ISSN 0202—7445

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ

Соответствует рубрикам 27.01—27.21
Рубрикатора ГАСНТИ

Том 19

Научный редактор
профессор Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1964 г.

МОСКВА 1981

1-1415

ВЫПУСКИ И ТОМА СЕРИИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ:

Алгебра. Топология. 1962. М., 1964
Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964
Геометрия. 1963, М., 1965
Математический анализ. 1963, М., 1965
Теория вероятностей. 1963, М., 1965
Алгебра. 1964, М., 1966
Математический анализ. 1964, М., 1966
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1964, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967
Математический анализ. 1965, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968
Математический анализ. 1966, М., 1967
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1966, М., 1967
Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969
Математический анализ. 1967, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1967, М., 1969
Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970
Математический анализ. 1968, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1968, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1970
Математический анализ. 1969, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1969, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971
Математический анализ. 1970, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970, М., 1971
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 10, М., 1972; Том 11, 1974; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1977; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1981
Математический анализ. Том 10, 1973; Том 11, 1973; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1980
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 10, 1972; Том 11, 1974; Том 12, 1972; Том 13, 1976; Том 14, 1977; Том 15, 1978; Том 16, 1978; Том 17, 1979
Современные проблемы математики. Том 1, 1973; Том 2, 1974; Том 3, 1974; Том 4, 1975; Том 5, 1978; Том 6, 1976; Том 7, 1975; Том 8, 1977; Том 9, 1976; Том 10, 1978; Том 11, 1978; Том 12, 1978; Том 13, 1979; Том 14, 1980; Том 15, 1980; Том 16, 1980
Проблемы геометрии. Том 7, 1975; Том 8, 1977; Том 9, 1979; Том 10, 1978; Том 11, 1980

УДК 512.545

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

В. М. Копытов

Начиная с 1963 года, в теории упорядоченных групп произошел качественный скачок, вызванный интенсивным исследованием линейно упорядоченных (л. у.) групп и развитием теории групп автоморфизмов л. у. множеств. В результате многие разделы теории решеточно упорядоченных групп (l-групп) приобрели стройный и оформившийся вид, в них были получены глубокие классификационные результаты. Естественным следствием этого было появление в недавнем прошлом нескольких монографий по теории упорядоченных групп, в частности, книг А. И. Кокорина и В. М. Копытова [26] (английский перевод [154]), Муры и Ремтуллы [182], Бигарда, Киймела и Вольфенштейна [78].

Настоящий обзор написан по материалам Реферативного журнала «Математика», в основном за 1975—1980 годы и отражает практически все направления развития теории упорядоченных групп с некоторым акцентом на линейно и решеточно упорядоченные группы, что объясняется интенсивностью и разнообразием исследований в этих областях. В обзор включены некоторые результаты, прореферированные в 1970—74 годах и не отраженные в предыдущих обзорах сборника «Алгебра. Топология. Геометрия» ежегодника «Итоги науки и техники» [12, 13] и в книге [26].

§ 1. ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

Исследования по л. у. группам проводились в основном в направлениях, намеченных в конце 60-х годов и сформулированных в [26]. Основные продвижения в этих направлениях сделаны для разрешимых групп.

Признаки упорядочиваемости и описание линейных порядков на группах. Элемент $x \neq e$ группы G называется обобщенно периодическим, если существуют $g_1, \ldots, g_n \in G$ такие, что $x \cdot g_1^{-1} x g_1 \ldots g_n^{-1} x g_n \in G$. В. В. Блудов [4] построил пример неупорядочиваемой группы без обобщенно периодических элементов. Пример разрешимой группы с таким свойством построили Мура и Ремтулла [179]. Ими доказано также, что разрешимая группа конечного ранга без обобщенно периодических элементов обладает линейными порядками. В. М. Копытовым в [29] найден критерий упорядочиваемости разрешимых групп конечного ранга в терминах неприводимых целочисленных многочленов. Ремтулла [204] доказал, что если группа аппроксимируется конечными p-группами по бесконечному множеству простых чисел p, то она допускает линейные упорядочения. Этот результат был уточнен В. М. Копытовым и Н. Я. Медведевым [33]. Именно, такая группа допускает линейный порядок, при котором система ее выпуклых подгрупп центральна. Последний результат позволил получить единым способом ряд известных ранее фактов о группах, аппроксимируемых конечными p-группами.

В. В. Блудов [6] привел новый пример группы, допускающей единственный линейный порядок. В. М. Копытов [29] доказал, что если число упорядочений разрешимой группы конечно, то оно кратно 4. Для любого $k>1$ существует разрешимая группа, допускающая в точности $4k$ линейных порядков. Пильц [191] охарактеризовал все линейные порядки прямого произведения линейно упорядоченных групп.

Системы выпуклых подгрупп в л. у. группах. Н. Я. Медведев в [38] изучал упорядочиваемые группы, у которых имеется лишь конечное число относительно выпуклых групп. Каждая такая конечно-порожденная группа имеет нильпотентный коммутант, факторгруппа по изолятору которого — бесконечная циклическая и ранг такой группы конечен. Мура и Ремтулла [180] доказали, что каждая упорядочиваемая группа с конечным числом относительно выпуклых подгрупп и каждая ее факторгруппа, являющаяся группой без кручения, доупорядочиваемы. В. М. Копытов [29] доказал, что каждая разрешимая л. у. группа обладает собственной нормальной выпуклой подгруппой. Построен пример локально разрешимой O-простой л. у. группы.

Хорошо известно, что в л. у. группах справедливо тождественное неравенство $|[x, y]|\leqslant|x|\cdot|y|$, а неравенство $|[x, y]|\leqslant|x|$ выполнено не всегда. В. М. Копытов и Н. Я. Медведев [33] изучали л. у. группы, у которых последнее неравенство тождественно выполняется. Такие группы называются жесткими л. у. группами. Л. у. группа является жесткой тогда и только тогда, когда система ее выпуклых подгрупп центральна. На языке нормальных подполугрупп найдены условия существования на группе жесткого линейного порядка.

Вложения и расширения. В. В. Блудов и Н. Я. Медведев [9] доказали, что всякая упорядочиваемая метабелева группа вкладывается в метабелеву упорядочиваемую группу, в которой уравнение $x^n=a$ разрешимо для всякого элемента a. Фокс в [108, 109] доказал, что для всякой абелевой нормальной подгруппы A л. у. группы G существует порядковое вложение φ л. у. группы G в л. у. группу G^* такую, что уравнение $x^n=\varphi(a)$

разрешимо в G^* для всех $a\in A$ и целых n. Если G доупорядочиваемая, то доупорядочиваема и G^*. В приложении [109] Фокс установил, что если G содержится в многообразии $\mathfrak{M}$ групп, то G^* можно также выбрать в $\mathfrak{M}$.

Эллиотом [104] доказано, что всякая счетная абелева л. у. группа является индуктивным пределом последовательности $\mathbf{Z}^{r_1}\xrightarrow{\varphi_1}\mathbf{Z}^{r_2}\xrightarrow{\varphi_2}\ldots$ прямых произведений $\mathbf{Z}^{r_i}$ циклических л. у. групп с координатным порядком, причем все отображения φ_i — порядковые вложения.

Мура и Ремтулла доказали в [183], что если A — нормальная подгруппа свободной неабелевой группы F, V — вполне характеристическая подгруппа A такая, что A/V упорядочиваема, F/A правоупорядочиваемая и обладает инфраинвариантной системой подгрупп с факторами из многообразия групп, порожденного A/V, то F/V упорядочиваема. Чехата и Вигандт [93] построили теорию радикала в л. у. группах, аналогичную теории Куроша—Амицур для колец. Ими введены понятия радикального и полупростого класса л. у. групп и изучены свойства таких классов. Класс $\mathcal{R}$ радикален тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}$ замкнут относительно O-гомоморфизмов и трансфинитных расширений. Класс $\mathcal{S}$ полупрост, если $\mathcal{S}$ замкнут относительно взятия нормальных выпуклых подгрупп и трансфинитных корасщирений. Существуют радикальные классы, являющиеся одновременно и полупростыми.

Свойства л. у. множеств л. у. групп. Коппельберг [156] доказала, что л. у. группа, л. у. множество которой полно и всякое множество попарно непересекающихся непустых интервалов счетно, является сепарабельной. А. Ермолов [19] установил, что для всякой счетной л. у. группы G и всякой ее нормальной подгруппы H найдутся счетная абелева группа G^*, ее подгруппа H^* и взаимно однозначное отображение $\varphi: G$ на G^* такие, что $\varphi(H)=H^*$ и φ индуцирует отображение G/H на G^*/H^*, причем системы выпуклых подгрупп G и G^* имеют один и тот же порядковый тип. Гоффман [121] анализировал соотношения между понятиями порядковой и топологической полноты на классе л. у. групп. В [155] рассматривались элементарные свойства абелевых л. у. групп, доказана разрешимость теорий некоторых конкретных классов абелевых л. у. групп.

Правоупорядоченные группы. Мура и Ремтулла [181] рассматривали следующие подклассы класса RO правоупорядочиваемых групп: C_1 — группы, системы выпуклых подгрупп которых разрешима при любом правом порядке; C_2 — группы, у которых всякая подгруппа является C_1-группой; C_3 — группы G, у которых для каждых двух элементов x, y найдутся u, v из полугруппы, порожденной элементами x, y, такие, что $ux=vy$. Тогда $RO\supset C_1\supset C_2\supset C_3\cap RO$, причем все вложения строгие. Всякая локально разрешимая C_3-группа локально является расширением нильпотентной группы с помощью конечной. Конечно порожденная разрешимая упорядочиваемая C_3-группа нильпотента.

Мура [177] построила пример полициклической правоупорядоченной группы, система выпуклых подгрупп которой не субнормальна. Аулт [68, 69] доказал, что у локально нильпотентной правоупорядоченной группы система выпуклых подгрупп разрешима. Ремтулла [203] установил, что если группа G конечно порождена, факторгруппа по ее коммутанту G' конечна и G' имеет нильпотентную подгруппу конечного индекса, то G не допускает правых упорядочений. Каждый частичный правый порядок нильпотентной группы без кручения продолжается до линейного правого порядка. Аналогичный результат получил также Форманек [107]. Разрешимые группы, у которых каждый частичный правый порядок продолжается до линейного правого порядка, изучал Пирс [189].

§ 2. РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

Свойства решеток l-групп. Вполне дистрибутивные l-группы изучал Якубик [135]. Для кардинальных чисел α, β l-группа G называется (α, β)-дистрибутивной, если для любых множеств индексов T, S таких, что $|T|\leqslant\alpha$, $|S|\leqslant\beta$ равенство $\bigwedge\limits_{t\in T}\bigvee\limits_{s\in S} x_{ts}= \bigvee\limits_{\varphi\in S^T}\bigwedge\limits_{t\in T} x_{t\varphi(t)}$ выполнено для всяких множеств $\{x_{ts}|t\in T,\ s\in S,\ x_{ts}\in G\}$, для которых определен хотя бы один член этого равенства. Доказано, что всякая $(\alpha,2)$-дистрибутивная l-группа является (α,α)-дистрибутивной. Редфилд [199, 200] ввел понятие архимедова элемента, т. е. такого элемента a l-группы G, что $a>e$, и для всякого $g\in G$, $e<g<a$, найдется натуральное число n, для которого $g^n\nless a$. Подгруппа $A(G)$ l-группы G, порожденная всеми архимедовыми элементами G, является наибольшей архимедовой выпуклой l-подгруппой G. Если G—l-группа, в которой каждый элемент превышает некоторый архимедов элемент, то G вполне дистрибутивна тогда и только тогда, когда она имеет базис.

Элемент s l-группы G называется сингулярным, если $s\geqslant e$, и для всякого разложения $s=uv$, где $u\geqslant e$, $v\geqslant e$, справедливо $u\wedge v=e$. Решеточно упорядоченные группы, в которых каждый положительный элемент превышает некоторый сингулярный, называются сингулярными. Вольфенштейн [222, 223] охарактеризовал сингулярные полные, сингулярные архимедовы и сингулярные гиперархимедовы (т. е. такие l-группы, каждый l-гомоморфный образ которых архимедов) l-группы. Эта характеризация дана в терминах представлений l-групп непрерывными функциями, определенными на подходящем локально компактном вполне несвязном множестве со значениями в топологическом пополнении $\overline{\mathbf{Z}}$ л. у. группы $\mathbf{Z}$ целых чисел в топологии, индуцированной порядком. Мартинец [163] доказал, что всякая последовательность $a_1>\ldots>a_n>\ldots>e$ элементов l-группы G таких, что $a_n\geqslant a_{n+1}^2$, обрывается тогда и только тогда, когда G является объединением возрастающей последовательности l-идеалов G_α, причем для всякого α $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ порождается своими сингулярными элементами. Если к тому же G гиперархимедова, то всякий л. у. l-гомоморфный образ G цикличен.

Берман [73] доказал, что для всякой l-группы G полугруппа автоморфизмов f решетки G, для которых $f(x)\geqslant x$ для всякого $x\in G$, транзитивна. Франчелло [112] установил, что подрешетка L l-свободного произведения l-групп G_α, порожденная свободными множителями, является свободным произведением (в категории дистрибутивных решеток с выделенным элементом e) решеток G_α.

Системы подгрупп в l-группах. Якубикова в [146] показала, что решетка всех l-подгрупп l-группы G дистрибутивна тогда и только тогда, когда G — абелева л. у. группа ранга 1.

Напомним, что l-группа G называется l-группой с субнормальными скачками (или l-группой с нормальными значениями), если для всякого $g\in G$, $g\neq e$, всякий скачок $C_g<\overline{C}_g$ выпуклых l-подгрупп G, определенный элементом g, субнормален, т. е. C_g—l-идеал $\overline{C}_g$. Факторгруппа $\overline{C}_g/C_g$ в этом случае архимедова л. у. группа. Каждый фактор $\overline{C}_g/C_g$ называется компонентой G. Если каждая компонента l-группы G изоморфна группе целых чисел, то G называется обобщенно дискретной. Мотт [176] доказал, что всякая абелева обобщенно дискретная l-группа аппроксимируется обобщенно дискретными абелевыми л. у. группами. Счетная обобщенно дискретная абелева l-группа изоморфна l-подгруппе лексикографического произведения л. у. групп целых чисел. Конрад и Монтгомери [100] установили, что классы l-групп с компонентами ранга 1 и обобщенно дискретных l-групп замкнуты относительно l-гомоморфизмов, взятия выпуклых l-подгрупп и прямых l-произведений. В архимедовой сингулярной l-группе каждая л. у. подгруппа циклическая. Якубик [136] показал, что обратное утверждение не верно, но если G — полная l-группа и каждая ее л. у. подгруппа циклическая, то G сингулярна. Г. Я. Роткович [57] установил, что в r-полной l-группе все л. у. подгруппы циклические тогда и только тогда, когда в ней нет элементов a таких, что для всякого g, $e<g<a$, разрешимо уравнение $x^2=g$.

Разложение l-групп в декартово l-произведение. Напомним, что декартовым l-произведением $\overline{\prod\limits_{\alpha\in I}}_l G_\alpha$ l-групп G_α, $\alpha\in I$, называется l-группа $\overline{G}$ всех функций $f: I\to\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ таких, что $f(\alpha)\in G_\alpha$, с операциями: $(fg)(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)$, $(f\vee g)(\alpha)=f(\alpha)\vee$

$\vee g(\alpha)$, $(f\wedge g)(\alpha)=f(\alpha)\wedge g(\alpha)$. Прямым l-произведением $\prod_{l\,\alpha\in I} G_\alpha$ называется l-подгруппа $\bar{G}$, состоящая из тех $f\in\bar{G}$, что $f(\alpha)\neq\neq e$ лишь для конечного числа α. Якубик в [133] доказал, что если l-группа G является декартовым l-произведением л. у. групп G_α, $\alpha\in I$, и не более одного сомножителя неархимедово, то всякая ее l-подгруппа является декартовым l-произведением л. у. групп.

Говорят, что l-группа G обладает разделительным свойством, если G выделяется l-прямым сомножителем во всякой l-группе H, содержащей G в качестве l-идеала. Якубик [131] изучал разделительное свойство для архимедовых, полных, сингулярных архимедовых и для ортополных l-групп. Андерсен, Конрад и Кенни [67] рассмотрели связь между разделительным свойством и существенными расширениями l-групп. Решеточно упорядоченная группа H, $G\subseteq H$, называется существенным расширением l-группы G, если для каждой выпуклой l-подгруппы A, $A\neq E$, l-группы H выполнено $G\cap A\neq E$. Существенно замкнутой l-группой называется l-группа, не имеющая собственных существенных расширений. Ранее Конрад доказал, что всякая архимедова l-группа имеет единственное с точностью до l-изоморфизма существенное замыкание. В [67] доказано, что архимедова l-группа G тогда и только тогда обладает разделительным свойством, когда G совпадает с любым своим существенным архимедовым расширением, в котором она l-идеал. Всякая существенно замкнутая архимедова l-группа обладает разделительным свойством.

Напомним, что полярой $X^\perp$ к множеству X l-группы G называется множество всех элементов G, ортогональных к каждому элементу X. Всякая поляра l-группы является ее выпуклой l-подгруппой. Решеточно упорядоченная группа G называется P-группой (SP-группой), если каждая ее поляра (поляра к любому элементу $g\neq e$) является l-прямым сомножителем G. Если H — существенное расширение l-группы G и H — P-группа (SP-группа), причем никакая собственная l-подгруппа H, содержащая G, не является P-группой (SP-группой), то H называется P-оболочкой (SP-оболочкой) G. Напомним, что l-группа G называется O-аппроксимируемой (или представимой), если G изоморфна l-подгруппе декартова l-произведения л. у. групп. Блейер [79] доказал, что l-группа G имеет P (или SP)-оболочку тогда и только тогда, когда G O-аппроксимируема, причем эти оболочки единственны. SP-оболочка архимедовой l-группы архимедова. Сингулярные SP-группы изучал также Якубик [137].

Флейшер [106] рассматривал разложение в декартовы l-произведения l-групп с операторами. Миллер [173] изучал l-прямые сомножители в l-группах. Якубикова [147] рассмотрела l-группы G, в которых каждый l-прямой сомножитель изоморфен G, и l-группы, в которых это свойство нарушается. Конрад [96] доказал, что векторная решетка G счетной размерности над л. у. телом при некоторых предположениях аппроксимируется порядково простыми л. у. пространствами. В [98] рассматривались существенные расширения и автоморфизмы векторных решеток.

Ортогонально полные l-группы. Различные варианты понятия ортогональной полноты рассматривались в нескольких работах. Наиболее естественное определение ортогонально полной l-группы было дано Берно сначала для P-групп, а затем распространено на произвольные l-группы. Приводя изложение к единой терминологии, будем называть l-группу ортополной, если каждое множество положительных попарно ортогональных элементов G имеет в G точную верхнюю грань. Берно [74, 75] доказал, что для всякой l-группы G существуют единственная с точностью до l-изоморфизма ортополная l-группа H и l-изоморфизм $\varphi: G\to H$ такие, что $\varphi(G)$ плотна в H и между $\varphi(G)$ и H нет ортополных l-подгрупп. В этом случае H называется ортопополнением G. Для O-аппроксимируемых l-групп Блейер [80] дал другую конструкцию ортопополнения. Берно [74] доказал, что для архимедовых l-групп операции ортопополнения и дедекиндова пополнения перестановочны. Якубик [132] установил, что если G ортополна и всякое ее счетное ограниченное подмножество имеет в G точную верхнюю грань, то G полна, т. е. всякое ограниченное подмножество G имеет в G точную верхнюю грань. Аналогичный результат получен Г. Я. Ротковичем [54]. В [55] доказано, что в архимедовых l-группах из существования в G точной верхней грани любого ограниченного множества попарно ортогональных положительных элементов следует ортополнота G. Другие связи между понятиями полноты, условной полноты, ортополноты и архимедовости см. в [53, 56, 141].

Полные l-группы. Вложения. Хорошо известно, что всякая полная l-группа архимедова. Подгруппа H l-группы G называется замкнутой, если для любого подмножества M из H такого, что в G существует точная верхняя грань $\mathrm{Sup}_G M$, то существует и $\mathrm{Sup}_H M$, причем $\mathrm{Sup}_G M=\mathrm{Sup}_H M$. Якубикова [148, 149] ввела понятие множества порождающих в полной l-группе G, т. е. такого подмножества X, что замкнутая выпуклая l-подгруппа G, порожденная множеством X, совпадает с G. Ею изучались вопросы существования и свойства свободных двупорожденных объектов в классах полных, полных сингулярных, полных без сингулярных элементов, полных ортополных и полных вполне дистрибутивных l-групп.

В [113] при некоторых предположениях было дано разложение полной l-группы в произведение выпуклых l-подгрупп специального вида.

Якубик [132, 140] обобщил понятие дедекиндова пополнения $D(A)$, известного для архимедовых l-групп A, на случай произвольной l-группы. Им доказано существование во всякой l-группе G наибольшей архимедовой выпуклой l-подгруппы $A(G)$, названной им архимедовым ядром G. Обобщенным дедекиндовым пополнением $D_1(G)$ l-группы G названа такая l-группа, что: 1) G—l-подгруппа $D_1(G)$, 2) $D(A(G))$ — l-идеал $D_1(G)$, 3) если $x \in G$ и X — непустое ограниченное в $xA(G)$ подмножество $xA(G)$, то существует $x_0 \in D_1(G)$ такое, что $x_0 = \mathrm{Sup}X$, 4) для всякого $x_0 \in D_1(G)$ существуют $x \in G$ и $X \subseteq xA(G)$ такие, что $x_0 = \mathrm{Sup}X$. Доказано существование и единственность $D_1(G)$ для произвольной l-группы G. Если $A(G)$ замкнута в G, то $D(A(G))$ замкнуто в $D_1(G)$. Пусть $\mathfrak{X}$ — любой из классов l-групп: архимедовы, O-аппроксимируемые, абелевы делимые. Если $G \in \mathfrak{X}$, то $D_1(G) \in \mathfrak{X}$. В [142] установлено, что $D_1(\Pi_l G_\alpha) \cong \Pi_l D_1(G_\alpha)$. В [141] доказано, что классы SP-групп и условно ортогонально полных l-групп замкнуты относительно взятия обобщенных дедекиндовых пополнений. Изучена связь между высшими степенями дистрибутивности у G и $D_1(G)$. В работах [139, 142] Якубик ввел и изучил понятие максимального дедекиндова пополнения и сопоставил его с понятием обобщенного дедекиндова пополнения. А. В. Колдунов [27] рассмотрел связь между дедекиндовым и O-пополнениями архимедовых l-групп.

Если в l-группе G l-подгруппа H такова, что отображение $X \to X \cap H$ является взаимно однозначным отображением множества замкнутых выпуклых l-подгрупп G на множество замкнутых (в H) выпуклых l-подгрупп H, то G называется α^*-расширением H. G называется α^*-замкнутой, если она не имеет собственных α^*-расширений.

В [119] было доказано существование α^*-замыканий для вполне дистрибутивных, а в [70] — для произвольных l-групп. α^*-замыкания l-групп изучались также в [82]. В. В. Блудов [5] построил пример архимедово полной (т. е. не имеющей собственных линейно упорядоченных существенных расширений) л. у. группы, не все факторы скачков выпуклых подгрупп которой изоморфны аддитивной группе вещественных чисел в естественном порядке. Существенные расширения l-групп изучали также Кенни [151], Лунстра [159]. Конрад [94] рассматривал вложения абелевой l-группы G в группу $V(\Delta)$ всех вещественнозначных функций, определенных на корневой системе Δ и таких, что для всякого $f \in V(\Delta)$ множество тех $\alpha \in \Delta$, что $f(\alpha) \neq 0$, удовлетворяет условию максимальности. Другие типы вложений, близкие к перечисленным, рассматривались в [209, 90, 11, 187].

Амальгамой $\langle G_1, G_2, H, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ называется набор l-групп G_1, G_2, H и l-изоморфизмов $\sigma_i : H \to G_i$ $(i=1, 2)$. Говорят, что класс $\mathfrak{K}$ l-групп обладает свойством амальгамируемости, если для всякой амальгамы $\langle G_1, G_2, H, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, $G_1, G_2 \in \mathfrak{K}$, существует l-группа $K \in \mathfrak{K}$ и l-изоморфизмы $\varphi_i : G_i \to K$ такие, что $\sigma_1\varphi_1 = \sigma_2\varphi_2$. Пирс [188, 190] доказал, что класс всех l-групп не обладает свойством амальгамируемости, и указал несколько классов l-групп, обладающих этим свойством. С помощью вложения амальгам l-групп в l-группу им передоказано, что всякая l-группа вложима в делимую l-группу и в l-группу, в которой каждые два положительных элемента сопряжены. Гласс [116] рассматривал многообразия $\mathfrak{M}$ l-групп со свойством HNN: для всякой l-группы $G \in \mathfrak{M}$ и всякой пары изоморфных l-подгрупп A, B в G найдется l-группа $H \in \mathfrak{M}$, содержащая G как l-подгруппу и такая, что A и B сопряжены в H. Оказалось, что всякая амальгама l-групп из многообразия $\mathfrak{M}$ l-групп со свойством HNN вкладывается в l-группу из $\mathfrak{M}$.

Многообразия l-групп. В соответствии с общей теорией алгебраических систем класс $\mathfrak{L}_l$ всех l-групп является многообразием сигнатуры $l = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$. Многообразием l-групп (l-многообразием) называется любое подмногообразие многообразия $\mathfrak{L}_l$, т. е. всякий класс, состоящий из всех l-групп, удовлетворяющий некоторому набору тождеств сигнатуры l. Хотя отдельные результаты о l-многообразиях появлялись и раньше, интенсивное изучение тождественных соотношений в l-группах началось около 1975 года. Мартинец [160] рассмотрел ряд вопросов общей теории многообразий l-групп, установил простейшие свойства операций на множестве l-многообразий и близких к ним классов l-групп. Берно [76] доказал замкнутость каждого l-многообразия относительно ортопополнений.

Чрезвычайно важную роль в теории l-многообразий играет класс $\mathfrak{B}_l$ всех l-групп с субнормальными скачками. Вольфенштейн [221] доказал, что $\mathfrak{B}_l$ задается в $\mathfrak{L}_l$ тождеством $|x| \cdot |y| \wedge |y^2| \cdot |x^2| = |x| \cdot |y|$. Еще в 1959 году П. Г. Конторович и К. М. Кутыев установили, что класс O-аппроксимируемых l-групп также является l-многообразием и задается тождеством $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$. Также давно было известно, что класс всех l-групп G, у которых всякая выпуклая l-подгруппа есть l-идеал и для любого скачка $A \prec B$ l-идеалов верно $[B, G] \subseteq A$, задается тождеством $|[x, |y|^{-1}]| \vee |y| = |y|$. Такие l-группы называем жесткими l-группами. В. М. Копытов [30] доказал, что всякая локально нильпотентная l-группа является O-аппроксимируемой и, более того, жесткой l-группой. Всякий решеточный порядок локально нильпотентной группы является пересечением линейных порядков.

В [28, 31] приведен метод построения жестких l-групп из упорядоченных алгебр Ли.

Решетка l-многообразий. Множество всех l-многообразий является полной дистрибутивной решеткой относительно естественных операций объединения и пересечения, что непосредственно следует из результатов Г. Биркгоффа 40-х годов. В. М. Копытов и Н. Я. Медведев [34] установили, что решетка всех l-многообразий имеет мощность континиуума и не является вполне дистрибутивной.

В [125] было доказано, что l-многообразие $\mathfrak{V}_l$ l-групп с субнормальными скачками является наибольшим собственным подмногообразием многоообразия всех l-групп. В [208] была указана бесконечная серия l-многообразий $\mathfrak{S}_p$, накрывающих наименьшее l-многообразие $\mathfrak{A}_l$ всех абелевых l-групп. Ни одно из многообразий $\mathfrak{S}_p$ не лежит в многообразии $\mathfrak{O}_l$ O-аппроксимируемых l-групп. Н. Я. Медведев [39] построил еще три l-многообразия $\mathfrak{X}_i$ $(i=1, 2, 3)$, накрывающих многообразие $\mathfrak{A}_l$, и доказал, что всякое l-многообразие $\mathfrak{M}_l$, содержащее хотя бы одну разрешимую неабелеву л. у. группу, содержит одно из многообразий $\mathfrak{X}_i$ $(i=1, 2, 3)$. В [34] доказано, что существует l-многообразие, не порождающееся никакой конечно порожденной l-группой.

Свободные l-группы. Изучение свободных l-групп, начатое в конце 60-х годов, продолжалось в нескольких направлениях. В. М. Копытовым [32] было получено следующее описание свободных l-групп произвольных l-многообразий, аналогичное описанию Конрада — Вайнберга свободных абелевых l-групп и описанию Конрада свободных в $\mathfrak{L}_l$ l-групп. Пусть $\mathfrak{X}_l$ — произвольное l-многообразие, $\mathfrak{K}(\mathfrak{X}_l)$ — класс групп, вложимых как подгруппы в l-группы из $\mathfrak{X}_l$. Оказалось, что $\mathfrak{K}(\mathfrak{X}_l)$ — квазимногообразие групп. Пусть F_0 — свободная группа $\mathfrak{K}(\mathfrak{X}_l)$ с базой $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$. Через F_0^α обозначим группу F_0, снабженную правым порядком P_α, и через N_α — наименьшую выпуклую подгруппу F_0^α такую, что $A_\alpha \in \mathfrak{X}_l$, где A_α — l-группа, порожденная правым регулярным представлением F_0^α автоморфизмами л. у. множества $\mathscr{R}_{N_\alpha}(F_0^\alpha)$ правых смежных классов F_0^α по N_α. Через $\bar{F}$ обозначается декартово l-произведение всех A_α, когда P_α пробегает множество всех правых порядков F_0. Пусть F — l-подгруппа $\bar{F}$, порожденная элементами $\bar{x}_i : \bar{x}_i(\alpha)=R_\alpha(x_i)$, где $R_\alpha(x_i)$ — правый сдвиг множества $\mathscr{R}_{N_\alpha}(F_0^\alpha)$, индуцированный элементом x_i, т. е. $R_\alpha(x_i)(N_\alpha y)=N_\alpha y x_i$. Доказано, что F — свободная в $\mathfrak{X}_l$ l-группа, $\bar{X}=\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\}$ — свободная база F. Если F_0 — свободная группа счетного ранга, то существует правый порядок $\leqslant$ на F_0 такой, что l-подгруппа l-группы автоморфизмов л. у. множества $\langle F_0, \leqslant \rangle$, порожденная правыми сдвигами F_0, является свободной l-группой. Подробно описано аналогичное представление свободных $\mathfrak{V}_l$ и в l-многообразии жестких l-групп.

В [81] доказывается, что свободная абелева l-группа характеристически проста. Свободная l-группа не может содержать несчетного множества попарно ортогональных элементов. Свободные над дистрибутивными решетками абелевы l-группы рассматривались Л. В. Архиповой [2, 3].

Классы кручения. Радикальные классы. Мартинец [162] классом кручения назвал класс $\mathfrak{K}$ l-групп, замкнутый относительно l-гомоморфизмов, взятия выпуклых l-подгрупп и такой,

что во всякой l-группе G содержится выпуклая l-подгруппа $\mathfrak{K}(G)$, принадлежащая $\mathfrak{K}$ и содержащая все выпуклые l-подгруппы G из класса $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{K}(G)$ называется $\mathfrak{K}$-радикалом G. Вопрос о возможности восстановить класс кручения по $\mathfrak{K}$-радикалам положительно решен Якубиком [138]. Множество всех классов кручения образует полную брауэрову решетку (Мартинец [164]). Класс кручения называется полным, если он замкнут относительно расширений. Холланд и Мартинец [128] доказали, что неразложимы в объединение полные и некоторые другие классы кручения.

Холланд [127] доказал, что всякое l-многообразие является классом кручения. Классами кручения являются классы: гиперархимедовых l-групп [161, 95], классы всех декартовых l-произведений л. у. групп, абелевых л. у. групп, л. у. групп целых чисел. Большое количество других классов кручения и соотношения между ними указано в обзоре Конрада [99] и в работах [134, 144, 165].

Класс архимедовых l-групп не замкнут относительно l-гомоморфизмов и поэтому не является классом кручения. Тем не менее, во всякой l-группе G существует архимедово ядро $A(G)$, содержащее все архимедовы выпуклые l-подгруппы G. Свойства $A(G)$ изучались в работах [83, 91, 92, 139, 140, 142, 152].

Алгоритмические вопросы в l-группах. Хотя класс всех l-групп является многообразием сигнатуры l, оказалось, что класс всех групп, которые допускают решеточный порядок, неаксиоматизируем в сигнатуре группы (А. А. Виноградов [14]).

Холланд и Маклери в [129] доказали, что проблема равенства слов в свободной l-группе алгоритмически разрешима. Гласс [115] построил пример рекурсивно представимой l-группы с неразрешимой проблемой равенства слов. Холланд [126] рассматривал вопрос о равенстве единице некоторых типов групповых слов в свободном произведении l-групп. Якубик [143] указал новый способ задания l-групп через формульные операции сигнатуры l. К. М. Кутыев в [35, 36, 37] охарактеризовал l-группы в терминах решетки подполугрупп.

Изометрии в l-группах. В работах [215, 216] введено понятие изометрии f в абелевой l-группе G как отображения G на G такого, что для всех $x, y \in G$ верно $|f(x)-f(y)|=|x-y|$. Было доказано, что для всякой изометрии f абелевой l-группы G найдется изометрический инволютивный автоморфизм T l-группы G такой, что для всякого $x \in G$ выполнено $f(x)=T(x)+f(o)$. В частности, изометрия f сохраняет порядок тогда и только тогда, когда f — трансляция $G : f(x)=x+f(o)$. Через G^* обозначается группа всех взаимно однозначных изометрий G с порядком $f \leqslant g$ тогда и только тогда, когда $f(x) \leqslant g(x)$ для всякого $x \in G$. Всякий l-изоморфизм G на H индуцирует порядковый изоморфизм G^* на H^*, переводящий трансляции в трансляции.

Якубик [145] распространил понятие изометрии на произвольную l-группу G, считая взаимно однозначное отображение f G на G изометрией, если для любых $x, y \in G$ верно $|f(x)f(y)^{-1}| = |x \cdot y^{-1}|$, $f([x \wedge y,\ x \vee y]) = [f(x) \wedge f(y),\ f(x) \vee f(y)]$. Если $f(e) = e$, то f названа e-изометрией. Доказано, что каждая изометрия есть комбинация e-изометрии и трансляции. Для всякой e-изометрии f существует единственное разбиение G в прямое l-произведение $G = A \times B$ такое, что $f(x) = x(A)x(B)^{-1}$, где $x(A)$, $x(B)$ — проекции x на A, B, соответственно.

В [77] теория двойственности распространяется на конечно-порожденные абелевы l-группы и изучаются проективные объекты в категории абелевых l-групп.

§ 3. ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Хорошо известно, что группа $\mathrm{Aut}(X)$ всех автоморфизмов л. у. множества X является l-группой относительно следующего упорядочения: $f \leqslant g$ в $\mathrm{Aut}(X)$ тогда и только тогда, когда $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$. Теорема Холланда (1962 г.) о том, что всякая l-группа имеет точное представление автоморфизмами л. у. множества, явилась мощным инструментом для исследования l-групп и дала толчок к интенсивному изучению групп автоморфизмов л. у. множеств. Основные черты теории групп автоморфизмов были разработаны в конце 60-х, начале 70-х годов и не могут быть полностью освещены в настоящем обзоре. Здесь будут указаны только принципиальные завершающие результаты и их применения к некоторым вопросам теории l-групп.

Большинство понятий теории представлений групп подстановками естественно интерпретируются в группе автоморфизмов л. у. множества. Укажем нужные для дальнейшего некоторые из этих понятий. Стабилизатором $\mathrm{St}_G(a)$ точки a л. у. множества X в группе автоморфизмов $G \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ называется множество тех $g \in G$, что $g(a) = a$. Через $X(a, x)$ для $a, x \in X$ обозначается множество $\{g(x) \mid g \in \mathrm{St}_G(a)\}$. Группа G автоморфизмов л. у. множества X называется периодической, если существует автоморфизм t дедекиндова замыкания $\bar{X}$ л. у. множества X, поэлементно перестановочный с G на X такой, что t не имеет неподвижных точек в $\bar{X}$, и для любого $a \in X$ выполнено $\{y \in X \mid a < y < t(a)\} = X(a, x)$, где x — любой элемент X, $a < x < t(a)$.

O-примитивные группы. Группа G автоморфизмов л. у. множества X называется O-примитивной, если на X не существует нетривиального выпуклого отношения эквивалентности θ такого, что $x \equiv y (\mathrm{mod}\,\theta)$ влечет $g(x) \equiv g(y) (\mathrm{mod}\,\theta)$ для всех $x, y \in X$. O-примитивные группы являются аналогами простых групп и являются теми «кирпичиками», из которых складываются все группы автоморфизмов л. у. множеств.

В [168, 169] завершается цикл работ о транзитивных O-примитивных l-группах автоморфизмов л. у. множеств и доказывается следующая классификационная теорема. Если G — транзитивная O-примитивная l-группа автоморфизмов л. у. множества X, то G является группой одного из следующих типов: 1) G — архимедова л. у. группа; 2) G — O-2-транзитивна на X, т. е. для любых x_1, x_2, y_1, y_2 в X, $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$, существует $g \in G$ такой, что $g(x_1) = x_2$, $g(y_1) = y_2$; 3) G — периодическая группа автоморфизмов X, причем стабилизатор каждой точки a из X в G действует точно на каждом множестве $X(a, x)$ и является O-2-транзитивной группой автоморфизмов $X(a, x)$, обладающей элементом с ограниченным в $X(a, x)$ носителем.

В [72] изучалось соответствие между правыми регулярными представлениями правоупорядоченных групп и регулярными группами автоморфизмов л. у. множеств и применялись полученные результаты к описанию правых регулярных представлений правоупорядоченных групп с субнормальными системами выпуклых подгрупп.

Гласс [114] привел новые примеры простых l-групп, являющихся O-2-транзитивными группами автоморфизмов без элементов с ограниченными носителями. Доказано [167], что всякий l-автоморфизм l-группы $\mathrm{Aut}(X)$ α-множества X является внутренним. Установлено [124], что если $\mathrm{Aut}(X)$ транзитивна, то любой l-автоморфизм $\mathrm{Aut}(X)$ индуцируется внутренним автоморфизмом $\mathrm{Aut}(\bar{X})$. Если $\mathrm{Aut}(X)$ O-примитивна, то всякий l-идеал $\mathrm{Aut}(X)$ характеристичен.

Вполне дистрибутивные l-группы автоморфизмов. В [168] было установлено, что l-подгруппа G l-группы $\mathrm{Aut}(X)$ вполне дистрибутивна тогда и только тогда, когда для любых $g, g_\alpha \in G$, $\alpha \in I$, равенство $g = \underset{\alpha \in I}{\mathrm{Sup}_G}\, g_\alpha$ влечет $g = \underset{\alpha \in I}{\mathrm{Sup}_{\mathrm{Aut}(X)}}\, g_\alpha$. Пусть G — l-подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$, $O(g, x)$ — опорный интервал элемента $g \in G$, $x \in X$: $O(g, x) = \{y \in X \mid g^n(x) \leqslant y \leqslant g^m(x)$ при некоторых целых n, $m\}$. Сжатием $O(g, x)$ называется такой элемент $k_g \in \mathrm{Aut}(X)$, что $k_g(y) = y$ при $y \bar{\in} O(g, x)$, $k_g(y) = g(y)$ при $y \in O(g, x)$. G называется сжатой l-подгруппой $\mathrm{Aut}(X)$, если для всяких $g \in G$, $x \in X$ $k_g \in G$. Рид [198] заметил, что всякая сжатая l-подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$ вполне дистрибутивна и стабилизаторы точек в G замкнуты. В [119] исследовались α^*-расширения вполне дистрибутивных подгрупп $\mathrm{Aut}(X)$.

Интранзитивные l-группы автоморфизмов. Маклери в [170] перенес основные понятия и теоремы теории транзитивных l-групп автоморфизмов на случай интранзитивных l-групп. Введены понятия выпуклого O-блока, изучены факторизации интранзитивных l-групп по отношению конгруэнтности, заданному разбиением X на выпуклые O-блоки. Изучались

O-примитивные интранзитивные l-подгруппы $\mathrm{Aut}(X)$ и их связь с транзитивными O-примитивными группами автоморфизмов л. у. множеств. Развитые методы применены к изучению вполне дистрибутивных l-групп и стабилизаторов точек.

Группы автоморфизмов л. у. множеств изучались также в [123, 16, 49, 50, 51, 52].

§ 4. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ l-ГРУППЫ

***tl*-группы.** Если на l-группе G задана топология, относительно которой групповые и решеточные операции непрерывны, то G называется l-группой. Топология tl-группы G называется выпуклой, если G обладает базой открытых множеств, состоящей из выпуклых подгрупп G. Замкнутые в топологическом смысле подмножества tl-группы будем называть t-замкнутыми.

Болл [71] доказал, что выпуклая l-подгруппа O-аппроксимируемой tl-группы замкнута тогда и только тогда, когда она t-замкнута относительно любой хаусдорфовой топологии G, превращающей G в tl-группу. O-аппроксимируемая l-группа обладает наислабейшей хаусдорфовой топологией тогда и только тогда, когда она вполне дистрибутивна. В [212] изучали свойства решетки всех топологий на l-группе, превращающих G в tl-группу.

Топологические свойства *tl*-групп. Говорят, что tl-группа G имеет бикомпактное происхождение, если в G имеется окрестность единицы с бикомпактным t-замыканием, порождающая G. А. В. Миронов [41—43] доказал, что нильпотентная л. у. tl-группа G бикомпактного происхождения обладает системой $G=H_0\supset H_1\supset\ldots\supset H_n=K\supseteq E$ t-замкнутых выпуклых подгрупп таких, что K — связная компонента единицы G, либо совпадающая с E, либо tl-изоморфная аддитивной группе $\mathbf{R}$ вещественных чисел с обычными порядком и топологией. G для всякого $i=0, 1,\ldots, n$ есть лексикорасширение H_i с помощью л. у. группы G/H_i и каждая H_i/H_{i+1} $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ изоморфна дискретной конечно-порожденной tl-подгруппе $\mathbf{R}$. Если G не линейно упорядочена, то G имеет конечный ортогональный ранг и получена из конечного числа нильпотентных л. у. tl-групп бикомпактного происхождения поочередным применением прямого произведения (в топологическом и tl-групповом смысле) и лексикографического расширения. Для абелевых l-групп аналогичный результат был получен А. Н. Исламовым [22, 23]. В [24] установлено также, что если абелева tl-группа G, с выпуклой топологией и равная $\bigcup_{n=1}^{\infty}U^n$ для любой окрестности U единицы, имеет конечный ортогональный ранг, то G tl-изоморфна подгруппе $\mathbf{R}^n$, а если G связна, то G tl-изоморфна всей $\mathbf{R}^n$. В. Н. Худайбердиев [65] рассматривал связь между топологиями и нормами на l-группах. В. И. Пшеничнов [45—47] рассматривал l-группы с топологией, непрерывной в единице, причем порядок G относительно замкнут. Если G локально бикомпактна, то ее связная компонента изоморфна $\mathbf{R}^n$. Нильпотентная бикомпактного происхождения l-группа с относительно замкнутым порядком является tl-группой. Полученные методы применены к исследованию групп Ли с решеточным порядком.

§ 5. УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ, БЛИЗКИЕ К l-ГРУППАМ

Группы Рисса. Частично упорядоченное множество G называется $\mathrm{TR}(m, n)$-множеством, если оно направленное и для всяких $a_1,\ldots, a_m$, $b_1,\ldots, b_n\in G$ таких, что при всех i, j $a_i<b_j$, найдется $c\in G$, для которого $a_i<c<b_j$ при всех i, j. Группой Рисса называется частично упорядоченная группа со свойством $\mathrm{TR}(2, 2)$. Со всяким порядком Рисса связан согласованный с ним предпорядок $\lessdot$, определяемый соотношением: $a\lessdot b$ тогда и только тогда, когда для всякого $x<a$ выполнено $x<b$ и для всякого $y>b$ выполнено $y>a$. Плотной группой Рисса (TR-группой) называется частично упорядоченная группа G со свойством $\mathrm{TR}(1, 2)$, без псевдоединиц и такая, что $\lessdot$ — левосторонний направленный порядок G. Если G с порядком $\lessdot$ является l-группой, то G называется TRL-группой. TRL-группа G называется андрогенной, если в ней имеются элементы x, y такие, что 1) $x>e$, $y>e$, $x\wedge y=e$; 2) множество $\{x\in G\mid x^+>e, x^->e\}$ непусто. В [158] дается описание TRL-групп, являющихся l-группами с субнормальными скачками. Рахунек [193] ввел и изучил понятия ортогональности и поляры в группах Рисса. Он же в [195] описал группы Рисса конечного ортогонального ранга в терминах л. у. выпуклых подгрупп и выпуклых подгрупп, являющихся антирешетками. Близкие результаты были получены Т. Э. Каминским [25], который построил также пример группы Рисса конечного ортогонального ранга, не являющийся лексикопроизведением л. у. групп. Ружичка [205] рассмотрел понятие поляры в произвольных частично упорядоченных группах. Ван Метер охарактеризовал квази-l-группы G, в которых каждый элемент g представляется в виде ab^{-1}, где a, b квазиортогональны. Всякая квази-l-группа является группой Рисса [218].

Рейли [202] определил понятие гибридного произведения частично упорядоченных групп и охарактеризовал в терминах подпрямых гибридных произведений абелевы TRL-группы. Миллер [171] продолжил и уточнил это описание для андрогенных TRL-групп.

В работах [117, 118, 101—103] описаны согласованные плотные порядки Рисса на l-группе автоморфизмов л. у. множества. Редфилд [201] рассматривал локально компактные TRL-группы. Им доказано, что на l-группе $\langle G, \lessdot\rangle$ тогда и только тогда существует такой частичный порядок $<$, что $\langle G, <, \lhd \rangle$ — неандрогенная локально компактная TRL-группа, когда $\langle G, \lhd \rangle$ является лексикосуммой конечного числа аддитивных л. у. групп вещественных чисел. Миллер [172] рассмотрел группу аддитивных функционалов, определенных на абелевой TRL-группе с открыто интервальной топологией со значениями в $\mathbf{R}$, и нашел условия, при которых эта группа является TRL-группой.

Топологические свойства групп Рисса рассмотрены в [66, 209, 210, 220].

Ретракции l-групп. Пусть G — l-группа, $S(G)$ — полугруппа всех подмножеств G относительно обычного умножения, E — идемпотент в $S(G)$ и $H(E)$ — максимальная подгруппа $S(G)$, содержащая E. В работе [88] доказано, что если E — нормальный идемпотент и дуальный идеал в решетке G, то $H(E)$ — l-группа относительно порядка $Q=\{A\in H(E)\,|\,A\subseteq E\}$ и $T(E)=\{aE\,|\,a\in G\}$ — l-подгруппа $H(E)$, причем $aE\vee bE=(a\vee b)E$. В [89] установлено, что если G — O-аппроксимируемая l-группа, то такова же $H(E)$, если G гиперархимедова, то $H(E)$ архимедова.

Для группы G через $F(G)$ обозначается полугруппа конечных подмножеств G с обычным умножением и с операцией $\vee: A\vee B=A\cup B$. Ретракцией G называется гомоморфизм $F(G)$ в G. Если множество $R(G)$ всех ретракций G непусто, то G называется ретрактабельной.

В [86] указаны условия, при которых группа ретрактабельна, в частности такова всякая l-группа. Для $\sigma\in R(G)$ подгруппа H называется σ-подгруппой, если ограничение σ на $F(H)$ является ретракцией H. Если G — l-группа и $\sigma(A)=\mathrm{Sup}A$ для всякого $A\in F(G)$, то подгруппа H является σ-подгруппой тогда и только тогда, когда H — l-подгруппа G. В [85, 86] изучена решетка σ-подгрупп ретрактабельной группы. В [84] рассмотрены некоторые конкретные примеры ретрактабельных групп, в [211] — ретракции л. у. группы.

Циклически и полуоднородно упорядоченные группы. Множество G называется частично циклически упорядоченным, если на G задано тернарное отношение R со свойствами: 1) $(a,b,c)\in R$ влечет $a\neq b\neq c\neq a$; 2) $(a,b,c)\in R$ влечет $(a,c,b)\bar{\in}R$; 3) $(a,b,c)\in R$ влечет $(b,c,a)\in R$; 4) $(a,b,c)\in R$, $(a,c,d)\in R$ влечет $(a,b,d)\in R$. Если для любых $a,b,c\in G$, $a\neq b\neq c\neq a$ верно одно из соотношений $(a,b,c)\in R$ или $(a,c,b)\in R$, то G называется циклически упорядоченным. С. Д. Желева [20] изучала группы G с циклическим порядком R таким, что для любых $x,a,b,c\in R$ соотношение $(a,b,c)\in R$ влечет $(ax,bx,cx)\in R$. Такие группы названы ею RCO-группами. Всякая правоупорядоченная группа естественно превращается в RCO-группу. Всякая RCO-группа есть факторгруппа подходящей правоупорядоченной группы по некоторой центральной циклической подгруппе. Каждая RCO-группа представляется автоморфизмами подходящего циклически упорядоченного множества.

В. В. Блудов и А. И. Кокорин [7] рассмотрели полуоднородно решеточно упорядоченные группы, т. е. группы, на которых задан решеточный порядок $\leqslant$ такой, что для всякого $g\in G$, $g\neq e$, верно одно из свойств: 1) $a<b$ влечет $ag<bg$, $ga<gb$ для всех $a,b\in G$; 2) $a<b$ влечет $ag>bg$, $ga>gb$ для всех $a,b\in G$. Группа G тогда и только тогда полуоднородно решеточно упорядочена, когда G имеет подгруппу H индекса 2, являющуюся l-группой, причем решеточный порядок H нормален в G. Всякая полуоднородно решеточно упорядоченная группа вкладывается в сплетение l-группы и циклической группы второго порядка. Полуоднородно решеточно упорядоченная группа вкладывается в группу автоморфизмов и антиавтоморфизмов подходящего л. у. множества.

Дальнейшее развитие этого понятия те же авторы сделали в [8]. T-родно упорядоченной группой названа группа G, на которой заданы отношение частичного порядка $\leqslant$ и функция рода $\rho: G\to T$, где T — мультипликативная группа комплексных чисел, равных по модулю 1, такие, что $\rho(xy)=\rho(x)\rho(y)$; считается $\rho(x)<\rho(y)$ в T, если $\arg x<\arg y$; для любых $a,b,x\in G$ неравенство $a<b$ влечет: 1) $ax<bx$, $xa<xb$, если $\rho(a)\leqslant\rho(ax)$ и $\rho(b)<\rho(bx)$ либо $\rho(a)\geqslant\rho(ax)$, $\rho(b)>\rho(bx)$, 2) $ax>bx$ и $xa>xb$, если $\rho(a)<\rho(ax)$ и $\rho(b)>\rho(bx)$ либо $\rho(a)>\rho(ax)$ и $\rho(b)<\rho(bx)$. Для T-родно упорядоченных групп доказаны теоремы, аналогичные утверждениям о полуоднородно упорядоченных группах.

ω-упорядоченные группы. В середине 60-х годов Тодоринов ввел понятие ω-упорядоченной группы, т. е. такой частично упорядоченной группы, в которой для любого элемента $g\neq e$, не являющегося обобщенно периодическим, найдется целое n такое, что $g^n>e$. Свойства таких групп и некоторых их обобщений рассматривались в [58, 60, 61, 63]. Другие варианты определения упорядоченности на группе см. в [17, 44, 174].

§ 6. ПРОДОЛЖЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

А. А. Виноградов [15] указал достаточный признак существования на трехступенно разрешимой группе нетривиально частичного порядка. Мура и Ремтулла [178] доказали, что во всякой группе без кручения из многообразия $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$ всякий максимальный частичный порядок изолирован. Продолжение частичных порядков до интерполяционных порядков рассматривал Тодоринов [59]. Мура и Ремтулла [184] построили примеры упорядочиваемых недоупорядочиваемых групп с новыми интересными свойствами. Продолжение частичных порядков в системах, близких к группам, рассматривалось в работах [192] и [194].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Абагян А. Г.,* Об архимедовости абелевых частично упорядоченных групп. Мат. заметки, 1979, *26*, № 2, 253—261 (РЖМат, 1980, 1А236)
2. *Архипова Л. В.,* Абелевы группы над дистрибутивными структурами. В сб. «Исслед. по теории групп». Красноярск, 1975, 3—14 (РЖМат, 1976, 6А269)
3. —, Строение абелевых групп, порожденных дистрибутивными структурами. Моск. гос. пед. ин-т. М., 1976. 30 с., библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 8 окт. 1976 г., № 3547—76 Деп.) (РЖМат, 1977, 2А208ДЕП.)
4. *Блудов В. В.,* Пример неупорядочиваемой группы со строго изолированной единицей. Алгебра и логика, 1972, *11*, № 6, 619—632 (РЖМат, 1973, 8А209)
5. —, Об архимедово полных группах. В сб. «Алгебра». Иркутск, 1973, *2*, 3—5 (РЖМат, 1975, 1А302)
6. —, Группы, упорядочиваемые единственным способом. Алгебра и логика, 1974, *13*, № 6, 609—634 (РЖМат, 1975, 9А193)
7. —, *Кокорин А. И.,* Полуоднородно решеточно упорядоченные группы. В сб. «Алгебраические системы». Иркутск, 1976, 3—16 (РЖМат, 1978, 3А178)
8. —, —, *T*-родно упорядоченные группы. Сиб. мат. ж., 1979, *20*, № 6, 1226—1232 (РЖМат, 1980, 3А154)
9. —, *Медведев Н. Я.,* О пополнении упорядочиваемых метабелевых групп. Алгебра и логика, 1974, *13*, № 4, 369—373 (РЖМат, 1975, 7А330)
10. *Бущуев В. Ф.,* О топологических дистрибутивных $F\Omega$-группах. В сб. «Соврем. алгебра». Вып. 5. Л., 1976, 10—19 (РЖМат, 1977, 9А271)
11. *Векслер А. И.,* Архимедовы свободные линейные оболочки частично упорядоченных групп. В сб. «Упорядочен. множества и решетки». Вып. 4. Саратов, Саратов. ун-т, 1977, 11—23 (РЖМат, 1978, 3А179)
12. *Виноградов А. А.,* Упорядоченные алгебраические системы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1965. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1967, 83—131 (РЖМат, 1967, 10А187)
13. —, Упорядоченные алгебраические системы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1966. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1968, 91—108 (РЖМат, 1968, 9А196)
14. —, Неаксиоматизируемость решеточно упорядоченных групп. Сиб. мат. ж., 1971, *12*, № 2, 463—464 (РЖМат, 1971, 8А196)
15. —, О возможности частичного упорядочения трехступенно разрешимых групп. Редкол. «Сиб. мат. ж.» Сиб. отд. АН СССР. Новосибирск, 1979. 12 с., библиогр. 1 назв. (Рук. деп. в ВИНИТИ 4 дек. 1979 г., № 4110—79 Деп.) (РЖМат, 1980, 3А157ДЕП.)
16. *Гурвич-Лейнов А. Х., Рабинович Е. Б.,* О представлении группы всех автоморфизмов однородного линейного порядка сплетением *o*-примитивных компонент. Вестн. Белорус. ун-та, 1977, сер. 1, № 1, 22—24 (РЖМат, 1977, 7А224)
17. *Древеняк О.,* Структурно упорядоченные дистибутивные Ω-группы с базисом. Mat. časopis, 1975, *25*, № 1, 11—21 (РЖМат, 1975, 7А442)
18. —, Лексикографическое σ-произведение структурно упорядоченных $F\Omega$-групп. Math. Slovaca (ČSSR), 1980, *30*, № 1, 31—50 (РЖМат, 1980, 8А193)
19. *Ермолов А.,* Расположение подгрупп в линейно упорядоченных группах. В сб. «Алгебр. системы». Иваново, 1978, 14—34 (РЖМат, 1979, 8А175)
20. *Желева С. Д.,* О циклически упорядоченных группах. Сиб. мат. ж., 1976, *17*, № 5, 1046—1051 (РЖМат, 1977, 4А242)
21. —, Представление частично правоупорядоченных групп определяющими неравенствами. Докл. Болг. АН, 1976, *29*, № 11, 1557—1559 (РЖМат, 1977, 8А265)

22. *Исламов А. Н.,* Строение коммутативных топологических структурно упорядоченных групп бикомпактного происхождения и порождающиеся топологические структурно упорядоченные группы. Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та, 1975, вып. 20, 71—73 (РЖМат, 1976, 6А270)
23. —, Строение коммутативных топологических структурно упорядоченных групп бикомпактного происхождения. ЎзССР Фанлар Акад. докл., Докл. АН УзССР, 1975, № 10, 3—4 (РЖМат, 1976, 7А280)
24. —, Порождающиеся топологические структурно упорядоченные группы. ЎзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-мат. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1976, № 4, 19—22 (РЖМат, 1977, 1А217)
25. *Каминский Т. Э.,* Группы Рисса с конечным числом носителей. «Соврем. алгебра». Л., 1978, 64—72 (РЖМат, 1978, 11А229)
26. *Кокорин А. И., Копытов В. М.,* Линейно упорядоченные группы. М., Наука, 1972, 200 с. (РЖМат, 1973, 4А286К)
27. *Колдунов А. В.,* Условия совпадения *k*-пополнения архимедовой *l*-группы с ее *o*-пополнением. В сб. «Соврем. алгебра. Группоиды и их гомоморфизмы». Л., 1980, 50—57 (РЖМат, 1980, 9А242)
28. *Копытов В. М.,* Упорядочение алгебр Ли. Алгебра и логика, 1972, *11*, № 3, 295—325 (РЖМат, 1973, 3А292)
29. —, О линейно упорядоченных разрешимых группах. Алгебра и логика, 1973, *12*, № 6, 655—666 (РЖМат, 1974, 12А189)
30. —, О решеточно упорядоченных локально нильпотентных группах. Алгебра и логика, 1975, *14*, № 4, 407—413 (РЖМат, 1976, 5А235)
31. —, Решеточно упорядоченные алгебры Ли. Сиб. мат. ж., 1977, *18*, № 3, 595—607 (РЖМат, 1977, 12А283)
32. —, Свободные решеточно упорядоченные группы. Алгебра и логика. Новосибирск, 1979, *18*, № 4, 426—441 (РЖМат, 1980, 7А179)
33. —, *Медведев Н. Я.,* О линейно упорядоченных группах, система выпуклых подгрупп которых центральна. Мат. заметки, 1976, *19*, № 1, 85—90 (РЖМат, 1976, 6А265)
34. —, —, О многообразиях решеточно упорядоченных групп. Алгебра и логика, 1977, *16*, № 4, 417—423 (РЖМат, 1978, 9А245)
35. *Кутыев К. М.,* О решеточно упорядоченных группах. Уральск. лесотехн. ин-т. Свердловск, 1977. 5 с., библиогр. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 16 февр. 1978 г., № 556—78 Деп.) (РЖМат, 1978, 6А251 ДЕП.)
36. —, Решеточно подполугрупповой критерий коммутативности *l*-групп. Уральск. лесотехн. ин-т. Свердловск, 1979. 11 с., библиогр. 8 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 31 авг. 1979 г., № 3191—79 Деп.) (РЖМат, 1980, 1А234 ДЕП.)
37. —, Решеточно подполугрупповая характеристика *l*-группы. Уральск. лесотехн. ин-т. Свердловск, 1979. 14 с., библиогр. 9 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 31 авг. 1979 г., № 3192—79 Деп.) (РЖМат, 1980, 1А235 ДЕП.)
38. *Медведев Н. Я.,* Упорядочиваемые группы с конечным числом относительно выпуклых подгрупп. Сиб. мат. ж., 1974, *15*, № 2, 445—449 (РЖМат, 1974, 8А241)
39. —, О решетках многообразий решеточно упорядоченных групп и алгебр Ли. Алгебра и логика, 1977, *16*, № 1, 40—45 (РЖМат, 1977, 11А313)
40. —, О продолжении порядков алгебр Ли. Сиб. мат. ж., 1977, *18*, № 2, 469—471 (РЖМат, 1977, 10А182)
41. *Миронов А. В.,* О строении нильпотентных структурно упорядоченных групп бикомпактного происхождения. ЎзССР Фанлар Акад. докл., Докл. АН УзССР, 1975, № 6, 7—9 (РЖМат, 1976, 1А251)
42. —, Строение нильпотентных топологических структурно упорядоченных групп бикомпактного происхождения. Основные результаты. Докл. АН СССР, 1976, *228*, № 2, 300—302 (РЖМат, 1976, 11А294)

43. —, О нильпотентных структурно упорядоченных группах бикомпактного происхождения. В сб. «Вопр. математики». (Сб. науч. тр. Ташкентск. ун-т, № 490). Ташкент, 1976, 123—128 (РЖМат, 1977, 2А268)
44. *Перлатов Г. Н.*, Некоторые свойства специальных групп. В сб. «Теор. основы гидродинам.». Тула, 1979, 48—54 (РЖМат, 1980, 7А178)
45. *Пшеничнов В. И.*, О строении некоторых структурно упорядоченных групп с топологией. Сб. науч. тр. Ташкент. ун-т, 1978, № 573, 74—76 (РЖМат, 1979, 7А262)
46. —, О конечномерности локально бикомпактных структурно упорядоченных групп с относительно замкнутым n-непрерывным порядком. Сб. науч. тр. Ташкент, ун-т, 1978, № 573, 72—74 (РЖМат, 1979, 7А264)
47. —, О строении структурно упорядоченных групп с топологией. ЎзССР Фанлар Акад. докл., Докл. АН УзССР, 1978, № 12, 9—11 (РЖМат, 1979, 8А176)
48. —, О топологическом аналоге теоремы Конрада для l-групп с базисом. ЎзССР Фанлар Акад. докл., Докл. АН УзССР, 1980, № 2, 6—8 (РЖМат, 1980, 9А238)
49. *Рабинович Е. Б., Фейнберг В. З.*, О группе автоморфизмов D-упорядоченного множества. I. (Редколлегия ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.»). Минск, 1978. 17 с., библиогр. 24 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 28 авг. 1978 г., № 2914—78 Деп.) (РЖМат, 1978, 12А346 ДЕП.)
50. —, —, О группе автоморфизмов D-упорядоченного множества. II. (Редколлегия ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.»). Минск, 1978. 9 с., библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 28 авг. 1978 г., № 2915—78 Деп.) (РЖМат, 1978, 12А347 ДЕП.)
51. —, —, О группе автоморфизмов D-упорядоченного множества. III. (DW-множества с транзитивными группами автоморфизмов). (Редколлегия ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.»). Минск, 1978, 12 с., библиогр. 12 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 28 авг. 1978 г., № 2916—78 Деп.) (РЖМат, 1978, 12А348 ДЕП.)
52. —, —, О группе автоморфизмов D-упорядоченного множества. IV (группа автоморфизмов универсальной однородной T-полуструктуры). (Редколлегия ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.»). Минск, 1978. 12 с., библиогр. 16 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 28 авг. 1978 г., № 2917—78 Деп.) (РЖМат, 1978, 12А349 ДЕП.)
53. *Роткович Г. Я.*, О дизъюнктно полных l-группах. В сб. «XXVIII Герценовские чтения. Математика. Научн. докл.». Л., 1975, 61—62 (РЖМат, 1975, 9А191)
54. —, О σ-полных решеточно упорядоченных группах. Czech. Mat. J., 1975, *25*, № 2, 279—281 (РЖМат, 1976, 1А248)
55. —, О дизъюнктно полных архимедовых полуупорядоченных группах. Czech. Mat. J. (ČSSR), 1977, *27*, № 4, 523—527 (РЖМат, 1978, 7А292)
56. —, О некоторых видах полноты в архимедовых решеточно упорядоченных группах. Функц. анализ, 1977, № 9, 138—143 (РЖМат, 1978, 11А227)
57. —, Решеточно упорядоченные группы с циклическими линейно упорядоченными подгруппами. В сб. «Соврем. алгебра. Группоиды и их гомоморфизмы». Л., 1980, 119—123 (РЖМат, 1980, 9А243)
58. *Тодоринов С. А.*, Сечение на максимални ω-наредби в ω-наредени група ω. Годишн. Висш. учебни завед. Прилож. мат., 1974 (1975), *10*, № 1, 77—83 (РЖМат, 1976, 11А287)
59. —, Группы, все максимальные порядки которых являются интерполяционными порядками. Годишн. Висш. учебни завед. Прилож. мат., 1974 (1975), *10*, № 1, 69—75 (РЖМат, 1976, 11А290)
60. —, *Георгиева П. И.*, Някои свойства на ω-наредените групи. Годишн. Висш. учебни завед. Прилож. мат., 1974 (1975), *10*, № 3, 33—38 (РЖМат, 1976, 11А289)
61. —, —, О группах, допускающих единственный максимальный ω-порядок. Сиб. мат. ж., 1978, *19*, № 2, 406—411 (РЖМат, 1978, 9А246)

62. —, *Димитров З. И.*, Абсолютно изпъкнали подгрупи на насочени групи. Годишн. Висш. учебни завед. Прилож. мат., 1974 (1975), *10*, № 3, 29—32 (РЖМат, 1976, 11А288)
63. —, —, Обобщенно направленные группы. Годишн. Висш. учебни завед. Прилож. мат., 1977 (1978), *13*, № 2, 9—20 (РЖМат, 1980, 5А222)
64. —, *Държанова П. И.*, Нелинейно наредени операторни групи. Годишн. Висш. техн. учебни завед. Мат., 1972—1973 (1974), *8*, № 4, 89—95 (РЖМат, 1975, 6А349)
65. *Худайбердиев В. Н.*, О топологических l-группах. ЎзССР Фанлар Акад. докл., Докл. АН УзССР, 1974, № 11, 6—7 (РЖМат, 1975, 6А367)
66. *Alò R. A.*, Some order and topological considerations for Riesz spaces and l-groups. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol 21. London—New York, 1977, 529—546 (РЖМат, 1978, 6А252)
67. *Andersen M., Conrad P., Kenny O.*, Splitting properties in Archimedean l-groups. J. Austral. Math. Soc., 1977, *23*, № 2, 247—256 (РЖМат, 1978, 5А205)
68. *Ault J. C.*, Extensions of partial right orders in nilpotent groups. J. London Math. Soc., 1970, *2*, № 4, 749—752 (РЖМат, 1972, 1А356)
69. —, Right-ordered locally nilpotent groups. J. London Math. Soc., 1972, *4*, № 4, 662—666 (РЖМат, 1972, 12А226)
70. *Ball R. N.*, Full convex l-subgroups and the existence of α^*-closures of lattice ordered groups. Pacif. J. Math., 1975, *61*, № 1, 7—16 (РЖМат, 1976, 11А285)
71. —, Topological lattice ordered groups. Pacif. J. Math., 1979, *83*, № 1, 1—26 (РЖМат, 1980, 6А260)
72. *Bardwell M. A.*, The o-primitive components of a regular ordered permutation group. Pacif. J. Math., 1979, *84*, № 2, 261—274 (РЖМат, 1980, 9А244)
73. *Berman J.*, Homogeneous lattice and lattice-ordered groups. Colloq. math., 1974, *32*, № 1, 13—24 (РЖМат, 1975, 7А328)
74. *Bernau S. J.*, Lateral and Dedekind completion of Archimedean lattice groups. J. London Math. Soc., 1976, *12*, № 3, 320—322 (РЖМат, 1976, 9А241)
75. —, The lateral completion for an arbitrary lattice-ordered groups. J. Austral. Math. Soc., 1975, *19*, № 3, 263—289 (РЖМат, 1977, 4А237)
76. —, Varieties of lattice groups are closed under $\mathfrak{L}$-completion. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 21. London—New York, 1977, 349—355 (РЖМат, 1978, 5А197)
77. *Beynon W. M.*, Applications of duality in the theory of finitely generated lattice-ordered Abelian groups. Can. J. Math., 1977, *29*, № 2, 243—254 (РЖМат, 1977, 11А274)
78. *Bigard A., Keimel K., Wolfenstein S.*, Groupes et anneaux réticulés. Lect. Notes Math., 1977, *608*, XI, 333 p. (РЖМат, 1978, 5А200)
79. *Bleier R. D.*, The SP-hull of a lattice-ordered group. Can. J. Math., 1974, *26*, № 4, 866—878 (РЖМат, 1975, 3А304)
80. —, The orthocompletion of a lattice-ordered group. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1976, *A79*, № 1, 1—7; Indag. math., 1976, *38*, № 1, 1—7 (РЖМат, 1976, 8А320)
81. —, Free l-groups and vector lattices. J. Austral. Math. Soc., 1976, *19*, № 3, 337—342 (РЖМат, 1977, 4А238)
82. —, *Conrad P.*, α^*-closures of lattice-ordered groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *209*, № 482, 367—387 (РЖМат, 1977, 1А215)
83. *Byrd R. D., Lloyd J. T.*, Kernels in lattice-ordered groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *57*, № 1, 16—18 (РЖМат, 1977, 2А270)
84. —, —, *Mena R. A.*, On the retractability of some one-relator groups. Pacif. J. Math., 1977, *72*, № 2, 351—359 (РЖМат, 1978, 6А231)
85. —, —, —, *Teller J. R.*, The lattice of l-σ-subgroups of a retractable group. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 21. London—New York, 1977, 515—524 (РЖМат, 1978, 5А199)

86. —, —, —, —, The lattice of solid σ-subgroups of a retractable group. Czech. Mat. J., 1978, *28*, № 2, 189—199 (РЖМат, 1978, 12А361)
87. —, —, —, —, Retractable groups. Acta math. Acad. sci. hung., 1977, *29*, № 3-4, 219—233 (РЖМат, 1978, 5А207)
88. —, —, *Stepp J. W.*, Groups of complexes of lattice-ordered group. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 21. London—New York, 1977, 525—528 (РЖМат, 1978, 5А201)
89. —, —, —, Groups of complexes of a representable lattice-ordered group. Glasgow Math. J., 1978, *19*, № 2, 135—139 (РЖМат, 1979, 1А269)
90. *Černák Š.*, Cantor extension of a mixed product of directed groups. Math. Slovaca (ČSSR), 1976, *26*, № 2, 103—114 (РЖМат, 1976, 11А291)
91. —, On some types of maximal *l*-subgroups of a lattice ordered group. Math. Slovaca (ČSSR), 1978, *28*, № 4, 349—359 (РЖМат, 1979, 6А203)
92. —, On the maximal Dedekind completion of a lattice-ordered group. Math. Slovaca (ČSSR), 1979, *29*, № 3, 305—313 (РЖМат, 1980, 3А155)
93. *Chehata C. G., Wiegandt R.*, Radical theory for fully ordered groups. Mathematica (RSR), 1978, *20*, № 2, 143—157 (РЖМат, 1980, 2А225)
94. *Conrad P.*, The topological completion and the linearly compact hull of an abelian *l*-group. Proc. London Math. Soc., 1974, *28*, № 3, 457—482 (РЖМат, 1975, 1А298)
95. —, Epi-archimedean groups. Czech. Mat. J., 1974, *24*, № 2, 192—218 (РЖМат, 1975, 1А299)
96. —, Countable vector lattices. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, *10*, № 3, 371—376 (РЖМат, 1975, 6А344)
97. —, The additive group of an *f*-ring. Can. J. Math., 1974, *26*, № 5, 1157—1168 (РЖМат, 1975, 6А345)
98. —, Changing the scalar multiplication on a vector lattice. J. Austral. Math. Soc., 1975, *20*, № 3, 332—347 (РЖМат, 1976, 3А255)
99. —, Torsion radicals of a lattice-ordered groups. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 21. London—New York, 1977, 479—513 (РЖМат, 1978, 5А198)
100. —, *Montgomery P.*, Lattice ordered groups with rank one components. Czech. Mat. J., 1975, *25*, № 3, 445—453 (РЖМат, 1976, 4А200)
101. *Davis G., Fox C. D.*, Compatible tight Riesz orders on the group of automorphisms of an *o*-2-homogeneous set. Can. J. Math., 1976, *28*, № 5, 1076—1082 (РЖМат, 1977, 5А158)
102. —, —, Compatible tight Riesz orders on the group of automorphisms of an *o*-2-homogeneous set: addendum. Can. J. Math., 1977, *29*, № 3, 664—665 (РЖМат, 1977, 12А234)
103. —, *Loci E.*, Compatible tight Riesz orders on ordered permutation groups. J. Austral. Math. Soc., 1976, *21*, № 3, 317—333 (РЖМат, 1977, 2А269)
104. *Elliott G. A.*, A property of totally ordered Abelian groups. Roy. Soc. Can. Math. Repts, 1979, *1*, № 2, 63—66 (РЖМат, 1980, 3А153)
105. —, On totally ordered groups and $K_0{}^+$. Lect. Notes Math., 1979, *734*, 1—49 (РЖМат, 1980, 5А220)
106. *Fleischer I.*, Über verbandsgeordnete Vektorgruppen mit Operatoren. Math. Nachr., 1976, *72*, 141—144 (РЖМат, 1977, 3А198)
107. *Formanek E.*, Extending partial right orders on nilpotent groups. J. London Math. Soc., 1973, *7*, № 1, 131—134 (РЖМат, 1974, 2А228)
108. *Fox C. D.*, The problem of adjoining roots to ordered groups. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, *11*, № 1, 151—158 (РЖМат, 1975, 6А346)
109. —, An embedding theorem for ordered groups. Bull. Austral. Math. Soc., 1975, *12*, № 3, 321—335 (РЖМат, 1976, 3А253); Addendum. Bull. Austral. Math. Soc., 1977, *17*, № 3, 479—480 (РЖМат, 1978, 12А334)
110. —, Commutators in orderable groups. Communs Algebra, 1975, *3*, № 3, 213—217 (РЖМат, 1976, 4А202)
111. —, Can a Fibonacci group be a unique products group? Bull. Austral. Math. Soc., 1978, *19*, № 3, 475—477 (РЖМат, 1980, 1А211)

112. *Franchello J. D.*, Sublattices of free products of lattice ordered groups. Algebra univers., 1978, *8*, № 1, 101—110 (РЖМат, 1978, 6А254)
113. *Gavalcová T.*, Decomposition of a complete *l*-group into an *M*-product of an *M*-atomic and an *M*-nonatomic *l*-subgroups. Scripta Fac. sci natur UJEP brun. Math., 1974(1975), *4*, № 1, 3—6 (РЖМат, 1976, 7А278)
114. *Glass A. M. W.*, *l*-simple lattice-ordered groups. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1974, *19*, № 2, 133—138 (РЖМат, 1975, 6А347)
115. —, The word problem for lattice ordered groups. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1975, *19*, № 3, 217—219 (РЖМат, 1975, 11А308)
116. —, Results in partially ordered groups. Communs Algebra, 1975, *3*, № 8, 749—761 (РЖМат, 1976, 9А242)
117. —, Compatible tight Riesz orders. Can. J. Math., 1976, *28*, № 1, 186—200 (РЖМат, 1976, 12А299)
118. —, Compatible tight Riesz orders. II. Can. J. Math., 1979, *31*, № 2, 304—307 (РЖМат, 1979, 12А254)
119. —, *Holland W. Ch., McCleary S. H.*, α*-closures of completely distributive lattice ordered groups. Pacif. J. Math., 1975, *59*, № 1, 43—67 (РЖМат, 1976, 6А266)
120. —, *McCleary S. H.*, Some *l*-simple pathological lattice-ordered groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *57*, № 2, 221—226 (РЖМат, 1977, 4А239)
121. *Goffman C.*, Completeness of the real numbers. Math. Mag., 1974, *47*, № 1, 1—8 (РЖМат, 1975, 4А268)
122. *Gurevich Y.*, Expanded theory of ordered Abelian groups. Ann. Math. Log., 1977, *12*, № 2, 193—228 (РЖМат, 1978, 11А226)
123. *Hickman J. L.*, Groups of automorphisms of linearly ordered sets. Bull. Austral. Math. Soc., 1976, *15*, № 1, 13—32 (РЖМат, 1977, 7А221)
124. *Holland W. Ch.*, Outer automorphisms of ordered permutation groups. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1975, *19*, № 4, 331—344 (РЖМат, 1976, 7А277)
125. —, The largest proper variety of lattice-ordered groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *57*, № 1, 25—28 (РЖМат, 1977, 3А200)
126. —, Group equations which hold in lattice-ordered groups. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 21. London—New York, 1977, 365—378 (РЖМат, 1978, 5А202)
127. —, Varieties of *l*-groups are torsion classes. Czech. Mat. J., 1979, *29*, № 1, 11—12 (РЖМат, 1979, 9А179)
128. —, *Martinez J.*, Accessibility of torsion classes. Algebra univers., 1979, *9*, № 2, 199—206 (РЖМат, 1980, 1А232)
129. —, *McCleary S. H.*, Solvability of the word problem in free lattice-ordered-groups. Houston J. Math., 1979, *5*, № 1, 99—105 (РЖМат, 1980, 1А233)
130. *Hollister H. A.*, Nilpotent *l*-groups are representable. Algebra univers., 1978, *8*, № 1, 65—71 (РЖМат, 1978, 6А253)
131. *Jakubík J.*, Splitting property of lattice ordered groups. Czech. Mat. J., 1974, *24*, № 2, 257—269 (РЖМат, 1975, 1А301)
132. —, Conditionally orthogonally complete *l*-groups. Math. Nachr., 1975, *65*, 153—162 (РЖМат, 1975, 11А307)
133. —, Cardinal sums of linearly ordered groups. Czech. Mat. J., 1975, *25*, № 4, 568—575 (РЖМат, 1976, 6А267)
134. —, Products of torsion classes of lattice ordered groups. Czech. Mat. J., 1975, *25*, № 4, 576—585 (РЖМат, 1976, 6А268)
135. —, Unendliche Distributivität in Verbandsgruppen. Scripta Fac. sci. natur. UJEP brun. Math., 1974(1975), *4*, № 1, 31—33 (РЖМат, 1976, 7А279)
136. —, Lattice ordered groups with cyclic linearly ordered subgroups. Čas. pěstov mat., 1976, *101*, № 1, 88—90 (РЖМат, 1976, 9А239)
137. —, Strongly projectable lattice ordered groups. Czech. Mat. J., 1976, *26*, № 4, 642—652 (РЖМат, 1977, 7А230)
138. —, Radical mappings and radical classes of lattice ordered groups. Symp. math. Inst. naz. alta mat. Vol. 21. London—New York, 1977, 451—477 (РЖМат, 1978, 5А203)

139. —, Archimedean kernel of a lattice ordered groups. Czech. Math. J., 1978, *28*, № 1, 140—154 (РЖМат, 1978, 8А266)
140. —, Generalized Dedekind completion of a lattice ordered group. Czech. Mat. J., 1978, *28*, № 2, 294—311 (РЖМат, 1978, 12А359)
141. —, Orthogonal hull of a strongly projectable lattice ordered group. Czech. Math. J., 1978, *28*, № 3, 484—504 (РЖМат, 1979, 3А216)
142. —, Maximal Dedekind completion of an Abelian lattice ordered group. Czech. Mat. J., 1978, *28*, № 4, 611—631 (РЖМат, 1979, 6А202)
143. —, On algebraic operations of a lattice ordered group. Colloq. math., 1979, 4, № 1, 35—44 (РЖМат, 1980, 5А221)
144. —, Generalized lattice identities in lattice ordered groups. Czech. Mat. J., 1980, *30*, № 1, 127—134 (РЖМат, 1980, 9А239)
145. —, Isometries of lattice ordered groups. Czech. Mat. J., 1980, *30*, № 1, 142—152 (РЖМат, 1980, 9А240)
146. *Jakubiková M.*, Distributivität des *l*-Untergruppenverbändes einer Verbandsgruppe. Math. čas., 1975, *25*, № 2, 189—192 (РЖМат, 1975, 12А186)
147. —, Totally inhomogeneous lattice ordered groups. Czech. Mat. J., 1978, *28*, № 4, 594—610 (РЖМат, 1979, 5А180)
148. —, On complete lattice ordered groups with two generators. I. Math. Slovaca (CSSR), 1978, *28*, № 4, 389—406 (РЖМат, 1979, 6А204)
149. —, On complete lattice ordered groups with two generators. II. Math. Slovaca (CSSR), 1979, *29*, № 3, 271—287 (РЖМат, 1980, 4А248)
150. *Keisler M.*, A type of nearest point set in a complete *l*-groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *67*, № 2, 189—197 (РЖМат, 1978, 9А244)
151. *Kenny G. O.*, The completion of an Abelian *l*-group. Can. J. Math., 1975, *27*, № 5, 980—985 (РЖМат, 1976, 8А318)
152. —, The archimedean kernel of a lattice ordered group. Publ. math., 1978, *25*, № 1-2, 53—60 (РЖМат, 1979, 5А182)
153. *Khaleelulla S. M.*, A closed graph theorem for ordered topological Abelian groups. Tamkang J. Math., 1976, *7*, № 1, 31—35 (РЖМат, 1977, 4А241)
154. *Kokorin A. I.*, *Kopytov V. M.*, Fully ordered groups. Transl. from Russ. New York, Chichester, Wiley; Jerusalem—London, Israel Progr. Sci. Transl., 1974, X, 147 pp. (РЖМат, 1975, 6А350 К)
155. *Komori Y.*, Completeness of two theories on ordered Abelian groups and embedding relations. Nagoya Math. J., 1980, *77*, 33—39 (РЖМат, 1980, 8А155)
156. *Koppelberg S.*, Groups cannot be Souslin ordered. Arch. Math., 1977, *29*, № 3, 315—317 (РЖМат, 1978, 5А196)
157. *La Grange R. H.*, *Rhemtulla A. H.*, A remark on the group rings of order preserving permutation groups. Can. Math. Bull., 1968, *11*, № 5, 679—680 (РЖМат, 1969, 12А330)
158. *Loci E. A. S.*, Tight Riesz orders via congruences. Bull. Austral. Math. Soc., 1978, *18*, № 1, 153—154 (РЖМат, 1978, 12А360)
159. *Loonstra F.*, Classes of partially ordered groups. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 21. London—New York, 1977, 335—348 (РЖМат, 1978, 5А206)
160. *Martinez J.*, Varieties of lattice-ordered groups. Math. Z., 1974, *137*, № 4, 265—284 (РЖМат, 1975, 3А305)
161. —, The hyper-archimedean kernel sequence of a lattice-ordered group. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, *10*, № 3, 337—349 (РЖМат, 1975, 5А219)
162. —, Torsion theory for lattice-ordered groups. Chech. Mat. J., 1975, *25*, № 2, 284—299 (РЖМат, 1976, 1А249)
163. —, Doubling chains, singular elements and hyper-$\mathscr{Z}$-*l*-groups. Pacif. J. Math., 1975, *61*, № 2, 503—505 (РЖМат, 1976, 12А298)
164. —, Torsion theory for lattice-ordered groups. Part II. Homogeneous *l*-groups. Czech. Mat. J., 1976, *26*, № 1, 93—100 (РЖМат, 1976, 9А240)
165. —, Pairwise splitting lattice-ordered groups. Czech. Mat. J. (CSSR), 1977, *27*, № 4, 545—551 (РЖМат, 1978, 7А293)

166. —, Nilpotent lattice ordered groups. Algebra univers., 1979, *9*, № 3, 329—338 (РЖМат, 1980, 6А259)
167. *McCleary S. H.*, The lattice-ordered group of automorphisms of α-set. Pacif. J. Math., 1973, *49*, № 2, 417—424 (РЖМат, 1975, 1А295)
168. —, *o*-2-transitive ordered permutation groups. Pacif. J. Math., 1973, *49*, № 2, 425—429 (РЖМат, 1975, 1А296)
169. —, *o*-primitive ordered permutation groups. II. Pacif. J. Math., 1973, *49*, № 2, 431—443 (РЖМат, 1975, 1А297)
170. —, The structure of intransitive ordered permutation groups. Algebra univers., 1976, *6*, № 2, 229—255 (РЖМат, 1977, 9А269)
171. *Miller J. B.*, Subdirect representation of tight Riesz groups by hybrid products. J. reine und angew. Math., 1976, *283-284*, 110—124 (РЖМат, 1976, 12А300)
172. —, The order-dual of a TRL-group. I. J. Austral. Math. Soc., 1978, *A25*, № 2, 129—141 (РЖМат, 1978, 12А362)
173. —, Direct summands in *l*-groups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1978, *A81*, № 3-4, 175—186 (РЖМат, 1979, 5А181)
174. *Močkoř J.*, A realization of *d*-groups. Czech. Mat. J., 1977, *27*, № 2, 296—312 (РЖМат, 1978, 1А205)
175. —, Prüfer *d*-groups. Czech. Math. J., 1978, *28*, № 1, 127—139 (РЖМат, 1978, 11А228)
176. *Mott J. L.*, Generalized discrete *l*-groups. J. Austral. Math. Soc., 1975, *20*, № 3, 281—289 (РЖМат, 1976, 3А254)
177. *Mura R. B.*, Right-ordered polycyclic groups. Can. Math. Bull., 1974, *17*, № 2, 175—178 (РЖМат, 1975, 6А348)
178. —, *Rhemtulla A. H.*, Solvable groups in which every maximal partial order is isolated. Pacif. J. Math., 1974, *51*, № 2, 509—514 (РЖМат, 1975, 3А302)
179. —, —, Solvable R^*-groups. Math. Z., 1975, *142*, № 3, 293—298 (РЖМат, 1975, 12А228)
180. —, —, Ordered solvable groups satisfying the maximal condition of isolated subgroups and groups with finitely many relatively convex subgroups. J. Algebra, 1975, *36*, № 1, 38—45 (РЖМат, 1976, 3А257)
181. —, —, A class of right-orderable groups. Can. J. Math., 1977, *29*, № 3, 648—654 (РЖМат, 1977, 12А233)
182. —, —, Orderable groups. New York—Basel, Marcel Dekker, Inc., 1977, 169 pp. (РЖМат, 1978, 4А188К)
183. —, —, Extensions of orderable groups. Can. Math. Bull., 1977, *20*, № 3, 393—395 (РЖМат, 1978, 5А208)
184. —, —, Subdirect product of O^*-groups. Algebra univers., 1978, *8*, № 1, 23—27 (РЖМат, 1978, 6А255)
185. *Nyikos P. J.*, *Reichel H.-C.*, Topologically orderable groups. Gen. Topol. and Appl., 1975, *5*, № 3, 195—204 (РЖМат, 1976, 2А270)
186. *Pedersen F.*, Spitz in *l*-groups. Czech. Mat. J., 1974, *24*, № 2, 254—256 (РЖМат, 1975, 1А300)
187. —, Epimorphisms in the category of Abelian *l*-groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *53*, № 2, 311—317 (РЖМат, 1976, 11А286)
188. *Pierce K. R.*, Amalgamations of lattice ordered groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, *172*, Oct., 249—260 (РЖМат, 1973, 8А204)
189. —, Extensions of right orders in solvable groups. J. London Math. Soc., 1975, *11*, № 1, 81—87 (РЖМат, 1976, 4А201)
190. —, Amalgamated sums of Abelian *l*-groups. Pacif. J. Math., 1976, *65*, № 1, 167—173 (РЖМат, 1977, 5А160)
191. *Pilz G.*, Characterization of all order relations in direct sums of ordered groups. Collect. math., 1972, *23*, № 2, 85—90 (РЖМат, 1976, 5А236)
192. *Prabhakara Rao K. B.*, Extensions of strict partial orders in *N*-groups. J. Austral. Math. Soc., 1978, *A25*, № 2, 241—249 (РЖМат, 1979, 1А270)
193. *Rachůnek J.*, Prime subgroups of ordered groups. Czech. Mat. J., 1974, *24*, № 4, 541—551 (РЖМат, 1975, 5А220)

194. —, On extensions of ordered groups and rings. Acta math. Acad. sci. hung., 1976, *28*, № 1-2, 37—40 (РЖМат, 1977, 6А179)
195. —, Riesz griups with a finite number of disjoint elements. Czech. Mat. J., 1978, *28*, № 1, 102—107 (РЖМат, 1978, 9А247)
196. —, *Z*-subgroups of ordered groups. Math. Slivaca (ČSSR), 1979, *29*, № 1, 39—41 (РЖМат, 1979, 7А263)
197. —, Extensions of semi-orders of groups. Glas. mat., 1979, ser. 3, *14*, № 1, 17—20 (РЖМат, 1980, 1А237)
198. *Read J. A.*, *L*-sous-groupes compressibies du groupe-réticulé $A(S)$. Sémin. P. Dubreil. Algèbre. Univ. Paris, 1971—1972 (1973), *25*, № 1, 6/1—6/4 (РЖМат, 1976, 8А319)
199. *Redfild R. H.*, Archimedean and basis elements in completely distributive lattice-ordered groups. Pacif. J. Math., 1976, *63*, № 1, 247—253 (РЖМат, 1977, 1А216)
200. —, Bases in completely distributive latice-ordered griups. Mich. Math. J., 1976, *22*, № 4, 301—307 (РЖМат, 1977, 3А199)
201. —, Non-secular, locally compact TRL-groups. Glasgow Math. J., 1980, *21*, № 1, 1—7 (РЖМат, 1980, 6А261)
202. *Reilly N. R.*, Representations of ordered groups with compartible tight Riesz orders. J. Austral. Math. Soc., 1975, *20*, № 3, 307—322 (РЖМат, 1976, 3А256)
203. *Rhemtulla A. H.*, Right-irdered groups. Can. J. Math., 1972, *24*, № 5, 892—895 (РЖМат, 1973, 5А214)
204. —, Residually F_p-groups, for many primes *p*, are orderable. Proc. Amer. Math., Soc., 1973, *41*, № 1, 31—33 (РЖМат, 1974, 7А337)
205. *Růžička J.*, Polars on partially ordered groups. Arch. mat., 1976, *12*, № 1, 53—62 (РЖМат, 1977, 9А272)
206. *Sankaran N.*, Classification of totally ordered Abelian groups. J. Indian Math. Soc., 1965, *29*, № 1-2, 9—29 (РЖМат, 1966, 4А148)
207. *Schneider H.*, The Birkhoff-Egerváry-König theorem for matrices over lattice ordered Abelian groups. Acta math. Acad. sci. hung., 1977, *30*, № 1-2, 91—94 (РЖМат, 1978, 10А154)
208. *Scrimger E. B.*, A large class of small varieties of lattice ordered groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *51*, № 2, 301—306 (РЖМат, 1976, 12А301)
209. *Sherman B. F.*, Cauchy completion of partially ordered groups. J. Austral. Math. Soc., 1974, *18*, № 2, 222—229 (РЖМат, 1975, 7А329)
210. —, Cauchy completion of Abelian tight Riesz griups. J. Austral. Math. Soc., 1975, *19*, № 1, 62—73 (РЖМат, 1975, 9А192)
211. *Sizer W. S.*, Group retractions induced by a total order. Houston J. Math., 1979, *5*, № 2, 267—268 (РЖМат, 1980, 6А258)
212. *Smarda B.*, The lattice of topiligies of topological *l*-groups. Czech. Mat. J., 1976, *26*, № 1, 128—136 (РЖМат, 1976, 9А243)
213. —, Connectivity in *TL*-groups. Arch. mat., 1976, *12*, № 1, 1—7 (РЖМат, 1977, 9А270)
214. *Smith J. E.*, The lattice of *l*-group varieties. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, *257*, № 2, 347—357 (РЖМат, 1980, 9А241)
215. *Swamy K. L. N.*, Isometries in autometrized lattice-ordered groups. II. Math. Semin. Notes Kobe Univ., 1977, *5*, № 2, 211—214 (РЖМат, 1978, 5А204)
216. —, Isometries in autometrized lattice-ordered groups. Algebra univers., 1978, *8*, № 1, 59—64 (РЖМат, 1978, 7А294)
217. *Tofan I.*, *Nistor S.*, Sur les groupes linéarisables. An. şti. Univ. Iaşi., 1977, Sec 1a, *23*, № 1, 17—20 (РЖМат, 1978, 4А189)
218. *Van Meter K. M.*, Les sousgriupes d'un groupe quasi-réticulé. Sémin. P. Dubreil. Algèbre. Univ. Paris, 1971—1972 (1973), *25*, № 1, 4/1—4/13 (РЖМат, 1976, 8А321)

219. *Vogel H.-J.*, Gruppen inäquivalenter *z*-Erweiterungen linear geordneter abelscher Gruppen mit natürlich geordneten Monoiden. Math. Nachr., 1976, *74*, 289—294 (РЖМат, 1977, 9А268)
220. *Wirth A.*, Locally compact tight Riesz groups. J. Austral. Math. Soc., 1975, *19*, № 2, 247—251 (РЖМат, 1976, 2А280)
221. *Wolfenstein S.*, Valeurs normales dans un groupe réticulé. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1968, *44*, № 3, 337—342 (РЖМат, 1969, 2А290)
222. —, Groupes réticulés singuliers. Sémin. P. Dubreil. Algèbre. Univ. Paris, 1971—1972 (1973), *25*, № 1, 5/1—5/9 (РЖМат, 1976, 8А317)
223. —, Représentation d'une classe de groupes archimédiens. J. Algebra, 1976, *42*, № 1, 199—207 (РЖМат, 1977, 5А159)
224. *Ziemke F.*, Ordnungsfähige topologiche Gruppen. Diss. Dokt. Naturwiss. Fak. Math. und Naturwiss. Techn. Univ. Hannover, 1978, 75 S., ill. (РЖМат, 1979, 10А166 Д)

УДК 512.553

МОДУЛИ

В. Т. Марков, А. В. Михалев, Л. А. Скорняков, А. А. Туганбаев

Настоящий обзор составлен по материалам реферативного журнала Математика за 1976—1980 гг. и может рассматриваться как продолжение обзоров [130, 131, 99, 100, 137] по модулям, охватывающих материалы 1961—1962, 1963—1965, 1966—1966, 1969—1971 и 1972—1975 гг. соответственно, а также обзора [97] по кольцам эндоморфизмов. В частности, при упоминании работ, отраженных в этих обзорах, читатель, как правило, отсылается к соответствующей обзорной статье. Ссылки на библиографию из названных обзоров оформляются как [М62:000], [М65:000], [М68:000], [М71:000], [М75:000] и [КЭ:000] соответственно. Например, [М65:121] означает, что имеется в виду работа 121 из обзора М65≡[131], относящегося к 1963—1965 гг. Ссылка типа п. 3.1 означает § 3 п. 1 настоящего обзора. В библиографию, как правило, не включаются сообщения на конференциях или семинарах, если соответствующие результаты уже появились в виде журнальных публикаций. Исключение делается лишь для обзорных докладов. Определение понятий, имеющихся в монографиях Ламбека [М71:59] и Фейса [161], обычно не приводится.

К сожалению, ограниченность объема обзора вынудила авторов оставить вне рассмотрения ряд важных разделов, в которых модули играют существенную роль. В первую очередь это относится к коммутативной алгебре, гомологической алгебре, алгебраической K-теории, теории представлений (групп, ассоциативных алгебр, порядков, алгебр Ли и т. п.), модулей с полилинейными и квадратичными формами, теории категорий. Каждое из этих направлений заслуживает отдельного рассмотрения. Линия размежевания с теорией колец и теорией абелевых групп, которым посвящены специальные обзоры, весьма субъективна. Так, по традиции в настоящий обзор включены гомологическая классификация колец и локализации, в том числе классические кольца частных. Вместе с тем, в обзор вошли далеко не все работы по теории колец, где модули играют служебную роль (например, при определении радикалов). Из теории абелевых групп освещены лишь результаты, представляющие особый интерес для теории модулей (по абелевым группам имеется обзор А. П. Мишиной [96]). Как и в предыдущем обзоре М75=[137], отсутствует большой и важный раздел, касающийся колец эндоморфизмов и структур подмодулей (по этой теме будет опубликован отдельный обзор).

За рассматриваемый период появилось несколько учебников, уделяющих значительное место теории модулей. Здесь можно назвать книги Блиса [270], Каша [696], Кертеса [709], Настасеску [859]. Гомологическим методам в коммутативной алгебре посвящены книги Герамиты и Смолла [505], Рагхавана, Сингха и Сридхарана [974]. Появились русские переводы двухтомной монографии Фейса [161], книги Кона [87] по свободным кольцам, где широко представлена теория модулей. За это время в русском переводе вышел также второй том монографии Фукса [163] по абелевым группам, в котором существенную роль играют гомологические методы. Тесно связаны с теорией модулей книги Беренса [245], Макдональда [811], Ойстайена и Вершорена [935], Васконселоса [1172]. Теория модулей представлена также в материалах ряда конференций и симпозиумов [167, 168, 169, 170, 1010].

Если не оговорено противное, основное кольцо обозначается через R, все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными и имеющими единицу, а модули — левыми и унитарными. Левыми, если не оговорено противное, считаются нётеровость, артиновость и т. п. Слово «идеал» всегда означает двусторонний идеал. Как и в предыдущих обзорах, широко используются следующие обозначения:

R-Mod — категория всех R-модулей;

$\prod A_\alpha$ — произведение (полная прямая сумма) модулей A_α;

$\coprod A_\alpha$ — копроизведение (прямая сумма) модулей A_α;

$A \oplus B$ — прямая сумма модулей A и B;

$S(M)$ — цоколь модуля M;

$Z(M)$ — сингулярный подмодуль модуля M;

$\hat{M}$ — инъективная оболочка модуля M;

$\mathrm{End}_R(M)$ — кольцо эндоморфизмов R-модуля M;

$M_n(R)$ — кольцо $(n \times n)$-матриц над кольцом R;

$\mathcal{L}(M)$ — структура подмодулей модуля M;

$J(R)$ или J — радикал Джекобсона кольца R;

$U(R)$ — группа обратимых элементов кольца R;

Z, **Q**, **R** — кольца целых, рациональных и действительных чисел, соответственно;

$\mathrm{Ann}_R S = \{r \in R \mid rS = 0\}$ — аннулятор подмножества S R-модуля M;

$l(M)$ — длина модуля M.

§ 1. КАТЕГОРИЯ МОДУЛЕЙ

1.1. Общие вопросы. Начнем с результатов, не вошедших в специализированные параграфы. В работах [1081, 1233] рассматривались базисные подмодули модулей над кольцами, близкими к кольцам дискретного нормирования. Теорема плотности для базисных однородных модулей приведена в [796]. В [275] изучаются свойства модулей над коммутативными кольцами главных идеалов. Критерий изоморфизма двух модулей без кручения ранга 2 над коммутативными дедекиндовыми областями приведен в [402]. Сепарабельные модули над коммутативными дедекиндовыми областями изучались в [1194]. В [204] рассматривались следующие условия на модуль M над коммутативным кольцом: (1) каждый счетнопорожденный подмодуль из M содержится в некотором конечно порожденном подмодуле из M; (2) модуль M не представим в виде объединения строго возрастающей счетной цепи подмодулей. Пусть R — групповое кольцо квазициклической группы над кольцом целых p-адических чисел. В [13] для неприводимых R-модулей вводится и изучается некоторый арифметический инвариант. Вамош [1161] исследовал такие модули M над кольцом R, что $\mathrm{Hom}_R(N, M) \neq 0$ для любого ненулевого R-модуля M. С. К. Россошек [119] продолжил исследование корректных модулей, начатые в [М75 : 128].

В ряде работ рассматривались классы модулей, введенных по аналогии с некоторыми классами колец. Первичные и полупервичные модули, первичные левые идеалы изучались в [4, 253, 399, 985]. Регулярные модули (то есть модули, все подмодули которых чисты), исследовались в [351] (см. также [М75: 519, 521, 525, 529]), полурегулярные модули — в [877]. Факториальные модули над коммутативными кольцами, являющиеся аналогом факториальных колец, изучались в [379, 880] (см. также [М75: 1039—1041, М71: 829]). Мехди и Сингх. [816, 817, 1084] исследовали свойства мультипликационных модулей над коммутативными кольцами (модуль M называется мультипликационным, если для любых подмодулей L, N из M, где $L \subseteq N$, найдется такой идеал A, что $L = NA$).

Модуль, все собственные подмодули которого малы, называется пустотелым. Харада [603] продолжил исследования пустотелых модулей, начатые Флери [М75: 537]. В частности, он доказал, что конечно порожденный однородный пустотелый модуль над совершенным справа или слева кольцом обладает локальным кольцом эндоморфизмов. Рангасвами [978] исследовал модули, в которых каждый конечно порожденный подмодуль является малым. Харада [606] изучал немалые модули, то есть модули, не малые в своей инъективной оболочке. Рассмотрено также двойственное понятие. Модули над коммутативными нётеровыми кольцами, каждый собственный подмодуль которых лежит в максимальном подмодуле, рассматривались в [1236].

Тивари и Парамханс привели условие на подмодули $A \subseteq B$ модуля M, эквивалентное тому, что B/A является сингулярным подмодулем модуля M/A. А. В. Андрунакиевич [6] исследовал Σ-радикал модуля, где Σ — специальный класс модулей в смысле [M65: 5], удовлетворяющий дополнительному требованию: если $M \in \Sigma_A$, $0 \neq N \subseteq M$, то $N \in \Sigma_A$. Нита [888] рассматривал модули над коммутативными кольцами, содержащие в качестве подмодулей изоморфные копии любого простого модуля. Остербург [913] привел ряд замечаний о модулях над скрещенным произведением полулокального кольца R и конечной группы автоморфизмов кольца R, индуцирующей группу вполне внешних автоморфизмов на факторкольце $R/J(R)$. Пусть все конечно порожденные левые идеалы кольца R являются свободными модулями единственного ранга, $M \in R$-Mod, $M \cong R^m/R^n$, A — матрица модуля M, $h(M) = m - n$. Если $\mathrm{Hom}_R(M, R) = 0$ и внутренний ранг матрицы A равен $\min(m, n)$, то модуль M называется полным. Полный модуль называется положительным (отрицательным, периодическим), если $h(M) \geqslant 0$ ($h(M) \leqslant 0$, $h(M) = 0$). Кон [366] доказал, что любой конечно порожденный R-модуль является прямой суммой свободного модуля и расширения отрицательного модуля с помощью положительного. Лябут [738] рассматривал свободные алгебры Ли как модули над своими обертывающими алгебрами. Шудо [1073] исследовал свойства комодулей над коалгебрами. В работах [117, 1140] известные результаты об абелевых группах были перенесены на случай модулей над ограниченными наследственными нётеровыми первичными кольцами. Длаб и Рингель [420] придали теоретико-модульное значение свойству суммирования корневой системы диаграммы Дынкина.

1.2. Свойства прямых сумм. Будем говорить, что подмодуль A модуля M козаменяем относительно прямого разложения $M = \coprod_\alpha C_\alpha$, если равенство $M = A \oplus B$ влечет существование таких подмодулей $C'_\alpha \subseteq C_\alpha$, что $M = A \oplus (\coprod_\alpha C'_\alpha)$. Подмодуль A модуля M называется (конечно) козаменяемым в модуле M, если он козаменяем относительно любого (конечного) прямого разложения модуля M. Модуль A называется (конечно) козаменяемым, если он (конечно) козаменяем в любом содержащем его модуле. Николсон [878] доказал, что ${}_RM$ конечно козаменяем тогда и только тогда, когда в кольце $\mathrm{End}_R(M)$ идемпотенты можно поднимать по модулю любого левого (правого) идеала. Там же доказано, что конечная козаменяемость проективного модуля P равносильна тому, что если $P = M_1 + M_2$, то найдется такое прямое разложение $P = P_1 \oplus P_2$, где $M_i \supseteq P_i$, $i = 1, 2$. Козаменяемые модули рассматривались также в [691]. Харада и Ишии [607] передоказали результаты Ямагаты [M75: 1455] о проективных козаменяемых модулях.

Будем говорить, что в прямом разложении $A \oplus B \cong A \oplus C$ на модуль A можно сократить (слабо сократить), если $B \cong C$ (найдется такое натуральное число n, что $B^n \cong C^n$). Свойство (слабого) сокращения рассматривалось в работах [539, 541, 548, 587, 1111]. Гудёрл [539, 541], в частности, доказал, что на модуль A можно слабо сокращать тогда, когда A — конечно порожденный модуль над любым подкольцом конечномерной алгебры над полем рациональных чисел. Гудёрл и Уорфилд [548] рассматривали случай, когда A, B, C — конечно порожденные модули над такой алгеброй R над коммутативным кольцом S, что модуль частных R_M является конечно порожденным S_M-модулем для любого максимального идеала M кольца S. Они доказали, что: (1) если $A \oplus B \cong A \oplus C$, то $B \cong C$; (2) если $A^n \cong B^n$, то $A \cong B$; (3) если A^n изоморфно прямому слагаемому из B^n, то A изоморфно прямому слагаемому из B. В [649] развивается теория сокращений для ряда категорий, которая применяется к модулям над кольцами алгебраических чисел.

Грузон и Йенсен [577] охарактеризовали модули M, для которых существует такой кардинал t, что каждая прямая степень модуля M раскладывается в прямую сумму подмодулей, мощность которых не превосходит t. Ленцинг [762] выяснил, когда для фиксированного модуля M и произвольного циклического модуля F любой гомоморфизм $F \to \prod_t M / \coprod_t M$ поднимается до гомоморфизма $F \to \prod_t M$, где t — произвольный кардинал. Там же исследуется вопрос, когда модуль $\coprod_t M$ выделяется прямым слагаемым в прямой степени $\prod_t M$. Этот результат применяется к случаю, когда $M \cong {}_RR$. В [244] выяснено, когда модуль обладает свободным прямым слагаемым бесконечного ранга. В работах [480, 781, 783, 784] изучаются свойства подпрямых произведений модулей.

Рингель [1013] изучал свойства неразложимых модулей над конечномерными наследственными алгебрами. В [1087] рассматривались конечномерные неразложимые модули над факторалгеброй многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]/(x_1, \ldots, x_n)^2$. Неразложимые модули над групповой алгеброй нециклической абелевой группы экспоненты p над полем характеристики p исследовались в [308]. Неразложимые модули над различными алгебрами бесконечного типа представлений рассматривались в [285, 1192]. Йондруп [687] исследовал вопрос о том, когда левая артиновость кольца R вытекает из конечности числа циклических (конечно порожденных, конечно представимых) R-модулей. Уорфилд [1187] изучал свойства (неразложимых) модулей над коммутативными артиновыми кольцами и кольцами дискретного нормирования. Неразложимые модули над некоторыми квазифробениусовыми кольцами исследовались в [212, 490]. Артиновой алгeброй называется артиново кольцо, являющееся конечно порожденным модулем над своим центром. Неразложимые модули над артиновыми алгебрами изучались в [207, 209, 210, 211, 216, 217, 304, 552, 566, 567]. В книге Гордона и Грина [554] проводится изучение специального класса неразложимых модулей — модулей с сердцевиной. Говорят, что модуль M имеет сердцевину, если пересечение всех немалых подмодулей модуля M не равно нулю. Некоторые свойства неразложимых модулей рассматривал Грин [568, 570]. Циммерман — Хьюзген [1231] доказал, что счетная прямая степень модуля M является прямой суммой модулей с локальными кольцами эндоморфизмов тогда и только тогда, когда любая прямая сумма экземпляров модуля M алгебраически компактна. В [1226, 1230] исследовались другие свойства прямых степеней модулей. В [250] изучаются свойства прямых сумм антисингулярных квазиинъективных модулей над антисингулярным слева кольцом.

В работах [254, 639, 1080] известные результаты о прямых разложениях абелевых групп переносятся на специальные классы модулей. Стентон [1116—1118], Цошингер [1235], Лэди [741] исследуют прямые разложения модулей над коммутативными кольцами дискретного нормирования. Арнольд [203] изучает связи и параллели между теорией решеток над порядками и теорией модулей без кручения конечного ранга над дедекиндовыми подкольцами поля алгебраических чисел, что применяется к прямым разложениям абелевых групп. Прямые разложения модулей весьма специального вида рассматривались в [28, 871]. Ряд свойств высоких подгрупп абелевых групп переносится в [454] на модули над дедекиндовыми кольцами.

1.3. Модули с условиями конечности. Андерсон [190] отметил, что артинов модуль над коммутативным кольцом счетно порожден, а Хартли [608] привел пример артинова модуля над счетным кольцом, не являющегося счетно порожденным. В [608] показано, что групповая алгебра над полем свободной группы счетного ранга обладает артиновым модулем, все подмодули которого вполне упорядочены по включению и порядковый тип этого вполне упорядоченного множества равен первому несчетному ординалу. Снайдер [1100] доказал, что все инъективные оболочки простых модулей над целочисленным групповым кольцом конечно порожденной нильпотентной группы являются артиновыми модулями. Ленаган [757] доказал, что если идеал А нётерова справа кольца R имеет композиционный ряд как левый R-модуль, то A имеет композиционный ряд как правый R-модуль. Гудерл [545] привел примеры как артиновых модулей, так и нётеровых модулей над регулярным первичным кольцом, не обладающих композиционным рядом. В [581] доказано, что неразложимый артинов чисто инъективный модуль обладает локальным кольцом эндоморфизмов. Действие идеала на артиновом модуле рассматривалось в [395]. Робертс [1017]

вводит и изучает для артиновых модулей над коммутативным локальным кольцом размерность, определение которой двойственно обычному определению размерности Крулля, введенному Габриэлем и Рентшлером [M71:924]. Ранее анонсированные результаты об артиновых модулях опубликованы в [225].

Модуль, обладающий существенным артиновым подмодулем, называется конечно вложенным. Шелтер [1054] доказал, что конечно вложенный конечно порожденный модуль над вполне ограниченным слева нётеровым кольцом, все правопримитивные факторкольца которого артиновы, является артиновым модулем. Джин [511] привел пример примитивной справа и слева области главных левых идеалов, над которой существует неартинов модуль, являющийся существенным расширением точного простого модуля. В [376] для характеризации коммутативных когерентных колец и коммутативных колец слабой гомологической размерности один используются такие модули M, что $\hat{M}/M$ — конечно вложенный модуль. Конечно вложенные левые идеалы встречались в [175, 692]. Конечно вложенные модули рассматривались также в [410, 1094, 1214].

Шок [1070] доказал, что если каждый фактормодуль модуля M имеет конечно порожденный цоколь и малый радикал Джекобсона, то M — нётеров модуль. Каракас [695] доказал, что нётеровость модуля над коммутативным кольцом равносильна тому, что все его первичные подмодули конечно порождены. Размерность Крулля модуля M (определяемая как девиация множества всех его подмодулей, частично упорядоченного по включению) обозначается через $K\dim(M)$. Любой нётеров модуль обладает размерностью Крулля. Модуль называется сжимаемым, если он изоморфно вкладывается в любой свой ненулевой подмодуль. Модуль M, обладающий $K\dim(M)$, называется критическим, если $K\dim(N) < K\dim(M)$ для любого его собственного фактормодуля N. В [1185] доказано, что если R — нётерово справа кольцо, целое над своим центром, то все конечно порожденные критические R-модули являются сжимаемыми. С помощью понятия редуцированного ранга для конечно порожденных модулей над нётеровыми слева кольцами и кольцами, обладающими левой размерностью Крулля, в работах [346, 531, 760] передоказываются многие известные результаты о нётеровых слева кольцах и кольцах с размерностью Крулля. Джатегаонкар [666] для доказательства аналога теоремы Крулля о главном идеале для первичных колец с полиномиальным тождеством вводит и использует некоторый аналог длины модуля над вполне ограниченным нётеровым кольцом. Амицур и Смолл [189] доказали, что если D — тело, то все простые модули над кольцом многочленов $D[x_1, \ldots, x_n]$ конечномерны над D.

