая коммутативная полугруппа является модулем над полукольцом положительных целых чисел. В связи с этим отметим некоторые из относящихся сюда работ. Так, Георгеску [576] доказал, что инъективными объектами категории коммутативных полугрупп с сокращением являются делимые абелевы группы и только они. Здесь же уместно упомянуть старые работы Вигандта [1442, 1443].

Ряд авторов исследовали модули над почтикольцом. Так, Беч [280] доказал для этого случая теорему плотности. Лакстон и Машин [878] используют эти модули для изучения радикала, а Чоудхурах и Тевари — для получения некоторых теорем о строении почтиколец. Разрешимые и нильпотентные модули рассматривал Масон [939—940], обобщивший результаты Х. Х. Магомаева [95]. Попытку описания инъективных модулей над почтикольцом предприняли Сес и Тевари [1259]. Упомянем две работы Паттерсона [М68:309, 1098] о модулях над псевдокольцами. Тернарные кольца и модули над ними рассматривали Листнер [М71:701], Лус [916] и Стефенсон [1317]. Дрейк [466] и Дюл [469] рассматривали некоторые обобщения понятия модуля, связанные с координатизацией так называемых ельмслевовых плоскостей. Обобщение понятия модуля, связанное с заменой абелевой группы множеством с одной трех- или четырех-арной операцией, встречается у Батбеда [242—247]. Частичные модули рассматривали Ю. М. Фирсов [30, стр. 360—361] и Фернандес [514]. Другие обобщения понятия модуля можно найти в работах [885] и [1100]. Чакань [435] предложил новую характеризацию многообразия модулей над некоторым кольцом (ср. [М65:28—30]). В. Г. Фляйшер ([30], стр. 459), установил эквивалентность следующих свойств минимального абелева многообразия $\mathfrak{B}$ (т. е. $(a_{11}\ldots a_{1n}\omega)\ldots(a_{m1}\ldots a_{mn}\omega)\sigma=(a_{11}\ldots a_{m1}\sigma)\ldots(a_{1n}\ldots a_{mn}\sigma)\omega$ для любых операций ω и σ) универсальных алгебр с нулем: (1) все алгебры из $\mathfrak{B}$ проективны (как объекты соответствующей категории); (2) все алгебры из $\mathfrak{B}$ инъективны; (3) все ненулевые алгебры из $\mathfrak{B}$ свободны; (4) $\mathfrak{B}$ эквивалентно либо многообразию линейных пространств над некоторым полем, либо многообразию множеств с отмеченным элементом.

Пусть M — левый R-модуль. Аффинной операцией на M назовем n-арную операцию $a_1\ldots a_n\omega=\lambda_1a_1+\ldots+\lambda_na_n$, где $\lambda_i\in R$, причем $\Sigma\lambda_i=1$. Множество M образует относительно аффинных операций универсальную алгебру, которая называется аффинным модулем. Чакань [432] показал, что многообразие универсальных алгебр эквивалентно многообразию аффинных модулей над некоторым кольцом тогда и только тогда, когда смежные классы любой алгебры из этого многообразия по любой конгруэнции являются подалгебрами, а каждая подалгебра служила смежным классом единственной конгруэнции. При этом коммутативность кольца равносильна абелевости многообразия. Для того чтобы R оказалось полем достаточно (и необходимо) дополнительно потребовать, чтобы многообразие было эквационально полным (см. А. И. Мальцев, Алгебраические системы, М., 1970, стр. 372). Эквивалентность многообразий аффинных модулей над кольцами R и S влечет их изоморфность. Другие характеризации многообразия аффинных модулей были предложены в работах [433—435]. Отметим также результат Чаканя и Медьеши [436], показавших, что многообразие идемпотентных медиальных (т. е. удовлетворяющих тождеству $(xy)(uv)=(xu)(yv)$) квазигрупп эквивалентно многообразию аффинных модулей над некоторым специальным полем. Сендрей [1340] доказала, что все операции любого аффинного R-модуля порождаются его бинарными операциями в том и только в том случае, когда двусторонний идеал, порожденный всеми элементами вида $\lambda(1-\lambda)$, совпадает с R. Аффинные модули, связанные с данной абелевой группой, рассматриваются в ее же работе [1341].

Далее заметим, что с данным R-модулем A связана многозначная унарная операция на множестве A, ставящая в соответствие каждому элементу $a\in A$ подмножество R. Арнольд [213], имея в виду геометрические приложения, рассматривал абелеву группу с многозначной унарной операцией и указал необходимые и достаточные условия для того, чтобы эта операция возникала описанным выше способом из некоторого модуля.

В обзоре [140] уже упоминалось обобщение категории модулей, состоящее в рассмотрении категории $\mathfrak{A}^\pi$ функторов из некоторой малой категории π в категорию $\mathfrak{A}$. Внутрикатегорную характеризацию таких категорий предложила Бунге

(РЖМат, 1969, 12А417; 1972, 9А271). Ею же охарактеризована категория $\mathfrak{A}b^\pi$. Тот же результат имеется у Митчела [983], указавшего, кроме того, условия, необходимые и достаточные для того, чтобы такая категория была эквивалентна категории модулей над некоторым кольцом. Банашевский [234] передоказал теорему о характеризации категории полигонов над моноидом ([140], стр. 24). В связи с упоминавшимися в обзоре [140] (стр. 26) результатами Штенштрёма следует назвать работу Рооса [1208], установившего эквивалентность следующих свойств категорий Гротендика $\mathfrak{A}$; (1) существует такое кардинальное число α, что каждый инъективный объект категории $\mathfrak{A}$ разлагается в прямую сумму подобъектов, допускающих систему образующих мощности, не превосходящей α; (2) существует такой инъективный объект Q, что каждый инъективный объект разлагается в прямую сумму объектов, изоморфных прямым слагаемым объекта Q; (3) прямая сумма инъективных объектов инъективна; (4) существует такой объект D, что каждый объект из $\mathfrak{A}$ изоморфен подобъекту прямой суммы некоторого множества экземпляров объекта D. Кроме того, оказалось, что эти условия выполнены, если в $\mathfrak{A}$ каждый инъективный объект проективен. В качестве следствий получены результаты работ [М68:138], [М71:204] и др. Исследования Рооса были продолжены Симсоном [1294]. Он показал, что из перечисленных выше условий (1)—(4) вытекает инъективность копредела направленного семейства инъективных объектов, а в случае, когда $\mathfrak{A}$ локально конечно представима (т. е. обладает множеством конечно представимых образующих), доказал эквивалентность следующих свойств: (1) каждый объект категории $\mathfrak{A}$ чисто проективен (т. е. проективен относительно любой короткой точной последовательности, относительно которой проективен каждый конечно представимый объект); (2) каждый чисто проективный объект чисто инъективен (т. е. инъективен относительно упомянутых выше последовательностей). Если чисто инъективных объектов достаточно много, то условие (2) равносильно чистой проективности любого чисто инъективного объекта. Сам Роос [1209] опубликовал большую работу о локально нётеровых категориях Гротендика, т. е. категориях Гротендика, обладающих множеством образующих, удовлетворяющих условию максимальности для подобъектов. Основной результат своих исследований он видит в том, что «изучение локально нётеровых категорий всецело эквивалентно изучению некоторого класса линейно топологизированных колец, который полностью описывается». Попутно устанавливается взаимно однозначное соответствие между малыми абелевыми категориями и локально когерентными категориями Гротендика, т. е. категориями Гротендика, обладающими множеством когерентных образующих, а также между локально нётеровыми и локально когерентными косовершенными категориями Гротендика (косовершенность

9*

означает существование конечной системы образующих, удовлетворяющих условию минимальности для конечно порожденных подобъектов). Локализации в категориях Гротендика рассматривались в монографиях Будаха и Хольцапфеля [354, 356]. Альбу и Настасеску [185] развивают в коммутативных категориях Гротендика теорию примарных разложений. Инъективные оболочки в категории Гротендика рассматривал Вилланьева [1396]. В работах Штенштрёма [М71:1034, 1035], Оберста и Рёрла [1058] и Ульмера [1376] содержатся критерии плоскостности объекта категории Гротендика, а также обобщение теоремы Лазара — Говорова (см. также [983]). Кроме того, Оберст и Рёрл охарактеризовали малую категорию π, для которой прямое произведение плоских объектов из категории $\mathfrak{Ab}^{\pi}$ является плоским объектом (ср. [М62:12]). Симсон [1292] рассматривал свойства категории $\mathfrak{Ab}^{\pi}$, где каждый плоский объект проективен. Упомянем серию работ Харады [676—679], исследовавшего свойства категории $\mathfrak{Ab}^{\pi}$, аналогичные свойствам категории модулей над совершенным, полусовершенными, QF-3 и квазифробениусовыми кольцами. Основной результат Фишер—Пальмквист и Невелла [533] состоит в обобщении результата Хайнике ([99], стр. 14) об описании кручений категории модулей на языке монад. Эквивалентность категорий $\mathfrak{Ab}^{\pi}$ и $\mathfrak{Ab}^{\pi'}$ исследовали Вайденфельды [1432]. К рассматриваемому кругу вопросов до некоторой степени примыкает работа Егермана [758], касающаяся радикалов кольца малой аддитивной категории.

Ряд результатов, касающихся изучения глобальной размерности категории $\mathfrak{Ab}^{\pi}$ при тех или иных ограничениях на категорию π, получил Митчел ([87], стр. 9—11). Его исследования, относящиеся к случаю, когда π — конечное частично упорядоченное множество, а $\mathfrak{A}$ — абелева категория, продолжили Винсент [1398—1399] и Спир [1307]. Последний показал, что разность $\mathrm{gl.\,dim.}\,\mathfrak{A}^{\pi} - \mathrm{gl.\,dim.}\,\mathfrak{A}$, вообще говоря, зависит от $\mathfrak{A}$. Случай, когда π аддитивна, а $\mathfrak{A}$ — категория абелевых групп, рассматривали Оберст и Рёрл [1058]. Позже к этому случаю обратился и Митчелл [983]. Среди полученных им многочисленных результатов отметим неравенство $\mathrm{gl.\,dim.}\,\mathfrak{A}^{\pi} \leqslant \dim \pi + \mathrm{gl.\,dim.}\,\mathfrak{A}$, где под $\dim \pi$ понимается проективная размерность категории π, рассматриваемой как объект обертывающей категории $\mathfrak{A}^{\pi^0} \otimes \mathfrak{A}^{\pi}$. Укажем на ряд результатов, касающихся прямых и обратных пределов, а также на обобщение результатов Ософской [М68:302, 305]. Сюда же примыкают исследования Оберста [1057] и Ландала [876], выяснявших, для каких π окажется точным функтор обратного предела из $\mathfrak{Ab}^{\pi}$ в $\mathfrak{Ab}$. Естественным обобщением абелевой категории является категория, где $\mathrm{Hom}(A, B)$ является модулем над

некоторым коммутативным кольцом. Многие из упоминавшихся выше результатов Оберста, Рёрла и Митчелла излагаются ими именно для этой ситуации. Отметим, наконец, что рассмотрение категории $\mathfrak{A}^{\pi}$, где $\mathfrak{A}$ — категория множеств, обобщает рассмотрение категории полигонов над моноидом. Здесь отметим результаты С. В. Полина [118, 120], обобщающие теорему Кнауэра об эквивалентности в смысле Мориты ([140], стр. 24) и теорему Л. А. Скорнякова об инъективности (проективности) всех полигонов ([140], стр. 24; см. также [747]). Первый из этих вопросов еще в большей общности рассматривался как самим С. В. Полиным [120], так и Банашевским [234], Линдером [912—913], Ньюолом [1026], Фишер—Пальмквист и Пальмквистом [534]. С. В. Полин [117] рассматривал также случай, когда $\mathfrak{A}$ — категория универсальных алгебр. К исследованию категории функторов до некоторой степени примыкает рассмотрение модулей над пучками колец (см. [869—871, 1105, 1355—1357]). С представлением модулей пучками связаны работы Хофмана [715] и Ламбека [854—855].

Исследовалось также взаимоотношение свойств категории π со свойствами категории $\mathfrak{Ab}^{\pi}$ в предположении, что π — малая абелева категория. Разумеется, полученные здесь результаты не являются обобщением каких-либо результатов категории модулей. Так, Харада [679] установил эквивалентность следующих свойств категории $\mathfrak{Ab}^{\pi}$, где π — малая абелева категория: (1) полная приводимость; (2) проективность любого инъективного объекта; (3) инъективность любого проективного объекта. Саи [М71:972] доказал, что для малой абелевой категории регулярность колец $\mathrm{Hom}_{\pi}(p, p)$ для всех объектов p равносильна ее спектральности (последнее означает, что каждый морфизм расщепляем). О регулярных категориях см. также [1431] и РЖМат, 1975, 4А374. Конструкцию свободной абелевой категории над данной аддитивной категорией предложил Адельман [177]. Категории с малым проективным образующим объектом U, где $\mathrm{Hom}(U, U)$ — полупримарное кольцо, рассматривал Лику [906]. Митчелл [903] предложил новые теоретико-категорные обобщения теоремы о строении классических полупростых колец (ср. [140], стр. 27). Вигандт [1444] анонсировал новые результаты в этом направлении. Сюда же до некоторой степени результаты Леду [883] и один из результатов Вайденфельдов [1432].

В заключение остановимся на исследованиях Фоссума, Грифита и Райтена [542—543], связанных с обобщением кольца треугольных матриц. Они рассматривают категорию $\mathfrak{A}|\times F$, объектами которой служат морфизмы $\alpha: F(A) \to A$, данной абелевой категории $\mathfrak{A}$, где $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ — фиксированный эндофунктор, удовлетворяющие соотношению $F(\alpha)\alpha = 0$, а морфизмами —

морфизмы $\varphi: A \to B$ категории $\mathfrak{A}$, связанные соотношением $\alpha\varphi = F(\varphi)\beta$. Если $\mathfrak{A}$ — категория R-модулей, M — S-R-бимодуль и $F = M \otimes_R -$, то $\mathfrak{A}|\times F$ эквивалентна категории модулей над кольцом обобщенных треугольных матриц. Найдены необходимые и достаточные условия когерентности категории $\mathfrak{A}|\times F$, получен ряд результатов о ее глобальной размерности, указаны приложения к исследованию колец треугольных матриц и модулей Горенштейна.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп. Ред. М. А. Арбиб. М., «Статистика», 1975, 335 с.
2. **Алексей С. Ф.,** О связности свободных топологических модулей. В сб. «Мат. исследования». Т. 8. Вып. 3. Кишинев, «Штиинца», 1973, 136—139 (РЖМат, 1974, 2А284)
3. —, Об ограниченности свободного топологического модуля. В сб. «Мат. исследования». Т. 9. Вып. 3(33). Кишинев, «Штиинца», 1974, 3—14 (РЖМат, 1975, 1А347)
4. —, Свободные топологические модули в некоторых классах. В сб. «Мат. исследования». Т. 10. Вып. 2(36). Кишинев, «Штиинца», 1975, 3—15 (РЖМат, 1975, 12А279)
5. —, Арнаутов В. И., Водинчар М. И., Об ограниченности свободных топологических модулей. В сб. «Мат. исследования». Т. 10. Вып. 2(36). Кишинев, «Штиинца», 1975, 16—27 (РЖМат, 1975, 12А280)
6. **Альпин Ю. А.,** Бихараев Р. Г., О структуре словарных функций, представимых в конечномерных линейных автоматах. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1975, № 7, 3—9 (РЖМат, 1976, 5В634)
7. **Амхинич В. З.,** О полугруппе эндоморфизмов конечного автомата. Кибернетика, 1974, № 2, 56—57
8. **Андрунакиевич А. В.,** Слабо неймановские модули и радикал кольца. В сб. «Мат. исследования». Т. 9. Вып. 2(32). Кишинев. «Штиинца», 1974, 3—9 (РЖМат, 1974, 11А333)
9. **Андрунакиевич В. А.,** Рябухин Ю. М., Кручения в алгебрах. Докл. АН СССР, 1973, **208,** № 2, 265—268 (РЖМат, 1973, 5А237)
10. —, —, Кручения и цепи Куроша в алгебрах. Тр. Моск. мат. о-ва, 1973, **29,** 19—49 (РЖМат, 1974, 1А248)
11. **Арнаутов В. И.,** О топологизуемости бесконечных модулей. В сб. «Мат. исследования». Т. 7. Кишинев, «Штиинца», 1972, 241—243 (РЖМат, 1973, 4А386)
12. —, Водинчар М. И., О локальной компактности свободного топологического модуля. В сб. «Мат. исследования. Т. 10. Вып. 3. Кишинев. «Штиинца», 1975, 3—14 (РЖМат, 1976, 2А361)
13. **Атья М.,** Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру. Пер. с англ. М., «Мир», 1972, 160 с. (РЖМат, 1972, 8А469 К)
14. **Бельнов В. К.,** О свободных абелевых метризуемых группах. Докл. АН СССР, 1972, **202,** № 4, 743—746 (РЖМат, 1972, 6А465)
15. —, Некоторые теоремы о метризации абелевых групп. Мат. сб., 1974, **94,** № 3, 339—357 (РЖМат, 1974, 11А290)
16. **Бобылев И. В.,** Проективная размерность абелевой группы над кольцом своих эндоморфизмов. Успехи мат. наук, 1973, **28,** № 2, 229—230 (РЖМат, 1973, 8А331)
17. —, Кольца, над которыми каждый модуль эндопроективен. Успехи мат. наук, 1974, **29,** № 3, 182 (РЖМат, 1974, 11А446)

18. —, Эндопроективная размерность модулей. Сиб. мат. ж., 1975, **16,** № 4, 663—683 (РЖМат, 1976, 1А426)
19. **Бродский Г. М.,** О кручениях в модулях. Мат. заметки, 1973, **14,** № 4, 527—534 (РЖМат, 1974, 3А210)
20. —, Кольца эндоморфизмов свободных модулей. Мат. сб., 1974, **94,** № 2, 226—242 (РЖМат, 1974, 10А271)
21. —, Аннуляторные условия в кольцах эндоморфизмов модулей. Мат. заметки, 1974, **16,** № 6, 933—942 (РЖМат, 1975, 7А377)
22. **Буну И. Д.,** Об инъективности в модулях. В сб. «Мат. исследования». Т. 9. Вып. 4(34). Кишинев, «Штиинца», 1974, 23—41 (РЖМат, 1975, 5А240)
23. **Бурбаки Н.,** Элементы математики. Коммутативная алгебра. Перев. с франц. М., «Мир», 1971, 707 (РЖМат, 1973, 9А376К)
24. **Васерштейн Л. Н.,** Суслин А. А., Проблема Серра о проективных модулях над кольцом многочленов и алгебраическая K-теория. Функц. анализ и его прил., 1974, **8,** № 2, 65—66 (РЖМат, 1974, 10А336)
25. —, —, Проблема Серра о проективных модулях над кольцом многочленов. Успехи мат. наук. 1975, **30,** № 5, 193 (РЖМат, 1976, 2А521)
26. **Вишнякова Н. И.,** Берман С. Д., О модулях над ненётеровыми кольцами нормирования. Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1975, **60,** № 3, 144—149 (РЖМат, 1976, 1А504)
27. —, Кладов Г. К., Об инъективности модулей над обобщенным кольцом нормирования. В сб. «Вычисл. мат. и вычисл. техн.». Вып. 5, Харьков, 1974, 138—140 (РЖМат, 7А567)
28. **Войков Г. К.,** Войкова Т. Т., Об автоматах, полугруппы которых являются группами. Сообщ. объедин. ин-та ядер. исслед. Лаб. вычисл. техн. и автоматиз. Препринт № PII—7345, Дубна, 1973, IIa (РЖМат, 1974, 3А120)
29. XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Резюме сообщ. и докл. (Ин-т мат. Сиб. отд. АН СССР, Ин-т мат. с ВЦ АНМолдССР, Моск. ун-т, Кишинев. ун-т, Кишинев. политехн. ин-т). Кишинев, АН МолдССР, 1971, 354 с. (РЖМат, 1971, 9А10К)
30. Всесоюзный алгебраический симпозиум, 30 июня — 2 июля 1975 г. Тезисы докладов. ч. I, II. АН СССР, Ин-т мат. АН БССР, Гомельск. фил. ин-та мат. АН БССР, Гомельск. ун-т. Минск, 1975, 475 с.
31. Второй Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Резюме сообщ. (Ин-т мат. Сиб. отд. АН СССР, Моск. ун-т мат. с вычисл. центром АН МолдССР, Тираспольск. гос. пед. ин-т). Кишинев, «Штиинца», 1974, 79 с. (РЖМат, 1975, 2А296 К)
32. **Говоров В. Е.,** О глобальной размерности алгебр. Мат. заметки, 1973, **14,** № 3, 399—406 (РЖМат, 1974, 1А390)
33. —, Размерность и кратность градуированных алгебр. Сиб. мат. ж., 1973, **14,** № 6, 1200—1206 (РЖМат, 1974, 3А300)
34. **Горбачук Е. Л.,** Радикалы в модулях над разными кольцами. В сб. «Мат. исследования». Т. 7. Вып. 1. Кишинев, «Штиинца», 1972, 44—59 (РЖМат, 1972, 6А280)
35. —, Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы. В сб. «Мат. исследования». Т. 7. Вып. 2. Кишинев, «Штиинца», 1972, 81—90 (РЖМат, 1972, 11А199)
36. —, О кручениях в модулях. Укр. мат. ж., 1973, **25,** № 4, 521—527 (РЖМат, 1974, 1А265)
37. **Гоян И. М.,** О примарных разложениях в модулях. В сб. «Мат. исследования». Т. 10. Вып. 2(36). Кишинев, «Штиинца», 1975, 79—88 (РЖМат, 1975, 12А268)
38. **Григор Р. С.,** Аннуляторные кручения. I. В сб. «Мат. исследования». Т. 10. Вып. 2(36). Кишинев, «Штиинца», 1975, 89—105 (РЖМат, 1975, 12А267); II. В сб. «Мат. исследования». Т. 10. Вып. 1(36). Кишинев, «Штиинца», 1975, 107—125 (РЖМат, 1975, 7А349)

39. **Гудивок П. М.,** О числе неразложимых целочисленных p-адических представлений скрещенных групповых колец. Мат. сб., 1973, **91,** № 1, 27—49 (РЖМат, 1973, 8А242)
40. —, Рудько В. П., Об алгебрах модулярных и целочисленных представлений конечных групп. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37,** № 5, 963—987 (РЖМат, 1974, 2А237)
41. **Гудович И. С.,** О критерии базисности системы векторов одного модуля. Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та, 1973, вып. 11, 23—31 (РЖМат, 1974, 9А477)
42. **Дорофеева М. П.,** Инъективные и плоские полигоны над наследственными моноидами. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1973, № 1, 47—51 (РЖМат, 1973, 6А332)
43. —, О некоторых свойствах категории полигонов. (Редколлегия «Сиб. мат. ж.». Сиб. отд. АН СССР). Новосибирск, 1973, 11 с. (3 назв.). (Рукопись деп. в ВИНИТИ 15 марта 1973 г., № 5652—73 Деп) (РЖМат, 1973, 8А278)
44. —, О некоторых свойствах категории полигонов. Сиб. мат. ж., 1973, **14,** № 4, 906 (РЖМат, 1973, 12А173)
45. **Дрогомижська М. М.,** Про розв'язки системи лінійних однорідних рівнянь в кільці типу Оре. Вісник Львів. політехн. ін-ту, 1971, № 59, 3—8 (РЖМат, 1972, 5А248)
46. —, Зауваження до теореми Накаяма. Вісник Львів. політехн. ін-ту, 1973, № 75, 11—14 (РЖМат, 1973, 11А230)
47. **Дрозд Ю. А.,** Неразложимые матричные кольца второго порядка с конечным числом представлений бассовы. Мат. заметки, 1972, **12,** № 5, 601—604 (РЖМат, 1973, 3А278)
48 —, Представления коммутативных алгебр. Функц. анализ и его прил., 1972, **6,** № 4, 41—43 (РЖМат, 1973, 5А439)
49. —, Узагальнення однієї теореми Дейда. Доповіді АН УРСР, 1974, **А,** № 3, 204—207, 284 (РЖМат, 1974, 8А349)
50. —, Об обобщенно однорядных кольцах. Мат. заметки, 1975, **18,** № 5, 705—710 (РЖМат, 1976, 4А228)
51. —, Кириченко В. В., О квазибассовых порядках. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, **36,** № 2, 328—370 (РЖМат, 1972, 7А346)
52. —, —, Примарные порядки с конечным числом неразложимых представлений. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37,** № 4, 715—736 (РЖМат, 1973, 12А399)
53. —, —, Роггенкамп К. В., Порядки з одним незвідним зображенням. Доповіді АН УРСР, 1974, **А,** № 1, 22—24, 92 (РЖМат, 1974, 5А448)
54. **Елизаров В. П.,** К общей теории колец частных. Сиб. мат. ж., 1970, **11,** № 3, 526—546 (РЖМат, 1971, 1А226); Поправка: там же, 1972, **13,** № 6, 1411—1413 (РЖМат, 1973, 4А353)
55. —, Обобщенные классические кольца частных. Мат. заметки, 1972, **11,** № 6, 677—686 (РЖМат, 1972, 9А230)
56. —, Сильные предкручения и сильные фильтры, модули и кольца частных. Сиб. мат. ж., 1973, **14,** № 3, 549—559 (РЖМат, 1973, 9А265)
57. —, Аксиоматическое определение кольца частных. Мат. заметки, 1974, **15,** № 2, 255—262 (РЖМат, 1974, 8А263)
58. —, Артиновы кольца частных. Успехи мат. наук, 1975, **30,** № 2, 211—212 (РЖМат, 1975, 11А369)
59. **Ераскина А. П.,** λ-чистота модулей над кольцом дискретных нормирований. Сиб. мат. ж., 1973, **14,** № 1, 208—212 (РЖМат, 1973, 5А276)
60. —, О λ-чистоте. Успехи мат. наук, 1973, **28,** № 2, 226
61. —, О λ-чистоте модулей. Успехи мат. наук, 1974, 29, № 3, 199—200 (РЖМат, 1974, 11А329)
62. **Жевлаков К. А.,** Радикал и представления альтернативных колец. Алгебра и логика, 1972, **11,** № 2, 162—173 (РЖМат, 1972, 11А213)

63. **Жилинская З. П.,** Об изоморфизме пар конечно порожденных модулей. В сб. «Материалы I Конф. молодых ученых. Зап. научн. центра АН УССР. Секц. мат. и мех.». Ужгород. ун-т. Ужгород, 1973, 3—12, библиогр. 1 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 13 февраля 1974 г., № 313—74 Деп) (РЖМат, 1974, 6А232)
64. **Завадский А. Г.,** Строение порядков, все представления которых вполне разложимы. Мат. заметки, 1973, **13,** № 2, 325—335 (РЖМат, 1973, 5А254)
65. **Захаров В. К.,** О функциональном представлении инъективной оболочки и критерии инъективности некоторых модулей. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 9, 27—30 (РЖМат, 1974, 3А205)
66. —, Делимая оболочка l-модулей. Успехи мат. наук, 1976, **31,** № 1, 249—250 (РЖМат, 1976, 9А303)
67. **Зимаков Н. П.,** К вопросу о задании внутренних топологий в частично упорядоченных группах. Науч. тр. Ташкент. ун-т, 1972, вып. 418, 175—180 (РЖМат, 1973, 4А287)
68. **Иванов А. М.,** К теории радикалов и чистот в категории всех Λ-модулей. В сб. «Мат. исследования». Т. 9. Вып. 3(33). Кишинев, «Штиинца», 1974, 195—200 (РЖМат, 1975, 1А340)
69. —, К теории радикалов абелевых групп. В сб. «Мат. исследования». Т. 10. Вып. 1(35). Кишинев, АН МолдССР, 1975, 135—143 (РЖМат, 1975, 7А274)
70. **Иозапавичюс А. Э.,** Михалёв А. В., Модули с квадратичными и билинейными формами. Модули. III. Новосибирск, 1973, 9—13 (РЖМат, 1973, 10А251)
71. **Иоффе Л. Ш.,** Обобщение Σ-делимости в абелевых категориях. Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1972, вып. 413, 76—88 (РЖМат, 1973, 2А303)
72. **Казимирский П. С.,** Дрогомыжская М. М., Замечания к теории колец конечно порожденных правых главных идеалов. Укр. мат. ж., 1973, **25,** № 5, 671—676 (РЖМат, 1974, 2А248)
73. **Калман Р.,** Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем. Перевод с англ. М., «Мир», 1971, 400 с.
74. **Кашу А. И.,** Некоторые характеризации кручений и устойчивых радикалов модулей. В сб. «Мат. исследования». Т. 8. Вып. 2(28), Кишинев, «Штиинца», 1973, 176—182 (РЖМат, 1973, 11А263)
75. —, Радикалы и кообразующие в модулях. В сб. «Мат. исследования». Т. 9. Вып. 2(32). Кишинев, «Штиинца», 1974, 53—68 (РЖМат, 1974, 11А310)
76. —, Когда радикал, ассоциированный модулю, является кручением? Мат. заметки, 1974, **16,** № 1, 41—48 (РЖМат, 1975, 2А322)
77. —, Бикоммутаторы и кольца частных. Мат. заметки, 1975, **18,** № 3, 429—435 (РЖМат, 1976, 1А292)
78. **Керер Е. Ш.,** Некоторые теоремы о строении конечно порожденных модулей над кольцами главных идеалов. Вестн. Харьков, ун-та, 1975, № 119, Мат. и мех., вып. 40, 55—66 (РЖМат, 1975, 12А414)
79. **Кильп М. А.,** Квазиинъективные абелевы группы. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1967, № 3, 3—4 (РЖМат, 1967, 12А180)
80. —, О гомологической классификации моноидов по свойствам их левых идеалов. Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартус. ун-та, 1974, вып. 336, 178—188 (РЖМат, 1975, 3А222)
81. **Кириченко В. В.,** Обобщенно однорядные кольца. Ин-т мат. АН УССР, препринт ИМ-75-1, Киев, 1975, 57 с.
82. —, О нётеровых справа кольцах, над которыми все конечно порожденные модули полуцепные. Докл. АН УССР, 1976, № 1, 9—12 (РЖМат, 1976, 7А343)
83. —, Обобщенно однорядные кольца. Мат. сб., 1976, **99** (141), № 4, 559—581 (РЖМат, 1976, 9А280)
84. **Клейнер Г. Б.,** О системах линейных уравнений над коммутативными

кольцами. Успехи мат. наук, 1973, 28, № 6, 211—212 (РЖМат, 1974, 6А530)
85. —, О теореме редукции Н. Бурбаки. Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1974, вып. 473, 156—160 (РЖМат, 1975, 2А461)
86. **Койфман Л. А.,** Проективность, инъективность, плоскостность и т. п. Модули. I. Новосибирск, 1973, 27—43 (РЖМат, 1973, 1А249)
87. —, Гомологическая классификация колец. Модули. II. Новосибирск, 1973, 3—41 (РЖМат, 1973, 10А250)
88. **Кокорин А. И.,** Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы. М., «Наука», 1972, 200 с. (РЖМат, 1973, 4А286)
89. **Кругляк С. А.,** Представления алгебр, квадрат радикала которых равен нулю. Зап. науч. семинаров. Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1972, 60—68 (РЖМат, 1973, 1А246)
90. **Круминг П. Д.,** Об одном свойстве функтора $V(\varphi)$. Соврем. алгебра. Т. 2, Л., 1974, 47—54 (РЖМат, 1975, 2А324)
91. **Куликов Л. Я.,** Условия, при которых группа абелевых расширений является нулевой. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1971, 375, 41—55 (РЖМат, 1972, 5А159)
92. **Летичевский А. А.,** Эквивалентность автоматов с заключительным состоянием относительно свободной полугруппы с правым нулем. Докл. АН СССР, 1968, 182, № 5, 1007—1009 (РЖМат, 1969, 4В290)
93. —, Эквивалентность автоматов относительно полугрупп. В сб. «Теор. кибернетика». Вып. 6. Киев, 1970, 3—71 (РЖМат, 1971, 6В420)
94. —, Эквивалентность автоматов относительно полугрупп с сокращением. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 27, М., «Наука», 1973, 195—212 (РЖМат, 1974, 6А217)
95. **Магомаев Х. Х.,** К теории W-групп. I. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1971, № 1, 45—52 (РЖМат, 1971, 7А251); II. Там же, 1971, № 4, 50—58 (РЖМат, 1971, 12А269)
96. **Мановцев А. А.,** Индуктивные чистоты в абелевых группах. Мат. сб., 1975, 96, № 3, 414—446 (РЖМат, 1975, 7А273)
97. **Марков В. Т.,** Два замечания о локализации Голди. Сиб. мат. ж., 1972, 13, № 3, 604—611 (РЖМат, 1972, 9А229)
98. —, О размерности некоммутативных аффинных алгебр. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, 37, № 2, 284—288 (РЖМат, 1973, 8А233)
99. —, Локализации, модули и кольца частных. Модули. I. Новосибирск, 1973, 13—26 (РЖМат, 1973, 10А249)
100. —, О полных кольцах частных несократимых подпрямых произведений. В сб. «Мат. исследования». Т. 9. Вып. 2(32). Кишинев, «Штиинца», 1974, 237—345 (РЖМат, 1974, 11А319)
101. —, Примарное разложение и локализация в кольцах, имеющих правую размерность Крулля. Тр. Семинара им. И. Г. Петровского. Моск. ун-т, 1975, вып. 1, 155—161 (РЖМат, 1975, 12А272)
102. —, О кольцах частных полупервичных PI-колец и несократимых подпрямых произведений. Успехи мат. наук, 1975, 30, № 4, 253—254 (РЖМат, 1976, 1А294)
103. **Михалёв А. В.,** Топологические и упорядоченные модули. Модули. III. Новосибирск, 1973, 3—22 (РЖМат, 1973, 10А251)
104. —, Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки и техн.)». М., 1974, Т. 12. 51—76 (РЖМат, 1975, 6А408)
105. —, Панкратьев Е. В., Дифференциальные модули. Модули. III. Новосибирск, 1973, 14—21 (РЖМат, 1973, 10А251)
106. —, Скорняков Л. А., Модули. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1968 (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР)». М., 1970, 57—100 (РЖМат, 1970, 11А207)
107. —, —, Книги и разные вопросы. Модули. III. Новосибирск, 1973, 28—30 (РЖМат, 1973, 10А251)
108. —, Шаталова М. А., Свободные f-модули. Мат. заметки. 1975, 17, № 6, 873—885 (РЖМат, 1975, 11А384)

109. **Миховски С. В.,** Групповые кольца с условием минимальности для главных левых идеалов. Науч. тр. Пловдив ун-т, 1972, 10, № 3, 15—22 (РЖМат, 1973, 5А257)
110. —, Некоторые условия конечности в бимодулях. Науч. тр. Пловдив. ун-т, 1973, 11, № 4, 247—264 (РЖМат, 1975, 11А343)
111. **Мишина А. П.,** Абелевы группы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 10. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1972, 5—45 (РЖМат, 1973, 2А172)
112. Модули. I—IV. (Ред.) Михалёв А. В., Скорняков Л. А. (АН СССР, Сиб. отд. Ин-т математики. Препринт). Новосибирск, 1973 (РЖМат, 1973, 10А249 К—10А252 К)
113. **Назарова Л. А.,** Ройтер А. В., Представления частично упорядоченных множеств. Записки науч. семинаров. Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1972, 28, 5—31 (РЖМат, 1973, 3А302)
114. —, —, Категорные матричные задачи и проблема Брауэра—Трэлла. Киев, «Наук. думка», 1973, 100 с, (РЖМат, 1974, 6А424)
115. **Наккар Х. М.,** Локализация в мультипликативных структурах. В сб. «Мат. исследования». Т. 9. Вып. 2(32). Кишинев, «Штиинца», 1974, 88—108 (РЖМат, 1974, 10А293)
116. —, О локально нётеровых мультипликативных структурах. В сб. «Мат. исследования». Т. 9. Вып. 3(33). Кишинев, «Штиинца», 1974, 127—140 (РЖМат, 1975, 1А358)
117. **Полин С. В.,** Категории функторов в многообразии универсальных алгебр. В сб.«Мат. исследования». Т. 8. Вып. 1(27). Кишинев, «Штиинца», 1973, 130—140 (РЖМат, 1973, 5А322)
118. —, К гомологической классификации малых категорий. Мат. сб., 1974, 93, № 3, 381—404 (РЖМат, 1974, 7А443)
119. —, Морита-эквивалентные категории. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех. 1974, № 2, 41—45 (РЖМат, 1974, 9А367)
120. —, Морита-эквивалентность и теоремы Джекобсона — Риса для колец и моноидов в замкнутых категориях. Докл. АН СССР, 1974, 218, № 1, 32—34 (РЖМат, 1975, 3А318)
121. **Понизовский И. С.,** О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1972, 28, 154—163 (РЖМат, 1973, 1А245)
122. **Попова А. М.,** Эффективность нахождения модульных определяющих соотношений для конечно порожденного модуля. В сб. «Исследования по мат. и мех.». Алма-Ата, «Наука», 1974, 207—213 (РЖМат, 1975, 3А337)
123. **Роганов Ю. В.,** Размерность тензорной алгебры проективного бимодуля. Мат. заметки, 1975, 18, № 6, 895—902 (РЖМат, 1976, 5А386)
124. **Розенкноп И. З.,** Об унитарных системах элементов. В сб. «Группы и модули. Теория игр.» М., 1973, 42—58 (РЖМат, 1973, 11А391)
125. —, К теории модулей над кольцом многочленов. Моск. обл. пед. ин-т. М., 1973. 71 с. библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 23 окт. 1973 г., № 7109—73 Деп.) (РЖМат, 1974, 3А316 Деп)
126. —, О подмодулях свободных модулей над кольцом многочленов. Моск. обл. пед. ин-т. М., 1974, 33 с., библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 11 дек. 1974 г., № 3143—74 Деп) (РЖМат, 1975, 5А423Деп)
127. **Ройз Е. Н.,** О подпрямо неразложимых монадах. В сб. «Упорядочен. множества и решетки». Вып. 2. Саратов., Саратов. ун-т, 1974, 120—121 РЖМат, 1974, 9А180)
128. **Россошек С. К.,** Корректность колец и модулей. В сб. «Материалы 4-й Науч. конф. по мат. и мех. Т. I». Томск, Томск. ун-т, 1974, 120—121 РЖМат, 1974, 12А219)
129. —, Модули без кручения над дедекиндовыми кольцами. Мат. заметки, 1974, 16, № 3, 387—394 (РЖМат, 1975, 1А450)
130. **Рудык Б. А.,** Локально компактные модули. Успехи мат. наук, 1974, 29, № 4, 178 (РЖМат, 1975, 1А349)
131. **Рустамов Р.,** Полуупорядоченные модули над полуполями. УзССР

Фанлар Акад. докл., Докл. АН УзССР, 1973, № 2, 3—4 (РЖМат, 1973, 7А296)
132. —, Обобщение одной теоремы Юдина для случая полуупорядоченных модулей над полуполями. УзССР Фанлар Акад. Докл., Докл. АН УзССР, 1974, № 8, 8—9 (РЖМат, 1975, 4А322)
133. **Рябухин Ю. М.,** Тэбырцэ Е. И., Кручения и простые идеалы с условием обрыва. В сб. «Мат. исследования». Т. 9. Вып. 4(34). Кишинев, «Штиинца», 1974, 109—120 (РЖМат, 1975, 5А415)
134. **Самсонова И. В.,** Чистоты с абсолютным замыканием. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1975, № 2, 48—51 (РЖМат, 1975, 10А206)
135. **Селиванов Ю. В.,** Гомологическая размерность циклических банаховых модулей и гомологическая характеризация метризуемых компактов. Мат. заметки, 1975, **17**, № 2, 301—305 (РЖМат, 1975, 6А514)
136. —, О значениях, принимаемых глобальной размерностью в некоторых классах банаховых алгебр. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1975, № 1, 37—42 (РЖМат, 1975, 7А532)
137. **Скорняков Л. А.** Модули. В сб. «Алгебра. Топология. 1962. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1963, 80—89 (РЖМат, 1964, 11А220)
138. —, Модули. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1965 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1967, 181—213 (РЖМат, 1967, 10А199)
139. —, Радикалы и чистота. Модули. I. Новосибирск, 1973, 3—11 (РЖМат, 1973, 10А249)
140. —, Обобщения модулей. Модули. III. Новосибирск, 1973, 22—27 (РЖМат, 1973, 10А251)
141. —, Распознаваемость конечных множеств. В сб. «Мат. исследования». Т. 8. Вып. 1(27). Кишинев, «Штиинца», 1973, 227—229 (РЖМат, 1973, 6А197)
142. —, Еще о квазифробениусовых кольцах. Мат. сб., 1973, **92**, № 4, 518—529 (РЖМат, 1974, 7А376)
143. —, Об алгебраических автоматах. Кибернетика, 1974, № 2, 31—34 (РЖМат, 1975, 1В617)
144. **Слинько А. М.,** Шестаков И. П., Правые представления алгебр. Алгебра и логика, 1974, **13**, № 5, 544—587 (РЖМат, 1975, 8А341)
145. **Суслин А. А.,** О проективных модулях над кольцом полиномов. Мат. сб., 1974, **93**, № 4, 588—595 (РЖМат, 1974, 8А352)
146. —, Проективные модули над кольцом многочленов свободны. Докл. АН СССР, 1976, **229**, № 5, 1063—1066 (РЖМат, 1976, 12А489)
147. **Тайцлин М. А.,** Эквивалентность автоматов относительно коммутативной полугруппы. Алгебра и логика. Тр. Семинара, 1969, 8, № 5, 553—600 (РЖМат, 1970, 8В277)
148. **Тольская Т. С.,** Квазифробениусовы кольца и их обобщения. Модули. II. Новосибирск, 1973, 42—48 (РЖМат, 1973, 10А250)
149. **Трегер Р. Б.,** Кольца, над которыми циклические плоские модули проективны. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 6, 89—96 (РЖМат, 1974, 2А270)
150. **Тэбырце Е. И.,** О булевости решетки кручений в модулях. В сб. «Мат. исследования». Т. 8. Вып. 3. Кишинев, «Штиинца», 1973, 92—105 (РЖМат, 1974, 2А288)
151. —, О решетке кручений в модулях. В сб. «Мат. исследования». Т. 10. Вып. 1(35). Кишинев, АН МолдССР, 1975, 225—235 (РЖМат, 1975, 7А381)
152. **Файзуллаев Ж.,** Об одном описании полупростого класса модулей. Докл. Акад. Фанхои РСС Точикистон, Докл. АН ТаджССР, 1972, **15**, № 7, 15—17 (РЖМат, 1973, 1А253)
153. **Фельдман Г. Л.,** О гомологической размерности групповых алгебр разрешимых групп. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, **35**, № 6, 1225—1236 (РЖМат, 1972, 6А396)
154. —, О глобальной размерности алгебры с расширенной группой единиц. Успехи мат. наук, 1974, 29, № 4, 157—158 (РЖМат, 1975, 2А441)
155. —, О глобальной гомологической размерности общих колец дифференциальных операторов. Успехи мат. наук, 1974, **29**, № 5, 245—246 (РЖМат, 1975, 4А443)

156. **Финкельштейн М. Я.,** *PP*-кольца с аннуляторным условием. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1972, № 4, 12—14 (РЖМат, 1972, 11А186)
157. **Фляйшер В. Г.,** Об эндоморфизмах свободных полигонов. Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартус. ун-та, 1974, вып. 336, 189—205 (РЖМат, 1975, 3А223)
158. —, Определяемость свободного полигона его полугруппой эндоморфизмов. Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартус. ун-та, 1975, вып. 366, 27—41 (РЖМат, 1976, 5А273)
159. —, О гомологической классификации полуколец с нулем. Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартус. ун-та, 1975, вып. 366, 42—75 (РЖМат, 1976, 6А312)
160. **Фортунатов В. А.,** Совершенные конгруэнтности на унарных алгебрах. В сб. «Теория полугрупп и ее прил.». Вып. 2. Саратов, Саратов. ун-т, 1971, 85—89 (РЖМат, 1972, 5А141)
161. **Фофанова Т. С.,** Свободные расширения частичных полигонов. В сб. «Упорядочен. множества и решетки». Вып. 2. Саратов, Саратов. ун-т, 1974, 99—108 (РЖМат, 1974, 9А320)
162. **Фукс Л.,** Бесконечные абелевы группы. Т. I. Пер. с англ. М., «Мир», 1974, 335 с. (РЖМат, 1974, 8А206 К)
163. **Ходжиев Д.,** Модули конечного типа и конечномерные модули над полуполями. Научн. тр. Ташкент. ун-т, 1973, вып. 446, 188—192 (РЖМат, 1974, 7А411)
164. **Харченко В. К.,** Расширение Галуа и кольца частных. Алгебра и логика, 1974, **13**, № 4, 460—484 (РЖМат, 1975, 8А317)
165. **Хелемский А. Я.,** Глобальная размерность функциональной банаховой алгебры отлична от единицы. Функц. анализ и его прил., 1972, **6**, № 2, 95—96 (РЖМат, 1972, 10А264)
166. —, Глобальная размерность функциональной банаховой алгебры отлична от единицы. Тр. Мех.-мат. фак. Моск. ун-та, 1974, № 1, 39—58 (РЖМат, 1975, 5А391)
167. **Херстейн И.,** Некоммутативные кольца. Пер. с англ., М., «Мир», 1972, 191 с. (РЖМат, 1973, 5А230 К)
168. **Шайн Б. М.,** Симметричные конечные полугруппы преобразований и ядерные автоматы. Докл. АН СССР, 1972, **204**, № 2, 302—305 (РЖМат, 1972, 9А128)
169. **Щербацкий И. К.,** О совпадении примарностей. Бул. Акад. Штиинце РССМолд., Изв. АН МолдССР. Сер. физ.-техн. и мат. н., 1973, № 1, 25—30 (РЖМат, 1973, 8А229)
170. **Эмин Г. Г.,** Многообразия и бимногообразия в категории модулей над всеми кольцами. Айкакан ССР Гитутюннери Академиаи тегекагир. Математика, Изв. АН АрмССР. Математика, 1974, **9**, № 3, 212—235 (РЖМат, 1974, 12А240)
171. **Яковлев А. В.,** Классификация 2-адических представлений циклической группы восьмого порядка. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1972, **28**, 93—129 (РЖМат, 1973, 3А279)
172. **Abbey D. C.,** Dickson S. E., On indecomposable modules over algebras. Rings, Modules and Radicals, Amsterdam-London, 1973, 15—19 (РЖМат, 1976, 1А278)
173. **Adams J.,** Rings with a finitely generated total quotient ring. Can. Math., Bull., 1974, **17**, № 1, 1—4 (РЖМат, 1975, 6А536)
174. **Adamson I. T.,** Rings, modules and algebras. Edinburgh, Oliver and Boyd, 1971, VIII, 311 pp, £ 6.00 (РЖМат, 1972, 10А165 К)
175. —, Elementary rings and modules. Edinburgh, Oliver and Boyd, 1972, 136 pp. (РЖМат, 1974, 2А164 К)
176. —, Elementary rings and modules. New York, 1973, 136 pp. (РЖМат, 1974, 5А276)
177. **Adelman M.,** Abelian categories over additive ones. J. Pure and Appl. Algebra, 1973, **3**, 103—117 (РЖМат, 1974, 1А325)

178. **Ahsan J.,** Rings all whose cyclic modules are quasi-injective. Proc. Lond. Math. Soc., 1973, **27**, Part 3, 425—439 (РЖМат, 1974, 3А203)
179. —, On rings with quasiinjective cyclic modules. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1974, **19**, № 2, 139—145 (РЖМат, 1975, 7А356)
180. **Akiba T.,** Remarks on generalized rings of quotients. III. J. Math. Kyoto Univ., 1969, 9, 205—212
181. **Albu T.,** Un critère de décomposabilité des modules de torsion. Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 1971(1972), **15**, № 1, 3—8 (РЖМат, 1973, 3А280)
182. —, Asupra unor clase de module. I. Stud. şi cerc. mat., 1972, **24**, № 9, 1329—1392 (РЖМат, 1973, 5А437); II. Stud. şi cerc. mat., 1972, **24**, № 10, 1455—1501 (РЖМат, 1973, 6А445)
183. —, Modules injectifs quasi cycliques. Rev. roum. math. pures et appl., 1973, **18**, № 7, 987—996 (РЖМат, 1974, 1А414)
184. —, Quelques caractérisations des modules ayant une dimension de Gabriel. C. r. Acad. sci., 1975, **280**, № 10, А617—А620 (РЖМат, 1975, 11А375)
185. —, N a s t a s e s c u C., Décompositions primaires dans les catégories de Grothendieck commutatives. I. J. reine und Angew. Math., 1976, **280**, 172—194 (РЖМат, 1976, 10А238). II. ibid. 1976, **282**, 172—185 (РЖМат, 1976, 11А394)
186. **Alev J.,** Anneaux réflectifs Noethériens. C. r. Acad. sci., 1975, **280**, № 22, А1487—1489 (РЖМат, 1976, 1А282)
187. **Alfonsi B.,** Un contre-example à une conjecture de J. Ohm et D. E. Rush. C. r. Acad. sci., 1972, **A274**, № 24, 1695—1696 (РЖМат, 1972, 12А349)
188. **Allen P.,** N e g g e r s J., A characterization of Steinitz group rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **49**, № 1, 39—42 (РЖМат, 1976, 6А299)
189. **Allouch D.,** Morphismes de A-ensembles monogènes. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, № 14, А659—А662 (РЖМат, 1974, 5А317)
190. —, Sous R-ensembles d'un R-ensemble de fractions. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 23, 1479—1482 (РЖМат, 1975, 1А232)
191. —, Monoïdes de fractions et enveloppe injective d'un monoïde. C. r. Acad. sci., 1974, **A279**, № 25, 833—836 (РЖМат, 1975, 7А247)
192. **Amin I. A.,** On the uniqueness of decompositions of finite rank reduced torsion-free modules over a non-complete discrete valuation ring. I. Rings, Modules and Radicals, Amsterdam-London, 1973, 21—45 (РЖМат, 1976, 2А344)
193. —, Notes on the structure of modules over complete discrete valuation rings. I. Period. math. hung., 1974, **5**, № 1, 73—83 (РЖМат, 1975, 4А323)
194. **Amitsur S. A.,** On rings of quotients. Symp. mat. Ist. naz. alta mat., Vol. VIII. London—New York, 1972, 149—164 (РЖМат, 1972, 8А327)
195. **Anderson F. W.,** F u l l e r K. R., Modules with decompositions that complement direct summands. J. Algebra, 1972, **22**, № 2, 241—253 (РЖМат, 1973, 1А250)
196. —, —, Rings and categories of modules. New York, c. a., Springer, 1974, VIII, 339 pp. (РЖМат, 1975, 7А380)
197. **Aragona J.,** Dualité dans les modules topologiques sur un anneau unitaire commutatif localement compact. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, № 20, А979—А981 (РЖМат, 1974, 6А534)
198. **Arbib M.,** The automata theory of semigroup embeddings. J. Austral. Math. Soc., 1968, **8**, № 3, 568—570 (РЖМат, 1969, 2А202)
199. —, M a n e s E. G., The categorical imperative: arrows, structures and functors. Acad. Press, 1975
200. —, Z e i g e r H. P., On the relevance of abstract algebra to control theory. Automatica, 1969, **5**, № 5, 589—606 (РЖМат, 1970, 5В336)
201. **Armendariz E. P.,** Q-divisible modules. Can. Math. Bull., 1971, **14**, № 4, 491—494 (РЖМат, 1972, 8А340)
202. —, On modules over (qa)-rings. Kyungpook Math. J., 1972, **12**, 9—12

203. —, A note on semiprime rings with torsionless injective envelope. Can. Math. Bull., 1973, **16**, № 3, 429—431 (РЖМат, 1974, 6А358)
204. —, A note on extensions of Baer and P.-P.—rings. J. Austral. Math. Soc., 1974, **18**, № 4, 470—473 (РЖМат, 1975, 7А361)
205. —, F i s h e r J. W., Regular $P.$ $I.$-rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **39**, № 2, 247—251 (РЖМат, 1974, 2А258)
206. —, —, S t e i n b e r g S. A., Central localizations of regular rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **46**, № 3, 315—321 (РЖМат, 1975, 9А216)
207. —, M c D o n a l d G. R., Maximal quotient rings and S-rings. Can. J. Math., 1972, **24**, № 5, 835—850 (РЖМат, 1975, 5А250)
208. —, —, Q-divisibility and injectivity. J. Algebra, 1973, **27**, № 1, 1—10 (РЖМат, 1974, 5А302)
209. —, S t e i n b e r g S. A., Regular self-injective rings with a polynomial identity. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **190**, 417—425 (РЖМат, 1975, 3А326)
210. **Arnold D. M.,** A duality for torsion-free modules of finite rank over a discrete valuation ring. Proc. London Math. Soc., 1972, **24**, № 2, 204—216 (РЖМат, 1972, 9А335)
211. —, A duality for quotient divisible Abelian groups of finite rank. Pacif. J. Math., 1972, **42**, № 1, 11—15 (РЖМат, 1973, 6А216)
212. —, Exterior powers and torsion free modules over discrete valuation rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **170**, 471—481 (РЖМат, 1973, 7А402)
213. **Arnold H. J.,** A way to the geometry of rings. J. Geometry, 1971, **1**, 155—167
214. **Athanassiades A.,** A note on V-rings. Bull. Soc. math. Grèce, 1971, **12**, № 1, 41—45
215. **Atterton T. W.,** Definitions of integral elements and quotient rings over non-commutative rings with identity. J. Austral. Math. Soc., 1972, **13**, № 4, 433—446 (РЖМат, 1973, 4А355)
216. **Auslander M.,** B r i d g e r M., Stable module theory. Mem. Amer. Math. Soc., N 94. Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1976, 146 pp.
217. —, B u c h s b a u m D. A., Groups, rings, modules. New York, Harper and Row, 1974. 26 doll. «Publishers Weekly», 1974, **205**, № 24, 73 (РЖМат, 1975, 5А144 К)
218. —, G r e e n E. L., R e i t e n I., Modules having waists. Lect. Notes Math., 1975, **488**, 20—28 (РЖМат, 1976, 3А311)
219. —, —, —, Modules with waists. Ill. J. Math., 1975, **19**, № 3, 467—478 (РЖМат, 1976, 5А265)
220. —, R e i t e n I., Stable equivalence of Artin algebras. Lect. Notes Math., 1973, **353**, 8—71 (РЖМат, 1974, 6А329)
221. —,—, Stable equivalence of dualizing R-varieties. Adv. Math., 1974, **12**, № 3, 306—366 (РЖМат, 1974, 12А280)
222. —, —, On a generalized version of the Nakayama conjecture. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **52**, 69—74 (РЖМат, 1976, 6А390)
223. —. R o g g e n k a m p K., A characterization of orders of finite lattice type. Invent. math., 1972, **17**, № 1, 79—84 (РЖМат, 1973, 3А421)
224. **Azumaya G.,** Algebras with Hochshild dimension $\leqslant 1$. Ring theory (Proc. Conf., Park City. Utah, 1971) Acad. Press, New York, 1972, 9—27
225. —, Some properties of TTF-classes. Lect. Notes Math., 1973, **353**, 72—83 (РЖМат, 1974, 6А333)
226. —, Characterizations of semiperfect and perfect modules. Math. Z., 1974, **140**, № 2, 95—103 (РЖМат, 1975, 6А406)
227. —, M b u n t u m F., V a r a d a r a j a n K., On M-projective and M-injective modules. Pacif. J. Math., 1975, **59**, № 1, 9—16 (РЖМат, 1976, 5А269)
228. **Baer R.,** Direct decompositions of bimodules. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov. — dic., 1972. Vol. 13. London—New York, 1974, 25—107 (РЖМат, 1975, 8А327)
229. **Ballet B.** Sur les modules linéarement compacts. Bull. Soc. Math. France, 1972, **100**, № 3, 345—351 (РЖМат, 1973, 4А533)

230. —, Topologies lineaires et modules absolument purs. Colloq. algebre commut. Rennes., 1972, 4/1—4/8 (РЖМат, 1973, 6A416)
231. **Ballew D. W.**, Numerical invariants and projective modules. J. Algebra, 1971, **17**, № 4, 555—574 (РЖМат, 1972, 5A393)
232. —, The construction of projective ideals. Math. Stud., 1971, **39**, № 1-4, 297—298 (РЖМат, 1974, 2A261)
233. —, Invertible ideals in orders. Riv. mat. Univ. Parma, 1972, **1**, 265—464 (РЖМат, 1975, 11A464)
234. **Banaschewski B.**, Functors into categories of *M*-sets. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1972, **38**, 49—64 (РЖМат, 1973, 3A338)
235. —, Equational compactness of *G*-sets. Can. Math. Bull., 1974, **17**, № 1, 11—18 (РЖМат, 1975, 5A221)
236. —, Minimal topological algebras. Math. Ann., 1974, **211**, № 2, 107—114 (РЖМат, 1975, 4A366)
237. **Bäni W.**, Über Ringe welche Dicht in ihrer Modulkategorie sind. Manuscr. math., 1973, **10**, № 4, 379—394 (РЖМат, 1974, 3A213)
238. **Barnes D. W.**, Sortability of representations of Lie algebras. J. Algebra, 1973, **27**, № 3, 486—490 (РЖМат, 1974, 5A435)
239. **Barr M.**, Non-abelian torsion theories. Can. J. Math., 1973, **25**, № 6, 1224—1237 (РЖМат, 1974, 6A412)
240. —, The existence of injective effacements. Can. Math. Bull., 1975, **18**, № 1, 1—6
241. **Bass H.**, Libération des modules projectifs sur certains anneaux de polynômes. Lect. Notes Math., 1975, **431**, 228—254 (РЖМат, 1975, 11A457)
242. **Batbedat A.**, Une generalisation de la notion de module. C. r. Acad. sci., 1973, **A276**, № 2, 95—96 (РЖМат, 1973, 6A318)
243. —, Structures premodulaires. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 12, A827—A828 (РЖМат, 1973, 9A304)
244. —, Une généralisation de la notion d'espace affine. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, A169—A170 (РЖМат, 1973, 7A301)
245. —, Prealgebres. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 11, A783—A785 (РЖМат, 1973, 7A290)
246. —, Sur la pondération dans un espace affine ou une préalgèbre. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 11, 737—739 (РЖМат, 1974, 9A355)
247. —, Sur les fondements de la géométrie affine. C. r. Acad. sci., 1975, **280**, № 13, A857—A860 (РЖМат, 1975, 10A329)
248. **Beachy J. A.**, A characterization of torsionfree modules over rings of quotients. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **34**, № 1, 15—19 (РЖМат, 1973, 2A250)
249. —, A generalization of injectivity. Pacif. J. Math., 1972, **41**, № 2, 313—327 (РЖМат, 1973, 2A252)
250. —, A characterization of prime ideals. J. Indian Math. Soc., 1973, **37**, № 1-4, 343—345 (РЖМат, 1975, 11A338)
251. —, On maximal torsion radicals. I. Can. J. Math., 1973, **25**, № 4, 712—726 (РЖМат, 1974, 5A301); II. Can. J. Math., 1975, **27**, № 1, 115—120 (РЖМат, 1975, 9A205)
252. —, On maximal torsion radicals. III. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **52**, 113—116 (РЖМат, 1976, 5A250)
253. —, Bicommutators of cofaithful, fully divisible modules. Corrigendum. Can. J. Math., 1974, **26**, № 1, 256 (РЖМат, 1974, 9A311)
254. —, *T*-faithful subcategories and localization. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **195**, № 468, 61—79 (РЖМат, 1975, 5A242)
255. —, Perfect quotient functors. Communs Algebra, 1974, **2**, № 5, 403—427 (РЖМат, 1975, 7A362)
256. —, B l a i r W. D., Rings whose faithful left ideals are cofaithful. Pacif. J. Math., 1975, **58**, № 1, 1—14 (РЖМат, 1976, 4A240)
257. **Beauregard R. A.**, Localization in a principal right ideal domain. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **31**, № 1, 21—23 (РЖМат, 1972, 12A248)
258. —, Right quotient rings of a right LCM domain. Can. J. Math., 1972, **24**, № 5, 983—988 (РЖМат, 1973, 5A245)

259. —, Overrings of Bezout domains. Can. Math. Bull., 1973, **16**, № 4, 475—477 (РЖМат, 1975, 3A316)
260. —, On the inversion of right invariant elements. Can. Math. Bull., 1975, **18**, № 2, 289—290
261. **Beck I.**, Σ-injective modules. J. Algebra, 1972, **21**, № 2, 232—249 (РЖМат, 1972, 10A281)
262. —, Projective and free modules. Math. Z., 1972, **129**, № 3, 231—234 (РЖМат, 1973, 7A278)
263. **Bednarek A. R.**, N o r r i s E. M., Congruences and ideals in machines. I. Rev. roumaine math. pures et appl., 1970, **15**, № 2, 193—199 (РЖМат, 1971, 1B352)
264. **Bennet M. K.**, A characterization of a category of discrete transformation groups. Portug. math., 1969, **28**, № 1-2, 71—73 (РЖМат, 1971, 7A384)
265. **Bergè D.**, Convexité dans les modules. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 26, A1655—A1656 (РЖМат, 1973, 12A288)
266. —, Cônes dans les modules. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, № 1, A5—A6 (РЖМат, 1974, 2A283)
267. **Bergman G. M.**, Hereditarly and cohereditarly projective modules. Ring theory. Acad Press, New York—London, 1972, 29—62
268. —, Infinite multiplication of ideals in $\aleph_0$-hereditary rings. J. Algebra, 1973, **24**, № 1, 56—70 (РЖМат, 1973, 7A241)
269. —, Coproducts and some universal ring constructions. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **200**, 33—88 (РЖМат, 1975, 8A304)
270. —, Modules over coproducts of rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **200**, 1—32 (РЖМат, 1975, 8A326)
271. —, Some examples in *PI* ring theory. Isr. J. Math., 1974, **18**, № 3, 257—277 (РЖМат, 1975, 5A270)
272. —, Every right and left artinian additive category is right and left Noetherian, and related curiosities. Preprint, Univ. California, Berkeley, 1974, 23 pp.
273. —, The semigroup of ideals of a fir is (usually) free. J. London Math. Soc., 1975, **11**, № 1, 21—31 (РЖМат, 1976, 2A298)
274. **Bernhardt R. L.**, On centrally splitting. Duke Math. J., 1973, **40**, № 4, 903—905 (РЖМат, 1974, 9A305)
275. **Berthiaume P.**, Generalized semigroups of quotients. Glasgow Math. J., 1971, **12**, № 2, 150—161 (РЖМат, 1972, 10A114)
276. —, Une remarque sur les monoïdes de quotients généralisés. Can. Math. Bull., 1973, **16**, № 1, 23—25 (РЖМат, 1973, 10A132)
277. **Bertin J.**, Anneaux cohérents réguliers. C. r. Acad. sci., 1971, **A273**, № 14, 590—591 (РЖМат, 1972, 4A474)
278. —, Anneaux cohérents de dimension homologique finie. Colloq. algebre commut., Rennes, 1972, (Rennes), s. a., 16/1—16/11 (РЖМат, 1973, 6A452)
279. **Besserre A.**, Sur quelques propriétés des couples d'anneaux ou de modules. J. math. pures et appl., 1967, **46**, № 4, 313—352 (РЖМат, 1968, 12A317)
280. **Betsch G.**, Primitive near-rings. Math. Z., 1973, **130**, № 4, 351—361 (РЖМат, 1973, 10A263)
281. **Bhatwadekнr S. M.**, On the grobal dimension of Ore-extensions. Nagoya Math. J., 1973, **50**, 217—225 (РЖМат, 1973, 12A373)
282. **Bican L.**, Pure closures. Czechosl. Math. J., 1972, **22**, № 1, 78—82 (РЖМат, 1972, 8A342)
283. —, Projective purities. Comment. math. Univ. carol., 1972, **13**, № 1, 99—107 (РЖМат, 1972, 8A344)
284. —, Notes on purities. Czechosl. Math. J., 1972, **22**, № 4, 525—534 (РЖМат, 1973, 4A361)
285. —, A remark on *n*-torsion-free modules. Comment. math. Univ. carol., 1973, **14**, № 2, 223—229 (РЖМат, 1974, 1A266)

286. —, *OF-3'* modules and rings. Comment. math. Univ. carol., 1973, **14**, № 2, 295—303 (РЖМат, 1974, 3А185)
287. —, A remark on projectively closed purities. Czechosl. Math. J., 1974, **24**, № 1, 1—4 (РЖМат, 1974, 11А330)
288. —, Completely decomposable Abelian groups any pure subgroup of which completely decomposable. Czechosl. Math. J., 1974, **24**, № 2, 176—191 (РЖМат, 1975, 2А221)
289. —, Preradicals and injectivity. Pacif. J. Math., 1975, **56**, № 2, 367—372
290. —, Jambor P., Kepka T., Nemec P., On rings with trivial torsion parts. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, **9**, № 2, 275—290 (РЖМат, 1974, 8А256)
291. —, —, —, —, Preradicals. Comment. math. Univ. carol., 1974, **15**, № 1, 75—83 (РЖМат, 1974, 9А303)
292. —, —, —, —, Composition of preradicals Comment. math. Univ. carol., 1974, **15**, № 3, 393—405 (РЖМат, 1975, 4А286)
293. —, —, —, —, Preradicals and chance of rings. Comment. math. Univ. carol., 1975, **16**, № 2, 201—217 (РЖМат, 1975, 12А270)
294. —, —, —, —, Stable and costable radicals preradicals. Acta Univ. carol. Math. et phys., 1975, **16**, № 2, 63—69 (РЖМат, 1976, 8А364)
295. —, Kepka T., On stable rings. Publ. Math. Debrecen, 1975, **22**, № 3-4, 235—244 (РЖМат, 1976, 9А271)
296. —, —, Nemec P., Torsion theories and homological dimension. J. Algebra, 1975, **35**, № 1-3, 99—122 (РЖМат, 1976, 1А423)
297. **Bichot J.**, Modules continus. Publs Dép. math., 1971, 8, № 1, 55—61 (РЖМат, 1973, 7А271)
298. —, Propriétés d'unicité supplémentaires. Publs. Dép. math., 1972, **9**, № 3, 59—65 (РЖМат, 1974, 5А297)
299. **Bieri R.**, Über die cohomologische Dimension der auflösbaren Gruppen. Math. Z., 1972, **128**, № 3, 235—243 (РЖМат, 1973, 4А502)
300. **Bigard A.**, Sur les orthomorphismes d'un espace réticulé archimédien. C. r. Acad. sci., 1971, **272**, № 1, A10—A12 (РЖМат, 1971, 6А239)
301. —, Les orthomorphismes d'un espace réticulé archimédien. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1972, **A75**, 236—246 (РЖМат, 1972, 11А159)
302. —, Modules ordonnés injectifs. Bull. Soc., math. Belg., 1972, **24**, № 3, 238—248 (РЖМат, 1974, 5Б871)
303. —, Free lattice-ordered modules. Pacif. J. Math., 1973, **49**, № 1, 1—6 (РЖМат, 1974, 9А317)
304. —, Modules ordonnés injectifs. Mathematika, Cluj, 1973, **15**, (38), 15—24
305. **Björk J.-E.**, Radical properties of perfect modules. J. reine und angew. Math., 1972, **253**, 78—86 (РЖМат, 1972, 11А205)
306. —, The global homological dimension of some algebras of differential operators. Invent. math., 1972, **17**, № 1, 67—78 (РЖМат, 1973, 2А350)
307. —, The global homological dimension of some algebras of differential operators. Var. Publs Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1972, № 23, 1—21 (РЖМат, 1973, 4А490)
308. —, Dimensions of modules over algebras of differential operators. Colloq. int. CNRS, 1974, № 208, 6—11 (РЖМат, 1975, 6А518)
309. **Blair W. D.**, Right Noetherian rings integral over their centers. J. Algebra, 1973, **27**, № 1, 187—198 (РЖМат, 1974, 3А188)
310. —, Quotient rings of algebras which are module finite and projective. Acta sci. math., 1974, **36**, № 3-4, 265—266 (РЖМат, 1975, 11А368)
311. **Bland P. E.**, Rings over which every module is quasi-rationally complete. J. Nat. Sci. and Math., 1970, **10**, 269—274
312. —, Quasi-corational extensions. Arch. Math., 1972, **23**, № 2, 154—160 (РЖМат, 1973, 1А256)
313. —, Perfect torsion theories. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **41**, № 2, 349—355 (РЖМат, 1974, 7А412)
314. —, Divisible and codivisible modules. Math. scand., 1974, **34**, № 2, 153—161 (РЖМат, 1975, 9А229)
315. —, A note on divisible and codivisible dimension. Bull. Austral Math. Soc., 1975, **12**, № 2, 171—177 (РЖМат, 1975, 12А388)

316. **Bleier R.**, Conrad P., The lattice of closed ideals and α-extensions of an abelian l-group. Pacif. J. Math., 1973, **47**, № 2, 329—340 (РЖМат, 1974, 5А315)
317. **Block R. E.**, Modules over differential polynomial rings. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, **79**, № 4, 729—733 (РЖМат, 1974, 8А258)
318. **Boero P.**, Metodi omologici elementare nella teoria dei sistemi de equazioni. I. Rend. Sem. mat. Univ. Padova, 1967, **37**, 289—306 (РЖМат, 1967, 12А329); II. Rend. Sem. mat. Univ. Padova., 1968, **41**, 349—361 (РЖМат, 1969, 12А479)
319. —, Metodi omologici elementari nella teoria dei sistemi di equazioni. I. Publ. Ist. mat. Univ. Genova, 1967(1968), № 177, 18 pp.
320. **Boisen M. B., Jr.**, The containment property for large quotient rings. J. reine and angew. Math., 1973, **258**, 55—61 (РЖМат, 1973, 8А346)
321. **Bonnard G.**, Sur une certaine classe de modules. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 23, A1601—A1604 (РЖМат, 1973, 1А247)
322. —, Sur une certaine classe de modules. C. r. Acad. sci., 1972, **275**, № 4, A249—A250 (РЖМат, 1973, 2А364)
323. —, Sur un problème d'algèbre commutative: modules scindants et modules coscindants. J. Algebra, 1975, **35**, № 1-3, 72—85 (РЖМат, 1976, 2А513)
324. **Boratyński M.**, Injective dimension and completeness. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, № 2, 357—361 (РЖМат, 1973, 6А396)
325. —, On the unjective dimension of $\aleph_0$-injective modules. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math. astron. et phys., 1971, **19**, № 8, 705—709 (РЖМат, 1972, 3А350); Поправка: Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math. astron. et phys., 1974, **22**, № 3, 247—249 (РЖМат, 1974, 9А438)
326. **Borrego J. T.**, De Vun E. E., Maximal semigroup orbits. Semigroup Forum, 1972, **4**, № 1, 61—68 (РЖМат, 1972, 9А144)
327. **Bouvier A.**, Résultats nouveaux sur les anneaux présimpli fiables. C. r. Acad. sci., 1972, **275**, № 20, A955—A957 (РЖМат, 1973, 5А422)
328. **Bowe J. J.**, Neat homomorphisms. Pacif. J. Math., 1972, **40**, № 1, 13—21 (РЖМат, 1972, 12А254)
329. **Boyle A. K.**, When projective covers and injective hulls are isomorphic. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, 8, № 3, 471—476 (РЖМат, 1974, 2А247)
330. —, Hereditary *QI*-rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **192**, № 465, 115—120 (РЖМат, 1975, 4А294)
331. **Brandal W.**, Almost maximal integral domains and finitely generated modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **183**, Sept., 203—222 (РЖМат, 1974, 9А481)
332. **Bray E. E.**, Byrd K. A., Bernhardt R. L., The injective envelope of the upper triangular matrix ring. Amer. Math. Mon., 1971, **78**, № 8, 883—886 (РЖМат, 1972, 5А289)
333. **Brenner Sh.**, Large indecomposable modules over a ring of 2×2 triangular matrices. Bull. London Math. Soc., 1971, **3**, № 9, 333—336 (РЖМат, 1972, 8А326)
334. —, On two questions of M. Auslander. Bull. London Math. Soc., 1972, **4**, № 3, 301—302 (РЖМат, 1974, 2А254)
335. **Brewer J. W.**, Flat rings extensions of a commutative rings. Ring Theory. Proc. Okla Conf., 1973. New York, 1974, 197—206 (РЖМат, 1974, 7А584)
336. —, Costa D. L., Lady E. L., Prime ideals and localization in commutative group rings. J. Algebra, 1975, **34**, № 2, 300—308 (РЖМат, 1975, 12А264)
337. **—, Heinzer W. J., Ideals** I of $R[X]$ for which $R[X]/I$ is R-projective. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **43**, № 1, 21—25 (РЖМат, 1975, 4А473)
338. —, Montgomery P. R., The finiteness of I when $R[X]/I$ is R-projective, tive. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **41**, № 2, 407—414 (РЖМат, 1974, 9А471)

339. —, Rutter E. A., A note on finitely generated ideals which are locally principal. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **31**, № 2, 429—432 (РЖМат, 1972, 10A277)
340. —, —, Descent for flatness. J. Algebra, 1972, **22**, № 1, 89—96 (РЖМат, 1972, 12A336)
341. —, —, A note on the faithfulness of the functor $S \otimes_R (-)$. Lect. Notes Math., 1973, **311**, 46—49 (РЖМат, 1973, 7A374)
342. **Britten D.**, On prime Jordan rings $H(R)$ with chain condition. J. Algebra, 1973, **27**, № 2, 414—421 (РЖМат, 1974, 6A378)
343. **Bronn S. D.**, Cotorsion theories. Pacif. J. Math., 1973, **48**, № 2, 355—363 (РЖМат, 1974, 9A308)
344. **Bronowitz R.**, Teply M. L., Torsion theories of simple type. J. Pure and Appl. Algebra, 1973, **3**, № 4, 329—336 (РЖМат, 1974, 8A271)
345. **Brown D. E.**, Valuations and rings of quotients. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **43**, № 2, 277—282 (РЖМат, 1975, 4A463)
346. **Brown R.**, Valued vector spaces of countable dimension. Publs math., 1971, **18**, № 1-4, 149—151 (РЖМат, 1973, 5A213)
347. **Brown S. H.**, Rings over which every simple module is rationally complete. Can. J. Math., 1973, **25**, № 4, 693—701 (РЖМат, 1974, 3A209)
348. **Brungs H. H.**, Subkommutative Dedekindringe. Publs math., 1971, **18**, № 1-4, 89—94 (РЖМат, 1973, 5A242)
349. —, Right invariant right hereditary rings. Can. J. Math., 1974, **26**, № 5, 1186—1191 (РЖМат, 1975, 7A346)
350. —, Three questions on duo rings. Pacif. J. Math., 1975, **58**, № 2, 345—350 (РЖМат, 1976, 4A227)
351. —, Filters and overrings. J. Austral. Math. Soc., 1975, **19**, № 4, 474—480 (РЖМат, 1976, 1A325)
352. **Brunner J.**, Hamann C.-J., Redundanz und Komposition von Automaten. Math. Nachr., 1974, **59**, № 1-6, 207—211 (РЖМат, 1974, 11A367)
353. **Bryant R. M.**, A note on modules over finite rings. J. London Math. Soc., 1975, **11**, № 2, 191—194 (РЖМат, 1976, 4A248)
354. **Budach L.**, Quotientenfunktoren und Erweiterungstheorie. Deutsche Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, vii+202 S.
355. —, Hoehnke H.-J., Automaten und Funktoren. (Math. Lehrb. und Monogr., Abt. 2. Math. Monogr., 35) Berlin, Akad.-Verl., 1975. XI, 383 S., (РЖМат, 1976, 2A396)
356. —, Holzapfel R. P., Localizations of Grothendieck categories. Berlin, VEB Dtsch. Verl. wiss., 1975, 217 pp. (РЖМат, 1976, 10A233K)
357. **Burgess W. D.**, A ring of quotients for group rings which is easy to describe. Can. Math. Bull., 1973, **16**, № 4, 497—500 (РЖМат, 1974, 11A323)
358. —, Raphael R., Abian's order relation and orthogonal completions for reduced rings. Pacif. J. Math., 1974, **54**, № 1, 55—64 (РЖМат, 1975, 9A202)
359. **Butts H. S.**, Spaht C. G., Generalized quotient rings. Math. Nachr., 1972, **53**, № 1-6, 181—210 (РЖМат, 1973, 3A415)
360. **Byrd K. A.**, When are quasi-injectives injective? Can. Math. Bull., 1972, **15**, № 4, 599—600 (РЖМат, 1973, 7A275)
361. —, Rings whose quasi-injective modules are injective. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **33**, 235—240 (РЖМат, 1973, 3A266)
362. **Cahen P.-J.**, Torsion theory and associated primes. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **38**, № 3, 471—476 (РЖМат, 1974, 1A406)
363. —, Premiers et copremiers sur un anneau Noethérien. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, № 6, A277—A280 (РЖМат, 1974, 3A189)
364. —, Premiers de Goldman au dessus des idéaux premiers d'un anneau commutatif. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, № 7, A305—A306 (РЖМат, 1974, 4A217)
365. —, Commutative torsion theory. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **184**, Oct., 73—85 (РЖМат, 1974, 9A479)
366. —, Premiers, copremiers et fibres. Publs Dép. math., 1973, **10**, № 1, 9—24 (РЖМат, 1974, 9A294)

367. —, Chabert J.-L., Coefficient et valeurs d'un polynôme. Bull. sci. math., 1971, **95**, № 4, 295—304
368. **Camillo V. P.**, A note on semi-hereditary rings. Arch. Math., 1973, **24**, № 2, 142—143 (РЖМат, 1973, 10A341)
369. —, Semihereditary polynomial rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **45**, № 2, 173—174 (РЖМат, 1975, 6A540)
370. —, On some rings whose modules have maximal submodules. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **50**, 97—100 (РЖМат, 1976, 4A226)
371. —, Cozzens J., A theorem on Noetherian hereditary rings. Pacif. J. Math., 1973, **45**, № 1, 35—41 (РЖМат, 1974, 1A252)
372. —, Fuller K. R., Balanced and QF-1 algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **34**, 373—378 (РЖМат, 1973, 4A345)
373. —, —, On Loewy length of rings. Pacif. J. Math., 1974, **53**, № 2, 347—354 (РЖМат, 1975, 7A345)
374. **Camion P.**, Bases d'éléments positifs de modules sur un anneau principal. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 21, 1331—1334 (РЖМат, 1975, 2A325)
375. —, Levy L. S., Mann H. B., Linear equations over a commutative rings. J. Algebra, 1971, **18**, № 3, 432—446 (РЖМат, 1972, 5A400)
376. **Campbell J. M.**, Torsion theories and coherent rings. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, **8**, № 2, 233—239 (РЖМат, 1973, 12A289)
377. **Carreau F.**, Sous-catégories réflexives et la théorie générale des radicaux. Fund. math., 1971, **71**, № 3, 223—242 (РЖМат, 1972, 3A287)
378. **Carson A. B.**, Coherence of polynomial rings over semisimple algebraic algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **34**, № 1, 20—24 (РЖМат, 1973, 2A238)
379. —, Partially self-injective regular rings. Can. Math. Bull., 1973, **16**, № 4, 501—505 (РЖМат, 1975, 2A347)
380. **Cateforis V. C.**, Minimal injective cogenerators for the class of modules of zero singular submodule. Pacif. J. Math., 1972, **40**, № 3, 527—539 (РЖМат, 1972, 12A252)
381. Category Theory Applied to Computation and Control. Proc. Ist. Int. Symp., San Francisco, Febr. 25—26, 1974. Ed. Manes E. G., (Lect. Notes Comput. Sci., 25). Berlin e. a. Springer, 1975, 245 pp. (РЖМат, 1976, 1A29)
382. **Cauchon G.**, Les T-anneaux et la condition de Gabriel. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, № 24, A1153—A1156 (РЖМат, 1974, 7A372)
383. —, Dé composition des modules en intersections finies. Publ. Math. Orsay, № 44, Univ. Paris XI, Orsay, 1973
384. —, Sur l'intersection des puissances du radical d'un T-anneau Noethérien. C. r. Acad. sci., 1974, **A279**, № 3, 91—93 (РЖМат, 1975, 2A305)
385. **Cavanaugh J. M.**, Projective modules over the rings of regular functions of the L-holed torus. Doct. diss. Syracuse Univ., 1970, 50 pp. Diss. Abstrs Int., 1971, **B32**, № 1, 425 (РЖМат, 1972, 3A394)
386. **Chamarie M.**, Localization dans les orders maximauxs réguliers. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 26, A1643—A1645 (РЖМат, 1974, 2A262)
387. —, Localisations dans les orders maximaux non nécesairement régulieres. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 8, 529—531 (РЖМат, 1974, 9A296)
388. —, Localisations dans les orders maximaux. Communs Algebra, 1974, **2**, № 4, 279—293 (РЖМат, 1975, 6A398)
389. **Chang Fu Hsiung**, On quasi global dimension. Taita Math. J., 1969, **1**, 1—20
390. **Chatters A. W.**, Localisation in PI-rings. J. London Math. Soc., 1970, **2**, № 4, 763—768 (РЖМат, 1972, 1A430)
391. —, A decomposition theorem for Noetherian hereditary rings. Bull. London Math. Soc., 1972, **4**, № 2, 125—126 (РЖМат, 1973, 7A253)
392. —, A non-singular Noetherian ring need not have a classical quotient ring. J. London Math. Soc., 1975, **10**, № 1, 66—68 (РЖМат, 1975, 12A262)
393. —, Ginn S. M., Localisation in hereditary rings. J. Algebra, 1972, **22**, 82—88 (РЖМат, 1973, 1A235)

394. —, Heinicke A. G., Localization at a torsion theory in hereditary Noetherian rings. Proc. London Math. Soc., 1973, **27**, № 2, 193—204 (РЖМат, 1974, 4А219)
395. **Cheatham T. J.**, Finite dimensional torsion-free rings. Pacif. J. Math. 1971, **39**, № 1, 113—118 (РЖМат, 1972, 6А266)
396. —, Direct sums of torsion-free covers. Can. J. Math., 1973, **25**, № 5, 1002—1005 (РЖМат, 1974, 5А298)
397. —, Cumbie R., Test modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **49**, № 2, 310—314 (РЖМат, 1976, 3А309)
398. —, Enochs E., The epimorphic images of a Dedekind domain. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, № 1, 37—42 (РЖМат, 1973, 4А518)
399. **Choo K. G.**, Lam K. Y., Luft E., On free product of rings and the coherence property. Lect. Notes Math., 1973, **342**, 135—143 (РЖМат, 1974, 7А563)
400. **Choudhary S. C.**, Tewari K., On strictly semi-simpie near rings. Abh. math. semin. Univ. Hamburg, 1974, 40, März., 256—264 (РЖМат, 1975, 2А339)
401. **Chung I. Y.** Derivation modules of free joins and m-adic completions of algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **34**, № 1, 49—56 (РЖМат, 1973, 2А359)
402. **Clark J.**, On the associativity of the torsion functor. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, **10**, № 1, 107—118 (РЖМат, 1974, 11А444)
403. **Cline E.**, Stable Clifford theory. J. Algebra, 1972, **22**, № 2, 350—364 (РЖМат, 1973, 4А296)
404. **Cohen D. E.**, Groups of cohomological dimension one. Lect. Notes Math., 1972, **245**, IV, 99 pp. (РЖМат, 1972, 8А454)
405. **Cohen G. E.**, Profinite modules. Can. Math. Bull., 1973, **16**, № 3, 405—415 (РЖМат, 1974, 6А380)
406. **Cohn P. M.** The embedding of firs in skew fields. Proc. London Math. Soc., 1971, **23**, № 2, 193—213 (РЖМат, 1972, 2А358)
407. —, Free ideal rings and free products of rings. Actes Congr. int. mathématiciens, 1970. T 1, Paris, 1971, 273—278 (РЖМат, 1972, 3А234)
408. —, Universal skew fields of fractions. Symp. mat. Ist. naz. alta mat. Vol. 8. London—New York, 1972, 135—148 (РЖМат, 1972, 8А328)
409. —, Bound modules over hereditary rings. В сб. «Избр. вопр. алгебры и логики». Новосибирск. «Наука», 1973, 131—141 (РЖМат, 1973, 11А261)
410. —, Inversive localisation in Noetherian rings. Communs Pure and Appl. Math., 1973, **26**, № 5-6, 679—691 (РЖМат, 1974, 12А213)
411. —, Localization in semifirs. Bull. London Math. Soc., 1974, **6**, № 1, 13—20 (РЖМат, 1974, 11А320)
412. —, Progress in free associative algebras. Isr. J. Math., 1974, **19**, № 1-2, 109—151 (РЖМат, 1975, 10А275)
413. **Colby R. R.**, Rings whien have flat injective modules. J. Algebra, 1975, **35**, № 1-3, 239—252 (РЖМат, 1976, 1А275)
414. **Coleman D. B.**, Cunningham J., Nondegenerate Righer degree forms over Dedekind domains. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **52**, № 1, 65—68 (РЖМат, 1976, 5А423)
415. **Conlon S. B.**, Some remarks on the Krull—Schmidt theorem. Proc. Symp. Pure Math. V. 21. Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R. I., 1971, 29—31 (РЖМат, 1974, 8А268)
416. **Conrad P. F.**, Representation of partially ordered Abelian groups as groups of real valued functions. Acta math., 1966, **116**, № 3-4, 199—221 (РЖМат, 1967, 5А241)
417. —, The topological completion and lineary compact hull of an Abelian l-group. Proc. London Math. Soc., 1974, **28**, № 3, 457—482 (РЖМат, 1975, 1А298)
418. —, Epi-archimedian groups. Czechosl. Math. J., 1974, **24**, № 2, 192—218 (РЖМат, 1975, 1А299)
419. —, Countable vector lattices. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, **10**, № 3, 371—376 (РЖМат, 1975, 6А344)

420. **Cornish W.**, The variety of commutative Rickart rings. Nanta Math., 1972, **5**, № 2, 43—51
421. **Corral de Arêa Leão Ana Maria**, Anel total de frações de um anel A. Bol. Dep. mat. Fac. filos. cienc. e let. Presidente. Prudente, S. Paulo, 1972, 67—73 (РЖМат, 1974, 10А345)
422. **Corsini P.**, Micali A., Etude de certaines algèbres associatives graduées. An. Acad. Brasil. ciêpc., 1971, **43**, № 3-4, 553—561 (РЖМат, 1973, 1А394)
423. **Cox L. H.**, Formal A-modules. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, **79**, № 4, 690—694 (РЖМат, 1974, 9А491)
424. —, Formal A-modules over p-adic integer rings. Compos. math., 1974, **29**, № 3, 287—308 (РЖМат, 1975, 9А283)
425. **Cox S.**, Rush D., Endomorphisms of finite rank flat modules. Duke Math. J., 1972, **39**, № 2, 323—326 (РЖМат, 1973, 2А363)
426. —, —, Finiteness in flat modules and algebras. J. Algebra, 1974, **32**, № 1, 44—50 (РЖМат, 1975, 5А427)
427. **Cozzens J.**, Simple principal left ideal domains. J. Algebra, 1972, **23**, № 1, 66—75 (РЖМат, 1973, 2А241)
428. —, Twisted group rings and a problem of Faith. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, **9**, № 1, 1—9 (РЖМат, 1974, 4А220)
429. —, Faith C., Simple Noetherian rings. Cambridge Univ. Press, 1975, 135 pp.
430. —, Johnson J., Some applications of differential algebra to ring theory. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **31**, № 2, 354—356 (РЖМат, 1972, 12А327)
431. **Crawley P.**, Jónsson B., Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems. Pacif. J. Math., 1964, **14**, № 3, 797—855 (РЖМат, 1966, 6А249)
432. **Csákány B.**, Varieties of affine modules. Acta sci. math., 1975, **37**, № 1-2 (РЖМат, 1976, 4А247)
433. —, Varieties in which congruences and subalgebras are amicable. Acta sci. math., 1975, **37**, № 1-2, 25—31 (РЖМат, 1976, 4А299)
434. —, On affine spaces over prime fields. Acta sci. math., 1975, **37**, № 1-2, 33—36 (РЖМат, 1976, 5А308)
435. —, Varieties of modules and affine modules. Acta math. Acad. sci. hung., 1975, **26**, № 3-4, 263—266 (РЖМат, 1976, 7А342)
436. —, Megyesi L., Varieties of idempotent medial quasigroups. Acta sci. math., 1975, **37**, № 1-2, 17—23 (РЖМат, 1976, 6А284)
437. **Cunningham J.**, Quotient sheaves and valuation rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **164**, Febr., 227—239 (РЖМат, 1972, 11А298)
438. **Cunningham R. S.**, On finite left localizations. Pacif. J. Math., 1974, **51**, № 2, 407—415 (РЖМат, 1975, 5А271)
439. —, Rutter E. A., Jr., The double centralized property is categorical. Rocky Mount. J. Math., 1972, **2**, № 4, 627—629
440. —, —, Perfect modules. Math. Z., 1974, **140**, № 2, 105—110 (РЖМат, 1975, 6А407)
441. —, —, Turnidge D., Rings of quotients of endomorphism ring of projective modules. Pacif. J. Math., 1972, **41**, № 3, 647—668 (РЖМат, 1973, 3А276)
442. **Cusick D.**, Torsion submodule and injective hull. Proc. West Virginia Acad. Sci., 1973(1974), **45**, 347—351
443. **Darbo G.**, Sulla rappresentazione parametrica della soluzione generale di un sistema di equazioni lineari in un modulo sopra un anello principale. Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1967, **37**, 307—311 (РЖМат, 1967, 11А280)
444. **Davis G.**, Ortogonality relations on Abelian groups. J. Austral. Math. Soc., 1975, **19**, № 2, 173—179 (РЖМат, 1975, 12А240)
445. **Davison M. M. K.**, Distributive homomorphisms of rings and modules. J. reine und angew. Math., 1974, 28—34 (РЖМат, 1975, 7А562)

446. **Day B.**, Note on monoidal localization. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, 8, № 1, 1—16 (РЖМат, 1973, 9А307)
447. **Delorme M.**, Sur les notions d'exactitude et de platitudes dans le catégorie des D-systèmes une caractérisation des demi-groupes principaux. C. r. Acad. sci., 1973, **A276**, № 4, 229—232 (РЖМат, 1973, 7А169)
448. **De Marco G.**, Orsatti A., Complete linear topologies on Abelian groups. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic., 1972. Vol. 13. London—New York, 1974, 153—161 (РЖМат, 1975, 5А223)
449. **De Munter-Kuyl L.**, Modules sans torsion de rang fini sur un anneau de Dedekind. Thèse. Fac. Sci. Univ Libre de Bruxelles, Bruxelles, 1971, 133 pp.
450. **Deshpande M. G.**, Structure of right subdirectely irreducible rings. II. Pacif. J., 1972, **42**, № 1, 39—44 (РЖМат, 1973, 5А234)
451. **Deussen P.**, Some results on the set of congruence relations in a finite, strongly connected automation. Computing, 1967, 2, № 4, 353—367 (РЖМат, 1968, 10В324)
452. **Djabali M.-K.**, Etude de la condition artinienne. Bull. sci. math. France, 1974, **98**, № 3, 145—161 (РЖМат, 1975, 9А209)
453 **Djokovic D Ž.**, Epimorphism of modules which must be isomorphisms. Can. Math. Bull., 1973, **16**, № 4. 513—515 (РЖМат, 1975, 3А344)
454. **Dlab V.**, Ringel C. M., Balanced local rings with commutative residue fields. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, **78**, № 5, 771—774 (РЖМат, 1973, 5А248)
455. —, —, Balanced rings. Lect. Notes Math., 1972, **246**, 73—143 (РЖМат, 1972, 8А314)
456. —, —, Rings with the double centralizer property. J. Algebra, 1972, 22, 480—501 (РЖМат, 1973, 3А267)
457. —, —, Decomposition of modules over right uniserial rings. Math. Z., 1972, **129**, № 3, 207—230 (РЖМат, 1973, 7А277)
458. —, —, Sur la conjecture de Brauer — Thrall. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 22, А441—А442 (РЖМат, 1974, 1А262)
459. —, —, Représentation indécomposables des algèbras. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 21, А1393—А1396 (РЖМат, 1973, 11А253)
460. —, —, The structure of balanced rings. Proc. London Math. Soc., 1973, **26**, № 3, 446—462 (РЖМат, 1973, 12А282)
461. —, —, A construction of rings whose injective hulls allow a ring structure. J. Austral. Math. Soc., 1973, **16**, № 1, 7—13 (РЖМат, 1974, 7А371)
462. —, —, Exceptional rings. Rings, Modules and Radicals. Amsterdam—London, 1973, 167—171 (РЖМат, 1976, 2А313)
463. —, Ringel M., On algebras of finite representation type. J. Algebra, 1975, **33**, № 2, 306—394 (РЖМат, 1976, 1А303)
464. **Dobbs D. E.**, Remarks on faithful flatness. Portug, math., 1973, 32, 53—57
465. **Douglas A. J.**, Farahat H. K., The homological dimension of an Abelian group as a module over its ring of endomorphisms. II. Monatsh. Math., 1972, **76**, № 2, 109—111 (РЖМат, 1973, 1А259); III. Monatsh. Math., 1975, **80**, 37—44 (РЖМат, 1976, 2А486)
466. **Drake D. A.**, Coordinatization of H-planes by H-modules. Math. Z., 1970, **115**, № 2, 79—103 (РЖМат, 1970, 12А247)
467. **Dubois D.**, Modules of sequences of elements of a ring. J. London Math. Soc., 1966, **41**, № 1, 177—180 (РЖМат, 1968, 1А279)
468. **Dubois P. F.**, Generally p^{α}-torsion complete Abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, **159**, 245—255 (РЖМат, 1972, 7А171)
469. **Dühl G.**, Über Spezialfälle des Assoziativgesetzes in ebenen Quasimoduln. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1972, **37**, № 1-2, 30—45 (РЖМат, 1972, 8А385)
470. **Dulin B. J.**, Mosher J., The Dedekind property for semirings. J. Austral Math. Soc., 1972, **14**, № 1, 82—90 (РЖМат, 1973, 2А274)
471. **Dunn S.**, On the structure of quotient rings which are QFX rings. Can. Math. Bull., 1957, **18**, № 2, 203—208
472. **Ecker K.**, Algebraische Eigenschaften linearer Automaten. Ber. Ges. Math. und Datenverarb., 1974, № 87, 30 S. (РЖМат, 1975, 2А202)
473. —, Ratschek H., Über die erkennbare Wortmenge linearer nilpotenter Automaten. Ber. Ges. Math. und Datenverarb., 1973, № 78, 19 S. (РЖМат, 1974, 6А221)
474. **Eckstein F.**, Topological rings of quotients and rings without open left ideals. Communs Algebra, 1974, **1**, 365—376
475. **Eerkes C. L.**, Codominant dimension of rings and modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **176**, 125—139 (РЖМат, 1974, 2А353)
476. **Eisenbud D.**, Some directions of recent progress in commutative algebra. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. Vol. XXIX, 1975 (Algebraic Geometry Arcata, 1974)
477. —, Evans E. G., Jr., Basis elements: theorems from algebraic K-theory. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, **78**, № 4, 546—549 (РЖМат, 1973, 3А394)
478. —, —, Three conjectures about modules over polinomial rings. Lect. Notes Math., 1973, **311**, 78—79 (РЖМат, 1973, 7А378)
479. —, —, Generating modules efficiently: theorems from algebraic K-theory. J. Algebra, 1973, **27**, № 2, 278—305 (РЖМат, 1974, 6А532)
480. **Eisenreich G.**, p-Vektormoduln und Determinantenideale. Math. Nachr., 1971, **50**, № 1-6, 69—77 (РЖМат, 1972, 7А344)
481. **Eklof P. C.**, Homogeneous universal modules. Math. scand., 1971, **29**, № 2, 187—196 (РЖМат, 1973, 3А282)
482. **Elliger S.**, Zu dem Satz von Krull-Remark-Schmidt-Azumaya. Math. Z., 1970, **115**, № 3, 227—230 (РЖМат, 1971, 2А242)
483. —, On simple injective rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **40**, 93—94 (РЖМат, 1974, 4А197)
484. —, Präradikale und Endomorphismenringe von Moduln. Aequat. math., 1974, **10**, № 1, 118—119 (РЖМат, 1974, 9А307)
485. —, Präradikale und Endomorphismenringe von Moduln. Aequat. math., 1975, **12**, № 1, 84—93 (РЖМат, 1975, 10А300)
486. **Ely R. E.**, Multiple idealizers and hereditary Noetherian prime rings. J. London Math. Soc., 1974, **7**, № 4, 673—680 (РЖМат, 1974, 9А282)
487. **Enochs F.**, A note on semihereditary rings. Can. Math. Bull., 1973, **16**, № 3. 439—440 (РЖМат, 1974, 8А327)
488. **Evans E. G. Jr.**, On epimorphisms to finetely generated modules. Pacif. J. Math., 1971, **37**, № 1, 47—50 (РЖМат, 1972, 2А337)
489. —, Projective modules as fiber bundles. Proc. Math. Soc., 1971, **27**, № 3, 623—626 (РЖМат, 1972, 4А448)
490. —, Krull-Schmidt and cancellation over local rings. Pacif. J. Math., 1973, **46**, № 1, 115—121 (РЖМат, 1973, 12А394)
491. —, Basic elements and generators of modules. Ring Theory (Proc. Okla Conf., 1973), Lect. Notes Pure and Appl. Math. Vol. 7, Dekker, New York, 1974, 95—100 (РЖМат, 1974, 7А582)
492. —, On a theorem of Bourbaki. Queen's Pap. Pure and Appl. Math., 1974, № 41, 11—12 (РЖМат, 1975, 12А419)
493. **Evans M. W.**, On commutative $P.\ P$ rings. Pacif. J. Math., 1972, **41**, № 3, 687—697 (РЖМат, 1973, 4А529)
494. —, Some topics in non-singular rings. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, **9**, № 3, 471—472 (РЖМат, 1974, 8А253)
495. —, On commutative $P.\ P.$ rings. Pacif. J. Math., 1972, **41**, 687—697 (РЖМат, 1973, 4А529)
496. —, Projectively torsion-free modules. J. Austral. Math. Soc., 1975, **20**, № 2, 207—221 (РЖМат, 1976, 2А349)
497. **Faith C.**, A correspondence theorem for projective modules and the structure of simple Noetherian rings. Symp. mat. Ist. naz. alta mat. Vol. 8. London—New York, 1972, 309—345 (РЖМат, 1972, 9А248); поправка: Symp. math. Conv. 1971—1972. Vol. 10. London—New York, 1972, 471—472 (РЖМат, 1973, 10А253)

498. —, When are proper cyclics injective? Pacif. J. Math., 1973, **45**, № 1, 97—112 (РЖМат, 1973, 11A260)
499. —, Algebra, Rings, Modules and Categories. I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1973, XXIII+565 pp. (РЖМат, 1974, 6A327); II. Ring Theory. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1976, 330 p.
500. —, On the structure of indecomposable injective modules. Communs Algebra, 1974, 2, № 6, 559—571 (РЖМат, 1975, 9A225)
501. **Fakhruddin S. M.**, Modules over Prüfer domains. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, **159**, 469—487 (РЖМат, 1972, 7A341)
502. —, The Grothendieck group of torsion-free modules of finite rank over a valuation ring. J. Algebra, 1971, **17**, № 1, 25—33 (РЖМат, 1971, 9A336)
503. —, Pure-injective modules. Glasgow Math. J., 1973, **14**, № 2, 120—122 (РЖМат, 1974, 6A533)
504. —, Linearly compact modules over Noetherian rings. J. Algebra, 1973, **24**, № 2, 544—550 (РЖМат, 1976, 6A424)
505. —, Modules de type cofini. C. r. Acad. sci., 1975, **280**, № 5, A249—A250 (РЖМат, 1975, 8A414)
506. **Fakir S.**, On relative injective envelopes. J. Pure and Appl. Algebra, 1971, **1**, № 4, 377—383 (РЖМат, 1972, 8A410)
507. —, H a d d a d L., Objects cohérents et ultraproduits dans les catégories. J. Algebra, 1972, **21**, № 3, 410—421 (РЖМат, 1973, 1A305)
508. **Farkas D.**, Self-injective group algebras. J. Algebra, 1973, **25**, № 2, 313—315 (РЖМат, 1973, 9A268)
509. —, A note on locally finite group algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **48**, № 1, 26—28 (РЖМат, 1976, 1A301)
510. —, S n i d e r R. L., Group algebras whose simple modules are injective. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **194**, 241—248 (РЖМат, 1975, 4A308)
511. **Feigelstock S.**, On the tensor product of exact sequences of modules over a Dedekind ring. Arch. Math., 1974, **25**, № 6, 598—601 (РЖМат, 1975, 9A338); поправка: ibid. 1976, **27**, № 1, 112 (РЖМат, 1976, 8A549)
512. **Fellor K.**, Relative projectivity and injectivity classes determined by simple modules. J. London Math. Soc., 1972, **5**, № 3, 423—431
513. **Fenrick M. H.**, Conditions under which all preradical classes are perfect hereditary torsion classes. Communs Algebra, 1974, **2**, № 4, 365—376 (РЖМат, 1975, 5A256)
514. **Fernandez B. E.**, Anillos parciales y anillos. Actas 10a reun. anu. mat. esp. Laguna, 1969. Madrid 1972, 225—232 (РЖМат, 1974, 6A383)
515. **Ferrand D.**, Epimorphismes d'anneaux à source Noethéienne et monomorphismes de schémas. C. r. Acad. sci., 1968, **A266**, № 6, 319—321 (РЖМат, 1968, 12A329)
516. —, Monomorphismes et morphismes absolument plats. Bull. Soc. Math. France, 1972, **100**, № 1, 97—128 (РЖМат, 1972, 12A350)
517. **Fieldhouse D. J.**, Regular modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **32**, № 1, 49—51 (РЖМат, 1972, 12A257)
518. —, Regular modules and rings. Ill. J. Math., 1972, **16**, № 2, 217—221 (РЖМат, 1973, 1A258)
519. —, Regular rings and modules. J. Austral. Math. Soc., 1972, **13**, 477—491 (РЖМат, 1973, 4A365)
520. —, Character modules, dimension and purity. Glasgow Math. J., 1972, **13**, № 2, 144—146 (РЖМат, 1973, 4A442)
521. —, Regular pure projective modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **36**, № 1, 69—72 (РЖМат, 1973, 6A307)
522. —, Regular modules over semi-local rings. Rings, Modules and Radicals, Amsterdam—London, 1973, 193—196 (РЖМат, 1976, 2A345)
523. —, Aspects of purity. Ring. Theory. Proc. Okla. Conf., 1973, New York, 1974, 185—196 (РЖМат, 1974, 8A270)
524. —, Absolute purity. Can. J. Math. 1975, **27**, № 1, 6—10 (РЖМат, 1975, 11A441)

525. —, The Jacobson radical and regular modules. Can. Math. Bull., 1975, **18**, № 1, 141
526. **Findlay G. D.**, A note on non-commutative localisation. J. London. Math. Soc., 1972, **6**, № 1, 39—42 (РЖМат, 1973, 7A258)
527. **Fisher J. L.**, The category of epic R-fields. J. Algebra, 1974, **28**, № 2, 283—290 (РЖМат, 1974, 12A239)
528. —, Structure of semiprime P. I.-rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **39**, 465—467 (РЖМат, 1974, 3A193)
529. —, Finiteness conditions for projective and injective modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **40**, № 2, 389—394 (РЖМат, 1974, 5A296)
530. —, Von Neumann regular rings versus V-rings. Ring Theory. Proc. Okla. Conf., 1973, New York, 1974, 101—119 (РЖМат, 1974, 8A252)
531. —, R o w e n L. H., An embedding of semiprime P. I-rings. Pacif. J. Math., 1974, **52**, № 2, 369—375 (РЖМат, 1975, 4A302)
532. —, W o l f f H., Decomposition theories for Abelian categories. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **182**, 61—65 (РЖМат, 1974, 9A368)
533. **Fisher-Palmquist J.**, N e w e l l D. C., Triples on functor categories. J. Algebra, 1973, **25**, № 2, 226—258 (РЖМат, 1973, 10A288)
534. —, P a l m q u i s t P. H., Morita contexts of enriched categories. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **50**, 55 (РЖМат, 1976, 4A301)
535. **Fleischer I.**, Remarks on real representations and comments on Conrad's paper. Kgl. norske vid. selsk. skr., 1972, № 10, 4 pp. (РЖМат, 1972, 11A163)
536. —, A final remark on extending to strict total orders in modules. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, **9**, № 1, 137—140
537. **Fleury P.**, Hollow modules and local endomorphism rings. Pacif. J. Math., 1974, **53**, № 2, 379—385 (РЖМат, 1975, 8A311)
538. —, A note on dualizing Goldie dimension. Can. Math. Bull., 1974, **17**, № 4, 511—517
539. Formanek E., Faithful Noetherian modules. Proc. Amer. Math. Soc. 1973, **41**, № 2, 381—383 (РЖМат, 1974, 9A462)
540. —, Maximal quotient rings of group rings. Pacif. J. Math., 1974, **53**, № 1, 109—116 (РЖМат, 1975, 7A370)
541. —, J a t e g a o n k a r V., Subrings of Noetherian rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **46**, № 2, 181—186 (РЖМат, 1975, 7A353)
542. **Fossum R.**, G r i f f i t h P h., R e i t e n I., The homological algebra of trivial extensions of Abelian categories with application to ring theory. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1972, № 3, 170 pp. (РЖМат, 1973, 4A489)
543. —, —, —, Trivial extensions of Abelian categories. Homological algebra of trivial extensions of Abelian categories with applications to ring theory. Lect. Notes Math., 1975, **456**, XI, 122 pp. (РЖМат, 1975, 11A443)
544. **Fountain J. B.**, Completely right injective semigroups. Proc. Lond. Math. Soc., 1974, 28, № 1, 28—44 (РЖМат, 1974, 7A245)
545. **Freyd P.**, Relative homological algebra made absolute. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1963, **49**, № 1, 19—20 (РЖМат, 1963, 10A231)
546. **Fritzsche R.**, Verallgemeinerung eines Satzes von Prüfer und Baer. Wiss. Beitr. M.-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, 1971, M., № 3, 155—161 (РЖМат, 1973, 4A397)
547. **Fuchs L.**, Note on linearly compact Abelian groups. J. Austral. Math. Soc., 1969, **9**, № 3-4, 433—440 (РЖМат, 1970, 2A162)
548. —, On a substitution property of modules. Monatsh. Math., 1971, **75**, № 3, 198—204 (РЖМат, 1972, 4A316)
549. —, Note on direct decompositions of torsion-free Abelian groups. Comment. math. helv., 1971, **46**, № 4, 409—413 (РЖМат, 1972, 7A172)
550. —, The cancellation property for modules. Lect. Notes. Math., 1972, **246**, 191—212 (РЖМат, 1972, 8A347)
551. —, On solutions of problems listed in my book «Infinite Abelian groups», vol. I. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic. 1972. Vol. 13. London—New York, 1974, 543—548 (РЖМат, 1975, 5A169)

552. —, Indecomposable Abelian groups of measurable cardinalities. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic. 1972. Vol. 13. London—New York, 1974, 233—244 (РЖМат, 1975, 7А267)
553. —, On torsion Abelian groups quasi-projective over their endomorphism rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **42**, № 1, 13—15 (РЖМат, 1975, 2А219)
554. —, Infinite Abelian groups. Vol. II. Acad. Press, New York and London, 1973, 363 pp.
555. —, H a u p t f l e i s c h G. J., Note on pure-projectivity of modules. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1973, **27**, № 2, 339—344 (РЖМат, 1974, 6А371)
556. —, V i l j o e n G., Quasi-direct decompositions of torsion-free Abelian groups of infinite rank. Math. scand., 1973, **33**, № 2, 205—212 (РЖМат, 1975, 10А205)
557. **Fuelberth J. D.**, T e p l y M. L., The singular submodule of a finitely generated module splits off. Pacif. J. Math., 1972, **40**, № 1, 73—82 (РЖМат, 1972, 12А260)
558. —, —, A splitting ring of global dimension two. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, 317—324 (РЖМат, 1973, 5А269)
559. **Fuller K. R.**, Relative projectivity and injectivity classes determined by simple modules. J. London Math. Soc., 1972, **5**, № 3, 423—431 (РЖМат, 1973, 5А267)
560. —, On generalized uniserial rings and decompositions that complement direct summands. Math. Ann., 1973, **200**, № 2, 175—178 (РЖМат, 1973, 7А242)
561. —, Density and equivalence. J. Algebra, 1974, **29**, № 3, 528—550 (РЖМат, 1975, 2А303)
562. —, R e i t e n I., Note on rings of finite representations type and decompositions of modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **50**, 92—94 (РЖМат, 1976, 4А246)
563. **Fulp R. O.**, Splitting locally compact Abelian groups. Mich. Math. J., 1972, **19**, № 1, 47—55 (РЖМат, 1972, 10А160)
564. **Gabel M. R.**, Generic orthogonal stably free projectives. J. Algebra, 1974, **29**, № 3, 477—488 (РЖМат, 1975, 2А465)
565. **Gardner B. J.**, Two notes on radicals of Abelian groups. Comment. math. Univ. carol., 1972, **13**, № 3, 419—430 (РЖМат, 1973, 5А182)
566. —, Some closure properties for torsion classes of Abelian groups. Pacif. J. Math., 1972, **42**, № 1, 45—61 (РЖМат, 1973, 6А217)
567. —, Generalized-pure-hereditary radical classes of Abelian groups. Comment. math. Univ. carol., 1973, **14**, № 2, 187—195 (РЖМат, 1974, 3А130)
568. —, Radicals of Abelian groups and associative rings. Acta. math. Acad. sci. hung., 1973, **24**, № 3-4, 259—268 (РЖМат, 1974, 6А302)
569. —, Some aspects of T-nilpotence. Pacif. J. Math., 1974, **53**, № 1, 117—130 (РЖМат, 1975, 5А254)
570. —, Some radical constructions for associative rings. J. Austral Math. Soc., 1974, **18**, № 4, 442—446 (РЖМат, 1975, 6А387)
571. —, Epimorphisms of regular rings. Comment. math. Univ. carol., 1975, **16**, № 1, 151—160 (РЖМат, 1975, 10А277)
572. **Garfinkel G. S.**, Universally torsionless and trace modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, **215**, 119—144 (РЖМат, 1976, 10А191)
573. **Gastagna F.**, Endomorphisms of countable direct sums of torsion complete groups. Acta math. Acad. scient. hung., 1972, **23**, 45—50
574. **Gentile E. R.**, Purity and algebraic closure. Rev. Unión mat. Argent. y Asoc. fis. Argent., 1968/69, **24**, 37—47
575. —, An elementary proof of the structure theorem of finitely generated modules over a principal domain. Rev. Unión. mat. argent, 1974 (1975), **27**, № 1, 10—12 (РЖМат, 1975, 12А417)

576. **Georgescu G.**, Anvelope injective în categoria monoizilor comutativi regulaţi. Stud. şi cerç. mat., 1971, **23**, № 7, 1049—1055 (РЖМат, 1972, 2А428)
577. **Geramita A. V.**, Polynomial rings with the outer product property. Can. J. Math., 1972, **24**, № 5, 866—872 (РЖМат, 1973, 5А436)
578. —, P u l l m a n N. J., A theorem of Hurwitz and Radon and orthogonal projective modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **42**, № 1, 51—56 (РЖМат, 1974, 11А487)
579. **Gersten S. M.**, The localization theorem for projective modules. Communs Algebra. 1974, **2**, № 4, 307—350 (РЖМат, 1975, 7А545)
580. **Ginn S. M.**, M o s s P. B., Finitely embedded modules over Noetherian rings. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, **81**, № 4, 709—710 (РЖМат, 1976, 4А252)
581. **Glas A. M. W.**, Which Abelian groups can support a directed, interpolation order? Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **31**, № 2, 395—400 (РЖМат, 1972, 11А161)
582. **Golab S.**, M i r o n R., Sur quelques généralisations des espaces vectoriels. Rev. roum. math. pures et appl., 1971, **16**, № 10, 1477—1496 (РЖМат, 1972, 4А734)
583. **Golan J. S.**, Characterization of rings using quasiprojective modules. III. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **31**, № 2, 401—408 (РЖМат, 1972, 11А182)
584. —, Topologies on the torsion-theoretic spectrum of a noncommutative ring. Pacif. J. Math., 1974, **51**, № 2, 439—450 (РЖМат, 1975, 5А257)
585. —, A characterization of left semiartinian rings. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, **11**, № 3, 425—428 (РЖМат, 1975, 9А207)
586. —, A Krull-like dimension for noncommutative rings. Isr. J. Math., 1974, **19**, № 4, 297—304 (РЖМат, 1976, 1А277)
587. —, Localization of noncommutative rings. New York, Marcel Derrek, 1975, 346 pp. (РЖМат, 1975, 9А217)
588. —, Modules satisfying both chain conditions with respect to a torsion theory. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **52**, 103—108 (РЖМат, 1976, 5А253)
589. —, R a y n a u d J., Dimension de Gabriel et TTK-dimension de modules. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 26, 1603—1606 (РЖМат, 1975, 3А343)
590. —, T e p l y M. L., Finiteness conditions on filters of left ideals. J. Pure and Appl. Algebra, 1973, **3**, № 3, 251—259 (РЖМат, 1974, 3А208)
591. —, —, Torsion-free covers. Isr. J. Math., 1973, **15**, № 3, 237—256 (РЖМат, 1974, 6А369)
592. **Goldie A. W.**, A note on prime rings with polynomial identities. J. London Math. Soc., 1969, **1**, № 4, 606—608 (РЖМат, 1972, 1А421)
593. —, Properties of the idealiser. Symp. mat. Ist. naz. alta mat. Vol. 8. London — New York, 1972, 347—360 (РЖМат, 1972, 9А217)
594. —, Some recent developments in ring theory. Isr. J. Math., 1974, **19**, № 1-2, 153—168 (РЖМат, 1975, 10А276)
595. —, S m a l l L., A study in Krull dimension. J. Algebra, 1973, **25**, № 1, 152—157 (РЖМат, 1973, 11А380)
596. **Goldman O.**, A Wederburn — Artin — Jacobson structure theorem. J. Algebra, 1975, **34**, № 1, 64—73 (РЖМат, 1975, 10А311)
597. —, Elements of noncommutative arithmetics. I. J. Algebra, 1975, **35**, № 1-3, 308—341 (РЖМат, 1976, 1А266)
598. **Goushor H.**, Remarks on rings of quotients of rings of function. Can. Math. Bull., 1971, **14**, № 2, 159—160 (РЖМат, 1971, 12Б832)
599. —, Enlargements contain various kinds of completions. Lect. Notes Math., 1974, **369**, 60—70 (РЖМат, 1974, 9А295)
600. **Goodaire E. G.**, Weighted representations of a primitive algebra. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **42**, № 1, 61—66 (РЖМат, 1974, 12А217)
601. **Goodearl K. R.**, Embedding nonsingular modules in free modules. J. Pure and Appl. Algebra, 1971, **1**, № 3, 275—279 (РЖМат, 1972, 4А328)
602. —, Singular torsion and the splitting properties. Mem. AMS, 1972, № 124, vi, 89 pp **(РЖМат, 1973, 6А304)**

603. —, Distributing tensor product over direct product. Pacif. J. Math., 1972, **43**, № 1, 107—110 (РЖМат, 1973, 6А308)
604. —, Prime ideals in regular self-injective rings. I. Can. J. Math., 1973, **25**, № 4, 829—839 (РЖМат, 1974, 4А203)
605. —, Prime ideals in regular self injective rigns. II. J. Pure and Appl. Algebra, 1973, **3**, № 4, 357—373 (РЖМат, 1974, 9А268)
606. —, Idealizers and nonsingular rings. Pacif. J. Math., 1973, **48**, № 2, 395—402 (РЖМат, 1974, 9А266)
607. —, Triangular representations of splitting ring. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **185**, Nov., 271—285 (РЖМат, 1974, 9А302)
608. —, Simple self-injective rings need not be artinian. Communs Algebra, 1974, **2**, № 1, 83—89 (РЖМат, 1975, 5А266)
609. —, Localization and splitting in hereditary Noetherian prime rings. Pacif. J. Math., 1974, **53**, № 1, 137—151 (РЖМат, 1975, 7А366)
610. —, Global dimension of differential operator rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **45**, № 3, 315—322 (РЖМат, 1975, 7А533)
611. —, Subrings of idealizer rings. J. Algebra, 1975, **33**, № 3, 405—429 (РЖМат, 1975, 10А362)
612. —, Simple regular rings and rank functions. Math. Ann., 1975, 214, № 3, 267—287 (РЖМат, 1975, 11А346)
613. **Gordon R.**, Classical quotient rings of PWD's. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **36**, № 1, 39—46 (РЖМат, 1973, 8А249)
614. —, Gabriel and Krull dimension. Ring Theory. Proc. Okla Conf., 1973. New York, 1974, 241—295 (РЖМат, 1974, 11А298)
615. —, Primary decomposition in right Noetherian rings. Communs Algebra, 1974, **2**, № 6, 491—524 (РЖМат, 1975, 8А308)
616. —, Artinian quotient rings of *FBN* rings. J. Algebra, 1975, **35**, № 1-3, 304—307 (РЖМат, 1976, 1А291)
617. —, L e n a g a n T., R o b s o n J. C., Krull dimension-nilpotency and Gabriel dimension. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, **79**, № 4, 716—719 (РЖМат, 1974, 9А280)
618. —, R o b s o n J. C., Krull dimension. Mem. AMS, 1973, № 133, 78 pp. (РЖМат, 1974, 2А245)
619. —, —, Semiprime rings with Krull dimension are Goldie. J. Algebra, 1973, **25**, № 3, 519—523 (РЖМат, 1973, 11А240)
620. —, —, The Gabriel dimension of a module. J. Algebra, 1974, **29**, № 3, 459—473 (РЖМат, 1975, 2А312)
621. —, S m a l l L. W., Piecewise domains. J. Algebra, 1972, **23**, № 3, 553—564 (РЖМат, 1973, 5А232)
622. **Gorman H. E.**, Differential rings and modules. Scr. math., 1973, **29**, № 1-2, 25—35 (РЖМат, 1974, 1А415)
623. **Goursaud J. M.**, Sur les anneaux de groupes semiparfaits. Can. J. Math., 1973, **25**, № 5, 922—928 (РЖМат, 1974, 7А386)
624. —, J e r e m y L., Sur l'enveloppe injective des anneaux réguliers. Communs Algebra, 1975, **3**, № 9, 763—779 (РЖМат, 1976, 5А268)
625. —, V a l e t t e J., Anneaux de groupe héréditaires et semi-héréditaires. J. Algebra, 1975, **34**, № 2, 205—212 (РЖМат, 1975, 11А363)
626. **Grams A.**, Atomic rings and the ascending chain condition for principal ideals. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1974, **75**, № 3, 321—329 (РЖМат, 1974, 11А473)
627. **Green E. L.**, A criterion for relative global dimension zero with applications to graded rings. J. Algebra, 1975, **34**, № 1, 130—135 (РЖМат, 1975, 11А336)
628. —, The representation theory of tensor algebras. J. Algebra, 1975, **34**, № 1, 136—171 (РЖМат, 1975, 11А371)
629. —, G u s t a f s o n W. H., Pathological Quasi-Frobenius algebras of finite type. Communs Algebra, 1974, **2**, № 3, 233—260 (РЖМат, 1975, 4А287)
630. **Green J. A.**, Relative module categories for finite groups. J. Pure and Appl. Algebra, 1972, **2**, № 4, 371—393 (РЖМат, 1973, 7А265)

631. **Greenberg B.**, Global dimension of cartesian squares. J. Algebra, 1974, **32**, № 1, 31—43 (РЖМат, 1975, 5А390)
632. **Griffin M.**, Multiplication rings via their total quotient rings. Can. J. Math., 1974, **26**, № 2, 430—449 (РЖМат, 1975, 2А453)
633. **Griffith P.**, On a subfunctor of Ext. Arch. Math., 1970, **21**, № 1, 17—22 (РЖМат, 1970, 11А156)
634. —, On the problem of intrinsically characterizing the functor Ext. Prepr. Ser. Math. inst. Aarhus univ., 1972, № 9, 37 pp. (РЖМат, 1973, 5А396)
635. —, On the problem of intrinsically characterizing of the functor Ext. Simp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic. 1972. Vol 13. London—New York, 1974, 207—232 (РЖМат, 1975, 4А444)
636. **Grillet M. P.**, Semisimple *A*-semigroups and semirings. Fund. Math., 1972, **76**, № 2, 109—116 (РЖМат, 1973, 3А296)
637. **Grölz W.**, Eine Verallgemeinerung des Lemmas von Nakayama. Math. Ann., 1973, **200**, № 3, 185—187 (РЖМат, 1973, 8А247)
638. **Grossman G. L.**, Generalized purity and algebraic compactness in modules. Doct. diss. Northwest. Univ., 1971, 65 pp. (РЖМат, 1972, 8А338)
639. **Gruson L.**, Dimension homologique des modules plats sur un anneau commutatif Noetherien. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov., 1971-maggio 1972. Vol. 11. London — New York, 1973, 243—254 (РЖМат, 1974, 8А329)
640. —, J e n s e n C. U., Modules algébriquement compacts et foncteurs $\varprojlim^{(i)}$. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 26, A1651—A1653 (РЖМат, 1974, 2А350)
641. **Grzymala-Busse J. W.**, On the set of all automata with the same monoid of endomorphisms. Lect. Notes Comput. Sci., 1975, № 32, 246—251 (РЖМат, 1976, 1А351)
642. **Gupta R. N.**, Characterization of rings whose classical quotient rings are perfect rings. Publs math., 1970, **17**, № 1-4, 215—222 (РЖМат, 1973, 9А261)
643. **Gustafson W. H.**, Group rings of finite representation type. Math. scand., 1974, **34**, № 1, 58—60 (РЖМат, 1975, 9А223)
644. —, Torsionfree modules and classes of orders. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, **11**, № 3, 365—371 (РЖМат, 1975, 11А463)
645. **Gwynne W. D.**, R o b s o n J. C., Completions of non-commutative Dedekind prime rings. J. London, Math. Soc., 1971, **4**, № 2, 346—352 (РЖМат, 1972, 5А274)
646. **Hache J.**, Éléments premiers entre eux dans un domaine d'intégrité. C. r. Acad. sci, 1971, **272**, № 25, A1631— A1634 (РЖМат, 1972, 1А384)
647. —, Éléments premiers entre eux dans un anneau commutatif unitaire. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 12, A947— A950 (РЖМат, 1972, 8А470)
648. **Hacque M.**, Caracterisations generales des localisation. Publs Dép. math., 1970, **7**, № 4, 45—103
649. —, Une propriété des localisations plates. Publs Dep. math., 1970, **7**, № 4, 103—122 (РЖМат, 1973, 5А251)
650. —, Localisations et schemas affinés. Publs Dép. math., 1971, **7**, № 2, 1—114 (РЖМат, 1972, 3А398)
651. —, Factorisation des homomorphismes d'anneaux plats à gauche. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 22, 1391—1394 (РЖМат, 1974, 11А332)
652. —, Triples et exactitudes. Publs Dép. math., 1974, **11**, № 1, 89—100 (РЖМат, 1975, 3А439)
653. **Hafner I.**, The regular ring and the maximal ring of quotients of a finite Baer-ring. Mich. Math. J., 1974, **21**, № 2, 153—160 (РЖМат, 1975, 7А368)
654. —, The regular ring and the maximal ring of quotients of a finite Baer-ring. Publs. Dept Math. Univ. Ljubljana. Inst. Math., Phys. and Mech., 1974(1975), **10**, 33—40 (РЖМат, 1976, 2А330)
655. **Hajarnavis C. R.**, On Small's theorem. J. London Math. Soc., 1972, **5**, № 4, 596—600 (РЖМат, 1973, 5А246)

656. —, Noncommutative rings whose homomorphic images are selfinjective. Bull. London Math. Soc., 1973, **5**, № 1, 70—74 (РЖМат, 1974, 2A253)
657. —, Lenagan T. H., Localisation in Asano orders. J. Algebra, 1972, **21**, № 3, 441—449 (РЖМат, 1973, 1A238)
658. **Halter-Koch F.**, Ideal theorie der offen einbettbaren kommutativen topologischen Ringe. J. reine und angew. Math., 1972, **256**, 168—172 (РЖМат, 1973, 3A412)
659. **Halwani I.**, Sur les ordres d'Asano. Publs Dép. math., 1974, **11**, № 4, 107—121 (РЖМат, 1975, 12A265)
660. **Handelman D.**, Prime regular rings of quotients. Communs Algebra, 1974, **2**, № 6, 525—533 (РЖМат, 1975, 9A215)
661. —, When is the maximal ring of quotients projective? Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **52**, 125—130 (РЖМат, 1976, 5A261)
662. —, Strongly semiprime rings. Pacif. J. Math., 1975, **60**, № 1, 115—122 (РЖМат, 1976, 5A257)
663. —, Lawrence J., Strongly prime rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **211**, 209—224 (РЖМат, 1976, 7A323)
664. **Hanna A.**, On injective modules. Amer. Math., Mon., 1973, **80**, № 3, 297—298 (РЖМат, 1973, 9A270)
665. —, Zur Definition des cofreien Moduls. Arch. Math., 1974, **25**, № 1, 39 (РЖМат, 1974, 12A220)
666. **Hannula T. A.**, On the construction of quasi-Frobenius rings. J. Algebra, 1973, **25**, № 3, 403—414 (РЖМат, 1974, 1A253)
667. —, The Morita context and the construction of *QF* rings. Lect. Notes Math., 1973, **353**, 113—130 (РЖМат, 1974, 6A334)
668. **Hansen F.**, Das Jacobsonsche Radikal, modulare Rechtsideale und Frattinische Unterstrukturen in Ringen. Diss. Dokt. Naturwiss. Abt. Math. Ruhr — Univ. Bochum, 1972, 77 S. (РЖМат, 1973, 7A249)
669. —, Certain overrings of right hereditary, right Noetherian rings are *V*-rings. Proc. Amer. Math. Soc. 1975, **52**, 85—90 (РЖМат, 1976, 5A252)
670. —, On one-sided prime ideals. Pacif. J. Math., 1975, **58**, № 1, 70—86 (РЖМат, 1976, 3A290)
671. **Harada M.**, Гомологически-алгебраическая теория порядков (японск.) Sûgaku, 1966, **18**, 1—10
672. —, On categories of indecomposable modules. II. Osaka J. Math., 1971, **8**, № 2, 309—321 (РЖМат, 1972, 4A314)
673. —, Supplementary remarks on categories on indecomposable modules. Osaka J. Mat., 1972, **9**, № 1, 49—55 (РЖМат, 1973, 3A287)
674. —, On quasi-injective modules with a chain condition over a commutative ring. Osaka J. Math., 1972, **9**, № 3, 421—426 (РЖМат, 1973, 10A358)
675. —, Note on categories of indecomposable modules. Publs Dép. Math., 1972, **9**, № 4, 11—25 (РЖМат, 1974, 9A310)
676. —, Perfect categories. I. Osaka J. Math., 1973, **10**, № 2, 329—341 (РЖМат, 1974, 7A444)
677. —, Perfect categories. II. Hereditary categories. Osaka J. Math., 1973, **10**, № 2, 343—355 (РЖМат, 1974, 7A445)
678. —, Perfect categories. III. Hereditary and *QF*-3 categories. Osaka J. Math., 1973, **10**, № 2, 357—367 (РЖМат, 1974, 7A446)
679. —, Perfect categories. IV. Quasi-Frobenius categories. Osaka J. Math., 1973, **10**, № 3, 585—596 (РЖМат, 1974, 11A379)
680. —, Applications of factor categories to completely indecomposable modules. Publs Dép. math., 1974, **11**, № 2, 19—104 (РЖМат, 1975, 8A325)
681. —, Kanbara H., On categories of projective modules. Osaka J. Math., 1971, 8, № 3, 471—483 (РЖМат, 1973, 1A252)
682. **Hart R.**, A note on the tensor product of algebras. J. Algebra, 1972, **21**, № 3, 422—427 (РЖМат, 1973, 1A222)
683. **Hartley B.** A class of modules over a locally finite group. I. J. Austral. Math., Soc., 1973, **16**, № 4, 431—442 (РЖМат, 1974, 9A249)

684. **Harui H.**, Co-irreducible elements and co-irreducible decompositions of modules. Bull. Fukuoka Univ. Educ. Nat. Sci., 1972, **22**, 1—23 (РЖМат, 1973, 11A390)
685. —, Note on the flatness. Фукуока кёику дайгаку киё. Рука-хэн. Bull. Fukuoka Univ. Educ. Nat. Sci., 1973, **23**, 5—9 (РЖМат, 1974, 10A352)
686. —, Notes on injective modules of finite type. Fukuoka Univ. Educ. Nat. Sci., 1973, **23**, 1—3 (РЖМат, 1974, 10A353)
687. —, The uniqueness of co-irreducible decompositions of modules. Bull. Fukuoka Univ. Educ. Nat. Sci., 1974, **24**, 1—9 (РЖМат, 1975, 8A415)
687. **Hauger G.**, Zimmermann W., Quasi-Frobenius Moduln. Arch. Math., 1973, **24**, № 4, 379—386 (РЖМат, 1974, 7A393)
689. —, —, Dichte Ringe. Math. Ann., 1974, **210**, № 1, 1—6 (РЖМат, 1975, 2A302)
690. —, —, Sur un théoreme de densité. C. r. Acad. sci., 1975, 280, № 23, A1575—A1577 (РЖМат, 1976, 1A477)
691. **Hays J. H.**, Reductions of ideals in commutative rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **177**, March., 51—63 (РЖМат, 1974, 1A403)
692. **Head T.**, Embedded ordinals in modular algebraic lattices. Algebra univers., 1971, **1**, № 2, 200—203
693. —, Preservation of coproducts by $\mathrm{Hom}_R(M, —)$. Rocky Mount. J. Math., 1972, **2**, № 2, 235—237
694. **Hedstrom J. R.**, *G*-domains and property (T). Math. Nachr., 1973, **56**, № 1, 125—129 (РЖМат, 1974, 1A405)
695. **Hein J. L.**, The convertibility f Ext^n_R (—, A). Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **195**, № 468 (РЖМат, 1975, 6A511)
696. **Heinicke A. G.**, On the ring quotients at a prime ideal of a right Noetherian ring. Can. J. Math., 1972, **24**, № 4, 703—712 (РЖМат, 1973, 3A275)
697. **Heinlein G.**, Vollreflexive Ringe und Schlanke Moduln. Diss. Doktorgrad. Naturwiss. Fak. Friedrich—Alexander-Univ. Erlangen—Nürnberg, 1971, 85 S. (РЖМат, 1972, 7A240Д)
698. **Heinzer W.**, Ohm J., Locally Noetherian commutative rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, **158**, № 2, 273—284 (РЖМат, 1972, 3A378)
699. —, —, The finiteness of I when $R[X]/I$ is R-flat. II. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, № 1, 1—8 (РЖМат, 1973, 6A442)
700. **Henderson J.**, Orzech M., Cotorsion modules for torsion theories. Rep. Algebra Group. Qween's Paper Pure and Appl. Math., Qween's Univ. Kingston, Ont., 1973, № 36, 87—99
701. **Hill D. A.**, Semi-perfect *q*-rings. Math. Ann., 1973, **200**, № 2, 113—121 (РЖМат, 1973, 7A245)
702. —, Dominant and codominant dimension of *QF*-3 rings. Pacif. J. Math., 1973, **49**, № 1, 93—99 (РЖМат, 1974, 10A281)
703. —, Restricted homological properties of modules. J. Austral. Math. Soc., 1974, **18**, № 2, 170—181 (РЖМат, 1975, 8A329)
704. —, On free Abelian *l*-groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **38**, № 1, 53—58 (РЖМат, 1974, 1A228)
705. —, On the splitting of modules and Abelian groups. Can. J. Math., 1974, **26**, № 1, 68—77 (РЖМат, 1974, 9A306)
706. —, Mott J. L., Embedding theorems and generalized discrete ordered Abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **175**, Jan., 283—297 (РЖМат, 1974, 1A229)
707. **Hilton P. J.**, Wu Yel-Chiang, A course in modern algebra. New York, e. a., John Wiley and Sons, 1974, xii, 249 pp. (РЖМат, 1975, 4A176 K)
708. **Hinkle C. V.**, Jr., Semigroups of right quotients of a semigroup which is a semilattice of groups. Semigroup Forum, 1972, **5**, № 2, 167—173 (РЖМат, 1973, 7A187)
709. —, Generalized semigroups of quotients. Diss. Clemson Univ., Clemson, South Carolina, USA, 1972, 125 p.

710. —, Generalized semigroups of quotients. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **183**, Sept., 87—117 (РЖМат, 1974, 7А243)
711. —, Semigroups of right quotients of a semigroup which is a semilattice of groups. J. Algebra, 1974, **31**, № 2, 276—286 (РЖМат, 1975, 2А198)
712. —, The extended centralizer of an S-set. Pacif. J. Math., 1974, **53**, № 1, 163—170 (РЖМат, 1975, 6А227)
713. **Hirano Shin-ichi**, A note on restricted uniserial ring. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1974, **12**, № 329-346, 178—180 (РЖМат, 1975, 10А281)
714. **Hishi M.**, On the ring of endomorphisms of an indecompossable injective module over a Prufer ring. Hiroshima Math. J., 1972, **2**, № 2, 271—283 (РЖМат, 1974, 1А419)
715. **Hofmann K. H.**, Representations of algebras by continuous sections. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, **78**, № 3, 291—373 (РЖМат, 1973, 1А244)
716. **Holten R.**, Decomposing modules over a principal ideal domain. Amer. Math. Monthly, 1972, **79**, 1119—1121
717. **Holzapfel R. P.**, Eine allgemeine Primärzerlegungstheorie. Math. Nachr., 1969, **41**, № 4-6, 227—245 (РЖМат, 1970, 3А439)
718. **Holzsager R.**, Hallahan C., Mutual direct summands. Arch. Math., 1974, **25**, № 6, 591—592 (РЖМат, 1975, 9А203)
719. **Hongan M.**, Note on right-regular-ideal-rings. Proc. Jap. Acad., 1973, **49**, 148—149 (РЖМат, 1974, 4А205)
720. **Horn A.**, Gruppenringe fastpolyziklischer Gruppen und Ordnungen in Quasi-Frobenius-Ringen. Mitt. Math. Sem. Giessen, 1973, № 100, 55 S. (РЖМат, 1974, 2А269)
721. —, Quasi-Frobenius quotient rings of group rings. J. Austral Math. Soc., 1975, **20**, № 4, 394—397 (РЖМат, 1976, 5А263)
722. **Horn P. J.**, A note on weakly symmetric rings. Can. Math. Bull., 1974, **17**, № 4, 531—533
723. **Hotzel E.**, Right congruences in totally 0-simple semigroups. Semigroup Forum., 1974, **8**, № 2, 95, 103 (РЖМат, 1975, 2А194)
724. **Hsu Chin-Shui**, Functorial subgroups commuting with inverse limits. Math. Ann., 1973, **206**, № 3, 177—186 (РЖМат, 1974, 5А218)
725. —, A class of Abelian groups closed under direct limits and subgroups formation. Pacif. J. Math. 1974, **50**, № 2, 495—504 (РЖМат, 1975, 4А317)
726. **Huckaba J. A.**, On valuation rings that contain zero divisors. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **40**, № 1, 9—15 (РЖМат, 1974, 5А442)
727. **Hudry A.**, Une remarque sur la décomposition primaire de O. Goldman. Publs Dép. Math., 1971, 8, № 1, 63—68 (РЖМат, 1973, 5А275)
728. —, Modules homogenes et anneaux localement homogenes. Sémin. P. Dubreil, M. L. Dubreil—Jacotin, L. Lesieur et C. Pisot. Univ. Paris, 1970—1971 (1972), **24**, № 2, 15/01—15/10 (РЖМат, 1973, 8А248)
729. —, Sur les modeles primaires de O. Goldman. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 25, A1772—A1774 (РЖМат, 1973, 1А251)
730. —, Localisations premières. Publs Dép. math., 1973, **10**, № 1, 1—8 (РЖМат, 1974, 9А289)
731. —, Sur les anneaux Noethériens à droite avec assez d'idéaux bilatères à droite. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 8, 533—535 (РЖМат, 1974, 8А262)
732. —, Une note sur les anneaux Noethériens à droite avec assez d'idéaux bilateres. Arch. Math., 1974, **25**, № 4, 361—367 (РЖМат, 1975, 5А265)
733. —, Sur les anneaux satisfaisant à la propriété de decomposition primaire. Mitt. Math. Sem. Giessen, 1974, № 112, 34—54 (РЖМат, 1975, 6А383)
734. —, Decomposition primaire de O. Goldman et décomposition primaire classique. C. r. Acad. sci., 1975, **280**, № 17, A1089—A1092 (РЖМат, 1975, 12А251)
735. —, Sur un probleme de C. Faith. J. Algebra, 1975, **34**, № 3, 365—374 (РЖМат, 1976, 1А296)

736. **Hughes J.**, Artinian quotient rings of group rings. J. Austral. Math. Soc., 1973, **16**, № 3, 379—384 (РЖМат, 1974, 7А385)
737. **Huq S.**, The semiring of quotients of commutative semirings. Colloq. Math., 1973, 28, № 2, 185—188 (РЖМат, 1974, 5А320)
738. **Hutchinson J. J.**, Nonsingular Noetherian rings of exponent 2. Math. Ann., 1974, **209**, № 4, 267—276 (РЖМат, 1975, 3А332)
739. —, Zelmanowitz J., Quotient rings of endomorphism rings of modules with zero singular submodule. Proc. Amer. Math. Soc. 1972, **35**, № 1, 16—20 (РЖМат, 1973, 6А300)
740. **Immediato H.**, Localisation à la manière de Goldie et applications. Thèse doct. math. Fac. sci. Univ. Lyon, 1970, 75 p. (РЖМат, 1973, 5А252)
741. —, Localisation à la manière de Goldie et applications. Publs. Dép. math., 1970, **7**, № 3, 1—54 (РЖМат, 1973, 5А253)
742. **Ingrao B.**, Quelques proprétés de la catégorie des anneaux absolument plats réduits. Formule de annulateurs. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, A1597—A1600 (РЖМат, 1973, 1А109)
743. —, Quelques propriétés de la catégorie des anneaux absolument plats réduits. Surjectivité des épimorphismes. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, A1753—A1756 (РЖМат, 1973, 1А110)
744. **Ion I. D.**, O prezentare simplă a teoriei descompunerilor primare în necomutativ. An. Univ. Bucureşti. Ser. ştiinţ. natur. Mat.-mecan., 1967, **16**, № 1, 109—112 (РЖМат, 1968, 12А208)
745. —, Neat homomorphisms with respect to a torsion theory. Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 1972 (1974), **16**, № 4, 437—445 (РЖМат, 1975, 8А333)
746. **Irwin J. M.**, Khabbaz S. A., Rayna G., On a submodule Ext. J. Algebra, 1971, **19**, № 4, 486—495 (РЖМат, 1972, 5А160)
747. **Isbell J. R.**, Beatific semigroups. J. Algebra, 1972, **23**, № 2, 228—238 (РЖМат, 1973, 3А211)
748. **Ivanov G.**, Non-local rings whose ideals are all quasiinjective. Bull. Austral. Math. Soc., 1972, **6**, № 1, 45—52 (РЖМат, 1972, 9А218)
749. —, Left generalized uneserial rings. J. Algebra, 1974, **31**, № 1, 166—181 (РЖМат, 1975, 3А317)
750. —, Nonsingular rings with essential socles. J. Austral Math. Soc., 1974, **17**, № 3, 358—375 (РЖМат, 1975, 7А355)
751. **Iversen B.**, Noetherian graded modules. I. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1971—1972, № 29, 68 pp. (РЖМат, 1972, 11А313)
752. **Iwamoto T.**, A characterization of submodules of the quotient field of a domain. Proc. Jap. Acad., 1973, **49**, № 2, 140—144 (РЖМат, 1974, 5А449)
753. **Iwanaga Y.**, The F_h-condition and double centralizer condition. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku. Sec. A, 1973, **12**, № 313-328, 16—24 (РЖМат, 1974, 10А282)
754. —, Rings whose proper homomorphic images are QF-3 rings. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1974, **12**, № 329-346, 111—118 (РЖМат, 1975, 10А284)
755. **Izumi H.**, On quasi-primality of submodules and of ideals in rings. Proc. Jap. Acad., 1972, **48**, № 9, 661—664 (РЖМат, 1974, 1А267)
756. **Jacobinski H.**, Lattices over orders. Proc. Symp. pure Math. Vol. 21. Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R. I., 1971, 85—88 (РЖМат, 1974, 8А351)
757. —, Unique decomposition of lattices over orders. Queen's Pap. Pure and Appl. Math., 1974, № 41, 15—18 (РЖМат, 1975, 12А410)
758. **Jaegermann N.**, Normal radicals of rings of additive categories. Bull. Acad. Pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phis., 1974, **22**, № 9, 883—885 (РЖМат, 1975, 7А347)
759. **Jain S.**, Flat and FP-injectivity. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **41**, № 2, 437—442 (РЖМат, 1974, 9А271)
760. **Jambor R.**, On generation of torsion theories. Comment. math. Univ. carol., 1972, **13**, № 1, 79—98 (РЖМат, 1972, 9А233); Поправка: Comment. math. Univ., carol., 1973, **14**, № 1, 61 (РЖМат, 1973, 9А272)

761. —, On orthogonal theory of a set-valued bifunctor. Czechosl. Mat. J., 1973, **23**, № 3, 447—454 (РЖМат, 1974, 3А249)
762. —, Hereditary tensor-orthogonal theories. Comment. math. Univ. carol., 1975, **16**, № 1, 139—145 (РЖМат, 1975, 12А416)
763. **Janakiraman S.,** Rajagopalan M., Topologies in locally compact groups. II. Ill. J. Math., 1973, **17**, № 2, 177—197 (РЖМат, 1974, 2А235)
764. **Jans J. P.,** Torsion associated with duality. Tohoku Math. J., 1972, **24**, № 3, 449—452 (РЖМат, 1973, 4А363)
765. **Janusz G. J.,** Some left serial algebras of finite type. J. Algebra, 1972, **23**, 404—411 (РЖМат, 1973, 5А265)
766. **Jategaonkar A. V.,** A counter-example in ring theory and homological algebra. J. Algebra, 1969, **12**, № 3, 418—440 (РЖМат, 1969, 12А347)
767. —, Structure and classification of Noetherian prime rings. Ring theory. (Proc. Conf. Park City, Utah, March 2—6, 1971), Acad. Press., New York—London, 1972, 171—229
768. —, Injective modules and classical localization in Noetherian rings. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, **79**, № 1, 152—157 (РЖМат, 1973, 9А264)
769. —, The torsion theory at a semi-primeideal. An. Acad. brasil. ciênc., 1973, **45**, № 2, 197—200 (РЖМат, 1974, 9А312)
770. —, Jacobson's conjecture and modules over fully bounded Noetherian rings. J. Algebra, 1974, **30**, № 1-3, 103—121 (РЖМат, 1975, 3А342)
771. —, Injective modules and localization in noncommutative Noetherian rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **190**, 109—124 (РЖМат, 1975, 4А304)
772. —, Relative Krull dimension and prime ideals in right Noetherian rings. Communs Algebra, 1974, **2**, № 5, 429—468 (РЖМат, 1975, 8А312)
773. **Jategaonkar V. A.,** Global dimension of triangular orders over a discrete valuation ring. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **38**, № 1, 8—14 (РЖМат, 1974, 2А351)
774. —, Global dimension of tiled orders over commutative Noetherian domains. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **190**, 357—374 (РЖМат, 1975, 2А442)
775. —, Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **196**, 313—330 (РЖМат, 1975, 5А392)
776. **Jebli A.,** Modules sur les anneax de Krull. C. r. Acad. sci., 1973, **A276**, № 1, 93—94 (РЖМат, 1973, 7А400)
777. —, Corps des fractions et topologies artiniennes. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 15, 973—976 (РЖМат, 1974, 12А287)
778. —, Topologies linéaires sur le corps des fractions d'un anneau de polynomes. C. r. Acad. sci., 1975, **280**, № 11, A701—A703 (РЖМат, 1975, 10А379)
779. **Jensen C. U.,** Les foncteurs dérivés de lim et leurs applications en théorie des modules. Lect. Notes Math., 1972, **254**, 103 p. (РЖМат, 1972, 9А308)
780. **Jeremy L.,** Anneaux engendrés par leurs idempotents. Quasi-continuité de $M^{(I)}$. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 24, A1541—A1543 (РЖМат, 1974, 2А271)
781. —, Modules et anneaux quasi-continus. Can. Math. Bull., 1974, **17**, № 2, 217—228 (РЖМат, 1975, 7А396)
782. **Jirásko J.,** Generalized injectivity. Comment math. Univ. carol., 1975, **16**, № 4, 621—636 (РЖМат, 1976, 6А318)
783. —, Johnson C. S., Jr., McMorris F. R., Injective hulls of certain S-systems over a semilattice. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **32**, № 2, 371—375 (РЖМат, 1972, 11А239)
784. —, —, Completely cyclic injective semilattices. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **36**, № 2, 385—388 (РЖМат, 1973, 7А299)
785. —, —, Weakly self-injective semilattices. Semigroup Forum., 1973, **6**, № 1, 3—11 (РЖМат, 1974, 10А300)
786. —, —, Semigroups for which every S-system has the natural partial order. Semigroup Forum, 1974, **8**, № 1, 51—56 (РЖМат, 1974, 10А188)

787. **Johnson D. G.,** Rings of quotients of Φ-algebras. Pacif. J. Math., 1971, **36**, № 3, 693—699 (РЖМат, 1972, 1А428)
788. **Johnson J. A.,** Noetherian lattice modules and semi-local completions. Fund. Math., 1971, **73**, № 2, 93—103 (РЖМат, 1972, 7А253)
789. —, Finite dimensional completions in Noether lattices. Fund. math., 1975, **87**, № 2, 169—182 (РЖМат, 1976, 1А335)
790. **Johnson M. I.,** Right ideals and right submodules of transformation nearrings. J. Algebra, 1973, **24**, № 2, 386—391 (РЖМат, 1973, 6А320)
791. **Jøndrup S.,** On finitely generated flat modules. III. Math. scand., 1971, **29**, № 2, 206—210 (РЖМат, 1973, 4А496)
792. —, Rings in which pure ideals are generated by idempotents. Math. scand., 1972, **30**, № 2, 177—185 (РЖМат, 1973, 9А250)
793. —, Groups acting on rings. J. London Math. Soc., 1974, **8**, № 3, 483—486 (РЖМат, 1975, 5А406)
794. —. Small L. W., Power series over coherent rings. Math. scand., 1974, **35**, № 1, 21—24 (РЖМат, 1975, 10А377)
795. —, Trosborg P. J., A remark on pure ideals and projective modules. Math. scand., 1974, **35**, № 1, 16—20 (РЖМат, 1975, 9А227)
796. **Joseph A.,** Symplectic structure in the enveloping algebra of a Lie algebra. Bull. Soc. math. France, 1974, **102**, № 1, 75—83 (РЖМат, 1975, 3А354)
797. —, Proof of the Gelfand—Kirillov conjecture for solvable Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **45**, № 1, 1—10 (РЖМат, 1975, 5А250)
798. **Jothilingam P.,** A note on a theorem of M. Auslander. J. London Math. Soc., 1974, **9**, № 2, 302—304 (РЖМат, 1975, 7А572)
799. **Jozefiak T.,** Kariera twierdzenia Hilberta o syzygiach. Rosz. Pol. tow. mat., 1972, Ser. 2, № 14, 39—49 (РЖМат, 1972, 10А263)
800. **Kahlon U. S.,** Problem of Krull—Schmidt—Remak—Azumaya—Matlis. J. Indian Math. Soc., (N. S.), 1971, **35**, 255—261 (РЖМат, 1973, 1А254)
801. **Kanbara H.,** Note on Krull—Remak—Schmidt—Azumaya's theorem. Osaka J. Math., 1972, **9**, № 3, 409—413 (РЖМат, 1973, 11А257)
802. **Kaplansky I.,** Commutative rings. Boston, Allyn and Bacon, 1970, X, 180 pp. (РЖМат, 1973, 6А427)
803. —, Commutative rings. Lect. Notes Math., 1973, **311**, 153—166 (РЖМат, 1973, 7А383)
804. —, Commutative rings. Rev. ed. Chicago—London, 1974, 182 pp. (РЖМат, 1976, 1А450 К)
805. **Karamzadeh O. A. S.,** Projective maximal right ideals of selfinjective rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **48**, № 2, 286—288 (РЖМат, 1976, 2А305)
806. **Kasch F.,** Pareigis B., Einfache Untermoduln von Kogeneratoren. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1972. München, 1973, 45—76 (РЖМат, 1974, 7А394)
807. **Katayama Hisao,** On the σ-socle of a module. Proc. Jap. Acad., 1975, **51**, № 7, 528—529 (РЖМат, 1976, 5А267)
808. **Kato T.,** Rings having dominant modules. Tohoku Math. J., 1972, **24**, № 1, 1—10 (РЖМат, 1972, 10А175)
809. —, Structure of left OF-3 rings. Proc. Jap. Acad., 1972, **48**, № 7, 479—483 (РЖМат, 1973, 11А241)
810. —, U-distinguished modules. J. Algebra, 1973, **25**, № 1, 15—24 (РЖМат, 1973, 11А254)
811. **Kawada Y.,** A note on cogenerators in the category of modules. Proc. Jap. Acad., 1972, **48**, № 7, 470—473 (РЖМат, 1973, 10А254)
812. **Keating M. E.,** On the tertiary decomposition. J. London Math. Soc., 1971, **3**, № 4, 725—730 (РЖМат, 1972, 2А346)
813. **Kepka T.,** On one class of purities. Comment. math. Univ. carol., 1973, **14**, № 1, 139—154 (РЖМат, 1973, 11А262)
814. —, Notes on radical filters of ideals. Comment. math. Univ. carol., 1974, **15**, № 1, 149—159 (РЖМат, 1974, 11А307)
815. —, Costable rings. Comment. math. Univ. carol., 1974, **15**, № 2, 245—257 (РЖМат, 1974, 11А325)

816. **Kertész A.,** Ein Radikalbegriff für Moduln. Rings, Modules and Radicals, Amsterdam—London, 1973, 255—257 (РЖМат, 1976, 1A306)
817. **Kielpinski R.,** Simson D., Pure homological dimensions. Preprint № 16, Toruń, 1974, 25 p.
818. —, —, On pure homological dimension. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1975, **23**, № 1, 1—6 (РЖМат, 1975, 12A389)
819. **Kiltinen J. O.,** Infinite Abelian groups are highly topologizable. Duke Math. J., 1974, **41**, № 1, 151—154 (РЖМат, 1974, 12A197)
820. **Kirby D.,** Artinian modules and Hilbert polynomials. Quart. J. Math., 1973, **24**, 47—57 (РЖМат, 1973, 9A385)
821. —, Coprimary decomposition of Artinian modules. J. London Math. Soc., 1973, **6**, № 3, 571—576 (РЖМат, 1973, 11A396)
822. **Kiss E.,** Uber eine Kategorie von Halbmoduln. Stud. Univ. Babeş-Bolyai. Ser. math.-mech., 1974, **19**, № 2, 11—15 (РЖМат, 1975, 6A449)
823. **Kitamura Y.,** Note on quotient rings over Frobenius extensions. Math. J. Okayama Univ., 1972, **15**, № 2, 141—147 (РЖМат, 1973, 7A259)
824. —, A generalization of finite projective Frobenius extensions. Bull. Tokyo Gakugei Univ., 1974, **26**, 31—38
825. **Kiyek K.,** Konstantenreduktion von Ringen und Moduln. J. reine und angew. Math., 1971, **247**, 20—57 (РЖМат, 1972, 1A691)
826. **Klein A. A.,** On categories of quotients. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **30**, № 2, 205—211 (РЖМат, 1973, 10A282)
827. **Knauer U.,** Column monomic matrix monoids. Preprint, Bielefeld Universität, 1975, 11 pp.
828. —, Mikhalev A. V., Endomorphism monoids of acts over monoids. Semigroup Forum., 1973, **6**, № 1, 50—58 (РЖМат, 1974, 11A350)
829. **Knopfmacher J.,** Finite modules and algebras over Dedekind domains and analytic number theory. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, **78**, № 2, 193—196 (РЖМат, 1972, 10A101)
830. —, Burger G. E., Submodules, subalgebras and ideals in finite modules or nilpotent algebras over Dedekind domains. J. London. Math. Soc., 1972, **5**, № 4, 681—690 (РЖМат, 1973, 5A277)
831. **Koehler A.,** Rings with quasi-injective cyclic modules. Quart. J. Math., 1974, **25**, № 97, 51—55 (РЖМат, 1974, 12A201)
832. **Koh K.,** On a semi-prime self injective ring. Amer. Math. Monthly, 1967, **74**, № 6, 687—688 (РЖМат, 1968, 5A312)
833. —, On one sided ideals of a prime type. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **28**, № 2, 321—329 (РЖМат, 1972, 7A220)
834. —, On the complete ring of quotients. Can. Math. Bull., 1974, **17**, № 2, 285—288 (РЖМат, 1975, 7A365)
835. —, Mewborn A. C., On prime rings with ascending chain condition on annihilator right ideals and nonzero injective right ideals. Can. Math. Bull., 1971, **14**, № 3, 443—444 (РЖМат, 1972, 3A228)
836. **Kohn P.,** Ideals generated by three elements. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, № 1, 55—58 (РЖМат, 1973, 4A525)
837. **Krause G.,** On fully left bounded left Noetherian rings. J. Algebra, 1972, **23**, № 1, 88—99 (РЖМат, 1973, 4A346)
838. —, Descending chains of submodules and the Krull-dimension of Noetherian modules. J. Pure and Appl. Algebra, 1973, **3**, № 4, 385—397 (РЖМат, 1974, 9A281)
839. —, Zur Krull-Dimension linksnoeterschen Ringe. Rings, Modules and Radicals., Amsterdam—London, 1973, 259—269 (РЖМат, 1976, 2A314)
840. **Kupisch H.,** Über Klasse von Ringen mit Minimalbedingung. I. Arch. Math., 1966, **17**, № 1, 20—35 (РЖМат, 1968, 2A180)
841. —, Moduln über einreihigen Ringen. Math. Z., 1974, **137**, № 2, 151—153 (РЖМат, 1975, 2A320)
842. —, Einreihige Algebren über einem perfekten Körper. J. Algebra, 1975, **33**, № 1, 68—74 (РЖМат, 1975, 8A307)
843. —, Über eine Klasse von Artin-Ringen. II. Arch. Math., 1975, **26**, № 1, 23—25 (РЖМат, 1975, 12A260)

844. **Kurata Y.,** On an n-fold torsion theory in the category ${}_RM$. J. Algebra, 1972, **22**, № 3, 559—572 (РЖМат, 1973, 2A251)
845. —, Katayama Hisao, Kutami Mamoru. Projective modules and 3-fold torsion theories. Proc. Jap. Acad., 1974, **50**, № 8, 593—597 (РЖМат, 1975, 10A299)
846. **Kuroki N.,** Note on pure subsystems. Proc. Jap. Acad., 1974, **50**, № 9, 683—687 (РЖМат, 1976, 1A178)
847. **Kuzmanovich J.,** Localizations of Dedekind prime rings. J. Algebra, 1972, **21**, № 3, 378—393 (РЖМат, 1973, 1A297)
848. —, Localizations of *HNP* rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **173**, Nov., 137—157 (РЖМат, 1973, 10A238)
849. **Laborde O.,** Théorème de Skolem—Noether pour les algèbres d'Adzumaya graduées sur un anneau semi-local. C. r. Acad. sci., 1974, **A279**, № 12, 447—449 (РЖМат, 1975, 7A569)
850. **Lady E. L.,** Slender rings and modules. Pacif. J. Math., 1973, **49**, № 2, 397—406 (РЖМат, 1974, 12A218)
851. **Lafon J.-P.,** Sur les anneaux commutatif d'Hermite et á diviseurs élémentaires. C. r. Acad. sci., 1971, **A273**, № 21, 964—966 (РЖМат, 1972, 4A470)
852. —, Modules de présentation finie et de type fini sur un anneau arithmétique. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov. 1971-maggio 1972. Vol. 11. London—New York, 1973, 121—141 (РЖМат, 1974, 9A475)
853. —, Modèles de presentation finie et de type fini sommes directes de modules monogenes. Rings, Modules and Radicals. Amsterdam—London, 1973, 315—317 (РЖМат, 1976, 2A518)
854. **Lambek J.,** On the representation of modules by sheaves of factor modules. Can. Math. Bull., 1971, **14**, № 3, 359—568
855. —, On the representation of modules by sheaves of modules quotients. Ring theory. Acad. Press, New York, 1972, 231—234
856. —, Bicommutators of nice injectives. J. Algebra, 1972, **21**. № 1, 60—73 (РЖМат, 1972, 11A202)
857. —, Localization and completion. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, **78**, № 4, 582—583 (РЖМат, 1973, 2A245)
858. —, Localization and completion. J. Pure and Appl. Algebra, 1972, **2**, № 4, 343—370 (РЖМат, 1973, 7A260)
859. —, Noncommutative localization. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, **79**, № 5, 857—872 (РЖМат, 1974, 7A395)
860. —, Localisation et dualité. Sémin. P. Dubreil. Algèbre Univ. Pierre et Marie Curie, 1974—1975, **28**, 25/1 (РЖМат, 1976, 7A395)
861. —, Michler G., Completions and classical localizations of right Noetherian rings. Pacif. J. Math., 1973, **48**, № 1, 133—140 (РЖМат, 1974, 8A264)
862. —, —, The torsion theory at a prime ideal of a right Noetherian ring. J. Algebra, 1973, **25**, № 2, 364—389 (РЖМат, 1973, 11A256)
863. —, Localization of right Noetherian rings at semiprime ideals. Can. J. Math., 1974, **26**, № 5, 1069—1085 (РЖМат, 1975, 7A364)
864. —, Rattray B. A., Localization at injectives in complete categories. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **41**, № 1, 1—9 (РЖМат, 1974, 8A296)
865. —, —, Localization and duality in additive categories. Houston J. Math., 1975, **1**, № 1, 87—100 (РЖМат, 1976, 6A335)
866. **Lampe W. A.,** Note on related structures of a universal algebra. Pacif. J. Math., 1972, **43**, № 1, 189—205 (РЖМат, 1973, 6A336)
867. **Lang N.,** The ring and algebra properties of injective hulls. Math. Coll. Univ. Cape Town, 1973, **8**, 143—156
868. —, On ring properties of injective hulls. Can. Math. Bull., 1975, **18**, № 2, 233—240
869. **Langmann K.,** Globale Moduln. Math. Z., 1972, **124**, № 2, 141—168 (РЖМат, 1972, 5A455)
870. —, Konstruktionen globaler Moduln und Anwendungen. Math. Z., 1972, **127**, № 3, 235—255 (РЖМат, 1973, 3A450)
871. —, Globale Ringe und Moduln. Math. Z., 1972, **128**, № 2, 169—185 (РЖМат, 1973, 3A451)

872. —, Topologische globale Moduln. J. reine und angew. Math., 1975, 272, 14—22 (РЖМат, 1975, 11А477)
873. Lanski C., Regularity and quotients in rings with involution Pacif. J. Math., 1975, 56, № 2, 565—574
874. Larsen M. D., Lewis W. J., Shores T. S., Elementary divisor rings and finitely presented modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 187, № 1, 231—248 (РЖМат, 1974, 11А474)
875. Latch D., Mitchell B., On the difference between cohomological dimension and homological dimension. J. Pure and Appl. Algebra, 1974, 5, № 3, 333—343 (РЖМат, 1975, 7А530)
876. Laudal O. A., Note on the projective limit on small categories. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, 33, № 2, 307—309 (РЖМат, 1973, 1А371)
877. Lawton W., The structure of compact connected groups which admit an expansive automorphism. Lect. Notes Math., 1973, 318, 182—196 (РЖМат, 1973, 8А213)
878. Laxton R. R., Machin A., On the decomposition of near-rings. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1972, 38, 221—230 (РЖМат, 1973, 2А271)
879. Lazard D., Epimorphismes plats d'anneaux. C. r. Acad. sci., 1968, A266, № 6, 314—316 (РЖМат, 1968, 12А325)
800. —, Epimorphismes plats. Sémin. algèbre commut. Samuel. Ecole norm. supér. jeunes filles, 1967—1968, 4/01—4/12 (РЖМат, 1969, 5А328)
881. —, Calculs sur les modules projectifs. Colloq. algebre commut., Rennes, 1972. (Rennes), s. a., 1/1—1/8 (РЖМат, 1973, 6А432)
882. —, Liberté des gros modules projectifs. J. Algebra, 1974, 31, № 3, 437—451 (РЖМат, 1975, 4А311)
883. Leduc P. Y., Radical et primitivité des catégories. Cahiers topologie géom. différent., 1968, 10, 347—350 (РЖМат, 1969, 9А217)
884. Lee K. Y., Park J. K., A notice on the extension of modules. UIT Rep., 1971, 2, № 1, 5—8
885. Lee Sin-Min, Axiomatic characterization of Σ-semirings. Acta sci. math., 1971, 32, № 3-4, 337—343 (РЖМат, 1972, 8А359)
886. Lee W., Park J. K., On orders on a class of *QF*-3-rings. J. Korean Math. Soc., 1973, 10, 81—84
887. Lemaire C., Morphismes partiels et semi-localisations. Bull. Soc., math. Belg., 1971, 23, № 2, 181—193 (РЖМат, 1973, 5А247)
888. —, Sous-modules purs et sommantes directes. Can. J. Math., 1973, 25, № 6, 1159—1164 (РЖМат, 1974, 8А269)
889. Lemonnier B., Sur une classe d'anneaux définie à partir de la déviation. C. r. Acad. sci., 1972, 274, A1688—A1690 (РЖМат, 1973, 2А249)
890. —, Sur les anneaux qui ont une déviation. C. r. Acad. sci., 1972, 275, № 6, A357—A359 (РЖМат, 1973, 3А270)
891. —, Un théorème de Jordan-Hölder pour les modules de déviation entière. C. r. Acad. sci., 1973, 276, № 1, 17—20 (РЖМат, 1973, 7А276)
892. —, Un théorème de Jordan-Holder pour les modules de deviation entière. Sémin. d'algèbre non commutative (année 1972/1973), Première partie, Exp. № 2, 6 pp., Publ. Math. Orsay, № 27, Univ. Paris, XI, Orsay, 1973
883. —, Quelques conditions Noethériennes dans les anneaux avec déviation. C. r. Acad. sci., 1975, 280, № 10, A621—A623 (РЖМат, 1975, 11А337)
894. Lenagan T. H., Bounded hereditary Noetherian prime rings. J. London Math. Soc., 1973, 6, № 2, 241—246 (РЖМат, 1973, 9А263)
895. —, The nil radical of a ring with Krull dimension. Bull. London Math., 1973, 5, № 3, 307—311 (РЖМат, 1974, 6А365)
896. —, Nil ideals in rings with finite Krull dimension. J. Algebra, 1974, 29, № 1, 77—87 (РЖМат, 1974, 9А83)
897. Lenzing H., Die Kohärenz unendlicher Matrizenringe. Rings, Modules and Radicals. Amsterdam—London, 1973, 329—336 (РЖМат, 1976, 2А340)

898. Lesieur L., Idéal complètement premier d'un anneau Noethérien à gauche intègre. Sémin. P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et C. Pisot. Univ. Paris, 1970—1971 (1972), 24, № 1, 9/01—9/12 (РЖМат, 1973, 8А238)
899. —, Sur les *T*-anneaux. C. r. Acad. sci., 1973, A276, № 6, 435—438 (РЖМат, 1973, 9А256)
900. —, Idéal complètement premier d'un anneau Noethérien à gauche intègre. Rings, Modules and Radicals. Amsterdam—London, 1973, 337—349 (РЖМат, 1976, 2А316)
901. Leware R. A., Projective quasi-coherent sheaves of modules. Pacif. J. Math., 1975, 57, № 2, 457—461 (РЖМат, 1976, 3А436)
902. Levin M. D., Locally compact modules. J. Algebra, 1973, 24, № 1, 25—55 (РЖМат, 1973, 5А294)
903. Levy L. S., Robson J. C., Matrices and pairs of modules. J. Algebra, 1974, 29, № 3, 427—454 (РЖМат, 1975, 2А321)
904. Licoiu D., Sur la dimension homologique des morphismes d'anneaux. C. r. Acad. sci., 1972, 275, № 13, A585—A586 (РЖМат, 1973, 3А385)
905. —, Sur les morphismes parfaits d'anneaux. C. r. Acad. sci., 1972, 275, № 14, A633—A634 (РЖМат, 1973, 4А342)
906. —, Catégories semi-primaires. Rev. roum. math. pures et appl. 1972, 17, № 10, 1649—1652 (РЖМат, 1973, 8А283)
907. —, Sur la dimension homologieque des modules. C. r. Acad. sci., 1973, 276, № 19, A1273—A1274 (РЖМат, 1973, 12А374)
908. —, Sur la dimension homologique des morphismes d'anneaux. C. r. Acad. sci., 1973, 276, № 20, A1329—A1331 (РЖМат, 1974, 1А394)
909. —, Sur la dimension homologieque des morphismes d'anneaux. C. r. Acad. sci., 1974, A278, № 18, 1167—1168 (РЖМат, 1974, 11А443)
910. Limaye N. B., Cross-ratios and projectivities of a line. Math. Z., 1972, 129, № 1, 49—53 (РЖМат, 1973, 5А307)
911. Lin Hueilung, A note on the modules of fractions. Tamhang J. Math., 1973, 4, № 2, 139—145 (РЖМат, 1975, 9А342)
912. Lindner H., Morita equivalences of enriched categories. Cah. topol. et géom. différent. Ch. Ehresmann, 1973, 14, № 2, 197 (РЖМат, 1974, 7А447)
913. —, Morita equivalences of enriched categories. Cah. topol. et géom. different. Ch. Ehresmann, 1974, 15, № 4, 377—397, 449—450 (РЖМат, 1976, 4А302)
914. Linton R. C., Abelian groups in which every neat subgroup is a direct summand. Publs math., 1973, 20, № 1-2, 157—160 (РЖМат, 1974, 9А210)
915. Loonstra F., Remark on the maximal torsion subgroup of Abelian group. Beitr. Algebra und Geom., 3, Berlin, 1974, 55—57 (РЖМат, 1975, 10А212)
916. Loos O., Assiziative tripelsysteme. Manuscr. math., 1972, 7, № 2, 103—112 (РЖМат, 1972, 12А292)
917. Loy R. J., Miller J. B., Tight Riesz groups. J. Austral. Math. Soc., 1972, 13, № 2, 224—240 (РЖМат, 1972, 9А202)
918. Lu Chin-Pi, A generalization of Mori's theorem. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, 31, № 2, 373—375 (РЖМат, 1972, 10А276)
919. Luedeman J. K., Σ-quasi-injective modules and Utumi's Σ-quotient ring. Bull. Soc. math. Belg., 1970, 22, № 4, 368—375 (РЖМат, 1972, 1А429)
920. —, A generalization of the concept of a ring quotients. Can. Math. Bull., 1971, 14, № 4, 517—529 (РЖМат, 1972, 8А330)
921. —, The Σ-socle of a module. Bull. Soc. math. Belg., 1972, 24, № 4, 323—329 (РЖМат, 1974, 7А392)
922. Macdonald I. G., Secondary representation of modules over a commutative ring. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov. 1971-maggio 1972. Vol. 11. London—New York, 1973, 23—43 (РЖМат, 1974, 9А478)
923. MacLane S., Homology, 3rd corrected printing, Berlin—Heidelberg—New York, 1975, 422 pp.
924. Mader A., The *p*-adic hull of Abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 187, № 1, 217—229 (РЖМат, 1975, 1А256)

925. **Makino R.**, Socles and hearts of modules. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1972, **A11**, № 286-312, 193—200 (РЖМат, 1973, 6A302)
926. —, Balanced conditions for direct sums of serial modules. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1974, **12**, № 329-346, 181—201 (РЖМат, 1975, 10A302)
927. —, Serial endomorphism rings. Proc. Jap. Acad., 1975, **51**, № 7, 530—534 (РЖМат, 1976, 6A290)
928. **Mannepalli V. L.**, Satyanarayana M., Monoids of Dedekind type. Semigroup Forum, 1974, **9**, № 1, 19—27 (РЖМат, 1975, 4A180)
929. **Manocha Jitendra N.**, A generalization of finite dimensionality for modules. J. Pure and Appl. Algebra, 1975, **6**, № 3, 253—258 (РЖМат, 1976, 5A266)
930. **Marot J.**, Une propriété des sur-anneaux plats d'un anneau. C. r. Acad. sci., 1967, **A265**, № 1, A8—A10 (РЖМат, 1968, 2A292)
931. **Martinez J.**, Tensor products of partially ordered groups. Pacif. J. Math., 1972, **41**, № 3, 771—789 (РЖМат, 1973, 3A255)
932. —, A Hom-functor for lattice-ordered groups. Pacif. J. Math., 1973, **48**, № 1, 169—183 (РЖМат, 1974, 7A338)
933. **Marubayashi H.**, Modules over bounded Dedekind prime rings. I. Proc. Jap. Acad., 1971, **47**, № 6, 519—522 (РЖМат, 1972, 3A243); II. Proc. Jap. Acad., 1971, **47**, № 6, 523—526 (РЖМат, 1972, 3A244)
934. —, Modules over bounded Dedekind prime rings. I. Osaka J. Math. 1972, **9**, № 1, 95—110 (РЖМат, 1973, 3A288); II. Osaka J. Math., 1972, **9**, № 3, 427—445 (РЖМат, 1973, 9A271)
935. —, On potent rings and modules. Osaka J. Math., 1972, **9**, № 2, 231—259 (РЖМат, 1973, 8A236)
936. —, Modules over Dedekind prime rings. I. Osaka J. Math., 1973, **10**, № 3, 611—616 (РЖМат, 1974, 11A326); II. Osaka J. Math., 1974, **11**, № 3, 517—545 (РЖМат, 1975, 7A374); III. Osaka J. Math., 1974, **11**, № 3, 547—558 (РЖМат, 1975, 7A375); IV. Osaka J. Math., 1974, **11**, № 3, 559—567 (РЖМат, 1975, 7A376)
937. **Mascart H.**, La convergence locale dans un module topologique. Rev. roum. math. pures et appl., 1972, **17**, № 9, 1381—1384 (РЖМат, 1973, 4A385)
938. **Mason G. R.**, On self-injective group rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **32**, № 1, 85—86 (РЖМат, 1973, 1A240)
939. —, Solvable and nilpotent near-ring modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **40**, № 2, 351—357 (РЖМат, 1974, 5A322)
940. —, *W*-groups and near-rings modules. Can. Math. Bull., 1975, **18**, № 2, 241—244
941. **Masunaga Y.**, Noguchi S., Oizumi J., Structure of automata and the theory of semigroups. Sci. Repts Res. Insts Tohoku Univ. Elec. Commun., 1973, **B25**, № 1, 1—22 (РЖМат, 1974, 7A239)
942. Mathematical foundations of computer science 1975. Lect. Notes Computer Sci., 1975, **32**, 476 pp.
943. **Matlis E.**, Injective modules over Noetherian rings. Pacif. J. Math., 1958, **8**, № 3, 511—528 (РЖМат, 1959, 9823)
944. —, Local *D*-rings. Math. Z., 1972, **124**, № 4, 266—272 (РЖМат, 1972, 9A336)
945. —, Rings of type. I. J. Algebra, 1972, **23**, № 1, 76—87 (РЖМат, 1973, 4A528)
946. —, Rings of type. II. Mich. Math. J., 1972, **19**, № 2, 141—147 (РЖМат, 1972, 12A346)
947. —, Rings with property *D*. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **170**, 437—446 (РЖМат, 1973, 7A405)
948. —, 1-dimensional Cohen—Macaulay rings. Lect. Notes Math., 1973, **327**, XII, 157 pp. (РЖМат, 1974, 2A368)
949. **Matsuda R.**, Notes on primary or coprimary modules. Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ., 1974, № 6, 3—8

950. **Maury G.**, Sur les orders maximaux non nécessairement réguliers. C. r. Acad. sci., 1971, **272**, № 19, A1230—A1232 (РЖМат, 1972, 1A431)
951. —, La condition «Intégralement clos». III. Sur orders maximaux au sens d'Asano non nécessairement réguliers. J. Algebra, 1973, **25**, № 3, 522—533 (РЖМат, 1974, 1A258); IV. Modules de type fini sur un ordre maximal. Publs Dép. math., 1974, **11**, № 1, 1—22 (РЖМат, 1975, 5A244); V. Exemples d'ordre maximaux. Publs Dép. math., 1971, **8**, № 2, 101—114 (РЖМат, 1973, 6A446)
952. —, Anneaux de fractions dans les orders maximaux classiques. C. r. Acad. sci., 1975, **281**, № 1, A5—A7 (РЖМат, 1976, 2A329)
953. **Mazet P.**, Générateurs, relations et épimorphismes d'anneaux. C. r. Acad. sci., 1968, **A266**, № 6, 309—311 (РЖМат, 1968, 12A323)
954. —, Caractérisation des épimorphismes par relations et générateurs. Sémin. algèbre commut. Samuel. Ecole norm. supér jeunes filles, 1967—1968, 2/01—2/08 (РЖМат, 1969, 5A326)
955. —, Propriétés de $G(E)$ vis-a-vis de décompositions primaires. Lect. Notes Math., 1972, **275**, 71—81 (РЖМат, 1973, 1A388)
956. **McCarthy P. J.**, The ring of polynomials over a von Neumann regular ring. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **39**, № 2, 253—254 (РЖМат, 1974, 1A411).
957. **McConnell J. C.**, A note on the Weyl algebra A_n. Proc. London Math. Soc., 1974, **28**, Part 1, 89—98 (РЖМат, 1974, 8A330)
958. —, Representations of solvable Lie algebras and the Gelfand—Kirillov conjecture. Proc. London Math. Soc., 1974, **29**, № 3, 453—484 (РЖМат, 1975, 6A413)
959. —, Robson J. C., Homomorphisms and extensions of modules over certain differential polynomial rings. J. Algebra, 1973, **26**, № 2, 319—342 (РЖМат, 1974, 4A224)
960. **McKerrow A.**, On the injective dimension of modules of power series. Quart. J. Math., 1974, **25**, № 99, 359—368 (РЖМат, 1975, 10A359)
961. **McMaster R. J.**, Cotorsion theories and colocalization. Can. J. Math., 1975, **27**, № 3, 618—628 (РЖМат, 1976, 4A254)
962. **McMorris F. R.**, The quotient semigroup of a semigroup that is a semilattice of groups. Glasgow Math. J., 1971, **12**, № 1, 18—23 (РЖМат, 1972, 1A242)
963. —, The singular congruence and the maximal quotient semigroup. Can. Math. Bull., 1972, **15**, № 2, 301—303 (РЖМат, 1973, 1A182)
964. —, The maximal quotient semigroup. Semigroup Forum, 1972, **4**, № 4, 360—364 (РЖМат, 1973, 3A204)
965. **Megibben C.**, A generalization of the classical theory of primary groups. Tohoku Math. J., 1970, **22**, № 3, 347—356 (РЖМат, 1971, 7A199)
966. —, On p^α-high injectives. Math. Z., 1971, **122**, № 2, 104—110 (РЖМат, 1972, 2A242)
967. —, Generalized pure injectivity. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic. 1972. Vol. 13. London—New York, 1974, 257—271 (РЖМат, 1975, 5A174)
968. **Menzin M. S.**, The condition $\mathrm{Ext}^i(M, R)=0$ for modules over local Artin algebras $(R, \mathfrak{M})$ with $\mathfrak{M}^2=0$. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **43**, № 1, 47—52 (РЖМат, 1975, 4A442)
969. —, Indecomposable modules over Artin local algebras. J. Algebra, 1974, **32**, № 1, 207—214 (РЖМат, 1975, 5A241)
970. **Metelli C.**, Salce L., The endomorphism ring of an Abelian torsionfree homogeneous separable group. Arch. Math., 1975, **26**, № 5, 480—485 (РЖМат, 1976, 5A272)
971. **Michler G.**, Halberbliche, fastlokale Ordnungen in einfachen Artinringen. Arch. Math., 1967, **18**, № 5, 456—464 (РЖМат, 1968, 7A303)
972. —, Right symbolic powers and classical localization in right Noetherian rings. Math. Z., 1972, **27**, № 1, 57—69 (РЖМат, 1973, 2A244)
973. —, Prime right ideals and right Noetherian rings. Ring theory (Proc. Conf., Park City, Utah, 1971). Acad. Press, New York, 1972, 251—255

974. —, Quotient rings of right Noetherian rings at semi-prime ideals. Publs. Dép. math., 1973, **10**, № 1, 85—92 (РЖМат, 1974, 9А293)
975. —, Example of an injective module which is not nice. Can. Math. Bull., 1974, **17**, № 1, 133—134 (РЖМат, 1975, 5А239)
976. —, Ein Zusatz zur vorangehenden Arbeit von Alain Hudry. Arch. Math., 1974, **25**, № 4, 368—370 (РЖМат, 1975, 5А272)
977. —, Villamayor O. E., On rings whose simple modules are injective. J. Algebra, 1973, **25**, № 1, 185—201 (РЖМат, 1973, 11А231)
978. **Miller J. B.**, A characterization of weak projectability. Bull. Austral. Math. Soc., 1973, **8**, № 2, 205—209 (РЖМат, 1974, 1А230)
979. **Miller R. W.**, TTF classes and quasi-generators. Pacif. J. Math., 1974, **51**, № 2, 499—507 (РЖМат, 1975, 3А346)
980. —, **Turnidge D. R.**, Some examples from infinite matrix rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **38**, № 1, 65—67 (РЖМат, 1973, 12А301)
981. —, —, Co-Artinian rings and Morita duality. Isr. J. Math., 1973, **15**, № 1, 12—26 (РЖМат, 1974, 4А210)
982. **Minassian D. P.**, On Teh's construction of orders in Abelian groups. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1972, **71**, № 3, 433—436 (РЖМат, 1972, 11А160)
983. **Mitchell B.**, Rings with several objects. Adv. Math., 1972, **8**, 1—161 (РЖМат, 1972, 8А448)
984. —, The cohomological dimension of a directed set. Can. J. Math., 1973, **25**, № 2, 233—238 (РЖМат, 1974, 2А349)
985. **Mogami Imao**, Tominaga Hisao, On primary decomposition theory for modules. Math. J. Okayama Univ., 1973, **16**, № 1, 37—45 (РЖМат, 1974, 6А372)
986. **Mohamed Saad**, Rings with proper right ideals quasi-injective. Notic. Amer. Math. Soc., 1975, **22**, № 6, A621≡75T—A237
987. —, Singh S., Weak q-rings. Notic. Amer. Math. Soc., 1975, **22**, № 7, A—704, 75T—A255
988. **Molfino M. T.**, Su alcuni invarianti numerici associati a sistemi di equazioni lineari in un modulo. Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1971 (1972), **46**, 215—222 (РЖМат, 1972, 11А309)
989. **Molinelli S.**, Sulla noetherianita e la piattezza nel passaggio ai completamenti. Publ. Ist. mat. Univ. Genova, 1973, № 62, 27 p. (РЖМат, 1974, 7А575)
990. —, Sui prodotti di annelli e certi completamenti non $\mathfrak{M}$-adici. Publ. 1st. mat. Univ. Genova., 1974, № 116, 1—20 (РЖМат, 1975, 9А327)
991. —, Alcune proprietádi piatezza di un anello completo relative ad un sottoannello. Publ. 1st. mat. Univ. Genova, 1974, № 117, 1—16 (РЖМат, 1975, 9А328)
992. **Monk G. S.**, A characterization of exchange rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, № 2, 349—353 (РЖМат, 1973, 7А247)
993. **Montgomery S.**, Rings of quotients for a class of special Jordan rings. J. Algebra, 1974, **31**, № 1. 154—165 (РЖМат, 1975, 2А336)
994. **Moore D. J.**, Some remarks on R-sequencés and R-cosequences. J. London Math. Soc., 1972, **5**, № 4, 638—644 (РЖМат, 1973, 6А447)
995. —, Primary and coprimary decompositions. Proc. Edinburg Math. Soc., 1973, **18**, № 4, 251—264 (РЖМат, 1974, 4А301)
996. **Moore J. C.**, Peterson F. P., Nearly Frobenius algebras and their module categories. Lect. Notes Math., 1972, **249**, 94—98 (РЖМат, 1972, 8А582)
997. —, —, Nearly Frobenius algebras. Poincaré algebras and their modules. J. Pure and Appl. Algebra, 1973, **3**, № 1, 83—93 (РЖМат, 1973, 10А242)
998. **Moore J. D.**, Bowman H., A note on the large subgroup topology for Abelian groups. Comment. math. Univ. St. Pauli, 1974, **22**, № 2, 7—17 (РЖМат, 1974, 11А226)
999. **Morita K.**, Quotient rings. Ring theory. Acad. Press, New York, 1972, 257—285