Пусть A, B — подмодули модуля M, $C = A \cap B$, f — максимальное расширение тождественного отображения 1_C, рассматриваемого как гомоморфизм из A в B, D — область определения гомоморфизма f, $d(X)$ — размерность Голди модуля X. Камилло и Зельманович [318] доказали, что $d(A+B)=d(A)+d(B)-d(D)+d(D/C)$, и привели пример, когда $d(A+B)\neq d(A)+d(B)-d(A\cap B)$. Некоторые приложения формулы Камилло—Зельмановича приведены в [314, 523]. Свойства минимальных систем образующих для модуля изучались в [608, 980]. Системы образующих модулей над полугрупповыми алгебрами исследовались в [608]. Джилмер [507] описал модули над коммутативными кольцами, все собственные подмодули которых являются конечными прямыми суммами простых модулей. Модули, двойственные модулям, конечномерным в смысле Голди, изучались в [1139, 1169, 1170]. Камилло [313] охарактеризовал модули, все фактормодули которых конечномерны по Голди. Сегал [1058] доказал, что конечно порожденный модуль над целочисленным групповым кольцом конечно порожденной почти нильпотентной группы обладает конечным рядом подмодулей, факторы которого имеют нулевой радикал Джекобсона. Свободные модули с условием максимальности для n-порожденных подмодулей при каждом фиксированном числе n изучал Рено [1000]. Конструктивные модули, являющиеся обобщением конечно представимых модулей, рассматривал Рибенбойм [1004]. Коэн [362] доказал, что если M и N — стабильно эквивалентные модули над целочисленным групповым кольцом конечной группы, являющиеся свободными нециклическими абелевыми группами, то их минимальные числа образующих равны. Вполне ограниченное слева нётерово слева кольцо называется левым FBN-кольцом. Уорфилд [1191] обобщил на левые FBN-кольца конечной размерности Крулля теорему Форстера—Суона [M68 : 388] о границе числа образующих конечно порожденного модуля. Он же [1190] изучал соотношения между системой образующих и системой стабильных образующих конечно порожденного модуля. Фейс [451] исследовал понятие рода модуля M, то есть минимального числа, для которого существует эпиморфизм $M^n\to_R R$. Робсон [1018] доказал, что если M — конечно порожденный модуль над нётеровым кольцом, идеалы которого являются предобразующими, причем $K\dim(M)=n$, то M порождается $n+1$ элементами. Ограничения на числа образующих идеалов и модулей над коммутативными кольцами рассматривались в [274, 1177]. Свойства длины фактормодуля $M/J(M)$ конечно порожденного модуля M изучались в [984]. Бичи [236] рассматривал конечно порожденные вполне ограниченные модули Артина—Рисса над нётеровыми кольцами и доказал, что конечно порожденный модуль над FBN-кольцом имеет лишь конечное число максимальных элементов в своем носителе. Свойства конечно порожденных модулей над полунаследственными первичными кольцами изучал Миллер [825], а над различными классами простых нётеровых колец — Стаффорд [1106, 1110, 1112] и Робсон [1019].

Модуль M называется конечно аннулируемым, если он содержит такое конечное подмножество F, что $\mathrm{Ann}_R M=\mathrm{Ann}_R F$. Конечно аннулируемые модули использовались в [243] для характеризации различных классов колец. Теоремы существования для базисных элементов в модулях Штейна доказаны в [302]. Настасеску [860] доказал, что модуль степенных рядов $M[[X]]$ над кольцом $R[[X]]$ обладает размерностью Крулля тогда и только тогда, когда M — нётеров модуль. Копримарное разложение артинова модуля рассматривалось в [830]. Примарные разложения различных классов модулей рассматривались в [45, 255, 550, 891]. Терциарные разложения конечно порожденного модуля над нётеровым кольцом изучались в [751]. Настасеску [864] исследовал нётеровы и артиновы модули относительно аддитивной топологии на основном кольце. Он же [861] рассматривал артиновы объекты в категориях Гротендика. Изоморфизм пар конечно порожденных модулей над коммутативными областями главных идеалов исследовался в [61]. Андерсон [191] изучал такие конечно порожденные модули M над коммутативным нётеровым кольцом, что $N+(\bigcap_\alpha N_\alpha)=\bigcap_\alpha(N+N_\alpha)$ для любых подмодулей N и N_α модуля M. Рангасвами [978] исследовал модули с условием минимальности для немалых подмодулей. Модули, обладающие размерностями Крулля $K\dim$ и Габриэля $G\dim$ рассматривались в работах [184, 277, 278, 279, 340, 522, 595, 596, 597, 727, 730, 749, 756, 758, 761, 1044, 1145]. Ленаган [761] доказал, что если модуль M представлен в виде объединения трансфинитной последовательности таких модулей M_α, что $K\dim(M_\alpha)\leqslant t$ для всех α и фиксированного трансфинитного числа t, то размерность Крулля модуля M существует и не превосходит t. Он же [758] изучал связь между $K\dim R$ и $K\dim R/A$, где A — обратимый идеал нётерова слева кольца R. Ряд результатов о кольцах и модулях, обладающих размерностью Крулля, получил Лемонье [756]. В частности, он доказал, что модуль с размерностью Крулля над V-кольцом является нётеровым. Кроме того, если R — коммутативное кольцо, все факторкольца которого конечномерны в смысле Голди, то существование $K\dim R$ равносильно тому, что кольцо R удовлетворяет условию максимальности для простых идеалов и каждый идеал кольца R содержит произведение простых идеалов. Размерность Крулля модулей над нётеровыми слева кольцами, целыми над своими центрами, изучали Шамари и Удри [340]. Бойль и Феллер [278] исследовали такие модули над нётеровым слева кольцом, у которых размерности Крулля всех ненулевых конечно порожденных подмодулей совпадают. Бойль [277] рассматривала такие модули M, что $K\dim M/N<K\dim M$ для любого существенного подмодуля N. Размерность Габриэля идеализаторов и подидеализаторов вычислялась в [597, 727, 730]. Лански [749] использовал некате-

горный подход к размерности Габриэля для рассмотрения размерности Габриэля над кольцами с инволюцией. Голан [522] рассматривает в своей книге функции квазиразмерности, охватывающие размерность Габриэля.

1.4. Проективные и плоские модули. О свойствах проективных и плоских модулей, связанных с локализациями и кручениями см. § 3. Результаты, тесно связанные с алгебраической K-теорией, почти не рассматриваются.

Ниже в этом абзаце через R обозначено кольцо многочленов $D[x_1, \ldots, x_n]$ от n независимых переменных с коэффициентами из кольца D, через P обозначается конечно порожденный проективный R-модуль. Уже в предыдущем обзоре [137] упоминалось о том, что А. А. Суслин [М75 : 146] и Квиллен [М75 : 1128] независимо решили проблему Серра положительно, доказав, что если D — поле, то P — свободный модуль. Проблеме Серра и ее обобщениям был посвящен ряд работ. После препринта Квиллена [М75 : 1128] вышла его статья [971], в которой доказано, что если D — коммутативная область главных идеалов, то P — свободный модуль. Полному изложению результатов А. А. Суслина и Квиллена посвящена книга [745], которая содержит также ряд открытых вопросов по этой тематике. Частичные результаты по проблеме Серра содержатся в [1025, 1026]. А. А. Суслин [140] доказал, что если D — тело, конечномерное над своим центром, а ранг модуля P больше единицы, то модуль P свободен. Стаффорд [1115] доказал, что если D — тело с бесконечным центром, то модуль P либо свободен, либо изоморфен левому идеалу кольца R. Проблема Серра в некоммутативном случае рассматривается также в [724]. Проблема Серра решается положительно для следующих случаев: (1) D — коммутативная одномерная область Безу [791]; (2) D — коммутативная область Безу, все простые идеалы которой имеют конечную высоту [763]; (3) D — кольцо формальных степенных рядов от конечного числа переменных над полем [779]; (4) D — аффинное нормальное подкольцо кольца многочленов от двух переменных над полем, порожденное мономами [194]. В работах [287, 778, 1028] для некоторых коммутативных колец D доказано, что модуль P является расширенным с некоторого конечно порожденного проективного D-модуля Q. Канг Минг-Чанг [694] доказал, что если D — коммутативное нётерово кольцо с конечной нормализацией и либо $1/2 \in D$, либо ранг P не равен 2, то модуль P изоморфен прямой сумме свободного R-модуля и проективного R-модуля ранга 1. Андерсон [192] доказал, что если A — аффинное подкольцо кольца многочленов от двух переменных над полем, то любой конечно порожденный проективный A-модуль является прямой суммой свободного модуля и проективного модуля ранга 2. В работах [731, 1026] приводятся результаты, касающиеся дополнения унимодулярной строки до обратимой матрицы. А. А. Суслин [140] доказал, что если A — аффинная алгебра размерности d над алгебраически замкнутым полем, то каждый конечно порожденный проективный A-модуль, ранг которого не меньше d, свободен. Проблеме сокращения для проективных модулей посвящены статьи А. А. Суслина [1125] и Стаффорда [1108]. Конечно порожденный модуль ${}_RM$ называется стабильно свободным модулем типа n, если $M \oplus R^n$ — свободный модуль. Лэм [744] доказал, что прямая сумма достаточно большого числа стабильно свободных модулей типа n является свободным модулем.

Свойства стабильного ранга кольца многочленов от конечного числа переменных над коммутативным кольцом изучал Габел [498]. Стаффорд [1107] доказал, что любой проективный модуль над алгеброй Вейля $A_n(D)$ стабильно свободен. А. А. Суслин [101, стр. 97] привел конструкцию, позволяющую по паре (M, f), где f — нильпотентный эндоморфизм конечно порожденного модуля M над коммутативным нётеровым локальным кольцом R, построить конечно порожденный проективный $R[x]$-модуль $P(M, f)$, ранг которого равен размерности ядра эндоморфизма $\mathrm{Tor}_1(f, K)$, где K — поле вычетов кольца R. Пусть R — нётерово коммутативное кольцо, $A = R[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}, y_1, \ldots, y_m]$, P — конечно порожденный проективный A-модуль. Суон [1128] при некоторых дополнительных предположениях доказал существование такого проективного R-модуля Q, что $P \cong A \oplus {}_RQ$. Картер [331] привел примеры проективных модулей над целочисленными групповыми кольцами групп $SL_n(\mathbf{Z})$, $GL_n(\mathbf{Z})$, не являющихся стабильно свободными. Берридж и Данвуди [248] построили примеры несвободных проективных модулей над целочисленными групповыми кольцами групп без кручения. Михлер [822, 823] доказал, что если F — поле характеристики $p > 3$, G — конечная группа, не являющаяся p-разрешимой, M — неразложимый проективный непростой FG-модуль F-размерности p, то M обладает композиционным рядом длины 3 и цоколь модуля M одномерен. Проективные и свободные модули над групповыми кольцами рассматривались также в [228, 320—322, 356, 582, 723].

Стаффорд [1110] доказал, что любой проективный модуль над алгеброй Вейля $A_n(K)$, где K — поле характеристики нуль, либо свободен, либо изоморфен левому идеалу. Леви [768] изучал строение конечно порожденных проективных модулей над коммутативными нётеровыми одномерными по Круллю областями. Фуллер и Шаттерс [497] и Брокман [289, 290] выяснили строение проективных модулей над полулокальным p-связным кольцом. Фуллер и Шаттерс [497] доказали также, что над полулокальным кольцом существует лишь конечное число классов изоморфных проективных неразложимых конечно порожденных модулей. Паримала и Сридхаран [949, 950] исследовали проективные модули над обобщенными алгебрами кватернионов. Проективные и плоские модули над фробениусовыми алгебрами и алгеброй Стинрода рассматривали Лин и Марголис [776]. Проективные модули над неассоциативными кольцами изучал Висбауэр [1202, 1207]. Проективные идеалы колец непрерывных функций исследовали Е. М. Вечтомов [27] и Брукшер [291, 292]. Бек и Тросборг [244] привели условия на «большой» проективный модуль, эквивалентные его свободе. Условия конечной порожденности проективного модуля, являющегося конечно порожденным по модулю радикала Джекобсона кольца, рассматривали И. И. Сахаев [124], Йондруп [683], Валетт [1160]. Фрелих [473] изучал локально свободные модули над порядками в конечномерной полупростой алгебре над полем алгебраических чисел. Уорфилд [1188], сопоставляя каждой матрице с коэффициентами из некоторого кольца коядро гомоморфизма свободных модулей, задаваемого этой матрицей, исследовал вопрос, когда это коядро определяет матрицу с точностью до эквивалентности. В [336] исследовались свободные и проективные градуированные модули. Рефлексивные модули изучались в [585, 675, 1057, 1155]. Масаике [800] привел условия на кольцо R с самоинъективным слева максимальным левым кольцом частных Q, эквивалентные тому, что каждый конечно порожденный R-модуль M, изоморфный подмодулю прямого произведения экземпляров модуля ${}_R\hat{R}$, вложим в свободный R-модуль. Брунс и Веттер [303] доказали, что если M — конечно порожденный модуль без кручения над коммутативным нётеровым кольцом R, причем M_A — свободный R_A-модуль для каждого простого идеала A с условием $\mathrm{grade}(A)\leqslant 1$, то модуль M содержит такой свободный подмодуль F, что M/F изоморфен идеалу из R. Проективные модули, все прямые степени которых проективны, изучали Циммерман [1227] и Джереми [673]. Николсон [876] и Янсен [664] рассматривали проективные модули, некоторые фактормодули которых обладают проективными покрытиями. Проективные модули, все простые фактормодули которых инъективны, исследовались в [790]. Доминантные проективные модули изучали Като [697] и Кавада [699, 700]. Связь между свойствами бесконечно порожденного проективного модуля и его кольца эндоморфизмов изучал Макдональд [812]. Пусть P — конечно порожденный проективный модуль над кольцом A, $B=\mathrm{End}_A P$, T — идеал следа модуля P. Миллер [826] дал характеризации следующих условий: (1) P_B — проективный модуль; (2) P_B — плоский модуль; (3) T_A — проективный модуль, (4) T_A — плоский модуль; (5) функтор $\mathrm{Hom}_B(P, -)$ перестановочен с прямыми суммами. Хилл [623] изучал модули, все подмодули которых проективны. Ландрок [747] вычислял длину Лоэва проективных модулей над симметрическими конечномерными алгебрами над полем. В книге Дикса [406] приведено замкнутое в себе доказательство того, что проективность фундаментального идеала группового кольца RG, где R — ненулевое кольцо, равносильна тому, что G — фундаментальная группа

графа конечных групп, порядки которых обратимы в кольце R. Проективные модули дифференциалов над алгебрами рассматривались в [305]. Рамамурты [975] изучал модули с проективными модулями характеров. Суон [1127] привел более простое доказательство того, что векторные расслоения над конечным комплексом могут быть представлены как проективные модули над нётеровым кольцом. Проективные и свободные модули над специальными классами коммутативных колец рассматривались в [226, 676, 854]. Грюнберг и Роггенкамп [575] изучали проективность в полных аддитивных подкатегориях в R-Mod, замкнутых относительно изоморфизмов и конечных прямых сумм. Леваро [766] рассматривал структурные пучки на спектре коммутативного кольца, являющиеся проективными модулями. Николя [882] обобщает на случай модулей некоторые известные результаты о свободных абелевых группах. Свободные и проективные резольвенты модулей над коммутативными кольцами изучались в [300, 1121, 1173].

Переходя к обобщениям проективных модулей, начнем с работ по квазипроективным модулям. Модуль M называется проективным относительно модуля N или N-проективным модулем, если для любого эпиморфизма $h:N\to\bar{N}$ и произвольного гомоморфизма $\bar{f}:M\to\bar{M}$ найдется такой гомоморфизм $f:M\to N$, что $\bar{f}=hf$. Квазипроективным модулем называется M-проективный модуль M. А. А. Туганбаев [149, 150] описал строение квазипроективных модулей соответственно над ограниченными дедекиндовыми первичными кольцами и над ограниченными наследственными нётеровыми первичными кольцами. Частичному решению этих задач были посвящены работы Сингха [M75 : 1295, M75 : 1296, 1079], Сингха и Талвара [1086]. С. Т. Главацкий [36] изучал топологические квазипроективные модули. Хилл [622] описал полулокальные кольца, над которыми квазипроективен каждый подмодуль квазипроективного модуля. Харада [600] теоретико-кольцевыми методами передоказал свой результат [M75 : 673] о прямых разложениях квазипроективных модулей над полусовершенными и совершенными кольцами. Квазипроективные модули над полулокальными кольцами затрагивал Ахсан [179, 180]. Более широкий класс модулей по сравнению с квазипроективными модулями образует класс малопроективных модулей. Модуль M называется малопроективным, если для любого эпиморфизма $h:M\to\bar{M}$ и произвольного $\bar{f}\in\mathrm{End}\bar{M}$ найдется такой $f\in\mathrm{End}M$, что $hf=\bar{f}h$. А. А. Туганбаев [143, 152] описал строение малопроективных модулей соответственно над ограниченными дедекиндовыми первичными кольцами и над ограниченными наследственными нётеровыми первичными кольцами. Он же доказал, что классы квазипроективных и малопроективных модулей над совершенным слева кольцом совпадают [145, 151], и использовал малопроективные модули для характеризаций наследственных, полунаследственных, совершенных, артиновых, полупримитивных и вполне приводимых колец [151]. Циммерман — Хьюзген [1229] изучал локально проективные модули, то есть такие модули M, что для любого эпиморфизма $h: A \to B$, произвольного $g: M \to B$ и любого конечно порожденного подмодуля F из M найдется такой гомоморфизм $f: M \to A$, что $(g-hf)F=0$. В частности, любой локально проективный модуль является плоским модулем и изоморфен чистому подмодулю прямой степени основного кольца, чистые подмодули локально проективных модулей локально проективны; кроме того, описаны локально проективные модули над полунаследственными кольцами. Модули, проективные относительно эпиморфизмов $h: A \to B$, где B — конечно порожденный модуль, рассматривал Хиремат [630]. О других обобщениях проективных модулей см. [253, 258, 260, 269, 616, 678, 680, 721, 1149, 1167].

Переходя к плоским модулям, отметим, что о применении плоских модулей к задачам по гомологической классификации колец см. § 2. Связь плоских модулей с кольцами частных отражена в § 3. Кларк [361] доказал, что если M — плоский модуль над нётеровым слева и справа кольцом, то найдется такой свободный модуль F, что $M \oplus F$ — фильтрованное объединение свободных модулей. Дикс и Зонтаг [408] доказали, что плоские модули над некоторыми областями (областями Сильвестра) являются локально свободными модулями. Областью Сильвестра является, например, свободная алгебра над коммутативной областью главных идеалов. Е. Г. Скляренко [128] дал характеризацию плоских модулей в терминах гомоморфизмов двойственности. Он же [129] изучал модули, плоские относительно собственных классов в смысле Буксбаума — Маклейна. Модули, плоские относительно кручения, рассматривали Блэнд [268], Миллер и Тепли [827]. Жираскова [679] исследовала модули, плоские относительно предрадикала. Строго плоские модули изучал Рангасвами [979]. Плоские идеалы коммутативных колец рассматривали Доббс [423], Глаз и Васконселос [513], Салли и Васконселос [1042]. Условиям проективности плоских модулей посвящены работы Йондрупа [685] и Раша [1033]. О других работах по этому вопросу см. п. 2.7. Нобиле [890] доказал, что если $f: A \to B$ — гомоморфизм коммутативных колец, B — нётерово кольцо, N — такой идеал кольца B, что $N \subseteq J(B)$ и все индуцированные гомоморфизмы $f_n: A \to B/N^n$ являются плоскими, то f — плоский гомоморфизм. Новое доказательство известного результата, что плоский гомоморфизм коммутативных колец обладает свойством спуска, предложили Доббс и Папик [425]. О других работах по плоским гомоморфизмам колец см. п. 3.6. Леди [739] изучал свойства прямых сумм плоских подмодулей поля частных нётеровой коммутативной локально факториальной области. Эванс [436] нашел условия, при которых модули без кручения в смысле Хаттори образуют класс модулей без кручения относительно некоторой наследственной теории кручения, соответствующей совершенной топологии.

1.5. Инъективные модули (и близкие к ним классы модулей). Относительно использования инъективных модулей в гомологической классификации колец — см. § 2, в локализациях — см. § 4. Те или иные свойства инъективности в абелевых группах и кольца эндоморфизмов инъективных модулей отражены лишь частично.

Матлис [803] опубликовал обзорную статью о свойствах инъективных и делимых модулей над коммутативными кольцами. Пусть E — инъективная оболочка простого модуля над кольцом R. В случае нётерова PI-кольца R артиновость модуля E доказал Джатегаонкар [667], а в случае целочисленного группового кольца конечно порожденной нильпотентной группы — Снайдер [1100]. Инъективные модули над групповыми кольцами рассматривали Браун и Лоуренс [297], Гурсо и Валетт [563], Хартли [609], Муссон [855]. Гудерл и Бойль [546] развили для антисингулярных инъективных модулей теорию типов, аналогичную теории типов бэровского кольца, и теорию функций размерности, аналогичную теории Лумиса и Неймана для регулярных колец. Эти средства они применили для изучения самоинъективных регулярных колец. Модуль называется вполне разложимым, если он является прямой суммой неразложимых инъективных модулей. Пусть N — прямое слагаемое вполне разложимого модуля M. Остается нерешенной проблема Матлиса [M75 : 943]: будет ли N вполне разложимым модулем? Ю Чи Минг [1222] дал положительный ответ в случае, когда N содержит сингулярный подмодуль $Z(M)$ модуля M. Кутами и Оширо [736] доказали, что если $Z(N)=0$, то N — квазиинъективный модуль. Кроме того, выяснено, когда антисингулярный модуль, содержащий инъективные оболочки своих циклических подмодулей, является вполне разложимым модулем. Подпроизведения инъективных модулей исследуются в работах Фукса и Лунстры [480], [781]. Миллер и Тёрнидж [829] изучали инъективные модули, все конечно вложенные фактормодули которых инъективны. Чоудхури и Тевари [355] использовали для характеризации левых V-колец такие модули M, что M и $\hat{M}/M$ — коциклические модули. Неразложимые инъективные модули над цепными кольцами рассматривали Ру [1030] и Тёрнер [1152, 1153]. Хаугер [614] изучал инъективные кообразующие над кольцами линейных дифференциальных операторов. Роггенкамп [1020] классифицировал инъективные модули над горенштейновыми порядками (в частности, над целочисленными групповыми кольцами конечных групп). Инъективные модули над фробениусовыми алгебрами и над алгеброй Стинрода рассматривали Лин и Марголис [776], над обертывающими алгебрами — Баллар [223], над неассоциативными алгебрами — Висбауэр [1202]. Фулберт и Кузманович [485] доказали, что инъективный модуль над расщепляющимся подпрямым произведением колец A и B является прямой суммой инъективного A-модуля и инъективного B-модуля. Камилло [315] изучал коммутативные кольца со свойством $\mathrm{Hom}(M, N)=0$, где M, N — инъективные оболочки неизоморфных простых модулей. Фоксби [471] исследовал поведение инъективности при замене коммутативных нётеровых колец с помощью плоского гомоморфизма. Инъективные градуированные модули над коммутативными градуированными кольцами рассматривали Гото и Ватанабе [555, 556]. Инъективные модули над специальными классами коммутативных колец изучаются в работах Настасеску [862] и Харуи [610—612]. Е. М. Вечтомов [26, 27] описал инъективные и чистые идеалы колец непрерывных функций. Шарп [1063] доказал, что каждый инъективный модуль над коммутативным нётеровым кольцом является прямой суммой таких модулей, где умножение на любой элемент кольца является либо эпиморфизмом, либо нильпотентным эндоморфизмом. Вамош [1164] доказал, что инъективная оболочка E прямой суммы всех простых модулей над полулокальным нётеровым PI-кольцом индуцирует двойственность между $J(R)$-адическим пополнением $\bar{R}$ кольца R и кольцом $T=\mathrm{End}_R E$. Кроме того, модуль E_T — артинов. Инъективные левые идеалы нётеровых колец изучали Чаттерс, Хаджарнавис и Нортон [348]. Свойства простых инъективных модулей исследовал Андерсон [195]. Кошон [333] нашел условия, при которых все неразложимые инъективные модули над нётеровым слева кольцом определяются ассоциированными первичными идеалами. О кольцах, над которыми все квазиинъективные модули инъективны, см. § 2 и работы И. Д. Буну [23], Бойль и Гудёрл [280], Фейса [442]. Перейдем к классам модулей, близких к инъективным. Пусть A и B — квазиинъективные модули. Гудёрл [538] доказал, что если модуль A^n изоморфен модулю B^n (прямому слагаемому модуля B^n), то модуль A изоморфен модулю B (прямому слагаемому модуля B). Свойства прямых сумм антисингулярных квазиинъективных модулей над антисингулярными слева кольцами изучал Берри [250]. Бойль [276] охарактеризовала однородные квазиинъективные модули, не содержащие собственных квазиинъективных подмодулей. Хилл [622] описал полулокальные кольца, над которыми фактормодули квазиинъективных модулей квазиинъективны. Аламелу [181] изучал квазиинъективные модули над коммутативными нётеровыми кольцами. Квазиинъективным модулям посвящены работы Ахсана [173, 177—180]. С. Т. Главацкий [35, 36] изучал топологические квазиинъективные модули. Модуль называется малоинъективным, если все эндоморфизмы его подмодулей продолжаются на весь модуль. А. А. Туганбаев доказал, что: (1) малоинъективный модуль, обладающий размерностью Габриэля и существенным цоколем, является квазинъективным модулем [148], (2) каждый подмодуль малоинъективного модуля является существенным подмодулем прямого слагаемого всего модуля [144]; (3) малоинъективный неоднородный антисингулярный модуль над первичным правым кольцом Голди инъективен [144]. Он же описан малоинъективные модули над коммутативными дедекиндовыми кольцами [147] и использовал малоинъективные модули для характеризаций наследственных, нётеровых, регулярных колец и артиновых колец главных идеалов [151].

И. Д. Буну [20—22] рассматривал модули, инъективные относительно идемпотентных предрадикалов, предкручений и пар (F, M), где F — функция, M — класс модулей. Бицан [252] рассматривал модули, инъективные относительно пары предрадикалов, Нищида [886] — относительно кручения. Бичи [238] выяснил, когда кольцо имеет конечную длину относительно кручения, определенного фиксированным модулем. Модули и абелевы группы, делимые относительно некоторой чистоты изучал А. В. Иванов [69]. Модули, делимые относительно кручения, исследования Сарат и Варадараджан [1045]. О других связях инъективности и делимости с теорией радикалов и чистот см. § 3. Бикоммутаторы вполне делимых оболочек модулей изучал В. К. Захаров [68].

Модули, инъективные относительно вложений конечно вложенных модулей, рассматривал Хиремат [631]. Ю Чи Минг [1218, 1224] для характеризаций различных классов колец использовал понятие p-инъективного модуля, то есть такого R-модуля M, что любой гомоморфизм $Ra\to M$ $(a\in R)$ продолжается на всё кольцо R. Модули над специальными классами коммутативных колец, близкие к инъективным в том или ином смысле, рассматривались в [53, 230, 377, 390, 574, 578, 722, 735, 883]. Курата и Катаяма [735] изучали QF-$3'$-модули (введенные и изучавшиеся Г. М. Цукерман [М73 : 122] под другим названием). См. также [М75 : 76; 286]. Модуль M называется псевдоинъективным, если любой мономорфизм $N\to M$, где $N\subseteq M$, продолжается до эндоморфизма модуля M. А. А. Туганбаев [145, 150] доказал, что псевдоинъективный, не являющийся сингулярным, модуль над первичным левым кольцом Голди квазиинъективен, и описал псевдоинъективные модули над ограниченными наследственными нётеровыми первичными кольцами. Циммерман и Циммерман — Хьюзген [1228, 1231, 1232] изучали алгебраически компактные модули. Линейно-компактные модули исследовались в [377, 578—580, 901, 1184]. Свойства конечной аксиоматизируемости и элементарной замкнутости некоторых классов модулей, близких к инъективным, рассматривали Йенсен и Вамош [671]. О связи инъективности с теорией пучков см. [534]. Модулям, близким к инъективным в том или ином смысле, посвящены работы [18, 53, 265, 267, 426, 514, 940].

§ 2. ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КОЛЕЦ

2.1. Гомологические размерности колец и алгебр. Изложение ряда вопросов о гомологических размерностях колец и модулей вошло в книги Герамиты и Смолла [505], Рагхавана, Сингха и Сридхарана [974] и Васконселоса [1176]. Аксиоматический подход к размерностям (инъективным, проективным, плоским и др.) предложен Омом [893]. Вычислению глобальной размерности колец дифференциальных операторов, алгебр Вейля и расширений Оре посвящен цикл работ Г. Л. Фельдмана [162], Чиплункара [354], Гудёрла [535], Розенберга [1029], Макконела [810] и Дероше [404]. Малявен-Брамре [788] доказала конечность глобальной гомологической размерности локализации по простому идеалу универсальной обёртывающей алгебры конечномерной алгебры Ли. Ософская [911] провела вычисление глобальной размерности скрученной групповой алгебры абелевой группы над полем нулевой характеристики. В [251, 327] вычислены глобальные размерности ряда фильтрованных алгебр. В. Е. Говоров [37] использовал новые формулы ассоциативности для функторов Hom и $\otimes$ для получения оценок гомологических размерностей модулей и колец. Оценку гомологической размерности алгебр со стандартным тождеством приводит А. А. Бояркин ([168], стр. 12—13). Т. И. Датуашвили ([168], стр. 32—33) вычисляет гомологическую размерность некоторых линейно топологических матричных колец. Связи между гомологическими размерностями кольца и факторкольца, кольца и его плоского расширения, кольца и идеализатора его одностороннего идеала рассматривались в [273, 809, 1143]. Примеры вычислений глобальных размерностей колец эндоморфизмов некоторых модулей приведены в [383, 1088]. В [780, 941] вычисляются глобальные размерности расширений колец с помощью бимодулей. Гринберг [572] анализирует поведение глобальной и слабой размерности при переходе к расслоенным произведениям колец. Реско [1002] выясняет, когда

$$\mathrm{gl}\cdot\dim\,(D\otimes_k k(x_1,\ldots,x_n)=n,$$

где D — алгебра с делением над полем k, а $k(x_1,\ldots,x_n)$ — поле рациональных функций. Джейн и Сингх [660] отмечают, что если в кольце все левые идеалы квазипроективны, то его глобальная размерность может принимать лишь значения 0, 1 и ∞. Гринберг и Васконселос [573] показали, что если R — коммутативное когерентное кольцо глобальной размерности два, то кольцо многочленов $R[x_1,\ldots,x_n]$ когерентно. Роггенкамп [1022—1024] строит примеры артиновых алгебр и порядков глобальной размерности два. Если S — булево кольцо идемпотентов коммутативного регулярного кольца R, то $\mathrm{gl}\cdot\dim R\leqslant 2$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{gl}\cdot\dim S\leqslant 2$. Примеры колец глобальной размерности три с дополнительными свойствами возникают в [771]. Бойл и Гудёрл [280] отмечают, что глобальная

размерность кольца с инъективными квазиинъективными модулями не превосходит его размерности Крулля. Рамрас [977] изучает свойства центра локального кольца конечной глобальной размерности. Васконселос [1174] рассматривает коммутативные локальные когерентные кольца, глобальная размерность которых конечна и совпадает со слабой размерностью. Коззенс [384] исследует строение локализуемых алгебр конечной глобальной размерности. Йенсен [669] доказал существование колец, элементарно эквивалентных кольцу целых чисел и имеющих любую наперед заданную глобальную размерность.

В связи с изучением модулей над артиновыми алгебрами рассматривались свойства глобальных размерностей в теории дуализирующих многообразий (см. [213, 214, 215, 992]).

Кольца, слабая размерность которых равна единице, рассматриваются в [376, 288], и равна двум — в [247, 421]. Ленцинг (см. [1010]) анонсировал, что из равенства нулю левой и правой чистых глобальных размерностей следует конечность типа представлений кольца. Васконселос [1173] изучил свойства глобальной размерности, связанной с резольвентами из свободных модулей конечного ранга. Инъективные, проективные и квазипроективные размерности модулей рассматривались в [328, 653]. Доминантные и кодоминантные размерности затронуты в [328, 430, 638, 900]. Ософская [910] переносит на случай абелевых категорий многие из результатов о проективной размерности различных классов модулей, представимых в виде направленных объединений данной мощности, при этом в качестве следствий получается ряд новых теорем о проективных размерностях модулей над различными классами колец.

2.2. Наследственные и полунаследственные кольца. Их обобщения. Фулберт и Кузманович [462] описали полупримарные наследственные кольца. Ю. А. Дрозд [57] опубликовал доказательства анонсированных ранее результатов (см. [M75], стр. 86). Критерий наследственности и полунаследственности обобщенных колец треугольных матриц предложил Пейдж [936, 1011]. Там же показано, что полунаследственное слева PI-кольцо — полунаследственно справа. Новые критерии наследственности и полунаследственности приведены в работах [49, 151, 441, 442] и [644, 715] соответственно. Наследственные нётеровы первичные кольца исследовали К. В. Агапитов [1] и Джатегаонкар [665], а полунаследственные кольца Голди — Чаттерс и Смит [350]. Центр C наследственного (первичного полунаследственного) кольца, конечно порожденного как C-модуль, наследственен (является прюферовой областью) [684, 825]. Ауславдер и Райтен [213—215] продолжили свои исследования артиновых алгебр, стабильно эквивалентных наследственным. Новые критерии прюферовости имеются в работах [423, 453, 462]. Бойсен и Шелдон [271] рассматривали коммутативные кольца, все собственные факторкольца, которых прюферовы. Некоммутативные варианты прюферовости и дедекиндовости рассматривались в работах [445, 825, 1011]. Дикс [405] доказал, что групповое кольцо RG наследственно тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих свойств: (1) R классически полупросто, а G — фундаментальная группа связного графа групп без R-кручения; (2) R — регулярное кольцо со счетно порожденными левыми идеалами, а G — счетная локальная группа без R-кручения; (3) R — наследственно слева, а G — конечная группа без R-кручения. Описание локально разрешимых групп, для которых групповая алгебра над любым полем наследственна, предложили Гурсо и Валетт [564]. Филдхауз [457], Гурсо и Паско [561] установили эквивалентность следующих свойств самоинъективного кольца R: (1) кольцо многочленов $R[x]$ полунаследственно; (2) R разлагается в прямую сумму матричных колец над редуцированными регулярными кольцами: (3) $R[x]$ когерентно и R регулярно (ср. [M71:1026, M75:369, M75:956]). Из правой полунаследственности кольца $R[x]$ вытекает регулярность кольца R (см. [955]). Полунаследственность кольца косых многочленов исследовалась в работах [562, 1197]. Е. М. Вечтомов ([168], стр. 16) доказал, что кольцо функций $C(X)$ наследственно тогда и только тогда, когда пространство X экстремально несвязно. Наследственность тензорной алгебры бимодуля над классически полупростым кольцом и полунаследственность ее пополнения по стандартной фильтрации установил Ю. В. Роганов [114]. Теорию представлений наследственных артиновых алгебр, изложенную на языке диаграмм, можно найти у Платцек, Аусландера и Райтена [212]. Наследственные и полунаследственные кольца рассматривались также в работах [156, 481, 483, 1086, 1157] и [384, 436, 448, 466, 481, 483, 549, 1079, 1225] соответственно. Характеризация наследственных колец конечного типа представлений приведена в [427].

Кольца с квазипроективными левыми идеалами рассматривались в работах [660, 1082]. Кольца с классом квазипроективных модулей, замкнутым относительно перехода к подмодулям, рассматривал Хилл [622], а с классом квазиинъективных подмодулей, замкнутым относительно перехода к фактормодулям, — Ахсан [178]. Ивенс [437] рассматривал обобщенно наследственные кольца, определяемые требованием проективности подмодулей плоской эпиморфной оболочки, а Наувелаертс и Ойстайен [868] — класс модулей, включающий в себя как наследственные нётеровы первичные PI-кольца, так и классические порядки в центральных простых алгебрах. Миллер и Турнидж [829] рассматривали [строго] конаследственные кольца, определяемые требованием инъективности конечно вложенных (см. стр. 37) фактормодулей конечно вложенных любых инъективных модулей. В работах [344, 437, 466, 481, 644, 662, 1097, 1135] так или иначе затрагиваются PP-кольца. Ли [754] рассматривал кольца, над которыми проективны все циклические модули, а Е. М. Вечтомов ([169], ч. 2, стр. 12) — кольца функций с плоскими идеалами. Далее отметим теорему Дикса и Менала [407]: групповое кольцо RG является полу-FI-кольцом тогда и только тогда, когда R — тело, а группа G локально свободна. Уонг [1209] доказал, что полугрупповое кольцо RS, где S — моноид, является FI-кольцом слева и справа в том и только в том случае, когда R — тело, а S — свободное произведение свободного моноида и свободной группы. И. Б. Кожухов ([168], стр. 51] анонсировал подобный результат для левого FI-кольца, формулируемый, правда, значительно сложнее. Локализации FI-колец исследовали Кон и Дикс [368]. А. Сендрей [1129] охарактеризовала тела свойствами идемпотентных редуктов модулей над ним. В работах [381, 894] тело еще раз охарактеризовано как кольцо, над которым все модули свободны, без предположения унитарности. Рассматривались некоммутативные аналоги горенштейновых колец ([652, 1021, 1047, 1048]) и колец Коэна-Маколея [1061]. Был получен ряд новых характеризаций регулярных колец. Так, А. А. Туганбаев [151] доказал, что R — регулярное кольцо тогда и только тогда, когда все модули характеров $M^*\text{-Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Q/Z})$ R-модулей M являются малоинъективными. В [1221] отмечено, что регулярность кольца равносильна тому, что каждый циклический сингулярный модуль является плоским. Коммутативное кольцо, как показал Йондруп [687], регулярно в том и только в том случае, когда все неразложимые модули непривоДимы. Полуартиновы регулярные кольца рассматривались в [317, 771, 964], в частности в [317] был построен пример полуартинова справа и слева регулярного кольца с условием минимальности для идеалов, над которым существует ненулевой модуль без максимальных подмодулей. В [1219] приведены характеризации непрерывных слева регулярных колец в терминах p-инъективных модулей. Читэм и Смит [351] доказали, что факторкольцо $R/J(R)$ регулярно тогда и только тогда, когда прямое произведение регулярных модулей регулярно (здесь под регулярным модулем понимается модуль, в котором все подмодули чисты). Оширо [906] отметил ряд свойств конечно порожденных точных модулей над коммутативными регулярными кольцами. Хэндельман [586] исследовал свойства нормализованных функций ранга на регулярных кольцах. Висбауэр [1204] рассматривает модули над неассоциативными регулярными и бирегулярными кольцами.

2.3. V-кольца и близкие к ним классы колец. Результатов о самих V-кольцах довольно мало. Сарас [1044] и Тиссерон [1146] охарактеризовали нётеровы V-кольца, а Гурсо и Валетт [563] — групповые V-кольца (ср. [M75:510]). Регулярные V-кольца рассматривал Гурсо [557]. Чандран [343] доказал, что в классе дуоколец V-кольцами являются регулярные кольца и только они. Другой класс колец с этим свойством указал Лику [771]. Те или иные результаты о V-кольцах имеются также в работах [5, 188, 379, 563, 629, 1221, 1223]. Классы колец, содержащие как V-кольца, так и регулярные кольца, рассматривали Кушо [380] и Рафаэль [983].

Результаты о V-кольцах функций получил Е. М. Вечтомов ([170], ч. II, стр. 27). Гурсо и Джеми [559] построили регулярное V-кольцо, инъективная оболочка которого V-кольцом не является, указав на ошибку в работе [M75:1165]. Неассоциативное обобщение V-колец рассматривал Висбауэр [1203].

Фуллер [491] установил эквивалентность следующих свойств артинова кольца R: (1) каждый неразложимый R-модуль квазиинъективен; (2) каждый неразложимый R-модуль квазипроективен; (3) любых примитивных идемпотентов е, $f \in R$ имеет место: а) Re — однорядный R-модуль; б) если $J^2e \neq 0$ и $Je/J^2e \cong Jf/J^2f$, то $Re \cong Rf$; в) $l(eJ/eJ^2) \leqslant 2$; г) eR — дистрибутивный правый R-модуль. Все модули над кольцом с этими свойствами оказываются полудистрибутивными. Тиссерон [1146] охарактеризовал QI-кольца (в [M75] они названы QII-кольцами) как полупримитивные кольца, класс квазиинъективных модулей над которыми замкнут относительно прямых произведений, а И. Д. Буну [23] — как кольца, над которыми все предкручения стабильны. Если дополнительно предположить, что фактормодуль R/L имеет нулевой цоколь для всякого существенного левого идеала L, то QI-кольцо R разлагается в прямую сумму классически полупростого кольца и кольца с нулевым цоколем, над которым все сингулярные модули инъективны (ср. [M75], стр. 91). Фейс [442] подтвердил гипотезу (Бойль, [M75:330]) о наследственности QI-колец при дополнительном предположении. Бойль и Гудёрл [280] установили, что каждое QI-кольцо является нётеровым V-кольцом, а обратная импликация места не имеет (см. также [M75:330], [442]). Они же получили некоторые результаты о глобальной размерности QI-колец (см. п. 2.1). Размерность Крулля V-колец и модулей над ними исследовалась в работах [280, 1044]. Дамиано [394] и Мохамед [832] передоказали теорему Фейса [M75:498] о строении PCI-колец (см. [M75], стр. 90). Сам Фейс опубликовал поправку к своей работе [439].

Ряд результатов о $PCQI$-кольцах, т. е. о кольцах, над которыми все собственные циклические модули квазиинъективны, получили Джейн, Сингх и Симондс [661]. В частности, нелокальное $PCQI$-кольцо оказывается первичным или полусовершенным, а локальное — или цепным, или со свойствами $J^2=0$ и $l(J)=2$.

Хилл [622] установил эквивалентность следующих свойств полулокального кольца R: (1) каждый простой R-модуль проективен или инъективен; (2) каждый подмодуль квазипроективного модуля квазипроективен; (3) все факторкольца кольца R наследственны; (4) R — наследственно и $J(R)^2=0$. В классе дуо-колец оказываются эквивалентными следующие свойства: (1) каждый простой R-модуль p-инъективен (т. е. инъективен относительно вложения главных левых идеалов); (2) простые R-модули плоские и правый аннулятор любого элемента из R содержится в его левом аннуляторе; (3) R — строго регулярно [353, 1217, 1220]. В последних двух из этих работ установлена эквивалентность следующих свойств произвольного кольца R: (1) каждый простой R-модуль плоский или p-инъективен; (2) все циклические модули с нулевым радикалом Джекобсона p-инъективны; (3) R — регулярно. Кольца с p- и f-инъективными (т. е. инъективными относительно вложения конечно порожденных левых идеалов) простыми модулями рассматривались также в работе [1218]. Класс колец, над которыми нётеров всякий модуль, имеющий размерность Крулля, изучал Сарас [1044]. Этот класс включает в себя V-кольца и совершенные кольца.

Рассматривались следующие классы колец: $CPQI$ — каждый циклический модуль проективен или инъективен; $CDPI$ — каждый циклический модуль равен прямой сумме проективного и инъективного; SI — все сингулярные модули инъективны; RIC — фактормодули R/L, где L — существенный левый идеал, инъективны; CPP — каждый циклический модуль проективен или p-инъективен; DCI — все циклические модули инъективны; CPF — каждый циклический модуль плоский или p-инъективный. Связи между классами CPP, DCI и CPF изучал Ю Чи Минг [1221], а между классами $CPQI$, $CDPI$, SI и RIC — Смит [1096]. В частности, последний установил эквивалентность следующих свойств коммутативного кольца R: (1) $R \in SI$; (2) $R \in RIC$; (3) R регулярно, а его факторкольцо по цоколю разлагается в прямую сумму полей. Он же [1095] доказал многочисленные утверждения о классах $CDPI$, RIC и близких к ним. В частности, оказалось, что $R \in RIC$ тогда и только тогда, когда каждый циклический модуль является расширением проективного модуля с помощью инъективного. Л. А. Койфман ([168], стр. 53—54) обобщил результаты последней работы и ответил на поставленные в ней вопросы. Л. А. Койфман ([169], ч. 2, стр. 38—39) рассматривал также кольца, каждый модуль над которыми разлагается в прямую сумму проективных, инъективных и простых (ср. [M71:54], [M71:55]), и дал полное описание неразложимых артиновых колец из этого класса. А. И. Пономарев ([169], ч. 2, стр. 62) анонсировал такой результат: каждый R-модуль является расширением вполне разложимого проективного модуля с помощью сингулярного тогда и только тогда, когда квадрат левого цоколя существенен в R. Тепли [1142] обобщил результаты Гудёрла [M75:609] о кольцах, где сингулярный подмодуль выделяется прямым слагаемым из каждого модуля. Фулберт и Кузманович [486] при некоторых дополнительных условиях описали строение колец, где сингулярный модуль выделяется прямым слагаемым из всех конечно порожденных модулей. Строение коммутативных колец с выделяющимися прямыми слагаемыми сингулярными подмодулями циклических модулей описал Оширо [908].

Смит [1093] доказал, что каждый циклический R-модуль свободен или имеет конечную длину тогда и только тогда, когда R или артиново или является нётеровой областью, где $l(R/L)<\infty$ для всякого существенного левого идеала L, и что каждый конечно порожденный R-модуль разлагается в прямую сумму свободного модуля и модуля конечной длины в том и только в том случае, когда R или артиново или является областью главных правых и главных левых идеалов.

Кольца с квазиинъективными левыми идеалами (т. е. q-кольца) рассматривались в работах [310, 515, 710, 837, 1220], кольца, у которых квазиинъективны все левые идеалы, не изоморфные самому кольцу, — в работах [834, 836], а кольца, все фактор-кольца которых суть q-кольца, — в работе [837]. В работах [174, 175, 176] исследовались кольца, над которыми квазиинъективны все циклические модули. Гоэл и Джейн [514] рассматривали кольца с П-инъективными циклическими модулями, а А. А. Туганбаев — с малоинъективными циклическими [154] и конечно порожденными ([103], стр. 94) модулями. Обзор результатов, связанных с наложением тех или иных гомологических ограничений на левые идеалы или на циклические модули, содержится в докладе Джейна [659].

Хирано и Томинага ([628, 629]) перенесли на кольца без единицы ряд результатов о V-кольцах и их обобщениях.

2.4. QF-кольца и их обобщения. Начнем с весьма неожиданного результата Лоуренса [752]: счетное самоинъективное кольцо квазифробениусово (QF). Армендариц [201] доказал квазифробениусовость самоинъективного кольца, удовлетворяющего условию минимальности для существенных левых или правых идеалов. Другие новые характеризации QF-колец можно найти в работах [76, 616, 681, 1049, 1138]. Йенсен [670] отметил, что класс QF-колец элементарно замкнут. Флёри [464] указал представление QF-кольца в виде прямой суммы колец матриц над телами и колец эндоморфизмов некоторых специальных модулей. Хорн [634] обобщил результат Хьюгеса [M75:736] о квазифробениусовости группового кольца. И. Б. Кожухов ([102], стр. 101) сообщил, что полугрупповое кольцо RS, где S — инверсная полугруппа, оказывается квазифробениусовым тогда и только тогда, когда R — квазифробениусово, а S — конечна. Н. Начев [105] получил критерий квазифробениусовости кольца инцидентности. Новые методы построения фробениусовых алгебр предложил Грин [569]. Купиш [733] рассматривал QF-алгебры конечного типа. Некоторые классы QF-колец рассмотрены в работах [151] и [708]. Паско и Валетт [951] отметили, что кольцо R^G элементов QF-кольца R, инвариантных относительно действия конечной группы автоморфизмов G, быть QF-кольцом не обязано, даже если $|G|$ обратим в R. Однако, квазифробениусовость кольца инвариантов имеет место, если кольцо R полупервично или если R — плоский R^G-модуль [937]. Конечную порождаемость последнего модуля исследовал Рено [1001]. Миллер и Турнидж [829] изучали инъективные модули над QF-кольцами.

Кантил [970] установил эквивалентность следующих свойств коммутативного кольца R: (1) всякий инъективный R-модуль плоский; (2) R — когерентно и инъективные оболочки неприводимых R-модулей неприводимы; (3) R — когерентно и всякая система уравнений над R, разрешимая в некотором его расширении, разрешима в R. Рассматривались также кольца, где плоским оказывается каждый конечно порожденный инъективный модуль [378].

Для кольца R с условием максимальности для аннуляторных левых идеалов, как показал Раттер [1034], оказались эквивалентными такие свойства: (1) R — левое и правое QF-3 кольцо; (2) R — обладает точными инъективными проективными модулями (левыми и правыми); (3) инъективная оболочка модуля R (левого и правого) проективна; (4) инъективная оболочка любого проективного R-модуля (левого и правого) проективна. Характеризацию QF-3 колец свойствами их максимальных колец частных предложил Масаике [800]. Другие характеризации имеются в работе [616]. Нётеровы QF-3 кольца, где inj. $\dim_R R$, inj. $\dim R_R \leqslant 1$, рассматривали Сато ([1047, 1048]) и Сумиока [M75:1332]. Последний, в частности доказал, что при некоторых дополнительных ограничениях они характеризуются как кольца треугольных матриц над QF-кольцами. Сумиока [1123] рассматривал и QF-3′ кольца с теми же и некоторыми другими ограничениями. Он же охарактеризовал полупримарные QF-3′ кольца. Шок [1071] и Асано, Мотозе [205] рассматривали QF-2 кольца, т. е. кольца, разлагающие в прямую сумму однородных левых идеалов. QF-2 и QF-3 кольца затронуты в работах [347, 654], QF-1 кольца — в работах [1059, 1136 и 1138], сбалансированные кольца — в [920 и 1083], кольца, обладающие доминантным модулем — в [700].

Новые характеризации самоинъективных колец предложили Ю Чи Минг ([1218, 1219]) и А. А. Туганбаев [153]. Полусовершенные самоинъективные кольца рассматривал Фейс [444, 446]. Он же указал новые примеры самоинъективных колец [450]. Простые самоинъективные кольца исследовали Гудёрл и Хэнделмэн [547]. Камил [693] отметил, что самоинъективное слева и справа простое кольцо изоморфно кольцу матриц над телом. А. А. Туганбаев [153] указал критерий разложимости самоинъективного кольца в прямое произведение локальных. Мартин [792] указывает разложение самоинъективного кольца с некоторыми дополнительными условиями, сходное с разложением, имеющим место для бэровых колец. Он же [793] выясняет, когда свойство самоинъективности наследуется фактор-кольцом кольца многочленов по некоторому главному идеалу. Аналогичная задача решается им и для QF-колец. Биркенмайер [266] рассматривает в самоинъективном кольце прямое слагаемое (в модульном смысле), содержащее все нильпотентные элементы. И. Б. Кожухов [82] доказал, что полугрупповое кольцо RS, где S — полуструктура, самоинъективно тогда и только тогда, когда R самоинъективно, а S — конечна. Тот же результат верен, если S — инверсная полугруппа [101, стр. 101]. Самоинъективные кольца инцидентности охарактеризовал Н. Нечаев [105]. Е. М. Вечтомов [26] нашел условия самоинъективности кольца непрерывных функций со значениями в топологическом поле. Сугано [1122] доказал, что как самоинъективность, так и квазифробениусовость сохраняются при переходе к сепарабельным расширениям. Камил [692] охарактеризовал кольца, над которыми каждый модуль вполне точен (это — обобщение QF-колец) как самоинъективные квазиартиновы кольца, где квазиартиновость означает существование существенного артинова левого цоколя. В свою очередь, квазиартиновы кольца характеризуются как кольца, над которыми каждый точный модуль коточен. Ахсан [175] доказал, что квазиартиновость равносильна конечной вложенности (см. стр. 37) каждого левого идеала. Там же установлено, что кольцо R с квазиинъективными циклическими модулями оказывается псевдофробениусовым кольцом (т. е. R служит инъективным кообразующим категории R-модулей) тогда и только тогда, когда оно квазиартиново. Он же [179] охарактеризовал полулокальные кольца в терминах квазиинъективности модулей. Вопрос о левоправой симметрии понятия псевдофробениусовости обсуждается в докладе Фейса [448].

Кёлер [725] рассматривал кольца с самоинъективными факторкольцами. Кольца, все факторкольца которых оказываются малоинъективными модулями, исследовал А. А. Туганбаев [154].

Гурсо и Джереми [558] доказали, что регулярное кольцо самоинъективно слева и справа тогда и только тогда, когда оно $\aleph_0$-непрерывно слева (см. также [1219]). Карсон [329] указал критерий самоинъективности строго регулярного кольца, использующий его представление как кольца сечений окольцованного пространства. Пэйдж [939] доказал, что все конечно порожденные модули над регулярным кольцом R являются образующими тогда и только тогда, когда R — самоинъективно и его индекс нильпотентности ограничен. Гудёрл [540] установил, что самоинъективное конечное по Дедекинду регулярное кольцо обратимо регулярно, т. е. уравнение $axa=a$ имеет обратимое решение. Он же [543] исследовал центр самоинъективного регулярного кольца. Возникновение самоинъективных регулярных колец при пополнении регулярного кольца обсуждается в работах [379, 537, 542, 586]. Функция ранга рассматривалась также в работах [559] и [672]. В работе [560] доказано, что кольцо неподвижных элементов самоинъективного регулярного кольца от-

носительно заданной конечной группы автоморфизмов также самоинъективно и регулярно: Самоинъективные регулярные кольца рассматривались также в монографии [544] и работах [546, 674, 982]. Некоторые проблемы, касающиеся этих колец, можно найти в [461]. О регулярных кольцах см. п. 2.2.

2.5. Кольца конечного типа. Рингель [1010] отметил, что подтверждение второй гипотезы Брауэра — Тролла, полученное Л. А. Назаровой и А. В. Ройтером (см. [M75], стр. 95) в случае совершенного поля, остается в силе и для произвольных полей. Индуктивному шагу в решении этой задачи для артиновой алгебры посвящена работа [1090]. Обзор результатов, связанных с гипотезами Брауэра — Тролла, дали Ю. А. Дрозд и А. В. Ройтер ([103], стр. 91—92).

Леви [767] доказал, что артиново кольцо R имеет конечный тип тогда и только тогда, когда найдется число m такое, что количество строк и столбцов в матрице над R, не эквивалентной никакой диагональной матрице с более чем одним диагональным блоком, не превышает m. Мюллер [848] охарактеризовал артиновы кольца конечного типа, обладающих двойственностью Мориты, и построил все неразложимые модули над такими кольцами. Квазифробениусовы алгебры конечного типа рассматривал Купиш ([733, 734]). Ридтман [499] предложила классификацию самоинъективных конечномерных алгебр конечного типа. Критерий конечности типа кольца нижних треугольных матриц над артиновым кольцом указали Лещинский и Симсон [765]. В. В. Кириченко и А. В. Никулин ([168], стр. 49) предложили критерий конечности типа для одного класса конечномерных алгебр. Конечность типа полумаксимальных колец (см. п. 2.7) обсуждается в работах [63] и [64]. Скрещенные групповые кольца конечного типа рассматривали Л. В. Баранник и П. М. Гудивок [14] (ср. [M75], стр. 97). Януш [M75:765] показал, что полуцепное кольцо не обязано быть кольцом конечного типа, хотя это так для колец, полуцепных слева и справа. Тачикава [1136] получил, что полуцепная QF-1 алгебра имеет конечный тип. Используя функторы Кокстера, Довбор и Симсон [427, 428] охарактеризовали наследственные кольца, бимодули и квазиартиновы виды конечного типа.

Симсон [1077] доказал, что абелева категория, каждый объект которой изоморфен копроизведению нётеровых подобъектов, обладающая лишь конечным числом простых объектов, эквивалентна категории всех модулей над артиновым кольцом конечного типа (правда, изложенное в работе доказательство нуждается в некоторых исправлениях). В [1078] он изучает категории представлений видов.

Ямагата [1215] предложил описание неразложимых модулей над артиновым кольцом конечного типа, связанное с определенным разбиением множества неприводимых модулей. Описание матричных представлений наследственных алгебр конечного типа дано в работе [495]. Бимодули над артиновыми кольцами конечного типа рассматривал Вашбюш [1193].

Йенсен [1010] установил, что кольцо R имеет сильно конечный тип тогда и только тогда, когда каждый левый и каждый правый R-модуль разлагается в прямую сумму конечно представимых. Баур [229] доказал, что это равносильно $\aleph$-категоричности теории любого R-модуля. Достаточные условия сильной конечности типа кольца нижних треугольных матриц над артиновым кольцом имеются в работах [218] и [552]. Купиш [734] установил конечность числа n-мерных симметрических алгебр над алгебраически замкнутым полем, имеющих сильно конечный тип. Ленцинг [1010] анонсировал: каждый левый и каждый правый P-модуль разлагается в прямую сумму конечно представимых подмодулей тогда и только тогда, когда R артиново и существует лишь конечное число неразложимых R-модулей конечной длины.

Скажем, что R — кольцо слабо ограниченного типа, если число образующих неразложимых конечно порожденных [конечно представимых] R-модулей ограничено в совокупности. Слабо ограниченный тип имеют обобщенно однорядные кольца ([М75:50; М75:1421]). Артиново кольцо слабо ограниченного типа оказывается кольцом конечного типа [47]. Йондруп [687] доказал артиновость PI-кольца с конечным числом неразложимых циклических модулей и показал, что кольцо слабо конечного типа артиновым быть не обязано. Полусовершенные нётеровы наследственные кольца слабо ограниченного типа описала Н. М. Губарени [47]. Ею же [47] описаны кольца слабо ограниченного типа в одном классе обобщенных матричных колец, автоматически оказывающихся наследственными. В ходе этих исследований возникают смешанные матричные задачи над телами и дискретно нормированными кольцами. В. В. Кириченко ([170], ч. II, стр. 74) анонсировал: полупервичное нётерово полусовершенное кольцо имеет слабо ограниченный тип тогда и только тогда, когда оно нётерово справа и наследственно. Кольца с конечным числом простых модулей рассматривали Миллер и Туриндж [829].

2.6. Кольца Кёте, однорядные и полудистрибутивные кольца. Усилиями Брэндела, Вамоша и супругов Вигандт [281—284, 1163, 1199] завершено решение проблемы Капланского о коммутативных кольцах Кёте, т. е. кольцах, над которыми все конечно порожденные модули разлагаются в прямую сумму циклических подмодулей. Оказалось, что коммутативное кольцо является кольцом Кёте тогда и только тогда, когда оно представляется в виде прямой суммы линейно компактных цепных колец, почти максимальных областей Безу (почти максимальность означает, что факторкольца по всем идеалам, отличным от всего кольца, линейно компактны) и факельных колец. Последние определяются следующими свойствами: (1) R не локально; (2) существует наименьший простой идеал R, обладающий следующими свойствами: а) P — ненулевой цепной R-модуль; б) каждый ненулевой элемент факторкольца R/P принадлежит лишь конечному множеству максимальных идеалов, а каждый его ненулевой простой идеал содержится лишь в одном максимальном идеале; в) локализация R_P является почти максимальным кольцом Безу. Этот результат изложен в книге Брендела [283]. В ней содержатся также история вопроса и необходимые примеры. Описание полупервичных коммутативных колец Кёте получил и Оширо [909], рассматривавший также кольца, над которыми в прямую сумму циклических разлагается каждый антисингулярный конечно порожденный модуль. Обзор результатов по некоммутативным кольцам Кёте дал Фейс [447]. Роль теории пучков в описании этих колец обсуждается в работе [1166]. Вамош [1163] доказал, что идеалы коммутативного кольца Кёте представляются как пересечения конеприводимых тогда и только тогда, когда каждый конечно порожденный модуль M допускает представление $M=\sum_{i=1}^{m} R/I_i$, где $I_1 \leqslant \ldots \leqslant I_m$. Многие вопросы, касающиеся колец Кёте, затронуты в работе Ру [1030]. Там же и у Понелайта [961] имеются результаты о дуокольцах Кёте. Иванов [651] охарактеризовал кольца, над которыми все конечно порожденные модули являются полуцепными, некоторыми свойствами циклических модулей. Миллер [825] доказал, что конечно представимые модули над первичным полунаследственным кольцом, конечно порожденным как модуль над своим центром, изоморфны прямому слагаемому прямой суммы циклических модулей. Вложимость модулей над нётеровым кольцом в прямую сумму циклических модулей изучал Брунс [301]. Оширо [904, 905] исследовал разложимость в прямую сумму циклических модулей и вложимость в такую прямую сумму некоторых конечно порожденных модулей над коммутативным регулярным в смысле Неймана кольцом. Фуллер [489], введя в рассмотрение кольцо E всех эндоморфизмов прямой суммы всех конечно порожденных R-модулей, установил эквивалентность следующих свойств: (1) каждый конечно порожденный R-модуль разлагается в прямую сумму конечно порожденных подмодулей; (2) каждый R-модуль имеет прямое разложение, дополняющее прямые слагаемые; (3) кольцо E совершенно слева; (4) прямое произведение любого множества проективных E-модулей проективно. Теоретико-категорное обобщение этого результата дал Симсон [1077]. Йондруп и Рингель [689] установили, что в случае квазифробениусова кольца R разложимость любого R-модуля в прямую сумму циклических подмодулей равносильна его представимость как прямой суммы левых идеалов. В той же работе они установили, что последнее свойство не наследуется кольцом матриц и указали на ошибку в работе Л. А. Скорнякова [132]. Однако результаты последнего, касающиеся описания колец, над которыми в виде прямой суммы левых идеалов представляется любой циклический модуль, остаются в силе. Отметим результат Грюзон и Йенсена (см. [577] и [1010], стр. 6): если существует такое кардинальное число $\mathfrak{C}$, что каждый R-модуль разлагается в прямую сумму $\mathfrak{C}$-порожденных подмодулей, то каждый R-модуль разлагается в прямую сумму конечно представимых подмодулей. Для кольца R с нулевым сингулярным идеалом оказались эквивалентными следующие свойства: (1) R конечномерно в смысле Голди; (2) прямая сумма антисингулярных квазиинъективных модулей инъективна; (3) существует такое кардинальное число $\mathfrak{M}$, что каждый антисингулярный квазиинъективный модуль разлагается в прямую сумму $\mathfrak{M}$-порожденных подмодулей [250]. Вигандт [1198] рассмотрел кольца, каждый конечно порожденный модуль над которыми разлагается в прямую сумму n-порожденных модулей. Циммерман — Хьюзген [1231] доказал, что все алгебраически компактные R-модули разлагаются в прямую сумму неразложимых в том и только в том случае, когда в категории R-модулей расщепляются все чистые мономорфизмы.

В. В. Кириченко ([168], стр. 48; [103], стр. 91) рассмотрел кольцо R с нильпотентным первичным радикалом H и нётеровым факторкольцом R/H и анонсировал: все конечно порожденные R-модули полуцепные в том и только в том случае, когда R — полуцепное кольцо и для любых идемпотентов e и f кольца R/H^2 неравенство $e(H/H^2)f \neq 0$ влечет, что $f(R/H^2)e$ оказывается телом или дискретно нормированным кольцом. Он же [74, 75] получил полное описание полуцепных слева и справа наследственных колец. Вопрос о самодвойственности обобщенно однорядных колец обсуждает Хаак [584]. Обобщенно однорядные QF-алгебры, связанные с QF-алгебрами конечного типа, рассматривал Купиш [733]. Здесь же можно назвать работы [77, 219, 348, 961]. Артиновы кольца, колчаны которых являются деревьями, изучали Фуллер и Хаак [495]. Другие обобщения однорядных колец появлялись в работах [493, 494, 706].

К этому же кругу вопросов можно отнести исследование колец, все модули над которыми полудистрибутивны, т. е. разлагаются в прямую сумму модулей с дистрибутивной структурой подмодулей. А. А. Туганбаев [155] доказал, что такие кольца совпадают с классом артиновых колец, все модули над базисным кольцом которых являются прямыми суммами вполне циклических модулей. Заметим, что такие базисные кольца описаны [M65:135—139], правда, весьма громоздко. Другая характеризация этого класса колец, из которой, в частности, вытекает его лево-правая симметричность, предложена Фуллером [494]. Он установил, что полудистрибутивность всех модулей равносильна полудистрибутивности всех так называемых стандартных модулей, определяемых в терминах циклических модулей. Некоторые

результаты о дистрибутивных слева кольцах получил А. А. Туганбаев [157].

2.7. Совершенные и полусовершенные кольца. А. А. Туганбаев [151] доказал, что кольцо совершенно тогда и только тогда, когда все плоские модули над ним малопроективны. Никольсон [877] установил, что кольцо R совершенно в том и только в том случае, когда для любого проективного R-модуля P кольцо $\mathrm{End}(P)$ полурегулярно, т. е. его факторкольцо по радикалу Джекобсона регулярно и идемпотенты поднимаются по модулю этого радикала. Дуокольцо R совершенно тогда и только тогда, когда каждый R-модуль содержит максимальный подмодуль и в R нет бесконечной системы ортогональных идемпотентов [343], чем частично подтверждается гипотеза Басса. Рант [980] отметил, что локальное кольцо совершенно в том и только в том случае, когда каждый модуль над ним обладает минимальной системой образующих. Другие новые характеризации совершенных колец можно найти в работах [518, 607, 711, 762, 835].

Ру [1030] доказал, что кольцо совершенно, если каждый конечно представимый модуль разлагается в прямую сумму локальных. При некоторых дополнительных условиях верно и обратное. Совершенные кольца с квазипроективными левыми идеалами рассматривались в работе [660], а коммутативные совершенные кольца — в [1138]. Работы [411, 412, 415, 1119] посвящены чисто теоретико-кольцевому исследованию совершенных колец. В них, в частности, установлено, что периодическая часть совершенного кольца выделяется прямым слагаемым. В работах [414, 416, 417] рассматриваются кольца, все собственные факторкольца которых совершенны. О. И. Доманов [54] свел вопрос о совершенности полугруппового кольца RS к рассмотрению случаев, когда полугруппа S T-нильпотентна или 0-проста. В первом из этих случаев RS совершенно тогда и только тогда, когда R совершенно, а во втором — в том и только в том случае, когда R совершенно, все подгруппы полугруппы S конечны и полугрупповое кольцо BS, где B — порожденное единицей подкольцо кольца R, удовлетворяет полиномиальному тождеству. Фейс [444, 445, 446] установил ряд результатов о совершенных и полусовершенных кольцах, над которыми каждый точный конечно порожденный модуль является образующим, и о саминъективных совершенных кольцах (ср. [M71 : 1069]). Строение полусовершенных колец с коммутативным радикалом Джекобсона исследовал В. А. Ратинов [111, 112]. Сето [1131] доказал, что полусовершенное кольцо разлагается в прямую сумму матричных колец над локальными кольцами, если центральные идемпотенты поднимаются до центральных идемпотентов по модулю радикала Джекобсона. Окнинский [896] показал, что для групповой алгебры KG, где K — поле характеристики 0, эквивалентны следующие свойства: (1) KG полусовершенна; (2) KG полулокальна; (3) G конечна; (4) KG — алгебраическая алгебра ограниченной степени. Полусовершенное полупервичное нётерово кольцо, кольца эндоморфизмов неразложимых проективных модулей над которыми являются дискретно нормированными кольцами, называются полумаксимальным. Полумаксимальное кольцо R оказывается наследственным в том и только в том случае, когда каждый подмодуль неразложимого проективного модуля над ним содержит в точности один максимальный подмодуль [63]. А. Г. Завадский и В. В. Кириченко [63] описали полумаксимальные кольца как прямые суммы колец обобщенных матриц специального вида. В тех же терминах Н. М. Губарени и В. В. Кириченко [50] описали полусовершенные нётеровы наследственные первичные кольца R, где $R/J(R)$ — прямая сумма тел. Полумаксимальные кольца рассматриваются и в работе [64]. Одну старую теорему Михлера о строении полусовершенных наследственных нётеровых колец передоказала Упхам [1156]. Совершенные и полусовершенные кольца затрагиваются также в работах [47, 48, 220, 350, 445, 489, 515, 603, 661, 707, 708, 912, 1037, 1057, 1077, 1134]. Лин [775] исследовал полусовершенные коалгебры.

Никольсон [877] доказал, что каждый конечно представимый модуль обладает проективным покрытием тогда и только тогда, когда R полурегулярно (см. выше). Все идеалы коммутативного неразложимого кольца обладают проективным покрытием в том и только в том случае, когда оно или совершенно, или локальное нётерово, или дедекиндово [1098]. Полурегулярные кольца изучал Янсен [664]. В работе [872] рассматривались кольца, удовлетворяющие условию минимальности для главных правых идеалов, не являющихся прямыми слагаемыми, и охарактеризованы коммутативные кольца из этого класса. В некоммутативном случае эти кольца характеризуются требованием: всякий главный правый идеал, не удовлетворяющий условию минимальности для подмодулей, выделяется прямым слагаемым. Рено [1000] рассматривал кольца с условием максимальности для некоторых цепей подмодулей свободных модулей. Неггерс [869] изучал так называемые циклические кольца, являющееся, как он предполагает, совершенными. Класс, содержащий V-кольца и совершенные кольца, рассматривал Сарас [1044].

Напомним, что кольцо называется полуартиновым, если цоколь любого ненулевого модуля над ним отличен от нуля. Камилло и Фуллер [317] доказали, что каждый ненулевой правый модуль над полуартиновым псевдофробениусовым кольцом (см. п. 2.4) содержит максимальный подмодуль, хотя даже для регулярных полуартиновых колец это места не имеет. Коммутативные полуартиновы групповые кольца рассматривала Салль [1041]. Отметим также ее старую работу [1040], где она охарактеризовала эти кольца в терминах системы локализаций (ср. [M75:1240; M75:1241]). Попеску и Спирку [964] отметили, что в отличие от коммутативного случая полуартиново подкольцо регулярного полуартинова кольца не обязательно регулярно. Полуартиновы регулярные кольца рассматривал также Лику [771], указавший на ошибку в работе [M75:1120]. Обзорный доклад по полуартиновым кольцам, включающий их различные характеризации, сделала Салль [1039].

Новые характеризации классически полупростых колец имеются в работах [151, 358, 693, 1148, 1216, 1219].

Пусть Λ — артинова алгебра (т. е. артиново кольцо, конечно порожденное как модуль над своим центром). Нерасщепляющаяся точная последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

с неразложимыми модулями A и C называется почти расщепляющейся, если для любого гомоморфизма $g: A \to Y$, не являющегося расщепляемым мономорфизмом, существует такой гомоморфизм $h: B \to Y$, что $g = hi$. Теория почти расщепляющихся последовательностей нашла широкое применение в изучении неразложимых модулей над артиновыми алгебрами: [207, 211, 216, 217, 795, 995, 998].

Активно продолжалось (см. [M : 75, 216, 220, 221]) исследование стабильно эквивалентных артиновых колец (в частности, вопросы стабильной эквивалентности наследственных колец, самоинъективных колец, однорядных и обобщенно однорядных колец, колец конечного типа представлений и др.): [211, 213—215, 272, 496, 638, 992—997].

2.8. Условия конечности в гомологической классификации. В ряде работ рассмотрены когерентные кольца. А. У. Белесов [18] показал, что когерентность кольца R эквивалентна $\aleph_0$-инъективности любого фильтрованного произведения $\aleph_0$-инъективных модулей. Бернекер [247] доказал, что кольцо R с w. gl. $\dim R \leqslant 2$ когерентно тогда и только тогда, когда класс чистых R-модулей замкнут относительно прямых, а класс плоских R-модулей — относительно обратных пределов. Когерентность колец многочленов в различных случаях установлена в [330, 561, 573], кольца формальных степенных рядов — в [1010]. (Раттер).

Бьери и Штребель [262] полностью описали конечно порожденные разрешимые группы G такие, что кольцо $\mathbf{Z}G$ когерентно. Условия когерентности и полуартиновости группового кольца абелевой группы изучала Салль [1041]. В [815] исследовалась когерентность некоторых колец ограниченных аналитических функций. Различные свойства когерентных колец отмечены в [393, 635, 762, 814, 1774]. Доббс [422], Доббс и Папик [424] изучали когерентные кольца (псевдо-)нормирования, Папик [942, 943] — когерентные надкольца коммутативных областей.

Кушо [376] рассматривает дуализацию когерентности, а Ханник [594] — ее обобщение на кольца со многими объектами, а также обобщение нётеровости, артиновости и т. д.

Е. Г. Скляренко [128] исследовал гомологические свойства чистых модулей над когерентными кольцами и получил характеризации когерентных, полулокальных и нётеровых колец в терминах двойственности.

Отметим следующие характеризации нётеровых колец с помощью понятий, близких к инъективности: кольцо R нётерово тогда и только тогда, когда прямые суммы инъективных оболочек неприводимых модулей инъективны (для коммутативных колец — Харуи [611]) или прямые степени инъективных модулей инъективны (Ахсан [173]) или прямые суммы инъективных модулей малоинъективны (А. А. Туганбаев [151]) или все инъективные модули чисто корректны (С. К. Росошек [118]).

Л. А. Скорняков [133] описал коммутативные кольца, все идеалы которых — гомоморфные образы инъективных модулей, Куартараро и Баттс [969] рассматривали коммутативные кольца R такие, что никакой R-модуль (идеал в R) не является объединением собственных подмодулей. Нита [888] предложил новую характеризацию S-колец, т. е. колец, над которыми любой простой модуль изоморфен левому идеалу, Вамош [1161] охарактеризовал коммутативные кольца, над которыми каждый тестовый модуль (см. М75, стр. 70) является кообразующим.

Свойства колец, близкие к штейнцевости, рассматривались в работах [359, 1030]. Андерсон [193] выяснил, когда каждый гомоморфный образ кольца является кольцом с инвариантным базисным числом, а Никольсон [878] — когда кольцо R обладает свойством замены как R-модуль.

Николя [881] рассматривает кольца, свободные модули над которыми удовлетворяют условию максимальности для n-порожденных подмодулей, Кушо [380] — такие кольца R, что каждый конечно порожденный R-модуль имеет нулевой радикал Джекобсона, а Кривей [391] — коммутативные кольца, все максимальные идеалы которых существенны.

Хауптфляйш и Лунстра [617] исследовали кольца типа (n, k), т. е. кольца R, для которых (n, k) есть минимальная пара натуральных чисел, обладающих свойством $R^n \cong R^{n+k}$.

Тиссерон [1146, 1147] рассматривал кольца, над которыми произведение любого множества квазиинъективных модулей — квазиинъективный модуль.

Мехди [816, 817] рассматривал коммутативные кольца, обладающие точным мультипликационным модулем, т. е. таким модулем M, что для любых его подмодулей $L \subseteq N$ существует идеал $A \subseteq R$ такой, что $L = AN$.

Харада [606] исследовал кольца, над которыми каждый модуль, не являющийся малым подмодулем своей инъективной оболочки, содержит ненулевой инъективный подмодуль. Кошон [332, 333] установил ряд новых свойств T-колец в смысле [М75:899], например: аннуляторы подмножеств конечно порожденного модуля над T-кольцом удовлетворяют условию минимальности. Свойства аннуляторов модулей исследовались также в [239, 243].

2.9. Логические аспекты. Исследования, начатые Эклофом и Саббахом [М71, II стр. 41] (см. также [352]), привлекли внимание многих алгебраистов. В работах Е. Л. Горбачука [168, стр. 26], Н. Я. Комарницкого [86, 168, стр. 54] и Преста [965—967] их результаты были перенесены на случай относительной гомологической алгебры, связанной с кручением подробнее см. п. 3.1. Л. А. Скорняков [135] установил, что класс всех точных R-модулей конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда кольцо R содержит конечное подмножество ненулевых элементов, имеющее непустое пересечение с каждым ненулевым двусторонним идеалом кольца R. Л. В. Тюкавкин [160] доказал, что класс неприводимых R-модулей аксиоматизируем тогда и только тогда, когда факторкольцо $\bar{R} = R/J(R)$ содержит такое конечное подкольцо $\bar{S}$, что $\bar{S} + \bar{I} = \bar{R}$ для всякого максимального левого идеала $\bar{I}$ кольца $\bar{R}$. Установлена лево-правая симметричность этого свойства, указано его уточнение для коммутативного случая. Отмечены обобщения на полукольца [101, стр. 98]. Л. В. Тюкавкин охарактеризовал также кольца с аксиоматизируемым классом вполне приводимых модулей как кольца с артиновым факторкольцом по радикалу Джекобсона и анонсировал утверждение об эквивалентности следующих свойств: (1) теория ненулевых R-модулей полна; (2) теория ненулевых R-модулей модельно полна; (3) R — бесконечное простое регулярное кольцо [104, стр. 100]. Там же доказано, что для нётерова кольца R как полнота, так и модельная полнота теории инъективных R-модулей равносильна тому, что R — бесконечное артиново кольцо с простым факторкольцом $R/J(R)$. Далее отметим результаты Йенсена и Вамоша [671]: 1) класс Σ-инъективных модулей всегда элементарно замкнут; 2) класс FP-инъективных R-модулей (т. е. таких модулей M, что $\mathrm{Ext}^1_R(F, M) = 0$ для всякого конечно представимого модуля F) конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда конечно аксиоматизируем класс плоских правых R-модулей; 3) класс инъективных модулей над коммутативным кольцом конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда это кольцо нётерово полулокально и обладает лишь конечным числом простых идеалов. Есть также результаты об аксиоматизируемости классов делимых и FP-модулей. Гаравалья [500] доказал, что коммутативное кольцо без нильпотентных элементов регулярно в смысле Неймана тогда и только тогда, когда любой R-модуль элементарно эквивалентен прямой сумме циклических модулей. Баур [229] установил, что теория любого модуля над счетным кольцом R оказывается $\aleph_0$-категоричной в том и только в том случае, когда R конечно и обладает лишь конечным множеством неразложимых R-модулей. В коммутативном случае этим свойством обладают конечные кольца главных идеалов и только они. Там же доказана стабильность теории всех R-модулей для любого кольца R. Саббах [1037] доказал, что нётеровость счетного кольца равносильна ω-стабильности теории любого инъективного модуля над ним. Там же установлена связь между стабильностью модулей и совершенностью кольца.

Изучалась ω-стабильность теории отдельного модуля [500]. В частности, в случае счетного кольца ω-стабильность теории некоторого модуля A равносильна эквациональной компактности всех модулей, элементарно эквивалентных ему. Саббах [1036, 1037] исследовал связь между стабильностью и категоричностью. Обзор по стабильности опубликовал Шеллах [1066].

Л. А. Скорняков [134] предложил элементарное доказательство обобщения теоремы об элементарной эквивалентности прямой суммы и прямого произведения модулей.

Н. А. Рятова [123] указала критерий элементарной эквивалентности модулей над дедекиндовым кольцом. Фишер [458] анонсировал такой результат: если $\varkappa=\varkappa^{|R|+\varkappa_0}$, то для всякого R-модуля найдется элементарно эквивалентный ему насыщенный R-модуль мощности $\varkappa$. Ричман [1006] развил теорию KT-модулей ([см. М75:1419]) с конструктивной точки зрения. Йенсен [669, 670] установил существование колец, элементарно эквивалентных кольцу целых чисел и имеющих любую наперед заданную глобальную размерность (конечную или бесконечную). Углубленное изучение многоязычной логики и ее применения в теории модулей начал Фишер [459].

Шелах [1064, 1065, 1067] решил известную проблему Уайтхеда, установив, что утверждение о свободе абелевой группы C, удовлетворяющей условию $\mathrm{Ext}(C, T)=0$ для всякой периодической абелевой группы T, зависит от выбора теоретико-множественной аксиоматики. Другое доказательство этого факта предложил Эклоф [434].

§ 3. РАДИКАЛЫ, ЛОКАЛИЗАЦИИ И ЧИСТОТА

3.1. Предрадикалы, радикалы и кручения. Предрадикалом называется произвольный подфунктор тождественного функтора (на произвольной абелевой категории). Определения (ко-)наследственного, (ко-)стабильного, предрадикала, радикала, ядерного функтора, кручения даны в [137]. Начатые в [М75:291—294] исследования Бицана, Ямбора, Кепки, Немеца продолжались в [256], где выясняется, в каких случаях $\tau(R)$ — кольцевое прямое слагаемое в R, если τ — конаследственный радикал. Работа Кепки [702] примыкает к [М75:296]. В [257] многие свойства кручений переносятся на наследственные предрадикалы, получены также двойственные утверждения. Аналогичным вопросам посвящены работы Немеца [870] и Жираско

[677]. В [259] выясняется, когда подмодуль $N\subseteq M$ или идеал $I\subseteq R$ имеет вид $r(N)$ (соответственно, $r(R)$) для некоторого предрадикала r с заданными свойствами. В [255] построен аналог первичного радикала в категории модулей и исследована его связь с общими понятиями теории предрадикалов. Фенрик [455] рассматривает процесс построения минимального кручения, содержащего заданный точный предрадикал. А. И. Кашу [73] исследует свойства предрадикалов, определенных ситуацией сопряженности между категорией модулей и произвольной абелевой категорией, при этом один из них оказывается радикалом, а другой — идемпотентным предрадикалом. Никольсон и Уотерс [879] называют модуль M сильно первичным, если для любого ненулевого элемента $m\in M$ найдутся такие $r_1, \ldots, r_n\in R$, что $\mathrm{Ann}_R(\{r_i m\})=0$. Если ${}_RR$ — сильно первичный модуль, то сильно первичные модули образуют полупростой класс. Авторы изучают свойства полученного радикала. Аояма [199] нашел условия, при которых фильтр идеалов коммутативного кольца определяет радикал и выяснил, когда этот радикал удовлетворяет условию $r(\hat{M})=r(M)$ для любого модуля M. Варадараджан [1171] с каждым классом модулей связывает два предрадикала и в качестве приложения получает, например, новое достаточное условие полусовершенности кольца, использующее пустотелые модули (см. [137], стр. 60). Один из этих предрадикалов встречается также в [1168]. Гарднер [501] изучает радикальные свойства T-нильпотентных колец, он же в [502] устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами кручений в R-Mod и в (P/I)-Mod, если I — T-нильпотентный идеал. Подъему свойств по модулю T-нильпотентного идеала посвящена также работа [708]. Е. Л. Горбачук и Н. Я. Комарницкий [41] выяснили, когда класс $\mathscr{M}_I=\{M \mid IM=0\}$, где I — идеал кольца, является радикальным классом некоторого кручения.

С каждым предрадикалом, по аналогии с кручением, можно связать различные обобщения проективности [253, 678], инъективности [252] и т. д. И. Д. Буну [22] для произвольного идемпотентного предрадикала r рассматривает модули, инъективные относительно всех мономорфизмов $0\to A\to B$ таких, что $r(B/A)=B/A$ (соответственно, $r(B)=B$ или $r(A)=A$) и указывает условия попарного совпадения этих трех классов модулей. В [258] предрадикалы применяются для характеризации тестовых модулей (в смысле [137, стр. 70]). К этому кругу относится и работа Даунса [398].

Совершенные кручения в категориях бимодулей изучал Вершорен [1181, 1182]. Большой цикл работ (В. А. Андрунакиевич, К. К. Крачилов, Ю. М. Рябухин [7, 8], В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин [9, 10], В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин, К. К. Крачилов, Е. И. Тэрбырце [196], К. К. Крачилов [88, 89], Ю. М. Рябухин, К. К. Крачилов [121], Ю. М. Рябухин, Р. С. Флоря [122]) посвящен исследованию радикалов и кручений в категориях колец и алгебр. Часть полученных здесь результатов вошла в монографию В. А. Андрунакевича и Ю. М. Рябухина [11]. К этому циклу примыкает и работа Л. А. Скорнякова [136]. Эти результаты в большей степени относятся к теории колец, чем к теории модулей, и в настоящем обзоре невозможно уделить им столько внимания, сколько они требуют.

Отметим также работы Ламбека [746], Дирса [409] и Вершорена [1179] о локализациях в различных абелевых категориях, а также работу Бигара [263], переносящего теорию кручений на категорию f-модулей. Задание радикальных классов модулей с помощью тензорных произведений встречается также у Харуи [611] и Ниты [889]. Отметим и выход статьи Рафаэля [981], известной по препринту [М71:1150].

Перейдем к рассмотрению работ, посвященным более специальным вопросам теории кручений в категории модулей. Пусть R-tors — множество всех кручений в категории R-Mod. Как известно, R-tors — полная структура относительно естественного порядка кручений. Для $\tau \in R$-tors пусть $\mathscr{T}_\tau$ — класс τ-радикальных, или τ-периодических модулей, $\mathfrak{F}_\tau$ — класс τ-полупростых модулей, $Q_\tau(M)$ $(Q_\tau(R))$ — модуль (кольцо) частных модуля M (кольца R) относительно τ. Связь между R-tors и S-tors при заданном гомоморфизме $f: R \to S$ изучали Мэрдоч и Ойстайен [853]. Голан [521] установил, когда сопоставление $R \mapsto R$-tors функториально — это верно, например, для канонического гомоморфизма $\varphi_\tau: R \to Q_\tau(R)$. Лоуден [787] сравнивает кольца частных относительно кручений $\tau \in R$-tors и $\tau^* \in S$-tors таких, что $\mathscr{T}_{\tau^*} = \varphi^{-1}(\mathscr{T}_\tau)$, где $\varphi: S\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ — «забывающий структуру S-модуля функтор».

Е. И. Тэбырцэ [158] исследовал неприводимые по пересечению элементы в R-tors и показал, в частности, что простые в смысле Голдмана кручения обладают этим свойством, а если кольцо R имеет размерность Габриэля, то верно и обратное. Е. Л. Попеску [962] показала, что R-tors — структура с дополнениями тогда и только тогда, когда R — полуартиново кольцо. Вопрос об алгебраичности R-tors исследовал Мартинес [794], а Голан [528] привел некоторые условия компактности элементов решетки R-tors. Все кручения над некоммутативными кольцами главных идеалов в терминах атомов R-tors описали Е. Л. Горбачук и Н. Я. Комарницкий [39]. И. Д. Буну и Е. И. Тэбырцэ [24] изучали решетку наследственных предрадикалов в R-Mod, доказали ее модулярность и атомность, описали ее атомы и установили, что ее булевость эквивалентна классической полупростоте кольца R.

Простые в смысле Голдмана кручения рассматривали Голан [520, 528] и Рэйно [986, 987, 988]. В частности, последний показал, что если стоуновская топология на Speg$R$, где Speg$R$ — множество простых кручений в R-Mod, совпадает с топологией Зарисского, то размерность Габриэля кольца R совпадает с размерностью Крулля Speg R как частично упорядоченного множества (т. е. с TTK-размерностью). Голдстон и Мьюборн [534, 535] использовали Speg$R$ как базу для аналога структурного пучка. Оширо [907] исследовал теории кручения, определяемые подмножествами спектра кольца идемпотентов коммутативного кольца с операцией сложения $e \oplus f = e + f - Lef$. Рингель [1014] исследовал Speg$R$ для конечномерной алгебры R.

Ряд работ посвящен «относительной гомологической классификации колец и модулей». А. И. Пономарев [107] изучал классически τ-полупростые кольца для наследственного предрадикала τ, которые характеризуются рядом эквивалентных свойств, например: все R-модули τ-инъективны. Еще одно условие классической τ-полупростоты указал Бэччела [222]. В [109, 110] А. И. Пономарев исследует τ-регулярные кольца. Здесь же упомянем работы [370, 371, 1015].

Модули, удовлетворяющие условию минимальности (максимальности) для τ-замкнутых подмодулей называются τ-артиновыми (τ-нётеровыми). Миллер и Тепли [828] получили обобщение теоремы Гопкинса: если кольцо R τ-артиново, то любой τ-артинов R-модуль τ-нётеров. Голан [525] нашел ряд условий, эквивалентных τ-артиновости кольца. Работы [517, 519, 523] посвящены кольцам, имеющим конечную τ-длину, первая из них примыкает к [М75:597]. Здесь же упомянем статьи Миллера и Тепли [827] о τ-плоских модулях и Шпулбера [1102] о коммутативных τ-дедекиндовых кольцах. Сарат и Варадараджан [1045] получили непосредственное обобщение известного критерия Чейза нётеровости кольца.

Вопросы расщепляемости кручений исследовал Л. А. Койфман [83, 84]. Основной результат: если R — коммутативное кольцо и $\tau(R) = 0$, то кручение τ расщепляется тогда и только тогда, когда соответствующий τ радикальный фильтр содержит наименьший идеал K, причем R/K — конечная прямая сумма полей и $x \in Kx$ для любого элемента $x \in K$. Другое описание расщепляющихся кручений над коммутативными кольцами дано в [483]. Со свойствами расщепления связаны также результаты работ [185, 415, 1141, 1142]. Е. Л. Горбачук и Н. Я. Комарницкий [40] исследуют расщепляемость S-кручений над правыми дуо-кольцами (если S — левый идеал кольца R, то S-кручение определяется множеством таких левых идеалов $T \subseteq R$, что $T + S = R$, при условии, что это множество — радикальный фильтр). Те же авторы [42] доказали нерасщепляемость некоторых кручений. Н. Я. Комарницкий [85] выяснил, когда любое кручение над правым дуо-кольцом является S-кручением. Фулберт и Кузманович [482, 486] получили условия расщепления кручения Голди на конечно порожденных модулях.

Связь теории кручений с теорией примарных и терциарных разложений и ее обобщениями освещена в книге Голана [522]. Настасеску [856] изучал терциарные и примарные элементы решетки τ-замкнутых подмодулей конечно порожденного модуля. Сюда примыкают также работы [45, 236, 369, 550]. Шорс [1072] исследовал кольца, над которыми всякий периодический в смысле Диксона модуль разлагается в прямую сумму S-примарных (для некоторых простых модулей S) модулей. Ричардс [1005] построил разложение кручения Голди над первичным нётеровым кольцом размерности Крулля 1 в прямую сумму кручений, определяемых классами эквивалентности простых модулей относительно отношения $S_1 \sim S_2 \Leftrightarrow \mathrm{Ext}^1(S_1, S_2) \neq 0$.

Продолжалось исследование стабильных кручений, т. е. таких $\tau \in R$-tors, что класс $\mathcal{T}_\tau$ замкнут относительно взятия инъективных оболочек. И. Д. Буну [23] доказал, что любое предкручение над R стабильно тогда и только тогда, когда всякий квазиинъективный R-модуль инъективен. Стабильные кольца, т. е. кольца, над которыми любое кручение стабильно, охарактеризовал Рэйно [987]. Папп [944, 946—948] исследовал стабильные нётеровы кольца. В [945] кручение τ называется полустабильным, если $\tau(F)=0$ или $\tau(F)=F$ для любого неразложимого инъективного R-модуля F. Приведена характеризация колец R, над которыми все кручения полустабильны, в терминах топологии на Speg$R$. Маноха [789] указал достаточное условие стабильности кручения τ_R (напомним, что τ_M — это наибольшее кручение, для которого модуль M полупрост).

Привлекали внимание симметрические кручения, определенные в [М75:1010] как кручения, радикальный фильтр которых имеет базис из двусторонних идеалов. Различные аспекты локализации относительно симметрических кручений обсуждает Ойстайен [927]. Он же [918] указал условия совершенности симметрического кручения. В [926] кольцо τ называется центральным по Зарисскому, если топология Зарисского на множестве первичных идеалов кольца R (которое, как в коммутативном случае, будем обозначать Spec$R$) порождена подмножествами $X_I = \{P \mid P \not\supset I\}$, где I пробегает спектр центра C кольца R. Доказывается, что в этом случае все симметрические кручения в R-Mod индуцированы кручениями в C-Mod, а для совершенного симметрического кручения локализацию кольца R можно определить как модуль частных модуля ${}_CR$. Близкими свойствами, но для более узкого класса кручений, обладают бирациональные расширения центра [930], т. е. кольца, для которых вложение центра индуцирует гомеоморфизм открытых подмножеств спектров. Отмечено, что к этому классу относятся все полупервичные PI-кольца. Сюда же примыкают работы [867, 929]. Сим [1075, 1076] показал, что простое симметрическое кручение над нётеровым кольцом R задается радикальным фильтром φ_{R-P}, порожденным множеством $\{I \triangleleft R \mid I \not\supset P\}$, где

P — некоторый первичный идеал, и что любое кручение над нётеровым кольцом является симметрическим тогда и только тогда, когда это кольцо вполне ограниченное [1074]. Бичи [237] указывает еще одну характеризацию этих колец в терминах теории кручений.

Ряд авторов продолжал изучение колокализаций и связанных с ними понятий в категории модулей. К направлению, начатому работами Бичи [М72:182, 183], примыкает статья Рамамурти и Раттера [976]. Другое направление — исследование модулей копериодических, в смысле [М72:71], представлено работами Орсатти [902] и Фукса [475]. Блэнд [269] установил, что τ_M-коделимость модуля B эквивалентна его $(R/\mathrm{ann}\, M)$-проективности (где M — любой R-модуль). Третье направление — изучение колокализаций относительно идемпотентного идеала, связанных также с кополупростыми классами модулей, развивали Сато [1050], Отаке [895], Като [698], Голан и Миллер [529]. К нему примыкает также более ранняя работа Миллера [826] о радикально-полупростых классах. Для любого кручения $\tau \in R$-tors определяется класс τ-кополупростых модулей $C_\tau = \{M \in R\text{-Mod} \setminus \mathrm{Hom}_R(M, N)=0$ для любого $N \in \mathcal{T}_\tau\}$. Показано, что если класс $\mathcal{T}_\tau$ радикально-полупрост (в этом случае кручение τ называется джансовым), то кручение τ однозначно восстанавливается по классу C_τ. Отображение Δ, ставящее в соответствие классу $\mathcal{T}_\tau$ класс C_τ и отображение Δ^0 такое, что $\Delta^0(C\tau) = \{M \in R\text{-Mod} \setminus \mathrm{Hom}_R(M, N)=0$ для $N \in C_\tau\}$, рассматривает Голан [518], показавший, что следующие условия эквивалентны: (1) R — совершенно; (2) отображение Δ сюръективно; (3) отображение Δ^0 сюръективно. Под τ-колокализацией модуля M понимается гомоморфизм $\alpha: N \to M$ такой, что $\ker\alpha \in \mathcal{T}_\tau$, $M/\alpha(N) \in \mathcal{T}_\tau$ и N является τ-кополупростым τ-проективным модулем. Оказалось, что любой модуль имеет колокализацию тогда и только тогда, когда кручение τ джансово [895]. В этом случае колокализация — это естественный гомоморфизм $L(\tau) \underset{R}{\otimes} L(\tau) \underset{R}{\otimes} M \to M$, где $L(\tau)$ — наименьший идеал, принадлежащий радикальному фильтру Φ_τ кручения τ. Изложению этого направления в теории колокализаций посвящен обзор Голана [527]. С изучением радикально-полупростых классов связаны работы Блэнда [268] и Гарднера и Стюарта [504].

Н. Я. Комарницкий [86] и Прест [965] установили, что класс $\mathfrak{F}_\tau$ является квазимногообразием тогда и только тогда, когда Φ_τ содержит базис из конечно порожденных левых идеалов. Последний также выяснил, когда класс τ-инъективных модулей является квазимногообразием, охарактеризовал в терминах логики джансовы кручения [966] и исследовал для некоторых $\tau \in R$-tors модельное пополнение теории τ-полупростых модулей [967].

Браун [294, 295] и Снайдер [1099] изучали сингулярный идеал групповой алгебры. Шпулбер [1101] рассматривал M-насыщенные радикальные фильтры, т. е. фильтры Φ_τ, где $\tau=\tau_N$, а $N=M/\tau(M)$. Лин [774] определил два произведения радикальных фильтров в прямом произведении колец и исследовал их свойства. Эванс [436] выяснил, когда кручение Хаттори совершенно.

Идзава [656] охарактеризовал такие конечно порожденные проективные правые R-модули P, что модуль $P\otimes_R X$ является σ-инъективным (σ-проективным) тогда и только тогда, когда X — τ-инъективный (τ-проективный) модуль, где τ и σ — двойственные в смысле [M72:1098] кручения в R-Mod и в $(\mathrm{End}_R P)$-Mod, соответственно. Краун и Хатчинсон [392] установили связь свойств функтора локализации со свойствами функтора пополнения по некоторой системе подмодулей. Упомянем также связанные с локализациями и кручениями работы [278, 319, 374, 625, 959, 1148] и обзорные статьи [235, 524]. Периодические и полупростые модули встречаются также в [309, 324, 712, 742, 968].

3.2. Чистота. Значительное число работ было посвящено исследованию чистот в категории абелевых групп. Эти работы не отражаются в настоящем обзоре, так как большая часть их рассматривалась в обзоре А. П. Мишиной [96]. Из работ, в которых аналоги теоретико-групповых результатов были получены для модулей над теми или иными кольцами, отметим исследования А. В. Иванова [69] об ω-делимых и ω-плоских модулях, А. А. Мановцева [95] о чистотах, замкнутых относительно прямых сумм и прямых произведений.

Работы А. И. Генералова [30, 31] посвящены обобщению слабой сервантности на модули. В [1228, 1231] рассматривался вопрос об алгебраической компактности (т. е. инъективности относительно чистых вложений) прямых сумм алгебраически компактных модулей. С алгебраически компактными модулями связана также работа Кушо [377]. Чисто квазиинъективные модули над дедекиндовой коммутативной областью изучал Ю. Б. Добрусин [53].

Аналог сервантных оболочек элементов для модулей без кручения в смысле Леви строит С. К. Росошек [117]. Рангасвами [979] обобщает на модули понятие сбалансированной подгруппы. Сингх и Тальвар [1085] получили следующий критерий чистоты подмодуля $N\subset M$ над ограниченным HNP-кольцом: подмодуль N чист в M, если и только если $MA^k\cap N=NA^k$ для любого k и любого максимального обратимого идеала A (здесь и далее, если не оговорено противное, имеется в виду чистота в смысле Кона [M75, стр. 112]). Свойства чистых подмодулей изучали также Реге и Варадараджан [989], Кушо [379]. Брюер и Коста [286] рассматривали чистые расширения колец и показали, что чистота сохраняется при переходе к кольцам формальных степенных рядов. В [1229] доказано, что локально проективные R-модули чисты в произведении копий кольца R. Некоторые классы чистых вложений рассматривались также в [129, 389, 390, 885, 1016].

Дуализации понятия чистоты исследовали Чоудри и Тевари [355]. Свойства подмодулей, близкие к чистоте, встречаются также в [435, 1213].

3.3 Кольца частных относительно кручений. В данном разделе рассмотрены работы, основным объектом исследования в которых были кольца частных относительно различных кручений, в том числе полные и классические кольца частных и их обобщения. Кольцо частных кольца R относительно кручения τ или радикального фильтра Φ будем обозначать через $Q_\tau(R)$ или $Q_\Phi(R)$, соответственно, полное кольцо частных — через $Q(R)$, классическое кольцо частных — через $Q_{\mathrm{cl}}(R)$, кольцо частных относительно мультипликативной системы S — через R_S, первичный радикал кольца R — через $N(R)$.

А. И. Кашу [72], Хаугер и Циммерман [615], Кнорр [722], Хедштрем [620], Бичи [234] и Морита [839] изучали представление колец частных бикоммутатором некоторого модуля. Ойстайен [922, 923] показал, что свойство кольца быть вполне ограниченным и AR-свойство переносятся на кольцо частных относительно совершенного кручения.

В. П. Елизаров [59] доказал, что если Φ — сильный симметричный фильтр левых идеалов кольца R, то кольцо $Q_\Phi(R)$ является (полу-)простым артиновым кольцом тогда и только тогда, когда Φ — совершенная система, состоящая из всех больших левых идеалов кольца R, причем R — (полу-)первичное кольцо. Для радикальных фильтров близкие вопросы исследовал Зельманович [1225]. Пэйдж [938] показал, что если кольцо R непрерывно в смысле Утуми, $\tau\in R$-tors совершенно и $\tau(R)=0$, то $Q_\tau(R)$ также непрерывно. Науелаертс [866] отметил, что кольцо частных порядка Асано относительно симметричного кручения является порядком Асано. Сато [1048] установил, что если R — нётерово слева и справа кольцо и $\mathrm{inj.dim}({}_RR)\leqslant 1$, то каноническое вложение $\varphi: R\to Q(R)$ является плоским эпиморфизмом тогда и только тогда, когда R является левым или правым QF-3-кольцом, а $Q(R)$ — квазифробениусовым кольцом. Понеляйт [961] выяснил, когда классическое кольцо частных локального однорядного кольца самоинъективно. Чэттерс [344] показал, что если R — нётерово левое PP-кольцо, то $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ полупримарно тогда и только тогда, когда любой регулярный слева элемент кольца R регулярен и $R/N(R)$ — левое кольцо Голди. А. А. Туганбаев [149] установил, что если R — наследственное нётерово первичное кольцо, квазипроективность R-модуля $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ эквивалентна тому, что R — кольцо матриц над локальной областью главных односторонних идеалов A, полным в $J(A)$-адической топологии. Вопрос об инъективности R-модуля $Q_{cl}(R)$ для псевдофробениусовых и близких к ним колец рассмотрел Фейс [449].

Раттер [1035] охарактеризовал такие кольца R, что кольцо $Q(R)$ является конечно порожденным проективным R-модулем и обладает некоторым теоретико-кольцевым свойством. Здесь же упомянем работы [547, 654, 800, 1163].

Рубин [1032] выяснил, когда кольцо $Q(R)$ — простое, если R — несингулярное конечномерное в смысле Голди кольцо (ср. [M75:100]). Хатчинсон и Турнидж [641] указали условия на контекст Мориты $\langle R, P, Q, S \rangle$, при которых кольца $Q(R)$ и $Q(S)$ Морита-эквивалентны. Штенштрем [1120] дал полное описание кольца $Q(R)$, когда R — кольцо матриц специального вида. Чучел и Еггерт [357] охарактеризовали полное кольцо частных гомоморфного образа полулокальной прюферовой области. Длаб [418] описал максимальное существенное расширение для некоторых несингулярных колец. Джилмер и Хайнцер [509] доказали, что если R — нётерово кольцо, X — бесконечное множество коммутирующих переменных, то кольца частных кольца $R[X]$ по некоторым мультипликативным системам нётеровы. Вопрос о переносе некоторых свойств с коммутативного кольца R на кольцо R_S рассматривался в [463].

К. И. Бейдар [15], К. И. Бейдар и А. В. Михалёв [101, стр. 99] с помощью понятия ортогональной полноты сводят изучение колец частных полупервичных колец к первичному случаю.

Продолжалось изучение нётеровых колец, имеющих артиново классическое кольцо частных, начатое известной серией работ Смолла. Бичи и Блэр [243] применяют для описания таких колец теорию кручений. С другой стороны, в работах Ленагана [759], Мюллера [844], Краузе, Ленагана и Стаффорда [729] привлекается размерность Крулля. Идеал I в R называется слабо идеально инвариантным, если $|I \otimes_R M| < |_R R/I|$ для любого конечно порожденного модуля M такого, что $|_R M| < _R R/I|$, где $|M|$ — размерность Крулля. Макколеевым, или k-однородным, называется кольцо R такое, что $|_R R| = |L|$ для любого ненулевого левого идеала L кольца R. В последней из названных статей, например, доказано, что если R — макколеево кольцо, и $N(R)$ — слабо инвариантный идеал, то R обладает артиновым кольцом частных. Некоторое усиление этого результата получили Голди и Краузе [532]. Как оказалось, слабая идеальная инвариантность с успехом используется при исследовании локализуемости первичных идеалов (см. 3.4).

Здесь же отметим результаты Сато [1049], указавшего такой радикальный фильтр Φ левых идеалов нётерова кольца R размерности Крулля 1, что $Q_\Phi(R)$ изоморфно двустороннему классическому кольцу частных кольца R/A, где A — артинов

радикал кольца R, и Стафферда [1114]: если R — вполне ограниченное нётерово кольцо и $K|I| \geqslant \alpha$ для любого ненулевого идеала I кольца R, то любой левый идеал $L \subseteq R$ такой, что $|R/L| < \alpha$, содержит регулярный элемент кольца R.

Для нётеровых колец, целых над подкольцом своего центра, проблему существования артинова классического кольца частных изучали Вангео и Тевари [1185], а для колец Безу, являющихся кольцами Голди — Уорфилд [1189]. Векслер-Крайндлер [1196] показала, что если кольцо R имеет артиново классическое кольцо частных, то и кольцо косых многочленов над ним обладает этим свойством.

Существование классического кольца частных для полупервичного PP-кольца, конечно порожденного как алгебра над своим центром, доказал Йондруп [686]. Классические кольца частных PP-колец исследовал также Оширо [908].

В ряде работ изучались кольца частных PI-колец. Отметим прежде всего результат К. И. Бейдара [17] о переносе обобщенных тождеств с кольца R на кольцо $Q(R)$ и о структуре кольца $Q(R)$, когда в R выполнено строгое тождество: $Q(R) \cong \mathrm{End}\hat{P}$, где P — проективный образующий над строго регулярным самоинъективным PI-кольцом. Другой результат К. И. Бейдара [16]: если PI-кольцо обладает классическим кольцом частных, то последнее — также PI-кольцо. Форманек [467, 468] доказал, что центр тела частных свободной аффинной алгебры порядка $n=3$ и $n=4$ — чисто трансцендентное расширение основного поля. Для $n \geqslant 5$ вопрос пока открыт. Роуен [1031] изучал кольца с мономиальными условиями, для которых полное кольцо частных изоморфно кольцу $\mathrm{End}_D V$, где V — линейное пространство над телом D. Шелтер и Смолл [1055] привели пример PI-кольца R такого, что $Q(D)$ не удовлетворяет никакому полиномиальному тождеству, а также пример артинова кольца R такого, что $Q(R)$ даже не нётерово.

Выяснению связи свойств колец частных кольца R и кольца инвариантов относительно действия на R конечной группы посвящены работы Фейса [443], Китамуры [720] и Рено [1001]. Наиболее сильные результаты в этом направлении получены К. И. Бейдаром и В. К. Харченко (см. обзорную статью последнего [164]).

Вопрос о функториальности конструкции полного кольца частных для различных классов морфизмов колец рассматривали Китамура [719] и Лоуден [785].

Значительное число работ содержит результаты о кольцах частных групповых и близких к ним колец. Отметим серию работ Ханнаха [589, 590, 591, 592], Ханнаха и О'Миры [593], О'Миры [898], в которой изучаются полные кольца частных групповых алгебр над полем K. Указаны некоторые классы групп, для которых кольцо $Q(KG)$ попадает в один из следующих классов: (a) простые артиновы кольца; (b) кольца линейных преобразований; (c) непростые кольца с нулевым цоколем; (d) конечные в смысле Неймана простые кольца, т. е. кольца, в которых $xy=1$ влечет $yx=1$; (e) бесконечные простые кольца. Например: если G — группа со счетным числом классов сопряженных элементов, то имеет место случай (b) или (e), причем если сверх того группа G локально конечна, то только случай (e).

Браун [296] показал, что если G является FC-группой, и $|\Delta^+(G)|<\infty$, то центр полного кольца частных групповой алгебры группы G над полем совпадает с полным кольцом частных ее центра. Лоуренс и Лоуден [753] доказали, что если H — подгруппа счетной группы G, алгебра KG — полупервичное несингулярное кольцо и кольцо $Q(KG)$ естественно изоморфно кольцу $KG \underset{KH}{\otimes} Q(KH)$, то $|G/H|<\infty$. Условия непрерывности и самоинъективности кольца $Q(KG)$ указали Браун и Лоуренс [297].

Хорн [633, 634] указал некоторый класс групп G таких, что если R — порядок в квазифробениусовом кольце, то RG порядок в артиновом или квазифробениусовом кольце. Достаточные условия того, что скрещенное произведение является полупервичным кольцом Голди, нашел Рейд [990]. Некоторые результаты о полном кольце частных свободных абелевой группы получил Уилкерсон [1200]. Кольца частных полугрупповых колец изучали Людеман и Бэйт [787]. Связь локализаций целочисленного группового кольца с локализацией группы исследовал Ойстайен [921]. Вопрос о существовании артинова или квазифробениусова кольца частных группового кольца рассматривал Браун [293].

Полные кольца частных использовали также Харада [601], Оширо [904, 905], Фаччини [438], Хукаба и Келлер [635]. Ирлбек [644] использует их для характеризации PP-колец, Ленаган [760] применяет классические кольца частных для изучения редуцированного ранга модулей, Герстейн [506] — для доказательства классических результатов о диагонализируемости матриц, Коэн и Монтгомери [363] — для исследования конечных групп автоморфизмов первичных колец.

Классическое кольцо частных алгебры A над коммутативным кольцом R, являющейся конечно порожденным плоским R-модулем, рассматривал Сето [1133].

Армендариц [200] рассматривал такие кольца R, что любой собственный R-подмодуль в $Q(R)$ конечно порожден. Эггерт [431] изучал коммутативные кольца R, надкольца которых в $Q(R)$ целозамкнуты в $Q(R)$.

Подмодули в $Q(R)$ рассматривались также в [601, 804, 805].

Фишер [460] доказывает аналоги теоремы Голди для дифференциально первичных колец, Ион и Настасеску [642, 643] — для градуированных колец. Ойстайен [928, 931] строит для градуированных колец и модулей теорию кручений, определяет локализацию, подобную классической, и т. д. В. И. Арнаутов [12] показывает, что локально ограниченная топология продолжается с коммутативного кольца R на R_A, если A не содержит обобщенных делителей нуля (при некоторых дополнительных условиях — до локально ограниченной топологии). Локализации колец с инволюцией изучались в [748], локализации упорядочиваемых модулей — в [470].

Армендариц и Фишер [202] исследовали связь между кольцами частных кольца и идеализатора его правого идеала, имеющего нулевой левый аннулятор, Беррондо [249] — связь между полем рациональных функций и полем частных кольца степенных рядов над коммутативной областью целостности.

Кон [364], Кон и Дикс [368] исследовали обращающие гомоморфизмы полу-FI-колец, выяснив, например, когда обращающая локализация R_Γ полу-FI-кольца R является полу-FI-кольцом, а в [365] — обращающие локализации колец главных односторонних идеалов. Для некоторых систем Γ обращающие локализации R_Γ описал Бичи [240].

В. Н. Герасимов [32] построил явную конструкцию обращающей локализации и с ее помощью доказал, что любое 2-FI-кольцо R потенциально обратимо.

В работах [171, 372] исследуется тело дробей универсальной обертывающей алгебры конечномерной алгебры Ли. Области Оре и их тела частных рассматривали Ирвинг [648], Жордан [690].

С кольцами частных связаны также работы Шермана [1068], Сето [1130], Освальда [916], обзорные статьи и доклады [526, 531, 728].

3.4. Локализация относительно (полу-)первичных идеалов. С (полу-)первичным идеалом P кольца R связываются: мультипликативная система $C(P)$ элементов кольца R, регулярных по модулю P; кручение $t_P=\tau_{R/P}$; симметрическое кручение t_{R-P}, радикальный фильтр которого порожден множеством идеалов, имеющих нулевой аннулятор по модулю P. С каждым из двух кручений можно связать локализацию R_P и R_{R-P}, соответственно, так же как и с мультипликативной системой $C(P)$, если она удовлетворяет условию Оре (в этом случае идеал P называется локализуемым, а соответствующее кольцо частных — его классической локализацией). Условия, при которых локализуем первичный идеал P из R такой, что R/P — кольцо Голди, нашли Бичи и Блэр [242], в полупервичном случае — Коззенс и Сандомирский [387] в терминах свойств кручения t_P, в случае первичного идеала нётерова кольца — Н. Попеску [963], Лезьёр [764], Кошон и Лезьёр [334] при дополнительном предположении, что R цело над подкольцом своего центра — Шамари и Удри [341].

Мюллер [840, 841] определил клан как минимальное множество $\{P_1, \ldots, P_n\}$ первичных идеалов нётерова кольца R такое, что $S=\bigcap_{i=1}^{n} P_i$ — локализуемый полупервичный идеал, причем идеал $J(R_S)$ обладает свойством Артина—Риса. Показывается, что идеал не может принадлежать более чем одному клану. Указан ряд свойств кольца частных R_S, например: центральные идемпотенты пополнения кольца R_S в $J(R_S)$-адической топологии находятся во взаимно однозначном соответствии с такими подмножествами $I \subseteq \{P_1, \ldots, P_n\}$, что $\bigcap\{P_i \mid P_i \in I\}$ — локализуемый идеал. Обобщение кланов на ненётеровы кольца рассматривал Лай [743].

В работе Ойстайена [919] исследуются локализации FBN-колец, при этом основное внимание уделено симметрическим локализациям. Локализации относительно полупервичных идеалов наследственных FBN-колец изучались в [1157]. Здесь же упомянем работы Мюллера и Сандомирского [846, 847, 1043].

Мюллер [842, 844] исследовал локализации нётеровых PI-колец. В частности, им построен пример конечно порожденной нётеровой PI-алгебры над полем, лежащей в кольце матриц порядка 2 над коммутативной нётеровой областью, каждый первичный идеал которой локализуем, но существует (притом единственный) простой идеал центра алгебры R, не являющийся сокращенным. В [843] изучаются локализуемые идеалы колец матриц специального вида.

Браун, Ленаган и Стаффорд [298] доказали, что локализуемый полупервичный идеал S такой, что кольцо R/S макколеево, слабо идеально инвариантен, а если S обладает свойством Артина—Риса и R/S — макколеево кольцо, то, обратно, из слабой идеальной инвариантности идеала S следует его локализуемость. Связь локализуемости с идеальной инвариантностью исследовал также Мюллер [843].

Даунс [397, 398] изучал локализации относительно односторонних первичных идеалов, Ойстайен [917] — связь между кручениями tp и t_{R-P} для нётерова кольца R и условия, при которых они совершенны, Латсис [750] — локализации дуо-колец. Бичи [241] получил условия классической полупростоты кольца частных относительно кручения tp по модулю радикала Джекобсона

3.5. Пучки модулей и некоммутативные аналоги структурного пучка. Если $\mathfrak{R}$ — окольцованное пространство, а R — его кольцо сечений, то можно рассмотреть функторы $\mathfrak{R}\text{-Mod} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} R\text{-Mod}$, где $F(\mathfrak{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}, \mathfrak{M})$, а слои $\mathfrak{R}$-модуля $G(M)$ определяются равенством $G(M)(x) = \mathfrak{R}(x) \otimes_R M$, где x — элемент базисного пространства. Эти функторы сопряжены, а если

базисное пространство компактно (паракомпактно) и только в этом случае эти функторы осуществляют эквивалентность категорий всех (конечно порожденных) модулей ([851], см. также [849]). Мулвей [M71:807], [852] (см. также [M75:901]) установил эквивалентность следующих свойств: (1) $\mathfrak{R}$ — образующий категории $\mathfrak{R}$-модулей; (2) каждый слой пучка $\mathfrak{R}$ порождается сечениями по сколь угодно малой окрестности. Специализацию и уточнение этого результата для случая пучка непрерывных функций и структурного пучка коммутативного кольца можно найти в [850] и [M75:901] соответственно. Сето [1132] показал, что точная последовательность модулей $B \to C \to 0$ расщепляется тогда и только тогда, когда расщепляется каждый ее слой в пучке пирсовского представления. Карраль [326] назвал коммутативное кольцо мягким, если локализации относительно его максимальных идеалов сюръективны, и доказал, что мягкость кольца R равносильна квазикогерентности любого пучка R-модулей над пространством максимальных идеалов.

В работах Вершорена и Ойстайена [924, 933, 935, 1180, 1183] строится теория кручений и локализаций в категории предпучков модулей над фиксированным (пред-)пучком колец. Кручение τ в такой категории называется локальным, если оно определено семейством кручений $\tau(U)$ в категориях $R(\mathcal{U})$-Mod, где $\mathcal{U}$ — открытые подмножества базисного пространства, $R(\mathcal{U})$ — соответствующие кольца сечений. Для локальных кручений и для вялых пучков строятся аналоги модулей частных. Выясняется, при каких условиях кручение и локализация сохраняют свойство предпучка быть пучком. Вершорен [1178] рассматривал аналоги совершенных кручений. При некоторых ограничениях это свойство оказалось эквивалентным послойной полупростоте любого пучка модулей.

Голан, Рэйно и Ойстайен [530] строят аналог структурного пучка для некоторого класса некоммутативных колец, включающего алгебры Адзумая. Ойстайен [925] вычислил слои этого пучка. Другие аналоги структурного пучка рассмотрены в [867, 920, 926] (см. также [534]).

Для полупервичного аффинного PI-кольца в [934] строится аналог структурного пучка, более близкий по свойствам к коммутативной конструкции: базисным для него является пространство первичных идеалов кольца с топологией Зарисского, он функториален относительно расширений, порожденных централизующими образ элементами (иначе говоря, расширений Прочези) и на открытом плотном подмножестве его базисного пространства его слои — классические локализации (см. 3.4). Применения совершенных локализаций в категории бимодулей к этим пучкам описываются в [1181, 1182]. Другой подход к некоммутативному структурному пучку развивает Кон [367]. Представлениям некоммутативных колец сечениями пучков посвящены работы Сето [1134] и Вамоша [1166].

В. К. Захаров [68] построил представление сечениями ортопополнения и делимой оболочки кольца.

3.6. Эпиморфизмы колец. Топологическое пространство (кольцевых) эпиморфизмов конечномерной алгебры в простые артиновы кольца рассматривает Рингель [1014]. Оливье [897] доказывает, что произвольный эпиморфизм коммутативных колец $\alpha: R \to S$ разлагается в композицию эпиморфизма $\beta: R \to T$, индуцирующего гомеоморфизм $\beta^*: \operatorname{Spec} T \to \operatorname{Spec} R$, и плоского сюръективного эпиморфизма $\gamma: T \to S$. Эпиморфизмы коммутативных колец встречаются также в [721].

Булашевска и Кремпа [306] показывают, что если $\alpha: R \to S$ — эпиморфизм колец, то коммутативность, наличие единицы, нильпотентность и T-нильпотентность переносятся с кольца R на кольцо S. Напротив, выполнение тождества (даже стандартного степени 3) не переносится с кольца R на кольцо S (Гарднер [503]).

Для плоского эпиморфизма $\alpha: R \to S$ Удри [636] устанавливает, когда кольцо S локально, квазилокально, полулокально. Подъем некоторых свойств при абсолютно плоском гомоморфизме рассмотрен в [952]. Кручение, ассоциированное с эпиморфизмом колец, изучал Ламбек [746]. Шпулбер [1105], Нишида [884] и Васконселос [1175] выясняли, когда заданный гомоморфизм колец является плоским эпиморфизмом. Шинагава [1069] установил связь между дивизориальными и кодивизориальными модулями над областями Крулля A и B, если $i: A \to B$ — плоское вложение.

Чиппола [360] рассматривает обобщение теории строго плоского спуска Гротендика.

Морфизмы в категории колец и в других категориях, свойства которых близки к свойствам плоских кольцевых эпиморфизмов, изучались в [605, 707, 1211].

3.7. Максимальные порядки в центральных простых алгебрах и их обобщения. В книге Райнера [991] излагается теория идеалов максимальных порядков. Фейс [445] изучает некоммутативный аналог прюферовых колец, а Марубаяши [797] продолжает изучать некоммутативные кольца Крулля.

Коззенс и Сандомирский [385, 386] исследуют рефлексивные идеалы в максимальных порядках, Коззенс [383] — рефлексивные модули над ними. Шамари и Мори [342] доказали следующий аналог теоремы о главном идеале: если R — первичное нётерово PI-кольцо, центр которого — область Крулля, то хотя бы один из радикалов компонент минимального терциарного разложения любого главного идеала в R — минимальный первичный идеал. Некоторые обобщения этой теоремы получил Мори [807]. К этому ряду относятся и работы [337, 339, 637, 806].

Стаффорд [1108] доказал теорему о сокращении для некоторых проективных модулей над порядками Асано (см. также [1018]).

Джинн и Мосс [512] показали, что двусторонний нётеров порядок в артиновом кольце разлагается в прямую сумму артинова идеала и кольца с нулевым цоколем. Этот результат стимулировал исследование артинова радикала в таких кольцах (Чэттерс [344, 345]) и его аналогов (Чэттерс и Робсон [349]).

Харада [599] исследует представление порядка, эквивалентного данному, в виде пересечения идеализаторов.

Для коммутативной наследственной области R с полем частных K показано, что любая подалгебра Λ в проективной сепарабельной K-алгебре Σ, целая над R, есть R-порядок, и что любой максимальный R-порядок наследственный (Киркман и Кузманович [716]). В [182] показано, что некоторое кольцо частных максимального порядка в полупростой конечномерной алгебре над алгебраически замкнутым полем евклидово. Максимальные V-порядки в кольце матриц K_n, где V — кольцо нормирования высоты 1 в поле K, описал Н. И. Дубровин [58].

Коззенс [384] называет полулокальное кольцо Λ с множеством максимальных идеалов $\{M_1, \ldots, M_n\}$ локализуемым, если существует такое множество кольцевых эпиморфизмов $\{\varphi_i: \Lambda \to \Gamma\}$, что $(\Gamma_i)_\Lambda$ и ${}_\Lambda(\Gamma_i)$ — конечно порожденные проективные модули, и $\Gamma_i \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda/M_j = 0$ при всех $j \neq i$. Анонсирован ряд результатов о структуре (в терминах блочных матриц) локализуемых порядков, конечно порожденных как модуль над центром.

Рамрас [977] и Янус [663] изучают вопрос о том, когда тензорное произведение колец оказывается максимальным порядком, а Шамари [338] — тот же вопрос для расширений Оре (см. также [866]).

Масайке [799] определяет и исследует отношение эквивалентности между порядками в двух различных артиновых полупростых Морита-эквивалентных кольцах. Науелаертс и Ойстайен [868] рассматривают класс колец, естественно включающий, наряду с нётеровыми наследственными PI-кольцами, классические порядки в центральных простых алгебрах.

§ 4. МОДУЛИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ

4.1. Топологические модули. П. И. Кирку ([168], стр. 50) отметил, что произвольный модуль над дискретным кольцом R является предкомпактным топологическим R-модулем. Кушо [377] рассматривает в модуле топологию, базис окрестностей нуля которой состоит из всех таких подмодулей, фактормодули по которым являются модулями конечного типа. Ряд замечаний о топологиях Зарисского на кольцах и модулях делает Костовичи [375]. Проданов [968] исследует предкомпактные минимальные топологии в некоторых модулях без кручения В. И. Арнаутов и А. В. Михалёв ([170], ч. 2, стр. 8) получили топологический аналог теоремы Гильберта о базисе (для условия обрыва возрастающих цепей открытых правых идеалов) для топологических колец и модулей. С. Ф. Алексей и Р. К. Калистру в [3] и Р. К. Калистру в [71] анализируют вопрос о полноте свободного топологического модуля. М. И. Водинчар ([29]; [168], стр. 18; [170], ч. 2, стр. 30) исследует алгебраические радикалы топологических модулей. Линейным топологиям модулей посвящены статьи Балле [224, 225]. В [197] доказано, что если R — полное кольцо с базисом окрестностей нуля из левых идеалов, то R — полупростое линейно компактное кольцо тогда и только тогда, когда каждый топологический R-модуль топологически инъективен. Линейно компактные топологии на модулях исследуются в [1184] и [578].

Цикл статей С. Т. Главацкого [33; 34; 168, стр. 25] посвящен топологическим аналогом квазифробениусовых модулей, определяемым ими двойственностям. Линейно компактные модули изучаются в [379, 580 и 1208]. Вопросы двойственности типа двойственности Понтрягина рассматривались для топологических модулей также в [232, 400, 465, 479, 902].

Пополнения линейно топологических колец и некоторые типы двойственностей, возникающих при этом, рассмотрены в [231].

Двойственность определяемая билинейной формой над коммутативным топологическим кольцом, анализируется в [808]. Топологические квазипроективные и квазиинъективные модули изучает С. Т. Главацкий [35, 36]. Топологический вариант полусовершенных колец исследует А. В. Клюшин [78; 168, стр. 50]. Открыто нётеровы кольца и модули охарактеризованы А. В. Клюшиным [79].

Проективные банаховы модули изучает Ю. В. Селиванов [125—127], конечно порожденные, нётеровы и артиновы банаховы модули — Грабинер [565]. Гомологические размерности банаховых алгебр и банаховых модулей исследуют А. Я. Хелемский [165], Ю. О. Головин и А. Я. Хемельский [38], Моран [838].

4.2. Упорядоченные модули. Ряд вопросов об упорядоченных модулях вошел в книгу Бигара, Каймеля и Волфенштейна [264]. Новый стимул к изучению частично упорядоченных колец и частично упорядоченных модулей дает полуалгебраическая геометрия (т. е. область математики, изучающая конечное число полиномиальных равенств и неравенств), введение в эту часть алгебры дает монография Брумфила [299].

Локализации упорядоченных модулей рассматривают Бигар [263] и Фокс [470]. Ряд замечаний о базисах частично упорядоченных модулей сделан Белдингом [246]. Упорядочивания модулей характеров приведены в [960].

Вопросы полноты и различные пополнения и оболочки упорядоченных модулей встречаются в работах В. К. Захарова [66, 67]. С. С. Кутателадзе [90] описывает модули над l-кольцами, в которых можно развивать выпуклый анализ.

Вирт [120] исследует частично упорядоченные абелевы группы, локально компактные в интервальной топологии. Различные

топологии абелевых l-групп и пополнения по ним рассматривает Кенни [701]. Шмарда [1091] изучает структуру всех топологий l-группы, в которых групповая и структурная операции непрерывны. Теорему о замкнутом графике для упорядоченных топологических абелевых групп доказывает Халелула [713].

4.3. Нормированные модули. Нормированным векторным пространствам и абелевым группам посвящен большой цикл работ: Фукс [474, 476—478], Радо [973], Ричман и Уокер [1008]. Путеводитель по литературе по нормированным абелевым группам предложил Ричман [1007]. Либерт [773] исследует нормы и конормы на периодических полных абелевых l-группах. Сюда примыкает работа [311]. Нормированиям модулей посвящены статьи Кирби и Мерана [714] и Рибенбойма [1003, 1004].

4.4. Градуированные и фильтрованные модули. Начали систематически изучаться градуированные и фильтрованные модули (категорные свойства, проективные и инъективные объекты, гомологические размерности, размерность Крулля, градуированные первичные идеалы, локализации и варианты теорем Голди, примарные разложения, радикалы и др. вопросы) — см. Фоссум и Фоксби [469], Настасеску [857, 860], Йон и Настасеску [642, 643], Ойстайен [931], Гото и Ватанабе [555, 556], Грюненфельд [576]. Достаточно полное изложение этого круга вопросов дает книга Настасеску и Ойстайена [865].

4.5. Дифференциальные и разностные модули. Примарные разложения дифференциальных модулей изучали Урзиану [1158] и Новицкий [891]. Кручения в категории дифференциальных модулей исследовал Е. Л. Горбачук и Н. Я. Комарницкий ([170], ч. 2, стр. 41). Дифференциальные операторы и производные на модулях затронуты в [187]. Свойства интегрально замкнутых подмодулей приводит Трендафилов [142]. Методы вычисления дифференциального размерностного многочлена (с использованием резольвенты модуля дифференциалов и по характеристическому множеству простого дифференциального идеала), а также вычисления характеристического множества и дифференциального размерностного многочлена для конкретных систем дифференциальных уравнений (волновое уравнение, уравнения Дирака, Эйлера, Лаие, Максвелла и Эйнштейна) изложены А. В. Михалёвым и Е. В. Панкратьевым (см. [103], стр. 94; [168], стр. 76—77). А. Б. Левин [91, 92] исследует характеристический многочлен и разностную размерность фильтрованных модулей и расширений разностных полей. Он же в ([168], стр. 67) исследует свойства функтора Ext в категории инверсных разностных модулей.

Г. А. Джавадов [51] изучает дифференциально-разностные модули (вопросы, связанные с нётеровостью, радикалом Джекобсона, с вариантами леммы Артина—Рисса и др.), а в [52] он строит характеристический многочлен для дифференциально-разностных модулей.

§ 5. ОБОБЩЕНИЯ МОДУЛЕЙ

5.1. Модули над обобщенными кольцами. Аффинные модули. В данном разделе отражено содержание лишь тех работ, в которых рассматриваются объекты, непосредственно примыкающие к модулям над кольцами. Значительное число работ, посвященных гомологической классификации полугрупп и другим вопросам, связанным со свойствами полигонов над моноидами, не вошли в настоящий обзор. Это объясняется как недостатком места, так и тем, что теория полугрупп и полигонов над ними выделилась в самостоятельную область алгебры. По этим же причинам не отражены работы, в которых изучались коммутативные полугруппы, хотя они и могут рассматриваться как модули над полукольцом положительных целых чисел.

Л. В. Тюкавкин [159] доказал, что регулярность коммутативного полукольца равносильна тому, что все модули над ним — плоские. Б. Б. Коваленко [80, 81] рассматривал модули над инверсными полукольцами (т. е. полукольцами, аддитивная полугруппа которых инверсна). А. М. Пачкория [106] исследовал расширения модулей над полукольцом.

Аддитивно записанный группоид A называется **квазимодулем** над кольцом R, если для всех $r \in R$ и $a \in A$ определено произведение $ra \in A$, причем

$$(x+x)+(y+z)=(x+y)+(x+z),\ (-1)x+(x+y)=y,$$
$$r(x+y)=rx+ry,\ (r+s)x=rx+sx,$$
$$r(sx)=(rs)x,\ 1x=x \text{ и } 0x=0y.$$

Строение квазимодулей, порожденных тремя элементами, описали Кепка и Немец [704]. Они же [705] отметили возможность получения квазимодуля из модуля, наделенного некоторой дополнительной тернарной операцией. Кепка [703] рассматривал предрадикалы квазимодулей и установил, что подквазимодули конечно порожденного квазимодуля над нётеровым кольцом конечно порождены.

Продолжались исследования модулей над почтикольцами. Освальд [915] построил контрпример к результатам Сеса и Твари [M75:1259]. Мельдрам [818], Мэйсон [802], Банашевский и Нельсон [227] отметили, что в категории модулей над почтикольцом инъективные объекты, вообще говоря, отсутствуют. Мэйсон [802] рассмотрел ослабленные свойства инъективности и использовал их для гомологической классификации почтиколец. Освальд [916] построил аналог кольца частных для почтикольца.

Псевдомодули рассматривались в работах Пердью [953] и Раймера [1009], причем последняя работа содержит ошибки.

А. И. Пономарев [108] исследовал категорию n-модулей (ср. [M71:121]).

Перейдем к работам, в которых исследовались модули над не обязательно ассоциативными кольцами и алгебрами.

Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей и R — не обязательно ассоциативная K-алгебра. Модуль M над алгеброй R определяется как K-модуль, допускающий сохраняющую единицу K-линейное отображение $\rho: R \to \mathrm{End}_K M$, причем полагают $\lambda m=\rho(\lambda)(m)$. И. П. Шестаков [166] уточнил ранее полученные результаты (см. [137, стр. 60], а также [60]) для случая модулей над альтернативным кольцом и доказал, что неприводимые модули над таким кольцом ассоциативны слева и справа. Висбауэр [1202] назвал элемент $m \in M$ ассоциативным, если $(\lambda\mu)m=\lambda(\mu m)$ для любых $\lambda, \mu \in R$. Модуль, порожденный своими ассоциативными элементами, называется ассоциативно порожденным. Инъективный (проективный) модуль определяется как модуль, инъективный (проективный) относительно точных последовательностей ассоциативно порожденных модулей. Доказывается аналог теоремы о гомологической характеризации классически полупростых колец [1202]. Исследуются связи между свойствами: (а) R — регулярно; (б) каждый простой R-модуль инъективен; (в) каждый (левый) идеал из R представляется как пересечение максимальных (левых) идеалов (см. [1203]). В работе [1204] кольцо называется регулярным слева, если каждый его левый идеал порождается идемпотентом. В отличие от ассоциативного случая, лево-правая симметрия, вообще говоря, отсутствует. Доказывается, что левая регулярность кольца эквивалентна плоскостности всех ассоциативно порожденных модулей над ним. Предложена также и гомологическая характеризация бирегулярных колец. Рассматривались аналоги наследственности, полунаследственности и полусовершенности для неассоциативного случая [1207]. Модули над неассоциативными кольцами рассматривал также Осборн [903]. Джекобсон, Маккриммон и Парвати [658] изучали локализации йордановых алгебр.

А. В. Жожикашвили [62] доказал, что эквивалентность категорий аффинных модулей над кольцами R и R' влечет изоморфизм этих колец. Попутно устанавливается, что из изоморфизма полугрупп эндоморфизмов свободных аффинных модулей ранга $\geqslant 2$ вытекает, что эти модули связаны полулинейным изоморфизмом. Отметим также работу Сендреи [1129], в которой устанавливается связь между аффинными операциями на R-модуле и парами (R', I), где R' — центральное подкольцо в R, а I — идеал в R'.

5.2. Теоретико-категорные обобщения. Грюнберг и Роггенкамп [575] изучали категорию расширений модулей. Г. М. Бродский [104, стр. 110] охарактеризовал конечно замкнутые подкатегории категории модулей. Вопросы, связанные с вложением заданной категории в категорию модулей, рассматривал Вершорен [1179]. В работе Дирса [409] изучается локализация, задаваемая некоторым функтором из категории модулей в абелеву категорию. К этому же кругу вопросов примыкают работы Ойстайена и Вершорена [935] и Идзавы [656].

Дартуа [396] рассматривает ряд вопросов, касающихся модулей над малой аддитивной категорией. А. Г. Григорян [46] доказал, что регулярность (в смысле Неймана) малой предаддитивной категории π эквивалентна плоскостности всех π-модулей. Симсон [1077] исследовал чистые полупростые категории и применил их к изучению колец конечного типа представления. Райтен [993] предложил метод построения наследственной абелевой категории, стабильно эквивалентной данной. Работы, касающиеся проективных и инъективных объектов в категориях, близких к категории модулей, отражены в соответствующих разделах § 2, касающиеся различных предрадикалов в таких категориях — в 3.1.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Агапитов К. В.*, Наследственные нётеровы первичные кольца. МГУ. М., 1980. 33 с., библиогр. 14 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 12 июня 1980, № 2334—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 9А276 ДЕП.)
2. —, Об эпиморфных образах ограниченных первичных дедекиндовых колец. Вестн. МГУ, 1980, № 5, 50—53 (РЖМат, 1981, 2А241)
3. *Алексей С. Ф., Калистру Р. К.*, О полноте свободных топологических модулей. Мат. исследования. Вып. 44 (Кишинев) 164—173 (РЖМат, 1977, 9А34)
4. *Андрунакиевич А. В.* Первичные модули, первичные односторонние идеалы и радикал Бэра. Изв. АН МолдССР, 1976, № 2, 12—17 (РЖМат, 1977, 1А265)
5. —, Первичные односторонние идеалы и строение колец. Мат. исследования (Кишинев, 1979, № 49, 3—10 (РЖМат, 1979, 8А231)
6. —, Специальные модули и специальные радикалы. Изв. АН МолдССР, Сер. физ.-техн. и мат. н., 1979, № 1, 84-85 (РЖМат, 1979, 11А250)
7. *Андрунакиевич В. А., Крачилов К. К., Рябухин Ю. М.*, Решеточно-дополнительные кручения в алгебрах над нётеровой областью целостности. Докл. АН СССР, 1978, *242*, № 5, 985—988 (РЖМат, 1979, 4А323)
8. —, —, —, Решеточно дополнительные кручения в алгебрах над нётеровой областью целостности. Мат. сб., 1979, *109*, № 1, 3—11 (РЖМат, 1979, 8А213)
9. —, *Рябухин Ю. М.*, Дополнительные и двойственные кручения. Докл. АН СССР, 1978, *238*, № 4, 769—772 (РЖМат, 1978, 7А322)
10. —, —, Дополнительные и двойственные кручения. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, *148*, 16—26 (РЖМат, 1979, 2А197)
11. —, —, Радикалы алгебр и структурная теория. М., Наука, 1979 (РЖМат, 1979, 11А230К)
12. *Арнаутов В. И.*, Продолжение топологии коммутативного кольца на некоторые его кольца частных. Мат. исследования (Кишинев), 1978, № 48, 3—13 (РЖМат, 1978, 7А517)
13. *Баранник Ю. Л.*, О некоторых инвариантах модулей над целым p-адическим групповым кольцом группы типа p^∞. Докл. АН УССР, 1977, *А*, № 11, 963—965 (РЖМат, 1978, 5А411)
14. —, *Гудивок П. М.*, Скрещенные групповые кольца конечных груп и колец целых p-адических чисел с конечным числом неразложимых целочисленных представлений. Мат. сб., 1979, 108, № 2, 187—211 (РЖМат, 1979, 7А339)

15. *Бейдар К. И.*, Кольца частных полупервичных колец. Вестн. МГУ, Мат. мех., 1978, № 5, 36—43 (РЖМат, 1979, 7А333)
16. —, Классические кольца частных PI-алгебр. Успехи мат. наук, 1978, *33*, № 6, 197—198 (РЖМат, 1979, 4А307)
17. —, Кольца с обобщенными тождествами. III. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1978, № 4, 66—73 (РЖМат, 1979, 2А187)
18. *Белесов А. У.*, Инъективные и эквационально компактные модули. Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1976, № 1, 85—86 (РЖМат, 1976, 7А344)
19. *Бродский Г. М., Григорян А. Г.*, О кольцах эндоморфизмов модулей. Докл. АН АрмССР, 1979, 69, № 1, 15—18 (РЖМат, 1980, 5А242)
20. *Буну И. Д.*, К понятию инъективности в категории модулей. Кольца и модули. Мат. исследования. Вып. 38. Кишинев, 1976, 71—85 (РЖМат, 1976, 8А366)
21. —, О (ρ, σ)-инъективности в модулях. Кольца и модули. Мат. исследования. Вып. 38. Кишинев, 1976, 86—96 (РЖМат, 1978, 8А367)
22. —, Сравнение некоторых понятий инъективности в модулях. Мат. исследования (Кишинев), 1978, № 48, 14—23 (РЖМат, 1978, 7А359)
23. —, О левых QI-кольцах. Мат. исследования (Кишинев), 1979, № 49, 23—34 (РЖМат, 1979, 8А216)
24. —, *Тэбырце Е. И.*, Решетка предкручений и классически полупростые кольца. Мат. исследования (Кишинев), 1979, № 49, 35—39 (РЖМат, 1979, 8А217)
25. *Васерштейн Л. Н., Суслин А. А.*, Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая K-теория. Изв. АН СССР, 1976, *40*, № 5, 993—1054 (РЖМат, 1977, 2А459)
26. *Вечтомов Е. М.*, О проективных и инъективных идеалах колец непрерывных функций. Абелевы группы и модули. Томск, 1980, 19—30 (РЖМат, 1980, 11А255)
27. —, Чистые идеалы колец непрерывных функций. Соврем. алгебра. Л., 1978, 29—37 (РЖМат, 1978, 11А342)
28. *Вишнякова Н. И.*, О модулях над одним классом локальных нётеровых колец. Латв. мат. ежегодн., 1976, *18*, 3—18 (РЖМат, 1976, 11А499)
29. *Водинчар М. И.*, Алгебраические радикалы и радикально-полупростые классы топологических модулей. Мат. исследования (Кишинев), 1979, *53*, 43—53 (РЖМат, 1979, 11А265)
30. *Генералов А. И.*, О слабой и ω-высокой чистотах в категории модулей. Мат. сб., 1978, *105*, № 3, 389—402 (РЖМат, 1978, 7А361)
31. —, Об аксиоматическом описании слабых чистот в категории модулей. Мат. сб., 1979, *109*, № 1, 80—92 (РЖМат, 1979, 9А248)
32. *Герасимов В. Н.*, Обращающие гомоморфизмы колец. Алгебра и логика (Новосибирск), 1978, *18*, № 6, 648—663 (РЖМат, 1980, 9А271)
33. *Главацкий С. Т.*, Топологические квазифробениусовы модули. МГУ. М., 1978. 39 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 20 июля 1978 г., № 2448—78 ДЕП) (РЖМат, 1978, 11А344 ДЕП.)
34. —, Топологические квазифробениусовы модули. II. МГУ. М., 1978. 22 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 31 окт. 1978 г., № 3411—78 Деп.) (РЖМат, 1979, 2А185 ДЕП.)
35. —, Топологические квазиинъективные и квазипроективные модули. МГУ, М., 1978. 17 с., библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 31 окт. 1978 г., № 3412—78 ДЕП.) (РЖМат, 1979, 2А193 ДЕП.)
36. —, Топологические квазиинъективные и квазипроективные модули. Абелевы группы и модули. Томск, 1980, 31—44 (РЖМат, 1980, 12А286)
37. *Говоров В. Е.*, О формулах ассоциативности. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 6, 215—216 (РЖМат, 1978, 12А656)
38. *Головин Ю. О., Хелемский А. Я.*, Гомологическая размерность некоторых модулей над тензорным произведением банаховых алгебр. Вестн. МГУ, 1977, № 1, 54—61 (РЖМат, 1977, 12А413)
39. *Горбачук Е. Л., Комарницкий Н. Я.*, Радикальные фильтры в области главных идеалов. Докл. АН УССР, 1977, № 2, 103—104 (РЖМат, 1977, 9А328)

40. —, —, Про *S*-кручення в модулях. Вісник Львів. ун-ту, 1977, вып. 12, 32—34 (РЖМат, 1977, 10А158)
41. —, —, *I*-радикалы и их свойства. Укр. мат. ж., 1978, *30*, № 2, 212—217 (РЖМат, 1978, 10А169)
42. —, —, О расщепляемости счетно-порожденных кручений. Вісник Львів. ун-ту, 1978, № 13, 35—37 (РЖМат, 1978, 9А294)
43. *Годн И. М.* Изолированные компоненты подмодулей. Мат. исследования (Кишинев), 1979, № 49, 54—60 (РЖМат, 1979, 8А265)
44. —, *Китороагэ И. Д.*, О бесконечных пересечениях примарных подмодулей. Мат. исследования (Кишинев), 1978, № 48, 40—47 (РЖМат, 1978, 7А360)
45. —, —, Замыкания идеалов и примарные разложения. Мат. исследования (Кишинев), 1979, № 49, 61—67 (РЖМат, 1979, 8А211)
46. *Григорян А. Г.*, Плоские функторы и регулярные категории. Айкакан ССР Гигутюннери Академиа зекуйцнер. Докл. АН АрмССР, 1976, *62*, № 2, 65—71 (РЖМат, 1977, 2А378)
47. *Губарени Н. М.*, О полусовершенных наследственных справа кольцах модульно-ограниченного типа. Ин-т мат. АН УССР. Преп., 1978, № 1, 46 стр. (РЖМат, 1978, 11А273)
48. —, О наследственных справа кольцах модульно-ограниченного типа. Теор. и прикл. вопр. дифференц. уравнений и алгебра. Киев, 1978, 80—84 (РЖМат, 1979, 8А276)
49. —, *Дрозд Ю. А.*, *Кириченко В. В.*, Праворядные кольца. Ин-т электродинамики АН СССР. ИЭД АН УССР. Препринт — 110. Киев, 1975. 19 с., 7 к. — На ротапринте (РЖМат, 1976, 9А270)
50. —, *Кириченко В. В.*, Строение полусовершенных нётеровых справа и наследственных справа первичных колец. Мат. сб. Киев, «Наук. думка», 1976, 18—22 (РЖМат, 1977, 3А224)
51. *Джавадов Г. А.*, Дифференциально-разностные кольца и модули конечнопорожденного типа и дифференциально-разностный радикал Джекобсона. Дагестан. гос. пед. ин-т. Махачкала, 1979. 25 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 6 июня 1979 г., № 1993—79 Деп.) (РЖМат, 1979, 9А399 ДЕП.)
52. —, Характеристический многочлен Гильберта для дифференциально-разностных модулей и его приложения. Дагестан. гос. пед. ин-т. Махачкала, 1979. 40 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 6 июня 1979 г., № 1992—79 Деп.) (РЖМат, 1979, 9А398 ДЕП.)
53. *Добрусин Ю. Б.*, Модули над дедекиндовыми коммутативными областями целостности, близкие к алгебраически компактным. Томск. ун-т. Томск, 1979. 71 с., библиогр. 23 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 13 дек. 1979 г., № 4237—79 Деп.) (РЖМат, 1980, 4А307 ДЕП.)
54. *Доманов О. И.*, Совершенные полугрупповые кольца. Сиб. мат. ж., 1977, *18*, № 2, 294—303 (РЖМат, 1977, 10А171)
55. *Дрогомижська М. М.*, Про кільце елементарних дільників. Вісник Львів. політехн. ін-ту, 1977, № 119, 39—41, 185 (РЖМат, 1978, 2А197)
56. *Дрозд Ю. А.*, Ручные и дикие матричные задачи. Представления и квадратич. формы. Киев, 1979, 39—74 (РЖМат, 1980, 9А273)
57. —, Строение наследственных колец. Мат. сб., 1980, *113*, № 1, 161—172 (РЖМат, 1981, 1А254)
58. *Дубровин Н. И.*, Максимальные порядки в простой центральной конечномерной алгебре над кольцом нормирования высоты 1. Мат. сб., 1979, *108*, № 4, 517—528 (РЖМат, 1979, 7А336)
59. *Елизаров В. П.*, О кольцах частных. Кольца и модули. Мат. исследования. Вып. 38 (Кишинев), 1976, 132—149 (РЖМат, 1976, 8А359)
60. *Жевлаков К. А.*, *Слинько А. М.*, *Шестаков И. П.*, *Ширшов А. И.*, Кольца, близкие к ассоциативным. М., Наука, 1978, 431 с. (РЖМат, 1979, 4А286 К)
61. *Жилинская З. П.*, Об изоморфизме пар конечно-порожденных модулей. Материалы XXIX Науч. конф. проф.-преподават. состава Ужгород. ун-та. Секц. мат. н. Ужгород ун-т. Ужгород, 1975, 130—138 с., библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 марта 1976 г., № 705-76 Деп.) (РЖМат, 1976, 7А514ДЕП.)
62. *Жожикашвили А. В.*, Об эквивалентности категорий аффинных модулей. Мат. заметки, 1978, *24*, № 4, 475—486 (РЖМат, 1979, 4А320)
63. *Завадский А. Г.*, *Кириченко В. В.*, Модули без кручения над первичными кольцами. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1976, *57*, 100—116 (РЖМат, 1976, 8А363)
64. —, —, Полумаксимальные кольца конечного типа. Мат. сб., 1977, *103*, № 3, 323—345 (РЖМат, 1977, 11А306)
65. *Захаров В. К.*, Регулярное пополнение модулей. Мат. заметки, 1976, *19*, № 6, 843—851 (РЖМат, 1976, 10А241)
66. —, Ортодополнение модулей, колец и булевых алгебр. Упорядочен. множества и решетки. Саратов, Саратов. ун-т, 1977, вып. 4, 48—61 (РЖМат, 1978, 2А251)
67. —, Делимая оболочка и ортодополнение решеточно-упорядоченных модулей. Мат. сб., 1977, **103**, № 3, 346—357 (РЖМат, **1977**, 11А307)
68. —, Функциональное представление ортопополнения и делимой оболочки модулей без кручения Утуми. Мат. заметки, 1980, *27*, № 3, 333—344 (РЖМат, 1980, 8А268)
69. *Иванов А. В.*, ω-делимые и ω-плоские модули. Мат. заметки, 1978, *24*, № 6, 741—747 (РЖМат, 1979, 5А215)
70. *Иванов В. П.*, Изоморфизм простых модулей с равными аннуляторами для некоторых классов колец. Ин-т теор. и экспер. физ. М., Препр. № 34, 21 с. (РЖМат, 1979, 8А269)
71. *Калистру Р. К.*, О полноте свободного топологического модуля, порожденного дискретным пространством. Мат. исследования (Кишинев), 1979, *53*, 98—102 (РЖМат, 1979, 11А266)
72. *Кашу А. И.*, О бикоммутаторах вполне делимых модулей. Мат. сб., 1976, *100*, № 4, 483—494 (РЖМат, 1977, 1А256)
73. —, Предрадикалы в ситуации сопряженности. Мат. исследования (Кишинев), 1978, № 48, 48—64 (РЖМат, 1978, 7А321)
74. *Кириченко В. В.*, Обобщенно-однорядные кольца. Препринт ИМ-75-1, изд. Ин-та математики АН УССР. Киев, 1975
75. —, Об обобщенно-однорядных кольцах. Вестн. МГУ, 1977, № 3, стр. 126
76. —, О квазифробениусовых кольцах и горенштейновых порядках. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, *148*, 168—174 (РЖМат, 1979, 2А177)
77. —, Классификация пар взаимно аннулирующих операторов в градуированном пространстве и представления диады обобщенно однорядных алгебр. Зап. научн. семинаров. ЛОМИ АН СССР, 1978, *75*, 91—109 (РЖМат, 1978, 6А271)
78. *Клюшин А. В.*, Топологический радикал Джекобсона и топологически полусовершенные кольца. МГУ. М., 1978. 18 с., библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 20 июня 1978 г., № 2447-78 Деп.) (РЖМат, 1978, 11А343ДЕП.)
79. —, Открыто нётеровы кольца. Вестн. МГУ, Мат., мех., 1979, № 5, 48—57 (РЖМат, 1980, 3А181)
80. *Коваленко Б. Б.*, Обобщенные модули над инверсными полукольцами. Упорядоч. множества и решетки (Саратов). 1978, № 5, 55—62 (РЖМат, 1979, 9А269)
81. —, К теории обобщенных модулей. В сб. «Исслед. по алгебре» вып. 5. Саратов, 1977, 30—42 (РЖМат, 1978, 2А237)
82. *Кожухов И. Б.*, О самоинъективных полугрупповых кольцах. Моск. ин-т электрон. техн. М., 1978, 6 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 26 июля 1979 г., № 2843-79 Деп) (РЖМат, 1979, 11А242ДЕП.)
83. *Койфман Л. А.*, Расщепляемость кручений над коммутативными кольцами. Успехи мат. наук, 1976, **31**, № 2, 215—216 (РЖМат, 1976, 10А240)
84. —, Расщепляемые кручения над коммутативными кольцами. Тр. Моск. мат. о-ва, 1978, *37*, 143—171 (РЖМат, 1979, 2А194)

85. *Комарницкий Н. Я.*, Дуо-кольца, над которыми все кручения являются S-кручениями. Мат. исследования (Кишинев), 1978, № 48, 65—68 (РЖМат, 1978, 7А319)
86. —, Кручення і квазимноговиди модулів. Питання якісної теорії диференц. рівнянь та їх застосування. Київ, 1978, 19—21 (РЖМат, 1979, 8А260)
87. *Кон П.*, Свободные кольца и их связи. Пер. с англ. М., Мир, 1975, 422 с., ил., (РЖМат, 1976, 5А259К)
88. *Крачилов К. К.*, Коатомы решетки специальных радикалов. Мат. исследования (Кишинев), 1979, № 49, 80—86 (РЖМат, 1979, 8А212)
89. —, Дополнения в решетке наднильпотентных радикалов. Мат. исследования (Кишинев), 1979, № 49, 87—104 (РЖМат, 1979, 8А215)
90. *Кутателадзе С. С.*, Модули, допускающие выпуклый анализ. Докл. АН СССР, 1980, *252*, № 4, 789—791 (РЖМат, 1980, 9А291)
91. *Левин А. Б.*, Характеристические многочлены разностных модулей и некоторые свойства разностной размерности. МГУ. М., 1980. 42 с., библиогр. 10 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 30 мая 1980 г., № 2175-80 Деп.) (РЖМат, 1980, 9А347ДЕП.)
92. —, Характеристические многочлены фильтрованных разностных модулей и расширений разностных полей. Успехи мат. наук, 1978, *33*, № 3, 177—178 (РЖМат, 1978, 12А597)
93. *Лыкова З. А.*, Об условиях проективности банаховых алгебр вполне непрерывных операторов. Вестник МГУ, 1979, № 4, 8—13
94. *Майбалаев А. Ш.*, Об определении инъективного модуля. Алгебра и теория чисел. Алма-Ата, 1978, 25—29 (РЖМат, 1979, 8А266)
95. *Мановцев А. А.*, Аддитивные чистоты в категории Λ-модулей и функтор ω Ext. Тр. 27-й Научн.-техн. конф. Моск. ин-т радиотехн., электрон. и автомат. М., 1978. 89—95, библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 22 марта, 1979 г., № 1014—79 Деп.) (РЖМат, 1979, 9А145ДЕП.)
96. *Мишина А. П.*, Абелевы группы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1979, *17*, 3—63 (РЖМат, 1980, 3А105)
97. *Михалев А. В.*, Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1974, *12*, 51—76 (РЖМат, 1975, 6А408)
98. —, *Панкратьев Е. В.*, Дифференциальный размерностный многочлен системы дифференциальных уравнений. В сб. «Алгебра». М., МГУ, 1980, 57—67
99. —, *Скірняков Л. А.*, Модули. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1968 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1970, 57—100 (РЖМат, 1970, 11А207)
100. —, — (ред.), Модули. АН СССР. Сиб. отд. Ин-т математики. Препринт. Новосибирск, 1973 (РЖМат, 1973, 10А249К—10А252К)
101. Научно-исследовательский семинар по алгебре. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1979, № 6, 96—101
102. Научно-исследовательский семинар по алгебре. Вестн. МГУ, Мат., мех., 1980, № 3, 101—105
103. Научно-исследовательский семинар по алгебре. Вестн. МГУ, Мат., мех., 1980, № 4, 90—97
104. Научно-исследовательский семинар по алгебре. Вестн. МГУ, Мат., мех., 1981, № 1, 97—100
105. *Начев Н.*, Инцидентни пръстени над квазинаредни множества. Научн. тр. Пловдив. ун-т. Мат., 1975(1977), *13*, № 1, 65—79 (РЖМат, 1978, 10А161)
106. *Пачкория А. М.*, О расширениях полумодулей. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе, Сообщ. АН ГрузССР, 1976, *84*, № 3, 545—548 (РЖМат, 1977, 10А248)
107. *Пономарев А. И.*, τ-классическая полупростота кольца R. Моск. гос. пед. ин-т. М., 1976. 28 с., библиогр. 17 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 30 апр. 1976 г., № 1481—76 Деп.) (РЖМат, 1976, 9А277ДЕП.)

108. —, О категории n-модулей. В сб. «Соврем. алгебра». Вып. 5. Л., 1976, 102—106 (РЖМат, 1977, 8А324)
109. —, Кольца, регулярные относительно кручения. Алгебр. системы. Иваново, 1978, 61—80 (РЖМат, 1979, 8А234)
110. —, О регулярных предкручениях. Мат. заметки, 1979, *25*, № 1, 27—35 (РЖМат, 1979, 5А198)
111. *Ратинов В. А.*, Полусовершенные кольца с коммутативным радикалом Джекобсона. Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина. М., 1978. 46 с., библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 12 окт. 1978 г., № 3215—78 Деп.) (РЖМат, 1979, 2А176ДЕП.)
112. —, Структура полусовершенных колец с коммутативным радикалом Джекобсона. Мат. сб., 1979, *110*, № 3, 459—470 (РЖМат, 1980, 2А238)
113. *Репницкий В. Б.*, Арифметические модули. Мат. сб., 1979, *110*, № 1, 150—157 (РЖМат, 1979, 12А467)
114. *Роганов Ю. В.*, Наследственность тензорной алгебры и полунаследственность пополненной тензорной алгебры. Докл. АН УССР, 1977, *А*, № 5, 410—413 (РЖМат, 1977, 11А305)
115. *Розенкноп И. З.*, Об изоморфизмах модулей с мономиальной фильтрацией. МОПИ, 1977. 35 с., библиогр. 9 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 17 ноября 1977 г., № 645—77 Деп.) (РЖМат, 1977, 7А268ДЕП.)
116. *Росошек С. К.*, Модули без кручения над полунаследственными первичными кольцами Голди. Группы и модули. Томск, 1976, 57—69
117. —, Периодические модули над некоммутативными дедекиндовыми первичными кольцами. Сиб. мат. ж. Новосибирск, 1977. 22 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 4 янв. 1977 г., № 52—77 Деп.) (РЖМат, 1977, 5А204ДЕП.)
118. —, Чисто корректные модули. Успехи мат. наук, 1978, *33*, № 3, 176 (РЖМат, 1978, 11А312)
119. —, Корректность модулей. Изв. Вузов. Математика, 1978, № 10, 77—82 (РЖМат, 1979, 5А218)
120. —, Корректные и чисто корректные модули. Абелевы группы и модули, 1979, 127—142 (РЖМат, 1980, 2А261)
121. *Рябухин Ю. М., Крачилов К. К.*, Решеточно дополнительные кручения в алгебрах. Мат. исследования (Кишинев), 1978, № 48, 94—111 (РЖМат, 1978, 7А318)
122. —, *Флоря Р. С.*, Об атомности «решетки» наследственно аннуляторных кручений. Мат. исследования (Кишинев), 1979, № 49, 115—121 (РЖМат, 1979, 8А214)
123. *Рятова Н. А.*, Условия элементарной эквивалентности модулей над дискретно нормированным кольцом. МГПИ, М., 1977, 28 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21 июля 1977 г., № 2991-77 Деп.) (РЖМат, 1977, 12А451ДЕП.)
124. *Сахаев И. И.*, О конечной порожденности проективных модулей. Изв. Вузов. Математика, 1977, № 9, 69—79 (РЖМат, 1978, 5А258)
125. *Селиванов Ю. В.*, Проективность некоторых банаховых модулей и строение банаховых алгебр. Изв. Вузов. Математика, 1976, № 5, *85*; 1978, № 1, 110—116
126. —, Бипроективные банаховы алгебры, их строение и связь с ядерными операторами. Функ. анализ и его прил., 1976, *10*, № 1, 80—90
127. —, Бипроективные банаховы алгебры. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1979, *43*, № 5, 1159—1174 (РЖМат, 1980, 1Б831)
128. *Скляренко Е. Г.*, Чистые и конечно-представимые гомоморфизмы двойственности и свойство когерентности кольца. Мат. сб., 1978, *105*, № 2, 192—206 (РЖМат, 1978, 6А409)
129. —, Относительная гомологическая алгебра в категории модулей. Успехи мат. наук, 1978, *33*, № 3, 85—120 (РЖМат, 1978, 12А658)
130. *Скорняков Л. А.*, Модули. В сб. «Алгебра. Топология. 1962 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1963, 80—89 (РЖМат, 1964, 11А220)

131. —, Модули. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1965 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1967, 181—216 (РЖМат, 1967, 10А199)
132. —, Разложимость модулей в прямую сумму идеалов. Мат. заметки, 1976, *20*, № 2, 187—193 (РЖМат, 1976, 12А364)
133. —, Коммутативные кольца и подыдемпотентные идеалы. Мат. сб., 1977, *102*, № 2, 280—288 (РЖМат, 1977, 7А412)
134. —, Аксиоматизируемость класса инъективных полигонов. Труды семинара им. И. Г. Петровского, МГУ, 1978, № 4, 233—239 (РЖМат, 1979, 6А245)
135. —, Конечная аксиоматизируемость класса точных модулей. Coll. Math., 1979, *42*, 365—366 (РЖМат, 1980, 11А291)
136. —, Об одном условии Андрунакиевича—Рябухина. Мат. исслед. Вып. 44. Кишинев «Штиинца», 1977, 174—176 (РЖМат, 1977, 9А297)
137. —, *Михалев А. В.*, Модули В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1976, *14*, 57—190 (РЖМат, 1977, 6А209)
138. *Суслин А. А.*, О стабильно свободных модулях Мат. сб., 1977, *102*, № 4, 537—550 (РЖМат, 1977, 8А446)
139. —, Теорема о сокращении для проективных модулей над алгебрами. Докл. АН СССР, 1977, *236*, № 4, 808—811 (РЖМат, 1978, 2А393)
140. —, О структуре проективных модулей над кольцами многочленов в случае некоммутативного кольца коэффициентов. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, *148*, 233—252 (РЖМат, 1979, 1А457)
141. *Титов Н. П.*, Когерентность естественных изоморфизмов в категориях алгебр и модулей. Редкол. «Сиб. мат. ж.», Сиб. отд. АН СССР. Новосибирск, 1979. 28 с., библиогр. 9 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 4 окт. 1979 г., № 3470-79 Деп.) (РЖМат, 1980, 1А350ДЕП.)
142. *Трендафилов И. Д.*, Интегрально затворени модули. Годишн. Висш. учеб. заведений, 1978, **13**, № 2, 29—34 (РЖМат, 1980, 5А320)
143. *Туганбаев А. А.*, Малопроективные модули. Сиб. мат. ж., 1980, *21*, № 5, 109—113 (РЖМат, 1981, 2А265)
144. —, О модулях, близких к инъективным. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 2, 233—234 (РЖМат, 1977, 11А310)
145. —, Модули над наследственными нётеровыми первичными кольцами. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 4, 267—268 (РЖМат, 1978, 1А258)
146. —, О квазипроективных модулях. Сиб. мат. ж., 1980, *21*, № 3, 177—183 (РЖМат, 1980, 10А192)
147. —, Строение модулей, близких к инъективным. Сиб. мат. ж., 1977, *18*, № 4, 890—898 (РЖМат, 1978, 1А256)
148. —, Квазиинъективные и малоинъективные модули. Вестн. МГУ, Мат., мех., 1977, № 2, 61—64 (РЖМат, 1978, 1А257)
149. —, Строение модулей, близких к проективным. Мат. сб., 1978, *106*, № 4, 554—565 (РЖМат, 1978, 12А450)
150. —, Псевдоинъективные модули и продолжение автоморфизмов. Тр. семинара им. И. Г. Петровского. МГУ, 1978, № 4, 241—248 (РЖМат, 1979, 5А217)
151. —, Характеризации колец, использующие малоинъективные и малопроективные модули. Вестн. МГУ, 1979, № 3, 48—51 (РЖМат, 1979, 10А198)
152. —, Малопроективные модули. Вестн. МГУ, 1979, № 5, 43—47 (РЖМат, 1980, 3А197)
153. —, О самоинъективных кольцах. Изв. Вузов. Математика, 1980, № 12, 71—74 (РЖМат, 1981, 4А208)
154. —, Кольца, все факторкольца которых малоинъективны. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 2, 223—224 (РЖМат, 1980, 10А172)
155. —, Кольца, над которыми каждый модуль является прямой суммой дистрибутивных модулей. Вестн. МГУ, 1980, № 1, 61—64 (РЖМат, 1980, 6А285)
156. —, Дистрибутивные нётеровы кольца. Вестн. МГУ, 1980, № 2, 287—290 (РЖМат, 1980, 7А219)

157. —, Дистрибутивные модули. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 5, 245—246 (РЖМат, 1981, 3А246)
158. *Тэбырцэ Е. И.*, О простых кручениях категории модулей. Мат. исследования (Кишинев), 1977, 44, 104—108 (РЖМат, 1977, 9А329)
159. *Тюкавкин Л. В.*, Коммутативные полукольца с плоскими модулями. Вестн. МГУ, 1978, № 5, 60—62 (РЖМат, 1979, 4А335)
160. —, Аксиоматизируемость класса неприводимых модулей. МГУ, М., 1980. 29 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 30 мая 1980 г., № 2174—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 9А275ДЕП.)
161. *Фейс К.*, Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1, 2. М., Мир, 1977, *1*, 688 с.; 1979, 2, 464 с. (РЖМат, 1978, 6А178)
162. *Фельдман Г. Л.* О глобальной размерности общих колец дифференциальных операторов. Успехи мат. наук, 1974, **29**, № 5, 245—246 (РЖМат, 1975, 4А443)
163. *Фукс Л.*, Бесконечные абелевы группы. Т. 2. Пер. с англ. М., Мир, 1977, 416 с. (РЖМат, 1978, 1А147К)
164. *Харченко В. К.*, Действия групп и алгебр Ли на некоммутативных кольцах. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 2, 67—90 (РЖМат, 1980, 8А261)
165. *Хелемский А. Я.*, Низшие значения, принимаемые глобальной гомологической размерностью функциональных банаховых алгебр. Тр. семинара им. И. Г. Петровского. МГУ, 1978, № 3, 223—242 (РЖМат, 1978, 12А657)
166. *Шестаков И. П.*, Неприводимые представления альтернативных алгебр. Мат. заметки, 1979, *26*, № 5, 673—686 (РЖМат, 1980, 3А206)
167. Третий Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы сообщ. (Тартус. ун-т, Ин-т мат. Сиб. отд. АН СССР, Моск. ун-т). Тарту, 1976, 117 с. (РЖМат, 1977, 3А218)
168. Четвертый Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей (Ин-т мат. с вычисл. центром АН МолдССР). Кишинев, 1980, 128 с.
169. XIV Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы докладов. Ч. I. Группы. Алгебраические системы. Ч. II. Кольца. Алгебраические системы (Ин-т мат. Сиб. отд. АН СССР, Новосибирский гос. ун-т). Новосибирск, 1977, ч. I, 113 с.; ч. II, 134 с.
170. XV Всесоюзная алгебраическая конференция, 3—6 июля 1979 г. Тезисы докладов. (Минвуз РСФСР, Красноярск. гос. ун-т, Ин-т мат. СО АН СССР выч. центр СО АН СССР). Красноярск, 1979, ч. I, группы, 200 с., ч. II, Кольца. Алгебраические системы, 182 с.
171. *Abellanas L., Alonsi L. M.*, On the Gelfand-Kirillov conjecture. Commun. Math. Phys., 1975, *43*, № 1, 69—71 (РЖМат, 1976, 1А316)
172. *Agrawala V. K., Chao Chong-Yun*, Equalities and inequalities for ranks of modules. Linear and Multilinear Algebra, 1978, *6*, № 4, 307—315 (РЖМат, 1979, 8А261)
173. *Ahsan J.*, A note on direct sums of quasi-injective modules. Punjab Univ. J. Math. (Lahore), 1974, 7, 39—43
174. —, Modules over *qc*-rings. Studia Sci. Math. Hungar., 1974, **9**, № 3-4, 321—325
175. —, Rings all of whose ideals are finitely embedded. Studia. Sci. Math. Hungar, 1974, *9*, № 3-4, 327—330
176. —, A note on rings all of whose semi-simple cyclic modules are quasi-injective. Atti Accad. Naz.-Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur, 1975, *59*, № 6, 682—684
177. —, Homomorphic images of certain quasi-injective modules. Boll. Unione mat. ital., 1976, *13A*, № 1, 101—109 (РЖМат, 1977, 1А258)
178. —, Completely hereditary rings Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1977 (1978), *63*, № 3-4, 159—163 (РЖМат, 1979, 5А194)
179. —, Semilocal rings and σ-cyclic modules. Math. jap., 1980, *25*, № 1, 117—124 (РЖМат, 1980, 11А292)
180. —, Semilocal rings and quasi-projective modules. Recz. Pil. tow. mat.,

1980, *21*, № 1, 5—7 (РЖМат, 1980, 11A294)
181. *Alamelu S.*, On quasi-injective modules over noetherian rings. J. Indian Math. Soc., 1975, *39*, № 1-4, 121—130 (РЖМат, 1977, 4A425)
182. *Albis-Gonzalez V., Markanda R. K.*, Ordres euclidiens d'algebres arithmetiques. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 23, A1485—A1486 (РЖМат, 1978, 1A246)
183. —, —, Rings of fractions of euclidean rings. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 4, 353—360 (РЖМат, 1978, 11A283)
184. *Albu T.*, Sur la dimension de Gabriel des modules. Algebra-Berichte. Bericht Nr 21. Munchen, Verlag Uni-Druck, 1974, 1—27
185. —, *Năstăsescu C.*, Modules sur les anneaux de Krull. Rev. roum. math. pures et appl., 1976, *21*, № 2, 133—142 (РЖМат, 1976, 8A550)
186. *Alperin J. L.*, Diagrams for modules. J. pure and appl. Algebra, 1980, *16*, № 2, 111—119 (РЖМат, 1980, 7A249)
187. *Alvarez J. L.*, Operadores de derivacion diferenciacion en modulos. Gac. mat., 1975, *27*, № 5-6, 130—135 (РЖМат, 1976, 9A403)
188. *Amin I.*, Note on generalized regular semigroups and rings. Proc. Math. Soc. Egypt., 1978, № 45, 9—17
189. *Amitsur S. A., Small L. W.*, Polynomial over division rings. Isr. J. Math., 1978, *31*, № 3-4, 353—358 (РЖМат, 1978, 7A327)
190. *Anderson D. D.*, Artinian modules are countably generated, 1977, *38*, № 1, 5—6 (РЖМат, 1978, 7A530)
191. —, The existence of dual modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *55*, № 2, 258—260 (РЖМат, 1977, 3A344)
192. *Anderson D. F.*, Projective modules over subrings of $k[X, Y]$. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *240*, 317—328 (РЖМат, 1979, 2A294)
193. —, The chinese remainder theorem and the invariant basis property. Can. Math. Bull., 1978, *21*, № 3, 361—362 (РЖМат, 1979, 4A290)
194. —, Projective modules over subrings of $k[x, y]$ generated by monomials. Pacif. J. Math., 1978, *79*, № 1, 5—17 (РЖМат, 1979, 8A422)
195. *Anderson F. W.*, Simple injective modules. Math. scand., 1978, *43*, № 2, 204—240 (РЖМат, 1980, 4A303)
196. *Andrunakievic V. A., Rjabuhin Ju. M., Kracilov K. K., Tebyrce E. I.*, Erbliche Radikale von Algebren. (Torsionen von Algebren). Stud. Alg. und ihre Anwend., 1976, *1*, 1—8 (РЖМат, 1977, 2A297)
197. *Anh Pham Ngoc*, On the theory of linearly compact rings. I. Beitr. Algebra and Geom. Wiss. Beitr. M.-Luther-Univ. Halle Wittenberg, 1980, *M*, № 15, 13—27 (РЖМат, 1980, 12A299)
198. —, *Wiegandt R.*, Linearly compact semisimple rings and regular modules. Math. Jap., 1978, *23*, № 4, 335—338 (РЖМат, 1979, 8A302)
199. *Aoyama Kanroku*, On the commutativity of torsion and injectiven hull. Hiroshima Math. J., 1976, *6*, № 3, 527—537 (РЖМат, 1977, 8A439)
200. *Armendariz E.*, Rings with an almost Noetherian ring of fractions. Maht. Scand., 1977, *41*, № 1, 15—18 (РЖМат, 1979, 6A375)
201. —, Rings with DDC on essential left ideals. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 3, 299—308 (РЖМат, 1980, 8A242)
202. —, *Fischer J. W.*, Idealizers in rings. J. Algebra, 1976, *39*, № 2, 551—562 (РЖМат, 1976, 12A334)
203. *Arnold D. M.*, General and direct sum decompositions of torsion free modules. Lect. Notes. Math., 1977, *616*, 197—218 (РЖМат, 1978, 9A150)
204. *Arnold J., Gilmer R.. Heinzer W.*, Some countability conditions a commutative rings. Ill. J. Math., 1977, *21*, № 3, 648—665
205. *Asano Sh., Motose K.*, On *QF*-2 algebras with commutative radicals. Math. J. Okyama Univ., 1980, *22*, № 1, 17—20 (РЖМат, 1980, 12A262)
206. *Aubert K. E., Fleischer I.*, Tensor products of ideal systems and their modules. Pacif. J. Math., 1978, *74*, № 2, 285—296 (РЖМат, 1978, 12A440)
207. *Auslander M.*, Almost split sequences. Lect. Notes. Math., 1975, *438*, 1—8 (РЖМат, 1976, 5A382)

208. —, Functors and morphisms determined by objects. Represent. Theory Algebras. Proc. Philadelphia Conf. New—York—Basel, 1978, 1—244 (РЖМат, 1979, 4A435)
209. —, Applications of morphisms determined by modules. Represent. Theory Algebras. Proc. Philadelphia Conf. New—York—Basel, 1978, 245—327 (РЖМат, 1979, 4A436)
210. —, Preprojective modules over Artin algebras. Ring theory (Proc. Antwerp. Conf., 1978), 1979, 361—384 (РЖМат, 1980, 7A254)
211. —, *Bautista M. I., Platzeck I., Reiten I., Smalo S. O.*, Almost split sequences whose middle term has at most two indecomposable summands. Can. J. Math., 1979, *31*, № 5, 942—960 (РЖМат, 1980, 6A295)
212. —, *Platzeck M. I., Reiten I.*, Periodic modules over weakly symmetric algebras. J. Pure and Appl. Algebra 1977—1978, *11*, № 1-3, 279—291 (РЖМат, 1978, 12A655)
213. —, *Reiten I.*, Stable equivalence of dualizing *R*-varieties. II. Hereditary dualizing *R*-varieties. Adv. Math., 1975, *17*, № 2, 93—121 (РЖМат, 1976, 3A388)
214. —, —, Stable equivalence of dualizing *R*-varieties. III. Dualizing *R*-varieties stably equivalent to hereditary dualizing *R*-varieties. Adv. Math., 1975, *17*, № 2, 122—142 (РЖМат, 1976, 3A389)
215. —, —, Stable equivalence of dualizing *R*-varieties. IV. Higher global dimension. Adv. Math., 1975, *17*, № 2, 143—166 (РЖМат, 1976, 3A390)
216. —, —, Representation theory of artin algebras. III. Almost split sequences. Commun. Algebra, 1975, *3*, № 3, 239—294 (РЖМат, 1976, 5A384)
217. —, —, Almost split sequences. Lect. Notes Math., 1975, *438*, 9—19 (РЖМат, 1976, 5A383)
218. —, —, On the representation type of triangular matrix rings. J. London, Math. Soc., 1976, *12*, № 3, 371—382 (РЖМат, 1976, 11A348)
219. *Ayoub Ch.*, Anneaux locaux et unisériels. Semin. P. Dubreil. Algèbre. Univ. Paris, 1971—1972 (1973), *25*, № 1, 14/1—14/4 (РЖМат, 1976, 8A560)
220. —, Conditions for a ring to be fissile. Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 1977, *30*, № 3/4, 233—237
221. *Azumaya G.*, Some aspects of Fuller's theorem. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 34—45 (РЖМат, 1979, 11A246)
222. *Baccella G.*, Sulla functorialità dell' inviluppo $\mathfrak{F}$-iniettivo. Ann. Univ. Ferrara, 1976, *22*, 107—113 (РЖМат, 1977, 11A324)
223. *Ballard J. W.*, Injective modules for restricted enveloping algebras. Math. Z., 1978, *163*, № 1, 57—64 (РЖМат, 1979, 5A231)
224. *Ballet B.*, Topologies linéaires et modules artiniens. Thèse doct. sci. math. Univ. Paris-Sud., 1971, 41 p. (РЖМат, 1976, 4A399)
225. —, Topologies lineaires et modules artiniens. J. Algebra, 1976, *41*, № 2, 365—397 (РЖМат, 1977, 4A301)
226. *Ballew D.*, Cyclic ideals in order. Riv. mat. Univ. Parma, 1977 (1978), *3*, 1—16 (РЖМат, 1978, 12A416)
227. *Banaschewski B., Nelson E.*, On the non-existence of injective nearring modules. Can. Math. Bull., 1977, *20*, № 1, 17—23 (РЖМат, 1978, 2A239)
228. *Bass H.*, Ranks of projective *ZG*-modules. Queen Pap. Pure and Appl. Math., 1975, № 42, 63—69 (РЖМат, 1976, 7A481)
229. *Baur W.*, $\aleph_0$-categorical modules. J. Symbol. Log., 1975, *40*, № 2, 213—230 (РЖМат, 1976, 3A94)
230. *Bazzoni S.*, On the algebraic compactness of some complete modules. Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1976 (1978), *56*, 161—167
231. —, Dualitá sul completamento naturale di un anello noetheriano. Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1976 (1977), *55*, 63—80 (РЖМат, 1978, 8A434)
232. —, Pontryagin type dualities over commutative rings. Ann. mat. pura et appl., 1979, № 121, 373—385 (РЖМат, 1980, 6A447)
233. *Beachy J. A.*, Perfect quotient functors. Commun. Algebra, 1974, *2*, 403—427

234. —, On Morita's localization. J. Algebra, 1975, *38*, № 1, 225—243 (РЖМат, 1976, 10А185)
235. —, Some aspect of noncommutative localization. Lect. Notes Math., 1976, *545*, 2—31 (РЖМат, 1977, 8А307)
236. —, On the torsion theoretic support of a module. Hokkaido Math. J., 1977, *6*, № 1, 16—27 (РЖМат, 1977, 12А280)
237. —, Sur les anneaux *FBN* à gauche. Ann. Sci. Math. Québec, 1977, *1*, № 1, 59—62
238. —, Injective modules with both ascending and descending chain conditions on annihilators. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 17, 1777—1788 (РЖМат, 1978, 5А220)
239. —, Fully left bounded left Noetherian rings. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 217 (РЖМат, 1979, 8А224)
240. —, On inversive localization. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 46—56 (РЖМат, 1979, 9А238)
241. —, On localization at on ideal. Can. Math. Bull., 1979, *22*, № 4, 397—401 (РЖМат, 1980, 8А260)
242. —, *Blair W. D.*, Localization at seimprime ideals. J. Algebra, 1976, *38*, № 2, 309—314 (РЖМат, 1976, 11А344)
243. —, —, Finitely annihilated modules and orders in Artinian rings. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 1, 1—34 (РЖМат, 1978, 12А415)
244. *Beck I., Trosborg P.*, A note on free direct summands. Math. scand., 1978, *42*, № 1, 34—38 (РЖМат, 1979, 6А236)
245. *Behrens Ernst-August*, Ringtheorie. Mannheim e. s., B. I.-Wissenschaftsverl., 1975, 405 S. (РЖМат, 1976, 9А269К)
246. *Belding W. R.*, Bases for the positive cone of a partially ordered module. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *235*, 305—313 (РЖМат, 1978, 11А341)
247. *Bernecker H.*, Flatness and absolute purity applying functor categories to ring theory. J. Algebra, 1977, *44*, № 2, 411—419 (РЖМат, 1977, 8А327)
248. *Berridge P. H., Dunwoody M. J.*, Non-free projective modules for torsion-free groups. J. London Math. Soc., 1979, *19*, № 3, 433—436 (РЖМат, 1980, 2А426)
249. *Berrondo F.*, Sur le corps des fractions d'un anneau de series formelles generalisees. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 22, A1419—A1432 (РЖМат, 1978, 1А387)
250. *Berry D.*, Modules whose cyclic submodules have finite dimension. Can. Math. Bull., 1976, *19*, № 1, 1—6 (РЖМат, 1977, 4А284)
251. *Bhatwadecar S. M.*, On the global dimension of some filtered algebras. II. J. Pure and Appl. Algebra, 1978, *12*, № 1, 1—14 (РЖМат, 1978, 9А377)
252. *Bican L.*, General concept of injectivity. Stud. Alg. und ihre Anwend., 1976, *1*, 37—40 (РЖМат, 1977, 1А263)
253. —, Corational extensions and pseudo-projective modules. Acta math. Acad. sci. hung., 1976, *28*, № 1-2, 5—11 (РЖМат, 1977, 7А273)
254. —, Kulikov's criterion for modules. J. reine und angew Math., 1976, *288*, 154—159 (РЖМат, 1977, 8А326)
255. —, The structure of primary modules. Acta Univ. carol., Math. et phys., 1976, *17*, № 2, 3—12 (РЖМат, 1977, 11А309)
256. —, *Jambor P., Kepka T., Nemec P.*, Centrally splitting radicals. Comment. math. Univ. carol., 1976, *17*, № 1, 31—47 (РЖМат, 1976, 10А183)
257. —, —, —, —, Hereditary and cohereditary preradicals. Czechosl. Mat. J., 1976, *26*, № 2, 192—206 (РЖМат, 1976, 12А328)
258. —, —, —, —, A note on test modules. Comment. math. Univ. carol., 1976, *17*, № 2, 345—355 (РЖМат, 1977, 1А262)
259. —, —, —, —, Generation of preradicals. Czehosl. Mat. J., 1977, *27*, № 1, 155—166 (РЖМат, 1977, 11А308)
260. —, —, —, —, Pseudoprojective modules. Math. Slovaca, 1979, *29*, № 2, 107—115 (РЖМат, 1979, 11А251)

261. —, —, —, —, Prime and coprime modules. Fund. Math., 1980, *107*, № 1, 33—45 (РЖМат, 1981, 1А270)
262. *Bieri R., Strebel R.*, Soluble groups with coherent group rings. London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1979, № 36, 235—240 (РЖМат, 1980, 5А202)
263. *Bigard A.*, Théories de torsion et *f*-modules. Semin. P. Dubreil. Algebre. Univ. Paris., 1972—1973, *26*, 5/1—5/12 (РЖМат, 1976, 7А341)
264. —, *Keimel K., Wolfenstein S.*, Groupes et anneaux réticules. Lect. Notes Math., 1977, *608*, XI, 333 p. (РЖМат, 1978, 5А200К)
265. *Birkenmeier G. F.*, On the cancellations of quasi-injective modules. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 2, 101—109 (РЖМат, 1977, 2А332)
266. —, Self-injective rings and the minimal direct summand containing the nilpotents. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 8, 705—721 (РЖМат, 1977, 4А265)
267. —, Modules which are subisomorphic to injective modules. J. Pure and Appl. Algebra, 1978, *13*, № 2, 169—177 (РЖМат, 1979, 5А219)
268. *Bland P. E.*, Relatively flat modules. Bull. Austral. Math. Soc., 1975, *13*, № 3, 375—387 (РЖМат, 1976, 10А223)
269. —, Remarks on strongly *M*-projective modules. Ill. J. Math., 1979, *23*, № 1, 167—174 (РЖМат, 1980, 2А260)
270. *Blyth T. S.*, Module theory. An approach to linear algebra. Oxford, Clarendon Press Oxford University Press. 1977, 400 pp.
271. *Boisen M., Sheldon Ph.*, Pre-Prüfer rings. Pacif. J. Math., 1975, *58*, № 2, 331—344 (РЖМат, 1976, 3А411)
272. *Bongartz K., Riedtmann C.*, Algèbres stablement héréditaires. C. r. Acad. sci., 1979, *288*, № 15, A703—A706 (РЖМат, 1979, 12А280)
273. *Boratyński M.*, A change of rings theorem and the Artin-Rees property. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *53*, № 2, 307—310 (РЖМат, 1977, 2А433)
274. —, Generating ideals up to radical. Arch. Math., 1980, *33*, № 5, 423—429 (РЖМат, 1980, 8А375)
275. *Bouvier A.*, Sur les anneaux principaux. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1976, *27*, № 3-4, 231—242 (РЖМат, 1977, 5А305)
276. *Boyle A. K.*, Injectives containing no proper quasi-injective submodules. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 8, 775—785 (РЖМат, 1977, 3А235)
277. —, The large condition for rings with Krull dimension. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *72*, № 1, 27—32 (РЖМат, 1979, 7А326)
278. —, *Feller E. H.*, Smooth Noetherian modules. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 7, 617—637 (РЖМат, 1977, 2А330)
279. —, —, Semicritical modules and *k*-primitive rings. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 57—74 (РЖМат, 1979, 9А247)
280. —, *Goodearl K. R.*, Rings over which certain modules are injective. Pacif. J. Math., 1975, *58*, № 1, 43—53 (РЖМат, 1976, 4А365)
281. *Brandal W.*, On *h*-local integral domains. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *206*, 201—212 (РЖМат, 1976, 4А391)
282. —, Constructing Bezout domains. Rocky Mountain J. Math., 1976, *6*, № 3, 383—399
283. —, Commutative rings whos finitely generated modules decompose. Lect. Notes Math., 1979, № 723, 116 pp. (РЖМат, 1980, 2А446К)
284. —, *Wiegand M.*, Reduced rings whose finitely generated modules decompose. Communs. Algebra, 1978, *6*, № 2, 195—201 (РЖМат, 1978, 10А332)
285. *Brenner Sh., Ringel C. M.*, Pathological modules over tame rings. J. London Math. Soc., 1976, *14*, № 2, 207—215 (РЖМат, 1977, 9А320)
286. *Brewer J. W., Costa D. L.*, Contracted ideals and purity for ring extensions. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *53*, № 2, 271—276 (РЖМат, 1976, 11А490)
287. —, —, Projective modules over some non-Noetherian polynomial rings. J. Pure and Appl. Algebra, 1978, *13*, № 2, 157—163 (РЖМат, 1979, 5А347)

288. —, *Rutter E. A.*, *Watkins J. J.*, Coherence and weak global dimension of $R[[X]]$ when R is von Neumann regular. J. Algebra, 1977, *46*, № 1, 278—289 (РЖМат, 1978, 3A287)
289. *Brockmann W.*, Projective Moduln über semilokalen Ringen. Diss., Dokt. Naturwiss. Abt. Math. Ruhr-Univ. Bochum, 1975, 70 S. (РЖМат, 1977, 5A197)
290. —, Struktur projektiver Moduln uber semilokalen Ringen. Arch. Math., 1977, *29*, № 4, 406—409 (РЖМат, 1978, 6A299)
291. *Brookshear J. G.*, Projective ideals in rings of continuous functions. Pacif J. Math., 1977, *71*, № 2, 313—344
292. —, On projective prime idealsi in $C(X)$. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *69*, № 1, 203—204 (РЖМат, 1979, 1A455)
293. *Brown K. A.*, Artinian quotient rings of group rings. J. Algebra, 1977, *49*, № 1, 63—80 (РЖМат, 1978, 7A353)
294. —, The singular ideals of group rings. I. Quart. J. Math., 1977, *28*, № 109, 41—60 (РЖМат, 1977, 10A170)
295. —, The singular ideals of group rings. II. Quart J. Math., 1978, *29*, № 114, 187—197 (РЖМат, 1978, 12A437)
296. —, Quotient rings of group rings. Compos. Math., 1978, *36*, № 3, 243—254 (РЖМат, 1978, 12A429)
297. —, *Lawrence J.*, Injective hulls of group rings. Pacif. J. Math., 1979, *85*, № 2, 323—343 (РЖМат, 1980, 11A284)
298. —, *Lenagan T. H.*, *Stafford J. T.*, Weak ideal invariance and localisation. J. London Math. Soc., 1980, *21*, № 1, 53—61 (РЖМат, 1980, 12A280)
299. *Brumfiel G. W.*, Partially ordered rings and semialgebraic geometry. London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1979, № 37, 280 p., ill. (РЖМат, 1980, 5A278)
300. *Bruns W.*, «Jede» endliche freie Auflösung ist freie Auflösung eines von drei Elementen erzeugten Ideals. J. Algebra, 1976, *39*, № 2, 429—439 (РЖМат, 1976, 12A463)
301. —, Zur Einbettung von Moduln in zyklische Moduln und direkte Summen zyklischer Moduln. J. Algebra, 1978, *53*, № 1, 239—252 (РЖМат, 1978, 12A709)
302. —, Basische Elemente in Steinschen Moduln, Monatsh. Math., 1978, *85*, № 4, 283—295 (РЖМат, 1979, 5A345)
303. —, *Vetter U.*, Die Verallgemeinerung eines Satzes von Bourbaki und einige Anwendungen. Manuscr. math., 1975, *17*, № 4, 317—325 (РЖМат, 1976, 7A511)
304. *Brzezinski Ju.*, Lattices of normally indecomposable modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *68*, № 3, 271—276 (РЖМат, 1978, 11A304)
305. *Buium A.*, Asupra algebrelor cu modulele de differentiale projective. Stud. si cerc. mat., 1980, *32*, № 2, 135—151 (РЖМат, 1980, 12A250)
306. *Bulaszewska A.*, *Krempa J.*, On epimorphisms in the category of all associative rings. Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1975 (1976), *23*, № 11, 1153—1159 (РЖМат, 1976, 9A349)
307. *Burgess W.*, *Raphael R.*, Sur deux notions de complétude dans les anneaux semipremiers. C. r. Acad. sci., 1976, *283*, № 13, A927—A929 (РЖМат, 1977, 8A298)
308. *Butler M. C. R.*, On the structure of modules over certain augmented algebras. Proc. London Math. Soc., 1970, *21*, № 3, 277—295
309. —, The construction of almost split sequences. I. Proc. London Math. Soc., 1980, *40*, № 1, 72—86 (РЖМат, 1980, 8A267)
310. *Byrd K. A.*, Right self-injective rings whose essential right ideals are two-sided. Pacif. J. Math., 1979, *82*, № 1, 23—41 (РЖМат, 1980, 4A278)
311. *Caire L.*, *Cervuti U.*, Fuzzy relational spaces and algebraic structures. Rend. semin. mat. Univ. e politechn. Torino, 1976—1977, *35*, 443—461 (РЖМат, 1978, 9A250)

312. *Camillo V.*, Distributive modules. J. Algebra, 1975, *36*, № 1, 16—25 (РЖМат, 1976, 2A346)
313. —, Modules whose quotients have finite Goldie dimension. Pacif. J. Math., 1977, *69*, № 2, 337—338 (РЖМат, 1978, 1A255)
314. —, On a conjecture of Herstein. J. Algebra, 1978, *50*, № 2, 274—275 (РЖМат, 1978, 9A291)
315. —, Homological independence of injective hulls of simple modules over commutative rings. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 14, 1459—1469 (РЖМат, 1979, 6A384)
316. —, *Fuller K. R.*, Rings whose faithful modules are flat over their endomorphism rings. Arch. Math., 1976, *27*, № 5, 522—525 (РЖМат, 1977, 5A200)
317. —, —, A note on Loewy rings and chain conditions on primitive ideals. Lect Notes Math., 1979, *700*, 75—86 (РЖМат, 1979, 9A214)
318. —, *Zelmanowitz J.*, On the dimension of a sum of modules. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 4, 345—352 (РЖМат, 1978, 11A303)
319. *Campbell J. M.*, Torsion theories for modules over a triangular matrix ring. Bull. Austral Math. Soc., 1978, *19*, № 2, 299—300 (РЖМат, 1979, 11A252)
320. *Carlson J. F.*, Free modules over some modular group rings. J. Austral Math. Soc., 1976, *21*, part 1, 49—55 (РЖМат, 1976, 7A292)
321. —, Almost free modules over modular group algebras. J. Algebra, 1976, *41*, № 2, 243—254 (РЖМат, 1977, 4A281)
322. —, Cyclic modules over some modular group algebras. Stud. Sci. Math. Hungarica, 1976, *11*, № 3/4, 324—333 (РЖМат, 1980, 7A241)
323. —, Periodic modules over modular group algebras. J. London Math. Soc., 1977, *15*, № 3, 431—436 (РЖМат, 1978, 2A218)
324. —, Periodic modules with large periods. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *76*, № 2, 209—215 (РЖМат, 1980, 5A373)
325. *Carlson R.*, Malcev-Moduln, J. reine und angew. Math., 1976, *281*, 199—210 (РЖМат, 1976, 8A372)
326. *Carral M.*, Modules de type fini sur un anneau mou. C. r. Acad. Sci., 1975, *281*, № 4, A129—A132 (РЖМат, 1976, 3A405)
327. *Carrig J. E.*, The homological dimensions of simmetric algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *236*, 275—285 (РЖМат, 1978, 12A645)
328. —, *Vasconcelos W. V.*, Projective ideals in rings of dimension one. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *71*, № 2, 169—173 (РЖМат, 1979, 7A450)
329. *Carson A. B.*, Representation of regular rings of finite index. J. Algebra, 1976, *39*, № 2, 512—526 (РЖМат, 1976, 12A365)
330. —, Coherent polynomial rings over regular rings of finite index. Pacif. J. Math., 1978, *74*, № 2, 327—332 (РЖМат, 1978, 11A278)
331. *Carter D. W.*, Projective module groups of $SL_n(Z)$ and $GL_n(Z)$. J. Pure and Appl. Algebra, 1980, *16*, № 1, 49—54 (РЖМат, 1980, 5A434)
332. *Cauchon G.*, Les T-anneaux, la conditions (H) de Gabriel et ses consequenced. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 1, 11—50 (РЖМат, 1976, 12A329)
333. —, Anneaux de polynomes essentiellement bornes. Ring. Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 27—42 (РЖМат, 1980, 7A202)
334. —, *Lesieur L.*, Localisation classique en un ideal premier d'un anneau noetherien à gauche. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 11, 1091—1108 (РЖМат, 1979, 3A249)
335. *Cavalliero M. P.*, Sui moduli liberi e proiettivi graduati. Pubbl. Ist. mat. Univ. Genova, 1976, № 160, 16 p. (РЖМат, 1977, 6A308)
336. —, Sui moduli liberi e prieffivi graduati. Boll. Unione mat. ital., 1977, *A14*, № 1, 82—91 (РЖМат, 1978, 1A396)
337. *Chamarie M.*, Ordres maximaux et R-ordres maximaux. C. r. Acad. sci., 1977, *A285—B285*, № 16, 989—991 (РЖМат, 1978, 9A284)
338. —, Anneaux de polynômes et ordres maximaux. C. r. Acad. Sci., 1978, *287*, № 8, 599—601 (РЖМат, 1979, 4A309)

339. —, Ordres maximaux et *R*-ordres maximaux. J. Algebra, 1979, *58*, № 1, 148—156 (РЖМат, 1980, 1А295)
340. —, *Hudry A.*, Anneaux noethériens à droite entiers sur leurs centres. C. r. Acad. sci., 1971, *283*, № 15, A1011—A1012 (РЖМат, 1977, 7А262)
341. —, —, Anneaux noetheriens a droite entiers sur un sous-anneau de leur centre. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 2, 203—222 (РЖМат, 1978, 11А270)
342. —, *Maury G.*, Un theorème de l'ideal à gauche principal dans les anneaux premiers, noethériens, à identité polynomial dont le centre est un domain de Krull. C. r. Acad. sci., 1978, *AB286*, № 14, A609—A611 (РЖМат, 1978, 12А417)
343. *Chandran V. R.*, On conjecture of Hyman Bass. Pure. appl. Math. Sci., 1976, *4*, № 1/2, 125—131
344. *Chatters A. W.*, Two results on *PP* rings. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 9, 881—891 (РЖМат, 1977, 6А201)
345. —, A note on Noetherian orders in Artinian rings. Glasgow Math. J., 1979, *20*, № 2, 125—128 (РЖМат, 1980, 1А293)
346. —, *Goldie A. W.*, *Hajarnavis C. R.*, *Lenagan T. H.*, Reduced rank in Noetherian rings. J. Algebra, 1979, *61*, № 2, 582—589 (РЖМат, 1980, 7А220)
347. —, *Hajarnavis C. R.*, Rings in which every complement right ideal is a direct summand. Quart. J. Math., 1977, *28*, № 109, 61—80 (РЖМат, 1977, 12А270)
348. —, —, *Norton N. C.*, The Artin radical of a Noetherian ring. J. Austral Math. Soc., 1977, *A23*, № 3, 379—384
349. —, *Robson J. C.*, Decomposition of orders in semiprimary rings. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 6, 517—532 (РЖМат, 1980, 8А217)
350. —, *Smith P. F.*, A note on hereditary rings. J. Algebra, 1977, *44*, № 1, 181—190 (РЖМат, 1977, 10А162)
351. *Cheatham T. J.*, *Smith J. R.*, Regular and semisimple modules. Pacif. J. Math., 1976, *65*, № 2, 315—323 (РЖМат, 1977, 7А269)
352. *Cherlin G.*, Model theoretic algebra. Selected topics. Lect. Notes Math., 1976, *521*, IV, 234 pp. (РЖМат, 1977, 5А56)
353. *Chiba K.*, *Tominaga H.*, Note on strongly regular rings and P_1-rings. Proc. Jap. Acad., 1975, *51*, № 4, 259—261 (РЖМат, 1976, 2А322)
354. *Chiplunkar A. V.*, Global dimension of algebra of differential operators. J. Indian Math. Soc., 1974 (1975), *38*, № 1-4, 1—17 (РЖМат, 1976, 12А466)
355. *Choudhury D. P.*, *Tewary K.*, Tensor parities, cyclic quasi-projectivies and cocyclic copurity. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 15, 1559—1572 (РЖМат, 1980, 4А305)
356. *Chouinard L. G.*, Projectivity and relative projectivity over group rings. J. Pure and Appl. Algebra, 1976, *7*, № 3, 287—302 (РЖМат, 1976, 11А471)
357. *Chuchel J.*, *Eggert N.*, The complete quotient ring of images of semilocal Prufer domains. Can. J. Math., 1977, *29*, № 5, 914—927 (РЖМат, 1978, 5А398)
358. *Chung L. W.*, *Luh J.*, A characterization of semisimple Artinian rings. Mat. Jap., 1976, *21*, № 3, 227—228 (РЖМат, 1978, 1А234)
359. *Chwe B. S.*, *Neggers J.*, Some classes of rings defined by properties of modules. Rev. Univ. mat. argent., 1976 (1977), № 1, 54—59 (РЖМат, 1978, 5А230)
360. *Cipolla M.*, Discesa fedelmente piatta dei moduli. Rend. Circ. mat. Palermo, 1976, *25*, № 1-2, 43—46 (РЖМат, 1979, 2А295)
361. *Clarke T. G.*, Embedding flat modules in filtered unions of projectives. Commun. Algebra, 1977, *5*, № 3, 293—303 (РЖМат, 1978, 2А220)
362. *Cohen J. M.*, On the number of generators of a module. J. Pure and Appl. Algebra, 1978, *12*, № 1, 15—19 (РЖМат, 1978, 11А308)

363. —, *Montgomery S.*, The normal closure of semiprime rings. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978. New—York—Basel, 1979, 43—49 (РЖМат, 1980, 8А245)
364. *Cohn P. M.*, Numérateurs et dénominateurs dans le corps de fractions b'un semifir. Semin P. Dubreil. Algebre Univ. Pierre et Marie Curil, 1974—1975, *28*, 28/1—28/7 (РЖМат, 1976, 7А336)
365. —, A construction of simple principal right ideal domains. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *66*, № 2, 217—222 (РЖМат, 1978, 10А166)
366. —, Full modules over semifirs. Publ. Math., 1977, *24*, № 3-4, 305—310 (РЖМат, 1978, 11А309)
367. —, The affine scheme of a general ring. Lect. Notes Math., 1979, *753*, 197—211 (РЖМат, 1980, 5А235)
368. —, *Dicks W.*, Localization in semifirs II. J. London Math. Soc., 1976, *13*, № 3, 411—418 (РЖМат, 1977, 1А250)
369. *Colavita L. R.*, Sobre una generalizacion del teorema de descomposicion primaria de grupos a ciertas teorias de torsion en anillos commutativos. An. Inst. mat. Univ. nac. autón., Méx., 1978, *18*, № 1, 7—12 (РЖМат, 1980, 6А445)
370. —, *Raggi F. C.*, *Rios M. J.*, Sobre filtros estables de Gabriel V. (Algunas interpretaciones topológicas respecto a filtros de Gabriel). An. Inst. mat. Univ. nac. autón. Méx., 1977, *17*, № 1, 1—16 (РЖМат, 1979, 8А237)
371. —, *Rios Montes J.*, Sobre filtros estables de Gabriel VI (Filtros neterianos). An. Inst. mat. Univ. nac. autón. Méx., 1978, *18*, № 1, 13—25 (РЖМат, 1980, 6А288)
372. *Conze-Berline N.*, Sur certains quotients de l'algebre enveloppante d'une algebre de Lie semi-simple Lect. Notes Math., 1975, *466*, 31—37 (РЖМат, 1976, 2А355)
373. *Costa D.*, Unique factorization in modules and symmetric algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, *224*, № 2, 267—280 (РЖМат, 1977, 10А280)
374. *Coste M.*, Localization, spectra and sheaf representation. Lect. Notes Math., 1979, *753*, 212—238 (РЖМат, 1980, 5А255)
375. *Costovici Gh.*, General topological frame for Zariski's topologies. Bull. Inst. politehn. Iaşi, 1978, *24*, Sec. I, № 3-4, 9-12 (РЖМат, 1980, 2А277)
376. *Couchot F.*, Sur le dual de la notion de présentation. finie. C. r. Acad. sci., 1975, *281*, № 23, A1005—A1008 (РЖМат, 1976, 8А543)
377. —, Topologie cofinie et modules pur-injectifs. C. r. Acad. sci., 1976, *283*, № 6, A277—A280 (РЖМат, 1977, 4А300)
378. —, Anneaux auto-*fp*-injectifs. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 11, A579—A582 (РЖМат, 1977, 11А291)
379. —, Sous-modules purs et modules de type cofini. Lect. Notes Math., 1978, *641*, 198—208 (РЖМат, 1978, 11А463)
380. —, Classes d'anneaux contenant les *V*-anneaux et les anneaux absolument plats. Lect. Notes Math., 1979, № 740, 170—183 (РЖМат, 1980, 4А275)
381. *Couture R.*, *Lavoie M.*, Reciproque du theoreme des bases sur un espace vectoriel. Can. Math. Bull., 1975, *18*, № 5, 749—751 (РЖМат, 1976, 12А344)
382. *Cox S. H.*, *Jr.*, The preparation theorem and the freeness of $A[[X]]/J$. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *61*, № 2, 227—231 (РЖМат, 1977, 12А444)
383. *Cozzens J. H.*, Maximal orders and reflexive modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, *219*, 323—336 (РЖМат, 1977, 5А195)
384. —, The structure of localizable algebras having finite global dimension. Ring theory (Proc. Antwerp. Conf., 1978), 1979, 599—612 (РЖМат, 1980, 8А256)
385. —, *Sandomierski F. L.*, Reflexive primes, localization and primary decomposition in maximal orders. Proc. Amer. Math. Sci., 1976, *58*, 44—50 (РЖМат, 1977, 8А309)

386. —, —, Maximal orders and localization. I. J. Algebra, 1977, *44*, № 2, 319—338 (РЖМат, 1977, 9A312)
387. —, — Localization at a semiprime ideal of a right Noetherian ring, Commun. Algebra, 1977, *5*, № 7, 707—726 (РЖМат, 1978, 5A249) 1978, 5A249)
388. *Crawley W.*, Epimorphisms and *H*-coextensions. Arch. Math., 1978, *30*, № 5, 449—457 (РЖМат, 1979, 2A141)
389. *Crivei I.*, *c*-pure exact sequences of *R*-modules. Mathematica (RSR), 1975, *17*, № 1, 59—65 (РЖМат, 1978, 10A296)
390. —, *c*-pure injective modules. Mathematica (RSR), 1975, *17*, № 2, 167—172 (РЖМат, 1978, 10A297)
391. —, Asupra unei clase de inele. Bul. şti. Inst. politehn. Cluj. Ser. mec., 1977, *20*, 17—19 (РЖМат, 1980, 6A444)
392. *Crown G D.*, *Hutchinson J. J.*, On the exactness of the completion functor. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 1, 1-12 (РЖМат, 1980, 8A303)
393. *Damiano R. F.*, Coflat rings and modules. Pacif. J. Math., 1979, *81*, № 2, 349—369 (РЖМат, 1980, 3A198)
394. —, A right *PCI* ring is right. Noetherian. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *77*, № 1, 11—14 (РЖМат, 1980, 4A288)
395. *Dark R. S.*, On hypercentral groups and Artinian modules. J. Algebra, 1976, *41*, № 2, 597—599 (РЖМат, 1977, 6A207)
396. *Dartois Ch.*, Catégories preadditives et modules. Equisses Math., Fac. Sci. Univ. Paris VII, 1971, № 13, 104 pp.
397. *Dauns J.*, Quotient rings and one-sided primes. J. reine und angew. Math., 1975, 278—279, 205—224 (РЖМат, 1976, 6A208); Поправка: ibid, 1976, *280*, 205 (РЖМат, 1976, 7A329)
398. —, Generalized monoform and qusi-injective modules. Pacif. J. Math., 1976, *66*, № 1, 49—66 (РЖМат, 1977, 9A327)
399. —, Prime modules. J. reine und angew. Math., 1978, *298*, 156—181 (РЖМат, 1978, 12A442)
400. *Day B. J.*, On topological modules and duality. Cah. topol. et geom. differ., 1979, *20*, № 3, 297—310 (РЖМат, 1980, 7A265)
401. *De Munter-Kuyl L.*, Some invariants for rank three torsion-free modules over a Dedekind domain. Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1975 (1976), *59*, № 5, 349—356 (РЖМат, 1978, 3A199)
402. —, Isomorphisms of rank two torsion-free modules over a Dedekind domain. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 1976, *60*, № 4, 351—358 (РЖМат, 1978, 4A327)
403. *Descovich J.*, Ringe mit monotoner modul dimension. Rings, Modules and Radicals, Amsterdam—London, 1973, 153—166 (РЖМат, 1976, 2A517)
404. *Desrochers M.*, Dimensions globales des extensions de Ore et des algebres de Weyl. Groupe etude algebre. Univ. Pierre et Marie Curie, 1976—1977 (1978), 6/01—6/31 (РЖМат, 1978, 10A300)
405. *Dicks W.*, Hereditary group rings. J. London Math. Soc., 1979, *20*, № 1, 27—38 (РЖМат, 1980, 3A193)
406. —, Groups, trees and projective modules. Lect. Notes Math., 1980, *790*, VI, 127 pp. (РЖМат, 1980, 12A422K)
407. —, *Menal P.*, The group rings that are semifir. J. London Math. Soc., 1979, *19*, № 2, 288—290 (РЖМат, 1979, 12A299)
408. —, *Sontag E. D.*, Sylvester domains. J. pure and appl. Algebra, 1978, *13*, № 3, 243—275 (РЖМат, 1979, 5A259)
409. *Diers Y.*, Spectres et localisations relatifs à un foncteue. C. r. Acad. Sci., 1978, *287*, № 15, 985—989 (РЖМат, 1979, 8A241)
410. *Dinca S.*, On co-noetherian modules. Stud. Cerc. Math., 1973, *25*, 643—646
411. *Dinh V. H.*, Über die Frage der Spalbarkeit von *MHP*-ringen. Bull. Acad. pol. sci. Sèr. sci. math., astron. et phys., 1975, *23*, № 2, 135—138 (РЖМат, 1976, 1A280)

412. —, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtideale. Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 1975, *26*, № 3-4, 245—250 (РЖМат, 1976, 7A316)
413. —, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtideale. II. Studia Sci. Math. Hungar, 1976, *9*, № 3-4, 419—423
414. —, Über Ringe mit eingeshränkter Minimalbedingung höherer Stufe für Rechtsideale. I. Math. Nachr., 1976, *71*, 227—235 (РЖМат, 1976, 11A330)
415. —, Die Spaltbarkeit von *MHR*-ringen. Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1977, *25*, №-10, 939—941 (РЖМат, 1978, 6A277)
416. —, Über Ringe mit eingeschrankter Minimalbedingung höherer Stufe für Rechtsideale. Math. Nachr., 1978, *86*, 291—307 (РЖМат, 1979, 12A290)
417. —, *Widiger A.*, Über Ringe mit eingeschränkter Minimalbedingung höherer Stufe für Rechtsideale. Math. Nachr., 1978, *86*, 309—331 (РЖМат, 1979, 12A291)
418. *Dlab V.*, Matrix rings as injective hulls of torsionfree tidy rings. Ottawa, 1972, 9 pp.
419. —, *Ringel C. M.*, The representations of tame hereditary algebras. Represent. Theory Algebras. Proc. Philadelphia Conf., New York—Basel, 1978, 329—353 (РЖМат, 1979, 4A314)
420. —, —, A module theoretical interpretation of properties of the root systems. Ring Theory Proc. Antwerp. Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 435—451 (РЖМат, 1980, 8A384)
421. *Dobbs D.*, On the weak global dimensione of pseudo-valuation domains. Can. Math. Bull., 1978, *21*, № 2, 159—164 (РЖМат, 1979, 3A374)
422. —, Coherence, ascent of going down, and pseudo-valuation domains. Houston J. Math., 1978, *4*, № 4, 551—567 (РЖМат, 1979, 12A456)
423. —, On flat finitely generated ideals. Bull. Austral Math. Soc., 1980, *21*, № 1, 131—135 (РЖМат, 1980, 9A380)
424. —, *Papick I. J.*, When is $D+M$ coherent? Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *56*, 51—54 (РЖМат, 1977, 3A337)
425. —, —, Flat ore open implies going down. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *65*, № 2, 370—371 (РЖМат, 1978, 8A427)
426. *Doman D.*, *Hauptfleisch G. J.*, Filtered-injective and coflat modules. Quaest. math., 1978, *3*, 33—48
427. *Dowbor P.*, *Simson D.*, A characterization of hereditary rings of finite representation type. Bull. Amer. Math. Soc., 1980, *1*, № 2, 300—302 (РЖМат, 1980, 12A240)
428. —, —, Quasi-Artin species and rings of finite representation type. J. Algebra, 1980, *63*, № 2, 435—443 (РЖМат, 1980, 12A257)
429. *Eckstein F.*, Orders in locally pro-Artinian rings. J. pure and Appl. Algebra, 1979, *14*, № 3, 253—258 (РЖМат, 1979, 11A239)
430. *Eerkes G.*, Rings of equivalent dominant and codominant dimensions. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *48*, № 2, 297—306 (РЖМат, 1976, 2A487)
431. *Eggert N.*, Rings whose overrings are integrally closed in their complete quotient ring. J. reine und angew. Math., 1976, *282*, 88—95 (РЖМат, 1976, 11A475)
432. *Ehrlich G.*, Units and one-sided units in regular rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, *216*, 81—90 (РЖМат, 1976, 12A348)
433. *Eisenbud D.*, Solution du probleme de Serre par Quillen-Suslin. Lect. Notes Math., 1977, *586*, 9—19 (РЖМат, 1978, 4A324)
434. *Eklof P. C.*, Homological algebra and set theory. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *227*, 207—226 (РЖМат, 1978, 2A147)
435. *Enochs E.*, A note on absolutely pure modules. Can. Math. Bull., 1976, *19*, № 3, 361—362 (РЖМат, 1977, 12A419)
436. *Evans M. W.*, Extensions of semi-hereditary rings. J. Austral. Math. Soc., 1977, *A23*, № 3, 333—339 (РЖМат, 1978, 11A268)
437. —, Extended semi-hereditary rings. J. Austral. Math. Soc., 1978, *A26*, № 4, 465—474 (РЖМат, 1979, 8A206)
438. *Facchini A.*, Reflexive rings. Symp. math. Ist. Naz. Alta mat. Francesco Severi. Vol. 23. Roma, 1979, 415—449 (РЖМат, 1980, 9A375)

439. *Faith C.*, When are proper cyclics injective? Pacif. J. Math., 1973, *45*, 97—112; Поправка: ibid, 1974, *55*, 640—641
440. —, On a theorem of Chatters. Commun. Algebra, 1975, *3*, № 2, 169—184 (РЖМат, 1976, 6А292); Поправка: ibid, 1977, *5*, № 5, 555—556
441. —, Projective ideals in Cohen rings. Arch. Math., 1975, *26*, № 6, 588—594 (РЖМат, 1976, 7А303)
442. —, On hereditary rings and Boyle's conjecture. Arch. Math., 1976, *27*, № 2, 113—119 (РЖМат, 1976, 12А326)
443. —, Galois extensions of commutative rings. Math. J. Okayama Univ., 1976, *18*, № 2, 113—116 (РЖМат, 1977, 7А415)
444. —, Injective cogenerator rings and a theorem of Tachikawa. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *60*, № 208, 25—30 (РЖМат, 1977, 11А294)
445. —, Semiperfect Prüfer rings and *FPF* rings. Isr. J. Math., 1977, *26*, № 2, 166—177 (РЖМат, 1977, 9А305)
446. —, Injective cogenerator rings and a theorem of Tachikawa. II. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *62*, № 1, 15—18 (РЖМат, 1978, 1А230)
447. —, The basis theorem for modules a brief survey and a look to the future. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1977. New York—Basel, 1978, 9—23 (РЖМат, 1979, 11А248)
448. —, Bounded prime rings, pseudo-frobenius rings, the Jacobson radical of a ring. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 218—223 (РЖМат, 1979, 11А222)
449. —, Injective quotient rings of commutative rings. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 151—203 (РЖМат, 1979, 11А380)
450. —, Self-injective rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *77*, № 2, 157—164 (РЖМат, 1980, 5А239)
451. —, The genus of a module and generic families of rings. Ring Theory Proc. Antwerp. Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 613—629 (РЖМат, 1980, 7А253)
452. *Farahat H. K.*, Homological dimension and Abelian groups. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 379—383 (РЖМат, 1978, 8А408)
453. *Feigelstock S.*, A characterization of Prüfer rings. J. reine und angew. Math., 1976, *282*, 131—132 (РЖМат, 1976, 11А487)
454. —, On modules over Dedekimd rings. Acta Sci. Math., 1977, *39*, № 3-4, 255—263 (РЖМат, 1978, 10А326)
455. *Fenrick M. H.*, Rings for which all preradicals have finite lenght. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 17, 1805—1815 (РЖМат, 1980, 8А220)
456. *Ferrand D.*, Les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynomes sur un corps sont libres (D'apres Quillen et Suslin). Lect. Notes Math., 1977, *567*, 202—221 (РЖМат, 1977, 11А401)
457. *Fieldhouse D. J.*, Semihereditary polynomial rings. Publ. math., 1978, *25*, № 3-4, 211 (РЖМат, 1979, 4А289)
458. *Fisher E.*, Powers of saturated modules. J. Symb. Logic, 1972, *37*, № 4, 777
459. *Fisher E. R.*, Abelian structures. I. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 270—322 (РЖМат, 1978, 11А305)
460. *Fisher J. R.*, Goldie theorem for differentiably prime rings. Pacif. J. Math., 1975, *58*, № 1, 71—77 (РЖМат, 1976, 2А307)
461. *Fisher J. W.*, Problem session on regular rings. Lect. Notes Math., 1976, *545*, 195—199 (РЖМат, 1977, 8А302)
462. *Flamant M.*, Une nouvelle caractenisation des anneaux de Prüfer. Publ. Dep. math., 1977, *14*, № 4, 21—25 (РЖМат, 1979, 8А415)
463. *Fletcher C.*, Remarque sur les anneaux de fractions et la factorisation. Publ. Dép. math., 1975, *12*, № 1, 1—3 (РЖМат, 1976, 5А403)
464. *Fleury P.*, On local *QF* rings. Aequat. math., 1977, *16*, № 1-2, 173—179 (РЖМат, 1978, 8А305)
465. *Flood J.*, Pontryagin duality for topological modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *75*, № 2, 329—333 (РЖМат, 1980, 2А278)

466. *Fontana. M.*, Absolutely flat Baer rings. Boll. Unione mat. ital., 1979, *B16*, № 2, 566—583 (РЖМат, 1980, 3А329)
467. *Formanek E.*, The center of the ring of 3×3 generic matrices. Linear and Multilinear Algebra, 1979, *7*, № 3, 203—212 (РЖМат, 1979, 12А298)
468. —, The center of the ring of 4×4 generic matrices. J. Algebra, 1980, *62*, № 2, 304—319 (РЖМат, 1980, 8А251)
469. *Fossum R., Foxby H.-B.*, The category of graded modules. Math. scand., 1974, *35*, № 2, 288—300 (РЖМат, 1976, 1А421)
470. *Fox D.*, On localizing orderable modules. J. Austral. Math. Soc., 1978, *A26*, № 1, 59—64 (РЖМат, 1979, 5А239)
471. *Foxby H.-B.*, Injective modules under flat base change. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *50*, 23—27 (РЖМат, 1976, 5А419)
472. *Frei A., Kleisli H.*, Shape invariant functors: application in module theory. Math. Z., 1978, *164*, № 2, 179—183 (РЖМат, 1979, 8А405)
473. *Fröhlich A.*, Locally free modules over arithmetic orders. J. reine und angew. Math., 1975, *274/275*, 112—124 (РЖМат, 1976, 1А386)
474. *Fuchs L.*, Vector spaces with valuations. J. Algebra, 1975, *35*, № 1-3, 23—38 (РЖМат, 1976, 1А391)
475. —, Cotorsion modules over Noetherian hereditary rings. Houston J. Math., 1977, *3*, № 1, 33—46 (РЖМат, 1977, 8А328)
476. —, Vector spaces with general valuations. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 21. London—New York, 1977, 433—450 (РЖМат, 1978, 5А349)
477. —, Subfree valued vector spaces. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 158—167 (РЖМат, 1978, 8А203)
478. —, Valued vector spaces and Abelian *p*-groups. Groupe étude algébre. Univ. Pierre et Marie Curie, 1976—1977 (1978), *2*, № 7, 1—12 (РЖМат, 1978, 12А273)
479. —, On a duality of modules over valuation rings. Ann. mat. pura ed appl., 1978, *117*, 227—232 (РЖМат, 1979, 7А456)
480. —, *Loonstra F.*, On a class of submodules in direct products. Atti Accad. naz. Lincei Rend., 1976, № 6, 743—748 (РЖМат, 1978, 8А323)
481. —, *Kirkman E., Kuzmanovich J.*, Hereditary module-finite algebras. J. London Math. Soc., 1979, *19*, № 2, 268—276 (РЖМат, 1979, 11А224)
482. *Fuelberth J., Kuzmanovich J.*, On the structure of splitting rings. Commun. Algebra, 1975, *3*, № 10, 913—949 (РЖМат, 1976, 7А304)
483. —, —, The structure of semiprimary and Noetherian hereditary rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *212*, № 485, 83—111 (РЖМат, 1976, 8А362)
484. —, —, Primary direct sum decomposition. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 3, 285—304 (РЖМат, 1976, 12А343)
485. —, —, Split subdirect products and piecewise domains. Can. J. Math., 1976, *28*, № 2, 408—419 (РЖМат, 1976, 12А350)
486. —, —, On the structuree of finitely generated splitting rings. Pacif. J. Math., 1979, *80*, № 2, 389—424 (РЖМат, 1980, 2А249)
487. —, —, *Shores T. S.*, Splitting torsion theories over commutative rings. Bull. Austral. Math. Soc., 1975, *13*, № 3, 457—464 (РЖМат, 1976, 9А276)
488. *Fujita K., Itoh S.*, A note on Noetherian Hilbert rings. Hiroshima Math. J., 1980, *10*, № 1, 153—161 (РЖМат, 1980, 7А385)
489. *Fuller K. R.*, On rings whose left modules are direct sums of finitely generated modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *54*, 39—44 (РЖМат, 1976, 12А320)
490. —, Weakly symmetric rings of distributive module type. Commun. Algebra, 1977, *5*, № 9, 997—1008 (РЖМат, 1978, 7А337)
491. —, Rings of left invariant module type. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 2, 153—167 (РЖМат, 1978, 12А408)
492. —, On a generalization of serial rings. I. Represent. Theory of Algebras, Proc. Philadelphia Conf., New York-Basel, 1979, 353—367 (РЖМат, 1979, 4А291)