1000. **Morris S. A.**, Free compact Abelian groups. Mat. cas., 1972, **22**, 141—147 (РЖМат, 1972, 11А169)
1001. **Moszner Z.**, Structure de l'automate plein, réduit et inversible. Aequat. math., 1973, **9**, № 1, 46—59 (РЖМат, 1973, 11В529)
1002. **Motose K.**, Note on the endomorphism ring. J. Fac. Sci. Shushu Univ., 1971, **6**, № 1, 35—36 (РЖМат, 1972, 12А261)
1003. **Müller B. J.**, All duality theories for linearly topologized modules come from Morita dualities. Rings, Modules and Radicals. Amsterdam—London, 1973, 357—360 (РЖМат, 1976, 2А362)
1004. —, The quotient category of a Morita context. J. Algebra, 1974, **28**, № 3, 389—407 (РЖМат, 1974, 12А238)
1005. —, The structure of quasi-Frobenius rings. Can. J. Math., 1974, **26**, № 5, 1141—1151 (РЖМат, 1975, 7А354)
1006. **Müller W.**, Symmetrische Algebren mit injektivem Zentrum. Manuscr. math., 1974, **11**, № 3, 283—289 (РЖМат, 1974, 6А347)
1007. —, Unzerleghare Moduln über artinschen Ringen. Math. Z., 1974, **137**, № 3, 197—226 (РЖМат, 1975, 3А345)
1008. **Murata K.**, On submodules over an Asano order of a ring. Proc. Jap. Acad., 1974, **50**, № 8, 584—588 (РЖМат, 1975, 11А356)
1009. **Murdoch D. C.**, Oystaeyen F. van, Noncommutative localization and sheaves. J. Algebra, 1975, **35**, № 1-3, 500—515 (РЖМат, 1976, 1А293)
1010. —, —, Symmetric kernel functors and quasi-primes. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1975, **A78**, № 2, 97—107 (РЖМат, 1976, 1А364)
1011. **Murley C. E.**, The classification of certain classes of torsion free Abelian groups. Pacif. J. Math., 1972, **40**, № 3, 647—665 (РЖМат, 1973, 1А189)
1012. **Murthy M. P.**, Pedrini C., K_0 and K_1 of polynomial rings. Lect. Notes Math., 1973, **342**, 109—121 (РЖМат, 1974, 7А561)
1013. —, Towber J., Algebraic vector bundles over A^3 are trivial. Invent. math., 1974, **24**, № 3, 173—189 (РЖМат, 1974, 10А354)
1014. **Nagata M.**, Finitely generated rings over a valuation ring. J. Math. Kyoto Univ., 1966, **5**, № 2, 163—169 (РЖМат, 1967, 9А238)
1015. —, On flat extensions of a ring. Press. Univ. Montréal, 1975
1016. **Nastasescu C.**, Quelques remarques sul la dimension homologique des anneaux. Eléments reguliers. J. Algebra, 1971, **19**, № 4, 470—485 (РЖМат, 1972, 6А385)
1017. —, L'anneau des endomorphismes d'un module de torsion. J. Algebra, 1972, **23**, 476—481 (РЖМат, 1973, 5А268)
1018. —, Punti isolati nello spettro minimale di un anello. Atti Acad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1973, **54**, № 5, 677—684 (РЖМат, 1975, 5А412)
1019. —, La filtration de Gabriel. Ann. Scuola norm. super. Pisa. sci. fis. e mat., 1973—1974, **27**, № 3, 457—470 (РЖМат, 1974, 10А355)
1020. —, La serie di Loewy associata ad un anello. Rev. roum. math pures et appl., 1974, **19**, № 4, 427—433 (РЖМат, 1974, 11А484)
1021. —, La structure des modules par rappor á une topologie additive. Tohoku Math. J., 1974, **26**, № 2, 173—201 (РЖМат, 1975, 2А451)
1022. —, Collegamento tra il reticolo degli ideali di un anello e il suo spettro. Ann. Univ. Ferrara, 1974, Sez. VII, **19**, 87—92 (РЖМат, 1975, 5А409)
1023. —, **Albu T.**, Décomposition primaire des modules. J. Algebra, 1972, **23**, 263—270 (РЖМат, 1973, 4А526)
1024. **Nelius C. F.**, Ringe mit eindeutiger Addition. Diss. Gesamthochschule Padeborn, Padeborn, 1974
1025. **Němec P.**, Теория Ульма для модулей. Вестн. Моск. ун-та. Мат., **мех.**, 1975, № 6, 120 с.
1026. **Newell D. C.**, Morita theorems for functor categories. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **168**, June, 423—433 (РЖМат, 1973, 3А340)

1027. **Nguyen-Trong-Kham.**, *D*-anneaux. I. Rev. roum. math. pures et appl., 1972, **17**, № 10, 1671—1680 (РЖМат, 1973, 8А344)
1028. —, Théorie de la décomposition primaire dans les *D*-anneaux. II. Rev. roum. math. pures et appl., 1973, **18**, № 1, 65—76 (РЖМат, 1973, 10А336)
1029. **Nichols J. C.**, Remarks on homological dimensions. Rocky Mount. J. Math., 1972, **2**, № 1, 25—29
1030. **Nicholson W. K.**, Semiperfect rings with Abelian group of units. Pacif. J. Math., 1973, **49**, № 1, 191—198 (РЖМат, 1974, 9А270)
1031. —, Semiperfect rings with Abelian adjoint group. Pacif. J. Math., 1974, **54**, № 1, 201—207 (РЖМат, 1975, 8А302)
1032. —, Lifting idempotents and exchange rings. Notic. Amer. Math. Soc., 1975, **22**, № 7, A-708, 75T—A272
1033. **Nico W. R.**, An improved upper bound for global dimension of semigroup algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, № 1, 34—36 (РЖМат, 1973, 5А404)
1034. —, Some finiteness conditions on indecomposable operands. Semigroup Forum., 1972, **5**, № 2, 145—153 (РЖМат, 1973, 7А178)
1035. —, A property of projective ideals in semigroup algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **37**, № 2, 407—410 (РЖМат, 1973, 10А244)
1036. —, A study of operands in terms of maximal generalized orbits. Semigroup Forum, 1973, **6**, № 1, 69—74 (РЖМат, 1974, 10А185)
1037. —, A study of operands in terms of maximal generalized orbits. J. Algebra, 1974, **30**, № 1-3, 473—484 (РЖМат, 1975, 1А242)
1038. —, Height of operands over monoids satisfying the D. C. C. on orbits. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **48**, № 2, 313—320 (РЖМат, 1976, 2А214)
1039. **Nicolas A. M.**, Modules factories. Bull. sci. math., 1971, **95**, № 1, 33—52
1040. —, Extensions factorielles et modules factorables. Bull. sci. math. France, 1974, **98**, № 2, 117—143 (РЖМат, 1975, 7А561)
1041. —, Modules factorables de type fini et de rang $n \geqslant 2$. C. r. Acad. sci., 1975, **280**, 25, A1717—A1718 (РЖМат, 1976, 1А479)
1042. **Nienhuys J. W.**, Construction of group topologies on Abelian groups. Fund. math., 1972, **75**, № 2, 101—116 (РЖМат, 1973, 4А290)
1043. **Nill J.**, Torsionstheorien und Quotientenringe von rechtsnoetherschen Ringen. Mitt. Math. Sem. Giessen, 1973, № 104, 91 S. (РЖМат, 1974, 8А266)
1044. **Niță C.**, Remarques sur les anneaux *N*-reguliers. C. r. Acad. sci. 1970, **271**, № 6, A345—A348 (РЖМат, 1971, 4А222)
1045. —, *S*-inele şi inele *N*-regulate. Stud. ş cerc. mat., 1972, **24**, № 4, 579—621 (РЖМат, 1973, 2А242)
1046. —, Anneaux *N*-réguliers de dimension finie. Rev. roum. math. pures et appl., 1973, **18**, № 6, 923—926 (РЖМат, 1974, 1А245)
1047. —, Anneaux *N*-réguliers. Rev. roum. math. pures et appl., 1975, **20**, № 7, 793—801 (РЖМат, 1976, 2А320)
1048. —, Théories de torsion et partitions admissibles du spectre d'un anneau. J. Algebra, 1975, **37**, № 2, 308—312 (РЖМат, 1976, 5А422)
1049. **Northcott D. G.**, Grade sensitivity and generic perfection, Proc. Lond. Math. Soc., 1970, **20**, № 4, 597—618 (РЖМат, 1971, 2А344)
1050. —, A first course of homological algebra. London, 1973, xi+206 pp.
1051. —, Injective envelopes and inverse polinomials. J. London Math. Soc., 1974, **8**, № 2, 290—296 (РЖМат, 1975, 3А470)
1052. **Nummela E. C.**, The projective dimension of a compact Abelian group. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **38**, № 3, 452—456 (РЖМат, 1974, 2А348)
1053. —, *K*-groups generated by *K*-spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **201**, Jan., 279—289 (РЖМат, 1975, 8А284)
1054. —, Homological algebra of *K*-modules. Preprint. Univ. Florida, 27 pp.
1055. —, Homological algebra of topological modules. Notice Amer. Math. Soc., 1976, **18**, № 7, 689—A45

1056. **Nunke R. J.**, Uniquely elongating modules. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic. 1972. Vol. 13. London — New York, 1974, 315—330 (РЖМат, 1975, 7А269)
1057. **Oberst U.**, Exactness of inverse limits. Bull. Amer. Math., Soc., 1968, **74**, № 6, 1129—1132 (РЖМат, 1970, 8А313)
1058. —, R ö h r l H., Flat and coherent functors. J. Algebra, 1970, **14**, № 1, 91—105 (РЖМат, 1970, 8А314)
1059. —, S c h n e i d e r H.-J., Kommutative, *F*-linear kompakte Ringe. J. Algebra, 1973, **25**, № 2, 316—363 (РЖМат, 1973, 11А378)
1060. —, O'Donnell S. R., A general injectivity for modules. Math. Z., 1972, **124**, № 1, 9—19 (РЖМат, 1972, 5А283)
1061. **Qgus A.**, B e r g m a n G., Nakayama's lemma for half-exact functors. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **31**, № 1, 67—74 (РЖМат, 1972, 9А338)
1062. **Ohm J.**, R u s h D. E., The finiteness of *I* when $R[X]/X$ is flat. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, **77**, № 5, 793—796 (РЖМат, 1972, 4А467)
1063. —, —, The finiteness of *I* when $R[X]/I$ is flat. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **171**, Sept., 377—408 (РЖМат, 1973, 6А443)
1064. —, —, Content modules and algebras. Math. scand., 1972, **31**, № 1, 49—68 (РЖМат, 1973, 10А353)
1065. **Ojanguren M.**, S r i d h a r a n R., Cancellation of Azumaya algebras. J. Algebra, 1971, **18**, № 4, 501—505 (РЖМат, 1972, 5А396)
1066. **Olin P.**, Direct multiples and powers of modules. Fund. math., 1971, **73**, № 2, 113—124 (РЖМат, 1972, 7А238)
1067. **Olivier J.-P.**, Montée des propriétes par morphismes absolument plats. C. r. J. d'Algèbre Pure et Appl., Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1971
1068. —, Descente de quelques propriétés élémentaires par morphismes pures. C. r. J. d'Algèbre Pure et Appl. Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1971, 47—85
1069. —, Fermeture intégrale et changements de base absolument plats. Colloq. algebre commut., Rennes, 1972. (Rennes), s. a., 9/1—9/13 (РЖМат, 1973, 6А420)
1070. —, Descente de quelques propriétés élémentaires par morphismes purs. Ann. Acad. brasil. ciênc., 1973, **45**, № 1, 17—33 (РЖМат, 1974, 4А299)
1071. **O'Meara K. G.**, Right orders in full linear rings. Bull. Austral. Math., Soc., 1972, **6**, № 3, 468—470 (РЖМат, 1973, 1А239)
1072. —, Primeness of right orders on full linear rings. J. Algebra, 1973, **26**, № 2, 172—184 (РЖМат, 1974, 4А218)
1073. —, Intrinsic extensions of prime rings. Pacif. J. Math., 1974, **51**, № 1, 257—269 (РЖМат, 1975, 3А334)
1074. —, Right orders in full linear rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **203**, 299—318 (РЖМат, 1976, 1А298)
1075. **Onodera T.**, Ein Satz über koendlich erzeugte *RZ*-Moduln. Tôhoku Math. J., 1971, **23**, № 4, 691—695 (РЖМат, 1972, 11А203)
1076. —, Linearly compact modules and cogenerators. I. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. Math., 1972, **22**, № 3-4, 116—125 (РЖМат, 1972, 12А253). II. Hokkaido Math. J., 1973, **2**, № 2, 243—251 (РЖМат, 1974, 3А223)
1077. —, Koendlich erzeugte Moduln und Kogeneratoren. Hokkaido Math. J., 1973, **2**, № 1, 69—83 (РЖМат, 1973, 12А287)
1078. **Ooms A. J.**, On Lie algebras having a primitive universal enveloping algebra. J. Algebra, 1974, **32**, № 3, 488—500 (РЖМат, 1975, 5А251)
1079. **Osborn J. M.**, Representations and radicals of Jordan algebras. Scr. math., 1973, **29**, № 3-4, 297—329 (РЖМат, 1974, 3А218)
1080. **Oshiro K.**, Rings in which every maximal ideal is generated by a central idempotent. Proc. Japan. Acad., 1970, **46**, 472—477
1081. —, On torsion free modules over regular rings. I. Math. J. Okayama Univ., 1973, **16**, № 1, 107—114 (РЖМат, 1974, 5А299); II. Math. J. Okayama Univ., 1974, **16**, № 2, 199—205 (РЖМат, 1975, 4А484)

1082. **Osofsky B. L.**, Homological domension of modules. Publ. for the conference Bicard of the Math. Sciencs. Amer. Math. Soc. Providence (R. I.), 1973, 89 pp.
1083. —, Hochschild dimension of a separably generated field. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **41**, № 1, 24—30 (РЖМат, 1974, 7A518)
1084. —, The subscript of $\aleph_n$, projective dimension, and the vanishing of $\underleftarrow{\lim}^{(n)}$. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, **80**, № 1, 8—26 (РЖМат, 1974, 9A439)
1085. —, A remark on colimits. Can. J. Math., 1975, **27**, № 3, 496—499 (РЖМат, 1976, 4A366)
1086. **Oystaeyen F. van.**, Primer spectra in non-commutative Algebra. Lect. Notes Math., 1975, **444**, 128 pp., ill. (РЖМат, 1975, 12A263K)
1087. **Page A. M.**, Une caractérisation des anneaux réguliers à identité polynomiale. Sémin. d'algebre non commutative (année 1972/1973), Deuxiéme partie, Exp. N. 8—9, 23 pp. Publ. Math. Orsay, № 44, Univ. Paris XI, Orsay, 1973, R 49, 7305
1088. —, Une caractérisation des anneaux réguliers à identité polynomiale. Publs Dép. math., 1973, **10**, № 1, 63—76 (РЖМат, 1974, 7A379)
1089. **Page S.**, Properties of quotient rings. Can. J. Math., 1972, **24**, № 6, 1122—1128 (РЖМат, 1973, 9A262)
1090. —, When flats are torsion free. Can. Math. Bull., 1974, **17**, № 4, 559—561
1091. **Palmer I.**, Roos J.-E., Formules explicites pour la dimension homologique des anneaux de matrices generalisees. C. r. Acad. sci., 1971, **A273**, № 22, 1026—1029 (РЖМат, 1972, 6A384)
1092. —, —, Explicit formulae for the global homological dimensions of trivial extensions of rings. J. Algebra, 1973, **27**, № 2, 380—413 (РЖМат, 1974, 5A434)
1093. **Papp Z.**, S-modules and torsion theories over Artinian rings. Arch. Math., 1972, 23, 598—602
1094. —, On the strong injective (projective) dimension of modules. Arch. Math., 1974, **25**, № 4, 354—360 (РЖМат, 1975, 4A445)
1095. **Pareigis B.**, Categories and functors. (Pure and Appl. Math. Ser. Monogr. and Textbooks., Vol. 39). New York — London, Acad. Press, 1970, VIII, 268 pp., ill. (РЖМат, 1974. 4A256K)
1096. **Park J. K.**, A characterization of right orders in q-rings. J. Korean Math. Soc., 1972, **9**, 31—34
1097. **Parra Dennis Mario**, Dual pairs and their application to QF-3 rings. Doct. diss., Univ. Wisc., 1971, 76 pp. Diss. Abstrs. Int., 1972, **B32**, № 8, 4738—4739 (РЖМат, 1972, 8A346)
1098. **Patterson E. M.**, Modules for pseudo-rings. II. Acta math. Acad. sci. hung., 1972, **23**, № 3-4, 309—314 (РЖМат, 1973, 8A255)
1099. **Pedersen F.**, Spitz in l-groups. Czechosl. Math. J., 1974, **24**, № 2, 254—256 (РЖМат, 1975, 1A300)
1100. **Peppas A.**, B-пространства (греч.). Bull. Soc. math. Grece, 1971, **12**, № 2, 1—141
1101. **Peskine C.**, Szpiro L., Dimension projective finie cohomologie locale. These, Doc. Sci. math., Univ. Paris—Sud, Centre Orsay, 1971, 109 p., ill. (РЖМат, 1974, 5A451)
1102. —, —, Dimension projective finie cohomologie locale. Publs math. Inst. hautes etudes sci., 1972/73, № 42, 47—119
1103. **Peterson R. D.**, One-sided inverses in rings. Can. J. Math., 1975, **27**, № 1, 218—224 (РЖМат, 1975, 9A219)
1104. **Philippe A.**, Morphisme net d'anneaux et descente. Bull. Sci. math., 1973, **97**, № 1, 57—64 (РЖМат, 1974, 4A298)
1105. **Piene R.**, Faisceaux plats et purs sur la base: un theoreme de finitude. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 2, 194—197 (РЖМат, 1972, 7A352)
1106. **Pierce K. R.**, Amalgamating Abelian ordered groups. Pacif. J. Math., **43**, № 3, 711—723 (РЖМат, 1973, 8A206)

1107. **Pierce R. S.**, The submodule lattice of a cyclic module **Algebra univers.**, 1971/1972, 1, 192—199
1108. —, Closure spaces with applications to ring theory. Lect. Notes Math., 1972, **246**, 565—616 (РЖМат, 1972, 8A313)
1109. —, The cohomology of Boolean rings. Adv. Math., 1974, **13**, № 3, 323—381 (РЖМат, 1975, 1A426)
1110. **Pleasant J. C.**, Quasi-bases of modules. J. Tenn. Acad. sci., 1972, **47**, № 4, 122—124 (РЖМат, 1973, 5A270)
1111. **Popescu E.-L.**, A class of primary rings. Rev. roum. math. pures et appl., 1973, **18**, № 8, 1245—1247 (РЖМат, 1974, 4A280)
1112. **Popescu N.**, Theorie generale de la decomposition. Rev. roum. math. pures et appl., 1967, **12**, № 9, 1365—1371 (РЖМат, 1968, 10A223)
1113. —, Sur les C. P-anneaux. C. r. Acad. sci., 1971, **272**, № 23, A1493—A1496 (РЖМат, 1972, 1A680)
1114. —, Categorii abeliene. Bucuresti, Acad. RSR, 1971, 312 p. (РЖМат, 1972, 3A285K)
1115. —, Abelian categories with applications to rings and modules. London — New York, 1973, xiii, 467 pp. (РЖМат, 1974, 7A452)
1116. —, Theorie primaire de la decomposition dans les anneaux semi-noetheriens. J. Algebra, 1972, **23**, 482—492 (РЖМат, 1973, 5A435)
1117. —, Quelques considérations sur les anneaux semi-artiniens commutatifs. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 24, A1545—A1548 (РЖМат, 1974, 1A402)
1118. —, Radu A., Teoria categoriilor şi a fasciculelor. Bucuresti, Ed. stiint, 1971, 444 p. (РЖМат, 1972, 11A243K)
1119. —, Spircu T., Exemple de inele semiartiniene. Stud. şi cerc. mat., 1974, **26**, № 8, 1153—1167 (РЖМат, 1975, 4A295)
1120. —, Vraciu C., Some remarks about semi-artinian rings. Rev. roum. math. pures et appl., 1973, **18**, № 9, 1413—1422 (РЖМат, 1974, 4A211)
1121. **Poyatos F.**, El teorema de Jordan — Hölder para A-semimodulos. Rev. mat. hisp.-amer., 1972, **32**, № 6, 251—260 (РЖМат, 1973, 7A289)
1122. —, El teorema de Jordan — Hölder para A-semimodulos. Rev. mat. hisp.-amer., 1973, **33**, № 1-2, 36—48 (РЖМат, 1973, 11A259)
1123. —, El teorema de Jordan — Hölder para A-semimodulos. Rev. mat. hisp.-amer., 1973, **33**, № 3, 122—132 (РЖМат, 1974, 2A286)
1124. —, Sucesiones principales y series de composicion de A-semimodulos. Rev. mat. hisp.-amer., 1974, **34**, № 1-2, 60—66 (РЖМат, 1975, 8A346)
1125. **Procesi C.**, Sulle rappresentazioni degli anelli e loro invarianti. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov. 1971-maggio 1972. Vol. 11. London — New York, 1973, 143—159 (РЖМат, 1974, 7A391)
1126. **Pyle E. S.**, The regular ring and the maximal ring of quotients of a finite Baer $*$-ring. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **203**, 204—213 (РЖМат, 1976, 1A295)
1127. **Quentel Y.**, Sur l'uniforme coherence des anneaux Noetherians. C. r. Acad. sci., 1972, **275**, A753—A755 (РЖМат, 1973, 5A415)
1128. **Quillen D.**, Projective modules over polynomial rings, Preprint, MIT, 1976, 6 pp.
1129. **Qureshi M. A. Rauf.** Generalized Ore rings. J. Natur. Sci. and Math., 1968, 8, 99—104; Поправка: ibid., 1971, 11, 291
1130. —, Left Ore domains. J. Natur. Sci. and Math., 1968, **8**, 217—220
1131. —, S-modules and local rings. J. Natur. Sci. and Math., 1969, **9**, 259—270
1132. —, S-torsion free modules. Fund. math., 1973, **79**, № 2, 87—90 (РЖМат, 1974, 1A263)
1133. **Radu A.**, Funcţia caracteristics a lui Hilbert. Studii şi cercetari mat. Acad. RSR, 1967, **19**, № 4, 537—547 (РЖМат, 1968, 8A314)
1134. **Ramamurthi V. S.**, Sur les anneaux semi-artiniens. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 26, A1870— A1871 (РЖМат, 1973, 1A229)
1135. —, On splitting cotorsion radicals. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **39**, № 3, 457—461 (РЖМат, 1974, 3A211)
1136. —, A note on regular modules. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, **11**, № 3,

359—364 (РЖМат, 1975, 8А416)

1137. —, On the injectivity and flatness of certain cyclic modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **48**, № 1, 21—25 (РЖМат, 1975, 12А269)

1138. —, Rangaswamy K. M., Generalized *V*-rings. Math. scand., 1972, **31**, № 1, 69—77 (РЖМат, 1973, 10А236)

1139. —, —, On finitely injective modules. J. Austral. Math. Soc., 1973, **16**, № 2, 239—248 (РЖМат, 1974, 5А300)

1140. **Ramdial L.**, *PF*-injective modules. (Summary thesis). Queen's Pap. Pure and Appl. Math., 1974, **9**, № 41, (РЖМат, 1975, 11А442)

1141. **Ramras M.**, Free exterior powers. J. Algebra, 1971, **19**, № 1, 110—115 (РЖМат, 1972, 4А472)

1142. —, Injective dimension of quaternion orders. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **38**, № 3, 493—498 (РЖМат, 1974, 2А352)

1143. —, Orders with finite global dimension. Pacif. J. Math., 1974, **50**, № 2, 583—588 (РЖМат, 1975, 1А427)

1144. **Rangaswamy K. M.**, Codivisible modules. Communs Algebra, 1974, **2**, № 6, 475—489 (РЖМат, 1975, 8А328)

1145. —, Vanaja N., Quasi projectives in Abelian and module categories. Pacif. J. Math., 1972, **43**, № 1, 221—238 (РЖМат, 1973, 9А276)

1146. —, —, Rings over which finitely-related-by-torsion modules have projective covers. Communs Algebra, 1974, **2**, № 4, 351—362 (РЖМат, 1975, 5А243)

1147. **Rant W. H.**, Left perfect rings that are right perfect and a characterization of Steinitz rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **32**, № 1, 81—84 (РЖМат, 1972, 12А258)

1148. **Raphael R.**, Some homological results on certain finite ring extensions. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **36**, № 2, 331—335 (РЖМат, 1973, 9А383)

1149. —, Rings which are generated by their units. J. Algebra, 1974, **28**, № 1, 199—205 (РЖМат, 1974, 11А301)

1150. —, No rings have injective effacements. Preprint. Concordia Univ., Montreal, 1975, 3 pp.

1151. **Rattray B. A.**, Torsion theories in non-additive categories. Manuscr. math., 1974, **12**, № 3, 285—305 (РЖМат, 1974, 11А381)

1152. **Ravel J.**, Sous-modules polyédraux. C. r. Acad. sci., 1972, **A274**, № 2, 155—157 (РЖМат, 1972, 5А282)

1153. —, Anneaux à spir compact. Publs Dép. math., 1973, **10**, № 1, 77—84 (РЖМат, 1974, 9А464)

1154. —, Specre irréductible d'un module. Thèse doct. sci. math. Univ. Claude Bernard Lyon, 1973, 86 p. (РЖМат, 1975, 9А341)

1155. —, Spectre irreductible d'un module. Math. Ann., 1975, **214**, № 1, 1—10 (РЖМат, 1975, 8А412)

1156. —, Reduction des intersections. J. reine und angew. Math., 1975, **273**, 206—219 (РЖМат, 1975, 11А374)

1157. **Raynaud J.**, Localisations et anneaux semi-noetheriens à droite. Publs Dép. math., 1971, **8**, № 3-4, 77—113 (РЖМат, 1974, 2А263)

1158. —, Localisations stables à droite et anneaux semi-noetheriens à droite. C. r. Acad. sci., 1972, **275**, № 2, 13—16 (РЖМат, 1973, 1А236)

1159. —, Quelques resultats sur les localisations. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, A299—A302 (РЖМат, 1974, 4А216)

1160. —, Quelques proprietes des localisations. Communs Algebra, 1974, **2**, № 3, 261—277 (РЖМат, 1975, 6А397)

1161. —, Une remarque sur les localisations premieres d'une anneau noetherien a droite. Arch. Math., 1975, **26**, № 1, 20—22 (РЖМат, 1975, 12А261)

1162. **Raynaud M.**, Flat modules in algebraic geometry. Compos. math., 1972, **24**, № 1, 11—31 (РЖМат, 1972, 8А495)

1163. **Reid A.**, Twisted group algebras which are Artinian, perfect or selfinjective. Bull. London Math. Soc., 1975, **7**, № 2, 166—170 (РЖМат, 1976, 2А338)

1164. —, Renault G., Sur les anneaux de groupes. Rings. Modules and Radicals. Amsterdam — London, 1973, 391—396 (РЖМат, 1976, 2А335)

1165. —, Anneaux reguliers autoinjectifs a droite. Bull. Soc. math. France, 1973(1974), № 3, 237—254 (РЖМат, 1975, 1А323)

1166. —, Algebre non commutative. Paris, Gauthier—Villars, 1975, **IX**, 182 p. (РЖМат, 1976, 2А202)

1167. —, Anneaux biréguliers auto-injectifs a droite. J. Algebra, 1975, **36**, № 1, 77—84 (РЖМат, 1976, 2А321)

1168. Representations of algebras. Proc. Int. Conf., Ottawa, 1974, Ed. V. Dlab, P. Gabriel, Berlin — Heidelberg — New York, 1975, 378 p. (РЖМат, 1976, 4А18К)

1169. **Rhodes C. P. L.**, The Krull ordinal and length of a Noetherian modules. J. Pure and Appl. Algebra, 1974, **4**, № 3, 287—291 (РЖМат, 1975, 5А424)

1170. **Ribenboim P.**, Longueurs de modules constructibles et valuations. Semin. P. Dubreil, M.-L. Dibreil-Jacotin, L. Lesieur et C. Pisot. Univ. Paris, 1970—1971 (1972), **24**, № 2, 16/01—16/10 (РЖМат, 1973, 7А408)

1171. —, Extensions epi-plates de fractions. Symp. mat. Ist. nac. alta mat. Vol. 8. London—New York, 1972, 233—243 (РЖМат, 1972, 10А174)

1172. —, Sur la localisation des anneaux non commutatifs. Semin. P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et C. Pisot. Univ. Paris, 1970—1971 (1972), **24**, № 2, 18/01—18/18 (РЖМат, 1973, 8А237)

1173. **Rieffel M.**, Morita equivalence for C^*-algebras and W^*-algebras. J. Pure and Appl. Algebra, 1974, **5**, № 1, 51—96 (РЖМат, 1975, 5А313)

1174. **Riley J. A.**, Maximal quaternion orders. J. Algebra, 1972, **23**, 241—249 (РЖМат, 1973, 5А438)

1175. **Rine D. C.**, Functor-wise equivalences. Rev. roum. math. pures et appl., 1972, **17**, № 2, 275—280 (РЖМат, 1972, 12А296)

1176. Ring Theory. Proc. Olka Conf., 29—31 March, 1973. Edc. McDonald, Beenard R., Magid Andy R., Smith Kirby C. (Lect. Notes Pure and Appl. Math., Vol. 7). New York, Marcel Dekkee, 1974, xvii, 295 pp. (РЖМат, 1974, 10А269 К)

1177. Ring Theory. Proc. Okla. Conf., 29—31 March, 1973. Eds. McDonald B. R., Magid A. R., Smith K. C. (Lect. Notes Pure and Appl. Math., Vol. 7). New York, Marcel Dekker, 1974, xvii, 295 pp. (РЖМат, 1974, 10А269)

1178. Ringe, Moduln und homologische Methoden. Bearb. Schneider H. (Tagungsbericht 27.6—3.7 1971, № 28). Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1971, 12 S. (РЖМат, 1972, 8А312 К)

1179. Ringe, Moduln und homologische Methoden. Bearb. Schneider H. (Tagungsbericht 1.5 bis 7.5 1972, № 18). Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1972, 19 S. (РЖМат, 1973, 4А488 К)

1180. Ringe, Moduln und homologische Methode. 1973, № 19. Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1973,

1181. Ringe, Moduln und homologische Methode. Bearb. Kasch F. (Tagunsbericht 12.5—18.5 1975, № 20). Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1974, 17 S. (РЖМат, 1976, 6А285)

1182. **Ringel C. M.**, Socle conditions for *QF*-1-rings. Pacif. J. Math., 1973, **44**, № 1, 309—336 (РЖМат, 1973, 11А242)

1183. —, *QF*-1 rings of global dimension 2. Can. J. Math., 1973, **25**, № 2, 345—352 (РЖМат, 1973, 11А368)

1184. —, Commutative *QF*-1 rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **42**, № 2, 365—368 (РЖМат, 1975, 2А460)

1185. —, Tachikawa H., *OR*-3 rings. J. reine und angew. Math., 1975, **272**, 49—72 (РЖМат, 1975, 11А349)

1186. Rings, Modules and Radicals. Ed. Kertesz A. (Colloq. mat. soc. János Bolyai, 6). Amsterdam—London, North—Holl. Publg Co., 1973, 520 pp. (РЖМат, 1976, 1А267)

1187. **Robert E. de**, Sur une propriete des quasi-injectifs et des quasi-projectifs. C. r. Acad. sci., 1968, **A266**, № 11, 547—549 (РЖМат, 1968, 11А257)

1188. —, Sur quelques proprietes du foncteur Hom. Thèse doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Paul Sabatier, 1970, 80 p. (РЖМат, 1973, 11А367)

1189. —, Une propriete d'exactitude du foncteur hom et quelques caracterisations de modules projectifs. J. Algebra, 1974, **28**, № 2, 253—282 (РЖМат, 1974, 11А327)
1190. **Roberts L. G.,** Indecomposable vector bundles on the projective line. Can. J. Math., 1972, **24**, № 1, 149—154 (РЖМат, 1972, 8А508)
1191. **Robinson D. J. S.,** Hypercentral ideals, Noetherian modules and a theorem. of Stroud. J. Algebra, 1974, **32**, № 1, 234—239 (РЖМат, 1975, 3А289)
1192. **Robson J. C.,** Idealizers and hereditary Noetherian prime rings. J. Algebra, 1972, **22**, № 1, 45—81 (РЖМат, 1973, 3А268)
1193. —, Localizations of hereditary Noetherian rings. Publs. Dép. math., 1973, **10**, № 1, 39—46 (РЖМат, 1974, 9А292)
1194. —, The coincidence of idealizer subring. J. London, Math. Soc., 1975, **10**, № 3, 338—348 (РЖМат, 1976, 2А315)
1195. —, S m a l l L. W., Hereditary prime. *P. I.* rings are classical hereditary orders. J. London Math. Soc., 1974, 8, № 3, 499—503 (РЖМат, 1975, 3А327)
1196. **Roby N.,** Diverses caracterisations des epimorphismes. Sémin. algèbre commut. Samuel. Ecole norm. super. jeunes filles, 1967—1968, 3/01—3/12 (РЖМат, 1969, 5А327)
1197. —, Sur les épimorphismes de la categorie des anneaux. C. r. Acad. sci., 1968, **A266**, № 6, 312—313 (РЖМат, 1968, 12А324)
1198. **Roeder D. W.,** Category theory applied to Pontryagin duality. Pacif. J. Math., 1974, **52**, № 2, 518—527 (РЖМат, 1975, 5А222)
1199. **Roggenkamp K. W.,** Swan's version of Jacobinski's concellation law. Mitt. Math. Sem. Giessen, 1970, 85, 45—76 (РЖМат, 1970, 10А240)
1200. —, *R*-orders in a split algebra have finitely many non-isomorphic irreducible lattices as soon as *R* has finite class number. Can. Math. Bull., 1971, **14**, 405—409
1201. —, Some orders of infinite lattice type. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, **77**, № 6, 1055—1056 (РЖМат, 1972, 6А412)
1202. —, Bass-orders and the number of nonisomorphic indecomposable lattices over orders. Proc. Symp. Pure Math. Vol. 21. Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R. I., 1971, 127—135 (РЖМат, 1974, 6А346)
1203. —, An extension of the Noether-Deuring theorem. Proc. Amer. math. Soc., 1972, **31**, № 2, 423—426 (РЖМат, 1972, 10А290)
1204. —, Classification of the completely primary totally ramified orders with a finite number of nonisomorphic indecomposable lattices. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, **78**, № 3, 399—401 (РЖМат, 1973, 2А334)
1205. —, Classification of the completely primary totaly ramified orders of finite lattice type. J. reine und angew. Math., 1973, **261**, 100—122 (РЖМат, 1974, 3А319)
1206. —, Injective modules for group rings and Gorenstein orders. J. Algebra, 1975, **24**, № 3, 465—473
1207. **Rompke J.,** Regular, commutative, maximal semigroups of quotients. Can. Math. Bull., 1975, **18**, № 1, 99—104
1208. **Roos J.-E.,** Sur la décomposition bornée des objects injectifs dans les catégories de Grothendieck. C. r. Acad. sci., 1968, **A266**, № 8, 449—452 (РЖМат, 1968, 11А250)
1209. —, Locally Noetherian categories and generalized strictly linearly compact rings. Applications. Lect. Notes, 1969, **92**, 197—277
1210. —, Determination de la dimension homologiques globale des algebres de Weyl. C. r. Acad. sci., 1972, **A274**, № 1, 23—26 (РЖМат, 1972, 7А319)
1211. —, Propriètes homologiques des quotients primitifs des algebres enveloppantes des algebres de Lie semisimples. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 5, A351—A354 (РЖМат, 1973, 7А363)

1212. —, Complements a l'etude des quotients primitifs des algebres enveloppantes des algebres de Lie semi-simples. C. r. Acad. Sci., 1973, **276**, № 6, A447—A450 (РЖМат, 1973, 8А334)
1213. **Roseblade J. E.,** Group rings of polycyclic groups. J. Pure and Appl. Algebra, 1973, **3**, № 4, 307—328 (РЖМат, 1974, 10А275)
1214. **Rossignol A.,** Plongement d'un anneau topologique dans un anneau topologique unitaire. Application aux modules topologiques. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 7, A543 (РЖМат, 1972, 7А229)
1215. **Rotman J.,** On a problem of Baer and a problem Whitehead in Abelian groups. Acta math. Acad. Scient. hung., 1961, **12**, № 1-2, 245—254 (РЖМат, 1962, 2А189)
1216. —, A completion functor on modules and algebras. J. Algebra, 1968, **9**, № 4, 369—387. Поправка: ibid., 1974, **28**, № 1, 210—213 (РЖМат, 1969, 7А247; 1974, 11А331)
1217. **Rouchaleau Y.,** W y m a n B. F., Linear dynamical systems over integral domains. J. Comput. and Syst. Sci., 1974, **9**, № 2, 129—142 (РЖМат, 1975, 5А428)
1218. **Roux B.,** Quelques remarques sur les anneaux *OF*-3 et sur les anneaux cogénérateurs. Sur. quelqeus problemes d'algebre, Univ. Montpellier, Montpellier, 1969, 75—92
1219. —, Sur la dualité de Morita. Tôhoku Math. J., 1971, **23**, № 3, 457—472 (РЖМат, 1972, 6А277)
1220. —, Un critère de décomposition d'un anneau en produit d'anneaux. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 3, A235—A238 (РЖМат, 1972, 8А408)
1221. —, Modules sur les anneaux artiniens. C. r. Acad. sci., 1972, **275**, № 13, A577—A580 (РЖМат, 1973, 4А362)
1222. —, Modules generateurs et cogenerateurs relatifs. Bull. sci. math., 1972, **96**, 97—110
1223. —, Modules sur les anneaux artiniens. I. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 1, A13—A16 (РЖМат, 1973, 7А279)
1224. —, Modules sur les anneaux artiniens. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 3, A171—A174 (РЖМат, 1973, 9А277)
1225. —, Anneaux artiniens et extensions d'anneaux semisimples. J. Algebra, 1973, **25**, № 2, 295—306 (РЖМат, 1973, 12А281)
1226. **Rowen L. H.,** On classical quotients of polynomial identity rings with involution. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **40**, № 1, 23—29 (РЖМат, 1974, 4А213)
1227. —, On rings with central polynomials. J. Algebra, 1974, **31**, № 3, 393—426 (РЖМат, 1975, 3А331)
1228. —, Maximal quotients of semiprime *PI*-algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **196**, 127—135 (РЖМат, 1975, 4А303)
1229. —, A subdirect decomposition of semiprime rings and its application to maximal quotient rings. Proc. Amer. Math., Soc., 1974, **46**, № 2, 176—180 (РЖМат, 1975, 7А367)
1230. **Rubin R. A.,** Some aspects of localization. Doct diss. Univ. Pa, 1971, 80 pp. Diss. Abstr. Int., 1972, **B32**, № 8, 4741 (РЖМат, 1972, 8А329Д)
1231. —, Absolutely torsion-free rings. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, **78**, № 5, 854—856 (РЖМат, 1973, 5А231)
1232. —, On exact localization. Pacif. J. Math., 1973, **49**, № 2, 473—481 (РЖМат, 1975, 1А341)
1233. —, Semi-simplicity relative to kernel functors. Can. J. Math., 1974, **26**, № 6, 1405—1411 (РЖМат, 1975, 8А363)
1234. **Rutter E. A.,** Torsion theories over semiperfect rings. Proc. Amer. Math. Soc. 1972, **34**, № 2, 389—395 (РЖМат, 1973, 4А364)
1235. —, Four-fold torsion theories. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, **10**, № 1, 1—8 (РЖМат, 1974, 11А308)
1236. —, A characterization of *OF*-3 rings. Pacif. J. Math., 1974, **51**, № 2, 533—536 (РЖМат, 1975, 3А325)
1237. —, Rings with the principal extension property. Communs Algebra, 1975, **3**, № 3, 203—212 (РЖМат, 1976, 4А245)

1238. **Sabbagh G.**, Coherence of polynomial rings and bounds in polynomial ideals. J. Algebra, 1974, **31**, № 3, 499—507 (РЖМат, 1975, 5A420)
1239. —, Eklof P., Definability problems for modules and rings. J. Symbol. Log., 1971, **36**, № 4, 623—649 (РЖМат, 1972, 12A75)
1240. **Salles D.**, Sur les modules qui sont extension essentielle de leur socle. C. r. Acad. sci., 1972, **A275**, № 8, 417—419 (РЖМат, 1973, 3A285)
1241. —, Anneaux semi-artiniens non commutatifs. C. r. Acad. sci., 1972. **275**, № 23, 1223—1225 (РЖМат, 1973, 4A359)
1242. —, Decomposition primaire sur une anneau semi-artinien non commutatif. C. r. Acad. Sci., 1974, **278**, № 3, A129—A132 (РЖМат, 1974, 8A260)
1243. **Sally J. D.**, Vasconcelos W. V., Stable rings and a problem of Bass. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, **79**, № 3, 574—576 (РЖМат, 1973, 12A387)
1244. —, —, Stable rings. J. Pure and Appl. Algebra, 1974, **4**, № 3, 319—336 (РЖМат, 1975, 5A410)
1245. **Samuel P.**, Algebre Commutative. Fac. sci. Paris, 1967—1968. Ecole norm. supér. Paris, Secrétariat math., E. N. S., 1969. 86 ff. Bibliogr. France, 1973, **162**, № 36, 988 (РЖМат, 1974, 2A362)
1246. **Sanderson R.**, A characterization of quasi-injective Abelian groups. J. Elisha Mitchell Sci. Soc., 1973, **89**, 143—146
1247. **Sandomierski F. L.**, Homological dimension under change of rings. Math. Z., 1973, **130**, № 1, 55—65 (РЖМат, 1973, 7A360)
1248. **Sands A. D.**, On normal radicals. J. London Math. Soc., 1975, **11**, № 3, 361—365 (РЖМат, 1976, 4A230)
1249. **Sankar P. B. K.**, Injective envelopes of modules. Progr. Math. (Allahabad), 1970, **4**, № 2, 19—20
1250. —, A note on quasi-injective modules. Progr. Math. (Allahabad), 1970, **4**, № 2, 46—47
1251. **Sarath B.**, Varadarjan K., Injectivity of certain classes of modules. J. Pure and Appl. Algebra, 1974, **5**, № 3, 293—305 (РЖМат, 1975, 8A331)
1252. —, —, Injectivity of direct sums. Communs Algebra, 1974, **1**, 517—530
1253. **Savarian J.**, Anneaux Héréditaires à droite. C. r. Acad. sci., 1973, **A275**, № 15, 691—693 (РЖМат, 1973, 4A336)
1254. **Schelter W.**, Products of torsion theories. Arch. Math., 1971, **22**, № 6, 590—596 (РЖМат, 1972, 8A339)
1255. —, Two-sides rings of quotients. Arch. Math., 1973, **24**, № 3, 274—277 (РЖМат, 1974, 2A264)
1256. —, Topological rings of quotients. Can. J. Math., 1974, **26**, № 5, 1228—1233 (РЖМат, 1975, 6A416)
1257. —, Roberts P., Flat modules and torsion theories. Math. Z., 1972, **129**, № 4, 331—334 (РЖМат, 1973, 7A273)
1258. Second Florida Symposium on automata and semigroups. Aequat. math., 1971, **7**, № 1, 94—102
1259. **Seth V.**, Tewari K., On injective near-rings modules. Can. Math. Bull., 1974, **17**, № 1, 137—141 (РЖМат, 1975, 7A407)
1260. **Sharp R. Y.**, Finitely generated modules of finite injective dimension over certain Cohen — Macaulay rings. Proc. London. Math. Soc., 1972, **25**, № 2, 303—328 (РЖМат, 1973, 1A395)
1261. —, The construction of a module of finite projective dimension from a finitely generated module fo finite injective dimension. Comment. Math. helv., 1975, **50**, № 1, 15—26 (РЖМат, 1975, 10A388)
1262. **Sharpe D. W.**, Vamos P., Injective modules. Cambridge, Cambridge Univ. Press., 1972, **IX**, 190 pp. (РЖМат, 1973, 9A275)
1263. **Sheldon P. B.**, How changing $D[[x]]$ changes its quotient fild. Trans Amer. Math., Soc., 1971, **159**, 223—244 (РЖМат, 1972, 7A340)
1264. **Sheng H.**, Finiteness in prime ideals in rings of global dimension two. Proc. Amer. Math., Soc., 1973, **41**, № 2, 363—369 (РЖМат, 1974, 9A461)
1265. **Sherman B. F.**, Cauchy completion of Abelian tight Riesz groups. J. Austral. Math. Soc., 1975, **19**, № 1, 62—73 (РЖМат, 1975, 9A192)
1266. **Shimizuike Y.**, Modules which have no co-irredicible submodules. Hiroshima Math. J., 1972, **2**, № 2, 243—251 (РЖМат, 1974, 1A418)

1267. **Shock R. C.**, Certain artinian rings are Noetherian. Can. J. Math., 1972, **24**, № 4, 553—556 (РЖМат, 1973, 1A227)
1268. —, Orders in self-injective cogenerator rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, 393—398 (РЖМат, 1973, 5A249)
1269. —, Classical quotient rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **190**, 43—48 (РЖМат, 1975, 3A333)
1270. **Shores T. S.**, Decompositions of finitely generated modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **30**, № 3, 445—450 (РЖМат, 1973, 11A392)
1271. —, Injective modules over duo rings. Pacif. J. Math., 1972, **40**, № 3, 695—702 (РЖМат, 1972, 12A255)
1272. —, The structure of Loewy modules. J. reine und angew. Math., 1972, **254**, 204—220 (РЖМат, 1973, 1A248)
1273. —, Loewy series of modules. J. reine und angew. Math., 1973, **265**, 183—200 (РЖМат, 1974, 9A472)
1274. —, Decomposition of torsion classes. Math. Jap., 1973, **18**, № 3, 181—185 (РЖМат, 1975, 2A301)
1275. —, Bezont rings and their modules. Ring Theory, Proc. Okla. Conf., 1973, New York, 1974, 63—73 (РЖМат, 1974, 7A583)
1276. —, Modules over semihereditary Bezout rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **46**, № 2, 211—213 (РЖМат, 1975, 8A406)
1277. —, A continuity criterion for functors. Math. Ann., 1975, **217**, № 2, 161—164 (РЖМат, 1976, 4A313)
1278. —, Lewis W. J., Serial modules and endomorphism rings. Duke Math. J., 1974, **41**, № 4, 889—909 (РЖМат, 1975, 8A419)
1279. —, Wiegand R., Decompositions of modules and matrices. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, **79**, № 6, 1277—1280 (РЖМат, 1974, 11A485)
1280. —, —, Rings whose finitely generated modules are direct sums of cyclics. J. Algebra, 1974, **32**, № 1, 152—172 (РЖМат, 1975, 5A429)
1281. —, —, Some criteria for Hermite rings and elementary divisor rings. Can. J. Math., 1974, **26**, № 6, 1380—1383 (РЖМат, 1975, 7A557)
1282. **Shrikhande M. S.**, On hereditary and cohereditary modules. Can. J. Math., 1973, **25**, № 4, 892—896 (РЖМат, 1974, 3A207)
1283. **Silber R.**, A linear dependence theorem with application to the calculus of variations. Linear Algebra and Appl., 1970, **3**, № 4, 441—450 (РЖМат, 1971, 12Б629)
1284. **Sim S. K.**, Localizing prime idempotent kernel functors. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **47**, № 2, 335—337 (РЖМат, 1976, 1A297)
1285. **Simis A.**, Projective moduli and maximal spectra of certain quotient rings. Notas e comuns. mat., 1971, 20 pp. (РЖМат, 1972, 7A343)
1286. —, Projective moduli and maximal spectra of certain quotient rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **170**, 125—136 (РЖМат, 1973, 6A426)
1287. —, On the Krull—Schmidt theorem for orders over valuation rings. An. Acad. brasil. ciênc., 1973, **45**, № 1, 45—47 (РЖМат, 1974, 4A300)
1288. **Simovici D.**, Reischer C., On the realization of the automaton related to an extension of a semigroup. Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1973, **19**, Sec. 3, № 3-4, 141—148 (РЖМат, 1975, 1A243)
1289. **Simson D.**, $\aleph$-flat and $\aleph$-projective modules. Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. mat., astron. et phys., 1972, **20**, № 2, 109—114 (РЖМат, 1972, 8A333)
1290. —, On the structure of flat modules. Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1972, **20**, № 2, 115—120 (РЖМат, 1972, 8A334)
1291. —, On projective resolution of flat modules. Colloq. math., 1974, **29**, № 2, 209—218 (РЖМат, 1974, 10A337)
1292. —, Functor categories in which every flat object is projective. Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. mat., astron. et phys., 1974, **22**, № 4, 375—380 (РЖМат, 1974, 11A441)
1293. —, A remark on projective dimension of flat modules. Math. Ann., 1974, **209**, № 3, 181—182 (РЖМат, 1975, 1A428)
1294. —, On colimits of injectives on Grothendieck categories. Ark. mat., 1974, **12**, № 2, 161—165 (РЖМат, 1975, 8A366)

1295. **Singh S.**, Quasi-injective and quasi-projective modules over hereditary Noetherian prime rings. Can. J. Math., 1974, **26**, № 5, 1173—1185 (РЖМат, 1975, 6А405)
1296. —, Modules over hereditary Noetherian prime rings. Can. J. Math., 1975, **27**, № 4, 867—883 (РЖМат, 1976, 6А302)
1297. —, Khan M. N., On preself injective rings. Arch. Math., 1973, **24**, № 5, 499—504 (РЖМат, 1974, 8А251)
1298. —, Zameeruddin Q., Commutative self-injective rings. Arch. Math., 1975, **26**, № 1, 36—39 (РЖМат, 1975, 12А397)
1299. **Sjödin G.**, On filtered modules and their associated graded modules. Math. scand., 1973, 33, № 3, 229—249 (РЖМат, 1975, 10А363)
1300. **Small L. W.**, Localization in *PI*-rings. J. Algebra, 1971, **18**, № 2, 269—270 (РЖМат, 1972, 3А232)
1301. **Smith M. K.**, Centralizers in rings of quotients of group rings. J. Algebra, 1973, **25**, № 1, 158—164 (РЖМат, 10А248)
1302. **Smith P. E.**, On two-sided artinian quotient rings. Glasgow Math. J., 1972, **13**, 159—163 (РЖМат, 1973, 3А277)
1303. **Smith T. H. M.**, On an algebra of Littlewood. Delft Progr. Rept., 1974, **F1**, № 2, 41—43 (РЖМат, 1974, 10А335)
1304. —, On special hereditary orders in quaternion algebras. Delft. Progr. Rept., 1974, **F1**, № 2, 37—40 (РЖМат, 1975, 2А313)
1305. **Snider R.**, Rings whose modules are projective over endomorphism rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **46**, № 2, 164—168 (РЖМат, 1975, 10А304)
1306. **Solian A.**, Teoria modulelor (categorii de module). Bucuresti, Acad. RSR, 1972, 420 p. (РЖМат, 1973, 5А274)
1307. **Spears W. T.**, Global dimension in categories of diagrams. J. Algebra, 1972, **22**, № 2, 219—222 (РЖМат, 1973, 1А372)
1308. **Speed T. P.**, A note on commutative Baer rings. J. Austral. Math. Soc., 1972, **14**, № 3, 257—263 (РЖМат, 1973, 4А334)
1309. **Spoerel D.**, Projektive geordnete Moduln und *N*-fache Erweiterungen geordneter Moduln. Collect. math., 1971, **22**, № 2, 105—116 (РЖМат, 1976, 6А392)
1310. **Spulber D.**, Sur anneaux plats d'un anneaux. C. r. Acad. Sci., 1973, **276**, № 13, A893—A895 (РЖМат, 1973, 9А374)
1311. **Steinberg S. A.**, Finitely-valued *f*-modules. Pacif. J. Math., 1972, **40**, № 3, 723—737 (РЖМат, 1973, 1А260)
1312. —, Lattice-ordered injective hulls. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **169**, July, 365—388 (РЖМат, 1973, 6А303)
1213. —, Quotient rings of a class of lattice-ordered rings. Can. J. Math., 1973, **25**, № 3, 627—645 (РЖМат, 1974, 3А224)
1214. —, Rings of quotients of rings without nilpotent elements. Pacif. J. Math., 1973, **49**, № 2, 493—506 (РЖМат, 1974, 12А212)
1315. **Stenström B.**, The maximal ring of quotients of a triangular matrix ring. Math. scand., 1974, **34**, № 2, 162—166 (РЖМат, 1975, 11А367)
1316. —, Rings of quotients. An introduction to metods of ring theory. (Grundlehren math. Wiss. Einzeldarstell., 217). Berlin e. a., Springer, 1975, VIII, 309 pp. (РЖМат, 1976, 1А299)
1317. **Stephenson R. A.**, Jacobson structure theory for Hestenes ternary rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **177**, March, 91—98 (РЖМат, 1974, 1А317)
1318. **Stephenson W.**, Modules whose lattice of submodules is distributive. Proc. London Math. Soc., 1974, **28**, № 2, 291—310 (РЖМат, 1974, 9А309)
1319. **Stöhr K.**, Eine Vervollständigung der Kategorie lokal kompakten Moduln. J. reine und angew. Math., 1973, **260**, 1—20 (РЖМат, 1974, 1А420)
1320. **Storch U.**, Zur Längenberechnung von Moduln. Arch. Math., 1973, **24**, № 1, 39—43 (РЖМат, 1973, 9А380)
1321. **Storrer H. H.**, Sur les epimorphismes dans la categorie des anneaux commutatifs. C. r. Acad. sci., 1968, **266**, № 5, 263—265 (РЖМат, 1969, 2А428)
1322. —, Epimorphismes d'anneaux et anneaux des fractions. C. r. Acad. sci., 1968, **266**, № 6, A322—A323 (РЖМат, 1969, 2А429)
1323. —, Epimorphismen von kommutativen Ringen. Comment. math. helv., 1968, **43**, № 4, 378—401 (РЖМат, 1969, 7А333)
1324. —, On Goldman's primary decomposition. Lect. Notes Math., 1972, **246**, 617—661 (РЖМат, 1972, 8А335)
1325. —, Epimorphic extensions of non-commutative rings. Comment. math. helv., 1973, **48**, № 1, 72—86 (РЖМат, 1974, 1А260)
1326. —, Quotient overrings. Publs Dép. math., 1973, **10**, № 1, 25—37 (РЖМат, 1974, 9А291)
1327. **Stratton A. F.**, Mixed modules over an incomplete discrete valuation ring. Proc. London Math. Soc., 1970, **21**, 201—218
1328. —, A note on the splitting problem for modules over an incomplete discretes valuation ring. Proc. Lond. Math. Soc., 1971, **23**, № 2, 237—250 (РЖМат, 1972, 3А165)
1329. —, A splitting theorem for mixed Abelian groups. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov-dic., 1972. Vol. 13. London — New York, 1974, 109—125 (РЖМат, 1975, 5А172)
1330. —, Quotient modules that split. J. London Math. Soc., 1975, **11**, № 1, 88—90 (РЖМат, 1976, 3А310)
1331. **Strömbeck P.**, On the spectral category of some rings. Math. scand., 1973, **33**, № 2, 213—228 (РЖМат, 1975, 11А409)
1332. **Sumioka T.**, A characterization of the triangular matrix rings over *QF* rings. Osaka J. Math., 1975, **12**, № 2, 449—456 (РЖМат, 1976, 4А238)
1333. **Suzuki Y.**, Double centralizers of torsionless modules. Proc. Jap. Acad., 1974, **50**, № 8, 612—615 (РЖМат, 1975, 11А376)
1334. **Swan R. G.**, A cancellation theorem for projective modules in the metastable range. Invent. math., 1974, **27**, № 1-2, 23—43 (РЖМат, 1975, 6А544)
1335. —, Towber J., A class of projective modules which are nearly free. J. Algebra, 1975, **36**, № 3, 427—434 (РЖМат, 1976, 4А407)
1336. **Szasz F. A.**, Rings, which are radical modules. Math. Jap., 1971, **16**, 103—104
1337. —, Über das im Operatorring enthaltene allgemeine Radikal eines Untermoduls. Acta sci. math., 1973, **34**, 371—376 (РЖМат, 1974, 1А264)
1338. —, Rings with radical maxmal submodules. Monatsh. Math., 1973, **77**, № 3, 354—356 (РЖМат, 1974, 5А285)
1339. —, Steinfeld ottó egy gyűrűelméleti eredményének moduluselmeleti analogonja. Magy. tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1973, **21**, № 3-4, 443—447 (РЖМат, 1974, 7А396)
1340. **Szendrei A.**, On the arity of affine modules. Preprint, Bolya, Intezet, Szeged, 1975, 1—7
1341. —, Idempotent reducts of Abelian groups. Preprint, Bolya, Intezet, Szeged, 1975, 1—21
1342. **Szeto G.**, On a class of projective modules over central separable algebras. Can. Math. Bull., 1971, **14**, № 3, 415—417 (РЖМат, 1972, 3А391)
1343. —, On a class of projective modules over central separable algebras. II. Can. Math. Bull., 1972, **15**, № 3, 411—415 (РЖМат, 1973, 4А532)
1344. —, The Azumaya algebra of some polynomial closed rings. Indiana Univ. Math. J., 1973, **22**, № 8, 731—737 (РЖМат, 1973, 12А397)
1345. —, On the Wedderburn theorem. Can. J. Math., 1973, **25**, № 3, 525—530 (РЖМат, 1974, 2А367)
1346. —, On almost hereditary rings. J. Algebra, 1975, **34**, № 1, 97—104 (РЖМат, 1975, 11А335)
1347. **Tachikawa H.**, Quasi-Frobenius rings and generalizations. *QF*-3 and *QF*-1 rings. Lect. Notes Math., 1973, 351 (РЖМат, 1974, 6А330)
1348. —, *QF*-3 rings and categories of projective modules. J. Algebra, 1974, **28**, № 3, 408—413 (РЖМат, 1974, 10А279)

1349. —, Balancedness and left serial algebras of finite type. Lect. Notes Math., 1975, **488**, 351—378 (РЖМат, 1976, 4А235)

1350. —, Iwanaga Y., Morita's F_h-condition and double centralizers. I. J. Algebra, 1973, **26**, № 2, 167—171 (РЖМат, 1974, 3А212); II. J. Algebra, 1974, **31**, № 1, 73—90 (РЖМат, 1975, 3А340)

1351. **Takeuchi T.**, On direct modules. Hokkaido Math. J., 1972, **1**, № 2, 168—177 (РЖМат, 1973, 8А246)

1352. **Talley S. W.**, Niceness of the socle and a characterization of groups of bounded order. Pi Mu Epsilon J., 1974, **5**, № 10, 497—502 (РЖМат, 1975, 4А218)

1353. **Tan Keng-Teh**, Classical rings of quotients of grouprings. Kyungpook Math. J., 1974, **14**, 119—129

1354. **Teh H.-H.**, Construction of orders in Abelian groups. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1961, **57**, № 3, 476—482 (РЖМат, 1962, 3А212)

1355. **Telemann S.**, Representation par faisceaux des modules sur les anneaux harmoniques. C. r. Acad. sci., 1969, **A269**, № 17, 753—756 (РЖМат, 1970, 4А283)

1356. —, La representation par faisceaux des modules sur les algebres harmoniques. Rev. roum. math. pures et appl., 1971, **16**, № 8, 1247—1284 (РЖМат, 1972, 4А317)

1357. —, Theory of harmonic algebras with applications to von Neumann algebras and cohomology of locally compact spaces. Lect. Notes Math., 1971, **248**, 100—315 (РЖМат, 1972, 6А278)

1358. **Teply M. L.**, Direct decomposition of modules. Math. jap., 1970, **15**, 85—90

1359. —, On non-commutative splitting rings. J. London Math. Soc., 1971, **4**, № 1, 157—164. Поправка: ibid., 1973, **6**, № 2, 267—268 (РЖМат, 1972, 3А219; 1973, 8А225)

1360. —, The torsion submodule of cyclic module splits off. Can. J. Math., 1972, **24**, № 3, 450—464 (РЖМат, 1973, 3А283)

1361. —, A class of divisible modules. Pacif. J. Math., 1973, **45**, № 2, 653—668 (РЖМат, 1973, 12А286)

1362. —, Codivisible and projective covers. Communs Algebra, 1974, **1**, № 1, 23—38

1363. —, Pseudo-injective modules which are not quasi-injective. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **49**, № 2, 305—310 (РЖМат, 1976, 2А343)

1364. —, Semiprime rings with the singular splitting property. Pacif. J. Math., 1975, **57**, № 2, 575—579 (РЖМат, 1976, 3А291)

1365. —, Generalizations of the simple torsion class and the splitting properties. Can. J. Math., 1975, **27**, 1056—1084

1366. —, Torsion-free covers. II. Isr. J. Math., 1976, **23**, № 2, 132—136 (РЖМат, 1976, 11А327)

1367. **Thelin Franças de**, De certains modules topologiques localement bornés. Thèse doct. math. pures Fac. sci. Univ. Toulose, 1970, 28 p. (РЖМат, 1973, 2А268D)

1368. **Tisseron C.**, Sur deux classes d'anneaux. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, № 10, A413—A415 (РЖМат, 1974, 4А223)

1369. —, Sur deux classes d'anneaux. Publs. Dép. math., 1973, **10**, № 1, 47—61 (РЖМат, 1974, 9А267)

1370. **Tiwary A. K.**, Pandey B. M., On poly simple and quasi poly simple modules. Progr. Math. (Allahabad), 1971, **5**, № 1-2, 49—61

1371. **Towber J.**, Serre's problem on projective modules. Queen's Pap. Pure and Appl. Math., 1974, № 41, 25 (РЖМат, 1975, 10А380)

1372. **Traore S.**, Slender modules, slender rings. Acta sci. math., 1972, **33**, № 1-2, 77—80 (РЖМат, 1973, 3А281)

1373. **Tricoire A.**, Sur les anneaux semi-héréditaires à gauche. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 11, A877—A879 (РЖМат, 1972, 7А218)

1374. **Tsutsui T.**, On width ideals of u module. Hiroshima Math. J., 1972, **2**, № 1, 221—229 (РЖМат, 1973, 4А527)

1375. **Uda H.**, On a characterization of almost Dedekins domains. Hiroshima Math. J., 1972, **2**, № 2, 339—344 (РЖМат, 1974, 1А410)

1376. **Ulmer F.**, A flatness criterion in Grothendieck categories. Invent. math., 1973, **19**, № 4, 331—336 (РЖМат, 1973, 10А284)

1377. **Valette J.**, Anneaux de groupes semi-parfaits. C. r. Acad. sci., 1972, **275**, № 23, A1219—A1222 (РЖМат, 1973, 4А343)

1378. —, Anneaux de groupes de Baer. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 24, 1539—1542 (РЖМат, 1975, 1А312)

1379. **Vamos Peter**, Classical rings. J. Algebra, 1975, **34**, № 1, 114—129 (РЖМат, 1975, 11А458)

1380. **Vasconcelos W. V.**, On local and stable cancellation. An. Acad. brasil, cienc., 1965, **37**, № 3-4, 389—393 (РЖМат, 1967, 11А234)

1381. —, Ideals and cancellation. Math. Z., 1967, **102**, № 5, 353—355 (РЖМат, 1968, 6А374)

1382. —, Finiteness in projective ideals. Notas e comuns mat., 1971, № 34, 17 pp. (РЖМат, 1972, 6А411)

1383. —, Simple flat extensions. Math. Z., 1972, **129**, № 2, 157—161 (РЖМат, 1973, 6А423)

1384. —, The local rings of global dimension two. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, № 2, 381—386 (РЖМат, 1973, 7А411)

1385. —, On quasi-local regular algebras. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov. 1971-maggio 1972. Vol. 11. London — New York, 1973, 11—22 (РЖМат, 1974, 9А485)

1386. —, Rings of global dimension two. Lect. Notes Math., 1973, **311**, 243—251 (РЖМат, 1973, 7А390)

1387. —, Conductor, projectivity and injectivity. Pacif. J. Math., 1973, **46**, 603—608

1388. —, Finiteness in projective ideals. J. Algebra, 1973, **25**, № 2, 269—278 (РЖМат, 1973, 10А357)

1389. —, Coherence of one polynomial ring. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **41**, № 2, 449—456 (РЖМат, 1974, 9А469)

1390. —, Divisor theory in module categories. Amsterdam — Oxford, North — Holl. Publ. Co., 1974, ix, 120 pp. (РЖМат, 1975, 12А413К)

1391. **Venkataraman Rangachari**, Extensions of Pontryagin duality. Math. Z., 1975, **143**, № 2, 105—112 (РЖМат, 1975, 12А246)

1392. **Vescan R. T.**, On the algebraic structure of linear relations. An. sti. Univ. Iasi, 1974, Sec. 1a, **20**, № 2, 277—284 (РЖМат, 1975, 8А332)

1393. **Vidal R.**, Quelques proprietes des modules de type quasi-fini. C. r. Acad. sci., 1971, **273**, № 13, A562—A564 (РЖМат, 1972, 4А319)

1394. —, Sur la structure des modules de type quasi-fini. C. r. Acad. sci., 1972, **A275**, № 5, 323—324 (РЖМат, 1973, 3А286)

1395. **Vigneras-Guého Marie-France**, Simplification pour les ordres des corps de quaternions totalement définis. C. r. Acad. sci., 1974, **A279**, № 14, 537—540 (РЖМат, 1975, 5А357)

1396. **Villanueva N. E.**, Functor envolvente en categorías de Grothendieck. I. Rev. mat. hisp.-amer., 1972, **32**, № 4-5, 197—206 (РЖМат, 1973, 4А454); II. Rev. mat. hisp.-amer., 1973, **33**, № 1-2, 69—78 (РЖМат, 1973, 11А322); III. Rev. mat. hisp.-amer., 1973, **33**, № 4, 193—206 (РЖМат, 1974, 6А426)

1397. **Vina E. A.**, Localización. Depart. Algebra y Fundamentos, Univ. Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1973, ii 86 pp.

1398. **Vincent P.**, Sur les notion de point de partage dans les ensembles ordonnés et son application aux limites dans les catégories. C. r. Acad. sci., 1967, **264**, № 1, A9—A10 (РЖМат, 1968, 9А264)

1399. —, Sur la dimension des categories de foncteurs d'un ensemble ordonné vers une catégorie. C. r. Acad. sci., 1967, **A264**, № 6, 277—280 (РЖМат, 1968, 7А343)

1400. **Vinsonhaler C. I.**, Orders in *QF*-3 rings. J. Algebra, 1970, **14**, № 1, 83—90. Поправка: ibid., 1973, **25**, № 2, 401 (РЖМат, 1970, 10А178; 1971, 8А219)

1401. —, A note on two generalizations of *QF*-3. Pacif. J. Math., 1972, **40**, № 1, 229—233 (РЖМат, 1972, 12А259)

1402. **Viola-Prioli Ana M. D.**, Flat analytic extensions. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **202**, Febr., 385—404 (РЖМат, 1975, 12А271)
1403. **Viola-Prioli J.**, On absolutely torsion-free rings. Pacif. J. Math., 1975, **56**, № 1, 275—283 (РЖМат, 1976, 2А309)
1404. —, When in every kernel functor idempotent? Can. J. Math., 1975, **27**, № 3, 545—554 (РЖМат, 1976, 4А367)
1405. **Vivier M.**, Sur les modules de solutions des systèmes d'équations différentielles homogènes à coefficients constants. C. r. Acad. sci., 1968, **266**, № 7, A405—A408 (РЖМат, 1968, 11А293)
1406. —, Sur les bases vectorielles de certains modules de torsion. C. r. Acad. sci., 1969, **A268**, № 12, 633—636 (РЖМат, 1970, 2А372)
1407. —, Sur la réduction algébrique des systèmes différentiels à une forme normale et sur le problème des conditions initiales. C. r. Acad. sci., 1970, **270**, № 10, A653—A656 (РЖМат, 1970, 9Б206)
1408. **Wajnryb B.**, Z a k s A., On the flat overrings of an integral domain. Glasgow Math. J., 1971, **12**, № 2, 162—165 (РЖМат, 1972, 8А494)
1409. **Walker C. L.**, Projective classes of completely decomposable Abelian groups. Arch. Math. (Basel), 1972, **23**, 581—588
1410. —, Projective classes of cotorsion groups. Ill. J. Math., 1973, **17**, № 4, 689—706 (РЖМат, 1974, 7А256)
1411. —, Local quasiisomorphisms of torsion free Abelian groups. Ill. J. Math., 1974, **18**, № 4, 537—551 (РЖМат, 1975, 10А204)
1412. —, W a l k e r E., Quotient categories and rings of quotients. Rocky Mountain J. Math., 1972, **2**, № 4, 513—555
1413. **Walker E. A.**, The groups P_β. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic. 1972. Vol. 13. London—New York, 1974, 245—255 (РЖМат, 1975, 7А268)
1414. **Walker R.**, Local rings and normalizing sets of elements. Proc. London Math. Soc., 1972, **24**, № 1, 27—45 (РЖМат, 1972, 9А228)
1415. **Wallace A. D.**, Dispersal in compace semimodules. J. Austral. Math. Soc., 1972, **13**, № 3, 338—342 (РЖМат, 1972, 10А122)
1416. **Warfield R. B.**, A Krull—Schmidt theorem for infinite sums of modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **22**, № 2, 460-465 (РЖМат, 1970, 3А316)
1417. —, Decompositions of injective modules. Pacif. J. Math., 1969, **31**, № 1, 263—276 (РЖМат, 1970, 6А246)
1418. —, Rings whose modules have nice decompositions. Math. Z., 1972, **125**, № 2, 187—192 (РЖМат, 1972, 8А479)
1419. —, Classification theorems for p-groups and modules over a discrete valuation ring. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, **78**, № 1, 88—92 (РЖМат, 1972, 11А125)
1420. —, Exchange rings and decompositions of modules. Math. Ann., 1972, **199**, № 1, 31—36 (РЖМат, 1973, 5А233)
1421. —, Serial rings and finitely presented modules. J. Algebra, 1975, **37**, № 2, 187—222 (РЖМат, 1976, 4А249)
1422. —, A classification theorem for Abelian p-groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **210**, 149—168 (РЖМат, 1976, 6А224)
1423. **Warner S.**, Sheltered modules and rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **30**, 8—14 (РЖМат, 1973, 11А393)
1424. —, Linearly compact rings and modules. Math. Ann., 1972, **197**, № 1, 29—43 (РЖМат, 1972, 12А270)
1425. **Waterhouse W. C.**, On p-divisible groups over complete valuation rings. Ann. Math., 1972, **95**, № 1, 55—65 (РЖМат, 1972, 8А497)
1426. —, The heights of formal A-modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **46**, № 3, 331—334 (РЖМат, 1975, 9А351)
1427. **Webb C.**, Tensor and direct products. Pacif. J. Math., 1973, **49**, № 2, 579—594 (РЖМат, 1974, 10А280)
1428. **Wehlen J. A.**, Algebras of finite cohomological dimension. Nagoya Math. J., 1971, **43**, 127—136 (РЖМат, 1972, 6А387)
1429. —, Cohomological dimension and global dimension of algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **32**, № 2, 75—80 (РЖМат, 1972, 12А325)

1430. —, Algebras over absolutely flat commutative rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **196**, 149—160 (РЖМат, 1975, 5А393)
1431. **Weidenfeld G.**, W e i d e n f e l d M., Complétion universelle et régularisation d'une petite categorie préadditive. C. r. Acad. sci., 1972, **275**, № 2, A89—A91 (РЖМат, 1973, 2А298)
1432. **Weidenfeld M.**, W e i d e n f e l d G., Ideaux d'une catégorie préadditive, application aux catégories semi-parfaites. C. r. Acad. sci., 1970, **A270**, № 24, 1569—1571 (РЖМат, 1971, 2А284)
1433. **Weinberg E. C.**, Free lattice-ordered Abelian groups. Math. Ann., 1963, **151**, № 3, 187—189 (РЖМат, 1964, 1А253)
1434. —, Free lattice-ordered Abelian groups. II. Math. Ann., 1965, **159**, № 4, 217—222 (РЖМат, 1966, 1А250)
1435. **Wiegand R.**, Modules over universal regular rings. Pacif. J. Math., 1971, **39**, № 3, 807—819 (РЖМат, 1972, 9А325)
1436. —, Globalization theorems for locally finitely generated modules. Pacif. J. Math., 1971, **39**, № 1, 269—274 (РЖМат, 1972, 9А326)
1437. —, Generators of modules over commutative rings. J. Algebra, 1973, **27**, № 3, 454—461 (РЖМат, 1974, 6А531)
1438. —, Descent of projectivity for locally free modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **41**, № 2, 342—348 (РЖМат, 1974, 9А480)
1439. —, W i e g a n d S., Finitely generated modules over Bezout rings. Pacif. J. Math., 1975, **58**, № 2, 655—664 (РЖМат, 1971, 4А406)
1440. **Wiegand S.**, Galois theory of essential extensions of modules. Can. J. Math., 1972, **24**, № 4, 573—579 (РЖМат, 1973, 1А249)
1441. —, Semilocal domains whose finitely generated modules are direct sums of cyclis. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **50**, 73—76 (РЖМат, 1976, 5А421)
1442. **Wiegandt R.**, On complete semi-groups. Acta scient. math., 1958, **19**, № 1-2, 93—97 (РЖМат, 1959, 5592)
1443. —, On complete semi-modules. Acta scient. math., 1958, **19**, № 3-4, 219—223 (РЖМат, 1960, 3824)
1444. —. Struktursätze von Wedderburn-Artinschem Typ in der Mathematik. Schriftenr. Zentralinst. Math. und Mech., 1972, № 16, 151 (РЖМат, 1974, 1А329)
1445. **Wilkerson R. W.**, Finite dimensional group rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **41**, № 1, 10—16 (РЖМат, 1974, 6А351)
1446. **Williams G. B.**, S-objects in an Abelian category. Acta sci. math., 1971, **32**, № 3-4, 351—357 (РЖМат, 1972, 9А273)
1447. **Winthrop J.**, A homological characterization of large subgroups. Acta math. Acad. sci. hung., 1974, **25**, № 3-4, 255—262 (РЖМат, 1975, 8А225)
1448. **Woodcock C. F.**, A note on duality over complete local rings. J. London Math. Soc., 1973, **6**, № 4, 614—616 (РЖМат, 1974, 3А320)
1449. **Woods S. M.**, Some results on semi-perfect group rings. Can. J. Math., 1974, **26**, № 1, 121—129 (РЖМат, 1974, 11А322)
1450. **Würfel T.**, Coherence et localisation. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, A881—A883 (РЖМат, 1974, 4А215)
1451. —, Über absolut reine Ringe. J. reine und angew. Math., 1973, **262—263**, 381—391 (РЖМат, 1974, 6А355)
1452. —, Sur les V-anneaux semi-artiniens. Rev. roum. math. pures et appl., 1975, **20**, № 4, 503—507 (РЖМат, 1976, 1А279)
1453. **Yamagata K.**, Non-singular rings and Matlis' problem. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1972, **A11**, № 286-312, 186—192 (РЖМат, 1973, 6А305)
1454. —, A note on a problem of Matlis. Proc. Jap. Acad., 1973, **49**, № 2, 145—147 (РЖМат, 1974, 3А206)
1455. —, On projective modules with the exchange property. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1972, **A11**, № 286-312, 186—192 (РЖМат, 1973, 8А330)

1456. —, The exchange property and direct sums of indecomposable injective modules. Pacif. J. Math., 1974, **55**, № 1, 301—317 (РЖМат, 1975, 9A228)
1457. **Yeh R. T.**, Some structural properties of generalized automata and algebras. Math. Syst. Theory, 1971, **5**, № 4, 306—318 (РЖМат, 1972, 8A225)
1458. **Yousufzai A. A. K.**, Divisibility and purity in modules. Doct. Diss. Delft., 1971, 96 pp.
1459. —, Basic submodules of an R-module. Publs Math., 1973, **20**, № 3-4, 215—218 (РЖМат, 1974, 9A476)
1460. **Yue Chi Ming R.**, On (von Neumann) regular rings. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1974, **19**, № 1, 89—91 (РЖМат, 1974, 9A269)
1461. —, On simple P-injective modules. Math. jap., 1974, **19**, № 3, 173—176 (РЖМат, 1975, 11A372)
1462. **Zaks A.**, Restricted left principal ideal rings. Isr. J. Math., 1972, **11**, № 2, 190—215 (РЖМат, 1972, 12A247)
1463. —, Dimension theory. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **38**, № 3, 457—464 (РЖМат, 1974, 1A389)
1464. —, Isobaric QF-rings. Portug. math., 1973, 32, 39—47
1465. —, Hereditary Noetherian rings. J. Algebra, 1974, **29**, № 3, 513—527 (РЖМат, 1975, 3A324)
1466. **Zameeruddin Q.**, Quassi-hereditary rings. Riv. mat. Univ. Parma, 1971, **12**, 199—203 (РЖМат, 1975, 1A322)
1467. **Zariski O.**, Samuel P., Commutative algebra. Corrected reprint. Berlin—Heidelberg—New York, 1975, 1, 340 pp.; 1976, 2, 425 pp.
1468. **Zassenhaus H.**, On the embedding an order into a maximal order. Lect. Notes Math., 1973, **353**, 204—221 (РЖМат, 1974, 6A342)
1469. **Zelmanowitz J.**, Injective hulls of torsion free modules. Can. J. Math., 1971, **23**, № 6, 1094—1101 (РЖМат, 1972, 8A337)
1470. —, Semiprime modules with maximum conditions. J. Algebra, 1973, **25**, № 3, 554—574 (РЖМат, 1974, 1A269)
1471. —, Orders in simple artinian rings are strongly equivalent to matrix rings. Pacif. J. Math., 1973, **48**, № 2, 621-627 (РЖМат, 1974, 9A290)
1472. **Ziegenbalg J.**, Vollständige Quotientenringe in didaktischer Sicht. Math.-phys. Semesterber, 1975, **22**, № 1, 83—93 (РЖМат, 1975, 8A410)
1473. **Zimmermann W.**, Einige Charakterisierungen der Ringe über denen reine Untermoduln direkte Summanden sind. Sitzungsber. Baayer. Akad. Wiss. Math.—naturwiss. Kl. 1972. München, 1973, 77—79 (РЖМат, 1974, 6A370)
1474. **Zink T.**, Endlichkeitsbedingungen für Moduln über einem Noetherschen Ring. Math. Nachr., 1974, **64**, 239—252 (РЖМат, 1975, 8A413)
1475. **Zöschinger H.**, Komplementierte Moduln über Dedekind-ringen. J. Algebra, 1974, **29**, № 1, 42—56 (РЖМат, 1974, 9A304)
1476. —, Komplemente als direkte Summanden. Arch. Math., 1974, **25**, № 3, 241—253 (РЖМат, 1975, 4A312)
1447. —, Moduln, die in jeder Erweiterung ein Komplement haben. Math. scand., 1974, **35**, № 2, 267—287 (РЖМат, 1975, 11A373)
1478. **Dorofeeva M. P.**, Hereditary and semi-hereditary monoids. Semigroup Forum., 1972, **4**, № 4, 301—311 (РЖМат, 1973, 2A146)
1479. —, Mannepalli V. L., Satvanarayna M., Prüfer and Dedekind monoids. Semigroup Forum, 1975, **9**, № 4, 294—309 (РЖМат, 1975, 11A227); II, ibid. 1975, 11, № 2, 102—114 (РЖМат, 1976, 10A120)
1480. **Kilp Mati**, Commutative monoids all of whose principal ideals are projective. Semigroup Forum, 1973, **6**, № 4, 334—339 (РЖМат, 1974, 7A240)
1481. **Nazarova L. A.**, Roiter A. V., Matrix questions and the Brauer—Thrall conjectures on algebras with an infinite number of indecomposable representations. Roc. Symp. Pure Math. Vol. 21. Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R. I., 1971, 111—115 (РЖМат, 1974, 8A267)

УДК 519.48

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

В. А. Артамонов

В настоящий обзор вошли работы прореферированные в РЖ «Математика» в 1967—1975 гг. в разделе «Универсальные алгебры». Предыдущий обзор Т. М. Баранович [22] по этой теме охватил период с 1964 по 1966 г. В недавно вышедшей статье Т. М. Баранович и М. С. Бургина [25] отражены работы последних лет по линейным (мультиоператорным) Ω-алгебрам, а в обзоре [180] — работы по упорядоченным множествам и решеткам. Поэтому настоящий обзор не касается линейных Ω-алгебр, упорядоченных алгебр, отношений на множествах, а также топологических алгебр. Основной акцент сделан на общие свойства универсальных алгебр, такие как клоны операций, многообразия, алгебраические конструкции, отношения зависимости и другие. Лишь в § 4 затронуты некоторые наиболее изучаемые специальные «неклассические» алгебры. Библиография содержит работы, прореферированные в РЖ «Математика» в разделе «Универсальные алгебры» с № 1 за 1967 год по № 9 за 1975 год, и ряд дополнительных работ.

За указанный период по универсальным алгебрам появилась обширная монографическая литература. На русском языке вышли книги Кона [85] (перевод с английского), монография А. И. Мальцева [112], второе издание книги А. Г. Куроша [96], а также книга [97]. На английском языке появились книги Гретцера [397], Пирса [609], Хенкина, Монка и Тарского [422], Б. Йонсона [470, 471]. На немецком языке вышла книга Е. Т. Шмидта [683]. В этих книгах изложение начинается, как правило, с основных определений и постепенно читатель вводится в круг проблем, стоящих в той или иной области.

На протяжении всего обзора мы будем придерживаться следующей терминологии и обозначений. Если X — множество, то $O_n(X)$ есть множество всех отображений $f: X^n \to X$, $0 \leqslant n < \infty$, где X^0 — одноэлементное множество,

$$O(X) = (O_n(X) \mid n \geqslant 0).$$

Универсальная алгебра A на множестве X с системой операций $F=(F_n|n\geqslant 0)$ будет обозначаться через $A=(X, F)$. При этом операции, если это не оговорено специально, будут предполагаться конечноместными, а алгебры будут иметь конечноместные операции. Через $X_n(A)=X_n(F)$ будут обозначаться множества всех n-арных главных производных (в смысле [96]) операций (т. е. операций, представимых полиномами в терминологии книги [397]);

$$X(F)=(X_n(F)\mid n\geqslant 0).$$

Производные операции на X (см. [85, 96, 97]) будут также называться алгебраическими (см. [397]).

Операция $f\in O_n(x)$ называется симметричной, если

$$f(x_1, \ldots, x_n)=f(x_{\sigma 1}, \ldots, x_{\sigma n})$$

для любой перестановки σ и любых $x_1, \ldots, x_n\in X$. Операция f называется идемпотентной, если $f(x, \ldots, x)=x$ для всех $x\in X$. Алгебра $A=(X, F)$ называется симметричной (соответственно идемпотентной), если F состоит из симметричных (идемпотентных) операций.

§ 1. СТРУКТУРА ПРОИЗВОДНЫХ ОПЕРАЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

1.1. Клон полиномов. За указанный период появилось много работ, в которых изучались числовые характеристики клона полиномов на алгебре $A=(X, F)$. Напомним, что полином $X_n(F)$ называется существенным, если он зависит от всех своих n аргументов. В серии работ Гретцера, Плонки [402, 403, 638—642], А. Секаниновой и М. Секанина [696—700] изучаются последовательности чисел $(p_0, \ldots, p_n, \ldots)$, где $p_n=p_n(A)$ — число существенных n-арных полиномов в алгебре A. Обзор части этих результатов приведен в [698]. Основной задачей в этом направлении является описание таких последовательностей чисел $(p_0, \ldots, p_n, \ldots)$, что $p_n=p_n(A)$ для некоторой алгебры A. В [402] показано, что если $A=(X, F)$ — идемпотентная алгебра, т. е. $p_0(A)=p_1(A)=0$, с коммутативным бинарным полиномом f, то $p_n(A)\neq 1$ при $n\geqslant 2$ влечет $p_{n+1}(A)\geqslant p_n(A)+(n-1)$. Если же f еще и ассоциативно, то

$$p_{n+1}(A)\geqslant 1+p_n(A)+\max(p_n(A),\ n+1).$$

В [403] показано, что если идемпотентная алгебра A не имеет существенного бинарного полинома, т. е. $p_2(A)=0$, но $p_3, p_4\geqslant 1$, то для $n\geqslant 2$ имеем $p_n(A)+1\leqslant p_{n+1}(A)$.

В работе [640] показано, что если $p_n(A)=n$, то A можно представить как $A=(X, f)$, где f — бинарный полином. Описываются тождества, которым удовлетворяет f. В [641] показано, что если $p_n<n$ и $p_k<k$ для некоторого k, то либо $p_n=0$ для $n\geqslant 1$, либо A — полуструктура ($p_n=1$, $n\geqslant 1$), либо A — диагональная алгебра, т. е. $A=(X, x\cdot y)$, где $x^2=x$, $(xy)z=x(yz)=xz$, либо A — идемпотентное сжатие (редукт) булевой алгебры, т. е. $p_{2n}=0$, $p_{2n+1}=1$. См. также [642].

В [699] А. Секаниновой описаны последовательности $(\ldots, p_n, \ldots)$, $p_n=p_n(A)$, в предположении, что $p_n<2$. В [696, 700] изучены эти последовательности для упорядоченных алгебр.

Ряд работ посвящен изучению множества

$$S(A)=\{n\geqslant 0\mid p_n(A)\neq 0\}.$$

В [767] Урбаник описал подмножества $E\subseteq \mathbf{N}\vee 0$ вида $E=S(A)$ для некоторой симметричной алгебры A без алгебраических констант. Файтлович [325] показал, что если $A=(X, F)$, где $F\subseteq \bigvee_{k<n} O_k(A)$, и для некоторого $r>0$ выполнено

$$(r+1, \ldots, r+n-1)\wedge S(A)=\varnothing,$$

то $S(A)\subseteq(1, \ldots, r)$. Если $S\subseteq\mathbf{N}$ и $S\ni 2$, то существует бинарная алгебра A с одной бинарной операцией и условием $S(A)=S$ тогда и только тогда, когда из $2<n\notin S$ следует $n+1\notin S$ и $S\neq(2, 3, \ldots, n)$, где $n=3, 4$.

В работе М. Секанины [696] показано, что для направленно упорядоченных алгебр A множество $S(A)$ имеет один из следующих видов:

$$(0, 1, \ldots, n),\quad (1, 2, \ldots, n),\quad (0, 1, \ldots, n, \ldots),$$
$$(1, 2, \ldots, n, \ldots),\quad (1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots).$$

В [697] изучаются множества $S(A)$ для топологических алгебр со специальной топологией. Дудек [311] отметил, что эти результаты М. Секанины верны и для алгебр со следующим свойством: если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — полином алгебры, зависящий от x_k, то после отождествления $x_i=x_k=x$, $1\leqslant i$, $k\leqslant n$, полученный полином зависит от x. В работе Анусяка [215] изучено $S(A)$ для алгебры с транзитивной операцией, т. е. с такой n-арной операцией f, что для всех $1\leqslant i$, $j\leqslant n$ существует такая перестановка σ, что $\sigma i=j$ и

$$x_1 \ldots x_n f=x_{\sigma 1} \ldots x_{\sigma n} f \text{ —}$$

тождество в A.