493. —, Biserial rings. Lect. Notes Math., 1979, *734*, 64—90 (РЖМат, 1980, 3А179)
494. —, On a generalization of serial rings. II. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 7, 635—661 (РЖМат, 1980, 8А231)
495. —, *Haack J.*, Rings with quivers that are trees. Pacif. J. Math., 1978, *76*, № 2, 371—379 (РЖМат, 1979, 2А192)
496. —, —, *Hullinger H.*, Stable equivalence of uniserial rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *68*, № 2, 153—158 (РЖМат, 1979, 1А300)
497. —, *Shutters W. A.*, Projective modules over non-commutative semilocal rings. Tohoku Math. J., 1975, *27*, № 3, 303—311 (РЖМат, 1976, 4А253)
498. *Gabel M. R.*, Lower bounds on the stable range of polynomial rings. Pacif. J. Math., 1975, *61*, № 1, 117—120 (РЖМат, 1976, 11А489)
499. *Gabriel P.*, Christine Riedtmann and the self-injective algebras of finite representation type. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 453—458 (РЖМат, 1980, 7А246)
500. *Garavaglia S.*, Direct product decomposition of theories of modules. J. Symbol. Log., 1979, *44*, № 1, 77—88 (РЖМат, 1979, 12А72)
501. *Gardner B. J.*, Some aspects of *T*-nilpotence. Pacif. J. Math., 1974, *53*, 117—130 (РЖМат, 1975, 5А254)
502. —, Some aspects of *T*-nilpotence. II. Lifting properties over *T*-nilpotent ideals. Pacif. J. Math., 1975, *59*, № 2, 445—453 (РЖМат, 1976, 7А309)
503. —, A note on ring epimorphisms and polynomial identities. Comment. math. Univ. carol., 1979, *20*, № 2, 293—307 (РЖМат, 1979, 12А296)
504. —, *Stewart P. N.*, On semi-simple radical classes. Bull. Austral. Math. Soc., 1975, *13*, № 3, 349—353 (РЖМат, 1976, 11А328)
505. *Geramita A. V.*, *Small Ch.*, Introduction to homological methods in commutative rings. Quec's Pap. Pure and Appl., Math., 1976, № 43, 352 pp. (РЖМат. 1977, 3А336)
506. *Gerstein L. J.*, A local approach to matric equivalence. Linear Algebra and Appl., 1977, *16*, № 3, 221—232 (РЖМат, 1978, 1А346)
507. *Gilmer R.*, Modules that are finite sums of simple submodules. Publ. Math., 1977, *24*, № 1-2, 5—8 (РЖМат, 1978, 9А290)
508. —, *Grams A.*, Finite intersections of quotient rings of a Dedekind domain. J. London Math. Soc., 1976, *12*, № 3, 257—261 (РЖМат, 1976, 11А483)
509. —, *Heinzer W.*, The Noetherian property for quotinent rings of infinite polynomial rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *76*, № 1, 1—7 (РЖМат, 1980, 5А394)
510. —, *Hoffmann J. F.*, A characterization of Prüfer domains in terms of polynomials. Pacif. J. Math., 1975, *60*, № 1, 81—85 (РЖМат, 1976, 6А418)
511. *Ginn S. M.*, A counter-example to a theorem of Kurshan. J. Algebra, 1976, *40*, № 1, 105—106 (РЖМат, 1977, 2А325)
512. —, *Moss P. B.*, A decomposition theorem for Noetherian orders in artinian rings. Bull. London Math. Soc., 1977, *9*, № 2, 177—181 (РЖМат, 1978, 4А208)
513. *Glaz S.*, *Vasconcelos W. V.*, Flat ideals. II. Manuscripta Math. 1977, *22*, № 4, 325—341 (РЖМат, 1978, 7А513)
514. *Goel V. K.*, *Jain S. K.*, π-injective modules and rings whose cyclics are π-injective. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 1, 59—73
515. —, —, Semiperfect rings with quasi-projective left ideals. Math. J. Okayama Univ., 1976, *19*, № 1, 39—43 (РЖМат, 1978, 1А223)
516. —, —, *Singh S.*, Rings whose cyclic modules are injective or projective. Proc. Amer. Math., Soc., 1975, *53*, № 1, 16—18 (РЖМат, 1976, 7А302)
517. —, —, —, Semiprime rings with finite length w. r. t. an idempotent kernel functor. Israel J. Math., 1977, *28*, № 1-2, 110—112 (РЖМат, 1978, 7А341)
518. *Golan J. S.*, Matching torsion and cotorsion theories. Glasgow Math. J., 1974, *15*, 176—179
519. —, Modules satisfying both chain conditions with respect to a torsion theory. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *52*, 103—108 (РЖМат, 1976, 5А253)
520. —, On the maximal support of a module. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 3, 219—231 (РЖМат, 1977, 1А261)
521. —, Some runctors arising from the consideration of torsion theories over non-commutative rings. Bull. Austral. Math., Soc., 1976, *15*, № 3, 455—460 (РЖМат, 1977, 10А173)
522. —, Decomposition and dimension in module categories. New York—Basel, Marcel Dekker, 1977, XII, 185 pp. (Lect. Notes Pure and Appl. Math., vol. 33) (РЖМат, 1978, 11А306)
523. —, Quelques utilisations des formules de Camillo—Zelmanowitz. C. r. Acad. sci., 1978, *286*, № 17, A731—A734 (РЖМат, 1978, 12А445)
524. —, The lattice of torsion theories associated with a ring. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1977. New York—Basel, 1978, 25—43 (РЖМат, 1979, 8А268)
525. —, Rings having a composition series with respect to a torsion theory. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 6, 611—623 (РЖМат, 1979, 11А253)
526. —, Semisimple artinian rings of quotients. Amer. Math. Men., 1979, *86*, № 6, 474—475 (РЖМат, 1980, 1А294)
527. —, Colocalization at idempotent ideals. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978. New York—Basel, 1979, 631—668 (РЖМат, 1980, 8А257)
528. —, Some torsion theories are compact. Math. jap., 1979, *24*, № 6, 635—639 (РЖМат, 1980, 9А279)
529. —, *Miller R. W.*, Cotorsion free modules and colocalizations. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 12, 1217—1230 (РЖМат, 1979, 3А251)
530. —, *Raynaud J.*, *Oystaeyen F. van.*, Sheaves over the spectra of certain noncommutative rings. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 5, 491—502 (РЖМат, 1977, 2А323)
531. *Goldie A.*, Reduced rank on modules, application to some theorems on Noetherian rings. Ring Theory. Proc. Antwerp Conf., 1977, New York—Basel, 1978, 45—58 (РЖМат, 1979, 11А247)
532. —, *Krause G.*, Artinian quotien rings of ideal invariant noetherian rings. J. Algebra, 1980, *63*, № 2, 374—388 (РЖМат, 1980, 11А276)
533. *Goldsmith B.*, Endomorphism rings of torsion-free modules over a complete discrete valuation ring. J. London Math. Soc., 1978, *18*, № 3, 464—471 (РЖМат, 1979, 9А273)
534. *Goldston B.*, *Mewborn A. C.*, A structure sheaf for a noncommutative Noetherian ring. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, *81*, № 5, 944—946 (РЖМат, 1976, 7А321)
535. *Goodearl K. R.*, Global dimension of differential operator rings. II, Trans. Amer. Math. Soc, 1975, *209*, № 482, 65—85; III. J. London Math. Soc., 1978, *17*, № 3, 397—409 (РЖМат, 1977, 3А324; 1979, 2А274)
536. —, Ring theory. Nonsingular rings and modules. Marcel Dekker, New York—Basel, 1976, 206 pp.
537. —, Completions of regular rings. I. Math. Ann., 1976, *220*, № 3, 229—252 (РЖМат, 1976, 11А334)
538. —, Direct sum properties of quasi-injective modules. Bull. Amer. Math. Soc., 1976, *82*, № 1, 108—110 (РЖМат, 1977, 1А257)
539. —, Power-cancellation of groups and modules. Pacif. J. Math., 1976, *64*, № 2, 387—412 (РЖМат, 1977, 6А212)
540. —, Regular rings and rank functions. Lect Notes Math., 1976, *545*, 83—104 (РЖМат, 1977, 8А300)
541. —, Power-cancellation of modules. Ring. Theory. II. Proc. 2nd Okla Conf., 1975, New York—Basel, 1977, 131—147 (РЖМат, 1978, 7А364)
542. —, Completions of regular rings. II. Pacif. J. Math., 1977, *72*, № 2, 423—640 (РЖМат, 1978, 7А380)
543. —, Centers of regular self-injective rings. Pacif. J. Math., 1978, *76*, № 2, 381—395 (РЖМат, 1979, 2А186)

544. —, Von Neumann regular rings. Pitman, London—San Francisco—Melburne, 1979
545. —, Artinian and Noetherian modules over regular rings. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 5, 477—504 (РЖМат, 1980, 9А281)
546. —, *Boyle A. K.*, Dimension theory for nonsingular injective modules. Mem. AMS, 1976, 177, VIII, 112 pp. (РЖМат, 1977, 5А201)
547. —, *Handelman D.*, Simple self-injective rings. Commun. Algebra, 1975, *3*, № 9, 797—834 (РЖМат, 1976, 5А255)
548. —, *Warfield R. B., Jr.*, Algebras over Zero-Dimensional Rings. Math. Ann., 1978, *223*, № 2, 157—168 (РЖМат, 1977, 3А219)
549. —, —, Simple modules over hereditary Noetherian prime rings. J. Algebra, 1979, *57*, № 1, 82—100 (РЖМат, 1979, 12А302)
550. *Gordon R.*, Some aspects of non-commutative Noetherian rings. Lect. Notes Math., 1976, *545*, 105—127 (РЖМат, 1977, 8А318)
551. —, *Green E.*, A representation theory for Noetherian. rings. J. Algebra, 1976, *39*, № 1, 100—130 (РЖМат, 1976, 12А357)
552. —, —, Indecomposable modules: modules with cores. Bull. Amer. Math. Soc., 1976, *82*, № 4, 590—592 (РЖМат, 1977, 4А283)
553. —, —, Indecomposable modules: amalgamations. Bull. Amer. Math. Soc., 1976, *82*, № 6, 884—887 (РЖМат, 1977, 8А325)
554. —, —, Modules with cores and amalgamations of indecomposable modules. Mem. Amer. Math. Soc., 1977, № 187, VIII, 145 pp. (РЖМат, 1978, 2А222)
555. *Goto S.*, *Watanabe K.*, On graded rings. 1. J. Math. Soc. Jap., 1978, *30*, № 2, 179—213 (РЖМат, 1979, 5А352)
556. —, —, On graded rings. 2. (Z^n graded rings). Tokyo J. Math., 1978, *1*, № 2, 237—261 (РЖМат, 1979, 9А406)
557. *Goursaud J.*, Sur les *V*-anneaux réguliers. Sem. Alg. noncommutative 1975—76, Paris, XI. Orsay, 1976, 11 pp.
558. —, *Jeremy L.* Un anneau régulier continu à gauche et $\aleph_0$-continu à droite est continu. C. r. Acad. sci., 1976, *283*, № 11, A807—A808 (РЖМат, 1977, 5А189)
559. —, —, Une notion de rang dans les facteurs reguliers auto-injectivs a droite. Commun. Algebra, 1977, *5*, № 8, 829—839 (РЖМат, 1978, 6А276)
560. —, *Osterburg J.*, *Pascaud J.-L.*, *Valette J.*, Points fixes des anneaux réguliers auto-injectifs. C. r. Acad. Sci., 1980, *A290*, № 21, 985—988 (РЖМат, 1981, 1А261)
561. —, *Pascaud J.-L.*, Anneaux semi-héréditaires. C. r. Acad. sci., 1977, *A284*, № 1, 583—586 (РЖМат, 1977, 11А293)
562. —, —, Anneaux de polynômes semi-héréditaires. Lect. Notes Math., 1979, *734*, 131—157 (РЖМат, 1980, 3А174)
563. —, *Valette J.*, Sur l'enveloppe des anneaux de groupes réguliers. Bull. Soc. Math. France, 1975, *103*, № 1, 91—102 (РЖМат, 1976, 3А302)
564. —, —, Sur les anneaux de groupe héréditaires. Lect. Notes Math., 1979, *740*, 432—443 (РЖМат, 1980, 4А300)
565. *Grabiner S.*, Finited generated, Noetherian and Artinian Banach modules. Indiana Univ. Math. J., 1977, *26*, № 3, 413—426
566. *Green E. L.*, A note on modules with waists. Ill. J. Math., 1977, *21*, № 2, 385—387 (РЖМат, 1978, 2А224)
567. —, Diagrammatic techniques in the study of indecomposable modules. Ring Theory 2. Proc. 2nd Okla. Conf., 1975. New York—Basel, 1977, 149—169 (РЖМат, 1978, 8А325)
568. —, On the structure of indecomposable modules. Represent. Theory Algebras. Proc. Philadelphia Conf. New York—Basel, 1978, 369—380 (РЖМат, 1979, 4А317) 1979, 4А317)
569. —, Frobenius algebras and their quivers. Canad. J. Math., 1978, *30*, № 5, 1029—1044 (РЖМат, 1979, 5А202)
570. —, On the decomposability of amalgamated sums. J. Pure and Appl. Algebra, 1979, *14*, № 3, 259—272 (РЖМат, 1979, 11А218)
571. —, *Reiten I.*, On the construction of rings extensions. Glasgow Math., J., 1976, *17*, № 1, 1—11
572. *Greenberg B.*, Coherence in Cartesian squares. J. Algebra, 1978, *50*, № 1, 12—25 (РЖМат, 1978, 7А516)
573. —, *Vasconcelos W. V.*, Coherence of polynominal rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *54*, 59—64 (РЖМат, 1977, 1А389)
574. *Grimaldi R. P.*, Baer and *UT*-modules over domains. Pacif. J. Math., 1974, *54*, № 2, 59—72 (РЖМат, 1977, 2А474)
575. *Gruenberg K. M.*, *Roggenkamp K. W.*, Extension categories of groups and modules. I. Essential covers, 1977, *49*, № 2, 564—594 (РЖМат, 1978, 6А415)
576. *Grünenfelder L.*, On the homology of filtered and graded rings. J. Pure and Appl. Algebra, 1979, *14*, № 1, 21—37 (РЖМат, 1979, 7А426)
577. *Gruson L.*, *Jensen Ch. U.*, Deux applications de la notion de *L*-dimension. C. r. Acad. Sci., 1976, *A282*, № 1, 23—25 (РЖМат, 1976, 8А508)
578. *Guerindon J.*, On linearly compact envelope. Queen's Pap. Pure and Appl. Math., 1975, № 42, 249—252 (РЖМат, 1976, 7А509)
579. —, Series restreintes et compacite lineaire. Sémin. P. Dubreil. Algebre Univ. Pierre et Marie Curie, 1974—1975, *28*, 7/1—7/6 (РЖМат, 1976, 8А537)
580. —, Sur les modules linèairement compacts. Groupe étude algèbre Univ. Pierre et Marie Curie, 1976—1977 (1978), *2*, 1/01—1/08 (РЖМат, 1978, 10А324)
581. —, Décomposition canonique d'un module artinien. C. r. Acad. Sci., 1978, *286*, № 20, A867—A869 (РЖМат, 1978, 11А313)
582. *Gustafson W. H.*, Remark on relatively projective modules. Math. Japan, 1971, *16*, 21—24
583. —, *Halmos P. R.*, *Zelmanowitz J. M.*, The Serre conjecture. Amer. Math. Mon., 1978, *85*, № 5, 357—359 (РЖМат, 1979, 3А381)
584. *Haack J. K.*, Self-duality and serial rings. J. Algebra, 1979, *59*, № 2, 345—363 (РЖМат, 1980, 2А242)
585. *Haghany A.*, Reflexive modules over certain differential polynominal rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *73*, № 3, 313—318 (РЖМат, 1980, 1А264)
586. *Handelman D.*, Simple regular rings with a unique rank function. J. Algebra, 1976, *42*, № 1, 60—80 (РЖМат, 1977, 6А202)
587. —, Perspectivity and cancellation in regular rings. J. Algebra, 1977, *48*, № 1, 1—16 (РЖМат, 1978, 2А205)
588. *Hanna A.*, *Khuri S.*, Modules with irredundant sets of cogenerators. Rend. Ist. mat. Univ. Trieste, 1977, *9*, № 1-2, 38—45 (РЖМат, 1979, 8А264)
589. *Hannah J.*, Maximal quotient rings of prime group algebras. 2. Uniform right ideals. J. Austral. Math., Soc., 1977, *A24*, № 3, 339—349 (РЖМат, 1798, 12А422)
590. —, Quotient rings of subgroup algebras. Bull. London Math. Soc., 1978, *10*, № 1, 81—83 (РЖМат, 1978, 12А432)
591. —, Maximal quotient rings of prime nonsingular algebras. Bull. Austral. Math. Soc., 1978, *18*, № 2, 305—306 (РЖМат, 1979, 4А312)
592. —, Simple quotient rings of group algebras. J. Algebra, 1979, *59*, № 1, 188—201 (РЖМат, 1980, 1А303)
593. —, *O'Meara K. C.*, Maximal quotient rings of prime group algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *65*, № 1, 1—7 (РЖМат, 1978, 8А318)
594. *Hannick F. T.*, Some notes on left coherent rings. Proc. Mont. Acad. Sci., 1979, *38*, 107—110 (РЖМат, 1980, 1А253)
595. *Hansen F.*, Schranken für die Gabriel- und Krull-Dimension Idealisatorähnlicher Ringerweiterungen. Arch. Math., 1977, *28*, № 6, 584—593 (РЖМат, 1978, 2А207)
596. —, Ringerweiterung und lokalisation .Commun. Algebra, 1979, *7*, № 7, 689—751 (РЖМат, 1980, 1А291)

597. —, *Teply M. L.*, On the Gabriel dimension and subidealizer rings. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 95—118 (РЖМат, 1979, 11A231)
598. *Harada M.*, On the exchange property in a direct sum of indecomposable modules. Osaka J. Math., 1975, *12*, № 3, 719—736 (РЖМат, 1976, 11A351)
599. —, On a minimal chain of iterated idealizers from an *HNP*-ring. J. London Math. Soc., 1976, *12*, № 2, 183—191 (РЖМат, 1976, 7A328)
600. —, A ring theoretical proof in a factorcategory of indecomposable modules. J. Math. Soc. Japan, 1976, *28*, № 1, 160—167 (РЖМат, 1976, 11A352)
601. —, On small submodules in the total quotient ring of a commutative ring. Rev. Union mat. argent., 1977, *28*, № 2, 99—102 (РЖМат, 1978, 7A352, 12A692)
602. —, Small submodules in a projective module and semi-*T*-nilpotent sets. Osaka J. Math., 1977, *14*, № 2, 355—364
603. —, A note on hollow modules. Rev. Union. mat. argent., 1977—1978, *28*, № 3-4, (РЖМат, 1979, 8A257)
604. —, On the small hulls of a commutative rings. Osaka J. Math., 1978, *15*, 679—682
605. —, On small ring homomorphisms. Osaka J. Math., 1978, *15*, № 2, 365—370
606. —, Non-small modules and non-cosmall modules. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 669—690 (РЖМат, 1980, 7A250)
607. —, *Ishii T.*, On perfect rings and the exchange property. Osaka J. Math., 1975, *12*, № 2, 483—491 (РЖМат, 1976, 4A251)
608. *Hartley B.*, Uncountable artinian modules and uncountable soluble groups satisfying Min-*n*. Proc. London Math. Soc., 1977, *35*, № 1, 55—75 (РЖМат, 1978, 2A171)
609. —, Injective modules over group rings. Quart. J. Math., 1977, *28*, № 109, 1—29
610. *Harui H.*, Remarks on injective modules over commutative regular rings. Bull. Fukuoka Univ. Educ. Nat. Sci., 1975, *25*, 1—8 (РЖМат, 1977, 2A473)
611. —, On torsionfree injective modules. Bull. Fukuoka Univ. Educ. Nat. Sci., 1976, *26*, 1—11 (РЖМат, 1977, 12A450)
612. —, Decompositions of injective modules over non-Noetherian rings. Acta Math. Hungar., 1977, *30*, № 3-4, 203—217 (РЖМат, 1978, 8A435)
613. *Hauger J.*, Aufsteigende Kettenbedindung für zyklische Moduln und perfekte Endomorphismenringe. Acta math. Acad. sci. hung., 1976, *28*, № 3-4, 275—278 (РЖМат, 1977, 9A324)
614. —, Injektive Moduln über Ringen linearer Differentialoperatoren. Monatsh. Math., 1978, *86*, № 3, 189—201 (РЖМат, 1979, 8A258)
615. —, *Zimmermann W.*, Lokalisierung und Moritas F_h-bedingung. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 3, 199—217 (РЖМат, 1977, 1A249)
616. *Hauptfleisch G. J.*, *Döman D.*, Filtered projective and semiflat modules. Quastiones Math., 1976, *1*, № 2, 197—217
617. —, *Loonstra F.*, On modules over rings of type (n, k). Acta math. Acad. Sci. Hung., 1978, *31*, № 1-2, 15—19 (РЖМат, 1978, 12A446)
618. *Hazenwinkel M.*, Constructing formal groups, VIII: Formal *A*-modules. Compos. math., 1979, *38*, № 3, 277—291 (РЖМат, 1979, 10A311)
619. —, Infinite dimensional universal formal group laws and formal *A*-modules. Lect. Notes Math., 1979, *732*, 124—143 (РЖМат, 1980, 3A362)
620. *Hedstrom J. R.*, Integral closure of generalized quotient rings. Math. Nachr., 1975, *69*, 145—148 (РЖМат, 1976, 9A400)
621. *Henderson J.*, *Orzech M.*, Cotorsion modules for torsion theories. Port. Math., 1977, *36*, 33—40
622. *Hill D.*, The structure of semilocal *HQ*-rings. J. London Math., Soc., 1975—1976, *12*, № 2, 129—132 (РЖМат, 1976, 6A293)

623. —, Endomorphism rings of hereditary modules. Arch. Math., 1977, *28*, № 1, 63—66 (РЖМат, 1977, 4A398)
624. *Hill P.*, Criteria for freeness in groups and valuated vector spaces. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 140—157 (РЖМат, 1978, 8A204)
625. Hiller H. L., Derived functors of torsion. Can. Math. Bull., 1976, *19*, № 1, 63—66 (РЖМат, 1977, 4A398)
626. —, Radicals and local freeness. Arch. Math., 1979, *32*, № 2, 123—127 (РЖМат, 1980, 1A192)
627. *Hirano Y.*, On Fitting's lemma. Hiroshima Math. J., 1979, *9*, № 3, 623—626 (РЖМат, 1980, 7A248)
628. —, *Ikehata Sh.*, *Tominaga H.*, Commutativity theorems of Outcalt-Yaqub type. Math. J. Okayama Univ., 1979, *21*, № 1, 21—24 (РЖМат, 1980, 1A249)
629. —, —, Regular rings, *V*-rings and their generalizations. Hiroshima Math. J., 1979, *9*, № 1, 137—149 (РЖМат, 1979, 11A237)
630. *Hiremath V. A.*, Finitely projective modules over a Dedekind domain. J. Austral. Math. Soc., 1978, *A26*, № 3, 330—336 (РЖМат, 1979, 6A388)
631. —, On cofinitely injective modules. J. London Math. Soc., 1978, *17*, № 1, 28—32 (РЖМат, 1978, 9A289)
632. *Hochster M.*, Cyclic purity versus purity in excellent Noetherian rings. Trans. Math. Amer. Soc., 1977, *231*, № 2, 463—488 (РЖМат, 1978, 6A442)
633. *Horn A.*, Quasi-Frobenius quotient rings of group rings. J. Austral. Math. Soc., 1975, *20*, № 4, 394—397 (РЖМат, 1976, 5A263)
634. —, Twisted group rings and quasi-Frobenius quotient rings. Arch. Math., 1975, *26*, № 6, 581—587 (РЖМат, 1976, 7A334)
635. *Huckaba J. A.*, *Keller J. M.*, Annihilation of ideals in commutative rings. Pacif. J. Math., 1979, *83*, № 2, 375—379 (РЖМат, 1980, 7A384)
636. *Hudry A.*, Epimorphismes plats a buts locaux, quasi-locaux et semi-locaux. Publs Dep. math., 1975, *12*, № 2, 31—41 (РЖМат, 1976, 6A297)
637. —, Sur la théorie des idèaux dans les anneaux premiers à identité polynomial. Arch. Math., 1979, *31*, № 5, 443—450 (РЖМат, 1979, 9A235)
638. *Hullinger H. L.*, Stable equivalence and rings whose modules are a direct sum of finitely generated modules. J. Pure and appl. Algebra, 1980, *16*, № 3, 265—273 (РЖМат, 1980, 8A269)
639. *Hunter R.*, *Richman F.*, *Walker E.*, Warfield modules. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 87—123 (РЖМат, 1978, 10A190)
640. *Hutchinson J.*, *Fenrick M.*, Primary decompositions and Morita contexts. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 13, 1359—1368 (РЖМат, 1979, 2A199)
641. —, *Turnidge D. R.*, Morita equivalent quotient rings. Commun. Algebra, 1976. *4*, № 7, 669—675 (РЖМат, 1977, 2A307)
642. *Ion I. D.*, *Nastasescu C.*, Anneaux gradues semi-simples. C. r. Acad. Sci., 1976, *283*, № 16, A1077—A1080 (РЖМат, 1977, 8A312)
643. —, —, Anneaux gradues semi-simples. Rev. roum. math. pures et appl., 1978, *23*, № 4, 573—588 (РЖМат, 1978, 12A459)
644. *Irlbeck B. W.*, Finitely generated projective ideals in commutative rings. J. reine und angew. Math., 1978, *298*, 98—100 (РЖМат, 1978, 9A405)
645. *Irving R. S.*, Generic flatness and the nullstellensatz for Ore extensions. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 3, 259—277 (РЖМат, 1979, 11A357)
646. —, Noetherian algebras and the Nullstellensatz. Lect. Notes Math., 1979, *740*, 80—87 (РЖМат, 1980, 5A244)
647. —, An algebra whose simple modules are of arbitrary finite degree. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 87—96 (РЖМат, 1980, 7A201)
648. —, Finitely generated simple Ore domains with big centres. Bull. London Math. Soc., 1980, *12*, № 3 (РЖМат, 1980, 11A274)
649. *Ishibashi M.*, A formulation of cancellation theory and its application to modules. Comment. math. Univ. St. Pauli, 1978, *27*, № 1, 43—50 (РЖМат, 1979, 8A256)
650. *Ishii T.*, On locally direct summands of modules. Osaka J. Math., 1975, *12*, № 2, 473—482 (РЖМат, 1976, 4A250)

651. *Ivanov G.*, Decompositions of modules over serial rings. Commun. Algebra, 1975, *3*, № 11, 1031—1036 (РЖМат, 1976, 9А302)
652. *Iwanaga Y.*, On rings with self-injective dimension ⩽1. Osaka J. Math., 1978, *15*, № 1, 33—46
653. —, On rings with finite self-injective dimension. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 4, 393—414 (РЖМат, 1979, 12А428)
654. *Izawa T.*, A module whose double centralizer is semiprimary *QF*-3. Repts. Fac. Sci. Shizuoka Univ., 1975, *10*, 3—8
655. —, Torsion theories and torsionless generators. Repts. Fac. Sci. Shizuoka Univ., 1976, *11*, 1—8
656. —, Injectors and projectors relative to torsion theory. Repts. Fac. Sci. Shizuoka Univ., 1978, *12*, 19—26
657. *Jacob G.*, Sur certaines catégories de modules, generalisant les modules de type fini, et les modules niethériens. C. r. Acad. sci., 1976, *283*, № 9, 687—690 (РЖМат, 1977, 5А202)
658. *Jacobson N., McCrimmon K., Parvathi M.*, Localization of Jordan algebras. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 9, 911—958 (РЖМат, 1979, 3А267)
659. *Jain S. K.*, Rings whose cyclic modules have certain properties and the duals. Ring Theory. Proc. Conf., Ohio Univ., Athens, Ohio, 1976. Lect. Notes Pure and Appl. Math., Vol. 25, Marcel Dekker, New York, 1977, 143—160 (РЖМат, 1978, 11А256)
660. —, *Singh S.*, Rings with quasiprojective left ideals. Pacif. J. Math., 1975, *60*, № 1, 169—181 (РЖМат, 1976, 5А270)
661. —, —, *Symonds R. G.*, Rings whose proper cyclic modules are quasi-injective. Pacif. J. Math., 1976, *67*, № 2, 461—472 (РЖМат, 1977, 9А304)
662. *Janowitz M. F.*, A note on Rickart rings and semi-Boolean algebras. Algebra Univ., 1976, *6*, № 1, 9—12 (РЖМат, 1977, 2А300)
663. *Jansen W. G.*, *FSP* rings and modules and local modules. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 6, 617—637 (РЖМат, 1978, 12А441)
664. *Janusz G. J.*, Tensor products of orders. J. London Math. Soc., 1979, *20*, № 2, 181—192 (РЖМат, 1980, 7А399)
665. *Jategaonkar A. V.*, Structure and classification of hereditary Noetherian prime rings. Ring Theory, Proc. Conf., Park City, Utah, 1971. Academic Press, New York, 1972, 171—229
666. —, Principal ideal theorem for noetherian *PI*-rings. J. Algebra, 1975, *35*, № 1-3, 17—22 (РЖМат, 1976, 1А281)
667. —, Certain injective are artinian. Lect. Notes Math., 1976, *545*, 128—139 (РЖМат, 1977, 8А319)
668. *Jebli A.*, Corps des fractions et topologies lineaires. Thèse doct. sci. math. Univ. Rennes, 1975, 57 p. (РЖМат, 1978, 1А382)
669. *Jensen C. U.*, Peano rings of arbitrary global dimension. J. London Math. Soc., 1980, *21*, № 1, 39—44 (РЖМат, 1980, 11А124)
670. —, Applications logiques on theorie des anneaux et des modules. Conf. Colloque d'Algebra à Rennes, 28—31 mai 1980, 9 pp.
671. —, *Vamos P.*, On the axiomatizability of certain classes of modules. Math. Z., 1979, *167*, № 3, 227—237 (РЖМат, 1980, 1А305)
672. *Jeremy L.*, Une notion de rang les factours réguliers auto-injectifs à droite. Sém. Alg. non commutative, 1975—76, № 4. Paris, XI, Orsay, 1976, 12 pp.
673. —, Modules π-projectifs. Sém Alg. Commutative, 1975—76, № 12, Paris XI, Orsay, 1976, 12pp.
674. —, L'Arithmétique de von Neumann pour les facteurs injectifs. J. Algebra, 1980, *62*, № 1, 154—169 (РЖМат, 1980, 8А247)
675. *Jinnah M. I.*, Reflexive modules over regular local rings. Arch. Math., 1975, *26*, № 4, 367—371 (РЖМат, 1976, 3А423)
676. —, A note on *PG*-modules. Math. Scand., 1975, *37*, № 1, 27—28 (РЖМат, 1976, 12А459)
677. *Jiràsko J.*, Pseudohereditary and pseudocohereditary preradicals. Comment. Math. Univ. Carol., 1979, *20*, № 2, 317—327 (РЖМат, 1979, 12А281)
678. —, Generalized projectivity. II. Comment. math. Univ. Carol., 1979, *20*, № 3, 483—499 (РЖМат, 1980, 5А259)
679. *Jiràskova H.*, Generalized flatness and coherence. Comment. Math. Univ. Carol., 1980, *21*, № 2, 293—300 (РЖМат, 1980, 12А288)
680. —, *Jiràsko J.*, Generalized projectivity. Czech. Mat. J., 1978, *28*, № 4, 632—646 (РЖМат, 1979, 5А216)
681. *Johns B.* Annihilator conditions in Noetherian rings. J. Algebra, 1977, 49, № 1, 222—224 (РЖМат, 1978, 6А282)
682. *Johnson J. L.*, Modules injective with respect to primes. Commun. Algebra, 1977, *7*, № 3, 327—332 (РЖМат, 1979, 10А288)
683. *Jøndrup S.*, Projective modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *59*, № 2, 217—221 (РЖМат, 1977, 9А326)
684. —, The centre of a right hereditary ring. J. Londow Math. Soc., 1977, *15*, № 2, 211—212 (РЖМат, 1978, 1А224)
685. —, Flat and projective modules. Math. scand., 1978, *43*, № 2, 336—342 (РЖМат, 1980, 4А304)
686. —, Rings of quotiens of some semiprime P. I. rings. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 3, 279—286 (РЖМат, 1979, 9А237)
687. —, Indecomposable modules. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978, New—York—Basel, 1979, 97—104 (РЖМат, 1980, 7А427)
688. —, Homological dimensions of some P. I. rings. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 7, 685—696 (РЖМат, 1980, 9А366)
689. —, *Ringel C.*, Remarks on a paper by Skornykov concerning ring for which every module is a direct sum of s left ideals. Arch. Math., 1978, *31*, № 4, 329—331 (РЖМат, 1979, 8А274)
690. *Jordan D. A.*, A left Noetherian right Ore domain which is not right noetherian. Bull. London Math. Soc., 1980, *12*, № 3, 202—204 (РЖМат, 1980, 11А275)
691. *Kado J.*, Note on exchange property. Math. J. Okayama Univ., 1976, *18*, № 2, 153—157 (РЖМат, 1977, 7А272)
692. *Kamil M.*, On quasi-artinian rings. Rend. math., 1976, 9, № 4, 617—619 (РЖМат, 1977, 10А172)
693. —, On simple injective rings. Rend. Math., 1976, *9*, № 4, 613—615 (РЖМат, 1977, 12А261)
694. *Kang M.-Ch.*, Projective modules over some polynomial rings. J. Algebra, 1979, *59*, № 1, 65—76 (РЖМат, 1980, 3А335)
695. *Karakas H. I.*, On Noetherian modules, METU J. Pure Appl. Sci., 1972, *5*, № 2, 165—168
696. *Kasch F.*, Moduln und Ringe. Stuttgart, B. G. Teubner, 1977, 328S. (РЖМат, 1977, 11А288К)
697. *Kato T.*, Structure of dominant modules. J. Algebra, 1976, *39*, № 2, 569—570 (РЖМат, 1976, 12А366)
698. —, Duality between colocalization and localization. J. Algebra, 1978, *55*, № 2, 351—374 (РЖМат, 1979, 9А233)
699. *Kawada Y.*, On dominant modules and dominant rings. Proc. 10th Symp. Ring Theory, Matsumoto, 1977. Okayama, 1978, 62—82 (РЖМат, 1978, 11А275)
700. —, On dominant modules and dominant rings. J. Algebra, 1979, *56*, № 2, 409—435 (РЖМат, 1979, 8А253)
701. *Kenny G. O.*, The completion of an Abelian *L*-group. Can. J. Math., 1975, *27*, № 5, 980—985 (РЖМат, 1976, 8А318)
702. *Kepka T.*, Torsion theories and homological dimensions. Stud. Alg. und ihre Anwend., 1976, *1*, 41—44 (РЖМат, 1976, 11А468)
703. —, Notes on quasimodules. Comment. math. Univ. carol., 1979, *20*, № 2, 229—247 (РЖМат, 1980, 2А292)
704. —, *Němec P.*, Quasimodules generated by three elements. Comment. math. Univ. carol., 1979, *20*, № 2, 249—266 (РЖМат, 1980, 1А324)

705. —, —, Trilinear construction of quasimodules. Comment. Math. Univ. Carol., 1980, *21*, № 2, 341—354 (РЖМат, 1980, 12A303)
706. *Kerner O.*, Ringe mit verallgemeinerter Kupischreihe. I, II. J. reine und angew. Math., 979, *305*, 155—181; 1980, *314*, 177—195 (РЖМат, 1979, 9A213; 1980, 8A212)
707. —, *Thode Th.*, Primary rings and related radical. I. Arch. Math., 1976, *27*, № 4, 372—377 (РЖМат, 1977, 2A296)
708. —, —, Primary rings and related radicals. II. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 11, 1029—1044 (РЖМат, 1977, 7A259)
709. *Kertesz A.*, Rings, Modules and Radicals. (Colloq. math. soc. Jànos. Bolyai, 6) Amsterdam—London, North—Holl. Publ. Co., 1973, 520 pp., ill. (РЖМат, 1976, 1A267)
710. *Khan M. N.*, A continuous ring in which every large right ideal is two sided. Riv. mat. Univ. Parma, 1973, *2*, 277—280 (РЖМат, 1976, 10A179)
711. *Khan M. Z.*, A note on *RSI*-ring. Tamkang J. Math., 1977, *8*, № 2, 153—164 (РЖМат, 1979, 6A216)
712. —, Modules over bounded hereditary noetherian prime rings. Can. Math. Bull., 1979, *22*, № 1, 53—57 (РЖМат, 1980, 1A277)
713. *Khaleelulla S. M.*, A closed graph theorem for ordered topological Abelian groups. Tamkand J. Math., 1976, *7*, № 1, 31—35 (РЖМат, 1977, 4A241)
714. *Kirby D.*, *Mehran H. A.*, Fractional povers of a submodule of an algebra. Mathematika., 1971, 18, 8—13.
715. *Kirezci M.*, A remark on *IBN*-rings and free ideal rings. METU J. Pure Appl. Sci., 1972, *5*, № 1, 15—18.
716. *Kirkman E. E.*, *Kuzmanovich J. J.*, Order over hereditary rings. J. Algebra, 1978, *55*, № 1, 1—27 (РЖМат, 1979, 7A449)
717. *Kiss E. W.*, A module-theoretic characterizazion of rings with unity. Actia Math. Hungar., 1978, *31*, № 3/4, 345—348 (РЖМат, 1978, 11A248)
718. *Kitamura Y.*, Centralizers of a module over a quasi-Frobenius extensions. Math. J. Okayama Univ., 1975, *17*, № 2, 103—123 (РЖМат, 1976, 3A307)
719. —, A note on quotient rings over a quasi-Frobenius extension. Math. J. Okayama Univ.. 1975, *18*, № 1, 57—67 (РЖМат, 1976, 10A186)
720. —, Note on the maximal quotient rings of a Galois subring. Math. J. Okayama Univ., 1976, *19*, № 1, 55—60 (РЖМат, 1978, 1A247)
721. *Knörr R.*, Ringepimorphismen und Morita-projektive Moduln über kommutativen Dedekind—Ringen. Comment. math. helv., 1975, *50*, № 2, 267—275 (РЖМат, 1976, 2A512)
722. —, Morita-injektive Moduln über Kommutativen Dedekind—Ringen. J. reine und angew. Math., 1976, *281*, 143—163 (РЖМат, 1976, 10A239)
723. —, Relative projective covers. Var. Publs Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1978, № 29, 28—32 (РЖМат, 1979, 9A249)
724. *Knus M.-A.*, Modules quadratiques sur un anneau de polynomes. Monogr. Enseign. math., 1978, № 26, 179—185 (РЖМат, 1979, 6A387)
725. *Koehler A.*, Pre-self-injective duo rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *60*, № 208, 31—34 (РЖМат, 1977, 9A294)
726. *Koh P.*, Finite projective dimension under change of rings. Rocky Mount. J. Math., 1978, *8*, № 4, 647—651 (РЖМат, 1979, 9A370)
727. *Krause G.*, Krull dimension and Gabriel dimension of idealizers of semimaximal left ideals. J. London Math. Soc., 1976, *12*, № 2, 137—140 (РЖМат, 1976, 6A289)
728. —, Some recent developments in the theory of noetherian rings. Lect. Notes Math., 1978, *641*, 209—219 (РЖМат, 1979, 1A309)
729. —, *Lenagan T. H.*, *Stafford J. T.*, Ideal invariance and Artinian quotient rings. J. Algebra, 1978, *55*, № 1, 145—154 (РЖМат, 1979, 7A335)
730. —, *Teply M. L.*, The transfer of the Krull dimension and the Gabriel dimension to subidealizers. Can. J. Math., 1977, *29*, № 4, 874—888 (РЖМат, 1978, 4A210) Поправка: ibid., 1978, *30*, № 3, 672

731. *Krusemeyer M.*, Completing α^2, β, γ. Queen's Pap. Pure and appl. math., 1975, № 42, 253—254 (РЖМат, 1976, 7A510)
732. *Kulkarni M.*, A generalisation of Pascal's theorem to commutative rings. Arch. Math., 1980, *33*, № 5, 426—429 (РЖМат, 1980, 9A390)
733. *Kupisch H.*, Quasi-Frobenius-algebras of finite representation type. Lect. Notes Math., 1975, *488*, 184—200 (РЖМат, 1976, 4A239)
734. —, Basisalgebren symmetrischer Algebren und eine Vermutung von Gabriel. J. Algebra, 1978, *55*, № 1, 58—73 (РЖМат, 1979, 8A227)
735. *Kurata Y.*, *Katayama H.*, On a generalization of *QF*-3 rings. Osaka J. Math., 1976, *13*, 407—418
736. *Kutami M.*, *Oshiro K.*, Direct sums of nonsingular indecomposable injective modules., Math. J. Okayama Univ., 1978, *20*, № 2, 91—99 (РЖМат, 1979, 8A263)
737. *Ky Hoang*, Делимый модуль над кольцом главных идеалов. Acta Math. Vietnamica, 1977, *2*, № 1, 141—151 (РЖМат, 1978, 9A293)
738. *Labute J. P.*, Free Lie algebras as modules over their enveloping algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *68*, № 2, 135—139
739. *Lady E. L.*, Completely decomposable flat modules over locally factorial domains. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *54*, 27—31 (РЖМат, 1976, 11A500)
740. —, Splitting fields for torsion-free modules over disckrete valuation rings. I. J. Algebra, 1977, *49*, № 1, 261—275 (РЖМат, 1978, 6A437)
741. —, On classifying forsion free modules over discrete valuation rings. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 168—172 (РЖМат, 1978, 9A407)
742. —, Extension of scalars for torsion free modules over Dedekind domains. Symp. math. Ist. Naz. Alta mat. Francesco Severi. Vol. 23. Roma, 1979, 287—305 (РЖМат, 1980, 9A392)
743. *Lai C. C.*, Localization in non-noetherian rings. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 13, 1351—1376 (РЖМат, 1980, 4A296)
744. *Lam T. Y.*, Series summation of stably free modules. Quart. J. Math. 1976, *27*, № 105, 37—46 (РЖМат, 1976, 11A498)
745. —, Serre's conjecture. Lect. Notes Math., 1978, *635*, XV, 227 pp., ill (РЖМат, 1979, 1A458)
746. *Lambek J.*, Localization at epimorphisms and quasi-injectives. J. Algebra, 1976, *38*, № 1, 163—181 (РЖМат, 1976, 11A345)
747. *Landrock P.*, Some remarks on Loewy lengths of projective modules. Prepr. Ser. Math. inst. Aarhus univ., 1979/1980, № 24 (РЖМат, 1980, 11A288)
748. *Lanski C.*, Regularity and quotients in rings with involution. Pacif. J. Math., 1975, *56*, № 2, 565—574 (РЖМат, 1977, 1A236)
749. —, Gabriel dimension and rings with involution. Houston J. Math., 1978, *4*, № 3, 397—415 (РЖМат, 1979, 9A253)
750. *Latsis D.*, Localisation dans les anneaux duos. C. R. Acad. sci., 1976, *282*, № 24, A1403—A1406 (РЖМат, 1977, 2A308)
751. —, Modules tertiaires. Groupe d'Etude d'Algèbre, Paris, 1978, Exp., № 3, 20 pp.
752. *Lawrence J.*, A countable self-injective ring is quasi-Frobenius. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *65*, № 2, 217—220 (РЖМат, 1978, 9A278)
753. —, *Louden K.*, Rationally complete group rings. J. Algebra., 1978, *50*, № 1, 113—121 (РЖМат, 1978, 8A319)
754. *Lee Kwang Young*, Remarks on the quasi-projectiveness of rings. Ulsan Inst. Tech. Rep., 1975, *6*, № 1, 25—28
755. *Lemonnier B.*, Dimension de Krull et codéviation des anneaux semihéréditaires. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 12, 663—666 (РЖМат, 1978, 1A235)
756. —, Dimension de Krull et codeviation. Application au theoreme d'Eakin. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 16, 1647—1665 (РЖМат, 1979, 6A218)
757. *Lenagan T. H.*, Artinian ideals in Noetherian rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *51*, № 2, 499—500 (РЖМат, 1976, 11A331)
758. —, Krull dimension and invertible ideals in noetherian rings. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1976, *20*, № 2, 81—86 (РЖМат, 1977, 6A200)

759. —, Artinian quotient rings of Macaulay rings. Lect. Notes Math., 1976, *545*, 140—150 (РЖМат, 1977, 8A308)
760. —, Reduced rank in rings with Krull dimension. Ring theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 123—131 (РЖМат, 1980, 8A240)
761. —, Modules with Krull dimension. Bull. London Math. Soc., 1980, *12*, № 1, 39—40 (РЖМат, 1980, 9A280)
762. *Lenzing H.*, Direct sums of projective modules as direct summands of their direct product. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 7, 681—691 (РЖМат, 1977, 2A331)
763. *Lequain Y., Simis A.*, Projective modules over $R[X, \ldots, X_n]$, R a Prüfer domain. Notas e comun. mat., 1978, № 84, 12 pp. (РЖМат, 1979, 5A346)
764. *Lesieur L.*, Idealpremier $\mathscr{P}$ d'un anneau Noetherien à gauche: condition de Ore pour $\mathscr{C}(\mathscr{P})$. Seminaire d'Algebre non commutative (1973/1974), Paris—Orsay, 1974, 10 pp.
765. *Leszczynski Zb., Simson D.*, On triangular matrix rings of finite representation type. J. London Math. Soc., 1979, *20*, № 3, 396—402 (РЖМат, 1980, 9A274)
766. *Levaro R. A.*, Projective quasi-coherent sheaves of modules. Pacif. J. Math., 1975, *57*, № 2, 457—461 (РЖМат, 1976, 3A436)
767. *Levy L. S.*, Matrix equivalence and finite representation type. Commun. Algebra, 1975, *3*, № 8, 739—748 (РЖМат, 1976, 9A282)
768. —, Decomposing a projective module and several submodules. Adv. Math., 1976, *20*, № 1, 30—42 (РЖМат, 1977, 2A471)
769. —, Modules over the cyclic group of prime order. Lect. Notes Math., 1979, *734*, 207—222 (РЖМат, 1980, 4A264)
770. *Licoiu D.*, Sur la dimension homologique des morphismes d'anneaux. C. r. Acad. Sci., 1975, *A281*, № 2-3, 77—79 (РЖМат, 1976, 4A364)
771. —, Sur les anneaux semi-artiniens reguliers. Rev. roum. math. pures et appl., 1978, *23*, № 3, 411—412 (РЖМат, 1978, 12A407)
772. —, Sur la dimension homologique des modules. C. r. Acad. sci., 1978, *A287*, № 4, 193 (РЖМат, 1979, 4A432)
773. *Liebert W.*, Ulm valuations and co-valuations on torsion-complete p-groups. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 337—353 (РЖМат, 1978, 8A200)
774. *Lin I-Peng B.*, Products of torsion theories and applications to coalgebras. Osaka J. Math., 1975, *12*, № 2, 433—439 (РЖМат, 1976, 4A231)
775. —, Semiperfect coalgebras. J. Algebra, 1977, *49*, № 2, 357—373 (РЖМат, 1978, 8A285)
776. *Lin T. Y., Margolis H. R.*, Homological aspects of modules over the Steenrod algebra. J. Pure and Appl. Algebra, 1977, *9*, № 2, 121—129 (РЖМат, 1978, 2A358)
777. *Lindel H.*, Wenn B ein Hauptidealring ist, so sind alle projectiven $B[X, Y]$-Boduln frei. Math. Ann., 1976, *222*, № 3, 283—289 (РЖМат, 1977, 2A466)
778. —, Projective Moduln über Polynomringen $A[T_1, \ldots, T_m]$ mit einem regulären Grundring A. Manuscr. Math., 1978, *23*, № 2, 143—154 (РЖМат, 1978, 5A410)
779. —, *Lutkebohmert W.*, Projektive Moduln über polynomialen Erweiterungen von Potenzreihenalgebren. Arch. Math., 1977, *28*, № 1, 51—54 (РЖМат, 1977, 10A277)
780. *Löfwall C.*, The global homological dimension of trivial extensions of rings. J. Algebra, 1976, *39*, № 1, 287—307 (РЖМат, 1976, 12A461)
781. *Loonstra F.*, Notes on subdirect products of modules. An. şti. Univ. Iaşi, 1975, Sec. la, *21*, 1—8 (РЖМат, 1976, 9A300)
782. —, Note on extensions of modules. Acta math. Acad. sci. hung., 1975, *26*, № 3-4, 349—354 (РЖМат, 1976, 9A301)
783. —, Subproducts and subdirect products. Publ. Math., 1977, *24*, № 1-2, 129—137 (РЖМат, 1978, 10A323)
784. —, Essential submodules and essential subdirect products. Symp. math. Ist. Naz. Alta mat. Francesco Severi. Vol. 23. Roma, 1979, 85—105 (РЖМат, 1980, 9A195)

785. *Louden K.*, Maximal quotient rings of ring extensions. Pacif. J. Math., 1976, *62*, № 2, 489—496 (РЖМат, 1977, 2A310)
786. —, Torsion theories and ring extensions. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 6, 503—532 (РЖМат, 1976, 12A354)
787. *Luedeman J. K., Bate J. A.*, The ring of quotients of $R(S)$. Semigroup Forum, 1979, *18*, № 3, 271—278 (РЖМат, 1980, 4A298)
788. *Mallavin-Brameret M.-P.*, Regularite locale d'algebres universelles. C. r. Acad. sci., 1976, *283*, № 13, A923—A925 (РЖМат, 1977, 8A413)
789. *Manocha J.*, On rings with essential socle. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 11, 1077—1086 (РЖМат, 1977, 7A270)
790. *Maoulaoui Z.*, Sur les modules réguliers. Arch. Math., 1978, *30*, № 5, 469—472 (РЖМат, 1979, 1A326)
791. *Maroscia P.*, Modules projectifs sur certains anneaux de polynomes. C. r. Acad. sci., 1977, *285*, № 4, A183—A185 (РЖМат, 1978, 4A323)
792. *Martin Ph.*, Théorème de décomposition en produits pour des anneaux autoinjectifs à droite admettant des sommes. C. r. Acad. sci., 1976, *282*, № 17, A951—A953 (РЖМат, 1977, 1A232)
793. —, Auto-injectivité des images homomorphiques d'une anneau de polynômes. C. r. Acad. Sci., 1977, *285*, № 7, A489—A492 (РЖМат, 1978, 5A242)
794. *Martinez J.*, Is the lattice of torsion classes algebraic? Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *63*, № 1, 9—14 (РЖМат, 1978, 3A213)
795. *Martinez V. R.*, Almost projective modules over artin algebras and almost split sequences. Ring. Theory Proc. Antwerp. Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 495—511 (РЖМат, 1980, 7A252)
796. *Marubayashi H.*, A note on locally uniform rings and modules. Proc. Jap. Acad., 1971, *47*, № 1, 11—14 (РЖМат, 1972, 1A453)
797. —, Remarks on ideals of bounded Krull prime rings. Proc. Jap. Acad., 1977, *53*, № 1, 27—29 (РЖМат, 1977, 9A313)
798. —, Polynomial rings over Krull orders in simple Artinian rings. Hokkaido Math. J., 1980, *9*, № 1, 63—78 (РЖМат, 1980, 8A393)
799. *Masaike K.*, On equivalent orders in semi-simple rings. Bull. Tokyo Gakugei Univ. (4), 1974, *26*, 39—44
800. —, On embedding torsion free modules into free modules. Proc. Jap. Acad., 1977, *53*, № 1, 23—26 (РЖМат, 1977, 10A176)
801. —, Endomorphisms of modules over maximal orders. Math. J. Okayama Univ., 1979, *21*, № 1, 33—40 (РЖМат, 1980, 3A196)
802. *Mason G.*, Injective and projective near-ring modules. Compos. Math., 1976, *33*, № 1, 43—54 (РЖМат, 1977, 4A302)
803. *Matlis E.*, Generalizations of divisible abelian groups to the theory of modules. Symp. math. Ist. Naz. Alta mat. Francesco Severi. Vol. 23, Roma, 1979, 241—250 (РЖМат, 1980, 10A193)
804. *Maury G.*, Anneaux de fractions classiques dans les R-ordres maximaux. Commun. Algebra, 1975, *3*, № 12, 1083—1091 (РЖМат, 1976, 8A360)
805. —, Complements a mon article «Anneaux de fractions classiques dans les ordres maximaux». Commun. Algebra, 1975, *3*, № 12, 1093—1096 (РЖМат, 1976, 8A361)
806. —, Exemples et complements en theorie des ordres maximaux au sens de K. Asano. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 15, A839—A842 (РЖМат, 1977, 9A302)
807. —, Un théoreme de l'ideal principal dans les R-ordres. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 7, 677—687 (РЖМат, 1980, 1A456)
808. *Mazan M.*, Dual topologique d'un modules quelconque. Boll. Unione. mat. ital., 1976, *A13*, № 3, 586—591 (РЖМат, 1977, 8A339)
809. *McConnell J. C.*, On the global dimension of some rings. Math. Z., 1977, *153*, № 3, 253—254 (РЖМат, 1977, 10A251)
810. —, The global dimension of rings of differential operators. Lect. Notes Math., 1978, *641*, 189—197 (РЖМат, 1978, 12A646)

811. *McDonald B. R.*, Geometric algebra over local rings. Mongr. and Texb. Pure and Appl. Math., № 36, Marcel Dekker, New York—Basel, 1976, XIV, 421 pp. (РЖМат, 1977, 9A478)
812. —, Endomorphism rings of infinitely generated projective modules. J. Algebra, 1977, *45*, № 1, 69—82 (РЖМат, 1977, 12A281)
813. *McDowell K.*, A codimension theorem for pseudo-Noetherian rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *214*, 179—185 (РЖМат, 1976, 11A502)
814. —, Pseudo-Noetherian rings. Can. Math. Bull., 1976, *19*, № 1, 77—84 (РЖМат, 1977, 6A309)
815. *McVoy W. S.*, *Rubel L. A.*, Coherence of some rings of functions. J. Funct. Anal., 1976, *21*, № 1, 76—87
816. *Mehdi F.*, On multiplications modules. Math. Stud., 1974, (1975), *42*, № 1-4, 149—153 (РЖМат, 1977, 2A463)
817. —, On multiplications and weak multiplication modules. Riv. mat. Univ. Parma, 1976, *2*, № 4, 107—112 (РЖМат, 1978, 3A291)
818. *Meldrum J. D. P.*, Injective near-ring modules over Z_n. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *68*, № 1, 16—18 (РЖМат, 1978, 11A347)
819. *Menini C.*, Topologie di caratteri per moduli su anelli Noetheriani. Ann. Univ. Ferrara, 1977, *23*, sez. 7, 45—58 (РЖМат, 1978, 12A710)
820. —, On *E*-compact modules over SISI rings. Ann. Univ. Ferrara, 1977, *23*, sez. 7, 195—207 (РЖМат, 1978, 12A711)
821. *Meyberg K.*, *Zimmerman-Huisgen B.*, Rings with descending chain condition on certain principal ideals. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1977, *A80*, 225—229 (РЖМат, 1978, 1A236)
822. *Michler G. O.*, Petits modules projectifs des groupes finis. C. r. Acad. Sci., 1976, *282*, № 8, A397—A398 (РЖМат, 1976, 8A333)
823. —, Small projective modules of finite groups. Lect. Notes Math., 1977, *586*, 34—42 (РЖМат, 1978, 2A217)
824. *Miller C. B.*, *Rajagopalan M.*, Topologies in locally compact groups. III. Proc. London Math. Soc., 1975, *31*, № 1, 55—78 (РЖМат, 1976, 2A279)
825. *Miller D. D.*, Semihereditary prime algebras. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 9, 885—940 (РЖМат, 1980, 1A428)
826. *Miller R. W.*, Finitely generated projective modules and *TTF* classes. Pacif. J. Math., 1976, *64*, № 2, 505—515 (РЖМат, 1977, 6A211)
827. —, *Teply M. L.*, On Flatness relative to a torsion theory. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 10, 1037—1072 (РЖМат, 1979, 1A422)
828. —, —, The descending chain condition relative to a torsion theory. Pacif. J. Math., 1979, *83*, № 1, 269—272 (РЖМат, 1980, 5A260)
829. —, *Turnidge D.*, Factors of cofinitely generated injective modules. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 3, 233—243 (РЖМат, 1977, 1A260)
830. *Mogami I.*, *Tominaga H.*, On comprimary decomposition theory for modules. Math. J. Okayama Univ., 1975, *17*, № 2, 125—130 (РЖМат, 1976, 3A308)
831. —, —, On coprimary decomposition theory for modules. Math. J. Okayama Univ., 1975, *17*, № 2, 125—130 (РЖМат, 1976, 3A308)
832. *Mohamed S.*, On *PCI* rings. J. Univ. Kuwait Sci., 1975, *2*, 21—23
833. —, *Muller B. J.*, Decomposition of dual-continuous modules. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 87—94 (РЖМат, 1979, 9A246)
834. —, *Singh S.*, Weak *q*-rings. Can. J. Math., 1977, *29*, № 4, 687—695 (РЖМат, 1978, 4A203)
835. —, —, Generalizations of decomposition theorems known over perfect rings. J. Austral. Math. Soc., 1977, *24*, № 4, 496—510 (РЖМат, 1978, 12A410)
836. —, —, Weak *q*-rings with zero singular ideal. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *76*, № 1, 25—30 (РЖМат, 1980, 5A237)
837. *Mohammad A.*, Rings whose proper homomorphic images are left *q*-rings. Tamkang J. Math., 1978, *9*, № 2, 265—268 (РЖМат, 1980, 2A252)
838. *Moran W.*, The global dimension of $C(X)$. J. London Math. Soc., 1978, *17*, № 2, 321—329 (РЖМат, 1978, 12A641)

839. *Morita K.*, Localization in categories of modules. IV. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1977, *A13*, № 366-382, 153—164 (РЖМат, 1977, 10A167)
840. *Müller B. J.*, Localization in fully bounded Noetherian rings. Pacif. J. Math., 1976, *67*, № 1, 233—246 (РЖМат, 1977, 8A311)
841. —, Localization on non-commutative Noetherian rings. Can. J. Math., 1976, *28*, № 3, 600—610 (РЖМат, 1977, 2A311)
842. —, An example in non-commutative localization. An. Inst. Mat. Univ. nac. autonoma México, 1977, *17*, 75—86 (РЖМат, 1979, 8A242)
843. —, Noncommutative localization and invariant theory. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 8, 839—862 (РЖМат, 1979, 1A313)
844. —, Twosided quotient rings for Noetherian *PI*-rings. Roy. Soc. Can. Math., Repts, 1979, *1*, № 1, 53—56 (РЖМат, 1979, 11A238)
845. —, Ideal invariance and localization. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 4, 415—441 (РЖМат, 1979, 11A240)
846. —, Twosided localization in Noetherian *PI*-rings. Ring. Theory. Proc. Antwerp Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 169—190 (РЖМат, 1980, 8A254)
847. —, Two-sided localization in Noetherian *PI*-rings. J. Algebra, 1980, *63*, № 2, 359—373 (РЖМат, 1980, 11A271)
848. *Müller W.*, On Artin rings of finite representation type. Lect. Notes Math., 1975, *488*, 236—243 (РЖМат, 1976, 4A237)
849. —, A generalization of Swan's theorem. Math. Z., 1976, *151*, № 1, 57—70 (РЖМат, 1977, 6A284)
850. —, A categorical characterisation of compactness. J. London Math. Soc., 1978, *17*, № 2, 356—362 (РЖМат, 1978, 11A509)
851. *Mulvey C. J.*, Compact Ringed spaces. J. Algebra, 1978, *52*, № 2, 411—436 (РЖМат, 1979, 2A331)
852. —, Representations of rings and modules. Lect. Notes Math., 1979, *753*, 542—585 (РЖМат, 1980, 5A257)
853. *Murdoch D. C.*, *Oystaeyen F. M. van*, A note on reductions of modules and kernel functors. Bull. Soc. Math. Belg., 1974, *26*, № 4, 351—361 (РЖМат, 1977, 2A328)
854. *Murthy M. P.*, Generators for certain ideals in regular rings of dimension three. Comment. Math. helv., 1972, *47*, 179—184
855. *Musson I. M.*, Injective modules for group algebras of locally finite groups. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1978, *84*, № 2, 247—262 (РЖМат, 1979, 5A211)
856. *Nastasescu C.*, Décomposition tertiaire et primaire dans un anneau. Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR, 1974(1976), *18*, № 3-4, 339—354 (РЖМат, 1976, 12A335)
857. —, Anneaux et modules gradues. Rev. roum. math. pures et appl., 1976, *21*, № 7, 911—931 (РЖМат, 1977, 4A286)
858. —, Modules simples sur les anneaux gradués. C. r. Acad. Sci., 1976, *283*, № 7, 425—428 (РЖМат, 1977, 5A199)
859. —, Inele. Module, Categorii. Editura Academiei Republicii Socialiste România Bucharest, 1976, 303 pp. (РЖМат, 1976, 12A167K)
860. —, Quelques observations sur la dimension de Krull. Bull. Math. Soc. Sci., RSR, 1976(1977), *20*, № 3-4, 291—293 (РЖМат, 1978, 9A292)
861. —, Conditions de finitude pour les modules. Rev. roum. math. pures et appl., 1979, *24*, № 5, 745—758 (РЖМат, 1979, 11A249)
862. —, Modules Σ-injectifs. Ring theory. Proc. Antwerp. Conf. 1978, New York—Basel, 1979, 729—740 (РЖМат, 1980, 7A397)
863. —, Décompositions primaires dans les anneaux Noetheriens à gauche gradués. Symp. math. Ist. Naz. Alta mat. Francesco Severi. Vol. 23, Roma, 1979, 251—258 (РЖМат, 1980, 9A282)
864. —, Conditions de finititude pour les modules. II.. Rev. roum. math. pures et appl., 1980, *25*, № 4, 615—630 (РЖМат, 1980, 12A285)

865. —, *Oystaeyen F. van*, Graded and filtered rings and modules. Lect. Notes Math., 1979, *758*, X, 148 pp. (РЖМат, 1980, 7А198К)
866. *Nauwelaerts E.*, Symmetric localisation of Asano orders. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1977, New York—Basel, 1978, 65—80 (РЖМат, 1979, 9А236)
867. —, *Oystaeyen F. van*, Localization of primes in algebras over fields. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1977, *A80*, № 3, 233—242; Indag. math., 1977, *39*, № 3, 233—242 (РЖМат, 1978, 1А248)
868. —, —, Birational hereditary Noetherian prime rings. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 4, 309—338 (РЖМат, 1980, 8А235)
869. *Neggers J.*, Cyclic rings. Rev. Unión. mat. argent., 1977, *28*, № 2, 108—114 (РЖМат, 1978, 8А294)
870. *Němec P.*, General theory of preradicals. Stud. Alg. und ihre Anwend., 1976, *1*, 31—35 (РЖМат, 1977, 1А233)
871. —, Remarque sur les sommes directes des modules de type denombrable. Publ. Dep. math., 1978, *15*, № 4, 37—48 (РЖМат, 1980, 11А293)
872. *Neumayer W.*, Schwachperfekte Ringe. Fachbereich Mathematik der Technischen Universität München, 1978, 72S
873. *Neuvonen T.*, On the structure of produced and induced indecomposable Lie modules. Ann. acad. sci. fenn., 1975, Ser. *A1*, № 2, 199—206 (РЖМат, 1976, 9А311)
874. *Newell M.*, Ideals with hypercentral action on modules. J. Algebra, 1976, *42*, № 2, 600—603 (РЖМат, 1977, 5А198)
875. *Nicholson W. K.*, *I*-rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *207*, 361—373 (РЖМат, 1976, 5А249)
876. —, On semiperfect modules Can. Math. Bull., 1975, *18*, № 1, 77—80
877. —, Semiregular modules and rings. Can. J. Math., 1976, *28*, № 5, 1105—1120 (РЖМат, 1977, 5А188)
878. —, Lifting idempotens and exchange rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *229*, 269—278 (РЖМат, 1978, 2А200)
879. —, *Watters J. F.*, The strongly prime radicals. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *76*, № 2, 236—240 (РЖМат, 1980, 4А306)
880. *Nicolas A.-M.*, Modules factorables de type fini et de rang $n \geqslant 2$; localize d'un module factorable. C. r. Acad. sci., *A-B*, 1975, *280*, № 25, A1717—A1718 (РЖМат, 1976, 1А479)
881. —, Sur ler modules tels que toute suite croissante de sous modules engendrès par *n* generateurs soit stationnaire. J. Algebra, 1979, *60*, № 1, 249—260 (РЖМат, 1980, 5А396)
882. —, Généralization d'un critére de Pontryagin concernant les groupes sans torsion dénombrables à des modules sans torsion sur des anneaux de Dedekind. Conditions de rang, de type, de shaînes ascendantes. Lect. Notes Math., 1979, № 740, 385—396 (РЖМат, 1980, 5А397)
883. *Nishi M., Shinagawa M.*, Codivisiorial and divisiorial modules over completely integrally closed domains. I. Hiroshima Math. J., 1975, *5*, № 2, 269—292 (РЖМат, 1976, 2А515); II. ibid., 1975, *5*, № 3, 461—471 (РЖМат, 1976, 7А503)
884. *Nishida Kenji*, *U*-rational extension of a ring. Hokkaido Math. J., 1976, *5*, № 2, 227—231 (РЖМат, 1977, 2А313)
885. —, Remarks on relatively flat modules. Hokkaido Math. J., 1977, *6*, № 1, 130—135 (РЖМат, 1977, 12А417)
886. —, Divisible modules, codivisible modules, and quasi-divisible modules. Commun. Algebra, 1977, *5*, № 6, 591—610 (РЖМат, 1978, 4А299)
887. —, Construction of coreflectors. J. Algebra, 1978, *54*, № 2, 316—328 (РЖМат, 1979, 6А235)
888. *Nita C.*, *S*-anneaux Noethèriens. Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1975, *53*, 1—11 (РЖМат, 1977, 1А239)
889. —, Quelques observations sur les théories de torsion héréditaires. Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 1980, *24*, № 1, 73—76 (РЖМат, 1980, 9А391)

890. *Nobile A.*, A note on flat aglebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *64*, № 2, 206—208 (РЖМат, 1978, 8А433)
891. *Nowicki A.*, The primary decomposition of differential modules. Rocz. pol. tow. mat., 1979, Ser. 1, *21*, № 2, 341—346 (РЖМат, 1980, 12А430)
892. *Nunke R. J.*, Whitehead's problem. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 240—250 (РЖМат, 1978, 8А197)
893. *Ohm J.*, An axiomatic approach to homological dimension. Math. scand., 1975, *37*, № 2, 197—222 (РЖМат, 1976, 12А464)
894. *Ôhori M.*, Characterizations of division rings. J. Fac. Sci. Shinshu Univ., 1977, *12*, № 1, 41—42 (РЖМат, 1978, 11А276)
895. *Ohtake K.*, Colocalization and localization. J. Pure and Appl. Algebra, 1977, *11*, № 13, 217—241 (РЖМат, 1978, 11А298)
896. *Okniński J.*, Spectrally finite and semilocal group rings. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 6, 533—541 (РЖМат, 1980, 10А185)
897. *Olivier J.-P.*, L'anneau absolument plat universel, les epimorphismes et les parties constructibles. Bol. Soc. mat. mex., 1978, *23*, № 2, 68—74 (РЖМат, 1980, 9А374)
898. *O'Meara K. C.*, Quotient rings of symmetric and universal group algebras. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 3, 235—260 (РЖМат, 1980, 8А266)
899. *Onodera T.*, On balanced projectives and injectives over linearly compact rings. Hokkaido Math. J., 1976, *5*, № 2, 249—256 (РЖМат, 1977, 2А342)
900. —, Codominant dimensions and Morita equivalences. Hokkaido Math. J., 1977, *6*, № 2, 169—182 (РЖМат, 1978, 6А408)
901. —, A note on linearly compact modules. Hokkaido Math. J., 1979, *8*, № 1, 121—125 (РЖМат, 1979, 12А305)
902. *Orsatti A.*, Dualitá per alcune classi di moduli *E*-compatti Ann. mat. pura ed appl., 1977, *113*, 211—235 (РЖМат, 1978, 4А330)
903. *Osborn J. M.*, Modules over nonassociative rings. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 13, 1297—1358 (РЖМат, 1979, 5А223)
904. *Oshiro K.*, A note on direct sums of cyclic modules over commutative regular rings. Osaka J. Math., 1975, *12*, № 3, 715—718 (РЖМат, 1976, 11А494)
905. —, On torsion free modules over regular rings. III. Math. J. Okayama Univ., 1975, *18*, № 1, 43—56 (РЖМат, 1976, 11А495)
906. —, Basic elements over von Neumann regular elements. Proc. Jap. Acad., 1976, *52*, № 7, 351—354 (РЖМат, 1977, 7А414)
907. —, On commutative rings which have completely reducible torsion theories. Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci., 1977, *53*, № 2, 46—49
908. —, On cyclic splitting commutative rings. Osaka J. Math., 1978, *15*, № 2, 371—380
909. —, Thin patches and semiprime *FGC*-rings. Osaka J. Math., 1979, *16*, № 1, 57—63
910. *Osofsky B.*, Projective dimension of «nice» directed union. J. pure and Appl. Algebra, 1978, *13*, 179—219 (РЖМат, 1979, 4А426)
911. —, Remarks on projective dimension of $\aleph$-unions. Lect. Notes Math., 1979, *734*, 223—235 (РЖМат, 1980, 4А387)
912. *Osterburg J.*, Completely outer Galois theory of perfect rings. Pacif. J. Math., 1975, *56*, № 1, 215—220 (РЖМат, 1976, 2А332)
913. —, A note on perfect modules over crossed products. Rev. Colomb. mat., 1976, *10*, № 2, 69—73 (РЖМат, 1977, 12А279)
914. —, Some remarks on the crossed product. Yokohama Math. J., 1976, *24*, № 1-2, 57—61
915. *Oswald A.*, A note on injective modules over a d. g. nearrings. Can. Math. Bull., 1977, *20*, № 2, 267—269 (РЖМат, 1978, 4А227)
916. —, On near-rings of quotiens. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1979, *22*, № 2, 77—86 (РЖМат, 1980, 3А215)

917. *Oystaeyen F. van,* Note on the torsion theory at a prime ideal of a left Noetherian ring. J. Pure and Appl. Algebra, 1975, *6*, № 3, 297—304 (РЖМат, 1976, 5A251)
918. —, Extension of ideals under symmetric localization. J. Pure and Appl. Algebra, 1975, *6*, № 3, 275—283 (РЖМат, 1976, 5A260)
919. —, Localizations of fully left bounded rings. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 3, 271—284 (РЖМат, 1976, 12A351)
920. —, A note on left balanced rings. Proc. Kon. ned. akad. Wetensch., 1976, *A79*, № 3, 213—216; Indag. math., 1976, *38*, № 3, 213—216 (РЖМат, 1977, 1A237)
921. —, On the relation between localization of groups and group rings. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 2, 179—192 (РЖМат, 1977, 3A233)
922. —, Compatibility of kernel functors and localization functors. Bull. Soc. math. Belg., 1976, *28*, № 2, 131—137 (РЖМат, 1980, 8A258)
923. —, On the *AR*-property. Bull. Soc. math. Belg., 1976, *28*, № 1, 11—16 (РЖМат, 1980, 8A259)
924. —, Pointwise localization in presheaf categories. Proc. Kon. ned. Akad. wetensch., 1977, *A80*, № 2, 114—121; Indag. math., 1977, *39*, № 2, 114—121 (РЖМат, 1977, 10A175)
925. —, Stalks of sheaves over the spectra of certain noncommutative rings. Commun. Algebra, 1977, *5*, № 8, 899—901 (РЖМат, 1978, 10A189)
926. —, Zarisky central rings. Commun. algebra, 1978, *6*, № 8, 799—821 (РЖМат, 1979, 1A312)
927. —, Ring theory ∩ torsion theory-useful localization. Nieuw arch. wisk., 1978, *26*, № 3, 413—427 (РЖМат, 1979, 6A230)
928. —, On graded rings and modules of quotients. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 18, 1923—1959 (РЖМат, 1979, 8A239)
929. —, Graded and non-graded birational extensions. Ring theory. Proc. Antwerp. Cont., 1977. New York—Basel, 1978, 155—179 (РЖМат, 1979, 11A225)
930. —, Birational extensions of rings. Ring. Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 287—328 (РЖМат, 1980, 8A255)
931. —, Graded prime ideals and the left Ore condition. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 9, 861—868 (РЖМат, 1980, 11A272)
932. —, *Geel J. van,* Local-global results for regular rings. Commun. Algebra 1976, *4*, № 9, 811—821 (РЖМат, 1977, 7A264)
933. —, *Verschoren A.,* Localization of presheaves of modules. Proc. Kon. ned. acad. Wetensch. A., 1976, *79*, № 4; Indag. math., 1976, *38*, № 4, 335—348 (РЖМат, 1977, 6A214)
934. —, —, Relative localization; bimodules and semiprime *PI* rings. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 9, 955—988 (РЖМат, 1980, 1A296)
935. —, —, Reflectors and localization. Application to sheaf theory. New York—Basel, Marcell Dekker. (Lect. Notes. Pure and Appl. Math. Vol. 41), 1979, 164 pp., ill. (РЖМат, 1980, 2A241)
936. *Page A.,* Sur les anneaux hereditaires ou semi-hereditaires. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 11, 1169—1186 (РЖМат, 1979, 2A174)
937. —, Actions de groupes. Lect. Notes Math., 1979, *740*, 9—24 (РЖМат, 1980, 4A281)
938. *Page S. S.* Continuous rings and rings of quotients. Can. Math. Bull., 1978, *21*, № 3, 319—324 (РЖМат, 1979, 5A208)
939. —, Regular *FPF* rings. Pacif. J. Math., 1978, *79*, № 1, 169—176 (РЖМат, 1979, 8A270)
940. —, Images of injectives and universally cotorsionless modules. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 2, 193—201 (РЖМат, 1979, 8A273)
941. *Palmér I.,* The global homological dimension of semitrivial extensions of rings. Math. scand., 1975, *37*, № 2, 223—256 (РЖМат, 1977, 4A394)
942. *Papick I. J.,* A remark on coherent overrigs. Can. Math. Bull., 1978, *21*, № 3, 373—375 (РЖМат, 1979, 5A337)

943. —, Coherent overrings. Can. Math. Bull., 1979, *22*, № 3, 331—337 (РЖМат, 1980, 8A373)
944. *Papp Z.,* On stable Noetherian rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *213*, 107—114 (РЖМат, 1976, 9A284)
945. —, Semi-stability and topologies on *R*-sp. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 9, 793—809 (РЖМат, 1977, 5A210)
946. —, A topological characterization of stable rings. Arch. Math., 1977, *29*, № 3, 235—240 (РЖМат, 1978, 5A234)
947. —, On the spectra of left stable rings. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978. New York—Basel, 1979, 741—756 (РЖМат, 1980, 8A241)
948. —, Spectrum, topologies and sheaves for left Noetherian rings. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 204—214 (РЖМат, 1979, 11A234)
949. *Parimala S.,* Projective modules and Hermitian matrices. J. Pure and Appl. Algebra, 1976, *7*, № 1, 5—14; Поправка: ibid, 1976/77, *9*, № 2, 239 (РЖМат, 1976, 7A512)
950. —, *Sridharan R.,* Projective modules over quaternion algebras. J. Pure and Appl. Algebra, 1977, *9*, № 2, 181—193 (РЖМат, 1978, 2A225)
951. *Pascaud J. L., Valette J.,* Group actions on *Q-F*-rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *76*, № 1, 43—44 (РЖМат, 1980, 4A412)
952. *Paxia G.,* Ascent of properties for absolutely flat homomorphisms. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 4, 393—407 (РЖМат, 1978, 10A317)
953. *Perdew P. M.,* Collapsible modules over pseudorings. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 6, 611—616 (РЖМат, 1978, 11A349)
954. *Pierce R. S.,* The global dimension of commutative regular rings. Houston J. Math., 1976, *2*, № 1, 97—110 (РЖМат, 1976, 12A465)
955. *Pillay P.,* On semi hereditary noncommutative polynomial rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *78*, № 4, 473—474 (РЖМат, 1980, 12A242)
956. Platzeck M. I., Representation theory of algebras stably equivalent to an hereditary artin algebra. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *238*, 89—128 (РЖМат, 1979, 1A307)
957. —, On algebras stably equivalent to on hereditary Artin algebra. Can. J. Math., 1978, *30*, № 4, 817—829 (РЖМат, 1979, 4A297)
958. —, *Auslander M.,* Representation theory of hereditary artin algebras. Represent. Theory Algebras. Proc. Philadelphia Conf. New York—Basel, 1978, 389—424 (РЖМат, 1979, 4A315)
959. *Pleasant J. C.,* A note on the torsion concept of Levy and Goldie. J. Trennessel Acad. Sci., 1976, *51*, № 1, 39—40 (РЖМат, 1976, 12A336)
960. *Plusquellec Y.,* Dual ordonne d'un module. Roy. Soc. Can. Math. Repts, 1980, *2*, № 1, 23—26 (РЖМат, 1980, 9A277)
961. *Poneleit V.,* Lineare Kompaktheit und die Zerlegung endlich erzeugter Moduln bei einreinigen Duoringen. Mitt. Math. Sem. Giessen, 1976, № 121, 85—92 (РЖМат, 1977, 5A208)
962. *Popescu E. L.,* A characterization of II-reducible rings. Rev. roum. math. pures et appl., 1977, *22*, № 4, 537—540 (РЖМат, 1978, 1A231)
963. *Popescu N.,* Sur l'anneau des quotients d'un anneau Noetherian à droite par rapport an système localisant associe á un ideál bilatère premier. C. r. Acad. Sci., 1976, *283*, № 14, A967—969 (РЖМат, 1977, 8A310)
964. —, *Spircu T.,* Permanence theorems for semi-Artinian rings. Rev. roum. math. pures et appl., 1976, *21*, № 2, 227—231 (РЖМат, 1976, 9A283)
965. *Prest M. Y.,* Some model-theoretic aspects of torsion theories. J. pure and Appl. Algebra, 1978, *12*, № 3, 295—310 (РЖМат, 1979, 1A325)
966. —, Torsion and universal Horn classes of modules. J. London Math. Soc., 1979, *19*, № 3, 411—417 (РЖМат, 1980, 2A259)
967. —, Model-completions of some theories of modules. J. London Math. Soc., 1979, *20*, № 3, 369—372 (РЖМат, 1980, 9A283)
968. *Prodanov I.,* Precompact minimal topologies on some torsion free modules. Годишн. Софийск. ун-т. Фак. мат. и мех., 1974—1975 (1979), 69 157—163 (РЖМат, 1980, 8A387)

969. *Quartararo Ph., Butts H. S.,* Finite unions of ideals and modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *52*, 91—96 (РЖМат, 1976, 6А421)
970. *Quentel Y.,* Sur les anneaux dont tous les modules injectifs sont plats. C. r. Acad. sci., 1975, *280*, № 22, A1491—A1493 (РЖМат, 1976, 1А475)
971. *Quillen D.,* Projective modules over polynomial rings. Invent. math., 1976, *36*, 167—171 (РЖМат, 1977, 2А461)
972. *Qureshi M. A. R.,* On non-commutative Prüfer rings. J. Sci. Phys. Sec., 1971, *1*, № 1, 69—70 (РЖМат, 1976, 10А181)
973. *Radó F.,* A generalization of the valued vector space. Mathematica (RSR), 1977, *19*, № 2, 203—209 (РЖМат, 1979, 2А264)
974. *Raghavan S., Balwant Singh, Sridharan R.,* Homological methods in commutative algebra. (Mathematical pamphlets). Delhi l. a., Oxford Univ., Press, 1975, IX, 121 pp. (РЖМат, 1977, 9А413К; 1978, 3А269К)
975. *Ramamurthi V. S.,* On modules with projective character modules. Math. Jap., 1978, *23*, № 2, 181—184 (РЖМат, 1979, 8А271)
976. —, *Rutter E. A., Jr.,* On cotorsion radicals. Pacif. J. Math., 1976, *62*, № 1, 163—172 (РЖМат, 1977, 1А255)
977. *Ramras M.,* The center of an order with finite global dimension. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *210*, 249—257 (РЖМат, 1976, 6А423)
978. *Rangaswamy K. M.,* Modules with finite spanning dimension. Can. Math. Bull., 1977, *20*, № 2, 255—262 (РЖМат, 1978, 4А218)
979. —, An aspect of purity and its dualization in abelian groups and modules. Symp. math. Ist. Naz. Alta mat. Francesco Severi. Vol. 23. Roma, 1979, 307—320 (РЖМат, 1980, 9А278)
980. *Rant W. H.,* Minimally generated modules. Can. Math. Bull., 1980, *23*, № 1, 103—105 (РЖМат, 1980, 10А191)
981. *Raphael R.,* No rings have injective effacements. J. Pure and Appl. Algebra, 1976, *8*, № 3, 285—288 (РЖМат, 1977, 3А279)
982. —, Autour de la regularite. Semnaire d'Algebre Noncommutative (annee 1975—76), Exp. № 7, 14 pp. Publ. Math. Orsay, Nos 186—7655, U. E. R. Math., Univ. Paris XI, Orsay, 1976
983. —, Fully idempotent factorization rings. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 6, 547—563 (РЖМат, 1979, 12А276)
984. *Ratliff L. J., Robson J. C.,* Minimal bases for modules. Houston J. Math., 1978, *4*, № 4, 593—596 (РЖМат, 1979, 12А466)
985. *Ray B. K.,* Remarks on some theorems of Feller and Swokowski. Math. Seminar Notes., 1978, *6*, № 2, 359—362 (РЖМат, 1979, 4А302)
986. *Raynaud J.,* Localisations et topologie de Stone. C. r. Acad. sci., 1976, *282*, № 24, A1407—A1410 (РЖМат, 1977, 2А309)
987. —, Localisations stables par enveloppes injectives. C. r. Acad. sci., 1976, *282*, № 24, A1407—A1410 (РЖМат, 1977, 2А309)
988. —, Localisations premiers et copremiers. Localisations stable par enveloppes injectives. Ring. Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1977, New York—Basel, 1978, 81—111 (РЖМат, 1979, 9А239)
989. *Rege M. B., Varadarajan K.,* Chain conditions and pure-exactness. Pacif. J. Math., 1977, *72*, № 1, 223—235 (РЖМат, 1978, 5А259)
990. *Reid J. D.,* Twisted group rings which are semi-prime Goldie rings. Glasgow Math. J., 1975, *16*, № 1, 1—11
991. *Reiner I.,* Maximal orders. London Acad. Press, 1975, XII. 395 pp., ill. (L. M. S. Monogr. № 5) (РЖМат, 1976, 5А412)
992. *Reiten I.,* Stable equivalence of dualizing *R*-varieties. VI. Nakayama dualizing *R*-varieties. Adv. Math., 1975, *17*, № 2, 196—211 (РЖМат, 1976, 3А392)
993. —, Stable equivalence for some categories with radical square zero. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *212*, 333—345 (РЖМат, 1976, 8А506)
994. —, Stable equivalence of self-injective algebras. J. Algebra, 1976, *40*, № 1, 63—74 (РЖМат, 1977, 2А470)
995. —, Almost split sequences for group algebras of finite representation type. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *233*, 125—136 (РЖМат, 1978, 10А298)

996. —, A note on stable equivalence and Nakayama algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *71*, № 2, 157—163 (РЖМат, 1979, 6А223)
997. —, Algebras stably equivalent to Nakayama algebras of Loewy length at most 4. J. Austral. Math. Soc., 1979, *A27*, № 1, 37—50 (РЖМат, 1979, 9А215)
998. —, Almost split sequences. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 513—533 (РЖМат, 1980, 7А251)
999. *Renault G.,* Sur des conditions de chaines ascendantes dans des modulos libres. Sem. Alg. noncommutative (1975—76). Paris, XI, Orsau, 1976, 11 pp.
1000. —, Sur des conditions de chaines ascendantes dans des modules libres. J. Algebra, 1977, *47*, № 2, 268—275 (РЖМат, 1978, 2А221)
10001. —, Actions de groupes et anneaux reguliers injectifs. Lect. Notes Math., 1979, *734*, 236—247 (РЖМат, 1980, 4А280)
1002. *Resco R.,* A dimension theorem for division rings. Isr. J. Math., 1980, *35*, № 3, 215—221 (РЖМат, 1980, 12А264)
1003. *Ribenboim P.,* Valuations and lengths of constructible modules. Rings, Modules and Radicals. Amsterdam—London, 1973, 447—456 (РЖМат, 1976, 4А402)
1004. —, Valuations and lengths of constructible modules. J. reine und angew. Math., 1976, *283-284*, 186—201 (РЖМат, 1976, 11А482)
1005. *Richards R.,* Noetherian prime rings of Krull demension one. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 8, 845—873 (РЖМат, 1980, 1А276)
1006. *Richman F.,* The constructive theory of *KT*-modules. Pacif. J. Math., 1975, *61*, № 1, 263—274 (РЖМат, 1976, 11А350)
1007. —, A guide to valuated groups. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 73—86 (РЖМат, 1978, 9А154)
1008. —, *Walker E.,* Valuated groups. J. Algbera, 1979, *56*, № 1, 145—167 (РЖМат, 1979, 10А122)
1009. *Rimer D.,* Eléments de la théorie des pseudomodules. Proc. Inst. Math. Iaşi, 1976, 75—84 (РЖМат, 1977, 9А348)
1010. Ringe, Moduln und homilogische Methoden. Tagungsber. Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1976, № 22, 1—14 (РЖМат, 1978, 10А117)
1011. Ringe, Moduln und homologische Methoden. Tagungsber. Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1977, № 20, 1—15 (РЖМат, 1979, 3А237)
1012. *Ringel C. M.,* Unions of chains of indecomposable modules. Commun. Algebra, 1975, *3*, № 12, 1121—1144 (РЖМат, 1976, 11А353)
1013. —, Finite dimensional hereditary algebras of wild representation type. Math. Z., 1978, *161*, № 3, 235—256 (РЖМат, 1979, 2А182)
1014. —, The spectrum of a finite dimensional algebra. Ring. Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978. New York—Basel, 1979, 535—598 (РЖМат, 1980, 8А218)
1015. *Rios M. J.,* Sobre filtros estables de Gabriel. IV. (Módulos planos y anillos regulares relativos). An. Inst. mat. Univ. nac. autón. Méx., 1977, *17*, № 1, 95—108 (РЖМат, 1979, 8А262)
1016. *Robert E. de,* Suites exactes absolument scindées. C. r. Acad. Sci., 1977, *A284*, № 21, 1337—1340 (РЖМат, 1977, 12А418)
1017. *Roberts R. N.,* Krull dimension for Artinian modules over quasi local commutative rings. Quart. J. Math., 1975, *26*, № 103, 269—273 (РЖМат, 1976, 4А410)
1018. *Robson J. C.,* Cyclic and faithful objects in quotient categories with application to Noetherian simple or Asano rings. Lect. Notes Math., 1976, *545*, 151—172 (РЖМат, 1977, 8А320)
1019. —, Quotient categories and Weyl algebras. Lect. Notes Math., 1977, *586*, 101—109 (РЖМат, 1978, 4А205)
1020. *Roggenkamp R. W.,* Injective modules for group rings and Gorenstein orders. J. Algebra, 1973, *24*, № 3, 465—472 (РЖМат, 1976, 7А501)

1021. —, Bass algebras. J. Pure and Appl. Algebra, 1977, *9*, № 2, 169—179 (РЖМат, 1978, 2А391)
1022. —, Some examples of orders of global dimension two. Math. J., 1977, *154*, № 3, 225—238 (РЖМат, 1978, 2А390)
1023. —, Orders of global dimension two. Math. Z., 1978, *160*, № 1, 63—68 (РЖМат, 1978, 12А654)
1024. —, Algebras of global dimension two. Arch. Math., 1978, *30*, № 4, 385—390 (РЖМат, 1979, 1А421)
1025. *Roitman M.*, On Serre's problem on projective modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *50*, 45—52 (РЖМат, 1976, 5А420)
1026. —, Completely unimodular rows to invertible matrices. J. Algebra, 1977, *49*, № 1, 206—211 (РЖМат, 1978, 5А409)
1027. —, A note on Quillen's paper «Projective modules over polynomial rings». Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *64*, № 2, 231—232 (РЖМат, 1978, 7А529)
1028. —, On projective modules over polynomial rings. J. Algebra, 1979, *58*, № 1, 51—63 (РЖМат, 1980, 2А445)
1029. *Rosenberg A.*, La dimension globale d'extension d'Ore. Groupe d'étude algèbre. Univ. Pierre et Marie Curie, 1975—1976 (1978), *1*, 3/01—3/02 (РЖМат, 1978, 12А644)
1030. *Roux B.*, Sur les anneaux de Koethe. An. Acad. brasil. ciênc., 1976, *48*, № 1, 13—28 (РЖМат, 1978, 1А222)
1031. *Rowen L. H.*, Monomial conditions on prime rings. Isr. J. Math., 1977, *27*, № 2, 131—149 (РЖМат, 1978, 2А212)
1032. *Rubin R. A.*, Simple maximal quotient rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *55*, № 1, 29—33 (РЖМат, 1977, 3А232)
1033. *Rush D. E.*, Remarks on flat modules. Michigan Math., J., 1976 (1977), *23*, 193—201 (РЖМат, 1978, 2А392)
1034. *Rutter E.*, *OF*-3 rings with ascending chain condition on annhilators. J. reine und angew. Math., 1975, *277*, 40—44 (РЖМат, 1976, 3А288)
1035. —, Dominant modules and finite localizations. Tôhoku Math. J., 1975, *27*, № 2, 225—239 (РЖМат, 1976, 3А298)
1036. *Sabbagh G.*, Catégoricité en $\aleph_0$ et stabilité: constructions les préservant et conditions de chaîne. C. r. Acad. Sci., 1975, *280*, № 9, A531—A533
1037. —, Catégorité et stabilité: quelques exemples parmi les groupes et anneaux. C. r. Acad. Sci., 1975, *280*, № 10, A603—A606 (РЖМат, 1975, 11А126)
1038. *Salce L.*, Moduli Slender su anello di Dedekind. Ann. Univ. Ferrara, 1975, *20*, Sez. VII, 59—63 (РЖМат, 1976, 7А500)
1039. *Salles D.*, Anneaux semi-artiniens non commutatifs. Semin. P. Dubreil. Algebre. Univ. Paris, 1972—1973, *26*, 2/1—2/6 (РЖМат, 1976, 7А322)
1040. —, Anneaux semi-artiniens non commutatifs. Sém. d'Algèbrre non commutative. Publ. Math. Orsay, № 107-7523. Univ. Paris XI, 1974, 6 pp.
1041. —, Anneaux de groups semi-artiniens, anneaux de groupe cohérents. C. r. Acad. Sci., 1976, *283*, № 16, A1073—A1076 (РЖМат, 1977, 8А315)
1042. *Sally J. D.*, *Vasconcelos W. V.*, Flat ideals. I. Commun. Algebra, 1975, *3*, № 6, 531—543 (РЖМат, 1976, 4А408)
1043. *Sandomierski F. L.*, Classical localization at prime ideals of fully bounded Noetherian rings. Ring Theory. Proc. Conf., Ohio Univ., Athens, Ohio, 1976. pp. 169—181. (Lect. Notes Pure and Appl. Math., Vol. 25). Marcell Dekker, New York, 1977 (РЖМат, 1978, 11А281)
1044. *Sarath B.*, Krull dimension and Noetherianness. Ill. J. Math., 1976, *20*, № 2, 329—335 (РЖМат, 1977, 3А228)
1045. —, *Varadarajan K.*, Divisibility of direct sums in torsion theories. Can. J. Math., 1976, *28*, № 1, 211—214 (РЖМат, 1976, 11А354)
1046. —, —, Dual Goldie dimension. II. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 17, 1885—1899 (РЖМат, 1980, 6А294)
1047. *Sato H.*, Duality of torsion modules over a *QF*-3 one-dimensional Gorenstein ring. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1975, *A13*, № 347-365, 28—36 (РЖМат, 1976, 8А548)
1048. —, On localizations of 1-Gorenstein ring. Sci. Repts Tokyo Daigaku, 1977, *13*, № 366-382, 188—193 (РЖМат, 1977, 10А288)
1049. —, Remark on localizations of Noetherian rings with Krull dimension one. Tsukuba J. Math., 1979, *3*, № 1, 123—128 (РЖМат, 1980, 1А270)
1050. *Sato M.*, The concrete description of the colocalization. Proc. Jap. Acad., 1976, *52*, № 9, 502—504 (РЖМат, 1977, 9А323)
1051. —, On equivalences between module categories. Proc. 10th Symp. Ring Theory, Matsumoto, 1977, Okayama, 1978, 83—94 (РЖМат, 1978, 11А307)
1052. —, Fuller's theorem on equivalences. J. Algebra, 1978, *52*, № 1, 274—284 (РЖМат, 1978, 12А447)
1053. *Scheja G.*, *Storch U.*, Quasi-Frobenius-Algebren und local vollständige Durchschnitte. Manuscr. math., 1976, *19*, № 1, 75—104 (РЖМат, 1977, 2А465)
1054. *Schelter W.*, Essential extensions and intersection theorems. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *53*, № 2, 328—330 (РЖМат, 1976, 10А180)
1055. —, *Small L. W.*, Some pathological rings of quotients. J. London Math. Soc., 1976, *14*, № 53, 200—202 (РЖМат, 1977, 8А313)
1056. *Schmähling R.*, Eine axiomatische Kennzeichnung der Determinante auf endlich-erzeugten, projektiven Moduln. J. reine und angew. Math., 1975, *276*, 56—67 (РЖМат, 1976, 2А520)
1057. *Schulz R.*, Reflexive modules over perfect rings. J. Algebra, 1979, *61*, № 2, 527—537 (РЖМат, 1980, 8А271)
1058. *Segal D.*, On the residual simplicity of certain modules. Proc. London Math. Soc., 1977, *34*, № 2, 327—353 (РЖМат, 1977, 9А319)
1059. *Sekiyama H.*, Trivial extension of a ring with balanced condition. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *77*, № 1, 1—6 (РЖМат, 1980, 5А389)
1060. *Shapiro J.*, *T*-torsion theories and central localizations. J. Algebra, 1977, *48*, № 1, 17—29
1061. —, *R*-sequences in fully bounded Noetherian rings. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 8, 819—831 (РЖМат, 1980, 2А247)
1062. *Sharp R. Y.*, Ramification indices and injective modules. J. London Math. Soc., 1975, *11*, № 3, 267—275 (РЖМат, 1976, 4А409)
1063. —, Secondary representations for injective modules over commutative Noetherian rings. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1976, *20*, № 2, 143—151 (РЖМат, 1977, 6А210)
1064. *Shelah S.*, Infinite Abelian groups. Whitehead problem and some constructions. Isr. J. Math., 1974, *18*, № 3, 243—256 (РЖМат, 1975, 7А264)
1065. —, A compactness theorem for singular cardinals, free algebras. Whitehead problem and transversals. Isr. J. Math., 1975, *21*, № 4, 319—349 (РЖМат, 1976, 5А77)
1066. —, The lazy model-theoretician's guide to stability. Log. et. anal., 1975, *18*, № 71-72, 241—308 (РЖМат, 1977, 10А48)
1067. —, Whithehead groups may be not free even assuming *CH*. I. Isr. J. Math. 1977, *28*, № 3, 193—204 (РЖМат, 1978, 5А37)
1068. *Sherman C.*, A note on the localization theorem for projective modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *75*, № 2, 207—208 (РЖМат, 1980, 2А424)
1069. *Shinagawa M.*, On flat extensions of Krull domains. Hiroshima Math. J., 1975, *5*, № 3, 517—524 (РЖМат, 1976, 7А504)
1070. *Shock R. C.*, Dual generalizations of the Artinian and Noetherian conditions. Pacif. J. Math., 1974, *54*, № 2, 227—235 (РЖМат, 1976, 12А362)
1071. —, On orders in *QF*-2 rings. Math. scand., 1976, *38*, № 2, 192—198 (РЖМат, 1977, 8А296)
1072. *Shores T. S.*, A topological criterion for primary decomposition. Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1976, *28*, № 3-4, 383—387 (РЖМат, 1977, 8А322)

1073. *Shudo T.*, A note on coalgebras and rational modules. Hiroshima Math. J., 1976, *6*, № 2, 297—304 (РЖМат, 1977, 2А326)
1074. *Sim S. K.*, On rings of which every prime kernel functor is symmetric. Nanta Math., 1974, *7*, № 2, 69—70
1075. —, Prime ideals and symmetric idempotent kernel functors. Rev. Unión mat. argent., 1975, *27*, № 2, 59—64 (РЖМат, 1976, 8А355)
1076. —, Prime ideals and symmetric idempotent kernel functors. Nanta Math., 1976, *9*, № 2, 121—124
1077. *Simson D.*, Pure semi-simple categories and rings of finite representation type. J. Algebra, 1977, *48*, № 2, 290—294 (РЖМат, 1978, 6А298); Поправка: ibid., 1980, *67*, № 1, 254—256
1078. —, Categories of representations of species. J. Pure and Appl. Algebra, 1979, *14*, 101—114 (РЖМат, 1979, 8А379)
1079. *Singh S.*, Modules over hereditary Noetherian prime rings. II. Can. J. Math., 1976, *28*, № 1, 73—82 (РЖМат, 1976, 12А367)
1080. —, Some decomposition theorems in Abelian groups and their generalizations. Ring Theory. Proc. Ohio Univ. Conf., 1976. New York—Basel, 1977, 183—189 (РЖМат, 1978, 10А130)
1081. —, (*hnp*)-rings over which every module admits a basic sumbodule. Pacif. J. Math., 1978, *76*, № 2, 509—512 (РЖМат, 1979, 2А195)
1082. —, *Asrar M.*, Rings in which every finitely generated left ideal is quasi-projective. J. Indian Math. Soc., 1976, *40*, № 1-4, 195—205 (РЖМат, 1978, 5А238)
1083. —, *Beg A.*, Restricted balanced rings. Arch. Math., 1979, *33*, № 2, 127—130 (РЖМат, 1980, 8А209)
1084. —, *Mehdi F.*, Multiplication modules. Can. Math. Bull., 1979, *22*, № 1, 93—98 (РЖМат, 1979, 12А465)
1085. —, *Talwar S.*, Pure submodules of modules over bounded (*hnp*)-rings. Arch. Math., 1978, *30*, № 6, 570—577 (РЖМат, 1978, 12А449)
1086. —, —, Modules over bounded hereditary Noetherian prime rings. Arch. Math., 1979, *32*, № 2, 134—142 (РЖМат, 1980, 3А183)
1087. *Sjödin G.*, On the indecomposable modules over certain wild algebras. Stockholms univ. Mat. inst. (Medd.), 1979, № 1, 1—17 (РЖМат, 1979, 9А397)
1088. *Smalø S.*, Global dimension of special endomorphism rings over Artin algebras. Ill. J. Math., 1978, *22*, № 3, 414—427 (РЖМат, 1979, 7А423)
1089. —, The structure of special endomorphism rings over Artinian algebras. Ill. J. Math., 1978, *22*, № 3, 428—442 (РЖМат, 1979, 7А424)
1090. —, The inductive step of the second Brauer-Thrall conjecture. Can. J. Math. 1980, *32*, № 2, 342—349 (РЖМат, 1981, 1А414)
1091. *Smarda Bohumil*, The lattice of topologies of topological *L*-groups. Czechosl. Mat. J., 1976, *26*, № 1, 128—136 (РЖМат, 1976, 9А243)
1092. *Smith P. F.*, A note on projective modules. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1976, *A75*, № 1, 23—31 (РЖМат, 1977, 3А237)
1093. —, Some rings which are characterised by their finitely generated modules. Quart. J. Math., 1978, *29*, № 1, 113, 101—109 (РЖМат, 1978, 11А246)
1094. —, Finitely embedded modules over group rings. Proc. Edinburgh. Math. Soc., 1978, *21*, ser. 2, № 1, 55—64 (РЖМат, 1978, 12А421)
1095. —, Decomposing modules into projectives and injectives. Pacif. J. Math., 1978, *76*, № 1, 247—266 (РЖМат, 1978, 12А451)
1096. —, Rings characterized by their cyclic modules. Can. J. Math., 1979, *31*, № 1, 93—111 (РЖМат, 1979, 9А197)
1097. —, On the structure of certain *PP*-rings. Math. Z., 1979, *166*, № 2, 147—157 (РЖМат, 1979, 9А250)
1098. *Snider R.*, Rings whose ideals have projective covers. Arch. Math., 1976, *27*, № 4, 378—382 (РЖМат, 1977, 3А346)
1099. —, On the singular ideal of a group algebra. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 11, 1087—1089 (РЖМат, 1977, 7А208)

1100. —, Injective hulls of simple modules over group rings. Ring Theory. Proc. Ohio Univ. Conf., 1976. New York—Basel, 1977, 223—226 (РЖМат, 1978, 7А355)
1101. *Spulber D.*, On localizing system of *M*-dense left ideals of a ring. Bull. math. soc. sci. math. RSR, 1974 (1975), *18*, № 1-2, 203—206 (РЖМат, 1976, 8А347)
1102. —, *F*-Dedekind rings. Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 1974 (1976), *18*, № 3-4, 379—389 (РЖМат, 1976, 12А482)
1103. —, Observations sur les systèmes localisants réguliers et leur liaison avec la transformée Nagata d'un ideal. Rev. Roumaine de Math. pure et appl., 1976, *21*, № 5, 559—563
1104. —, Induced flat epimorphisms of rings. Rev. Roumaine de Math. pure et appl., 1978, *23*, № 3, 495—496 (РЖМат, 1978, 12А400)
1105. —, *TP*-rings. Rev. Roumaine de Math. pures et appl., 1978, *23*, № 4, 611—615 (РЖМат, 1978, 12А701)
1106. *Stafford J. T.*, Completely faithful modules and ideals of simple Noetherian rings. Bull. London Math. Soc., 1976, *8*, № 2, 168—173 (РЖМат, 1977, 2А329)
1107. —, Weyl algebras are stably free. J. Algebra, 1977, *48*, № 2, 297—304 (РЖМат, 1978, 5А231)
1108. —, Stable structure of noncommutative Noetherian rings. I. J. Algebra, 1977, *47*, № 2, 244—267 (РЖМат, 1978, 4А209); II. Ibid., 1978, *52*, № 1, 218—235
1109. —, A simple Noetherian ring not Morita equivalent to a domain. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *68*, № 2, 159—160 (РЖМат, 1978, 11А272)
1110. —, Module structure of Weyl algebras. J. London Math. Soc., 1978, *18*, № 3, 429—442 (РЖМат, 1979, 9А254)
1111. —, Concellation for nonprojective modules. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 3—15 (РЖМат, 1979, 11А379)
1112. —, Simple Noetherian rings. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 230—231 (РЖМат, 1979, 8А225)
1113. —, Morita equivalence of simple Noetherian rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *74*, № 2, 212—214 (РЖМат, 1980, 1А274)
1114. —, On the regular elements of Noetherian rings. Ring. Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978. New York—Basel, 1979, 257—277 (РЖМат, 1980, 8А229)
1115. —, Projective modules over polynomial extensions of division rings. Invent. Math., 1980, *59*, № 2, 105—117 (РЖМат, 1980, 12А417)
1116. *Stanton R. O.*, An invariant for modules over a discrete valuation ring. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *49*, № 1, 51—54 (РЖМат, 1976, 7А238)
1117. —, Relative *S*-invariants. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *65*, № 2, 221—224 (РЖМат, 1978, 11А310)
1118. —, Decompositions of modules over a discrete valuation ring. J. Austral. Math. Soc., 1979, *A27*, № 3, 284—288 (РЖМат, 1979, 12А306)
1119. *Steinfeld O.*, Some characterizations of semisimple rings with minimum condition on principal left ideals. Acta math. Acad. sci. hung., 1975, *26*, № 3-4, 377—384 (РЖМат, 1976, 7А315)
1120. *Stenström B.*, The maximal ring of quotients of a generalized matrix ring. Stud. Alg. und ihre Anwend., 1976, *1*, 65—67 (РЖМат, 1976, 12А353)
1121. *Strebel R.*, A homological finiteness criterion. Math. Z., 1976, *151*, № 3, 263—275 (РЖМат, 1977, 8А410)
1122. *Sugano K.*, On projective *H*-separable extension. Hokkaido Math. J., 1976, *5*, № 1, 44—54 (РЖМат, 1976, 9А286)
1123. *Sumioka T.*, On non-singular *QF*-3′ rings with injective dimension $\leqslant 1$. Osaka J. Math., 1978, *15*, № 1, 1—12
1124. —, On finite dimensional *QF*-3′ rings. Proc. 10th. Symp. Ring Theory, Matsumoto, 1977. Okayama, 1978, 99—105

1125. *Suslin A. A.*, The concellation problem for projective modules and related topics. Lect. Notes Math., 1979, *734*, 323—338 (РЖМат, 1980, 2А431)
1126. *Swan R. G.*, Serre's problem. Queen's Pap. Pure and Appl. Math., 1975, № 42, 2—60 (РЖМат, 1976, 7А506)
1127. —, Topological examples of projective modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *230*, 201—234 (РЖМат, 1978, 4А328)
1128. —, Projective modules over Laurent polynomial rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *237*, 111—120 (РЖМат, 1979, 2А293)
1129. *Szendrei A.*, On affine modules. Contributions to universal algebra. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 1977, *17*, 457—464
1130. *Szeto G.*, The localization of zero-dimensional rings. Bull. Soc. math. Belg., 1976, *28*, № 3, 193—196 (РЖМат, 1980, 8А238)
1131. —, The structure of semiperfect rings. Commun. Algebra. 1977, *5*, № 3, 219—229 (РЖМат, 1978, 2А202)
1132. —, On exact sequence of modules. Arch. Math., 1977, *29*, № 1, 67—71 (РЖМат, 1978, 4А293)
1133. —, Classical algebras of quotients and central quotients of algebras. Acta math. Acad. sci. hung., 1978, *32*, № 1-2, 59—62 (РЖМат, 1979, 6А231)
1134. —, On weakly biregular algebra. Bull. Acad. pol. sci. Sec. sci. math., astron. et phys., 1978, *26*, № 9-10, 775—780 (РЖМат, 1979, 7А329)
1135. —, *P P* rings and reduced rings. Czech. Mat J., 1979, *29*, № 1, 53—56 (РЖМат, 1979, 9А251)
1136. *Tachikawa H.*, Balancedness and left serial algebras of finite type. Proc. Intern. Conf. on Representations of Algebras (Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1974), Paper № 26. Carleton Math. Lect. Notes № 9, Carleton Univ., Ottawa, 1974, 28 pp.
1137. —, Balanced modules and constructible submodules. Sci. Repts. Tokyo Kyoiku Daigaku, 1975, *A13*, № 347-365, 37—45 (РЖМат, 1976, 7А340)
1138. —, Commutative perfect *QF*-1 rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *68*, № 3, 261—264 (РЖМат, 1978, 11А300)
1139. *Takeuchi T.*, On cofinite-dimensional modules. Hokkaido Math. J., 1976, *5*, № 1, 1—43 (РЖМат, 1976, 9А299)
1140. *Talwar S.*, Modules over bounded hereditary Noetherian prime rings. II. Arch. Math., 1980, *34*, № 1, 21—26 (РЖМат, 1980, 11А260)
1141. *Teply M. L.*, Generalizations of the simple torsion class and the splitting property. Can. J. Math., 1975, *27*, № 5, 1056—1074 (РЖМат, 1976, 8А365)
1142. —, Prime singular-splitting rings with finiteness conditions. Lect. Notes Math., 1976, **545**, 173—194 (РЖМат, 1977, 10А177)
1143. —, Subidealizers. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 232—234 (РЖМат, 1979, 9А217)
1144. *Thomas J. C.*, Homological dimension under change of rings. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 6, 625—640 (РЖМат, 1979, 12А429)
1145. *Timothy P. M.*, Quelques resultats sur les anneaux semi-Noethériens. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1976, *24*, №10, 829—834 (РЖМат, 1977, 8А323)
1146. *Tisseron C.*, Sur les anneaux tels que tout produit de copies d'un modules quasi-injectif soit module quasi-injectif. Ann. mat. pura ed appl., 1975, *105*, 37—71 (РЖМат, 1976, 5А271)
1147. —, Sur les anneaux tels que tout produit de copies d'un module quasi-injectif soit un module quasi injectif. II. Ann. Mat. Pura Appl., 1976, *110*, № 8, 15—28 (РЖМат, 1977, 8А437)

1148. *Tiwary A. K.*, *Pandey B. M.*, Rings over which every module is quasipolysimple. Progr. Math. (Allahabad), 1975, *9*, № 1, 1—6
1149. —, —, Pseudo-projective and pseudo-injective modules. Indian J. Pure and Appl. Math., 1978, *9*, № 9, 941—949 (РЖМат, 1979, 2А196)
1150. —, *Paramhans S. A.*, On closure of submodules. Indian J. pure and appl. math., 1977, *8*, № 11, 1415—1419 (РЖМат, 1980, 11А285)
1151. *Tominaga H.*, On left *s*-unital rings. I, II. Math. J. Okayama Univ., 1976, *18*, № 2, 117—133; 1976/1977, *19*, № 2, 171—182 (РЖМат, 1977, 6А192; 1978, 5А244)
1152. *Törner G.*, Some remarks on the structure of indecomposable injective modules over valuation rings. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 5, 467—482 (РЖМат, 1977, 1А259)
1153. —, Unzerlegbare, injektive Moduln über Kettenringen. J. reine und angew Math., 1976, *285*, 172—180 (РЖМат, 1977, 3А238)
1154. *Towber J.*, Two new functors from modules to algebras. J. Algebra, 1977, *47*, № 1, 80—104 (РЖМат, 1978, 1А394)
1155. *Trcger R.*, Reflexive modules. J. Algebra, 1978, *54*, № 2, 444—466 (РЖМат, 1979, 7А453)
1156. *Upham M.*, A new proof of a theorem of Michler. Arch. Math., 1979, *31*, № 6, 554—561 (РЖМат, 1979, 8А226)
1157. —, Localization and completion of *FBN* hereditary rings. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 12, 1269—1307 (РЖМат, 1980, 3А188)
1158. *Ursianu R.*, Asupra submodulelor diferentiale. Stud. si cerc. mat., 1977, *29*, № 1, 85—89 (РЖМат, 1977, 10А282)
1159. *Uscki M.*, On exact modules over a commutative rings. Colloq. math., 1979, *40*, № 2, 197—202 (РЖМат, 1980, 5А399)
1160. *Valette J.*, Sur les modules projectifs. C. r. Acad. Sci., 1976, *282*, № 16, А821—А823 (РЖМат, 1976, 12А368)
1161. *Vàmos P.*, Test modules and cogenerators. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *56*, № 1, 8—10 (РЖМат, 1977, 2А327)
1162. —, Rings with duality. Proc. London Math. Soc., 1977, *35*, № 2, 275—289 (РЖМат, 1978, 4А329)
1163. —, The decomposition of finitely generated modules and fractionally self-injective rings. J. London Math. Soc., 1977, *16*, № 2, 209—220 (РЖМат, 1978, 7А531)
1164. —, Semi-local Noetherian *PI*-rings. Bull. London Math. Soc., 1977, *9*, № 3, 251—256 (РЖМат, 1978, 10А177)
1165. —, Finitely generated Artinian and distributive modules are cyclic. Bull. London Math. Soc., 1978, *10*, № 3, 287—288 (РЖМат, 1979, 8А275)
1166. —, Sheaf-theoretical methods in the solution of Kaplansky's problem. Lect. Notes Math., 1979, *753*, 732—738 (РЖМат, 1980, 4А419)
1167. *Varadarajan K.*, *M*-projective and strongly *M*-projective modules. Ill. J. Math., 1976, *20*, № 3, 507—515 (РЖМат, 1977, 3А236)
1168. —, Study of certain radicals. J. Pure and Appl. Algebra, 1976, *9*, № 1, 107—120 (РЖМат, 1977, 7А258)
1169. —, Dual Goldie dimension. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 6, 565—610 (РЖМат, 1979, 12А289)
1170. —, Modules with supplements. Pacif. J. Math., 1979, *82*, № 2, 559—564 (РЖМат, 1980, 4А302)
1171. —, Study of certain pre-radicals. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 2, 185—209 (РЖМат, 1980, 8А272)
1172. *Vasconcelos W. V.*, Divisor theory in module categories (North-Holland Math. Stud., 14). Amsterdam—Oxfod, North—Holl. Publ. Co., New York,

Amer. Elservier Publ. Co., Inc., 1974, VII, 119 pp. (РЖМат, 1976, 4A400K)

1173. —, The λ-dimension of a ring. Queen's Pap. Pure and Appl. Math., 1975, № 43, 213—224 (РЖМат, 1976, 7A507)

1174. —, Super-regularity in local rings. J. Pure and Appl. Algebra, 1976, *7*, № 2, 231—233 (РЖМат, 1976, 9A406)

1175. —, On the arithmetic of flat ideals and epimorphisms. Notas e comuns mat., 1976, № 70, 11 pp. (РЖМат, 1977, 8A440)

1176. —, The rings of dimension two. Marcel Dekker, Inc., New York—Basel, 1976, 101 pp. (РЖМат, 1978, 7A313)

1177. —, *Wiegandt R.*, Bounding the number of generators of a module. Math. Z., 1978, *164*, № 1, 1—7 (РЖМат, 1979, 7A452)

1178. *Verschoren A.*, A note on stricly local kernel functors. Bull. Soc. math. Belg, 1976, *28*. № 3, 179—192 (РЖМат, 1980, 8A302)

1179. —, Lokalization and the Gabriel-Popescu embedding. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 15, 1563—1567 (РЖМат, 1979, 7A334)

1180. —, Localization of (pre)-sheaves of modules and structure sheaves. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1977, New York—Basel, 1978, 181—207 (РЖМат, 1979, 9A234)

1181. —, Localization of bimodules and *PI*-rings. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978, New York—Basel, 1979, 329—350 (РЖМат, 1980, 8A263)

1182. Torsion free extensions and perfect localizations. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 9, 839—859 (РЖМат, 1980, 11A273)

1183. —, *Oystayen F. van.*, Localization of sheaves of modules. Proc. Kon. ned. acad. wetensch, 1977, *A79*, № 5, 470—481 (РЖМат, 1977, 8A321)

1184. *Vidal R.*, Modules de type quasi fini sur un anneau non commutatif. Semin. P. Dubreil. Algebre Univ. Pierre et Marie Curie, 1975, *28*, 8/1—8/6 (РЖМат, 1976, 7A339)

1185. *Wangneo C. L., Tewari K.*, Right Noetherian rings integral over their centers. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 15, 1573—1598 (РЖМат, 1980, 4A287)

1186. *Warfield R. B., Jr.*, Contably generated modules over commutative Artinian rings. Pacif. J. Math., 1975, *60*, № 2, 289—302 (РЖМат, 1977, 2A476)

1187. —, Large modules over artinian rings. Represent. Theory Algebras. Proc. Philadelphia Conf. New York—Basel, 1978, 451—463 (РЖМат, 1979, 4A318)

1188. —, Stable equivalence of matrices and resolutions. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 17, 1811—1828 (РЖМат, 1979, 7A425)

1189. —, Bezout rings and serial rings. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 5, 533—545 (РЖМат, 1979, 9A201)

1190. —, Stable generation of modules. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 16—33 (РЖМат, 1979, 11A355)

1191. —, Modules over fully bounded Noetherian rings. Lect. Notes Math., 1979, *734*, 339—352 (РЖМат, 1980, 3A195)

1192. *Waschbusch J.*, Unzerlegbare Moduln über Artinringen. Arch. Math., 1977, *28*, № 5, 478—490 (РЖМат, 1978, 1A237)

1193. —, Über Bimoduln in Artinringen vom endlichen Modultyp. Commum. Algebra, 1980, *8*, № 2, 105—151 (РЖМат, 1980, 8A270)

1194. *Webb C.*, Tensor products of separable reduced primary modules. Proc. Eindburgh Math. Soc., 1979, *22*, № 1, 23—26 (РЖМат, 1979, 12A464)

1195. *Weinberg E. C.*, Relative injectives. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 21. London—New York, 1977, *21*, 555—564 (РЖМат, 1978, 6A351)

1196. *Wexler-Kreindler E.*, Proprietes de transfert des extensions d'Ore. Lect. Notes Math., 1978, *641*, 235—251 (РЖМат, 1979, 1A319)

1197. —, Polynomes de Ore, series formelles tordues et anneaux filtres complets hereditaires. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 4, 339—371 (РЖМат, 1980, 8A215)

1198. *Wiegand R.*, Rings of bounded module type. Lect. Notes. Math., 1979, *700*, 143—150 (РЖМат, 1979, 11A356)

1199. —, *Wiegand S.*, Commutative rings whose finitely generated modules are direct sum of cyclics. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 406—423 (РЖМат, 1978, 7A532)

1200. *Wilkerson R. W.*, Injective quotient rings of group rings. Tydskr. Naturwetenskap., 1976, *16*, № 1, 24—27

1201. *Wirth A.*, Locally compact tight Riesz groups. J. Austral. Math. Soc., 1975, *19*, № 2, 247—251 (РЖМат, 1976, 2A280)

1202. *Wisbauer R.*, Injektive und projektive Moduln über nichtassoziativen Ringen. Arch. Math., 1977, *28*, № 5, 460—468 (РЖМат, 1978, 1A260)

1203. —, Co-semisimple modules and nonassociative *V*-rings. Commun. Algebra, 1977, *5*, № 11, 1193—1209 (РЖМат, 1978, 5A262)

1204. —, Nonassociative left regular and biregular rings. J. Pure and Appl. Algebra, 1977, *10*, № 2, 215—226 (РЖМат, 1978, 9A301)

1205. —, σ-semiperfekte und σ-perfekte Moduls. Math. Z., 1978, *162*, № 2, 131—138 (РЖМат, 1979, 4A319)

1206. —, Separable Moduln von Algebren über Ringen. J. reine und angew. Math., 1978, *303—304*, 221—230 (РЖМат, 1979, 8A259)

1207. —, Erbliche Moduln und nichtassoziative Ringe. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 1, 47—77 (РЖМат, 1979, 9A255)

1208. —, *Witkowski L.*, On linearly topological modules. Demonstr. math., 1977, *10*, № 2, 317—327 (РЖМат, 1978, 7A390)

1209. *Wong R. W.*, Free ideal monoid rings. J. Algebra, 1978, *53*, № 1, 21—35 (РЖМат, 1979, 2A175)

1210. —, Finitely generated ideals in free group algebras. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 9, 875—883 (РЖМат, 1979, 12A300)

1211. *Würfel T.*, Ring extensions and essential monomorphisms. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *69*, № 1, 1—7 (РЖМат, 1979, 3A250)

1212. *Yanya S. M.*, *P*-neat exact sequences. Stud. sci. math. hung., 1976, *11*, № 3-4, 363—371 (РЖМат, 1980, 8A158)

1213. —, *Al-Daffa A.*, On cogenerators in modules. Math. Sem. Notes Kobe Univ., 1979, *7*, № 1, 153—166 (РЖМат, 1980, 1A425)

1214. —, —, Cogenerators in modules over Dedekind domains. Math. Sem. Notes Kobe Univ., 1980, *8*, № 1, 91—102

1215. *Yamagata K.*, On artinian rings of finite representation type. J. Algebra, 1978, *50*, № 2, 276—283 (РЖМат, 1978, 11A301)

1216. *Yue Chi Ming R.*, On annihilator ideals. Math. J. Okayama Univ., 1976, *19*, № 1, 51—53 (РЖМат, 1978, 1A232)

1217. —, On von Neumann regular rings. II. Math. Scand., 1976, *39*, № 2, 167—170 (РЖМат, 1978, 4A214)

1218. —, On annihilators and quasi-Frobenius rings. Bull. Soc. math. Belg., 1976, *28*, № 2, 115—120 (РЖМат, 1980, 8A243)

1219. —, On annihilators and continuous regular rings. Bull. math. Soc. sci. math. RSR, 1976 (1977), *20*, № 3-4, 423—427 (РЖМат, 1978, 7A343)

1220. —, On von Neumann regular rings. III. Monatsh. Math., 1978, *86*, № 3, 251—257 (РЖМат, 1979, 5A204)

1221. —, On generalizations of V-rings and regular rings. Math. J. Okayama Univ., 1978, *20*, № 2, 123—129 (РЖМат, 1979, 8A232)
1222. —, A remark on decomposable modules. Publ. Inst. Math., 1979, *25*, 101—104 (РЖМат, 1979, 12A303)
1223. —, On regular rings and V-rings. Monatsh. Math., 1979, *88*, № 4, 335—344 (РЖМат, 1980, 5A250)
1224. —, On V-rings and prime rings. J. Algebra, 1980, *62*, № 1, 13—20 (РЖМат, 1980, 8A246)
1225. *Zelmanowitz J. M.,* Semisimple rings of quotients. Bull. Austral. Math. Soc., 1978, *19*, № 1, 97—115 (РЖМат, 1979, 8A240)
1226. *Zimmermann W.,* Über die aufsteigende Kettenbedingung für Annulatoren. Arch. Math., 1976, *27*, № 3, 261—266 (РЖМат, 1976, 12A360)
1227. —, π-projektive Moduln. J. reine und angew. Math., 1977, *292*, 117—124 (РЖМат, 1978, 2A226)
1228. —, Rein injektive direkte Summen von Moduln. Commun. Algebra, 1977, *5*, № 10, 1083—1117 (РЖМат, 1978, 7A387)
1229. *Zimmerman-Huisgen B.* Pure submodules of direct products of free modules. Math. Ann., 1976, *224*, № 3, 233—245 (РЖМат, 1977, 5A203)
1230. —, Decomposability of direct products of modules. J. Algebra, 1979, *56*, № 1, 119—128 (РЖМат, 1979, 8A272)
1231. —, Rings whose right modules are direct sums of indecomposable modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1977 (1979), № 3, 191—197 (РЖМат, 1980, 5A258)
1232. —, *Zimmermann W.,* Algebraically compact rings and modules. Math. Z., 1978, *161*, № 1, 81—93 (РЖМат, 1978, 12A468)
1233. *Zöschinger H.,* Basis-Untermoduln und Quasi-kotorsions-Moduln über diskreten Bewertungsringen. Bayer. Acad. Wiss. Math.-Nat. Kl. Sitzungsber., 1977, 9—16 (РЖМат, 1978, 6A300)
1234. —, Komplemente für zyklische Moduln über Dedekindringen. Arch. Math., 1979, *32*, № 2, 143—148 (РЖМат, 1980, 1A455)
1235. —, Quasi-separable und koseparable Moduln über diskreten Bewertungsringen. Math. Scand., 1979, *44*, № 1, 17—36 (РЖМат, 1980, 4A420)
1236. —, Koatomare Moduln. Math. Z., 1980, *170*, № 3, 221—232 (РЖМат, 1980, 11A287)

УДК 512.743
512.742
515.178

МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ

А. А. Панчишкин

Выбор названия для предлагаемого обзора может показаться не вполне удачным: вряд ли возможно в рамках небольшой по объему работы осветить все аспекты теории модулярных форм, переживающей в последнее время период бурного развития (см. предисловие к книге Ленга [33] и обзор О. М. Фоменко [41]). Мы ограничились поэтому лишь теми ее сторонами, которые непосредственно связаны с теорией представлений и L-функциями. Такой подход позволяет объяснить связи между одномерными и многомерными модулярными формами с точки зрения общего принципа функториальности автоморфных форм, а также связи модулярных форм с представлениями групп Галуа расширений глобальных и локальных полей. На наш взгляд, именно эти связи мотивируют основной интерес к модулярным формам. Мы затронули при этом лишь работы последних трех-четырех лет, обращаясь к более старым работам только при необходимости; с более ранними результатами в этой области читатель может познакомиться по обзору [41], который, вместе с книгой Ленга [33], содержит обстоятельное изложение последних достижений в теории одномерных (классических) модулярных форм. Наше изложение в какой-то мере поверхностно: причиной тому является техничность и сложность основных методов современной теории автоморфных форм, полное представление о которых дают материалы летних школ по модулярным формам, проходивших в Антверпене (1972 г.) [174] и Бонне (1976 г.) [175], симпозиума по L-функциям, автоморфным формам и представлениям в Корваллисе (1977 г.) [58] и конференции по применениям автоморфных форм в теории чисел в Обервольфахе (1979 г.) [48].