Урбаник [768, 769] и Плонка [638] рассматривают следующие числовые характеристики алгебр. Пусть G пробегает семейство операций на множестве X, $A=(X, F)$ — некоторая алгебра на X; $F, G\subseteq O(X)$. Положим

$$\varepsilon(A)=\min_G\{n\mid [X_n(F)=X_n(G)]\Rightarrow[X(F)\supseteq X(G)]\},$$

$$\rho(A)=\min_G\{n\mid [X_n(F)=X_n(G)]\Rightarrow[X(F)=X(G)]\}.$$

В работах Урбаника изучались возможные значения для пары $(\varepsilon(A), \rho(A))$. Если $A=(X, F)$ — алгебра, то через $I(F)$ обозначается множество всех идемпотентных операций из $X(F)$. Алгебра $I(A)=(X, I/(F))$ называется идемпотентным редуктом A. В [637] показано, что если A — группа, то $\rho(I(A))\leqslant 3$, причем для свободной группы имеет место равенство.

Искандер [454] изучал функции на p-кольцах, т. е. кольцах из многообразия $\operatorname{var}\mathbf{F}_p$, порожденного полем $\mathbf{F}_p$ из p элементов, p — простое число. Рассматриваются функции, обладающие суперпозиционным свойством, т. е. для любого идеала I кольца A из $a_i-b_i\in I$ следует

$$f(a_1, \ldots, a_n)-f(b_1, \ldots, b_n)\in I.$$

Показано, что эти функции сводятся к алгебраическим.

Изучению симметрических операций на группах посвящена работа [620]. Плонка [627] изучает алгебры $A=(X, g)$ с одной симметричной операцией $g: X^n\to X$, причем любой полином $f\in X_{2n-1}(F)$ либо константа, либо единичная операция, либо

$$f(x_1, \ldots, x_{2n-1})=g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}),$$

где $1\leqslant i_j\leqslant 2n-1$. Показано, что g — одна из следующих операций:

1) $n=1$, $g^2=g$ или $g^2=\varepsilon$;
2) $g(g(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1})$ константа;
3) $g(g(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1})=g(x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}, x_j)$, $n+1\leqslant j\leqslant 2n-1$.

Далее в работе описываются такие алгебры в случаях 2) и 3).

1.2. Полные, примальные и квазипримальные алгебры. Алгебра $A=(X, F)$ называется полной (или функционально полной), если любая функция на X является алгебраической. Алгебра A называется строго (функционально) полной, или примальной, если любая функция на X представляется некоторым полиномом, т. е. $O(X)=X(A)$. Конечная алгебра A называется полупримальной, если любая функция $f: X^n\to X$, сохраняющая подалгебры, представима полиномом. Квазипримальная алгебра — это конечная неодноэлементная алгебра, в которой любая функция $f: X^n\to X$, сохраняющая подалгебры и перестановочная с изоморфизмами подалгебр, представляется полиномом. Наконец, если в конечной неодноэлементной алгебре A любая функция, сохраняющая отношения конгруэнтности, представима полиномом, то алгебра A называется h-примальной. Напомним также, что дискриминантной функцией называется операция

$$d(x, y, z)=\begin{cases} z, & \text{если } x=y, \\ x, & \text{если } x\neq y. \end{cases}$$

В работе Вернера [795] показано, что для конечной алгебры $A=(X, F)$ следующие условия эквивалентны: 1) дискриминантная функция является алгебраической операцией, 2) алгебра A полна, 3) если алгебра A неодноэлементна, то существуют такие алгебраические операции $s(x, y)$, $t(x)$, что (X, s) — группа с присоединенным нулем, t — циклическая подстановка на X. Эти результаты обобщены в [494, 614—617] на случай локально полных алгебр.

Иваник [456, 457] показал, что если X — бесконечное множество и $g: X^2\to X$ — отображение, инъективное на подмножестве $X_1\times X_2$, где $X_i\subseteq X$ и $|X_i|=|X|$, то алгебра $(X, O_1(X)\vee g)$ полна.

В [535, 536] Магари изучал многообразия, порожденные полной алгеброй A. В частности, исследовался вопрос о том, когда все алгебры из этого многообразия являются подпрямыми степенями алгебры A. Пиксли [613] рассматривает конечные алгебры $A=(X, F)$, в которых любое отображение $f: X^k\to X$, сохраняющее изоморфизмы подалгебр, представляется некоторым полиномом. Показывается, что это эквивалентно тому, что каждая собственная подалгебра обладает этим свойством и любая алгебра из $\operatorname{var}A$, многообразия, порожденного A, имеет дистрибутивные и перестановочные структуры конгруэнций. Всякая такая алгебра полна.

В работе Фромке [360] показано, что конечная полная алгебра A без собственных подалгебр с тривиальной группой автоморфизмов является примальной. Показано, что существует такая алгебра A с этими свойствами, что $\operatorname{var}A$ состоит не только из подпрямых произведений A. В [123] В. Л. Мурский анонсировал следующий результат. Будем говорить, что почти все алгебры A конечного порядка обладают свойством P, если

$$\lim_{k\to\infty} N_{kP}/N_k=1,$$

где $N_k(N_{kP})$ — число всех неизоморфных алгебр с данной сигнатурой порядка k (со свойством P). Тогда, если сигнатура состоит не только из нульарных или унарных операций, то почти все конечные алгебры полны. Отсюда следует, что почти все конечные алгебры конечнобазируемы.

По полным алгебрам см. также работы [492, 807—810].

Фостер [345] показал, что если алгебра A является h-примальной, группа автоморфизмов A тривиальна и в A конгруэнции образуют цепь, то любая алгебра из $\operatorname{var}A$ есть подпрямое произведение гомоморфных образов A. Пиксли [614, 616] изучены локально квазипримальные алгебр, т. е. алгебры в которых любая функция, сохраняющая подалгебры и перестановочная с изоморфизмами подалгебр, локально представима полиномом. Показано, что эти условия эквивалентны локальной представимости дискриминантной функции и эквивалентны тому, что любая подалгебра A проста и любая алгебра B, локально удовлетворяющая всем тождествам A, имеет дистрибутивную и перестановочную структуру конгруэнций. В частности, если A конечно, то всюду слово «локально» можно отбросить и получить результаты работ [613, 795]. Показано также, что любая группа является группой автоморфизмов некоторой локально квазипримальной алгебры, а любая конечная группа — группой автоморфизмов квазипримальной алгебры. В [616] рассмотрены свойства конечных множеств локально независимых локально квазипримальных алгебр и локальные многообразия, порожденные такими алгебрами.

Краусс [501] показал, что если дана алгебра A, то ее квазипримальность эквивалентна следующему свойству. Пусть B — подалгебра A^I, J — подмножество I и π_J — естественная проекция A^I на A^J. Определим в I отношение эквивалентности $i\sim j(B)$, если существует такой изоморфизм $h:\pi_i(B)\to\to\pi_j(B)$, что $h(x(i))=x(j)$ для всех $x=(\ldots,x(i),\ldots \ldots,x(j),\ldots)\in B$. Тогда для любой подалгебры $B\subseteq A^I$ и любого такого конечного подмножества $J\subseteq I$, что $i\sim j(B)$, $i,j\in J$, тогда и только тогда, когда $i=j$, имеем $\pi_J(B)=A^J$.

В работе Куакенбуша [660] показано, что если A — квазипримальная алгебра, $B\subseteq C$ — алгебры из $\mathrm{var}\,A$, то любая конгруэнция на B есть ограничение некоторой конгруэнции из C; здесь же описываются слабо инъективные алгебры из $\mathrm{var}\,A$. В [344] показано, что если полупримальная алгебра $A=(X,F)$ не имеет одноэлементных подалгебр и $g\in O_n(X)\setminus X_n(A)$, то алгебра $(X,F\vee g)$ полупримальна. См. также [345—352], [436, 437, 679].

1.3. Представление одних операций через другие. В книге Кона [85] показано, что для любой универсальной алгебры $A=(X,F)$ существуют такая полугруппа S и отображения

$$\varphi:X\to S,\quad \psi:F\to S,$$

что φ — вложение и для всех $a_1,\ldots,a_n\in X$, $\omega\in F$,

$$(a_1\ldots a_n\omega)^\varphi=a_1^\varphi\cdot\ldots\cdot a_n^\varphi\cdot\omega^\psi.$$

Т. В. Соколовская [168] показала, что если $F=(F_0,\ F_1)$, то любая конечная F-алгебра представима в этом смысле в конечной полугруппе. В противном случае существует такая конечная алгебра, которая не представима ни в какой конечной полугруппе. В [139, 141, 143] изучается представление алгебры $A=(X,F)$ в F-полугруппах S, т. е. полугруппах, являющихся F-алгебрами, причем операции из F являются полугрупповыми алгебраическими, т. е. имеют вид

$$x_1\ldots x_n\omega=a_1x_1a_2\ldots x_na_{n+1}.$$

Показано, что каждая алгебра A вложима в некоторую F-полугруппу. В [139] найдены необходимые и достаточные условия вложимости алгебры A в некоторую коммутативную F-полугруппу. В [141] найдены, в частности, в виде условных тождеств необходимые и достаточные условия вложимости алгебры в F-полугруппы с сокращением. Наконец, в [143] изучены представления в нильпотентных полугруппах.

Представлениям специальных классов алгебр посвящены работа Чупоны [200] и работы [202, 662]. Куакенбушем [659, 661] доказано, например, что любая идемпотентная операция на множестве, содержащем не менее двух элементов, есть композиция идемпотентных бинарных операций. Б. Р. Френкин [188, 190] изучает вопрос τ-сводимости и приводимости n-квазигрупповой операции в виде полинома от одной или нескольких квазигрупповых операций с данной расстановкой скобок τ.

В [331] изучаются алгебры $A=(X,F)$ с k отделимыми переменными, т. е. для любых полиномов $f,g\in X_n(F)$, $n>k$, существуют такие полиномы $f_0\in X_k(F)$, $g_0\in X_{n-k}(F)$, что уравнения

$$f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_1,\ldots,x_n),$$

$$f_0(x_1,\ldots,x_k)=g_0(x_{k+1},\ldots,x_n)$$

эквивалентны. Показано, что такая алгебра вкладывается в абелеву группу, причём

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n f_i(x_i),$$

где f_i — некоторые унарные, не обязательно производные операции в абелевой группе. Специально рассмотрен случай k-отделимости для всех k.

Т. В. Соколовская [167] доказала, что если многообразие мультиоператорных групп задано конечным числом операций и тождеств, то его можно задать одной операцией и одним тождеством.

§ 2. МНОГООБРАЗИЯ И КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР. НЕЗАВИСИМОСТЬ В АЛГЕБРАХ

2.1. Многообразия и квазимногообразия алгебр. В дальнейшем мы будем пользоваться следующим обозначением. Если V — многообразие, то через $L_m=L_m(V)$ мы будем обозначать V-свободную алгебру ранга m. Кроме того, напомним, что через $\mathrm{var}A$ мы обозначим многообразие, порожденное A, через $\mathrm{qvar}A$ — квазимногообразие, порожденное A.

В работе А. И. Мальцева [108] основные результаты общей теории многообразий алгебр переносятся на многообразия и квазимногообразия алгебраических систем (например, теорема Биркгофа). Рассматриваются также реплично-полные классы алгебр (см., например, [112]). В [109] А. И. Мальцев определяет умножение классов алгебраических систем. Именно, пусть V, $W \subseteq T$ — классы F-алгебр. Тогда алгебра $B \in T$ принадлежит $V \underset{T}{\circ} W$, если и только если на B существует такая конгруэнция θ, что $B/\theta \in W$, и для любого $b \in B$, если класс $b\theta$ является алгеброй из T, то $b\theta \in V$. В общем случае, если V, W, T — многообразия, то $V \underset{T}{\circ} W$ не многообразие. Показано, что если $F_1 \ni e$, причём в T выполнены тождества

$$e(x) = e(y) = f(e, \ldots, e) = e$$

для всех $f \in F$ и в T конгруэнции на алгебрах перестановочны, то подмногообразия в T относительно умножения образуют группоид. Указаны достаточные условия его ассоциативности.

Стэнли [730] изучает вопрос о полноте категории алгебр, замкнутой относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Гретцер [393] изучает на классах алгебр операции взятия подалгебр S, факторалгебр H и прямых произведений П. См. также [582, 660].

Вопросам структурной эквивалентности многообразий V_1, V_2, т. е. эквивалентности категорий V_i, сохраняющей носители алгебр, посвящена работа [462]. В работе В. Нейманна [587] показано, что каждое многообразие алгебр V однозначно (с точностью до структурной эквивалентности многообразий) определяется клоном полиномов $H(V)$, причем $H(V)$ можно понимать как алгебру со счетноместными операциями p_i — проекция на i-й аргумент, и операцией подстановки $xx_1 \ldots x_n \ldots$ При этом выполняются тождества

$$xp_1p_2 \ldots = x, \quad p_ix_1x_2 \ldots = x_i,$$

$$(xy_1y_2 \ldots)(z_1z_2 \ldots) = x(y_1z_1z_2 \ldots)(y_2z_1z_2 \ldots) \ldots .$$

Обратно, любая алгебра с этими операциями и тождествами может быть реализована как клон $H(V)$ полиномов некоторого многообразия V.

В [133] описываются малые категории D, для которых категория функторов $F(D, V)$ эквивалентна некоторому многообразию алгебр при любом многообразии алгебр V.

В [537] показано, что любое многообразие алгебр содержит простую алгебру. Кроме того, если в многообразии V любая неодноэлементная алгебра не содержит подалгебру, состоящую из одного элемента, то любая алгебра из V имеет нетривиальную простую факторалгебру. Нельсон [583] показывает, что для алгебр с бесконечноместными операциями оба утверждения неверны. Беррис [261] приводит примеры конечных простых неизоморфных алгебр A и B с условием $\mathrm{var}A = \mathrm{var}B$ (см. также [573]). В [223] Остин показывает, что если $w(x, y) = w'(x, y)$ — тождество от двух переменных и конечного числа операций

строго положительной арности, причем, например, x встречается в обеих частях, то тождество $w = w'$ имеет конечную модель.

В [148] Ю. М. Рябухин находит необходимые и достаточные условия, при которых многообразие F-алгебр как категория имеет ядра и нормальные образы. В [185, 186] К. Фихтнер изучает многообразия алгебр V с нульарной операцией, фиксирующей элемент 0, являющийся подалгеброй, причем конгруэнции на каждой алгебре из V определяются классом, содержащим 0. Показано, что это выполнено в том и только в том случае, когда для некоторых k, $l \geqslant 1$ существуют такие бинарные полиномы $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ и $(2k+1)$-арные полиномы $\tau_1, \ldots, \tau_l$, что в V выполнены тождества

$$xx\sigma_j = 0, \quad xyxy\sigma_1 \ldots xy\sigma_k 0 \ldots 0\tau_1 = x,$$

$$xy0 \ldots 0xy\sigma_1 \ldots xy\sigma_k\tau_i = xyxy\sigma_1 \ldots xy\sigma_k 0 \ldots 0\tau_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, l-1,$$

$$xy0 \ldots 0xy\sigma_1 \ldots xy\sigma_k\tau_l = y.$$

Множество пар чисел (k, l) с указанными свойствами обозначим через $D(V)$. Показано, что в $D(V)$ существует однозначно определенная пара (k_0, l_0), что

$$D(V) = \{(m, n) \mid m \geqslant k_0, l \geqslant l_0\}.$$

Обратно, для всякой пары (k, l) существует многообразие V с $k = k_0$, $l = l_0$. О многообразиях алгебр с «хорошей теорией идеалов» см. работы Урсини [773], Магари [541—545], Ньяни [379, 380], а также [333, 334].

И. Ш. Алиев [7] изучает многообразие алгебр V с одной симметричной тернарной операцией. Доказывается, что в V существует единственное минимальное подмногообразие V^*, причём в V^* все алгебры свободны. Аналогичные результаты получены и для многообразия U тотально симметрических квазигрупп (т. е. $(xy)y = x = y(yx)$, $x^2 = x$) и его подмногообразия U^*, заданного тождеством $(xy)(zt) = (xz)(yt)$.

В совместной работе А. А. Акатаева и Д. М. Смирнова [5] начато систематическое изучение многообразия алгебр $\mathfrak{A}_{mn}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, всех алгебр с m-арными операциями $f_1, \ldots, f_n$ и n-арными операциями $g_1, \ldots, g_m$, заданное тождествами

$$((x_1, \ldots, x_n)g_1, \ldots, (x_1, \ldots, x_n)g_m)f_i = x_i, \tag{1}$$

$$((x_1, \ldots, x_m)f_1, \ldots, (x_1, \ldots, x_m)f_n)g_j = x_j, \tag{2}$$

причём в (1) $1 \leqslant i \leqslant n$, а в (2) $1 \leqslant j \leqslant m$. Показано, что совокупность подмногообразий в $U_{m,n}$, $2 \leqslant m \leqslant n$, имеет мощность континуума. Каждое подмногообразие $\mathfrak{A}_{1,1}$ может быть задано в $\mathfrak{A}_{1,1}$ одним тождеством. Описана структура подмногообразий $\mathfrak{A}_{1,1}$. Пусть, далее, $\mathfrak{B}_{m,n}$ — многообразие алгебр с теми же операциями, но только с тождествами (1), $\mathfrak{C}_{m,n}$ с тождествами (2).

В [163] Д. М. Смирнов показывает, что $\mathfrak{A}_{1,n}$ — единственное максимальное подмногообразие в $\mathfrak{B}_{1,n}$. Кроме того, многообразия $\mathfrak{A}_{m,n}$ и $\mathfrak{B}_{1,n}$ шрейеровы. Все подмногообразия $\mathfrak{B}_{1,1}$ регулярны, т. е. в них свободные алгебры $L_r(\mathfrak{B}_{1,1})$ ранга r не вложимы в $L_{r-1}(\mathfrak{B}_{1,1})$, и шрейеровы. Описана также решетка подмногообразий $\mathfrak{B}_{1,1}$. В работе [3] А. А. Акатаев изучил подквазимногообразия $\mathfrak{A}_{1,n}$ и показал, что при почти всех m, n свободная $\mathfrak{A}_{m,n}$-алгебра счетного ранга вкладывается в $L_1(\mathfrak{A}_{m,n})$, а также, что решетка подмногообразий $\mathfrak{C}_{1,n}$, $n>1$, континуальна. В [26] показано, что аксиоматический ранг (см. [112]) $\mathfrak{A}_{m,n}$ равен $m+1$ при $m<n$ и n при $m=n$, а также, что в $\mathfrak{A}_{1,n}$, $n\geqslant 2$, имеется континуум попарно неизоморфных простых алгебр без нетривиальных подалгебр и эндоморфизмов. В [164] показывается, что в $\mathfrak{A}_{1,n}$, $n\geqslant 2$, нет собственных подмногообразий и любая счетная алгебра вложима в алгебру с одним образующим. Группы автоморфизмов алгебр из $\mathfrak{A}_{1,n}$ изучены в [165] (см. также [271]).

В работе Ю. К. Ребане [140] показано, что если $F\neq\varnothing$ $F\neq F_0$, то структура многообразий всех F-алгебр не содержит максимальных элементов. Минимальные квазимногообразия алгебр отношений и колец с ассоциативными степенями описаны в работе А. А. Виноградова [49]. Структура подмногообразий алгебр с нульарными и унарными операциями изучается в [464].

Условия локальной конечности для квазимногообразий рассмотрены Шафаатом в [706]. Показано, что для квазимногообразия R следующие условия эквивалентны:

1) в каждом подквазимногообразии R существует конечное множество конечных алгебр, причём любая алгебра из R вложима в декартово произведение этих алгебр;

2) R локально конечно и подквазимногообразия в R удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей.

Показано также, что если локально конечное квазимногообразие R обладает конечным числом подквазимногообразий, то любой подкласс в R, замкнутый относительно подалгебр и прямых произведений, является подквазимногообразием.

А. Д. Больбот в [27] доказал, что если $F\neq F_0\vee F_1$, то вне любого конечного числа подквазимногообразий F-алгебр лежит континуум минимальных многообразий F-алгебр. В работе А. Н. Трахтмана [172] приведены необходимые и достаточные условия существования в данном многообразии V для любого подмногообразия U накрывающих элементов, т. е. минимальных многообразий, содержащих U. Отмечено также, что в полугруппах есть многообразия, имеющие континуум накрывающих.

Йонсон, Макнальти и Куакенбуш [472] рассмотрели следующий вопрос. Если V — многообразие, то положим $V_n=\operatorname{var}L_n(V)$, $V^{(n)}$ — многообразие, заданное тождествами V, зависящими не более чем от n аргументов. В работе показано, что если S — некоторое подмножество в множестве $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел, то существует такое многообразие V, что $V_n=V_{n+1}$ тогда и только тогда, когда $n\in S$. Если же $S\not\ni 1, 2$, то существует такое многообразие полугрупп V, что $V^{(n)}=V^{(n+1)}$ тогда и только тогда, когда $n\in S$.

А. Будкин и В. Горбунов [30] показали, в частности, что структура подквазимногообразий в некотором квазимногообразии конечна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям обрыва убывающих и возрастающих цепей. Она модулярна в том и только в том случае, когда она дистрибутивна. Исследуется вопрос о связях между локальной вложимостью и аппроксимируемостью алгебраических систем.

Многообразия алгебр V с дистрибутивными структурами конгруэнций описаны Йонсоном [469]. Показано, что это выполнено в том и только в том случае, когда существуют такие тернарные полиномы $t_0,\ldots,t_n$, $n\geqslant 2$, что в V выполнены тождества:

$$t_0(x, y, z)=x, \quad t_n(x, y, z)=z,$$

$$t_i(x, y, x)=x,$$

$$t_i(x, x, y)=t_{i+1}(x, x, y), \ i \text{ нечетно},$$

$$t_i(x, y, y)=t_{i+1}(x, y, y), \ i \text{ четно}.$$

Показано, что в таких многообразиях V структуры подмногообразий также дистрибутивны и если V порождено классом алгебр K, то $V=\Pi_s HS\Pi_u K$, где Π_s, Π_u — операторы взятия подпрямых и ультрапроизведений.

Случай модулярных структур конгруэнций алгебр многообразия V рассмотрен Деем [297]. Им показано, что в V конгруэнции на всех алгебрах модулярны, если и только если существуют такие полиномы $m_0, \ldots, m_n$, $n\geqslant 2$, от четырёх аргументов, что в V выполнены тождества:

$$m_0(x, y, z, t)=x, \quad m_n(x, y, z, t)=t,$$

$$m_i(x, y, y, x)=x,$$

$$m_i(x, y, y, z)=m_{i+1}(x, y, y, z), \ i \text{ нечетно},$$

$$m_i(x, x, y, y)=m_{i+1}(x, x, y, y), \ i \text{ четно}.$$

Далее в работе Гедеоновой [368] также в условиях «мальцевского» типа (т. е. в виде существования некоторых полиномов, удовлетворяющих ряду тождеств) описаны многообразия алгебр, в которых конгруэнции p-модулярны. Наконец, в [562] найдены «мальцевские» условия l-модулярности структур алгебр многообразия, т. е. условия выполнимости тождества $(x\wedge y)\vee\vee(x\wedge z) = x\wedge((x\wedge y)\vee(x\wedge z)\vee(y\wedge z))$. Найдены также условия n-дистрибутивности и двойственной l-модулярности. Показано, что l-модулярность и двойственная l-модулярность влекут модулярность структур конгруэнций алгебр многообразия.

В связи с этой проблематикой следует отметить следующую гипотезу [762]: если в многообразии V структуры конгруэнций всех алгебр удовлетворяют некоторому структурному тождеству, то они модулярны. Напомним, что конгруэнции на мультиоператорных группах модулярны. Известно, что эта гипотеза справедлива для полугрупп. В [581] показывается, что структуры конгруэнций в нетривиальном многообразии уноидов, т. е. алгебр с унарными операциями, не удовлетворяют никакому структурному тождеству. В [580] Нейшн показал справедливость этой гипотезы в предположении, что в структурах конгруэнций алгебр многообразия выполнено тождество

$$s_0 \wedge w \leqslant \bigvee_{i=1}^{k} (s_0 \wedge s_i),$$

где $w, s_0, \ldots, s_k$ — элементы свободной структуры L с базой X, причем $w \nleqslant s_0$, $s_0 \wedge w \nleqslant \bigvee_{i=1}^{k} (s_0 \wedge s_i)$ в L и s_i объединения элементов из X.

В [398] Гретцер описал многообразия алгебр, в которых конгруэнции на алгебрах определяются любым из своих классов, а также многообразия, в которых конгруэнции определяются классами, содержащими фиксированный элемент 0 (см. также [185, 186, 268, 685]). Многообразия V с n-перестановочными конгруэнциями на алгебрах, т. е. $(f \circ g)^n = (g \circ f)^n$ для всех конгруэнций f, g на всех алгебрах из V описаны Е. Шмидтом [686]. В [355] в терминах «мальцевского» типа описаны многообразия алгебр V, в которых для любых $A_1, A_2 \in V$ любая конгруэнция на $A_1 \times A_2$ имеет вид $f_1 \times f_2$, где f_i — конгруэнция на A_i.

Бурмейстер [257] изучает отношение $R(V)$ на множестве K всех кардиналов

$$(m, n) \in R(V) \Leftrightarrow L_m(V) \simeq L_n(V)$$

для некоторого многообразия алгебр V, не обязательно с конечноместными операциями. Показывается, что отношение R на K имеет вид $R(V)$ для некоторого V тогда и только тогда, когда R аддитивно и ограничено, т. е. существует такое $n \in K$, что для всех $m \geqslant n$ класс, содержащий m, одноэлементен.

И. И. Мельник [117] на языке тождеств описал минимальные многообразия, заданные тождествами

$$v(x_1, \ldots, x_n) = w(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

где в обеих частях стоят одни и те же переменные, и содержащие данное многообразие V. Многообразия, заданные тождествами вида (3), называются нормальными. В. Н. Салий [152] описал минимальные нормальные многообразия, содержащие

данное многообразие V в терминах отображений из алгебр $A \in V$ в полные дистрибутивные структуры. В работе И. И. Мельника [118] изучены многообразия алгебр $U + V_0$, где V_0 — многообразие F-алгебр, заданное тождествами

$$x_1 \ldots x_n f = x_1 \ldots x_m g$$

для всех f, $g \in F$, а U — данное многообразие F-алгебр. Предполагается, что $F_0 = \varnothing$. Найдены автоморфизмы алгебр из $U + V_0$.

Изучению введенного А. И. Мальцевым многообразия алгебр с двумя 4-арными операциями f, g и тождествами

$$xxyzf = z, \quad xyzxg = y,$$

$$(xyxzf)\,yxzg = z$$

посвящена работа [750]. Показано, что группа всех обратимых полиномов в таком многообразии тривиальна.

Гретцер, Лаксер и Плонка [400] изучали независимые многообразия K_0 и K_1. Их независимость означает существование такого полинома $p(x, y)$, что $p(x, y) = x$ — тождество K_0, а $p(x, y) = y$ — тождество K_1. В работе показано, что если K_0 и K_1 независимы и структура конгруэнций любой алгебры из $K_0 \vee K_1$ модулярна, то любая алгебра из $K_0 \vee K_1$ имеет и притом единственное с точностью до изоморфизма представление $A = A_0 \times A_1$, где $A_i \in K_i$. В общем случае из $K_0 \vee K_1 = K_0 \times K_1$ не следует их независимость. Но если $K_0 \wedge K_1$ тривиально и конгруэнции в любой алгебре из $K_0 \vee K_1$ модулярны, то равенство $K_0 \times K_1 = K_0 \vee K_1$ влечет независимость K_0 и K_1. Обобщение этих результатов на случай нескольких многообразий сделано Драшковичевой [309]. См. также [240, 439, 649].

В работе Мескина [565] показано, что если $F = (F_0, F')$, где $\omega \in F'$ зависит от X_ω аргументов, возможно бесконечного числа, и P_ω — группа подстановок X_ω, то многообразие F-алгебр, заданное тождествами $X_{\omega \rho \omega} = X_{\omega \omega}$, $\rho \in P_\omega$, является шрейеровым.

Шафаат [713] изучал многообразия F-алгебр с $F_0 = \varnothing$, замкнутые относительно операции $P(A)$, где $P(A)$ есть множество подмножеств алгебры $A = (X, F)$ с операциями

$$X_1, \ldots, X_n \omega = \{x_1, \ldots, x_n \omega \mid \omega \in F_n, \ x_i \in X_i\}.$$

Показано, что если V замкнуто относительно взятия $P(A)$, то V можно задать «полилинейными» тождествами.

В статьях Шейлы Оатс Макдональд [529, 530] содержатся обзоры результатов по конечнобазируемости конечных алгебр. Упоминается, в частности, анонсированный результат Бейкера (K. A. Baker, Notic. Amer. Math. Soc., 1972, **19**, № 1, 691—08—2) о том, что если в многообразии V все алгебры имеют дистрибутивную структуру конгруэнций, то конечные алгебры из V конечнообразуемы. В статьях выдвинута гипотеза о том, что условие дистрибутивности можно ослабить и заменить модулярностью. Недавно С. В. Полин опроверг эту гипотезу и построил пример конечной неассоциативной алгебры над произвольным конечным полем, не являющейся конечнобазируемой, но удовлетворяющей тождеству $(x(yz))=0$.

Инъективные алгебры с дистрибутивными структурами конгруэнций изучались в работе Дея [298]. Показано, что в манимальных многообразиях с этим условием, содержащих неодноэлементную конечную F-алгебру A, причем либо $F\neq\varnothing$, либо A содержит одноэлементную подалгберу, любая алгебра из многообразия вложима в инъективную.

Другие вопросы в многообразиях и квазимногообразиях алгебр изучались в [1], [207, 236, 586, 588, 594, 710—712].

2.2. Свободные произведения алгебр. С изучением многообразий алгебр тесно связано изучение свободных произведений. Т. М. Баранович [21] доказывает теоремы о свободе подалгебр свободной алгебры и о подалгебрах свободных произведений в многообразиях универсальных алгебр, заданных специальными предикатами. Примерами таких многообразий являются группоиды, группоиды с единицей, с разными делениями, лупы и др. В [24] Т. М. Баранович показала, например, что теория свободных разложений в многообразии всех F-алгебр следует из соответствующей теории для группоидов. Аналогичное утверждение верно и для мультиоператорных алгебр. В [128, 129] А. И. Пилатовская перенесла на категории результаты Т. М. Баранович (см., например, [24]) о теориях подалгебр свободных произведений в пересечениях многообразий алгебр. См. также [114].

В работе В. Н. Матуса [115] показано, что подалгебра A свободного произведения $*_i A_i$ алгебр многообразия $\mathfrak{A}_{m,n}$ разлагается в свободное произведение непустых пересечений $A_i\wedge A$ и свободной $\mathfrak{A}_{m,n}$-алгебры. Аналогичное утверждение верно и для многообразия $\mathfrak{B}_{m,n}$.

Вопросам существования свободных произведений амальгам в разных многообразиях алгебр посвящены работы [511, 512]. Свободные разложения в многообразиях мультиоператорных групп, в которых нет нетривиальных групповых тождеств, изучал А. Г. Курош [95]. Доказана шрейеровость таких многообразий и теорема о подгруппе свободного произведения. См. также [94].

2.3. Отношения зависимости в алгебрах. Обширная литература посвящена изучению различных понятий зависимости в алгебрах. Приведем некоторые из них. В книге Кона [85] вводится следующее определение абстрактной зависимости на множестве X: в X задана система подмножеств $\mathcal{D}$, причем $Y\in\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда любое его конечное подмножество лежит в $\mathcal{D}$. Элементы из $\mathcal{D}$ называются независимыми подмножествами, остальные подмножества X называются зависимыми. Скажем, что элемент $x\in X$ зависит от подмножества $Y\subseteq X$, если либо $x\in Y$, либо для некоторого подмножества $Z\subseteq Y$ выполнено $Z\in\mathcal{D}$ и $Z\vee x\notin\mathcal{D}$. Если $\bar{Y}$ — множество элементов, зависящих от $Y\subseteq X$, то Y называется базисом X, если $\bar{Y}=X$. Различные вариации на тему об абстрактной зависимости можно найти в работах Длаба [301—306], см. также [220, 241, 254, 264, 331].

Рассмотрим различные конкретные определения независимости. В работе Гретцера [395] рассмотрена слабая независимость. Пусть V — многообразие алгебр и A есть V-алгебра, $L_1=L_1(V)$ — свободная V-алгебра с одним свободным образующим x. Пусть $a\in A$ и $f: L_1\to A$ — гомоморфизм, $f(x)=a$. Положим $O(a)=\mathrm{Ker}\, f$ и назовем элементы $a_1,\ldots,a_n\in A$ слабо независимыми в V, если для всех $b_1,\ldots,b_n\in B\in V$ таких, что $O(a_i)\subseteq O(b_i)$, из равенства

$$p(a_1,\ldots,a_n)=q(a_1,\ldots,a_n)$$

следует $p(b_1,\ldots,b_n)=q(b_1,\ldots,b_n)$. В [765] показано, что если в многообразии V из слабой независимости $a_1,\ldots,a_n$ следует, что подалгебра, порожденная $a_1,\ldots,a_n$, есть прямое произведение подалгебр, порожденных a_i, то V эквивалентно многообразию всех полумодулей над некоторым полукольцом с единицей.

Приведем определение C-независимости. Подмножество $Y\subseteq A$ называется C-независимым, если любой $y\in Y$ не лежит в подалгебре, порожденной $Y\setminus y$. Наконец, подмножество $Y\subseteq A$ называется M-независимым (независимым в смысле Марчевского), если подалгебра, порожденная Y, свободна в $\mathrm{var}A$ с множеством свободных образующих Y. Обзор результатов по M-независимости, полученных к 1967 году, можно найти в [547]. В основном M-независимость изучалась в работах польских алгебраистов.

Плонка [625] изучал числовые характеристики конечных алгебр с бинарной операцией f. Пусть K — класс таких алгебр и $A\in K$. Положим

$$p(n,K)=\min_{\substack{A\in K\\ i(A)=n}}|A|,\quad q(n,K)=\max_{\substack{A\in K\\ |A|=n}} i(A),$$

где $i(A)$ — максимальное возможное число M-независимых элементов в алгебре A. Вычислены функции p, q для классов K_c всех таких алгебр с константами, K^s — без констант с коммутативной операцией f, K^u — без констант с некоммутативной операцией f. См. также [321, 559, 632].

В работе Файтловича [322] изучается свойство замещения (EIS-свойство). Пусть $A=(X,F)\supseteq B=(Y,F)$ — подалгебра A. Скажем, что $B\in\mathrm{EIS}_A$, если для любых $R,Q,T\subseteq Y$, $R\wedge Q=\varnothing$ из того, что T, $R\vee Q$ независимы в A и T содержится в подалгебре, порожденной R, следует, что $T\vee Q$ независимо в A. Доказано, что $A\in \mathrm{EIS}_A$ тогда и только тогда, когда для любого $n<i(A)+1$ существует такое независимое множество $(a_1, \ldots, a_n)$, что для любого независимого подмножества Y из подалгебры, порожденной $a_1, \ldots, a_{n-1}$, множество $Y\vee a_n$ независимо. По поводу свойства замещения см. также работы [383, 434, 435, 626].

В [548] Марчевский обобщает понятие M-независимости и связывает это обобщение с G-независимостью Гретцера. См. также [549]. В [216] изучаются вопросы связи понятия C-независимости с другими понятиями независимости в декартовых произведениях алгебр. В обзоре [771] Урбаник приводит результаты по v^*-алгебрам, т. е. алгебрам, в которых C-независимость влечёт M-независимость. В работе Джонсона и Марчевского [467] описываются независимости в алгебрах $A=(X, f)$, где f — унарная операция. В [329] изучается независимость в алгебрах с разделяющимися переменными (см. [330] п. 1.1).

§ 3. ТЕОРЕТИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ

3.1. Прямые произведения алгебр. В работе Лося [521] изучаются связи между прямыми произведениями и прямыми суммами алгебр. При этом под прямой суммой $A=B_1\oplus B_2$ понимается алгебра A с подалгебрами B и с проекциями $\rho_i: A\to B_i$, причем 1) $b_i\rho_i=b_i$, где $b_i\in B_i$; 2) если $b_i\in B$, $i=1,2$, то существует и притом единственный такой элемент $a\in A$, что $a\rho_i=b_i$: 3) если B_i' — подалгебра B_i, $i=1, 2$, то

$$B_1'\vee B_2'=B_1'\rho_1^{-1}\wedge B_2'\rho_2^{-1}.$$

Пусть $C_i=B_j\rho_i$, $j\neq i$. Показывается, что $B_1\oplus B_2\simeq B_1\times B_2$ и C_i — минимальная подалгебра B_i. При этом или $B_1\wedge B_2=C_1=C_2$ одноэлементна и это минимальная подалгебра A или $B_1\wedge B_2=\varnothing$. Прямая сумма называется нормальной, если $C_1=C_2$.

Теорема. Пусть в многообразии V задана V-свободная алгебра $L_2=L_2(V)$. Если $L_2\times L_2=L_2\oplus L_2$ есть нормальная прямая сумма алгебр L_2, то в V существуют такие полиномы $f(x)$, $g(x, y)$, что в V выполнены тождества

$$f(x)=f(y), \quad g(x, f(x))=g(f(x), x)=x.$$

Значение $f(x)$ есть одноэлементная подалгебра. Обратно, из существования таких полиномов следует, что в V прямое произведение и сумма совпадают.

Как отмечалось выше, в [355] описаны многообразия, в которых конгруэнции на $A_1\times A_2$ имеют вид $\theta_1\times\theta_2$, где θ_i — конгруэнция на A_i.

Тимм [752] рассматривает класс алгебр V, содержащий алгебру T без подалгебр. Прямое произведение $A_1\times A_2$ алгебр из V называется T-правильным, если существуют вложения $\tau_i: A_i\to A_1\times A_2$, причём

$$T=\operatorname{Im}\tau_1\wedge\operatorname{Im}\tau_2, \quad \tau_i\pi_i=\varepsilon_i,$$

где $\pi_i: A_1\times A_2\to A_i$ — проекции. Показано, что в этом случае следующие условия эквивалентны: 1) T — ретракт любой непустой алгебры $A\in V$; 2) для любых A_1, $A_2\in V$ произведение $A_1\times A_2$ является T-правильным; 3) для любого A из V множества $\operatorname{Hom}(A, T)$, $\operatorname{Hom}(T, A)$ непусты. В работе найдены необходимые и достаточные условия существования в V такой алгебры T, что $\operatorname{Hom}(A, T)$ и $\operatorname{Hom}(T, A)$ одноэлементны.

Фромке [358] изучает представление алгебр в виде подпрямого произведения алгебр A_i, $i\in T$, причём для любого конечного числа $A_1, \ldots, A_n$ таких множителей и любых полиномов $p_1, \ldots, p_n$ существует такой полином p, что $p\equiv p_i$ на A_i. В [813] изучались подпрямо неразложимые унарные алгебр. О подпрямом произведении алгебр см. также [787].

Вопросы существования общих продолжений у двух прямых разложений множеств с отношениями изучались в [591]. В работе Драшковичевой [308] на языке конгруэнции θ_i описывается представление алгебры в виде произведения A/θ_i. Преллер [653] рассматривает вопрос о совпадении в категориях алгебр классического и категорного прямых произведений.

3.2. Структуры подалгебр и конгруэнций алгебр. В работе Искандера [79] найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы для данных структур D_1, D_2, D_3 с заданными подструктурами $\bar{D}_i\subseteq D_i$ и автоморфизмами $\alpha_i: D_i\to D_i$, $\alpha_i^2=\varepsilon_i$, $i=1,2$, существовали бы такие частичные алгебры A_1, A_2, что D_i — структура соответствий на A_i, $\bar{D}_i$ — структура подалгебр A_i, $i=1, 2$, с соответствующей интерпретацией α_i, D_3 — структура соответствий между A_1 и A_2. Кроме того, отмечается, что в общем случае существуют такие полные (т. е. не частичные) алгебры $\bar{A}$, что D_i вкладываются в структуры соответствий.

В [453] найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы система S подмножеств A^n, $n\geqslant 1$, была бы системой подалгебр для некоторой частичной алгебры A. В следующей работе [455] рассматриваются алгебраические структуры D_1, D_2, D_3, причём первые две из них неодноэлементны, и на них заданы инволюции α_1, α_2. Показано, что в этом случае существуют такие алгебры одной сигнатуры A_1, A_2, что D_i изоморфны структурам подалгебр A_i, $i=1,2$, с соответствующей интерпретацией α_i, а D_3 — структура подалгебр $A_1\times A_2$.

Пазини [598] исследовал конгруэнции частичных алгебр. Им найдены необходимые и достаточные условия на структуры D_1, D_2, чтобы они были структурами всех и всех сильных конгруэнций некоторой частичной алгебры. О конгруэнциях в частичных алгебрах см. также [405].

В [797] рассматривается вопрос, для каких кардиналов существуют алгебры этой мощности с условием минимальности для подалгебр. Связи между простотой алгебры и её структурой конгруэнций изучались Пазини в [600]. В работе Амбраст [212] показано, что система отношений C на множестве X является системой конгруэнций некоторой частичной универсальной алгебры на X тогда и только тогда, когда C замкнуто относительно пересечений и C содержит диагональ. При этом операции можно взять конечноместными в том и только в том случае, когда система C индуктивна. Особо рассмотрен случай унарных алгебр.

В работе Стоуна [737] найдены необходимые и достаточные условия существования на данном множестве X универсальной алгебры $A=(X, F)$ с заданной группой подстановок в качестве $\mathrm{Aut}\,A$ и с заданной структурой подалгебр. Лампе [508] рассматривает следующую ситуацию. Имеются группа Γ и алгебраические структуры D_0, D_1, причём D_0 содержит более одного элемента, а в D_1 существует такой элемент $a\neq 0$, что из $a<\bigvee_i x_i$ следует $a\leq x_i$ для некоторого i. Тогда существует такая алгебра A, что $\mathrm{Aut}\,A=\Gamma$, структура подалгебр A изоморфна D_0, а структура конгруэнций — D_1. Более того, для любой полугруппы S с единицей и любой алгебраической решетки D существует такая алгебра A, что $\mathrm{End}\,A\simeq S$, а структура подалгебр изоморфна D. В работе описывается также $\mathrm{End}\,A$, где A — простая унарная алгебра (или полигон).

В [157] Л. А. Скорняков даёт описание алгебр A, в которых для данной конгруэнции f существует дополнение, т. е. такая конгруэнция g, что $f\wedge g=0$, $f\vee g=1$ в структуре конгруэнций на A. Если f и g перестановочны, то, как показано в [609], отсюда вытекает, что

$$A\simeq A/f\oplus A/g.$$

Покрытие T алгебры A назовём связным, если для любых x, $y\in A$ существуют такие подмножества $T_1, \ldots, T_n\in T$, что $x\in T_1$, $y\in T$ и $T_i\wedge T_{i+1}\neq\varnothing$. Отображение h алгебры A в множество подмножеств другой алгебры B назовём связывающим отображением, если 1) $h(a_1)\ldots h(a_n)\,w\subseteq h(a_1\ldots a_n w)$, $w\in F_n\subseteq F$ — сигнатура алгебр; 2) система $h(a)$, $a\in A$ образует связное покрытие B. Положим тогда

$$(A\circ B\mid h)=\{(a, b)\in A\times B\mid b\in h(a)\}$$

и назовём это почти прямым произведением A и B с помощью h. Показывается, что если f, g — ядра проекций на A и B, то $f\vee g=1$, $f\wedge g=0$, и обратно, если имеются такие конгруэнции на алгебре, то они определяют почти прямое разложение этой алгебры с соответствующей интерпретацией f и g.

В заключение этой части отметим, что Берманом [238] описаны унарные алгебры, в которых структуры конгруэнций полумодулярны или атомарны.

3.3. Гомоморфизмы алгебр. В работе Гретцера [394] показано, что данная полугруппа тогда и только тогда изоморфна полугруппе всех эндоморфизмов некоторой простой алгебры, когда она имеет единицу и каждый её элемент либо сократим справа, либо является правым нулём. При этом в доказательстве достаточности предполагается, что алгебра не унарна. Для унарных алгебр показано, что группа автоморфизмов простой унарной алгебры A есть циклическая группа простого порядка p, причём, если $p\neq 1$, то порядок алгебры A равен p.

Зихлер [715] показал, что если X — конечное множество, содержащее не менее пяти элементов, и любая подстановка на X принадлежит полугруппе эндоморфизмов алгебры $A=(X, F)$, то $\mathrm{End}\,A$ либо состоит из всех подстановок X и всех постоянных отображений, либо из всех преобразований X.

В работе Йонсона [468] рассмотрена следующая ситуация. Имеется группа G преобразований множества X и дан некоторый кардинал m. Алгебра $A=(X, F)$ называется m-арной, если все операции из F зависят менее чем от m аргументов (операции могут быть и бесконечноместными). Рассмотрим два свойства группы G:

$\alpha_m(G)$: группа G является группой автоморфизмов алгебры $A=(X, F)$, где A есть m-арная алгебра;

$\beta_m(G)$: если φ — отображение множества X в себя, причем для всякого подмножества $Y\subseteq X$ мощности меньше m существует такое $\psi\in G$, что $\psi|_Y=\varphi|_Y$, то $\varphi\in G$.

В работе показано, что $\alpha_m(G)\Rightarrow\beta_{m+1}(G)$. Если $m\neq 2$, то $\beta_m\Rightarrow\alpha_m$; если $m\geqslant\aleph_0$, то $\alpha_m\Leftrightarrow\beta_m$. В работе Плонки [619] модифицировано условие β_m и найдены необходимые и достаточные условия того, что $G=\mathrm{Aut}(X, F)$ для некоторой m-арной алгебры $A=(X, F)$.

Близкие вопросы изучались в работе Гулда [387]. Показано, что для группы G перестановок множества X следующие условия эквивалентны: 1) G есть группа автоморфизмов алгебры $A=(X, F)$ с операциями ограниченной арности; 2) существует такое n, что выполнено условие β_n; 3) $G=\mathrm{Aut}\,(X, F)$, где F конечно; 4) $G=\mathrm{Aut}\,(X, F)$, где F состоит из одного элемента.

Ряд работ посвящен изучению автоморфизмов унарных алгебр. В. С. Фейнберг [183, 184] рассмотрел алгебры (X, f) с одной унарной операцией f и с транзитивным действием группы автоморфизмов. Доказано, что если такие алгебры имеют цикл конечной длины, то любой цикл имеет ту же длину и алгебра однозначно определяется длинами и числом циклов. В противном случае мощность $f^{-1}(x)$ не зависит от x и алгебра однозначно характеризуется числом циклов и мощностью $f^{-1}(x)$. В [790] изучается группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} A$, где $A=(X, F)$ — унарная алгебра, причём существует такая группа на множестве X, что $\operatorname{Aut} A$ содержит множество правых сдвигов этой группы. Показано, что в этом случае $\operatorname{Aut} A$ есть сплетение подгруппы, порожденной сдвигами, лежащими в F, и группы подстановок S_α всех ординалов, меньших α для некоторого α. В качестве следствия получается, что для любой группы G существует такая простая алгебра A, что $\operatorname{End} A=\operatorname{Aut} A=G$.

В работе Лустига [527] изучаются отображения унарных алгебр $f:A\to B$, являющихся одновременно упорядоченными множествами. Рассматривается вопрос о том, когда все изотонные отображения являются гомоморфизмами.

Внутренние автоморфизмы алгебр изучались в работе Чаканя [286]. Под внутренним автоморфизмом алгебры $A=(X, F)$ понимается автоморфизм вида $x^\alpha=xb_2\ldots b_n\mu$, где $x_1\ldots x_n\mu$ — полином, причём для любых $b_2,\ldots,b_n\in X$ отображение x^α, указанное выше, является автоморфизмом. В работе отмечается, что внутренние автоморфизмы образуют нормальный делитель в группе $\operatorname{Aut} A$, причём, если среди классов конгруэнций A есть единственная подалгебра, то она инвариантна относительно внутренних автоморфизмов. Кроме того, показывается, что в группах получаются таким образом действительно внутренние групповые автоморфизмы. В [651] изучались трансляции φ алгебры $A=(X, \omega)$ с одной операцией ω, т. е. для всех i, $1\leqslant i\leqslant n$, и всех $a_1,\ldots,a_n\in A$ выполнены равенства

$$(a_1\ldots a_n\omega)^\varphi=a_1,\ \ldots,\ a_i^\varphi\ldots a_n\omega.$$

В работе найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы трансляция являлась эндоморфизмом алгебры. A. В частности, если операция ω идемпотентная, то любая трансляция является эндоморфизмом. В работе Ж. Плонки [646] автоморфизмы указанного вида, где ω — любая основная операция, называются расщепляющимися. Показано, что множество $S_p(A)$ всех таких автоморфизмов образует нормальный делитель в $\operatorname{Aut} A$. Пусть $F(A)$ — множество всех элементов, выделенных нульарными операциями, и множество всех значений $f(x_1,\ldots,x_n)$, где f есть n-арный полином с $n\geqslant 2$. Нетрудно видеть, что $F(A)$ является подалгеброй и если $F(A)=A$, то $S_p(A)$ — абелева группа. Показано, что если арность операций из F ограничена, то при $F(A)=A$ экспонента абелевой группы $S_p(A)$ конечна. Обратно, любую абелеву группу конечной экспоненты можно представить в виде $S_p(A)$ для некоторой алгебры A с условием $A=F(A)$.

Ряд работ посвящен изучению слабых гомоморфизмов алгебр. Напомним, что отображение $h:(X, F)\to(Y, G)$ называется слабым гомоморфизмом алгебр, если задан эпиморфизм клонов

полиномов $X(F)\to Y(G)$, $f\to f^*$, причём

$$f^*\cdot h^n=h\cdot f,\quad f\in \overline{X}_n(F).$$

Если $*$ и h являются биекциями, то h называется слабым изоморфизмом. В [381] показано, что в группе с тождеством $[x^2, y]=1$ любой слабый автоморфизм является либо антиавтоморфизмом, либо автоморфизмом. В работе Урбаника [770] показано, что если $A=(X, F)$ — конечная алгебра порядка n, то каждая конгруэнция алгебры $(X, X_n(A))$ является конгруэнцией на A. Однако существует такая алгебра A порядка $n=2$, что слабый автоморфизм $(X, X_n(A))$ не является слабым автоморфизмом A.

Слабые автоморфизмы линейных пространств и унарных алгебр изучались в [313]. Глазеком [373] дано описание слабых автоморфизмов двух и четырехэлементных областей целостности. Доказано, в частности, что у областей целостности характеристики нуль в группе всех слабых автоморфизмов группа автоморфизмов имеет индекс два. По слабым автоморфизмам см. также [702, 622].

Гомоморфизмы частичных алгебр и алгебр с многозначными операциями изучались в [432, 608, 724].

В работе Внука [801] изучались пренебрежимые автоморфизмы алгебр, т. е. такие автоморфизмы φ, что

$$(x_1\ldots x_nf)^\varphi=x_1^\varphi\ldots x_{i-1}^\varphi x_i x_{i+1}^\varphi\ldots x_n^\varphi f$$

для всех $1\leqslant i\leqslant n$, $f\in F_n\subseteq F$. Показано, что группа всех таких автоморфизмов есть прямое произведение групп подстановок на множествах классов эквивалентности следующего отношения: $a\sim b$ тогда и только тогда, когда $a=b^\varphi$ для некоторого пренебрежимого автоморфизма φ.

Файтлович [326] по алгебре $A=(X, F)$ строит алгебру гомоморфизмов (клон централизатора в смысле Кона [85])

$$A^*=(X, G),\quad G=(G_n=\operatorname{Hom}(A^n, A)).$$

В статье приводятся необходимые и достаточные условия того, чтобы $A^{**}=A$. В частности, это оказывается выполненным, если A — относительно свободная алгебра. И. И. Валуцэ [47] изучал алгебры $A=(X, F)$ с нульарной операцией e, причём в алгебрах выполнены тождества

$$xe\ldots e\omega_0=exe\ldots e\omega_0=\ldots=e\ldots ex\omega_0=x$$

для некоторой операции $\omega_0\in F$. Пусть L — свободная алгебра такого многообразия с базой свободных образующих X,

$$B=\{\alpha\in\operatorname{End} L\,|\,|X^\alpha|<\infty,\ X^\alpha\ni e\}.$$

Тогда B превращается в F-алгебру $(B, F\vee\circ)$, где $\circ$ произведение эндоморфизмов. Изучаются односторонние идеалы $(B, \circ)$, являющиеся подалгебрами (B, F). Показано, что структура всех подалгебр L изоморфна структуре левых идеалов $(B, F \vee \circ)$, структура вполне характеристичных подалгебр L — структуре всех двусторонних идеалов $(B, F \vee \circ)$.

Ряд работ посвящен изучению гомологических свойств полигонов над моноидами, т. е. алгебр с моноидом унарных операций. Л. А. Скорняков [155] описал моноиды, над которыми все полигоны проективны (соответственно инъективны). В работе М. П. Дорофеевой [69] описываются инъективные и слабо инъективные полигоны над коммутативным наследственным моноидом. Указаны связи между инъективностью, делимостью полигонов и наследственностью самого моноида.

Исбелл [448] изучал доминионы D подалгебры A алгебры B по отношению к множеству гомоморфизмов T из B в некоторую алгебру C. По определению

$$D=\{d \in B \mid \forall (f, g \in T)[(f|_A = g|_A) \Rightarrow f(d)=g(d)]\}.$$

В частности, описываются эпиморфные расширения алгебр.

3.4. Разные вопросы. Ю. М. Рябухин [149—151] развивает теорию радикалов в Ω-группах. См. также статью Л. А. Скорнякова [156].

Ряд работ посвящен изучению пучков универсальных алгебр. Так, в [740] рассматривается на алгебре $A=(X, F)$ структура ее конгруэнций $L(A)$. Собственная конгруэнция $\theta \in L(A)$ называется неразложимой, если из $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \subseteq \theta$ следует либо $\varphi_1 \subseteq \theta$, либо $\varphi_2 \subseteq \theta$. Предположим, что $L(A)$ дистрибутивна и S — множество всех неразложимых конгруэнций. Если в S ввести топологию, взяв в качестве базы открытых множеств подмножества

$$S_\theta = \{\varphi \in S \mid \theta \not\subseteq \varphi\}, \quad \theta \in L(A),$$

то получается на S топологическое пространство, которое обозначается через $\operatorname{Spec} A$. Изучаются пучки универсальных алгебр на $\operatorname{Spec} A$. См. также работы [294, 805].

Различные виды расширений алгебр рассматриваются в [433, 434, 504, 505] и др.

§ 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ АЛГЕБР

Обзор основных изучаемых «неклассических» алгебр приведён в книге А. Г. Куроша [97]. В настоящем обзоре мы коснёмся лишь ассоциативов, n-групп, (m, n)-колец, систем Менгера и алгебр, возникающих в логике — монадические, цилиндрические и другие.

4.1. Ассоциативы, n-группы, (m, n)-кольца и их обобщения. Ассоциативом, или n-полугруппой, называется множество с одной n-арной операцией $x_1 \ldots x_n$, являющейся ассоциативной,

т. е.

$$(x_1 \ldots x_n) x_{n+1} \ldots x_{2n-1} = x_1 \ldots x_{i-1} (x_i \ldots x_{i+n-1}) x_{i+n} \ldots x_{2n-1}$$

для всех i. Ассоциатив A называется n-группой, если для всех $a_1, \ldots, a_n \in A$ и любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, существует и притом единственный такой $x_i \in A$, что

$$a_1 \ldots a_{i-1} x_i a_i \ldots a_{n-1} = a_n.$$

Как отмечено, например, в [97] для любой n-группы A существует такая группа $A^* \supset A$, что для $a_1, \ldots, a_n \in A$ произведение $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ есть результат применения операции в A. При этом A порождает A^* и в A^* существует такой нормальный делитель A_0, что A^*/A_0 — циклическая группа порядка $n-1$ и A есть смежный класс, порождающий A^*/A_0. Можно показать, что A^* универсальная группа, содержащая A (см. [13]).

В [378] показано, что n-группу A можно задать как n-полугруппу, в которой для любого $x \in A$ существует такой элемент $\bar{x} \in A$, что для всех $y \in A$ выполнено

$$\bar{x} x \ldots x y = y x \ldots x \bar{x} = y,$$

$$x \bar{x} \ldots x y = y x \ldots \bar{x} x = y.$$

Дан критерий сводимости n-группы к m-группе, где $n=m+k(m-1)^2$, $k \geqslant 1$. Показано, что если n-группа имеет алгебраическую константу, то она сводима к обычной группе (2-группе).

В [13] показано, что n-подгруппа свободной n-группы либо свободна, либо имеет вид

$$A = k + (n-1)\mathbf{Z}, \quad 1 < k < n-2, \quad (k, n-1) = 1,$$

с n-арной операцией сложения. В [568] доказано, что конгруэнции на n-группах перестановочны, причём если A вложена в A^*, то структура конгруэнций A изоморфна структуре подгрупп A_0, инвариантных относительно отображений $x \to axa^{-1}$, $a \in A$. Любая конгруэнция на A определяется своим классом эквивалентности. Показано также, что две n-группы A и B можно так вложить в третью n-группу C, чтобы $|A \wedge B| < 1$. Структуры n-подгрупп изучались Тиммом [753]. О топологических n-группах см. [285, 593], см. также [283].

Приведём теперь определение (m, n)-кольца. Это алгебра $A=(X, f, g)$ с двумя операциями f и g, причём (X, f) есть коммутативная $(m+1)$-группа, а (X, g) является $(n+1)$-полугруппой. При этом для любого $0 < i \leqslant n$ выполнены тождества дистрибутивности

$$x_0 \ldots x_{i-1} (y_0 \ldots y_m f) x_{i+1} \ldots x_n = \ldots (x_0 \ldots x_{i-1} y_j x_{i+1} \ldots x_n g) \ldots f.$$

В работе Чупоны [199] показано, что (m, n)-кольцо A можно вложить в такое ассоциативное кольцо R, что

$$x_0 \ldots x_m f = x_0 + \ldots + x_m,$$

$$x_0 \ldots x_n g = x_0 \ldots x_n$$

для всех $x_i \in A$.

В [282, 284] изучаются (m, n)-кольца A с нулем, т. е. с нульарной операцией 0, причем для всех i имеют место равенства

$$x_0 \ldots x_{i-1} 0 x_{i+1} \ldots x_n = 0.$$

Подмножество $J \subseteq A$ называется $(i+1)$-идеалом (m, n)-кольца A, если J является подгруппой A и $A^i J A^{n-i} \subseteq A$. Идеалом называется подмножество, являющееся $(i+1)$-идеалом для всех i. Показывается, что в (m, n)-кольце с нулем все конгруэнции идеальны. Строится теория радикальных и примарных (m, n)-колец. В [284] показывается, что любая (m, n)-область с нулем может быть вложена в единственное минимальное (m, n)-поле.

Различным обобщениям теории радикала Джекобсона на $m\Omega$-почти кольца и связанным с этим структурным теоремам посвящены работы С. В. Полина [131, 132].

4.2. Системы Менгера, Ω-кольцоиды, алгебраические теории. Под Ω-системой Менгера $A = (A_j \mid j \in J \subseteq \mathbf{N})$ понимается множество Ω-алгебр A_j, причем $a_0, \ldots, a_{j-1} \in A_i$, $b \in A_j$ сопоставлен элемент $a_0 \ldots a_{j-1} b \in A_i$. При этом выполняются следующие тождества:

$$a_0 \ldots a_{j-1}(b_0 \ldots b_{i-1} c) = (a_0 \ldots a_{j-1} b_0) \ldots (a_0 \ldots a_{j-1} b_{i-1})\, c;$$

$$a_0 \ldots a_{j-1}(b_1 \ldots b_n \omega) = (a_0 \ldots a_{j-1} b_1) \ldots (a_0 \ldots a_{j-1} b_n)\, \omega;$$

$$a_0 \ldots a_{j-1} 0 = 0,$$

где 0 — алгебраическая константа, $\omega \in \Omega_n$. Если $\Omega = \varnothing$, то получается обычное определение системы Менгера, или клона. Если $B = (X, \Omega)$ — некоторая алгебра, то множество $O_n(X)$ всех отображений $f: X^n \to X$ является Ω-алгеброй, если положить

$$(f_1 \ldots f_k \omega)(x_1, \ldots, x_n) = [(f_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots f_k(x_1, \ldots, x_n)]\, \omega,$$

где

$$f_1, \ldots, f_k \in O_n(X), \quad \omega \in \Omega_k, \quad x_i \in X.$$

Тогда

$$O(X) = \{O_n(X) \mid n \in \mathbf{N}\}$$

является Ω-системой Менгера, если в качестве $f_0 \ldots f_{j-1} g$ взять операцию суперпозиции отображений. В работе Я. В. Хиона [194] показано, что любую Ω-систему Менгера можно вложить в некоторую систему $O(X)$ для некоторой алгебры $B = (X, \Omega)$.

Получены необходимые и достаточные условия изоморфности данной системы системе $O(X)$. Различным видам плотных вложений систем Менгера посвящены работы Я. Хенно [191—193]. См. также [56—57], [173—175, 177].

Если $A = A_n$, то A называется $(n+1)$-местной алгеброй Менгера. В работе Скала [722] предполагается, что операция $b_0 \ldots b_n$ является квазигрупповой. В A вводится операция

$$a * b = ab \ldots b.$$

Показывается, что таким образом получается группа $(A, *)$. Изучается связь между системой A и группой $(A, *)$. В частности доказывается, что порядок подсистемы в A делит порядок системы. Рассматриваются возможные значения для порядка системы $|A|$.

Системы Менгера или клоны связаны с многообразиями алгебр (см., например, [587]) и с алгебраическими теориями в смысле Ловера (см., например, [680, 814]). Под теорией понимается категория T, объектами которой являются натуральные числа и нуль, причём $n > 0$ есть произведение n единиц 1. Тогда T-алгеброй называется функтор X из T в категорию множеств S, сохраняющий прямые произведения. При этом морфизму $f: n \to 1$ соответствует n-арная операция

$$X(f): X(n) = X(1)^n \to X(1).$$

Коммутативность диаграмм в T задает тождество в T-алгебрах. При этом под гомоморфизмом алгебр понимается естественное преобразование функторов. В [814] показывается, что для любого бесконечного множества $J \subseteq \mathbf{N}$, $J \ni 1$ существует такая теория T, что каждая операция $f: n \to 1$ из T существенно зависит на некоторой T-алгебре от всех n своих аргументов, где $n \in J$. Обратно, если $n \in J$, то существует такая операция $f: n \to 1$ из T, что для некоторой T-алгебры X операция $X(f)$ является существенной n-арной операцией

4.3. Монадические, цилиндрические, полиадические алгебры, алгебры Лукасевича. Ряд работ посвящен алгебрам, возникающим в логике. Приведём соответствующие определения. Квантором на булевой алгебре A называется отображение $\exists : A \to A$, причём

$$\exists 0 = 0, \quad p \leqslant \exists p,$$

$$\exists (p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q.$$

Монадической алгеброй называется булева алгебра с квантором. Цилиндрической алгеброй называется булева алгебра A с множеством переменных I, причем заданы отображения c из I в множество кванторов на A и $d: I^2 \to A$. При этом требуется, чтобы

$$1)\ c(h)\, c(j) = c(j)\, c(h);$$

2) $d(i, i)=1$;

3) $d(i, j)=c(k)[d(i, k)\wedge d(j, k)]$;

4) $c(i)[p\wedge d(i, k)]\wedge c(i)[p'\wedge d(i, k)]=0$;

где $i\neq k$, $j\neq k$. Полиадическая алгебра — это тройка $(A, I, S, \exists)$, где A — булева алгебра, I — множество переменных, S — гомоморфизм моноидов

$$S: \mathrm{Hom}(I, I)\to \mathrm{End}\, A,$$

$\exists$ — отображение множества подмножеств I в кванторы на A. При этом выполняются следующие условия:

$$\exists(\varnothing)\, p=p; \quad \exists(J\vee K)=\exists(J)\,\exists(K);$$

если $J\subset I$ и $\sigma, \tau\in\mathrm{Hom}(I, I)$, причем $\sigma=\tau$ на $I\setminus J$, то $S(\sigma)\exists(J)=S(\tau)\exists(J)$; если $J\subseteq I$ и $\tau\in\mathrm{Hom}(I, I)$ взаимно однозначно на $\tau^{-1}(J)$, то $\exists(J)S(\tau)=S(\tau)\exists(\tau^{-1}(J))$.

Наконец, под n-валентной алгеброй Лукасевича понимается дистрибутивная структура A с инволютивным антиавтоморфизмом N (интерпретируемым как отрицание) и операциями σ_i, $i=1, \ldots, n-1$ (называемыми хризипповыми морфизмами). При этом выполняются следующие соотношения:

$$\sigma_i 0=0; \quad \sigma_1 1=1;$$

$$\sigma_i x\wedge N\sigma_i x=0; \quad \sigma_i x\vee N\sigma_i x=1;$$

$$\sigma_h\sigma_k x=\sigma_k x; \quad \sigma_i Nx=N\sigma_j x, \quad i+j=n;$$

$$\sigma_1 x\subset\sigma_2 x\subset \ldots \subset\sigma_n x;$$

из $\sigma_i x=\sigma_i y$ для всех i следует $x=y$. Алгебра Лукасевича называется центрированной, если существуют $n-2$ элемента $a_2, \ldots, a_{n-1}$, называемых центрами алгебры, с условиями

$$\sigma_i a_j=0, \quad 1\leqslant i\leqslant n-j-1;$$

$$\sigma_i a_j=1, \; n-j\leqslant i\leqslant n-1.$$

Основы теории таких алгебр изложены в книге Халмоша «Алгебраическая логика» (Chelsea, 1962). Кроме того, недавно появилась книга [422]. См. также работы [248] (алгебры Лукасевича), [278] (цилиндрические алгебры), [423, 554, 524, 525] (монадические и цилиндрические алгебры), [554, 610—612] (полиадические алгебры) и др. В целом с алгебраической точки зрения не все эти работы отличаются большой глубиной.

Близкие системы рассматриваются в [270]. Это алгебры Де Моргана и Клини. Дистрибутивная структура с нулём и единицей называется алгеброй Де Моргана, если в структуре A

задана унарная операция $\sim$, причём

$$\sim\sim x=x; \quad \sim(x\vee y)=(\sim x)\wedge(\sim y).$$

Если дополнительно $x\wedge(\sim x)\leqslant y\vee(\sim y)$ для всех $x, y\in A$, то A называется алгеброй Клини. В работе описываются инъективные алгебры Де Моргана и Клини.

В [525] изучаются тождества в монадических алгебрах с квантором C. Показывается, что любое тождество в монадической алгебре с встречающимися переменными $x_0, \ldots, x_{n-1}$ эквивалентно конечному объединению стандартных тождеств вида

$$\forall x_0 \ldots \forall x_{n-1}[(\varepsilon_0 C\beta_0)\cdot(\varepsilon_1 C\beta_1)\cdot \ldots \cdot(\varepsilon_{n-1}C\beta_{n-1})=0],$$

где $x_0, \ldots, x_{n-1}$ — все переменные, входящие в формулу, $\varepsilon_i=\pm 1$ а β_i имеет вид

$$(\zeta_0 x_0)\cdot(\zeta_1 x_1)\cdot\ldots\cdot(\zeta_{n-1}x_{n-1}), \quad \zeta_j=\pm 1.$$

В работе найдены необходимые и достаточные условия эквивалентности двух стандартных тождеств.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Абакумов А. И.**, Палютин Е. А., Тайцлин М. А., Шишмарёв Ю. Е., Категоричные квазимногообразия. Алгебра и логика, 1972, **11**, № 1, 3—38 (РЖМат, 1972, 9А264)
2. **Абрган И.**, О максимальных подалгебрах в унарных алгебрах. Mat. čas., 1974, **24**, № 2, 113—128 (РЖМат, 1974, 12А236)
3. **Акатаев А. А.**, О многообразиях $\mathfrak{A}_{m,n}$. Алгебра и логика, 1970, **9**, № 2, 127—136 (РЖМат, 1970, 12А257)
4. —, Аксиоматический ранг многообразия $\mathfrak{A}_{n-1,n}$. Алгебра и логика, 1971, **10**, № 2, 125—134 (РЖМат, 1972, 1А534)
5. —, Смирнов Д. М., Решетки подмногообразий многообразия алгебр $\mathfrak{A}_{m,n}$. Алгебра и логика, 1968, 7, № 1, 5—25 (РЖМат, 1969, 4А263)
6. **Алиев И. Ш.**, К теории битернарных алгебр. Алгебра и логика, 1965, **4**, № 5, 5—16 (РЖМат, 1967, 4А229)
7. —, О наименьшем многообразии симметрических алгебр. Алгебра и логика, 1966, 5, № 6, 5—14 (РЖМат, 1967, 8А198)
8. **Алмагамбетов Ж. А.**, Разрешимость элементарной теории некоторых классов нильпотентных алгебр. Алгебра и логика, 1965, **4**, № 6, 5—14 (РЖМат, 1967, 6А202)
9. **Альсевич В. В.**, Элементы единственности топологической мультигруппы. Докл. АН БССР, 1970, **14**, № 3, 201—203 (РЖМат, 1970, 12А260)
10. **Андрунакиевич В. А.**, Марин В. Г., Мультиоператорные линейные алгебры без нильпотентных элементов. Докл. АН СССР, 1971, **197**, № 4, 746—749 (РЖМат, 1971, 8А266)
11. —, —, Мультиоператорные алгебры без нильпотентных элементов. В сб. «Мат. исследования». Т. 6, вып. 2, Кишинев, Штиинца, 1971, 3—21 (РЖМат, 1971, 11А328)
12. **Артамонов В. А.**, Клоны полилинейных операций и мультиоператорные алгебры. Успехи мат. наук, 1969, **24**, № 1, 47—59 (РЖМат, 1969, **9А206**)

13. —, Свободные n-группы. Мат. заметки, 1970, **8**, № 4, 499—507 (РЖМат, 1971, 4А286)
14. —, Нильпотентность, проективность, свобода. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1971, № 5, 50—53 (РЖМат, 1972, 2А424)
15. —, Полупростые многообразия мультиоператорных алгебр. I. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1971, № 11, 3—10 (РЖМат, 1972, 3А272)
16. —, Полупростые многообразия мультиоператорных алгебр. II. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1971, № 12, 15—21 (РЖМат, 1972, 6А334)
17. —, Цепные многообразия линейных алгебр. Тр. Моск. мат. о-ва, 1973, **29**, 51—78 (РЖМат, 1974, 1А314)
18. —, О многообразиях ограниченных алгебр Ли. Сиб. мат. ж., 1974, № 6, 1197—1212 (РЖМат, 1975, 5А312)
19. **Байрамов Р. А.**, Об эндоморфизмах некоторых алгебраических систем. Докл. АН АзербССР, 1968, **24**, № 11, 3—7 (РЖМат, 1969, 10А155)
20. —, О решетках подалгебр некоторых алгебр. Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-техн. и мат. н., 1971, № 2, 149—156 (РЖМат, 1972, 4А359)
21. **Баранович Т. М.**, Свободные разложения в некоторых примитивных классах универсальных алгебр. Сиб. мат. ж., 1966, **7**, № 6, 1230—1249 (РЖМат, 1967, 11А264)
22. Универсальные алгебры. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1966 (Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР), М., 1968, 109—136 (РЖМат, 1968, 9А254)
23. —, О некоторых теоремах в теории мультиоператорных алгебр. Сиб. мат. ж., 1972, **13**, № 1, 6—16 (РЖМат, 1972, 5А319)
24. —, О свободных разложениях алгебр с бинарной и произвольными операциями. Тр. Моск. мат. об-ва, 1973, **29**, 79—85 (РЖМат, 1973, 12А320)
25. —, Бургин М. С., Линейные Ω-алгебры. Успехи мат. наук, 1975, 30, № 4, 61—106 (РЖМат, 1976, 1А349)
26. **Белеградек О. В.**, Тайцлин М. А., Два замечания о многообразиях $\mathfrak{A}_{m,n}$. Алгебра и логика, 1972, **11**, № 5, 501—508 (РЖМат, 1973, 8А275)
27. **Больбот А. Д.**, О многообразиях Ω-алгебр. Алгебра и логика, 1970, **9**, № 4, 406—414 (РЖМат, 1971, 4А288)
28. **Бравцев А. Ф.**, О конгруэнциях прямого произведения. Алгебра и логика, 1967, **6**, № 1, 39—43 (РЖМат, 1967, 9А182)
29. **Будкин А. И.**, О полумногообразиях и шрейеровых многообразиях унарных алгебр. Мат. заметки, 1974, **15**, № 2, 263—270 (РЖМат, 1974, 6А409)
30. —, Горбунов В. А., К теории квазимногообразий алгебраических систем. Алгебра и логика, 1975, **14**, № 2, 123—142 (РЖМат, 1975, 12А308)
31. **Бургин М. С.**, Теорема о свободе в некоторых многообразиях линейных Ω-алгебр и Ω-колец. Успехи мат. наук, 1969, **24**, № 1, 27—38 (РЖМат, 1969, 9А207)
32. —, Группоид многообразий линейных Ω-алгебр. Успехи мат. наук, 1970, **25**, № 3, 263—264 (РЖМат, 1970, 12А258)
33. —, Перестановочные произведения линейных Ω-алгебр. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 5, 977—999 (РЖМат, 1971, 4А289)
34. —, Сплетения линейных Ω-алгебр. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1971, № 9, 9—17 (РЖМат, 1972, 1А542)
35. —, Свободные фактор алгебры свободных линейных Ω-алгебр. Мат. заметки, 1972, **11**, № 5, 537—544 (РЖМат, 1972, 8А398)
36. —, Свободные топологические группы и универсальные алгебры. Докл. АН СССР, 1972, **204**, № 1, 9—11 (РЖМат, 1972. 9А260)
37. —, Линейные Ω-алгебры и теорема о свободе. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1972, № 5, 72—77 (РЖМат, 1973, 2А291)
38. —, Шрейеровы многообразия линейных алгебр. Успехи мат. наук, 1972, 27, № 5, 227—228, (РЖМат, 1973, 2А295)
39. —, Подалгебры свободных произведений линейных Ω-алгебр. Тр. Моск. мат. об-ва, 1973, **29**, 101—117 (РЖМат, 1974, 1А312)

40. —, Топологические алгебры с непрерывными системами операций. Докл. АН СССР, 1973, **213**, № 3, 505—508 (РЖМат, 1974, 3А243)
41. —, Свободные произведения линейных Ω-алгебр. Успехи мат. наук, 1973, **28**, № 6, 195 (РЖМат, 1974, 7А433)
42. —, S-ограниченные произведения линейных алгебр. В сб. «Мат. исследования». Т. 9, вып. 3(33), Кишинев, Штиинца, 1973, 39—52 (РЖМат, 1975, 1А372)
43. —, Закон сокращения и достижимые классы линейных Ω-алгебр. Мат. заметки, 1974, **16**, № 3, 467—478 (РЖМат, 1975, 1А373)
44. —, Шрейеровы многообразия линейных Ω-алгебр. Мат. сб., 1974, **93**, № 4, 554—572 (РЖМат, 1974, 9А351)
45. —, Артамонов В. А., Некоторые свойства подалгебр в многообразиях линейных Ω-алгебр. Мат. сб., 1972, **87**, № 1, 67—82 (РЖМат, 1972, 5А318)
46. **Вагнер В. В.**, К теории регулярных бинарных отношений между элементами частичных оперативов. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, № 4, 26—39 (РЖМат, 1967, 10А225)
47. **Валуцэ И. И.**, Идеалы алгебры эндоморфизмов свободной универсальной алгебры. В сб. «Мат. исследования». Т. 3, вып. 2, Кишинев, 1968, 104—112 (РЖМат, 1969, 5А264)
48. —, Некоторые проблемы теории соответствий универсальных алгебр. В сб. «Итоги научн. исслед. Кишинев. политехн. ин-та за 1973 г.». Кишинев, 1974, 194—195 (РЖМат, 1974, 10А309)
49. **Виноградов А. А.**, Минимальные квазимногообразия колец и алгебр отношений. Алгебра и логика, 1967, **6**, № 4, 3—10 (РЖМат, 1968, 9А257)
50. **Витенько И. В.**, Николаенко В. В., Об одном многообразии алгебр. Сиб. мат. ж., 1974, **15**, № 2, 430—433 (РЖМат, 1974, 7А431)
51. —, —, О системах тождеств в алгебрах с унарной операцией. В сб. «Материалы 1-й обл. конф. молодых ученых Закарпатья, посвящ. 50-летию образования СССР. Сек. мат. н.». Ужгород. ун-т, Ужгород, 1972, 126—129 (рукопись деп. в ВИНИТИ 17 июля 1974 г., № 1974—74 Деп.) (РЖМат, 1974, 11А375)
52. **Глускин Л. М.**, Позиционные оперативы. Мат. сб., 1965, **68**, № 3, 444—482 (РЖМат, 1969, 10А156)
53. —, О простых оперативах. Вестн. Харьковск. ун-та, 1970, № 53, (Сер. мех.-мат.), вып. **34**, 38—51 (РЖМат, 1970, 10А217)
54. —, Об оперативах Риса. В сб. «Мат. исследования», т. 5, вып. 4, Кишинев, АН Молд. ССР, 1970, 35—44 (РЖМат, 1971, 5А355)
55. —, Минимальные идеалы оператива. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1970, **7**, № 3, 56—60 (РЖМат, 1971, 5А357)
56. —, Об алгебрах функций. Докл. АН УССР, 1971, **А**, № 5, 394—396 (РЖМат, 1971, 9А261)
57. —, Мультипликативные отображения алгебр функций. Докл. АН УССР, 1971, **А**, № 9, 771—773 (РЖМат, 1972, 1А530)
58. —, Шварц В. Я., К теории ассоциативов. Мат. заметки, 1972, **11**, № 5, 545—554 (РЖМат, 1972, 8А401)
59. —, Элькин Л. Н., Позиционные оперативы с обратимыми элементами. Мат. сб., 1973, **92**, № 3, 420—429 (РЖМат, 1974, 3А246)
60. **Глухов М. М.**, О свободных произведениях и алгоритмических проблемах в R-многообразиях универсальных алгебр. Докл. АН СССР, 1970, **193**, № 3, 514—517 (РЖМат, 1970, 12А259)
61. —, Свободные разложения и алгоритмические проблемы в R-многообразиях универсальных алгебр. Мат. сб., 1971, **85**, № 3, 309—338 (РЖМат, 1971, 10А125)
62. —, О некоторых алгоритмических проблемах и свободных произведениях в R-многообразиях линейных Ω-алгебр. (Рукопись деп. в ВИНИТИ, 29 авг. 1973 г., № 6697—73 Деп.) (РЖМат, 1974, 2А313)
63. **Деревеняк О.**, Структурно упорядоченные дистибутивные Ω-группы с базисом. Mat. čass., 1975, **25**, № 1, 11—21 (РЖМат, 1975, 7А442)

64. **Дидидзе Ц. Е.**, Свободные суммы Ω-алгебр с объединенной Ω-подалгеброй. Сообщ. АН ГрузССР, 1968, **50**, № 3, 531—534 (РЖМат, 1969, 2А388)
65. **Дихтярь М. Б.**, Конгруэнции частичных 𝔓-оперативов, ассоциированных с упорядоченными множествами. В сб. «Упорядоченные множества и решетки», вып. 1, Саратов, Саратов. ун-т, 1971, 3—10 (РЖМат, 1972, 3А273)
66. —, К общей теории частичных 𝔓-оперативов. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1972, № 2, 33—43 (РЖМат, 1972, 6А327)
67. —, Гомоморфизмы и конгруэнции частичных 𝔓-оперативов. В сб. «Исслед. по алгебре», вып. 2, Саратов, Саратов. ун-т, 1970, 3—22 (РЖМат, 1974, 3А241)
68. —, Прямые произведения частичных 𝔓-оперативов. В сб. «Исслед. по алгебре», вып. 3, Саратов, Саратов. ун-т, 1973, 9—13 (РЖМат, 1974, 8А291)
69. **Дорофеева М. П.**, Инъективные и плоские полигоны над наследственными моноидами. Вестн. Моск. ун-та, мат., мех., 1973, № 1, 47—51 (РЖМат, 1973, 6А332)
70. —, О некоторых свойствах категорий полигонов. Редколлегия Сиб. мат. ж., Новосибирск, 1973. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 15 марта 1973 г., № 5652—72 деп.) (РЖМат, 1973, 8А278)
71. **Жемберы И.**, Характеризация операций в алгебрах при помощи частично упорядоченных множеств. Mat. čas., 1974, **24**, № 3, 277—281 (РЖМат, 1975, 2А370)
72. **Житомирский Г. И.**, Стабильные бинарные отношения на универсальных алгебрах. Мат. сб., 1970, **82**, № 2, 163—174 (РЖМат, 1970, 10А218)
73. —, О расширениях универсальных алгебр. Успехи мат. наук, 1974, **29**, № 6, 169—170 (РЖМат, 1975, 5А304)
74. **Иванов И. С.**, Свободные T-суммы мультиоператорных тел. Тр. Моск. мат. об-ва, 1967, **17**, 3—44 (РЖМат, 1969, 1А327)
75. **Иванова О. А.**, Две теоремы об упорядоченных универсальных алгебрах, Уч. зап. Тартус. ун-та, 1971, вып. 281, 27—33 (РЖМат, 1972, 8А400)
76. **Игошин В. И.**, Об h-характеризуемых классах алгебраических систем. В сб. «Исслед. по алгебре», вып. 3, Саратов, Саратов. ун-т, 1973, 14—19 (РЖМат, 1974, 8А290)
77. —, Замечания о характеризуемых классах алгебр с примерами из теории полугрупп. В сб. «Теория полугрупп и её прилож.», вып. 3, Саратов, Саратов. ун-т, 1974, 30—39 (РЖМат, 1975, 12А307)
78. —, Характеризуемые классы алгебраических систем. В сб. «Исслед. по алгебре», вып. 4, Саратов, Саратов. ун-т, 1974, 27—42 (РЖМат, 1975, 2А366)
79. **Искандер А. А.**, Частичные универсальные алгебры с заданными структурами подалгебр и соответствий. Мат. сб., 1966, **70**, № 3, 438—456 (РЖМат, 1967, 10А222)
80. **Иянага Сёкити**, Введение в современную математику. Алгебраические системы. Сури кагаку. Math. sci., 1969, **7**, № 5, 18—23 (РЖМат, 1969, 11А275)
81. **Капулович Г. Я.**, Юзвинский С. А., О классификации двумерных алгебр без делителей нуля. В сб. «Геометрия и топология», вып. 2, Л., 1974, 112—121 (РЖМат, 1975, 9А272)
82. **Кенжебаев С.**, Некоторые неразрешимые кольца. Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1966, № 1, 25—30 (РЖМат, 1968, 4А254)
83. **Кизнер Ф. И.**, Две теоремы о тождествах в мультиоператорных алгебрах. Успехи мат. наук, 1969, **24**, № 1, 39—42 (РЖМат, 1969, 7А267)
84. **Колпаков В. И.**, Подалгебры монотонных функций в алгебрах Поста. В сб. «Дискретн. анализ», вып. 24, Новосибирск, 1974, 30—45 (РЖМат, 1975, 2А365)

85. **Кон П. М.**, Универсальная алгебра, М., «Мир», 1968 (РЖМат, 1969, 3А253)
86. **Коротенко Ю. Г.**, Гомотопии универсальных алгебр. В сб. «Мат. исследования», т. 10, вып. 1, Кишинев, АН МолдССР, 1975, 165—184 (РЖМат, 1975, 7А437)
87. **Кузьмин Е. К.**, Тернарные тела. Алгебра и логика, 1967, **6**, № 1, 69—81 (РЖМат, 1968, 8А281)
88. **Кулик В. Т.**, Предложения, сохраняющиеся при гомоморфизмах, взаимнооднозначных в нуле. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1970, № 4, 56—63 (РЖМат, 1970, 12А255)
89. —, О компактных элементах решетки всех сильных отношений конгруэнтности частичной универсальной алгебры. В сб. «Упорядоченные множества и решетки», вып. 1, Саратов, Саратов. ун-т, 1971, 43—48 (РЖМат, 1972, 3А274)
90. —, $\sigma\circ\rho^{-1}$-стабильные и $\rho\circ\sigma$-стабильные классы универсальных алгебр. В сб. «Тр. молодых ученых Саратов. ун-т. Мат. и мех.», Саратов, 1969, 53—58 (РЖМат, 1972, 5А315)
91. —, О наибольших сильных отношениях конгруэнтности частичных универсальных алгебр. В сб. «Исслед. по алгебре», Вып. 2, Саратов, Саратов. ун-т, 1970, 40—48 (РЖМат, 1974, 3А240)
92. **Курош А. Г.**, Работы московских алгебраистов в теории универсальных алгебр. Colloq. math., 1964, **14**, 131—133 (РЖМат, 1967, 10А221)
93. —, Мультиоператорные кольца и тела. Успехи мат. наук, 1969, **24**, № 1, 3—15 (РЖМат, 1969, 9А203)
94. —, Свободные суммы мультиоператорных линейных почти алгебр. В сб. «Мат. исследования», т. 6, вып. 1, Кишинев, АН МолдССР, 1971, 83—87 (РЖМат, 1971, 8А264)
95. —, Свободные разложения в некоторых многообразиях мультиоператорных групп. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1971, № 3, 50—54 (РЖМат, 1971, 11А333)
96. —, Лекции по общей алгебре. М., «Наука», 1973.
97. —, Общая алгебра (лекции 1969/1970 учебного года). М., «Наука», 1974 (РЖМат, 1974, 8А29К)
98. **Левич Е. М.**, Гейдеманн Г. И., О триангулируемости групп и колец. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1972, № 3, 41—45 (РЖМат, 1972, 9А263)
99. **Лендер В. Б.**, О ступенях разрешимости структур и степенях идемпотентности предмногообразий структур. Мат. сб., 1974, **95**, № 3, 445—460 (РЖМат, 1975, 3А372)
100. **Либер С. А.**, Упорядоченные n-кольцоиды над мультиоператорными группами. В сб. «Мат. исследования», т. 7, вып. 1, Кишинев, «Штиинца», 1972, 83—97 (РЖМат, 1972, 6А324)
101. —, О топологических кольцоидах над универсальными алгебрами. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 2, 58—63 (РЖМат, 1973, 7А310)
102. —, Свободные компактные алгебры. Мат. сб., 1973, **91**, № 1, 109—133 (РЖМат, 1973, 8А272)
103. —, Об одной проблеме А. И. Мальцева. Докл. АН СССР, 1973, **211**, № 5, 1050—1052 (РЖМат, 1973, 12А319)
104. —, О топологических алгебрах, заданных определяющими соотношениями. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 7, 47—58 (РЖМат, 1974, 2А306)
105. —, Реплично полные классы топологических алгебр. В сб. «Исслед. по алгебре», вып. 3, Саратов, Саратов. ун-т, 1973, 34—36 (РЖМат, 1974, 7А432)
106. —, О свободных алгебрах нормальных замыканий многообразий. В сб. «Упорядоченные множества и решетки», вып. 2, Саратов, Саратов. ун-т, 1974, 51—53 (РЖМат, 1974, 9А358)
107. **Лишак М. Г.**, О периодической части абелевой Ω-группы. Тр. 1-й Казахстанск. межвуз. науч. конференции по матем. и механ., 1963, Алма-Ата, «Наука», 1965, 140—146 (РЖМат, 1968, 2А232)

108. **Мальцев А. И.**, Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем. Алгебра и логика, 1966, **5**, № 3, 3—9 (РЖМат, 1967, 2А243)
109. —, Об умножении классов алгебраических систем. Сиб. мат. ж., 1967, **8**, № 2, 346—365 (РЖМат, 1967, 11А267)
110. —, О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики. В сб. «Международный конгресс математиков. Тезисы докладов», М., 1966 (РЖМат, 1967, 12А295)
111. —, О стандартных обозначениях и терминологии в теории алгебраических систем. Алгебра и логика, 1966, № 1, 71—77 (РЖМат, 1968, 5А351)
112. —, Алгебраические системы. М., «Наука», 1970 (РЖМат, 1970, 7А280)
113. **Мальцев И. А.**, Некоторые свойства клеточных подалгебр алгебр Поста и их основных клеток. Алгебра и логика, 1972, 11, № 5, 571—587 (РЖМат, 1973, 8А270)
114. **Матус В. П.**, О свободных разложениях в пересечении многообразий универсальных алгебр. Мат. заметки, 1970, **7**, № 5, 551—562 (РЖМат, 1970, 11А231)
115. —, Подалгебры свободных произведений алгебр многообразия $U_{n,m}$. Мат. заметки, 1972, **12**, № 3, 303—311 (РЖМат, 1973, 1А300)
116. —, Циклические подмногообразия многообразия $\mathfrak{A}_{n,n}$. В сб. «Мат. некоторые её приложения и методика преподавания», Ростов-на-Дону, 1973, 58—59 (РЖМат, 1974, 7А438)
117. **Мельник И. И.**, Нормальные замыкания совершенных многообразий алгебр. В сб. «Упорядоченные множества и решетки», вып. 1, Саратов, Саратов. ун-т, 1971, 56—65 (РЖМат, 1972, 3А283)
118. —, Нильпотентные сдвиги многообразий. Мат. заметки, 1973, **14**, № 5, 703—712 (РЖМат, 1974, 4А246)
119. **Мовсисян Ю. М.**, Бипримитивные классы алгебр второй ступени. В сб. «Мат. исследования», т. 9, вып. 1, Кишинев, Штиинца, 1974, 70—82 (РЖМат, 1974, 8А295)
120. —, О некоторых понятиях общей алгебры. В сб. «Молодой науч. работник, Естеств. н.», 1973, № 2(18), 3—11 (РЖМат, 1975, 3А371)
121. **Моллов Т. Ж.**, Векторные дистрибутивные Ω-группы. Науч. тр. Висш. пед. ин-т, Пловдив, 1967, **5**, № 2, 13—20 (РЖМат, 1969, 4А271)
122. —, Структурно упорядоченные мультиоператорные группы. Науч. тр. Висш. пед. ин-т, Пловдив, 1968, **6**, № 1, 19—25 (РЖМат, 1969, 10А154)
123. **Мурский В. Л.**, О некоторых свойствах «почти всех», конечных алгебр. В сб. «III Всес. конф. по пробл. теор. киберн.», **1974**, Тезисы докл., Новосибирск, 1974, 113 (РЖМат, 1974, 12А234)
124. **Насиров С. Н.**, Об идеалах одного класса конечномерных неассоциативных алгебр. Науч. тр. Ташкент. ун-т, 1974, вып. 460, 86—89 (РЖМат, 1975, 9А271)
125. **Нодзаки А.**, Алгебраические системы. Сури кагаку. Math. sci., 1970, **8**, № 4, 18—23 (РЖМат, 1970, 10А216)
126. **Орлов С. Д.**, О решетке допустимых топологий. В сб. «Упорядочен. множества и решетки», вып. 2, Саратов, Саратов. ун-т, 1974, 68—71 (РЖМат, 1974, 9А353)
127. **Палютин Е. А.**, О полных квазимногообразиях. Алгебра и логика, 1972, **11**, № 6, 684—693 (РЖМат, 1973, 8А273)
128. **Пилатовская А. И.**, О свободных объектах в категориях. Сиб. мат. ж., 1969, **10**, № 6, 1276—1299 (РЖМат, 1970, 5А258)
129. —, Теория свободных разложений в категориях. Сиб. мат. ж., 1970, **11**, 3, 566—584 (РЖМат, 1970, 12А256)
130. **Полин С. В.**, Подалгебры свободных алгебр некоторых многообразий мультиоператорных алгебр. Успехи мат. наук, 1969, **24**, № 1, 17—26 (РЖМат, 1969, 7А266)
131. —, Радикалы в $m\Omega$-почтикольцах. I. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1972, № 1, 64—75 (РЖМат, 1972, 5А320)