Для удобства читателя мы напоминаем связь классической теории модулярных форм с теорией представлений, а также общее понятие автоморфной формы на редуктивной группе. Отметим, что хорошее изложение основ классической теории можно найти в книге Ранкина [191] (см. также ссылки в [41]), а недавно вышедшая книга А. Вейля [240] напоминает о непреходящем значении классических традиций в теории эллиптических и модулярных функций.

В последней части обзора отмечены наиболее интересные, с нашей точки зрения, достижения последних лет, относящиеся к другим разделам теории модулярных форм.

§ 1. МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ И L-ФУНКЦИИ. СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

Классические модулярные формы вводятся как функции на верхней комплексной полуплоскости $H=\{z\in\mathbf{C}\mid \operatorname{Im}(z)>0\}$. Пусть Γ — конгруэнц-подгруппа модулярной группы $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, т. е. $\Gamma\supset\Gamma_N$ для некоторого целого $N\geqslant 0$, где

$$\Gamma_N=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\,\middle|\,\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\mathrm{mod}\, N)\right\}$$

— главная конгруэнц-подгруппа уровня N. Группа $G_{\mathbf{R}}^{+}=\mathrm{GL}_2^{+}(\mathbf{R})$ матриц с положительным определителем действует на H дробно-линейными преобразованиями $z\mapsto(az+b)/(cz+d)=\sigma(z)$, $\sigma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G_{\mathbf{R}}^{+}$.

Голоморфная функция $f:H\to\mathbf{C}$ называется модулярной формой веса k относительно группы Γ, если

1) выполнено условие автоморфности

$$f((az+b)/(cz+d))(cz+d)^{-k}=f(z) \tag{1.1}$$

для элементов $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$,

2) f — регулярна в параболических вершинах $P\in\mathbf{Q}\cup i\infty$ (неподвижных точках параболических элементов группы Γ); это означает, что для любого элемента $\sigma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ функция $f((az+b)/(cz+d))(cz+d)^{-k}$ допускает разложение в ряд Фурье по неотрицательным степеням $q^{1/N}=\mathbf{e}(z/N)$ (по традиции $q=\mathbf{e}(z)=\exp(2\pi iz)$). В частности,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathbf{e}(nz/N), \tag{1.2}$$

f называется параболической формой, если f обращается в нуль в параболических точках (т. е. в ряды Фурье из 2) входят лишь положительные степени $q^{1/N}$) [33, 41, 191].

$\mathbf{C}$-линейное пространство модулярных (параболических) форм веса k относительно Γ обозначается $M_k(\Gamma)$ (соответственно $S_k(\Gamma)$).

Основное внимание в нашем обзоре уделяется исследованиям рядов Дирихле вида

$$L_f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}=\frac{(2\pi/N)^s}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}f(iy)\,y^{s-1}dy \tag{1.3}$$

преобразований Меллина f, а также их обобщений, связанных с рассмотрением многомерных автоморфных форм.

Интерес к изучению рядов вида (1.3) связан со следующими свойствами $L_f(s)$:

1) В пространстве модулярных форм $M_k(\Gamma)$ существует базис, состоящий из таких форм f, что арифметические функции вида $n\to a_n$ являются мультипликативными: $a_{nm}=a_na_m$ (при $(n, m)=1$), при этом ряд Дирихле $L_f(s)$ допускает разложение в эйлеровское произведение p-множителей, соответствующих простым числам p, а коэффициенты a_n — целые алгебраические числа.

2) Если f — модулярная форма, то ряд Дирихле $L_f(s)$, сходящийся в некоторой правой полуплоскости, допускает мероморфное продолжение на все $s\in\mathbf{C}$ и удовлетворяет некоторому функциональному уравнению, связывающему $L_f(s)$ и $L_f(k-s)$. При этом $L_f(s)$ — целая функция, если f — параболическая форма. [114, 33]

Свойства 1) и 2) установлены Гекке. В качестве иллюстрации рассмотрим пример параболической формы Рамануджана:

$$\Delta(z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{m=1}^{\infty}\tau(m)\,q^m,$$

$\Delta(z)\in S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$, ряд Дирихле $L_\Delta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,n^{-s}$ абсолютно сходится, если $\operatorname{Re}(s)>13/2$, разлагается в эйлеровское произведение

$$L_\Delta(s)=\prod_p[1-\tau(p)\,p^{-s}+p^{11-2s}]^{-1}\quad (p\text{ — простые числа}),$$

продолжается до целой функции порядка один на $\mathbf{C}$, которая удовлетворяет функциональному уравнению [33, 114]:

$$(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,L_\Delta(s)=(2\pi)^{s-12}\,\Gamma(12-s)\,L_\Delta(12-s). \tag{1.4}$$

3) Свойство ряда (1.2) быть модулярной формой характеризуется аналитическими свойствами рядов $L_f(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,a_nn^{-s}$ (χ — характеры Дирихле) [243] (в частности, их функциональными уравнениями).

Свойство 3) называют в теории рядов Дирихле, связанных с модулярными формами, обратной теоремой Гекке — Вейля, а свойство 2) — прямой теоремой. Свойства 1)—3) для рядов $L_f(s)$ и их обобщений обсуждаются в § 2.

4) Эйлеровские произведения $L_f(s)$ связаны с дзета-функциями, имеющими алгебро-геометрическое и арифметическое происхождение. Так, если $f\in S_2(\Gamma)$, то $f(z)dz$ определяет дифференциал на римановой поверхности H/Γ, которой соответствует полная алгебраическая кривая X_Γ, определенная над полем алгебраических чисел. При этом ряд Дирихле $L_f(s)$ является множителем дзета-функции Хассе — Вейля кривой X_Γ [90, 169]. Свойства делимости коэффициентов a_n связаны со структурой множества рациональных точек кривой X_Γ в конечных расширениях поля $\mathbf{Q}$ [137, 203]. Значения $L_f(s)$ для целых s (например, для $s=1$) также связаны с рациональными точками (гипотеза Бёрча — Суиннертона — Дайера [67, 171]). Значение этой связи для диофантовой геометрии иллюстрируется двумя недавними выдающимися достижениями в арифметике эллиптических кривых. Мазур [171] доказал гипотезу о равномерной ограниченности кручения эллиптических кривых над $\mathbf{Q}$. Группа кручения $E(\mathbf{Q})^{\mathrm{tors}}$ эллиптической кривой E, определенной над $\mathbf{Q}$, может быть изоморфна лишь одной из пятнадцати групп: $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ ($m\leqslant 10$, $m=12$), $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\nu\mathbf{Z}$ ($\nu\leqslant 4$); при этом все эти возможности реализуются. Коутс и Уайлс [67] доказали часть гипотезы Бёрча — Суиннертона — Дайера для эллиптических кривых E с комплексным умножением на элементы одноклассного мнимого квадратичного поля K: если группа $E(K)$ бесконечна, то дзета-функция Хассе — Вейля $L(E/K, s)$ обращается в нуль при $s=1$. Другой пример связан с представлениями группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Серр и Делинь [76] поставили в соответствие модулярным формам f веса 1 двумерные комплексные представления $\rho_f:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})\to\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, при котором эйлеровское произведение $L_f(s)$ отождествляется с L-рядом Артина представления ρ_f. Обобщения этого примера обсуждаются в § 3.

5) Все обобщения рядов $L_f(s)$, о которых упоминалось выше, связаны с переходом от модулярных форм одной переменной к модулярным формам нескольких переменных, более общо, к автоморфным формам. При этом обнаруживаются тесные связи между модулярными формами одной и нескольких переменных, которые часто записываются в виде тождеств, связывающих соответствующие L-функции.

Эти связи можно объединить в рамках общего принципа функториальности автоморфных форм, обсуждению которого посвящен § 4.

Свойства 1)—5) более естественно переформулируются на языке теории представлений [19, 61]. Впервые общая связь между теорией представлений и автоморфными формами была отмечена И. М. Гельфандом и С. В. Фоминым [20], хотя примеры использования представлений групп в теории модулярных форм встречаются еще в работах Гекке [114]. Мы напомним вкратце, как можно сформулировать классическую теорию Гекке с

помощью теории представлений. Сначала заметим, что условие автоморфности (1.1) равносильно инвариантности функции f относительно подгруппы $\Gamma\subset G_{\mathbf{R}}^+$, если действие $f\mapsto f|_k[\sigma]$ определено формулой:

$$(f|_k[\sigma])(z)=j(\sigma, z)^{-k} f(\sigma(z)),\quad \sigma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G_{\mathbf{R}}^+,$$

где $j(\sigma, z)=|\det\sigma|^{-1/2}(cz+d)$ — множитель автоморфности.

Легко проверить, что если $\sigma\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Q})$, то $f|_k[\sigma]$ — модулярная форма относительно конгруэнц-подгруппы $\sigma^{-1}\Gamma\sigma\cap\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ (возможно, другого уровня). Для $\sigma\in G_{\mathbf{Q}}^+=\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{Q})$ рассмотрим двойной смежный класс $\Gamma\sigma\Gamma=\bigcup_{i=1}^{\mu}\alpha_i\Gamma$ (при этом левые смежные классы $\alpha_i\Gamma$ не пересекаются и их конечное число).

Тогда если $f\in M_k(\Gamma)$, то линейная комбинация $\sum_{i=1}^{\mu} f|_k[\alpha_i]$ уже принадлежит $M_k(\Gamma)$, что позволяет определить операторы Гекке на $M_k(\Gamma)$ с помощью двойных смежных классов. В случае $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ для $\sigma=\begin{pmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ положим

$$T_k(p)f=p^{k/2-1}\sum_{i=1}^{\mu} f|_k[\alpha_i].$$

Согласно Гекке, существование эйлеровского разложения у $L_f(s)$ равносильно тому, что f — собственная функция всех операторов Гекке. Собственные функции строятся с помощью скалярного произведения Петерссона на $S_k(\Gamma)$:

$$(f, g)_\Gamma=\int_{H/\Gamma} f(z)\,\overline{g(z)}\,y^{k-2}dx\,dy,$$

(здесь $z=x+iy$, $y>0$, H/Γ — фундаментальная область Γ). Операторы $T_k(n)$ коммутируют между собой и являются нормальными операторами относительно введенного скалярного произведения, что позволяет найти ортогональный базис пространства $S_k(\Gamma)$, состоящий из общих собственных функций операторов $T_k(n)$ [33, 114].

Рассмотрим теперь C-линейное пространство $\Omega(f)$, натянутое на множество $\{f|_k[\sigma], \sigma\in G_{\mathbf{Q}}^+\}$. Это дает представление группы $G_{\mathbf{Q}}^+$. Доказывается, что $\Omega(f)$ (алгебраически) неприводимо в том и только в том случае, когда ряд Дирихле $L_f(s)$ имеет эйлеровское разложение (это следует из теории Гекке, так как алгебраическая неприводимость $\Omega(f)$ равносильна тому, что f — собственная функция операторов Гекке) (см. [19, 185]).

Рассмотрим пополнение $\overline{G_{\mathbf{Q}}^+}$ в топологии, базисом которой является множество конгруэнц-подгрупп. Тогда $\overline{G_{\mathbf{Q}}^+}=$

$=\left\{g\in\prod\limits_p \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)\mid \det g_p=r>0,\ r\in\mathbf{Q}\right\}$; где $g=\prod\limits_p g_p$, $\mathbf{Q}_p$ — p-адические числа (p — простые числа). $\overline{G^+_{\mathbf{Q}}}$ действует на $\Omega(f)$, так как любой элемент $\Omega(f)$ инвариантен относительно некоторой конгруэнц-подгруппы. Можно показать [19, 86], что представление π группы $\overline{G^+_{\mathbf{Q}}}$ на $\Omega(f)$ допускает разложение в тензорное произведение $\pi_f=\bigotimes\limits_p \pi_{p,f}$, где $\pi_{p,f}$ — представление группы $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, причем почти все $\pi_{p,f}$ неприводимы.

Вместо группы $\overline{G^+_{\mathbf{Q}}}$ удобнее рассматривать адельную группу

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})=\Big\{g=g_\infty\prod_p g_p\mid g_\infty\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}),\quad g_p\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p),$$

$$\text{при этом } g_p\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p) \text{ для почти всех } p\Big\},$$

а вместо функций f на H — функции $\tilde f$ на группе $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$:

$$\tilde f(g)=\begin{cases} f(g(i))\,j(g,i)^{-k}, & \text{если } \det g>0,\\ f(g(-i))\,j(g,-i)^{-k}, & \text{если } \det g<0,\end{cases}$$

где $g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

При этом если $f\in M_k(\Gamma)$, то

$$\tilde f(\gamma g)=\tilde f(g),\ \text{если } \gamma\in\Gamma,$$

$$\tilde f(xg)=e^{-ik\theta(x)}\tilde f(g),\ \text{если } x \text{ — вращение на угол } \theta(x).$$

Откуда следует, что функцию $\tilde f$ можно рассматривать так же, как функцию на однородном пространстве

$$\Gamma(N)\diagdown\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})=\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})\diagdown\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})/U^{(N)},$$

(где $U^{(N)}=\left\{g=1\cdot\prod\limits_p g_p\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}),\ g_p\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p);\ g_p\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(\mathrm{mod}\,N\mathbf{Z}_p)\right.$ для $\left.p\mid N\right\}$), или как функцию на адельной группе $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$; при этом действии элементов $G^+_{\mathbf{Q}}$ на f переходит в действие на $\tilde f$ левыми сдвигами:

$$(\tilde f|_k[\sigma])(g)=\tilde f(\sigma g).$$

Модулярные формы f веса k относительно группы

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\mid c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)\right\}$$

с характером Дирихле $\psi\,(\mathrm{mod}\,N)$, т. е. формы f уровня N, удовлетворяющие условию

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\psi(d)(cz+d)^k f(z),\quad \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N),$$

переходят в функции $\tilde f$ такие, что

$$\tilde f(zg)=\tilde\psi(z)\tilde f(g),$$

где $z\in Z_{\mathbf{A}}\cong\mathbf{A}^*$ (центр $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$, $\tilde\psi$ — характер группы классов аделей $\tilde\psi:\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*\to\mathbf{C}^*$, продолжающий ψ. При этом мы используем обозначение $f\in M_k(N,\psi)$ (или f — типа (N,k,ψ)).

Для $f\in M_k(N,\psi)$ рассмотрим $\mathbf{C}$-линейное пространство $\Omega(\tilde f)$ функций на $\mathrm{GL}_2(\mathrm{Q})\diagdown\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$, порожденное левыми сдвигами $\tilde f$ с помощью $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$. Представление $\pi_{\tilde f}$ группы $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ на $\Omega(\tilde f)$ неприводимо, если π_f неприводимо и $\pi_f\cong\pi_\infty\otimes(\bigotimes\limits_p\pi_{p,\tilde f})$, где π_∞ — представление $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$, а представление $\pi_{p,\tilde f}$ эквивалентно представлению $\pi_{p,f}$. $\Omega(\tilde f)$ можно рассматривать как подпредставление регулярного представления $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ в непрерывных функциях на $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ (такие представления называются автоморфными). При этом, если f — параболична, то $\Omega(\tilde f)\subset L^2_0(\tilde\psi)$, где $L^2_0(\psi)$ — пространство измеримых функций h на $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$, квадратично-интегрируемых на $Z_{\mathbf{A}}\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})\diagdown\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ относительно меры Хаара на $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$, удовлетворяющих условию параболичности:

$$\int\limits_{U_{\mathbf{Q}}\diagdown U_{\mathbf{A}}} h(ug)\,du=0$$

для любой подгруппы $U_{\mathbf{A}}$, сопряженной с

$$N_{\mathbf{A}}=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, x\in A\right\} \text{ над } \mathbf{Q} \text{ (для почти всех } g).$$

Операторы Гекке действуют на элементы $\Omega(\tilde f)$ как операторы интегральной свертки с функциями из алгебры Гекке $\mathscr{H}_{\mathbf{A}}$ ($\mathscr{H}_{\mathbf{A}}$ есть алгебра относительно свертки непрерывных комплексных функций на $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ с компактным носителем, двусторонне инвариантных относительно максимальной компактной подгруппы $K\subset\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$. Вместо представления группы $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ можно поэтому рассматривать соответствующее представление алгебры Гекке $\mathscr{H}_{\mathbf{A}}$ [60—62].

Жаке и Ленглендс [123] в качестве исходного пункта для построения L-функций избрали неприводимые допустимые представления групп $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Допустимость означает, что векторы пространства представления K_p — конечны (где $K_p=\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$), т. е. все элементы пространства представления, полученные из фиксированного вектора применением элементов максимальной компактной подгруппы K_p, лежат в конечномерном векторном пространстве [61]. Каждому такому представлению π_p отвечает некоторый диагональный элемент $h_p=\begin{pmatrix}\alpha_p & 0\\ 0 & \beta_p\end{pmatrix}$ в группе $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ [61]. В частном случае, когда $\pi_p\cong\mathrm{Ind}\,(\mu_1\otimes\mu_2)$ — представление, индуцированное с одномерного представления подгруппы диагональных матриц: $\mu_1 \otimes \mu_2 \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \mu_1(x)\mu_2(y)$, где μ_1, $\mu_2 : \mathbf{Q}_p^* \to \mathbf{C}^*$ — неразветвленные характеры $\mathbf{Q}_p^*$, элемент h_p равен $\begin{pmatrix} \mu_1(p) & 0 \\ 0 & \mu_2(p) \end{pmatrix}$. Если $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_p$ — неприводимое допустимое представление $GL_2(\mathbf{A})$, то L-функция $L(s, \pi)$ вводится как эйлеровское произведение $L(s, \pi) = \prod_p L_p(s, \pi_p)$, где $L_p(s, \pi_p) = \det(I - h_p p^{-s})^{-1} = [(1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \beta_p) p^{-s}]^{-1}$ (в этом определении мы для простоты опустили Γ — множитель, соответствующий $L_\infty(s, \pi_\infty)$.

Если $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_k(N, \psi)$ — собственная функция операторов Гекке, $a_1 = 1$, то представлению $\pi_{p,f}$ отвечает p-множитель

$$L_p(s, \pi_{p,f}) = [1 - a_p p^{-s-(k-1)/2} + \psi(p) p^{-2s}]^{-1}$$

и $L_f(s) = L(s + (k-1)/2, \pi_f)$. При этом $h_p \in SL_2(\mathbf{C})$, если характер ψ тривиален. Вообще, если элементы центра $Z_\mathbf{A}$ действуют тривиально в некотором представлении π, то $h_p \in SL_2(\mathbf{C})$; в этом случае π можно рассматривать как представление группы $PGL_2(\mathbf{A})$. Для неприводимых допустимых автоморфных представлений π Жаке и Ленглендса построили аналитическое продолжение функций $L(s, \pi)$ и получим для них функциональное уравнение вида:

$$L(s, \pi) = \varepsilon(s) L(1 - s, \tilde{\pi}), \tag{1.5}$$

где $\tilde{\pi}$ — представление, контраградиентное π, а ε — множитель $\varepsilon(s) = \prod_p \varepsilon_p(s)$ играет роль константы функционального уравнения [238]. Для функций $L(s, \pi_f)$ такое функциональное уравнение переходит в функциональное уравнение Гекке (типа (1.4)).

Интересные классы эйлеровских произведений связаны с конечномерными представлениями r группы $GL_2(\mathbf{C})$:

$$L(s, \pi, r) = \prod_p L_p(\pi_p, s, r), \tag{1.6}$$

где $L_p(s, \pi_p, r) = \det\ (I - r(h_p) p^{-s})^{-1}$. Произведения вида (1.6) абсолютно сходятся, если $\mathrm{Re}(s)$ достаточно велика.

Гипотетически [150] такие L-функции допускают аналитическое продолжение и удовлетворяют некоторому функциональному уравнению. Эта гипотеза доказана лишь в немногих частных случаях:

1) $r = \mathrm{Sym}^i(\mathrm{St})$ $(i = 2, 3, 4)$ (симметрические степени стандартного представления $\mathrm{St} : GL_2(\mathbf{C}) \to GL_2(\mathbf{C})$). Представление $r = \mathrm{Sym}^2(\mathrm{St})$ изоморфно присоединенному представлению; этот случай разобран Гельбартом и Жаке [93]. Если $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_k(N, \psi)$ — собственная функция операторов Гекке, $a_1 = 1$, то $L(s, \pi_f, r)$ совпадает с симметрическим квадратом ряда Гекке $L(s, \pi_f) = L_f(s + (k-1)/2)$, причем

$$L(s, \psi) L(s, \pi_f, r) = L(2s, \psi^2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^{-s(k-1)/2}, \tag{1.4}$$

где $L(s, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) n^{-s}$ — L-ряд Дирихле. Случаи $r = \mathrm{Sym}^3\,\mathrm{St}$, $\mathrm{Sym}^4\,\mathrm{St}$ разобраны в [89].

В этом примере L-функция $L(s, \pi_f, \mathrm{Sym}^2 r)$ получает содержательную интерпретацию как преобразования Меллина некоторой автоморфной формы на группе $GL_3(\mathbf{A})$ (см. §§ 2, 4).

Обсуждение аналитических свойств $L(s, \pi_f, \mathrm{Sym}^n r)$ и их связи с гипотезой Сато — Тэйта о равномерности распределения аргументов собственных значений h_p см. в обзоре О. М. Фоменко [41]. Мы приведем только результат Курокава: если $f \in S_1(N, \varepsilon)$ и $m \geqslant 3$, то ряды Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^m n^{-s}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n^m} n^{-s}$ могут быть мероморфно продолжены на $\{s \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$, при этом прямая $\mathrm{Re}(s) = 0$ является естественной границей мероморфности [147] (ср. с формулой (1.7)!).

2) Шахиди [205] исследовал аналитические свойства $L(s, \pi, r)$ в случае, когда π — параболическое представление $PGL_2(\mathbf{A})$, r — неприводимое четырехмерное представление группы $SL_2(\mathbf{C})$.

Отметим, что аналогичные конструкции можно провести в большей общности, заменив поле $\mathbf{Q}$ на произвольное глобальное поле F. При этом если F — вполне вещественно, то автоморфные представления $GL_2(\mathbf{A}_F)$ (где $\mathbf{A}_F$ — кольцо аделей поля F) соответствуют модулярным формам Гильберта [35, 194].

Теория Гекке также допускает обобщения на этот более общий случай.

1) Теорема о существовании базиса собственных функций операторов Гекке в пространстве параболических форм переформулируется теперь как теорема Гельфанда — Хардера [19, 107] о том, что пространство $L_0^2(\omega)$ (точное определение см. в § 2), где ω — характер Гекке (гомоморфизм $\omega : \mathbf{A}_F^*/F^* \to \mathbf{C}^*$), является счетной суммой неприводимых допустимых представлений $GL_2(\mathbf{A}_E)$, причем каждое из них встречается с конечной кратностью. Эта теорема справедлива в гораздо большей общности (для связных редуктивных алгебраических групп над глобальным полем F).

2) П р я м а я т е о р е м а [123]: L-функция $L(s, \pi)$ автоморфного представления допускает мероморфное продолжение на $s \in \mathbf{C}$ и удовлетворяет функциональному уравнению (типа (6)).

3) Обратная теорема [123, 238]: представление π является автоморфным, если все функции вида $L(s, \pi\otimes\chi)$ допускают мероморфное продолжение на $s\in\mathbf{C}$, удовлетворяют функциональному уравнению и аналитическим свойствам заданного типа; здесь χ — характер Гекке.

Другая формулировка обратной теоремы предложена Ли [158]. В случае $F=\mathbf{Q}$, интересное уточнение обратной теоремы получил Разар [195].

Теория Аткина — Ленера [33, 41] интерпретируется как теорема об однократности [186]: кратность неприводимых допустимых представлений алгебры Гекке в $L_0^2(\psi)$ не превосходит 1. Больше того, справедлива сильная теорема об однократности: автоморфное представление π, входящее в $L_0^2(\psi)$ (параболическое представление), однозначно определяется заданием почти всех локальных множителей π_v [186].

Классическая гипотеза Рамануджана — Петерссона о том, что для собственной функции операторов Гекке $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n q^n\in S_k(N, \psi)$, $a_1=1$ справедлива оценка $|a_p|<2p^{(k-1)/2}$, может быть переформулирована в общем случае как утверждение о том, что собственные значения элементов $h_v\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, соответствующих компонентам π_v параболического представления $\pi=\otimes_v\pi_v$ (v пробегает нормирования поля F), по абсолютной величине равны 1. В. Г. Дринфельд [24] доказал обобщенную гипотезу для параболических форм на $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_F)$ над глобальными полями положительной характеристики. Ранее Делинь доказал эту гипотезу для $F=\mathbf{Q}$ [71].

§ 2. АВТОМОРФНЫЕ ФОРМЫ И L-ФУНКЦИИ. СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

Рассмотрим более общий случай линейной редуктивной группы G над глобальным полем E. $G_\mathbf{A}$ будем обозначать локально-компактную группу точек G в кольце $\mathbf{A}=\mathbf{A}_F$ аделей поля F, G_F — дискретную подгруппу F-рациональных точек G, K — максимальную компактную подгруппу $G_\mathbf{A}$, $Z_\mathbf{A}$ — адельные точки центра G (см. [19, 60, 62]).

Автоморфная форма f на G вводится как непрерывная функция $f:G_\mathbf{A}\to\mathbf{C}$, удовлетворяющая условиям:

а) f инвариантна относительно правых сдвигов на элементы из G_F;

б) f — K-конечна;

в) существует характер Гекке $\psi:\mathbf{A}_F^*/F^*\to\mathbf{C}^*$ такой, что

$$f(zg)=\psi(z)f(g)$$

($z\in Z_\mathbf{A}$, $g\in G_\mathbf{A}$) в случае, когда $Z_\mathbf{A}\cong\mathbf{A}^*$;

г) функция $x\mapsto f(x\cdot y)$ на группе $G_\infty=G(F\otimes\mathbf{R})$ архимедовых точек G (т. е. точек в $F\otimes\mathbf{R}$) аннулируется некоторым идеалом конечной коразмерности в алгебре биинвариантных дифференциальных операторов на G_∞ (такая функция автоматически является вещественно-аналитической, поскольку аннулируется эллиптическим дифференциальным оператором);

д) f удовлетворяет некоторым условиям убывания;

*) форма f называется параболической, если

$$\int_{U_\mathbf{A}/U_E} f(ux)\,dx=0,$$

где U обозначает унипотентный радикал любой параболической F-подгруппы в G (см. [60, 62]).

Автоморфные представления $G_\mathbf{A}$ (или алгебры Гекке $\mathscr{H}_\mathbf{A}$) определяются как представления, лежащие в регулярном представлении $G_\mathbf{A}$. При этом параболические формы f лежат в пространстве $L_0^2(\psi)$, состоящем из измеримых функций h на $G_\mathbf{A}/G_F$, удовлетворяющих условию в) таких, что $x\mapsto h(x)|\psi(\det x^{-1})|^{1/2}$ интегрируема с квадратом на $G_\mathbf{A}/Z_\mathbf{A}G_F$, и удовлетворяющих условию параболичности (для почти всех x).

Параболические представления G_A определяются как подпредставления $L_0{}^2(\psi)$ (см. [60]).

Символом $\mathfrak{A}(G/F)$ обозначим множество классов эквивалентности неприводимых допустимых автоморфных представлений $G_\mathbf{A}$. Ленглендс показал [153], что каждое $\pi\in\mathfrak{A}(G/F)$ является компонентой представления, индуцированного с некоторого параболического $\sigma\in\mathfrak{A}(M/F)$, где M есть F-подгруппа Леви параболической F-подгруппы bG.

L-функции неприводимых допустимых представлений группы $G_\mathbf{A}$ вводятся с помощью разложений $\pi=\otimes_v\pi_v$, где v пробегает множество нормирований поля F, π_v — представление группы $G(F_v)$ (точек в v-пополнении) (или представление локальной алгебры Гекке $\mathscr{H}_v$) (см. [19, 86]). При этом почти всем π_v (кроме конечного множества нормирований $v\in S$) можно сопоставить класс сопряженности полупростого элемента h_v в группе Ленглендса ${}^LG$ (${}^LG$ есть некоторая редуктивная линейная группа над $\mathbf{C}$; для $G=\mathrm{GL}_n$ элемент $h_v\in\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$; при этом группа $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ совпадает со связной компонентой группы Ленглендса ${}^LG$). L-функции представлений π вводятся как эйлеровские произведения вида:

$$L(s, \pi)=\prod_{v\notin S}L(s, \chi_v), \quad L(s, \chi_v)=\det(I-\mathbf{N}v^{-s}h_v)^{-1}$$

(здесь $\mathbf{N}_v$ — число элементов поля вычетов для нормирования v). Более общо, для конечномерных представлений r группы ${}^LG$ определяются

$$L(s, \pi, r)=\prod_{v\notin S}L(s, \chi_v, r), \quad L(s, \chi_v, r)=\det(I-\mathbf{N}v^{-s}r(h_v))^{-1}.$$

Оба произведения абсолютно сходятся при достаточно большом $\mathrm{Re}(s)$, если π — автоморфное представление (см. [150] для параболических π, [60] в общем случае).

В общем случае двойственная группа Ленглендса ${}^LG$ редуктивной алгебраической группы G строится с помощью корневых данных [221, 60]:

$$\psi_0(G)=(X^*(T),\ \Delta,\ X_*(T),\ \Delta^\vee)$$

группы G; здесь T — максимальный тор G (над сепарабельным замыканием F^s основного поля F), $X^*(T)\,(X_*(T))$ — группа характеров (соответственно, однопараметрических подгрупп) тора T, $\Delta(\Delta^\vee)$ — базис системы корней $\Phi(G, T)$ относительно тора T (соответственно, двойственный базис кокорней). Связная компонента ${}^LG^0$ группы Ленглендса определяется как редуктивная группа над $\mathbf{C}$, корневые данные которой получаются обращением $\psi_0\mapsto\psi_0^\vee$, т. е. изоморфны набору данных вида:

$$\psi_0(G)^\vee=(X_*(T),\ \Delta^\vee,\ X^*(T),\ \Delta).$$

Если G — простая, то с точностью до центральной изогении G характеризуется одним из типов A_n, B_n, $\ldots$, G_2 классификации Киллинга — Картана. Известно, что отображение $\psi_0(G)$ $\psi_0(G)\vee$ переставляет типы B_n и C_n, а остальные типы оставляет на месте. Таким образом, если $G=\mathrm{Sp}_{2n}$ (соответственно, GSp_{2n}), то ${}^LG^0=\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbf{C})$ (соответственно, ${}^LG^0=\mathrm{Spin}_{2n+1}(\mathbf{C})$). Группа ${}^LG$ определяется как полупрямое произведение ${}^LG^0$ на группу Галуа некоторого расширения поля F, над которым G расщепляется, т. е. тор T становится изоморфным $(\mathrm{GL}_1)^r$. Такое полупрямое произведение вводится с помощью действия группы Галуа $\Gamma_F=\mathrm{Gal}(F^s/F)$ на группе ${}^LG^0$, которое определяется с помощью действия Γ_F на множестве максимальных торов, определенных над F^s [60].

Группу ${}^0G^L$ можно рассматривать и над другими полями, в том числе над глобальными и локальными.

Конструкция классов h_v для многих редуктивных групп содержится в [60] и основана на детальном изучении представлений редуктивных групп над локальными полями. Мы не будем останавливаться на этом, отсылая читателя к обзору Картье [64].

Имеется несколько гипотез об аналитических свойствах $L(s, \pi, r)$, проверенных в некоторых частных случаях.

(А) Если $\pi\in\mathfrak{A}(G/F)$, то $L(s, \pi, r)$ допускает мероморфное продолжение на $s\in\mathbf{C}$.

(Б) Можно определить локальные L- и ε-множители во всех точках так, что выполнено функциональное уравнение:

$$L(s, \pi, r)=\varepsilon(s, \pi, r)\,L(1-s, \tilde{\pi}, r),$$

где $\tilde{\pi}$ — представление, контраградиентное к π [60, 228].

(В) В некотором числе случаев доказано:

(*) если π — параболическое, r — неприводимое и нетривиальное, то $L(s, \pi, r)$ — целая функция.

Свойство (*) выполнено не всегда. Гипотетически, (*) нарушается только тогда, когда π «поднято» с параболического представления редуктивной группы H (поднятие автоморфных форм будет обсуждаться в § 4) и ограничение r на образ ${}^LH$ в ${}^LG$ содержит тривиальное представление.

В случае $G=\mathrm{GL}_n$, $r=r_n$ — стандартное представление $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, свойства Б) и В) установлены в [123] для $n=2$ и в [101] для $n>2$. Недавно показано [223], что аналогичные результаты справедливы для L-функций автоморфных представлений, необязательно являющихся параболическими.

Недавно на случай $G=\mathrm{GL}_n$ над глобальным полем была перенесена теорема об однократности [186], которая тесно связана с теорией о необращении в нуль: $L(s, \pi, r_n)\neq 0$, если $\mathrm{Re}(s)=1$ и π — параболическое представление $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ (Жаке и Шалайка, [126]). Отметим, что для $n=1$, $F=\mathbf{Q}$ это классическая теорема Дирихле. Для $n=2$ теорема была установлена Ранкином в случае, когда $F=\mathbf{Q}$ и π соответствует параболической форме Рамануджана (см. в [41]).

Для $n=3$ доказана обратная теорема [124]: если все L-функции вида $L(s, \pi\otimes\chi, r_n)$ (где χ — характер Гекке, π — неприводимое допустимое представление) голоморфно продолжаются на $s\in C$, то представление π реализуется в параболических формах. Отмечено, что при $n\geqslant 4$ аналогичный результат уже не имеет места: гипотетически для реализуемости π в параболических формах надо требовать голоморфность всех L-функций вида $L(s, \pi\otimes\sigma)$, где σ — любое параболическое представление $\mathrm{GL}_j(\mathbf{A})$, $1\geqslant j—r+2$.

Как и в случае $n=2$, доказательство существенно зависит от того факта, что функция $L(s, \pi)$ допускает интегральное представление с помощью некоторой функции на $\mathrm{GL}_3(\mathbf{A})$, которая оказывается параболической формой (аналог преобразования Меллина). Конструкция основана на теории моделей Уиттекера для локальных и глобальных представлений.

Жаке [121] установил свойства, аналогичные А)—В), для автоморфных представлений группы $G=\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_2$ и $r=r_2\otimes r_2$. В частности, определены локальные множители $L(s, \pi_1\otimes\pi_2, r)$ и $\varepsilon(s, \pi_1\otimes\pi_2, r)$, где $\pi_i\,(i=1, 2)$ — два неприводимых допустимых бесконечномерных представления $\mathrm{GL}_2(F)$, F — неархимедово локальное поле. Однако явно такие множители были найдены лишь для некоторых пар представлений. Результаты Жаке уточнила Ли [159, 160], которая явно вычислила множители через суммы вида:

$$\sum_{f(\chi)=m}\varepsilon\left(\frac{s+1}{2},\ \pi_1\otimes\chi,\ r_2\right)\varepsilon\left(\frac{s+1}{2},\ \pi_2\otimes\chi^{-1},\ r_2\right), \qquad (2.1)$$

где $\mathfrak{f}(\chi)$ обозначает экспоненциальный кондуктор характера Дирихле $\chi: F^* \to \mathbf{C}^*$ (целое число). Такие суммы оказались тесно связанными с интересным понятием n-близости неприводимых суперкуспидальных представлений π_i ($i=1,\ 2$). Пусть ω_i — центральные квазихарактеры представлений π_i, полученные из ограничения π_i на центр $\mathrm{GL}_2(F)$. Известно, что π_1 изоморфно π_2 [123] в том и только в том случае, когда: 1) $\omega_1=\omega_2$ и 2) $\varepsilon(s, \pi_1\otimes\chi) = \varepsilon(s, \pi_2\otimes\chi)$ для всех квазихарактеров χ; при этом если π_1 и π_2 изоморфны, то они имеют одинаковые кондукторы $\mathfrak{f}(\pi_2)=\mathfrak{f}(\pi_2)$. В случае, когда $\mathfrak{f}(\pi_1)=\mathfrak{f}(\pi_2)$, вводится более тонкое понятие n-близости, причем π_1 и π_2 — ∞-близки тогда и только тогда, когда π_1 изоморфно π_2 [160].

По определению, π_1 n-близко к π_2, если $\mathfrak{f}(\pi_1)=\mathfrak{f}(\pi_2)$ и n есть наибольшее целое m такое, что

$$\varepsilon(s,\pi_1)\,\varepsilon(s,\pi_2\otimes\chi)=\varepsilon(s,\pi_2)\,\varepsilon(s,\pi_1\otimes\chi)$$

для всех характеров $\chi: F^*\to\mathbf{C}^*$ с кондуктором $\mathfrak{f}(\chi)\leqslant m$. Дан критерий n-близости двух представлений π_1 и π_2 в терминах сумм вида (2.1); в интересных случаях такие суммы вычислены явно. Результаты применяются [159] для явного вычисления констант и локальных множителей функционального уравнения свертки двух L-рядов, связанных с примитивными параболическими формами (параболическими представлениями GL_2 над $\mathbf{Q}$).

Пусть $f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_1(n)\,q^n$, $f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_2(n)\,q^n$ — две параболические формы весов k_1, k_2 относительно групп $\Gamma_0(N_1)$, $\Gamma_0(N_2)$ с характерами Дирихле $\nu_1 \bmod N_1$, $\nu_2 \bmod N_2$, соответственно. Ряд Дирихле

$$L_{f_1,f_2}(s)=L(2s,\ \varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty} a_1(n)\,\overline{a_2(n)}\,n^{-\left(s+\frac{k_1+k_2}{2}-1\right)} \qquad (2.2)$$

$$\left(\text{где } L(s,\ \varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(n)\,n^{-s},\ \varepsilon=\nu_1\bar{\nu}_2 \bmod N,\ N=\text{Н. О. К. }(N_1,\ N_2)\right)$$

называется сверткой L-рядов, связанных с f_1 и f_2. Ряды Lf_1, $f_2(s)$ впервые рассматривались Ранкином, который построил аналитическое продолжение таких рядов и получил для них функциональное уравнение в частном случае $N=1$. В общем случае Ли [159] установила функциональное уравнение, связывающее $L_{f_1,f_2}(s)$ и $L_{\bar{f}_1,\bar{f}_2}(1-s)$, где

$$\bar{f}_i(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_i(n)}\,\mathbf{e}(nz).$$

Константы и локальные множители такого функционального уравнения вычислены совершенно явно и связаны с действием инволюций Аткина — Ленера [57] (W-операторов) на модулярных формах относительно группы $\Gamma_0(N)$. W-операторы отвечают

каждому простому делителю $q|N$ и переводят примитивную нормализованную форму f уровня N в другую нормализованную форму такого же типа, умноженную на некоторое число $\lambda_q(f)$ («псевдособственное» значение W-оператора на f). Константы функционального уравнения ряда (2.2) вычислены [159] в терминах произведений чисел вида $\lambda_q(f_i)$; в свою очередь, $\lambda_q(f_i)$ выписаны в [57] через гауссовы суммы. В частных случаях такое функциональное уравнение было получено ранее [36, 41].

В гораздо более общем случае $G=\mathrm{GL}_m\times\mathrm{GL}_n$, $r=r_m\otimes r_n$ над функциональным полем F можно определить [122] локальные L- и ε-множители. Предположительно (*Jacquet dixit*, [60]) при этом выполнены свойства А) и Б), а также голоморфность (исключая случай, когда $m=n$, $\pi=\pi_1\otimes\pi_2$ и π_1 контраградиентно к π_2; здесь π_i — автоморфные представления GL_m).

Интересные классы L-функций, связанных с симплектическими группами, были введены и изучены А. Н. Андриановым [1—6, 47]. В этом случае $G=\mathrm{GSp}_{2n}=\{g\in\mathrm{GL}_{2n}\,|\,g^tJ_ng=r(g)J_n\}$, где $r(g)\in\mathrm{GL}_1$,

$$J_n=\begin{pmatrix}0 & -E_n\\ E_n & 0\end{pmatrix}$$

E_n — единичная матрица размера $n\times n$. Двойственная группа Ленглендса ${}^LG^0$ в этом случае совпадает с универсальным накрытием $\mathrm{Spin}_{2n+1}(\mathbf{C})$ ортогональной группы $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbf{C})$. Мы будем использовать стандартное представление ортогональной группы

$$\mathrm{St}_{2n+1}:\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbf{C})\hookrightarrow\mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbf{C}),$$

где $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbf{C})=\{g\in\mathrm{SL}_{2n+1}(\mathbf{C})\,|\,g^tG_ng=G_n\}$,

$$G_n=\begin{pmatrix}0 & E_n & 0\\ & & \vdots\\ E_n & 0 & 0\\ 0\ldots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Если π — неприводимое допустимое представление группы G над глобальным полем F, $\pi=\otimes_v\pi_v$, то для почти всех v представлению π_v отвечает класс сопряженности полупростого элемента h_v в $\mathrm{Spin}_{2n+1}(\mathbf{C})$, образ которого в $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbf{C})$ есть диагональная матрица

$$\mathrm{diag}\,\{\alpha_{1,v},\dots,\alpha_{n,v},\ \alpha_{1,v}^{-1},\dots,\alpha_{n,v}^{-1},\ 1\}\in\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbf{C}).$$

Сам элемент h_v в спинорном представлении ρ_n размерности 2^n группы $\mathrm{Spin}_{2n+1}(\mathbf{C})$ (или группы $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbf{C})$) записывается диагональной матрицей вида:

$$\mathrm{diag}\,\{\beta_{0,v},\ \beta_{0,v}\alpha_{1,v},\dots,\ \beta_{0,v}\alpha_{i_1,v}\alpha_{i_2,v}\dots\alpha_{i_r,v},\dots\},$$

здесь для каждого $r\leqslant n$ рассматриваются всевозможные произведения вида $\beta_{0,v}\alpha_{i_1,v}\alpha_{i_2,v}\dots\alpha_{i_r,v}$, $1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_r\leqslant n$, а число $\beta_{0,v}$ с точностью до знака нормировано условием:

$$\beta_{0,v}^2\alpha_{1,v}\dots\alpha_{n,v}=1.$$

При этом $|\det h_v|=1$.

Элемент h_v определен однозначно с точностью до действия группы Г. Вейля W_n, порожденной перестановками координат $\alpha_{1,v},\ldots,\alpha_{n,v}$ и отображениями

$$\beta_{0,v}\mapsto\beta_{0,v}\alpha_{i,v},\quad \alpha_{i,v}\mapsto\alpha_{i,v}^{-1},\quad \alpha_{j,v}\mapsto\alpha_{j,v}\quad (j\neq 0,\ i;\ i=1,\ldots,n).$$

Для автоморфных L-функций вида $L(s,\pi_f,r)$, где π_f — автоморфное представление группы G над полем $\mathbf{Q}$, связанное с параболической формой Зигеля относительно $\Gamma_n=\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{Z})$, $r=\rho_n$, $n=2$, А. Н. Андрианов [4] установил свойства А)—Б) и исследовал, для каких параболических форм f выполнено свойство голоморфности В). С. А. Евдокимов [26] и И. Мацуда [170] распространили эти результаты на случай конгруэнцподгрупп Γ_n. Отметим, что для $n=1$ $\mathrm{GSp}_2=\mathrm{GL}_2$, $\mathrm{Spin}_3(\mathbf{C})=\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, $\rho_1=r_2$ (стандартное представление), а L-функции $L(s,\pi,r_2)$ исследованы Жаке и Ленглендсом [123].

Общий случай (для $n=2$) разобран в [180], где исследованы L-функции, отвечающие неприводимым допустимым представлениям групп $G=\mathrm{GSp}_4$ и $G=\mathrm{GSp}_4\times\mathrm{GL}_2$ над глобальным полем F, и представлениям L-групп ${}^LG$ вида: $r=\rho_2$, $r=\rho_2\times\rho_2$ (напомним, что r_2 — стандартное представление GL_2). Для случая функционального поля F в [180] установлены свойства А) и Б), а для числовых полей F доказана только часть, относящаяся к аналитическому продолжению. Отметим, что при $n\geqslant 3$ аналитические свойства функций $L(s,\pi,\rho_2)$ пока не исследованы.

А. Н. Андрианов и В. Л. Калинин [5, 47] изучили аналитические свойства стандартных дзета-функций зигелевых модулярных форм, которые имеют вид $L(s,\pi_f,\mathrm{St}_{2n+1})$, где π_f — автоморфное представление G над $\mathbf{Q}$, связанное с модулярной формой Зигеля f рода n относительно конгруэнц-подгруппы

$$\Gamma_0^n(q)=\left\{\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{Z})\,\middle|\,C\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,q)\right\}.$$

Отметим, что в случае $n=1$ L-функции вида $L(s,\pi_f,\mathrm{St}_3)$ совпадают с симметрическими квадратами рядов Гекке; голоморфность таких L-функций исследована Симурой [41] (см. также [38]). В работе [5] построено мероморфное продолжение функции $L(s,\pi_f,\mathrm{St}_{2n+1})$ для любого четного n; в частном случае $q=1$ при некоторых дополнительных ограничениях доказано, что эти L-функции голоморфны, если исключить конечное число полюсов, и удовлетворяют функциональному уравнению типа Б). Случай $n=2$ ранее был разобран А. Н. Андриановым [47] и В. А. Гриценко [23].

Ортогональные группы квадратичных форм от нечетного числа переменных двойственны по Ленглендсу [60, 150] симплектическим: если $G=\mathrm{SO}_{2n+1}$, то двойственная группа ${}^LG^0$ есть $\mathrm{Sp}_{2n+1}(\mathbf{C})$ (для $n=2$, однако, группы $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{C})$ и $\mathrm{SO}_5(\mathbf{C})$ локально изоморфны: $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{C})\cong\mathrm{Spin}_5(\mathbf{C})$).

L-функции, связанные с неприводимыми допустимыми представлениями ортогональных групп вида $G=\mathrm{SO}_{2n+1}$, изучены в

случае, когда основное поле F есть (глобальное) функциональное поле (см. [181]), а r — стандартное представление симплектической группы ${}^LG=\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C})$. При этом установлены свойства А)—В).

Остановимся подробнее на случае L-функций, связанных с модулярными формами Зигеля. Напомним, что модулярные формы Зигеля рода n вводятся как голоморфные функции $f:H_n\to\mathbf{C}$ на верхней полуплоскости Зигеля рода $n\geqslant 1$ [4]:

$$H_n=\{Z=X+iY\in M_n(\mathbf{C}),\ {}^tZ=Z,\ Y \text{ положительно определена}\}$$

такие, что:

1) для каждого элемента $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}_{2n}(Z)$

$$\det(CZ+D)^{-k}f(M\langle Z\rangle)=f(Z),\quad Z\in H_n,$$

где $M\langle Z\rangle=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ есть аналитический автоморфизм H_n; k называется весом f;

2) $f(Z)$ ограничена в каждой области вида

$$\{Z=X+iY\in H_n,\ Y\geqslant cE_n,\ c>0\}.$$

Символ M_k^n будет обозначать комплексное пространство модулярных форм Зигеля рода n веса k относительно $\Gamma_n=\mathrm{Sp}_{2n}(Z)$. Аналогичные определения вводятся для конгруэнц-подгрупп $\Gamma\subset\Gamma_n$.

Каждая модулярная форма $f\in M_k^n$ имеет разложение Фурье вида:

$$f(Z)=\sum_{N\in\mathfrak{N}_n\ N\geqslant 0}a(N)\,\mathbf{e}(\mathrm{Tr}\,(NZ)),$$

где $\mathrm{Tr}\,(NZ)$ — след матрицы NZ,

$$\mathfrak{N}_n=\{N=(n_{ij})\in M_n(\mathbf{Q}),\ {}^tN=N,\ n_{ij},\ 2n_{ij}\in\mathbf{Z}\}$$

— множество симметрических полуцелых матриц порядка n.

Параболические формы вводятся как $f\in M_k^n$ такие, что $a(N)=0$, если $\det N=0$, и образуют линейное пространство S_k^n.

Поскольку H_n есть однородное пространство группы $\mathrm{Sp}_n(\mathbf{R})$, образ меры Хаара на $\mathrm{Sp}_n(\mathbf{R})$ при отображении $\mathrm{Sp}_n(\mathbf{R})\to H_n$ определяет единственный, с точностью до постоянного множителя элемент объема, инвариантный относительно $\mathrm{Sp}_n(\mathbf{R})$:

$$\tilde{d}Z=(\det Y)^{-(n+1)}\prod_{\alpha\leqslant\beta}dx_{\alpha\beta}\prod_{\alpha\leqslant\beta}dy_{\alpha\beta}\ \ (Z=X+iY).$$

Для каждой пары модулярных форм f, $f_1\in M_k^n$ мера на H_n

$$f(Z)\,f_1(Z)\,(\det Y)^k\,\tilde{d}Z$$

инвариантна; при этом интеграл

$$(f, f_1)=\int_{D_n} f(Z)\overline{f_1(Z)}(\det Y)^k\, d\tilde{Z} \tag{2.3}$$

(где D_n — некоторая фундаментальная область группы Γ_n) абсолютно сходится, если хотя бы одна из форм f, f_1 — параболическая, не зависит от выбора фундаментальной области и определяет невырожденное эрмитово спаривание. Ортогональное дополнение E_k^n к S_k^n в M_k^n называется пространством рядов Эйзенштейна рода n веса k (см. [4, 29]): $M_k^n=S_k^n\oplus E_k^n$.

L-функции вводятся с помощью операторов Гекке; такие операторы отвечают двойным смежным классам вида $\Gamma_n g\Gamma_n$, где

$$g\in S^{(n)}=\{g\in M_{2n}(\mathbf{Z})\,|\,{}^t gJ_n g=r(g)\,J_n,\ r(g)=1, 2, \ldots\}.$$

По определению,

$$T_k(\Gamma_n g\Gamma_n)\,f=r(g)^{nk-n(n+1)/2}\sum_{i=1}^{\mu} f|_k[\sigma_i]$$

(где $\Gamma_n g\Gamma_n=\bigcup\limits_{i=1}^{\mu}\Gamma_n\sigma_i$, и для $\sigma=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in S^{(n)}$

$$(f|_k[\sigma])(\mathbf{Z})=\det(CZ+D)^{-k}f((AZ+B)(CZ+D)^{-1}).$$

Алгебра Гекке $L^{(n)}$ определяется как свободный $\mathbf{C}$-модуль, порожденный двойными смежными классами $\Gamma_n g\Gamma_n$; умножение в $L^{(n)}$ вводится таким образом, что произведению двойных классов отвечает произведение операторов $T_k(\Gamma_n g\Gamma_n)$: отображение

$$(\Gamma_n g\Gamma_n)\mapsto T_k(\Gamma_n g\Gamma_n)$$

определяет представление $L^{(n)}$ на пространстве M_k^n, причем S_k^n есть инвариантное подпространство.

Положим

$$T(m)=\sum_{r(g)=m}(\Gamma_n g\Gamma_n)\in L^{(n)}.$$

Локальная алгебра Гекке $L_p^{(n)}$ (p — простое) вводится как подалгебра $L^{(n)}$, порожденная элементами вида: $(\Gamma_n g\Gamma_n)$ с $r(g)=p^{\delta}$.

Представление $L_p^{(n)}$ на $S_k^{(n)}$ разлагается по характерам алгебры $L_p^{(n)}$ с помощью скалярного произведения (2.3). Все характеры $\lambda: L_p^{(n)}\to\mathbf{C}$ можно описать так: выберем в двойном классе $\Gamma_n g\Gamma_n$ треугольные представители g_i левых смежных классов, $\Gamma_n g\Gamma_n=\bigcup\limits_{i=1}^{\mu}\Gamma_n g_i$

$$g_i=\begin{pmatrix}p^{\delta_i}\,{}^tD_i^{-1} & B_i\\ 0 & D_i\end{pmatrix},\quad D_i=\mathrm{diag}\,(p^{d_{i1}}, \ldots, p^{d_{in}}).$$

Тогда (см. [1,4]) существуют комплексные числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие что

$$\lambda(\Gamma_n g\Gamma_n))=\sum_{i=1}^{\mu}\alpha_0^{\delta_i}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j p^{-j})^{d_{ij}}$$

Для характеров λ, полученных из представления $L_p^{(n)}$ на M_k^n выполнено соотношение:

$$\alpha_0^2\alpha_1\ldots\alpha_n=p^{kn-n(n+1)/2}.$$

Положим $\beta_0=\alpha_0 p^{-(2kn-n(n+1))/4}$, тогда набор p-параметров β_0, α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ определяет полупростой элемент h_p в $\mathrm{Spin}_{2n+1}(\mathbf{C})$ (и в $SO_{2n+1}(\mathbf{C})$) (см. выше).

Каждой собственной функции $f\in M_k^n$ алгебры Гекке $L^{(n)}$, таким образом, отвечает набор p-параметров $\alpha_{0,p}, \alpha_{1,p}, \ldots, \alpha_{n,p}$, и собственных значений $\lambda_f(\Gamma_n g\Gamma_n)$:

$$T_k((\Gamma_n g\Gamma_n))\,f=\lambda_f(\Gamma_n g\Gamma_n)\,f,$$

в частности:

$$T_k(m)\,f=\lambda_f(m)\,f.$$

А. Н. Андрианов доказал [4], что ряд Дирихле $D_f(s)=$ $=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\lambda_f(m)\,m^{-s}$, абсолютно сходящийся в некоторой правой полуплоскости, допускает разложение в эйлерово произведение

$$D_f(s)=\prod_p\left(\sum_{\delta=0}^{\infty}\lambda_f(p^{\delta})\,p^{-\delta s}\right)=\prod_p D_{p,f}(s),$$

причем каждый p-множитель $D_{p,q}(s)$ является рациональной дробью от p^{-s}:

$$D_{p,f}(s)=P_{p,f}(p^{-s})\,Q_{p,f}(p^{-s})^{-1},$$

где $P_{p,f}(t)$ и $Q_{p,f}(t)$ — многочлены с вещественными коэффициентами степени 2^n-2 и 2^n, соответственно; многочлен $Q_{p,f}(t)$ имеет вид:

$$Q_{p,f}(t)=1-\lambda_f(p)\,t+\ldots+p^{2^{n-1}(nk-n(n+1)/2)}t^{2^n}=$$
$$=(1-\alpha_{0p}t)\prod_{r=1}^{n}\prod_{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n}(1-\alpha_{0,p}\alpha_{i_1,p}\ldots\alpha_{i_r,p}t).$$

Дзета-функцией модулярной формы f называется эйлерово произведение:

$$Z_f(s)=\prod_p Q_{p,f}(p^{-s})^{-1}.$$

В наших прежних обозначениях

$$Z_f(s)=L(s+(2kn-n(n+1))/4,\ \pi_f,\ \rho_n).$$

Доказательство теоремы об аналитическом продолжении и функциональном уравнении $Z_f(s)$ в случае $n=2$ основано на связи между коэффициентами Фурье $a(N)$ формы f и собственными значениями $\lambda_f(m)$ операторов Гекке, открытой А. Н. Андриановым [4]. Эта связь состоит в том, что функция $Z_f(s)$ может быть представлена в виде линейной комбинации рядов вида:

$$R_N(s)=R_{N,f}(s)=\sum_{m=1}^{\infty} a(mN)\,m^{-s},$$

где $N=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ — произвольная положительно определенная полуцелая матрица. При этом ряд Дирихле $R_N(s)$ может быть получен интегрированием ограничения формы f на трехмерную вещественную область $H_N \subset H_2$. На H_N действует некоторая дискретная арифметическая подгруппа Γ_N группы $SL_2(\mathbf{C})$. Доказательство теоремы об аналитических свойствах $Z_f(s)$ следует из свойств рядов Эйзенштейна — автоморфных форм относительно Γ_N на H_N.

В случае произвольного n связи между собственными значениями операторов Гекке и коэффициентами Фурье изучены в [1], где исследован также интересный вопрос о действии операторов Гекке на тэта-ряды рода n, т. е. функции вида:

$$\Theta_A^{(n)}(Z)=\sum_{X\in M_{m,n}(Z)} \mathbf{e}(\mathrm{Tr}\,({}^tXAXZ)/2)=\sum_B r_A(B)\,\mathbf{e}(\mathrm{Tr}\,(BZ)/2).$$

Здесь $Z\in H_n$, B пробегает все целочисленные матрицы порядка n с четной диагональю, удовлетворяющие условиям: ${}^tB=B$, $B\geqslant 0$ и $r_A(B)$ обозначает количество целочисленных представлений квадратичной формы с матрицей $B/2$ квадратичной формой с матрицей $A/2$.

Фрайтаг [88] решил вопрос об инвариантности пространств тета-рядов рода n квадратичных форм A заданного типа относительно операторов Гекке, основываясь на теории сингулярных модулярных форм [188]. А. Н. Андрианов дал эффективное выражение для образа любого тэта-ряда квадратичной формы с четным числом переменных под действием операторов Гекке в виде линейной комбинации тэта-рядов того же типа. Коэффициенты такой линейной комбинации явно выражены через тригонометрические суммы; из этих формул следует, в частности, что все собственные числа подходящих систем образующих алгебр Гекке $L^{(n)}$ являются целыми алгебраическими числами.

Явно вычислены разложения на множители многочленов Гекке для рода n (см. также [2, 27]). Доказано, в частности, что стандартные дзета-функции

$$L(s, \pi_f, \mathrm{St}_{2n+1})=L(f, s)=\prod_p L_p(f, s),$$

где $L_p(f, s)=\left[(1-p^{-s})\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_{i,p}p^{-s})(1-\alpha_{i,p}^{-1}p^{-s})\right]^{-1}$ также могут быть выражены в терминах коэффициентов Фурье, более точно, через ряды вида

$$\sum_{M\in \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})\setminus M_n^+(\mathbf{Z})} a(MN{}^tM)(\det M)^{-(s+k-1)}$$

(см. [1, 5]). Это позволяет написать интегральное представление для $L(f, s)$ в виде интегральной свертки f с некоторым тэта-рядом рода n. Доказательство теоремы об аналитических свойствах $L(f, s)$ получается с помощью модификации метода Ранкина [41, 47].

Другой класс дзета-функций, связанных с модулярными формами Зигеля, исследовал Аракава [49, 50]. Если

$$f(Z)=\sum_{N\in \mathfrak{n}_n} a(N)\,\mathbf{e}(\mathrm{Tr}\,(NZ))\in M_k^n$$

— модулярная форма Зигеля рода n, то можно определить ряд Дирихле, используя только коэффициенты $a(N)$.

Для положительно определенной симметрической матрицы N обозначим символом $\varepsilon(N)$ порядок конечной группы $\{U\in \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})\,|\,{}^tUNU=N\}$. Доказано, что ряд Дирихле

$$D_n(f, s)=\sum_{N>0} a(N)\,\varepsilon(N)^{-1}(\det N)^{-s}$$

(где суммирование ведется по классам $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ — эквивалентных положительно определенных полуцелых симметрических матриц) допускает мероморфное продолжение на $s\in\mathbf{C}$ и удовлетворяет некоторому функциональному уравнению; вычислены также вычеты функции $D_n(f, s)$ в конечном числе имеющихся полюсов.

§ 3. АВТОМОРФНЫЕ ФОРМЫ И ГИПОТЕЗА АРТИНА

Важный класс арифметических L-функций составляют L-ряды Артина, связанные с комплексными представлениями групп Галуа расширений глобальных полей.

Если K — расширение Галуа глобального поля F с группой Галуа $\mathrm{Gal}\,(K/F)$ и

$$\sigma : \mathrm{Gal}\,(K/F)\to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$$

n-мерное комплексное представление $\mathrm{Gal}\,(K/F)$, то L-функция Артина вводится как эйлеровское произведение:

$$L(s, \sigma)=\prod_v L(s, \sigma_v)$$

по всем нормированиям v поля F. Здесь σ_v обозначает ограничение σ на группу разложения $\mathrm{Gal}(K/F)$ для нормирования v, причем для нормирований v, неразветвленных в K,

$$L(s, \sigma_v) = \det(I - \sigma(\mathrm{Fr}_v)\, \mathrm{N}v^{-s})^{-1},$$

где Fr_v — элемент Фробениуса над v (см. [89])

Гипотеза Артина. Если σ — неприводимо и нетривиально, то $L(s, \sigma)$ продолжается до целой функции на $s \in \mathbf{C}$.

Для представлений, индуцированных с одномерного представления подгруппы (мономиальных представлений) $L(s, \sigma)$ сводится к функции $L(s, \chi)$, где χ — характер Гекке конечного порядка (Э. Артин); в общем случае Брауэр доказал мероморфную продолжимость $L(s, \sigma)$ на $s \in \mathbf{C}$, используя целочисленные виртуальные разложения характеров представлений σ по характерам мономиальных представлений.

Новый подход к доказательству гипотезы Артина был предложен Ленглендсом, который предположил, что $L(s, \sigma)$ совпадают с L-функциями неприводимых параболических представлений GL_n над F. Справедливость гипотезы Артина следовала бы тогда из прямой теоремы Жаке (см. § 2 и [101]).

В случае $n=2$, образ $\sigma(\mathrm{Gal}\ (K/F))$ в $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ может быть только изоморфен (см. [33]) следующим группам:

1) группе диэдра; в этом случае σ — мономиально,
2) A_4 (тетраэдральный случай),
3) S_4 (октаэдральный случай),
4) A_5 (икосаэдральный случай).

Ленглендс доказал гипотезу о совпадении L-функций в случаях 2), 3) (см. изложения в [89]).

Справедливость гипотезы Артина в случае 4) остается открытом вопросом, хотя Булер (см. [63]) привел пример представления типа 4), для которого гипотеза Артина справедлива. При этом $F = \mathbf{Q}$, K есть поле разложения многочлена

$$x^5 + 10x^3 - 10x^2 + 35x - 18.$$

Результат Булера основан на конструкции Серра и Делиня (см. [76]), которые сопоставили каждой примитивной модулярной форме f типа $(N, 1, \psi)$ с нечетным характером Дирихле $\psi \bmod N$ некоторое двумерное комплексное представление $\rho_f : \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}/\mathbf{D}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$. В примере Булера $N = 800$.

Гипотеза Ленглендса относится также к более широкому классу L-функций, связанных с представлениями групп А. Вейля. Для конечного расширения K/F локального или глобального поля группа Вейля $W_{K/F}$ определяется как некоторое расширение группы $\mathrm{Gal}\ (K/F)$ с помощью C_K, где $C_K = K^*$, если K — локальное поле, $C_K = \mathbf{A}_K^*/K^*$ (группа классов аделей K), K — глобальное; если группа $G(K/F)$ — абелева, то когомологически такое расширение задается фундаментальным классом $\alpha(K/F) \in H^2(G(K/F), C_K)$ из теории полей классов (см. [228,

60]). Группа Вейля W_F определяется как проективный предел групп $W_{K/F}$.

В случае, когда F — локальное неархимедово поле или глобальное функциональное поле, W_F допускает следующее описание. Рассмотрим гомоморфизм $v: \mathrm{Gal}\ (\bar{F}/F) \to \hat{\mathbf{Z}}$, где $\hat{\mathbf{Z}}$ отождествлено с помощью элемента Фробениуса Φ с группой Галуа алгебраического замыкания поля вычетов (соответственно, поля констант). Тогда W_F отождествляется с подгруппой элементов группы $\mathrm{Gal}\ (\bar{F}/F)$, образ которых в $\hat{\mathbf{Z}}$ лежит в $\mathbf{Z}$, а топология на W_F индуцируется включением $W_F\ \mathrm{Gal}\ (\bar{F}/F) \times \mathbf{Z}$.

L функции представлений групп Вейля вводятся по аналогии с L-рядами Артина как произведения некоторых локальных множителей. Такие L-функции допускают мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость и удовлетворяют функциональному уравнению с подходящим образом определенными ε-множителями (см. [228, 73]. К сожалению, ε-множители явно определены лишь для одномерных представлений. В общем случае справедлива теорема существования и единственности ε-множителей; имеются также отдельные описания ε-множителей для некоторых классов представлений (см. [72, 73]).

Так определенные L-функции включают как частные случаи: а) абелевы L-ряды Гекке с грессенхарактерами, б) неабелевы L-функции Артина.

Локальная гипотеза Ленглендса. Пусть F — локальное поле, $n \geqslant 1$. Существует взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных неприводимых n-мерных комплексных представлений σ группы Вейля W_F и неприводимыми параболическими (суперкуспидальными) представлениями π группы $\mathrm{GL}_n(E)$, при котором L- и ε-множители соответствующих представлений $\pi \otimes \chi$ и $\sigma \otimes \chi$ совпадают для любого характера Гекке χ (см. [70, 148, 245, 231, 232].

Для $n=1$ гипотеза Ленглендса эквивалентна локальной теории полей классов [70].

Для $n=2$ эта гипотеза доказана (см. [231, 232]).

Интересное обобщение локальной гипотезы Ленглендса предложил Тэйт [228]. Вместо группы W_F он предложил рассмотреть групповую схему Вейля — Делиня $W_{F'}$ (см. [72]), которая является полупрямым произведением W_F на $\mathbf{G}_a$, где $\mathbf{G}_a$ — аддитивная групповая схема, на которую W_F действует по правилу: $wxw^{-1} = \|w\|x$, а $\|w\| = q^{-v(w)}$, q — порядок поля вычетов. Представление W_F', в котором геометрический элемент Фробениуса Φ действует полупросто, назовем Φ-полупростым. Для таких представлений также можно определить L- и ε-множители.

Гипотеза. Существует естественная биекция между классами изоморфных Φ-полупростых представлений W_F' степени n и неприводимых допустимых представлений $\mathrm{GL}_n(F)$ (не только параболических!).

Такое обобщение локальной гипотезы Ленглендса мотивируется недавними результатами И. Н. Бернштейна и А. В. Зелевинского [9] о представлениях GL_n над локальным неархимедовым полем. Эта гипотеза также доказана в [231] для $n=2$.

Новый подход к доказательству гипотезы Ленглендса для $n>2$ предложил Кох [134].

Локальная гипотеза Ленглендса может быть обобщена на случай произвольных редуктивных групп [60, 162]. При этом вместо комплексных представлений группы Вейля рассматриваются классы гомоморфизмов $\alpha: W_F' \to {}^LG$ над группой Галуа, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Если $\Phi(G)$ — множество таких классов, $\Pi(G(F))$ — множество неприводимых допустимых представлений $G(F)$, то гипотетически существует разбиение $\Pi(G(F))$ на непустые непересекающиеся множества Π_φ, параметризованные элементами $\varphi\in\Phi(G)$. При этом элементы фиксированного множества Π_φ называются L-неразличными: всем им соответствуют одинаковые L-функции (см. [60, 156, 206]).

Глобальная гипотеза Ленглендса формулируется в терминах λ-адических представлений. Пусть F — глобальное поле с группой Вейля W_F. Если E — числовое поле, $[E:\mathbf{Q}]<\infty$ с неархимедовым нормированием λ, то λ-адическое представление есть гомоморфизм топологических групп $\rho_\lambda: W_F \to GL_{E_\lambda}(V_\lambda)$, где E_λ — пополнение E, V_λ — конечномерное векторное пространство над E_λ, а группа $GL_{E_\lambda}(V_\lambda)$ рассматривается в λ-адической топологии.

Система $\{\rho_\lambda\}$ (λ — точки поля E) называется согласованной, если для почти всех нормирований v поля F и почти всех λ характеристические многочлены элементов $\rho_\lambda(\Phi_v)$ не зависят от λ и имеют коэффициенты в E; здесь Φ_v обозначает элемент Фробениуса $\Phi_v\in W_F$, соответствующий неархимедову нормированию v (см. [228]).

Условия согласованности представлений ρ_λ позволяет определить для них L-функции аналогично L-функциям Артина (см. [228]).

Широкий класс примеров λ-адических представлений связан с действием групп Галуа на точках конечного порядка эллиптических кривых и абелевых многообразий, определенных на F. Если E — эллиптическая кривая, определенная над $\mathbf{Q}$, E_{l^n} — ядро умножения на l^n в группе точек $E(\overline{\mathbf{Q}})$ над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbf{Q}}$ поля $\mathbf{Q}$, то $E_{l^h}\cong(\mathbf{Z}/l^h\mathbf{Z})^2$ как абелева группа. Действие группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ на модуле Тэйта $T_l(E)=\varprojlim E_{l^n}\cong\mathbf{Z}_l^2$ дает l-адическое представление

$$\rho_l: \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathbf{C}L_2(\mathbf{Z}_l),$$

которое неразветвлено для почти всех p. При этом если Φ_p —

p-элемент Фробениуса, то след матрицы $\rho_l(\Phi_p)$ равен a_p, где $N_p=1-a_p+p$ — число точек на редукции кривой E по модулю p. Теория l-адических когомологий дает возможность интерпретировать $T_l(E)$ как одномерные l-адические когомологии кривой E; более систематический способ строить λ-адические представления состоит в рассмотрении действия групп Галуа на λ-адических когомологиях алгебраических многообразий X над F. L-функции таких λ-адических представлений являются множителями дзета-функции Хассе-Вейля многообразия X [71, 65, 149].

Еще больший класс λ-адических представлений дает теория мотивов (см. [72, 228]). Локальные неархимедовы множители L-функций, связанных с мотивами, строятся по Артину, в архимедовых точках для этого используются структуры Ходжа (см. [72, 228]).

Глобальная гипотеза Ленглендса для GL_n тхеперь формулируется как утверждение о существовании соответствия (биекции) между классами эквивалентности систем согласованных λ-адических n-мерных представлений группы Вейля W_F, неприводимых допустимых представлений $GL_n(\mathbf{A}_F)$ и мотивов ранга n над F. [228]; такое соответствие должно сохранять L-функции.

Как и в локальном случае, эту гипотезу можно обобщить на произвольные редуктивные группы; при этом вместо n-мерных λ-адических представлений рассматриваются непрерывные гомоморфизмы $\rho_\lambda: W_F \to {}^LG(E_\lambda)$ группы Вейля W_F в λ-адические точки группы Ленглендса (как уже отмечалось, группа Ленглендса ${}^LG$ может быть определена над числовым полем).

Для группы $\mathbf{G}=GL_1$ гипотеза Ленглендса включает в себя глобальную теорию полей классов, обобщение которой на некоммутативный случай соответствует переходу от GL_1 к GL_n, $n\geqslant 2$.

В. Г. Дринфельд (см. [25, 78]) доказал гипотезу Ленглендса для GL_2 над функциональными полями. Сформулируем точно его результат. Пусть F — глобальное поле характеристики $p>0$. Для каждого числового поля E обозначим символом $\Sigma_1(E)$ множество классов изоморфных систем согласованных абсолютно неприводимых двумерных λ-адических представлений группы Вейля W_F; положим

$$\Sigma_1 = \varinjlim_{E} \Sigma_1(E).$$

Символом Σ_2 обозначим множество классов изоморфных неприводимых параболических представлений GL_2, $(\mathbf{A}_F)$, определенных над $\overline{\mathbf{Q}}$. Пусть $E\subset\overline{\mathbf{Q}}$, $[E:\mathbf{Q}]<\infty$, $\rho=\{\rho_\lambda\}\in\Sigma_1(E)$, $\pi\in\Sigma_2$. Назовем π совместимым с ρ, если для некоторого λ и почти всех точек v поля F

$$L(s-1/2, \pi_v)=\det(I-\rho_\lambda(\Phi_v)\mathbf{N}_v^{-s})^{-1},$$

где Φ_v — геометрический элемент Фробениуса в v, $\Phi_v\in W_F$, $L(s, \pi_v)$ — L-функция Жаке-Ленглендса. Теперь $\rho\in\Sigma_1$ и $\pi\in\Sigma_2$ назовем совместимыми, если для некоторого E и $\rho_E \in \Sigma_1(E)$ ρ есть образ ρ_E и ρ_E совместимо с π. Обозначим через Γ множество пар $(\rho, \pi) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ таких, что π совместимо с ρ.

Теорема А. Γ есть график биекции $\Sigma_1 \xrightarrow{\sim} \Sigma_2$ для неприводимых допустимых представлений Σ_2.

Сюръективность проекции $\Gamma \to \Sigma_1$ ранее была доказана Делинем [72].

Инъективность проекции $\Gamma \to \Sigma_1$ следует из теоремы об однократности (см. § 1), а инъективность проекции $\Gamma \to \Sigma_2$ есть следствие теоремы Чеботарева о плотности простых идеалов (см. [203]).

Доказательство сюръективности проекции $\Gamma \to \Sigma_2$ основано на изучении интересных алгебро-геометрических объектов — EH-пучков и их пространств модулей. Пусть X — гладкая проективная модель рассматриваемого функционального поля F, $\overline{X} = X \underset{F_q}{\otimes} \overline{\mathbf{F}}_q$. FH — пучки суть некоторые векторные расслоения над $\overline{X}$, снабженные дополнительными структурами, связанными с действием геометрического элемента Фробениуса. С помощью формулы следа Сельберга изучается след морфизма Фробениуса, действующего в когомологиях схем модулей FH-пучков; это приводит к явной конструкции λ-адических представлений, связанных с π, и доказывает теорему A. Такие λ-адические представления связаны с мотивами, происходящими из одномерных когомологий пространств модулей FH-пучков [141].

Теорема В. Пусть π — неприводимое унитарное представление $GL_2(\mathbf{A}_F)$, лежащее в пространстве параболических форм. Тогда для каждой точки v поля F π_v не принадлежит дополнительной серии. (Дополнительная серия состоит из индуцированных представлений вида $\mathrm{Ind}(\mu \otimes \nu)$, где μ и ν — квазихарактеры, но не характеры).

Эта теорема доказывает гипотезу Рамануджана над F (см. § 1).

В случае, когда F — числовое поле, общая гипотеза Ленглендса еще очень далека от доказательства даже в случае $n=2$. Первое продвижение в этой области связано с теорией Делиня и Серра: предложена конструкция системы согласованных λ-адических представлений $\xrightarrow{\sim} \pi$, лежащих в пространстве параболических форм (в случае $F = \mathbf{Q}$). Сначала Делинь (см [41]) построил согласованные системы l- адических представлений, связанные с параболическими формами относительно $SL_2(\mathbf{Z})$. Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_k(\Gamma)$, $a_1 = 1$, где $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$. Пространство $S_k(\Gamma)$ одномерно для $k = 12, 16, 18, 20, 22, 26$. Делинь доказал, что для любого простого l существует l-адическое представление

$$\rho_l : \mathrm{Gal}(K_l/\mathbf{Q}) \to GL_2(\mathbf{Z}_l)$$

(K_l — максимальное алгебраическое расширение $\mathbf{Q}$, разветвленное только в l) такое, что для простого $p \neq l$ образ p-элемента Фробениуса Fr_p имеет характеристический многочлен $X^2 - a_p X + p^{k-1}$. Затем Рибет обобщил конструкцию Делиня на случай конгруэнц-подгрупп (см. [197, 137, 225]). На языке теории представлений $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A})$ конструкцию λ-адических представлений предложил Ленглендс [151].

Построение параболических форм, отвечающих системам l-адических представлений на модулях Тэйта эллиптических кривых, составляет содержание известной гипотезы А. Вейля об униформизации эллиптических кривых E над $\mathbf{Q}$ модулярными формами. Эта гипотеза доказана лишь в некоторых частных случаях (например, для кривых с комплексным умножением, см. обзор Гелбарта [90] о других результатах в этом направлении). В связи с этим отметим результат Г. В. Белого [7]: всякая алгебраическая кривая, определенная над полем алгебраических чисел, допускает накрытие на проективную прямую, разветвленное лишь над тремя точками 0, 1, ∞ и определенное над числовым полем; из этого результата следует, в частности, что эллиптические кривые над $\mathbf{Q}$ допускают униформизацию модулярными формами относительно подгрупп конечного индекса в $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ (не обязательно являющихся конгруэнц-подгруппами).

Ленглендс [149] предложил подход к явной конструкции соответствия между автоморфными представлениями и представлениями групп Вейля, сохраняющего L-функции. Такой подход основан на одном теоретико-категорном результате [199]: всякая абелева категория с тензорными произведениями и прямыми суммами, снабженная специальным «функтором слоя» со значениями в категории конечномерных векторных пространств над полем F, эквивалентна категории конечномерных представлений некоторой редуктивной алгебраической группы над F. В частности, предполагается существование такой группы для категории автоморфных представлений $G(\mathbf{A}_F)$; при этом вышеуказанное соответствие задается гомоморфизмом этой группы в «алгебраическую оболочку» группы Вейля [228]. Интересные приложения конструкции связаны с изучением многообразий Симуры [65, 139, 155, 149], дзета-функции которых гипотетически выражаются через L-функции автоморфных представлений.

§ 4. ПОДЪЕМ АВТОМОРФНЫХ ФОРМ

В последние десять лет (начиная с работы Доя и Наганумы [79]) появились многочисленные примеры связей между различными классами автоморфных форм, в том числе между модулярными формами от одной и от нескольких переменных [46, 55, 68, 84, 96, 125, 165, 183, 189, 246]. Как правило, такие связи естественно записываются на языке L-функций, связанных с автоморфными формами. Все эти примеры можно объединить в рамках общего принципа функториальности автоморфных форм, выдвинутого Ленглендсом.

Для формулировки этого принципа рассмотрим связную редуктивную группу G над глобальным (или локальным) полем F, и пусть ${}^LG$ — двойственная группа Ленглендса (см. § 2). Как отмечалось, ${}^LG$ есть полупрямое произведение связной редуктивной группы ${}^LG^0$ над $\mathbf{C}$ (или над числовым полем E) на группу Галуа $\mathrm{Gal}\,(F_1/F)$ некоторого расширения F_1 поля F:

$$1 \to {}^LG^0 \to {}^LG \xrightarrow{p_1} \mathrm{Gal}\,(F_1/F) \to 1.$$

Если H — другая связная редуктивная группа над F, ${}^LH$ — группа Ленглендса,

$$1 \to {}^LH^0 \to {}^LH \xrightarrow{p_2} \mathrm{Gal}\,(F_2/F) \to 1,$$

то гомоморфизм $u\colon {}^LH \to {}^LG$ назовем L-гомоморфизмом, если ограничение u на ${}^LH^0(\mathbf{C})$ есть комплексно-аналитический гомоморфизм в ${}^LG^0(\mathbf{C})$, причем $F_1 \subset F_2$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}^LH \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\varkappa"'] & & {}^LG \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathrm{Gal}(F_1/F) & \end{tikzcd}$$

коммутативна (здесь $\varkappa$ есть композиция проекции p_2 и естественного отображения $\mathrm{Gal}\,(F_2/F) \to \mathrm{Gal}\,(F_1/F)$).

Принцип функториальности. Пусть F — глобальное поле, $u\colon {}^LH \to {}^LG$ — L-гомоморфизм, $\pi = \otimes_v \pi_v$ — неприводимое допустимое представление группы $H(\mathbf{A}_F)$, причем для почти всех v $h_v \in {}^LH$ соответствует представлению π_v группы $H(F_v)$. Тогда существует неприводимое допустимое представление $u_*(\pi) = \pi' = \otimes_v \pi_v'$ группы $G(\mathbf{A}_F)$ такое, что для почти всех v класс $h_v' = u(h_v)$ соответствует неприводимому допустимому представлению $\pi_v' = u_*(\pi_v)$ группы $G(F_v)$ (более точную формулировку см. в [60]).

Принимая глобальную гипотезу Ленглендса (см. § 3, [60]), можно также сформулировать принцип функториальности на языке λ-адических представлений [228].

Рассмотрим некоторые примеры.

Первые два примера связаны с расширением основного поля F. Пусть F'/F — конечное расширение, G' — связная редуктивная группа над F, $G = R_{F'/F}G'$ — связная редуктивная группа над F, полученная из G' ограничением скаляров по Вейлю (при этом для любой коммутативной F-алгебры B

$$G(B) = G'(B'), \text{ где } B' = B \underset{F}{\otimes} F').$$

Тогда L-группа ${}^LG$ может быть получена с помощью индуцирования из группы ${}^LG'$ [60]. Более точно, рассмотрим в группе

$\Gamma = \mathrm{Gal}\,(F^s/F)$ подгруппу конечного индекса $\Gamma_1 = \mathrm{Gal}\,(F^s/F')$, соответствующую расширению F'. Группа Γ действует на ${}^LG^0$, а группа Γ_1 — на ${}^LG'^0$ (см. § 2). Рассмотрим индуцированную группу

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}^{\Gamma}({}^LG'^0) = \prod_{\sigma \in \Gamma_1 \setminus \Gamma} {}^LG'^0,$$

которая есть произведение $|\Gamma_1 \setminus \Gamma|$ экземпляров группы ${}^LG'^0$. При этом на $\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}^{\Gamma}({}^LG'^0)$ действует группа Γ с помощью действия Γ на множестве правых смежных классов (перестановки сомножителей) и действия Γ_1 на каждом сомножителе. Тогда существует естественный изоморфизм (сохраняющий действие Γ):

$${}^LG^0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}^{\Gamma}({}^LG'^0).$$

1) Замена базы. Пусть F'/F — конечное расширение Галуа, H — F-расщепимая редуктивная группа над F, $G = R_{F'/F}H$. Рассмотрим естественный L-гомоморфизм $u\colon {}^LH \to {}^LG$, ограничение которого на ${}^LH^0$ есть диагональное вложение. В этом случае $G(\mathbf{A}_F)$ и $G(F)$ канонически изоморфны $H(\mathbf{A}_{F'})$ и $H(F')$, поэтому принцип функториальности переходит в следующую проблему: связать с автоморфным представлением $H(\mathbf{A}_F)$ автоморфное представление $H(\mathbf{A}_{F'})$.

Эта проблема решена Ленглендсом для H-$\mathbf{GL}_2$ и циклического расширения F'/F простой степени [97, 140]; дано описание образа и слоев отображения u_*. Этот результат обобщает предыдущие исследования Доя и Наганумы [79, 41], Жаке [121] (в случае квадратичных расширений F'/F), Саито [200], Синтани [220, 44] (см. также другие описания u_* в [54, 55, 68, 84]).

При этом связь между π и $\pi' = u_*\pi$ наглядно интерпретируется с помощью λ-адических представлений: λ-адические представления $\rho_\lambda'\colon W_{F'} \to \mathrm{GL}_2(F_\lambda)$, соответствующие π', получаются с помощью ограничения

$$(\mathrm{Gal}\ (F^s/F') \hookrightarrow \mathrm{Gal}\ (F^s/F))$$

представлений $\rho_\lambda\colon W_F \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$, соответствующих π, на подгруппу.

2) L-ряды с грёссенхарактерами. Пусть F'/F — расширение Галуа степени n, $H = R_{F'/F}\mathrm{GL}_1$, $G = \mathrm{GL}_n$. При этом ${}^LH = {}^LH^0 \times \mathrm{Gal}\,(F'/F)$, ${}^LG^0 = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, и существует естественное вложение $u\colon {}^LH \hookrightarrow {}^LG$, при котором ${}^LH^0 \cong \mathrm{GL}_1 \times \ldots \times \mathrm{GL}_1$ переходит в подгруппу диагональных матриц (максимальный тор T в $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, а $\mathrm{Gal}\,(F'/F)$ — в подгруппу перестановочных матриц (точнее, в нормализатор максимального тора). Автоморфные представления H отождествляются с характерами Гекке $\mathbf{A}_{F'}^*$: $H(\mathbf{A}_F) = \mathrm{GL}_1(\mathbf{A}_{F'}) = \mathbf{A}_{F'}^*$.

Принцип функториальности сводится в этом случае к вопросу о том, являются ли L-ряды $L(s, \chi)$ с грёссенхарактерами χ L-функциями автоморфных представлений π группы G.

Если $n=2$, $F=\mathbf{Q}$, E' — мнимое квадратичное, то это было доказано Гекке [114], при этом π связано с параболической автоморфной формой. Если $n=2$, $F=\mathbf{Q}$, F' — вещественное квадратичное, то Маасс доказал, что π связано с неголоморфной автоморфной формой [163, 166]. Для $n=3$ это доказано в [125], см. также [60].

3) $H=\mathrm{GL}_2$, $G=\mathrm{GL}_3$, ${}^LH=\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, ${}^LG=\mathrm{GL}_3(\mathbf{C})$ $u:\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})\to\mathrm{GL}_3(\mathbf{C})$ есть присоединенное представление (или симметрический квадрат стандартного). В этом случае проблема подъема решена Гельбартом и Жаке [93].

На языке λ-адических представлений этот результат означает, что λ-адические представления, соответствующие $u_*\pi$ суть симметрические квадраты λ-адических представлений, соответствующих π.

4) Пусть M есть F-подгруппа Леви параболической F-подгруппы $P\subset G$. Тогда ${}^LM$ естественно вложена в ${}^LG$, и вложение $u:{}^LM\to{}^LG$ есть L-гомоморфизм [60].

Ленглендс [152] построил в большом числе случаев $u_*(\pi)$ для параболических представлений π группы $M(\mathbf{A}_F)$ с помощью аналитического продолжения и вычетов рядов Эйзенштейна.

5) Пусть $H=\mathrm{PGL}_2\times\mathrm{PGL}_2$, $G=\mathrm{Sp}_4$. В этом случае

$${}^LH=\mathrm{SL}_2(\mathrm{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbf{C}),\ {}^LG=\mathrm{Sp}_4(\mathbf{C})\cong\mathrm{Spin}_5\,(\mathbf{C})$$

Рассмотрим гомоморфизм $u:\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})\to\mathrm{Sp}_4(\mathbf{C})$, заданный формулой:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & b_2\\ c_2 & 0 & c_2 & 0\\ 0 & c_2 & 0 & d_2\end{pmatrix}.$$

Если $\pi_1=\otimes_v\pi_{1,\,v}$, $\pi_2=\oplus_v\pi_{2,\,v}$ — два неприводимых допустимых автоморфных представления группы $\mathrm{PGl}_2(\mathbf{A}_F)$, то они определяют представление $\pi_1\otimes\pi_2$ группы $H(\mathbf{A}_F)$, и, согласно принципу функториальности, должно существовать неприводимое автоморфное представление $u_*(\pi_1\otimes\pi_2)$ группы Sp_4 $(\mathbf{A}_F)$.

А. Н. Андрианов и Маасс [46, 167] рассмотрели случай, когда $F=\mathbf{Q}$, π_1 связано с некоторой параболической формой $f(z)=$ $=\sum_{n=2}^{\infty}\omega(n)\,q^n$ веса $2k-2$ относительно $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, собственно относительно операторов Гекке:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)\,n^{-s}=\prod_p[1-\omega(p)\,p^{-s}+p^{2k-3-2s}]^{-1},$$

а π_2 связано с (неголоморфным) рядом Эйзенштейна веса 2:

$$E_2(z)=\frac{1}{8\pi y}-\frac{1}{24}+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)\,q^n,$$

где $\sigma_1(n)=\sum_{d/n}d$.

Представлениям $\pi_{1,\,p}$ соответствуют классы $h_{1,\,p}=\begin{pmatrix}\alpha_p & 0\\ 0 & \alpha_p^{-1}\end{pmatrix}\in$ $\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, причем $(1-\alpha_p p^{-s})(1-\alpha_p^{-1}p^{-s})=1-\omega(p)\,p^{-s-(k-1)/2}+$ $+p^{-2s}$, а представлениям $\pi_{2,\,p}$ — классы $h_{2,\,p}=\begin{pmatrix}p^{1/2} & 0\\ 0 & p^{-1/2}\end{pmatrix}$ (см. § 1). Доказано, что представление $\pi'=u_*(\pi_1\otimes\pi_2)$ существует, задается зигелевой модулярной параболической формой Φ рода 2 веса k относительно $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{Z})$, причем L-функция представления π' совпадает с дзета-функцией формы Φ: $Z_\Phi(s)=L(s-k+3/2,$ $\pi',\rho_2)$ (см. § 2). При этом полностью описан образ u_* для $f\in S_{2k-2}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$, что позволяет сформулировать результат в виде некоторой теоремы о модулярном спуске.

Более точно, в пространстве M_k^2 зигелевых модулярных форм целого веса $k>0$ относительно $\mathrm{Sp}_4(Z)$ рассматривается подпространство D_k, состоящее из параболических форм

$$\Phi(Z)=\sum_{N\in\mathfrak{N}_2}A(N)\,\mathbf{e}(\mathrm{Tr}\,(NZ)),$$

удовлетворяющих условию Маасса [167]:

$$A\begin{pmatrix} a & b/2\\ b/2 & c\end{pmatrix}=\sum_{g/a,\ b,\ c;\ g>0}g^{k-1}A\begin{pmatrix}1 & b/2g\\ b/2g & ac/g^2\end{pmatrix}.$$

Доказано, что D_k инвариантно относительно всех операторов Гекке, действующих в M_k^2. Отсюда следует, что существует базис $\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_r$ в D_k, состоящий из собственных функций операторов Гекке. Пусть Φ — одна из этих форм Z_Φ — ее дзета-функция, $Z_\Phi=\prod_p Q_{p,\Phi}(p^{-s})^{-1}$.

Теорема. Для любого простого числа p

$$Q_{p,\Phi}(t)=(1-p^{k-2}t)(1-p^{k-1}t)(1-\omega(p)\,t+p^{2k-3}t^2).$$

Если определить числа $\omega(n)$ $(n=1, 2,\ldots)$ равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)\,n^{-s}=\prod_p[1-\omega(p)\,p^{-s}+p^{2k-3-2s}]^{-1},$$

то ряд

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)\,\mathbf{e}(nz)$$

определяет параболическую форму веса $2k-2$ относительно $SL_2(\mathbf{Z})$.

Эта теорема доказывает гипотезу Курокава [146], выдвинутую в связи с изучением собственных значений операторов Гекке, действующих на зигелевых параболических формах рода 2, и обобщением гипотезы Рамануджана—Петерссона об оценке таких собственных значений. Для параболических форм Φ произвольного рода n относительно Γ_n веса k, собственных относительно операторов Гекке: $T_k(m)\Phi=\lambda_\Phi(m)\Phi$, такое обобщение состоит в следующем. Пусть $Q_{p,\Phi}(t)$ — многочлен степени 2^n, задающий p-множитель дзета-функции $Z_\Phi(s)$ формы Φ: $Z_\Phi(s)=\prod_p Q_{p,\Phi}(p^{-s})^{-1}$. Тогда Φ удовлетворяет обобщенной гипотезе Рамануджана, если абсолютные величины нулей многочлена $Q_{p,\Phi}(t)$ равны $p^{-n(2k-n-1)/4}$ для всех p. Курокава привел примеры параболических форм рода 2, которые не удовлетворяют обобщенной гипотезе Рамануджана и предположил, что такие формы получаются с помощью подъема параболических форм рода 1, описанного выше.

В связи с примером 5) отметим работы Иосиды [244, 246], предложившего явную конструкцию, ставящую в соответствие паре некоторых модулярных форм рода 1 зигелеву модулярную форму рода 2. Эта конструкция основана на использовании тэта-рядов, связанных с определенной кватенионной алгеброй над Q.

Маасс [165] доказал аналог гипотезы Курокава для зигелевых модулярных форм относительно $Sp_4(\mathbf{Z})$ с системами мультипликаторов. В этом случае соответствующие одномерные параболические формы являются автоморфными формами относительно группы Гекке $G(\sqrt{2})$, порожденной элементами

$$\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Как уже отмечалось (см. § 1), обобщение гипотезы Рамануждана может быть переформулировано на языке теории представлений. Согласно такой интерпретации [119], локальные составляющие π_v параболических представлений $\pi=\otimes_v\pi_v$ редуктивной группы G должны быть умеренно растущими (это условие на рост матричных коэффициентов представления). В случае анизотропных групп, однако, такая гипотеза не подтвердилась [119]. В случае расщепляемых групп также имеются контрпримеры: в [119] такие примеры приведены для $G=Sp_4$; построение основано на теории двойственных редуктивных пар и представлений Вейля [91, 118, 141, 190, 224]: рассмотрение пары $(Sp_4, \mathbf{O}_2)$ дает вложение автоморфных форм на $\mathbf{O}_2$ в автоморфные формы на Sp_4.

Конструкция работы [119] параллельна построению автоморфных форм, соответствующих характерам Гекке квадратичных полей, что соответствует рассмотрению двойственной пары $(SL_2, \mathbf{O}_2)$ (см. пример 2).

Интересный способ подъема автоморфных форм с помощью тэта-функций предложили также Ода [183] и Кудла [143]. Рассмотрим неопределенную квадратичную форму A (над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел) сигнатуры (p, q): $A: Y\mapsto A[Y]={}^tYAY$, $Y\in\mathbf{Q}^n$. Пусть $L\subset\mathbf{Q}^n$ — $\mathbf{Z}$-решетка, $A(L)\subseteq 2\mathbf{Z}$ и пусть X — пространство всех мажорант квадратичной формы A, т. е. таких матриц $R\in M_n(\mathbf{R})$, $n=p+q$, что ${}^tR=R$, R — положительно определена и $RA^{-1}R=A$. Положим $SO(A)=\{g\in SL_n(\mathbf{R})\,|\,{}^tgAg=A\}$, $\Gamma_L=\{U\in SO(A)\,|\,UL=L\}$, тогда X есть симметрическое пространство ортогональной группы $SO(A)$, а $SO(A)\cap SO_n(\mathbf{R})$ — максимальная компактная подгруппа в $SO(A)$. Рассмотрим тэта-функцию

$$\theta(z, R)=v^{q/2}\sum_{l\in L}e^{i\pi(uA+ivR)[l]}$$

двух переменных $(z, R)\in H\times X$, где $z=u+iv\in H$ $v>0$. Тогда

$$\theta(z, R[U])=\theta(z, R), \text{ если } U\in\Gamma_L;$$

$$\theta(\gamma z, R)=(cz+d)^{\frac{p-q}{2}}\theta(z, R),$$

если

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1(N)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})\,\middle|\, a\equiv d\equiv 1 \bmod N,\ c\equiv 0 \bmod N\right\},$$

$$N=2\det A.$$

Теперь если $\varphi(z)$ — функция на H и $\psi(R)$ — функция на X, которые преобразуются по z и R так же, как $\theta(z, R)$, то интегралы

$$\theta_\varphi(R)=\int_{H/\Gamma_1(N)}\varphi(z)\overline{\theta(z, R)}\,v^{(p-q)/2}\frac{du\,dv}{v^2},$$

$$\theta^\psi(z)=\int_{X/\Gamma_L}\psi(R)\,\theta(z, R)\,dR$$

определяют отображения пространств модулярных форм на H (относительно $\Gamma_1(N)\subset SL_2(\mathbf{Z})$ в пространства автоморфных форм на X (относительно Γ_L) и обратно [143]. Случай $(p, q)=(2, n-2)$ более подробно разобран в [183]; при $n=4$ в качестве следствия получаются результаты Цагира [248] о замене базы для GL_R над вещественным квадратичным расширением $\mathbf{Q}$.

Мощным инструментом при изучении подъема автоморфных форм является формула следа Сельберга [149, 155]; эта формула представляет собой наиболее сильное обобщение связи между характерами неприводимых представлений и классами сопряженных элементов, хорошо известной для конечных групп. Для

GL_2 над глобальным полем формула следа содержится в книге [123], § 16; хорошее изложение (в более общей ситуации) дано Гельбартом и Жаке [94].

Отметим работы [11, 141, 227], где более подробно разобран случай GL_2 над мнимым квадратичным полем, а также [110, 120, 140, 97, 201], где рассматривается GL_2 над вполне вещественным полем. Для параболических форм типа (N, k, χ) (см. § 1) элегантное изложение формулы следа операторов Гекке дано Цагиром (в книге Ленга [33], $N=1$) и Остерле [182]. Артур [52, 53] изучал обобщение формулы следа на случай произвольных редуктивных групп; для $G=GL_3$ интересные результаты в этом направлении ранее были получены А. Б. Венковым [10]. Формулы следа тесно связана с аналитическим продолжением рядов Эйзенштейна [29, 15, 152]. Одно из наиболее важных приложений формулы следа — вычисление размерностей пространств автоморфных форм [69, 117, 179, 202]; интересное приложение связано со свойствами делимости коэффициентов модулярных форм [136, 137, 138]. Другие приложения, связанные, в частности, с аналитическими свойствами дзета-функции Сельберга, см. в [11—13, 22, 31, 115, 234].

В заключение отметим наиболее интересные, на наш взгляд, результаты, относящиеся к другим аспектам теории модулярных форм, не вошедшие в обзор.

1) Модулярные формы полуцелого веса [41, 204, 135, 233] и их интерпретация как автоморфных форм на метаплектической группе (двулистном накрытии SL_2, [92, 95, 96]. Обобщение на случай n-листных накрытий SL_2 результатов Симуры [41]: [51, 87].

Решение проблемы Куммера о распределении знака кубических гауссовых сумм [113] с помощью кубического аналога тэта-рядов — автоморфных форм на трехлистном накрытии SL_2 [74, 184].

Связь автоморфных форм на метаплектической группе и на ортогональных группах [189].

2) Порождение пространств модулярных форм тэта-рядами [81, 103, 230, 236]. Решение проблемы базиса в пространствах модулярных форм типа (N, k, χ) [83, 116], позволившее дать алгоритм для нахождения базиса в таких пространствах (в виде алгоритма для ЭВМ) [187].

Теория тэта-рядов, связанных с неопределенными квадратичными формами [163, 235], тэта-рядов рода n [40, 132, 164], а также тэта-рядов вполне вещественных полей [82, 84].

Связь с квадратичными формами; новые формулы для числа представлений целых чисел квадратичными формами [8, 14, 21, 34, 106, 208, 226].

3) Значения L-рядов в целых точках. Конструкция p-адических L-функций Жаке—Ленглендса для GL_2 над вполне вещественным полем: см. обзоры Ю. И. Манина [35, 169]. Случай GL_2

над мнимым квадратичным полем разобран П. Ф. Курчановым [32].

Развитие теории неархимедова интегрирования [16, 18, 35, 129, 130, 161] и теории модулярных символов [42, 56, 112, 241], приложения к арифметике модулярных кривых [171, 172]; обобщение на случай $G=\mathbf{GL}_n$ [56].

Трансцендентность периодов параболических форм [59]. Интегралы рядов Эйнзенштейна и значения дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в нечетных положительных точках [102].

Метод Цагира [247]. Значения в целых точках L-рядов с характерами Гекке [218, 219] и их обобщений; связь с арифметикой модулярных форм Гильберта и автоморфных форм на унитарных и ортогональных группах [207, 209, 212, 214—217]. Приложения метода свертки Ранкина к вычислению значений L-функций в целых точках [36—39, 100, 109, 213, 216, 217, 222].

Обобщение формулы Чоулы—Сельберга [66] для вычисления периодов интегралов на абелевых многообразиях с комплексными умножениями [105, 242].

Общая гипотеза о значениях L-функций предложена Делинем [75].

4) Сравнения и делимость коэффициентов модулярных форм и модулярных функций. Связь с l-адическими представлениями [44, 77, 80, 111, 133, 136—138, 192, 197, 198, 222, 225]. Обобщения на случай зигелевых модулярных форм [145, 178].

5) Модулярные формы и аналитическая теория чисел: см. обзор Морено [176], а также [12, 15, 22, 28, 31, 45, 98—100, 177].

6) Модулярные формы в положительной характеристике и неархимедовы модулярные формы [24, 25, 104, 108, 131, 136, 157].

7) Связь с теорией простых конечных групп (в частности, с «монстром Фишера—Грисса») и описанием их характеров: [127, 128, 229]. Связь модулярных форм с теорией кодирования, решетками и упаковками сфер см. [14], обзор Малера [168] и цитированную в нем литературу.

8) Дифференцирование модулярных форм. Конструкции нелинейных дифференциальных операторов, действующих в пространствах модулярных форм (в духе работ Н. В. Кузнецова [30] и Ранкина [193]): [43, 85].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Андрианов А. Н.*, Мультипликативная арифметика зигелевых модулярных форм. Успехи мат. наук, 1979, *34*, вып. 1, 67—135 (РЖМат, 1979, 6А408)
2. —, О разложении многочленов Гекке для симплектической группы рода n. Мат. сб., 1977, *104*, № 3, 390—427 (РЖМат, 1978, 3А305)
3. —, Симметрические квадраты дзета-функций зигелевых модулярных форм рода 2. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1976, *142*, 22—45 (РЖМат, 1977, 4А632)

4. —, Эйлеровы произведения, отвечающие модулярным формам Зигеля рода 2. Успехи мат. наук, 1974, *29*, вып. 3, 44—109 (РЖМат, 1974, 11А726)
5. —, *Калинин В. Л.*, Об аналитических свойствах стандартных дзета-функций зигелевых модулярных форм. Мат. сб., 1978, *106*, № 3, 323—339 (РЖМат, 1978, 11А493)
6. —, *Малолеткин Г. Н.*, Поведение тэта-рядов рода n неопределенных квадратичных форм при модулярных подстановках. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1978, *148*, 5—15 (РЖМат, 1979, 1А511)
7. *Белый Г. В.*, О расширениях Галуа максимального кругового поля. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1979, *43*, № 2, 267—276 (РЖМат, 1979, 8А374)
8. *Беридзе Р. И., Гогишвили Г. П.*, О числе представлений чисел некоторыми квадратичными формами с шестью переменными. Тр. Тбилис. мат. ин-та АН Груз.ССР, 1977, *57*, 5—15 (РЖМат, 1978, 1А110)
9. *Бернштейн И. Н., Зелевинский А. В.*, Представления группы $GL(n, F)$, где F — локальное неархимедово поле. Успехи мат. наук, 1976, *31*, вып. 3, 5—70
10. *Венков А. Б.*, О формуле следа Сельберга для $SL(3, \mathbf{Z})$ Докл. АН СССР, 1976, *228*, № 2, 273—276 (РЖМат, 1976, 11Б896)
11. —, Разложение по автоморфным собственным функциям оператора Лапласа—Бельтрами в классических симметрических пространствах ранга 1 и формула следа Сельберга. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1973, *125*, 6—55 (РЖМат, 1974, 4Б318)
12. —, Спектральная теория автоморфных функций, дзета-функций Сельберга и некоторые проблемы аналитической теории чисел и математической физики. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 3, 69—135 (РЖМат, 1979, 11А128)
13. —, Формула следа Сельберга и неевкливовы колебания бесконечной мембраны. Докл. АН СССР, 1978, *240*, № 5, 1021—1024 (РЖМат, 1978, 11А102)
14. *Венков Б. Б.*, О целочисленных положительных унимодулярных квадратичных формах. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 1, 155 (РЖМат, 1977. 7А150)
15. *Виноградов А. И., Тахтаджян Л. А.*, Теория рядов Эйзенштейна для группы $SL(3, \mathbf{R})$ и ее приложение к одной бинарной задаче. Часть 1. Разложение Фурье старшего ряда Эйзенштейна. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1978, *76*, 5—52 (РЖМат, 1978, 11А103)
16. *Вишик М. М.*, Неархимедовы меры, связанные с рядами Дирихле. Мат. сб., 1976, *99*, № 2, 248—260 (РЖМат, 1976, 6А371)
17. —, О применениях интеграла Шнирельмана в неархимедовом анализе. Успехи мат. наук, 1979, *34*, вып. 1, 223—224 (РЖМат, 1979, 8А349)
18. —, $\mathfrak{p}$-адическая дзета-функция мнимого квадратичного поля и регулятор Леопольдта. Мат. сб., 1977, *102*, № 2, 173—181 (РЖМат, 1977, 8А384)
19. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий—Шапиро И. И.*, Теория представлений и автоморфные функции (Серия: «Обобщенные функции», вып. 6). М., Наука, 1966, 512 с. (РЖМат, 1967, 12Б592К)
20. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.*, Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны. Успехи мат. наук, 1952, *7*, вып. 1, 118—137
21. *Гонгадзе Р. Ш.*, О представлении чисел квадратичными формами типа (—4, q, 1). Тр. Тбилис. ун-та, 1976, *176*, 15—27 (РЖМат, 1977, 6А113)
22. *Голубева Е. П., Фоменко О. М.*, О дзета-функции системы форм. Зап. научн. семинаров Ленинград. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1977, *67*, 156—166 (РЖМат, 1977, 7А110)
23. *Гриценко В. А.*, Симметрические квадраты дзета-функций для главной конгруэнц-подгруппы группы Зигеля рода 2. Мат. сб., 1977, *104*, № 1, 22—41 (РЖМат, 1978, 1А420)

24. *Дринфельд В. Г.*, Доказательство гипотезы Петерссона для функциональных полей. Успехи мат. наук, 1977, *32*, вып. 2, 209—210 (РЖМат, 1977, 9А502)
25. *Дринфельд В. Г.*, Доказательство глобальной гипотезы Ленглендса для $GL(2)$ над функциональным полем. Функц. анализ и его прилож, 1977, *11*, № 3, 74—75 (РЖМат, 1978, 1А405)
26. *Евдокимов С. А.*, Аналитические свойства эйлеровых произведений для конгруэнц-подгрупп $Sp_2(\mathbf{Z})$. Мат. сб., 1979, *110*, № 3, 369—398 (РЖМат, 1980, 2А468)
27. *Евдокимов С. А.*, О рациональности производящих рядов для коэффициентов Фурье зигелевых модулярных форм рода n. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1978, *76*, 65—71 (РЖМат, 1978, 11А105)
28. *Журавлев В. Г.*, Нули на критической прямой рядов Дирихле, связанных с модулярными формами Гильберта. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1978, *76*, 72—88 (РЖМат, 1978, 11А92)
29. *Калинин В. Л.*, Ряды Эйзенштейна на симплектической группе. Мат. сб., 1977, *103*, № 4, 519—549 (РЖМат, 1977, 12А484)
30. *Кузнецов Н. В.*, Новый класс тождеств для коэффициентов Фурье модулярных форм. Acta arithm., 1975, *27*, 505—519 (РЖМат, 1975, 11А186)
31. —, Спектральные методы в арифметических задачах. Зап. научн. семинаров Ленинградск. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1978, *76*, 159—166 (РЖМат, 1978, 11А106)
32. *Курчанов П. Ф.*, Когомологии дискретных групп и ряды Дирихле, связанные с параболическими формами Жаке—Ленглендса. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, *42*, № 3, 588—601 (РЖМат, 1978, 11А488)
33. *Ленг С.*, Введение в теорию модулярных форм. Пер. с англ. М., Мир, 1979, 254 с. (РЖМат, 1980, 4А471К)
34. *Ломадзе Г. А.*, Формулы для числа представлений чисел некоторыми регулярными и полурегулярными тернарными квадратичными формами, принадлежащими двухклассным родам. 1978, *34*, № 2, 131—162 (РЖМат, 1978, 10А104)
35. *Манин Ю. И.*, Неархимедово интегрирование и p-адические L-функции Жаке—Ленглендса. Успехи мат. наук, 1976, *31*, вып. 1, 5—54 (РЖМат, 1976, 8А478)
36. —, *Панчишкин А. А.*, Свертки рядов Гекке и их значения в целых точках. Мат. сб., 1977, *104*, № 4, 617—651 (РЖМат, 1978, 8А468)
37. *Панчишкин А. А.*, О рядах Дирихле, связанных с модулярными формами целого и полуцелого веса. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, *43*, № 5, 1145—1157 (РЖМат, 1980, 1А508)
38. —, Симметрические квадраты рядов Гекке и их значения в целых точках. Мат. сб., 1979, *108*, № 3, 393—417 (РЖМат, 1979, 7А679)
39. —, О p-адических рядах Гекке. В сб. Алгебра, под ред. А. И. Кострикина, Изд. Московск. ун-та, 1980, 68—71
40. *Фоменко О. М.*, О формуле Зигеля для рода 2. Зап. научн. семинаров Ленинград. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1978, *76*, 210—215 (РЖМат, 1978, 11А107)
41. *Фоменко О. М.*, Приложения теории модулярных форм к теории чисел. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 15 (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 5—91 (РЖМат, 1978, 5А88)
42. *Шокуров В. В.*, Интегралы Шимуры параболических форм. «Изв. АН СССР, Сер. мат.», 1980, *44*, № 3, 670—718 (РЖМат, 1980, 10А330)
43. *Ackerman M.*, On the generating functions of certain Eisenstein series. Math. Ann., 1979, *244*, № 1, 75—81 (РЖМат, 1980, 4А468)
44. *Allatt P., Slater J. B.*, Congruences on some special modular forms. J. London Math. Soc., 1978, *17*, № 3, 380—392 (РЖМат, 1979, 1А508)
45. *Anderson R. J.*, On the Mertens conjecture for cusp forms. Mathematica (Gr. Brit.), 1979, *26*, № 2, 236—249 (РЖМат, 1980, 12А468)

46. *Andrianov A. N.*, Modular descent and the Saito-Kurokawa conjecture. Invent. math., 1979, *53*, № 3, 267—280 (РЖМат, 1980, 4A467)
47. —, On zeta-function of Rankin type associated with Siegel modular forms. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 325—338 (РЖМат, 1979, 1A504)
48. Anwendung automorpher Funktionen auf Zahlentheorie. Tagungsber. Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1979, № 32 (РЖМат, 1980, 6A480)
49. *Arakawa Tsuneo*, Dirichlet series corresponding to Siegel's modular forms. Math. Ann., 1978, *238*, № 3, 157—173 (РЖМат, 1979, 5A569)
50. —, Dirichlet series related to the Eisenstein series on the Siegel upper half-plane. Comment. math. Univ. St. Pauli, 1978, *27*, № 1, 29—42 (РЖМат, 1979, 5A365)
51. *Aritürk Haluk*, On the composition series of principal series representations of a three-fold covering group of SL(2, *K*). Nagoya Math. J., 1980, *77*, 177—196 (РЖМат, 1980, 8A438)
52. *Arthur J. G.*, A trace formula of reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(\mathbf{Q})$. Duke Math. J., 1978, *45*, № 4, 911—952 (РЖМат, 1979, 9A425)
53. —, Eisenstein series and the trace formula. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 1. Providence, R. I., 1979, *33*, 253—274 (РЖМат, 1980, 8A414)
54. *Asai T.*, On certain Dirichlet series associated with Hilbert modular forms and Rankin's method. Math. Ann., 1977, *226*, № 1, 81—94 (РЖМат, 1977, 9A401)
55. —, On the Doi-Naganuma lifting associated with imaginary quadratic fields. Nagoya J. Math., 1978, *71*, 149—167 (РЖМат, 1979, 4A484)
56. *Ash A., Rudolph L.*, The modular symbol and continued fractions in higher dimensions. Invent. Math., 1979, *55*, № 3, 241—250 (РЖМат, 1980, 5A427)
57. *Atkin A. O. L., Li W.-C. W.*, Twists of newforms and pseudo-eigenvalues of *W*-operators. Invent. Math., 1978, *48*, № 3, 221—243 (РЖМат, 1979, 3A512)
58. Automorphic forms, representations, and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 1—2, Prividence, R. I., Amer. Math. Soc., 1979. X, 322 pp., VIII, 382 pp. (Proc. Symp. Pure Math., 1979, *33*, part 1—2) (РЖМат, 1980, 5A435K; 6A581K)
59. *Bertrand D.*, Sur les périodes de formes modulaires. C. r. Acad. sci., 1979, *AB288*, № 10, A531—A534 (РЖМат, 1979, 11A399)
60. *Borel A.*, Automorphic L-functions. Automorphic forms, representations, and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 2. Provedence. R. I., 1979, *33*, 27—61 (РЖМат, 1980, 8A407)
61. —, Formes automorphes et séries de Dirichlet (d'après R. P. Langlands). Lect. Notes Math., 1976, *514*, 183—222 (РЖМат, 1976, 11A519)
62. —, *Jacquet H.*, Automorphic forms and automorphic representations. forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part I. Providence, R. I., 1979, *33*, 189—202 (РЖМат, 1980, 8A410)
63. *Buhler J.*, An icosahedral modular form of weight one. Lect. Notes Math., 1977, *601*, 289—294 (РЖМат, 1978, 4A263)
64. *Cartier P.*, Representations of -adic groups: a survey. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis. Ore, 1977. Part 1. Providence, R. I., 1979, *33*, 111—155 (РЖМат, 1980, 7A434)
65. *Casselman W.*, The Hasse-Weil ζ-function of some moduli varieties of dimension greater than one. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 2. Providence, R. I., 1979, *33*, 141—163 (РЖМат, 1980, 8A425)
66. *Chowla S., Selberg A.*, On Epstein's zeta-functions. J. reine and angew. Math., 1967, 227—86—110

67. *Coates J., Wiles A.*, On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer. Invent. Math., 1977, *39*, 223—251 (РЖМат, 1977, 11A411)
68. *Cohen Henri*, A lifting of modular forms in one variable to Hilbert modular forms in two variables. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 175—196 (РЖМат, 1979, 1A501)
69. —, *Oesterlé J.*, Dimensions des espaces de formes modulaires. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 69—78 (РЖМат, 1979, 1A497)
70. *Deligne P.*, Formes modulaires et representations de GL(2). Lect. Notes Math., 1973, *349*, 55—106 (РЖМат, 1975, 1A467)
71. —, La conjecture de Weil. I. Publ. math. Inst. hautes études sci., 1974, *43*, 273—307; русский перевод: Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 5, 159—190 (РЖМат, 1976, 3A454)
72. —, Les constantes des equations fonctionnelles des fonctions *L*. Lect. Notes Math., 1973, *349*, 501—595 (РЖМат, 1974, 11A525)
73. —, Les constantes locales de l'equation fonctionnelle de la fonction *L* d'Artin d'une representation orthogonale. Invent. Math., 1976, *35*, 299—316, (РЖМат, 1977, 4A364)
74. —, Sommes de Gauss cubiques et revêtements de SL(2), d'après S. J. Patterson. Lect. Notes Math., 1980, *770*, 244—277 (РЖМат, 1980, 2A437)
75. —, Valeurs de fonctions *L* et périodes d'intégrales. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977, Part 2. Provdience. R. I., 1979, *33*, 313—346 (РЖМат, 1980, 8A432)
76. —, Serre J.-P., Formes modulaires de poids I. Ann. sci. École norm. supér., 1974, *7*, 507—530
77. *Dirdal G.*, Congruences for the Fourier coefficients of certain modular forms. Math. scand., 1976, *39*, № 1, 131—145 (РЖМат, 1978, 4A360)
78. *Drinfeld V. G.*, Langlands conjecture for GL(2) over functional fields. Proc. Int. Congr. Math. Helsinki, 1978, 565—574
79. *Doi K., Naganuma H.*, On the functional equation of certain Dirichlet series. Invent. Math., 1969, *9*, № 1, 1—14 (РЖМат, 1970, 8A297)
80. —, *Ohta M.*, On some congruences between cusp forms on $\Gamma_0(N)$. Lect. Notes Math., 1977, *601*, 91—105 (РЖМат, 1978, 2A424)
81. *Eichler M.*, On the representation of modular forms by theta-series. Roy. Soc. Can. Math. Repts., 1979, *1*, № 2, 71—74 (РЖМат, 1980, 4A470)
82. —, On theta functions of real algebraic number fields. Acta arithm., 1977, *33*, № 3, 269—292 (РЖМат, 1978, 4A269)
83. —, The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators. Lect. Notes Math., 1973, *320*, 75—151 (РЖМат, 1974, 1A599)
84. —, Theta functions over $\mathbf{Q}$ and over $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 197—225 (РЖМат, 1979, 1A502)
85. *Fegan H. D.*, Theta functions and modular jets. Nagoya Math J., 1978, *72*, 83—92 (РЖМат, 1979, 7A475)
86. *Flath D.*, Decomposition of representations into tensor products. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977, Part 1. Providence, R. I., 1979, *33*, 179—183 (РЖМат, 1980, 8A406)
87. *Flicker Y. Z.*, Automorphic forms on covering groups of GL(2). Invent. Math., 1980, *57*, № 2, 119—182 (РЖМат, 1981, 1A465)
88. *Freitag E.*, Die Invarianz gewisser von Thetareihen erzeugter Vektorräume unter Heckeoperatoren. Math. Z., 1977, *156*, № 2, 141—155 (РЖМат, 1978, 3A304)
89. *Gelbart S.*, Automorphic forms and Artin's conjecture. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 241—276 (РЖМат, 1978, 11A486)
90. —, Elliptic curves and automorphic representations. Adv. Math., 1976, *21*, № 3, 235—292 (РЖМат, 1977, 5A336)
91. —, Examples of dual reductive pairs. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977, Part 1. Providence, R. I., 1979, *33*, 287—296 (РЖМат, 1980, 8A416)

92. —, *Howe R., Piatetski-Shapiro I. I.*, Uniqueness and existence of Whittaker models for the methaplectic group. Isr. J. Math., 1979, *34*, № 1-2, 21—37 (РЖМат, 1980, 8А439)

93. —, *Jacquet H.*, A relation between automorphic forms on GL(2) and GL(3). Proc. Nat. Acad. Sci USA, 1976, *73*, № 10, 3348—3350 (РЖМат, 1977, 7А425)

94. —, —, Forms of GL(2) from the analytic point of view. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 1. Providence, R. I., 1979, *33*, 213—251 (РЖМат, 1980, 8А413)

95. —, *Piatetski-Shapiro I. I.*, Automorphic *L*-functions of half-integral weight. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1978, *75*, № 4, 1620—1623 (РЖМат, 1979, 1А507)

96. —, —, Distinguished representations anf modular forms of half-integral weight. Invent. Math., 1980, *59*, № 2, 145—188 (РЖМат, 1980, 12А461)

97. *Gérardin P., Labesse J. P.*, The solution of a base change problem for GL(2) (following Langlands, Saito, Shintani). Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977, Part 2. Providence, R. I., 1979, *33*, 115—133 (РЖМат, 1980, 8А423)

98. *Goldfeld D.*, Analytic and arithmetic theory of Poincare series. Asterisque, 1979, № 61, 95—107 (РЖМат, 1979, 9А612)

99. —, The conjectures of Birch and Swinnerton Dyer and the class numbers of quadratic fields. Aste'risque, 1977, *41—42*, 219—227 (РЖМат, 1978, 1А404)

100. —, *Viola C.*, Mean values of *L*-functions associated to elliptic, Fermat and other curves at the center of the critical strip. J. Number Theory, 1979, *11*, № 3, 305—320 (РЖМат, 1980, 1А512)

101. *Godement R., Jacquet H.*, Zeta functions of simple algebras. Lect. Notes Math., 1972, *260*, X, 188 pp. (РЖМат, 1972, 11А328)

102. *Goldstein L. J., Razar M.*, Ramanujan type formulas for $\zeta(2k-1)$. J. Pure and Appl. Algebra, 1978, *13*, № 1, 13—17 (РЖМат, 1979, 3А100)

103. *Gooding F., Jr*, Modular forms arising from spherical polynomials und positive definite quadratic forms. J. Number Theory, 1977, *9*, № 1, 36—47 (РЖМат, 1977, 10А72)

104. *Goss D.*, The algebraist's upper half-plane. Bull. Amer. Math. Soc., 1980, *2*, № 3, 391—415 (РЖМат, 1980, 12А466)

105. *Gross B. H.*, On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg. Invent. Math., 1978, *45*, № 2, 193—211 (РЖМат, 1978, 7А554)

106. *Gundlach K.-B.*, On the representation of a number as a sum of squares. Glasgow Math. J., 1978, *19*, № 2, 173—197 (РЖМат, 1978, 12А148)

107. *Harder G.*, Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern. Invent. Math., 1969, *7*, № 1, 33—54 (РЖМат, 1969, 11А370)

108. —, *Kazhdan D. A.*, Eisenstein series and the trace formula. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 2. Providence, R. I., 1979, *33*, 357—379 (РЖМат, 1980, 8А434)

109. *Harris M.*, A note on three lemmas of Shimura. Duke Math. J., 1979, *46*, № 4, 871—879 (РЖМат, 1980, 8А436)

110. *Hashimoto Ki-ichiro*, On Brand matrices associated with the positive definite quaternion hermitian forms. J. Fac. sci. Univ. Tokyó, 1980, Sec. 1A, *27*, № 1, 227—245 (РЖМат, 1980, 11А442)

111. *Hatada Kazuyki*, Eigenvalues of Hecke operators on SL(2, **Z**). Math. Ann., 1979, *239*, № 1, 75—96 (РЖМат, 1979, 7А472)

112. —, Periods of primitive forms. Proc. Jap. Acad., 1977, *A53*, № 5, 174—177 (РЖМат, 1978, 6А468)

113. *Heath—Brown D. R., Patterson S. J.*, The distribution of Kummer sums at prime arguments. J. reine und angew Math., 1979, № 130, 111—130 (РЖМат, 1980, 3А65)

114. *Hecke E.*, Mathematische Werke. Göttingen. Vandenhoeck und Ruprecht, 1959, 955S. (РЖМат, 1960, 2627К)

115. *Hejhal D. A.*, The Selberg trace formula for PSL (2, **R**) I. Lect. Notes Math., 1976, *548*, IV, 516 pp. (РЖМат, 1977, 8А634)

116. *Hijikata Hiroaki, Pizer Arnold, Shemanske T.*, The basis problem for modular forms on $\Gamma_0(N)$. Proc. Jap. Acad., 1980, *A56*, № 6, 280—284 (РЖМат, 1980, 12А464)

117. *Hiramatsu T.*, On automorphic forms of weight one 1. Math. Semin. Notes Kobe Unive., 1980, *8*, № 1, 173—179

118. *Howe R.*, θ-series and invariant theory. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 1. Providence, R. I., 1979, *33*, 275—285 (РЖМат, 1980, 8А415)

119. —, *Piatetski-Shapiro I. I.*, A counterexample to the «Generalized ramanujan conjecture» for (quasi-) split groups. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977, Part 1. Providence, R. I., 1979, *33*, 315—322 (РЖМат, 1980, 8А418)

120. *Ishikawa Hirofumi*, The traces of Hecke operators in the space of the «Hilbert modular» type cusp forms of weight two. Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1979, *29*, № 1, 1—28 (РЖМат, 1980, 1А506)

121. *Jacquet H.*, Automorphic forms on GL(2). Part II. Lect. Notes Math., 1972, IV, *278*, 142 pp. (РЖМат, 1973, 3А437)

122. —, Principal *L*-functions of the linear group. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 2. Providence. R. I., 1979, *33*, 63—86 (РЖМат, 1980, 8А408)

123. —, *Langlands R. P.*, Automorphic forms on GL(2). Lect. Notes Math., 1970, *114*, VII 548 pp. (РЖМат, 1970, 8А344); русский перевод: Жаке Э., Ленглендс Р., Автоморфные формы на GL(2). М., Мир, 1973

124. —, *Piatetski-Shapiro I. I., Shalika J.*, Automorphic forms on GL(3). I, II. Ann. Math., 1979, *109*, № 1, 169—212, № 2, 213—258 (РЖМат, 1979, 11А406, 11А407)

125. —, —, —, Constructions of cusp forms in GL(3). Lect. Notes № 16, Dept. of Math. Univ. of Maryland, 1975

126. —, *Shalika J.*, A non-vanishing theorem for zeta-functions of Gl_n, Invent. Math., 1976, *38*, 1—16 (РЖМат, 1977, 7А433)

127. *Kac V. G.*, An elucidation of «Infinite-dimensional algebras... and the very strange formula». $E_8^{(1)}$ and the cube root of the modular invariant. Adv. Math., 1980, *35*, № 3, 264—273 (РЖМат, 1980, 11А181)

128. —, Infinite-dimensional algebras, Dedekind's η-function, classical Möbius function and very strange formula. Adv. Math., 1978, *30*, 85—136 (РЖМат, 1979, 6А239)

129. *Katz N. M.*, *p*-adic interpolation of real analytic Eisenstein series. Ann. Math., 1976, *104*, № 3, 459—571 (РЖМат, 1977, 7А426)

130. —, The Eisenstein measure and *p*-adic interpolation. Amer. J. Math., 1977, *99*, № 2, 238—311 (РЖМат, 1978, 2А410)

131. *Kazhdan D. A.*, An introduction to Drinfeld's «shtuka». Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 2. Providence, R. I., 1979, *33*, 347—356 (РЖМат, 1980, 8А433)

132. *Kitaoka Y.*, Modular forms of degree n and representation by quadratic forms. Nagoya Math. J., 1979, *74*, 95—122 (РЖМат, 1979, 12А426)

133. *Koblitz N.*, 2-adic and 3-adic ordinals of $(1/j)$-expansion coefficients for the weight 2 Eisenstein series. Bull. Lond. Math. Soc., 1977, *9*, 188—192 (РЖМат, 1978, 2А416)

134. *Koch H.*, Classification of the primitive representations of the Galois groups of local fields. Invent. Math., 1977, *40*, 195—216 (РЖМат, 1978, 2А314)

135. *Kohnen W.*, Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$. Math. Ann., 1980, *248*, № 3, 249—266 (РЖМат, 1980, 11А438)
136. *Koike Masao,* A note on modular forms mod *p*. Proc. Jap. Acad., 1979, *A55*, № 8, 313—315 (РЖМат, 1980, 5А429)
137. —, Congruences between cusp forms and linear representations of the Galois group. Algebraic Number Theory. Proc. Taniguchi Int. Symp. Div. Math. N 2. Kyoto 1976. Tokyo, 1977, 109—116 (РЖМат, 1978, 9А358)
138. —, On *p*-adic properties of the Eichler-Selber trace formula II. Nagoya Math. J., 1976, *64*, 87—96 (РЖМат, 1977, 8А473)
139. *Kottwitz R. E.,* Combinatorics and Shimura varieties mod *p* (Based on lectures by Langlands). Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 2. Providence, R. I., 1979, *33*, 185—192 (РЖМат, 1980, 8А427)
140. —, Orbital integrals and base change. Automorphic forms, representations and L-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 1. Providence, R. I., 1979, *33*, 203—207 (РЖМат, 1980, 8А422)
141. *Kubota Tomio,* On a generalized Weil type representation. Algebraic Number Theory. Proc. Taniguchi. Int. Symp. Div. Math. N 2, Kyoto, 1976, Tokyo, 1977 (РЖМат, 1978, 7А558)
142. *Kudla S. S.,* On certain arithmetic automorphic forms for SU(1, *q*). Invent. Math., 1979, *52*, № 1, 1—25 (РЖМат, 1979, 12А503)
143. —, Relations between automorphic forms produced by theta-functions. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 277—285 (РЖМат, 1978, 11А487)
144. —, Theta-functions and Hilbert modular forms. Nagoya Math. J., 1978, *69*, 97—106 (РЖМат, 1978, 12А742)
145. *Kurokawa Nobyshige,* Congruences between Siegel modular forms of degree two. Proc. Jap. Acad., 1979, *A55*, № 10, 417—422 (РЖМат, 1980, 7А439)
146. —, Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two. Invent. Math., 1978, *49*, 149—165 (РЖМат, 1979, 5А363)
147. —, On the meromorphy of Euler products. Proc. Jap. Acad., 1978, *A54*, № 6, 163—166 (РЖМат, 1979, 1А385)
148. *Kutzko Ph.,* The Langlands conjecture for GL_2 of a local fields. Bull. Amer. Math. Soc., 1980, *2*, № 3, 455—458 (РЖМат, 1980, 12А465)
149. *Langlands R. P.,* Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Marchen. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 2. Providence, R. I., 1979, *33*, 205—246 (РЖМат, 1980, 8А429)
150. —, Euler products (preprint); русский перевод: Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1971, *15*, № 1, 14—43 (РЖМат, 1971, 8А317)
151. —, Modular forms and *l*-adic representations. Lect. Notes Math., 1973, *349*, 362—498 (РЖМат, 1975, 1А469)
152. —, On the functional equations satisfied by Eisenstein series. Lect. Notes Math., 1976, 544, V, 337 pp. (РЖМат, 1977, 5А344)
153. —, On the notion of an automorphic representation, a supplement to the preceeding paper. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 1. Providence. R. I., 1979, *33*, 203—207 (РЖМат, 1980, 8А411)
154. —, Problems in the theory of automorphic forms. Lect. Notes Math., 1970, № 170, 18—61 (РЖМат, 1971, 8А318); русский перевод: Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1971, *15*, № 2, 57—83
155. —, Shimura varieties and the Selberg trace formula. Can. J. Math., 1977, *29*, № 5, 1292—1299 (РЖМат, 1978, 6А471)
156. —, Stable conjugacy: definitions and lemmas. Can. J. Math., 1979, *31*, № 4, 700—725 (РЖМат, 1980, 4А463)
157. *Li W.-C. W.,* Eisenstein series and decomposition theory over function fields. Math. Ann., 1979, *240*, № 2, 115—139 (РЖМат, 1979, 9А340)
158. —, Hecke—Weil—Jacquet—Langlands theorem revisited. Lect. Notes Math., 1979, *751*, 206—220 (РЖМат, 1980, 5А424)

159. —, *L*-series of Rankin type and their functional equations. Math. Ann., 1979, *244*, № 2, 135—166 (РЖМат, 1980, 5А443)
160. —, On the representations of GL (2). I. ε-factors and *n*-closness. II. ε-factors of the representations of GL(2)×GL(2). J. reine und angew. Math., 1980, *313*, 27—42, *314*, 4—20 (РЖМат, 1980, 7А436, 7А437)
161. *Lichtenbaum S.,* On *p*-adic *L*-functions associated to elliptic curves. Invent. Math., 1980, *56*, № 1, 19—55 (РЖМат, 1980, 5А422)
162. *Lusztig G.,* Some remarks on the supercuspidal representations of *p*-adic semisimple groups. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 2. Providence, R. I., 1979, *33*, 171—175 (РЖМат, 1980, 8А405)
163. *Maass H.,* Indefinite quadratische Formen und Eulerprodukte. Comm. Pure Appl. Math., 1976, *29*, № 6, 689—699 (РЖМат, 1977, 7А120)
164. —, Konstruktion von Epizenformen beliebigen Grades mit Hilfe von Thetareihen. Math. Ann., 1977, *226*, № 3, 275—284 (РЖМат, 1977, 8А134)
165. —, Uber ein Analogon zur Vermutung von Saito—Kurokawa. Invent. Math., 1980, *60*, № 1, 85—104 (РЖМат, 1981, 2А441)
166. —, Uber eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. Math. Ann., 1949, *121*, 141—183
167. —, Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades I, II, III. Invent. Math., 1979, *52*, 95—104; *53*, 249—253, 255—265 (РЖМат, 1979, 11А129; 1980, 4А465, 4А466)
168. *Maher D. P.,* Modular forms from codes. Can. J. Math., 1980, *32*, № 1, 40—58 (РЖМат, 1980, 11А440)
169. *Manin Yu. I.,* Modular forms and number theory. Proc. Int. Congr. Math. Helsinki, 1978, 177—186
170. *Matsuda Isao,* Dirichlet series corresponding to Siegel modular forms of degree 2, level *N*. Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1978, *28*, № 1, 21—49 (РЖМат, 1979, 3А511)
171. *Mazur B.,* On the arithmetic of special values of *L*-functions. Invent. Math., 1979, *55*, № 3, 207—240 (РЖМат, 1980, 5А426)
172. —, Rational points on modular curves. Lect. Notes Math., 1977, *601*, 107—148 (РЖМат, 1978, 2А425)
173. *Miyawaki Isao,* On the zeros of Dirichlet series associated with cusp-forms on $\Gamma_0(N)$. Кюсю дайгаку кёёбу сугаку дзасси, Math. Repts Coll. Gen. Educ. Kyushu Univ., 1979, *12*, № 1, 17—22 (РЖМат, 1980, 7А423)
174. Modular functions of one variable. I, II, III, IV. Proc. Int. Summer School, Univ Antwerp, RUCA, July 17—Aug. 3, 1972, Ed. Kugk W., Lect. Notes Math., 1973, 320, 195 pp.; Eds Delighe P., Kuyk W., Lect. Notes Math., 1973, 349, 598 pp.; Eds Kuyk W., Serre J.-P., Lect Notes Math., 1973, 350, 350 pp.; Eds Birch B. J., Kuyk W., Lect Notes Math., 1975, *476*, 151 pp. (РЖМат, 1974, 1А433К, 11А513К, 6А442К; 1976, 3А442К)
175. Modular functions of one variable. V, VI. Proc. Int. Conf., Bonn, July 2—14, 1976, Eds Serre J.-P., Zagier D. B., Lect. Notes Math., 1977, № 601, 294 pp.; Lect. Notes Math., 1977, № 627 (РЖМат, 1978, 2А407)
176. *Moreno C. J.,* Analytic properties of Euler products of automorphic representations. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 11—26 (РЖМат, 1979, 1А495)
177. —, Explicit formulas in the theory of automorphic forms. Lect. Notes Math., 1977, *626*, 73—216 (РЖМат, 1979, 1А494)
178. *Nagaoka Shoyu,* *p*-adic properties of Siegel modular forms of degree 2. Nagoya Math. J., 1978, *71*, 43—60 (РЖМат, 1979, 5А364)
179. *Niwa Shinji,* On Shimura's trase formula. Nagoya Math. J., 1977, *66*, 183—202 (РЖМат, 1977, 12А485)
180. *Novodvorsky M. E.,* Automorphic *L*-functions for symplectic group GSp(4). Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. Corvallis. Ore, 1977. Part 2. Providence. R. I., 1979, *33*, 87—95 (РЖМат, 1980, 8А420)
181. —, Théorie de Hecke pour certains groupes orthogonaux. C. r. Acad. sci., 1977, *285*, № 3, A93—A94 (РЖМат, 1978, 1А407)

182. *Oesterle J.*, Sur la trace des operateurs de Hecke. These doct. Univ. Paris—Sud., 1977, 45 p. (РЖМат, 1980, 1А507)
183. *Oda T.*, On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature (2, *n*-2). Math. Ann., 1977, *231*, № 2, 97—144 (РЖМат, 1978, 5А431)
184. *Patterson S. J.*, A cubic analogue of the theta series. J. reine und angew. Math., 1977, *296*, 125—161 (РЖМат, 1978, 8А133)
185. *Piatetski-Shapiro I. I.*, Classical and adelic automorphic forms, An introduction. Automorphic forms, representations *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977, Part 2. Providence, R. I., 1979, *33*, 185—188 (РЖМат, 1980, 8А409)
186. —, Multiplicity one theorems. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977, Part 1. Providence, R. I., 1979, *33*, 209—212 (РЖМат, 1980, 8А412)
187. *Pizer A.*, An algorithm for computing modular forms on $\Gamma_0(N)$. J. Algebra, 1980, *64*, № 2, 340—389 (РЖМат, 1981, 2А443)
188. *Raghavan S.*, Singular modular forms of degree s. C. P. Ramanujam—A Tribulte. Berlin e. a., 1978, 263—272 (РЖМат, 1979, 11А444)
189. *Rallis S.*, On a relation between $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ cusp forms and automorphic forms on orthogonal groups. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 1. providence, R. I., 1979, *33*, 297—311 (РЖМат, 1980, 8А417)
190. —, *Schiffmann G.*, Automorphic forms constructed from the Weil representation: holomorphic case. Amer. J. Math., 1978, *100*, № 5, 1049—1122
191. *Rankin R. A.*, Modular forms and functions. Cambridge e. a., Cambridge Univ. Press, 1977, 384 yy. (РЖМат, 1979, 1А509)
192. —, Ramanujan's unpublished work on congruences. Lect. Notes Math., 1977, *601*, 3—15 (РЖМат, 1978, 4А118)
193. —, The construction of automorphic forms from the derivatives of a given form. J. Ind. Math. Soc., 1956, *20*, № 1—3, 103—116 (РЖМат, 1957, 7601)
194. *Rappoport M.*, Compactifications de l'espace de modules de Hilbert—Blumenthal. Compos. Math., 1978, *36*, № 3, 255—335 (РЖМат, 1978, 11А466)
195. *Razar M. J.*, Modular forms for $\Gamma_0(N)$ and Dirichlet series. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *231*, № 2, 489—495 (РЖМат, 1978, 6А467)
196. —, Values of Dirichlet series at integers in the critical strip. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 1—10 (РЖМат, 1978, 11А485)
197. *Ribet K. A.*, Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus. Lect. Notes Math., 1977, *601*, 17—52 (РЖМат, 1978, 4А259)
198. *Robert G.*, Congruences entre series d'Eisenstein, dans le cas supersingulier. Invent. Math., 1980, *61*, № 2, 103—158
199. *Saavedra R. N.*, Catégories tannakiennes. Lect. Notes Math., 1972, 265 (РЖМат, 1972, 12А355К)
200. *Saito Hiroshi*, On lifting of automorphic forms. Sémin. Délange—Pisot—Poiton. Théor. nombres. Univ. Pierre et Marie Carie, 1976—1977, *18*, № 1, 13/01—13/06 (РЖМат, 1978, 10А356)
201. —, *Yamauchi Masatoski*, Trace formula of certain Hecke operators for $\Gamma_0(q^\nu)$. Nagoya Math. J., 1979, *76*, 1—33 (РЖМат, 1980, 7А440)
202. *Schneider V.*, Die Dimensionen der Räume automorpher Formen zu Modulgruppen in Quaternionenschiefkörpern über reelquadratische Zahlkörpern. Math. Ann., 1977, *226*, № 2, 183—194 (РЖМат, 1977, 8А467)
203. *Serre J.-P.*, Representations *l*-adiques. Alg. Numb. Theory. Proc. Taniguchi Int Symp. Div. Math. N 2, Kyoto, 1976, Tokyo, 1977, 117—193 (РЖМат, 1978, 9А359)
204. —, *Stark H. M.*, Modular forms of weight 1/2. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 27—67 (РЖМат, 1979, 1А496)
205. *Shahidi F.*, Functional equation satisfied by certain *L*-functions. Compositio Math., 1978, *37*, № 2, 171—207 (РЖМат, 1979, 2А319)
206. *Shelstad D.*, Notes on *L*-indistinguishability (based on a lecture of R. P. Langlands). Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 2. Providence, R. I., 1979, *33*, 193—203 (РЖМат, 1980, 8А428)
207. *Shih K.-Y.*, Construction of arithmetic automorphic functions for special Clifford groups. Nagoya Math. J., 1979, *76*, 153—171
208. *Shimizu H.*, Some examples of new forms. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1977. Sec. 1A, *24*, № 1, 97—113 (РЖМат, 1978, 1А408)
209. *Shimura Goro*, Automorphic forms and the periods of abelian varieties. J. Math. Soc. Jap., 1979, *31*, № 3, 561—592 (РЖМат, 1980, 1А493)
210. —, On certain reciprocity-laws for theta functions and modular forms. Acta math., 1978, *141*, № 1—2, 35—71 (РЖМат, 1979, 3А402)
211. —, On modular forms of half integral weight. Ann. Math., 1973, *97*, № 3, 440—481 (РЖМат, 1973, 11А525)
212. —, On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables. Ann. Math., 1975, *102*, № 3, 491—515 (РЖМат, 1976, 8А477)
213. —, On the periods of modular forms. Math. Ann., 1977, *229*, № 3, 211—221 (РЖМат, 1978, 1А339)
214. —, The arithmetic of automorphic forms with respect to a unitary group. Ann. Math., 1978, 107, № 3, 569—605 (РЖМат, 1979, 11А483)
215. —, The arithmetic of certain zeta-functions and automorphic forms on orthogonal groups. Ann. Math., 1980, *111*, № 2, 313—375 (РЖМат, 1980, 12А463)
216. —, The special values of the zeta functions associated with cusp forms. Comm. Pure Appl. Math., 1976, *29*, № 6, 783—804 (РЖМат, 1977, 8А472)
217. —, The special values of the zeta-functions associated with Hilbert modular forms. Duke Math. J., 1978, *45*, № 3, 637—679 (РЖМат, 1979, 4А398)
218. *Shintani Takuro*, On a Kronecker limit formula for real quadratic fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1977. Sec. IA, *24*, № 1, 167—199 (РЖМат, 1977, 12А139)
219. —, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1976, Sec. IA, *23*, № 2, 393—417 (РЖМат, 1977, 4А117)
220. —, On liftings of holomorphic cusp forms. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 2. Providence, R. I., 1979, *33*, 97—110 (РЖМат, 1980, 8А421)
221. *Springer T. A.*, Reductive groups. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. Corvallis, Ore, 1977. Part 1. Providence, R. I., 1979, *33*, 3—27 (РЖМат, 1980, 7А428)
222. *Stark H. M.*, Class fields and modular forms of weight one. Lect. Notes Math., 1977, *601*, 277—287 (РЖМат, 1978, 4А262)
223. *Strassberg H.*, *L*-functions for GL(*n*). Math. Ann., 1979, *245*, № 1, 23—36 (РЖМат, 1980, 5А425)
224. *Suzuki Tosbiaki*, Weil type representations and automorphic forms. Nagoya Math. J., 1980, *77*, 145—166 (РЖМат, 1980, 8А437)
225. *Swinnerton-Dyer H. P. F.*, On *l*-adic representations and congruences for coefficients of modular forms. II. Lect. Notes Math., 1977, *601*, 63—90 (РЖМат, 1978, 4А261)
226. *Tandom R.*, The Hecke theory of GL(2) and quadratic forms. J. Ind. Math. Soc., 1976, 40, № 1—4, 87—122 (РЖМат, 1977, 4А363)
227. *Tanigawa Yoshio*, Selberg trace formula for Picard groups. Algebraic Number theory. Proc. Taniguchi Int. Symp. Div. Math. N 2. Kyoto, 1976. Tokyo, 1977, 229—242 (РЖМат, 1978, 7А559)
228. *Tate J*, Number theoretic background. Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 2. Providence, R. I., 1979, *33*, 3—26 (РЖМат, 1980, 8А419)
229. *Thompson J. G.*, Finite groups and modular functions. Bull. Lond. Math. Soc., 1979, *11*, № 3, 347—351 (РЖМат, 1980, 8А168)

230. *Tsuyumine Shigeaki,* Constructions of modular forms by means of transformation formulas for theta-series. Tsukuba J. Math., 1979, *3*, № 2, 59—80 (РЖМат, 1980, 7А444)
231. *Tunnell J. B.,* On the local Langlands conjecture for GL(2). Invent. Math., 1978, *46*, 179—200 (РЖМат, 1978, 11А484)
232. —, Report on the local Langlands conjecture for — Automorphic forms, representations and *L*-functions. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977, Part». Providence, R. I., 1979, *33*, 3—26 (РЖМат, 1980, 8А419)
233. *Vignéras M.-F.,* Facteurs gamma et équations fonctionnelles. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 79—103 (РЖМат, 1979, 1А498)
234. —, L'equation fonctionnelle de la fonction zêta de Selberg du group modulaire PSL(2, **Z**). Astérisque, 1979. № 61, 235—249 (РЖМат, 1979, 9А432)
235. —, Séries thêta des formes quadratiques indéfinites. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 227—239 (РЖМат, 1979, 1А503)
236. *Waldspurger J.-L.,* Engendrement par des séries thêta de sertains espaces de formes modulaires. Invent. Math., 1979, *50*, № 2, 135—168 (РЖМат, 1979, 7А474)
237. —, Formes quadratiques à 4 variables et relèvement. Acta arithm., 1980, *36*, № 4, 377—405 (РЖМат, 1981, 2А445)
238. *Weil André,* Dirichlet series and automorphic forms. Lect. Notes Math., 1971, № 189, 164 pp. (РЖМат, 1971, 9А376)
240. —, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker. Berlin e. a., Springer, 1976; русский перевод: А. Вейль, Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. М., Мир, 1978, 112 с.
241. —, Remarks on Hecke's lemma and its use. Algebraic Number Theory. Proc. Taniguchi Int. Symp. Div. Math. N 2, Kyoto, 1976, Tokyo, 1977, 267—274 (РЖМат, 1978, 7А553)
242. —, Sur les periodes des integrales abeliennes. Comm. Pure Appl. Math., 1976, *29*, 813—819 (РЖМат, 1977, 9А493)
243. —, Über die Besimmung Dirichletscher Reihen durch Functionalgleichungen. Math. Ann., 1967, *168*, 149—156 (РЖМат, 1967, 11А137)
244. *Yoshida Hiroyuki,* On an explicit construction of Siegel modular forms of genus 2. Proc. Jap. Acad., 1979, *A55*, № 8, 297—300 (РЖМат, 1980, 5А597)
245. —, On extraordinary reprecsentations of Gl (2) Algebraic Number Theory. Proc. Taniguchi Int. Symp. Div. Math. N 2, Kyoto, 1976. Tokyo, 1977, 291—303 (РЖМат, 1978, 7А560)
246. —, Siegel's modular forms and the artihmetic of quadratic forms. Invent. math., 1980, *60*, № 3, 193—248 (РЖМат, 1981, 2А442)
247. *Zagier D,.* Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. Lect. Notes Math., 1977, *627*, 105—169 (РЖМат, 1979, 1А499)
248. —, Modular forms accosiated to real quadratic fields. Invent. Math., 1975, *30*, № 1, 1—46 (РЖМат, 1976, 5А354)

УДК 515.142.26

ТЕОРИЯ ШЕЙПОВ. I.

Ю. М. Смирнов

Это — первый обзор по теории шейпов. Он содержит примерно половину результатов: помимо общих вопросов, здесь обсуждены вопросы, связанные с алгебраической топологией, а также основные шейповые инварианты. Рассмотрена лишь основная теория шейпов Борсука—Мардешича. В обзор не вошли вопросы о геометрической реализации и расположения компактов в евклидовых и гильбертовом пространствах, а также сильные и иные теории шейпов. Надеюсь, в ближайшее время дать и второй обзор, охватывающий весь этот недостающий материал.

Теория шейпов это — общая теория спектральных гомотопических инвариантов со своими специфическими проблемами, тесно связанными с некоторыми давними глубокими проблемами топологии*. Это — один из самых молодых (около 20 лет) разделов топологии, интенсивно развивающийся в настоящее время.

Впервые теория шейпов открыла себя в работах Борсука [23—28]. Им была, во-первых, найдена естественная категория метризуемых компактов, более слабая чем гомотопическая категория, для которой спектральные группы гомологий, когомологий и гомотопий инвариантны, а во-вторых, даны основы теории шейпов. Спектральные гомотопические группы вводились ранее и другими авторами: Христи [40] и Чогошвили [39], но не получили известности. В настоящее время развитие теории шейпов достигло высокого уровня. Основы теории шейпов в первоначальном «геометрическом» виде можно найти у Борсука [8, 34], в современном «идейном» виде — у Эдвардса с Хастингсом [72] и у Кордье с Портером [41], а в подробном, хотя и кратком изложении — у Дыдака с Сегалом [65].

* Отступая далеко в сторону, отметим и на связь с проблемой П. С. Александрова о существовании бесконечномерных метризуемых компактов конечной когомологической размерности [19, 81].

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Чтобы определить хотя бы шейповую эквивалентность, нужна про-гомотопическая категория pro-H-TOP обратных спектров $\underline{X}=\{X_\alpha,\ p_{\alpha\alpha'},\ A\}$ гомотопической категории H-TOP топологических пространств. Ее морфизмы задаются формулой Гротендика $\mathrm{MOR}(\underline{X},\ \underline{Y})=\varprojlim_{\beta}\varinjlim_{\alpha}[X_\alpha,\ Y_\beta]$, где Y_β — элементы спектра $\underline{Y}=\{Y_\beta,\ q_{\beta\beta'},\ B\}$, а $[X_\alpha,\ Y_\beta]$ — гомотопические классы отображений. Представителем морфизма $f:\underline{X}\to\underline{Y}$ является система $\underline{f}=\{f_\beta,\ \varphi\}$ из отображения $\varphi:B\to A$ и из гомотопических классов $f_\beta:X_{\varphi\beta}\to Y_\beta$, удовлетворяющая условию: для любой проекции $q_{\beta\beta'}:Y_{\beta'}\to Y_\beta$ должна существовать коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X_{\varphi\beta'} \arrow[r, "f"] & Y_{\beta'} \arrow[dr, "q"] & \\ X_\alpha \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "p"'] & X_{\varphi\beta} \arrow[rr, "f"'] & & Y_\beta \end{tikzcd}.$$

Эквивалентность, объединяющая системы $\underline{f}$ и $\underline{f}'=\{f'_\beta,\ \varphi'\}$ в морфизмы f, определяется проще: для каждого Y_β должна существовать коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X_{\varphi\beta} \arrow[dr, "f"] & \\ X_\alpha \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "p"'] & & Y_\beta \\ & X_{\varphi'\beta} \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}.$$

Композиция морфизмов $f:\underline{X}\to\underline{Y}$ и $g:\underline{Y}\to\underline{Z}=\{Z_{\gamma'}\ r_{\gamma\gamma'},\ \Gamma\}$ задается с помощью представителей $\underline{f}=\{f_\beta,\ \varphi\}$ и $\underline{g}=\{g_\gamma,\ \psi\}$ формулой $\underline{g}\circ\underline{f}=\{g_\gamma\circ f_{\psi\gamma},\ \varphi\circ\psi\}$ (см. [65] или [20]).

Легко строится простейший «чеховский» функтор C:H-TOP→pro-H-CW в про-гомотопическую категорию обратных спектров полной подкатегории H-CW (категории H—TOP) пространств, гомотопически эквивалентных клеточным комплексам: с помощью давно известного сопоставления каждому топологическому пространству X обратного спектра $\check{C}(X)$ из нервов X_α нормальных локально конечных открытых покрытий α с естественными проекциями, порожденными вписыванием покрытий. Объектами шейповой категории S-TOP являются объекты категории H-TOP, т. е. топологические пространства, а морфизмами — морфизмы категории pro-H-CW: $S(X, Y)=\mathrm{MOR}(\check{C}(X),\ \check{C}(Y))$. Шейповая эквивалентность пространств X и Y означает, что соответствующие спектры $\check{C}(X)$ и $\check{C}(Y)$ эквивалентны (изоморфны) в про-категории pro-H-TOP. «Чеховский» функтор C не всегда удобен: хотелось бы иметь возможность не только переходить к конфинальным частям спектров $\check{C}(X)$ (что возможно в силу конструкции Гротендика), но и к спектрам, получаемым совсем другими способами. Это позволяет сделать следующее «отношение» ассоциированности, введенное Моритой [140]:

Обратный спектр $\underline{X}$ категории H-CW ассоциирован с пространством X, если 1) существуют гомотопические классы $p_\alpha:X\to X_\alpha$, коммутирующие с проекциями $p_{\alpha\alpha'}$ спектра $\underline{X}$; 2) для каждого гомотопического класса $f:X\to Y\in$H-CW имеется такой гомотопический класс $f_\alpha:X_\alpha\to Y$, что $f=f_\alpha\circ p_\alpha$; 2) если $f_\alpha\circ p_\alpha=f'_\alpha\circ p_\alpha$, где $f_\alpha,\ f'_\alpha:X_\alpha\to Y\in$H-CW — гомотопические классы, то $f_\alpha\circ p_{\alpha\alpha'}=f'_\alpha\circ p_{\alpha\alpha'}$ при некотором $\alpha'\geqslant\alpha$.

Оказывается, всякие два спектра $\underline{X}$ и $\underline{X}'$, ассоциированные с одним и тем же пространством X, эквивалентны в pro-H-TOP. Более того, имеется серьезная аналогия с функтором $\varprojlim$. Если каждому топологическому пространству X сопоставить некоторый ассоциированный с ним спектр $S(X)$, то это сопоставление естественным и единственным образом продолжается на морфизмы категории H-TOP. Таким образом, получается функтор $S:H$-TOP→pro-H-TOP. Все такие функторы оказываются естественным образом эквивалентными друг другу и, в частности, функтору $\check{C}$, так как с каждым пространством X ассоциирован спектр $\check{C}(X)$. Ограничение любого такого шейпового функтора S на H-CW естественно эквивалентно тождественному функтору.

Любой обратный спектр $H(\underline{X})=\{X_\alpha,\ [p_{\alpha\alpha'}],\ A\}$, где X_α — конечные полиэдры (или даже абсолютные окрестностные ретракты класса хаусдорфовых компактов), полученный из спектра $\underline{X}=\{X_\alpha,\ p_{\alpha\alpha'},\ A\}$ категории TOP с помощью гомотопического функтора H, ассоциирован с пределом $\lim\underline{X}$. Именно это позволило Мардешичу с Сегалом [131, 133] распространить первоначальную теорию шейпов Борсука на класс хаусдорфовых компактов. Любой обратный спектр $H(\underline{X})$, полученный из спектра $\underline{X}=\{X_\alpha,\ p_{\alpha\alpha'},\ A\}$ категории TOP, где $\overline{X}_\alpha$ — произвольная окрестность замкнутого множества абсолютного окрестностного ретракта M класса метризуемых пространств, а $p_{\alpha\alpha'}:X_{\alpha'}\subset X_\alpha$ — включения, ассоциирован с пересечением $\bigcap X_\alpha$. Именно это позволило Фоксу [74] распространить теорию шейпов Борсука на метризуемые пространства. Сам Борсук, по существу, с каждым метризуемым компактом ассоциировал счетную фундаментальную последовательность его окрестностей при некотором вложении этого компакта в подходящий абсолютный ретракт [23, 34]. Тем же способом теория шейпов Борсука была продолжена на обширный класс p-паракомпактных пространств А. П. Шостаком [17]. На все топологические пространства этот геометрический способ Борсука—Фокса непосредственно не распространяется, так как абсолютных окрестностных ретрактов категории TOP очень мало [48]. Однако, как недавно было доказано Ю. М. Смирновым и К. С. Рубановым, этого еще можно добиться для полных по Дьедонне тихоновских пространств с помощью подходящих вложений в стягиваемые пространства. В общем случае ассоциированный спектр еще можно устроить из окрестностей некоторого множества в некотором стягиваемом пространстве, но требуемые по Морита «предельные проекции» p_α уже не обязаны быть гомотопическими классами включений. Все эти способы построения теории шейпов с помощью ассоциированности без изменений пригодны и для категории H-TOP$_0$ пространств с отмеченными точками. Другие, но эквивалентные способы построения той же теории шейпов, были даны Мардешичем [123] и Г. Козловским (не опубликовано).

Заметим, что в настоящее время шейповую эквивалентность можно охарактеризовать проще: $X \underset{s}{\sim} Y$ в точности тогда, когда существуют такие ассоциированные с X и, соответственно, с Y спектры $H(\underline{X})$ и $H(\underline{Y})$, где $\underline{X}=\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ и $\underline{Y}=\{Y_\alpha, q_{\alpha\alpha'}, A\}$ — спектры категории TOP, и такие гомеоморфизмы $h_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$, что гомотопически коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} & X_\alpha \arrow[dr, "h"] & \\ X_{\alpha'} \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "h"'] & & Y_\alpha \\ & Y_{\alpha'} \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd} .$$

Для хаусдорфовых компактов спектры $\underline{X}$ и $\underline{Y}$ можно «выбрать» из конечных полиэдров.

§ 2. ШЕЙПОВЫЕ ИНВАРИАНТЫ И СВОЙСТВА

Каждый гомотопический функтор $\mathcal{F}$: H-CW→GR в категорию групп порождает функтор pro-$\mathcal{F}$: pro-H-CW→pro-GR в категорию про-групп, состоящую из обратных спектров групп. Морфизмы категории pro-GR определяются аналогично тому, как это делалось для pro-H-TOP. Поэтому каждый функтор $\mathcal{F}$ порождает и спектральный функтор $\check{\mathcal{F}} = \varprojlim{}^\circ \text{ pro-}\mathcal{F}^\circ \text{ ass}$: H-TOP→GR, где ass — шейповый функтор, порожденный каким-нибудь сопоставлением каждому пространству X некоторого ассоциированного с ним спектра $\underline{X} = \text{ass}\, X$. Это ясно из следующей функториальной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & H\text{-}CW \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[dl] \arrow[d, hook] & GR \arrow[d, hook] \arrow[dr, "Jd"] & \\ H\text{-}TOP \arrow[r, "ass"'] & pro\text{-}H\text{-}CW \arrow[r, "pro\text{-}\mathcal{F}"'] & pro\text{-}GR \arrow[r, "\varprojlim"'] & GR \end{tikzcd} .$$

Здесь значками $\hookrightarrow$ обозначены естественные функториальные включения. Если с каждым пространством X из H-CW ассоциировать само X, как спектр из одного элемента (с единичным морфизмом), то вся диаграмма получается коммутативной. Разумеется вместо функторов $\mathcal{F}$ можно брать и кофункторы, но тогда надо взять вместо $\varprojlim$ функтор $\varinjlim$ прямого предела.

Тогда тем же образом получится из кофунктора $\mathcal{F}$ спектральный кофунктор $\check{\mathcal{F}}$. Из всего предыдущего ясно, что сингулярный гомологический функтор H_n породит таким образом (как бы ни был выбран функтор ass) один и тот же спектральный функтор $\check{H}_n$, а сингулярный когомологический кофунктор H^n — спектральный кофунктор $\check{H}^n$. Отсюда легко следует, что спектральные гомологические группы $\check{H}_n(X)$ и спектральные когомологические группы $\check{H}^n(X)$ Александрова—Чеха являются шейповыми инвариантами [140]. Приведенная выше общая конструкция применима и к категории H-TOP$_0$ пространств с отмеченными точками. В ней гомотопический функтор π_n порождает спектральный функтор $\check{\pi}_n$, а когомотопический функтор π^n порождает сам себя: $\check{\pi}^n=\pi^n$. Таким образом, получаются спектральные гомотопические (кратко фундаментальные или шейповые) группы $\check{\pi}_n(X, x)$, оказывающиеся шейповыми инвариантами (категории S-TOP$_0$). Они были введены Христи [40], Чогошвили [39], Борсуком [23], Портером [163], Сандерсом [178], Годлевским [83] и Дыдаком [55].

Так как ограничение функтора $\check{C}$ на H-CW эквивалентно тождественному функтору, то ограничения функторов $\check{H}_n$, $\check{\pi}_n$ и кофунктора $\check{H}^n$ на H-CW совпадают с H_n и, соответственно, с π_n и H^n. Способ Борсука непосредственного определения группы $\check{\pi}_n(X, x)$, по существу, заключается в следующем: Для шейповых морфизмов $f:(S^n, s)\to \text{ass}\,(X, x)$, представляющих из себя системы $\{f_\alpha:(S^n, s)\to(X_\alpha, x_\alpha)\}$ гомотопических классов, коммутирующих с проекциями $p_{\alpha\alpha'}$ спектра $\text{ass}\,(X, x)$, групповая операция определяется «покоординатно» $(f+f'=\{f_\alpha+f'_\alpha\})$.

Шейповые свойства естественно определять как свойства объектов или морфизмов категории S-TOP или S-TOP$_0$, сохраняющихся при изоморфизмах (эквивалентностях) рассматриваемой категории. «Пунктированной» шейповой n-связностью называют свойство пространства X, x обладать таким ассоциированным спектром $\mathbf{X}, \mathbf{x}=\{X_\alpha, x_\alpha; p_{\alpha\alpha'}, A\}$ в категории pro-H-TOP$_0$, что спектр $\pi_n(\mathbf{X}, \mathbf{x})$, полученный применением к $\mathbf{X}$, $\mathbf{x}$ гомотопического функтора π_n, изоморфен 0 в категории pro-GR. Это эквивалентно тому, что для каждого α существует такое $\alpha'\geqslant\alpha$, что $\pi_n(p_{\alpha\alpha'})=0$, т. е. что $p_{\alpha\alpha'}\circ f=0$ для каждого $f:(S^n, s)\to(X_{\alpha'}, x_{\alpha'})$. Шейповая n-связность под названием аппроксимационной была введена и впервые изучена Борсуком [26], затем Мардешичем [135], Моритой [150] и другими. Для p-паракомпактных пространств из шейповой 0-связности следует связность. Для любых пространств из шейповой n-связности при $n \geqslant 1$ следует, что $\check{\pi}_n(X, x) = 0$. Если из последнего определения «убрать» отмеченные точки x, x_α, s, то получим определение шейповой n-связности. Если в полученном определении морфизм f заменить на морфизм $1_{\alpha'}: X_{\alpha'} \to X_{\alpha'}$, то возникнет определение шейповой стягиваемости. Шейповая стягиваемость пространства X эквивалентна тому, что $\mathrm{Sh}\, X = \mathrm{Sh}*$, а также тому, что X обладает ассоциированным спектром, изоморфным точке в категории pro-H-TOP. Свойство шейповой стягиваемости является частным случаем свойства устойчивости: объект X устойчив, если он имеет шейп некоторого клеточного комплекса или, что эквивалентно, если $\mathrm{ass}\, X$ изоморфен клеточному комплексу в pro-H-TOP. Шейповая стягиваемость была введена и изучена первоначально Борсуком [26], затем, Мардешичем [121], А. П. Шостаком [18] и другими. В хороших классах пространств (например, для p-паракомпактных) устойчивые объекты Y, y категории S-TOP$_0$ являются абсолютными окрестностными шейповыми экстензорами в том смысле, что для всякого объекта X, x и всякого его замкнутого подъобъекта A, x всякий шейповый морфизм $f: (A, x) \to (Y, y)$ продолжается на некоторую окрестность V, x. Для метризуемых компактов это последнее свойство было введено и изучено Борсуком [24], затем для бикомпактов — Мардешичем [121]. Связь с устойчивостью была исследована Мардешичем [121], Демерсом [46], Эдвардсом с Гэганом [69]. Устойчивость впервые в категории шейпов была рассмотрена Портером [169], затем уже Демерсом [46], Гэганом с Ляхером [80] и др. Даже для компактов устойчивость с помощью конечных комплексов не эквивалентна свойству быть абсолютным окрестностным шейповым экстензором (Эдвардс с Гэганом [71]). Свойство шейповой стягиваемости, как легко видеть, в обоих шейповых категориях S-TOP и S-TOP$_0$ эквивалентна свойству быть абсолютным шейповым экстензором даже для p-паракомпактов. Для метризуемых компактов это было сделано Борсуком [26], а для биокомпактов — Мардешичем [121].

Очень важными свойствами являются подвижность и n-подвижность. Пространство X называют n-подвижным, если спектр $\mathrm{ass}\, X = \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, \mathrm{A}\}$ обладает следующим свойством: для каждого α существует такое $\alpha' \geqslant \alpha$, что для всякого $\alpha'' \geqslant \alpha$ и всякого гомотопического класса $f: P \to X_{\alpha'}$, где $\dim P \leqslant n$ и $P \in$ H-CW, существует такой гомотопический класс $g: P \to X_{\alpha''}$, что $p_{\alpha\alpha''} \circ g = p_{\alpha\alpha'} \circ f$. Разумеется, можно считать, что P является клеточным комплексом или даже симплициальным комплексом. Если в этом определении мы заменим морфизм f на единичный морфизм $1_{\alpha'}: X_{\alpha'} \to X_{\alpha'}$, то получим определение подвижности. Оба эти свойства были для метризуемых компактов

введены и изучены Борсуком [25, 30], для бикомпактов — Мардешичем и Сегалом [132]. Очень нужный случай 1-подвижности был подробно исследован МакМилланом [136], Красинкевичем [115]. Для континуумов X и Y из того, что X, x является 1-подвижным в S-TOP$_0$ и $\mathrm{Sh}\, X = \mathrm{Sh}\, Y$ следует, что $\mathrm{Sh}(X, x) = \mathrm{Sh}(Y, y)$ для любой точки y (Дыдак [58]).

Размерность объектов категории шейпов определяют разными способами:

$$S\text{-}\dim = \mathrm{Min}\{k\colon \mathrm{Sh}\, X = \mathrm{Sh}\, X', \text{ где } \dim X' = k\},$$

$$F\text{-}\dim = \mathrm{Min}\{k\colon \mathrm{Sh}\, X \leqslant \mathrm{Sh}\, X', \text{ где } \dim X' = k\},$$

$$D\text{-}\dim = \mathrm{Min}\left\{k\colon \begin{array}{l} \text{всякое отображение из } X \text{ в клеточный} \\ \text{комплекс гомотопно отображению} \\ \text{в } k\text{-мерный остов} \end{array}\right\}.$$

Здесь под размерностью dim понимается размерность, определенная с помощью нормальных локально конечных открытых покрытий. Неравенство $\mathrm{Sh}\, X \leqslant \mathrm{Sh}\, X'$ означает, что существует шейповая ретракция $r: X' \to X$, т. е. шейповый морфизм, обладающий правым обратным в S-TOP. Шейповая инвариантность числа D-dim следует из следующего эквивалентного определения (Дыдак): D-dim — наименьшее из всех таких чисел k, что в спектре $\mathrm{ass}\, X = \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, \mathrm{A}\}$ для каждого α найдется такое $\alpha' \geqslant \alpha$, что $p_{\alpha\alpha'} = g \circ f$, где $\mathrm{Im}\, f \in$ H-CW и $\dim(\mathrm{Im}\, f) \leqslant k$. Всегда $D\text{-}\dim \leqslant F\text{-}\dim \leqslant S\text{-}\dim \leqslant \dim$. Для метризуемых компактов имеет место равенство $D\text{-}\dim = F\text{-}\dim = S\text{-}\dim$ (Дыдак [60]). Размерность F-dim была введена Борсуком [28] и основательно изучена в классе метризуемых компактов Новаком [153—156]. Размерность D-dim была введена и изучена Дыдаком [58, 60].

§ 3. КАТЕГОРНЫЙ АСПЕКТ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Согласно предыдущему изложению, легко поверить, что почти все определения и некоторые общие факты теории шейпов останутся корректными и верными, если заменить категорию H-TOP на произвольную категорию K, а подкатегорию H-CW — на полную подкатегорию L. Это имеет смысл еще и потому, что позволяет применить методы теории шейпов в совершенно иных ситуациях. Впервые такое категорное изложение теории шейпов было сделано Ле Ваном [193] и Портером [168]. Хилтон и Деляну [45] показали, что на самом деле вместо функториального вложения $L \subset K$ можно рассмотреть для построения теории шейпов произвольный функтор $\Phi: L \to K$ из одной категории в другую. Полученная таким образом категория шейпов оказывается изоморфной некоторой специальной категории Клейсли [43]. Параллельно ту же конструкцию получает Фрей [76] и находит связь функтора Φ' с пополнением Кана [77]. Если взять такое семейство S морфизмов произвольной категории K, что S — пополнение Кана существует, то в теории шейпов, порожденной полной подкатегорией L_Φ всех S-полных по Кану объектов, шейпы оказываются классами объектов, имеющих изоморфные S-пополнения. Вебер [198], вообще, строит теорию шейпов как некоторое пополнение абстрактно определенной гомотопической теории. Голштинский [85] дает категорно аксиоматическую характеризацию теории шейпов Борсука, а Мардешич [123] то же делает в общем случае. Бэкон [21] находит условия, при которых условия для любых категории K и подкатегории L существует единственная шейповая теория, удовлетворяющая аксиомам Голштинского. Следуя Гротендику [20], Портер [172] пытается распространить абстрактную теорию гомотопий с категории K на про-категорию pro-K (см. также Эдвардса с Хастингсом [72]) и этот метод «гомотопий в про-категориях» применяется им для развития теории локализации и кручения [36]. Подобные применения находят и Хилтон с Деляну [44]. Отметим еще работы [173] и [78].

Важный категорный факт доказан Сегалом с Козловским [112]: всякий объект X является пределом всякого ассоциированного с ним спектра $\underline{X}$ в категории S-K шейпов, даже если $X \notin$ pro-L (в самой категории K, например, при $K = H$-TOP, этого, как правило, не бывает). В частности, это верно для спектра $\underline{X}$ категории TOP в следующих случаях:

B) $\underline{X}$ состоит из бикомпактов, а $X = \lim \underline{X}$ в TOP,

M) $\underline{X}$ является фундаментальной системой (базой) окрестностей произвольного множества X в метризуемом пространстве,

P) $\underline{X}$ является фундаментальной системой (базой) окрестностей замкнутого множества X в p-паракомпактном пространстве.

Добавим к этому, что в категории S-TOP всякая обратная последовательность из метризуемых компактов имеет метризуемый компактный предел [62].

Всякий спектральный функтор $\check{F}$ (полученный из «сингулярного» функтора $F:L \to GR$ описанным выше способом) удовлетворяет условию непрерывности в случае, когда $\mathrm{p}: X \to \underline{X}$ является «ассоциацией»: именно тогда $F(\underline{p}): F(X) \to \mathscr{F}(\underline{X})$ будет пределом. В частности, что верно для функторов $\check{H}_n$, $\check{H}^n$, $\check{\pi}_n$ и π^n в случаях B), M) и P), приведенных выше. Давно известно (Годеман [82]), что для функторов $\check{H}_n$ и $\check{H}^n$ в случае P) можно брать даже любые паракомпактные пространства. Это передоказано Дойчиновым [47]. Вероятно, дело заключается в том, что в этом общем случае (как и в случае ассоциированности) морфизм $\underline{p}: X \to \underline{X}$, состоящий из включений, является шейповым пределом и что для шейповых пределов спектральные функторы $\check{F}$ обладают свойством непрерывности. Пока это доказано лишь для функтора $\check{\pi}_k$ С. А. Богатым.

§ 4. ТЕОРЕМЫ ГУРЕВИЧА И УАЙТХЕДА

Известный гуревичевский гомоморфизм $h_n: \pi_n(X, x) \to H_n(X)$ естественным образом «продолжается» в морфизм pro-h_n: $: \pi_n(\underline{X, x}) \to H_n(\underline{X})$, где спектр $\underline{X, x}$ ассоциирован с X, x, а спектр $\underline{X}$ получен из $\underline{X, x}$ «вычеркиванием» точек. Переходя к пределу, из pro-h_n получим спектральный гуревичевский гомоморфизм $\check{h}_n: \check{\pi}_n(X, x) \to \check{H}_n(X)$. Спектральная теорема Гуревича, полученная Куперберг [118], гласит:

Если метризуемый компакт X, x шейпово k-связен для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$, где $n \geqslant 2$, то $\check{h}_n$ является изоморфизмом. Для связных подвижных метризуемых компактов X, x условие шейповой k-связности можно заменить на условия $\check{\pi}_k(X, x) = 0$ при тех же k, причем свойство подвижности здесь существенно [117].

Портер [167] и Мардешич с Унгаром [135, 190] доказали эту теорему для пар X, A, x. Теорема остается верной и для любых топологических пространств X, x, если заменить только шейповую 0-связность на связность (там же). Теорема получена ими и для пар. В случае подвижных метризуемых континуумов гомоморфизм $\check{h}_1$ будет эпиморфизмом, вычислено и ядро Ker $\check{h}_1$ (там же). Несколько иные формулировки есть у Мориты [139] и Ватанабэ [195]. Теорема Гуревича верна и в категории pro-H-CW: если спектр $\underline{X}$ состоит из связных пространств X_α, x_α и шейпово k-связен для всех $k = 1, \ldots, n-1$ $(n \geqslant 2)$, то pro-h_n будет изоморфизмом в категории pro-GR (Артин и Мазур [20], Мардешич с Унгаром [135, 190]). Теорема доказана ими и для пар. Несколько другую формулировку в категории pro-H-TOP нашел Руссен [177]. Условие подвижности (вместе с метризуемостью и компактностью) существенно для того, чтобы из равенств $\check{\pi}_k(X, x) = 0$ получать шейповую k-связность (т. е. равенства $\pi_k(\underline{X}, x) = 0$):

Второе и третье условия дают возможность перейти к обратным последовательностям групп, а всякая подвижная последовательность $\underline{G} = \{G_k, \gamma_{kk'}\}$ групп изоморфна 0 в точности тогда, когда $\lim \underline{G} = 0$ (Дыдак и Сегал [65]).

Заметим, что самая первая спектральная теорема Гуревича была получена Христи [40] еще в 1944 г. Но он так же, как значительно позже Квигли [174] и другие, получил ее в другой (сильной) категории шейпов для точных групп $\underline{\pi}_n(X, x)$ стинродовского типа.

Положение с теоремой Уайтхеда в теории шейпов прекрасно освещено в диссертации Дыдака [60]. Всякий шейповый морфизм $f: X, x \to Y, y$ порождается морфизмом $\underline{f: X, x \to Y, y}$ спектров, ассоциированных с X, x и, соответственно, $\underline{Y, y}$. Применяя к нему функтор π_k, получим морфизм pro-$\pi_k(f)$:

$:\pi_k(\underline{X,\ x}) \to \pi_k(\underline{Y, y})$ категории pro-GR. Переходя к пределу получим гомоморфизм $\check{\pi}_k(f): \check{\pi}_k(X,\ x) \to \check{\pi}_k(Y, y)$. Спектральная теорема Уайтхеда утверждает:

Шейповый морфизм f подвижных метризуемых континуумов будет шейповой эквивалентностью, если достаточно много гомоморфизмов $\check{\pi}_k(f)$ являются изоморфизмами, именно A) при всех $k=1, \ldots, n-1$ и эпиморфизмом при $k=n$, где $n=\mathrm{Max}\{1+D\text{-}\dim X, D\text{-}\dim Y\} < \infty$, (Мощиньская, Кисслинг [149, 151, 97]); B) при всех k, если $\mathrm{Min}\{D\text{-}\dim\ X,\ D\text{-}\dim Y\} < \infty$ (Дыдак [51]). Свойства конечномерности в случае A) и подвижности для X, x в случае B) существенны (Драпер с Кисслингом [149], Сегал с Козловским [112]).

Эти результаты распространяются на любые топологические пространства, если не требовать подвижности у конечномерных (в смысле D-dim) пространств, но заменить $\check{\pi}_k(f)$ на pro-$\pi_k(f)$ (Мардешич [127, 129], Морита [139, 143], Дыдак [51]). В этом же виде они остаются верными и для обратных спектров из связных пространств, гомотопически эквивалентных клеточным комплексам (пунктированным) (Мардешич [129, 128], Эдвардс с Гэганом [70], Дыдак [54]). При этом морфизм $f: \underline{X,\ x} \to \underline{Y,\ y}$ будет доминированием в pro-H-TOP_0, если в A) «выбросить» D-$\dim \underline{X,}$ а в B) потребовать свойство подвижности лишь от $\underline{Y, y}$ (Дыдак [60]). Начало такому спектральному подходу было положено Артином и Мазуром [20]. В некоторых (достаточно широких) случаях эффект Уайтхеда достигается при помощи функторов pro-H_k и pro-H^k (Мардешич [129]). В случае гомологий причина выяснена Рауссеном [177]: для морфизма $f: \underline{X,\ x} \to \underline{Y,\ y}$ даже в категории pro-H-TOP_0 морфизмы pro-$\pi_k(f)$ будут изоморфизмами при $k=1, \ldots, n-1$ и эпиморфизмом при $k=n$ в точности тогда, когда морфизмы pro-$H_k(f)$ будут изоморфизмами при тех же k и эпиморфизмом при $k=n$, если только выполнены равенства $\pi_0(\underline{X,\ x}) = \pi_1(\underline{X,\ x}) = \pi_0(\underline{Y,\ y}) = \pi_1(\underline{Y,\ y}) = 0$.

§ 5. ТЕОРЕМА ВЬЕТОРИСА — СМЕЙЛА И ДРУГИЕ

Она позволяет по шейповым свойствам слоев $f^{-1}y$ отображения $f: X, x \to Y, y$ заключать о биективности гоморфизмов $\pi_k(f): \check{\pi}_k(X,\ x) \to \check{\pi}_k(Y,\ y)$:

Если для сюръективного отображения f метризуемых компактов все слои шейпово k-связны при всех $k=0, \ldots, n$, то $\check{\pi}_k(f)$ будет изоморфизмом при тех же k и эпиморфизмом при $k=n+1$ (С. А. Богатый [5], Куперберг [116]).

На самом деле, вместо $\check{\pi}_k(f)$ можно взять pro-$\pi_k(f)$ даже для случая, когда f — замкнутое отображение метризуемых пространств (Дыдак [60]), и даже если лишь одно X метризуемо (Морита [145]). Отметим еще статьи Кодама [101] и Сегала с Козловским [112]. Заметим, что при таких «AC^n»-отображениях метризуемых компактов сохраняется свойство LC^n (С. А. Богатый [2]).

Классификационная теорема Хопфа распространена на теорию шейпов Ю. Т. Лисицею [15]: Пусть $S(X,\ Y)$ — множество шейповых морфизмов $f: X \to Y$, где X, Y — метризуемые компакты, $\dim X = n < \infty$, а Y, y — шейпово 1-связный абсолютный окрестностный шейповый ретракт; тогда если $\check{H}^k(X) = 0 = \check{H}_k(Y)$ при всех $k=0, \ldots, n$, то отображение $H: S(X,\ Y) \to \check{H}^n(X,\ \check{\pi}_n(Y,\ y))$ биективно. Теорема верна и для топологических пространств, если заменить свойство быть абсолютным окрестностным шейповым ретрактом на сильную подвижность, даже если $\dim X$ ослабить до D-$\dim X$ (Кояма [106]). Она верна и для обратных спектров в категории pro-H-CW (Б. Т. Левшенко [12]) и доказана им для пар. Двойственная форма биективности $S(X,\ Y) \to \check{H}_n(Y,\ \pi^n(X,\ x))$ для метризуемых компактов также имеет место, если дополнительно считать группу $\check{H}^n(X)$ имеющей конечное число образующих (Ю. Т. Лисица [15]). Частный случай впервые был получен Борсуком и Голштинским [32]. Теория препятствий в про-категории pro-H-CW строится Портером [170, 171], но ограничительные условия не всегда четко им формулируются.

Теорема Куратовского — Дугунджи (о глобальном продолжении) решается для метризуемых пространств X, Y при компактном Y: если Y шейпово k-связно при всех $k=0, \ldots, n = \dim(X \setminus A) < \infty$, то всякий шейповый морфизм $f: A \to Y$ продолжается на X (Ю. Т. Лисица [14]). Если Y — шейпово 1-связный подвижный континуум, то для всякого X и всякого замкнутого A из X и такого, что $\dim(X \setminus A) \leqslant n$ всякое $f: A \to Y$ продолжается на X в точности тогда, когда $\check{\pi}_k(Y,\ y) = 0$ для всех $k=0, \ldots, n-1$ (С. С. Котанов [11]); при этом начальные условия, налагаемые на Y, можно откинуть, если в конце добавить S^n-подвижность.

Для паракомпактных пространств X вместо $\dim(X \setminus A)$ приходится брать $\mathrm{rd}_X(X \setminus A)$, а подвижность заменять на свойство быть абсолютным окрестностным шейповым ретрактом (Ю. Т. Лисица [14]). Частный случай, когда $\mathrm{Sh} Y \leqslant \mathrm{Sh} S^n$ был ранее рассмотрен Борсуком [32].

Теорема типа Ван Кампена о представлении группы $\check{\pi}_1(A \cup B,\ x)$ через группы $\check{\pi}_1(A,\ x)$, $\check{\pi}_1(B,\ x)$ и $\pi_1(A \cap B,\ x)$ для метризуемых компактов получена Кадловым [87] в предположении связности и 1-подвижности компактов A, x, B, x и $A \cap B$, x, а в более сильных предположениях (устойчивости) Портером [162]. На про-группы pro-$\pi_1(A \cup B,\ x)$ для связных топологических пространств A, B и $A \cap B$ (при условии, что включения $A \cap B \subset$

$\subset A\subset A\cup B$ и $A\cap B\subset B\subset A\cup B$ являются P-вложениями [139]) и на про-группы спектров из связных клеточных комплексов она была распространена Унгаром [192].

Теорема типа Фрейденталя об изоморфности морфизмов pro-$\varphi_k:\pi_k(\underline{X,x})\to\pi_{k+1}(\Sigma(\underline{X,x}))$ для про-групп обратных спектров $\underline{X,x}$ из связных объектов категории H-CW, где pri-φ_k — естественное расширение фрейденталевского гомоморфизма на про-группы, Σ — функтор надстройки, а $k=1,\ldots,2n-2$, получена Унгаром [189] в предположении, что $\pi_k(\underline{X,x})=0$ при всех $k=1,\ldots,n-1$. Она доказана им же и для про-групп связных топологических пространств и для спектральных групп подвижных связных метризуемых компактов (подвижность существенна).

Некоторые результаты о шейповых локальных гомологических и гомотопических свойствах получены Рауссеном [177] и Унгаром [191].

§ 6. ШЕЙПОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И КЛЕТОЧНОЕ ПОДОБИЕ

Достаточные условия шейповой эквивалентности даются, прежде всего, упомянутой выше теоремой типа Уайтхеда, а также следующим ее соединением с теоремой типа Вьеториса — Смейла:

Сюръективное замкнутое отображение $f:X,x\to Y,y$ связного метризуемого пространства на произвольное топологическое пространство будет шейповой эквивалентностью, если:

A) все слои $f^{-1}(y)$ шейпово k-связаны при всех $k=1,\ldots,n-1$, где $n=\mathrm{Max}\{1+D\text{-}\dim X,\ D\text{-}\dim Y\}<\infty$.

B) все слои шейпово k-связны при всех k, причем одно из пространств подвижно, а другое конечномерно в смысле D-dim.

На самом деле связность пространства здесь не существенна (Морита [145], Дыдак [60, 51]). Частные случаи были получены: Шером [183], С. А. Богатым [5, 6], Кодамой [98], Дыдак [52, 53], Моритой [147] и другими. Условия конечномерности и подвижности существенны даже для таких отображений метризуемых континуумов, все слои которых имеют шейп точки (Тэйлор [188], Кисслинг [94, 96], Сегал с Козловским 112], Дыдак [53]).

Шейповые эквивалентности можно «объединять»: отображение $f:X\to Y$ локально компактных метризуемых пространств является шейповой эквивалентностью, если существуют такие локально конечные покрытия $\{A\}$ и $\{B\}$, состоящие из компактов, что $f(A)\subset B_A$ при каждом A и что для каждой конечной подсистемы α покрытия $\{A\}$ ограничение $f|:\bigcap_\alpha A\to\bigcap_\alpha B_A$ является шейповой эквивалентностью (Кодама [104]). Условия локальной компактности и метризуемости в приведенной здесь формулировке

вряд ли существенны. В «хороших» случаях шейповая эквивалентность наследуется по замкнутым множествам в следующем смысле: для совершенного отображения $f:X\to Y$ метризуемых локально компактных пространств, где X — абсолютный окрестностный ретракт, пространство Y будет тоже абсолютным окрестностным ретрактом в точности тогда, когда для всякого замкнутого в Y множества B ограничение $f|:f^{-1}(B)\to B$ является шейповой эквивалентностью (Козловский [108]). Ясно, что всякое отображение, являющееся шейповой эквивалентностью наследственно, будет клеточно подобным, т. е. каждый слой $f^{-1}(y)$ будет иметь шейп точки. Уже было отмечено, что клеточно подобное отображение даже метризуемых компактов может не быть шейповой эквивалентностью, однако существенно в бесконечномерном случае: если $f:X\to Y$ клеточно подобное совершенное отображение локально компактных метризуемых пространств, где Y или слабо бесконечномерно (является объединением счетного числа замкнутых конечномерных множеств), или компактно и счетномерно (является объединением счетного числа конечномерных множеств), то оно будет шейповой эквивалентностью наследственно (Козловский [108], С. А. Богатый [2]). С другой стороны, отображение, являющееся шейповой эквивалентностью, не обязано быть клеточно подобным, — но верно, большее: оно не обязано быть композицией (в категории S-TOP) клеточно подобных отображений и «обратных» к ним морфизмов (Ферри [73]). Следующие важные проблемы эквивалентны друг другу (см. [80]):

I) Будет ли образ fX конечномерного метризуемого компакта X при клеточно подобном отображении f также конечномерным?

II) Будет ли образ fI^n конечномерного куба I^n при клеточно подобном отображении f абсолютным ретрактом?

III) Будет ли всякий бесконечномерный метризуемый компакт иметь бесконечную когомологическую размерность?

В трехмерном случае решение положительно (Козловский и Уолш [113]). Проблема III — давняя проблема П. С. Александрова. В связи с нею заметим, что клеточно-подобные отображения метризуемых компактов не повышают когомологическую размерность, а отображения метризуемых компактов, являющиеся шейповыми эквивалентностями наследственно, не повышают размерность dim (Козловский [108]). Отметим еще следующие три тесно связанные друг с другом проблемы (см. [80]):

IV) При каких условиях сохраняется при клеточно подобных отображениях метризуемых компактов свойство быть абсолютным окрестностным ретрактом?

V) При каких условиях сохраняется при клеточно подобных отображениях метризуемых компактов свойство быть многообразием, моделируемым на гильбертовом кубе?

§ 7. УСТОЙЧИВОСТЬ И РЕТРАКТЫ

Пространство $X(X, x)$ ради краткости назовем доминируемым если оно в категории S-TOP (соответственно, S-TOP_0) доминируется клеточным комплексом P, т. е. имеются такие шейповые морфизмы $r:P\to X$ и $i:X\to P$, что $r\circ i=1$. Вместо клеточных комплексов можно брать абсолютные окрестностные ретракты (класса метризуемых пространств) (Мардешич [123]). Ясно, что устойчивость всегда влечет доминируемость. В категории S — TOP_0 для связных пространств X, x верно и обратное (Демерс [46], Эдвардс с Гэганом [70]). В непунктированном случае это неясно, так как в доказательствах Демерса и Эдвардса с Гэганом имеется до сих пор незаполненный пробел* (Дадык [60], Эдвардс с Гэганом [68]). Любопытно, что связное пространство X, x устойчиво в S-TOP_0 в точности тогда, когда X устойчиво в S-TOP, (Дыдак [60, Гэган [79]). В случае компактных связных пространств X, x доминирующий комплекс можно выбрать конечным, но даже устойчивый метризуемый континуум может не обладать шейпом конечного комплекса (Эдвардс с Гэганом [67, 70]). Метризуемый континуум X, x устойчив в точности тогда, когда 1°) $X\times S^1$ имеет шейп конечного комплекса (Сегал с Дыдаком [65]), 2°), X, x подвижно и конечномерно в смысле D-dim и при этом каждая группа $\check{\pi}_k(X, x)$ счетна (Дыдак [54, 56], Ватанабэ [197]). Конечномерный шейпово 1-связный метризуемый континуум X имеет шейп конечного комплекса в точности тогда, когда каждая группа $\check{H}^k(X)$ конечно порождена (Демерс [46], Ляхер с Гэганом [80]). Устойчивый метризуемый континуум X, x имеет шейп конечного комплекса в точности тогда, когда так называемое препятствие Уолла $w(X, x)\in\tilde{K}^0(\check{\pi}_1(X, x))$ тривиально (Эдвардс с Гэганом [67]).

Аналогично, обратный спектр $\underline{X}$ категории pro-K, где K — произвольная категория, назовем доминируемым (соответственно, устойчивым, если он доминируется некоторым объектом P из K (соответственно, эквивалентен объекту $P\in K$) в pro-K. Устойчивость всегда влечет доминируемость. В категории pro-H CW_0 для спектров $\underline{X, x}$ из связных клеточных комплексов верно и обратное (Эдвардс с Гэганом [70]). В непунктированной категории pro-H-CW это уже неверно (Дыдак и Минц [58]). Неверно это и в пунктированной категории pro-H-FCW_0 спектров из конечных комплексов (Эдвардс с Гэганом [67]). Конечномерный в смысле D-dim «связный» (т. е. состоящий из связных комплексов) спектр $\underline{X}$, x категории pro-H-CW_0 устойчив тогда и только тогда, когда каждая про-группа $\pi_k(\underline{X, x})$ доминируется некоторой группой в pro-GR, причем условие конечномерности существенно (Эдвардс с Гэганом [70], Дыдак [60], Гэган [79]). «Связный» подвижный спектр $\underline{X, x}$ категории pro-H-CW_0 устойчив в точности тогда, когда про-группа $\pi_*(\underline{X, x})$ доминируется группой в pro-GR (Дыдак [60]).

* В только что полученном препринте Хастингс и Хеллер [199] доказывают, что обратное верно и в TOP.

Пространство X класса K называют абсолютным (окрестностным) шейповым ретрактом класса K, сокращенно, ASR_K (соответственно, $ANSR_K$), если при всяком замкнутом вложении $X\subset Y$, $Y\in K$, существует шейповая ретракция $r:O\to X$, где O — окрестность (соответственно, $O=Y$) пространства X (Борсук [34], Мардешич [121], Сегал [180], А. П. Шостак [18]). Пусть K удовлетворяет следующим условиям:

A) каждое пространство $X\in K$ можно так замкнуто вложить в некоторое стягиваемое пространство $Y\in K$, что $Y\in AE_K$ и что в каждой окрестности пространства X содержится окрестность $O\in K$, являющаяся ANE_K.

B) Каждое ANR_K гомотопически эквивалентно некоторому клеточному комплексу,

C) Каждый клеточный комплекс есть ANE_K,

D) Если $X\in K$, то $X\times[0, 1]\in K$.

Тогда верно и

E) для пространств класса K свойства $ANSR_K$, $ANSE_K$ и доминируемость попарно эквивалентны, причем для компактных пространств доминирующий комплекс можно выбрать конечным, а для линделефовых — счетным; свойства ASR_K, ASE_K и свойство «иметь шейп точки» также попарно эквивалентны.

Для метризуемых компактов E) доказано Борсуком [8, 34], для бикомпактов — Мардешичем и Сегалом [121, 180]. Для p-паракомпактных пространств A) следует из теорем Нагаты* [152] и Судзуки** [187], C) доказано Ю. Т. Лисицей [13], D) доказано Мардешичем и А. П. Шостаком [134], а E) частично А. П. Шостаком [18] и Сегалом [180].

Добавим еще несколько фактов. Чтобы непустое пространство X имело шейп точки, достаточно (и необходимо) иметь D-$\dim X\leqslant n$ и быть шейпово n-связным при некотором $n\geqslant 0$, а также достаточно (и необходимо) быть подвижным и шейпово n-связным при каждом n (Дыдак [60], Сегал с Козловским [110]). Случай метризуемых компактов рассмотрен С. А. Богатым [5] и Борсуком [25]. Если метризуемые компакты A, B и $A\cap B$ имеют шейп конечного комплекса (точки), то и $A\cup B$ тоже; конечность комплексов, видимо, существенна (Дыдак с Орловским [64]). Случай точки рассмотрен Борсуком [24] и Мардешичем [125] — для бикомпактов. Для пунктированных метризуемых континуумов это верно и для произвольных комплексов, иными словами, пунктированная устойчивость аддитивна (Дыдак с Новаком и Строком [63]).

* Пространство p-паракомпактно в точности тогда, когда оно замкнуто вкладывается в произведение гильбертова пространства на I^τ.

** Объединение локально конечной системы замкнутых множеств p-паракомпактного пространства также p-паракомпактно.

§ 8. ПОДВИЖНОСТЬ И n-ПОДВИЖНОСТЬ

Подвижность и n-подвижность были введены для метризуемых компактов Борсуком [25], на более общие случаи были перенесены Мардешичем и Сегалом [132], Сегалом [179], А. П. Шостаком [18]. Эти свойства сохраняются при шейповом доминировании, для бикомпактов — при произведении (Борсук [25], С. А. Богатый [4]), при надстройке (Борсук [27]), но не сохраняются при пересечении, при объединении (Кокс [42]), при клеточных отображениях (для $n\geqslant 2$) (Кисслинг [94]). Плоские компакты подвижны (Борсук [25]), доминируемые пространства — подвижны, но соленоиды даже не 1-подвижны (Борсук [34]). Ациклический одномерный континуум Чемберлена и Кейса [38] не 1-подвижен, хотя все его спектральные группы гомологий и когомологий тривиальны, а надстройка подвижна (Сегал с Мардешичем [132, 122]). Кановский компакт [89] шейпово n-связен и n-подвижен при всех n, но не подвижен (Сегал с Козловским [109], С. А. Богатый [4]). Если метризуемый компакт $X \in LC^{n-1}$, то X, x будет n-подвижным при любом x,—фактически Мардешич [120]. Всякий n-подвижный метризуемый компакт X размерности $D\text{-}\dim X \leqslant n$ подвижен (С. А. Богатый [4]). Вероятно эти два факта верны и для p-паракомпактных пространств (см., например, Сегала [180] и Мориту [155]).

В случае подвижных метризуемых компактов $\text{pro-}\pi_k(f)$ и $\check{\pi}_k(f)\colon\check{\pi}_k(X, x)\to\check{\pi}_k(Y, y)$ являются изоморфизмами одновременно, в частности, $\check{\pi}_k(X, x)=0$ эквивалентно $\text{pro-}\pi_k(f)=0$, (Унгар с Мардешичем [135[, Кисслинг [97] и Дыдак [65]). Дело в том, что подвижность спектра $X\in\text{pro-}K$ сохраняется при функториальных переходах $F\colon K\to K'$ для произвольных категорий, а спектр $\underline{G}=\{G_\alpha, p_{\alpha\alpha'}\}\in\text{pro-SET}$ подвижен в точности тогда, когда выполняется условие Миттаг — Лефлера (ML): для любого α существует такое $\alpha'\geqslant\alpha$, что $\operatorname{Im} p_{\alpha\alpha'}\subset\operatorname{Im} p_{\alpha\alpha''}$ для любого $\alpha''\geqslant\alpha$. Для обратной последовательности $\underline{G}$ счетных групп условие ML эквивалентно равенству $\overline{\lim}{}^1\underline{G}=0$ (Гэган [65]). Если обратная последовательность $\underline{G}$ удовлетворяет условию ML, а $\lim\underline{G}$ счетен, то она устойчива (Унгар с Мардешичем [135]). Для метризуемых континуумов про-группа $\text{pro-}\pi_1(X, x)$ удовлетворяет условию ML в точности тогда, когда X, x является 1-подвижным (Дыдак [58]).

Вообще 1-подвижность играет особую роль. Континуумы Пэано 1-подвижны для любой своей точки, а собственные подконтинуумы двумерных многообразий подвижны для любой точки (МакМиллан [137], Красинкевич [114]). Для метризуемых континуумов свойство быть 1-подвижным в точке сохраняется при отображениях. Если подвижный метризуемый континуум 1-подвижен в точке, то он подвижен в той же точке (там же). Если $\operatorname{Sh}X=\operatorname{Sh}Y$ и один из метризуемых континуумов X, Y является 1-подвижным в каждой своей точке, то $\operatorname{Sh}(X, x)=\operatorname{Sh}(Y, y)$ для любых точек x и y (Дыдак [58]).

Для абелевых связных компактных групп подвижность эквивалентна локальной связности, в не абелевом случае это неверно (Кисслинг [90]). В связи с этим заметим, что для таких групп шейповая эквивалентность равносильна топологическому изоморфизму (Кисслинг [91], Скордев [16]). Для таких групп из локальной линейной связности следует равномерная подвижность в смысле Сегала с Козловским [111], Ватанабэ [194]. Имеется еще несколько видоизменений понятия подвижности и n-подвижности (С. А. Богатый [3], Мощиньская [148], Мардешич [124], Кодама [100], Котанов [9]). См. также статьи Дыдака [59], Ватанабэ [196], Спижа [185], Сегала с Козловским [110] и Бауэра [22].

Если в определении n-подвижности комплекс P заменить на произвольно фиксированное пространство A (или брать его из фиксированного класса $\mathscr{A}$), то получим свойство A (соответственно, $\mathscr{A}$)-подвижности (Борсук [31]). Общие свойства $\mathscr{A}$-подвижности изучены Олендзким [157] и С. А. Богатым с В. А. Калининым [7]. Для метризуемого компакта X, x при каждом $n\geqslant 0$ следующие условия эквивалентны: 1) S^n-подвижность, 2) про-группа $\text{pro-}\pi_n(X, x)$ удовлетворяет условию ML, 3) предел $\lim^1 \text{pro-}\pi_n(X, x)=0$ (Кояма, Оно и Тсуда [107]). Всякий S^n-подвижный шейпово k-связный при всех $k=0, \ldots, n-1$ метризуемый континуум будет n-подвижным (Куперберг с Олендзким [119]).

Понятия подвижности и n-подвижности распространены и на пары пространств (Овертон [159, 160], Кодама с Ватанабэ [105]). Из подвижности пары X, A в смысле Овертона следует подвижность пространств X и A, а в случае метризуемых компактов — точность последовательности $\to\check{H}_n(A)\to\check{H}_n(X)\to\to\check{H}_n(X, A)\to$. Одной подвижности самих компактов X и A для этого недостаточно, (Овертон [160]). Метризуемость здесь также существенна (Ватанабэ [194]). В тех же предположениях в пунктированном случае точна и последовательность $\to\check{\pi}_n(A, x)\to\to\check{\pi}_n(X, x)\to\check{\pi}_n(X, A, x)\to$ (Квигли [176]). Спектральные когомологии подвижных и n-подвижных пространств изучались Кисслингом [93, 95] и Ватанабэ [194].

§ 9. ШЕЙПОВАЯ РАЗМЕРНОСТЬ И БЛИЗКИЕ К НЕЙ ИНВАРИАНТЫ

Размерность $F\text{-}\dim X=\operatorname{Min}\{k\colon\dim Y=k,\ \operatorname{Sh}X\leqslant\operatorname{Sh}Y\}$ для метризуемых компактов была определена Борсуком [28], а размерность D-dim для произвольных пространств Эдвардсом с Гэганом [67] и Дыдаком [51]. $D\text{-}\dim X\leqslant n$ в точности тогда, когда существует ассоциированный с X спектр $\underline{X}$, состоящий из симплициальных комплексов размерности $\leqslant n$ (там же). Это и есть, по существу, определение Эдвардса с Гэганом. D-$\dim X = F$-$\dim X$ для метризуемых компактов. В общем случае D-$\dim X \leqslant F$-$\dim X \leqslant \dim X$, где $\dim X$ определено с помощью нормальных локально конечных открытых покрытий (там же). Для всякой связной компактной абелевой группы F-$\dim X = \dim X$ (Кисслинг [92]). Для метризуемых компактов F-$\dim X$ есть наименьшее из таких чисел k, что для каждого отображения $f: X \to P$ в полиэдр найдется такое отображение $g: X \to P$, что $g \simeq f$ и $\dim(\mathrm{Im} g) \leqslant k$ (Новак [153]). Это должно бы быть верным и для размерности D-dim для бикомпактов. Неравенства D-$\dim X \leqslant n$ и F-$\dim X \leqslant n$ сохраняются при шейповом доминировании. Аналогично определяются и размерности пунктированных пространств, но ничего нового не получается: D-$\dim(X, x) = D$-$\dim X$ для любых пространств (Дыдак [51]). Если F-$\dim X < 2n - 1$, то определена группа $\pi^n(X, x)$ (Борсук [34]). Для метризуемых компактов верны следующие неравенства:

1) F-$\dim(A \cup B) \leqslant \mathrm{Max}\{F$-$\dim A$, F-$\dim B$, $1 + F$-$\dim(A \cap B)\}$;

2) F-$\dim(X/A) \leqslant \mathrm{Max}\{F$-$\dim X$, $1 + F$-$\dim A\}$, если $A \subset B$;

3) F-$\dim(X \times A) \leqslant F$-$\dim X + F$-$\dim Y$ (Новак [153], Борсук [34]).

Последнее верно и для D-dim. Для каждого метризуемого компакта X существует такой компакт Y, что $\mathrm{Sh} X = \mathrm{Sh} Y$ и F-$\dim X = \dim Y$ (Голштинский [153], Кодама [99]). F-$\dim(\lim X_K) \leqslant \mathrm{Max}\{F$-$\dim X_K\}$ для любой обратной последовательности метризуемых компактов X_K (Новак [153]). Для шейпово 1-связных подвижных или конечномерных в смысле F—dim метризуемых компактов размерность F-$\dim X = \mathrm{Max}\{k : \check{H}^k(X, Z) \neq 0\}$ (там же). Решается задача о равенстве F-$\dim(X + Y) = F$-$\dim X + F$-$\dim Y$ следующим образом. Метризуемый компакт Y называется F-компактом, если F-$\dim Y = \mathrm{Max}\{x : \check{H}^k(X, G) \neq 0\}$ для любой нетривиальной абелевой группы G. Оказывается, F-$\dim(X \times Y) = F$-$\dim X + F$-$\dim Y$ для всякого F-компакта Y и для всякого компакта X за одним единственным исключением: исключая шейпово 2-связные компакты X (хотя бы в одной точке) размерности F-$\dim X = 2$ (Новак [154, 156]). Это исключение имеет место: построен такой метризуемый континуум $\check{X}$, что F-$\dim(\check{X} \times Y) < F$-$\dim \check{X} + F$-$\dim Y$ для всякого континуума Y конечной размерности F-$\dim Y$ (Спиж [186]). Если метризуемый компакт X является собственным подмножеством n-мерного топологического многообразия, то F-$\dim X \leqslant n - 1$ (Новак [156]).

Тесно связан с размерностью инвариант $e(X)$, введенный Борсуком [33] как минимум таких чисел n, что в $\mathbf{R}^n$ существует множество Y, имеющее тот же шейп, что и X. Заменить в определении знак $=$ на знак $\leqslant$ нельзя: связный двумерный P

компактный полиэдр P (Данвуди [49]) имеет число $e(P) > 3$, но в $\mathbf{R}^3$ существует такой компакт X, что $\mathrm{Sh} X \geqslant \mathrm{Sh} P$ (Кадлов [88]). Для метризуемых компактов F-$\dim X \leqslant e(X) - 1 \leqslant 2F$-$\dim X$ (Борсук [33]).

Отметим, наконец, инвариант $\check{\mathrm{ca}}\mathrm{t} X$, обобщающий категорию Люстерника-Шнирельмана, введенный независимо и различными способами Борсуком [35] для метризуемых компактов и Ю. М. Смирновым с В. В. Агароняном [1] для произвольных пространств (следуя традиции число $\check{\mathrm{ca}}\mathrm{t} X$ Смирнова — Агароняна здесь мы уменьшили на 1). Для метризуемых компактов оба определения эквивалентны. При шейповом доминировании число $\check{\mathrm{ca}}\mathrm{t}\, X$ не повышается. Для шейпово 0-связных пространств $\check{\mathrm{ca}}\mathrm{t} X \leqslant D$-$\dim X + 1$ (Ю. М. Смирнов и В. В. Агаронян [1]). $\mathrm{cat} \underline{X} \leqslant D$-$\dim \underline{X} + 1$ для локально стягиваемых и шейпово 0-связных спектров $\underline{X}$ категории pro-H-TOP (там же). Здесь еще многое остается сделать. Интересны следующие проблемы, связанные с размерностью:

VI) Как ведут себя размерности F-dim и D-dim для метризуемых сепарабельных (метризуемых, бикомпактных, p-паракомпактных) пространств?

VII) Как ведет себя размерность F-dim при таких отображениях $f: X \to Y$ метризуемых компактов, что F-$\dim(f^{-1}y) \leqslant m$ при всех y? (Борсук [34]).

VIII) Существует ли такой метризуемый компакт X, что всякий его подкомпакт A либо имеет размерность F-$\dim A = \infty$, либо $\dim A = 0$? (Ю. М. Смирнов).