132. —, Радикалы в $m\Omega$-почтикольцах. II. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1972, № 2, 63—71 (РЖМат, 1972, 8А393)
133. —, Категории функторов в многообразия универсальных алгебр. В сб. «Мат. исследования», т. 8, вып. 1, Кишинев, «Штиинца», 1973, 130—140 (РЖМат, 1973, 5А322)
134. **Поляков Е. А.**, Щеглов А. И., Об автоморфизмах некоторых алгебр частичных функций. Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-т, 1969, **61**, 188—194 (РЖМат, 1970, 1А289)
135. **Пурудеа И.**, Алгебры типа $\mathfrak{B}$. Rev. roum. math. pures et appl., 1971, **16**, № 5, 717—736 (РЖМат, 1972, 1А532)
136. **Раднев П.**, Об одном классе структурно-упорядоченных групп. Науч. тр. Висш. пед. ин-т, Пловдив, 1970, **8**, № 2, 35—38 (РЖМат, 1971, 6А349)
137. —, К теории линейно упорядоченных Ω-колец. Науч. тр. Пловдив. ун-т, 1972, **10**, № 2, 15—20 (РЖМат, 1973, 4А437)
138. —, Об архимедового линейно упорядоченных Ω-кольцах. Науч. тр. Пловдив. ун-т, 1972, **10**, № 1, 31—34 (РЖМат, 1973, 4А438)
139. **Ребане Ю. К.**, О представлениях универсальных алгебр в коммутативных полугруппах. Сиб. мат. ж., 1966, **7**, № 4, 878—885 (РЖМат, 1967, 10А223)
140. —, О примитивных классах однотипных алгебр. Изв. АН ЭстССР, Физ. мат., 1967, **16**, № 2, 143—145 (РЖМат, 1968, 5А354)
141. —, О представлении универсальных алгебр в полугруппах с двусторонним сокращением и в коммутативных полугруппах с сокращением. Изв. АН ЭстССР. Физ. мат., 1968, **17**, № 4, 375—378 (РЖМат, 1969, 6А250)
142. —, Представления мультиоператорных колец в ассоциативных алгебрах. Успехи мат. наук, 1969, **24**, № 1, 43—46 (РЖМат, 1969, 9А204)
143. —, О представлении универсальных алгебр в нильпотентных полугруппах. Сиб. мат. ж., 1969, **10**, № 4, 945—949 (РЖМат, 1970, 2А290)
144. **Реди Э.**, Представления систем Менгера многоместными эндоморфизмами. Уч. зап. Тартус. ун-та, 1971, вып. 277, 47—51 (РЖМат, 1972, 5А317)
145. **Ривлин Г. Е.**, Характеризация категории квазипримитивного класса универсальных алгебр и её соответствий. Мат. сб., 1970, **82**, № 1, 72—83 (РЖМат, 1970, 9А240)
146. **Розен В. В.**, Представления алгебр n-отношений в алгебры бинарных отношений. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1968, № 12, 82—91 (РЖМат, 1969, 5А271)
147. **Рубанович Г.**, Упорядоченные унарные алгебры. Уч. зап. Тартус. ун-т, 1971, вып. 281, 34—48 (РЖМат, 1972, 8А404)
148. **Рябухин Ю. М.**, О некоторых многообразиях универсальных алгебр. Изв. АН Молд. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. н., 1967, № 8, 25—53 (РЖМат, 1968, 7А333)
149. —, Радикалы в Ω-группах. I. Общая теория. В сб. «Мат. исследования», т. 3, вып. 2, Кишинев, 1968, 123—160 (РЖМат, 1969, 4А270)
150. —, Радикалы в Ω-группах. II. Идеально наследственные радикалы. В сб. «Мат. исследования», т. 3, вып. 4, Кишинев, 1968, 108—135 (РЖМат, 1969, 9А210)
151. —, Радикалы в Ω-группах. III. Специальные и квазиспециальные радикалы. В сб. «Мат. исследования», т. 4, вып. I, Кишинев, 1969, 110—131 (РЖМат, 1969, 11А283)
152. **Салий В. Н.**, Эквациально нормальные многообразия универсальных алгебр. В сб. «Тр. молодых ученых Саратов. ун-т. Мат. и мех.», Саратов, 1969, 124—130 (РЖМат, 1972, 6А333)
153. **Сандик М. Д.**, Алгебра мультиопераций. Изв. АН МолдССР, 1972, № 1, 31—38 (РЖМат, 1972, 8А402)
154. **Сергеев Э. А.**, Об относительном замыкании. Сб. работ аспирантов, Краснодар. гос. пед. ин-т, 1969, вып. 2, 8—9 (РЖМат, 1970, 11А228)

155. **Скорняков Л. А.**, О гомологической классификации моноидов. Сиб. мат. ж., 1969, **10**, № 5, 1139—1143 (РЖМат, 1970, 2А289)
156. —, О радикалах Ω-колец. В сб. «Избр. вопр. алгебры и логики», Новосибирск, «Наука», 1973, 283—299 (РЖМат, 1974, 2А305)
157. —, Почти прямые произведения. Тр. Моск. мат. о-ва, 1973, **29**, 215—222 (РЖМат, 1974, 1А316)
158. **Слипенко А. К.**, Позиционные оперативы отображений. Докл. АН УССР, 1969, **А**, № 2, 143—147 (РЖМат, 1969, 9А205)
159. —, Идеалы симметрических оперативов. Докл. АН УССР, 1969, **А**, № 12, 1093—1096 (РЖМат, 1970, 4А311)
160. —, Симметрические p-оперативы. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1972, № 4, 102—108 (РЖМат, 1972, 8А396)
161. —, О представлениях оперативов. Докл. АН УССР, 1971, **А**, № 8, 708—710 (РЖМат, 1971, 12А405)
162. —, Абстрактная характеристика матричных оперативов. Укр. мат. ж., 1974, **26**, № 1, 112—114 (РЖМат, 1974, 7А436)
163. **Смирнов Д. М.**, Решетки многообразий и свободные алгебры. Сиб. мат. ж., 1969, **10**, № 5, 1140—1160 (РЖМат, 1970, 2А286)
164. —, Канторовы алгебры с одним порождающим. I. Алгебра и логика, 1971, **10**, № 1, 61—75 (РЖМат, 1972, 1А536)
165. —, Канторовы алгебры с одним порождающим. II. Алгебра и логика, 1971, **10**, № 6, 658—667 (РЖМат, 1972, 10А209)
166. **Соколов П. В.**, Об Ω-группах с унарными и бинарными операциями. Редколлегия Сиб. мат. ж., 1973, 17 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 31 авг. 1973 г., № 6723—73 деп.) (РЖМат, 1974, 3А247)
167. **Соколовская Т. В.**, Мультиоператорные группы как универсальные алгебры с единственной операцией, подчиненной единственному тождеству. Сиб. мат. ж., 1967, 8, № 4, 853—858 (РЖМат, 1968, 5А353)
168. —, О представлениях конечных универсальных алгебр в конечных полугруппах. Мат. заметки, 1971, **9**, № 3, 285—290 (РЖМат, 1971, 9А264)
169. **Тайцлин М. А.**, Об элементарных теориях идеалов в кольцах многочленов. Алгебра и логика, 1968, **7**, № 2, 94—97 (РЖМат, 1968, 12А264)
170. **Тодоринов С.**, Костова М., Частично упорядоченные кольца. Науч. тр. Висш. пед. ин-т, Пловдив, 1967, **5**, № 3, 35—40 (РЖМат, 1968, 11А247)
171. **Топенчаров В. В.**, Бинарная композиция n-арных отношений. Годишн. Висш. техн. учебни завед. Мат., 1973 (1974), **9**, № 4, 7—18 (РЖМат, 1975, 5А310)
172. **Трахтман А. Н.**, О покрывающих элементах в структуре многообразий алгебр. Мат. заметки, 1974, **15**, № 2, 307—312 (РЖМат, 1974, 6А411)
173. **Трохименко В. С.**, Рестриктивные алгебры многоместных функций. Докл. АН УССР, 1972, **А**, № 4, 340—342 (РЖМат, 1972, 8А397)
174. —, Алгебры реверсивных многоместных функций. В сб. «Теория полугрупп и ее прилож.», вып. 2, Саратов, Саратов. ун-т, 1971, 75—84 (РЖМат, 1972, 5А313)
175. —, Об алгебрах многоместных частичных преобразований. В сб. «Тр. молодых ученых Саратов. ун-т. Мат. и мех.», Саратов, 1969, 136—142 (РЖМат, 1972, 6А329)
176. —, Об алгебрах бинарных операций. В сб. «Мат. исследования», т. 7, вып. 2, Кишинев, «Штиинца», 1972, 253—261 (РЖМат, 1972, 11А236)
177. —, Позиционные системы многоместных функций. В сб. «Исслед. по теории квазигрупп и луп». Кишинев, «Штиинца», 1973, 165—174 (РЖМат, 1973, 12А321)
178. **Трпеновски Б. Л.**, Об одном типе системы операций. Бил. Друшт. Мат. и физ. СРМ, 1968, 19, 17—24 (РЖМат, 1970, 11А227)
179. **Уейская Н. Б.**, О некоторых алгебрах бинарных отношений. В сб. «Теория полугрупп и ее прилож.», вып. 3, Саратов, Саратов. ун-т, 1974, 118—129 (РЖМат, 1975, 12А310)
180. Упорядоченные множества и решетки. Изд. Саратов. ун-т, вып. 3, 1975.
181. **Ушан Я.**, Некоторые замечания о конечно порожденных алгебраических системах. Мат. весн., 1966, **3**, № 2, 83—86 (РЖМат, 1967, 11А266)

182. **Фабрикант В.**, Коммутативные гиперкомплексные числа и возможности их использования при решении технических задач. Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ.-техн. н., 1971, № 2, 74—83 (РЖМат, 1972, 9А262)
183. **Фейнберг В. С.**, Однородные унарные алгебры и их группы автоморфизмов. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1968, № 5, 17—29 (РЖМат, 1969, 5А268)
184. —, Унарные алгебры и их группы автоморфизмов. Докл. АН БССР, 1969, **13**, № 1, 17—21 (РЖМат, 1969, 7А268)
185. **Фихтнер К.**, Многообразия универсальных алгебр с идеалами. Мат. сб., 1968, **75**, № 3, 445—453 (РЖМат, 1968, 10А219)
186. —, К теории многообразий универсальных алгебр с идеалами. Мат. сб., 1968, **77**, № 1, 125—135 (РЖМат, 1969, 4А261)
187. **Фортунатов В. А.**, Многообразия совершенных алгебр. В сб. «Исслед. по алгебре», вып. 4, Саратов, Саратов. ун-т, 1974, 110—114 (РЖМат, 1975, 2А377)
188. **Френкин Б. Р.**, О приводимости и сводимости в некоторых классах n-группоидов. II. В сб. «Мат. исследования», т. 7, вып. 1, Кишинев, «Штиинца», 1972, 150—162 (РЖМат, 1972, 6А323)
189. —, О Σ-свободных моделях. Сиб. мат. ж., 1974, **15**, № 3, 580—597 (РЖМат, 1974, 10А308)
190. —, Сводимость и приводимость алгебраических операций. Мат. сб., 1974, **95**, **№ 3**, **384—395** (РЖМат, 1975, 3А373)
191. **Хенно Я.**, Плотно вложенные правые идеалы систем Менгера. Изв. АН ЭстССР, физ. мат., 1972, **21**, № 2, 131—141 (РЖМат, 1972, 9А261)
192. —, Плотно вложенные идеалы систем Менгера. II. Изв. АН ЭстССР, физ. мат., 1973, 22, № 4, 365—372 (РЖМат, 1974, 5А330)
193. —, Свободные Ω-системы. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1973, № 345, 29—40 (РЖМат, 1974, 6А410)
194. **Хион Я. В.**, m-арные Ω-кольцоиды. Сиб. мат. ж., 1967, **8**, № 1, 174—194 (РЖМат, 1968, 4А252)
195. —, Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления. Уч. зап. Тартус. ун-та, 1966, вып. 192, 3—11 (РЖМат, 1968, 12А254)
196. **Хисамиев Н. Г.**, Многообразия некоторых алгебраических систем. Тр. III Казахстан. межвуз. науч. конф. по мат. и мех., 1967, Алма-Ата, 1970, 102 (РЖМат, 1973, 6А337)
197. **Цирулис Я. П.**, Комплексные системы вместо алгебраических. Латв. мат. ежегодник, 1973, **13**, 169—184 (РЖМат, 1974, 3А245)
198. **Черемисин А. И.**, Дистрибутивные $F\Omega$-группы с конечным числом носителей. Сиб. мат. ж., 1968, № 1, 177—187 (РЖМат, 1968, 9А255)
199. **Чупона Г.**, Об $[m, n]$-кольцах. Билетен Друшт. матем. и физ. СРМ, 1965, **16**, 5—10 (РЖМат, 1967, 1А226)
200. —, Об ассоциативных алгебрах с сокращением. Годишен зб. Природно-мат. фак. ун-т Скопjе, 1969, **19**, 5—14 (РЖМат, 1971, 10А128)
201. —, Об алгебрах включений. Годишен зб. Природно-мат. фак. ун-т Скопjе, 1970, **20**, 15—24 (РЖМат, 1972, 3А279)
202. —, О теореме Кона-Ребане. Годишен зб. Природно-мат. фак. ун-т Скопjе, 1970, **20**, 5—14 (РЖМат, 1972, 4А358)
203. —, Об одном классе частичных алгебр. Годишен зб. Природно-мат. фак. ун-т Скопjе, 1972, 22, 5—37 (РЖМат, 1973, 5А317)
204. **Шварц В. Я.**, О приводимости оператива. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 11, 79—87 (РЖМат, 1974, 6А407)
205. **Шеврин Л. Н.**, О плотно вложенных идеалах алгебр. Мат. сб., 1972, **88**, № 2, 218—228 (РЖМат, 1972, 10А213)
206. —, О достижимых классах алгебр. Schriftenr. Zentralinst. Math. und Mech., 1972, № 16, 148 (РЖМат, 1974, 1А307)
207. —, Мартынов Л. М., О достижимых классах алгебр. Сиб. мат. ж., 1971, **12**, № 6, 1363—1381 (РЖМат, 1972, 3А271)
208. **Ярокер Я. Н.**, Об оперативах отношений. Докл. АН УССР, 1973, **А**, № 1, 49—51, 93 (РЖМат, 1973, 5А323)

209. **Allen D. J.,** Abstract algebras with a single operation and group-like axioms. Amer. Math. Monthly, 1967, **74**, № 2, 186—188 (РЖМат, 1967, 11A269)
210. **Ambrust M.,** Die fastdirekten Zerlegungen einer allgemeinen Algebra. I. Colloq. math., 1964, 14, 39—62 (РЖМат, 1968, 2A233)
211. —, Die fastdirekten Zerlegungen einer allgemeinen Algebra. II. Colloq. math., 1967, **17**, № 1, 1—22 (РЖМат, 1968, 10A213)
212. —, On set-theoretic characterization of congruence lattices. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1970, 16, № 5, 417—419 (РЖМат, 1971, 9A269)
213. **Amson J. C.,** Multimatrix polyalgebra representations of the polar composition of polynomial operations. Proc. London Math. Soc., 1972, **25**, № 3, 465—485 (РЖМат, 1973, 4A439)
214. **Anscombre J.-C.,** Un probleme de dualisation dans les algèbres abstraites et les endomorphisms décomposants. Sémin. P. Dubreil et C. Pisot. Univ. Paris, 1970—1971 (1972), 24, № 2, 14/01—14,18 (РЖМат, 1973, 5A318)
215. **Anusiak J.,** On transitive operations in abstract algebras. Colloq. math., 1972, **25**, № 1, 15—23 (РЖМат, 1973, 1A299)
216. —, W e g l o r z B., Remarks on C-independence in Cartesian products of abstract algebras. Colloq. math., 1971, **22**, № 2, 161—165 (РЖМат, 1974, 12A409)
217. **Applebaum C. H.,** ω-homomorphisms and ω-groups. J. Symbol. Log., 1971, **36**, № 1, 55—65 (РЖМат, 1972, 1A538)
218. **Appleson R. R.,** L o v á s z L., A characterization of cancellable k-ary structures. Period. Math. hung., 1975, **6**, № 1, 17—19 (РЖМат, 1975, 11A397)
219. **Arnold H.-J.,** Hüllenoperationen und transfiniter Steinitzscher Austauschsatz. Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1969, **33**, № 1-2, 32—42 **(РЖМат, 1969, 11A279)**
220. **Asche D. S.,** Minimal dependent sets. J. Austral. Math. Soc., 1966, **6**, № 3, 259—262 (РЖМат, 1968, 8A279)
221. **Ash C. J.,** Reduced powers and Boolean extensions. J. London Math. Soc., 1975, № 3, 429—432 (РЖМат, 1975, 9A268)
222. **Aust C.,** Primitive elements and one-relation algebras I. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **193**, 375—387 (РЖМат, 1975, 3A375)
223. **Austin A. K.,** Finite models for laws in two varialbes. Proc. Amer. Math. Soc., 1966, **17**, № 6, 1410—1412 (РЖМат, 1967, 9A185)
224. **Bacsich P. D.,** Extension of Boolean homomorphisms with bounding semimorphisms. J. reine und angew. Math., 1972, 253, 24—27 (РЖМат, 1972, 10A199)
225. —, H u g h e s D., Syntactic characterisations of amalgamation, convexity and related properties. J. Symbol Log., 1974, **39**, № 3, 433—451 (РЖМат, 1975, 7A438)
226. **Baldwin J.,** A sufficient condition for a variety to have the amalgamation property. Colloq. math., 1973, **28**, № 2, 181—183 (РЖМат, 1974, 5A333)
227. **Banaschewski B.,** N e l s o n E., Equational compactness in infinitary algebras. Colloq. math., 1973, **27**, № 2, 197—205 (РЖМат, 1973, 12A322)
228. **Baranovič T. M.,** About some theorems in the theory of multioperator algebras, Schriftenr. Zentralinst. Math. und Mech., 1972, № 16, 128 (РЖМат, 1974, 1A301)
229. **Bărcănescu S.,** Despre legile de compozitie. Caz. mat. RSR, 1970, **B21**, № 4, 199—200 (**РЖМат, 1970, 11A230)**
230. **Barthélemy J. P.,** Sur le spectre d'une semialgèbre. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 25, A1768—A1771 (РЖМат, 1973, 1A303)
231. **Batbedat A.,** Structures prémodulaires. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 12, A827—A828 (РЖМат, 1973, 9A304)
232. —, Sur la notion d'élément inversible dans un ensemble binaire ou dans un ensemble ternaire. C. r. Acad. sci., 1973, 277, № 10, A409—A411 (РЖМат, 1974, **3A242)**

233. —, Sur la pondération dans un espace affine ou une préalgèbre. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 11, 737—739 (РЖМат, 1974, 9A355)
234. —, Préanneaux idempotents. Atti. Accad. naz. Lincei, Rend. cl. sci. fis. mat. e natur., 1973 (1974), **55**, № 5, 325—330 (РЖМат, 1975, **8A360)**
235. **Baumslag B.,** B a u m s l a g G., On ascending chain conditions. Proc. London Math. Soc., 1971, **22**, № 4, 681—704 (РЖМат, 1972, 2A416)
236. **Beck J.,** Distributive laws. Lect. Notes Math., 1969, № **80**, 119—140 (РЖМат, 1972, 7A270)
237. **Bergman G. M.,** Sulle classi filtrali di algebre. Ann. Univ. Ferrara, **1971**, sez. 7, **17**, № 4, 35—42 (РЖМат, 1973, 5A324)
238. **Berman J.,** On the congruence lattices of unary algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **36**, № 1, 34—38 (РЖМат, 1973, 6A339)
239. —, Algebras with modular lattice reducts and simple subdirectly irreducibles. Discrete Math., 1975, № 1, 1—8 (РЖМат, 1975, 6A433)
240. **Bernardi C.,** Su alcune condizioni necessarie per l'indipendenza di due varieta di algebre. Boll. Unione mat. ital., 1972, **6**, № 3, 410—421 (РЖМат, 1973, 6A338)
241. —, Idealita e indipendenza. Boll. Unione mat. ital., 1973, **7**, № 1, 94—**101** (РЖМат, 1973, 8A277)
242. —, Sull'unione di classi filtrali. Ann. Univ. Ferrara, 1972, **18**, № 1, sez. **7** (РЖМат, 1973, 11A309)
243. **Bernhardt K.,** Über algebraische Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Mengen mit endlicher Basis. Wiss. Z. Humbolt Univ. Berlin, Math.-naturwiss. R., 1970, **19**, № 6, 567—574 (РЖМат, 1971, 9A266)
244. **Binz J. C.,** Endliche Modelle gesetzesarmer algebraischer Strukturen. Prax. Math., 1971, **13**, № 3, 66—68 (РЖМат, 1971, 9A271)
245. **Birkhoff G.,** L i p s o n J. D., Universal algebra and automata. Proc. Tarski Symp. Berkley Calif., 1971, (Proc. Symp. Pure Math., vol. 25), Providence R. I., 1974, 41—51 (РЖМат, 1975, 9A266)
246. **Block R.,** Sur les anneaux differentiablement simples. Sémin. P. Dubreil, M. L., Dubreil—Jacotin, L. Lesieru et C. Pisot. Univ. Paris, 1970—**1971** (1972), **24**, № 1, 5/01—5/04 (РЖМат, 1973, 5A321)
247. **Boffa M.,** Ultraproduits et applications à l'algèbre. Bull. Soc. math. Belg., 1972, **24**, № 2, 124—132 (РЖМат, 1973, 4A435)
248. **Boicescu V.,** Sur la représentation des algèbre de Lukasiewicz n-valentes. C. r. Acád. sci., 1970, **270**, № 1, A4—A7 (РЖМат, 1970, 7A281)
249. **Both N.,** Congruente deductive. Stud. și cerc. mat., 1972, **24**, № 5, 683—685 (РЖМат, 1973, 2A294)
250. —, Independenta. Stud. și cer. mat., 1974, **26**, № 4, 491—494 (**РЖМат**, 1974, 11A378)
251. **Boulaye G.,** Homimorphismes de relations binaires. Bull. Inst. politehn. Iași, 1967, **13**, № 3, 4, 17—22 (РЖМат, 1968, 10A217)
252. —, Homomorphismes et décomposition de relations algèbre et relations associées. Bull. math. Soc. sci. mat. RSR, 1968, **12**, № 1, 13—**19** **(РЖМат, 1969, 5A270)**
253. **Branzei M.,** On generalized algebras. An. stiint. Univ. Iași, 1969, Sec. **1a**, **15**, № 2, 291—297 (РЖМат, 1970, 12A250)
254. **Brualdi R. A.,** On families of finite independence structures. Proc. London Math. Soc., 1971, **22**, № 2, 265—293 (РЖМат, 1972, 1A543)
255. **Brunner J.,** H a m a n n C.-J., Redundanz und Komposition von Automaten. Math. Nachr., 1974, **59**, № 1-6, 207—211 (РЖМат, 1974, 11A**367)**
256. **Bulmem-Fleming S.,** Congruence topologies on universal algebras. **Math.** Z., 1971, **119**, № 4, 287—289 (РЖМат, 1971, 10A124)
257. **Burmeister P.,** Über die Mächtigkeiten und Unabhängigkeitsgrade **der** Basen freier Algebren. I. Fund. math., 1968, **62**, № 2, 165—189 (**РЖМат**, 1969, 4A262)
258. —, Free partial algebras. J. reine und angew Math., 1970, **241**, 75—**86** (РЖМат, 1970, 12A251)

259. —, Über die Mächtigkeiten und Unabhängigkeitsgrade der Basen freier Algebren. II. Fund. Math., 1970, **67**, № 3, 323—336 (РЖМат, 1971, 2A275)
260. **Burris S.,** Closure homomorphisms. J. Algebra, 1970, **15**, № 1, 68—71 (РЖМат, 1971, 4A285)
261. —, A note on varieties of unary algebras. Colloq. math., 1971, **22**, № 2, 195—196 (РЖМат, 1971, 9A273)
262. **Cain J. E. Jr.,** Basis for an algebraic system. Pi Mu Epsilon J., 1972, 5, № 7, 319—320 (РЖМат, 1973, 6A334)
263. **Calame A.,** Legi de compozitie interne. Caz. mat. (RSR), 1968, **A73**, № 5, 161—178 (РЖМат, 1969, 4A259)
264. **Camiz S.,** Alcune osservazioni sulla teoria assiomatica della dipendenza. Rend. mat., 1971, **4**, № 4, 741—749 (РЖМат, 1972, 10A212)
265. **Cardoso Jayme M.,** *N*-alidade para anéis. Rev. Fac. ciêne. Univ. Lisboa, 1964—1965, **11**, № 1, 187—196 (РЖМат, 1967, 5A278)
266. **Carvallo M.,** Tautologies á opérateur non spécifié. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 12, A829—A830 (РЖМат, 1973, 10A276)
267. **Chajda I.,** On substitution of operations in systems of equations over algebras. Arch. mat., 1973, **9**, № 3, 135—139 (РЖМат, 1974, 11A368)
268. —, Direct products of homomorphic mappings. Arch. Math., 1973, **9**, № 2, 61—65 (РЖМат, 1974, 11A369)
269. **Choe Tae Ho,** Zero-dimensional compact associative distributive universal algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **42**, № 2, 607—613 (РЖМат, 1975, 2A375)
270. **Cignoli R.,** Injective De Morgan and Kleene algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, 47, № 2, 269—278 (РЖМат, 1975, 12A309)
271. **Clark D. D.,** Varieties with isomorphism free algebras. Colloq. math., 1969, **20**, № 2, 181—187 (РЖМат, 1970, 3A365)
272. **Comer S. D.,** Classes without the amalgamation property. Pacif. J. Math., 1969, **28**, № 2, 309—318 (РЖМат, 1969, 12A415)
273. —, L e T o u r n e a u J. J., Isomorphism types of infinite algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **21**, № 3, 635—639 (РЖМат, 1970, 3A361)
274. —, Representations by algebras of sections over Boolean spaces. Pacif. J. Math., 1971, **38**, № 1, 29—38 (РЖМат, 1972, 3A282)
275. —, Restricted direct products and sectional representations. Math. Nachr., 1974, **64**, 333—344 (РЖМат, 1975, 8A359)
276. **Conti G.,** P a s i n i A., Sulle algebre a congruenze permutabili con reticolo delle classi di congruenza autoduale. Matematiche, 1974, **29**, № 1, 136—142 (РЖМат, 1975, 10A331)
277. **Coppey L.,** Algèbres de décomopositions dans les catégories. C. r. Acad. sci., 1971, **273**, № 13, A554—A557 (РЖМат, 1972, 2A422)
278. **Coulon-Raillard J.,** Une notion de constante dans les algèbres cylindriques. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 16, A1201—A1203 (РЖМат, 1972, 9A265)
279. **Creanga I.,** Sur les algèbres des troisième degré. An. ştiint. Univ. Iaşi, 1968, Sec. 1a, **14**, № 2, 229—234 (РЖМат, 1969, 12A414)
280. —, Sur les algèbres ternaires. An. ştiint. Univ. Iaşi, 1970, Sec. la, **16**, № 2, 249—255 (РЖМат, 1971, 9A263)
281. **Crestey M.,** Travaux récents sur les algèbres universelles. Semin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1965—1966(1967), **19**, № 1, 4/01—4/09 (РЖМат, 1968, 12A261)
282. **Crombez G.,** On (n, m)-rings. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1972, **37**, № 3-4, 180—199 (РЖМат, 1973, 1A296)
283. —, On partially ordered n-groups. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1972, **38**, 141—146 (РЖМат, 1973, 2A297)
284. —, T i m m G., T i m m, J., On (n, m)-qoutient rings. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1972, **37**, № 3-4, 200—203 (РЖМат, 1973, 1A297)
285. —, S i x G., On topological n-groups. Abh. math., Semin. Univ. Hamburg, 1974, **41**, 115—124 (РЖМат, 1975, 7A443)
286. **Csakany B.,** Inner automorphisms of universal algebras. Publs. math., 1965, **12**, № 1-4, 331—333 (РЖМат, 1967, 4A227)

287. —, Characterization of regular varieties. Acta sci. math., 1970, **31**, № 3-4, 187—189 (РЖМат, 1971, 10A126)
288. —, S c h m i d t E. T., Translations of regular algebras. Acta sci. Math., 1970, **31**, № 1-2, 157—160 (РЖМат, 1971, 4A290)
289. **Cupona G.,** On some primitive classes of universal algebras. Матем. весн., 1966, **3**, № 2, 105—108 (РЖМат, 1967, 10A224)
290. **Cusin R.,** Théories forcing-complètes et structures génériques relatives au forcing fini en théorie des modèles. Thèse doct. sci. math. Univ. Claude Bernard Lyone, 1973, 95 p. (РЖМат, 1975, 4A351)
291. **Dantoni G.,** Relazioni invarianti di un'algebra universale ed algebre con il sistema di operazioni completo rispetto ad una famiglia di relazioni invarianti. Matematiche, 1969, **24**, № 1, 187—217 (РЖМат, 1970, 7A282)
292. —, Su certe famiglie di relazioni n-arie invarianti di un'algebra. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat., e natur., 1969(1970), **47**, № 6, 456—464 (РЖМат, 1971, 2A274)
293. —, Relazioni n-arie invarianti di un'algebra universale: struttura, lemma di Zassenhaus, teorema di Schreier, Matematiche, 1972, **27**, № 1, 1—45 (РЖМат, 1973, 11A311)
294. **Davey Brian A.,** Sheaf spaces and sheaves of universal algebras. Math. Z., 1973, 134, № 4, 275—290 (РЖМат, 1975, 7A435)
295. **Davis Robert Clay Jr.,** Abstract universal algebra. Doct. Diss., Tulane Univ., 1967(РЖМат, 1968, 10A215)
296. —, Multivalued operations and universal coalgebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **32**, № 2, 385—388 (РЖМат, 1972, 11A233)
297. **Day Alan,** A characterization of modularity for congruence lattices of algebra. Can. math. Bull., **12**, № 2, 167—173 (РЖМат, 1970, 5A254)
298. —, Injectivity in equational classes of algebras. Can. J. Math., 1972, **24**, № 2, 209—220 (РЖМат, 1972, 10A211)
299. **Diener K. H.,** A remark on equational classes generated by very small free algebras. Arch. Math., 1969, **20**, № 5, 491—494 (РЖМат, 1970, 5A259)
300. —, G r a t z e r G., A note on absolutely free algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1967, **18**, № 3, 551—553 (РЖМат, 1968, 3A288)
301. **Dlab V.,** Axiomatic treatment of bases in arbitrary sets. Чехосл. мат. ж., 1965, **15**, № 4, 554—564 (РЖМат, 1967, 1A222)
302. —, Dependence over modules. Чехосл. мат. ж., 1966, **16**, № 1, 137—157 (РЖМат, 1967, 3A168)
303. —, Algebraic dependence structures. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1966, **12**, № 4, 345—377 (РЖМат, 1969, 1A329)
304. —, Universal algebra representation of regular *GA*-dependence structures. Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math. astron. et phys., 1969, № 4, 203—206 (РЖМат, 1970, 3A364)
305. —, Lattice representation of general algebraic dependence. Math. Syst. Theor., 1969, **3**, № 4, 289—299 (РЖМат, 1970, 10A226)
306. —, Lattice formulation of general algebraic dependence. Czechosl. mat., 1970, **20**, № 4, 603—615 (РЖМат, 1971, 8A268)
307. **Draškovičova H.,** Permutability, distributivity of equivalence relations and direct products. Mat. čas., 1973, **23**, № 1, 64—87 (РЖМат, 1973, 6A331)
308. —, External characterization of subdirect representations of algebras. Acta math. Acad. sci. hung.», 1972, **23**, № 3-4, 367—373 (РЖМат, 1973, 7A308)
309. —, Independence of equational classes. Math. čas., 1973, **23**, № 2, 125—135 (РЖМат, 1973, 10A273)
310. **Drbohlab K.,** On coalgebras. Summer Sess. Theory Order, Sets and Gen. Algebra. Cikháj, 1969, Brno, 1969, 81—87 (РЖМат, 1971, 4A284)
311. **Dudek J.,** Number of polynomials in dependence preserving algebras. Colloq., math., 1971, **22**, № 2, 193—194 (РЖМат, 1971, 10A131)
312. —, Binary minimal algebras. Acta Fac. rerum natur. Univ. comen. Math., 1971, N. Mimor, 21—22 (РЖМат, 1972, 1A539)

313. —, Płonka E., Weak automorphisms of linear spaces and of some other abstract algebras. Colloq. math., 1971, 22, № 2, 201—208 (РЖМат, 1971, 12А408)
314. Dwinger Ph., Generalized Post algebras. Bull. Acad. polon. sci., Ser. sci. math., astron. et phys., 1968, 16, № 7, 559—565 (РЖМат, 1969, 2А385)
315. Enescu J., Asupra unor familii de algebre de ordin trei. Bull. Inst. Politechn. Iaşi, 1974, sec. 1, 20, № 1-2, 27—34 (РЖМат, 1975, 8А361)
316. Eršov Yu., La theorie des enumerations. Actes Congr. int. mathematiciens, 1970, v. 1, Paris, 1971, 223—227 (РЖМат, 1972, 6А331)
317. Etayo M. J. J., Sobre ciertas subestructuras con operadores. Actas 7 Reun. anu. mat. esp., Valladolid, 1968, 74—76 (РЖМат, 1974, 9А356)
318. Evans T., Products of points — some simple algebras and their identoties. Amer. Math. Monthly, 1967, 74, № 4, 362—372 (РЖМат, 1968, 1А338)
319. —, Some connections between residual finiteness, finite embeddability and the word problem. J. London Math. Soc., 1969, 1, № 3, 399—403 (РЖМат, 1972, 1А533)
320. Fajtlowicz S., Properties of the family of independent subsets of a general algebra. Colloq. math., 1964, 14, 225—231 (РЖМат, 1967, 9А183)
321. —, A remark on independence in projective spaces. Colloq. math., 1968, 19, № 1, 23—25 (РЖМат, 1969, 3А245)
322. —, On the exchange od independent sets in abstract algebras. Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astron. et phys., 1967, 15, № 11, 765—767 (РЖМат, 1969, 3А246)
323. —, Families of independent sets in finite unary algebras. Colloq. math., 1969, 20, № 1, 13—15 (РЖМат, 1969, 10А151)
324. —, Birkhoff's theorem in the category of non-indexed algebras. Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astron. et phys., 1969, 17, № 5, 273—275 (РЖМат, 1970, 1А291)
325. —, On algebraic operations in binary algebras. Colloq. math., 1970, 21, № 1, 23—26 (РЖМат, 1970, 10А222)
326. —, Algebras of homomorphisms. Rend. math., 1970, 3, № 3, 523—527 (РЖМат, 1971, 6А355)
327. —, n-dimensional dice. Rend. math., 1971, 4, № 4, 855—865 (РЖМат, 1972, 10А206)
328. —, Holsztynski M., Mycielski J., Węglorz B., On powers of bases in some compact algebras. Colloq. math., 1968, 19, № 1, 43—46 (РЖМат, 1969, 3А244)
329. —, Glazek K., Independence in separable variables algebras. Colloq. math., 1967, 17, № 2, 221—224, (РЖМат, 1969, 4А267)
330. —, —, Urbanic K., Separable variables algebras. Colloq. math., 1966, 15, № 2, 161—171 (РЖМат, 1968, 7А332)
331. —, Marczewski V., On some properties of the family of independent sets in abstract algebras. Colloq. math., 1969, 20, № 2, 189—195 (РЖМат, 1970, 3А363)
332. Fattarosi-Barnaba M., Intorno ad alcuni operatori di chinsura sugli insiemi di leggi. Rend. mat., 1969, 2, № 3-4, 355—368 (РЖМат, 1970, 4А312)
333. —, 0-algebre e loro ideali. Rend. mat., 1972, 5, № 2, 213—223 (РЖМат, 1973, 2А290)
334. —, Sul reticolo degli ideali di una 0-algebra. Rend. mat., 1972, 5, № 3, 455—462 (РЖМат, 1973, 6А335)
335. —, Un'osservazione sugli insiemi di identità che generato classi equazionali equazionalmente complete. Rend. mat., 1973, 6, № 1, 131—137 (РЖМат, 1974, 7А439)
336. —, Algebre con T'-ideali e T'-algebre. Rend. mat., 1973 (1974), 6, № 3, 637—646 (РЖМат, 1975, 9А267)
337. Faulkner J. R., Ferrar J. C., On the structure of sympletic ternary algebras. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1972, A75, № 3, 247—256, Indag. Math., 1972, 34, № 3, 247—256 (РЖМат, 1972, 12А290)

338. Felscher W., Kennzeichung von primitiven und quasiprimitiven Kategorien von Algebren. Arch. Math., 1968, 19, № 4, 390—397 (РЖМат, 1969, 8А228)
339. —, Modelltheorie als universelle Algebra. Schriftenz. Zentralinst. Math. und Mech., 1972, № 16, 129—130 (РЖМат, 1974, 1А303)
340. Foster A. L., Families of algebras with unique (sub-) direct factorization: equational characterization of factorization. Math. Ann., 1966, 166, № 4. 302—326 (РЖМат, 1968, 1А331)
341. —, Semiprimal algebras, characterization and normal decomposition. Math. Z., 1967, 99, № 2, 105—116 (РЖМат, 1968, 10А214)
342. —, Pre-fields and universal algebraic extensions: equational precessions. Monatsh. Math., 1968, 72, № 4, 315—324 (РЖМат, 1969, 5А259)
343. —, Algebraic function-spectra. Math. Z., 1968, 106, № 3, 225—244 (РЖМат, 1969, 5А260)
344. —, Automorphisms and functional completeness in universal algebras. I. General automorphism structure theory and characterization. Math. Ann., 1969, 180, № 2, 138—169 (РЖМат, 1969, 12А412)
345. —, Congruence relations and functional completeness in universal algebras, structure theory of hemi-primals. I. Math. Z., 1970, 113, № 4, 293—308 (РЖМат, 1970, 10А219)
346. —, Homomorphisms and functional completeness. Hemi-primal algebras. Math. Z., 1970, 115, № 1, 23—32 (РЖМат, 1971, 1А259)
347. —, Functional completeness and automorphisms. General infra-primal theory and universal algebra «fields» of Galois-class. I. Monatsh. Math., 1971, 75, № 4, 303—315 (РЖМат, 1972, 5А314)
348. —, Functional completeness and automorphisms. General infraprimal theory and universal algebra «fields» of Galois-class. II. Monatsh. Math., 1972, 76, № 3, 226—238 (РЖМат, 1973, 4А430)
349. —, Pixley A., Algebraic and equational semi-maximality, equational spectra. I. Math. Z., 1966, 92, № 1, 30—50 (РЖМат, 1967, 10А227)
350. —, —, Algebraic and equational semi-maximality, equational spectra. II. Math. Z., 1966, 94, № 2, 122—133 (РЖМат, 1967, 10А228)
351. —, —, Total algebras and weak independence. I. Math. Z., 1971, 123, № 2, 93—104 (РЖМат, 1972, 4А361)
352. —, —, Total algebras and weak independence. II. Math. Z., 1972, 125, № 3, 271—284 (РЖМат, 1972, 9А266)
353. Franci R., Una nota sulli classi ideali. Boll. Unione mat. ital., 1973, 7, № 3, 429—439 (РЖМат, 1974, 1А309)
354. Franklin S. P., An isomorphism theorem. «Proc. Indian. Acad. Sci.», 1968, A67, № 4, 219—221 (РЖМат, 1968, 12А265)
355. Fraser G. A., Horn A., Congruence relations in direct products. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, 26, № 3, 390—394 (РЖМат, 1971, 9А275)
356. Fried E., A generalization of ordered algebraic systems. Acta sci. math., 1970, 31, № 3-4, 233—244 (РЖМат, 1970, 9А268)
357. Frink O. Grätzer G., The closed subalgebras of a topological algebra. Arch. Math., 1966, 17, № 2, 154—158 (РЖМат, 1967, 10А220)
358. Froemke J., Independent factorizations of abstract algebras. J. Algebra, 1970, 16, № 3, 311—325 (РЖМат, 1971, 6А350)
359. —, Pairwise and general independence of abstract algebras. Math. Z., 1971, 123, № 1, 1—17 (РЖМат, 1972, 3А284)
360. —, A note on functionally complete algebras with no non-trivial subalgebras. Math. Z., 1974, 136, № 4, 353—355 (РЖМат, 1974, 12А235)
361. Frontera M. B., Propiedades de una function de valores enteros definida en el conjunto de las multialgebras finitas. Publs. Semin. mat. Garcia Galdeano, 1966, № 7, 86 p. (РЖМат, 1971, 7А376)
362. Galvin F., Horn A., Operations preserving all equivalence relations. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, 24, № 3, 521—523 (РЖМат, 1971, 9А265)
363. Gancarzewicz J., On commutative algebraic objects over a groupoid. Zesz. nauk Univ. jagiell., 1968, № 167, 19—25 (РЖМат, 1969, 9А211)

364. **Gandini P. M.**, Sulle strutture algebriche ordinate, Rend. semin. mat. Univ. e politech. Torino, 1971—1973 (1974), **31**, 185—195 (РЖМат, 1975, 1A374)
365. **Gautier C.**, Girard G., Lentin A., Alef 0/Algebra. Vol. 1—2. Bucureşti. Ed. didact. şi ped., 1973. Vol. 1. Mulţimi, statistică, probabilităţi. 192 p. Vol. 2. Funcţii numerice, aplicaţii diverse. 440 p. Bibliogr. RSR. Cărţi albums, hărţi, 1974, **23**, № 8, 19 (РЖМат, 1975, 1A371)
366. **Gécseg F.**, On certain classes of Σ-structures. Acta sci. math., 1970, **31**, № 3-4, 191—195 (РЖМат, 1971, 11A334)
367. —, Székely S., On equational classes of unoids. Acta sci. math., 1973, **34**, 99—101 (РЖМат, 1974, 1A313)
368. **Gedeonova E.**, A characterization of *p*-modularity for congruence lattices of algebras. Acta Fac. rerum. natur. Univ. comen., 1972, **28**, 99—106 (РЖМат, 1973, 6A322)
369. **Georgescu G.**, Vraciu C., Les algèbres de Lukasiewicz centrées. C. r. Acad. sci., 1969, **268**, № 18, A998—A1000 (РЖМат, 1969, 12A413)
370. —, Sur l'epimorphismes centrés d'algèbres de Lukasiewicz. C. r. Acad. sci., 1969, **269**, № 1, A4—A6 (РЖМат, 1970, 2A285)
371. **Ginzburg A.**, Algebraic theory of automata, 2-nd print, N. Y.—L., Acad. Press, 1969 (РЖМат, 1971, 3A253)
372. **Glazek K.**, O pewnych reduktach przestrzeni linioweg. Zesz. nauk WSP, Opolu Mat., 1968, № 5, 193—196 (РЖМат, 1971, 8A267)
373. —, Weak automorphismus of integral domains and some other abstract algebras. Acta Fac. rerum natur. Univ. comen. Math., 1971, N. Mimor, 39—49 (РЖМат, 1972, 1A540)
374. —, Quasi-constants in universal algebras and independent subalgebras. Acta Fac. rerum natur. Univ. comen. Math., 1975, Spec. Number, 9—16 (РЖМат, 1975, 4A364)
375. —, Iwanik A., Independent subalgebras of a general algebra. Colloq. math., 1974, **29**, № 2, 189—194 (РЖМат, 1974, 11A370)
376. —, —, Quasi-constants in general algebras. Colloq. math., 1974, **29**, № 1, 45—50 (РЖМат, 1974, 9A350)
377. —, Mycielski J., On weak homomorphisms of general non-indexed algebras. Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1974, **22**, № 7, 651—656 (РЖМат, 1975, 4A361)
378. **Gleichgewicht B.**, Głazek K., Remarks on *n*-groups as abstract algebras. Colloq. math., 1967, **17**, 2, 209—219 (РЖМат, 1969, 1A328)
379. **Gnani G.**, Sulle classi metaideali. Matematiche, 1971, **26**, № 2, 368—380 (РЖМат, 1973, 3A324)
380. —, Un'osservazione sulle classi metaideali. Matematiche, 1972, **27**, № 1, 105—110 (РЖМат, 1973, 11A310)
381. **Goetz A.**, On weak isomorphisms and weak homomorphisms of abstract algebras. Colloq. math., 1966, **14**, 163—167 (РЖМат, 1967, 1A223)
382. —, Senft J., On the structure of normal subdirect powers. Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1968, 16, № 9, 747—750 (РЖМат, 1969, 4A254)
383. **Golema-Hartman K.**, Idempotent reducts of Abelian groups and minimal algebras. Bull. Acad. polon. sci. Sér., sci. math., astron. et phys., 1973, **21**, № 9, 809—812 (РЖМат, 1974, 4A247)
384. **Gould M.**, On extensions of Schreier's theorem to universal algebras. Studia scient. math. hung., 1966, **1**, № 3-4, 369—377 (РЖМат, 1968, 1A334)
385. —, Multiplicity type and subalgebra structure in universal algebras. Pacif. J. Math., 1968, **26**, № 3, 469—485 (РЖМат, 1969, 5A261)
386. —, Multiplicity type and subalgebra structure in infinitary universal algebras. Colloq. math., 1971, **24**, № 1, 109—116 (РЖМат, 1972, 8A389)
387. —, Automorphism groups of algebras of fininte type. Can. J. Math., 1972, **24**, № 6, 1065—1069 (РЖМат, 1973, 7A307)
388. —, Representable epimorphisms of monoids. Compos. Math., 1974, **29**, № 3, 213—222 (РЖМат, 1975, 8A362)

389. —, Grätzer G., Boolean extensions and normal subdirect powers of finite universal algebras. Math. Z., 1967, **99**, № 1, 16—25 (РЖМат, 1968, 7A330)
390. —, Platt C., Semilattice maps induced by homomorphisms of algebras. Algebra univers., 1971, **1**, № 1, 90—92 (РЖМат, 1972, 2A419)
391. —, —, Verstile monoids and versatile categories. Algebra univers., 1971, **1**, № 1, 54—62 (РЖМат, 1972, 2A420)
392. **Grant J.**, Automorphisms definable by formulas. Pacif. J. Math., 1973, **44**, № 1, 107—115 (РЖМат, 1973, 9A303)
393. **Grätzer G.**, On coverings of universal algebras. Arch. Math., 1967, **18**, № 2, 113—117 (РЖМат, 1967, 11A268)
394. —, On the endomorphism semigroup of simple algebras. Math. Ann., 1967, **170**, № 4, 334—338 (РЖМат, 1967, 10A226)
395. —, On a new notion of independence in universal algebras. Colloq. math., 1967, **17**, № 2, 225—234 (РЖМат, 1968, 8A277)
396. —, On polynomial algebras and free algebras. Can. J. Math., 1968, **20**, № 3, 575—581 (РЖМат, 1969, 4A257)
397. —, Universal algebra. Princeton (N. Y.), 1968, 368 pp. (РЖМат, 1971, 2A273)
398. —, Two Mal'cev-type theorems in universal algebra. J. Combin. Theory, 1970, 8, № 3, 334—342 (РЖМат, 1970, 11A233)
399. —, Lakser H., Two observations on the congruence extension property. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**, № 1, 63—64 (РЖМат, 1973, 4A434)
400. —, —, Płonka J., Joins and direct products of equational classes. Can. Math. Bull., 1969, **12**, 741—744 (РЖМат, 1970, 8A269)
401. —, Lampe W. A., On subalgebra lattices of universal algebra, J. Algebra, 1967, **7**, № 2, 263—270 (РЖМат, 1968, 9A256)
402. —, — Płonka., On the number of polynomials of an idempotent algebra. I. I.Pacif. J. Math., 1970, **32**, № 3, 697—709 (РЖМат, 1970, 12A253)
403. —, —, On the number of polynomials of an idempotent algebra. II. Pacif. J. Math. 1973, **47**, № 1, 99—113 (РЖМат, 1974, 3A244)
404. —, Sichler J., Agassiz sum of algebras. Colloq. math., 1974, **30**, № 1, 57—59 (РЖМат, 1975, 4A355)
405. —, Wenzel G. H., On the concept of congruence relation in partial algebras. Math. scand., 1967, **20**, № 2, 275—280 (РЖМат, 1969, 5A267)
406. **Grillet P. A.**, Free *PQ*-algebras. Can. J. Math., 1968, **20**, № 3, 582—595 (РЖМат, 1969, 4A269)
407. **Groh H.**, Ovals and non-ovoidal Laguerre planes. J. reine und angew Math., 1974, **267**, 50—66 (РЖМат, 1975, 1A365)
408. **Günter P.**, Ω-groups with composition. Publs. math., 1970, **17**, № 1-4, 313—320 (РЖМат, 1973, 9A306)
409. **Haimo F.**, Quasi-regular elements and Dorroh extensions. Ill. J. Math., 1967, **11**, № 1, 78—91 (РЖМат, 1968, 12A256)
410. **Hajnal A.**, Kertesz A., Some new algebraic equivalences of the Axiom of Choice. Publs Math., 1972, **19**, № 1-4, 339—340 (РЖМат, 1974, 3A248)
411. **Harrison M. A.**, The number of isomorphism types of finite algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1966, **17**, № 3, 731—737 (РЖМат, 1967, 2A242)
412. **Harzheim E.**, Über die Grundlagen der universellen Algebra. Math. Nachr., 1966, **31**, № 1-2, 39—52 (РЖМат, 1968, 1A332)
413. **Hashimoto J.**, On meromorphisms of algebraic systems. Nagoya Math., 1, 1966, **27**, № 2, 559—569 (РЖМат, 1967, 8A197)
414. —, On meromorphisms and congruence relations. J. Math. Soc. Japan., 1967, **19**, № 1, 70—81 (РЖМат, 1968, 10A218)
415. **Hauschild K.**, Rautenberg W., Universelle interpretierbarkeit in Verbänden. Wiss. Z. Humbolt.-Univ. Berlin. Math. naturwiss. R., 1970, **19**, № 6, 575—577 (РЖМат, 1971, 9A270)
416. **Havel V.**, Homomorphisms of Ternary Rings. Monatsh. Math., 1966, **70**, № 3, 223—228 (РЖМат, 1967, 5A277)
417. —, Parititions in cartesian systems. Časop. pěstov. mat., 1966, **91**, № 3, 246—253 (РЖМат, 1967, 7A251)

418. —, Correction to the paper «Parititions in cartesian systems». Časop. pěstov. mat., 1966, **91**, № 4, 477 (РЖМат, 1967, 7A252)
419. —, Partitions in ternars. Arch. math., 1967, **3**, № 4, 209—213 (РЖМат, 1971, 7A373)
420. **Hechler S.**, On monads in saturated enlargements. Isr. J. Math., 1972, **12**, № 1, 49—50 (РЖМат, 1973, 3A322)
421. **Heise W.**, Das Lemma von Zorn. Eine vergleichende Untersunchung geometrischer, algebraischer und topologischer Hüllensysteme. Math.-phys. Semesterber, 1972, **19**, № 1, 73—82 (РЖМат, 1972, 9A267)
422. **Henkin L.**, Monk J. D., Tarski A., Cylindric algebras. Part 1 with an introdactory chapter: general theory of algebras. Amsterdam, North Holland, 1971 YI (РЖМат, 1972, 3A320)
423. —, Resek D., Relativization of cylyndric algebras. Fund. math., 1975, **82**, № 4, 363—383 (РЖМат, 1975, 7A446)
424. **Herrlich H.**, A characterization of k-ary algebraic categories. Manuscr. math., 1971, **4**, № 3, 277—284 (РЖМат, 1971, 10A132)
425. **Hestenes M. R.**, On a ternary algebras. Scr. math., 1973, **29**, № 3-4, 253—272 (РЖМат, 1974, 2A312)
426. **Hion J.**, Die polyringoide. Schriftenr. Zentralinst. Math. und Mech., 1972, № 16, 131 (РЖМат, 1974, 1A305)
427. **Hodges W.**, Six impossible rings. J. Algebra, 1974, **31**, № 2, 218—244 (РЖМат, 1974, 2A368)
428. —, A normal form for algebraic constructions. Bull. London Math. Soc., 1974, **6**, № 1, 57—60 (РЖМат, 1974, 9A352)
429. **Hoehnke H.-J.**, Homomorphism theories for universal algebras. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1968, **16**, № 1, 19—35 (РЖМат, 1969, 4A256)
430. —, Das Brown-McCoysche 0-Radikal für Algebren seine Anwendung in der Theorie der Halbgruppen. Fund. math., 1970, **66**, № 2, 155—175 (РЖМат, 1970, 11A229)
431. —, Struktursätze der Algebra und Kompliziertheit logischer Schemata. II. Universale Algebren. Math. Nachr., 1974, **63**, 337—351 (РЖМат, 1975, 7A439)
432. **Höft H.**, A characterization of strong homomorphisms. Colloq. math., 1973, **28**, № 2, 189—193 (РЖМат, 1974, 4A250)
433. —, On the semilattice of extensions of a partial algebra. Colloq. math., 1974, **30**, № 2, 193—201 (РЖМат, 1975, 5A311)
434. **Hu Tah-Kai**, Distributive extensions and quasi-framal algebras. Can. J. Math., 1966, **18**, № 2, 265—281 (РЖМат, 1967, 2A237)
435. —, Residually simple and characteristically simple universal algebras. Math. Nachr., 1968, **36**, № 5-6, 333—344 (РЖМат, 1969, 4A260)
436. —, Stone duality for primal algebra theory. Math. Z., 1969, **110**, № 3, 180—198 (РЖМат, 1970, 3A366)
437. —, On the fundamental subdirect factorization theorems of primal algebra theory. Math. Z., 1969, **112**, № 2, 154—162 (РЖМат, 1970, 5A260)
438. —, Weak products of simple universal algebras. Math. Nachr., 1969, **42**, № 1-3, 157—171 (РЖМат, 1970, 5A261)
439. —, Kelenson Ph., Independence and direct factorization of univeral algebras. Math. Nachr. 1971, **51**, № 1-6, 83—94 (РЖМат, 1972, 2A326)
440. **Hughes N. J. S.**, Steinitz exchange theorem for infinite bases. II. Composito math., 1966, **17**, № 2, 152—155 (РЖМат, 1968, 1A335)
441. **Hulanicki A.**, Marczewski E., Mycielski J., Exchange of independent sets in abstract algebras. I. Colloq. math., 1964, **14**, 203—215 (РЖМат, 1968, 1A336)
442. **Hule H.**, Polynome über universalen Algebren. Monatsh. Math., 1969, **73**, № 1, 329—340 (РЖМат, 1970, 5A257)
443. —, Algebraische Gleichungen über universalen Algebren. Monatsh. Math., 1970, **74**, № 1, 50—55 (РЖМат, 1970, 10A225)
444. **Imreh B.**, On a theorem of G. Birkhoff. Publs. math., 1968, **15**, № 1-4, 147—148 (РЖМат, 1969, 10A157)

445. **Isac G.**, Algebre universale dense in suma directă completă. Studii și cercetări mat. Acad. RSR, 1975, **17**, № 9, 1473—1477 (РЖМат, 1967, 4A228)
446. —, Elemente Ω'-idempotente in algebre universale. Studii și cercetări mat. Acad. RSR, 1967, **19**, № 6, 853—858 (РЖМат, 1968, 1A246)
447. **Isbell J. R.**, On coherent algebras and strict algebras. J. Algebra, 1969, **13**, № 3, 299—307 (РЖМат, 1970, 8A265)
448. —, Epimorphisms and dominions. IY. J. London math. Soc., 1969, **1**, № 2, 265—273 (РЖМат, 1972, 2A423)
449. —, Parametrizable algebras. J. London Math. Soc., 1974, **8**, № 4, 750—752 (РЖМат, 1975, 4A362)
450. **Ishaq M.**, Sur l'homomorphisme faible d'algèbres. Rev. roum. math. pures et appl., 1970, **15**, № 8, 1197—1205 (РЖМат, 1971, 4A287)
451. **Iskander A.**, Word problem for ringoids of numerical functions. Var. Publs. Ser. Mat. inst. Aarchus univ., 1970, № 17, 122—140 (РЖМат, 1971, 11A332)
452. —, On Boolean extensions of primal algebras. Math. Z., 1972, **124**, № 3, 203—207 (РЖМат, 1972, 7A269)
453. —, Subalgebra system of powers of partial universal algebras. Pacif. J. Math., 1971, **38**, № 2, 457—463 (РЖМат, 1972, 5A312)
454. —, Algebraic functions of p-rings. Colloq. math., 1972, **25**, № 1, 37—41 (РЖМат, 1973, 1A298)
455. —, On subalgebras lattices of universal algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **32**, № 1, 32—36 (РЖМат, 1972, 11A234)
456. **Iwanik A.**, Remarks on infinite complete algebras. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1972, **20**, № 11, 909—910 (РЖМат, 1973, 5A316)
457. —, On infinite complete algebras. Colloq. math., 1974, **29**, № 2, 195—199 (РЖМат, 1974, 10A306)
458. **Jakubik J.**, Lattice ordered algebras generated by a system of ideals. Colloq. math., 1969, **20**, № 1, 31—44 (РЖМат, 1969, 10A153)
459. **Jakubowicz C. A.**, On generalized products preserving compactness. Алгебра и логика, 1974, **13**, № 2, 227—231, 235 (РЖМат, 1975, 3A374)
460. **Janin P.**, Préanneaux. Thèse Doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Lyon, 1968, 125 (РЖМат, 1971, 1A265)
461. **Javier Etayo J.**, Homomorfismos de estructuras con operatores. 6 Reun. annual mat. esp. Sevilla, 1967, 133—141 (РЖМат, 1968, 5A356)
462. **Ježek J.**, On the equivalence between primitive classes of universal algebras. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1968, **14**, № 4, 309—320 (РЖМат, 1969, 9A209)
463. —, Principal dual ideals in lattices of primitive classes. Comment. math. Univ. carolinae, 1968, **9**, № 4, 533—545 (РЖМат, 1969, 11A276)
464. —, Primitive classes of algebras with unary and nullary operations. Colloq. math., 1969, **20**, № 2, 159—179 (РЖМат, 1970, 2A287)
465. —, Algebraicity of endomorphisms of some structures. Acta Fac. rerum natur, Univ. comen. Math. 1975, Spec. Number, 17—18 (РЖМат, 1975, 4A363)
466. **Jonhson J. S.**, Manes E. G., On modules over a semiring. J. Algebra, 1970, **15**, № 1, 57—67 (РЖМат, 1971, 4A291)
467. —, Marczewski, Independence in monounary algebras. Colloq. math, 1969, **20**, № 1, 7—11 (РЖМат, 1969, 11A281)
468. **Jonsson B.**, Algebraic structures with prescribed automorphism groups. Colloq. math., 1968, **19**, № 1, 1—4 (РЖМат, 1969, 2A386)
469. —, Algebras whose congruence lattices are distributive. Math. Scand., 1967, **21**, № 1, 110—121 (РЖМат, 1969, 9A208)
470. —, Topics in universal algebra. Lect. Notes Math., 1972, 250 (РЖМат, 1972, 6A332)
471. —, Topics in universal algebra. Berlin. Springer, 1972, YI, 220 p. (РЖМат, 1974, 1A304)

472. —, McNulty G., Quackenbush R., The ascending and descending varietal chains of a variety. Can. J. Math., 27, № 1, 25—31, 1975 (РЖМат, 1975, 9А270)
473. —, Whaley T. P., Congruence relations and multiplicity types of algebras. Pacif. J. Math., 1974, 50, № 2, 505—520 (РЖМат, 1975, 1А368)
474. **Junek H. J.**, Vervollständigung partiell geordneter universeller Algebren. Math. Nachr., 1973, 56, № 1-6, 175—178 (РЖМат, 1974, 2А307)
475. **Jurie P.-F.**, Quelques conséquences d'hypothèses de platitude et de bonté sur les termes d'une somme amalgamée d'anneaux. C. r. Acad. sci., 1967, **264**, № 6, A263—A265 (РЖМат, 1968, 5А355)
476. —, Dilations universelles d'une algèbre transformationelle. Bull. sci. math., 1970, **94**, № 1, 41—47 (РЖМат, 1972, 8А390)
477. **Kaiser H. K.**, Der Defect endlicher abelscher Gruppen. Monatsh. Math., 1974, **78**, № 2, 109—116 (РЖМат, 1975, 2А372)
478. —, A class of locally complete universal algebras. J. London Math. Soc., 1974, **9**, № 1, 5—8 (РЖМат, 1975, 5А298)
479. **Kalman J. A.**, Applications of subdirect products in general algebra. Math. Chron., 1974, **3**, June, 45—62 (РЖМат, 1975, 5А306)
480. **Karásek J.** On general algebras. Arch. mat., 1966, **2**, № 4, 157—175 (РЖМат, 1967, 12А294)
481. —, A remark on the system of congruence relations on a generalized algebra. Spisy Přírodověd. fak. Univ. Brně, 1970, **36**, № 10, 461—464 (РЖМат, 1972, 1А537)
482. —, Induced algebras. Arch. Mat., 1970, **6**, № 2, 79—87 (РЖМат, 1972, 1А541)
483. **Katriňák T.**, Construction of regular double p-algebras. Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1974, **43**, № 5-6, 283—290 (РЖМат, 1975, 4А353)
484. —, Equational classes of modular p-algebras. Acta Fac. rerum natur. Univ. comen. Math., 1975, Spec. Number, 19—21 (РЖМат, 1975, 5А300)
485. **Kelenson Ph.**, Generalized structure theorems of primal algebra, theory. Math. Nachr., 1973, **55**, № 1-6, 1—19 (РЖМат, 1973, 10А271)
486. **Kelly D.**, Basis equations, free algebras, word problems and Mal'cev conditions. Thesis, Sl, 1973, Canadiana, 1973, № 6, 1265 (РЖМат, 1974, 7А441)
487. **Kergall E. M.**, Monomes premiers d'une fonction de plusieurs variables sur une algèbre à p-valeurs. Trois méthodes de détermination. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 23, 1483—1485 (РЖМат, 1975, 1А370)
488. **Kerkhoff R.**, Über varallgemeinerte Peano-Algebren. Math. Ann., 1966, **179**, № 3, 251—256 (РЖМат, 1969, 12А409)
489. —, Gleichungsdefinien-bare Klassen partieller Algebren. Math. Ann., 1970, **185**, № 2, 112—133 (РЖМат, 1970, 11А232)
490. **King E. W.**, Stein F. M., One possible algebraic structure for ordered pairs of real numbers. Pentagon, 1973, **31**, № 1, 17—23 (РЖМат, 1973, 8А279)
491. **Klukovits L.**, On commutative universal algebras. Acta sci. math. 1973, **34**, 171—174 (РЖМат, 1974, 1А311)
492. **Knoebel R. A.**, Functionally complete algebras. Doct. diss. Berkeley, Univ. Calif., 1965 (РЖМат, 1967, 11А265)
493. —, Primal extensions of universal algebras. Math. Z., 1970, **115**, № 1, 53—57 (РЖМат, 1971, 1А260)
494. —, Simplicity vis-à-vis functional completeness. Math. Ann., 1970, **189**, № 4, 299—307 (РЖМат, 1971, 7А379)
495. **Kock A.**, Monads on symmetric monoidal closed categories. Arch. Math., 1970, **21**, № 1, 1—10 (РЖМат, 1970, 12А248)
496. **Kopeček O.**, Novotný M., On some invariants of unary algebras. Czechosl. Mat. J., 1974, **24**, № 2, 219—246 (РЖМат, 1974, 12А237)
497. **Kovács A.**, O generalizare a produsului de compozitie al relatiilor. Stud. şi. cerc. mat., 1971, **23**, № 7, 1111—1117 (РЖМат, 1972, 3А276)

498. **Kratovchil P.**, On the theorem of M. Gould and G. Grätzer. Summer Sess. Theory Order. Sets and Gen. Algebra. Cikháj, 1969, Brno, 1969, 44—48 (РЖМат, 1971, 5А358)
499. —, Note on a representation of universal algebras as subdirect powers. Colloq. math., 1971, **24**, № 1, 11—14 (РЖМат, 1972, 8А391)
500. **Krauss P.**, Extending congruence relations. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **31**, № 2, 517—520 (РЖМат, 1972, 11А235)
501. —, On quasi primal algebras. Math. Z., 1973, **134**, № 2, 85—89 (РЖМат, 1974, 6А408)
502. **Krupińska A.**, Structure générale de la fonction de sortie pour l'automaté abstrait sur le grupoide de Brandt. Demonstr. math., 1973, **6**, № 2, 707—724 (РЖМат, 1975, 4А354)
503. **Kruse A.**, An abstract property P for groupoids such that locally locally P is weaker than locally P. J. London Math. Soc., 1967, **42**, № 1, 81—85 (РЖМат, 1968, 8А280)
504. **Kummer R.**, Über Schreiersche Erweiterungen von universalen Algebren. I. Wiss. Beitr. M.-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, 1971, **M**, № 3, 201—219 (РЖМат, 1973, 4А432)
505. —, Schreiersche Erweiterungen von universellen Algebren. Schriftenr. Zentralinst. Math. und Mech., 1972, № 16, 139 (РЖМат, 1974, 1А308)
506. **Kuntzmann J.**, Extension aux relations de certaines notions algébriques. C. r. Acad. sci., 1968, **267**, № 2, A77—A78 (РЖМат, 1969, 4А258)
507. **Lakser H.**, Padmanabhan R., Platt C. R., Subdirect decomposition of Plonka sums. Duke Math. J., 1972, **39**, № 3, 485—488 (РЖМат, 1973, 4А436)
508. **Lampe W. A.**, Notes on related structures of a universal algebra. Pacif. J. Math., 1972, **43**, № 1, 189—205 (РЖМат, 1973, 6А336)
509. —, On the congruence lattice characterization theorem. Trans. Amer. math. Soc., 1973, **182**, Aug., 43—60 (РЖМат, 1974, 7А434)
510. —, Subalgebra lattice of unary algebras and an axiom of choice. Colloq. math., 1974, **30**, № 1, 41—55 (РЖМат, 1975, 4А358)
511. **Lanchau R.**, Das verallgemeinerte freie Produkt in primitiven Klassen universeller Algebren. I. Publs. math., 1969, № 1-4, 307—323 (РЖМат, 1971, 7А380)
512. —, Das verallgemeinerte freie Produkt in primitiven Klassen universeller Algebren. II. Publs math., 1970, **17**, № 1-4, 321—331 (РЖМат, 1973, 9А305)
513. —, Über das verallgemeinerte freie Produkt universeller Algebren in primitiven Klassen mit Null, Schriftenr. Zentralinst. Math. und Mech., 1972, № 16, 140 (РЖМат, 1А315)
514. **Lawvere F. W.**, Ordinal sums and equational doctrines. Lect. Notes Math., 1969, № 80, 141—155 (РЖМат, 1972, 7А271)
515. **Letta G.**, Vidossich G., Ein allgemeiner Satz über die Hulle einen Teilalgebra, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Munchen Math.—naturwiss. Kl. 1965, Munchen, 1966, 11—14 (РЖМат, 1968, 12А257)
516. **Levy-Bruhl J.**, Algèbre universelle et involution. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 9, 587—589 (РЖМат, 1974, 9А354)
517. **Lewin J.**, On Schreier varieties of linear algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, **132**, № 2, 553—562 (РЖМат, 1971, 6А354)
518. **Libicher J.**, Některé vlastnosti universálnich algeber přenášejich se direktnim součinem. Sb. pr. Ped. fak. Ostravě, 1972, **A7**, № 29, 5—14 (РЖМат, 1973, 11А305)
519. **Loos O.**, Assoziative tripelsysteme. Manuscr. math., 1972, **7**, № 2, 103—112 (РЖМат, 1972, 12А292)
520. **Lopez G.**, Probleme d'extension respectueuse. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, № 13, A567—A569 (РЖМат, 1974, 4А248)
521. **Loś J.**, Direct sums in general algebra. Colloq. math., 1964, **14**, 33—38 (РЖМат, 1967, 6А201)
522. **Lowig H. F. J.**, On the definition of an absolutely free algebra. Чехосл. матем. ж., 1968, **18**, № 3, 396—399 (РЖМат, 1969, 4А264)

523. —, On algebras generatable by a given set of algebras. Math. jap., 1974, 19, № 2, 83—91 (РЖМат, 1975, 9A269)
524. **Lucas Th.**, Sur l'equivalence des algèbres cylindrique et polyadiques. Bull. Soc. math. Belg., 1968, 20, № 3, 236—263 (РЖМат, 1970, 1A292)
525. —, Equations in the theory of monadic algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **31**, № 1, 239—244 (РЖМат, 1972, 10A197)
526. **Luchian T.**, Weak ring extensions. An. stiint. Univ. Iaşi, 1972, Sec. 1A, **18**, № 1, 13—18 (РЖМат, 1973, 1A304)
527. **Lustig M.**, On isotone and homomorphic maps of ordered unary algebras. Acta math. Acad. sci. hung., 1972, **22**, № 3-4, 431—439 (РЖМат, 1972, 12A291)
528. **Macchi P.**, Sull'operatore di pseudo prodotto. Ann. Univ. Ferrara, 1970, sez. 7, **15**, № 6, 103—112 (РЖМат, 1971, 11A335)
529. **Macdonald Sheila Oates**, Various varieties. J. Austral. math. Soc., 1973, 16, № 2, 363—367 (РЖМат, 1974, 7A440)
530. —, Varieties generated by finite algebras. Lect. Notes Math., 1974, **372**, 446—447 (РЖМат, 1975, 5A307)
531. **Macdonald J. L.**, Coherence and embedding of algebras. Math. Z., 1974, **135**, № 3, 185—220 (РЖМат, 1974, 8A294)
532. —, Conditions for a universal mapping of algebras to be a monomorphism. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, **80**, № 5, 888—892 (РЖМат, 1975, 5A303)
533. **Machado C. J.**, Katsume M. F., Estrutura de reticulado em 3-aneis unitários. Notas e comuns. mat., 1972, № 44, 7 p. (РЖМат, 1972, 2A296)
534. **Madison E. W.**, Computable algebraic structures and nonstandard arithmetic. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, **130**, № 1, 38—54 (РЖМат, 1968, 10A221)
535. **Magari R.**, Su una classe equazionale di algebre. Ann. mat. pura ed appl., 1967, **75**, 277—311 (РЖМат, 1968, 2A234)
536. —, Sulla varieta generata da un'algebra funzionalmente completa di cardinalità infinita. Ann. mat. pura ed appl., 1967, **76**, 305—324 (РЖМат, 1968, 7A334)
537. —, Una demonstrazione del fatto che ogni varietă ammette algebre semplici. Ann. Univ. Ferrara, 1969, sez. 7, **14**, № 1, 1-4 (РЖМат, 1970, 5A255)
538. —, Varietà a quozienti filtrali. Ann. Univ. Ferrara, 1969, sez. 7, **14**, № 2, 5—20 (РЖМат, 1970, 5A256)
539. —, Construzione di classi filtrali. Ann. Univ. Ferrara, 1969, sez. 7, **14**, № 6, 35—52 (РЖМат, 1970, 8A266)
540. —, Un'osservazione sulle classi metafiltrali. Ann. Univ. Ferrara, sez. 7, 1969, **14**, № 15, 145—147 (РЖМат, 1971, 1A264)
541. —, Algebre a congruenze speciali. Sympos. mat. Ist. naz. alta, mat., 1969—1970, vol. 5, London—New York, 1971, 83—111 (РЖМат, 1971, 7A375)
542. —, Varietà a congruenze ideali (congruenze ideali. II). Ann. Univ. Ferrara, 1970, sez. 7, **15**, № 7, 113—129 (РЖМат, 1971, 11A330)
543. —, Classi metaideali di algebre simili (congruenze ideali. III). Ann. Univ. Ferrara, 1970, sez. 7, **15**, № 8, 131—143 (РЖМат, 1971, 11A331)
544. —, The classification of idealizable varieties. J. Algebra, 26, № 1, 152—165 (РЖМат, 1974, 1A310)
545. —, Classie schemi ideali. Ann. Scuola norm. super. Pisa Sci. Fis. e mat., 1973 (1974), **27**, № 4, 687—706 (РЖМат, 1975, 8A358)
546. **Malcolm W. G.**, Application of higher-order ultraproducts to the theory of local properties in universal algebras and relational systems. Proc. London Math. Soc., 1973, **27**, № 4, 617—637 (РЖМат, 1974, 5A331)
547. **Marczewski E.**, Independence in abstract algebras. Results and problems. Colloq math., 1966, **14**, 169—188 (РЖМат, 1967, 1A225)
548. —, Independence with respect to a family of mappings. Colloq. math., 1969, **20**, № 1, 17—21 (РЖМат, 1969, 11A280)
549. —, A remark on independence in abstract algebras. Rocz. Pol. tow. mat., 1970, Ser. I, **14**, 15—17 (РЖМат, 1971, 6A357)

550. **Marchini C.**, Alcune osservazioni sugli Ω-gruppi nelle categorie. Boll. Unione mat. ital., 1972, **5**, № 1, 14—25 (РЖМат, 1972, 8A403)
551. —, Su gli Ω-gruppi in un categoria, Riv. mat. Univ. Parma, 1971, 12, 119—135 (РЖМат, 1974, 11A374)
552. **Maurer I. G.**, Szilágyi M., Etude de certaines équations définies dans des algèbres universelles. Atti. Acad. naz., Lincei. Rend. cl. sci. fis. mat. e natur., 1968, **44**, № 6, 733—740 (РЖМат, 1970, 1A290)
553. **Maxson C. J.**, Endomorphism semigroup of finite subset algebras. Discrete Math., 1974, **10**, № 1-2, 133—144 (РЖМат, 1975, 4A360)
554. **Mayet A.**, Anneaux monadiques *R*-riches. C. r. Acad. sci., 1972, **275**, № 18, A811—A812 (РЖМат, 1972, 5A314)
555. **Mazzanti G.**, Classi filtrali e distributivi delle congruence. Ann. Univ. Ferrara, 1972, sez. 7, **17**, № 11, 149—157 (РЖМат, 1973, 5A325)
556. —, Classi localmente filtrali. Ann. Univ. Ferrara, 1972, sez. 7, **17**, № 10, 143—147 (РЖМат, 1973, 5A326)
557. —, Classi ideali e distributività delle congruenze. Ann. Univ. Ferrara, 1974, sez. 7, **19**, 145—156 (РЖМат, 1975, 4A352)
558. **McKenzie R. N. W.**, The representation of relation algebras. Doct. diss. Univ. Colo., 1966 (РЖМат, 1968, 6A327)
559. —, Representations of integral relation algebras. Mich. Math. J., 1970, 17, № 3, 279—287 (РЖМат, 1971, 6A352)
560. —, On finite groupoids and *K*-primal algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 1968, **133**, № 1, 115—129 (РЖМат, 1971, 7A372)
561. —, $\aleph_1$-incompactness of *Z*. Colloq. math., 1971, **23**, № 2, 194—202 (РЖМат, 1972, 5A310)
562. **Mederly P.**, Three Mal'cev type theorems and their applications. Mat. čas., 1975, **25**, № 1, 83—95 (РЖМат, 1975, 8A350)
563. **Medina A.**, Endomorphic forms of finite automata. Rev. mexic. fis., 1966, **15**, № 1, 55—127 (РЖМат, 1968, 2A235)
564. **Mendelson N. S.**, An application of matrix theory to a problem in universal algebra. Linear Algebra and Appl., 1968, **1**, № 4, 471—478 (РЖМат, 1969, 12A410)
565. **Meskin S.**, On some Scheier varieties of universal algebras. J. Austral. Math. Soc., 1969, **10**, № 3-4, 442—444 (РЖМат, 1970, 9A241)
566. **Michler G.**, Wille R., Die primitiven Klassen arithmetischer Ringe. Math. Z., 1970, **113**, № 5, 369—372 (РЖМат, 1970, 6A268)
567. **Mlitz R.**, Ein Radical für universale Algebren und seine Anwendung auf Polynomringe mit Komposition. Monatsh. Math., 1971, **75**, № 2, 144—152 (РЖМат, 1972, 1A535)
568. **Monk J. D.**, Sioson F. M., On the general theory of *m*-groups. Fund. Math. 1971, **72**, № 3, 233—244 (РЖМат, 1972, 5A316)
569. **Montali T.**, Pseudolimiti e formule *SH*. Rev. mat. Univ. Parma, 1971, **12**, 245—258 (РЖМат, 1974, 11A373)
570. **Montagna E.**, Sulle classi quasi ideali. Boll. Unione mat. ital., 1974, **10**, № 1, 85—97 (РЖМат, 1975, 5A302)
571. **Moore H. G.**, Free algebra structure: categorical algebras. Bull. Austral. math. Soc., 1970, **3**, № 2, 207—215 (РЖМат, 1971, 7A378)
572. **Moors R.**, Une Ω-algebre isomorphe à tous ses quotiens non triviaux. Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1967, **36**, № 3-4, 99—102 (РЖМат, 1968, 12A253)
573. **Müller V.**, Nešetřil J., Pelant J., Either tournaments or algebras? Comment. math. Univ. carol., 1972, **13**, № 4, 801—807 (РЖМат, 1973, 6A333)
574. **Murty P. V.**, Semi-Brouwerian algebras. J. Austral. Math. Soc., 1974, **18**, № 3, 293—302 (РЖМат, 1975, 7A441)
575. **Mycielski J.**, Ryll-Nardzewski C., Equationally compact algebras. II. Fund. math., 1968, **61**, № 3, 271—281 (РЖМат, 1968, 12A262)
576. **Myung Hyo Chul**, A characterization of the Jacobson radical in ternary algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **38**, № 2, 228—234 (РЖМат, 1974, 1A302)

577. **Narkiewicz W.**, Remarks on abstract algebras having bases with different number of elements. Colloq. math., 1966, № 1, 11—17 (РЖМат, 1967, 2A421)
578. —, Corrections to my paper «On a certain class of abstract algebras». Fund. math., 1966, 58, № 1, 11 (РЖМат, 1967, 2A242)
579. **Naseer-uddin Md.**, The ternary operation $(a, b, c)=abc$ and its application in group theory. Rend. Circ. mat. Palermo, 1970 (1971), **19**, № 3, 327—333 (РЖМат, 1972, 10A207)
580. **Nation J. B.**, Varieties whose congruences satisfy certain lattice identities. Algebra univers., 1974, **4**, № 1, 78—88
581. —, Congruence lattices of relatively free unary algebras. Algebra univers., 1974, **4**, № 1, 132
582. **Nelson E.**, Finiteness of semigroup of operators in universal algebra. Can. J. Math., 1967, **19**, № 4, 764—768 (РЖМат, 1968, 2A352)
583. —, Not every equational class of infinitary algebras contains a simple algebra. Colloq. math., 1974, **30**, № 1, 27—30 (РЖМат, 1975, 2A374)
584. **Neumann B. H.**, On a problem of G. Gratzer. Publs math., 1967, **14**, № 1-4, 325—329 (РЖМат, 1968, 12A258)
585. —, Properties of countable character. Actes Congr. int. mathématiciens, 1970, T. 1, Paris, 1971, 293—296 (РЖМат, 1972, 4A360)
586. **Neumann W. D.**, On cardinalities of free algebras and ranks of operations. Arch. Math., 1969, **20**, № 2, 132—133 (РЖМат, 1969, 12A411)
587. —, Representing varieties of algebras by algebras. J. Austral. Math. Soc., 1970, **11**, № 1, 1—8 (РЖМат, 1970, 8A267)
588. —, On Mal'cev conditions. J. Austral Math. Soc., 1974, **17**, № 3, 376—384 (РЖМат, 1975, 6A434)
589. **Nipp G. L.**, Quaternion orders associated with ternary lattices. Pacif. J. Math., 1974, **53**, № 2, 525—537 (РЖМат, 1975, 7A440)
590. **Nobauer W.**, Polynome und algebraische Gleichungen über universalen Algebren. Jahresber. Dtsch. Math.—Ver., 1974, **75**, № 3, 101—113 (РЖМат, 1974, 8A292)
591. **Novotny M.**, On cartesian products. Arch. mat., 1969, **5**, № 2, 101—110 (РЖМат, 1971, 7A374)
592. **Olin P.**, Some first order properties of direct sums of modules. Z. math. Log. und Grungl. Math., 1970, **16**, № 5, 405—416 (РЖМат, 1971, 9A276)
593. **Opp M.**, Verbandstheoretische Behandlung topologischer *n*-Gruppen. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1974, **41**, 125—132 (РЖМат, 1975, 7A444)
594. **Osborn J. M.**, Varieties of algebras. Adv. Math., 1972, 8, № 2, 163—369 (РЖМат, 1972, 8A399)
595. **Pacholski L.**, W ę g l o r z B., Topologically compact structures and positive formulas. Colloq. math., 1968, **19**, № 1, 37—42 (РЖМат, 1969, 5A266)
596. **Padmanabhan R.**, Q u a c k e n b u s h R. W., Equational theories of algebras with distributive congruences. Proc. Amer. math. Soc., 1973, **41**, № 2, 373—377 (РЖМат, 1974, 7A437)
597. **Pasini A.**, Sull'isomorphismo delle serie normali di un'algebra finitaria (soluzione di un problema di G. Grätzer). Boll Unione mat. ital., 1971, **4**, № 3, 388—394 (РЖМат, 1971, 12A407)
598. —, Sul reticolo di congruenze forti in algebre parziali finitarie. «Boll. Unione mat. ital.», 1971, **4**, № 4, 630—634 (РЖМат, 1972, 2A412)
599. —, Sul reticolo delle classi di congruenza di un'algebra finitaria. Matematiche, 1971, **26**, № 2, 274—290 (РЖМат, 1973, 3A323)
600. —, Osservazioni sul reticolo delle classi di congruenza di un'algebra finitaria. Matematiche, 1972 (1973), **27**, № 2, 383—397 (РЖМат, 1974, 11A372)
601. —, Sulla sottoalgebra di Frattini di un'algebra. Matematiche, 1973 (1974), 28, № 1, 161—173 (РЖМат, 1975, 2A369)
602. **Pater Z.**, Mono-operational algebras. I. Rev. roum. math. pures et appl., 1974, **19**, № 6, 799—810 (РЖМат, 1975, 4A356)
603. —, Mono-operational algebras. II. Rev. roum. math. pures et appl., 1974, **19**, № 7, 915—924 (РЖМат, 1975, 4A357)

604. **Pelczer A.**, On some binary relations and relations of three arguments. Zesz. nauk Univ. jagiell., 1966, № 131, 53—58 (РЖМат, 1968, 8A283)
605. **Peremans W.**, On the definition of homomorphism. Techn. hogesch. Eindhoven. Onderafdel. wisk. Rept., 1972, № 1, 32 pp. (РЖМат, 1972, 10A208)
606. **Perfect H.**, Independent transversals with constraints. J. London Math. Soc., 1972, **5**, № 3, 385—386 (РЖМат, 1973, 5A320)
607. **Petticrew J. W.**, General subtraction. Math. Mag., 1970, **43**, № 3, 145—147 (РЖМат, 1971, 1A262)
608. **Pickett H. E.**, Homomorphisms and subalgebras of multialgebras. Pacif. J. Math., 1967, **21**, № 2, 327—342 (РЖМат, 1968, 12A255)
609. **Pierce R. S.**, Introduction to the theory of abstract algebras. New York, Rinehart & Winston, 1968, VIII. 148 p. (РЖМат, 1969, 11A274)
610. **Pinter Ch.**, Sur les algèbre transformationnels admettant une structure d'algèbre polyadique. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 19, A1261—A1264 (РЖМат, 1973, 10A275)
611. —, Cylindric algebras and algebras of substitutions. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, 175, Jan. 167—179 (РЖМат, 1973, 12A323)
612. —, A simpler set of axioms for polyadic algebras. Fund. Math., 1973, **79**, № 3, 223—232 (РЖМат, 1974, 2A311)
613. **Pixley A.**, Functionally complete algebras generating distributive and permutable classes. Math. Z., 1970, **114**, № 5, 361—372 (РЖМат, 1970, 12A252)
614. —, The ternary discriminator function in universal algebra. Math. Ann., 1971, **191**, № 3, 167—180 (РЖМат, 1971, 9A272)
615. —, A note on hemi-primal algebras. Math. Z., 1972, **124**, № 3, 213—214 (РЖМат, 1972, 6A330)
616. —, Local weak independence and primal algebra theory. Boll. Unione mat. ital., 1972, **5**, № 3, 381—399 (РЖМат, 1972, 11A237)
617. —, Local Malcev conditions. Can. Math. Bull., 1972, **15**, № 4, 559—568 (РЖМат, 1973, 8A271)
618. **Platt C. R.**, Note on a theorem of Pultr. Math. Ann., 1969, **184**, № 1, 78 (РЖМат, 1970, 8A263)
619. **Płonka E.**, On a problem of B. Jónsson concerning automorphisms of a general algebra. Colloq. math., 1968, **19**, № 1, 5-8 (РЖМат, 1969, 2A287)
620. —, Symmetric operations in groups. Colloq. math., 1970, **21**, № 2, 179—189 (РЖМат, 1971, 3A254)
621. —, On symmetric algebras. Summer sess. Theory Order, Sets and Gen. Algebra, Cikháj, 1969, Brno, 1969, 98—102 (РЖМат, 1971, 5A359)
622. —, On weak automorphisms of algebras having a basis. Colloq. math., 1971, **24**, № 1, 7—10 (РЖМат, 1972, 7A268)
623. **Płonka J.**, Diagonal algebras. Fund. math., 1966, **58**, № 3, 309—321 (РЖМат, 1967, 3A161)
624. —, Remarks on diagonal and generalized algebras. Colloq. math., 1966, **15**, № 1, 19—23 (РЖМат, 1967, 3A163)
625. —, On the number of independent elements in finite abstract algebras having a binary operation. Colloq. math., 1964, **14**, 189—201 (РЖМат, 1967, 3A164)
626. —, Echange of independent sets in abstract algebras. II. Colloq math., 1964, **14**, 217—224 (РЖМат, 1968, 1A337)
627. —, On functionally uniform symmetrical algebras. Colloq. math., 1966, **15**, № 2, 181—188 (РЖМат, 1968, 7A236)
628. —, On the methods of representation of some algebras. Colloq. math., 1967, **16**, 249—251 (РЖМат, 1968, 7A327)
629. —, Sums of direct systems of abstract algebras. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math. astron. et phys., 1967, **15**, № 3, 133—135 (РЖМат, 1968, 7A335)
630. —, Exchage of independent sets in abstract algebras. III. Colloq. math., 1966, **15**, № 2, 173—180 (РЖМат, 1968, 8A278)
631. —, On some properties and applications of the notion of the sum of a direct system of abstract algebras. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math. astron. et phys., 1967, **15**, № 10, 681—682 (РЖМат, 1969, 1A330)

632. —, On the number of independent elements in finite abstract algebras with two binary symmetrical operation. Colloq. math., 1968, **19**, № 1, 9—21 (РЖМат, 1969, 2А383)
633. —, On a method of constraction of abstract algebras. Fund math., 1967, **61**, № 2, 183—189 (РЖМат, 1969, 4А255)
634. —, Some remarks on sums of direct systems of algebras. Fund. math., 1968, **62**, № 3, 301—308 (РЖМат, 1969, 4А265)
635. —, On distributive n-lattices and n-quasilattices. Fund. math., 1968, **62**, № 3, 293—300 (РЖМат, 1969, 4А268)
636. —, On sums of direct systems of Boolean algebras. Colloq. math., 1969, **20**, № 2, 209—214 (РЖМат, 1970, 4А310)
637. —, On the arity of idempotent reducts of groups. Colloq. math., 1970, **21**, № 1, 35—37 (РЖМат, 1970, 10А224)
638. —, On the number of polynomials of a universal algebra. III. Colloq. math., 1971, **22**, № 2, 177—180 (РЖМат, 1971, 10А129)
639. —, On the number of polynomials of a universal algebra and joins and direct products of equational classes. Acta Fac. rerum natur. Univ. comen. Math., 1971, N. Mimor. 73—75 (РЖМат, 1972, 1А545)
640. —, On algebras with n distinct essentially n-ary operations. Algebra univers., 1971, **1**, № 1, 73—79 (РЖМат, 1972, 2А413)
641. —, On algebras with at most n distinct essentially n-ary operations. Algebra univers., 1971, **1**, № 1, 80—85 (РЖМат, 1972, 2А414)
642. —, On the number of polynomials of a universal algebra. IV. Colloq. math., 1972, **25**, № 1, 11—14 (РЖМат, 1973, 1А301)
643. —, On the arity of idempotent reducts of Abelian groups. Colloq. math., 1973, **27**, № 2, 175—176 (РЖМат, 1973, 11А306)
644. —, On the join of equational classes of idempotent algebras and algebras with constants. Colloq. math., 1973, **27**, № 2, 193—195 (РЖМат, 1973, 11А308)
645. —, Addition and corrections to the paper «Diagonal algebras». Fund. math., 1973, **79**, № 3, 221—222 (РЖМат, 1974, 2А310)
646. —, On splitting-automorphisms of algebras. Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1973, **42**, № 7-8, 302—306 (РЖМат, 1974, 5А332)
647. —, Note on the direct products of some equational classes of algebras. Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1973, **42**, № 11-12, 561-562 (РЖМат, 1974, 8А293)
648. —, On connections between the decomposition of an algebra into sums of direct systems of subalgebras. Fund. Math., 1974, **84**, № 3, 237—244 (РЖМат, 1974, 10А307)
649. —, On the subdirect product of some equational classes of algebras. Math. Nachr., 1974, **63**, 303—305 (РЖМат, 1975, 6А432)
650. —, On relation between decompositions of an algebra into the sum of direct systems of subalgebras. Acta Fac. rerum. natur. Univ. Comen. Math., 1975, Spec. Number, 35—37 (РЖМат, 1975, 5А308)
651. **Pócs J.** Translations and endomorphisms in universal algebras. Acta Fac. rerum natur. comen. Math., 1974, **29**, 95—99 (РЖМат, 1975, 2А371)
652. **Ponasse D.**, Quelques categories de la logique. Bol. Soc. mat. São Paulo, 1961, **16**, № 1-2, 91—102 (РЖМат, 1968, 2А236)
653. **Preller A.**, On the relationship between the classical and the categorical products of algebras. Indag. math., 1968, **30**, № 5, 512—516 (РЖМат, 1969, 11А278)
654. —, On the weak representability of G-complete dimension complemented cylindric algebras. Алгебра и логика, 1969, **8**, № 6, 695—711 (РЖМат, 1971, 1А261)
655. **Prijatelj N.**, O univerzalnih algebrah. Obz. mat. in fiz., 1970, **17**, № 3, 97—108 (РЖМат, 1971, 6А351)
656. Proceedings of the conference on universal algebra. Oct. 1969, Kingston, Queen's Univ., 1970, VI, 275 p. (РЖМат, 1972, 6А322)
657. **Purdea I.**, Généralisation du produit de deux relations binaires. Mathematica (RSR), 1967, **9**, № 1, 147—154 (РЖМат, 1968, 3А287)
658. —, Sur un théorème de Poincaré. Stud. Univ. Babeş — Bolyai, Ser. math.-mech., 1971, **16**, № 2, 9—11 (РЖМат, 1972, 4А357)

659. **Quackenbush R. W.**, On the composition of idempotent functions. Algebra univers., 1971, **1**, № 1, 7—12 (РЖМат, 1972, 2А421)
660. —, Structure theory for equational classes generated by quasiprimal algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **187**, № 1, 127—145 (РЖМат, 1974, 10А310)
661. —, Some classes of idempotent functions and their compositions. Colloq. math., 1974, **29**, № 1, 71—81 (РЖМат, 1974, 11А371)
662. **Radojčič M. D.**, On the embedding of universal aglebras in groupoids holding the law $xy*zu**=xz*yu**$. Мат. весн., 1968, № 3, 353—356 (РЖМат, 1969, 5А258)
663. **Rendi B.**, Théorie des idéaux et des congruences pour des algèbres universalles. I. An. Univ. Timişoara. Ser. sti. math., 1970, **8**, № 2, 199—205 (РЖМат, 1973, 2А292)
664. —, Théorie des idéaux et des congruences pour des algèbres universelles. II. An. Univ. Timişoara. Ser. sti. mat., 1971, **9**, № 1, 109—114 (РЖМат, 1973, 2А293)
665. —, Théorie des idéaux et des congruences pour les algèbres universelles. III. An. Univ. Timişoara, Ser. sci. mat., 1971, **9**, № 2, 201—203 (РЖМат, 1973, 5А319)
666. **Ricci G.**, Cascades of tree-automata and computations in universal algebras. Math. Syst. Theory, 1973, **7**, № 3, 201—218 (РЖМат, 1974, 9А357)
667. **Ritea Howard Barry**, Finite-dimensional ternary algebras. Doct. diss. Los Angeles, Univ. Calif., 1967, 154 p. (РЖМат, 1968, 6А326)
668. **Robinson A.**, Nonstandard arithmetic. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, **73**, № 6, 818—843 (РЖМат, 1968, 11А248)
669. **Rosenberg I.**, Maximal clones on algebras, A and A^r. Rend. Circ. mat. Palermo, 1969 (1970), **18**, № 3, 329—333 (РЖМат, 1972, 3А277)
670. —, Double lexicographic products. Arch. mat., 1970, **6**, № 4, 221—228 (РЖМат, 1972, 4А345)
671. —, The refinement of two isomorphic generalized lexicographic products. Arch. mat., 1970, **6**, № 4, 229—235 (РЖМат, 1972, 4А346)
672. —, Universal algebras with all operations of bounded range. Colloq. math., 1974, **30**, № 2, 177—185 (РЖМат, 1975, 5А305)
673. —, Une correspondence de Galois entre les algèbres universelles et les relations dans le même univers. C. r. Acad. sci., 1974, **A279**, № 15, 581—582 (РЖМат, 1975, 6А431)
674. **Rus T.**, ΣS-algebra of a formal language. Bull. mat. Soc. sci. math. RSR, 1971 (1972), **15**, № 2, 227—235 (РЖМат, 1973, 10А274)
675. **Saade M.**, On some classes of point algebras, Comment. math. Univ. carol., 1971, **12**, № 1, 33—36 (РЖМат, 1972, 1А544)
676. **Sagastume Berra A. E.**, Operaciones, y seudomorfias en un cuero. Publ. Fac. cienc. fisicomat. Univ. nac. La Plata, 1960, № 224, 5—16 (РЖМат, 1967, 1А224)
677. **Samuelson D. J.**, Semiprimal clusters. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1970 (1971), **24**, № 4, 689—701 (РЖМат, 1971, 9А262)
678. —, Some properties of conversion and independence in universal algebra. Doct. diss. Santa Barbara, Univ. Calif., 1969 (РЖМат, 1972, 3А280)
679. **Samuelson J.**, On the conversion of binary algebras into semi-primal algebras. Ann. Scuola norm. super. Pisa, Sci. fis. e mat., 1971, **25**, № 2, 249—267 (РЖМат, 1972, 3А275)
680. **Sangalli A. A. L.**, Une approche transformationelle à l'algèbre universelle. Manuscr. math., 1972, **6**, № 2, 177-205 (РЖМат, 1972, 5А311)
681. **Saracino D.**, m-existentially complete structures. Colloq. math., 1974, **30**, № 1, 7—13 (РЖМат, 1975, 2А373)
682. **Scandura J.**, Concrete examples of commutative nonassociative systems. Math. Teacher, 1966, **59**, № 8, 735—736 (РЖМат, 1967, 9А181)
683. **Schmidt E. T.**, Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen. Berlin, VEB, Dtsch. Verl. Wiss., 1969, 108 S. (РЖМат, 1970, 3А362)

684. **Schmidt J.**, A homomorphism theorem for partial algebras. Colloq. math., 1970, **21**, № 1, 5—21 (РЖМат, 1970, 10А220)
685. —, Über reguläre Mannigfaltigkeiten. Acta sci. math., 1970, **31**, № 3-4, 197—201 (РЖМат, 1971, 10А127)
686. —, On n-permutable equational classes. Acta sci. math., 1972, **33**, № 1-2, 29—30 (РЖМат, 1973, 4А431)
687. —, A general existence theorem on partial algebras and its special cases. Colloq. math., 1964, **14**, 73—87 (РЖМат, 1967, 9А179)
688. —, Unwerselle Algebra. Math. Forchungsinst. Oberwolfach, 1966 (РЖМат, 1968, 7А329)
689. —, Universelle Halbgruppe, Kategorien, freies Product. Math. Nachr., 1968, **37**, № 5-6, 345—358 (РЖМат, 1969, 3А247)
690. —, Direct sums of partial algebras and final algebraic structures. Can. J. Math., 1968, **20**, № 4, 872—887 (РЖМат, 1969, 5А263)
691. **Schofield P.**, Independent conditions for completeness of finite algebras with a single generator. J. London Math. Soc., 1969, **44**, № 3, 413—423 (РЖМат, 1969, 9А152)
692. **Schorr C.-P.**, Freie Assoziative Systeme. Z. angew Math. und Mech., 1968, **48**, № 8, 122—123 (РЖМат, 1969, 9А213)
693. **Schumacher D.**, Zur Existenz freier Algebren einer r-dimensionalen Theorie. Manuscr. math., 1970, **3**, № 3, 227—236 (РЖМат, 1971, 6А356)
694. **Schwarz S.**, O binárnych reláciách na konečnej množine. Sb. Elektro-techn. fak. SVST, Bratislava, 1971, 177 (РЖМат, 1972, 6А325)
695. **Schweizer B.**, S k l a r A., The algebra of multiplaca vector-valued functions. Bull. Amer. Math. Soc. **73**, № 4, 510-515 (РЖМат, 1969, 2А384)
696. **Sekanina M.**, Number of polynomials in ordered algebras. Colloq. math., 1971, **22**, № 2, 181—192 (РЖМат, 1972, 10А130)
697. —, Polynomials in topological algebras. Czechosl. Mat. J., 1971, **21**, № 3, 431—436 (РЖМат, 1972, 2А415)
698. —, Algebraische Operationen in universellen Algebren. Schiftenr. Zentalinst Math. und Mech., 1972, № 16, 83—86 (РЖМат, 1974, 1А306)
699. **Sekaninova A.**, On algebras, having at most two algebraic operations depending on n variables. Čas. pěstov. mat., 1973, **A98**, № 2, 113—121 (РЖМат, 1973, 10А270)
700. —, S e k a n i n a M., On the number of polynomials in ordered algebra. Czechosl. Mat. J., 1971, **21**, № 3, 391—398 (РЖМат, 1972, 3А281)
701. **Senft J. R.**, On weak automorphisms of universal algebras. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math. astron. et phys., 1970, **18**, № 3, 115—118 (РЖМат, 1971, 1А267)
702. —, On weak automorphisms of universal algebras. Rozpr. mat., 1970, № 74, 38 pp. (РЖМат, 1971, 6А353)
703. **Serfati M.**, Sur les algèbres de Post libres. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 8, A611—A612 (РЖМат, 1973, 7А311)
704. **Servi M.**, Un'osservazione sulla definizione di «struttura» su un oggetto. Boll. Unione mat. ital., 1971, **4**, № 1, 103—105 (РЖМат, 1971, 7А377)
705. —, Questioni di algebra universale in una categoria astratta. II. Ann. Univ. Ferrara, 1970, sez. 7, **15**, № 4, 57—92 (РЖМат, 1971, 11А329)
706. **Shafaat A.**, On implicationally defined classes of algebras. J. London Math. Soc., 1969, **44**, № 1, 137—140 (РЖМат, 1969, 5А265)
707. —, Clusters of algebras. Алгебра и логика, 1968, **7**, № 5, 109—116 (РЖМат, 1969, 9А212)
708. —, Subcartesian products of finitely many finite algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, **26**, № 3, 401—404 (РЖМат, 1971, 9А274)
709. —, Characterisation of some universal classes of algebras. J. London. Math. Soc., 1970, **2**, № 3, 385—388 (РЖМат, 1972, 1А531)
710. —, A note on quasiprimitive classes of algebras. J. London Math. Soc., 1970, **2**, № 3, 489—492 (РЖМат, 1972, 2А417)
711. —, Remarks on quasivarieties of algebras. Arch. math., 1973, **9**, № 2, 67—71 (РЖМат, 1974, 11А377)

712. —, On implicational completeness. Can. J. Math., 1974, **26**, № 3, 761—768 (РЖМат, 1975, 1А366)
713. —, On varieties closed and the constructions of power algebras. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, **11**, № 2, 213—218 (РЖМат, 1975, 7А445)
714. **Sheets R. P.**, Trace algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **165**, March, 389—423 (РЖМат, 1972, 9А268)
715. **Sichler J.**, Concerning endomorphisms of finite algebra. Comment. math. Univ. carolinae, 1967, **8**, № 3, 405—414 (РЖМат, 1969, 2А380)
716. **Sidney Morris A.**, Locally compact groups and β-varieties of topological groups. Fund. math., 1973, **78**, № 1, 23—26 (РЖМат, 1973, 8А274)
717. **Sioson F. M.**, Decompositions of generalized algebras. I. Proc. Japan. Acad., 1965, **41**, № 10, 923—926 (РЖМат, 1967, 2А238)
718. —, Decompositions of generalized algebras. II. Proc. Japan. Acad., 1965, **41**, № 10, 927—932 (РЖМат, 1967, 2А239)
719. —, A note on congruences. Proc. Japan. Acad., 1967, **42**, № 2, 103—107 (РЖМат, 1969, 1А326)
720. —, On generalized algebras. Portug. Math., 1966, **25**, № 1-2, 67—90, (РЖМат, 1967, 11А263)
721. **Skala H.**, Irreducibly generated algebras. Fund. math., 1970, **67**, № 1, 31—37 (РЖМат, 1971, 1А266)
722. —, Grouplike Menger algebras. Fund math., 1973, **79**, № 3, 199—207 (РЖМат, 1974, 2А309)
723. **Sklar A.**, Canonical decompositions, stable functions and fractional iterates. Aequat. math., 1969, **3**, № 1-2, 118—129 (РЖМат, 1970, 6А269)
724. **Słominski J.**, On mappings between quasialgebras. Colloq. math., 1966, **15**, № 1, 25—44 (РЖМат, 1968, 1А333)
725. —, Peano-algebras and quasi-algebras. Rozpr. mat., 1968, **57**, 60 pp. (РЖМат, 1969, 2А390)
726. —, On the greatest congruence relation contained in an equivalence relation and its applications to the algebraic theory machines. Colloq. math., 1974, **29**, № 1, 31—43 (РЖМат, 1974, 11А366)
727. **Sobocinski B.**, A new formalization of Newmann algebra. Notre Dame J. Form. Log., 1972, **13**, № 2, 255—264 (РЖМат, 1972, 10А214)
728. —, An equational axiomatization of associative Newmann algebras. Notre Dame J. Form. Log., 1972, **13**, № 2, 265—269 (РЖМат, 1972, 10А215)
729. **Stănescu I.**, Relaţii binare. Gaz. mat. RSR, 1968, **B19**, № 3, 137—141 (РЖМат, 1968, 10А216)
730. **Stanley M. G.**, Generation of full varieties. Mich. Math. J., 1966, **13**, № 1, 127—128 (РЖМат, 1967, 3А162)
731. **Steinen Jürgen von den**, Homomorphismen bei Algebren mit mehrdeutigen Operationen. Math. Z., 1967, **99**, № 2, 182—192 (РЖМат, 1968, 7А328)
732. **Steinfeld O.**, Negatívan rendzett algebrai struktúrák prímelemeiről. Magyar tud. akad. Mat. ês fiz. tud. oszt. közl., 1967, **17**, № 4, 467—472 (РЖМат, 1969, 2А381)
733. —, Primelemente und Primradikale in gewissen verbandsgeordneten algebraischen Strukturen. Acta math. Acad. scient. hung., 1968, **19**, № 3-4, 243—261 (РЖМат, 1969, 5А269)
734. —, On lattice ordered algebras with infinitary operations. Publs. math., 1968, **15**, № 1-4, 234—257 (РЖМат, 1969, 12А416)
735. **Stephenson R. A.**, Jacobson structure theory for Hestens ternary rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **177**, March, 91—98 (РЖМат, 1974, 1А317)
736. **Stockton D. S.**, Essential algebra. Glenview. III. Scott. Foresman, 1973 (РЖМат, 1975, 2А367)
737. **Stone M.**, Subalgebra and automorphism structure in universal algebra; a concrete characterization. Acta sci. math., 1972, **33**, № 1-2, 45—48 (РЖМат, 1973, 5А313)
738. **Sturm T.**, Verbände von Kernen isottoner Abbildungen. Czechosl. Mat. J., 1972, **22**, № 1, 126—144 (РЖМат, 1972, 8А395)

739. —, Einige Characterizationen von Ketten. Czechosl. Mat. J., 1973, **23**, № 3, 375—391 (РЖМат, 1974, 2А308)
740. **Swamy U. Maddana,** Representation of universal algebras by sheaves. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **45**, № 1, 55—58 (РЖМат, 1975, 4А350)
741. **Szácz F.,** On Hashimotoian universal algebras with some properties of Hopf., Math. jap., 1973, **18**, № 3, 229—234 (РЖМат, 1975, 1А367)
742. **Szèp J.,** Sulle algebre universali. I. Rend. mat., 1968, **1**, № 3-4, 363—370 (РЖМат, 1969, 8А227)
743. **Szilágyi M.,** On ordered Ω-groups. Rev. roum. math. pures et appl., 1972, **17**, № 9, 1434—1450 (РЖМат, 1973, 3А325)
744. —, The interior sum in the category of topological Ω-groups. Rend. mat., 1972, **5**, № 3, 463—471 (РЖМат, 1973, 6А340)
745. —, Some properties of topological Ω-groups. Stud. Univ. Babes-Bolyai. Ser. math. mech., 1973, **18**, № 1, 3—12 (РЖМат, 1973, 12А324)
746. —, Some properties of the topological Ω-groups. Stud. Univ. Babes-Bolyai. Ser. math. mech., 1974, **19**, № 1, 3—11 (РЖМат, 1974, 11А376)
747. —, Fixed point theorem in the category of universal algebras. An. Univ. Timişoara. Ser. şti. mat., 1972, **10**, № 2, 215—220 (РЖМат, 1975, 1А369)
748. **Tarkalanov Kr.,** Mächtiger Homomorphismen eines algebraischen Systems über ein anderes. Natura. Ecole norm. super. — Plovdiv, 1971, **4**, № 1, 5—8 (РЖМат, 1972, 8А394)
749. **Teodoru D.,** Generalizarea teoremei a II a de izomorfism in algebre universale. Lucr. şti. Inst. mine petroşani, 1969, Ser. 4, **6**, 43—48 (РЖМат, 1971, 7А371)
750. **Thurston H.,** A property of Mal'cev biquaternary variety. J. Algebra, 1972, **23**, № 3, 493—501 (РЖМат, 1973, 5А315)
751. **Timm J.,** Eine Klasse schwacher binärer Doppelstrukturen. Abhandl. Math., Semin. Univ. Hamburg, 1969, **33**, № 1-2, 102—118 (РЖМат, 1970, 2А291)
752. —, Produkttrene Klassen universeller Algebren. Arch. Math., 1969, **20**, № 5, 485—490 (РЖМат, 1970, 8А268)
753. —, Verbandstheoretische Behandlung *n*-stelliger Gruppen. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1972, **37**, № 3-4, 218—224 (РЖМат, 1973, 1А302)
754. **Topentcharov V. V.,** Sur les algèbres universelles et la définition des categories. Bull. Inst. politechn. Iaşi, 1967, **13**, № 3-4, 5—9 (РЖМат, 1969, 5А262)
755. —, Sur quelques types de structures multiplicatives. Изв. матем. ин-т. Бълг. АН, 1969, **10**, 183—212 (РЖМат, 1970, 10А223)
756. **Traczyk T.,** On Post algebras with uncountable chain of constantses Algebras of homomorphisms. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math. astron. et phys., 1967, **15**, № 10, 673—680 (РЖМат, 1968, 8А282)
757. **Trotha H. V.,** Sobre la commutatividad de un diagrama de homomorfismos. Bol. mat. Costarric., 1970, **1**, № 1, 17—27 (РЖМат, 1973, 8А276)
758. **Truöl K.,** Über die absolute Unabhängigkeit in einstelligen Algebren. Ber. Ges. Math. und Datenverarb., 1971, № 46, 125 (РЖМат, 1972, 6А335)
759. **Tulipani S.,** Cardinali misurabili e algebre semplici in una varietà generata da un'algebra infinitaria $\mathfrak{m}$-funzionalmente completa. Boll. Unione mat. ital.», 1971, **4**, № 6, 882—887 (РЖМат, 1972, 6А328)
760. —, Sulla completezza e sulla categoricità della teoria delle *W*-algebre semplici. Ann. Univ. Ferrara, 1971, sez. 7, **17**, № 1, 11 p (РЖМат, 1973, 3А321)
761. —, Sull'aggiunto del funtore dimenticante tra due classi equazionali. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur., 1973, **54**, № 4, 503—508 (РЖМат, 1975, 2А376)
762. Universal algebra. Bearb. Werner H., Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1973, 25S (РЖМат, 1974, 11А44К)
763. Universalle Algebra. Bearb. Richter M., Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1971, 12S (РЖМат, 1972, 7А267)
764. Universelle und Kategorische Algebra. Bearb. Schumacher D., Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1968, (РЖМат, 1970, 9А239)

765. **Urbanik K.,** Linear independence in abstract algebras. Colloq. math., 1964, **14**, 233—255 (РЖМат, 1967, 9А184)
766. —, On a class of universal algebras. Fund math., 1965, **57**, № 3, 327—350 (РЖМат, 1967, 9А180)
767. —, Remarks on symmetrical operations. Colloq. math., 1966, **15**, № 1, 1—9 (РЖМат, 1967, 2А240)
768. —, On some numerical constants, associated with abstract algebras. I. Fund. math., 1966, **59**, № 3, 263—288 (РЖМат, 1969, 2А382)
769. —, On some numerical constants associated with abstract algebras. II. Fund. math., 1968, 191—210 (РЖМат, 1969, 6А251)
770. —, Remarks on congruence relations and weak automorphisms in universal algebras. Colloq. math., 1969, **20**, № 1, 1—5 (РЖМат, 1969, 11А282)
771. —, A remark on *v**-algebras. Colloq. math., 1969, **20**, № 2, 197—202 (РЖМат, 1970, 2А288)
772. **Ursini A.,** Sulle varietà di algebre con una buona teoria degli ideali. Boll. Unione mat. ital., 1972, **6**, № 1, 90—95 (РЖМат, 1973, 3А319)
773. —, Osservazioni sulle varietà BIT. Boll. Unione mat. ital., 1973, **7**, № 2, 205—211 (РЖМат, 1973, 10А272)
774. —, Sui plurianelli. Boll. Unione mat. ital., 1973, 8, № 2, 355—361 (РЖМат, 1974, 5А334)
775. **Ušan J.,** Definicija jedne konstruktibilnosti u algebraskim sistemima sa konačnim skupom (parcijalnih i višeznačnih) *n*-arnih operacija i neke njene osobine. Мат. весн., 1965, **2**, № 1, 39—48 (РЖМат, 1967, 4А230)
776. **Vancko R. M.,** The spectrum of some classes of free universal algebras. Algebra univers., 1971, **1**, № 1, 46—53 (РЖМат, 1972, 2А418)
777. —, The class of algebras in which weak independence is equivalent to direct sums independence. Colloq. math., 1974, **30**, № 2, 187—191 (РЖМат, 1975, 5А309)
778. **Varlet J. C.,** Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras ‹*A*, *r*›. Bull. Soc. roy. Sci. Liège, 1970, **39**, № 11-12, 575—589 (РЖМат, 1971, 9А277)
779. —, A regular variety of type ‹2, 2, 1, 1, 0, 0›. Acta Fac. rerum natur. comen. Math., 1975, Spec. Number, 51—53 (РЖМат, 1975, 5А301)
780. **Viennot G.,** Factorisations dichotomique des monoides libres et algèbres de Lie libres. C. r. Acad. sci., 1973, № 7, A511—A514 (РЖМат, 1973, 7А309)
781. **Vincze J.,** Vincze M., Sur l'approximabilité des structures algèbrique. C. r. Acad. sci., 1967, **265**, № 5, A167—A168 (РЖМат, 1969, 1А325)
782. **Virág I.,** Systèmes réguliers de Ω-sousgroupes d'un Ω-groupe. I. Stud. Univ. comen. Math., 1975, Spec. Number, 51—53 (РЖМат, 1975, 5А301) 9А267)
783. **Waliszewski,** On closure of sets in quasialgebras. Roczn. Polsk. towarz. mat., 1966, ser. 1, **10**, № 2, 141—143 (РЖМат, 1968, 4А251)
784. —, On an axiomatic characterization of certain quasi-algebras with one partial operation. Roczn. Polsk. towarz. mat., 1967, ser. 1, **11**, № 1, 15—18 (РЖМат, 1969, 2А389)
785. **Weglorz B.,** Equationally compact algebras. I. Fund. math., 1966, **59**, № 3, 289—298 (РЖМат, 1967, 7А331)
786. —, Equationally compact algebras. III. Fund. math., 1967, **60**, № 1, 89—93 (РЖМат, 1968, 12А263)
787. **Wenzel G. H.,** Note on a subdirect representation of universal algebras. Acta math. Acad. Scient. hung., 1967, **18**, № 3-4, 329—333 (РЖМат, 1968, 9А258)
788. —, On Marczewski's six-tuple of constants in finite universal algebras. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math. astron. et phys., 1967, **15**, № 11, 759—764 (РЖМат, 1968, 10А220)
789. —, Konstanten in endlichen, freien universellen Algebren. Math. Z., 1967, **102**, № 3, 205—215 (РЖМат, 1968, 12А252)
790. —, Automorphism groups of unary algebras on groups. Can. J. Math., 1969, **21**, № 5, 1165—1171 (РЖМат, 1971, 1А263)
791. —, Extensions of congruence relations on infinitary partial algebras. A pro-

blem of G. Grätzer. Fund. math., 1970, 67, № 2, 163—169 (РЖМат, 1970, 12А254)
792. —, Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras ‹A, f›. Arch. Math., 1970, 21, № 3, 256—264 (РЖМат, 1971, 2А271)
793. —, On automorphism groups in universal algebras. Queen's Pap. Pure and Appl. Math., 1970, № 25, 268—275 (РЖМат, 1971, 2А272)
794. —, On (𝔖, 𝔄, 𝔐)-atomic compact relational systems. Math. Ann., 1971, 194, № 1, 12—18 (РЖМат, 1972, 3А278)
795. **Werner H.**, Eine Charakterisierung funktional vollständiger Algebren. Arch. Math., 1970, 21, № 4, 381—385 (РЖМат, 1971, 5А356)
796. —, Produkte von Kongruenzklassengeometrien universeller Algebren. Math. Z., 1971, 121, № 2, 11—140 (РЖМат, 1971, 12А406)
797. **Whaley T. P.**, Algebras satisfying the descending chain condition for subalgebras. Pacif. J. Math., 1969, 28, № 1, 217—223 (РЖМат, 1969, 11А277)
798. —, Multiplicity type and congruence relations in universal algebras. Pacif. J. Math., 1971, 39, № 1, 261—268 (РЖМат, 1972, 8А392)
799. **Whitlock H. I.**, The algebra of multiplace functions under composition. Doct. diss. ill. Inst. Technol., 1967, 54 p. (РЖМат, 1968, 4А253)
800. **Wille R.**, Subdirekte Produkte und konjunkte Summen. J. reine und angew. Math., 1969, 239—240, 333—338 (РЖМат, 1970, 8А264)
801. **Wnuk B.** On neglecting automorphisms of algebras. Zesz. nauk WSP Opolu. Mat., 1974, № 17, 107—112 (РЖМат, 1975, 6А435)
802. **Wojdyło B.**, On some problems of J. Solminski, concerning equations in quasialgebras. Colloq. math., 1970, 21, № 1, 1—4 (РЖМат, 1970, 10А221)
803. —, Remarks on lattices of congruence relations of quasialgebras. Colloq. math., 1973, 27, № 2, 187—191 (РЖМат, 1973, 11А307)
804. —, On equationally definable classes of quasialgebras. Acta Fac. rerum natur. Univ. comen. Math., 1975, Spec. Number, 55—57 (РЖМат, 1975, 4А359)
805. **Wolf A.**, Sheaf representations of arithmetical algebras. Mem. AMS, 1974, № 148, 87—93 (РЖМат, 1975, 5А299)
806. **Wuytack F.**, Vrije en absoluut vrije strukturen. Bull. Soc. math. Belg., 1973, 25, № 2, 111—130 (РЖМат, 1974, 7А442)
807. **Yaqub A.**, Primal clusters. Pacif. J. Math., 1966, 16, № 2, 379—388 (РЖМат, 1967, 3А165)
808. —, Semi-primal categorical independent algebras. Math. Z., 1966, 93, № 5, 395—403 (РЖМат, 1967, 3А166)
809. —, On certain classes of — and an existence theorem for — primal clusters. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1966, 20, № 1, 1—13 (РЖМат, 1967, 3А167)
810. —, Some clases of ring-logics. Pacif. J. Math., 1966, 19, № 1, 189—195 (РЖМат, 1968, 1А339)
811. —, Primal clusters and local binary algebras. Ann Scuola norm. super Pisa, Sci. fis. e. mat., 1967, 21, № 2, 111—119 (РЖМат, 1968, 12А260)
812. **Yocom K. L.**, Unique factorization theorems for subalgebras of the incidence algebra. Can. J. Math., 1972, 24, № 5, 967—977 (РЖМат, 1973, 4А433)
813. **Yoeli M.**, Subdirectly irreducible unary algebras. Amer. Math. Monthly, 1967, 74, № 8, 957—960 (РЖМат, 1968, 12А259)
814. **Yoh R. W.**, The M-generated algebraic theories. Tamkang, J. Math., 1973, 4, № 2, 91—100 (РЖМат, 1975, 10А339)
815. **Zajtz A.**, Algebraic objects. Zesz. nauk, Univ. jagiell, 1968, № 167, 67—79 (РЖМат, 1969, 7А269)
816. **Zeigler B. R.**, Maximally independent sets, minimal generating sets and irreducibles. Math. Syst. Theory, 1975, 8, № 2, 176—181 (РЖМат, 1975, 11А399)
817. **Zelinka B.**, Tolerance in algebraic structures. Czechosl. Math., J., 1970, 20, № 2, 179—183 (РЖМат, 1970, 12А249)
818. **Zemberg I.**, Chains of decompositions and n-ary relations. Mat. čass., 1973, 23, № 4, 297—300 (РЖМат, 1974, 4А249)

УДК 517.89

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

В. И. Ведерников, А. С. Феденко

ВВЕДЕНИЕ

Симметрические пространства были открыты в 1925—26 гг. П. А. Широковым [92] и Э. Картаном [108]. За короткое время с 1926 г. по 1930 г. Картан построил глубокую теорию этих пространств, тесно переплетающуюся с теорией полупростых групп Ли. В последующие три десятилетия работы по симметрическим пространствам в значительной мере базировались на идеях Картана. Книга Хелгасона [86] содержит основные результаты теории симметрических пространств, полученные с 1926 г. по 1962 г., и обширную библиографию.

Первые обобщения симметрических пространств появились в работах П. К. Рашевского [37—39]. Номидзу [171] назвал эти пространства редуктивными и получил для них ряд существенных результатов. Изучением редуктивных однородных пространств и их частных классов занимались многие математики. Кроме редуктивных пространств, в дальнейшем появился еще ряд других обобщений симметрических пространств.

В настоящий обзор включены в основном работы, прореферированные в РЖ «Математика» после выхода в свет книги [86], т. е. после 1964 года. Кроме того, рассматриваются некоторые работы, вышедшие ранее, но не получившие отражения в этой книге.

Мы не имели возможности охватить все работы по симметрическим пространствам, написанные в указанный период. Поскольку обзор Д. А. Алексеевского [5] «Группы Ли и однородные пространства» частично затрагивает теорию симметрических пространств, мы сочли возможным опустить или затронуть лишь частично следующие вопросы: редуктивные однородные пространства, дискретные группы движений симметрических пространств, топология симметрических пространств. Не рассматривается в нашем обзоре теория функций на симметрических пространствах и их обобщениях. Опускаем мы и описание сборника «Симметрические пространства» [180], состоящего из довольно разнородных статей, и отсылаем по этому вопросу к реферату Э. Б. Винберга (РЖМат, 1975, 3А657К). Большое число работ посвящено различного рода рекуррентным пространствам. Хотя эти пространства, с формальной точки зрения, и являются обобщениями симметрических пространств, но по существу это особая тема, которой мы не касаемся.

Всюду в дальнейшем используются терминология и обозначения, принятые в книге Хелгасона [86].

§ 1. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Римановы симметрические пространства. Э. Картан [109] классифицировал односвязные неприводимые симметрические римановы пространства и показал, что эта задача равносильна классификации простых вещественных алгебр Ли.

Впоследствии картановская классификация была получена многими авторами и различными способами.

Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{t}+\mathfrak{p}$ — картановское разложение полупростой вещественной алгебры Ли. Э. Картан в своей классификации использовал такую картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$, у которой компактная часть $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{t}$ является максимальной абелевой подалгеброй в $\mathfrak{t}$. Араки [6] получил картановскую классификацию, отправляясь от такой картановской подалгебры $\mathfrak{h}$, для которой $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ есть максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{p}$. Подход Араки имеет ряд преимуществ.

В. Г. Кац [24] установил соответствие между римановыми симметрическими пространствами и некоторыми градуированными бесконечномерными алгебрами Ли и получил из него картановскую классификацию симметрических пространств. Другие выводы картановской классификации содержатся в работах Мураками [166], Уоллаха [185, 186,], Уолла [187].

Новый подход к классификации простых вещественных алгебр Ли, их инволютивных автоморфизмов и систем перестановочных инволютивных автоморфизмов, не использующий корневой техники, развит в работах Л. В. Сабинина [58—60].

Книга Вольфа [190] посвящена глобальной классификации пространств постоянной кривизны и симметрических римановых пространств общего вида. Книга состоит из пяти частей. Часть I имеет вводный характер. Во второй части рассматривается проблема евклидовых пространственных форм. В части III дается изометрическая классификация полных римановых многообразий постоянной положительной кривизны. Симметрическим римановым пространствам общего вида посвящены главы 8, 9, 10, образующие четвертую часть книги. В главе 8 приведены

доказательства основных теорем о симметрических пространствах, в частности, дана картановская классификация односвязных симметрических римановых пространств. В гл. 9 решается проблема пространственных форм для некоторых классов симметрических пространств. А именно, рассматривается компактное односвязное неприводимое риманово симметрическое пространство $M=G/H$, где G — компонента единицы группы изометрий и $\operatorname{rank} G-\operatorname{rank} H\leqslant 1$. Найдены все классы изометричных римановых многообразий, накрываемых указанным пространством M. Эти результаты использованы в гл. 10 для изучения полных локально симметрических пространств неотрицательной секционной кривизны. В пятой части книги проводится глобальное изучение некоторых классов псевдоримановых многообразий.

В ряде работ изучаются симметрические римановы пространства ранга 1. Фрейденталь [117] дал простое доказательство известной теоремы о том, что всякое двухточечно однородное риманово пространство является симметрическим пространством ранга 1 или евклидовым пространством. Другое доказательство этой теоремы предложил Мацумото [164]. Хирцебрух [128] показал, что многообразие M примитивных идемпотентов компактной йордановой алгебры A является компактным симметрическим пространством ранга 1 и движения M индуцируются автоморфизмами алгебры A.

Некомпактные римановы симметрические пространства ранга 1 исчерпываются, за исключением гиперболической октавной плоскости, гиперболическими пространствами $H^n(\mathbf{F})$, где $\mathbf{F}=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или тело кватернионов $\mathbf{K}$ с полными группами движений $U(n,1,\mathbf{F})=O(n,1)$, $U(n,1)$ или $Sp(n,1)$. В диссертации [112] дана классификация связных подгрупп группы $U(n,1,\mathbf{F})$ с точностью до сопряженности.

В работе [111] изучаются римановы симметрические пространства ранга 1 без привлечения структурной теории компактных групп Ли. Используя теорию кривизны и геодезических линий риманова многообразия, автор доказывает следующие утверждения. 1°. Если M — неодносвязное риманово симметрическое пространство ранга 1, то оно есть вещественное проективное пространство постоянной секционной кривизны. 2°. Симметрическое риманово пространство ранга 1 нечетной размерности имеет постоянную секционную кривизну. 3°. Если риманово симметрическое пространство M ранга 1 не является пространством постоянной секционной кривизны, то эндоморфизм R_x касательного пространства к M, определяемый формулой $R_x(Y)=R(X,Y)X$, имеет только два собственных значения: 1 и $^1/_4$.

В. А. Топоногов [71] рассматривает четырехмерное полное аналитическое риманово многообразие M, геодезические линии которого ведут себя следующим образом: 1) В каждой точке

$p \in M$ и для каждого вектора $\lambda \in M_p$ существует двумерная площадка $d(\lambda)$, содержащая λ, такая, что геодезические, выходящие из p в направлении векторов этой площадки, образуют двумерную вполне геодезическую поверхность $F(p, \lambda)$, изометричную двумерной единичной сфере. 2) Любые две поверхности $F(p, \lambda_1)$ и $F(p, \lambda_2)$ либо совпадают, либо не имеют общих точек, кроме p. Примером такого многообразия может служить комплексная проективная плоскость с метрикой Фубини — P_c^2. Доказано, что если в указанном выше многообразии кривизна в каждой точке и в каждом двумерном направлении неотрицательна, то M изометрично P_c^2. Е. Ю. Вайнер [10] усилил теорему Топоногова, сняв условие на кривизну.

В обзорной статье Берже [102] обсуждаются некоторые проблемы глобального изучения компактных симметрических пространств ранга 1.

Риманово многообразие M размерности $4n$ называется кватернионным, если его группа голономии содержится в $\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$. Вольф [189] нашел все односвязные кватернионные симметрические неприводимые римановы многообразия. Оказалось, что они совпадают с симметрическими пространствами вида G/K, где G — компактная простая группа Ли, а K — нормализатор простой регулярной подгруппы A группы G, соответствующей самому длинному корню, и с двойственными пространствами. Установлено взаимно однозначное соответствие между компактными односвязными кватернионными симметрическими неприводимыми римановыми пространствами и компактными односвязными однородными комплексными контактными многообразиями. Д. В. Алексеевский [4] доказал, что всякое однородное компактное кватернионное пространство является симметрическим.

Лус [161] установил связь между компактными тройными йордановыми системами и симметрическими R-пространствами, т. е. факторпространствами полупростых групп Ли по параболическим подгруппам. Макаревич [33] рассматривал в симметрических R-пространствах симметрические области, т. е. такие области, каждая точка которых является изолированной неподвижной точкой инволютивного преобразования области. Найден список всех редуктивных групп в симметрических R-пространствах, имеющих открытые симметрические орбиты. Мостов [165] доказал следующую теорему: Пусть M и M' — компактные локально симметрические римановы пространства неположительной кривизны, не имеющие в локальном разложении де Рама сомножителей ранга 1. Если фундаментальные группы этих пространств изоморфны, то сами пространства изометричны.

Некоторое число работ посвящено изучению вполне геодезических подмногообразий в римановых симметрических пространствах. Пусть M — полное риманово многообразие. Леунг [155, 156] называет вложенное подмногообразие B многообразия M

отражающим, если B полно в индуцированной метрике и является связной компонентой в множестве неподвижных точек некоторой инволютивной изометрии многообразия M. Заметим, что локальный вариант этого понятия был введен Л. В. Сабининым еще в 1958 г. [53]. В работе [156] дана классификация отражающих подмногообразий в односвязных римановых симметрических пространствах.

Пусть M — неприводимое компактное риманово глобально симметрическое пространство, G — максимальная связная группа изометрий и k — максимум секционной кривизны пространства M. Хелгасон [126] показал, что в M существуют вполне геодезические подмногообразия постоянной кривизны k. Любые два таких подмногообразия, имеющие одну и ту же размерность, переводятся друг в друга элементами группы G. Максимальная размерность таких многообразий равна $m+1$, где m — кратность старшего корня симметрического пространства M. Если M односвязно, то группа G действует транзитивно также на множестве всех замкнутых геодезических минимальной длины.

Накагава и Шиохама [170] изучали структуру полного локального симметричного риманова пространства M, допускающего компактную вполне геодезическую поверхность N. При этом предполагалось, что естественный гомоморфизм фундаментальных групп $\pi_1(N)\to\pi_1(M)$ не сюръективен. Пусть M некомпактно и $C(N)$ есть множество раздела, т. е. множество концов x геодезических отрезков $\gamma(s)$, $\gamma(0)\in N$, $\gamma'(0)\perp N$, $\gamma(s_1)=x$ таких, что при $s<s_1$ длина $[\gamma(0), \gamma(s)]$ равна расстоянию $d(\gamma(s), N)$, а при $s>s_1$ длина $[\gamma(0), \gamma(s)]$ больше $d(\gamma(s), N)$. Если $C(N)=\varnothing$, то M изометрично $N\times\mathbf{R}$ и N геодезически выпукло в целом. Если же $C(N)\neq\varnothing$, то $C(N)$ выпукло в целом и дважды накрывается многообразием N. Для случая компактного M получен ряд результатов, в частности, следующий: Предположим, что существует глобально определенное единичное нормальное к N векторное поле и N делит M на две связные компоненты. Тогда $C(N)$ состоит из двух связных компонент, каждая из которых есть компактная вполне геодезическая гиперповерхность.

Известно, что грассманово многообразие $G(n, m)$ всех n-мерных подпространств в евклидовом векторном пространстве E^{n+m} является симметрическим римановым пространством. Ван [194] получил ряд результатов о геодезических линиях пространства $G(n, m)$. Лавсон и Блэйн [151] изучали минимальные гиперповерхности в комплексном и кватернионном проективных пространствах, снабженных стандартными метриками симметрического пространства. Янамото [195] получил ряд результатов для гиперповерхностей локально симметрического риманова пространства, аналогичных известным свойствам гиперповерхностей в пространствах постоянной кривизны.

Грей [121] рассматривает изометрические вложения римановых многообразий в симметрические пространства. Пусть M — полное риманово многообразие, вложенное в риманово симметрическое пространство $\overline{M}$, а K и $\overline{K}$ — секционные кривизны этих многообразий. Изучаются топологические свойства M и $\overline{M}$. В частности показано, что если $\overline{K} \leqslant 0$, $\dim \overline{M} < 2\dim M$ и $\max K \leqslant \leqslant \min \overline{K} - \max \overline{K}$, то M нельзя изометрически вложить в $\overline{M}$. Для случаев односвязного M и полного неодносвязного локально симметрического $\overline{M}$ производятся оценки снизу на диаметр вложенного многообразия M. Вложения симметрических пространств в евклидово пространство рассматривались в работах Келли [140] и Кобаяси [141].

В ряде работ изучаются группы преобразований римановых симметрических пространств. Охиаи [173] доказал следующие две теоремы 1°. Пусть M — риманово симметрическое пространство некомпактного типа, $I(M)$ — группа всех его изометрий, $I(M)^\circ$ — компонента единицы группы $I(M)$ и L — эффективная группа Ли преобразований M. Тогда $L \supset I(M)^0 \Rightarrow I(M) \supset L$. 2°. Пусть M — неприводимое риманово симметрическое пространство не евклидова типа и $D - I(M)^0$ — инвариантный дифференциальный оператор на M. Любое преобразование многообразия M, оставляющее D инвариантным, есть изометрия.

Хонда и Ямагути [132] получили следующий результат. Пусть M — симметрическое однородное пространство простой классической компактной группы Ли G. Группа G содержит подгруппу S^1, свободно действующую на M, тогда и только тогда, когда $M = SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$ (p, q — нечетны). Кроме того, M не допускает свободного действия группы S^1, перестановочного с G.

Нагасава [168] устанавливает некоторые достаточные условия, которым должно удовлетворять риманово симметрическое пространство M для того, чтобы $h(p)^0 = A_p{}^0$, где $h(p)^0$ — компонента единицы линейной группы голономии пространства M, а $A_p{}^0$ — компонента единицы группы всех линейных преобразований касательного пространства M_p, сохраняющих скалярное произведение в M_p, тензор кривизны и тензоры, получаемые из него последовательным ковариантным дифференцированием.

Клиффордовой трансляцией метрического пространства называется такая изометрия, которая перемещает все точки на одно и то же расстояние. Озолс [174] дал прямое доказательство, не использующее классификации симметрических пространств, следующей теоремы: Изометрия g риманова симметрического пространства M является клиффордовой трансляцией тогда и только тогда, когда централизатор g в группе изометрий пространства M действует на M транзитивно.

Ковальский [146] строит поднятие метрики риманова локально симметрического пространства на касательное расслоение. Показано, что поднятая метрика будет локально сим-

метрической лишь тогда, когда исходное пространство локально евклидово.

Несколько работ посвящено вопросу о компактных расширениях римановых симметрических пространств некомпактного типа. Основной здесь следует считать работу Ф. И. Карпелевича [22], в которой компактификация строится следующим образом. В множестве направленных геодезических пространства M вводится риманово расстояние:

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{x \in \gamma_1, x \to \infty} \rho(x, \gamma_2), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \infty.$$

Множество геодезических, находящихся на конечном расстоянии от одной из них, называется к-пучком, на нулевом расстоянии — н-пучком. Совокупность всех н-пучков, содержащихся в данном к-пучке, является римановым симметрическим пространством $E \times M_1$, где E — евклидово пространство, а M_1 — симметрическое пространство некомпактного типа. Пространство M_1 называется компонентой границы пространства M. Компактификация пространства M получается последовательным присоединением к нему компонент границы вида M_1, затем присоединением компонент границы пространств M_1 и т. д.

В дальнейшем было установлено, что компактификация Карпелевича не является единственной: из нее при помощи «склеивания» можно получить новые компактификации. Кроме того, эта компактификация не является и максимальной, т. е. из нее нельзя получить путем склеивания любую компактификацию. Эти факты были установлены в работах Г. Ф. Кушнера [31, 32], который построил компактификацию риманова симметрического пространства некомпактного типа, обладающую более широкой границей, чем компактификация Карпелевича.

Б. П. Комраков [28, 29] провел систематический анализ возможных компактификаций римановых симметрических пространств неположительной кривизны, достаточно хорошо связанных с геометрией геодезических этих пространств. Построена максимальная компактификация и указан способ перехода к другим компактификациям.

2. Псевдоримановы и аффинные симметрические пространства. Первые работы о локальных псевдоримановых и аффинных симметрических пространствах принадлежат П. А. Широкову. Поскольку эти работы не нашли отражения в книге [86], мы приведем здесь их краткое описание и сведения о последующем их изучении. В [93] П. А. Широков нашел все локально симметрические конформно-евклидовы пространства. А. С. Феденко и В. Т. Воднев [84] исследовали группы движений этих пространств. А. П. Широков [88] показал, что геометрия всякого конформно-евклидова симметрического пространства может быть реализована на некоторой гиперквадрике в проективном пространстве.

В работе [95] П. А. Широков нашел все локально симметрические псевдоримановы пространства, являющиеся гиперповерхностями в псевдоевклидовых пространствах. А. С. Феденко [85] исследовал группы движений, а И. П. Егоров [18] — группы гомотетических движений этих пространств.

В статьях [96, 97] П. А. Широков детально изучил еще один класс локально симметрических псевдоримановых пространств, в частности, построил их тригонометрию. Работа [94] посвящена описанию локальных проективно-евклидовых симметрических пространств.

Некоторые классы локально симметрических псевдоримановых и аффинных пространств получены А. П. Широковым в связи с изучением пространств над алгебрами [89—91].

В главе 12 книги [190] Вольф рассматривает локально изотропные псевдоримановы пространства. Установлена связь этих многообразий с локально симметрическими пространствами и описаны некоторые классы таких многообразий.

Янь Чжи-та [196] получил некоторые результаты, упрощающие классификацию Берже [101] однородных симметрических пространств односвязных полупростых некомпактных групп Ли. Некоторые классы псевдоримановых симметрических пространств с простыми группами движений изучал Греку [123, 124].

Каэн и Ленажан [104] нашли метрики всех четырехмерных симметрических псевдоримановых пространств сигнатуры Лоренца (1,3). В работе Каэна и Уоллаха [107] классифицированы все односвязные симметрические псевдоримановы пространства сигнатуры $(1, n)$. Если такое пространство неразложимо, то группа его движений полупроста или разрешима. Так как для случая полупростых групп классификация известна (см., например, [101]), то основное внимание в работе [107] уделено случаю разрешимой группы движений. Вводится понятие симметрической четверки (с. ч.) $q=(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}, \mathfrak{p}, B)$, где $\mathfrak{g}$ — конечномерная вещественная алгебра Ли, $\mathfrak{t}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, не содержащая ненулевых идеалов $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$, дополнительное к $\mathfrak{t}$, $ad\mathfrak{t}$ — инвариантное и такое, что $\mathfrak{t}=[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, B — невырожденная, $ad\mathfrak{t}$ — инвариантная квадратичная форма на $\mathfrak{p}$. Изучение односвязных псевдоримановых симметрических пространств равносильно изучению с. ч. Пространство будет неразложимым тогда и только тогда, когда соответствующая с. ч. неразложима, т. е. подпространство $\mathfrak{p}$ не является прямой суммой $ad\mathfrak{t}$-инвариантных, B-ортогональных ненулевых подпространств.

В [105] Каэн и Парке продолжают изучение неразложимых с. ч. Если центр $\mathfrak{z}$ алгебры $\mathfrak{g}$ есть максимальное изотропное подпространство в $\mathfrak{p}$, то q называется с. ч. с максимальным центром. Показано, что для q с максимальным центром алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста или разрешима. Дана классификация с. ч. с максимальным центром и нильпотентной $\mathfrak{g}$. Используя результаты работы [105], Парке [175] завершает классификацию односвязных симметрических псевдоримановых пространств сигнатуры $(2, n)$.

В. В. Астраханцев [7] описал все односвязные симметрические псевдоримановы пространства сигнатуры $(1, n)$, имеющие слабо неприводимую группу голономии. В. Н. Абдуллин [2] нашел метрики всех четырехмерных симметрических псевдоримановых пространств.

Пусть φ_1 и φ_2 — два коммутирующих инволютивных автоморфизма простой компактной группы Ли G, а G_1 и G_2 — соответствующие некомпактные вещественные формы группы G^c. Конлон ввел понятие «аффинной системы корней» [113] и дал классификацию таких систем [114]. Из этой классификации вытекает, в частности, классификация Берже [115] и некоторые другие результаты. Например, даются необходимые и достаточные условия того, чтобы дуальные псевдоримановы симметрические пространства $G_1/G_1 \cap G_2$ и $G_2/G_1 \cap G_2$ были неприводимыми или псевдокелеровыми пространствами.

В. В. Астраханцев [8] получил глобальную классификацию псевдоримановых симметрических пространств M, допускающих плоское вполне геодезическое подмногообразие размерности $\dim M-1$.

Параллельное распределение A на псевдоримановом многообразии M Каэн и Парке [106] называют аффинным, если $R(X, Y)Z=0$ для любых векторных полей X, Y, Z, принадлежащих A. Параллельное распределение А называется максимальным, если для любого параллельного распределения B из $B\supset A$ следует $B=A$ и, кроме того, A не допускает дополнительного параллельного распределения. Указан способ классификации связных неприводимых симметрических псевдоримановых пространств, допускающих максимальное аффинное параллельное распределение A, для которого распределение $A^0=A\cap A^\perp$ не содержит параллельных векторных полей.

Нагасава [169] изучал условия, при которых данная линейная группа может служить группой изотропии односвязного аффинного симметрического пространства.

Хокама [131] доказал следующую теорему: Пусть G связная полупростая группа Ли и G/H — эффективное псевдориманово симметрическое пространство. Тогда группа всех аффинных преобразований пространства G/H совпадает с группой всех изометрий и имеет конечное число компонент.

А. А. Ривилис [40, 42] вводит понятие однородной локально симметрической области следующим образом. Пусть $M'=G'/H'$ — произвольное однородное пространство и $x_0 \in M'$. Предположим, что подгруппа G группы G' транзитивна в некоторой окрестности точки x_0. Тогда G-орбита точки x_0 называется однородной областью в M'. Изучаются однородные области в обобщенном конформном пространстве (связанном с псевдоевклидовым прост-

17—5221

ранством), которые обладают инвариантной локально симметрической аффинной связностью. В работе [41] рассмотрены однородные локально симметрические области в однородных пространствах, связанных с полупростыми йордановыми алгебрами.

Леджер и Яно [154] указывают способ поднятия линейной связности, заданной на многообразии M класса C^∞, в касательное расслоение TM. Поднятая связность будет локально симметрической тогда и только тогда, когда этим свойством обладает исходная связность на M.

3. Однородные симметрические пространства. Согласно Э. Картану и Номидзу [171], однородное пространство G/H называется симметрическим, если существует инволютивный автоморфизм φ группы Ли G такой, что $G_0{}^\varphi \subset H \subset G^\varphi$, где G^φ — группа всех φ-неподвижных точек, а $G_0{}^\varphi$ — компонента единицы группы G^φ. Основные свойства однородных симметрических пространств описаны в 11 главе книги Кобаяси и Номидзу [142].

Однородным симметрическим пространствам посвящена книга Луса [160]. Поскольку эта книга освещена в РЖМат, 1970, 11А314 К слишком кратко, мы приведем здесь наиболее существенные ее моменты. Основная идея Луса состоит в том, чтобы построить теорию симметрических пространств в полной аналогии с теорией групп Ли. Приведем определение симметрического пространства по Лусу, которое мы будем называть Л-симметрическим пространством. Многообразие M с умножением называется Л-симметрическим пространством, если выполнены следующие условия: 1) $x \cdot x = x$; 2) $x \cdot (x \cdot y) = y$; 3) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$; 4) для любой точки x существует такая окрестность U, что $x \cdot y = y \Rightarrow y = x$ при $y \in U$.

Устанавливается связь между понятиями однородного симметрического пространства и Л-симметрического пространства. Пусть $M = G/H$ однородное симметрическое пространство, порожденное инволютивным автоморфизмом φ группы G. Введя в многообразие M умножение по формуле $(xH) \cdot (yH) = x\varphi(x^{-1}) \times \varphi(y) H$, мы превратим M в Л-симметрическое пространство. Обратно, пусть M — связное Л-симметрическое пространство и $x \in M$. Отображение $s_x : M \to M$, $s_x(y) = x \cdot y$ называется симметрией в точке x, а связная группа Ли G, порожденная всеми $s_x s_y$, называется группой сдвигов пространства M. Показано, что группа G транзитивна на M и возникающее при этом однородное пространство G/H является симметрическим. Кроме того, M и G/H изоморфны как Л-симметрические пространства.

Пусть M — Л-симметрическое пространство. Тогда касательное пространство M_x в произвольной точке $x \in M$ можно снабдить структурой тройной системы Ли. Таким образом получается аналог алгебры Ли, весьма убедительный в виду следующей теоремы: Категория связных односвязных Л-симметрических пространств эквивалентна категории конечномерных вещественных тройных систем Ли. Подпространством Л-симметрического пространства M называется подмногообразие N, устойчивое относительно умножения и являющееся с индуцированным умножением Л-симметрическим пространством. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех связных подпространств пространства M, проходящих через некоторую точку x, и множеством всех подсистем тройной системы M_x. Произведение $M \times M$ является Л-симметрическим пространством. Подпространство R пространства $M \times M$ называется конгруэнцией, если R есть отношение эквивалентности в M. Классы эквивалентности являются подпространствами в M и множество этих классов есть Л-симметрическое пространство.

Точки x и y Л-симметрического пространства M называются коммутирующими, если преобразование $s_x s_y$ принадлежит центру группы сдвигов. Множество $C = \{(x, y) \mid x$ и y коммутируют$\}$ является конгруэнцией и любой класс эквивалентности называется центром пространства M. Центр снабжается структурой абелевой группы, и накрытия $\alpha : M \to M'$ находятся в естественном соответствии с дискретными подгруппами центра.

Второй том книги Луса [160] посвящен компактным Л-симметрическим пространствам, в частности, их классификации. В соответствии с основной идеей для компактных пространств строятся аналоги понятий, хорошо известных для компактных групп Ли: максимальные торы, система корней, группа Вейля и др. Дан полный вывод классификации компактных симметрических пространств, чего нет в книге Хелгасона [86]. В последней главе книги Луса рассматривается вопрос о связи между эрмитовыми симметрическими пространствами и йордановыми алгебрами.

В работе [162] Лус показал, что группа сдвигов связного Л-симметрического пространства действует транзитивно на множестве всех максимальных компактных подпространств. Хельвиг [127] установил связь Л-симметрических пространств с йордановыми алгебрами. Тилгнер [183, 184] изучал возможности приложений Л-симметрических пространств в физике.

Изучению однородных симметрических пространств посвящена работа Коха [144]. В первой ее части выясняется топологическая структура таких пространств. Основной здесь является следующая теорема, полученная ранее Берже [101] с некоторыми пробелами: Всякое однородное симметрическое пространство расслаивается над компактным симметрическим римановым пространством со слоями, гомеоморфными евклидову пространству и сохраняющимися при симметриях. Существенным является следующий результат: Группа G^φ неподвижных точек инволютивного автоморфизма φ произвольной группы Ли G имеет конечное число связных компонент, и если G односвязна, то группа G^φ связна. Получены также некоторые результаты о симметрических однородных пространствах G/H, для которых группа G разрешима. Показано, в частности, что такое пространство гомеоморфно тору. Во второй части работы Коха изучается локальная структура некоторых типов симметрических однородных пространств. В приложении Кох дает простое доказательство следующей теоремы: Если G есть группа Ли с конечным числом связных компонент и Φ — конечная группа автоморфизмов группы G, то существует максимальная компактная подгруппа K группы G, инвариантная относительно Φ.

Каэн, Лемер и Парке [103] показали, что с каждым симметрическим однородным пространством $M=G/H$ можно связать другие симметрические пространства, группы движений которых являются некоторыми естественными расширениями группы Ли G. Если пространство M псевдориманово, то ассоциированные с ним пространства также допускают некоторое семейство инвариантных псевдоримановых метрик.

И. Л. Кантор, А. И. Сирота и А. С. Солодовников [21] рассмотрели один класс однородных симметрических пространств с аффинной связностью, для которых группа сдвигов включается в более широкую группу Ли преобразований пространства, отличную от группы всех аффинных преобразований.

Л. В. Сабинин [57] показал, что классификация локальных однородных пространств G/H с полупростыми или компактными группами G и H сводится к нахождению всех вполне геодезических подмногообразий в симметрических пространствах с простыми основными группами.

4. Ограниченные симметрические области. Ограниченное открытое связное подмножество D пространства $\mathbf{C}^n$ называется ограниченной симметрической областью, если каждая точка $x\in D$ является изолированной неподвижной точкой некоторого инволютивного голоморфного диффеоморфизма области D на себя. Э. Картан [110] доказал, что ограниченные симметрические области являются эрмитовыми симметрическими пространствами некомпактного типа и исчерпывают все такие пространства. Тем самым была получена классификация всех ограниченных симметрических областей.

Вольф [188] дал новый вывод классификации эрмитовых симметрических пространств, не зависящий от общей классификации симметрических пространств. Другой вывод классификации ограниченных симметрических областей получил Сюй И-чао [70]. Этот вывод основан на доказанной автором теореме о полупростоте максимальной связной группы аналитических автоморфизмов ограниченной симметрической области.

Кораньи и Вольф [145, 193] рассматривают реализацию ограниченных симметрических областей в виде областей Зигеля второго и третьего рода (см. [35]). Авторы исходят из возможности вложения ограниченных симметрических областей в двойственные компактные симметрические пространства. Явно строятся обобщенные преобразования Кэли — отображения ограниченных симметрических областей на их реализации в виде областей Зигеля.

Сатаке [176, 177] решает вопрос о классификации всех однородных голоморфных вложений симметрических областей D в виде вполне геодезических подмногообразий в полуплоскость Зигеля $З_p$. Вопрос сводится к следующей алгебраической задаче. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли полной группы автоморфизмов области D и $\mathfrak{sp}(2p, \mathbf{R})$ — алгебра Ли, отвечающая полуплоскости Зигеля $З_p$. Надо классифицировать представления $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{sp}(2p, \mathbf{R})$, перестановочные с операторами в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{sp}(2p, \mathbf{R})$, задающими комплексную структуру в области, что и делается в указанных статьях. Используя метод Сатаке, Ихара [133—135] решает задачу об однородных голоморфных вложениях комплексных симметрических областей друг в друга для случая особых областей, т. е. областей, связанных с особыми простыми группами Ли. Этой же задачей занимался Мураками [167]. В ряде работ [137—139] Исэ решал вопрос о реализации ограниченных симметрических областей исключительного типа. В частности, в [139] получена матричная реализация этих областей.

Пусть V — конечномерное комплексное векторное пространство и A — векторное пространство всех полиномиальных отображений из V в V. Кёхер [143] вводит на A структуру алгебры Ли и устанавливает биекцию между множеством всех ограниченных симметрических областей в V и некоторым классом подалгебр алгебры A.

Хирцебрух [130] строит следующую реализацию ограниченных симметрических областей. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая некомпактная вещественная алгебра Ли. Для $\forall u\in\mathfrak{g}$, обладающего свойством $(adu)^3=-adu$, определяется разложение $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}_u+\mathfrak{n}_u$, где $\mathfrak{m}_u$ — централизатор u, а $\mathfrak{n}_u=\{x\in\mathfrak{g}\mid[u[u,x]]=-x\}$. Это разложение обладает свойством симметрической пары, определяемой инволюцией $V_u=id-2(adu)^2$. $\mathfrak{n}_u$ является касательным пространством в точке u к многообразию $M=\{x\in\mathfrak{g}\mid(adx)^3=-adx,\ \langle V_u x, x\rangle=0\}$, где $\langle\ ,\ \rangle$ — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. Связная компонента группы автоморфизмов действует транзитивно на каждой компоненте M. Показано, что построенные таким образом однородные пространства являются эрмитовыми симметрическими и все неприводимые эрмитовы симметрические пространства могут быть получены указанным способом.

Известно (см., например, РЖМат, 1961, 4Б548), что с каждой компактной йордановой алгеброй u можно связать ограниченную симметрическую область Z в пространстве $u\pm iu$. Хирцебрух [129] предлагает конструкцию, позволяющую получить другие ограниченные симметрические области как сечения области Z некоторыми подпространствами. Связи йордановых алгебр с симметрическими пространствами посвящена и работа

В. И. Семянистого [63]. Здесь указывается распространение на вещественный случай понятия области Зигеля. Частный случай этой конструкции с использованием полупростых йордановых алгебр приводит к реализации классических симметрических римановых пространств некомпактного типа.

Ограниченная симметрическая область M допускает голоморфное вложение в комплексное эрмитово симметрическое пространство M^*, двойственное M, причем действие связной компоненты G группы движений M продолжается на M^*. Такеути [182] изучает устройство орбит группы G в M^*. Друкер [116] исследует структуру орбит группы движений некомпактного особого эрмитова симметрического пространства на двойственном к нему компактном эрмитовом симметрическом пространстве.

Бэйли и Борель [99, 100] изучали компактификации фактор-пространства D/Γ, где D — комплексная симметрическая область, а Γ — арифметическая дискретная группа аналитических автоморфизмов области D (в смысле Бореля). Показано, что существует компактификация D/Γ, являющаяся аналитическим нормальным пространством, которую можно вложить в проективное пространство при помощи автоморфных форм. Сатаке [178] установил условия, при выполнении которых голоморфное отображение $\overline{\rho}:D/\Gamma\to D'/\Gamma'$ симметрических областей, индуцированное гомоморфизмом $\rho:G\to G'$, продолжается на компактификации этих пространств в смысле Бэйли — Бореля [100]. И. И. Пятецкий — Шапиро [36] построил для факторпространства комплексного симметрического пространства по арифметической группе компактификацию, обладающую комплексной структурой.

Готшлинг [118] дал описание всех отражений для классических областей, т. е. таких автоморфизмов, для которых множество неподвижных точек есть аналитическое подмногообразие коразмерности 1.

В работе [179] проведено глобальное изучение псевдоэрмитовых симметрических пространств M с полупростой группой движений. Доказано, что все они односвязны. Строится вложение пространства M в соответствующее компактное эрмитово симметрическое пространство. Описывается реализация M в виде обобщенной ограниченной области.

Харрис [125] рассматривает подпространства в пространстве линейных отображений одного гильбертова пространства в другое, замкнутые в топологии, определяемой операторной нормой, и замкнутые относительно операции $A\to AA^*A$ (I^*-алгебры). Изучаются изоморфизмы симметрических областей, связанных с I^*-алгебрами.

5. Пространства образов симметрии. Еще в первой своей работе по симметрическим пространствам [108] Э. Картан заметил, что «эти пространства могут быть представлены геометрическими образами, допускающими простое определение в обычном пространстве (трех или большего числа измерений)». Эта идея была широко развита в работах Б. А. Розенфельда и его учеников. Мы приведем краткий обзор наиболее существенных из этих работ. Геометрические образы, упомянутые Картаном, Б. А. Розенфельд называет образами симметрии и в различных своих работах определяет различными, не эквивалентными способами. Приведем определение из книги [46]. Образом симметрии однородного пространства G/H называется геометрический образ Γ этого пространства, стационарная группа которого совпадает с множеством неподвижных точек некоторого инволютивного автоморфизма группы G. Из этого определения видно, что множество всех образов симметрии, полученных из данного образа Γ любыми преобразованиями группы G, есть однородное симметрическое пространство с основной группой G — пространство образов симметрии. Обратно, любое однородное симметрическое пространство G/K можно реализовать в виде пространства образов симметрии однородного пространства G/H.

В обзорной статье [43] дается описание пространств образов симметрии в проективных, а также обычных и обобщенных неевклидовых пространствах. Тем самым была частично решена задача локальной классификации однородных симметрических пространств с простыми основными группами. Полное решение этой задачи получили А. С. Феденко [73] для классических групп и М. Берже [101] для всех простых групп Ли. В работе [45] Б. А. Розенфельд дает для всех однородных симметрических пространств с простыми основными группами описание на языке образов симметрии.

Большая серия работ Б. А. Розенфельда и его учеников посвящена изучению пространств образов симметрии с неполупростыми основными группами. В книге [44] описаны образы симметрии евклидовых и псевдоевклидовых пространств. Работа [49] Б. А. Розенфельда и Л. М. Карповой имеет в. данном вопросе большое значение и мы даем ее краткий обзор

Полунеевклидовым пространством $S_n^{m_0m_1\dots m_{r-1}}$ называется n-мерное вещественное проективное пространство, в котором задан абсолют, состоящий из таких конусов второго порядка $Q_0, Q_1,\dots, Q_{r-1}$, что Q_a обладает $(n-m_a-1)$-мерной вершинной плоскостью A_a и находится в вершинной плоскости A_{a-1} конуса Q_{a-1}, и невырожденной квадрики Q_r в вершинной плоскости A_{r-1} конуса Q_{r-1}. Если Q_0 есть пара совпавших гиперплоскостей, то множество точек полунеевклидова пространства, не лежащих в этой гиперплоскости, называется полуевклидовым пространством $R_n^{m_1m_2\dots m_{r-1}}$. В полунеевклидовом и полуевклидовом пространствах с помощью абсолюта вводится метрика.

Полуримановым пространством $V_n^{m_1 m_2 \ldots m_r}$ называется такое пространство аффинной связности A_n, в каждом касательном аффинном пространстве которого задана метрика полуевклидова пространства $R_n^{m_1 m_2 \ldots m_r}$, инвариантная относительно параллельного перенесения в A_n. В работе [49] решается вопрос о введении инвариантной полуримановой метрики в некоторые неполупростые группы Ли. Если такая метрика введена на некоторой группе G, то она индуцирует метрику во всех пространствах образов симметрии, в которых действует группа G. В [49] рассмотрены следующие группы:

1. Группа евклидовых движений.
2. Группа движений квазиэллиптического пространства $S_n{}^m$, т. е. полунеевклидова пространства, абсолют которого состоит из мнимого гиперконуса Q_0 с $(n-m-1)$-мерной вершинной плоскостью A_0 и мнимой квадрики Q_1 в этой плоскости.
3. Группа движений флагового пространства F_n, т. е. полуевклидова пространства, абсолют которого состоит из вложенных друг в друга дважды взятых плоскостей всех размерностей от гиперплоскости до точки.
4. Группа движений полуэллиптического пространства общего вида $S_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}$, т. е. полунеевклидова пространства, все конусы $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{r-1}$ и квадрика Q_r которого мнимы.

В книге [44] Б. А. Розенфельд положил начало систематическому изучению пространств над алгебрами и их связям с симметрическими пространствами. В [44] рассмотрены аффинные, евклидовы, проективные и неевклидовы пространства над алгебрами комплексных и двойных чисел, кватернионов и антикватернионов, а также над алгебрами матриц. Найдены образы симметрии этих пространств. Изучению пространств над алгебрами и образов симметрии в них посвящены многочисленные работы учеников Б. А. Розенфельда. Не имея возможности описать все эти работы, мы ограничимся перечислением некоторых из них: [1, 9, 15, 17, 19, 23, 48, 52, 87].

Большое число работ, посвященных симметрическим однородным пространствам с неполупростыми основными группами, опирается на понятие предельного перехода. Основой для этих исследований послужила работа [136] Инёню и Вигнера, в которой было введено понятие сжатия группы Ли. А. С. Феденко [72, 74, 75, 85] изучал группы Ли и однородные пространства, получаемые в результате предельного перехода, и их связи с симметрическими пространствами.

Б. А. Розенфельд и Л. М. Карпова рассмотрели следующую конструкцию. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли и φ — ее инволютивный автоморфизм. В алгебре $\mathfrak{g}$ можно выбрать базис $X_1, \ldots, X_m, Y_{m+1}, \ldots, Y_r$ так, что $\varphi(X_i)=X_i$, $\varphi(Y_\alpha)=-Y_\alpha$. Тогда структурные формулы алгебры $\mathfrak{g}$ примут вид

$$[X_i, X_j]=C_{ij}^k X_k, \quad [X_i, Y_\alpha]=C_{i\alpha}^\beta Y_\beta, \quad [Y_\alpha, Y_\beta]=C_{\alpha\beta}^l X_l.$$

Сделав замену базиса $\tilde{X}_i=X_i$, $\tilde{Y}_\alpha=tY_\alpha$, мы получим формулы

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]=C_{ij}^k \tilde{X}_k, \; [\tilde{X}_i, \tilde{Y}_\alpha]=C_{i\alpha}^\beta \tilde{Y}_\beta, \; [\tilde{Y}_\alpha, \tilde{Y}_\beta]=t^2 C_{\alpha\beta}^l \tilde{X}_l.$$

Полагая теперь $t=0$, мы получаем структурные формулы

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]=C_{ij}^k \tilde{X}_k, \; [\tilde{X}_i, \tilde{Y}_\alpha]=C_{i\alpha}^\beta \tilde{Y}_\beta, \; [\tilde{Y}_\alpha, \tilde{Y}_\beta]=0$$

алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, которая называется предельной или сжатой по отношению к исходной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Автоморфизм φ алгебры $\mathfrak{g}$ естественно индуцирует инволютивный автоморфизм в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$. Возникающие при этом симметрические пространства называются базисными пространствами алгебры $\mathfrak{g}$. В работе [50] указанная процедура применяется ко всем простым компактным алгебрам Ли. Получаемые в результате алгебры Ли называются квазипростыми так же, как и соответствующие им группы Ли. Б. А. Розенфельд и М. П. Замаховский [48] установили связь между квазипростыми группами Ли и йордановыми алгебрами. Образы симметрии в предельных пространствах изучались в следующих работах Б. А. Розенфельда и его учеников: [3, 16, 20, 34, 47, 51 и др.]. В заключение отметим книгу [46] Б. А. Розенфельда, седьмая глава которой посвящена квазипростым группам Ли и образам симметрии.

§ 2. ОБОБЩЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Как уже говорилось во введении, первым обобщением симметрических пространств были редуктивные однородные пространства. Редуктивные пространства, подобно симметрическим однородным пространствам, обладают инвариантными аффинными связностями с хорошими геометрическими свойствами. В то же время класс редуктивных пространств настолько широк, что охватывает большинство однородных пространств, представляющих геометрический интерес. Настоящий обзор не содержит систематического описания работ по редуктивным однородным пространствам.

Другие обобщения симметрических пространств связаны с отказом от некоторых свойств симметрии s_x или автоморфизма φ, участвующих в определении симметрического пространства. В настоящем параграфе описано четыре вида таких обобщений: субсимметрические пространства, пространства с отражениями, s-многообразия и φ-пространства. Кроме того, в последнем пункте рассматриваются полусимметрические пространства, в которых обобщается свойство тензора кривизны быть ковариантно постоянным. Существуют и другие, еще более формальные обобщения симметрических пространств, на которых мы останавливаться не будем.

1. Субсимметрические пространства. Л. В. Сабинин [53, 54] ввел понятие субсимметрического пространства следующим образом. Субсимметрией в точке x риманова (псевдориманова) многообразия M называется инволютивная изометрия s_x, оставляющая точку x неподвижной. Таким образом, в отличие от симметрического пространства, изолированность неподвижной точки не требуется. Линейное преобразование $(ds_x)_x$ касательного пространства M_x имеет два инвариантных подпространства E^m и E^{n-m}, соответствующих собственным значениям 1 и -1. Число m называется порядком субсимметрии. Риманово (псевдориманово) многообразие M называется субсимметрическим порядка m, если с каждой его точкой x связана субсимметрия s_x порядка m, причем отображение $s:x\mapsto s_x$ многообразия M в группу его изометрий является дифференцируемым. Следует заметить, что Л. В. Сабинин приводит исследование, в основном, в локальном аспекте. Показано, что распределение площадок E^m инволютивно. Максимальные интегральные многообразия этого распределения являются вполне геодезическими поверхностями и называются зеркалами. Доказано, что субсимметрическими являются однородные римановы пространства с нетривиальными группами вращений и однородные псевдоримановы пространства с неразрешимыми группами вращений. Дана локальная классификация однородных римановых субсимметрических пространств с одномерными зеркалами. Осесимметричные пространства изучались также в работе Л. В. Сбитневой [62]. Л. В. Сабинин [57] детально изучил n-мерные однородные римановы пространства с $(n-1)$-мерными зеркалами.

В работе [56] Л. В. Сабинин ввел понятие трисимметрического пространства как такого n-мерного риманова многообразия M, с каждой точкой которого связано три попарно ортогональных вполне геодезических зеркала, так что сумма их размерностей равна n. Показано, что трисимметрическое пространство является однородным пространством G/H, а отражения в его зеркалах порождают в группе G три перестановочных инволютивных автоморфизма φ_1, φ_2, $\varphi_3=\varphi_1\varphi_2$, оставляющих подгруппу H инвариантной и таких, что множество их неподвижных точек есть подгруппа, содержащаяся в H. Обратно, если в группе G однородного риманова пространства $M=G/H$ имеется три автоморфизма с указанными свойствами, то M — трисимметрическое пространство. Детально исследованы однородные трисимметрические римановы пространства G/H с полупростыми и компактными группами G и H. В работе [61] Л. В. Сабинин дал полную классификацию трисимметрических пространств с простыми компактными группами движений.

2. Пространства с отражениями. В работах [157—159, 163] Лус изучал обобщения Л-симметрических пространств. Пространством с отражениями называется дифференцируемое многообразие M с умножением, удовлетворяющим условиям: 1) $x\cdot x=x$; 2) $x\cdot(x\cdot y)=y$; 3) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot(x\cdot z)$. Итак, в отличие от Л-симметрического пространства в пространстве с отражениями точка x может быть неизолированной неподвижной точкой симметрии $s_x:y\mapsto x\cdot y$. Пусть G/H — симметрическое однородное пространство, порожденное инволютивным автоморфизмом φ и F — связное многообразие, на котором группа H действует слева. Тогда расслоенное пространство $G\times_H F$ над G/H со слоем F, ассоциированное с главным расслоением $G(G/H,\ H)$, можно превратить в пространство с отражениями. Основной результат работы [157] состоит в доказательстве обратного утверждения: всякое пространство с отражениями может быть получено указанным способом. Приведем краткую схему доказательства последнего утверждения. Пусть M — пространство с отражениями. Дифференциал симметрии определяет тензорное поле A типа $(1,1)$ на M. Так как $A^2=id$, то возникает два взаимно дополнительных подрасслоения T^+ и T^- в $T(M)$:

$$T^+=\{X\in T(M)\,|\,AX=X\},\quad T^-=\{X\in T(M)\,|\,AX=-X\}.$$

Доказывается, что подрасслоение T^+ вполне интегрируемо и его максимальные интегральные многообразия называются слоями. Наконец, показано, что группа сдвигов G, порожденная преобразованиями s_xs_y, действует транзитивно на множестве слоев, и M можно отождествить с расслоенным пространством над G/H, где H — подгруппа группы G, сохраняющая фиксированный слой.

В статьях [158, 159] продолжено изучение пространств с отражениями. Пусть J — оператор проектирования на T^- и тензорное поле S задается формулой

$$S(X,Y)=J[JX,Y]+J[X,JY]-[JX,JY]-J[X,Y].$$

Рассматриваются пространства с отражениями, для которых $S=0$ (пространства с минимальным кручением). В таких пространствах подрасслоение T^- также вполне интегрируемо. С другой стороны, рассматриваются такие пространства M с отражениями, в которых линейная оболочка векторов $S(X,Y)$, где $X,Y\in T_p(M)$ совпадает с $T_p^+(M)$ (пространства с максимальным кручением). Такие пространства характеризуются тем, что группа G действует в них транзитивно.

Лус ввел обобщение пространств с отражениями [163]. Пусть M — гладкое многообразие, Σ — компактная группа Ли и $\mu: M\times\Sigma\times M\to M$ — гладкое отображение. Тройка (M,Σ,μ) называется Σ-пространством, если операция $x\underset{\varphi}{\perp}y=$

$=\mu(x, \varphi, y)$ $(x, y \in M, \varphi \in \Sigma)$ обладает следующими свойствами:

$$x \underset{\varphi}{\perp} x = x; \quad x \underset{e}{\perp} y = y; \quad x \underset{\varphi}{\perp} (x \underset{\psi}{\perp} y) = x \underset{\varphi\psi}{\perp} y;$$

$$x \underset{\varphi}{\perp} (y \underset{\psi}{\perp} z) = (x \underset{\varphi}{\perp} y) \underset{\varphi\psi\varphi^{-1}}{\perp} (x \underset{\varphi}{\perp} z),$$

где e — единица группы Σ. Указывается следующий способ построения Σ-пространств. Пусть G — связная группа Ли, Σ — компактная группа автоморфизмов группы G, H — открытая подгруппа в множестве всех Σ-неподвижных точек и F — многообразие, на котором H действует слева. Расслоенное пространство $M = G \times_H F$, ассоциированное с главным расслоением $G(G/H, H)$, снабжается умножением с помощью формулы

$$(a, x) \underset{\varphi}{\perp} (b, y) = (a\varphi(a^{-1}b), y), \text{ где } a, b \in G; \; x, y \in F, \; \varphi \in \Sigma,$$

и в результате возникает Σ-пространство. Доказано, что любое Σ-пространство можно получить указанным способом.

3. **s-Многообразия.** Леджер и Обата [152, 153] ввели понятие риманова и аффинного s-многообразия. Связное класса C^∞ риманово (аффинносвязное) многообразие M называется s-многообразием, если с каждой точкой $x \in M$ связана изометрия (аффинное преобразование) s_x — симметрия в x так, что выполнены следующие условия: 1) x есть изолированная неподвижная точка симметрии s_x, 2) отображение $s: x \mapsto s_x$ многообразия M в группу всех изометрий (аффинных преобразований) M дифференцируемо. Показано, что группа всех изометрий (аффинных преобразований) s-многообразия M транзитивна на M. Грахам и Леджер [119, 120] ввели понятие регулярного s-многообразия, характеризующегося условием $s_x \circ s_y = s_z \circ s_x$, где $z = s_x(y)$. Множество всех симметрий $\{s_x\}$ на s-многообразии M называется s-структурой. Говорят, что s-структура имеет порядок k, если $s_x^k = id$ для $\forall\, x \in M$ и k есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому условию.

Ковальский [147—150] изучал римановы s-многообразия. Показано, что риманово многообразие, допускающее регулярную s-структуру, допускает также регулярную структуру конечного порядка. Ставится проблема классификации всех римановых многообразий, допускающих s-структуры и для односвязных многообразий строится алгебраический эквивалент s-структуры. Дана полная классификация односвязных римановых многообразий размерности $n \leqslant 5$, допускающих s-структуры. В работе [150] показано, что существуют римановы многообразия, которые допускают разрывное семейство симметрий и не допускают регулярной s-структуры.

Грей [122] детально исследовал псевдоримановы s-многообразия порядка 3.

4. **φ-Пространства.** Понятие φ-пространства впервые появилось в работах В. И. Ведерникова [11—13]. Впоследствии эти пространства с различных точек зрения и под разными названиями изучали Н. А. Степанов [66—69], Вольф и Грей [191], А. С. Феденко [76—83] и др. Мы примем здесь следующее определение φ-пространства, естественно обобщающее понятие симметрического однородного пространства: Однородное пространство G/H связной группы Ли G называется φ-пространством, если существует эндоморфизм φ группы Ли G такой, что $G_0^\varphi \subset H \subset G^\varphi$, где G^φ — группа всех φ-неподвижных точек, а G_0^φ — ее компонента единицы. Если $\varphi^2 = id$, то пространство есть симметрическое однородное пространство.

Дадим сначала краткий обзор результатов В. И. Ведерникова. В [11] рассматривается действие группы Ли G на многообразии G, заданное формулой $T_g(x) = gx\varphi(g^{-1})$, где g — фиксированный элемент группы G, а x — ее текущий элемент. Ядро неэффективности этого действия есть $Z \cap G^\varphi$, где Z — центр группы G. Орбиты являются однородными пространствами, изоморфными пространствам вида G/G^ψ, где ψ — некоторый эндоморфизм группы G. В частности, орбита, проходящая через единицу e группы G, изоморфна G/G^φ. Для случая $\varphi^2 = id$ исследуются области симметричности группы G, т. е. объединения орбит, являющихся симметрическими пространствами.

В работах [12, 13] изучаются некоторые специальные классы φ-пространств. Показано, что если ограничение эндоморфизма φ на подгруппу $G_1 = \varphi(G)$ есть автоморфизм группы G_1, то группа G есть полупрямое произведение группы G_1 и нормального делителя $K = \varphi^{-1}(e)$. Пусть k и m — наименьшие натуральные числа, удовлетворяющие условиям: $\varphi^k(G) = \varphi^{k+1}(G) = G_1$, $Z_m = \{g \in G \mid \varphi^m(g) = e\} = Z_{m+1} = \{g \in G \mid \varphi^{m+1}(g) = e\}$. Тогда (G, φ) называется обобщенной симметрической парой. В статье [14] обобщается описанное выше действие группы G. Пусть M — гладкий моноид, Q и S — подгруппы Ли в M, G — подгруппа в $Q \times S$ и $\varphi: S \to M$ — гомоморфизм моноидов. Тогда можно задать действие группы G на M с помощью формулы $x \mapsto qx\varphi(s^{-1})$, $(q, s) \in G$. Орбиты этого действия названы φ-пространствами.

Заметим, что φ-пространства возникли у В. И. Ведерникова в связи с изучением сопряженных связностей А. П. Нордена и их обобщений.

Переходим к работам Н. А. Степанова. В [66] исследуются условия, при которых φ-пространство G/H будет редуктивным. Хотя удобного критерия найти не удалось, все же получен ряд хороших достаточных условий. Например, φ-пространство будет редуктивным, если существуют такие натуральные числа k и m, что $\varphi^k = \varphi^m$. В частности, редуктивны периодические однородные пространства, т. е. φ-пространства, порожденные периодическими автоморфизмами. В работе [67] Н. А. Степанов выделяет достаточно широкий класс φ-пространств, которые обладают многими замечательными свойствами симметрических однородных пространств. Пространства этого класса, которые будут называться здесь регулярными φ-пространствами, определяются тем, что эндоморфизм $d\varphi_e$ векторного пространства $\mathfrak{g}$ задается в некотором базисе матрицей $\begin{bmatrix} E & O \\ O & A \end{bmatrix}$, где E — единичная матрица и A — невырожденная матрица, для которой 1 не является характеристическим числом. Показано, что регулярные φ-пространства редуктивны и периодические однородные пространства принадлежат к числу регулярных φ-пространств. Автоморфизм φ, порождающий регулярное φ-пространство, индуцирует отображение $\Phi: G/H \to G/H$, играющее роль симметрии в точке H редуктивного пространства $G/H: \Phi$ сохраняет обе канонические связности и H есть изолированная неподвижная точка отображения Φ. Исследованы условия существования на регулярных φ-пространствах инвариантных псевдоримановых структур. В [68] изучается периодическое однородное пространство $M = G/H$ порядка 3. На M построена почти комплексная структура, инвариантная относительно G и Φ, и показано, что каноническая связность есть единственная инвариантная почти комплексная связность.

Пусть $G = GL(n, \mathbf{R})$, M — многообразие всех вещественных квадратных матриц порядка n и G действует на M по закону: $s \mapsto usu^{-1}$, где $u \in G$, $s \in M$. Н. А. Степанов [69] показал, что орбита $G(s)$ является регулярным φ-пространством тогда и только тогда, когда матрица s имеет простую структуру, но не скалярна. В этом и только в этом случае подмногообразие $G(s)$ в M допускает инвариантное оснащение. Связность, индуцированная этим оснащением, совпадает с канонической связностью редуктивного пространства тогда и только тогда, когда $G(s)$ является симметрическим пространством.

Изучению φ-пространств посвящена большая статья Вольфа и Грея [191, 192]. В § 2 этой работы получена каноническая форма для внутренних автоморфизмов φ компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, построена система простых корней подалгебры $\mathfrak{g}^{\varphi}$ φ-неподвижных векторов и указан метод классификации всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$, имеющих фиксированный конечный порядок. Используя эти результаты, авторы перечисляют в простых компактных алгебрах Ли $\mathfrak{g}$ все внутренние автоморфизмы порядка 3, а также те внутренние автоморфизмы, для которых $\mathfrak{g}^{\varphi}$ не является централизатором тора. В § 4 дана полная классификация инвариантных почти комплексных структур на однородных пространствах G/H, где G — компактная связная группа Ли, а H — подгруппа максимального ранга. В § 5 найдена каноническая форма для внешних автоморфизмов

компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В качестве приложения дается классификация таких внешних автоморфизмов φ, что в $\mathfrak{g}$ нет собственных φ-инвариантных идеалов и все $\varphi^m \neq 1$ есть внешние автоморфизмы. В § 6 находятся все однородные пространства G/H, где G есть компактная связная группа Ли и $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\varphi}$ для некоторого автоморфизма φ порядка 3, допускающего инвариантные почти комплексные структуры. Следующий параграф посвящен перенесению результатов § 6 на случай простых некомпактных групп G. Наконец, в последних двух параграфах детально изучаются инвариантные почти эрмитовы структуры на описанных выше однородных пространствах.

К периодическим однородным пространствам примыкает работа В. Г. Каца [25], в которой с помощью корневой техники дано описание периодических автоморфизмов полупростых комплексных алгебр Ли. А. С. Феденко получил локальную классификацию периодических однородных пространств для классических компактных групп на матричном языке [76] и для особых компактных групп с помощью корней [81]. Классификация периодических однородных пространств для многих простых некомпактных групп дана в работах [80, 83]. Б. П. Комраков [30] перечислил все периодические автоморфизмы простых компактных алгебр Ли на языке корней.

А. С. Феденко [77—79, 82] изучал обобщения Л-симметрических пространств. Умножение на связном многообразии M называется регулярным, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1) $x \cdot x = x$; 2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$; 3) $s_x: M \to M$, $y \mapsto x \cdot y$ есть диффеоморфизм M; 4) линейное преобразование $(ds_x)_x$ касательного пространства M_x не имеет неподвижных векторов. Показано, что умножение на регулярном φ-пространстве $M = G/H$, заданное формулой

$$(xH) \cdot (yH) = x\varphi(x^{-1})\varphi(y)H,$$

превращает M в многообразие с регулярным умножением. Обратно, всякое многообразие с регулярным умножением можно рассматривать как регулярное φ-пространство. Далее мы будем называть такое M просто регулярным пространством.

Касательное пространство M_x к регулярному пространству M можно снабдить структурой общей тройной системы, являющейся обобщением тройной системы Ли. При этом оказывается, что дифференциал гомоморфизма регулярных пространств в любой точке является гомоморфизмом общих тройных систем.

Подпространством регулярного пространства M называется подмногообразие, замкнутое относительно умножения в M. Всякое связное подпространство является вполне геодезическим подмногообразием относительно канонической связности, обратное неверно. Между связными подпространствами, проходящими через точку $x \in M$, и подсистемами общей тройной системы M_x, инвариантными относительно $(ds_x)_x$, устанавливается взаимно однозначное соответствие. Это есть обобщение известной теоремы Э. Картана для симметрических пространств (см. [86], стр. 213). В работе [82] введено понятие центра регулярного пространства и показана его роль в глобальной классификации таких пространств.

В. Л. Штукарь [98] изучал однородные пространства G/H, у которых группа H инвариантна относительно некоторого эндоморфизма группы G.