IX) Во всяком ли метризуемом компакте конечной размерности F-dim существуют подкомпакты любой меньшей размерности? (Ю. М. Смирнов).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Агаронян В. В., Смирнов Ю. М.*, Категория Люстерника—Шнирельмана для про-категорий. Докл. АН СССР, 1979, *246*, № 4, 777—779 (РЖМат, 1979, 11А470)
2. *Богатый С. А.*, О теореме Вьеториса для шейпов и одной задаче Ю. М. Смирнова. Докл. АН СССР 1973, *211*, № 4, 764—767 (РЖМат, 1973, 12А487)
3. —, Аппроксимационные и фундаментальные ретракты. Мат. сб., 1974, *93*, № 1, 90—102 (РЖМат, 1974, 5А546)
4. —, Об n-подвижности в смысле Борсука. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys. 1974, *22*, № 8, 821—825 (РЖМат, 1976, 7А640)
5. —, О теореме Вьеториса в категории гомотопий и одной проблеме Борсука. Fund. Math., 1974, *84*, № 3, 209—228 (РЖМат, 1974, 10А425)
6. —, О сохранении шейпов при отображениях. Докл. АН СССР, 1975, *224*, № 2, 261—264 (РЖМат, 1976, 4А497)
7. —, *Калинин В. А.*, О подвижности относительно различных классов пространств. Мат. заметки, 1977, *21*, № 1, 125—132 (РЖМат, 1977, 7А457)
8. *Борсук К.*, Теория шейпов. М. Мир, 1976, 192 с. (РЖМат, 1977, 1А499)
9. *Котанов С. С.*, Сильная подвижность относительно некоторого класса пространств и отображений. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис

моамбе. Сообщ. АН ГрузССР, 1978, *92*, № 2, 277—280 (РЖМат, 1979, 8А535)
10. —, Теорема Куратовского—Дугунджи в теории шейпов. МГУ, М., 1979, 19 с. (Рукопись деп. ВИНИТИ 12 марта 1979 г., № 861-79 Деп.) (РЖМат, 1979, 8А533)
11. —, Подвижность и продолжение фундаментальных последовательностей. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 2, 207—208 (РЖМат, 1980, 8А493)
12. *Левшенко Б. Т.*, О классификационной теореме в теории шейпов. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе. Сообщ. АН ГрузССР, 1979, *93*, № 1, 25—28 (РЖМат, 1979, 8А532)
13. *Лисица Ю. Т.*, Продолжение непрерывных отображений и факторизационная теорема. Сиб. мат. ж., 1973, *14*, № 1, 128—139 (РЖМат, 1973, 8А410)
14. —, Продолжение последовательностей, аппроксимирующих данный компакт. Тр. Моск. мат. об-ва, 1975, *32*, 93—118 (РЖМат, 1976, 7А641)
15. —, Классификационная теорема Хопфа в теории шейпов. Сиб. мат. ж., 1977, *18*, № 1, 143—160 (РЖМат, 1977, 7А493)
16. *Скордев Г. С.*, Шейп компактных связных конечномерных групп. Докл. Болг. АН, 1978, *31*, № 12, 1517—1518 (РЖМат, 1979, 7А576)
17. *Шостак А. П.*, Шейповая эквивалентность в классах компактности. Докл. АН СССР, 1974, *214*, № 1, 67—70 (РЖМат, 1974, 5А547)
18. —, Шейпы в классах компактности: ретракты, экстензоры, подвижность. Уч. зап. Латв. ун-та, 1975, *236*, № 1, 108—128 (РЖМат, 1978, 3А338)
19. *Alexandroff P.*, Dimensionstheorie. Math. Ann., 1932, *106*, 161—238
20. *Artin M., Mazur B.*, Etale homotopy. Lect. Notes Math., 1969, № 100, 169 p. (РЖМат, 1971, 1А343)
21. *Bacon P.*, Axiomatic shape theory. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *53*, № 2, 489—496 (РЖМат, 1976, 10А304)
22. *Bauer F. W.*, A characterization of movable compacta. J. reine angew. Math. 1977, *293—294*, 394—417 p. (РЖМат, 1978, 4А438)
23. *Borsuk K.* Concerning homotopy properties of compacta. Fund. Math., 1968, *62*, № 3, 223—254 (РЖМат, 1969, 2А505)
24. —, Fundamental retracts and extensions of fundamental sequences. Fund. Math., 1969, *64*, № 1, 55—85 (РЖМат, 1969, 10А302)
25. —, On movable compacta. Fund. Math., 1969, *66*, № 1, 137—146 (РЖМат, 1970, 6А377)
26. —, A note on the theory of shape of compacta. Fund. Math., 1970, *67*, № 2, 265—278 (РЖМат, 1970, 11А353)
27. —, On the shape of the suspension. Colloq. Math., 1970, *21*, № 2, 247—252 (РЖМат, 1971, 1А417)
28. —, Concerning the notion of the shape of compacta. Proc. Int. Symp. Topol. and its Appl., Herzeg-Novi, 1968. Beograd, 1969, 98—104 (РЖМат, 1971, 4А503)
29. —, Hopf classification theorem in the shape theory. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1971, *19*, № 5, 387—390 (РЖМат, 1972, 1А817)
30 —, On the *n*-movability. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1972, *20*, № 10, 859—864 (РЖМат, 1973, 6А533)
31. —, On some hereditable shape properties. Ann. pol. math., 1974, *29*, № 1, 83—86 (РЖМат, 1974, 9А572)
32. —, Hopf extension theorem in the shape theory. Colloq. math., 1975, *32*, № 2, 211—212 (РЖМат, 1976, 2А629)
33. —, On several problems of the theory of shape. Stud. Topol., New York, e. a., 1975, 67—79 (РЖМат, 1976, 7А663)
34. —, Theory of shape. Monogr. mat. PAN, 1975, № 59, 379 p. (РЖМат, 1976, 7А679)
35. —, On the Lusternik-Schnirelmann category in the theory of shape. Fund. Math. 1978, *99*, № 1, 35—42 (РЖМат, 1978, 9А511)
36. *Bousfield A. K., Kan D. M.*, Homotopy limits, completions and localizations. Lect. Notes Math., 1972, № 304, 348 p. (РЖМат, 1973, 7А516)

37. *Calder A., Siegel J.*, Kan extensionof homotopy functors. J. Pure and Appl. Algebra, 1978, *12*, № 3, 253—269 (РЖМат, 1979, 3А464)
38. *Chamberlin R. E., Case J. H.*, Tree-like continua and quasi-compexes. Duce Math. J., 1959, *26*, № 3, 511—517 (РЖМат, 1960, 8732)
39. *Chogoshvili G.*, Sur les groupes d'homologie de l'espace, basés sur une catégorie donnée de complexes. Proc. Int. Symp. Topol. and its Appl., Herceg-Novi, 1968. Beograd, 1969, 109 p. (РЖМат, 1971, 5А557)
40. *Christie D. E.*, Net homotopy for compacta. Trans. Amer. Math. Soc., 1944, *56*, 275—308 p.
41. *Cordier J. M., Porter T.*, Introduction a la theorie de la forme I. Esquis. math., 1978, № 30, 138 p. (РЖМат, 1980, 6А578)
42. *Cox C.*, Three questions of Borsuk concerning movability and fundamental retraction. Fund. Math., 1973, *80*, № 2, 169—179 (РЖМат, 1974, 4А381)
43. *Deleanu A., Hilton P.*, Borsuk shape and generalization of Grothendieck's definitions of pro-category. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1976, *79*, № 3, 473—482 (РЖМат, 1976, 11А609)
44. —, —, On the categorical shape of a functor. Fund. Math., 1977, *97*, № 3, 157—176 (РЖМат, 1978, 5А381)
45. —, —, Generalized shape theory. Lect. Notes Math., 1977, № 609, 56—65 (РЖМат, 1978, 9А512)
46. *Demers L.*, On spaces which have the shape of *CW*-complexes. Fund. Math., 1975, *90*, № 1, 1—9 (РЖМат, 1976, 7А676)
47. *Doitschinov D.*, The notion of *K*-shape. Gen. Topol. and Relat. Modern. Anal. and Algebra IV. Proc. 4-th Prague Topol. Symp., 1976, Part B. Prague, 1977, 95—98 (РЖМат, 1978, 6А528)
48. *Downing J. S.*, Absolute retracts and extensors for non-normal spaces. Gen. Topol. and Appl., 1977, *7*, № 3, 275—281 (РЖМат, 1978, 4А412)
49. *Draper J., Keesling J.* An example concerning the Whitehead theorem in shape theory. Fund. Math., 1976, *92*, № 3, 255—259 (РЖМат, 1977, 6А398)
50. *Dunwoody M. J.*, The homotopy type of a two-dimensional complex. Bull. London Math. Soc., 1976, *8*, № 3, 282—285 (РЖМат, 1977, 4А412)
51. *Dydak J.*, Some remarks concerning the Whitehead theorem in shape theory. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1975, *23*, № 4, 437—445 (РЖМат, 1976, 2А630)
52. —, Movability and the shape of decomposition spaces. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1975, *23*, № 4, 447—452 (РЖМат, 1976, 4А498)
53. —, Some remarks on the shape of decomposition spaces. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1975, *23*, № 5, 561—564 (РЖМат, 1976, 4А519)
54. —, On the Whitehead theorem in pro-homotopy and a question of Mardešic. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1975, *23*, № 7, 775—779 (РЖМат, 1976, 5А516)
55. —, A generalization of cohomotopy groups. Fund. Math., 1975, *90*, № 1, 77—98 (РЖМат, 1976, 7А675)
56. —, An algebraic condition characterizing FANR-spaces. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1976, *24*, № 8, 615—620 (РЖМат, 1977, 4А551)
57. —, 1-movable continuum need not be pointed *I*-movable. Bull. Acad. pol. sci. math., astron., et phys., 1977, *25*, № 6, 559—562 (РЖМат, 1978, 3А337)
58. —, A simple proof that pointed FANR's are regular fundamental retracts of ANR's. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1977, *25*, № 1, 55—62 (РЖМат, 1977, 11А467)
59. —, On internally movable compacta. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1979, *27*, № 1, 107—110 (РЖМат, 1979, 12А570)
60. —, The Whitehead theorem and the Smale theorem in shape theory. Rozpr. mat., 1979, № 156, 55 p. (РЖМат, 1980, 1А622)

61. —, Pointed and unpointed shape and pro-homotopy. Fund. Math., 1980, *107*, № 1, 57—69 p (РЖМат, 1980, 12А551)
62. —, *Kadlof A.*, Compactness in shape theory. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1977, *25*, № 4, 391—394 (РЖМат, 1978, 1А458)
63. —, *Nowak S., Strok M.*, On the union of two FANR-sets. Bull. Acad. pol. sci. math. astron. et phys., 1976, *24*, № 7, 485—489 (РЖМат, 1977, 4А559)
64. —, *Orłowski M.*, On the sum theorem for FANR-spaces. Bull. Acad. pol. sci. math. astron. et phys., 1977, *25*, № 2, 161—163 (РЖМат, 1977, 12А608)
65. —, *Segal J.*, Shape theory. Lect. Notes Math., 1978, № 688, 149 p. (РЖМат, 1980, 1А621)
66. *Edwards D. A.*, Etale homotopy theory and shape. Lect. Notes Math., 1974, № 428, 58—107 (РЖМат, 1976, 2А635)
67. —, *Geoghegan R.*, Shapes of complexes, ends of manifolds homotopy limits and the Wall obstruction. Ann. Math., 1975, *101*, № 3, 521—535 (РЖМат, 1976, 3А554)
68. —, —, Correction to «Shapes of complexes, ends of manifolds, homotopy limits and the Wall obstruction». Ann. Math., 1976, *104*, № 2, 389 (РЖМат, 1977, 6А399)
69. —, —, The stability problem in shape and Whitehead theorem in procategory. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *214*, 261—277 p. (РЖМат, 1976, 12А627)
70. —, Infinite-dimensional Whitehead and Vietoris theorems in shape and pro-homotopy. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, *219*, 351—360 p. (РЖМат, 1977, 4А555)
71. —, Stability problems in shape and pro-homotopy. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, *222*, 389—403 p. (РЖМат, 1977, 6А394)
72. *Edwards D. A., Hastings H. M.*, Čech and Steenrod homotopy theories with applications to geometric topology. Lect. Notes Math., 1976, № 542, 296 p. (РЖМат, 1977, 10А365)
73. *Ferry S.*, Shape equivalence does not imply CE-equivalence. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *80*, № 1, 154—156 (РЖМат, 1981, 3А542)
74. *Fox R. H.*, On shape. Fund. Math., 1972, *74*, № 1, 47—71 (РЖМат, 1972, 10А352)
75. —, Shape theory and covering spaces. Lect. Notes Math., 1974, № 375, 71—90 (РЖМат, 1974, 10А426)
76. *Frei A.*, Theorie des formes. Cah. topol. et géom. différent. Ch. Ehresmann, 1975, *16*, № 4, 433—435 (РЖМат, 1977, 3А476)
77. —, On completion and shape. Bol. Soc. brasil. mat., 1974, *5*, № 2, 147—159 (РЖМат, 1977, 6А395)
78. —, *Kleisli H.*, A question in categorical shape theory: when is a shape-invariant functor a Kan axtension? Lect. Notes Math., 1979, № 719, 55—62 (РЖМат, 1980, 1А434)
79. *Geoghegan R.*, Elementary proofs of stability theorems in pro-homotopy and shape. Gen. Topol. and Appl., 1978, *8*, № 3, 265—281 (РЖМат, 1978, 9А510)
80. —, Open problems in infinite-dimensional topology. Preprint, 1979, 42 p.
81. —, *Lacher R. C.*, Compacta with the shape of finite complexes. Fund. Math., 1976, *92*, № 1, 25—27 (РЖМат, 1977, 4А550)
82. *Godement R.*, Topologie algébrique et theorie des faisceaux. Paris, Hermann, 1958, 319 p. (РЖМат, 1962, 4А335)
83. *Godlewski S.*, Cohomotopy groups and shape in the sence of Fox. Fund. Math., 1972, *75*, № 2, 175—185 (РЖМат, 1973, 3А548)
84. —, Cohomotopy groups and shape in the sence of Mardešic. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1973, *21*, № 8, 711—718 (РЖМат, 1974, 4А438)
85. *Hołsztinski W.*, An extension and axiomatic characterization of Borsuk's theorie of shape. Fund. Math., 1971, *70*, № 2, 157—168 (РЖМат, 1971, 9А416)

86. —, Continuity of Borsuk's shape functor. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1971, *19*, № 12, 1105—1108 (РЖМат, 1972, 6А487)
87. *Kadlof A.*, The Van-Kampen theorem in the shape theory. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1977, *25*, № 4, 395—400 (РЖМат, 1978, 1А517)
88. —, An example resolving Borsuk's problem concerning the index $e(X)$. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1978(1979), *26*, № 11, 905—907 (РЖМат, 1979, 7А566)
89. *Kahn D. S.*, An example in Čech cohomology. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, *26*, № 3, 1660—1661 (РЖМат, 1966, 7А374)
90. *Keesling J.*, On movability and local connectivity. Lect. Notes Math., 1974, № 375, 158—167 (РЖМат, 1974, 9А571)
91. —, Shape theory and topological groups. Lect. Notes Math., 1974, № 378, 233—242 (РЖМат, 1975, 4А536)
92. —, Shape theory and compact connected abelian topological groups Trans. Amer. Math. Soc., 1974, *194*, 349—358 p. (РЖМат, 1975, 5А497)
93. —, An algebraic property of the Čech cohomology groups which prevents local connectivity and movability. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, *190*, 151—162 p. (РЖМат, 1975, 5А498)
94. —, A non-movable trivial-shape decomposition in the Hilbert cube. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys. 1975, *23*, № 9, 997—998 (РЖМат, 1976, 6А521)
95. —, The Čech cohomology of movable and n-movable spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, *219*, 149—167 p. (РЖМат, 1977, 4А545)
96. —, Some example in shape theory using the theory of compact connected abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, *219*, 169—188 (РЖМат, 1977, 4А553)
97. —, On the Whitehead theorem in shape theory. Fund. Math., 1976, *92*, № 3, 247—253 (РЖМат, 1977, 6А396)
98. *Kodama Y.*, On the shape of decomposition space. J'Math. Soc. Japan, 1974, *26*, № 4, 636—646 (РЖМат, 1975, 8А495)
99. —, On Δ-spaces and fundamental dimension in the sence of Borsuk. Fund. Math., 1975, *89*, № 1, 13—22 (РЖМат, 1976, 2А626)
100. —, Fine movability. J. Math. Soc. Japan., 1978, *30*, № 1, 101—116 (РЖМат, 1978, 11А578)
101. —, Decomposition spaces and shape in the sence of Fox. Fund. Math., 1977, *97*, № 3, 199—208 (РЖМат, 1978, 4А409)
102. —, A remark on the union of pointed FANR's. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1978, *26*, № 3, 255—260 (РЖМат, 1978, 12А862)
103. —, A characteristic property of a finite dimensional FANR. Japan J. Math. New Ser., 1978, *4*, № 2, 445—460 (РЖМат, 1979, 7А567)
104. —, On tom Dieck's theorem in shape theory. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1979, *27*, № 5, 359—363 (РЖМат, 1980, 5А513)
105. —, *Watanabe T.*, A note on Borsuk's *n*-movability. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1974, *22*, № 3, 289—294 (РЖМат, 1974, 11А583)
106. *Koyama A.*, Hopf classification theorem in shape theory. Math. Japan. 1977, *22*, № 4, 479—490 (РЖМат, 1978, 12А900)
107. —, *Ono J.*, Tsuda K. An algebraic characterization of pointed S^n-movability. Bull. Acad. pol. sci. math. astron et phys., 1977, *25*, № 12, 1249—1252 (РЖМат, 1978, 9А517)
108. *Kozłowski G.*, Images of ANR's. Preprint, 1978, 47 p.
109. —, *Segal J.*, *n*-movable compacta and ANR-systems. Fund. Math., 1974, *65*, № 3, 235—243 (РЖМат, 1975, 5А499)
110. —, —, Movability and shape-connectivity. Fund. Math., 1976, *93*, № 2, 145—154 (РЖМат, 1977, 7А495)
111. —, —, Locally well-behaved paracompacta in shape theory. Fund. Math., 1977, *95*, № 1, 55—71 (РЖМат, 1977, 11А468)
112. —, —, Local behavior and the Vietoris and Whitehead theorems in shape theory. Fund. Math., 1978, *99*, № 3, 213—225 (РЖМат, 1978, 10А419)

113. —, *Walsh J. J.*, The cell-like mapping problem. Bull. Amer. Math. Soc., 1980, *2*, № 2, 315—316 (РЖМат, 1980, 11А592)
114. *Krasinkiewicz J.*, Continuous images of continua and *I*-movability. Fund. Math., 1978, *98*, № 2, 141—164 (РЖМат, 1978, 7А695)
115. —, Local connectedness and pointed *I*-movability. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1977, *25*, № 12, 1265—1269 (РЖМат, 1978, 9А481)
116. *Kuperberg K.*, Two Vietoris-type isomorphism theorems in Borsuk's theory of shape concerning the Vietoris—Čech homology and Borsuk's fundamental groups. Stud. Topol. New York, e. a. 1975, 285—313 (РЖМат, 1976, 7А680)
117. —, A note on the Hurewicz isomorphism theorem in Borsuk's theory of shape. Fund. Math., 1976, *90*, № 2, 173—175 (РЖМат, 1976, 9А488)
118. —, An isomorphism theorem of the Hurewicz-type in Borsuk's theory of shape. Fund. Math., 1972, *77*, № 1, 21—32 (РЖМат, 1973, 6А557)
119. *Kuperberg W., Olendski J.*, On certain types of movability of the approximatively *k*-connected compacta. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1977, *25*, № 11, 1171—1173 (РЖМат, 1978, 8А514)
120. *Mardešić S.*, *n*-dimensional LC^{n-1} compacta are movable. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1971, *19*, № 6, 505—509 (РЖМат, 1971, 12А599)
121. —, Retracts in shape theory Glas. mat., 1971, *6*, № 1, 153—163 (РЖМат, 1972, 3А477)
122. —, A non-movable compactum with movable suspension. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1971, *19*, № 12, 1101—1103 (РЖМат, 1972, 4А592)
123. —, Shapes for topological spaces. Gen. Topol. and Appl., 1973, *3*, № 3, 265—282 (РЖМат, 1974, 3А375)
124. —, Strongly movable compacta and shape retracts. Proc. Intern. Symp. Topol. and Appl., Budva, 1972, Beograd, 1973, 163—166 (РЖМат, 1974, 7А673)
125. —, Pairs of compacta and trivial shape. Trans. Amer. Math. Soc. 1974, *189*, 329—336 (РЖМат, 1975, 1А552)
126. —, Shapes of compact pairs. Symp. math. 1-st naz. alta mat. Vol. 16. London—New York, 1975, 75—82 (РЖМат, 1976, 7А643)
127. —, The Hurewicz and Whitehead theorems in shape theory. Stud. Topol. New York, e. a. 1975, 355—365 (РЖМат, 1976, 7А681)
128. —, On the Whitehead theorem in shape theory 1. Fund. Math., 1976, *91*, № 1, 51—64 (РЖМат, 1976, 11А622)
129. —, On the Whitehead theorem in shape theory. II. Fund. Math., 1976, *91*, № 2, 93—103 (РЖМат, 1977, 2А590)
130. —, Pro-categories and shape theorie. Lect. Notes Math., 1976, № 540, 425—434 (РЖМат, 1977, 2А591)
131. —, *Segal J.*, Shapes of compacta and ANR-systems. Fund Math. 1971, *72*, № 1, 41—59 (РЖМат, 1972, 2А658)
132. —, —, Movable compacta and ANR-systems. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1970, *18*, № 11, 649—654 (РЖМат, 1971, 5А528)
133. —, —, Equivalence of Borsuk and the ANR-system approach to shapes. Fund. Math., 1971, *72*, № 1, 61—68 (РЖМат, 1972, 2А659)
134. —, *Šostak A. P.*, On the homotopy type of ANR's for *p*-paracompacta. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys, 1979, *27*, № 10, 803—808 (РЖМат, 1981, 5А444)
135. —, *Ungar S.*, The hurewicz theorem in shape theory. Glas. mat. 1974, *9*, № 2, 317—328 (РЖМат, 1975, 8А524)
136. *McMillan D. R.*. Cutting of homotopies on aciclic sets. Lect. Notes Math. 1975, *438*, 343—352 (РЖМат, 1976, 2А665)
137. —, One-dimensional shape properties and three-manifolds. Stud. Topol. New York, e. a. 1975, 367—381 (РЖМат, 1976, 7А709)

138. —, A locally connected non-movable continuum that failst to separate E^3. Fund. Math., 1977, *96*, № 2, 117—125 (РЖМат, 1978, 2А534)
139. *Morita K.*, The Hurewicz and the Whitehead theorems in shape theory. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1974, *12*, № 326—346, 246—258 p. (РЖМат, 1975. 8А523)
140. —, On shapes of topological spaces. Fund. Math., 1975, *86*, № 3, 251—259 (РЖМат, 1975, 11А551)
141. —, The Hurewicz isomorphism theorem on homotopy and homology pro-groups. Proc. Japan Acad. 1974, *50*, № 7, 453—457 (РЖМат, 1975, 11А552)
142. —, The Whitehead theorem in shape theory. Proc. Japan Acad., 1974, *50*, № 7, 458—461 (РЖМат, 1975, 11А553)
143. —, Another form of the Whitehead theorem in shape theory. Proc. Japan Acad. 1975, *51*, № 6, 394—398 (РЖМат, 1976, 2А632)
144. —, The Hopf extension theorem for topological spaces. Houston J. Math., 1975, *1*, № 1, 121—129 (РЖМат, 1976, 7А671)
145. —, A Vietoris theorem in shape. Proc. Japan Acad., 1975, *51*, № 9, 696—701 (РЖМат, 1976, 7А674)
146. —, The suspension theorem in shape theory. Math. Japan., 1975, *20*, spec. iss. 179—183 (РЖМат, 1976, 10А295)
147. —, A Vietoris theorem in shape theory. II. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1977, *A13*, № 366-382, 219—224 p. (РЖМат, 1977, 9А637)
148. *Moszińska M.*, Uniformly movable compact spaces and their algebraic properties. Fund. Math. 1972, *77*, № 2, 125—144 (РЖМат, 1973, 6А535)
149. —, The Whitehead theorem in the theory of shape. Fund. Math., 1973, *80*, № 3, 221—263 (РЖМат, 1974, 6А635)
150. —, The Fox theorem and the Whitehead theorem in the theory of shape. Topics Topology. Amsterdam—London, 1974, 505—508 (РЖМат, 1975, 12А522)
151. —, Concerning the Whitehead theorem for movable compacta. Fund. Math. 1976, *92*, № 1, 43—55 (РЖМат, 1977, 4А554)
152. *Nagata Yu.*, A note on *M*-spaces and topologically complete space. Proc. Japan Acad. 1969, *45*, № 7, 541—543 (РЖМат, 1970, 7А439)
153. *Nowak S.*, Some properties of fundamental dimension. Fund. Math., 1974, *85*, № 3, 211—227 (РЖМат, 1975, 7А663)
154. —, On the fundamental dimension of approximately *I*-connected compacta. Fund. Math. 1975, *89*, № 1, 61—79 (РЖМат, 1976, 2А625)
155. —, An example of finite dimensional movable continuum with an infinite family of shape factors. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1976(1977), *24*, № 11, 1019—1020 (РЖМат, 1977, 9А637)
156. —, Some remarks concerning the fundamental dimension of the cartesian product of two compacta. Fund. Math., 1979, *103*, № 1, 31—41 (РЖМат, 1979, 10А376)
157. *Olendski J.*, On movability and other similar shape properties. Fund. Math., 1975, *88*, № 3, 179—191 (РЖМат, 1976, 4А502)
158. *Ono J.*, A note on *n*-movability and S^k-movability Proc. Japan Acad., 1976, *52*, № 2, 52—54 (РЖМат, 1976, 9А451)
159. *Overton R. H.*, Čech homology for movable compacta. Doct. Diss., Univ. Wash., 1971, Diss. Abstrs. Int., 1972, *B32*, № 8, 4738, 42 p. (РЖМат, 1972, 7А445)
160. —, Čech homology for movable compacta. Fund. Math., 1972, *77*, № 3, 241—251 (РЖМат, 1973, 6А553)
161. *Overton R. H.*, Segal J., A new construction of movable compacta. Glas. mat. 1971, *6*, № 2, 361—363 (РЖМат, 1972, 6А489)
162. *Porter T.*, Sur le theoreme de Van Kampen et la construction de Vietoris. S. R. Acad. Sci. 1972, *274*, № 5, A392—A394 (РЖМат, 1972, 7А460)
163. —, Čech homotopy. J. London Math. Soc., 1973, *6*, № 3, 429—436 (РЖМат, 1973, 12А485)
164. —, Čech homotopy. II. J. London. Math. Soc., 1973, *6*, № 4, 667—675 (РЖМат, 1974, 1А512)

165. —, Borsuk's theory of shape and Čech homotopy. Math. Scand., 1973, *33*, № 1, 83—89 (РЖМат, 1974, 10А402)
166. —, Obstructions in shape theory. Bul. Amer. Math. Soc., 1973, *79*, № 6, 1206—1209 (РЖМат, 1974, 10А436)
167. —, A Čech-Hurewicz isomorphism theorem for movable metric compacta. Math. Scand., 1973, *33*, № 1, 90—96 (1974, 10А427)
168. —, Generalized shape theory. Proc. Roy. Irish Acad., 1974, *A74*, № 6, 33—48 (РЖМат, 1974, 11А595)
169. —, Stability results for topological spaces. Math. Z., 1974, *140*, № 1, 1—21 (РЖМат, 1975, 7А666)
170. —, Une theorie des obstructions dans une categorie des diagrammes et des applications a la theorie d'homotopie de Čech. IV. Ann. Soc. sci. Bruxelles. Ser. 1, 1976, *90*, № 1, 77—87 (РЖМат, 1976, 9А497)
171. —, Une theorie des obstructions dans une categorie des diagrammes et des applications a la theorie d'homotopie de Čech. V. Ann. Soc. sci. Bruxelles. Ser. 1, 1976, *90*, № 2, 173—181 (РЖМат, 1977, 1А508)
172. —, Abstract homotopy theory in pro-categories. Cah. topol. et geom. different. Ch. Ehresmann, 1976, *16*, № 2, 113—124 (РЖМат, 1977, 6А386)
173. —, Essensial properties of pro-objects in Grothendieck categories. Cah. topol. et geom. different. Ch. Ehresmann., 1979, *20*, № 1, 3—57 (РЖМат, 1980, 1А435)
174. *Quigley J. B.*, Shape theory, approaching theory and a Hurewicz theorem. Doct. Diss. Ind. Univ., 1970, Diss. Abstrs Int., 1971, *B31*, № 11, 6759, 197 p. (РЖМат, 1972, 5А521)
175. —, An exact sequence from the *n*-th to the *n*-1-st fundamental group. Fund. Math., 1973, *77*, № 2, 195—210
176. —, Equivalence of fundamental and approaching groups of movable pointed compacta. Fund. Math. 1976, *91*, № 2, 73—83 (РЖМат, 1977, 1А472)
177. *Raussen M.*, Hurewicz isomorphism and Whitehead theorem in pro-categories. Arch. Math., 1978, *30*, № 2, 153—164 (РЖМат, 1978, 9А509)
178. *Sanders T. J.*, Shape groups for Hausdorff spaces. Glas. mat., 1973, *8*, № 2, 297—304 (РЖМат, 1974, 4А407)
179. *Segal J.*, Movable shapes. Lect. Notes Math., 1974, № 375, 236—241 (РЖМат, 1974, 9А570)
180. —, Movable continua and shape retracts. Stud. Topol. New York, e. a. 1975, 539—544 (РЖМат, 1976, 7А661)
181. —, Local behavior in shape theory. Gen. Topol. and Relat. Modern Anal. and Algebra. IV. Proc. 4-th Prague Topol. Symp., 1976. Part B, Prague, 1977, 413—419 (РЖМат, 1978, 6А546)
182. —, An introductions to shape theory. Lect. Notes Math., 1978, № 637, 225—242 (РЖМат, 1979, 5А477)
183. *Sher R. B.*, Realizing cell-like maps in Euclidean space. Gen. Topol. and Appl., 1972, *2*, № 2, 75—89 (РЖМат, 1973, 2А434)
184. *Spiez S.*, A majorant for the family of all movanle spaces. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1973, *21*, № 7, 615—620 (РЖМат, 1974, 3А377)
185. —, Movability and uniform movability. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1974, *22*, № 1, 43—45 (РЖМат, 1974, 7А672)
186. —, An example of a continuum X with Fd$(X\times S)$-Fd X-2. Preprint № 224, Inst. Math. Polish Acad. Sci. July 1980, 10 p.
187. *Suzuki J.*, On a theorem for *M*-spaces. Proc. Japan Acad., 1967, *43*, № 7, 610—614 (РЖМат, 1969, 1А450)
188. *Taylor J. L.*, A counterexample in shape theory. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, *81*, № 3, Part 1, 629—632 (РЖМат, 1976, 2А631)
189. *Ungar S.*, The Freudenthal suspension theorem in shape theory. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1976, *24*, № 4, 275—280 (РЖМат, 1976, 12А631)
190. —, *n*-connectedness of inverse systems and applications to shape theory. Glas. mat., 1978, *13*, № 2, 371—396 (РЖМат, 1979, 8А530)

191. —, On local homotopy and homology pro-groups. Glas. mat., 1979, *14*, № 14, 151—158 (РЖМат, 1980, 1А618)
192. —, The Van Kampen theorem for fundamental pro-groups. Bull. Acad. sci. pol. math., astron. et phys., 1979, *27*, № 2, 171—181 (РЖМат, 1980, 1А620)
193. *Le Van J.*, Shape theory. Doct. Diss Kent. Univ. 1973, 180 p.
194. *Watanabe T.*, On the characterization of uniform movability for compact connected abelian groups. Glas. mat., 1976, Ser. 3, *11*, № 2, 347—354 (РЖМат, 1977, 7А496)
195. — A note on the Hurewicz theorem in shape theory. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *61*, № 1, 137—140 (РЖМат, 1977, 9А638)
196. —, On strong movability. Bull. Acad. pol. sci. math., astron. et phys., 1977, *25*, № 8, 813—816 (РЖМат, 1978, 4А439)
197. —, On Čech homology and a stability theorem in shape theory, J. Math. Soc. Japan., 1977, *29*, № 4, 655—664 (РЖМат, 1978, 8А545)
198. *Weber C.*, La forme d'un espace topologique est une completion. C. r. Acad. sci., 1973, *277*, № 1, A7—A9 (РЖМат, 1974, 2А440)
199. Hastings H. M., Heller H., On unsplit homotopy idempotents, preprint.

УДК 514.17

КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В. Г. Болтянский

Комбинаторная геометрия — дитя XX века. Ее основные результаты, проблематика, методы появились именно в нашем столетии. Круг задач, относящихся к современной комбинаторной геометрии, весьма широк и не является пока еще четко очерченным. Границы, отделяющие эту новую область математики от выпуклого анализа, геометрической теории меры, интегральной геометрии, теории многогранников и т. п., достаточно расплывчаты и различными авторами проводятся по-разному. Конечно, можно сказать, что речь идет о геометрических задачах, связанных с различными «комбинациями» множеств (чаще всего, выпуклых) и их взаимным расположением, однако такое описание является слишком неопределенным. Более же точное описание задач, рассматриваемых в комбинаторной геометрии, затруднительно, поскольку число совершенно различных по своему характеру результатов (и даже постановок проблем), единодушно относимых специалистами к области комбинаторной геометрии, чрезвычайно велико. В качестве иллюстрации можно отметить, что книга [35], представляющая собой очень интересный обзор, посвящена одному весьма узкому кругу проблем комбинаторной геометрии (задачам, близким к теореме Хелли) и, несмотря на это, содержит десятки постановок задач и многие десятки литературных ссылок. Вот почему в предлагаемом обзоре автор ограничивается рассмотрением лишь нескольких, достаточно устоявшихся, направлений в современной комбинаторной геометрии. Существенным дополнением к этому обзору могут служить уже упоминавшаяся книга [35], а также работы [18, 25, 34, 55, 81].

§ 1. РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ МНОГОГРАННИКОВ

Два множества в E^n называются равновеликими, если равны их n-мерные объемы. Два множества M_1, M_2 (в E^n) называются равносоставленными, если они представляются, как «различные комбинации» одних и тех же частей. Более точно каждое из множеств M_1, M_2 можно таким образом представить в виде объединения конечного числа попарно не пересекающихся частей, что части, составляющие M_1, соответственно конгруэнтны частям, составляющим M_2. Для многогранников равносоставленность определяется несколько иначе: n-мерные многогранники M_1, M_2 в E^n называются равносоставленными, если M_i $(i=1, 2)$ можно представить в виде объединения конечного числа n-мерных **многогранников, попарно** не имеющих общих внутренних точек (в E^n), причем так, что многогранники, составляющие M_1, соответственно конгруэнтны многогранникам, составляющим M_2.

Теория равносоставленности произвольных множеств не слишком богата результатами. Однако одна из относящихся сюда теорем настолько неожиданна, что носит название «парадокса» Банаха — Тарского. Эта теорема (доказываемая с помощью аксиомы выбора) состоит в том, что при $n \geqslant 3$ любые два ограниченные множества в E^n, каждое из которых содержит внутренние точки, являются равносоставленными; обсуждение этой теоремы и ссылки на дальнейшие относящиеся сюда результаты можно найти в статье Кли [170].

«Парадокс» Банаха — Тарского можно трактовать как указание на то, что класс п р о и з в о л ь н ы х множеств в E^n слишком далеко выводит нас за рамки интуитивно-геометрического понимания смысла равносоставленности. Напротив, теория равносоставленности многогранников не только является подлинно геометрической теорией, но и весьма богата глубокими, интересными результатами, подавляющее большинство которых получено за 2—3 последних десятилетия. Часть этих результатов подробно изложена в книге [18]; ряд дальнейших теорем получен в упоминаемых ниже работах Б. Ессена, О. М. Кошелевой, А. Б. Харазишвили и других авторов. Все это и составляет содержание этого параграфа обзора.

Прежде всего, напомним, что n-мерный объем есть функция $v(M)$, однозначно определяемая на множестве всех многогранников в E^n следующими аксиомами:

(α) $v(M) \geqslant 0$ для любого многогранника M;

(β) если M есть объединение многогранников $M_1, \ldots, M_k$, попарно не имеющих общих внутренних точек в E^n, то $v(M) = v(M_1) + \ldots + v(M_k)$;

(γ) если M_1 и M_2 конгруэнтны, то $v(M_1) = v(M_2)$;

(δ) объем n-мерного куба, ребром которого служит единица длины, равен 1.

Из этих аксиом выводятся все теоремы об n-мерном объеме многогранников в E^n. Отметим, в частности, следующие факты:

(δ^*) объем n-мерного ортогонального параллелепипеда равен произведению его измерений;

(γ^*) при гомотетии g с коэффициентом $\lambda > 0$ объем n-мерного многогранника увеличивается в λ^n раз, т. е. $v(g(M)) = \lambda^n v(M)$;

(1.1) если два n-мерных многогранника M_1, M_2 равносоставленны, то они равновелики, т. е. $v(M_1) = v(M_2)$;

(1.2) если два n-мерных многогранника равнодополняемы (т. е. могут быть попарно конгруэнтными частями дополнены до двух конгруэнтных многогранников), то они равновелики;

(1.3) два n-мерных симплекса, у которых конгруэнтны основания и одинаковы проведенные к этим основаниям высоты, равновелики.

На теореме (1.1) основан метод разбиения, известный еще Евклиду: для вычисления объема многогранника M_1 пытаются разбить его на конечное число частей, перекомбинировав которые, можно составить более простой многогранник M_2 (объем которого известен); по теореме (1.1) имеем $v(M_1) = v(M_2)$, что и позволяет найти объем многогранника M_1. Аналогично, теорема (1.2) служит основой метода дополнения. Например, параллелограмм равносоставлен (а также равнодополняем) с прямоугольником, имеющим то же основание и ту же высоту; следовательно, эти параллелограмм и прямоугольник равновелики (имеют одинаковую площадь), что и позволяет, по теореме (δ^*), получить формулу для вычисления площади параллелограмма. Вообще, произвольный n-мерный параллелепипед равносоставлен (и равнодополняем) с некоторым ортогональным параллелепипедом; это позволяет получить известную формулу для объема n-мерного параллелепипеда в виде определителя n-го порядка, столбцами которого служат векторы-измерения параллелепипеда (записанные в заданном ортонормированном базисе).

Так как произвольный n-мерный многогранник в E^n может быть разбит на выпуклые многогранники (достаточно провести все гиперплоскости, в которых лежат грани исходного многогранника), а каждый выпуклый n-мерный многогранник может быть разбит на n-мерные симплексы, то для вычисления объема произвольного многогранника достаточно, в силу аксиомы (β), иметь формулу объема симплекса. Для $n=2$ объем симплекса (т. е. площадь треугольника) легко находится методом разбиения: треугольник равносоставлен с параллелограммом, имеющим то же основание и вдвое меньшую высоту. Таким образом, при $n=2$ вся теория измерения объемов многогранников (т. е. площадей многоугольников) может быть получена из теоремы (δ^*) с помощью метода разбиения (или дополнения). Поскольку теоремы (1.1) и (1.2), служащие основой методов разбиения и дополнения, требуют для своего доказательства применения лишь аксиом (β) и (γ), мы заключаем, что при $n=2$ теория объемов многогранников может быть построена, исходя из положений (β), (γ), (δ^*), как из аксиом.

Тот факт, что вся теория площадей многоугольников может быть развита на основе теоремы (δ^*) с помощью одного только метода разбиения (или дополнения), был в несколько иной форме выражен в виде теоремы, которую в прошлом столетии доказали Ф. Бойяи (1832) и П. Гервин (1833). Именно, они установили, что для $n=2$ справедлива теорема, обратная теореме (1.1) (или (1.2)). Таким образом, в евклидовой плоскости два многоугольника в том и только в том случае равновелики, если они равносоставлены* (а также, если они равнодополняемы). Аналогичная теорема справедлива в плоскости Лобачевского и эллиптической плоскости (подробное изложение имеется в книге [18]). Напротив, в неархимедовой плоскости эквивалентны лишь равновеликость и равнодополняемость; равносоставленность же, как показал изящным примером Д. Гильберт [32], им не эквивалентна.

Таково было состояние теории площадей и объемов к концу XIX столетия, когда Д. Гильберт сформулировал (в докладе на II международном конгрессе математиков, 1900 г.) свои знаменитые проблемы (см. [3]). Третья из них (связанная с понятием равносоставленности) состоит в следующем. Теория объемов в E^3 базируется на аксиомах (α), (β), (γ), (δ); имеется и теорема (δ^*) (об объеме прямоугольного параллелепипеда). Однако для вычисления объема тетраэдра, помимо (β), (γ), (δ^*), со времен Евклида используется предельный переход («чертова летница»), используемый для доказательства теоремы (1.3) (при $n=3$), а в современных учебниках — интеграл, определение которого также связано с предельным переходом. Обосновать использование «лишнего» (по сравнению с планиметрией) предельного перехода; доказать, что методами разбиения и дополнения невозможно (исходя из (δ^*)) вычислить объем произвольного тетраэдра,— это и есть третья проблема Гильберта.

Постановке проблемы предшествовало появление двух интересных работ, связанных с вычислением объема тетраэдра. Хилл [161] доказал существование тетраэдров, равносоставленных с кубом, т. е. тетраэдров, объем которых можно найти, исходя из (δ^*), методом разбиения. В работе Брикара [100] содержалось доказательство (оказавшееся, впрочем, ошибочным) того, что правильный тетраэдр T не равносоставлен с равновеликим ему кубом W. И хотя Гильберт при постановке проблемы не цитирует эти работы, они, несомненно, оказали влияние на него. Гильберт ожидал, что существует строгое доказательство неравносоставленности многогранников T и W; предвидел, что поставленная проблема приведет к созданию математически интересной теории равносоставленности.

* Согласно результатам Банаха [90] и Морса [185] существует способ сопоставить каждому ограниченному множеству $A\subset E^2$ некоторое число $\mu(A)$, которое в случае измеримого множества A совпадает с его двумерной лебеговой мерой (и, значит, в случае квадрируемого множества—с его площадью) и при этом обладает свойством аддитивности ($\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$ при $A\cap B=\varnothing$) и свойством инвариантности относительно движений. Из этого следует, что если два многоугольника равносоставлены в общем смысле (разбиения на произвольные попарно не пересекающиеся части), то они имеют одинаковую площадь и, следовательно, равносоставленны в элементарно геометрическом смысле. «Парадокс» Банаха—Тарского показывает, что в трехмерном пространстве это уже не так. Заметки в связи с этим, что до сих пор неизвестно, являются ли круг и равновеликий ему квадрат равносоставленными в общем смысле.

С точки зрения современной теории множеств, третья проблема Гильберта имеет принципиальное значение и тесно связана с вопросом о возможности обойтись без аксиомы (α) при построении теории объемов. В отличие от других аксиом теории объемов, аксиома (α) содержит некоторое неравенство, т. е. может применяться лишь для получения оценок и осуществления предельного перехода на основе этих оценок. Из аксиомы (α) вытекает, в частности, что n-мерный объем (как функция, определенная на множестве всех n-мерных многогранников или на более широком классе измеримых множеств) обладает свойством монотонности:

(1.4) Если $M_1\supset M_2$, то $v(M_1)\geqslant v(M_2)$. В самом деле, многогранник M_1 может быть представлен в виде объединения двух многогранников (без общих внутренних точек), одним из которых является M_2, откуда, в силу аксиом (β) и (α), вытекает справедливость утверждения (1.4).

Одной из форм использования аксиомы (α) является метод исчерпывания, восходящий, по-видимому, к Евдоксу и успешно применявшийся Архимедом. Для оценки объема интересующей нас фигуры F мы «зажимаем» ее между вложенным многогранником M (т. е. $M\subset F$) и объемлющим многогранником M' (т. е. $F\subset M'$). Тогда, согласно свойству монотонности (1.4), искомый объем фигуры F заключен между $v(M)$ и $v(M')$. Если теперь построить последовательность $\{M_k\}$ вложенных многогранников и последовательность $\{M_k'\}$ объемлющих многогранников, причем так, чтобы эти последовательности сближались, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty}(v(M_k')-v(M_k))=0$, то мы найдем, что вложенные многогранники M_k постепенно «исчерпывают» весь объем фигуры F, т. е. справедливо равенство $\lim\limits_{k\to\infty} v(M_k)=v(F)$. Таким образом, с помощью предельного перехода «оценочная» аксиома (α), содержащая неравенство, может быть применена для получения равенств, т. е. для вычисления объемов.

Существуют и иные формы метода исчерпывания. Одна из них состоит в том, что рассматривается возрастающая последовательность $\{M_k\}$ многогранников, вложенных в F, для которой множество $\bigcup\limits_k M_k$ содержит всю внутренность фигуры F. При этих условиях также справедливо равенство $\lim\limits_{k\to\infty} v(M_k)=v(F)$ (если фигура F измерима по Жордану, т. е. применима предыдущая версия метода исчерпывания).

Именно с помощью метода исчерпывания (даже для $n=2$) доказывается теорема (δ^*): для ортогональных параллелепипедов с рациональными длинами сторон объем может быть вычислен на основе лишь трех аксиом (β), (γ), (δ), тогда как для параллелепипедов с иррациональными длинами сторон необходим предельный переход, использующий аксиому (α). Школьное вычисление площади круга и вычисление объемов при помощи интегралов также являются примерами применения метода исчерпывания, т. е. использования аксиомы (α) и связанного с ней предельного перехода.

Современная теория множеств позволяет строго обосновать неизбежность применения аксиомы (α) для построения теории объемов — даже для вывода формулы площади прямоугольника. Аппаратом для такого обоснования служат функции Гамеля. Известно, что всякая н е п р е р ы в н а я действительная функция, удовлетворяющая функциональному уравнению Коши: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, имеет вид $f(x)=kx$. Гамель [158] нашел решения уравнения Коши, не являющиеся непрерывными, — так называемые функции Гамеля. Строятся они следующим образом. Будем рассматривать R как векторное пространство над полем Q рациональных чисел (без топологии). С помощью аксиомы выбора (или леммы Цорна) в этом пространстве можно выбрать базис. Определим теперь функцию $f:R\to R$, задавая ее значения в элементах базиса произвольно и продолжая ее на все R по линейности (имеются в виду лишь линейные комбинации с рациональными коэффициентами, поскольку R — векторное пространство над Q). Получающаяся функция f удовлетворяет уравнению Коши, т. е. является функцией Гамеля. Заметим, что таким путем может быть получено любое решение уравнения Коши. Из проведенной конструкции вытекает, в частности, что если отличные от нуля числа α, $\beta \in R$ несоизмеримы (т. е. отношение α/β иррационально), то существует функция Гамеля, принимающая в точках α, β произвольно заданные значения.

Заметим, что если функция f, удовлетворяющая уравнению Коши, не является линейной, то она неизмерима. В силу работы Соловай [195], существование такой функции неизбежно влечет за собой справедливость аксиомы выбора. Таким образом, функции Гамеля (не являющиеся линейными) существуют в том и только в том случае, если рассуждения проводятся в рамках теории множеств, допускающей аксиому выбора.

Рассмотрим теперь применение функций Гамеля к аксиоматике объема. Для удобства условимся называть квазиобъемом каждую функцию, заданную на множестве всех многогранников в E^n и удовлетворяющую аксиомам (β), (γ), (δ). Теорема существования и единственности объема показывает, что существует е д и н с т в е н н ы й квазиобъем, удовлетворяющий аксиоме (α), — а именно, обычный объем. Для того же, чтобы установить н е з а в и с и м о с т ь аксиомы (α) от (β), (γ), (δ), нужно доказать существование квазиобъема, отличного от объема (т. е. не удовлетворяющего аксиоме (α)). Это без труда осуществляется с помощью функций Гамеля. Пусть f — функция Гамеля, удовлетворяющая условиям $f(1)=1$, $f(\sqrt{2})=-1$ (а в осталь-

ном — произвольная). Определим на множестве всех многоугольников функцию v_1, положив $v_1(M)=f(v(M))$, где $v(M)$ — площадь многоугольника M. Непосредственно проверяется, что функция v_1 является квазиплощадью (квазиобъемом в E^2), т. е. удовлетворяет аксиомам (β), (γ), (δ) (в самом деле, v удовлетворяет этим аксиомам, а функция f удовлетворяет уравнению Коши и условию $f(1)=1$). В то же время v_1 аксиоме (α) не удовлетворяет; например, для прямоугольника P, длины сторон которого равны 1 и $\sqrt{2}$, мы имеем $v(P)=\sqrt{2}$, $v_1(P)=f(\sqrt{2})=-1$, т. е. $v_1(P)<0$. Итак, в E^2 существует двумерный квазиобъем, отличный от площади — не удовлетворяющий аксиоме (α) (поскольку $v_1(P)<0$). Это показывает, что без аксиомы (α) не удастся (во всяком случае, в рамках теории множеств, допускающей аксиому выбора) полностью построить теорию площадей многоугольников; в частности, не удастся вычислить площадь прямоугольника, у которого произведение длин сторон иррационально. Аналогично строится квазиобъем, отличный от объема, в E^n.

Итак, аксиома (α) необходима для доказательства теоремы (δ^*). В то же время, как уже отмечалось выше, если принять (δ^*) в качестве аксиомы, то дальнейшее построение теории площадей многоугольников $(n=2)$ уже не требует аксиомы (α), а полностью проводится на основе метода разбиения (или дополнения), т. е. с привлечением лишь аксиом (β), (γ). В пространстве $(n=3)$ этого не удавалось сделать, т. е. даже при использовании формулы объема параллелепипеда (теорема (δ^*)) для вычисления объема пирамиды пользовались теоремой (1.3), доказательство которой проводилось методом исчерпывания — предельным переходом с использованием аксиомы (α). Третья проблема Гильберта требовала строго обосновать невозможность доказательства теоремы (1.3) без использования аксиомы (α).

В том же 1900 году ученик Гильберта Ден [110] решил третью проблему, строго доказав утверждение Брикара о том, что правильный тетраэдр T и равновеликий ему куб W не равносоставлены. Сложное и путаное доказательство Дена было усовершенствовано В. Ф. Каганом [44, 167], а в середине XX столетия швейцарский геометр Хадвигер [146, 147, 150] внес в теорию равносоставленности новые идеи, позволившие предельно ясно и просто определить деновские инварианты.

Приведем это определение. Пусть f — функция Гамеля, удовлетворяющая условию $f(\pi)=0$. Для любого многогранника $M\subset E^3$ положим $f(M)=l_1 f(\alpha_1)+\ldots+l_k f(\alpha_k)$, где $l_1,\ldots,l_k$ — длины ребер многогранника M, а $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ — величины соответствующих этим ребрам двугранных углов. Функция $f(M)$, определенная на множестве всех многогранников, и есть деновский инвариант (соответствующий функции Гамеля f).

Всякий деновский инвариант $f(M)$ удовлетворяет аксиомам (β) и (γ). Следовательно, если многогранники M_1 и M_2 равносоставлены, то для любого деновского инварианта $f(M)$ справедливо равенство $f(M_1)=f(M_2)$. Это — деновское необходимое условие равносоставленности.

Пусть, наконец, α — величина двугранного угла правильного тетраэдра, T, т. е. $\alpha=\arccos {}^1/_3$. Число $\alpha:\pi$ иррационально; следовательно, существует функция Гамеля f, удовлетворяющая условиям $f(\pi)=0$, $f(\alpha)\neq 0$. Для соответствующего деновского инварианта имеем $f(T)\neq 0$, $f(W)=0$ (где W — куб, равновеликий T), и поэтому T и W не равносоставлены. Так выглядит сегодня [146] деновское доказательство.

Хотя намеченное доказательство опирается на аксиому выбора (поскольку использует функции Гамеля), его можно сделать эффективным. Это было осуществлено в [7], где изложение упрощено до уровня, понятного школьникам.

Деновские инварианты тесно связаны с квазиобъемами. Именно, если $f(M)$ — произвольный деновский инвариант, то функция $v_1(M)=v(M)+f(M)$ (где v — объем) представляет собой квазиобъем. Действительно, так как обе функции v, f удовлетворяют аксиомам (β), (γ), то и v_1 удовлетворяет этим аксиомам. Далее, так как величины двугранных углов куба равны $\pi/2$, то для любого куба W справедливо равенство $f(W)=0$, т. е. $v_1(W)=v(W)$; в частности, для единичного куба W_0 имеем $v_1(W_0)=v(W_0)=1$, т. е. v_1 удовлетворяет аксиоме (δ). Итак, $v_1(M)=v(M)+f(M)$ есть квазиобъем. Если при этом $f(M)$ не есть тождественный нуль (например, если f — описанный выше деновский инвариант, связанный с правильным тетраэдром), то квазиобъем $v_1(M)$ отличен от объема. Существование квазиобъемов, отличных от объема, еще раз подтверждает независимость аксиомы (α) от (β), (γ), (δ).

В 1965 году Сидлер [199] доказал, что деновское необходимое условие является и достаточным, т. е. справедлива следующая теорема Дена — Сидлера:

(1.5) Для равносоставленности двух равновеликих многогранников M_1, M_2 в E^3 необходимо и достаточно, чтобы для каждого деновского инварианта $f(M)$ выполнялось равенство $f(M_1)=f(M_2)$.

Доказательство Сидлера довольно сложно. В 1968 году Ессену [163] удалось, сохранив геометрические леммы Сидлера и воспользовавшись идеями теории гомологий групп (см. [165]), существенно упростить алгебраическую часть доказательства. В [18] (см. § 17) приведено (в эффективном виде) полное доказательство теоремы Дена — Сидлера.

Дадим, в общих чертах, представление о том, каким образом понятия, относящиеся к гомологиям групп, оказываются связанными с теорией равносоставленности многогранников. Пусть A — абелева группа, в которой действует (слева) некоторая группа G (т. е. для любых $g\in G$, $a\in A$ определено произведение $ga\in A$, причем выполнены соотношения $g(a_1+a_2)=ga_1+ga_2$,

$g_2(g_1a)=(g_2g_1)a$; $ea=a$, где e — единица группы G). Всякая функция $f(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ со значениями в группе A (где каждый аргумент g_i пробегает группу G) называется r-мерной коцепью. Обычное сложение функций превращает множество всех r-мерных коцепей в абелеву группу. Кограница r-мерной коцепи f представляет собой $(r+1)$-мерную коцепь δf, определяемую равенством

$$\delta f(g_0, g_1, g_2, \ldots, g_r)=g_0 f(g_1, g_2, \ldots, g_r)-f(g_0 g_1, g_2, \ldots, g_r)+ \\ +f(g_0, g_1 g_2, \ldots, g_r)-\ldots+(-1)^r f(g_0, g_1, \ldots, g_{r-1}g_r)+ \\ +(-1)^{r+1} f(g_0, g_1, \ldots, g_{r-1}).$$

Коцепь f, для которой $\delta f=0$, называется коциклом; коцепь f, имеющая вид $f=\delta h$ (где h — некоторая коцепь на единицу меньшей размерности), называется кограницей. Из легко определяемого соотношения $\delta(\delta h)=0$ (для любой коцепи h) вытекает, что всякая кограница является коциклом. Следовательно, группа $B^r(G, A)$ всех r-мерных коцепей, являющихся кограницами, содержится в группе $Z^r(G, A)$ всех r-мерных коциклов, и потому определена факторгруппа $H^r(G, A)=Z^r(G, A)-B^r(G, A)$; она называется r-мерной группой когомологий группы A, в которой действует группа G.

Для теории равносоставленности многогранников представляет интерес случай, когда группа G действует в A тривиально (т. е. $ga=a$ для любых элементов $g\in G$, $a\in A$), причем $A=G$ есть аддитивная группа R действительных чисел. В этом случае r-мерная коцепь представляет собой действительную функцию r действительных переменных, а кограница определяется следующим равенством (в котором операция в группе $G=R$ теперь записывается аддитивно):

$$\delta f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r)=f(x_1, x_2, \ldots, x_r)-f(x_0+x_1, x_2, \ldots, x_r)+ \\ +f(x_0, x_1+x_2, \ldots, x_r)-\ldots+(-1)^r f(x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}+x_r)+ \\ +(-1)^{r+1} f(x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}).$$

В частности, одномерным коциклом является функция $f(x)$, для которой $\delta f=0$, т. е. $f(x_1)-f(x_0+x_1)+f(x_0)=0$ (для любых x_0, x_1); иначе говоря, одномерные коциклы совпадают с функциями Гамеля.

Далее, при рассмотрении двумерной группы когомологий ограничимся лишь такими двумерными коцепями $f(x_0, x_1)$, которые симметричны (т. е. $f(x_0, x_1)=f(x_1, x_0)$), не накладывая никаких требований симметричности на коцепи других размерностей. Из формулы кограницы видно, что этот класс K коцепей инвариантен относительно взятия кограницы (ибо кограница любой одномерной коцепи $h(x)$ является, как легко видеть, симметричной функцией от двух переменных). Поэтому можно рассматривать двумерную группу когомологий $H^2_K(R, R)$, соответствующую классу K коцепей, симметричных в размерности 2. Эта группа тривиальна (см., например, [184]), т. е. в рассматриваемом случае каждый двумерный симметричный коцикл является кограницей. Иными словами, пусть $f(x, y)$ — симметричная функция, являющаяся двумерным коциклом, т. е. удовлетворяющая соотношению $\delta f=0$, или иначе

(1.6) $f(x_1, x_2)-f(x_0+x_1, x_2)+f(x_0, x_1+x_2)-f(x_0, x_1)=0$ (для любых x_0, x_1, x_2); тогда f является кограницей, т. е. существует такая функция $h(x)$, что $f=\delta h$, т. е. $f(x_0, x_1)=h(x_1)-h(x_0+x_1)+h(x_0)$. Это — одна из центральных лемм, используемых в цитированной работе Ессена [163].

Не вдаваясь в дальнейшие детали доказательства теоремы Сидлера (которое и после всех алгебраических упрощений остается достаточно сложным), отметим лишь те мотивы, которые побудили Ессена и его коллег-алгебраистов (см. [165]) применить соображения, связанные с гомологиями групп. Помимо того, что каждая функция Гамеля является одномерным коциклом, к числу таких побудительных мотивов относятся геометрические леммы Сидлера, составляющие основную ткань его первоначального геометрического доказательства, нахождение которого было делом почти всей его жизни. Сидлер вводит семейство ортогональных тетраэдров, зависящее от двух действительных параметров x, y; если обозначить объем тетраэдра через $f(x, y)$, то, как показывает одна из геометрических лемм, выполняется (в мультипликативной записи) соотношение (1.6). На языке гомологий это означает, что функция $f(x, y)$ является двумерным коциклом. В доказательстве Ессена сохранены некоторые геометрические леммы Сидлера, но дальнейшую часть доказательства, которую Сидлер проходит, как бы пробираясь наощупь без надежных ориентиров, Ессен проводит значительно более коротким путем, пользуясь развитым аппаратом теории гомологий групп, как верным компасом.

В [163] гомологические соображения оказываются как бы за строками текста; хотя они явно прослеживаются, но изложение построено так, чтобы читатель-геометр мог понять доказательство, не знакомясь с чуждым ему аппаратом теории гомологий групп. Аналогичное доказательство (еще немного упрощенное) приведено в книге [18], где показано также, что в этом доказательстве можно обойтись без использования аксиомы выбора.

Условие, содержащееся в теореме (1.5), эффективно. В самом деле, пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — величины двугранных углов многогранников M_1, M_2. Всевозможные линейные комбинации чисел π, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ (с рациональными коэффициентами) образуют конечномерное подпространство векторного пространства R (над Q). Для проверки условия Дена — Сидлера достаточно рассматривать функции Гамеля лишь на этом подпространстве.

Отметим в связи с этим результат Лебега [173], который установил, что никакие два правильных многогранника разного вида, равновеликих между собой, не являются равносоставленными, т. е. их деновские инварианты попарно различны (при надлежащем выборе функции Гамеля $f(x)$, удовлетворяющей условию $f(\pi)=0$). Однако поскольку величина двугранного угла правильного октаэдра B равна $\pi-\alpha$, где α — величина двугранного угла правильного тетраэдра A, то для любого деновского инварианта f справедливо соотношение $2bf(A)+af(B)=0$, где a, b — длины ребер многогранников A, B. Следовательно, в силу теоремы Сидлера, при $a=2b$ объединение (непересекающихся) многогранников A и B равносоставлено с кубом C надлежащего объема: $v(C)=v(A)+v(B)$. В работе Дебруннера [109] ищутся в d-мерном евклидовом пространстве E^d (при $d>3$) аналогичные соотношения равносоставленности для d-мерного правильного тетраэдра A^d, креста B^d (аналога октаэдра) и куба C^d. Доказано, что такого рода соотношение существует лишь в E^8 и имеет вид

$$1920 \cdot A^8(\sqrt{2})+135 \cdot B^8(\sqrt{2}) \sim C^8(1),$$

где в скобках указаны длины ребер, $\sim$ означает равносоставленность, $+$ означает объединение непересекающихся многогранников, а запись вида $k \cdot M$ означает объединение k экземпляров многогранников, конгруэнтных M. (Ниже смысл этих обозначений будет уточнен.)

Если в работе Ессена [163] идеи гомологий групп лишь прослеживаются (тщательно спрятанные, чтобы не отпугнуть читателя), то у О. М. Кошелевой [45] эти идеи явно используются при проведении доказательств. Отметим некоторые из ее результатов.

Выше уже упоминалось, что при выводе формулы площади прямоугольника используется метод исчерпывания, т. е. предельный переход, связанный с применением аксиомы (α). При этом и в качестве вложенных, и в качестве объемлющих фигур используются прямоугольники с рациональными длинами сторон. Иными словами, вложенные (и объемлющие) фигуры имеют такое же число вершин, что и исследуемая фигура (прямоугольник с иррациональными длинами сторон). В пространстве, при доказательстве теоремы (δ^*), положение вещей аналогично. Однако при выводе формулы объема пирамиды — при доказательстве теоремы (1.3) — используется конструкция типа «чертовой лестницы», в которой тетраэдр аппроксимируется сложными ступенчатыми телами, т. е. многогранниками, число вершин которых неограниченно возрастает. В связи со сказанным О. М. Кошелева вводит слабую форму метода исчерпывания, при которой многогранник аппроксимируется последовательностью многогранников с тем же (или, во всяком случае, ограниченным) числом вершин, и выдвигает проблему, достаточно ли в трехмерном случае слабой формы метода исчерпывания, чтобы вычислить объем произвольного тетраэдра (а вместе с тем, и любого многогранника), или же применение конструкций типа «чертова лестница» неизбежно. Результат Дена не дает ответа на этот вопрос.

В точной формулировке слабая форма метода исчерпывания может быть задана следующим образом [45]:

(α') если F — многогранник и $\{G_k\}$ — возрастающая последовательность вложенных в F многогранников с тем же числом вершин, что и у F, которая исчерпывает F (т. е. $\bigcup_k G_k$ содержит всю внутренность многогранника F), то $\lim_{k\to\infty} v(G_k)=v(F)$.

Априори ответ на поставленный вопрос мог бы выглядеть следующим образом. Поскольку существуют тетраэдры, равносоставленные с кубом (кроме первоначальных примеров, описанных Хиллом [161], ряд дальнейших тетраэдров этого вида был найден Сидлером [197], Ленхардом [176] и Гольдбергом [138, 139, 140]), могло бы оказаться, что такие тетраэдры образуют всюду плотное множество среди всех тетраэдров в E^3. Если бы это было так, то л ю б о й тетраэдр можно было бы аппроксимировать последовательностью тетраэдров, равносоставленных с кубом, и потому, пользуясь методом разбиения и слабой формой метода исчерпывания, вычислить объем произвольного тетраэдра. И хотя решение задачи получено О. М. Кошелевой не в такой форме, все же на поставленный вопрос она дает [45] утвердительный ответ:

(1.7) В E^3 (и в E^4) объем является единственной функцией (на множестве всех многогранников), удовлетворяющей аксиомам (α'), (β), (γ), (δ); иначе говоря, не существует квазиобъема, удовлетворяющего аксиоме (α') и отличного от объема.

Таким образом, слабой формы метода исчерпывания достаточно для вычисления объема любого многогранника размерности $\leqslant 4$. В той же работе [45] показано, что теорема (1.7) останется справедливой, если (α') заменить следующей аксиомой:

(α'') Функция v, рассматриваемая на множестве всех симплексов, является измеримой функцией координат вершин симплекса.

Таким образом, (в силу уже упоминавшейся работы Соловай [195]), существование квазиобъема, отличного от объема, равносильно аксиоме выбора. Иначе говоря, если ограничиться квазиобъемами, которые можно г е о м е т р и ч е с к и построить (в любом разумном смысле — т. е., во всяком случае, без применения аксиомы выбора), то на поставленный Гильбертом вопрос следует дать ответ, прямо противоположный деновскому: существует единственная функция, которая удовлетворяет аксиомам (β), (γ), (δ) и может быть геометрически построена.

Наконец, отметим еще один результат О. М. Кошелевой [45].

(1.8) В пространстве E^n (при любом n) существует единственный квазиобъем (а именно, объем), удовлетворяющий следующей аксиоме:

($\tilde{\alpha}$) существует такая константа c, что для любого многогранника M, содержащегося в единичном кубе, справедливо неравенство $v(M)\geqslant c$. (Здесь знак $\geqslant$ может быть заменен на $\leqslant$.)

В 1954 году Хадвигер [152] предложил многомерные обобщения деновских инвариантов, с помощью которых он сформулировал необходимое условие равносоставленности (аналогичное деновскому) и доказал, что при $n\geqslant 3$ правильный n-мерный симплекс не равносоставлен с равновеликим ему кубом.

Идея построения хадвигеровских (т. е. многомерных деновских) инвариантов состоит в следующем. Пусть $f(x)$ — некоторая функция Гамеля, для которой $f(\pi)=0$, а $\Phi(P)$ — аддитивный инвариант (т. е. функция, удовлетворяющая аксиомам (β), (γ)), заданный на множестве всех (n—2)-мерных многогранников. Если теперь M — произвольный n-мерный многогранник, $P_1, \ldots, P_s$ — все его (n—2)-мерные грани, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — величины двугранных углов при этих гранях (заметим, что к каждой грани P_i примыкают две (n—1)-мерные грани многогранника M), то положим

$$H(M)=\Phi(P_1)f(\alpha_1)+\ldots+\Phi(P_s)f(\alpha_s).$$

Это и есть хадвигеровский инвариант. Несложно проверяется, что $H(M)$ удовлетворяет аксиомам (β), (γ), а для любого куба (или параллелепипеда) $H(M)=0$. Следовательно, $v(M)+H(M)$ (где v есть n-мерный объем) является квазиобъемом в E^n.

В изложенном построении за Φ можно взять (n — 2)-мерный объем v_{n-2} (поскольку он удовлетворяет аксиомам (β), (γ)); это дает простейший хадвигеровский инвариант

$$H_1(M)=v_{n-2}(P_1)f(\alpha_1)+\ldots+v_{n-2}(P_s)f(\alpha_s).$$

При $n=3$ этот инвариант совпадает с деновским, поскольку $P_1, \ldots, P_s$ являются р е б р а м и трехмерного многогранника M, а $v_{n-2}(P_i)=v_1(P_i)$ — д л и н а ребра P_i. При $n=4$ грани $P_1, \ldots, P_s$ двумерны, а $v_{n-2}(P_i)=v_2(P_i)$ есть п л о щ а д ь грани P_i. В случаях $n=3$ и $n=4$ других хадвигеровских инвариантов (кроме этих простейших) не существует.

Если же $n\geqslant 5$, то, кроме простейшего хадвигеровского инварианта, существуют и другие, «многоступенчатые». Так, при $n=5$ мы можем, кроме f, выбрать еще одну функцию Гамеля $f^*(x)$, также удовлетворяющую условию $f^*(\pi)=0$, и построить с ее помощью д е н о в с к и й инвариант $f^*(P)$, определенный для любого трехмерного многогранника P. Он удовлетворяет аксиомам (β), (γ), и потому в общем определении хадвигеровского инварианта мы можем в качестве $\Phi(P)$ взять $f^*(P)$. Это дает «двухступенчатый» хадвигеровский инвариант:

$$H_2(M)=f^*(P_1)f(\alpha_1)+\ldots+f^*(P_s)f(\alpha_s)=\sum_i\sum_j l_{ij}f^*(\beta_{ij})f(\alpha_i),$$

где $l_{i1}, l_{i2}, \ldots$ — длины ребер трехмерного многогранника P_i ($i=1, \ldots, s$), а β_{ij} — величины соответствующих этим ребрам двугранных углов многогранника P_i. Аналогично определяется «двухступенчатый» инвариант при $n>5$. Если же $n\geqslant 7$, то можно определить «трехступенчатый» хадвигеровский инвариант (использовав три функции Гамеля) и т. д.

Все получаемые таким образом хадвигеровские инварианты удовлетворяют аксиомам (β), (γ). Следовательно, если n-мерные многогранники M_1 и M_2 равносоставлены (или равнодополняемы), то $H(M_1)=H(M_2)$ для любого хадвигеровского инварианта H. Это и есть хадвигеровское необходимое условие равносоставленности.

Интересно отметить, что для $n=4$ справедлива теорема, аналогичная теореме (1.5) Дена — Сидлера; это было установлено в 1972 году Ессеном [164]:

(1.9) Для равносоставленности двух равновеликих многогранников M', M'' в E^4 необходимо и достаточно, чтобы для каждого хадвигеровского инварианта $H_1(M)$ выполнялось равенство $H_1(M')=H_1(M'')$.

Установление этого результата можно считать делом чистой удачи. В ряде работ Хадвигера [80, 150, 152, 153] и Сидлера [197, 198] была разработана сложная комбинаторная «техника равносоставленности» (для иллюстрации одна из формул приводится ниже). Развивая эту технику, Ессен [164] установил следующий любопытный факт: всякий четырехмерный многогранник M равносоставлен с некоторым многогранником вида $N\times I$ (ортогональное произведение), где N — трехмерный многогранник, а I — единичный отрезок. При этом $H_1(M)=f(N)$, где хадвигеровский инвариант $H_1(M)$ и деновский инвариант $f(N)$ построены с помощью одной и той же функции Гамеля $f(x)$. Это дает полную редукцию четырехмерного случая к трехмерному и позволяет получить теорему (1.9), как следствие теоремы Дена — Сидлера. (Подробное доказательство теоремы (1.9) имеется в книге [18].) Заметим, что при $n\geqslant 5$ редукция произвольного n-мерного многогранника к ортогональному произведению вида $N\times I$ не проходит; кроме того, при $n\geqslant 5$ вступают в действие «многоступенчатые» хадвигеровские инварианты. Все это приводит к тому, что при $n\geqslant 5$ вопрос о достаточности хадвигеровских необходимых условий (т. е. о получении теоремы, аналогичной теоремам (1.5) и (1.9)) остается открытым; неясны даже подходы к установлению этого результата (или построению контрпримера).

Все изложенные результаты непосредственно связаны с теоремой Дена и ее прямыми обобщениями. Чтобы завершить обзор этой группы результатов, приведем простейший пример, относящийся к «технике» равносоставленности Хадвигера — Сидлера. Пусть M — произвольный многогранник. Через λM (где $\lambda>0$) условимся обозначать многогранник, получающийся из M гомотетией с коэффициентом λ. Далее, через $n\cdot M$ (где n — натуральное число) условимся обозначать объединение n непересекающихся многогранников, каждый из которых конгруентен M. Тогда для любого трехмерного многогранника M и любого натурального n справедливо соотношение $nM\sim n\cdot M+W$, где W — куб (надлежащего объема), $+$ означает объединение неперекрывающихся многогранников, а $\sim$ означает равносоставленность. Чтобы проиллюстрировать эту формулу, рассмотрим случай, когда M — тетраэдр. Разобъем одно ребро тетраэдра nM на n конгруэнтных частей и через каждую точку деления проведем по две плоскости, параллельные граням, не проходящим через взятое ребро. Проведенные плоскости разрезают симплекс nM на части, причем n частей представляют собой симплексы, конгруэнтные M, а остальные части являются треугольными призмами. Остается заметить, что в E^3 объединение неперекрывающихся призм равносоставленно с равновеликим кубом.

Еще одно направление в теории равносоставленности многогранников связано с групповой точкой зрения в геометрии.

Пусть G — некоторая группа движений пространства E^n. Два многогранника M_1, M_2 называются G-конгруэнтными в E^n, если существует такое движение $g\in G$, что $g(M_1)=M_2$. Два n-мерных многогранника M_1, M_2 в E^n называются G-равносоставленными, если их можно разрезать на части таким образом, что части, составляющие M_1, соответственно G-конгруэнтны частям, составляющим M_2. Аналогично определяется G-равнодополняемость многогранников.

Первые результаты в направлении изучения G-равносоставленности были получены Хадвигером и Глюром [157]. Обозначим через S группу движений евклидовой плоскости, состоящую из всех параллельных переносов и центральных симметрий. Хадвигер и Глюр доказали следующую теорему:

(1.10) Всякие два равновеликих многоугольника (в E^2) являются S-равносоставленными, т. е. понятия равносоставленности и S-равносоставленности в E^2 эквивалентны.

В частности, равновеликие многоугольники можно разбить на части таким образом, что соответствующие их части не только конгруэнтны, но и имеют соответственно параллельные стороны.

Естественно возникает вопрос, какие еще имеются группы движений G (в E^2), для которых G-равносоставленность эквивалентна обычной равносоставленности. Ответ был дан в работе В. Г. Болтянского [96] (см. также [7, 9, 18]):

(1.11) G-равносоставленность (в E^2) в том и только в том случае эквивалентна обычной равносоставленности, если $G\supset S$ (т. е. группа S в этом смысле минимальна).

В другой работе [20] получен аналогичный результат для трехмерного евклидова пространства:

(1.12) Пусть G — такая группа движений пространства E^3, что любые равносоставленные многогранники G-равносоставленны; тогда G совпадает либо с группой всех движений пространства E^3, либо с ее подгруппой, состоящей из всех движений, сохраняющих ориентацию.

По-видимому, теорема (1.12) справедлива и в E^n при $n>3$; однако доказательство, проведенное в [20] для $n=3$, непосредственно на случай $n>3$ не обобщается.

В той же работе [157] Хадвигер и Глюр получили необходимое и достаточное условие T-равносоставленности многоугольников в E^2, где T — группа всех параллельных переносов. Прямую $p\subset E^2$ назовем оснащеной, если указано, какая из двух ограниченных ею полуплоскостей считается положительной. Пусть $[a, b]$ — некоторая сторона многоугольника M. Если $[a, b]\parallel p$, то припишем стороне $[a, b]$ коэффициент $\varepsilon=\pm 1$ в зависимости от того, с положительной или отрицательной стороны примыкает многоугольник M к стороне $[a, b]$. Если же $[a, b]\nparallel p$, то считаем $\varepsilon=0$. Весом стороны $[a, b]$ в многоугольнике M назовем число εl, где $l=|ab|$. Наконец, через $H_p(M)$ обозначим сумму весов всех сторон многоугольника M. При этих обозначениях теорема Хадвигера — Глюра формулируется следующим образом:

(1.13) для T-равносоставленности равновеликих многоугольников M_1 и M_2 необходимо и достаточно, чтобы для каждой оснащенной прямой p было выполнено равенство $H_p(M_1)=H_p(M_2)$.

Заметим, что это условие эффективно (достаточно проверить выполнение этого условия для прямых, параллельных сторонам многоугольников M_1, M_2). В качестве примера отметим, что равновеликие центрально симметричные многоугольники T-равносоставлены. Далее, выпуклый многоугольник M только в том случае T-равносоставлен с равновеликим ему квадратом, если M центрально симметричен.

Инварианты $H_p(M)$ Хадвигер [149, 153] обобщил на многомерные пространства в виде так называемых флаговых инвариантов, позволяющих дать необходимое и достаточное условие T-равносоставленности n-мерных многогранников, где T — группа всех параллельных переносов пространства E^n. Приведем определение этих инвариантов. Пусть $E^{n-1}, \ldots, E^i$ (где $1\leqslant i\leqslant n-1$) — такая последовательность подпространств пространства E^n, что $E^{n-1}\supset \ldots \supset E^i$ (верхний индекс означает размерность). Пусть, далее, для каждого $j=i+1, \ldots, n$ фиксировано одно из двух полупространств, на которые E^j разбивается подпространством E^{j-1}; это полупространство назовем «положительным» и обозначим через P^j. Последовательность $\Phi=(P^n, \ldots, P^{i+1})$ назовем флагом порядка i в E^n. Пусть, наконец, $Q=(M^{n-1}, \ldots, M^i)$ — такая последовательность граней многогранника $M^n\subset E^n$, что $M^{n-1}\supset \ldots \supset M^i$. Если $M^j\parallel E^j$ для всех $j=i, \ldots, n-1$, то положим $H_\Phi(Q)=\varepsilon_{n-1}\cdot \ldots \cdot\varepsilon_i v_i(M^i)$, где $v_i(M^i)$ есть i-мерный объем грани M^i, а $\varepsilon_j=\pm 1$ в зависимости от того, примыкает ли M^{j+1} к M^j с положительной стороны или нет. Если же $M^j\nparallel E^j$ хотя бы для одного j, то $H_\Phi(Q)=0$. Наконец, через $H_\Phi(M^n)$ обозначим сумму $\sum H_\Phi(Q)$ по всем последовательностям Q, составленным из граней многогранника M^n.

В пространстве E^n существуют $n-1$ типов флаговых инвариантов (соответствующих $i=1, \ldots, n-1$). В частности, в E^2 существует лишь один тип флагового инварианта (а именно, инвариант H_p, рассмотренный ранее), а в E^3 — два типа. Теорема (1.13), принадлежащая Хадвигеру и Глюру, теперь следующим образом обобщается на случай произвольной размерности:

(1.14) Два равновеликих многогранника в E^n в том и только в том случае T-равносоставлены, если для каждого флагового инварианта H_Φ его значения на этих многогранниках одинаковы.

Для $n=3$ эта теорема была доказана Хадвигером [155]. Довольно сложное хадвигеровское доказательство было существенно упрощено в монографии [18]. Этот упрощенный вариант доказательства повторяется и в общем случае (n произвольно), который был установлен Ессеном и Сорупом [166] при помощи довольно сложной алгебраической техники.

В качестве примера отметим, что выпуклый многогранник в том и только в том случае T-равносоставлен с кубом, если он является так называемым зоноэдром [1], т. е. представляется в виде векторной суммы конечного числа отрезков (не параллельных одной гиперплоскости). Это определение можно сформулировать и иначе [1]: многогранник M в том и только в том случае является зоноэдром, если он сам и все его грани (в каждой размерности) центрально симметричны.

В работе [166] Ессена и Сорупа содержатся еще несколько важных и интересных результатов. Один из них связан с так называемыми «цилиндрическими» классами $\mathfrak{Z}_k$, введенными Хадвигером [153]. Многогранник $M^n\subset E^n$ называется k-кратной суммой Минковского, если существуют такие многогранники $N_1, \ldots, N_k$ (положительных размерностей), несущие плоскости которых порождают разложение пространства E^n в прямую сумму, что $M^n=N_1+\ldots+N_k$ (в смысле векторной суммы множеств). Далее, M^n называется принадлежащим классу $\mathfrak{Z}_k$, если M^n можно разбить на конечное число многогранников, каждый из которых T-равносоставлен с многогранником, представляющимся в виде k-кратной суммы Минковского. Ессен и Соруп [166] дали следующее необходимое и достаточное условие принадлежности цилиндрическим классам:

(1.15) $M^n\in\mathfrak{Z}_k$ в том и только в том случае, если $H_\Phi(M^n)=0$ для всех флаговых инвариантов H_Φ порядков, меньших k.

Из этого, в частности, вытекает следующий результат, ранее полученный Хадвигером: в E^n равновеликие многогранники A, $B\in\mathfrak{Z}_n$ являются T-равносоставленными.

Отметим еще интересный результат, связанный с равносоставленностью по группе Г, состоящей из всех гомотетий с положительными коэффициентами и всех параллельных переносов:

(1.16) В E^n любые два многогранника Г-равносоставленны.

Этот результат (и даже более сильный, в котором рассматриваются лишь гомотетии, коэффициенты которых являются степенями фиксированного положительного $\lambda \neq 1$) был установлен в 1969 году Дебруннером [108] с помощью довольно сложной «техники равносоставленности» в духе Хадвигера и Сидлера. Простые доказательства получены А. Б. Харазишвили [83], а также Ессеном и Сорупом [166]; их доказательства совершенно различны, но существенно проще дебруннеровских.

С точки зрения теории объемов, теорема (1.16) означает, что если принять (γ^*) в качестве аксиомы, то объем любого многогранника может быть найден методом разбиения (исходя из (δ)), т. е. вся теория объемов многогранников (в E^n) может быть построена на основе (β), (γ^*), (δ).

Наконец, отметим содержащийся в [166] результат, относящийся к равносоставленности по группе S, состоящей из всех центральных симметрий и всех параллельных переносов пространства E^n (для $n=3$ эта теорема установлена также в работе А. Б. Харазишвили [83]):

(1.17) Два равновеликих многогранника в E^n в том и только в том случае S-равносоставленны, если для каждого флагового инварианта H_Φ, порядок которого имеет ту же четность, что и n, его значения на этих многогранниках одинаковы.

В работе А. Б. Харазишвили [84] получен отрицательный ответ на следующий вопрос: для всякого ли флагового инварианта H_Φ найдется такая группа движений G пространства E^n, что G-равносоставленность многогранников M и N равносильна их равновеликости и выполнению равенства $H_\Phi(M)=H_\Phi(N)$. Доказано, что в E^3 для флагового инварианта порядка 2 такой подгруппы не существует.

Выше мы не рассматривали G-равнодополняемость. Это не случайно: Сидлер [196] доказал, что если $G\supset T$ (в E^3), то G-равносоставленность многогранников эквивалентна G-равнодополняемости. Первоначальное доказательство Сидлера было обобщено Хадвигером [80, 148] на E^n. Более сильный результат был получен В. Б. Зылевым [42, 43]:

(1.18) Пусть группа движений G в n-мерном евклидовом, гиперболическом или эллиптическом пространстве почти транзитивна (т. е. орбита точки всюду плотна); два многогранника в этом пространстве тогда и только тогда G-равнодополняемы, когда они G-равносоставленны.

Доказательство у В. Б. Зылева было лишь смутно намечено. В окончательном виде (приведенном в [18]) это доказательство несложно и носит чисто теоретико-множественный характер, в

отличие от хадвигеровского доказательства, использующего сложную геометрическую «технику равносоставленности».

Заметим еще, что в работе [151] Хадвигер рассматривает произвольную кристаллографическую группу G, т. е. дискретную группу движений пространства E^n, обладающую ограниченной фундаментальной областью. В этих условиях также доказывается эквивалентность методов разбиения и дополнения, но схема рассуждений несколько иная. Именно, Харвигер строит некоторую систему аддитивных G-инвариантов и доказывает, что выполнение равенств $\varphi_a(A)=\varphi_a(B)$ для всех инвариантов φ_a построенной системы является необходимым и достаточным условием G-равносоставленности многогранников A и B. Если теперь многогранники A и B являются G-равнодополняемыми, то $\varphi(A)=\varphi(B)$ для любого аддитивного G-инварианта φ, и потому, в силу сказанного выше, $A\sim B$.

Хадвигеровские инварианты φ_a для кристаллографической группы G строятся следующим образом. Если A — произвольный многогранник и $a\in E^n$, то через $v_a(A)$ обозначается отношение $v(A\cap S)/v(S)$, где v — обычный объем, а S — достаточно малый шар с центром a (это отношение не зависит от радиуса шара, если он достаточно мал). Далее,

$$\varphi_a(A)=\sum_{g\in G} v_{g(a)}(A)$$

(в этой сумме отлично от нуля лишь конечное число слагаемых).

В заключение опишем кратко алгебру многогранников, введенную Хадвигером [150] и играющую важную роль во всех работах по теории равносоставленности многогранников.

Обозначим через P^n векторное пространство, элементами которого являются формальные линейные комбинации $\lambda_1M_1+\ldots+\lambda_kM_k$, где $M_1,\ldots,M_k$ — произвольные n-мерные многогранники в E^n, λ_i — действительные числа, а k — произвольное натуральное число. Фиксируем некоторую группу G движений пространства E^n, содержащую группу T всех параллельных переносов. Отметим четыре случая, в которых формальная линейная комбинация будет считаться несущественной. Во-первых, если многогранники M и N являются G-конгруэнтными, то элемент $M-N=1M+(-1)N\in P^n$ будем считать несущественным. Во-вторых, если $A=M_1\cup\ldots\cup M_k$, где $M_1,\ldots,M_k$ попарно не имеют общих внутренних точек, то элемент $A-M_1-\ldots-M_k\in P^n$ будем считать несущественным. В-третьих, если многогранник M получается из N некоторой гомотетией с коэффициентом $\lambda>0$, то элемент $M-\lambda N\in P^n$ будем также считать несущественным. Наконец, в-четвертых, будем считать несущественными все многогранники, принадлежащие классу $\mathfrak{Z}_2$. Подпространство пространства P^n, порожденное всеми несущественными элементами, обозначим через P_0^n, фактор-пространство $\Sigma^n(G)=P^n/P_0^n$ и есть n-мерная G-алгебра многогранников. Таким образом, соотношение $\varkappa(A-B)=0$, где $\varkappa:P^n\to\Sigma^n(G)$ — естественный гомоморфизм, (т. е. включение $A-B\in P_0^n$) имеет место в том и только в том случае, если A и B являются G-равносоставленными по модулю $\mathfrak{Z}_2$, т. е. существуют такие многогранники U, $V\in\mathfrak{Z}_2$, что $A+U$ и $B+V$ являются G-равносоставленными.

Хадвигер доказал [150], что если n четно, а группа G содержит все параллельные переносы и все центральные симметрии пространства E^n, то пространство $\Sigma^n(G)$ тривиально. Напротив, при нечетном n пространство $\Sigma^n(D)$ (где D — группа всех движений пространства E^n) имеет размерность континуум. Для $n=3$ это вытекает из того факта (установленного еще Деном [110]), что среди равновеликих трехмерных многогранников имеется континуум таких, которые попарно не равносоставленны.

В трехмерном случае деновские инварианты являются гомоморфизмами алгебры многогранников, т. е. линейными функционалами на векторном пространстве $\Sigma^3(D)$. При $n>3$ это уже не так, поскольку инварианты Дена — Хадвигера уже не обращаются в нуль на всех многогранниках класса $\mathfrak{Z}_2$.

Наконец, отметим интересную трактовку деновских инвариантов (в трехмерном случае), предложенную Ессеном в [163]. Рассмотрим тензорное произведение $R\otimes R_\pi$, где R_π — аддитивная группа целых чисел, приведенная по модулю π, и для любого многогранника A положим $\Delta(A)=l_1\otimes\alpha_1+\ldots+l_k\otimes\alpha_k$, где $l_1,\ldots,l_k$ — длины его ребер, а $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ — величины соответствующих двугранных углов. Функция Δ продолжается, по аддитивности, в гомоморфизм $\Delta:P^3\to R\otimes R_\pi$, причем этот гомоморфизм обращается в нуль на подпространстве $P_0^3(D)$. Это порождает гомоморфизм $\delta:\Sigma^3(D)\to R\otimes R_\pi$. Гомоморфизм Δ фактически объединяет в себе все деновские инварианты: любой деновский инвариант имеет вид $\varphi\circ\Delta$, где $\varphi:R\otimes R_\pi\to R$ — аддитивный гомоморфизм, линейный по первому сомножителю. Таким образом, для равносоставленности многогранников A, $B\subset E^3$ необходимо и достаточно выполнение условий $v(A)=v(B)$, $\Delta(A)=\Delta(B)$.

§ 2. ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ И H-ВЫПУКЛОСТЬ

Теорема Хелли принадлежит к числу самых замечательных (и богатых приложениями и обобщениями) результатов комбинаторной геометрии. Хелли опубликовал ее в 1923 году [85] (после возвращения из русского плена); несколько раньше Радон, которому Хелли сообщил формулировку своей теоремы, опубликовал (отметив авторство Хелли) другое ее доказательство [189]. Впоследствии были найдены многие другие доказательства этой замечательной теоремы, десятки результатов, яв-

ляющихся непосредственными или более отдаленными следствиями теоремы Хелли, ряд обобщений этой теоремы в различных направлениях и великое множество новых постановок задач и нерешенных проблем. Все это богатство геометрических идей известно советскому читателю по второй главе элементарно написанной книги [88], а также по очень интересному и обстоятельному обзору [35], содержащему обширный список литературы. В связи с этим мы ограничимся рассказом о более поздних результатах, не вошедших в обзор [35], а именно, о размерности Хелли, введенной П. С. Солтаном [71] и о H-выпуклости [12], с которой связана новая интересная версия теоремы Хелли [13].

Теорема Хелли может быть сформулирована в нескольких различных вариантах. Основное ее содержание состоит в следующем:

(2.1) Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_l$ — выпуклые множества в E^n, причем $l\geqslant n+2$; если каждые $n+1$ из множеств $F_1, F_2, \ldots, F_l$ имеют непустое пересечение, то $F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_l\neq\varnothing$.

Приведем также другую эквивалентную формулировку:

(2.2) Если в E^n заданы $m+1$ выпуклых множеств $M_1, M_2, \ldots, M_{m+1}$, каждые m из которых имеют непустое пересечение, и при этом $M_1\cap M_2\cap\ldots\cap M_{m+1}=\varnothing$, то $m\leqslant n$.

Простой пример показывает, что оценка $m\leqslant n$, содержащаяся в теореме (2.2), достигается: достаточно рассмотреть $(n-1)$-мерные грани $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ произвольного n-мерного симплекса в E^n. Таким образом, размерность евклидова пространства E^n (т. е. число n) допускает простую комбинаторно-геометрическую характеристику в терминах пересечений выпуклых множеств. Именно, рассмотрим семейство V всех выпуклых множеств пространства E^n. Будем интересоваться такими подсемействами $\{M_1, M_2, \ldots, M_{m+1}\}$ семейства V, что каждые m множеств, взятых из $M_1, M_2, \ldots, M_{m+1}$, имеют непустое пересечение, но $M_1\cap M_2\cap\ldots\cap M_{m+1}=\varnothing$. Тогда наибольшее из натуральных чисел m, для которых такие подсемейства существуют, и представляет собой размерность $n=\dim E^n$ рассматриваемого пространства E^n.

Естественно возникает вопрос о рассмотрении аналогичного наибольшего числа для случая, когда вместо V берется какое-либо иное семейство множеств. В результате мы приходим к следующему определению.

Пусть Φ — некоторое семейство множеств. Обозначим через $\mathrm{him}\Phi$ наибольшее из натуральных чисел m, для которых в Φ существует такое подсемейство $\{F_1, F_2, \ldots, F_{m+1}\}$, что каждые m множеств, взятых из $F_1, F_2, \ldots, F_{m+1}$, имеют непустое пересечение, но $F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_{m+1}=\varnothing$. Если такого наибольшего натурального m не существует, то $\mathrm{him}\Phi=\infty$. Если же пересечение всех множеств семейства Φ непусто, то полагаем $\mathrm{him}\Phi=0$. Число $\mathrm{him}\Phi$ будем называть размерностью Хелли семейства Φ [71].

С помощью этого определения теорема Хелли (2.2) может быть сформулирована в следующем виде:

(2.3) Семейство V всех выпуклых подмножеств пространства E^n имеет размерность Хелли, равную n, т. е. $\mathrm{him} V = n$.

Подобно тому, как теоремы (2.1) и (2.2) являются различными (эквивалентными) формулировками одного и того же факта, так и из определения размерности Хелли можно получить следующий факт:

(2.4) Пусть Φ — некоторое семейство множеств и $h = \mathrm{him}\Phi$. Пусть, далее, $F_1, F_2, \ldots, F_l$ — произвольные множества семейства Φ, причем $l \geqslant h+2$. Если каждые $h+1$ из множеств $F_1, F_2, \ldots, F_l$ имеют непустое пересечение, то $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_l \neq \varnothing$.

Из этого получается другое, эквивалентное определение размерности Хелли. Именно, размерность Хелли $\mathrm{him}\Phi$ есть наименьшее из чисел m, обладающих следующим свойством: если $F_1, F_2, \ldots, F_l$ — произвольные множества семейства Φ, причем каждые $m+1$ из них имеют непустое пересечение, то $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_l \neq \varnothing$.

Заметим, что если Φ' есть подсемейство семейства Φ, то $\mathrm{him}\Phi' \leqslant \mathrm{him}\Phi$. Заметим еще, что если хотя бы одно из множеств F_i компактно, то теоремы (2.1) и (2.4) остаются справедливыми, если вместо конечного семейства $\{F_1, F_2, \ldots, F_l\}$ рассматривать произвольное бесконечное семейство множеств $\{F_i\}$. Приведем пример [25], когда это свойство имеет место и без предположения о компактности хотя бы одного из множеств:

(2.5) Пусть Φ — некоторое (возможно, бесконечное) семейство плоскостей пространства E^n; если каждые $n+1$ из этих плоскостей имеют непустое пересечение, то все плоскости, принадлежащие семейству Φ, имеют непустое пересечение.

Известен целый ряд теорем комбинаторной геометрии, совершенно различных по своему содержанию, но несложно доказываемых с помощью теоремы Хелли. Ниже мы приведем некоторые из этих теорем в существенно более общей форме (для так называемых H-выпуклых множеств). Из менее известных следствий теоремы Хелли отметим следующую теорему, принадлежащую П. С. Солтану [73]; напомним, что выпуклое множество называется полуограниченным, если оно не содержит целиком ни одной прямой (или, иначе, если оно содержится в некотором остром выпуклом конусе).

(2.6) Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_l$ — конечное семейство полуограниченных выпуклых множеств в E^n; если выпуклая оболочка объединения любых $n+1$ множеств этого семейства представляет собой полуограниченное множество, то и выпуклая оболочка множества $M_1 \cup \ldots \cup M_l$ является полуограниченным множеством.

Отметим еще некоторые теоремы, содержащиеся в работе П. С. Солтана и А. Д. Василой [76] (и, в подробном изложении, в книге [25]). Эти теоремы содержат новые характеристики конусов; их доказательство использует теорему Хелли. Пусть $M \subset$

$\subset E^n$ — замкнутое выпуклое тело, отличное от E^n; тело M в том и только в том случае является выпуклым конусом, если выполнено любое из следующих условий: 1) семейство всех опорных гиперплоскостей тела M имеет размерность Хелли, равную нулю; 2) любые три (не обязательно различные) опорные гиперплоскости тела M имеют непустое пересечение; 3) проекция тела M на любую содержащуюся в E^n двумерную плоскость является конусом.

В работе Муллина [186] с помощью теоремы Хелли доказывается существование общей неподвижной точки у некоторых систем нерастягивающих отображений.

В статье В. Г. Болтянского [15] приведено новое доказательство теоремы Хелли, построенное на совершенно иных идеях, чем ранее известные доказательства. Эти идеи (связанные с отделимостью выпуклых конусов), с одной стороны, оказались полезными в теории оптимального управления [11] и выпуклом анализе [53], а с другой стороны, позволили не только доказать теорему Хелли, но и получить ее обобщение, уточнив теорему (2.3) для случая, когда V заменяется семейством H-выпуклых множеств. Рассмотрим все эти вопросы подробнее.

Пусть K — выпуклый конус в E^n с вершиной в точке 0. Вектор $b \in E^n$ будем называть субнормалью конуса K, если для любого вектора $x \in K$ скалярное произведение bx неположительно. (В случае, если K представляет собой полупространство, субнормалями являются внешние нормали этого полупространства.) Множество всех субнормалей выпуклого конуса K представляет собой выпуклый конус $D(K)$ с вершиной 0, который называется двойственным конусом конуса K. Двойственные конусы играют важную роль в выпуклом анализе [53, 56].

Пусть теперь $K_1, \ldots, K_m$ — выпуклые конусы в E^n с общей вершиной в точке 0. Будем говорить, что конусы $K_1, \ldots, K_m$ отделимы [16], если существует в E^n такая гиперплоскость Γ (проходящая через 0), что какой-либо один из конусов $K_1, \ldots, K_m$ расположен в одном замкнутом полупространстве, определяемом гиперплоскостью Γ, а пересечение остальных конусов — в другом замкнутом полупространстве. Для случая двух конусов K_1, K_2 это понятие отделимости совпадает с обычным.

Следующая теорема [16] дает необходимое и достаточное условие отделимости:

(2.7) Для того чтобы выпуклые конусы $K_1, K_2, \ldots, K_m$ с общей вершиной 0 были отделимы в E^n, необходимо и достаточно существование таких векторов $b_1 \in D(K_1)$, $b_2 \in D(K_2)$, $\ldots$, $b_m \in D(K_m)$, хотя бы один из которых отличен от нуля, что

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_m = 0.$$

Идея изложенного в [15] доказательства теоремы Хелли состоит в следующем. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_{m+1}$ — выпуклые множества в E^n, удовлетворяющие условию, указанному в теореме

(2.2). Без ограничения общности их можно считать **замкнутыми**. Через $M_i(\varepsilon)$ обозначим замыкание ε-окрестности множества M_i в E^n. Так как $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_{m+1} = \varnothing$, то при $\varepsilon=0$ (а потому и при достаточно малом $\varepsilon>0$) пересечение $M_1(\varepsilon) \cap \cap M_2(\varepsilon) \cap \ldots \cap M_{m+1}(\varepsilon)$ пусто. Обозначим через ε_0 **наименьшее** значение ε, при котором это пересечение непусто, и пусть a — точка, принадлежащая этому пересечению. Мы можем считать (применив, если нужно, параллельный перенос), что $a=0$. Через K_i обозначим опорный конус* множества $M_i(\varepsilon_0)$ в точке 0. Из определения числа ε_0 нетрудно заключить, что выпуклые конусы $K_1, K_2, \ldots, K_{m+1}$ с общей вершиной 0 отделимы, и потому, по теореме (2.7), существуют такие субнормали $b_1, b_2, \ldots, b_{m+1}$ конусов $K_1, K_2, \ldots, K_{m+1}$, не все равные нулю, что $b_1+b_2+\ldots+b_{m+1}=0$. Иначе говоря, существуют такие единичные векторы $h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}$, являющиеся субнормалями конусов $K_1, K_2, \ldots, K_{m+1}$, и такие **неотрицательные** числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$, не все равные нулю, что $\lambda_1 h_1+\ldots+\lambda_{m+1}h_{m+1}=0$; в этом случае говорят, что векторы $h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}$ положительно зависимы. В то же время никакие m из векторов $h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}$ не являются положительно зависимыми. В самом деле, если бы, например, векторы $h_1, h_2, \ldots, h_m$ были положительно зависимы, то, по теореме (2.7), конусы $K_1, K_2, \ldots, K_m$ были бы отделимы, а это невозможно, поскольку каждые m из конусов $K_1, K_2, \ldots, K_{m+1}$ имеют общую внутреннюю точку.

Итак, векторы $h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}$ положительно зависимы, но никакие m из них не обладают свойством положительной зависимости. Из этого нетрудно заключить, что $m \leqslant n$. Этим и завершается доказательство теоремы (2.2). Проанализируем это доказательство. Пусть Φ — некоторое семейство выпуклых множеств в E^n. Для простоты будем предполагать, что

(А) все множества семейства Φ компактны.

В изложенном выше доказательстве теоремы Хелли рассматривались множества $M_i(\varepsilon)$. Множество $M_i(\varepsilon)$ представляет собой замыкание **сферической** ε-окрестности множества M_i, получающейся, если взять объединение всех открытых шаров радиуса ε с центрами в точках множества M_i. Однако в доказательстве можно было бы использовать и иные окрестности, например, множество V, которое **содержится** в ε-окрестности множества M_i и в то же время **содержит** некоторую δ-окрестность множества M_i при некотором $\delta>0$. Итак, потребуем, чтобы семейство Φ обладало следующим свойством:

(Б) для любого множества $M \in \Phi$ и любого $\varepsilon>0$ существуют такие $V \in \Phi$ и $\delta>0$, что $M(\delta) \subset V \subset M(\varepsilon)$.

---

* Опорным конусом выпуклого множества M в точке $a \in \overline{M}$ называется замыкание множества, образованного всеми лучами, исходящими из точки a и проходящими через точки множества M.

В изложенном доказательстве теоремы Хелли использовались параллельные переносы. Потребуем поэтому, чтобы семейство Φ обладало следующим свойством:

(В) множества, получающиеся из множества $M \in \Phi$ параллельными переносами, также принадлежат семейству Φ.

Наконец, в заключительной части доказательства теоремы Хелли использовались субнормали опорных конусов. Вектор $h \in E^n$, удовлетворяющий условию $\|h\|=1$, назовем Φ-экстремальным, если существует такой конус K, являющийся опорным конусом некоторого множества $M \in \Phi$, что луч $[0, h)$ является **гранью** конуса K.

Множество всех Φ-экстремальных векторов обозначим через $H(\Phi)$. Мы потребуем, чтобы семейство Φ обладало следующим свойством:

(Г) для любого вектора $h \in H(\Phi)$ найдется такое множество $M \in \Phi$, что внешняя нормаль, проведенная в некоторой регулярной граничной точке a множества M, совпадает с h.

В работе В. Г. Болтянского [13] при выполнении условий (А), (Б), (В), (Г) (и даже несколько более общих условий) была вычислена размерность Хелли семейства Φ. Это вычисление основано на использовании понятия положительной зависимости векторов, которое было применено в приведенном выше доказательстве теоремы Хелли. Единичные векторы $h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}$ пространства E^n будем называть минимально зависимыми, если они положительно зависимы, но никакие m из них не являются положительно зависимыми. Далее, если H — произвольное непустое подмножество единичной сферы S^{n-1} пространства E^n, то через $\mathrm{md}H$ обозначим наибольшее из таких натуральных чисел m, что в H имеется $m+1$ минимально зависимых векторов (если в H нет положительно зависимых векторов, то полагаем $\mathrm{md}H=0$).

Справедлива следующая теорема [13] (подробное изложение имеется в книге [25]):

(2.8) Пусть Φ — некоторое семейство выпуклых множеств, удовлетворяющее условиям (А), (Б), (В), (Г); тогда $\mathrm{him}\Phi = \mathrm{md}H(\Phi)$.

Опишем наиболее простой пример семейства Φ, удовлетворяющего условиям (А), (Б), (В), (Г). Пусть H — подмножество единичной сферы S^{n-1}, не являющееся **односторонним**, т. е. не расположенное целиком в одной какой-либо замкнутой полусфере. Замкнутое полупространство пространства E^n условимся называть H-выпуклым, если его внешняя нормаль принадлежит множеству H. Далее, замкнутое выпуклое множество $M \subset E^n$ будем называть H-выпуклым, если его можно представить в виде пересечения H-выпуклых полупространств (в конечном или бесконечном числе). Так как множество H не является односторонним, то в E^n существуют **компактные** H-выпуклые множества (например, многогранники, внешние нормали $(n-1)$-мерных граней которых составляют конечное подмножество множества H, не являющееся односторонним).

Отметим, что в недавней работе Е. М. Бронштейна [27] рассматривается структура семейства всех H-выпуклых тел в E^n (для произвольно фиксированного множества $H \subset S^{n-1}$, не являющегося односторонним): относительно сложения в смысле Бляшке (векторного сложения выпуклых тел) это семейство обладает структурой выпуклого конуса, причем на крайних лучах этого конуса лежат все H-выпуклые симплексы и только они. Если через Φ_H обозначить семейство всех компактных H-выпуклых множеств пространства E^n, то мы имеем $H(\Phi_H)=H$. Поэтому, в силу (2.8), справедлива следующая теорема [13]:

(2.9) Пусть H — подмножество единичной сферы $\mathbf{S}^{n-1}$ не являющееся односторонним; через Φ_H обозначим семейство всех компактных H-выпуклых множеств пространства E^n; тогда $\mathrm{him}\,\Phi_H=\mathrm{md}\,\bar{H}$.

В случае замкнутого множества H тот же результат останется справедливым, если мы будем рассматривать семейство всех (не обязательно компактных) H-выпуклых множеств в E^n. Близкий результат, связанный с рассмотрением сферически выпуклых множеств, содержится в работах Л. Г. Шарабуровой и Ю. А. Шашкина [86, 87].

Приведем несколько непосредственных следствий теоремы (2.9).

(2.10) Пусть $H \subset S^{n-1}$ — конечное множество, не являющееся односторонним; обозначим через Φ_H семейство всех выпуклых многогранников, внешние нормали к $(n-1)$-мерным граням которых принадлежат множеству H; тогда $\mathrm{him}\,\Phi_H=\mathrm{md}\,H$;

(2.11) Пусть $T(M)$ — семейство всех многогранников, получающихся параллельными переносами из фиксированного компактного n-мерного выпуклого многогранника $M \subset E^n$; тогда $\mathrm{him}\,T(M)=\mathrm{md}\,H$, где H — множество всех единичных векторов, являющихся внешними нормалями $(n-1)$-мерных граней многогранника M.

(2.12) Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_l$ — многогранники в E^n, получающиеся параллельными переносами из компактного n-мерного выпуклого многогранника M; через H обозначим множество всех единичных векторов, являющихся внешними нормалями $(n-1)$-мерных граней многогранника M; если каждые $\mathrm{md}\,H+1$ из многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_l$ имеют непустое пересечение, то $M_1 \cap \ldots \cap M_l \neq \varnothing$.

В качестве иллюстрации теоремы (2.12) заметим, что если $M \subset E^3$ — правильная четырехугольная пирамида, то для нее $\mathrm{md}\,H=2$, в то время как для четырехугольной пирамиды общего вида $\mathrm{md}\,H=3$. Следовательно, если $M_1, M_2, \ldots, M_l$ — правильные четырехугольные пирамиды в E^3, получающиеся друг из друга параллельными переносами, и если каждые т р и из них имеют непустое пересечение, то $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_l \neq \varnothing$. Для четырех-

угольной пирамиды общего вида это неверно. Надо потребовать, чтобы каждые ч е т ы р е имели непустое пересечение.

Рассмотрим теперь несколько теорем комбинаторной геометрии, доказываемых с помощью теоремы Хелли. Мы изложим их для H-выпуклых множеств [19]. Во всех случаях предполагается, что множество H замкнуто и не является односторонним.

Будем говорить, что некоторое множество A покрывается множеством M, если существует множество, получающееся из M параллельным переносом и содержащее A.

(2.13) Пусть X — произвольное множество в E^n и M — компактное H-выпуклое множество; если каждые $\mathrm{md}\,H+1$ точек множества X покрываются множеством M, то все множество X покрывается множеством M.

Если, в частности, множество H совпадает с S^{n-1}, то H-выпуклые множества совпадают просто с замкнутыми выпуклыми множествами в E^n; при этом $\mathrm{md}\,H=\mathrm{md}\,S^{n-1}=n$. Таким образом, в этом случае теорема (2.13) сводится к хорошо известному результату [35] о том, что если каждые $n+1$ точек множества $X \subset E^n$ покрываются компактным выпуклым множеством M, то все множество X покрывается множеством M. Например, если расстояние между любыми двумя точками множества $X \subset E^n$ не превосходит r, то любые $n+1$ точек этого множества покрываются шаром радиуса $r\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$; следовательно, все множество X покрывается шаром радиуса $r\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$ (теорема Юнга). Таким образом, (2.13) представляет собой довольно далекое обобщение теоремы Юнга.

В качестве иллюстрации теоремы (2.13) отметим, что если правильная четырехугольная пирамида в E^3 и если каждые т р и точки множества X покрываются пирамидой M, то все множество X покрывается пирамидой M. Для четырехугольной пирамиды общего вида это неверно.

(2.14) Для любого компактного H-выпуклого тела M существует такая внутреняя точка x_0 тела M, что любая хорда $[a, b]$ тела M, проходящая через точку x_0, удовлетворяет условиям

$$\|a-x_0\| \geqslant \frac{1}{\mathrm{md}\,H+1}\|a-b\|, \quad \|b-x_0\| \geqslant \frac{1}{\mathrm{md}\,H+1}\|a-b\|.$$

Пусть, в частности, $\mathrm{md}\,H=1$. В этом случае, как легко доказать [17], $H=\{e_1, -e_1, \ldots, e_n, -e_n\}$, где $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис пространства E^n, и потому H-выпуклыми телами будут параллелепипеды, ребра которых параллельны векторам $e_1, \ldots, e_n$. Теорема (2.14) сводится в этом частном случае к тому тривиальному факту, что в параллелепипеде имеется точка, делящая пополам каждую проходящую через нее хорду, т. е. что параллелепипед центрально симметричен. При $H=S^{n-1}$ (т. е. $\mathrm{md}\,H=n$) получаем другой крайний случай [35]: в любом компактном выпуклом теле $M \subset E^n$ имеется такая внутренняя точка x_0, что любая хорда $[a, b]$ тела M, проходящая через точку x_0, удовлетворяет условиям

$$\|a-x_0\| \geqslant \frac{1}{n+1}\|a-b\|, \quad \|b-x_0\| \geqslant \frac{1}{n+1}\|a-b\|.$$

При $1 < \mathrm{md}\, H < n$ получаем из теоремы (2.14) ряд промежуточных случаев.

Напомним, что шириной выпуклого тела называется наименьшее из расстояний между параллельными опорными гиперплоскостями этого тела.

(2.15) Всякое компактное H-выпуклое тело ширины Δ содержит шар радиуса $r = \frac{1}{\mathrm{md}\, H+1}\Delta$.

В частности, при $H = S^{n-1}$ эта теорема сводится к хорошо известной теореме Бляшке [35]: всякое компактное выпуклое тело ширины Δ в E^n содержит шар радиуса $\frac{1}{n+1}\Delta$. Теорема (2.15) дает более точную оценку радиуса вписанного шара.

(2.16) Пусть $N \subset E^n$ — компактное множество, k-мерный объем которого равен v; тогда существует такая точка $q \in E^n$, что для любого H-выпуклого полупространства Π, содержащего точку q, множество $N \cap \Pi$ имеет k-мерный объем, не меньший $\frac{v}{\mathrm{md}\, H+1}$.

Отметим, в частности, случай $k=0$: теорема остается справедливой, если под нульмерным объемом конечного множества понимать ч и с л о его точек.

Приведенные теоремы (а также ряд других результатов, содержащихся в [13, 24, 25]) доказываются с помощью теоремы (2.9). В качестве типичного примера приведем доказательство теоремы (2.13). Пусть $x \in X$. Обозначим через N_x множество всех векторов $a \in E^n$, для которых $x \in a+M$; иначе говоря, $N_x = x - M$. Таким образом, множество N_x получается из M центральной симметрией (с центром $\frac{1}{2}x$). Из этого следует, что все множества N_x являются H'-выпуклыми, где H'-множество, симметричное H относительно точки 0. Так как каждые $\mathrm{md}\, H+1$ точек множества X покрываются множеством M, то каждые $\mathrm{md}\, H+1$ множеств N_x (где $x \in X$) имеют непустое пересечение. Поскольку, очевидно, $\mathrm{md}\, H = \mathrm{md}\, H'$, из теоремы (2.9) вытекает, что в с е множества N_x (где $x \in X$) имеют непустое пересечение, а это и означает существование такой точки a^*, что $X \subset a^* + M$.

В работе В. Г. Болтянского и П. С. Солтана [23] содержится теорема, которая при $H = S^{n-1}$ превращается в известную теорему М. А. Красносельского [46] о звездных множествах. В этой теореме (в наиболее простом ее варианте) рассматривается ограниченная многогранная область $M \subset E^n$, т. е. компактное множество, граница которого представляет собой объединение конечного числа $(n-1)$-мерных многогранников. Будем говорить, что граничная точка x области M освещается внутренней точкой a этой области, если весь отрезок $[a, x]$, кроме точки x, расположен внутри M. Многогранная область M называется звездным множеством, если в M существует внутренняя точка a, которая освещает всю границу области M. Наконец, обозначим через H множество всех единичных векторов внешних нормалей, проведенных к $(n-1)$-мерным граням многогранной области M.

(2.17) Многогранная область M в том и только в том случае является звездным множеством, если любые $\mathrm{md}\, H+1$ граничных точек множества M освещаются некоторой внутренней точкой.

Пусть, в качестве иллюстрации, M — многогранная область (невыпуклая), все грани которой параллельны координатным гиперплоскостям некоторой фиксированной координатной системы в E^n. Такая область является звездной в том и только в том случае, если каждые две ее точки освещаются некоторой внутренней точкой области M.

В заключение остановимся на одной комбинаторно-геометрической теореме, принадлежащей Секефальви—Надю [200], и ее обобщении, получаемом на основе теоремы Хелли для H-выпуклых множеств.

Пусть $M \subset E^n$ — некоторое выпуклое тело. Через $T(M)$ обозначим семейство всех тел, получающихся из M параллельными переносами. Если M — параллелепипед, то множество H всех единичных векторов внешних нормалей к $(n-1)$-мерным граням параллелепипеда M имеет вид $\{e_1, -e_1, \ldots, e_n, -e_n\}$, где $e_1, \ldots, e_n$ составляют базис пространства E^n, и поэтому $\mathrm{md}\, H = 1$. Из теоремы (2.11) следует, что $\mathrm{him}\, T(M) = 1$. Итак, если тело $M \subset E^n$ является параллелепипедом, то $\mathrm{him}\, T(M) = 1$. Секефальви—Надь доказал [200], что справедлива и о б р а т н а я теорема (что является существенно более тонким результатом):

(2.18) Пусть $M \subset E^n$ — такое компактное выпуклое тело, что $\mathrm{him}\, T(M) = 1$; тогда M — параллелепипед.

Иными словами, пусть M — компактное выпуклое тело, обладающее следующим свойством: если множества $M_1, \ldots, M_l$, получающиеся из M параллельными переносами, попарно пересекаются, то $M_1 \cap \ldots \cap M_l \neq \varnothing$. Тогда M — параллелепипед.

Обсудим теперь возможность обобщения этой теоремы. Параллелепипед можно описать как прямое произведение о д н о м е р н ы х выпуклых множеств. Именно, пусть $E^n = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$ — разложение пространства E^n в прямую сумму одномерных подпространств. Выберем для каждого i некоторый отрезок $S_i \subset L_i$. Тогда векторная сумма $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ (т. е. множество всех точек вида $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где $x_i \in S_i$) представляет собой n-мерный параллелепипед в E^n, причем л ю б о й n-мерный параллелепипед можно представить в таком виде.

Пусть теперь E^n представлено в виде прямой суммы подпространств: $E^n = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$, причем каждое подпространство L_i имеет размерность 1 или 2. Выберем в каждом подпространстве L_i компактное выпуклое множество S_i т о й ж е размерности, что и L_i (т. е. S_i есть о т р е з о к, если L_i одномерно, и S_i есть двумерное выпуклое компактное множество, если L_i двумерно). Тогда векторная сумма $S_1+S_2+\ldots+S_k$ является n-мерным компактным выпуклым множеством; о множествах, которые можно представить в таком виде, будем говорить, что они представляются в виде прямой суммы одномерных или двумерных выпуклых множеств. Несложно доказывается, что если компактное выпуклое тело $M \subset E^n$, не являющееся параллелепипедом, представляется в виде прямой суммы одномерных или двумерных выпуклых множеств, то существует такое замкнутое множество $H \subset S^{n-1}$, что M является H-выпуклым множеством и при этом $\operatorname{md} H = 2$. Следовательно, согласно теореме 2.9, $\operatorname{him} T(M) \leqslant 2$ (поскольку $T(M)$ содержится в семействе всех H-выпуклых множеств). Равенство $\operatorname{him} T(M) = 1$ невозможно (так как иначе, по теореме Секефальви—Надя, M было бы параллелепипедом), и потому $\operatorname{him} T(M) = 2$. Итак, если компактное выпуклое множество $M \subset E^n$, не являющееся параллелепипедом, представляется в виде прямого произведения одномерных или двумерных выпуклых множеств, то $\operatorname{him} T(M) = 2$.

Справедлива ли для этой теоремы обратная, т. е. можно ли на этот случай обобщить теорему Секефальви—Надя? Ответ на этот вопрос дан в работе В. Г. Болтянского [14] (подробное изложение имеется в книге [25]). Именно, для ц е н т р а л ь н о с и м м е т р и ч н ы х тел эта обратная теорема справедлива:

(2.19) Пусть $M \subset E^n$ — такое компактное выпуклое центрально симметричное тело, что $\operatorname{him} T(M) = 2$; тогда M представляется в виде прямого произведения одномерных или двумерных выпуклых множеств.

Для тел же, не являющихся центрально симметричными, эта обратная теорема, вообще говоря, неверна: для правильной четырехугольной пирамиды $M \subset E^3$ (которая не представляется в виде прямого произведения одномерных или двумерных выпуклых множеств) имеем $\operatorname{him} T(M) = 2$. В [14] приведен также пример, показывающий, что на случай $\operatorname{him} T(M) = 3$ теорема (2.19) не обобщается (даже для центрально симметричных тел): существует компактное ц е н т р а л ь н о с и м м е т р и ч н о е выпуклое тело $M \subset E^4$, для которого $\operatorname{him} T(M) = 3$ и которое н е п р е д с т а в л я е т с я в виде прямого произведения выпуклых множеств размерностей $\leqslant 3$.

Отметим в заключение теоремы типа Хелли на выпуклых поверхностях, полученные В. Г. Болтянским и П. С. Солтаном [26]. Из нескольких содержащихся в этой работе теорем сформулируем одну:

(2.20) Пусть $M \subset E^n$ — произвольное замкнутое выпуклое тело, отличное от E^n, и m — максимум размерностей его собственных граней. Тогда для семейства Φ_M всех выпуклых множеств, содержащихся в границе тела M, справедливы неравенства $m \leqslant \operatorname{him} \Phi_M \leqslant m+1$, причем верхняя оценка достигается в том и только в том случае, если в E^n существует $(m+1)$-мерный симплекс, граница которого содержится в границе тела M.

Из этого вытекает, что если тело M отлично от n-мерного симплекса, то $\operatorname{him} \Phi_M < n$. В частности, если M есть n-мерный многогранник, отличный от симплекса, то $\operatorname{him} \Phi_M = n-1$.

§ 3. ПРОБЛЕМА БОРСУКА

В 1933 году польский математик Борсук [98] доказал следующую теорему:

(3.1) Всякая плоская фигура диаметра h может быть разбита на три части, каждая из которых имеет диаметр, меньший h. Для доказательства Борсук воспользовался теоремой венгерского математика Пала [187] о том, что всякая плоская фигура M диаметра h может быть покрыта правильным шестиугольником P, у которого расстояние между противоположными сторонами равно h (доказательство этой теоремы имеется также в книге [88]). Если из центра шестиугольника P опустить перпендикуляры на три его стороны (через одну), то шестиугольник P (а вместе с тем и заключенная в нем фигура M) разобьется на три части, каждая из которых имеет диаметр, меньший h.

(3.2) Шар $D \subset E^n$ диаметра h не может быть разбит на n частей, каждая из которых имеет диаметр, меньший h (но может быть разбит на $n+1$ частей меньшего диаметра).

Эта теорема была установлена Борсуком в 1932 году [97]. Однако раньше советскими математиками Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом [51] был получен, по существу, этот же результат, но в другой формулировке.

Сопоставляя указанные результаты, Борсук высказал следующее предположение:

Г и п о т е з а Б о р с у к а: каждое множество $M \subset E^n$, имеющее диаметр h, может быть разбито на $n+1$ частей, каждая из которых имеет диаметр, меньший h.

Гипотезе Борсука можно придать следующую формулировку. Пусть M — ограниченное множество в E^n. Через $a(M)$ обозначим наименьшее из таких натуральных чисел k, что M может быть представлено в виде объединения k множеств, каждое из которых имеет диаметр, меньший h. Мы будем $a(M)$ называть числом Борсука множества M. Проблема Борсука заключается в том, чтобы доказать равенство $\max\limits_{M \subset E^n} a(M) = n+1$ (где максимум берется по всем ограниченным множествам, — разумеется, отличным от точки).