5. Полусимметрические пространства. Н. С. Синюков [64, 65] называет многообразие M с аффинной связностью без кручения полусимметрическим пространством, если его тензор кривизны удовлетворяет условию: $R(X, Y)\cdot R=0$. Изучению полусимметрических пространств посвящены работы [26, 27] П. И. Ковалева.

Номидзу [172] поставил вопрос об условиях, при которых риманово полусимметрическое пространство является локально симметрическим. В этой же работе была высказана гипотеза: полное и неприводимое полусимметрическое риманово пространство является локально симметрическим. Вслед за этим появилась целая серия работ японских математиков, в которых находились достаточные условия для положительного решения вопроса Номидзу. Наконец, Такаги [181] построил пример, опровергающий гипотезу Номидзу.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Аббасов Н. Т.,** Образы симметрии эллиптических пространств над алгебрами альтернионов. Елми әсәрләр. Азәрб. унив. Физ.—риjазиjjат елмәри сер., Уч. зап. Азерб. ун-т. Сер. Физ.-матем. н., 1967, № 5, 8—15 (РЖМат, 1969, 1А557)
2. **Абдуллин В. Н.,** Симметрические римановы пространства V_4. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1971, № 2, 3—12 (РЖМат, 1971, 6А773)
3. **Адамушко Н. Н.,** Геометрия простых и квазипростых групп Ли класса G_2. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-т, 1969, **253**, 23—42 (РЖМат, 1970, 6А565)
4. **Алексеевский Д. В.,** Компактные кватернионные пространства. Функц. анализ и его прилож., 1968, **2**, № 2, 11—20 (РЖМат, 1969, 2А683)
5. —, Группы Ли и однородные пространства. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 11 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)», М., 1974, 37—123 (РЖМат, 1974, 11А545)
6. **Араки Ш.,** Корневые системы и локальная классификация неприводимых симметрических пространств. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1966, **10**, № 1, 90—126 (РЖМат, 1967, 3А225)
7. **Астраханцев В. В.,** Псевдоримановы симметрические пространства с коммутативной группой голономии. Мат. сб., 1973, **90**, № 2, 288—305 (РЖМат, 1973, 7А689)
8. —, Симметрические пространства коранга 1. Мат. сб., 1975, **96**, № 1, 135—151 (РЖМат, 1975, 5А719)
9. **Богуславская Т. М.,** Семенова И. Н., Образы симметрии комплексных и двойных эрмитовых квазинеевклидовых пространств и вещественного биквазиаффинного пространства. Уч. Зап. Моск. обл. пед. ин-т, 1969, **262**, 4—24 (РЖМат, 1971, 1А568)

10. **Вайнер Е. Ю.,** Одно характеристическое свойство четырехмерного симметрического пространства ранга 1. Сиб. мат. ж., 1975, **16**, № 2, 212—223 (РЖМат, 1975, 10А563)
11. **Ведерников В. И.,** Симметрические пространства и сопряженные связности. Уч. зап. Казанск. ун-т., 1965, **125**, № 1, 7—59 (РЖМат, 1966, 5А465)
12. —, Обобщенные симметрические пары. Материалы 2-й Прибалт. геом. конф., Тарту, 1965, 36—37
13. —, Симметрические пространства. Сопряженные связности как нормализованная связность. Тр. Геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР, 1966, **1**, 63—88 (РЖМат, 1967, 6А393)
14. —, Об одном специальном классе однородных пространств. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1972, № 12, 17—22 (РЖМат, 1973, 6А493)
15. **Горжалцан И. М.,** Кватернионная квазисимплектическая геометрия. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1967, № 271, 261—268 (РЖМат, 1968, 8А448)
16. —, Лущицкая И. Г., Румянцева Л. В., Образы симметрии кватернионного симплектического пространства и соответственные предельные пространства. Волж. мат. сб., 1971, вып. 9, 93—105 (РЖМат, 1972, 4А736)
17. **Джурабекова Д. Х.,** Крючкова Л. И., Бикомплексные квадратичные неевклидовы пространства. Уч. зап. Душанбинск. гос. пед. ин-т, 1970, **71**, № 6, 114—130 (РЖМат, 1971, 2А557)
18. **Егоров И. П.,** О гомотетических движениях в неприводимых римановых симметрических пространствах первого класса. Волж. мат. сб. Теор. сер., 1963, вып. 1, 61—65 (РЖМат, 1964, 5А399)
19. **Егорова Л. Д.,** Крючкова Л. И., Лобанова Л. Б., Бикомплексные и бидуальные пространства. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-т, 1969, **262**, 76—103 (РЖМат, 1971, 1А564)
20. **Заблоцких Н. М.,** Октавные геометрии с классическими фундаментальными группами. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-т, 1969, **253**, 62—76 (РЖМат, 1970, 4А575)
21. **Кантор И. Л.,** Сирота А. И. Солодовников А. С., Один класс симметрических пространств с расширяемой группой движений и обобщение модели Пуанкаре. Докл. АН СССР, 1967, **173**, № 3, 511—514 (РЖМат, 1967, 8А432)
22. **Карпелевич Ф. И.,** Геометрия геодезических и собственные функции оператора Бельтрами — Лапласа на симметрических пространствах. Тр. Моск. матем. о-ва, 1965, **14**, 48—185 (РЖМат, 1968, 1А446)
23. **Карпова Л. М.,** Климанова Т. М., Образы симметрии унитарных полунеевклидовых пространств. Тр. Коломенск. фил. Всес. заочн. политехн. ин-та, 1969, вып. 2, 103—112 (РЖМат, 1969, 7А454)
24. **Кац В. Г.,** Градуированные алгебры Ли и симметрические пространства. Функц. анализ и его прилож., 1968, **2**, № 2, 93—94 (РЖМат, 1968, 11Б618)
25. —, Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли. Функц. анализ и его прилож., 1969, **3**, № 3, 94—96 (РЖМат, 1970, 1А406)
26. **Ковалев П. И.,** О некоторых свойствах структуры, определяемой тензором Римана на пространстве аффинной связности. Укр. геометр. сб., 1973, вып. 13, 95—100 (РЖМат, 1973, 8А572)
27. —, Об одном обобщении «структуры кривизны». Укр. геометр. сб., 1974, вып. 16, 22—30 (РЖМат, 1975, 2А707)
28. **Комраков Б. П.,** Структура геометрических компактификаций симметрических римановых пространств. Успехи мат. наук, 1973, **28**, № 5, 217—218 (РЖМат, 1974, 2А650)
29. —, Компактификации односвязных римановых пространств неположительной кривизны. Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. н. Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. н., 1973, № 3, 45—52 (РЖМат, 1973, 10А612)
30. —, Однородные пространства, порожденные автоморфизмами, и инва-

риантные геометрические структуры. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1975, 7, 231—257
31. **Кушнер Г. Ф.**, Об одной компактификации симметрических римановых пространств. Докл. АН СССР, 1970, **190**, № 6, 1282—1285 (РЖМат, 1970, 7А679)
32. —, О компактификации некомпактных симметрических римановых пространств. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1972, вып. 16, 99—152 (РЖМат, 1973, 3А706)
33. **Макаревич Б. О.**, Открытые симметрические орбиты редуктивных групп в симметрических R-пространствах. Мат. сб., 1973, **91**, № 3, 390—401 (РЖМат, 1973, 11А425)
34. **Никитина Л. С.**, Полуантикватернионные пространства. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-т, 1969, **262**, 166—190 (РЖМат, 1971, 1А565)
35. **Пятецкий—Шапиро И. И.**, Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М., Физматгиз, 1961, 191 стр. (РЖМат, 1963, 12Б217К)
36. —, Арифметические группы в комплексных областях. Успехи мат. наук, 1964, **19**, № 6, 93—121 (РЖМат, 1966, 1А608)
37. **Рашевский П. К.**, Симметрические пространства аффинной связности с кручением. I. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1950, вып. 8, 82—92
38. —, О геометрии однородных пространств. Докл. АН СССР, 1951, **80**, № 2, 169—171
39. —, О геометрии однородных пространств. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1952, вып. 9, 49—74
40. **Ривилис А. А.**, Однородные локально симметрические области в конформном пространстве. Докл. АН СССР, 1969, **184**, № 3, 558—561 (РЖМат, 1969, 6А458)
41. —, Однородные локально симметрические области в однородных пространствах, ассоциированных с полупростыми йордановыми алгебрами. Мат. сб., 1970, № 3, 409—422 (РЖМат, 1970, 11А545)
42. —, Однородные локально симметрические области в конформном пространстве. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1970, № 6, 96—105 (РЖМат, 1971, 2А647)
43. **Розенфельд Б. А.**, Симметрические пространства и их геометрические приложения. Приложение к книге: Э. Картан, Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М, 1949, 331—368
44. —, Неевклидовы геометрии. М., 1955 г., Гостехиздат, 744с. (РЖМат, 1956, 8247К)
45. —, Интерпретация симметрических пространств с простыми фундаментальными группами в виде многообразий образов симметрии. Уч. зап. Коломенск. пед. ин-т, 1958, **2**, 19—37 (РЖМат, 1959, 7436)
46. —, Неевклидовы пространства. М., «Наука», 1969 г., 547 с. (РЖМат, 1969, 7А448)
47. —, Б р и к И. М., О р е х о в а Н. И., П а н ф и л о в а А. С., Базисные симметрические пространства дуальных расширений вещественных квазипростых групп Ли. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1971, № 9, 70—78 (РЖМат, 1972, 1А986)
48. —, З а м а х о в с к и й М. П., Простые и квазипростые йордановы алгебры. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1971, № 8, 111—121 (РЖМат, 1972, 1А481)
49. —, К а р п о в а Л. М., Симметрические полуримановы пространства. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1964, № 1, 100—116 (РЖМат, 1964, 10А328)
50. —, —, Флаговые группы и сжатие групп Ли. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1966, вып. 13, 168—202 (РЖМат, 1967, 8А394)
51. —, Л у щ и ц к а я И. Г., М а р к и н а Л. М., Н и к и т и н а Л. С., Проективные пространства с квазипростыми фундаментальными группами. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т (РЖМат, 1971, 3А490)
52. —, С е м е н о в а И. Н., Образы симметрии двойных унитарных эллиптических и квазиэллиптических пространств. Уч. зап. Мордовск. ун-т, 1971, № 70, 165—188 (РЖМат, 1972, 6А611)
53. **Сабинин Л. В.**, О геометрии субсимметрических пространств. Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 46—49 (РЖМат, 1960, 9493)
54. —, О структуре групп движений однородных римановых пространств с осевой симметрией. Научн. докл. высш. школы, Физ.-матем. н., 1958, № 6, 127—138 (РЖМат, 1960, 10873)
55. —, Геометрия однородных римановых пространств и внутренняя геометрия симметрических пространств. Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 6, 1238—1241 (РЖМат, 1960, 10869)
56. —, О геометрии трисимметрических римановых пространств. Сиб. мат. ж., 1961, **2**, № 2, 266—278 (РЖМат, 1962, 4А432)
57. —, Однородные римановы пространства с $(n-1)$-мерными зеркалами. В сб. «Некотор. краев. задачи обыкновен. дифференц. уравнений». М., 1970, 116—126 (РЖМат, 1971, 4А726)
58. —, Об инволютивных суммах алгебр Ли. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1968, вып. 14, 94—113 (РЖМат, 1969, 3А569)
59. —, Инволютивная двойственность в простых компактных алгебрах Ли. Тр. Геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР, 1969, **2**, 277—298 (РЖМат, 1970, 4А669)
60. —, Главные инвоморфизмы компактных алгебр Ли. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1970, вып. 15, 188—226 (РЖМат, 1971, 2А393)
61. —, Трисимметрические пространства с простыми компактными группами движений. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1972, вып. 16, 202—226 (РЖМат, 1973, 3А705)
62. **Сбитнева Л. В.**, Аналитические признаки осесимметрических пространств. Сб. науч. работ аспирантов. Ун-т дружбы народов им. Патриса Лумумбы. Фак. физ.-мат. и естеств. н., 1972, вып. 11, 73—83 (РЖМат, 1973, 2А617)
63. **Семянистый В. И.**, Симметрические области и йордановы алгебры. Докл. АН СССР, 1970, **190**, № 4, 788—791 (РЖМат, 1970, 6А366)
64. **Синюков Н. С.**, О геодезическом отображении римановых пространств. Тр. 3-го Всес. матем. съезда. Т. 1, М., АН СССР, 1956, 167—168 (РЖМат, 1958, 8236)
65. —, Об одном классе римановых пространств. Научн. ежегодник. Одесск. ун-т. Физ.-матем. фак. и Н.-и. ин-т физ., вып. 2. Одесса, 1961, 122—126 (РЖМат, 1962, 8А368)
66. **Степанов Н. А.**, О редуктивности факторпространств, порожденных эндоморфизмами групп Ли. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, № 2, 74—79 (РЖМат, 1967, 7А313)
67. —, Основные факты теории φ-пространств. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, № 3, 88—95 (РЖМат, 1967, 8А281)
68. —, Однородные 3-циклические пространства. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, № 12, 65—74 (РЖМат, 1968, 5А635)
69. —, φ-пространства, в случае полной линейной группы. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1972, № 3, 70—79 (РЖМат, 1972, 7А586)
70. **Сюй И—чао**, О классификации симметрических однолистных областей в пространстве многих комплексных переменных. Шусюэ цзиньчжань, Shuxue jinzhan, 1965, **8**, № 2, 109—114 (РЖМат, 1966, 4А146)
71. **Топоногов В. А.**, Одно характеристическое свойство четырехмерного симметрического пространства ранга 1. Сиб. мат. ж., 1972, **13**, № 4, 884—902 (РЖМат, 1972, 11А559)

72. **Феденко А. С.**, К теории симметрических пространств. Тр. 3-го Всес. матем. съезда. Т. 1. М., АН СССР, 174—175 (РЖМат, 1957, 7352)
73. —, Симметрические пространства с простыми некомпактными фундаментальными группами. Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 6, 1026—1028 (РЖМат, 1957, 8200)
74. —, Предельные пространства. Успехи мат. наук, 1957, **12**, № 3, 235—240 (РЖМат, 1958, 6143)
75. —, О предельных группах и однородных пространствах. Тр. II Респ. конференции математиков Белоруссии, Минск, Белорусск. ун-т, 1969, 144—146 (РЖМат, 1969, 11А618)
76. —, Периодические автоморфизмы классических компактных групп. Revue Roumaine de math. pures et appl. 1970, **15**, № 9, 1375—1378
77. —, Однородные φ-пространства и пространства с симметриями. Вестн. Белорус. ун-та, 1972, сер. I, № 2, 25—30 (РЖМат, 1972, 10А492)
78. —, Регулярные пространства с симметриями. Мат. заметки, 1973, **14**, № 1, 113—120 (РЖМат, 1973, 11А615)
79. —, Подпространства и факторпространства регулярного пространства с симметриями. Вестн. Белорус. ун-та, 1973, сер. 1, № 2, 18—22 (РЖМат, 1973, 10А624)
80. —, Пространства, определяемые эндоморфизмами групп Ли (Ф — пространства). Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1973, **4**, 231—267 (РЖМат, 1974, 3А551)
81. —, Особые периодические пространства. Материалы IV Прибалт. геом. конф., Тарту, 1973, 128—130
82. —, Центр регулярного пространства с симметриями. Вестн. Белорус. ун-та, 1974, сер. 1, № 1, 18—22
83. —, Периодические однородные пространства классических групп серии *A*. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 5. Калининград, 1974, 184—200 (РЖМат, 1975, 4А795)
84. —, В о д н е в В. Т., Группы движений конформно-евклидовых симметрических пространств. Докл. АН БССР, 1959, **3**, № 6, 233—236 (РЖМат, 1960, 9492)
85. **Фядзенка А. С.**, Метад гранічнага пераходу у тэорыі рыманавых прастораў. Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. н., Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. н., 1958, № 2, 17—25 (РЖМат, 1960, 3404)
86. **Хелгасон С.**, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., Мир, 1964, 533 с. (РЖМат, 1965, 3А511К)
87. **Чахтаури И. А.**, Проективные и эллиптические пространства целой и дробной размерности над алгебрами матриц. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе, Сообщ. АН Груз ССР, 1971, **63**, № 1, 29—32 (РЖМат, 1972, 1А987)
88. **Широков А. П.**, Проективная интерпретация конформно-евклидовых симметрических пространств. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, **116**, № 1, 15—19 (РЖМат, 1957, 3472)
89. —, О некоторых вещественных реализациях пространств над алгебрами. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1961, № 5, 117—127 (РЖМат, 1962, 8А377)
90. —, О симметрических пространствах, определяемых алгебрами. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1963, № 6, 159—171 (РЖМат, 1964, 12А397)
91. —, О симметрических пространствах, определяемых коммутативными алгебрами 4-го порядка. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1966, **126**, № 1, 60—80 (РЖМат, 1968, 2А573)
92. **Широков П. А.**, Постоянные поля векторов и тензоров в Riemann'овых пространствах. Казань, Изв. Физ.-матем. о-ва, 1925, (2), **25**, 86—114
93. —, Симметрические конформно-евклидовы пространства. Казань, Изв. Физ.-матем. о-ва, 1938, (3), **11**, 9—27
94. —, Проективно-евклидовы симметрические пространства. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1950, вып. 8, 73—81

95. —, Симметрические пространства 1-го класса. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, **114**, № 8, 71—82 (РЖМат, 1956, 1645)
96. —, К теории симметрических пространств. Уч. зап. Казанск. ун-та, **1955**, **115**, № 14, 3—19 (РЖМат, 1957, 6636)
97. —, Об одном типе симметрических пространств. Мат. сб., 1957, **41**, **№ 3**, 361—372 (РЖМат, 1959, 1955)
98. **Штукарь В. Л.**, О свойствах глобальных и общих локальных троек. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1975, № 3, 27—31 (РЖМат, 1975, 11А488)
99. **Baily W. L.**, B o r e l A., On the compactification of arithmetically defined quotients of bounded symmetric domains. Bull. Amer. Math. Soc., **1964**, **70**, № 4, 588—593 (РЖМат, 1965, 4А215)
100. —, —, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. Ann. Math., 1966, **84**, № 3, 442—528 (РЖМат, 1968, 7А531)
101. **Berger Marcel.** Les espaces symétriques non compacts. Ann. scient. École norm. Supér., 1957, **64**, № 2, 85—177 (РЖМат, 1959, 3173)
102. —, Quelques problèmes de géométrie riemannienne ou deux variations sur les espaces symétriques compact de rang un. Enseign. math., **1970**, **16**, № 1, 73—96 (РЖМат, 1971, 4А724)
103. **Cahen M.**, L e m a i r e L., P a r k e r M., Relèvements d'une structure symètrique dans des fibrés associés à un espace symétrique. Bull. Soc. math. Belg., 1972, **24**, № 3, 227—237 (РЖМат, 1974, 5А495)
104. —, M c L e n a g h a n R., Metriques des espaces lorentziens symétriques à quatre dimensions. C. r. Acad. sci., 1968, **266**, № 22, A1125—A1128 (РЖМат, 1969, 1А643)
105. —, P a r k e r M., Sur des classes d'espaces pseudo-riemanniens symétriques. Bull. Soc. math. Belg., 1970, **22**, № 4, 339—354 (РЖМат, **1971**, 12А804)
106. — —, Distributions parallèles maximales sur un espace symétrique pseudo-riemannien. C. r. Acad. sci., 1974, **A278**, № 22, 1431—1433 (РЖМат, 1974, 12А455)
107. —, W a l l a c h N., Lorentian symmetric spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1970, **76**, № 3, 585—591 (РЖМат, 1971, 3А586)
108. **Cartan É.**, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. Bull. Soc. Math. France, 1926, **54**, 214—264
109. —, Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries a a groupe fondamental simple. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 1927, **44**, 345—467
110. —, Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1935, **11**, 116—162
111. **Chavel I.**, On Riemannian symmetric spaces of rank one. Advances Math. 1970, **4**, № 3, 236—263 (РЖМат, 1971, 2А628)
112. **Chen Su-ching**, On Riemannian symmetric spaces of rank one and of classical type. Dokt. diss. Univ. Md., 1970, 80pp. Diss. Abstrs Int., **1971**, **B31**, № 11, 6741 (РЖМат, 1972, 2А592)
113. **Conlon Lawrence**, The topology of certain spaces of paths on a compact symmetric space. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, **112**, № 2, 228—248 (РЖМат, 1965, 4А323)
114. —, Classification of affine root sistems and applications to the theory of symmetric spaces. Mimeographed Notes, Washington University, St. Souis Mo., 1968
115. —, Applications of affine root systems to the theory of symmetric spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1969, **75**, № 3, 610—613 (РЖМат, 1970, 1А412)
116. **Drucker Daniel**, Orbit structure of the exceptional hermitian symmetric spaces. I. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, **80**, № 2, 285—289 (РЖМат, **1974**, 12А388)
117. **Freudenthal Hans**, Zweifache Homogenität und Symmetrie. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1967, **A70**, № 1, 18—22 (РЖМат, 1967, 10А349)
118. **Gottschling Erhard**, Reflections in bounded symmetric domains. Communs Pure and Appl. Math., 1969, **22**, № 5, 693—714 (РЖМат, **1970**, **8А465**)

119. **Graham Peter John**, Ledger Arthur Johnson, Sur un classe de *s*-variétés riemanniennes ou affines. C. r. Acad. sci. 1968, **267**, № 2, A105—A107 (РЖМат, 1969, 2А682)
120. — —, S-Regular manifolds. Differential geometrie — in honour of Kentaro Jano, Tokyo, 1972, 133—144
121. **Gray Alfred**, Isometric immersions in symmetric spaces. J. Different. Geom., 1969, **3**, № 2, 237—244 (РЖМат, 1970, 10А500)
122. —, Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3. J. Different. Geom., 1972, **7**, № 3-4, 343—369 (РЖМат, 1974, 5А734)
123. **Grecu Eftimie I.**, O clasă de spatii simetrice V_{4p} cu metrică nedefinită. Stud. şi cerc. mat., 1970, **22**, № 6, 845—866 (РЖМат, 1971, 3А584)
124. —, O clasă de spaţii simetrice V_{2p} cu metrică nedefinită. Stud. şi cerc. mat., 1971, **23**, № 4, 579—596 (РЖМат, 1971, 11А667)
125. **Harris Lawrence A.**, Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces. Lect. Notes Math., 1974, **364**, 13—40 (РЖМат, 1974, 12А386)
126. **Helgason S.**, Totally geodesic spheres in compact symmetric spaces. Math. Ann., 1966, **165**, № 4, 309—317 (РЖМат, 1967, 4А330)
127. **Helwig Karl—Heinz**, Jordan—Algebren und symmetrische Räume. I. Math. Z., 1970, **115**, № 5, 315—349 (РЖМат, 1971, 2А394)
128. **Hirzebruch Ulrich**, Über Jordan—Algebren und kompakte Riemannsche symmetrische Räume vom Rang I. Math. Z., 1965, **90**, № 5, 339—354 (РЖМат, 1967, 2А288)
129. —, Uber Jordan—Algebren und beschränkte symmetrische Gebiete. Math. Z., 1966, **94**, № 5, 387—390 (РЖМат, 1968, 2А352)
130. —, Über eine Realisierung der hermiteschen symmetrischen Räume. Math. Z., 1970, **115**, № 5, 371—382 (РЖМат, 1971, 2А395)
131. **Hokama Kenji**, On isometries in an affine symmetric space. Math. J. Okayama Univ., 1967, **13**, № 1, 9—13 (РЖМат, 1969, 2А689)
132. **Honda Kagumi**, Yamaguchi Satoru, On two types of differentiable S^1 — free actions on homogeneous spaces of compact simple Lie groups. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1973, **A27**, № 1, 69—78 (РЖМат, 1973, 11А424)
133. **Ihara Shin-ichiro**, Holomorhic imbeddings of symmetric domains into a symmetric domain. Proc. Japan. Acad., 1966, **42**, № 3, 193—197 (РЖМат, 1967, 9А366)
134. —, Holomorphic imbeddings of symmetric domains. J. Math. Soc. Japan, 1967, **19**, № 3, 262—302 (РЖМат, 1968, 9А400)
135. —, Supplement to: holomorphic imbeddings of symmetric domains. J. Math. Soc. Japan, 1967, **19**, № 4, 543—544 (РЖМат, 1968, 10А408)
136. **Inonu E.**, Wigner E. P., On the contraction of groups and their representations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.A. 1953, **39**, № 6, 510—524 (РЖМат, 1954, 2874)
137. **Ise Mikio**, Realization of irreducible bounded symmetric domain of type (V). Proc. Japan Acad., 1969, **45**, № 4, 233—237 (РЖМат, 1970, 5А374)
138. —, Realization of irreductible bounded symmetric domain of type (VI). Proc. Jap. Acad., 1969, **45**, № 10, 846—849 (РЖМат, 1971, 4А433)
139. —, On canonical realizations of bounded symmetric domains as matrix-spaces. Nagoya Math. J., 1971, **42**, 115—133 (РЖМат, 1971, 9А537)
140. **Kelly Edmund**, Tight equivariant immersions of symmetric spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, **77**, № 4, 580—583 (РЖМат, 1972, 2А913)
141. **Kobayashi Shoshichi**, Isometric imbeddings of compact symmetric spaces. Tohoku Math. J., 1968, **20**, № 1, 21—25 (РЖМат, 1969, 2А707)
142. —, Nomizu Katsumi, Foundations of differential geometry. Vol. 2. New York—London—Sydney, Interscience, 1969, XVI, 470pp. (РЖМат, 1969, 12А761 К)
143. **Koecher Max**, On bounded symmetric domains. Rice Univ. Stud., 1970 (1971), **56**, № 2, 63—65 (РЖМат, 1971, 12А358)
144. **Koh S. S.**, On affine symmetric spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **119**, № 2, 291—309 (РЖМат, 1966, 5А180)

145. **Korányi A.**, Wolf J., Realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-planes. Ann. Math., 1965, **81**, № 2, 265—288 (РЖМат, 1967, 2А345)
146. **Kowalski Oldrich**, Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold. J. reine und angew. Math. 1971, **250**, 124—129 (РЖМат, 1972, 3А673)
147. —, Riemannien manifolds with general symmetries. Math. Z., 1974, **136**, № 2, 137—150 (РЖМат, 1975, 1А803)
148. —, Generalazed symmetric spaces (preliminary communications). Comment. math. Univ. carol., 1974, **15**, № 2, 361—375 (РЖМат, 1974, 12А461)
149. —, Classification of generalized symmetrich Riemannian spaces of dimansion $n \leqslant 5$. Rozpravy ČSAV, Praha, 1975, 1—61
150. —, Generalized pointwise symmetric spaces. Comment. math. Univ. carol., 1975, **16**, № 3, 459—467
151. **Lawson H.**, Blaine Jr., Rigidity theorems in rank-1 symmetric spaces. J. Different. Geom., 1970, **4**, № 3, 349—357 (РЖМат, 1971, 4А722)
152. **Ledger A. J.**, Espaces de Riemann symétriques généralisés. C. r. Acad. sci., 1967, **264**, № 22, A947—A948 (РЖМат, 1967, 12А620)
153. —, Obata M., Affine and Riemannian s-manifolds. J. Different. Geom., 1968, **2**, № 4, 451—459 (РЖМат, 1970, 2А637)
154. —, Yano K., The tangent bundle of a locally simmetric space. J. London Math. Soc., 1965, **40**, № 3, 487—492 (РЖМат, 1966, 5А464)
155. **Leung Dominic S. P.**, The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces. J. Different. Geom., 1973, **8**, № 1, 153—160 (РЖМат, 1974, 6А809)
156. —, On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces. Indians Univ. Math. J., 1974, **24**, № 4, 327—339 (РЖМат, 1975, 6А857)
157. **Loos Ottmar**, Spiegelungsräume und homogene symmetrische Räume. Math. Z., 1967, **99**, № 2, 141—170 (РЖМат, 1968, 2А351)
158. —, Reflecxion spaces and homogeneous symmetric spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, **73**, № 2, 250—253 (РЖМат, 1968, 3А396)
159. —, Reflecxion spaces of minimal and maximal torsion. Math. Z., 1968, **106**, № 1, 67—72 (РЖМат, 1969, 3А376)
160. —, Symmetric spaces. Vols 1—2. New York, Benjamin, 1969. Vol. I, VII, 198pp.; Vol. 2, VII, 183pp. (РЖМат, 1970, 11А314К)
161. —, Jordan triple systems, *R*-spaces, and bounded symmetric domains. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, **77**, № 4, 558—561 (РЖМат, 1972, 1А758)
162. —, Kompakte Unterräume symmetrischer Räume. Math. Z., 1972, **125**, № 3, 264—270 (РЖМат, 1972, 9А368)
163. —, An intrinsic characterization of fibre bundles associated with homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1972, **37**, № 3-4, 160—179 (РЖМат, 1973, 1А421)
164. **Matsumoto Hideya**, Quelques remarques sur les espaces riemanniens isotropes. C. r. Acad. sci., 1971, **272**, № 4, A316-A319 (РЖМат, 1971, 8А517)
165. **Mostow G. D.**, The rigidity of locally symmetric spaces. Actes Congr. int. mathématiciens, 1970, t. 2, Paris, 1971, 187—197 (РЖМат, 1972, 4А520)
166. **Murakami S.**, Sur la classification des algèbres de Lie réeles et simples. Osaka Math. J., 1965, **2**, 291—307
167. —, Prolongements holomorphes de domaines symetriques. Geom. homogen. bound. dom., Roma, 1968, 261—278 (РЖМат, 1971, 6А621)
168. **Nagasawa Jun**, On Linear holonomy group of Riemannian symmetric spaces. Proc. Japan. Acad., 1965, **41**, № 4, 270—272 (РЖМат, 1966, 3А437)
169. —, Linear isotropy group of an affine symmetric spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **33**, № 2, 516—519 (РЖМат, 1973, 3А703)
170. **Nakagawa H.**, Shiohama K., On the totally geodesic submanifolds in locally simmetric spaces. J. Math. Soc. Jap., 1970, **22**, № 3, 342—352 (РЖМат, 1971, 3А581)
171. **Nomizu Katsumi**, Invariant affine connexions on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 33—65 (РЖМат, 1956, 7605)

172. —, On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor. Tohoku Math. J., 1968, **20**, № 1, 46—59 (РЖМат, 1969, 2А693)
173. **Ochiai Takushiro**, Transformation groups on Riemannian symmetric spaces. J. Different. Geom., 1969, **3**, № 2, 231—236 (РЖМат, 1970, 10А501)
174. **Ozols V.**, Clifford translations of symmetric spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **44**, № 1, 169—175 (РЖМат, 1975, 2А740)
175. **Parker Monique**, Class d'espaces pseudo-riemanniens symétriques de signature (2, n). C. r. Acad. sci., 1971, **272**, № 13, A882—A884 (РЖМат, 1971, 10А458)
176. **Satake Ichiro**, Holomorphic imbeddings of symmetric domains into a Siegel space. Proc. Conf. Complex Analysis, Minneapolis, 1964. Berlin—Heidelberg—New York, 1965, 40—48 (РЖМат, 1967, 2А343)
177. —, Holomorphic imbeddings of simmetric domains into a Siegel space. Amer. J. Math., 1965, **87**, № 2, 425—461 (РЖМат, 1967, 2А344)
178. —, A note on holomorphic imbeddings and compactification of symmetric domains. Amer. J. Math., 1968, **90**, № 1, 231—247 (РЖМат, 1968, 11А468)
179. **Shapiro R. A.**, Pseudo—Hermitian symmetric spaces. Comment. math. helv. 1971, **46**, № 4, 529—548 (РЖМат, 1972, 6А427)
180. Symmetric spaces. Eds. Boothby W. M., Weis G. L. New York, Dekker, 1972, XIII, 487 pp. (РЖМат,1975, 3А657 К)
181. **Takagi Hitoshi**, An example of Riemannian manifolds satisfying $R(X, Y)R=0$ but not $\nabla R=0$. Tohoku Math. J., 1972, **24**, № 1, 105—108 (РЖМат, 1972, 11А555)
182. **Takeuchi Masaru**, On orbits in a compact hermitian symmetric space. Amer. J. Math., 1968, **90**, № 3, 657—680 (РЖМат, 1970, 1А411)
183. **Tilgner Hans**, On the use of globally symmetric pseudo-Riemannian spaces in cosmology. Repts. Math. Phys., 1974, **5**, № 1, 51—64 (РЖМат, 1975, 3А746)
184. —, Symmetric spaces in relativity and quantum theories. Group Theorie Non-Linear Probl. Dobrecht-Boston, 1974, 143-184 (РЖМат, 1974, 9А845)
185. **Wallach N. R.**, A classification of real simple Lie algebras. Doct. diss. Wash. Univ., 1966, 41pp., Dissert. Abstrs, 1966, **B27**, № 6, 2049 (РЖМат, 1967, 12А396Д)
186. —, On maximal subsystems of root systems. Canad. J. Math., 1968, **20**, № 3, 555—574 (РЖМат, 1969, 1А412)
187. **Wall C. T. C.**, Graded algebras, anti-involutions, simple groups and symmetric spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**, № 1, 198—202 (РЖМат, 1969, 2А337)
188. **Wolf Joseph A.**, On the classification of hermitian symmetric spaces. J. Math. and Mech., 1964, **13**, № 3, 489—495 (РЖМат, 1965, 4А420)
189. —, Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces. J. Math. and Mech., 1965, **14**, № 6, 1033—1047 (РЖМат, 1967, 2А347)
190. —, Spaces of constant curvature. New York, Mc Graw—Hill, 1967, XV, 408pp. (РЖМат, 1969, 1А640К)
191. —, Gray A., Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. I. J. Different. Geom., 1968, **2**, № 1, 77—114 (РЖМат, 1969, 9А327)
192. — —, Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. II. J. Different. Geom., 1968, **2**, № 2, 115—159 (РЖМат, 1970, 5А373)
193. —, Korányi A., Generalized Cayly transformations of bounded symmetric domains. Amer. J. Math., 1965, **87**, № 4, 899—939 (РЖМат, 1967, 2А346)
194. **Wong Yung—Chow**, Differential geometry of Grassmann manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1967, **57**, № 3, 589—594 (РЖМат, 1968, 2А576)
195. **Yanamoto Hiroshi**, On the certain hypersurfaces in locally symmetric spaces. Haraoka korē komo сэммон rakko kэнкю kuē. Res. Repts Nagaoka Techn. Coll., 1971, **7**, № 1, 5—8 (РЖМат, 1971, 11А663)
196. **Yen Chin—ta**, Sur les espaces symétrique non compact. Scientia sinica, 1965, **14**, № 1, 31—38 (РЖМат, 1967, 3А434)

УДК 517.8:530.12

КЛАССЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

В. И. Башков

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Эйнштейна (1916 г.) гравитационного поля, определяющие структуру соответствующего 4-мерного риманова многообразия лоренцевой сигнатуры, представляют собою нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно потенциалов $g_{\mu\nu}(x)$, являющихся одновременно компонентами метрического тензора пространства-времени многообразия. Анализ полевых уравнений в сколь-нибудь сложном случае — задача необычайно трудная. На наш взгляд, именно этим обстоятельством объясняется тот факт, что на протяжении почти 40 лет со времени формулировки основных положений ОТО точные решения уравнений группы поля Эйнштейна появились как изолированные открытия.

Вплоть до работ А. З. Петрова [25] (1954 г.), предложившего алгебраическую классификацию полей тяготения по типам тензора Римана, не существовало какой-либо систематической упорядоченности полученных точных решений и инвариантных методов их нахождения. К настоящему времени эта задача давно вышла из стадии первоначального накопления отдельных решений. В работах Казанской группы исследователей (1960—1970 гг.) под руководством А. З. Петрова были разработаны инвариантно-групповые методы исследования римановых многообразий лоренцевой сигнатуры с позиций допускаемых ими групп изометрических, конформных, проективных движений, что позволило создать подробные классификации и инвариантные характеристики решений уравнений гравитационного поля.

В этот же период группа исследователей (Сакс, Керр, Ньюмен и др.) разработала метод отыскания решений полевых уравнений в случае, когда пространственно-временное многообразие допускает конгруэнцию геодезических, оптические скаляры которой связаны тем или иным соотношением.

Оба указанных метода стимулировали в последние 10 лет появление большого количества статей, где приводились те или иные точные решения уравнений Эйнштейна.

Вследствие этого возникает необходимость дать обзор по многочисленным заметкам, посвященным нахождению точных решений полевых уравнений в ОТО. Выполнение такой работы на наш взгляд отвечало бы научным интересам как геометров, так и физиков, занимающихся исследованиями в области теории гравитации. В настоящее время ОТО не противоречит ни одному из гравитационных экспериментов и является наиболее перспективной теорией гравитации.*)

Все рассмотрения ведутся нами в хронологическом порядке и разбиваются на классы в зависимости от структуры тензора энергии-импульса, стоящего в правой части полевых уравнений Эйнштейна.

1. Вакуумные решения (пространства Эйнштейна).
2. Решения с пылевидной материей и с идеальной жидкостью
3. Решения, отвечающие электромагнитному полю.
4. Гравитационно-волновые решения.
5. Космологические решения.
6. Решения, отвечающие сложной структуре тензора энергии-импульса.

Рамки обзора не позволяют нам более подробно остановиться на выводе и интерпретации приводимых точных решений, поэтому мы ограничиваемся лишь указанием в некоторой локальной системе координат вида линейных элементов соответствующих римановых многообразий. Библиографию же по возможности мы старались привести в более полном виде.

1. ВАКУУМНЫЕ РЕШЕНИЯ ($R_{\alpha\beta}=0,\ R_{\alpha\beta}=\Lambda g_{\alpha\beta}$)

Основные уравнения гравитационного поля были записаны Эйнштейном в виде:

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}+\Lambda g_{\alpha\beta}=-\varkappa T_{\alpha\beta}\quad(\alpha,\beta=1,2,3,4),\qquad(1.1)$$

где $R_{\alpha\beta}=g^{\sigma\tau}R_{\alpha\sigma\beta\tau}$ — тензор Риччи, R^{α}_{α} — скалярная кривизна,

* Из-за обилия литературы и разбросанности ее по всевозможным журналам составление обзора оказалось весьма трудоемким. К его подготовке были привлечены сотрудники кафедры теории относительности и гравитации КГУ (А. М. Анчиков, А. В. Аминова, Р. Ф. Билялов, С. П. Гаврилов, Н. Р. Дмитриева, Р. А. Даишев, А. И. Егоров, Г. Г. Иванов, В. Р. Кайгородов), которым автор глубоко признателен за их помощь в составлении настоящего обзора.

Λ — космологическая постоянная, $\varkappa=\frac{8\pi G}{C^2}$ — постоянная Эйнштейна, $T_{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса вещества и полей, отличных от гравитационного. Если физическая постановка предполагает нахождение решения внешней задачи ($T_{\alpha\beta}=0$), то уравнения Эйнштейна будут иметь вид:

$$R_{\alpha\beta}=0,\qquad(1.2)$$

или

$$R_{\alpha\beta}=\Lambda g_{\alpha\beta},\qquad(1.3)$$

в зависимости от того, будет равен нулю «космологический член» $\Lambda g_{\alpha\beta}$ или нет. Решения уравнений (1.2) и (1.3), являясь аналогом решений уравнений Лапласа в классической теории гравитационного поля, определяют геометрию пространства-времени в областях, свободных от масс (при островном распределении масс). Эти пространства, являющиеся основным объектом изучения в данном пункте, в литературе получили название пространств Эйнштейна. Следуя А. З. Петрову [26], пространства, отвечающие уравнениям (1.2), обозначим в дальнейшем символом T, а пространства, соответствующие (1.3), — символом $\overset{*}{T}$.

Рассмотрим в хронологической последовательности известные в литературе пространства T и $\overset{*}{T}$. Пространство T, являющееся решением уравнения $R_{\alpha\beta}=0$, обладающее сферической симметрией и интерпретируемое как гравитационное поле точечной частицы массы m, покоящейся в начале координат, было указано Шварцшильдом в 1916 году [182]:

$$ds^2=-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)+\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2.\qquad(1.4)$$

Интересное аксильно-симметрическое решение было предложено Вейлем — Леви-Чивита в 1917—1919 годах [214]:

$$ds^2=e^{-2u}[e^{2v}(dr^2+dz^2)+r^2d\varphi^2]-e^{2u}dt^2,\qquad(1.5)$$

где $u(r,z)$, $v(r,z)$ — удовлетворяют системе из четырех дифференциальных уравнений в частных производных.

В эти же годы были получены космологические решения Коттлера [114], Казнера [108], рассмотрение которых мы отложим до раздела 5 настоящего обзора.

Пространство T, найденное Шази (1924 г.), имеет вид [69]:

$$ds^2=e^{\frac{2m}{r}}[e^{-\frac{m}{r^2}}(dx^{1^2}+dx^{2^2})+x^{1^2}dx^{3^2}]-e^{-\frac{2m}{r}}dx^{4^2}.\qquad(1.6)$$

Курзон получил в 1924 году решение из класса пространств (1.5), [119], при

$$u=-\frac{m_1}{\rho_1}-\frac{m_2}{\rho_2},\quad \rho_i=\sqrt{r^2+(z-z_i)^2}\quad(i=1,2).\qquad(1.7)$$

Рассмотрение решения Эйнштейна—Розена (1937 г.) для цилиндрических гравитационных волн в пустоте [86] будет проведено в разделе 4.

Такено (1942 г.) показал, что для сферически-симметричной метрики решения уравнений $R_{\alpha\beta,\gamma}=0$ приводит к пространствам Шварцшильда и Коттлера.

Нарликар и Кармаркар [139] (1946 г.) нашли пространства:

$$ds^2=dt^2-(kt-1)^p d\chi^2-(kt+1)^q dy^2-(kt+1)^r dz^2, \qquad (1.8)$$

где $p+q+r=2,\ pq+qr+rp=0$.

Пространства $\overset{*}{T}$ и T для любого n в том же году указывает А. З. Петров [24].

$$\begin{cases} \overset{*}{T}\cdot g_i=-\sin^{\frac{2}{n-1}}(\alpha x^4)\, tg^{\frac{2\alpha_i}{\alpha}}\left(\frac{\alpha x^n}{2}\right) \\ \overset{*}{T}\cdot g_i=-\mathrm{sh}^{\frac{2}{n-1}}(\beta x^4)\,\mathrm{th}^{\frac{2\beta_i}{\beta}}\left(\frac{\beta x^n}{2}\right) \\ T\cdot g_i=-(x^n)^{C_i},\ \sum C_i=\sum C_i^2=1. \end{cases} \qquad (1.9)$$

$$ds^2=\sum_{i=1}^{n-1} g_i(x^4)\,dx^{1^2}+dx^{4^2},$$

Три точных решения (пространства T) указаны Таубом (1951 г.) [195], исходя из предположения условия, чтобы пространствами допускалась трехчленная группа движений. Одно из них есть частный случай (1.9), а два других имеют линейные элементы вида:

$$\text{а)}\ ds^2=\gamma dt^2-\gamma_{11}dx^{1^2}-(\gamma_{11}\sin^2 x^1+\gamma_{33}\cos^2 x^1)\,dx^{2^2}-$$
$$-2\gamma_{33}\cos x^1 dx^2 dx^3-\gamma_{33}dx^{3^2}; \qquad (1.10)$$

где

$$\gamma=\gamma_{33}\gamma_{11}^2,\quad \gamma_{11}=\frac{k\,\mathrm{ch}\,(kt+\alpha)}{4\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{kt+\beta}{2}\right)};\quad \gamma_{33}=\frac{k}{\mathrm{ch}\,(kt+\alpha)}; \qquad (1.11)$$

$$k,\ \alpha,\ \beta=\mathrm{const}.$$

$$\text{б)}\ ds^2=(1+kx^1)^{-1/2}(dx^{0^2}-dx^{1^2})-(kx^1+1)(dx^{2^2}+dx^{3^2}). \qquad (1.12)$$

Необходимо отметить работы Бухдала [60, 61], где предпринимались попытки построения новых точных решений, исходя из статических решений уравнений поля для пустого пространства.

В 1959 году Мардер [125] рассматривает задачу для системы двух тел, находящихся в относительном покое. Одно из них представляет собою полую сферу, внутри которой помещается другая сфера, не касающаяся первой. Метрика рассматриваемого класса пространств берется в форме Вейля

(6). Внешнее решение является решением Курзона. Если $\rho_1=A$ $\rho_1=B$ — соответственно внешняя и внутренняя границы полой сферы, а $\rho_2=C$ — граница внутренней сферы, так что $a+C<$ $<B<A$, то для внутренней задачи имеем следующее решение:

$$u=\begin{cases} -\frac{m_1}{\rho_1}-\frac{m_2}{\rho_2}, \\ -\frac{m_1(\rho_1^3-3A^2\rho_1+2B^3)}{2(A^3-B^3)\rho_1}-\frac{m_2}{\rho_2} & (B\leqslant\rho_1<A), \\ -\frac{3m_1(A+B)}{2(A^2+AB+B^2)}-\frac{m_2}{\rho_2} & (\rho_1\leqslant B,\ \rho_2\geqslant C), \\ -\frac{3m_1(A+B)}{2(A^2+AB+B^2)}-\frac{m_2(3C^2-\rho_2^2)}{2C^3} & (\rho_2\leqslant C); \end{cases} \qquad (1.13)$$

$$v=\begin{cases} Q & (\rho_1\geqslant A), \\ Q\cos^2\frac{\pi(A-\rho_1)}{2(A-B)}-\frac{m_2^2r^2}{2\rho_2^4}\cos^2\frac{\pi(\rho_1-B)}{2(A-B)} & (B\leqslant\rho_1<A), \\ -\frac{m_2^2r^2}{2\rho_2^4} & (\rho_1\leqslant B,\ \rho_2\geqslant C), \\ -\frac{m_2^2r^2(5C-4\rho_2)}{C^5} & (\rho_2\leqslant C), \end{cases} \qquad (1.14)$$

где

$$Q=-\frac{r^2}{2}\left(\frac{m_1^2}{\rho_1^4}+\frac{m_2^2}{\rho_2^4}\right)+\frac{2m_1m_2}{a_2}\left[\frac{r^2+z(z-a)}{\rho_1\rho_2}-1\right]. \qquad (1.15)$$

Ряд решений из класса аксиально-симметрических пространств с использованием сплющенных сфероидальных координат указал Мисра [134].

$$ds^2=-Ad\theta^2-Bd\mu^2-Cd\varphi^2+Ddt^2, \qquad (1.16)$$

где

$$A=\frac{\mathcal{K}^2(\theta^2+\mu^2)}{(1+\theta^2)}e^{2\mathcal{H}},\quad B=\frac{\mathcal{K}^2(\theta^2+\mu^2)}{1-\mu^2}e^{2\mathcal{H}},$$

$$C=\mathcal{K}^2(1+\theta^2)(1-\mu^2)\,e^{-2\mathcal{K}},\quad D=e^{2\mathcal{K}},$$

$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ — функции от θ и μ. Для пустого пространства одно из уравнений является уравнением Лапласа. Его решение $\mathcal{K}=A_nP_n(\mu)Q_n(\theta)$, A — const, $P_n(\mu)$, $Q_n(\theta)$ — полиномы Лежандра порядка n. Каждое решение имеет сингулярности на фокальной окружности $\theta=\mu=0$. Подробно разобраны случаи $n=0$, $n=1$. Первый из них представляет собою внешнее решение для сплющенного сфероида с массой $M=A_0$.

Используя подобный подход, тот же автор [131] с использованием тороидальных координат для класса пространств с аксиальной симметрией находит внешние решения, обусловленные тороидальным и чечевицеобразным распределением вещества. Ввиду громоздкой записи результатов мы опускаем их и отсылаем читателя к оригиналу статьи.

Аксиально-симметрические, но уже не статические, точные решения уравнений $R_{ij}=0$ рассматривал Расталл [163]

$$ds^2=h(x^0)\{\mu(x^1, x^2)(dx^{1^2}+dx^{2^2})+\nu(x^1, x^2)\,dx^{3^2}\}+$$
$$+\lambda(x^1, x^2)\,dx^{0^2}, \tag{1.17}$$

где $\lambda=-1$, $h=x^{0^2}$, $\mu=\frac{H_{,\eta}H^*_{,\eta}}{(HH^*-1)^2}$, $\nu=\frac{[p(HH^*+1)+qH+q^*H^*]^2}{(HH^*-1)^2}$,

$H=H(\eta)$ — аналитическая функция от $\eta=\frac{x^1+ix^2}{2}$, p — вещественная постоянная, q — комплексная постоянная.

Чуть ранее (1959 г.) Харрисон [97] получил ряд новых решений уравнений $R_{ij}=0$ при предположении, что метрика пространства-времени допускает 4-ортогональную систему координат и компоненты метрического тензора имеют вид:

$$g_{ij}=\delta_{ij}e_iA_i^2(x^0, x^1)B_i^2(x^0, x^3), \tag{1.18}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $e_i=\pm 1$, $(i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

Такое предположение позволяет автору применить метод разделения переменных и тем самым получить свыше 30 точных решений. Приведение сводки результатов статьи Харрисона заняло бы слишком много места, поэтому мы отсылаем читателя к оригиналу заметки, а в качестве примера отметим решение «волнового» типа:

$$ds^2=\sum_{i=0}^{3}e_iA^{2n_i}B^{2m_i}C^{2l_i}dx_i^2,$$
$$A=(x_1-x_0)/l,\quad B=(x_1+x_0)/l,\quad C=\sin\left(\frac{2x_3}{l}\right). \tag{1.19}$$

i	0	1	2	3
n_i	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}\varepsilon)$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}\varepsilon)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$	$1+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$
m_i	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}\varepsilon)$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}\varepsilon)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$
l_i	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

где l — const, $\varepsilon=\pm 1$, $e_0=-1$, $e_1=e_2=e_3=1$.

В начале шестидесятых годов появился ряд работ, посвященных отысканию вакуумных решений, при наложении допол-

нительных условий на оптические скаляры Сакса для допускаемой полем изотропно-геодезической конгруэнции l^i. Сакс, исходя из аналогии с геометрической оптикой, ввел следующие инварианты: $\theta=\frac{1}{2}l^i{}_{,i}$ — модуль растяжения, $\sigma^2=\frac{1}{4}[l_{(i,j)}l^{i,j}-(l^i{}_{,i})^2]$ — модуль сдвига, $\omega^2=\frac{1}{4}l_{[i,j]}l^{i,j}$ — модуль поворота. Метод получения точных решений, когда какой-либо инвариант обращается в нуль, в сочетании с классификацией Петрова полей тяготения по алгебраической структуре тензора кривизны оказался весьма плодотворным и был применен впоследствии для отыскания решений уравнений поля с идеальной жидкостью, электромагнитным полем и др. Отметим наиболее важные результаты, полученные на этом пути.

Гольдберг и Сакс [95] доказали, что алгебраические специальные решения в пустом пространстве-времени характеризуются существованием геодезической конгруэнции с равным нулю сдвигом. К ним относятся плоско-волновые пространства и пространства Робинсона — Траутмана [172]. Однако наиболее замечательной работой в этом направлении явилась заметка Керра, где было получено точное вакуумное решение T для вращающейся шварцшильдовой массы m, имеющей вращательный момент ma вокруг оси z [109]

$$ds^2=(r^2+a^2\cos^2\theta)(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)+$$
$$+2(du+a\sin^2\theta d\varphi)(dr+a\sin^2\theta d\varphi)-$$
$$-\left(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)(du+a\sin^2\theta d\varphi)^2. \tag{1.20}$$

В данном случае поле стационарно, аксиально-симметрическое и относится к типу D по классификации Петрова.

Путем преобразования координат метрику поля можно преобразовать в асимптотически-плоский вид:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-dt^2+\frac{2mr^3}{r^4+a^2z^2}\cdot\mathcal{K}^2, \tag{1.21}$$

где имеют место соотношения вида:

$$(r^2+a^2)\,r\cdot R=r^2(xdx+ydy)+ar\,(xdy-ydx)+(r^2+a^2)(zdz+rdt)$$
$$r^4-(R^2-a^2)\,r^2-a^2z^2=0,\quad R^2=x^2+y^2+z^2.$$

На протяжении последних лет пространства Керра и их обобщения интенсивно изучались. Здесь необходимо отметить работы Боннора [55], Трюмпера [201], Ньюмена и Тамбурино [142], Мартина и Маса [127], где изучались пространства T, когда метрический тензор

$$g_{ik}=\eta_{ik}+2\mathcal{H}(x)\,l_il_k, \tag{1.22}$$

где η_{ik} — тензор Минковского, l^i — задает изотропно-геодезическую конгруэнцию, дисторсия для которой равна нулю, $\mathcal{H}$ — функция от всех координат. Широкий класс керроподобных метрик так называемых NUT-метрик был получен в статье [143]. К этому же направлению примыкает работа [171], где указан пример точного решения уравнений поля в вакууме:

$$ds^2 = 2\rho^2 e^{2u} d\zeta d\overline{\zeta} + 2d\rho d\sigma + \left(2\rho \frac{\partial u}{\partial x^3} + 2e^{-2u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2}\right) d\sigma^2, \quad (1.23)$$

где $u = -\ln(\lambda^3 + \lambda^3\zeta + \lambda^1\overline{\zeta} - \lambda^4\zeta\overline{\zeta})$, $\lambda^\alpha = \frac{\partial e^\alpha}{\partial x^3}$;

$$e^\alpha = (T, \overline{T}, u - \overline{T}\zeta - T\overline{\zeta}, 0),$$

черта над буквами означает комплексно-сопряженные величины. Наконец, отметим работу Сена [183], где изучались стационарные вакуумные поля, допускающие собственные геодезические лучи с неравным нулю модулем сдвига. Указаны два решения:

$$\text{а) } ds^2 = -\frac{r^{2\gamma_0} + Q^2}{f_0 r^{\gamma_0}} (dr^2 + r^{1-\sigma_0} dx^2 + r^{1+\sigma_0} dy^2) +$$

$$+ \frac{f_0 r^{\gamma_0}}{r^{2\gamma_0} + Q^2} \left(dt - 2\frac{\gamma_0 x}{f_0^2} Q dy\right)^2, \quad (1.24)$$

где $\sigma_0^2 + \gamma_0^2 = 1$, Q — функция от x, y;

$$\text{б) } ds^2 = -\left(\frac{f_0}{f}\right)(r^{1-\gamma_0} dx^2 + r^{1+\gamma_0} dy^2) +$$

$$+ 2dr(dt - 2\gamma_0 Q_y dx) + f(dt - 2\gamma_0 Q_y dx)^2, \quad (1.25)$$

где $f = f(x, y, z)$, $Q = Q(x, y)$, $\gamma = \gamma_0(x, y)$.

Попытка обобщить решение Керра для двух вращающихся частиц, находящихся на одной оси, была предпринята в работе [56]:

$$ds^2 = -l^\mu (dz^2 + dr^2) - l d\theta^2 - 2m d\theta dt + f dt^2, \quad (1.26)$$

где

$$f = \cos^{-1} h \left(\frac{a_1(z-h)}{R_1^3} + \frac{a_2(z+h)}{R_2^3}\right), \quad m = r^2 f \left(\frac{a_1}{R_1^3} + \frac{a_2}{R_2^3}\right),$$

$$l = r^2 f^{-1} - r^4 f \left(\frac{a_1}{R_1^3} + \frac{a_2}{R_2^3}\right)^2,$$

$$\mu = -r^2\left(\frac{a_1^2}{R_1^6} + \frac{a_2^2}{R_2^6}\right) + \frac{9}{8} r^4 \left(\frac{a_1^2}{R_1^8} + \frac{a_2^2}{R_2^8}\right) - \ln f -$$

$$- \frac{a_1 a_2 r^2 [3(r^2 + z^2) + 5h^2]}{4h^2 R_1^3 R_2^3} - \frac{3a_1 a_2}{8h^4}\left(\frac{r^2 + z^2 - h^2}{R_1 R_2} + 1\right),$$

$$a_1, a_2, h - \text{const}, \quad R_1^2 = r^2 + (z-h)^2, \quad R_2^2 = r^2 + (z+h)^2.$$

При $a_2 = 0$ имеем решение Керра.

Топологическая структура семейства пространств Керра изучалась в работе Картера [68].

Перейдем к обзору работ, связанных с нахождением точных вакуумных решений полевых уравнений (1) как при $\Lambda = 0$, так и при $\Lambda \neq 0$, с точки зрения допускаемых ими групп изометрических движений.

Наиболее полные результаты в разработке данной проблемы были достигнуты в работах А. З. Петрова, В. Р. Кайгородова и ряда зарубежных авторов в 1960—1962 годах. Поскольку монография А. З. Петрова [25] посвящена изучению пространств T и $\overset{*}{T}$, в ней весьма полно изложены инвариантно-групповые методы нахождения точных решений полевых уравнений гравитации, а также приведена сводка для пространств T_i, $\overset{*}{T}_i$ ($i = 1, 2, 3$), допускающих группы движений G_r ($r = 2, 3, \ldots, 10$), то в данном обзоре мы приведём лишь заслуживающие внимания результаты работ ряда авторов, более полно изучавших конкретные вопросы из сформулированной выше проблемы.

Необходимо отметить обширную обзорную статью Элерса и Кундта [83], где приводится классификация статических и стационарных вакуумных полей и соответствующая сводка точных решений. Широкий класс пространств Эйнштейна, обобщающих статические решения, конформно-приводимого типа был изучен А. М. Анчиковым [2]. Сводку результатов по этому вопросу и полную библиографию можно найти в указанной монографии А. З. Петрова.

В работах Элерса [82] и Освача [146] изучались решения уравнений поля Эйнштейна (в том числе, когда $R_{ik} = 0$), допускающих группы изометрических движений определенной структуры. К этому же направлению примыкает работа Крамера и Нойгебауэра [140]; Коппель в работе [20] фактически находит решения для пространств T, допускающих абелеву группу изометрических движений, векторы Киллинга которой пространственно-подобны. Им указано 8 классов точных решений.

В связи с этим дополнительно к ранее приведенным можно указать на ряд работ, посвящённых нахождению стационарных решений с аксиальной симметрией и цилиндрической симметрией (пространство допускает собственно 2-членную и 3-членную абелевы группы движений, один из векторов Киллинга необходимо времениподобен). В работе Папапетру [152] дается новое точное решение, соответствующее полю вращающегося тела с отличным от нуля моментом количества движения, но равной нулю массой. В статье указывается решение для N частиц, «линейно размазанных» на оси z с центрами в точках $r = 0$, $z = a_i$.

$\cdot (a_0 < a_1 < \ldots < a_{N-1})$. Для метрики

$$ds^2 = \exp[2(\nu - \lambda)](dr^2 + dz^2) + r^2 \exp(-2\lambda)\, d\varphi^2 - \exp(2\lambda)\, dt^2 \quad (*)$$

функции λ и ν имеют следующий вид:

$$\lambda = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i(r, z), \quad \nu = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \nu_{ij}(r, z);$$

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_i + \rho_i' - b_i}{\rho_i + \rho_i' + b_i}; \quad \nu_{ij} = \frac{1}{4} \ln \frac{E(i', j) E(i, j')}{E(i, j) E(i', j')};$$

$$E(i, j) = \rho_i \rho_j + z_i z_j + r^2, \ E(i', j) = E(i, j') = \rho_i' \rho_j + z_i' z_j + r^2,$$

$$\rho_i^2 = r^2 + z_i^2, \quad \rho_{i'}^2 = r^2 + z_i'^2, \quad z_i = z - \left(a_i + \frac{1}{2} b_i\right), \ z_i' = z - \left(a_i - \frac{1}{2} b_i\right).$$

Ряд вакуумных решений для стационарного аксиально-симметрического класса пространств указан Нойгебауэром [140]. Стационарные цилиндрически-симметричные вакуумные решения указаны в статье Р. А. Сингатуллина [33]. Решение в вакууме для метрики (*) методом суперпозиции решений Шварцшильда для двух точечных частиц, расположенных на одной оси, было получено В. Р. Кайгородовым [16]. Позднее этот метод был обобщен на случай N точечных частиц С. П. Гавриловым [4].

В заключение обзора упомянем работы В. Р. Кайгородова, А. Б. Пестова [17], М. Ш. Якупова [39], посвященные изучению лоренцевых римановых многообразий (в их числе лоренцевых пространств Эйнштейна) с S — симметрической или S — рекуррентной структурой тензора кривизны ($S>0$ — целое число) или допускающих поле ковариантно постоянного вектора.

2. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ ПЫЛЕВИДНОЙ МАТЕРИИ И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Для удобства классификации разобьем рассмотренные задачи на четыре типа:

1⁰. Незаряженная пылевидная материя.
2⁰. Заряженная пылевидная материя.
3⁰. Незаряженная жидкость.
4⁰. Заряженная жидкость.

Заранее оговоримся, что космологические решения для этих случаев мы отнесли к разделу 5 настоящей статьи. Однако некоторые решения, вообще говоря, являющиеся космологическими, мы все же рассмотрим в этом разделе, по причинам, которые будут ясны по ходу изложения.

Тип 1^0 (Незаряженная пылевидная материя). Решения уравнений Эйнштейна для этого случая получена в работах [41, 129, 89, 92, 100, 104, 107, 146, 142].

В работе [146] получен большой класс решений уравнений Эйнштейна. Автор находит двухпараметрическое семейство решений уравнений Эйнштейна с неравным нулю космологическим членом

$$R_{ik} - \frac{R}{2} g_{ik} + \Lambda g_{ik} = -\varkappa u_i u_k, \qquad (2.1)$$
$$u_i u^i = 1.$$

Пространства, исследуемые в работе, допускают четырехпараметрическую просто-транзитивную группу движений, задаваемую коммутационными соотношениями:

$$[X_0 X_1] = 0, \quad [X_0 X_2] = 0, \quad [X_1 X_2] = 0,$$
$$[X_0 X_3] = \frac{\alpha(1-\alpha^2)}{\sqrt{2}} X_1, \quad [X_1 X_3] = \frac{\alpha(3-\alpha^2)}{\sqrt{2}} X_0 + X_1, \qquad (2.2)$$
$$[X_2 X_3] = (1-\alpha^2) X_2,$$

где α^2 — параметр, лежащий в пределах $1/2 \leqslant \alpha^2 \leqslant 2$. Разобьем область изменения α^2 на три случая:

$$1)\ 1/2 \leqslant \alpha^2 < \bar{\alpha}^2, \quad 2)\ \alpha^2 = \bar{\alpha}^2, \quad 3)\ \bar{\alpha}^2 < \alpha^2 \leqslant 2, \qquad (2.3)$$

где $\bar{\alpha}^2$ — корень полинома: $1 + 2\alpha^2(1-\alpha^2)(3-\alpha^2) = 0$.

Случай 1. $(1/2 \leqslant \alpha^2 < \bar{\alpha}^2)$. Исходная группа изоморфна группе

$$[Y_0 Y_1] = 0, \quad [Y_0 Y_2] = 0, \quad [Y_1 Y_2] = 0, \qquad (2.4)$$
$$[Y_0 Y_3] = \lambda_0 Y_0, \quad [Y_1 Y_3] = \lambda_1 Y_1, \quad [Y_2 Y_3] = \lambda_2 Y_2,$$

где

$$\lambda_0 = \frac{1-\beta}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{1+\beta}{2}, \quad \lambda_2 = 1 - \alpha^2,$$
$$\beta = \sqrt{1 + 2\alpha^2(1-\alpha^2)(3-\alpha^2)}. \qquad (2.5)$$

Решение имеет вид:

$$ds^2 = k^2 \{(1-\nu_0^2) e^{-2\lambda_0 x^3} (dx^0)^2 + 2(1-\nu_0\nu_1) e^{-x^3} dx^0 dx^1 +$$
$$+ (1-\nu_1^2) e^{-2\lambda_1 x^3} (dx^1)^2 - e^{-2\lambda_2 x^3} (dx^3)^2 - (dx^3)^2, \qquad (2.6)$$

где $k \neq 0$ — конформный множитель, $\nu_0 = \dfrac{\sqrt{2}\lambda_0}{\alpha(3-\alpha^2)}$, $\nu_1 = \dfrac{\sqrt{2}\lambda_1}{\alpha(3-\alpha^2)}$.

Плотность

$$\varkappa\rho = \frac{1}{k^2}(2\alpha^2 - 1)(2 - \alpha^2), \quad \Lambda = -\frac{1}{2k^2}(2-\alpha^2), \qquad (2.7)$$

Вектор 4-х скорости

$$u_j=(ke^{-\lambda_0 x^3},\ ke^{-\lambda_0 x^3},\ 0,\ 0). \tag{2.8}$$

При $\alpha^2=1/2$

$$ds^2=k^2\{e^{x3/2}(dx_0)^2+2e^{-x^3}dx^0dx^1-e^{-x^3}(dx^2)^2-(dx^3)^2\}, \tag{2.9}$$

$$\rho=0,\quad \Lambda=-\frac{3}{4k^2}.$$

Это есть вакуумное решение типа N. При $\alpha=1$ получаем космологическое решение Гёделя.

Случай 2. ($\alpha^2=\bar{\alpha}^2$). Линейный элемент имеет вид:

$$ds^2=k^2\left\{\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 e^{-x^3}(dx^0)^2-(x^3dx^0-dx^1)^2e^{-x^3}-\right.$$
$$\left.-e^{-2\lambda_2 x^3}(dx^2)^2-(dx^3)^2,\right. \tag{2.10}$$

где $a=\sqrt{2}\alpha(3-\alpha^2)$. Вектор 4-х скорости $u_j=\left[\frac{k}{2}e^{-x^3/2}\left(\sqrt{a^2-1}-\frac{2x^3}{\sqrt{a^2-1}}\right),\ \frac{k}{\sqrt{a^2-1}},\ 0,0\right]$. В сопутствующей системе координат метрика допускает группу типа 6 Бьянки.

Случай 3. ($\bar{\alpha}^2<\alpha\leqslant 2$). Исходная группа изоморфна группе:

$$\begin{gathered}[Y_0Y_1]=0,\ [Y_0Y_2]=0,\ [Y_1Y_3]=0,\ [Y_0Y_3]=1/2Y_0-\beta'/2Y_1,\\ [Y_1Y_3]=\beta'/2Y_0+1/2Y_1,\ [Y_2Y_3]=\lambda_2Y_2.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Решение есть:

$$ds^2=k^2\{(1-\nu_0)^2e^{-2\lambda_0x^3}(dz^0)^2+2(1-\nu_0\nu_1)e^{-x^3}dz^0dz^1+$$
$$+(1-\nu_1^2)e^{-2\lambda_1x^3}(dz^1)^2-e^{-2\lambda_2x^3}(dx^2)^2-(dx^3)^2\}, \tag{2.12}$$

где

$$\lambda_0=\frac{1-i\beta'}{2},\quad \lambda_1=\frac{1+i\beta'}{2},\quad \lambda_2=(1-\alpha^2),\quad z^0=\frac{1}{2}(x^0+ix^1),$$

$$z'=1/2(x^0-ix^1),\quad \nu_0=\frac{\sqrt{2\lambda_0}}{\alpha(3-\alpha^2)},\quad \nu_1=\frac{\sqrt{2\lambda_1}}{\alpha(3-\alpha^2)},$$

$$\beta'=\sqrt{-(1+2\alpha^2)(1-\alpha^2)(3-\alpha^2)},$$

$$u_i=(ake^{-x^3/2}\cos\beta'/2x^3,\ ake^{-x^3/2}\sin\beta'/2x^3,\ 0,0). \tag{2.13}$$

В работе [72] получено следующее решение для коллапсирующей пыли:

$$ds^2=\left(1-\frac{f+F/r}{1+f}\right)dt^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)-$$
$$-\frac{dr^2}{1+f}-2\frac{(f-F/r)^{1/2}}{1+f}drdt, \tag{2.14}$$

где f и F — функции от r.

Тип 2^0 (Заряженная пыль). В работе [44] получено решение для вращающейся однородной заряженной пыли (сила Лоренца равна нулю), удовлетворяющее уравнениям Эйнштейна — Максвелла

$$R_{\mu\nu}-R/2g_{\mu\nu}=8\pi\rho v_\mu v_\nu-8\pi E_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}, \tag{2.15}$$

имеющее вид:

$$ds^2=dt^2-dr^2-dz^2+\{\beta\,\mathrm{sh}^4(\alpha/2\cdot r)-4/\alpha^2\,\mathrm{sh}^2(\alpha r/2)\}d\Phi^2+$$
$$+8a\,\mathrm{sh}^2(\alpha r/2)\,d\Phi dt, \tag{2.16}$$

где

$$\alpha=(2\lambda)^{1/2},\quad \beta=\frac{4A^2+2\lambda}{\lambda^2};\quad 8\pi\rho=2(A^2+\lambda),\quad 2\pi\sigma=A(A^2+\lambda)^{1/2}, \tag{2.17}$$

$A=\mathrm{const}$, ρ — плотность массы, σ — плотность заряда. Кроме того, рассмотрены неоднородные распределения:

1) аксиальная симметрия

$$ds^2=dt^2-e^{2\psi}(dr^2+dz^2)-ed\Phi^2+2md\Phi dt,\quad l+m^2=r^2, \tag{2.18}$$

$$m=J_1(kr)(Ce^{kz}+De^{-kz}),$$

$$\psi=1/2A^2r^2-1/4J_1(J_1+krJ_1')(C^2e^{2kz}+D^2e^{-2kz})-$$
$$-1/2CD\left(k^2\int J_1^2rdr+\int J_1^2/rdr+k^2\int(J_1')^2rdr+J_1^2\right),$$

$$\rho=\frac{e^{-2\psi}}{8\pi}\left\{-2A^2+\left(\frac{J_1^2}{r^2}+\frac{2k}{r}J_1J_1'+k^2J_1'^2\right)(Ce^{kz}+De^{-kz})^2+\right.$$
$$\left.+k^2J_1^2(Ce^{kz}-De^{-kz})^2\right\}, \tag{2.19}$$

$$\sigma=-\frac{A}{r}e^{-2\psi}(J_1+kJ_1^2)(Ce^{kz}+De^{-kz}),$$

где A, C, D, k — постоянные, $J_1'(x)\equiv\frac{\partial J_1}{\partial x}$, $J_1(x)$ — функция Бесселя 1-го порядка.

2) рассмотрено аналогичное решение для цилиндрической симметрии. Результат, аналогичный полученному в предыдущей статье, имеется в работе [187].

Тип 3^0 (Незаряженная жидкость). Множество работ по данному вопросу приведено в списке литературы. Рассмотрим в деталях лишь некоторые из них.

В работе Степанюка [34] проводится найденное им точное статическое решение уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости в случае аксиальной симметрии:

$$R_{\mu\nu}-\frac{R}{2}g_{\mu\nu}=8\pi[\rho u_\mu u_\nu+p(g_{\mu\nu}+u_\mu u_\nu)]+\Lambda g_{\mu\nu}. \tag{2.20}$$

Решение есть:

$$ds^2=-\frac{1}{[\alpha+\beta(1-r^2/R^2)^{1/2}]^2}\left\{\frac{dr^2}{1-r^2/R^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)-\right.$$
$$\left.-\left[\eta+\gamma\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2}+\delta r\cos\theta\right]^2dt^2\right\}. \tag{2.21}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta, R$ — произвольные постоянные.

$$8\pi\rho = -\frac{1}{R^2}(\alpha^2-\beta^2) -$$

$$-\frac{2}{R^2}\left\{\frac{(\alpha\gamma+\beta\eta)\left[\beta+\alpha(1-r^2/R^2)^{1/2}\right]+\delta r\cos\theta}{\left[\eta+\gamma(1-r^2/R^2)^{1/2}+\delta r\cos\theta\right]}+\Lambda\right\}, \tag{2.22}$$

$$8\pi\rho_0 = \frac{3}{R^2}(\alpha^2-\beta^2)-\Lambda. \tag{2.23}$$

При $\alpha=1$, $\beta=\delta=0$ — получаем внутреннее решение Шварцшильда.

При $\alpha=\eta=1$, $\beta=\delta=\gamma=0$ — космологическое решение Эйнштейна.

При $\alpha=\gamma=1$, $\beta=\eta=\delta=0$ — решение Де — Ситтера.

Валкьюстом [210] получено также внутреннее решение уравнений Эйнштейна для вращающейся жидкой сферы конечных размеров. Решение принадлежит к типу D по классификации Петрова. Общая метрика представляет собой суперпозицию метрики Керра—Ньюмана—Унти—Тамбурино [143] и метрики жестко вращающейся жидкой сферы и имеет вид:

$$ds^2 = -\frac{1}{\Phi^2}(dt-Ad\theta)^2+r_0(\xi^2+\zeta^2)\left[\frac{d\zeta^2}{(1-k^2\zeta^2)h_1}+\frac{d\xi^2}{(1+k^2\xi^2)h_2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta^2 h_1 h_2}{h_1-h_2}\,d\theta^2\right], \text{ где } \frac{1}{\Phi^2}=\frac{h_1-h_2}{\xi^2+\zeta^2};\; A=\delta r_0\left[\frac{\xi^2 h_1+\zeta^2 h_2}{h_1-h_2}-\xi_A^2\right], \tag{2.24}$$

$$h_1(\zeta)=1+\zeta^2-\frac{2m}{r_0}\zeta(1-k^2\zeta^2)^{1/2}+\frac{\zeta}{\mathscr{K}^2}\left[\zeta-\frac{1}{k}(1-k^2\zeta^2)^{1/2}\sin^{-1}(k\zeta)\right],$$

$$h_2(\xi)=1-\xi^2-\frac{2b}{r_0}\xi(1+k^2\xi^2)^{1/2}-\frac{\xi}{\mathscr{K}^2}\left[\xi-\frac{1}{k}(1+k^2\xi^2)^{1/2}\sin^{-1}(k\xi)\right].$$

«Внешние» параметры могут быть идентифицированы с постоянной Шварцшильда m, постоянными метрики NUT b и r_0, которые связаны с постоянной метрики Керра — a соотношением $r_0^2=a^2-b^2$. «Внутренние» параметры $\mathscr{K}$ и k связаны с жидкостью через уравнения на давление P и плотность ρ:

$$P=1/2\,\rho_s\left(1-\frac{\mathscr{K}^2}{\Phi^2(\varphi^2)}\right), \quad \rho=\frac{\rho_s}{2}\left(\frac{3\mathscr{K}^2}{\Phi^2(\varphi^2)}-1\right), \tag{2.25}$$

где ρ_s — плотность на поверхности сферы при $P=0$, $\mathscr{K}=\mathscr{K}\rho_s^{1/2}r_0$, ξ_A определяется так, чтобы $\xi=\xi_A$ было вырожденной поверхностью,

$$\delta = \pm 2\left[(1+k^2\xi_A^2)^{1/2}\frac{dh_2}{d\xi}_{|\xi=\xi_A}\right]^{-1}.$$

При $k=0$, $b=0$, $m=0$ из (2.24) получается метрика плоского пространства, записанная в сплюснутых сфероидальных координатах. При $k=0$, m, $b\neq 0$, $r_0^2=a^2-b^2$ получается внешнее решение NUT. Другие возможные частные случаи также рассмотрены в данной работе.

Нестатическое решение для жидкой сферы получено в работе Вайдиа [203]. При этом предполагалось, что линии тока жидкости нормальны к гиперповерхности $\rho=\mathrm{const}$.

Решение имеет вид:

$$ds^2=-e^{\lambda}dr^2-r^2d\Omega^2+e^{\nu}dt^2, \quad \lambda=\lambda(r,t), \quad \nu=\nu(r,t),$$

$$e^{-\lambda}=1-1/3ar^2, \quad a=8\pi\rho(r,t), \quad b=8\pi p(r,t), \tag{2.26}$$

$$e^{\nu}=1/3a_t^2(1-1/3ar^2)/[(a-\varphi(a)(a+b)^2(1-1/3\varphi r^2)], \quad \left(a_t=\frac{\partial a}{\partial t}\right),$$

вектор скорости

$$v_1=a_r[(a+b)f]^{-1}, \quad v_2=v_3=0, \quad v_4=a_t[(a+b)f]^{-1}, \tag{2.27}$$

где $f^2=3(a-\varphi(a))$, давление

$$b=8\pi p=a\,\frac{g(a)(1-1/3\varphi r^2)^{1/2}-3(\dot\varphi/2\varphi-1/a)}{3\dot\varphi/2\varphi-g(a)(1-1/3\varphi r^2)^{1/2}} \quad \left(\dot\varphi\equiv\frac{d\varphi}{da}\right). \tag{2.28}$$

Для определения плотности $a=8\pi\rho$ материи необходимо решить дифференциальное уравнение

$$(1-1/3ar^2)\dot a_r=(a-\varphi)(a+b)r. \tag{2.29}$$

Функция $g(a)$ определяется из требования, чтобы вне сферы решение переходило во внешнее решение Шварцшильда:

$$g(a)=(3\dot\varphi/2\varphi-1/a)\left[1-1/3(6M)^{2/3}a^{-2/3}\varphi\right]^{-1/2},$$

где M — постоянная метрики Шварцшильда (масса); функция $\varphi(a)$ — произвольная функция; если $\varphi(a)=a$, получим внутреннее решение Шварцшильда. Если $\varphi=ka^{2/3}$, получим сжимающуюся сферу Оппенгеймера — Шнайдера [145].

Тип 4° (Заряженная жидкость). Метрики, соответствующие решению уравнений Эйнштейна для заряженной жидкой сферы, получены в работах [72, 80, 117, 118]. Приведем некоторые из них.

В работе [72] найдена метрика

$$ds^2=-A^2dt^2+B^2dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{2.30}$$

где A и B — функции от r, соответствующие тонкой заряженной сферической оболочке радиуса r_0, с общим зарядом q, массой k и плотностью s поверхностных упругих натяжений, необходимых для поддержания оболочки в равновесии.

Для $r > r_0$:

$$A^2 = B^{-2} = 1 - \frac{2mr - q^2}{r^2}; \qquad (2.31)$$

$\varepsilon = \frac{q}{r}$ — радиальное электрическое поле. Для $r < r_0$

$$A^2 = 1 - \frac{2mr_0 q^2}{r_0^2}, \qquad (2.32)$$

$$E = 0.$$

Здесь

$$m = k + \frac{q^2}{2r_0}; \quad s = \frac{k}{4}\left[A_0^{-1} - 1 - \frac{q^2}{r_0^2 A_0 (1 - A_0)}\right], \qquad (2.33)$$

и

$$A_0 = 1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{q^2}{r_0^2}.$$

Найдена также метрика двух концентрических оболочек.

Де [78] получил 3 циллиндрически-симметричных решения уравнений Эйнштейна для заряженной жидкости, расширяющейся без сдвигов, в предположении, что присутствует только радиальное электрическое поле $F^{10}(r)$ и введена сопутствующая система координат. Решения:

1-е решение;

$$ds^2 = (R+T)^{-2} dt^2 - (R+T)^2 e^{2kr}[dr^2 + dz^2] - (R+T)^2 d\varphi^2, \quad (2.34)$$

$$F^{10} = \pm \frac{R' e^{-kr}}{(R+T)^2};$$

$$4\pi p = \frac{e^{-2kr}}{(R+T)^2}\left[-\frac{3}{8r^2} + \frac{3R'}{4r(R+T)} + \frac{1}{8}\frac{(R')^2}{(R+T)^2}\right] - \frac{3}{2}\dot{T}^2 - \ddot{T}(R+T);$$

$$4\pi\rho = \frac{e^{-2kr}}{(R+T)^2}\left[-\frac{3}{8r^2} + \frac{3R'}{4r(R+T)} + \frac{1}{8}\frac{(R')^2}{(R+T)^2} - \frac{R''}{R+T}\right] + \frac{3}{2}\dot{T}^2,$$

$|\sigma| = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{R'' e^{-2kr}}{(R+T)^3}\right]$ — плотность зарядов, где $R = R(r)$, $T = T(t)$, k — произвольная постоянная.

2-е решение:

$$ds^2 = (R+T)^{-2} dt^2 - (R+T)^2 r^{-2}[dr^2 + dz^2] - (R+T)^2 r^{-2} d\varphi^2, \quad (2.35)$$

$$F^{10} = \pm \frac{R' r^2}{(R+T)^2};$$

$$4\pi p = \frac{1}{2(R+T)} - \frac{3}{2}\dot{T}^2 - \ddot{T}(R+T);$$

$$4\pi\rho = \frac{r^2}{(R+T)^2}\left[-\frac{R''}{(R+T)} + \frac{7R'}{r(R+T)} - \frac{21}{2r^2}\right] + \frac{3}{2}\dot{T}^2;$$

$$|\sigma| = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{R'' r^2 + 2rR'}{(R+T)^3}\right].$$

3-решение:

Для линейного элемента вида

$$ds^2 = g_{00}(x, t)\, dt^2 - A(t)\, dx^2 - B(t)\, e^{2x}[dy^2 + dz^2] \qquad (2.36)$$

найдено решение:

$$g_{00} = e^{-2T_x}; \quad A = \frac{M(T-1)^3}{T}; \quad B = \frac{(T-1)^{3/2}}{T(T+1)}; \quad M = \text{const}. \quad (2.37)$$

$T = T(t)$ — удовлетворяет соотношению:

$$kt + c = \frac{2[T^2 + 4T - 1]}{T^{1/2}(T+1)^{1/2}} - 7\ln[(2T+1) + 2T^{1/2}(T+1)^{1/2}] +$$
$$+ 2\ln tan[\pi/4 + 1/2 tan^{-1} T^{1/2}], \quad k, l - \text{const}.$$

$$F^{10} = \pm \frac{1}{M\sqrt{2}} \frac{T^{3/2}(T+1)^{1/2} e^{T_x}}{(T-1)^3};$$

$$4\pi p = k^2 e^{2T_x}\left[\frac{T(T+1)(12T^5 + 9T^4 - 29T^3 - 12T^2 - 16T - 1)}{8(2T+1)^2(T-1)^6} -\right.$$
$$\left. - \frac{x}{4}\frac{T^2(T+1)^2(T+2)}{(2T-1)(T-1)^5}\right] + \frac{T(T-2)}{4M(T-1)^2};$$

$$4\pi\rho = k^2 e^{2T_x}\left[\frac{T(T+1)(12T^5 + 9T^4 - 37T^3 - 16T^2 - 8T + 3)}{8(2T+1)^2(T-1)^6} +\right.$$
$$\left. + \frac{x}{4}\frac{T^3(T+1)^2}{(2T-1)(T-1)^5}\right] - \frac{T(T^2 + T + 6)}{4M(T-1)^3};$$

$$|\sigma| = \frac{1}{4\pi}\frac{\sqrt{2}}{M}\frac{T^{1/2}(T+1)^{1/2} T}{(T-1)^3}.$$

Специальный случай 1. Если $B = A^{1/2}$, тогда $g_{00} = e^{-2x}$,

$$F_{10} = \pm \frac{e^x}{A}\left[1 - e^{2x}\frac{A}{8}\right]^{1/2},$$

$$4\pi\rho = 5/32 e^{2x}(\dot{A}/A)^2 + \frac{e^{2x}}{16}\cdot\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{2}{A};$$

$$4\pi p = 5/32 e^{2x}(\dot{A}/A)^2 - 5/16 e^{2x}(\ddot{A}/A);$$

$$|\sigma| = \frac{1}{4x}\frac{(2 - 3/8\ddot{A}e^{2x})}{(1 - \dot{A}/8e^{2x})^{1/2}}.$$

Специальный случай 2. Если $B = A$ — случай изотропного расширения жидкости, тогда $g_{00} = 1$ и модель не допускает электромагнитного поля

$$4\pi p = 1/8\dot{A}^2/A^2 - \ddot{A}/2A + \frac{1}{2A},$$

$$4\pi\rho = 3/8\dot{A}^2/A^2 - 3/2\frac{1}{A}.$$

Функция $A(t)$ остается неопределенной.

3. УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА С ТЕНЗОРОМ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Впервые решение уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса электромагнитного поля было получено Рейснером [167] и независимо Нордстремом [144].

Предполагалось, что при наличии электромагнитного поля для области, где вещество отсутствует, его вклад характеризуется тензором Максвелла $\tau_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}=\tau_{\mu\nu}=-F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu}+1/4g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \tag{3.1}$$

Здесь $F_{\mu\rho}$ — тензор электромагнитного поля. Уравнения Эйнштейна записываются в виде:

$$R_{\mu\nu}=\chi(T_{\mu\nu}-1/2g_{\mu\nu}T), \tag{3.2}$$

где $T\equiv T^{\mu}_{\mu}$ — след тензора энергии-импульса. Но поскольку след $\tau=0$, то уравнения (3.2) сводятся к следующим:

$$R_{\mu\nu}=\chi T_{\mu\nu}=\chi\tau_{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

Нордстрем и Рейсснер ограничивались статистическими решениями. Тогда в сферических координатах среди компонент напряженности электростатического поля отличны от нуля только:

$$F_{10}=-F_{01}=\frac{e}{r^2}, \tag{3.4}$$

где e — заряд точечной частицы, создающей поля. Отличные от нуля компоненты метрического тензора — гравитационные потенциалы имеют вид:

$$\begin{gathered} g_{11}=-\left(1-\frac{2Gm}{C^2r}+\frac{\chi e^2}{2r^2}\right)^{-1}, \\ g_{44}=\left(1-\frac{2Gm}{C^2r}+\frac{\chi e^2}{2r^2}\right); \\ g_{22}=r^2, \quad g_{33}=r^2\sin^2\theta. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь m — масса частицы, G — ньютоновская постоянная, C — скорость света.

К настоящему времени получено довольно много точных решений уравнений Эйнштейна—Максвелла с той или иной физической интерпретацией. Ниже мы будем проводить не все, а только часть таких решений представляющих физический интерес и охватывающих большой класс ранее полученных решений.

Сначала рассмотрим поля со сферической симметрией. В работах [70, 124] получены частные статические решения уравнений Эйнштейна — Максвелла для точечного заряда, которые не

сводятся к (3.5) Бартрум [45] получил изотропное электромагнитное поле с метрикой:

$$\begin{gathered} ds^2=(2-A)\,dr^2+Br^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)- \\ -2(1-A)cdrdt-Ac^2dt^2, \end{gathered} \tag{3.6}$$

где

$$A=\left(\frac{m}{m_0}\right)^{2/3}\left(2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{2n}-\frac{2}{3}\,\frac{r}{m}\,\frac{dm}{d\sigma}-\frac{2m}{r},$$

$$B=\left(\frac{m}{m_0}\right)^{-2/3}(2\operatorname{tg}\theta/2)^{-2n}.$$

Решение Вайдьи [202] для излучающей сферы (звезды) массы m обобщено на случай неравного нулю заряда сферы Q в работе [117]. Авторы использовали тензор энергии-импульса, представляющий собой суперпозицию тензоров энергии-импульса стационарного электромагнитного поля и поля излучения $T_{\mu\nu}=\rho e_{\mu}e_{\nu}$, где e_{ν} — изотропный вектор распространения излучения. Решение представлено метрикой:

$$\begin{gathered} ds^2=-\left(1-\frac{2m}{r}+4\pi\frac{Q^2}{r^2}\right)dr^2-r^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)+ \\ +\left[\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{4\pi Q^2}{r^2}\right)\frac{\dot m}{f^2}\right]dt^2, \end{gathered} \tag{3.7}$$

где точка означает дифференцирование по времени, и $\frac{dm}{dr}\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{4\pi Q^2}{r^2}\right)=f(m)$, $m=m(r,t)$, а величина $f(m)$ определяется условиями внутри звезды.

С использованием тетрадного формализма получено поле вращающегося тела с массой «m», зарядом «e» и угловым моментом «ma».

В сферических координатах метрика имеет вид:

$$\begin{gathered} ds^2=(r^2+a^2\cos^2\theta)(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)+ \\ +2\,(d\rho-a\sin^2\theta d\varphi)(dr-a\sin^2\theta d\varphi). \end{gathered} \tag{3.8}$$

В [96] получено три частных решения, описывающих изотропное электромагнитное поле.

Томимадзу и Сато [197, 198] получили точное решение уравнений Эйнштейна для вакуума, описывающее гравитационное поле конечной вращающейся массы и не сводящееся к решению Керра.

В [88, 73] решение Томимодзу-Сато обобщается на случай электровакуума. Например, в [88] получено следующее решение:

$$\begin{gathered} ds^2=f^{-1}\left[p^{-2}\left(\frac{dx^2}{x^2-1}+\frac{dy^2}{1-y^2}\right)+(x^4-1)(1-y^2)\,d\varphi^2\right]- \\ -f\,(dT-\omega d\varphi)^2, \end{gathered} \tag{3.9}$$

где

$$f=A/B,\ p^2=[(x^2-y^2)^3/A]\cdot\cos^4\lambda,$$

$$(1-q^2)^{1/2}/\omega=-4\,[c\,(1-y^2)/A]\,\mathrm{tg}\,\lambda.$$

Получению точных решений уравнений Эйнштейна—Максвелла посвящены также работы [52, 57]. В [160] найден класс решений уравнений Эйнштейна—Максвелла обобщающий вид метрик Керра—Ньюмена, Ньюмена—Унти—Тамбурино, метрики Робинсона—Бертотти. Этот класс задается в вещественных координатах (ρ, σ, q, τ) линейным элементом вида:

$$ds^2=\frac{p^2+q}{P}dp^2+\frac{P}{p^2+q^2}(d\tau+q^2d\sigma)^2+$$

$$+\frac{p^2+q^2}{Q}dq^2-\frac{Q}{p^2+q^2}(d\tau+p^2d\sigma)^2, \tag{3.10}$$

где $P=P(p)$, $Q=Q(q)$.

При некоторых условиях ($R=\mathrm{const}$) функции P и Q представляются в виде полиномов 4-го порядка:

$$P=b_0+e_0^2+2m_0q+\varepsilon_0q^2-\left(\frac{\lambda}{3}\right)q^4, \tag{3.11}$$

$$Q=b_0-q_0^2+2n_0p-\varepsilon_0p^2-\left(\frac{\lambda}{3}\right)p^4, \tag{3.12}$$

где λ—космологическая постоянная, а m_0, n_0, e_0, q_0, b_0, ε_0—произвольные параметры.

Брахмачари [58] получил и исследовал обобщение метрики Нордстрема—Рейснера (3.5) для внутренности заряженной сферы.

В [112, 212] исследуются геометрические и физические свойства решения уравнений Эйнштейна—Максвелла, описываемого метрикой:

$$ds^2=A^{-3}(x+y)^{-2}(Fdt^2-F^{-1}dy^2-G^{-1}dx^2-Gdz^2), \tag{3.13}$$

где $G=1-x^2-2mAx^3-e^2A^2x^4$, $F=-G(-y)$. Это решение интерпретируется как поле равноускоренной заряженной частицы. Оно содержит три произвольных параметра: m — масса, e — заряд, A — ускорение частицы, и является обобщением решения Нордстрема-Ркйснера в ОТО и решения Борна в классической электродинамике.

Поля с осевой симметрией рассматривались впервые, повидимому, в работах Вейля [214]. В [188] найдено цилиндрически-симметричное решение, описывающее два облака незаряженных частиц, вращающихся по круговым траекториям в противоположных направлениях. По оси симметрии направлено магнитное поле. Решение есть:

$$ds^2=e^{2\alpha}dt^2-e^{2(\rho-\alpha)}(dr^2+dz^2)-r^2e^{-2\alpha}d\varphi^2, \tag{3.14}$$

где $\alpha=\ln\left(k_1+\frac{k_2r^2}{\alpha^2}\right)$;

$$\beta=2\ln\left(\frac{k_1+K_2r^2}{\alpha^2}\right)+D+2\frac{k_1-\pi k^2a^2/k^2}{k_1+k_2r^2/a^2},$$

$$4\pi\rho=e^{-2}(1-2r\alpha')\left(\frac{4k_1K_2}{\alpha^2}-4\pi k^2\right),$$

a—радиальный размер системы, k_1, k_2, k, D—постоянные. В [216] получена следующая метрика:

$$ds^2=\left[dt+\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{r}\right)d\varphi\right]^2-\frac{4}{9r^4}\exp\left[\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{r}\right)dr^2-d\varphi^2-\right.$$

$$\left.-\exp\left[-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{r}\right)\right]dz^2.\right. \tag{3.15}$$

Автор утверждает, что эта метрика описывает распределение материальных источников поля, расположенных по оси z.

Восемь частных решений уравнений Эйнштейна—Максвелла для аксиально-симметрического пространства-времени получено в [177], в предположении, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля удовлетворяет условиям $\det|F_{\mu\nu}|=0$, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\neq0$. Боннор [50] искал статические решения уравнений тяготения и электростатики в пустом пространстве, когда электростатический потенциал зависит от одной из цилиндрических координат z или r. В 1966 году [52] им получено из стационарного решения Керра новое решение, соответствующее массивному источнику, обладающему магнитным дипольным моментом. Параметры массы и дипольного момента предполагаются независимыми. Уравнения поля выбираются в виде:

$$R_{ik}=-8\pi E_{ik}, \tag{3.16}$$

$$E_k^i=-F^{ia}F_{ka}+1/4\,\delta_k^iF^{ab}F_{ab}, \tag{3.17}$$

$$F_{(ij,\,k)}=0,\quad F^{ik}_{,k}=0. \tag{3.18}$$

Решение имеет вид:

$$ds^2=-\frac{Y^2P^2}{Q^3Z}(dr^2+Zd\theta^2)-Z\left(\frac{Y}{P}\right)\sin^2\theta d\varphi^2+\left(\frac{P}{Y}\right)^2dt^2, \tag{3.19}$$

$$F_{ik}=\mathscr{K}_{i,\,k}-\mathscr{K}_{k,\,i};\quad \mathscr{K}_i=[0,0,mb\pi^{-1/2}rP^{-1}\sin^2\theta,0], \tag{3.20}$$

где

$$P=r^2-2mr+b^2\cos^2\theta,$$

$$Q=(r-m)^2-(b^2+m^2)\cos^2\theta, \tag{3.21}$$

$$Y=r^2-b^2\cos^2\theta,\quad Z=r^2-2mr-b^2.$$

Магнитный дипольный момент находится в $\theta=0$ и равен $mb\pi^{-1/2}$, гравитационное поле создается также массой $2m$, находящейся в начале координат. Для электрического диполя получается чисто электрическое решение:

$$k_i = [0, 0, 0, mb\pi^{-1/2}Y^{-1}\cos\theta]. \qquad (3.22)$$

В [153] найдено решение уравнений Эйнштейна—Максвелла для электровакуума с двумя изолированными источниками.

В [51, 179, 55] получен ряд частных решений уравнений Эйнштейна—Максвелла. Картер [67] получил семейство решений уравнений Эйнштейна—Максвелла с Λ членом, которое является обобщением многих известных решений. Метрика задавалась в виде:

$$ds^2 = (u_{(\lambda)} + u_{(\mu)})\left\{\frac{d\lambda^2}{\Delta(\lambda)} + \frac{d\mu^2}{\Delta_{(\mu)}} + \Delta_{(\mu)}\left(\frac{P(\lambda)\,d\psi - Q(\lambda)\,d\chi}{P(\lambda)\,Q_{(\mu)} - P_{(\mu)}\,Q_{(\lambda)}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Delta_{(\lambda)}\left(\frac{P(\mu)\,d\psi - Q_{(\mu)}d\chi}{P_{(\lambda)}Q_{(\mu)} - P_{(\mu)}Q(\lambda)}\right)^2\right\}. \qquad (3.23)$$

Решение выражено через 9 параметров: $m, n, p, q, k, l, c, \gamma, h$.

$$P_{(\lambda)} = (c^2\lambda^2 + k^2 + l^2)\cos\gamma + 2ckl\lambda,$$

$$P_{(\mu)} = -(c^2\mu^2 + k^2 + l^2)\sin\gamma - 2ckl\mu,$$

$$u_{(\lambda)} = (c\lambda\cos\gamma + k)^2, \quad u_{(\mu)} = (c\mu\sin\gamma + l)^2,$$

$$\Delta_{(\lambda)} = \frac{1}{2}\Lambda c^2\lambda^4\cos^2\gamma + \frac{4}{3}\Lambda ck\lambda^2\cos\gamma + (2\Lambda l^2 + h)\lambda^2 - 2m\lambda + n,$$

$$u_{(\lambda)} + u_{(\mu)} = P_{(\lambda)}Q_{(\mu)} - P_{(\mu)}Q_{(\lambda)},$$

$$\varepsilon l^2 = \Lambda(k^4 + l^4) + h(k^2 + l^2) + 2c(km\cos\gamma + lq\sin\gamma) +$$

$$+ c^2(n\cos^2\gamma - p\sin^2\gamma),$$

где ε принимает значение $+1$ или -1 соответственно, когда $\Delta_{(\mu)}$ положительна или отрицательна.

Решения, найденные в [152], обобщают статическое аксиально-симметричное решение Вейля [214] и представляют собой релятивистское выражение формальной аналогии закона Кулона и ньютоновского закона тяготения. В [103] производится обобщение класса решений Папапетру-Мэджумдора на случай произвольных стационарных полей. В работе получена метрика для поля двух вращающихся вокруг собственных осей заряженных масс с параллельными и антипараллельными спинами (не равными друг другу), направленными вдоль оси симметрии.

Ряд работ [43, 71, 178, 136, 166] посвящен получению поля заряженной нити, цилиндрическим волновым решениям.

Боннор [53] дал интересную интерпретацию метрики плоскофронтовых гравитационных волн Элерса-Кундта

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} + 2dx^3dx^4 + 2Adx^{4^2}, \quad A = A(x^1, x^2, x^4), \qquad (3.24)$$

обладающей изотропным вектором Киллинга $s^i = \sqrt{2}\,\delta\frac{i}{3}$, как гравитационного поля направленного электромагнитного излучения с плотностью $\rho = \frac{A_{11} - A_{22}}{16\pi}$, где индексы 1, 2 обозначают соответственно частные производные по x^1 и x^2. Тензор энергии-импульса $T^{ik} = \rho s^i s^k$ интерпретируется как тензор энергии фотонной жидкости с вектором 4-скорости s^i. Для стационарного случая гравитационное поле порождается постоянным во времени потоком электромагнитного излучения, параллельным оси Oz ($z = x^3$). Показано, что для частного случая поля однородного светового пучка с круговым поперечным сечением $\left(r = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}} = a = \mathrm{const}\right)$, излучаемого в положительном направлении оси z, точное решение выражается метрикой (3.24), где

$$A = \begin{cases} 4m + 8m\log\frac{r}{a}, & r \geqslant a, \\ 4m\cdot r^2/a^2, & r \leqslant a, \end{cases}$$

где m интерпретируется как постоянная плотность энергии на единицу длины пучка света. Аналогично построено гравитационное поле двух невзаимодействующих параллельных пучков света, получены два примера нестационарных гравитационных полей, отвечающих пучкам света переменной интенсивности.

В работах [65, 59] получены различные частные решения уравнений Эйнштейна-Максвелла с осевой или цилиндрической симметрией.

Нахождению электромагнитных полей

$$ds^2 = g_{i_1j_1}(x^{k_1})\,dx^{i_1}dx^{j_1} + g_{i_2j_2}(x^{k_2})\,dx^{i_2}dx^{j_2}, \qquad (3.25)$$
$$i_1, j_1, k_1 = 1, 2, \quad i_2, j_2, k_2 = 3, 4.$$

посвящены работы [51, 48, 170, 189, 184]. Легко доказывается, что приводимое пространство указанного вида допускает только однородное неизотропное электромагнитное поле ($F_{ij,k} = 0$), а само пространство является симметрическим ($R_{ijkl,s} = 0$) и представляет произведение двух поверхностей постоянной кривизны, например, [189]

$$ds^2 = dx^{1^2} + \cos^2\lambda x^1 dx^{2^2} + \cos^2\lambda t dx^{3^2} - dt^2,$$

где $\lambda = \mathrm{const}$.

В работах [75, 156, 161, 47, 189, 195] рассматриваются электромагнитные поля с плоской симметрией [см. 195]:

$$ds^2 = -e^{2u}(dx^{1^2} - dx^{4^2}) - e^{2v}(dx^{2^2} + dx^{3^2}), \qquad (3.26)$$

где $u = u(x^1, x^4)$, $v = v(x^1, x^4)$.

В [75] получено нестатическое неизотропное электромагнитное поле с метрикой

$$ds^2 = dx^{4^2} - (ax^4 + b)^{2/5}(dx^{1^2} + dx^{2^2}) - (cx^4 + d)^2 dx^{3^2},$$
$$a, b, c, d \text{ — const.} \tag{3.27}$$

Патнайк [156] получил также нестатическое решение вида (3.26), где u и v зависят лишь от x^1 и при этом

$$-c_4x^1 - c_4c_5 = e^{2v} + \frac{2c^3}{c_4}(c_1^2 + c_2^2)e^v +$$
$$+ \frac{2c_3^2k^2}{c_4^2}(c_1^2 + c_2^2)\ln[c_3k(c_1^2 + c_2^2) - c_4e^v], \tag{3.28}$$

$e^{2u} = c_3e^v v_{,1}$, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 — произвольные постоянные, при $c_1 \to 0$, $c_2 \to 0$ получается решение Тауба [195] для пустого пространства.

В работе [161] приведено следующее частное волновое решение с плоской симметрией:

$$ds^2 = 4e^{x-t}(dt^2 - dx^2) - (x - t)(dy^2 + dz^2),$$

которое соответствует электромагнитному полю с

$$F_{12} = -F_{42} = \sigma, \quad F_{13} = -F_{43} = \rho,$$
$$\rho^2 + \sigma^2 = 1 + \frac{1}{2}(x - t). \tag{3.29}$$

В [47] получено нестатическое решение с тензором электромагнитного поля, имеющим одну ненулевую компоненту. В [63] получено решение в виде

$$ds^2 = f(u)(dy^2 + dz^2) - 2du \cdot dv, \tag{3.30}$$

$F_{20} = -F_{02} = \sqrt{2f} \cdot E(u)$, остальные компоненты равны нулю, f и E — функции от u и удовлетворяют полевому уравнению $\frac{d^2\sqrt{f}}{du^2} = -\mathscr{H}\sqrt{f} \cdot E^2$. Из этого решения можно получить решение Переса [159] если $E(u)$ — функция Имесса c^1 (c^3 на кусках).

В работе [124] для линейного элемента с плоской симметрией, выражающегося метрикой

$$ds^2 = e^{\omega(u,v)}du \cdot dv - e^{\mu(u,v)}(dx^2 + dy^2),$$

получено общее решение уравнений Эйнштейна-Максвелла без источников.

В работах [71, 51] рассмотрены методы получения решений уравнений Эйнштейна-Максвелла из решений уравнений Эйнштейна в пустоте и получены некоторые частные решения.

В работах [204, 205, 206, 208, 162] исследуются и находятся решения, соответствующие различным электромагнитным полям.

В [205, 206], по аналогии с полученными ранее [203] несферическим обобщением метрики Шварцшильда, ставится задача получения нестационарного обобщения метрики Керра, которое описывало бы гравитационное поле вращающегося излучаемого тела. Для этого используется

$$g_{ij} = \eta_{ij} + H\xi_i\xi_j, \tag{*}$$

где η_{ij} — метрика Минковского, H — скалярная функция координат, ξ — направляющий вектор изотропной геофизической конгруэнции. Тензор энергии-импульса берется в виде:

$$T_{ij} = \sigma(x^k)\xi_i\xi_j. \tag{3.31}$$

Полученная в работе [154] метрика:

$$ds^2 = -r^2(dx^2 + \sin^2\alpha d\beta^2) + 2(f'\cos\alpha + 1)dxdr +$$
$$+ [1 - f'^2 + 4m(x)r^{-1}(f'\cos\alpha + 1)^{-1} - 1/4\, r^2\sin^2\alpha n^2(x)]dx^2 -$$
$$- 2rf'\sin\alpha dx d\alpha + r^2\sin^2\alpha \cdot n(x) dx d\beta, \tag{**}$$

представляет собой решение уравнений Эйнштейна — Максвелла, 4-х потенциал электромагнитного поля задается в виде:

$$\Phi_i = q(x)(f'\cos\alpha + 1)^{-1}\xi_i, \tag{3.32}$$

где f и q — функции от x. Электромагнитное поле является изотропным.

В [155] для метрики вида (**) получено решение уравнений

$$R_{ik} = -8\pi(E_{ik} + \sigma\xi_i\xi_k), \tag{3.33}$$

где E_{ik} — тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Решение записывается в виде:

$$ds^2 = -(p^2 + q^2)(dx^2 + \sin^2\alpha d\beta^2) + 2(\xi_i dx^i)dt -$$
$$- 2(\xi_i dx^i)[pWdx - qW\sin\alpha d\beta] -$$
$$- (\xi_i dx^i)^2[1 - W^2 - 2(Mq + Np)(p^2 + q^2)^{-1}], \tag{3.34}$$

где

$$M = \frac{1}{8}\, ma^3\left[\frac{Q^2 + r^2}{r}\right]^3\cos^3\alpha,$$
$$N \cdot r = 1/2p^2(\theta^2 + r^2), \quad r^2 = (\xi_{i,k} - \xi_{k,i})\xi^{i,k},$$
$$\xi_i dx^i = du + 1/2\, b\sin\alpha\cos\alpha d\alpha + W\sin\alpha d\beta,$$
$$W^2 = (bu + a^2)\sin^2\alpha - 1/4\, b^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha, \tag{3.35}$$
$$P = 2r(\theta^2 + r^2)^{-1}, \quad q = -2\theta(\theta^2 + r^2)^{-1},$$
$$\theta = \xi^i{}_{,i}, \quad a, b, m \text{ — const.}$$

4-х вектор тока J_i задается в виде:

$$J_i = \frac{e}{64}\, b(2\pi)^{-1/2}a^2(\theta^2 + r^2)^5 \cdot r^{-4}\cos^4\alpha \cdot (1 - r^4\sec^2\alpha)\xi_i. \tag{3.36}$$

Полученная метрика интерпретируется как гравитационное поле заряженного вращающегося тела, излучающего изотропную жидкость.

4. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Проблемы гравитационного излучения, его скорости, взаимодействия с веществом, взаимных превращений гравитационного поля и обычной материи, роли волн во Вселенной относятся к важнейшим в гравидинамике. Сложность вопроса усугубляется отсутствием полностью удовлетворительного определения энергии гравитационного поля.

Проблема начала проясняться благодаря получению ряда волновых решений и анализу их с точки зрения трех типов А. З. Петрова [25]. Способствуют различные критерии для волнового характера метрики. Обсуждение их выходит за рамки нашего обзора и мы отсылаем читателя к работам [123, 28, 9].

Впервые точные решения для цилиндрических гравитационных волн были получены Эйнштейном и Розеном [86].

Они брали метрику

$$-ds^2 = e^{2\gamma-2\psi}(d\rho^2 - c^2dt^2) + \rho^2 e^{-2\psi} + e^{2\psi}dz^2, \tag{4.1}$$

где функции γ и ψ зависят только от ρ и t. Для определения неизвестных функций использовались уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{4.2}$$

которые сводятся к следующей системе уравнений для ψ и γ:

$$\psi_{,\rho\rho} + 1/\rho\, \psi_{,\rho} - c^{-2}\psi_{,tt} = 0, \tag{4.3}$$

$$\gamma_{,\rho} = \rho\,[(\psi_{,\rho})^2 + c^{-2}(\psi_{,t})^2], \tag{4.4}$$

$$\gamma_{,t} = \frac{2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,t}}{c}. \tag{4.5}$$

Уравнение (4.3) представляет собой волновое уравнение в цилиндрических координатах:

$$\psi = A\left[J_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\cos\omega t + N_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\sin\omega t\right].$$

Используя (4.4) и (4.5), получаем теперь:

$$\gamma = \frac{A^2\omega\rho}{2c}\left\{J_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)J_0'\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) + N_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)N_0'\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) + \right.$$
$$+ \frac{\omega\rho}{c}\left[\left(J_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\right)^2 + \left(J_0'\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\right)^2 + \left(N_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\right)^2 + \left(N_0'\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\right)^2\right] +$$
$$+ \left[J_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\cdot J_0'\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) - N_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)N_0'\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\right]\cos\omega t +$$
$$\left. + \left[J_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)N_0'\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) + N_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)J_0'\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\right]\sin\omega t\right\} - \frac{2}{\pi}A^2\omega t. \tag{4.6}$$

Штрих означает дифференцирование функций Бесселя J_0 и Неймана нулевого порядка по $\frac{\omega\rho}{c}$.

Плоские гравитационные волны рассматривались рядом авторов. Тауб [195] показал, что неполяризованных плоских волн не существует. Робинсону [см. 169], а позднее Бонди [49, 32] удалось показать, что уравнения поля допускают существование «плоских» волновых зон между двумя областями плоского пространства-времени.

Их решение уравнений $R_{\mu\nu} = 0$ есть:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2\beta_{,u}\left[(ydy - zdz)(cdt - dx) - \right.$$
$$\left. - (y^2 - z^2)\frac{(cdt - dx)^2}{ct - x} - (\beta_{,u})^2(c^2t^2 - x^2)(cdt - dx)^2\right], \tag{4.7}$$

где $u = ct - x$. Решение справедливо при $u > 0$. Амплитуда волны определяется величиной β, представляющей собой произвольную функцию от u. Они нашли также второй тип метрики, которую мы здесь не приводим.

Любопытное исследование гравитационных волн, основанных на работах А. З. Петрова [25] и обобщении идей, известных из теории электромагнитного излучения, провел Пирани [27].

Рассмотрим еще несколько типов метрик, относящихся ко второму типу Петрова. Перес [158] нашел решение уравнений $R_{\nu\mu} = 0$, обладающее меньшей симметрией, чем плоские и цилиндрические волны. Его метрика имеет вид:

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2F(x, y, z + \tau)(dz + d\tau)^2 - d\tau^2, \tag{4.8}$$

где F — любая гармоническая функция. В случае $F = (x^2 - y^2)\sin(z + \tau)$ — имеем плоскую гравитационную волну.

Робинсон и Траутман [173] дали несколько точных сферически-симметричных решений, описывающих волны. Одна из их метрик имеет вид:

$$ds^2 = 2\rho d\sigma + \left(\mathcal{K} - 2\mathcal{H}\rho - \frac{2m}{\rho}\right)d\sigma^2 - \rho^2 p^{-2}\,[(d\xi + q_{,\eta}d\sigma)^2 +$$
$$+ (d\eta + q_{,\xi}d\sigma)^2]. \tag{4.9}$$

Здесь m зависит только от σ, а p и ρ зависят от σ, ξ, η. Величина $\mathcal{H}$ равна:

$$\mathcal{H} = p^{-1}p_{,\sigma} + p\,(p^{-1}q)_{,\xi\eta} - pq\,(p^{-1})_{,\xi\eta},$$
$$\mathcal{K} = p^2\,[(\ln p)_{,\xi\xi} + (\ln p)_{,\eta\eta}]$$

и уравнения $R_{\mu\nu} = 0$ сводятся к

$$q_{,\xi\xi} + q_{,\eta\eta} = 0, \quad \mathcal{K}_{,\xi\xi} + \mathcal{K}_{,\eta\eta} = 4p^{-2}(m_{,\sigma} - 3\mathcal{H}m).$$

В работе В. Д. Захарова [10] приводятся точные решения уравнений Эйнштейна в пустоте и в присутствии изотропного электромагнитного поля (без источников) удовлетворяющие следующим требованиям:

а) допускают группу Ли движений, действующую на изотропной поверхности транзитивности;

б) являются решениями тензорного волнового уравнения:

$$g^{\rho\sigma}R_{\mu\alpha\ \beta\gamma,\ \sigma\rho}=0, \tag{4.10}$$

где $R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ — тензор кривизны риманова пространства-времени;

в) удовлетворяют условиям для изотропного электромагнитного поля;

г) являются точными решениями уравнений Эйнштейна

$$R_{\mu\nu}-1/2\,Rg_{\mu\nu}=-\lambda T_{\mu\nu}, \tag{4.11}$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса изотропного электромагнитного поля.

Найденные метрики описывают одновременное существование электромагнитных и гравитационных волн в пространстве-времени без источников.

Мисра [133] показывает, что нестационарные решения системы уравнений поля Эйнштейна — Максвелла в пустоте могут быть получены из нестационарных решений уравнений Эйнштейна для пустого пространства. При этом он выделяет случай плоских гравитационных волн и случай плоских электромагнитных волн.

Исследование геометрических свойств плосковолновых решений было проведено в цикле работ Такено [194]. Полный список работ по гравитационным волнам читатель найдет в книге В. Д. Захарова [9].

5. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Хорошо известно [141], что теория гравитации Ньютона встречается с принципиальными трудностями при попытках объяснения структуры Вселенной в целом. Общая теория относительности приводит к результатам, существенно отличающимся от выводов теории Ньютона именно на космологических расстояниях, и поэтому, начиная с А. Эйнштейна, релятивистская космология стала предметом исследования многих авторов. Первые космологические релятивистские модели основывались на предположении, что пространство-время Вселенной однородно и изотропно с глобальной точки зрения. Конечно, материя распределена неоднородно: она в основном сосредоточена в звездах, имеющих тенденцию образовывать галактики. Однако во всей области пространства, которая доступна наблюдениям, все эти скопления распределены в пространстве довольно равномерно. Поэтому предположение об однородности и изотропии

материи Вселенной как идеальной жидкости является хорошим приближением. В ранних моделях Вселенной, кроме того, предполагалось, что Вселенная является статической. С обзора этих моделей мы и начнем свое рассмотрение.

Уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости имеют вид:

$$R_{ij}-R/2g_{ij}+\Lambda g_{ij}=-8\pi\mathcal{T}_{ij}, \tag{5.1}$$

$$\mathcal{T}_{ij}=(\rho+p)\,u_iu_j-g_{ij}p. \tag{5.2}$$

Здесь Λ — космологическая постоянная. Так как в однородной статической Вселенной условия всюду одинаковы в любой момент времени, то систему координат в ней можно выбрать так, чтобы интервал был сферически-симметричен вокруг любой наперед заданной точки отсчета. Это означает, что мы можем записать интервал в самом общем сферически-симметричном виде:

$$ds^2=-e^{\lambda}dr^2-r^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)+e^{\nu}dt^2, \tag{5.3}$$

где λ и ν зависят только от r. Тогда из уравнений (5.1) и (5.2) давление и плотность будут находиться из следующих соотношений:

$$8\pi p=e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}+\Lambda \tag{5.4}$$

$$8\pi\rho=e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}-\Lambda \tag{5.5}$$

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{p+\rho}{2}\nu'. \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) есть следствие закона сохранения:

$$\mathcal{T}^{ij}_{\ ,j}=0 \tag{5.7}$$

и штрих означает производную по r.

Поскольку давление p и плотность ρ, измеряемые локальным наблюдателем, должны быть одинаковыми во всех точках пространства, так как модель однородна, то из (5.6) следует, что

$$\frac{\rho+p}{2}\nu'=0, \tag{5.8}$$

а это в свою очередь возможно лишь в 3-х случаях:

1⁰. $\nu'=0$, $\nu=0$ (Вселенная Эйнштейна).

Тогда из уравнения (5.4) следует:

$$e^{-\lambda}=1-(\Lambda+8\pi p)\cdot r^2. \tag{5.9}$$

Если для удобства определить новую постоянную R условием:

$$\frac{1}{R^2}=\Lambda-8\pi p, \tag{5.10}$$

то интервал ds^2 во Вселенной Эйнштейна будет иметь вид [85]:

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-r^2/R^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + dt^2. \qquad (5.11)$$

2^0. $p+\rho=0$ (Вселенная Де-Ситтера [186].)

Из уравнений (5.4) и (5.5) тогда следует:

$$\lambda = -\nu \qquad (5.12)$$

и интегрируя их до конца, получим для интервала Де-Ситтера [см. 35]:

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-r^2/R^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + (1 - r^2/R^2)\,dt^2, \qquad (5.13)$$

где

$$R = \sqrt{\frac{3}{\Lambda + 8\pi\rho}}. \qquad (5.14)$$

3^0. $p+\rho=0$, $\nu'=0$ (Вселенная Минковского).

Интервал ds^2 во Вселенной Минковского имеет вид:

$$ds^2 = -dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + dt^2. \qquad (5.15)$$

Этими тремя случаями ограничиваются все однородные статические космологические модели. За деталями изучения этих моделей отсылаем читателя к монографии Толмана [35].

Перейдем теперь к рассмотрению однородных нестатических космологических моделей ($\Lambda=0$).

Первое решение такого типа было получено А. Фридманом в 1922 г. [92].

Прежде чем приводить это решение мы воспользуемся результатами Робертсона [35, 32] и Уолкера [211], где с помощью теории групп показано, что во вселенных такого типа всегда возможно ввести сопутствующую систему координат, в которой линейный элемент принимает вид:

$$ds^2 = d\sigma^2 - dt^2, \qquad (5.16)$$

причем

$$d\sigma^2 = R^2(t)\{-dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} \Big/ \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2 =$$

$$= R^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \Big/ \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2, \qquad (5.17)$$

и $R(t)$ — произвольная функция от t, описывает нестатическую однородную изотропную Вселенную и k — постоянная. В сопутствующей системе координат отличные от нуля компоненты тензора энергии-импульса имеют вид:

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = p, \quad T_4^4 = \rho. \qquad (5.18)$$

Общие свойства временной эволюции моделей, которым соот-

ветствует линейный элемент (5.17) мы находим у Толмена [35]. Не останавливаясь на подробностях классификации этих моделей рассмотрим некоторые частные случаи:

а) $p=0$, $k=\pm 1$, 0.

Для этих случаев решения впервые найдены А. Фридманом [92].

1^0. $k=0$ (называется моделью Эйнштейна — Де-Ситтера)

$$ds^2 = -\left(\frac{9}{4}M\right)^{2/3} t^{4/3}\{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} + dt^2, \qquad (5.19)$$

где

$$M = \text{const} = \frac{8\pi\rho R^3(t)}{3}. \qquad (5.20)$$

2^0. $k=\pm 1$ (закрытая модель Фридмана).

Решение записывается в следующем параметрическом виде:

$$R = \left(\frac{M}{2}\right)(1 - 2\cos\eta), \quad t = \left(\frac{M}{2}\right)(\eta - \sin\eta). \qquad (5.21)$$

3^0. $k=-1$ (открытая модель Фридмана):

$$R = \left(\frac{M}{2}\right)(\operatorname{ch}\eta - 1), \quad t = \left(\frac{M}{2}\right)(\operatorname{sh}\eta - \eta). \qquad (5.22)$$

При $\Lambda \neq 0$, но $p=0$ модель Вселенной получена и обсуждена с физической точки зрения Леметром [35].

б) В этом случае к уравнениям поля для определения $R=R(t)$ необходимо привлечь уравнение состояния материи. Это уравнение состояния обычно представляется в виде:

$$p = p(\rho). \qquad (5.23)$$

Впервые уравнение с $p \neq 0$ было исследовано в работе Гекмана [100].

Решения с $\Lambda \neq 0$ и $p \neq 0$ для однородных и изотропных моделей обсуждаются в книге Зельдовича и Новикова [11]. Читателя, интересующегося проблемой Λ-члена в связи с открытием квазаров, мы отсылаем к этой книге.

Перейдем теперь к рассмотрению однородных пространственно неизотропных моделей.

Впервые такая модель получена в работе Гёделя [94]. Мы приведем выражение метрического тензора для обобщенной модели Гёделя [32].

Будем искать решение уравнений поля Эйнштейна для идеальной жидкости в сопутствующей системе координат (сигнатура метрики $+ + + -$) в виде:

$$\Phi = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + g_{AB}dx^A dx^B, \qquad (5.24)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2), \quad (A, B = 3, 4),$$

где $g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^3, x^4)$, g_{AB} — постоянные. Следуя Гедемо, выберем $g_{\alpha\beta}$ в виде:

$$g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} a & be^{\psi} \\ be^{\psi} & ce^{\psi} \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

где a, b, c — постоянные, а $\psi=kx^4$, $k=\text{const}$. Тогда решения уравнений поля есть:

$$\Phi=k^{-1}[-(dx^1)^2-2\lambda e^{x^4}dx^1dx^2-1/2e^{2x^4}(dx^2)^2+(dx^3)^2+ +(dx^4)^2], \tag{5.26}$$

$$p=\rho=1/2k^2=\text{const}, \tag{5.27}$$

$$\frac{2}{3}<\lambda^2<2. \tag{5.28}$$

При $\lambda^2=1$ получается метрика Гёделя.

Решения типа Гёделя для ненулевого электромагнитного поля при отсутствии материи обсуждались Райчаудхури [164], Датта [75]. Мы приведем здесь лишь решение, найденное Вильсоном [216]. Решение уравнений Эйнштейна — Максвелла есть:

$$ds^2=\left[dt+\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{r}\right)d\Phi\right]^2-\frac{4}{9r^4}\exp\left[\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{r}\right)\right]dr^2- -d\Phi^2-\exp\left[-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{r}\right)\right]dz^2. \tag{5.29}$$

Ненулевые компоненты электромагнитного поля имеют вид:

$$f_{01}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{r}\right)\right], \quad f_{12}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left[-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{r}\right)\right]\cdot\left(1+\frac{2}{r}\right). \tag{5.30}$$

В случае пустого пространства ($R_{\alpha\beta}=0$) Казнер нашел в 1922 году [108] неизотропное решение:

$$ds^2=dt^2-t^{2p_1}(dx^1)^2-t^{2p_2}(dx^2)^2-t^{2p_3}(dx^3)^2. \tag{5.31}$$

Здесь p_1, p_2, p_3 — числа, удовлетворяющие соотношениям:

$$p_1+p_2+p_3=1, \quad p_1^2+p_2^2+p_3^2=1. \tag{5.32}$$

Эта метрика является точным решением для пустого пространства, но вблизи особой точки, при малых t, остается хорошим приближением и в присутствии равномерно распределенной в пространстве материи. Этот факт послужил основой для рассмотрения поведения Вселенной вблизи особенностей в работах Лифшица и Халатникова [22, 23, 110].

Ряд точных решений уравнений Эйнштейна в пустоте родственных типов, зависящих от большего числа переменных, найден в работе Харрисона [98]. Вследствие того, что модель Фридмана не может описать поведение Вселенной при больших температурах, Харрисон предпринял попытку улучшить эту модель. Аналогичные задачи решались также А. Д. Черниным [36], Коеном [73] и Якобсом [105]. Харрисон рассматривает однородную изотропную Вселенную, используя уравнение состояния, предложенное Я. Б. Зельдовичем [11]:

$$p=(\nu-1)\rho. \tag{5.33}$$

Тогда улучшенные модели Фридмана, полученные Харрисоном, имеют вид:

1°. $k=0$,

$$R=\alpha_r^{1/2}\tau+\frac{1}{4}\alpha_m\tau^2, \quad t=\frac{1}{2}\alpha_r^{1/2}\tau^2+\frac{1}{12}\alpha_m\tau^3, \tag{5.34}$$

где $\alpha_r=8\pi\rho\dfrac{R^{3\nu_r}}{3}=\text{const}$ и ν_r — значение ν для радиации, $\alpha_m=8\pi\rho\dfrac{R^{3\nu_m}}{3}=\text{const}$ и ν_m — значение ν для вещества.

2°. $k=+1$.

$$R=\alpha_r^{1/2}\sin\tau+\alpha_m\sin^2\tau/2, \quad t=2\alpha_r^{1/2}\sin^2\tau/2+\frac{\alpha_m}{2}(\tau-\sin\tau). \tag{5.35}$$

3°. $k=-1$.

$$R=\alpha_r^{1/2}\operatorname{sh}\tau+\alpha_m\operatorname{sh}^2\frac{\tau}{2}, \quad t=2\alpha_r^{1/2}\operatorname{sh}^2\tau+\frac{\alpha_m}{2}(\operatorname{sh}\tau-\tau). \tag{5.36}$$

Рассмотрим теперь анизотропную модель для случая $p=0$, предложенную в 1958 году Шюкингом и Гекманом [181]. Решения ищутся в виде:

$$ds^2=dt^2-a^2(t)\,dx_1^2-b^2(t)\,dx_2^2-c^2(t)\,dx_3^2; \tag{5.37}$$

Решая уравнения поля, находим:

$$a=a_0t^{p_1}(t_1+t_0)^{2/3-p_1}, \quad b=a_0t^{p_2}(t+t_0)^{2/3-p_2}, \quad c=c_0t^{p_3}(t-t_0)^{2/3-p_3}, \tag{5.38}$$

$$\rho=\frac{1}{6\pi}\cdot\frac{1}{t(t+t_0)}, \tag{5.39}$$

где для p_1, p_2, p_3 справедливы соотношения (5.32), и a_0, b_0, c_0, t_0 — постоянные.

Анализ анизотропных моделей с давлением, отличным от нуля, в 1970 году был проведен И. С. Шикиным [38]. Он получил также ряд анизотропных моделей.

Метрика выбирается им в виде:

$$ds^2 = -(cd\tau)^2 + [R_1(\tau)\,dx^1]^2 + [R_2(t)\,dx^2]^2 + [R_2(\tau)\,dx^3]^3. \quad (5.40)$$

1⁰. Пылевидное вещество ($p=0$, $e=\mu c^2$, μ — плотность массы). Тогда

$$\begin{aligned}(R_1)^3 &= L_1 c^2(\tau-\tau_1)^{1+\alpha_1}(\tau-\tau_2)^{1-\alpha_1},\\ (R_2)^3 &= L_2 c^2(\tau-\tau_1)^{1+\alpha_2}(\tau-\tau_2)^{1-\alpha_2},\\ (R_3)^3 &= L_3 c^2(\tau-\tau_1)^{1+\alpha_3}(\tau-\tau_2)^{1-\alpha_3},\end{aligned} \quad (5.41)$$

где L_1, L_2, L_3 — постоянные и α_i удовлетворяют неравенствам:

$$-1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1, \quad 2 \geqslant \alpha_2 \geqslant 1, \quad -1 \geqslant \alpha_3 \geqslant -2. \quad (5.42)$$

2⁰. Ультрарелятивистский газ ($e=3p$).

$$\begin{aligned}R_1 &= L_1(\operatorname{sh}\lambda)^{1+\alpha_1}\cdot(\operatorname{ch}\lambda)^{1-\alpha_1},\\ R_2 &= L_2(\operatorname{sh}\lambda)^{1+\alpha_2}\cdot(\operatorname{ch}\lambda)^{1-\alpha_2},\\ R_3 &= L_3(\operatorname{sh}\lambda)^{1+\alpha_3}\cdot(\operatorname{ch}\lambda)^{1-\alpha_3},\end{aligned} \quad (5.43)$$

L_1, L_2, L_3 — масштабные факторы и параметр λ находятся из условия:

$$(-g)^{1/3} = L^2\operatorname{sh}^2 2\lambda, \quad L^2 \equiv N = \text{const}, \quad (5.44)$$

причем g удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d\sqrt{-g}}{d\tau}\right]^2 = \left(\frac{24\pi k\mathcal{K}}{c^4}\right)[(-g)^{1/3}+N]. \quad (5.45)$$

Здесь k — гравитационная постоянная, а $\mathcal{K} = \text{const} > 0$.

3⁰. Уравнение состояния $p=e$. Тогда

$$R_1^3 = c\tau^{1+\alpha_1}, \quad R_2^3 = c\tau^{1+\alpha_2}, \quad R_3^3 = c\tau^{1+\alpha_3}, \quad (5.46)$$

причем

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0,$$
$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 6q^2 \quad (0 \leqslant q \leqslant 1).$$

Однородные анизотропные модели рассматривались также в [180, 149, 6, 147, 37]

Рассмотрим работу Озвата [149], в которой получено неизотропное решение уравнений Эйнштейна, с использованием внешних форм Картана.

ds^2 выбирается в виде:

$$ds^2 = dt^2 + A(t)(\omega^1)^2 + B(t)(\omega^2)^2 + C(t)(\omega^3)^2 + 2D\omega^2\omega^3, \quad (5.47)$$

где ω_1, ω_2, ω_3 — инвариантные дифференциальные формы группы s^3, удовлетворяющие соотношениям:

$$d\omega^1 = -\omega^2\Lambda\omega^3, \quad d\omega^2 = -\omega^3\Lambda\omega^1, \quad d\omega^3 = -\omega^1\Lambda\omega^2 \quad (5.48)$$

Ищутся решения уравнений Эйнштейна для метрики (5.47) с пылью, для которой вращение и расширение отлично от нуля.

Назовем группами класса I типа Бьянки I, II, VIII, IX группы пространств, удовлетворяющие соответственно соотношениям:

$$d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = 0, \quad d\omega^3 = 0, \quad (5.49)$$

$$d\omega^1 = -\omega^2\Lambda d\omega^3, \quad d\omega^2 = 0, \quad d\omega^3 = 0, \quad (5.50)$$

$$d\omega^1 = \omega^2\Lambda\omega^3, \quad d\omega^2 = -\omega^3\Lambda\omega^1, \quad d\omega^3 = -\omega^1\Lambda\omega^2, \quad (5.51)$$

$$d\omega^1 = -\omega^2\Lambda\omega^3, \quad d\omega^2 = -\omega^3\Lambda\omega^1, \quad d\omega^3 = -\omega^1\Lambda\omega^2. \quad (5.52)$$

Ограничимся рассмотрением лишь случая, когда

$$ds^2 = dt^2 - (A\omega^1)^2 - (B\omega^2)^2 - (C\omega^3)^2 \quad (5.53)$$

для каждого из случаев (5.49) — (5.52).

Тип Бьянки VIII приводит к решениям:

$$\begin{aligned}ds^2 &= dt^2 + (1-k)(\omega^1\cos\beta t + \omega^2\sin\beta t)^2 +\\ &+ (1+k)(-\omega^1\sin\beta t + \omega^2\cos\beta t)^2 - (1+2k^2)(\omega^3)^2,\end{aligned} \quad (5.54)$$

где $\beta = \left[\frac{1-2k^2}{2(1+2k^2)}\right]^{1/2}$, $\frac{1}{2} < |k| \leqslant \frac{1}{2^{1/2}}$, k — действительный параметр и

$$ds^2 = dt^2 + \frac{1}{2}(1+s)(\omega^1)^2 + \frac{1}{2}(1-s)(\omega^2)^2 - (\omega^3)^2, \quad (5.55)$$

где $|s| < 1$ — действительный параметр.

Здесь выполняются групповые условия (5.51). В некоторой выбранной системе координат:

$$\begin{aligned}\omega^1 &= \cos x^3 dx^1 - e^{x^1}\sin x^3 dx^2,\\ \omega^2 &= -\sin x^3 dx^1 + e^{x^1}\cos x^3 dx^2,\\ \omega^3 &= e^{x^1}dx^2 + dx^3.\end{aligned} \quad (5.56)$$

Метрики для класса II и класса III описаны автором статьи ранее [148].

При $s=0$ из (5.55) получается Вселенная Гёделя. Решения вида (5.53) случаев (5.50) и (5.51) обсуждались Шюкингом [181], случаев (5.52) — для вакуума Таубом [195], для пыли Бером [46].

Рассмотрим анизотропные модели Вселенных с магнитным полем. В настоящее время теории генерации и последующего усиления магнитного поля позволяют объяснить наблюдаемые магнитные поля в галактиках. Модели Вселенных с магнитным полем рассматривались в работах [105, 106, 11, 7, 99, 36, 104] и др.

Мы остановимся лишь на двух работах Якобса, в которых получены наиболее полные результаты. Интерес к анизотропным космологическим решениям стимулировался, в первую очередь, открытием космического микроволнового излучения, изучения его анизотропии, проблемой первичного гелия и первичных магнитных полей.

В работе [104] Якобс рассматривает пространственно однородные анизотропные Вселенные, исходя из метрики типа Бьянки I:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)(dx)^2 - B^2(t)(dy)^2 - W^2(t)(dz)^2 \qquad (5.57)$$

и уравнения состояния

$$p = \gamma\rho. \qquad (5.58)$$

Найденные им решения для пыли включают в себя решения Робинсона [169], Гекмана и Шюкинга [181], А. Г. Дорошкевича [7], Торна [199], Стюарта и Эллиса [192]; Фридмана [92]; для излучения — решения А. Г. Дорошкевича [7]; для уравнения состояния $p=\rho(\gamma=1)$ — решения Зельдовича [11] и Харрисона [99].

В работе [105] Якобс рассматривает также анизотропные модели типа Бьянки I (5.57), с однородным магнитным полем плотности энергии ρ_B, направленным вдоль оси z.

Первый закон термодинамики для жидкости $u_\mu T^{\mu\nu}_{M,\nu}=0$ и закон сохранения магнитного потока приводят к следующим выражениям для плотности энергии материи ρ_M и плотности энергии магнитного поля:

$$\rho_M = \left(\frac{\mu}{8\pi}\right)(ABW)^{-(1+\gamma)}, \qquad (5.59)$$

$$\rho_B = \left(\frac{\beta}{8\pi}\right)(AB)^{-2}, \qquad (5.60)$$

где μ и β — неотрицательные постоянные. Им найдены точные решения уравнений Эйнштейна — Максвелла для 4-х случаев:

1⁰. Чисто магнитные ($\mu=0$, $\beta\neq 0$). Как частный случай отсюда следует решение Розена [175].

2⁰. Магнитное решение Зельдовича ($\mu\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\gamma=1$).

3⁰. Аксиально-симметрическое жестко-магнитное решение $\left(\mu\neq 0,\ \beta\neq 0,\ \frac{1}{3}<\gamma<1\right)$.

4⁰. Аксиально-симметрическое пыле-магнитное решение ($\mu\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\gamma=0$).

Эти решения были получены ранее А. Г. Дорошкевичем [7], И. С. Шикиным [37] и Торном [199].

За всеми подробностями исследования физических свойств космологических моделей отсылаем читателя к монографии Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова [11].

К. П. Синг и Д. Н. Синг [185] обсуждают плосковолновую неоднородную космологическую модель.

ds^2 выбирается или в виде:

$$ds^2 = A^2(dt^2 - dx^2) - B^2dy^2 - C^2dz^2, \qquad (5.61)$$

где A, B, C — функции от x и t только.

На метрику накладывается, кроме того, условие, чтобы она была 1-го класса погружения и соответствовала тензору энергии-импульса идеальной жидкости. Тогда в сопутствующей системе координат найденное нами решение имеет вид:

$$ds^2 = (1+\alpha t)^2(dt^2 - dx^2 - dy^2) - (1+\beta t)\,dz^2, \qquad (5.62)$$

т. е. сводится к однородной

$$p = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha t)^4}, \quad \rho = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha t)^2} + \frac{2\alpha\beta}{(1+\alpha t)^3(1+\beta t)}, \qquad (5.63)$$

где α и β — постоянные.

Р. Ф. Полищук предлагает новый критерий однородности космологической модели [28, 29, 30].

В этих работах им найдены примеры пространств, отвечающих такому критерию однородности [29, 30]. Приведем одно из его решений.

Для уравнений поля

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \qquad (5.64)$$

найдено решение:

$$ds^2 = \theta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \qquad (5.65)$$

где

$$\theta = \operatorname{ch}(\sqrt{-2\Lambda}\,x)\,dt \qquad (5.66)$$

и

$$T^\nu_\mu = \operatorname{diag}(-\Lambda,\ -\Lambda,\ \Lambda,\ \Lambda) \qquad (5.67)$$

— соответствует однородному магнитному полю.

Принципиальной, по постановке задачи о совместном решении уравнений Эйнштейна — Лиувилля, то есть с учетом функции распределения частиц газа по скорости и координатам в гравитационном поле, является работа Эллерса, Герена и Сакса [84]. Доказана теорема: Наиболее общее решение уравнений Эйнштейна — Лиувилля ((5.68) — (5.70))

$$G_{ab} = -T_{ab}, \qquad (5.68)$$

$$T_{ab}(x) = \int\limits_{P_m(x)} P_a P_b f(x, p)\,dP_m \qquad (5.69)$$

(здесь $P_m(x)$ — гиперболоид $\vec{p}^2 = -m^2$ в касательном пространстве-времени в точке x, а dP_m — лоренц-инвариантная мера на $P_m(x)$), и

$$f[x(s), p(s)] = \text{const вдоль каждой времениподобной}$$

$$(\text{если } m > 0) \text{ или изотропной (если } m = 0) \tag{5.70}$$

$$\text{геодезической } \{x(s), p(s)\} \text{ (условие Лиувилля)}$$

с изотропной*) функцией распределения для частиц с ненулевой массой покоя, — либо является стационарным пространством-временем, либо совпадает с обобщенной моделью Фридмана:

$$a^2(t)\, d\delta^2 - dt^2 = ds^2, \tag{5.71}$$

$$f(x, p) = \frac{1}{4\pi} g(a^2(t)\vec{p}^2), \tag{5.72}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu &= a^{-4}\int_0^\infty x^2 g(x^2)(a^2m^2 + x^2)^{1/2}\, dx, \\ p &= \frac{1}{3} a^{-4}\int_0^\infty x^4 g(x^2)(a^2m^2 + x^2)^{-1/2}\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{5.73}$$

$$t = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{a^2}\left[-3\varepsilon u + \int_0^\infty x^2 g(x^2)(m^2u + x^2)^{1/2}\, dx\right] du,$$

где $d\delta^2$ имеет постоянную кривизну $\varepsilon = \pm 1, 0$;

$$\vec{p}^2 = (g_{ab} + u_a u_b)\, p^a p^b -$$

возведенный в квадрат 3-х импульс частицы по отношению к локальной системе отсчета, определяемой вектором u^a (временная ось); $x = a|\vec{p}|$ и g — положительная функция вещественной переменной. Для частиц с нулевой массой покоя решение либо стационарно, либо совпадает с моделью Толмена.

---

* Рассматриваются те решения уравнений (5.68)—(5.70), для которых распределение всюду изотропно: существует времениподобное единичное векторное поле $u^a(x)$ такое, что $f(x, p)$ инвариантна для каждого события x по отношению к тем однородным лоренцовым преобразованиям в касательном пространстве, которые оставляют u^a неизменным. Аналитически это означает, что f имеет вид:

$$f(x, p) = h(x - u(x)\cdot p),$$

при этом

$$T^{ab} = (\mu + p)\, u^a u^b + p g^{ab}.$$

6. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА С ТЕНЗОРОМ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ПОЛЕЙ, ОТЛИЧНЫХ ОТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО (МЕЗОННОЕ, НЕЙТРИННОЕ И Т. Д. ПОЛЯ)

Этот класс решений уравнений Эйнштейна является довольно экзотическим. Отметим здесь лишь некоторые полученные решения. Бухдал [62] нашел сферически симметричное решение полевых уравнений:

$$R_{kl} = -\mu V_{,k} V_{,l} \tag{6.1}$$

$$g^{kl} V_{,kl} = 0 \tag{6.2}$$

в виде

$$ds^2 = -q^{-\beta} dr^2 - r^2 q^{1-\beta}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + q^\beta dt^2, \tag{6.3}$$

$$V = \lambda \ln q, \quad q = \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \tag{6.4}$$

где

$$\beta = \pm(1 + 2\mu\lambda^2)^{1/2}, \quad \lambda = \text{const}, \quad m = \text{const}. \tag{6.5}$$

Взаимодействие мезонов нулевой массы и заряженной пыли в стационарных аксиально-симметрических полях тяготения рассматривалось Мисра и Пандеем [135]. Аналогичная задача обсуждалась в работах [91, 13, 93, 121].

Автор глубоко признателен профессору А. П. Широкову за помощь в подготовке, профессору В. Б. Брагинскому, кандидатам физ.-мат. наук В. Н. Руденко и В. И. Панову за стимулирование работы по написанию настоящего обзора.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Аминова А. В.**, Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств. Тр. геометр. семинара, Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, **6**, 295—316 (РЖМат, 1975, 3А742)
2. **Анчиков А. М.**, Некоторые конформно-приводимые космологические решения уравнения Эйнштейна. В сб. «Гравитация и теория относительн.», Вып. 4—5, Казань, Казан. ун-т, 1968, 124—128 (РЖМат, 1969, 7А560)
3. **Башков В. И.**, Самосогласованное поле в ОТО и проблема взаимодействия фононов. В сб. «Гравитация и теория относительн.» Вып. 10—11, Казань, Казан. ун-т, 1974
4. **Гаврилов С. П.**, Суперпозиция решений Шварцшильда и метрика гравитационного диполя. В сб. «Гравитация и теория относительн.» Вып. 8, Казань, Казан. ун-т, 1971, 30—37 (РЖМат, 1972, 7А597)
5. **Голиков В. И.**, Плоские монохроматические электромагнитные волны в ОТО. В сб. «Гравитация и теория относительн.», вып. 8, Казань, Казан. ун-т, 1971, 38—45 (РЖМат, 1972, 6А696)
6. **Грищук Л. П.**, Критерий пространственной однородности и космологические модели. Астр. ж., 1967, 44, 1097
7. **Дорошкевич А. Г.**, Модель Вселенной с однородным магнитным полем. Астрофизика, 1965, 1, 255
8. **Егоров А. И.**, О суперпозиции двух решений Нордстрема—Рейснера.

В сб. «Гравитация и теория относительн.», Вып. 7, Казань, Казан. ун-т, 1970, 42—49
9. **Захаров В. Д.**, Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., «Наука», 1972, 200 с. (РЖМат, 1972, 7А595К)
10. —, Некоторые типы полей тяготения с гравитационными волнами. Вестн. Моск. ун-та, 1965, № 2, 59—64
11. **Зельдович Я. Б.**, Новиков И. Д., Строение и эволюция Вселенной. М., Физматгиз, 1975
12. **Иваненко Д. Д.**, Брежнев В. С., Фролов Б. Н., О некоторых точных нестатических решениях уравнений Эйнштейна. «Современные проблемы гравитации», сб. Трудов II Советской гравитационной конференции, Тбилиси, 1965
13. —, Гололобова А. С., Кречет В. Г., Лапчинский В. Г., Космологические решения для спинорного поля в О. Т. О., Изв. ВУЗов, сер. Физ., 1973, № 12, 68—71
14. **Иванов Г. Г.**, Вакуумные пространства Эйнштейна III типа с группой движений G_2 абелевой и разрешимыми группами G_3. В сб. «Гравитация и теория относительн.», Вып. 8, Казань, Казан. ун-т, 1971, 92—99 (РЖМат, 1972, 6А698)
15. **Кайгородов В. Р.**, О максимально-подвижных пространствах Эйнштейна ($\varkappa \neq 0$). Сб. аспирантск. работ Казан. ун-т. Точные н., Казань, 1962, 3—14 (РЖМат, 1963, 6А407)
16. —, О метрике поля тяготения с двумя точечными частицами. В сб. «Гравитация и теория относительн.», Вып. 4—5, Казань, Казан. ун-т, 1968, 176—179 (РЖМат, 1969, 7А558)
17. —, Пестов А. Б., Постоянное векторное поле в пространствах Эйнштейна. В сб. «Гравитация и теория относительн.», Вып. 6, Казань, Казан. ун-т, 1969, 46—51 (РЖМат, 1970, 9А561)
18. **Компанейц А. С.**, Чернов А. С., Решение уравнений гравитации в однородной изотропной модели. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, 47, № 5
19. **Коппель А.**, Некоторые классы точных аксиально-симметрических решений уравнений Эйнштейна. В сб. «Соврем. пробл. гравитации, 1965», Тбилиси, 1967, 190—200 (РЖМат, 1969, 4А592)
20. —, О точных полугеодезических двухпеременных решениях вакуумных уравнений Эйнштейна. Тр. ин-та физ. и астрон. АН Эст. ССР, 1967, № 33, 18—38 (РЖМат, 1968, 8А538)
21. **Кречет В. Г.**, Лапчинский В. Г., Пономарев В. Н., Станюкович К. П., Проблемы гравитационного коллапса. В сб. «Пробл. теории гравитации и элементарн. частиц», Вып. 6, М., Атомиздат, 1975, 129—139
22. **Лифшиц Е. М.**, Халатников И. М., Об особенностях космологических решений уравнений гравитации. I. Ж. эксперим. и теор. физ., 1960, 39, № 1, 149—157 (РЖМат, 1961, 4А421)
23. —, —, Об особенностях космологических решений уравнений гравитации. II. Ж. эксперим. и теор. физ., 1960, 39, № 3, 801—808 (РЖМат, 1961, 11А402)
24. **Петров А. З.**, Один тип пространств Эйнштейна. Тр. Казан. авиац. ин-та, Казань, 1946, № 7
25. —, Классификация пространств, определяемых полями тяготения. Уч. зап. Казан. ун-та, 1954, 114, кн. 8, 55
26. —, Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966, 495 (РЖМат, 1967, 6А373)
27. **Пирани Ф.**, Инвариантная формулировка теории гравитационного излучения. В сб. «Новейшие проблемы гравитации», М., ИИЛ, 1961, 257—287
28. **Полищук Р. Ф.**, Двумерные площадки в общей теории относительности. Вестн. Моск. ун-та физ., астрон., 1973, 1, 3
29. —, Изоморфизм пфаффовых систем пространства-времени. Докл. АН СССР, 1973, 208, № 6, 132
30. —, Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума. В сб. «Новейшие проблемы гравитации». М., 1973, 126 с.

31. **Пулидо Гарсиа И.**, Стационарные аксиально симметричные гравитационные поля. Дисс. на соиск. к. ф. м. наук, М., 1973
32. **Синг Д.**, Общая теория относительности. М., ИИЛ, 1963, 280
33. **Сингатуллин Р. А.**, Стационарные цилиндрически-симметричные решения поля тяготения в пустоте. В сб. «Гравитация и теория относительн.», Вып. 6, Казань, Казан. ун-т, 1969, 94—96 (РЖМат, 1970, 7А694)
34. **Степанюк Н. М.**, Об одном точном статическом решении уравнений Эйнштейна. Ж. эксперим. и теор. физ., 1967, **53**, № 2, 570—572
35. **Толмен Р.**, Относительность, термодинамика и космология. М., Физматгиз, 1974, 339—367
36. **Чернин А. Д.**, Взаимодействие вихревых и потенциальных движений в релятивистской гидродинамике. II. Астрофизика, 1969, 5, 656
37. **Шикин И. С.**, Решения уравнений тяготения в однородной, полностью анизотропной модели. Докл. АН СССР, 1968, **179**, № 4, 817—820 (РЖМат, 1968, 10Б460)
38. —, Однородные анизотропные модели со сдвигом в ньютоновской космологии. Ж. эксперим. и теор. физ., 1970, **59**, 182
39. **Якупов М. Ш.**, Релятивистские пространства Эйнштейна второго класса. В сб. «Гравитация и теория относительн.», вып. 9, Казань, Казан. ун-т, 1973, 109—144 (РЖМат, 1974, 7А858)
40. **Baldwin O. R.**, Jeffry G. B., The relativity theory of plane waves. Proc. Roy. Soc. London, 1926, A111, 95—104
41. **Banerjee A.**, Non-homogeneous spherically symmetric collapse of pressureless dust. Proc. Phys. Soc., 1967, № 91, part 4, 574
42. —, Null electromagnetic fields in general relativity. J. Phys. A. Gen. Phys., 1970, 3, № 5, 501—504 (РЖМат, 1971, 4А749)
43. —, Cylindrically symmetric stationary beam of electromagnetic radiation. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 5, 1188—1190
44. —, Banerji S., Stationary distribution of dust and electromagnetic fields in general relativity. J. Phys. (Proc. Phys. Soc.), 1968, **A1**, № 2, 188—193
45. **Bartrum P. C.**, Null electromagnetic field in the form of spherical radiation. J. Math. Phys., 1967, 8, № 7, 1464—1467
46. **Behr C.**, Eine Verallgemeinerung des Friedmanischen Weltmodels mit positiver Raumkrümmung. Z. Astrophys., 1962, **54**, 268—286 (РЖМат, 1962, 11А350)
47. **Bera R.**, Datta D. K., Non-static electromagnetic fields in general relativity. II. J. Phys. (Proc. Phys. Soc.), 1968, **A 1**, № 6, 650—654
48. **Bertotti B.**, Uniform electromagnetic field in the theory of general relativity. Phys. Rev., 1959, **116**, № 5, 1331—1333 (РЖМат, 1961, 5А497)
49. **Bondi H.**, Pirani F. A. E., Robertson I., Gravitational waves in general relativity. III. Exact plane waves. Proc. Roy. Soc., 1959, **A 251**, № 1267, 519—533 (РЖМат, 1961, 4А433)
50. **Bonnor W. B.**, Gertain exact solutions of the equations of general relativity with an electrostatic field. Proc. Phys. Soc., 1953, **A66**, № 2, 145—152
51. —, Exact solutions of the Einstein—Maxwell equations. Z. Phys., 1961, **161**, № 4, 439—444 (РЖМат, 1961, 10А474)
52. —, An exact solution of the Einstein—Maxwell equations reffering to a magnetic dipole. Z. Phys., 1966, **190**, 444—445
53. —, The gravitational field of light. Communs. Math. Phys., 1969, **13**, № 3, 163—174 (РЖМат, 1970, 2Б538)
54. —, Spherical gravitational waves. Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1962, № 91, 141—145 (РЖМат, 1963, 9Б333)
55. —, A class of stationary solutions of the Einstein—Maxwell equations. Communs. Math. Phys., 1973, **34**, № 1, 77—83 (РЖМат, 1974, 5А778)
56. —, Swaminarayan N. S., A exact stationary solution of Einstein's equations. Z. f. Phys., 1965, **186**, № 3
57. —, Vaigya P. C., Spherically symmetric radiation of charge in Einstein—Maxwell theory. Gen. Relat. and Gravit., 1970, **1**, № 2, 127—130
58. **Brahmachary R. L.**, A generalization of Reissner—Nordstrom solution. I. II. Nuovo Cimento, 1965, **4**, № 5, 1216—1218; 1957, **5**, № 6, 1520—1523

59. —, A class of exact solutions of the combined gravitational and electromagnetic field equations of general relativity. Nuovo Cimento, 1957, **10**, № 6, 1502—1506
60. **Buchdal H. A.**, Reciprocal Static solutions of the equations $G_{\mu\nu}=0$. Quart. J. Math., Oxford Ser., 1954, **5**, 116—119 (РЖМат, 1956, 3310)
61. —, Reciprocal static solutions of the equations of the gravitational field. Austral. J. Phys., 1956, **9**, 13—18 (РЖМат, 1957, 8221)
62. —, Reciprocai static metrics and scalar fields in the general theory of relativity. Phys. Rev., 1959, **115**, № 5, 1325—1328 (РЖМат, 1960, 10879)
63. **Cahen M.**, L e r o y J., Ondes gravitationnelles en presence d'un champ electromagnetique. I, II. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. 1965, **51**, № 9, 996—1015; 1965, **51**, № 10, 1179—1186
64. —, —, Exact solutions of Einstein—Maxwell equations. J. Math. and Mech., 1966, **16**, № 6, 501—508 (РЖМат, 1968, 1A753)
65. —, S p e l k e n s J., Espaces de type III. Solutions de equations de Maxwell—Einstein. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1968, **53**, № 8, 817—826
66. **Cantoni V.**, On some plane solutions of the combined Einstein—Maxwell field equations. Atti. Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis. math. e natur., 1971, **50**, № 2, 156—162
67. **Carter B.**, A new family of Einstein—spaces. Phys. Lett., 1968, **A26**, № 9, 399—400
68. —, Global structure of the Kerr family of gravitational fields. Phys. Rev., 1968, **174**, № 5
69. **Chazy J.**, Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la theorie de la relaviste. Bull. Soc. Math. France., 1924, **52**, 17
70. **Chevreton M.**, Champ cree par une charge pointuelle en relativite general. Energic propre classique. C. r. Acad. Sci., 1970, **270**, № 5, A989—A992
71. **Chitre D. M.**, G ü v e n R., N u t k u Y., Static cylindrically symmetric solutions of the Einstein—Maxwell equations. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 3, 475—477
72. **Cohen J. M.**, C o h e n M. D., Exact fields of charge and mass distributions in general relativity. Nuovo Cimento, 1969, 60B, 241
73. **Das K. C.**, B a n e r j i S., Charged Tomimatsu—Sato metrics., Phys. Lett., 1975, **A50**, № 6, 409—410
74. **Datta B. K.**, Static electromagnetic fields in general relativity. Ann. Phys., 1961, **15**, № 3, 403—410
75. —, Nonstatic electromagnetic fields in general relativity. Nuovo Cimento, 1967, **A47**, № 3, 568—572 (РЖМат, 1967, 10A543)
76. —, R a y c h a n d h u r i A. K., Stationary electromagnetic fields in general relativity. J. Math. Phys., 1968, **9**, № 10, 1715—1718
77. **Dautcourt G.**, P a p a p e t r o n A., T r e d e r H., Eindimensionale gravitations felder. Ann. Phys., 1962, **9**, № 5-6, 330—336 (РЖМат, 1963, 7A366)
78. **De U. K.**, Some distributions of charged fluid in General Relativity. Indian J. Phys., 1971, **45**, № 11, 487
79. —, B a n e r j e e A., Two classes of solutions of null electromagnetic radiations. Progr. Theor. Phys., 1972, **47**, № 4, 1204—1209
80. **Debever R.**, C a h e n M., Champe electromagnetic constans in relativite generalee. C. r. Acad. sci., 1960, **251**, № 11, 1160—1162
81. —, Espaces-temprs an type III de Petrov. C. r. Acad. sci., 1960, **251**, № 14, 1352—1353 (РЖМат, 1961, 11A401)
82. **Ehlers J.**, Exterior solutions of Einsteins gravitational field equations admitting a two—dimensional Abelian group of isometric correspondences. Colloq. theorie relativ., Bruxelles, 1959, 49—57 (РЖМат, 1961, 11A399)
83. —, K u n d W., Exact solutions of the gravitation field equations. Gravitation, 1962
84. —, G e r e n P., S a c h s R. K., Isotropic solutions of the Einstein—Lioiville equations. J. Math. Phys., 1968, **9**, № 9, 1344—1349 (РЖМат, 1969, 3Б323)
85. **Einstein A.**, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Berl. Ber., 1917, **1**, 142—152

86. —, R o s e n N., On gravitational waves. J. Frankl. Inst., 1937, **223**, 43
87. **Ellis G. F. R.**, S c h i a m a D. W., On class of model universes satisfying the perfect cosmological principle. Perspectives geom. and relativity. Bloomington—London. Indiana Univ. Press., 1966, 150—160 (РЖМат, 1968, 4A560)
88. **Ernst F. J.**, Charged version of Tomimatsu—Sato Spinning-mass field. Phys. Rev., D, Part. and Fields, 1973, **7**, № 8, 2520—2521
89. **Farnsworth D. L.**, Homogeneous dust filled cosmological models. Doct. diss. Univ. Texas, 1967, 85 pp. «Dissert Abstrs.», 1967, **B28**, № 5, 2024 (РЖМат, 1968, 7A608D)
90. **Faulkis M. C.**, Non-static fluid spheres in general relativity. Progr. Theor. Phys., 1969, **42**, № 5, 1139—1142
91. **Foster J. C.**, R a y J. R., A tachion dust metric in general relativity. J. Math. Phys., 1972, **13**, № 7, 979—982 (РЖМат, 1973, 1A700)
92. **Friedmann A.**, Uber die Krümmung des Raumes. Z. Phys., 1922, **10**, 377—386
93. **Gauteau R.**, Coupled Weyl gravitational and zero-rest-mass scalar fields. Nuovo Cimento, 1969, **60B**, 360
94. **Gödel K.**, An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation. Rev. Mod. Phys., 1949, **21**, 447
95. **Goldberg D. N.**, S a c h s R. K., A theorem on Petrov types. Acta Phys. Polon., 1962, 22, Supplement, 13
96. **Goodinson P. A.**, Null field solutions of the Einstein—Maxwell field equations. Ann. fis. Real. Soc., exp. fis. y guim., 1969, **65**, № 11-12, 355—358
97. **Harrison B. K.**, Exact three-variable of the field equations of general relativity. Phys. Rev., 1959, **116**, № 5, 1285—1296 (РЖМат, 1961, 5A490)
98. —, Equation of state of matter at supernuclear density. Astrophys. J., 1965, **142**, 1643
99. **Harrison E. R.**, Improved Friedman models. Monthly Notices Roy. Astr. Soc., 1968, **140**, № 3
100. **Heckmann O.**, S c h ü c k i n g E., Gravitation: An introduction to current research. Ed. L. Witten (New York, John Wiley and Sons), 1962
101. **Hoyle F.**, In «La Structure et l'evolution de l'universe», II Conseil de Phys. Solvay, Bruxelles, 1958
102. **Israel W.**, K h a n K. A., Collinear partiches and Bondi dipoles in general relativity. Nuovo Cimento, 1964, **33**, № 2
103. —, W i l s o n G. A., A class of stationary electromagnetic vacuum fields. J. Math. Phys., 1972, **13**, № 6, 865—867
104. **Jacobs K. C.**, Spatially homogeneous and Euclidian cosmological models with shear. Astrophys. J., 1968, **153**, № 2, part 1, 661
105. —, Cosmologies of Bianchi type I with uniform magnetic fields. Astrophys. J., 1969, **135**, 2, 379—392
106. **Jordan P.**, E h l e r s J., K u n d t W., Strenge Losungen der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Abhandle. Math.—naturwiss. Kl. Akad. Wiss. und Liter, 1960, № 2, 85 (РЖМат, 1962, 5A481)
107. —, —, —, O z s v a t h I., S a c h s R. K., T r ü m p e r M., New homogeneous solutions of Einstein's field equations with incoherent matter. Abhandl. Math. naturwiss. Kl., Akad. Wiss. und Liter, 1965, № 1, 31 p. (РЖМат, 1966, 6A425)
108. **Kasner E.**, Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations. Amer. J. Math., 1921, **43**, 217
109. **Kerr R. P.**, Gravitational field of a sprinning mass as an example of algebraically spescial metrics. Phys. Rev. Lett., 1963, **11**, № 5
110. **Khalatnikov I. M.**, L i f s h i t z E. M., General cosmological solutions of the gravitational equations with a singularity in time. Phys. Rev. Lett., 1970, 24, № 2, 76—79
111. **Kinnersley W.**, Field of an arbitrary accelerating point mass. Phys. Rev., 1969, **186**, № 5, 1335—1336
112. —, W a l k e r M., Uniformly accelerating charged mass in general relativity. Phys. Rev. D: Part. and Fields, 1970, **2**, № 8, 1359—1370

113. Kobicke R. A., Parker L., Solution of the Einstein—Maxwell equations for two unequal spinning sources in equilibrium. Phys. Rev. D: Part and Fields, 1974, 10, № 8, 2321—2324
114. Kottler F., Über der physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. Ann. Phys, 1918, 56, ser. 4
115. Koty J., Peres Z., All stationary vacuum metric with shearing geodesic eigenrays. J. Math. Phys. 1972, 13, № 11, 1695—1699 (РЖМат, 1973, 6А780)
116. Krishna Rao J., Cylindrically symmetric null fields in generral relativity. Indian J. Pure and Appl. Math., 1970, 1, № 3, 367—371 (РЖМат, 1971, 5А779)
117. Krori K. D., Barna Jayantimala. Exterior solution for a charged radiating sphere in general relativity. J. Phys. A: Math. Nukl. and Gen. 1974, 7, № 17, 2125—2129
118. Kuchowicz B., General relativistic fluid spheres. I. New solutions for spherically symmetric matter distributions. Acta. Phys. Polon., 1968, 33, № 4
119. Kurson H. E., Bipolar solutions of Einstein's equations. Proc. Lond. Math. Soc., 1924, 29, 23
120. Lal K. B., Prasad H., Cylindrical wave solutions of field equations of general relativity containing electromagnetic fields. Tensor, 1969, 20, № 1, 45—52 (РЖМат, 1969, 10А450)
121. —, Sing T., A note on a non—singular zero-rest-mass scalar field. Tensor, 1974, 28, № 3, 250 (РЖМат, 1975, 6А872)
122. Letelier P. S., Tabensky R. R., The general solution to Einstein—Maxwell equation with plane symmetry. J. Math. Phys., 1974, 15, 594—595
123. Lichnerowicz A., Theories relativistes de la gravitation et de elektromagnetisme. Paris, 1955
124. Lovelock D. A., A spherically symmetric solution of the Maxwell—Einstein equations. Communs Math. Phys., 1967, 5, № 4, 257—261 (РЖМат, 1968, 6Б538)
125. Marder L., Two bodies at rest in general relativity. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1959, 55, № 1
126. —, Gravitational waves in general relativity. V. An exact spherical waves. Proc. Roy. Soc., 1961, A261, № 1304; 91—96 (РЖМат, 1962, 6А413)
127. Martin J., Mas. L., Etude des metriques obtenues la variant les constantes de la metrique de Kerr. C. r. Acad. sci., 1970, 271, № 5, A338—A340 (РЖМат, 1971, 3А618)
128. Mas L., Une solution de s equations d'Einstein avec champ magnetique. C. r. Acad. sci., 1970, 270, № 13, A837—A840 (РЖМат, 1970, 10А509)
129. Mc Callum M. A. H., Stewart I. M., Schmidt B. G., Anisotropic stress in homogeneous cosmologies. Commun's Math. Phys., 1970, 17, № 4, 343
130. Mehra A. L., Vaidya P. C., Kushwaha P. S., Gravitational field of sphere composed of consentric shells. Phys. Rev., 1969, 186, № 5
131. Misra M., The external gravitational fields due to toroidal and lens—shaped distribution. Proc. Nat. Inst. Sci., India, 1961, A27, № 5
132. —, Electrovac universes. Proc. Nat. Inst. sci. India, 1962, A28, № 1, 105—119
133. —, Some exact solutions of the field equations of general relativity. J. Math. Phys., 1966, 7, № 1, 155—158 (РЖМат, 1966, 9А376)
134. —, Axially symmetric fields in general relativity. Phys. Rev. D: Particles and fields, 1970, 2, № 2, 410—412 (РЖМат, 1971, 2А660)
135. —, Pandey D. B., A new class of electromagnetic fields. Ceirr. sci., (India), 1971, 40, № 5, 100—101
136. Mukherij B. C., Two cases of exact gravitational fields with axial symmetry. Bull. Calc. Math. Soc., 1938, 30, 95—104
137. Najas Ali, On plane wave solutions of the field equations of general relativity. Indian J. Pure and Appl. Math., 1973, 4, № 7-8, 664—669 (РЖМат, 1975, 7А943)

138. Nariai H., Tomita K., On a perfect-fluid sphere with uniform density. Progress of theor. Phys., 1968, 40, № 3,
139. Narlikar V., Karmarkar K., On a curious solution of relativistic field equations. Current Sci., 1946, 15, 69
140. Neugebauer G., Stationare rotationsymmetrische Lösungen. Wissensch. Z. Univ. Jena Math.—naturwiss., 1968, 17, № 2
141. Neumann C., Uber die den Kraften electrodinamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementarsätze. K. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, 1874, B.10, 417
142. Newmann E., Tamburino L., Empty space metrics containing hypersurface orthogonal geodesic rays. J. Math. Phys., 1962, 3, № 5, 902—907 (РЖМат, 1963, 11А351)
143. —, Unti T., Tamburino L., Empty space generalisation of the Schwarzschield metric. J. Math. Phys., 1963, 4, 915—937
144. Nordström L., On the energy of gravitational field in Einstein's theory. Proc. Koninkl. nederl. acad. Wet. Amsterdam, 1918, 20, 1238—1245
145. Oppenheimer J. R., Snyder H., On continued gravitational contraction. Phys. Rev., 1939, 56, 455
146. Ozsváth I., New homogeneous solutions of Einstein's field equations with incoherent matter. Abhandl. Math., natur. Cl. Acad. Wiss. und Liter., 1965, № 1, 1—31
147. —, Two rotating universes with dust and electromagnetic field. Perspectives geom. and relativity. Bloomington—London, Indiana Univ. Press, 1966, 245—258 (РЖМат, 1968, 5А601)
148. —, Dust-fielled universes of class II and III. J. Math. Phys. 1970, 11, № 9, 2871 (РЖМат, 1971, 5А775)
149. —, Spatially homogeneous world models. J. Math. Phys., 1970, 11, № 9, 2860—2870 (РЖМат, 1971, 5А778)
150. —, Schücking E., An anti-Mach metric. Recent. developm. gen. relativity. Warzawa, PWN; Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1962, 339—350 (РЖМат, 1963, 7А368)
151. Papapetron A., A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge distribution. Proc. Roy. Irisc. Acad., 1947, A51, 191—204
152. —, Eine rotationssymmetrische lösung in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Phys., 1953, 12, № 1-6, 309—315
153. Parker L., Ruffini R., Wilkins D., Metric of two spinning charged soirces in equlibrium. Phys. Rev. D: Part. and Fields., 1973, 7, № 10, 2874—2879
154. Patel L. K., Some fields of electromagnetic null radiation. Tensor, 1974, 28, № 3, 290—292 (РЖМат, 1975, 10А595)
155. —, Misra U., The field of rotating charged body emitting null fluid. General relativity and Gravitation, 1975, 6, № 3, 281—288
156. Patnaik S., Einstein—Maxwell fields with plane symmetry. Proc. Cambrige Philos. Soc., 1970, 67, № 1, 127—131 (РЖМат, 1970, 7А693)
157. Penney R., Axially symmetric zero—Mass Meson solutions of Einstein equations. Phys. Rev., 1962, 174, № 5, 1578
158. Perec A., Some gravitational waves. Phys. Rev. Lett., 1959, 3, № 12, 571—572
159. —, Null electromagnetic fields in general relativity theory. Phys. Rev., 1960, 118, № 4, 1105—1110 (РЖМат, 1961, 11А400)
160. Plebanski J. F., A class of solutions of Einstein—Maxwell equations with the cosmological constant. Int. Astron. Union. symp., 1974, № 64, 188—190
161. Prasanna A. R., On certain space-times hairing the fourth component of energy—momentum complex identially zero. Progr. Theor. Phys., 1971, 45, № 4, 1330—1335
162. Rainich G. Y., Electrodynamics in general relativity. Trans. Amer. Math. Soc., 1925, 27, 106—136
163. Rastall P., A solution of Einstein fields equations. Canad. J. Phys., 1960, 38, № 12, 1661—1664 (РЖМат, 1961, 12Б230)

164. **Rayachaudhuri A. K.**, Reine Strahlunges felder mit Zentralsymmetric in der allgemeinen Relativitätstheorie. Z. Physik, 1953, **135**, 225—231 (РЖМат, 1954, 4905)
165. —, An anisotropic cosmological solutions in general relativity. Proc. Phys. Soc., 1958, **72**, 263
166. —, Static electromagnetic field in general relativity. Ann. Phys., 1960, **11**, № 4, 501—509
167. **Reissner H.**, Uber die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie. Ann. Phys., 1916, **50**, 106—120
168. **Roa K. N. S.**, Roa A. V. G., A uniform electromagnetic—gravitational field., Phys. Lett., 1972, **A39**, № 4, 291—292
169. **Robinson B. B.**, Relativistic universes with shear. Proc. Nat. Acad. sci., 1961, **47**, 1852
170. **Robinson J.**, A solution of the Maxwell-Einstein equations. Bull. Acad. polon. Sci., Ser. sci. Math Astron. et Phys., 1959, **7**, № 6, 351—352
171. —, Robinson J. R., Zund I. D., Degenerate gravitational fields with twisting rays. J. Math. and Mech., 1969, **18**, № 9, 881—892
172. —, Trautman A., Spherical gravitational waves. Phys. Rev. Letters, 1960, **4**, № 9, 431—432 (РЖМат, 1961, 7A530)
173. —, —, Some spherical gravitational waves in general relativity. Proc. Roy. Soc., 1962, **A265**, 463
174. **Rosen G.**, Symmetries of the Einstein—Maxwell equations. J. Math. Phys., 1962, **3**, 313—318 (РЖМат, 1963, 10A391)
175. —, Spatially homogeneous solutions to the Einstein—Maxwell equations. Phys. Rev., 1964, 136, B297
176. **Roy A. R.**, Datta C. R., Time dependent axially symmetric solutions of the Einstein—Maxwell—Yukawa fields. Communs. Math. Phys., 1973, **29**, № 4, 285—292 (РЖМат, 1973, 7A741)
177. **Roy S. R.**, Tripathi V. N., Cylindrically symmetric electromagnetic field of the second class., Indian J. Pure and Appl. Math., 1972, **3**, № 5, 926—937
178. **Safko J.**, The nature of the general relativistic solution of the charged line mass. Ann. Phys., 1970, **58**, № 2, 322—334
179. **Santos E.**, Solution de las ecuaciones de Einstein—Maxwell para una corriente electrixa cilindrica estacionaria. An. fis. Real. Soc. exp. fis. y quim., 1968, **64**, № 9-10, 283—285
180. **Schikin J. S.**, Gravitational fields with groups of motions on two—dimensional transivity hypersurfaces in a model with matter and magnetic fields. Communs. Math. Phys., 1972, **26**, № 1, 24—28
181. **Schücking E.**, Heckmann O., World models. Inst. Internat. Physique Solvey, Onzieme Conseil de Phys., Bruxelles, 1958, 149 p.
182. **Schwarzschild K.**, Uber die Gravitationsfeld eines Massenpunkts nach der Einsteinische Theorie. Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 1916, 189
183. **Sen A.**, All stationary vacuum metrics with shearing geodesic eigenrays. J. Math. Phys., 1972, **13**, № 11
184. **Singh K. P.**, Sharan R., Product of two surfaces in general relativity. Proc. Nat. Inst. sci. India, 1965 (1966), **A 31**, № 6, 584—592
185. —, Singh D. N., A plane symmetric cosmological model. Monthly Notes Roy. Astron. Soc. (G. B), 1968, **140**, № 4, 453—460
186. **Sitter de**, On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequenses. Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam, 1917, **20**, 1217
187. **Som M. M.**, Raychaudhuri A. K., Cylindrically symmetric charged dust distributions in rigid rotation in general relativity. Proc. Roy. Soc., 1968, **A304**, № 1476
188. —, A cylindrically symmetric magnetic field in the presence of freely moving particles. J. Phys. (Proc. Phys. Soc.), 1968, **A1**, № 1, 108—111
189. **Stephani H.**, Non conform flache gravitations felder. Communs. Math. Phys., 1967, **5**, № 5, 337—342
190. —, Uber Lösungen der Einsteinischen Feldgleichchungen, die sich in

einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten lassen. Communs. Math. Phys., 1967, **4**, № 2, 137—142 (РЖМат, 1967, 11A509)
191. —, Einige Lösungen der Einsteinschen Feldgleichengen mit idealer Flüssigkeit, die sich in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten lassen. Communs. Math. Phys., 1968, **9**, № 1, 53—54. (РЖМат, 1969, 2A728)
192. **Stewart J. M.**, Ellis G. T. A., Solutions of Einstein's equations for fluids wich exhibit local rotational symmetry. J. Math. Phys., 1968, **9**, № 7, 1072—1082
193. **Takeno H.**, On solutions of electromagnetic equation in nonstatic spherically symmetric space—times. Tensor, 1954, **4**, № 1, 9—15 (РЖМат, 1959, 3195)
194. — On plane wave solutions of field equations in general relativity. Ten-

ОПЕЧАТКИ

Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 14 1976 г.

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
14	10 снизу	$O_{2'}$	$O^{2'}$
25	4 сверху	[86, 351]	[86 : 351]
57	2 сверху	, А. В. Михалев	, А. В. Михалёв
	19 сверху	органиченность	ограниченность
61	17 снизу	вопро	**вопрос**
76	20 снизу	$=\mathrm{Hom}\, Z(M, D)$	$=\mathrm{Hom}_{Z}(M, D)$
80	10 сверху	$S=K[[X_1^{-1}, \ldots, X_q^{-1}]$,	$S=K[[X_1^{-1}, \ldots, X_q^{-1}]]$,
88	20 снизу	колько	кольцо
91	18—20 сверху	полупервичного расщепляющего кольца. Кольца, над которыми первичных колец, над которыми сингулярные модули инъективны. В 1364 установлена регулярность (по Нейману) центра . . .	первичных колец, над которыми сингулярные модули инъективны. В [1364] установлена регулярность (по Нейману) центра полупервичного расщепляющего кольца. Кольца, над которыми . . .
98	9 сверху	Мори-та-экви-	Морита — экви-
133	4 снизу	$\mathfrak{A}\|XF$,	$\mathfrak{A} \propto F$
134	3, 5 сверху	$\mathfrak{A}\|XF$.	$\mathfrak{A} \propto F$
		$\mathfrak{A}\|XF$	$\mathfrak{A} \propto F$,
211	2 сверху	$f \in \bar{X}_n(\bar{f})$.	$f = \bar{X}_n(\bar{f})$.
247	21—22 снизу	Univ. comen. math., 1975, Spec. Number, 51—53 (РЖМат, 1975, 5A301) 9A267)	Univ. Babes — Bolyai. Sec. math.-mech., 1970, 15, № 2, 3—7 (РЖМат, 1971, 9A267)
307	2 снизу	$q,\ \xi\xi + q,\ \eta\eta = 0, \ldots$	$q_{,\xi\xi} + q_{,\eta\eta} = 0, \ldots$

Gravitationsgleichungen. Ann. Phys., 1919, **59**, 185
215. **Whittaker J. M.**, An interior solution in general relativity. Proc. Roy. Soc., 1968, **A306**, № 1484, 1—3 (РЖМат, 1969, 1A644)
216. **Wilson S. J.**, A Gödel-type solution of the Einstein—Maxwell equation. Canad. J. Phys., 1968, **46**, № 21, 2361—2362
217. **Wooley M. L.**, On isometric motion on charged fluid in the Einstein—Maxwell theory. Proc. Roy. Soc., 1974, **A336**, № 1606, 273

164. **Rayachaudhuri A. K.**, Reine Strahlunges felder mit Zentralsymmetric in der allgemeinen Relativitätstheorie. Z. Physik, 1953, **135**, 225—231 (РЖМат, 1954, 4905)
165. —, An anisotropic cosmological solutions in general relativity. Proc. Phys. Soc., 1958, **72**, 263
166. —, Static electromagnetic field in general relativity. Ann. Phys., 1960, **11**, № 4, 501—509
167. **Reissner H.**, Uber die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie. Ann. Phys., 1916, **50**, 106—120
168. **Roa K. N. S.**, R o a A. V. G., A uniform electromagnetic—gravitational field., Phys. Lett., 1972, **A39**, № 4, 291—292
169. Robinson B. B., Relativistic universes with shear. Proc. Nat. Acad. sci.

187. Som M. M., R a y c h a u d h u r i A. K., Cylindrically symmetric charged dust distributions in rigid rotation in general relativity. Proc. Roy. Soc., 1968, **A304**, № 1476
188. —, A cylindrically symmetric magnetic field in the presence of freely moving particles. J. Phys. (Proc. Phys. Soc.), 1968, **A1**, № 1, 108—111
189. **Stephani H.**, Non conform flache gravitations felder. Communs. Math. Phys., 1967, **5**, № 5, 337—342
190. —, Uber Lösungen der Einsteinischen Feldgleichchungen, die sich in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten lassen. Communs. Math. Phys., 1967, **4**, № 2, 137—142 (РЖМат, 1967, 11A509)
191. —, Einige Lösungen der Einsteinschen Feldgleichengen mit idealer Flüssigkeit, die sich in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten lassen. Communs. Math. Phys., 1968, **9**, № 1, 53—54. (РЖМат, 1969, 2A728)
192. **Stewart J. M.**, E l l i s G. T. A., Solutions of Einstein's equations for fluids wich exhibit local rotational symmetry. J. Math. Phys., 1968, **9**, № 7, 1072—1082
193. **Takeno H.**, On solutions of electromagnetic equation in nonstatic spherically symmetric space—times. Tensor, 1954, **4**, № 1, 9—15 (РЖМат, 1959, 3195)
194. —, On plane wave solutions of field equations in general relativity. Tensor, 1957, **7**, № 2, 97—102 (РЖМат, 1960, № 5, 5811)
195. **Taub A. H.**, Empty space-times admitting a three parameter group of motions. Ann. Math., 1951, **53**, 472
196. **Tiwari R.**, M i s r a M., Axially symmetric conformastat electrovac universes. Proc. Nat. Inst. sci. India, 1962, **A28**, 857—862
197. **Tomimatsu Akira**, S a t o H u m i t a n a, New-exact solution for the gravitational field of a spinning mass. Phys. Rev. Lett., 1972, **29**, № 19, 1344—1345
198. —, —, New series of exact solution for gravitational fields of exact solution for gravitational fields of spinning masses. Progr. Theor. Phys., 1973, **50**, № 1, 95—110
199. **Torn K. S.**, Premordial element formation. Premordial magnetic fields and the isotropy of the universe. Ap. J., 1967, **148**, 51
200. **Trollape J. R.**, S m i t h B. E., Exact solutions of Einstein's cosmological equations. Nuovo Cimento, 1969, **B59**, № 2, 125—136
201. **Trümper M.**, On a special class of Type-1 gravitational fields. J. Math. Phys., 1965, **6**, 584
202. **Vaidya P. C.**, The gravitational field of a radiating star. Proc. Indian Acad. Sci., 1951, **A33**, 264
203. —, Nonstatic analogs of Schwarzschild's interior solution in general relativity. Phys. Rev., 1968, **174**, № 5, 1615
204. —, Some algebraically special solutions of Einstein's equation II. Tensor, Theor. Phys., 1966, **35**, № 1, 129—140
205. —, A generalized Kerr—Schild solution of Einstein's equations. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1974, **75**, № 3, 383—390 (РЖМат, 1974, 11A829)
206. —, B h a t t P. V., A generalized Kerr—Schild metric. Pramana, 1974, **3**, № 1, 28—34
207. —, P a h d y a J. M., Gravitational field of a radiating spheroid. Progr. 1973, **27**, № 3, 276—280 (РЖМат, 1974, 10A637)
208. —, P a t e l L. K., Radiating Kerr metric. Phys. Rev. D: Part. and Fields, 1973, **7**, № 12, 3590—3593
209. **Vinod P. J.**, A generalisation of plane wave solutions of the field equations in general relativity. The general type null solutions of Einstein—Maxwell Equations. Tensor, 1967, **18**, № 3, 330—334
210. **Wahlquist H. D.**, Interior solution for a finite rotating body of perfect fluid. Phys. Rev., 1968, **172**, № 5, 1291
211. **Walker A. G.**, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1933, **94**, 159
212. **Walker M.**, K i n n e r s l e y W., Some remarks on a radiating solution of the Einstein—Maxwell equation. Lect. Notes Phys., 1972, **14**, 48—85
213. **Weyl H.**, Zur Gravitationstheorie. Ann. Phys., 1917, **54**, 117—145
214. —, Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. Ann. Phys., 1919, **59**, 185
215. **Whittaker J. M.**, An interior solution in general relativity. Proc. Roy. Soc., 1968, **A306**, № 1484, 1—3 (РЖМат, 1969, 1A644)
216. **Wilson S. J.**, A Gödel-type solution of the Einstein—Maxwell equation. Canad. J. Phys., 1968, **46**, № 21, 2361—2362
217. **Wooley M. L.**, On isometric motion on charged fluid in the Einstein—Maxwell theory. Proc. Roy. Soc., 1974, **A336**, № 1606, 273

СОДЕРЖАНИЕ

Технический редактор *И. Н. Гусева*

Сдано в набор 24/VI—1976 г. Подписано в печать 8/XII-1976 г. Формат 60×90 1/16
Печ. л. 20,5 Уч.-изд. л. 26,48 Тираж 900 экз. Цена 2 р. 30 к. Заказ 5221

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, Люберцы, Октябрьский проспект, 403

Индекс 018070