Заметим, что при определении числа $a(M)$ (и в постановке проблемы Борсука) не регламентируется, насколько маленькими должны быть диаметры частей, на которые разбивается фигура M, — важно лишь, чтобы каждая из частей имела диаметр, меньший h. Борсуковское решение для плоских фигур (использующее шестиугольник) позволяет разбить любую фигуру диаметра h на три части, диаметр каждой из которых не превосходит $h\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}8660254\ldots\cdot h$. В недавней работе [99] Борсук и Вайна доказывают, что если потребовать, чтобы диаметр каждой части не превосходил $h/2$, то любую плоскую фигуру удается разбить на *семь* таких частей; правильный семиугольник является примером фигуры, разбить которую на *шесть* частей вдвое меньшего диаметра невозможно. В дальнейшем однако речь будет идти лишь о разбиении на части меньшего диаметра (без каких-либо других ограничений на диаметры частей), т. е. о числах Борсука $a(M)$.

Для $n=3$ решение проблемы Борсука было дано в 1955 году английским математиком Эгглстоном [118]: он показал, что в этом случае гипотеза Борсука подтверждается, т. е.

(3.3) Для любого ограниченного множества $M\subset E^3$ справедливо неравенство $a(M)\leqslant 4$.

Доказательство Эгглстона было сложным. Через два года Грюнбаум [142] и Хеппеш [160] предложили новые, изящные и более короткие доказательства этой же теоремы. Их доказательства были основаны на перенесении идеи Борсука, использованной им для доказательства теоремы (3.1). Именно, предположим, что удалось найти тело $V_h\subset E^3$, обладающее следующими свойствами:

1) любое множество $M\subset E^3$, имеющее диаметр h, может быть (с помощью некоторого движения) помещено в V_h;

2) тело V_h может быть разбито на четыре части, каждая из которых имеет диаметр, меньший h.

Очевидно, что если такое тело V_h будет найдено, то этим будет установлено, что любое ограниченное множество $M\subset E^3$ может быть разбито на четыре части меньшего диаметра, т. е. $a(M)\leqslant 4$.

Именно таким способом (используя в качестве V_h правильный шестиугольник) Борсук доказал неравенство $a(M)\leqslant 3$ для плоских фигур.

Для построения тела $V_h\subset E^3$, обладающего указанными свойствами, Грюнбаум использовал результат Гейла [137] о том, что всякое множество $M\subset E^3$, имеющее диаметр h, может быть помещено (с помощью некоторого движения) в правильный октаэдр, у которого расстояние между противоположными гранями равно h. Грюнбаум показывает, что если от правильного октаэдра отсечь части, примыкающие к трем его вершинам, то получится тело V_h, удовлетворяющее условиям 1) и 2), указанным выше. Это и дает сравнительно простое решение проблемы Борсука для $n=3$.

Заметим попутно, что к этому кругу вопросов примыкает задача о нахождении «наилучших универсальных покрышек», т. е. множеств V_h, обладающих отмеченным выше свойством 1) и при этом являющихся в некотором смысле наилучшими, — например, обладающих наименьшим объемом (или площадью в случае E^2). Как показывает результат Пала [187], правильный шестиугольник ширины h является одной из универсальных покрышек для плоских фигур диаметра h; его площадь равна $0{,}8660254\ldots\cdot h^2$. В работе Дуфф [113] построена универсальная покрышка (для плоских фигур диаметра h), имеющая площадь $0{,}8441357\ldots\cdot h^2$. Это — наименьшая по площади универсальная покрышка, известная сегодня (заметим, что она невыпукла и несимметрична).

В пространстве E^n при $n>3$ проблема Борсука не решена до сих пор, т. е. число $\max\limits_M a(M)$, где максимум берется по всем ограниченным множествам $M\subset E^n$, при $n>3$ не найдено. Однако известны некоторые частные результаты. Прежде всего, при нахождении числа $\max\limits_M a(M)$ достаточно в качестве M рассматривать лишь *компактные выпуклые* множества пространства E^n (поскольку замыкание выпуклой оболочки множества M имеет тот же диаметр, что и M). Как показал Хадвигер [145], для компактных выпуклых тел *с гладкой* границей (т. е. для тел, у которых все граничные точки регулярны) гипотеза Борсука справедлива:

(3.4) Всякое n-мерное выпуклое тело M с гладкой границей, имеющее диаметр h, может быть разбито на $n+1$ частей меньшего диаметра, т. е. $a(M)\leqslant n+1$.

В работе В. Г. Болтянского [8] установлено, что этот результат остается справедливым, если тело $M\subset E^n$ имеет не более n нерегулярных граничных точек. В E^3, как показал А. Б. Харазишвили [82], справедлив несколько более сильный результат: если $M\subset E^3$ — выпуклое тело диаметра h, имеющее не более четырех нерегулярных граничных точек, то $a(M)\leqslant 4$. Отметим, далее, два простых результата, найденных А. С. Риславингом [54]. Первый из них состоит в том, что для *центрально-симметричных* n-мерных выпуклых тел гипотеза Борсука справедлива. Далее, для любого центрально симметричного n-мерного выпуклого многогранника M справедливо равенство $a(M)=2$. Наконец, известно несколько оценок числа $\max\limits_{M\subset E^n} a(M)$ (см., например, [107, 171, 177]), однако все они очень далеки от предполагаемого Борсуком значения $\max\limits_{M\subset E^n} a(M)=n+1$. Обзор ряда других работ, посвященных проблеме Борсука, имеется в книге Грюнбаума [34].

Теорема (3.1) не дает еще полного решения вопроса о том, чему равно число $a(M)$ для произвольной плоской фигуры M диаметра h. Она дает лишь оценку числа $a(M)$ сверху: $a(M) \leqslant 3$. Так как, кроме того, очевидно, что $a(M) > 1$ (для любого ограниченного множества M, отличного от точки), то для любой плоской ограниченной фигуры M число Борсука $a(M)$ равно 2 или 3. Естественно возникает вопрос, как отделить плоские фигуры, для которых $a(M)=2$, от фигур, для которых $a(M)=3$. Этот вопрос был решен в работе В. Г. Болтянского [10]. Для формулировки этого решения потребуется понятие тела постоянной ширины (которое будет играть важную роль и в дальнейших разделах этого обзора).

Пусть $M \subset E^n$ — компактное выпуклое тело и $\Gamma \subset E^n$ — некоторая гиперплоскость. Расстояние между двумя опорными гиперплоскостями тела M, параллельными Γ, называется шириной тела M в направлении Γ. Если ширина тела M во всех направлениях одна и та же и равна h, то M называется телом постоянной ширины h. Класс всех тел постоянной ширины весьма обширен; в частности, справедлива следующая теорема ([25, 119, 120]):

(3.5) Всякое множество $F \subset E^n$, имеющее диаметр h, может быть вложено в некоторое тело постоянной ширины h.

Для любого тела постоянной ширины $M \subset E^n$ справедливо неравенство $a(M) \geqslant n+1$. Таким образом, для подтверждения гипотезы Борсука было бы достаточно установить, что для любого тела постоянной ширины $M \subset E^n$ справедливо равенство $a(M)=n+1$.

Заметим, что в некоторых случаях фигура диаметра h однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины h (примером в E^2 может служить равносторонний треугольник T со стороной h: пересечение трех кругов радиуса h с центрами в вершинах этого треугольника представляет собой единственную фигуру постоянной ширины, содержащую T). В других же случаях дополнение до фигуры постоянной ширины h неоднозначно. Пусть, например, фигура F представляет собой круг K диаметра h, от которого отрезан сегмент с дугой ab, меньшей полуокружности. Диаметр фигуры F равен h (т. е. равен диаметру исходного круга K). Поэтому круг K является одной из фигур постоянной ширины h, содержащей фигуру F. Далее, если c — такая точка, что $|ab|=|bc|=h$ (причем точка c расположена по ту же сторону прямой ab, что и фигура F), то, добавляя к F точку c, мы получаем фигуру F^* того же диаметра h. Следовательно, по теореме (3.5), фигуру F^* можно дополнить до некоторой фигуры M постоянной ширины h. При этом M не совпадает с K (поскольку $c \notin K$), т. е. F неоднозначно дополняется до фигуры постоянной ширины h.

Теперь мы можем сформулировать результат работы [10]:

(3.6) Пусть M — плоская фигура диаметра h; равенство

$a(M)=3$ имеет место в том и только в том случае, если фигура M однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины h.

Заметим, что для трехмерных тел аналогичная теорема места не имеет. Так, например, для правильного тетраэдра M с ребром h, очевидно, справедливо равенство $a(M)=4$, т. е. $a(M)$ принимает свое максимальное значение. В то же время тетраэдр M неоднозначно дополняется до тела постоянной ширины h (см. [88], стр. 103—104). Таким образом, равенство $a(M)=4$ в случае пространственных тел диаметра h связано с какими-то более тонкими обстоятельствами, чем однозначность дополнения до тела постоянной ширины h.

Таковы основные результаты, непосредственно связанные с проблемой Борсука. Дальнейшая часть этого параграфа связана с ее обобщением. Задачу о вычислении числа Борсука $a(M)$ можно рассматривать для ограниченного подмножества M любого метрического (и, в частности, линейного нормированного) пространства. Для подмножеств двумерного нормированного пространства, единичным шаром которого является параллелограмм, эта задача была решена Грюнбаумом [143], а для произвольного двумерного нормированного пространства — В. Г. Болтянским и В. П. Солтаном [21]. Прежде всего рассмотрим вопрос о возможности обобщения теоремы (3.5) на случай линейных нормированных пространств.

Тела постоянной ширины определяются в линейном нормированном пространстве так же, как и в случае евклидова пространства (только расстояние между параллельными опорными гиперплоскостями определяется в смысле метрики рассматриваемого нормированного пространства). Далее, следуя Эгглстону [119] (см. также [120]), будем говорить, что подмножество M линейного нормированного пространства является полным, если не существует отличного от M множества $M' \supset M$, имеющего тот же диаметр, что и M. В случае евклидова пространства полными множествами являются тела постоянной ширины и только они. В нормированном пространстве всякое тело постоянной ширины есть полное множество, но обратное может не иметь места (пример приведен в работе Эгглстона [120], два других примера имеются в книге [25], стр. 194—196). В случае нормированного пространства теорема (3.5) заменяется следующей:

(3.7) Всякое подмножество n-мерного линейного нормированного пространства, имеющее диаметр h, содержится в некотором полном множестве диаметра h.

В случае, если линейное нормированное пространство двумерно, каждая полная фигура является фигурой постоянной ширины (Эгглстон [120]). Следовательно, в этом случае справедлива теорема, аналогичная теореме (3.5):

(3.8) В любом двумерном нормированном пространстве каждая фигура диаметра h может быть хотя бы одним способом дополнена до фигуры постоянной ширины h.

Теперь мы имеем все необходимое, чтобы сформулировать результаты, дающие решение проблемы Борсука в произвольном двумерном линейном нормированном пространстве. Число Борсука ограниченного множества M, расположенного в линейном нормированном пространстве с единичным шаром Σ, условимся обозначать через $a_\Sigma(M)$. Иначе говоря, если h — диаметр множества M (в метрике рассматриваемого нормированного пространства), то $a_\Sigma(M)$ есть наименьшее из таких натуральных k, что M может быть представлено в виде объединения k множеств, каждое из которых имеет диаметр, меньший h. Сформулируем прежде всего теорему Грюнбаума [143], дающую решение задачи Борсука в случае, если Σ — параллелограмм:

(3.9) Пусть L — двумерное линейное нормированное пространство, единичным шаром которого служит параллелограмм Σ. Для замкнутого ограниченного множества $M\subset L$ диаметра h равенство $a_\Sigma(M)=2$ имеет место в том и только в том случае, если M не содержит трех точек, являющихся (в метрике пространства L) вершинами равностороннего треугольника со стороной h. Равенство $a_\Sigma(M)=4$ имеет место в том и только в том случае, если выпуклая оболочка множества M представляет собой параллелограмм, получающийся из Σ гомотетией или параллельным переносом. В остальных случаях $a_\Sigma(M)=3$.

Пусть теперь L — двумерное линейное нормированное пространство, единичный шар Σ которого не является параллелограммом. Тогда для любого ограниченного множества $M\subset L$ справедливо неравенство $a_\Sigma(M)\leqslant 3$, и остается, как и в случае теоремы (3.6), указать фигуры, для которых $a_\Sigma(M)=3$. Двумерное линейное нормированное пространство L с единичным шаром Σ будем называть уголковым пространством [21], если существуют такие три точки a, b, c, не лежащие на одной прямой, что ломаная $[a, b]\cup[b, c]$ содержится в границе множества Σ.

Теперь мы можем сформулировать результаты, содержащиеся в работе В. Г. Болтянского и В. П. Солтана [21] (см. также книгу [25]).

(3.10) Пусть L — двумерное линейное нормированное пространство, не являющееся уголковым; для фигуры $M\subset L$ диаметра h равенство $a_\Sigma(M)=3$ имеет место в том и только в том случае, если M однозначно дополняется до фигуры постоянной ширины h.

(3.11) Пусть L — двумерное линейное нормированное пространство, являющееся уголковым; предположим при этом, что единичный шар Σ не является параллелограммом. Для замкнутой фигуры $M\subset L$ диаметра h равенство $a_\Sigma(M)=3$ имеет место

в том и только в том случае, если выполнены следующие два условия:

1) M однозначно дополняется до фигуры F, имеющей постоянную ширину h;

2) из любых двух параллельных опорных прямых фигуры F хотя бы одна имеет непустое пересечение с фигурой M.

Из последней теоремы вытекает, что во всяком уголковом пространстве L найдется фигура $M\subset L$ диаметра h, однозначно дополняемая до фигуры постоянной ширины h и удовлетворяющая условию $a_\Sigma(M)=2$ (т. е. фигура, удовлетворяющая условию 1, но не удовлетворяющая условию 2).

В книге [25] рассматриваются также некоторые дальнейшие обобщения задачи Борсука (связанные, в частности, с H-выпуклостью).

В заключение опишем некоторую абстрактную схему комбинаторно-геометрических задач, охватывающую теорему Хелли, проблему Борсука и ряд других постановок задач. Пусть Φ — некоторое семейство множеств. Обозначим через $\alpha_\cap$ следующее «комбинаторное свойство», которым могут обладать (или не обладать) множества $K_1, K_2, \ldots, K_m$, взятые из семейства Φ:

$\alpha_\cap$: каждые $m-1$ из множеств $K_1, K_2, \ldots, K_m$ имеют непустое пересечение, но пересечение $K_1\cap K_2\cap\ldots\cap K_m$ пусто.

Задача вычисления *размерности Хелли* семейства Φ заключается в том, чтобы найти наибольшее натуральное m, для которого в семействе Φ найдутся m множеств, обладающих свойством $\alpha_\cap$. Таким образом, вычисление размерности Хелли представляет собой задачу на максимум, связанную с комбинаторно геометрическим свойством $\alpha_\cap$.

Пусть теперь M — некоторое ограниченное подмножество пространства E^n. Через A_M обозначим семейство всех подмножеств $K\subset M$, имеющих меньший диаметр, чем множество M. Будем рассматривать следующее комбинаторное свойство $\alpha_\cup$, которым могут обладать (или не обладать) множества K_1, $K_2, \ldots, K_m$, взятые из семейства A_M:

$\alpha_\cup$: множества $K_1, K_2, \ldots, K_m$ составляют покрытие множества M, т. е. $K_1\cup K_2\cup\ldots\cup K_m\supset M$.

Задача Борсука, т. е. задача вычисления величины $a(M)$ заключается в том, чтобы найти наименьшее натуральное m, для которого в семействе A_M найдутся m множеств, обладающих свойством $\alpha_\cup$. Таким образом, задача Борсука представляет собой задачу на минимум, связанную с комбинаторно геометрическим свойством $\alpha_\cup$. Заметим, что здесь речь шла о нахождении числа Борсука $a(M)$ для заданного множества M. Проблема Борсука состоит в нахождении максимума $\max\limits_M a(M)$ по всем ограниченным множествам $M\subset E^n$, т. е. представляет собой максиминную задачу $\max_M \min m$, связанную с комбинаторным свойством $\alpha_{\cup}$, где минимум, по-прежнему, берется по всем m, для которых существуют множества $K_1, K_2, \ldots, K_m \in A_M$, обладающие свойством $\alpha_{\cup}$.

Рассматриваемая в следующем пункте обзора задача Хадвигера представляет собой точно такую же максиминную задачу, в которой, однако, вместо A_M рассматривается другое семейство множеств. Именно, если M — компактное выпуклое множество в E^n, то через B_M обозначим семейство всех множеств, получающихся из M гомотетиями с положительным коэффициентом, меньшим единицы. Задача Хадвигера заключается в том, чтобы найти наименьшее натуральное m, для которого в семействе B_M найдутся m множеств, обладающих свойством $\alpha_{\cap}$; это наименьшее m обозначается через $b(M)$. Подробнее о задаче Хадвигера и связанных с ней задачах освещения будет сказано в следующем пункте обзора.

Комбинаторные свойства $\alpha_{\cap}$ и $\alpha_{\cup}$, связанные с рассмотренными выше задачами, разумеется, не являются единственно возможными. Напротив, свойства, встречающиеся в задачах комбинаторной геометрии, весьма разнообразны. В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть $M \subset E^n$ — компактное выпуклое тело. Через Q_M обозначим семейство всех множеств, получающихся из M параллельными переносами и имеющих с M хотя бы одну общую точку. Далее, рассмотрим следующее комбинаторное свойство, которым могут обладать (или не обладать) множества $K_1, K_2, \ldots, K_m$, взятые из семейства Q_M:

α: множества $K_1, K_2, \ldots, K_m$ попарно не имеют общих внутренних точек.

Задача нахождения наибольшего m, для которого в семействе Q_M найдутся m множеств, обладающих свойством α, рассмотрена в книге Хадвигера и Дебруннера [81]. Например, для круга это наибольшее число m равно 7, а для паралеллограмма оно равно 9. Ряд других комбинаторных свойств можно найти в книгах [34, 35, 81].

В первом разделе этого обзора рассматривалось комбинаторное свойство пары фигур (многогранников) M_1, M_2, заключающееся в их равносоставленности. Свойство равносоставленности транзитивно: если M_1 и M_2 равносоставлены, а также M_2 и M_3 равносоставлены, то M_1 и M_3 равносоставленны. Поэтому в отношении этого комбинаторного свойства не ставится задача на максимум или минимум, а постановка задачи выглядит иначе: найти условия (необходимые, достаточные) для того, чтобы пара многогранников M_1, M_2 обладала этим комбинаторным свойством. Так, для плоских многоугольников необходимым и достаточным условием равносоставленности является равновеликость (теорема Бойяи—Гервина); для многогранников в E^3 и E^4 необходимое и достаточное условие равносоставленности содержится в теоремах Дена—Сидлера и Ессена.

Изложенный взгляд на задачи комбинаторной геометрии является достаточно общим: рассматривается некоторое комбинаторно-геометрическое свойство (которым может обладать или не обладать конечная система множеств, взятых из некоторого класса) и ставится либо какая-то экстремальная задача об этом комбинаторном свойстве, либо задача нахождения условий, при которых это свойство имеет место, и т. п.

Еще одним примером, укладывающимся в эту общую схему, является задача соседства. В этом случае рассматривается некоторое метрическое пространство M и различные покрытия этого пространства замкнутыми множествами. «Комбинаторное свойство» имеет следующий вид: множества $K_1, K_2, \ldots, K_m$, входящие в покрытие σ, являются соседями некоторого множества K^* взятого из того же покрытия (т. е. каждое из пересечений $K_1 \cap K_1^*, \ldots, K_m \cap K^*$ непусто). Задача принимает следующую форму: найти наибольшее из таких натуральных чисел m, что в каждом достаточно мелком покрытии σ пространства M замкнутыми множествами найдутся множества $K_1, K_2, \ldots, K_m$, обладающие указанным комбинаторным свойством (т. е. найдется множество $K^* \in \sigma$, имеющее в покрытии σ не менее m соседей). Это наибольшее m называется плотностью [6] (или «числом соседства») пространства M и обозначается через $\operatorname{den} M$. Для любого одномерного пространства M число $\operatorname{den} M$ равно 2 или 3; для двумерного M число $\operatorname{den} M$ равно 6 или 7 [6]. Для пространств более высокой размерности точные границы, в которых может изменяться $\operatorname{den} M$, неизвестны.

§ 4. ЗАДАЧИ ОСВЕЩЕНИЯ

Начало систематического изучения задач освещения связано с работой В. Г. Болтянского [8]. Однако еще задолго до появления этой работы был получен ряд результатов, связанных с задачей Хадвигера, систематизация которых и привела к постановке первой задачи освещения в работе [8]. Поэтому, прежде, чем говорить о задачх освещения, дадим краткий обзор результатов, связанных с задачей Хадвигера.

Задача Хадвигера [154] упоминалась в предыдущем разделе этого обзора. Ее постановка состоит в следующем. Рассматривается замкнутое выпуклое тело $K \subset E^n$, требуется найти наименьшее из таких натуральных чисел m, что в E^n найдутся тела $K_1, \ldots, K_m$, каждое из которых гомотетично телу K с некоторым коэффициентом гомотетии, меньшим единицы, и которые образуют покрытие тела K, т. е. $K_1 \cup \ldots \cup K_m \supset K$. Это наименьшее число обозначим через $b(K)$. Если тело K невозможно покрыть никаким конечным числом гомотетичных меньших тел, то полагаем $b(K)=\infty$.

Близкая задача поставлена в работе Леви [179]: найти наименьшее из таких натуральных чисел m, что в E^n найдутся тела $K_1, \ldots, K_m$, каждое из которых получается из K параллельным переносом и которые обладают тем свойством, что их внутренности покрывают тело K. Это наименьшее число обозначим через $b'(K)$. В работе Леви [179] доказна следующая теорема (впоследствии в другой форме она была доказана в работе [33]):

(4.1) Для любой плоской компактной выпуклой фигуры K, не являющейся параллелограммом, справедливы равенства $b(K)=b'(K)=3$; если K — параллелограмм, то $b(K)=b'(K)=4$.

Легко видеть, что если K — параллелепипед размерности n, то $b(K)=2^n$. Сопоставляя этот факт с тем, что при $n=2$ параллелограмм осуществляет максимум величины $b(K)$, Хадвигер [154] высказал следующую гипотезу:

Гипотеза Хадвигера: для любого компактного выпуклого тела $K\subset E^n$ справедливо неравенство $b(K)\leqslant 2^n$, причем равенство $b(K)=2^n$ имеет место лишь в случае, если K — параллелепипед.

Вопрос о справедливости этой гипотезы при $n>2$ (даже для выпуклых многогранников) остается пока открытым.

Очевидно, что для любого компактного выпуклого тела $K\subset E^n$ справедливо неравенство $a(K)\leqslant b(K)$ (поскольку тело, гомотетичное K с положительным коэффициентом гомотетии, меньшим единицы, имеет меньший диаметр, чем K). Поэтому всякая верхняя оценка для числа $b(K)$ дает также некоторую верхнюю оценку для числа Борсука $a(K)$.

Перейдем теперь к постановке задач освещения. Граничную точку x выпуклого тела $K\subset E^n$ назовем освещенной извне (или с внешней стороны) направлением l, если луч, исходящий из точки x и имеющий направление l, проходит через некоторую внутреннюю точку тела K. Далее, множество N, содержащееся в границе тела K, называется освещенным извне семейством направлений $l_1, l_2, \ldots, l_m$, если любая точка множества N освещена извне хотя бы одним из направлений $l_1, l_2, \ldots, l_m$. Задача освещения (точнее, задача внешнего освещения при помощи параллельных пучков) состоит в том, чтобы найти наименьшее из таких натуральных чисел m, что существует семейство направлений $l_1, l_2, \ldots, l_m$, освещающее всю границу тела K. Это наименьшее число обозначим через $c(K)$.

Еще одна задача освещения — задача внешнего освещения при помощи точечных источников — была впоследствии сформулирована П. С. Солтаном [68]. Пусть K — замкнутое выпуклое тело в E^n и $x\in E^n\setminus K$ — некоторая точка, считающаяся «источником». Граничную точку y тела K назовем освещенной извне источником x, если луч $[x, y)$ проходит через некоторую внутреннюю точку тела K, не принадлежащую отрезку $[x, y]$. Далее, множество N, содержащееся в границе тела K, называется освещенным извне семейством источников $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (расположенных вне K), если любая точка множества N освещена хотя бы одним из источников $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Задача состоит теперь в том, чтобы найти наименьшее из таких натуральных чисел m, что существуют источники $x_1, x_2, \ldots, x_m$, освещающие всю границу тела K. Это наименьшее число обозначим через $c'(K)$.

Как и $b(K)$, каждая из величин $c(K)$, $c'(K)$ может принимать конечное значение или ∞.

В работе В. Г. Болтянского [8] был установлен неожиданный на первый взгляд факт о совпадении чисел $b(K)$ и $c(K)$ для любого компактного выпуклого тела $K\subset E^n$. Затем П. С. Солтан [67], [68] распространил этот результат на произвольные замкнутые (не обязательно ограниченные) выпуклые тела, установив взаимоотношения между числами $b(K)$, $b'(K)$, $c(K)$, $c'(K)$. В результате были получены две следующие теоремы [8], [68]:

(4.2) Для любого компактного выпуклого тела $K\subset E^n$ справедливы равенства $b(K)=b'(K)=c(K)=c'(K)$.

(4.3) Для любого замкнутого выпуклого тела $K\subset E^n$, отличного от E^n, справедливы неравенства

$$c(K)\leqslant b'(K)\leqslant b(K), \quad c(K)\leqslant c'(K)\leqslant b(K).$$

Подробное изложение теорем 4.2 и 4.3 имеется в книгах [25], [75]. Там же приведены примеры, показывающие, что для неограниченных выпуклых тел все четыре функции $b(K)$, $b'(K)$, $c(K)$, $c'(K)$ различны.

В силу теоремы (4.2), гипотеза Хадвигера может быть переформулирована следующим образом: для любого компактного выпуклого тела $K\subset E^n$ существует 2^n направлений, освещающих всю границу тела K (а если тело K не является параллелепипедом, то достаточно 2^n-1 направлений).

Следующие три теоремы содержатся в работе В. Г. Болтянского [8]:

(4.4) Для любого компактного выпуклого тела $K\subset E^n$ справедливо неравенство $c(K)\geqslant n+1$.

(4.5) Если $K\subset E^n$ — компактное выпуклое тело с гладкой границей, то $c(K)=n+1$.

(4.6) Если компактное выпуклое тело $K\subset E^n$ имеет не более n нерегулярных граничных точек, то $c(K)=n+1$.

Для доказательства теоремы (4.5) достаточно заметить, что если $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ — минимально зависимые векторы в E^n, то направления, определяемые этими векторами, освещают любую регулярную граничную точку выпуклого тела K. Эти же соображения применяются и при доказательстве теоремы (4.6).

В работе А. Б. Харазишвили [82] показано, что при $n=3$ результат теоремы (4.6) может быть несколько усилен:

(4.7) Если компактное выпуклое тело $K\subset E^3$ имеет не более четырех нерегулярных граничных точек, то $c(K)=4$.

Там же приведены примеры, показывающие, что результат теоремы (4.6) при $n>3$, а также результат теоремы (4.7) не допускает улучшения, т. е. при $n>3$ существует выпуклое тело $K\subset E^n$ с $n+1$ нерегулярными граничными точками, для которого $c(K)>n+1$, а также выпуклое тело $K\subset E^3$ с пятью нерегулярными граничными точками, для которого $c(K)>4$.

Из неравенства $a(K)\leqslant b(K)$ непосредственно вытекает, что при условиях теоремы (4.6) справедлива оценка $a(K)\leqslant n+1$ для числа Борсука; точно так же, при условиях теоремы (4.7), справедлива оценка $a(K)\leqslant 4$. Эти оценки упоминались в предыдущем пункте обзора.

Приведем еще одну оценку, содержащуюся в книге [25].

(4.8) Если тело $K\subset E^n$ является зоноэдром (т. е. представляется в виде векторной суммы конечного числа отрезков), то $c(K)\leqslant 2^n$, причем равенство $c(K)=2^n$ имеет место лишь в случае, если K — параллелепипед.

В работе В. П. Солтана [64] рассматривается вопрос об одновременном освещении нескольких выпуклых фигур на плоскости. Доказано, что при $n\geqslant 3$ для любых n выпуклых фигур на плоскости можно найти такие $2n+1$ направлений, что эти направления освещают границу каждой из взятых n фигур. Если хотя бы одна из этих фигур не является параллелограммом, то достаточно $2n$ направлений.

В книге В. Г. Болтянского и П. С. Солтана [25] исследован вопрос о том, в каких комбинациях величины $b(K)$, $b'(K)$, $c(K)$, $c'(K)$ могут принимать бесконечные значения. Именно, приведены примеры, показывающие реализуемость следующих возможностей:

1) $b(K)=\infty$, $b'(K)=\infty$, $c(K)=\infty$, $c'(K)=\infty$;

2) $c(K)<\infty$, $b'(K)=\infty$, $c'(K)=\infty$, $b(K)=\infty$;

3) $c(K)<\infty$, $b'(K)<\infty$, $c'(K)=\infty$, $b(K)=\infty$;

4) $c(K)<\infty$, $b'(K)<\infty$, $c'(K)<\infty$, $b(K)<\infty$.

Доказано, что другие возможности, удовлетворяющие неравенствам, содержащимся в теореме (4.3), нереализуемы. Это доказательство использует понятия, относящиеся к неограниченным выпуклым множествам и представляющие самостоятельный интерес. Именно, пусть K — неограниченное выпуклое тело в E^n и x — произвольная его внутренняя точка. Объединение Q всех лучей, исходящих из точки x и целиком содержащихся в теле K, представляет собой замкнутый выпуклый конус с вершиной в точке x. Он называется вписанным конусом тела K. Вписанный конус не зависит (с точностью до параллельного переноса) от выбора внутренней точки x тела K. Далее, условимся говорить, что неограниченное выпуклое тело $K\subset E^n$ является почти коническим [68], если, фиксировав его вписанный конус Q, мы можем подобрать такое $\varepsilon>0$, что тело K содержится в ε-окрестности конуса Q. Например, внутренняя область одной ветви гиперболы является в E^2 почти коническим выпуклым телом, тогда как внутренняя область параболы почти коническим выпуклым телом не является. Следующая теорема [25, 68] содержит характеристику почти конических тел.

(4.9) следующие три свойства неограниченного замкнутого выпуклого тела $K\subset E^n$ эквивалентны между собой: 1) $b(K)<\infty$; 2) $c'(K)<\infty$; 3) тело K — почти коническое.

Сформулированная теорема содержит, в частности, утверждение о к о н е ч н о с т и значения $b(K)$ для почти конического тела K. Следующая теорема [68] содержит в ы ч и с л е н и е этого значения $b(K)$ (точнее, сводит его к вычислению значения $b(F)$ для некоторого о г р а н и ч е н н о г о выпуклого множества F).

(4.10) Пусть $K\subset E^n$ — неограниченное замкнутое выпуклое тело в E^n, являющееся почти коническим, x_0 — его внутренняя точка и Q — вписанный конус тела K с вершиной x_0. Обозначим через E^* ортогональное дополнение несущей плоскости конуса Q, а через π — ортогональное проектирование пространства E^n на E^*. Тогда $F=\overline{\pi(K)}$ есть ограниченное выпуклое тело в E^* и справедливо равенство $b(K)=b(F)$. Если при этом множество $\pi(K)$ замкнуто, т. е. $\pi(K)=F$, то $b(K)=b'(K)=c(K)=c'(K)=b(F)$.

Из этой теоремы вытекает [68], [70], что если вписанный конус Q замкнутого почти конического выпуклого тела $K\subset E^n$ имеет размерность n, то $b(K)=b'(K)=c(K)=c'(K)=1$. Если Q имеет размерность $n-1$, то $b(K)=c'(K)=2$. Если же Q имеет размерность $n-2$, то $b(K)\leqslant 4$. Из этого получаем для выпуклых тел в E^3 следующий вывод: величина $\max b(K)$ принимает значение ∞, если K пробегает множество всех замкнутых неограниченных выпуклых тел в E^3, и значение 4, если K пробегает множество всех почти конических тел. Напомним, что значение величины $\max b(K)$, когда K пробегает множество всех о г р а н и ч е н н ы х тел в E^3, неизвестно.

В заключение рассмотрим несколько задач освещения и покрытия, введенных П. С. Солтаном [66], [72] и подробно рассмотренных в книге [25]. Прежде всего сформулируем задачу внутреннего освещения выпуклого тела. Пусть $K\subset E^n$ — замкнутое (возможно, неограниченное) выпуклое тело, отличное от E^n. Будем предполагать, что каждую граничную точку b тела K можно считать «источником» и можно рассматривать те граничные точки тела K, которые «освещаются» этим источником. Именно, граничную точку x тела K будем считать освещенной изнутри источником b, если $x\neq b$ и весь отрезок $[b, x]$, кроме концов, содержится во внутренности тела K. Множество N, расположенное в границе тела K, назовем освещенным изнутри источниками (граничными точками) $b_1, b_2, \ldots, b_m$, если любая точка $x \in N$ освещена изнутри хотя бы одним из источников $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Задача внутреннего освещения состоит в том, чтобы найти наименьшее из таких натуральных чисел m, что в границе тела K можно найти точки $b_1, b_2, \ldots, b_m$ (источники), освещающие всю границу тела K. Это наименьшее число обозначим через $p(K)$.

Сформулируем теперь некоторую задачу покрытия, тесно связанную с задачей внутреннего освещения. Именно, требуется найти наименьшее из таких натуральных чисел m, что в E^n найдутся тела $K_1, K_2, \ldots, K_m$, каждое из которых гомотетично телу K с некоторым коэффициентом гомотетии, бо́льшим единицы, и центром гомотетии, расположенным вне K, и которые образуют покрытие тела K, т. е. $K \subset K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_m$. Это наименьшее число обозначим через $q(K)$.

Еще одна задача покрытия получается видоизменением предыдущей. Именно, требуется найти наименьшее из таких натуральных чисел m, что в E^n найдутся тела $K_1, K_2, \ldots, K_m$, каждое из которых гомотетично телу K с некоторым коэффициентом гомотетии, бо́льшим единицы, и центром гомотетии, расположенным на границе тела K, и которые обладают тем свойством, что их в н у т р е н н о с т и покрывают тело K. Это наименьшее число обозначим через $q'(K)$.

Наконец, сформулируем задачу просвечивания. Рассмотрим в н е ш н и е источники, т. е. точки, лежащие вне K. Граничную точку x тела K будем считать освещенной напросвет [25] источником $y \notin K$, если интервал $]x, y[$ имеет непустое пересечение с внутренностью тела K. Иными словами, луч, идущий от источника y, проникает через границу (как бы прозрачную) тела K и подходит к точке x, проходя через внутренность тела K. Далее, множество N, расположенное в границе тела K, называется освещенным напросвет внешними источниками $y_1, y_2, \ldots, y_m$, если любая точка множества N освещена напросвет хотя бы одним из источников $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Задача состоит теперь в том, чтобы найти наименьшее из таких натуральных чисел m, что существуют вне K источники $y_1, y_2, \ldots, y_m$, освещающие напросвет всю границу тела K. Это наименьшее число обозначим через $p'(K)$.

Следующие две теоремы [25, 69, 72] устанавливают взаимоотношения между введенными числами $p(K)$, $p'(K)$, $q(K)$, $q'(K)$.

(4.11) Каждая из величин $p(K)$, $p'(K)$, $q(K)$, $q'(K)$ определена в том и только в том случае, если тело $K \subset E^n$ (отличное от E^n) не является конусом. Если тело K не является конусом, то справедливы соотношения $p(K) = q'(K) \leqslant p'(K) \leqslant q(K)$.

(4.12) Если тело $K \subset E^n$ компактно, то $p(K) = p'(K) = q(K) = q'(K)$.

Примеры, приведенные в [25], показывают, что для неограниченных тел функция $p(K)$ отлична от $p'(K)$ и от $q(K)$.

В работах [22, 25, 26] введены комбинаторные инварианты, позволяющие вычислить величину $p(K)$. Именно, пусть $K \subset E^n$ — замкнутое выпуклое тело, не являющееся конусом. Через Γ_K обозначим семейство всех его максимальных граней. Далее, если Φ — произвольное семейство множеств, то через $\mathrm{bim}\Phi$ обозначим наименьшее из таких натуральных чисел $k \geqslant 1$, для которых в семействе Φ существуют k множеств $M_1, M_2, \ldots, M_k$, обладающих пустым пересечением. Легко видеть, что для любого семейства Φ справедливо неравенство $\mathrm{bim}\Phi \leqslant \mathrm{him}\Phi$. Следующая теорема [25] содержит вычисление величины $p(K)$.

(4.13) Пусть $K \subset E^n$ — замкнутое выпуклое тело, не являющееся конусом; тогда $p(K) = \mathrm{bim}\Gamma_K + 1$.

Ряд дальнейших теорем о числе $p(K)$, содержащихся в [25], мы не приводим. Отметим лишь, что если d — н а и м е н ь ш е е из чисел, являющихся размерностями максимальных граней тела K, то справедлива оценка $p(K) \leqslant d+2$. В частности, если отличное от конуса тело $K \subset E^n$ имеет хотя бы одну регулярную граничную точку x_0, для которой соответствующая опорная гиперплоскость не имеет с K других общих точек, кроме x_0, то $p(K) = 2$. Далее, для любого выпуклого тела $K \subset E^n$, не являющегося конусом, справедливо неравенство $p(K) \leqslant n+1$, причем равенство $p(K) = n+1$ имеет место в том и только в том случае, если K есть n-мерный симплекс.

Отметим еще [25], что если $H \subset S^{n-1}$ — замкнутое множество, симметричное относительно точки 0, то для любого H-выпуклого тела $K \subset E^n$, не являющегося конусом, справедливо неравенство $p(K) \leqslant \mathrm{md}H + 1$.

Несколько иная трактовка задачи внутреннего освещения имеется в работе Мани [181]. В ней рассматривается задача внутреннего освещения многогранника наименьшим числом источников, расположенных в в е р ш и н а х этого многогранника. Некоторые многогранники (например, симплекс) не допускают внутреннего освещения такими источниками. В [181] находится точная нижняя оценка числа вершин выпуклого многогранника в E^n, допускающего освещение изнутри вершинами. Эта оценка равна $2n$ при $n \leqslant 7$ (примером может служить многомерный аналог октаэдра), а при $n \to \infty$ имеет асимптотику $n + \sqrt{n}$.

В заключение приведем еще одну задачу внутреннего освещения, сформулированную в [144]. Пусть $K \subset E^n$ — выпуклое тело. Множество M, расположенное в границе тела K, называется примитивной системой точек внутреннего освещения для тела K, если граница тела K освещается изнутри множеством M, но не освещается никаким его собственным подмножеством. В [144] высказывается гипотеза, что для произвольного ограниченного выпуклого тела $K \subset E^n$ любая примитивная система точек внутреннего освещения содержит не более 2^n точек.

§ 5. ОБОБЩЕННАЯ ВЫПУКЛОСТЬ И РАЗМЕРНОСТНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

За последние годы появилось немало работ, посвященных абстрактной теории выпуклости. Работа по аксиоматизации выпуклости еще очень далека от какой-то, даже предварительной, завершенности. Важность этой работы несомненна. Достаточно сказать, что выпуклый анализ все более выдвигается на передний план в ряду прикладных математических наук: математическое программирование, теория оптимального управления и экстремальных задач, теория экономических моделей и многие другие разделы прикладной математики широко пользуются результатами и методами выпуклого анализа. На очереди стоит отыскание наиболее «удачных» классов выпуклых множеств в бесконечномерных нормированных и линейных топологических пространствах — удачных в том смысле, что для них сохраняют силу основные понятия и факты конечномерного выпуклого анализа.

Например, в конечномерном случае относительная внутренность $\mathrm{ri}\, M$ выпуклого множества M (т. е. внутренность относительно несущей плоскости) есть н а и м е н ь ш е е выпуклое множество, замыкание которого совпадает с $\bar{M}$. В бесконечномерном случае этого уже нет. Пусть, например, M — множество, заданное в пространстве l_2 неравенствами $0\leqslant x_i\leqslant 1/i$, $i=1, 2, \ldots$ Множество M_1, состоящее из всех точек $x\in M$, у которых все, кроме конечного числа, координаты x_i равны нулю, является выпуклым и удовлетворяет условию $\bar{M_1}=M$. Множество M_2, состоящее из всех точек $x\in M$, у которых для всех i, кроме конечного числа, выполнены соотношения $x_i=1/i$, также является выпуклым и удовлетворяет условию $\bar{M}_2=M$. В то же время $M_1\cap M_2=\varnothing$. Таким образом, н а и м е н ь ш е г о выпуклого множества $M_0\subset M$, для которого $\bar{M}_0=M$, просто не существует. Понятие относительной внутренности $\mathrm{ri}\, M$ не удается обобщить для произвольного выпуклого множества в бесконечном нормированном (даже гильбертовом) пространстве. Аналогичные трудности возникают в связи с рассмотрением опорных свойств выпуклых множеств в бесконечномерных пространствах.

Между тем формулировки многих теорем конечномерного выпуклого анализа существенно используют понятие относительной внутренности и опираются на опорные свойства. Один из возможных путей преодоления этой трудности состоит в а к с и о м а т и з а ц и и относительной внутренности, опорных и других свойств и в отыскании таких семейств (более узких в бесконечномерном случае, чем семейство в с е х выпуклых множеств), которые удовлетворяют построенной аксиоматике.

Однако с у ж е н и е семейства всех выпуклых подмножеств нормированного (или линейного топологического) пространства — не единственный путь построения достаточно далеко продвинутой теории выпуклости. Не менее важными являются попытки о б о б щ е н и я выпуклости и выхода за рамки линейных пространств. Одной из наиболее продвинутых теорий в этом направлении является d-выпуклость. В первоначальном варианте понятия, эквивалентные d-выпуклости, были введены в работах австрийского математика Менгера [182], [183], а затем в статье де Грота [141], книге А. Д. Александрова и В. А. Залгаллера [2] и других работах. Однако в отношении d-выпуклости, в этих работах приведены лишь определения и небольшое число частных результатов. Появление развитой теории d-выпуклости связано с работами П. С. Солтана [71, 74, 75] и его учеников (см. [30, 48, 52, 77, 78]).

Если d-выпуклость связана с рассмотрением подмножеств метрических пространств, то еще одно направление в абстрактной теории выпуклости, связанное с работой Кая и Вомбла [168] и рядом последующих работ, посвящено рассмотрению произвольных семейств множеств, сохраняющих лишь наиболее общие черты семейства всех выпуклых множеств в E^n — в первую очередь, свойство пересечения. Наибольший интерес в этом плане представляет обобщение идей, связанных с теоремой Хелли и ее радоновским доказательством, а также теоремой Каратеодори (о построении выпуклой оболочки). Это приводит к введению различных размерностей инвариантов (один из которых — размерность Хелли — был рассмотрен выше). Изложению указанного круга вопросов и посвящен этот параграф обзора.

Прежде всего, приведем определение d-выпуклости. Пусть X — некоторое метрическое пространство с метрикой $d(x, y)$ и a, b — две его точки. Множество $\{x\in X\colon d(a, b)=d(a, x)+ +d(x, b)\}$ называется d-отрезком в X с концами a, b; будем его обозначать через $\langle a, b\rangle$. Непустое множество $M\subset X$ называется (по терминологии П. С. Солтана [71, 74]) d-выпуклым, если для любых двух точек a, $b\in M$ множество M содержит целиком весь d-отрезок $\langle a, b\rangle$; пустое множество также считается d-выпуклым. Легко видеть, что d-выпуклые множества обладают свойством пересечения: пересечение любого семейства d-выпуклых множеств (в произвольном метрическом пространстве X) является d-выпуклым множеством. Свойство пересечения позволяет определить d-выпуклую оболочку произвольного множества $A\subset X$: она обозначается через $\mathrm{conv}_d A$ и представляет собой пересечение всех d-выпуклых множеств, содержащих A. Множество $\mathrm{conv}_d A$ может быть получено из A счетным повторением процесса присоединения d-отрезков. Именно, пусть $A_0\subset X$ — произвольное множество и пусть последовательно построены множества $A_1, A_2, \ldots$, где A_i есть объединение всех d-отрезков $\langle a, b\rangle$ с концами a, $b\in A_{i-1}$ $(i=1, 2, \ldots)$; тогда $\mathrm{conv}_d A_0=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$. Здесь, в отличие от построения выпуклой оболочки в евклидовом пространстве, вообще говоря, необходим именно б е с к о н е ч н ы й (счетный) процесс присоединения d-отрезков. В качестве примера рассмотрим арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$ с фиксированной системой координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в котором введем норму $\|x\| = \max_i |x_i|$. Единичным шаром получающегося таким образом метрического (нормированного) пространства является куб Σ, определяемый системой неравенств $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1, \ldots, |x_n| \leqslant 1$. При $n \geqslant 3$ в этом пространстве d-выпуклыми множествами являются: пустое множество, произвольная точка, все пространство $\mathbf{R}^n$, а также отрезки, интервалы, полуинтервалы, лучи и прямые, параллельные главным диагоналям куба Σ. Поэтому, если, например, A — ограниченное выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$, то $\mathrm{conv}_d A$ есть все пространство $\mathbf{R}^n$ и эта выпуклая оболочка может быть получена лишь счетным (а не конечным) процессом присоединения d-отрезков.

В работах П. С. Солтана и его учеников [29, 30, 48, 52, 71, 74] (см. также подробное изложение в книгах [25, 75]) установлен ряд свойств d-выпуклых множеств в конечномерных линейных нормированных пространствах, в частности, опорные свойства, свойства отделимости и др. Поскольку эти свойства больше тяготеют к выпуклому анализу, чем к комбинаторной геометрии, мы лишь кратко отметим некоторые из них.

(5.1) Пусть M — произвольное d-выпуклое множество в конечномерном линейном нормированном пространстве. Тогда каждая грань множества M является d-выпуклым множеством. Далее, опорный конус множества M в любой точке $a \in M$ является d-выпуклым множеством. Замыкание $\bar{M}$, относительная внутренность $\mathrm{ri}\, M$ и несущая плоскость множества M являются d-выпуклыми.

(5.2) В конечномерном линейном нормированном пространстве L любое замкнутое d-выпуклое тело, отличное от L, можно представить в виде пересечения некоторого семейства d-выпуклых полупространств. Полупространство является d-выпуклым тогда и только тогда, когда d-выпукла ограничивающая его гиперплоскость.

Вопросы отделимости d-выпуклых множеств рассматривались в работах [31, 60]. Сформулируем результаты В. П. Солтана [60] в виде следующей теоремы.

(5.3) Пусть L — линейное нормированное пространство. Если оно двумерно, то любые два d-выпуклые множества M_1, M_2 относительные внутренности которых не пересекаются, строго отделимы d-выпуклой гиперплоскостью. Если размерность пространства L больше двух, это утверждение справедливо тогда и только тогда, когда в L сумма любых двух d-выпуклых подпространств является d-выпуклым подпространством.

Уже эти свойства d-выпуклых множеств (дальнейшие детали можно найти в книгах [25, 75]) показывают, что класс всех d-выпуклых множеств в конечномерном линейном нормированном пространстве обладает рядом свойств, аналогичных свойствам класса всех выпуклых множеств в евклидовом пространстве. Аналогичными свойствами обладает класс всех H-выпуклых множеств [25, 12] (где $H \subset S^{n-1}$ — некоторое замкнутое множество, не являющееся односторонним). Таким образом, d-выпуклость и H-выпуклость представляют интерес как модели при построении абстрактной аксиоматической теории выпуклости.

Перейдем теперь к рассмотрению комбинаторных свойств в рамках абстрактной выпуклости. Мы ограничимся здесь рассмотрением размерностных инвариантов. Один из них (размерность Хелли) был рассмотрен выше. Дадим определение двух других: размерности Радона и размерности Каратеодори.

Пусть X — некоторое множество и V — семейство его подмножеств. Говорят [101, 178], что семейство V определяет структуру выпуклости в X, если $\varnothing \in V$, $X \in V$, и пересечение любого семейства подмножеств, принадлежащих V, также принадлежит V. Ясно, что семейство всех выпуклых подмножеств линейного пространства, семейство всех d-выпуклых подмножеств метрического пространства, семейство всех H-выпуклых подмножеств в E^n являются примерами семейств, определяющих структуру выпуклости.

Если семейство V задает структуру выпуклости в X, то для любого множества $A \subset X$ можно определить его выпуклую оболочку $\mathrm{conv}\, A$ (относительно семейства V): она представляет собой, по определению, пересечение всех множеств $M \in V$, содержащих A. Понятие выпуклой оболочки позволяет ввести еще два размерностных инварианта (помимо размерности Хелли). Именно, размерностью Каратеодори $\mathrm{cim}\, V$ семейства V называется наименьшее из таких целых $m \geqslant 0$, что для любого множества $A \subset X$ и любой точки $x \in \mathrm{conv}\, A$ существуют точки $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1} \in A$, для которых $x \in \mathrm{conv}\{a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}\}$. Если таких $m \geqslant 0$ не существует, то $\mathrm{cim}\, V = \infty$. Далее, размерностью Радона $\mathrm{rim}\, V$ семейства V называется наименьшее из таких целых $m \geqslant 0$, что для любого подмножества $A \subset X$, содержащего не менее $m+2$ точек, существует такое разбиение $A = A_1 \cup A_2$ этого множества на два непустых непересекающихся подмножества A_1, A_2, что $\mathrm{conv}\, A_1 \cap \mathrm{conv}\, A_2 \neq \varnothing$.

Обозначения him, cim, rim выбраны по следующему принципу: первая буква связана с автором идеи, а вторая и третья буквы совпадают с соответствующими буквами символа dim, обозначающего размерность. Эти обозначения не общеприняты: в ряде статей используются обозначения $h = \mathrm{him}\, V + 1$, $c = \mathrm{cim}\, V + 1$, $r = \mathrm{rim}\, V + 2$. Величины $\mathrm{him}\, V$, $\mathrm{cim}\, V$, $\mathrm{rim}\, V$ названы размерностными инвариантами, поскольку для семейства V всех выпуклых множеств n-мерного (евклидова) пространства справедливы соотношения $\mathrm{him}\, V = \mathrm{cim}\, V = \mathrm{rim}\, V = n$ (это вытекает из теоремы Хелли, теоремы Каратеодори о выпуклой оболочке и леммы Радона).

Первые результаты о связи этих размерностных инвариантов получены в работе Леви [178]. Он показал, что для любого семейства V, определяющего в X структуру выпуклости, справедливо соотношение $\operatorname{him} V \leqslant \operatorname{rim} V$. В работе Кая и Вомбла [168] установлено еще одно соотношение между размерностными инвариантами:

$$\operatorname{rim} V \leqslant (\operatorname{cim} V+1)(\operatorname{him} V+1)-1;$$

показано, что кроме этого соотношения и неравенства Леви $\operatorname{him} V \leqslant \operatorname{rim} V$ других соотношений между размерностными инвариантами (для произвольной структуры выпуклости) не существует. Там же приводится довольно сложно формулируемое достаточное условие выполнения неравенства $\operatorname{cim} V \leqslant \operatorname{rim} V$. Дальнейшие результаты в этом направлении получены В. П. Солтаном. В работе [65] он вводит и изучает «частные» числа Хелли и Каратеодори (получающиеся, если в теореме типа (2.4) ввести ограничение $l \leqslant n$, а в определении размерности Каратеодори ограничиваться множествами, содержащими не более n элементов); при $n \to \infty$ эти «частные» числа переходят в обычные. В работах [62, 63] В. П. Солтан изучает размерностные инварианты для случая, когда V представляет собой семейство всех d-выпуклых множеств метрического пространства M. В [63] показано, что если M состоит из n точек, то $\operatorname{cim} V \leqslant \frac{n-1}{2}$. Далее, если M представляет собой n-мерное линейное нормированное пространство, в котором единичный шар является d-выпуклым, то $\operatorname{him} V = n$ [62]. Из нескольких результатов о размерности Хелли нормированных пространств, содержащихся в книге [25], отметим следующий. Пусть L — линейное нормированное пространство и V^* — семейство всех его замкнутых d-выпуклых тел; рассмотрим все d-выпуклые гиперплоскости в L и, введя в L какую-либо евклидову метрику, обозначим через H множество единичных векторов, ортогональных этим гиперплоскостям; тогда $\operatorname{him} V^* = \operatorname{md} H$.

Из более частных результатов, связанных с размерностными инвариантами, отметим соотношения, содержащиеся в работах Франклина [136] и Кальдера [105]. Они изучают структуру выпуклости в произвольном частично упорядоченном множестве X. В этом случае отрезок $[x, y]$ с концами $x, y \in X$ определяется как множество всех точек z, для которых выполнено хотя бы одно из двойных неравенств $x \leqslant z \leqslant y$, $y \leqslant z \leqslant x$, а выпуклость определяется, как обычно: множество $A \subset X$ выпукло, если для любых двух точек $x, y \in A$ отрезок $[x, y]$ целиком содержится в A. (Заметим, что если x и y несравнимы, то $[x, y] = \varnothing$). В этом случае для семейства V всех выпуклых множеств справедливы соотношения $\operatorname{cim} V = 1$ [136], $\operatorname{rim} V = \operatorname{him} V$ [105].

В ряде работ рассматриваются размерностные инварианты для декартова произведения выпуклостей. Пусть в множестве X_i задана структура выпуклости V_i $(i=1, \ldots, n)$. В прямом произведении $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ множеств X_i рассмотрим семейство $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, состоящее из всех множеств вида $A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_i \in V_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Легко видеть, что V есть структура выпуклости в X, причем выпуклая оболочка множества $A \subset X$ определяется формулой

$$\operatorname{conv} A = \operatorname{conv}_1 \pi_1(A) \times \ldots \times \operatorname{conv}_n \pi_n(A),$$

где π_i — проекция множества X на сомножитель X_i, а conv_i означает выпуклую оболочку в X_i $(i=1, \ldots, n)$.

В работах Экгофа [117] установлено при $n=2$ неравенство $\operatorname{rim} V \leqslant \operatorname{rim} V_1 + \operatorname{rim} V_2 + 1$ и показано, что если V_1. V_2 являются обычными выпуклостями в евклидовых пространствах X_1, X_2, то $\operatorname{rim} V = \operatorname{rim} V_1 + \operatorname{rim} V_2$. Более общее неравенство

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{rim} V_i \leqslant \operatorname{rim} V \leqslant \operatorname{rim} V_1 + \ldots + \operatorname{rim} V_n$$

(при любом натуральном $n \geqslant 2$) установлено в работе Сиерксма и Боланда [194].

Аналогичные неравенства для размерности Каратеодори имеют вид

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{cim} V_i \leqslant \operatorname{cim} V \leqslant \operatorname{cim} V_1 + \ldots + \operatorname{cim} V_n + (n-1).$$

Они установлены при $n=2$ в работе Сиерксма [193], а для произвольного натурального n — в работе В. П. Солтана [61].

Наконец, для размерности Хелли справедлива формула $\operatorname{him} V = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{him} V_i$, установленная для $n=2$ в работе Сиерксма [193], а в общем случае — в работе В. П. Солтана [61]. Для d-выпуклости в линейных нормированных пространствах эта формула (и ряд близких к ней) доказана в книге [25].

Отметим еще, что для декартова произведения обычных выпуклостей справедливо, как доказал Рей [190], соотношение

$$\operatorname{cim} V = \operatorname{cim} V_1 + \ldots + \operatorname{cim} V_n + n.$$

Если структуры выпуклости являются, несомненно, весьма далеким обобщением понятия выпуклости, то пространства выпуклости, введенные Брайентом и Вебстером [101, 102, 103, 104], представляют собой обобщение, весьма близкое к выпуклости в линейных пространствах. Под пространством выпуклости они понимают множество X, для точек которого введена некоторая операция умножения, сопоставляющая любым точкам $a, b \in X$ некоторое множество $a \cdot b \subset X$ и удовлетворяющая следующим шести аксиомам (множество $a \cdot b$ можно представлять себе, как «интервал», если точки a и b различны):

1) для любых точек $a, b \in X$ множество $a \cdot b$ непусто;
2) $a \cdot b = b \cdot a$;
3) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
4) $(a/b) \cap (c/d) \neq \varnothing \Rightarrow (a \cdot d) \cap (b \cdot c) \neq \varnothing$ (где $p/q = \{z \in X: p \in q \cdot z\}$);

5) $a \cdot a = a = a/a$;

6) $(a \cdot b) \cap (a \cdot c) \neq \varnothing \Rightarrow (b = c) \vee (b \in a \cdot c) \vee (c \in a \cdot b)$.

В [101] теория пространств выпуклости лишь намечена, а в последующих статьях [102, 103, 104] дается подробное изложение. В частности, в [103] рассматриваются свойства отделимости и опорные свойства обобщенных выпуклых множеств, а в [104] — размерностные инварианты. Авторы доказывают, что в любом пространстве выпуклости справедливы соотношения $\operatorname{rim} V = \operatorname{him} V = \operatorname{cim} V$, где V — семейство всех обобщенных выпуклых множеств (т. е. таких множеств $M \subset X$, что для любых $a, b \in M$ выполнено включение $a \cdot b \subset M$). Теория пространств выпуклости (включая размерностные инварианты) подробно изложена в недавно вышедшей книге [188].

В работе Дессара [111], также посвященной пространствам выпуклости, изучаются выпуклые многогранники (т. е. выпуклые оболочки конечных множеств); устанавливается, что они представляются в виде пересечения конечного числа замкнутых полупространств.

Наконец, заметим, что в работе Хаммера [159] строится аксиоматическая система выпуклых множеств, обладающая свойством отделимости, в которой теоремы Радона, Хелли и Каратеодори независимы. В этой же работе показано, что в любом хаусдорфовом топологическом пространстве можно определить структуру выпуклости, в которой указанные три теоремы эквивалентны.

§ 6. УПАКОВКИ И ПОКРЫТИЯ

Упаковки (укладки) и покрытия — не только в евклидовом пространстве, но также на сфере, в пространстве Лобачевского и в более общих римановых многообразиях — составляют, несомненно, объект изучения комбинаторной геометрии. Число публикаций, относящихся к этому разделу комбинаторной геометрии, огромно. О результатах в этой области, полученных до 1967 года, читатель может получить представление по прекрасно написанным книгам Фейеша—Тота [79] и Роджерса [55], а также по интересному и очень подробному обзору Е. П. Барановского [4]. Далее, результаты, относящиеся к классической теории решетчатых упаковок конгруэнтных шаров в E^n, подробно освещены в недавнем обзоре С. С. Рышкова и Е. П. Барановского [58]. Что же касается работ, не вошедших в эти книги и обзоры, то в них имеется масса мелких, разрозненных результатов и лишь сравнительно небольшое число существенных продвижений. Вот почему в этом последнем параграфе мы, в основном, остановимся на небольшом числе работ, появившихся за последнее десятилетие.

Система подмножеств $\{S_\alpha\}$ некоторого пространства X образует упаковку (укладку) в X, если множества S_α попарно не

пересекаются. Иногда рассматривают также k-кратные упаковки: каждая точка $x \in X$ принадлежит не более, чем k множествам семейства $\{S_\alpha\}$. Как обычно, система подмножеств $\{S_\alpha\}$ пространства X составляет покрытие этого пространства, если $\bigcup_\alpha S_\alpha = X$. В комбинаторной геометрии рассматривают конечные или счетные упаковки и покрытия, причем X обычно является пространством постоянной кривизны (чаще всего евклидовым), а множества S_α имеют простую геометрическую структуру (выпуклые множества, многогранники, шары).

Пусть X является n-мерным римановым многообразием, v означает n-мерный объем в нем, и пусть все множества S_α ограничены и с шаром C_r радиуса r пересекается (при любом r) лишь конечное число множеств S_α. Числа

$$\rho_+ = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{1}{v(C_r)} \sum_{S_\alpha \cap C_r \neq \varnothing} v(S_\alpha), \quad \rho_- = \varliminf_{r \to \infty} \frac{1}{v(C_r)} \sum_{S_\alpha \subset C_r} v(S_\alpha)$$

представляют собой верхнюю и нижнюю плотности семейства $\{S_\alpha\}$.

Естественными задачами являются нахождение наиболее плотной упаковки (в данном классе упаковок) и наименее плотного покрытия. Если, в частности, X — евклидово пространство, S — ограниченное его подмножество и рассматриваются всевозможные упаковки $\{S_\alpha\}$, в которых каждое множество S_α получается из S параллельным переносом, то $\sup \rho_+$ (по всем таким упаковкам) обозначается через $\delta(S)$. Аналогично, если рассматриваются всевозможные покрытия $\{S_\alpha\}$, в которых каждое множество S_α получается из S параллельным переносом, то $\inf \rho_-$ обозначается через $\theta(S)$. Нахождение величин $\delta(S)$ и $\theta(S)$ (или хотя бы оценок для них) и представляет собой уточненную постановку задачи о нахождении наиболее плотной упаковки и наименее плотного покрытия — в классе упаковок и покрытий, которые образованы множествами, получающимися из S параллельными переносами.

В цитированной книге Роджерса [55] показано, что в E^n при $n \geqslant 2$ для любого выпуклого тела S справедливо неравенство

$$\theta(S) \leqslant n \ln n + n \ln\ln n + 5n$$

«существование достаточно экономных покрытий»), а для любого открытого выпуклого множества S справедлива оценка: $\delta(S) \geqslant \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$ («существование достаточно плотных упаковок»). Если, в частности, S — симплекс, то имеют место неравенства

$$\frac{2(n!)^2}{(2n)!} \leqslant \delta(S) \leqslant \frac{2^n (n!)^2}{(2n!)},$$

второе из которых показывает, что упаковки симплексов не могут быть «очень плотными». Приводятся в книге [55] верхние оценки и для плотностей упаковок конгруэнтных шаров. За последнее время эти верхние оценки существенно улучшены (для больших n) в работах В. М. Сидельникова [59] и В. И. Левенштейна [49], [50]. Так, в [49] для n-мерного шара K_n получена при $n\to\infty$ оценка: $\delta(K_n)\leqslant 2^{-n(0{,}5237+o(1))}$.

В пространствах небольших размерностей эти общие «многомерные» результаты существенно уточнены. Для упаковок круга K (на плоскости) наибольшая плотность равна $\delta(K)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (это классический результат Лагранжа и Гаусса). Ряд дальнейших результатов связан с классическими работами по геометрии чисел (Г. Минковский, Г. Ф. Вороной, А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев и др.), с приложениями в области кристаллографии, прикладного анализа, вычислительной математики. Здесь особенно важны р е ш е т ч а т ы е упаковки и покрытия, т. е. такие системы $\{S_\alpha\}$, что все множества S_α получаются из одного из них параллельными переносами на векторы вида $k_1e_1+\ldots+k_ne_n$, где $e_1,\ldots,e_n$ — некоторый базис рассматриваемого пространства E^n, а k_i — произвольные целые числа. Плотность плотнейшей решетчатой упаковки шаров в E^3 равна $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$, а для E^4 эта плотность равна $\frac{\pi^2}{16}$. Эти результаты, содержащиеся в классической работе А. Коркина, и Г. Золотарева [172], были заново изящно доказаны в работе Б. Н. Делоне [36]. Для E^5 плотность плотностей решетчатой упаковки шаров также была найдена А. Коркиным и Г. Золотаревым, а для E^6, E^7, E^8 — Блихфельдтом; упоминание этих результатов имеется в книге [55], а подробное их изложение можно найти в упоминавшейся выше статье С. С. Рышкова и Е. П. Барановского [58].

Укажем теперь результаты о наименьшей плотности θ_n решетчатых покрытий пространства E^n шарами. Кершнер [169] нашел наименьшую плотность покрытия плоскости кругами. Она совпадает с наименьшей плотностью р е ш е т ч а т ы х покрытий и равна $\theta_2=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ (каждый круг касается шести других). Для пространств E^3, E^4, E^5 эти наименьшие плотности также найдены (соответственно в работах Бамба [89], Б. Н. Делоне и С. С. Рышкова [38], С. С. Рышкова и Е. П. Барановского [57]). Как показано в [57], все эти результаты могут быть объединены одной общей формулировкой: минимум θ_n плотности решетчатого покрытия пространства E^n конгруэнтными шарами при $n\leqslant 5$ равен $\theta_n=\Omega_n\left[\frac{n(n+2)}{12(n+1)}\right]^{n/2}\sqrt{n+1}$, где Ω_n — объем единичного n-мерного шара; этот минимум достигается на решетке Γ_n, имеющей в качестве метрической формы одного из основных реперов форму первого типа Вороного:

$$\sum_{i=1}^{n} nx_i^2-2\sum_{i<j}x_ix_j.$$

Эти результаты составляют большой успех советской геометрической школы Б. Н. Делоне, продолжающей традиции русской классической школы геометрии чисел.

Для плоскости известен ряд общих результатов об укладках и покрытиях, составленных из произвольных выпуклых фигур. В частности, для симметричного выпуклого множества K на плоскости наибольшая плотность $\delta_L(K)$ его решетчатой упаковки равна

$$\delta_L(K)=\frac{4s(K)}{3h(K)}=\frac{s(K)}{H(K)},$$

где $s(K)$ — площадь фигуры K, $h(K)$ — площадь наибольшего симметричного шестиугольника, вписанного в K, а $H(K)$ — площадь наименьшего описанного шестиугольника (Рейнхардт [191], Малер [180]). Эннола [121] доказал, что для любого центрально симметричного выпуклого множества на плоскости справедлива оценка: $\delta_L(K)\geqslant\frac{1}{4}(3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})=0{,}881300\ldots$ Далее, Фейеш — Тот [125] доказал, что оценка $\delta(K)\leqslant\frac{s(K)}{H(K)}$ (где $H(K)$ — наименьшая площадь описанного вокруг K шестиугольника) справедлива для л ю б о г о двумерного выпуклого множества K (не предполагаемого симметричным), а Роджерс [192] установил, что для любого плоского выпуклого множества K имеет место равенство $\delta(K)=\delta_L(K)$.

Обратимся теперь к покрытиям плоскости. Фейеш — Тот [124] доказал, что для решетчатых покрытий произвольными центрально симметричными выпуклыми множествами справедлива оценка $\theta_L(K)\leqslant\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, так что наименее экономными из решетчатых покрытий центрально симметричными плоскими выпуклыми множествами являются покрытия кругами. Для несимметричных плоских выпуклых множеств Фари [122] получил оценку $\theta_L\leqslant 3/2$, которая достигается в том и только в том случае, если K — треугольник. Наконец, Фейеш — Тот [125] доказал для произвольного двумерного выпуклого множества K оценку: $\theta_L(K)\geqslant\geqslant\theta(K)\geqslant\frac{s(K)}{h(K)}$, где $h(K)$ — наибольшая площадь вписанного в K шестиугольника, причем для центрально симметричного множества эти неравенства переходят в равенство. Ряд более специальных результатов (как для $n=2$, так и для больших размерностей) имеется в монографиях [55], [79] и обзоре [4].

Дальнейшие результаты об упаковках и покрытиях имеют более частный характер. В работе Фейеша—Тота [129] рассматриваются жесткие (solid) упаковки и покрытия, образованные кругами (возможно, разных радиусов) на плоскости, т. е. такие, что не существует никакого конечного подмножества кругов, после перераспределения которых снова получилась бы упаковка (покрытие), не конгруэнтная исходной. Доказано, что примером жесткой упаковки служит система кругов, вписанных в грани архимедова разбиения плоскости (т. е. такого разбиения плоскости на правильные многоугольники, — возможно, не все конгруэнтные — в котором все вершины эквивалентны), а примером жесткого покрытия служит система кругов, описанных вокруг граней архимедова разбиения плоскости. Результат остается справедливым также для римановой плоскости, сферы и плоскости Лобачевского.

В статье Блайнда [91] рассматриваются такие упаковки кругов на плоскости, для которых $p=\inf \frac{r}{r'}>0$, где r, r' — радиусы произвольных кругов этой упаковки. Доказано, что при $1 \geqslant p \geqslant$ $\geqslant 0{,}74299\ldots$ плотность любой такой упаковки не превосходит $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$; (в этом направлении имеется и несколько других работ; результат Блайнда [91] — наиболее сильный). Дальнейшие оценки в этом направлении имеются в двух последующих работах Блайнда [92, 93].

Фейеш — Тот [126] ввел понятие насыщенной системы замкнутых кругов на плоскости, т. е. такой системы $M=\{S_\alpha\}$, что $r=\inf r_\alpha>0$, где r_α — радиус круга S_α, и при этом любой круг радиуса r на плоскости имеет, по крайней мере, одну общую точку, хотя бы с одним из кругов S_α. Им было высказано предположение, что минимальная плотность $\rho=\inf\limits_{M} \rho_M$ насыщенной системы кругов равна $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. В [126] и ряде последующих работ различных авторов были получены частные результаты в этом направлении. Окончательный результат (полное подтверждение предположения Фейеша — Тота) был получен в работе Думира и Касса [116]. Пример (видимо, единственный) насыщенной системы замкнутых кругов, имеющей минимальную плотность $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$, может быть получен следующим образом: пусть $\{K_\alpha\}$ — плотнейшая упаковка кругов радиуса $r\sqrt{3}$ на плоскости (каждый круг касается шести других); тогда, взяв в каждом круге K_α концентрический с ним круг S_α радиуса r, мы и получаем насыщенную систему $\{S_\alpha\}$ минимальной плотности.

С работой Фейеша—Тота [130] связано рассмотрение упаковок с постоянным числом соседей на плоскости, т. е. таких упаковок $\{S_\alpha\}$, составленных из ограниченных выпуклых открытых множеств, что каждое из множеств $\bar{S}_\alpha$ имеет общие точки ровно с k другими множествами $\bar{S}_\alpha$. В [130] рассматриваются разбиения с постоянным числом соседей, т. е. такие упаковки $\{S_\alpha\}$, что множества $\bar{S}_\alpha$ образуют покрытие плоскости. Приведены примеры разбиений плоскости на попарно конгруэнтные многоугольники с числом соседей 6, 7, 8, 9, 10, 12, **14**, 16, 21 (заметим, что все эти разбиения имеются в работе

Б. Н. Делоне [37]). Ставится вопрос о существовании разбиений с иным постоянным числом соседства. Заметим, что из работы [6] вытекает неравенство $k\geqslant 6$ для произвольного разбиения плоскости с постоянным числом соседей k. В ряде работ имеются различные частные результаты, связанные с этой постановкой задачи. Вегнер [201] рассматривает не разбиения, а упаковки, устойчивые относительно движений (составленные из ограниченных открытых выпуклых множеств), и обладающие постоянным числом соседей. Устойчивость относительно движений означает, что ни одно из множеств упаковки не может быть сдвинуто с места без возникновения перекрытий с некоторыми из его соседей. Доказывается, что для любого натурального $k\geqslant 3$ существует на плоскости устойчивая относительно движений упаковка конгруэнтных множеств с постоянным числом k соседей.

В упоминавшейся выше статье Б. Н. Делоне [37] рассматриваются разбиения плоскости на планигоны, т. е. такие разбиения на конгруэнтные многоугольники, что всякое движение, переводящее один многоугольник в другой, переводит все разбиение в себя. Два разбиения на планигены относятся к одному типу, если они топологически эквивалентны и группы самосовмещений этих разбиений изоморфны. В [37] установлено, что существуют 46 типов разбиений на планигены. Разбиения на планигены, очевидно, дают (если рассматривать внутренности полигенов) упаковки с постоянным числом соседей, причем все значения числа соседства k, указанные Фейеш-Тотом [130], здесь реализуются. В статье Ламперта и Чока [47] для каждого разбиения на планигоны рассматривается упаковка конгруэнтных кругов, вмещенных в планигоны, и покрытие плоскости конгруэнтными кругами, вмещающими планигоны. На множестве разбиений каждого из 46 типов найдены разбиения, у которых плотность упаковки максимальна, и разбиения, у которых плотность покрытия минимальна.

Отметим еще работу Хватала [106], в которой подтверждается гипотеза, выдвинутая Фейеш-Тотом: плотность упаковки конгруэнтных и одинаково ориентированных квадратов на плоскости при условии, что каждый имеет, по крайней мере, 6 соседей, не меньше 11/15.

В работе [5] описывается алгоритм для решения (на ЭВМ) задачи о нахождении наиболее плотной решетчатой упаковки плоской фигуры S достаточно произвольной формы.

Таковы наиболее существенные результаты об упаковках и покрытиях в случае плоскости. Отметим теперь некоторые частные результаты, относящиеся к пространствам размерности $n\geqslant 3$. В работе Дугласа [112] рассматриваются плотнейшие решетчатые упаковки тетраэдров и кубоктаэдров в E^3. Доказано, что в первом случае наибольшая плотность равна 18/49, а во втором — 45/49.

В ряде работ рассматриваются нерешетчатые упаковки конгруэнтных шаров в E^n. При $n=3$, 5, 6, 7 найдены (последние две — в работе Лееха [174]) нерешетчатые упаковки конгруэнтных шаров, имеющие плотность, равную плотности плотнейшей решетчатой упаковки шаров. В [175] описан ряд новых нерешетчатых упаковок конгруэнтных шаров в E^n при $9<n<15$. Интересно, что найденные упаковки в E^{10}, E^{11}, E^{13} имеют бо́льшие плотности, чем известные решетчатые упаковки в этих пространствах. Превышает ли плотность этих нерешетчатых упаковок плотность наиплотнейших решетчатых, неизвестно (поскольку последние еще не найдены).

Отметим важный результат Хадвигера [156]. Он рассматривает решетчатое покрытие пространства E^n центрально симметричными выпуклыми замкнутыми телами конечного объема v, причем детерминант решетки $D=1$. Доказано, что количество соседей у каждого элемента покрытия не превосходит $(3^n-1)v$. Это дает обобщение известного неравенства Главки для $n=2$ (см. книгу [55]).

Ряд работ посвящен рассмотрению кратных упаковок шаров в E^n. Обозначим через δ_k^n верхнюю грань плотностей всевозможных k-кратных упаковок конгруэнтных шаров в E^n, а через Δ_k^n — нижнюю грань плотностей k-кратных покрытий пространства E^n конгруэнтными шарами. Верхние оценки для δ_k^n и нижние оценки для Δ_k^n (для всех или для некоторых n, k) приводятся в работах Фейеш-Тота [123, 131]; Фью [132, 133, 134, 135]; Бландона [94]. В работе Янга [202] доказано, что для всех нечетных $k\geqslant 3$ справедливы неравенства $\delta_k{}^n\geqslant k\delta_1{}^n$ при $n=3$, 4, 5; $\Delta_k{}^3<k\Delta_1{}^3$. Отметим еще, что в работах Думира и Ганс—Гилла [114, 115] рассматриваются двойные решетчатые покрытия и упаковки плоскости симметричными выпуклыми множествами. Доказано, что для двукратных покрытий (упаковок) максимальная (минимальная) плотность вдвое больше, чем для однократных. Наконец, отметим, что в работе Бландона [95] построен пример трехкратного нерешетчатого покрытия евклидовой плоскости конгруэнтными кругами, для которого $\Delta_3{}^2/3\Delta_1{}^2\leqslant 9(5-2\sqrt{6})=0{,}909184\ldots$

В нескольких работах предметом изучения является слой, т. е. семейство непересекающихся открытых областей, расположенных в полосе между двумя параллельными прямыми. Линия, соединяющая края наиболее узкой полосы, содержащей слой, и не имеющая общих точек ни с одной из областей слоя, называется пересекающей линией, а супремум отношения ширины этой полосы к длине пересекающей линии — проницаемостью слоя (эта терминология взята из теории диффузии). В работе Фейеш-Тота [127] доказано, что проницаемость слоя конгруэнтных кругов больше $\frac{\sqrt{27}}{2\pi}=0{,}826993\ldots$ В случае слоя

конгруэнтных фигур постоянной ширины проницаемость больше 0,76855 (Хортобади [162]). Фейеш-Тот [128] получил ряд результатов о проницаемости слоя параллелограммов.

В заключение отметим интересные результаты В. Л. Дольникова о разбиении семейств выпуклых множеств на подсемейства. Будем говорить, что семейство множеств имеет индекс не больше b, если его можно разбить на b подсемейств, состоящих из попарно непересекающихся множеств. В [39] дана верхняя оценка индекса для семейства выпуклых тел в E^n с равномерно ограниченным сверху отношением диаметра к ширине при условии, что кратность семейства не превосходит m. Там же доказано, что семейство кратности m, состоящее из попарно гомотетичных выпуклых тел в E^n, имеет индекс, не превосходящий $3^n n!(m-1)$. В работе [40] (в [41] дано подробное изложение) доказана следующая теорема, из которой автор выводит ряд геометрических и аналитических результатов. Пусть M — полное риманово многообразие с ограниченной снизу кривизной в двумерных направлениях и пусть множество $E\subset M$ покрыто шарами с равномерно ограниченными радиусами. Тогда при некоторых натуральных a, b существует подпокрытие, кратность которого не превосходит a, а индекс не превосходит b.

В этом обзоре мы совершенно не коснулись работ, относящихся к геометрическим неравенствам, поскольку эта область исследования ближе к выпуклому анализу, чем к комбинаторной геометрии. Читателя, интересующегося этими вопросами, мы отсылаем к обстоятельному обзору Д. М. Бураго и В. А. Залгаллера [28].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Одна теорема о выпуклых многогранниках. Тр. физ.-матем. ин-та им. Стеклова, 1933, *4*, 87
2. —, *Залгаллер В. А.*, Двумерные многообразия ограниченной кривизны. (Основы внутренней геометрии поверхностей). Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1962, *63*, 262 стр. (РЖМат, 1964, 6А454)
3. *Александров П. С.*, (ред.), Проблемы Гильберта (сборник), М., Наука, 1969, 240 стр. (РЖМат, 1970, 4А10К)
4. *Барановский Е. П.*, Упаковки, покрытия, разбиения и некоторые другие расположения в пространствах постоянной кривизны. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1967 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1969, 189—225 (РЖМат, 1970, 2А586)
5. *Бокий В. И., Гужва Л. А., Стоян Ю. Г.*, Алгоритм наилучшего решетчатого заполнения плоскости и прямоугольной области конгруэнтными фигурами. Вычисл. техн. в машиностр. Науч.-техн. сб., 1969, дек., 75—81 (РЖМат, 1972, 3А600)
6. *Болтянский В. Г.*, Об одном свойстве двумерных компактов. Докл. АН СССР, 1950, *75*, 605—608
7. —, Равновеликие и равносоставленные фигуры. Гостехиздат, 1956, 64 с. (РЖМат, 1957, 5070К)
8. —, Задача об освещении границы выпуклого тела. Изв. Молд. фил. АН СССР, 1960, № 10(76), 79—86 (РЖМат, 1962, 10А349)

9. —, Равносоставленность многоугольников и многогранников. «Энцикл. элем. матем.», М. Наука, 1966, *5*, 142—180
10. —, О разбиении плоских фигур на части меньшего диаметра. Colloq. Math., 1970, *21*, № 2, 253—263 (РЖМат, 1971, 4А643)
11. —, Метод шатров в теории экстремальных задач. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 3, 1—55 (РЖМат, 1975, 10Б568)
12. —, О некоторых классах выпуклых множеств. Докл. АН СССР, 1976, *226*, № 1, 19—22 (РЖМат, 1976, 5А631)
13. —, Теорема Хелли для *H*-выпуклых множеств. Докл. АН СССР, 1976, *226*, № 2, 249—252 (РЖМат, 1976, 5А632)
14. —, Обобщение одной теоремы Секефальви—Надя. Докл. АН СССР, 1976, *228*, № 2, 265—268 (РЖМат, 1976, 10А396)
15. —, Отделимость выпуклых множеств и теорема Хелли. Изв. АН Арм.ССР, Математика, 1976, *11*, № 5, 432—439 (РЖМат, 1977, 4А665)
16. —, Свойство отделимости системы выпуклых конусов. Изв. АН Арм.ССР, Математика, 1972, *7*, № 4, 250—257 (РЖМат, 1973, 3Б632)
17. —, Замечания о размерности Хелли. В сб. «Геометрия». Л., 1976, *5*, 21—32 (РЖМат, 1977, 4А663)
18. —, Третья проблема Гильберта. М., Наука, 1977, 208 с. (РЖМат, 1977, 7А587К)
19. —, Несколько теорем комбинаторной геометрии. Мат. заметки, 1977, *21*, № 1, 117—124 (РЖМат, 1977, 5В335)
20. —, Равносоставленность многогранников и группы движений. Докл. АН СССР, 1977, *231*, № 4, 788—790 (РЖМат, 1977, 4А638)
21. —, *Солтан В. П.* Задача Борсука. Мат. заметки, 1977, *22*, № 5, 621—631 (РЖМат, 1978, 4А614)
22. —, *Солтан П. С.,* Освещение границы выпуклого тела изнутри. Мат. сб., 1972, *87*, № 1, 83—90 (РЖМат, 1972, 5А619)
23. —, —, О звездных множествах. Изв. АН Молд.ССР, сер. физ.-техн. и мат. н., 1976, № 3, 7—11 (РЖМат, 1977, 4А664)
24. —, —, Комбинаторная геометрия и классы выпуклости. Успехи мат. н., 1977, *33*, № 1, 3—42 (РЖМат, 1978, 7А831)
25. —, —, Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. Кишинев, Штиинца, 1978, 279 с. (РЖМат, 1978, 8А668К)
26. —, —, Теорема Хелли на выпуклых поверхностях. Изв. АН АзССР. серия физ.-техн. и мат. н., 1978, № 2, 123—129 (РЖМат, 1979, (3А539)
27. *Бронштейн Е. М.,* Экстремальные *H*-выпуклые тела. Сиб. мат. ж., 1979, *20*, № 2, 412—415 (РЖМат, 1979, 7А697)
28. *Бураго Д. М., Залгаллер В. А.,* Геометрические неравенства. Л., Наука, 1980, 288 с. (РЖМат, 1980, 12А674К)
29. *Герман Л. Ф., Солтан В. П.,* О некоторых свойствах *d*-выпуклых множеств. В сб. «Прикл. мат. и программир.», вып. 10, Кишинев, Штиинца, 1973, 47—61 (РЖМат, 1974, 1Б503)
30. —, —, *Солтан П. С.* Некоторые свойства *d*-выпуклых множеств. Докл. АН СССР, 1973, *212*, № 6, 1276—1279 (РЖМат, 1974, 3А359)
31. —, *Солтан П. С.,* О свойстве отделимости *d*-выпуклых множеств. В сб. «Прикл. мат. и программир.» вып. 12, Кишинев, Штиинца, 1974, 49—61 (РЖМат, 1975, 3Б597)
32. *Гильберт Д.,* Основания геометрии, М., Гостехиздат, 1948
33. *Гохберг И. Ц., Маркус А. С.,* Одна задача о покрытии выпуклых фигур подобными. Изв. Молд. фил. АН СССР, 1960, № 10(76), 87—90 (РЖМат, 1962, 5А503)
34. *Грюнбаум Б.,* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М., Наука, 1971
35. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.,* Теорема Хелли и ее применения. М., Мир, 1968, 160 с. (РЖМат, 1969, 4А515К)
36. *Делоне Б. Н.,* О плотнейших параллелепипедальных расположениях шариков в пространствах трех и четырех измерений. Труды. физ.-мат. ин-та, отд. матем., 1933, *4*, 63—69

37. —, Теория планигонов. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1959, *23*, № 3, 365—386 (РЖМат, 1960, 10903)
38. —, *Рышков С. С.,* Решение задачи о наименее плотном решетчатом покрытии четырехмерного пространства равными шарами. Докл. АН СССР, 1963, *152*, № 3, 523—524 (РЖМат, 1964, 3А407)
39. *Дольников В. Л.,* О разбиении семейств выпуклых тел. Сиб. мат. ж., 1971, *12*, № 3, 664—667 (РЖМат, 1971, 10А397)
40. —, Одна теорема о покрытиях на римановых многообразиях. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 5, 205—206 (РЖМат, 1976, 2Б571)
41. —, Об одной теореме о покрытии. Исслед. по теории функций мног. веществ. переменных (Ярославль), 1978, № 2, 111—128 (РЖМат, 1979, 4А699)
42. *Зылев В. Б.,* О равносоставленности двух равнодополняемых многогранников. Докл. АН СССР, 1965, *161*, № 3, 515—516 (РЖМат, 1965, 8А403)
43. —, О *G*-составленности и *G*-дополняемости. Докл. АН СССР, 1968, *179*, № 3, 529—530 (РЖМат, 1968, 8А104)
44. *Каган В. Ф.,* О преобразовании многогранников. М., Гостехиздат, 1933
45. *Кошелева О. М.,* К аксиоматике объема в элементарной геометрии. Сиб. мат. ж., 1980, *21*, № 1, 106—114 (РЖМат, 1980, 7А596)
46. *Красносельский М. А.,* Об одном критерии звездности. Мат. сб., 1946, *19* (61), 309—310
47. *Ламперт Д., Чока Г.,* О плотности правильной системы кругов. Ann. Univ. sci. budapest. Sec. math., 1973, *16*, 69—85 (РЖМат, 1975, 3А697)
48. *Лассак М., Солтан В. П.,* Об одной классификации метрических пространств с точки зрения *d*-выпуклости. В сб. «Мат. исследования», Кишинев, Штиинца, 1975, *10*, № 3, 90—106
49. *Левенштейн В. И.,* О максимальной плотности заполнения n-мерного евклидова пространства равными шарами. Мат. заметки, 1975, *18*, № 2, 301—311 (РЖМат, 1976, 2А774)
50. —, О границах для упаковок в n-мерном евклидовом пространстве. Докл. АН СССР, 1979, *245*, № 6, 1299—1303 (РЖМат, 1979, 8А651)
51. *Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г.* Топологические методы в вариационных задачах. М., «ОНТИ», 1930
52. *Маркин О. В., Солтан В. П.,* О построении *d*-выпуклых оболочек. В сб.: «Исследования по алгебре, математическому анализу и их приложениям». Кишинев, Штиинца, 1977, 22—30 (РЖМат, 1977, 9А584)
53. *Пшеничный Б. Н.,* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., Наука, 1980
54. *Рисслинг А. С.,* Проблема Борсука в трехмерных пространствах постоянной кривизны. Укр. геометр. сб., 1971, вып. 11, 78—83 (РЖМат, 1972, 4А751)
55. *Роджерс К.,* Укладки и покрытия. М., Мир, 1968, 134 стр. (РЖМат, 1969, 3А474К)
56. *Рокафеллер Р. Т.,* Выпуклый анализ. М., Мир, 1973, 469 с. (РЖМат, 1973, 6В515К)
57. *Рышков С. С., Барановский Е. П.,* Решение о задачи о наименее плотном решетчатом покрытии 5-мерного пространства равными шарами. Докл. АН СССР, 1975, *222*, № 1, 39—42 (РЖМат, 1975, 10А520)
58. — ,—, Классические методы теории решетчатых упаковок. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 4, 3—63 (РЖМат, 1979, 11А590)
59. *Сидельников В. М.,* Новые оценки для плотнейшей упаковки шаров в n-мерном евклидовом пространстве. Мат. сб., 1974, *95*, № 1, 148—158 (РЖМат, 1975, 1А732)
60. *Солтан В. П.,* Об одном классе конечномерных нормированных пространств. В сб. «Матем. исследования», Кишинев, Штиинца, 1976, *42*, 204—215 (РЖМат, 1976, 9Б525)
61. —, Некоторые вопросы абстрактной теории выпуклости. Докл. АН СССР, 1976, *228*, № 2, 310—313 (РЖМат, 1976, 10А394)
62. —, Одно замечание о размерности Хелли в $\mathbf{R}^n$. Изв. АН Молд.ССР, Сер. физ.-техн. и мат. н., 1977, № 1, 77—78 (РЖМат, 1977, 9А765)

63. —, *d*-выпуклые множества в конечных метрических пространствах. Изв. АН Молд.ССР, сер. физ.-техн. и мат. н., 1978, № 2, 29—33 (РЖМат, 1979, 4А537)
64. —, Освещение выпуклых фигур по плоскости. Изв. АН Молд.ССР, сер. физ.-техн. и мат. н., 1979, № 2, 29—32 (РЖМат, 1980, 1А757)
65. —, Числа Хелли и Каратеодори в аксиоматической теории выпуклости. Изв. АН Молд.ССР, серия физ.-техн. и мат. н., 1979, № 3, 31—35 (РЖМат, 1980, 5А610)
66. *Солтан П. С.*, Об освещении границы выпуклого тела изнутри. Мат. сб., 1962, *57*, № 4, 443—448 (РЖМат, 1963, 2А338)
67. —, К задачам о покрытии и освещении выпуклых тел. Изв. АН МолдССР. Сер. естеств. и техн. н., 1963, № 1, 49—57 (РЖМат, 1964, 11А390)
68. —, Об отношениях между задачами покрытия и освещения выпуклых тел. Изв. АН Молд.ССР, сер. физ.-техн. и мат. н., 1966, № 4, 91—93 (РЖМат, 1967, 7А497)
69. —, Освещение изнутри для неограниченных выпуклых тел. Докл. АН СССР, 1970, *194*, № 2, 273—274 (РЖМат, 1971, 2А563)
70. —, Решение задачи покрытия неограниченных выпуклых трехмерных тел гомотетичными. В сб. «Мат. исследования». т. 5, вып. 2, Кишинев, АН МолдССР, 1970, 193—195 (РЖМат, 1971, 1А577)
71. —, Теорема Хелли для *d*-выпуклых множеств. Докл. АН СССР, 1972, 205, № 3, 537—539 (РЖМат, 1972, 11Б716)
72. —, Покрытие выпуклых тел большими гомотетичными. Мат. заметки, 1972, *12*, № 1, 85—90 (РЖМат, 1972, 11А482)
73. —, Об одной теореме типа Хелли. В сб. «Мат. исследования», т. 7, вып. 1, Кишинев, Штиинца, 1972, 206—209 (РЖМат, 1972, 6А616)
74. —, *d*-выпуклость и ее приложения к задаче Штейнера на графах. XIII Intern. Wiss. Koll., TH Ilmenau, 1973, 33—35
75. —, Экстремальные задачи на выпуклых множествах. Кишинев, Штиинца, 1976, 155 с. (РЖМат, 1977, 5А494К)
76. —, *Василой А. Д.*, О некоторых характеристиках выпуклого конуса. В сб. «Мат. исследования». т. 6, вып. 4, Кишинев, Штиинца, 1971, 155—164 (РЖМат, 1972, 3А596)
77. —, *Замбицкий Д. К.*, *Присакару К. Ф.*, Экстремальные задачи на графах и алгоритмы их решения. Кишинев, Штиинца, 1979, 90 с. (РЖМат, 1974, 5В403)
78. —, *Присакару К. Ф.*, Задача Штейнера на графах. Докл. АН СССР, 1971, *198*, № 1, 46—49 (РЖМат, 1971, 12В590)
79. *Фейеш Тот Л.*, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М., Физматгиз, 1958, 363 с. (РЖМат, 1960, 13265К)
80. *Хадвигер Г.*, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., Наука, 1966, 416 стр., (РЖМат, 1967, 8А471К)
81. *Дебруннер Г.*, Комбинаторная геометрия плоскости. М., Наука, 1965, 171 стр. (РЖМат, 1967, 9А472К)
82. *Харазишвили А. Б.*, К задаче освещения. Сообщ. АН Груз.ССР, 1973, *71*, № 2, 289—291 (РЖМат, 1974, 1А613)
83. —, К равносоставленности трехмерных многогранников по группе параллельных переносов и центральных симметрий. Докл. АН СССР, 1978, *243*, № 6, 1410—1413 (РЖМат, 1979, 4А697)
84. —, Об одном инварианте, заданном на классе трехмерных многогранников. Сообщ. АН Груз.ССР, 1978, *91*, № 1, 33—36 (РЖМат, 1979, 4А696)
85. *Хелли Е.*, О совокупности выпуклых тел с общими точками. Успехи мат. н., 1936, *2*, 80—81
86. *Шарабурова Л. Г.*, *Шашкин Ю. А.*, Пересечения сферически выпуклых множеств. Мат. заметки, 1975, *18*, № 5, 781—791 (РЖМат, 1976, 5Б621)
87. —, —, Пересечения выпуклых конусов. Мат. заметки, 1978, *24*, № 3, 391—402 (РЖМат, 1979, 2А496)
88. *Яглом И. М.*, *Болтянский В. Г.*, Выпуклые фигуры. Гостехиздат, 1951
89. *Bambah R. P.*, On lattice coverings by spheres. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, *20*, № 1, 25—52 (РЖМат, 1955, 5604)

90. *Banach S.*, Sur le problème de mesure, Fund. Math., 1923, *4*, 7—33.
91. *Blind G.*, Über Unterdeckungen der Ebene durch Kreise. J. reine und angew. Math., 1969, *23b*, 145—173 (РЖМат, 1969, 12А728)
92. —, Überdeckung der Ebene durch inkongruente Kreise. Math. Z., 1974, *140*, № 2, 179—194 (РЖМат, 1975, 6А771)
93. —, Unterdeckung der Ebene durch inkongruente Kreise. Arch. Math., 1975, *26*, № 4, 441—448 (РЖМат, 1976, 3А738)
94. *Blundon W. J.*, Multiple packing of circles in the plane. J. London Math. Soc., 1963, *38*, № 2, 176—182 (РЖМат, 1964, 11А393)
95. —, A three-fold non-lattice covering. Can. Math. Bull., 1977, *20*, № 1, 29—31 (РЖМат, 1978, 1А600)
96. *Boltjanskii V. G.*, Zerlegungsgleichheit ebener Polygone. Bul. Inst. Politehnic, Iaşi, 1953, *4(7)*, № 1-2, 33—38
97. *Borsuk K.*, Über die Zerlegung einer Euklidischen *n*-dimensionalen Wollkugel in *n* Mengen. Verh. Internat. Math. Kongr. Zurich, № 2, 1932, 192
98. —, Drei Sätze über die *n*-dimensionale Sphäre. Fund. Math., 1933, *20*, 177—190
99. —, *Vaina R.*, On covering of bounded sets by sets with the twice less diameter. Colloq. math., 1979, *42*, 33—37 (РЖМат, 1980, 10А465)
100. *Bricard R.*, Sur un question de géométrie relative aux polyèdres. Nouv. Ann. Math., 1896, *55*, 331—334
101. *Bryant V. W.*, *Webster R. J.*, Generalisations of the theorems of Radon, Helly and Caratheodory. Monatsh. Math., 1969, *73*, № 1, 309—315 (РЖМат, 1980, 3А726)
102. —, —, Convexity spaces. I. The basic properties. J. Math. Anal. and Appl., 1972, *37*, № 1, 206—213 (РЖМат, 1972, 5Б648)
103. —, —, Convexity spaces. II. Separation. J. Math. Anal. and Appl., 1973, *43*, № 2, 321—327 (РЖМат, 1974, 2Б709)
104. —, —, Convexity spaces. III. Dimension. J. Math. Anal. and Appl., 1977, *57*, № 2, 382—392 (РЖМат, 1977, 10Б608)
105. *Calder J. R.*, Some elementary properties of interval convexities. J. London Math. Soc., 1971, *3*, № 3, 422—428 (РЖМат, 1971, 12Б69)
106. *Chvátal V.*, On a conjecture of Fejes Tóth. Period. math. hung., 1975, *6*, № 4, 357—362 (РЖМат, 1976, 12А731)
107. *Danzer L.*, Über Durchschnittseigenschaften *n*-dimensionalen Kugelfamilien. J. reine und angew. Math., 1961, *208*, № 3-4, 181—203 (РЖМат, 1962, 6А437)
108. *Debrunner H. E.*, Zerlegungsähnlichkeit von Polyedern. Elem. math., 1969, *24*, № 1, 1—6 (РЖМат, 1969, 9А418)
109. —, Zerlegungsrelationen zwischen regulären Polyedern des E^d. Arch. Math., 1978, *30*, № 6, 656—660 (РЖМат, 1979, 2А500)
110. *Dehn M.*, Uber den Rauminhalt. Göttingen Nachr. Math. Phys., 1900, 345—354; Math. Ann., 1902, *55*, 465—478
111. *Dessard A.*, Polytopes in non necessarily complete convexity spaces. J. Geom., 1979, *12*, № 1, 34—44 (РЖМат, 1979, 6А527)
112. *Douglas J.*, The densest lattice packing of tetrahedra. Bull. Amer. Math. Soc., 1970, *76*, № 1, 135—137 (РЖМат, 1970, 11А464)
113. *Duff G. F. D.*, A smaller universal cover for sets of unit diameter. Roy. Soc. Can. Math. Repts., 1980, *2*, № 1, 37—42 (РЖМат, 1980, 8А595)
114. *Dumir V. C.*, *Hans—Gill R. J.*, Lattice double coverings in the plane. Indian J. Pure and Appl. Math., 1972, *3*, № 3, 466—480 (РЖМат, 1973, 4А782)
115. —, —, Lattice double packings in the plane. Indian J. Pure and Appl. Math., 1972, *3*, № 3, 481—487 (РЖМат, 1973, 4А783)
116. —, *Khassa D. S.*, A conjecture of Fejes Toth on saturated systems of circles. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1973, *74*, № 3, 453—460 (РЖМат, 1974, 5А663)
117. *Eckhoff J.*, Der Satz von Radon in konvexen Produktstrukturen, I, II. Monatsh. Math., 1968, *72*, № 4, 303—314; 1969, *73*, № 1, 7—30 (РЖМат, 1969, 6А402; 10А376)

118. *Eggleson H. G.*, Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter. J. London Math. Soc., 1955, *30*, № 1, 11—24 (РЖМат, 1956, 2847)
119. —, Convexity. Cambridge Trancts Math. and Math. Phys., 1958, № 47, 136 pp. (РЖМат, 1958, 6187)
120. —, Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces. Israel J. Math., 1965, *3*, № 3, 163—172 (РЖМат, 1967, 4A549)
121. *Ennola V.*, On the lattice constant of a symmetric convex domain. J. London Math. Soc., 1961, *36*, № 2, 135—138 (РЖМат, 1962, 3A96)
122. *Fáry I.*, Sur la densité des réseaux de domaines convexes. Bull. Soc. Math. Fr., 1950, *78*, 152—161
123. *Fejes Tóth G.*, Multiple packing and covering of spheres. Acta Math. Acad. Sci. hung., 1979, *34*, № 1-2, 165—176 (РЖМат, 1980, 5A615)
124. *Fejes Tóth L.*, Eine Bemerkung über die Bedeckung der Ebene durch Eibereiche mit Mittelpunkt. Acta Sci. Math. Szeged, 1946, *11*, 93—95
125. —, Some packing and covering theorems. Acta Sci. Math. Szeged, 1950, *12/A*, 62—67
126. —, Packings and coverings in the plane. Proc. Colloq. Convexity, Copenhagen 1965. Copenhagen, 1967, 78—87 (РЖМат, 1967, 12A644)
127. —, On the permeability of a circle-layer. Studia scient. math. hung., 1966, *1*, № 1-2, 5—10 (РЖМат, 1967, 10A569)
128. —, On the permeability of a layer of parallelograms. Studia scient. math. hung., 1968, *3*, № 1-3, 195—200 (РЖМат, 1969, 3A480)
129. —, Solid-circle-packing and circle-covering. Studia scient. math. hung., 1968, *3*, № 4, 401—409 (РЖМат, 1969, 8A472)
130. —, Schiebungpackungen konstanter Nachbarnzahl. Acta math. Acad. Sci. hung., 1969, *20*, № 3-4, 375—381 (РЖМат, 1970, 7A613)
131. —, *Florian A.* Mehrfache gitterförmige Kreis- und Kugelanordnungen. Monatsh. Math., 1975, *79*, № 1, 13—20 (РЖМат, 1975, 10A518)
132. *Few L.*, The double packing of spheres. J. London Math. Soc., 1953, *28*, part 2, № 111, 297—304 (РЖМат, 1954, 3959)
133. —, Multiple packing of spheres. J. London Math. Soc., 1964, *39*, № 1, 51—54 (РЖМат, 1964, 11A391)
134. —, Double packing of spheres: a new upper bound. Mathematica, 1968, *15*, № 1, 88—92 (РЖМат, 1969, 2A608)
135. —, *Kanagasabapathy P.*, The double packing of spheres. J. London Math. Soc., 1969, *44*, № 1, 141—146 (РЖМат, 1969, 5A472)
136. *Franklin S. P.*, Some results on order convexity. Amer. Math. Monthly, 1962, *69*, № 5, 357—359 (РЖМат, 1963, 3Б418)
137. *Gale D.*, On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex. Proc. Amer. Math. Soc., 1953, *4*, № 2, 222—225 (РЖМат, 1953, 1392)
138. *Goldberg M.*, Tetrahedra equivalent to cubes by dissection. Elem. Math., 1958, *13*, № 5, 107—108 (РЖМат, 1959, 8383)
139. —, Two more tetrahedra equivalent to cubes by dissection. Elem. Math., 1969, *24*, 130—132; correction, 1970, *25*, 48
140. —, New rectifiable tetrahedra. Elem. Math., 1974, *29*, № 4, 85—89 (РЖМат, 1975, 2A651)
141. *Groot J. de.*, Some special metrics in general topology. Colloquium Math., 1958, *6*, 283—286
142. *Grünbaum B.*, A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, *53*, 776—778
143. —, Borsuk's partition conjecture in Minkowski planes. Bull. Res. Council Israel, 1957, *F7*, № 1, 25—30 (РЖМат, 1961, 2A389)
144. —, Fixing systems and inner illumination. Acta math. acad. scient. hung., 1964, *15*, № 1-2, 161—163 (РЖМат, 1965, 1A454)
145. *Hadwiger H.*, Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers. Comm. math. helv., 1945/46, *18*, 73—75; 1946/47; *19*, 72—73
146. —, Zerlegungsgleichheit und additive Polyderfunktionale. Arch. Math., 1948—1949, *1*, 468—472
147. —, Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder. Arch. Math., 1949—1950, *2*, 441—444

148. —, Ergänzungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder. Math. Zeits., 1952, *55*, 292—298
149. —, Mittelpunktspolyeder und translative Zerlegungsgleichhiet. Math. Nachr., 1952, *8*, 53—58
150. —, Lineare additive Polyederfunktionale und Zerlegungsbleichheit. Math. Z., 1953, *58*, № 1, 4—14 (РЖМат, 1954, 2719)
151. —, Über Gitter und Polyeder. Monatsh. Math., 1953, *57*, № 3, 246—254 (РЖМат, 1955, 425)
152. —, Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder. Math., Ann., 1954, *127*, № 2, 170—174 (РЖМат, 1954, 5255)
153. —, Zur Zerlegungstheorie euklidischer Polyeder. Ann. mat. pura ed appl., 1954, *36*, 315—334 (РЖМат, 1956, 6829)
154. —, Ungelöste Probleme. Elem. Math., 1957, *12*, № 20, 121
155. —, Translative Zerlegungsgleichheit der Polyeder ges gewöhnlichen Raumes. J. reine und angew., Math., 1968, *233*, 200—212 (РЖМат, 1969, 6A382)
156. —, Überdeckung des Raumes durch translationsgleiche Punktmengen und Nachbarnzahl. Monatsh. Math., 1969, *73*, № 3, 213—217 (РЖМат, 1970, 1A600)
157. —, *Glur P.*, Zerlegungsgleichheit ebener Polygone. Elem. Math., 1951, *6*, 97—106
158. *Hamel G.*, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Math. Ann. 1905, *60*, 459—462
159. *Hammer R.*, Beziehungen zwischen den Sätzen von Radon, Helly und Carathéodory bei axiomatischen Konvexitäten. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1977, *46*, 3—25 (РЖМат, 1979, 7A695)
160. *Heppes A.*, Terbeli ponthalmazok felosztása kisebb átmérõjü részhalmazok összegére. Magyar tud. akad. Mat. és fiz tud. oszt. közl., 1957, *7*, № 3-4, 413—416 (РЖМат, 1960, 3440)
161. *Hill M. J. M.*, Determination of the volume of certain species of tetrahedrons. Proc. London Math. Soc., 1896, *27*, 39—62
162. *Hortobágyi I.*, Über die Durchlässigkeit einer aus Schieben konstanter Breite bestehenden Schicht. Stud. sci. math. hung. 1976, *11*, № 3-4, 383—387 (РЖМат, 1980, 8A594)
163. *Jessen B.*, The algebra of polyhedra and the Dehn—Sydler theorem. Math. Scand., 1968, *22*, № 2, 241—256 (РЖМат, 1970, 7A581)
164. —, Zur Algebra der Polytope. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. II. Math.—Phys. Kl., 1972, № 4, 47—53 (РЖМат, 1973, 8A525)
165. —, *Karpf J.*, *Thorup A.*, Some functional equations in groups and rings. Math. Scand., 1968, *22*, № 2, 257—265
166. —, *Thorup A.*, The algebra of polytops in affine spaces. Math. Scand, 1978, *43*, № 2, 211—240 (РЖМат, 1980, 4A680)
167. *Kagan B.*, Ueber der Transformation der Polyeder. Math. Ann., 1903, *57*, 421—424
168. *Kay D. C.*, *Womble E. W.*, Axiomatic convexity theory and relationships between the Caratheodory, Helly and Radon numbers. Pacif. J. Math., 1971, *38*, № 2, 471—485 (РЖМат, 1972, 6A615)
169. *Kershner R.*, The number of circles covering a set. Amer. J. Math., 1939, *61*, 665—671
170. *Klee V.*, Some unsolved problems in plane geometry. Math. Mag., 1979, *52*, № 3, 131—145 (РЖМат, 1979, 12A697)
171. *Knast R.*, An approximate theorem for Borsuk's conjecture. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1974, *75*, № 1, 75—76 (РЖМат, 1974, 9A768)
172. *Korkine A.*, *Zolotareff G.*, Sur les formes quadratqiues positives quaternaîres. Math. Ann., 1872, *5*, 581—583
173. *Lebesque H.*, Sur l'équivalence des polyèdres, en particulier des polyèdres réguliers, et sur la dissection des polyèdres réguliers en polyèdres réguliers. Ann. Soc. Polon. Math., 1938, *17*, 193—226; 1945, *18*, 1—3
174. *Leech J.*, Six and seven dimensional nonlattice sphere packing. Canad. Math. Bull., 1969, 12, № 2, 151—155 (РЖМат, 1970, 4A583)

175. —, Sloane N. J. A., New sphere packing in dimensions 9—15. Bull. Amer. Math. Soc., 1970, 76, № 5, 1006—1010 (РЖМат, 1971, 4А648)
176. Lenhard H.-C., Über fünf neue Tetraeder, die einem Würfel äquiwalent sind. Elem. Math., 1962, *17*, № 5, 108—109 (РЖМат, 1963, 4А266)
177. Lenz Z., Zur Zerlegung von Punktmengen in solche kleineren Durchmessers. Arch. Math., 1955, *6*, № 5, 413—416 (РЖМат, 1956, 8337)
178. Levi F. W., On Helly's theorem and the axioms of convexity. J. Indian Math. Soc., 1951, *15*, part A, 65—76
179. —, Überdeckungen eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenens Kerns. Arch. Math., 1955, *6*, № 5, 369—370 (РЖМат, 1956, 6132)
180. Mahler K., On the minimum determinant and the circumscribed hexagons of a convex domain. Proc. K. Ned. Akad. Wet. Amsterdam, 1947, *50*, 692—703
181. Mani P., Inner illumination of convex polytopes. Comment. math. helv., 1974, *49*, № 1, 65—73 (РЖМат, 1974, 12А417)
182. Menger K., Untersuchungen über allgemeine Metrik, I, II, III. Math. Ann., 1928, *100*, 75—163
183. —, Metrische Untersuchungen. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums (Wien), 1931, *1*, 20—27
184. Moore C. C., Group extensions and cohomology for locally compact groups. III, IV. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, *221*, № 1, 1—58 (РЖМат, 1977, 7А388; 7А389)
185. Morse A., Squares are normal. Fund. Math., 1949, *36*, 35—39
186. Mullin A. A., Relations between fixed—point theory and combinatorial geometry. Math. Semin. Notes, Cobe Univ., 1979, *7*, № 1, 21—24 (РЖМат, 1980, 2А661)
187. Pal J., Ein Minimumproblem für Ovale. Math. Ann., 1921, *83*, 311—319
188. Prenowitz W., Jantosciak J. Join geometries. A theory of convex sets and linear geometry. New York e. a., Springer, 1979, XIX, 534 pp. (РЖМат, 1980, 3А512К)
189. Radon J., Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. Math. Ann., 1921, *83*, 113—115
190. Reay J. R., Caratheodory theorems in convex product structures. Pacif. J. Math., 1970, *35*, № 1, 227—230 (РЖМат, 1971, 6Б618)
191. Reinhardt K., Über die dichteste gitterförmuge Lagerung kongruenter Bereiche in der Ebene und eine besondere Art konvexer Kurven. Abh. math. Sem. hansische Univ., 1934, *10*, 216—230
192. Rogers C. A., The closest packing of convex two—dimensional domains. Acta Math., 1951, *86*, 309—321
193. Sierksma G., Caratheodory and Helly numbers of convex-product-structures. Pacif. J. Math., 1975, *61*, № 1, 275—282 (РЖМат, 1976, 10Б542)
194. Boland J. Ch. The least upper bound for the Radon number of an Eckhoff space. Univ. of Groningen, Econometric Institute, Report 1374
195. Solovay R., A model od set-theory in which every set of reals in Lebesgue measurable. Ann. Math., 1970, *92*, 1—56 (РЖМат, 1971, 1А37)
196. Sydler J.-P., Sur la décomposition des polyèdres. Comment. math. Helvet., 1943/44, *16*, 266—273
197. —, Sur les tétraèdres équivalents à un cube. Elem. Math., 1956, *11*, № 4, 78—81 (РЖМат, 1957, 8227)
198. —, Sur quelques polyèdres équivalents obtenus par un procéde en chaînes. Elem. Math., 1959, *14*, 100—109
199. —, Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. Comment. math. helv., 1965, *40*, 43—80 (РЖМат, 1966, 10А337)
200. Szökefalvi—Nagy B., Ein Satz über Parallelverschiebungen Konvexer Körper. Acta sci. math., 1954, *15*, № 3-4, 169—177 (РЖМат, 1956, 2339)
201. Wegner G., Bewegungsstabile Packungen Konstanter Nachbarnzahl. Stud. sci. math. hung., 1971, *6*, № 3-4, 431—438 (РЖМат, 1973, 2А548)
202. Yang L. J., Multiple lattice packing and covering of spheres. Monatsh. Math., 1980, *89*, № 1, 69—76 (РЖМат, 1980, 8А590)

СОДЕРЖАНИЕ

Технический редактор *Н. А. Окунева*

Сдано в набор 18.02.81 Подписано в печать 02.09.81
Формат бумаги 60×90¹/₁₆. Литературная гарнитура. Высокая печать.
Печ. л. 17,25 Уч.-изд. л. 20,93 Тираж 700 экз.
Заказ 1415 Цена 2 р. 90 к.

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский просп., 403

Индекс 56902