ISSN 0202—7445

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ

Том 21

Научный редактор
член-корр. АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1964 г.

МОСКВА 1983

1—3403

УДК 510
512.54.0

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ГРУПП

В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков

Обзор состоит из двух глав. Цель первой главы — дать достаточно полное описание теоретико-групповых результатов алгоритмического характера в их историческом развитии. Большое внимание уделено вопросам происхождения классических алгоритмических проблем, их решению и влиянию полученных результатов на другие области математики. Основная задача второй главы обзора — представление методов теоретико-модельных исследований в теории групп. Именно методы интересуют нас в первую очередь, ибо эта область исследований молода, методы не выработаны и главные успехи здесь еще впереди.

Освещение двух направлений исследования объединено в один обзор, чтобы подчеркнуть их тесную взаимосвязь и общую ориентацию. В конце концов, все сводится к нахождению ответа на вопрос: какие свойства и характеристики групп эффективно определимы?

При написании обзора использовались материалы из реферативного журнала «Математика», труды конференций, книги, статьи из математических журналов, препринты.

Глава 1
АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

§ 1. Введение

1.1. Постановка проблем. Осознание алгебраической природы многих важных понятий топологии и теории функций комплексного переменного приводит в 80-е годы прошлого столетия к формированию комбинаторной теории групп. Группы, уже фигурировавшие в работах Клейна, Пуанкаре и других математиков, обретают право на самостоятельность после открытия

Диком в 1882 году универсального способа их определения через порождающие элементы и определяющие соотношения.

Прежде всего группы выступают как фундаментальные группы многообразий, явно определенные Пуанкаре в 1892 году. Сразу же выделяются как эффективные объекты группы конечных симплициальных комплексов. Из работ Пуанкаре и Титце известно, что эти группы допускают хорошее описание — они конечно определены. Являясь важным топологическим инвариантом, фундаментальные группы претендуют на роль инструмента при познании свойств топологических объектов.

Многие важные задачи в топологии имеют алгоритмический характер. Например, проблемы гомеоморфизма, гомотопической эквивалентности, эквивалентности узлов и т. п. являются основными в теории многообразий.

Алгоритмические проблемы теории групп являются по своей сути аналогами соответствующих проблем из топологии. Основные из них могут быть определены следующим образом.

Проблема равенства (Ден, 1910 г.): Существует ли алгоритм, выясняющий по двум произвольным групповым словам от порождающих элементов группы, определяют ли они один и тот же элемент группы?

Проблема изоморфизма (Титце, 1908 г.): Существует ли алгоритм, выясняющий по двум произвольным заданиям групп через порождающие элементы и определяющие соотношения, определяют ли они изоморфные группы?

Проблему равенства иногда еще называют проблемой слов. Она легко сводится к случаю, когда одно из слов тривиально, поэтому существует еще одно название: проблема тождества (неточный перевод «identity problem»). В классическом варианте проблема равенства ставится для конечно определенной группы. Для корректности ее рассмотрения необходимо и достаточно, чтобы группа была задана эффективным способом. Так, проблема может быть поставлена для конечно порожденной группы с рекурсивно перечислимым множеством определяющих соотношений. Такие группы называются рекурсивно определенными.

Проблема изоморфизма в классическом варианте ставится для всех конечно определенных групп (точнее, для всех конечных заданий таких групп). В общем случае необходимо, чтобы класс заданий групп был эффективно определен. Например, он может быть рекурсивно перечислимым. Проблема может ставиться для групп, заданных иным способом, например, для матричных групп.

Отметим некоторые другие алгоритмические вопросы. Будем говорить «элемент», имея в виду его запись через порождающие элементы группы. Поскольку ясно, что вопросы алгоритмические, будем опускать слова «существует ли алгоритм ...».

Проблема сопряженности (Ден): Сопряжены ли два произвольных элемента группы?

Проблема вхождения (Нильсен, Магнус): Входит ли произвольный элемент в произвольную подгруппу?

Проблема автоморфной сопряженности (Уайтхед): Является ли один произвольный элемент автоморфным образом другого?

Другие проблемы формулируются в тексте обзора по мере их появления.

1.2. Решение проблем. Основные алгоритмические проблемы в классе всех конечно определенных групп решены отрицательно. Это случилось после того, как в математической логике в 30-е годы выработалось точное понятие вычислимости после накопления усилиями многих математиков опыта доказательств не только существования, но и несуществования алгоритмов. Гигантская работа была с успехом завершена теоремой П. С. Новикова 1952 года о существовании конечно определенной группы с неразрешимой проблемой равенства.

Результат П. С. Новикова открыл новый этап развития теории. В дальнейшем стало ясно, что неразрешимости в математике встречаются довольно часто. Осознание роли различных конструкций в теории групп и усовершенствование методов исследования привели к получению многочисленных новых результатов алгоритмического характера и упрощению доказательств уже известных ранее. При этом специально исследовались группы из важнейших классов, например, разрешимые, периодические, линейные и т. д.

В последнее время усилился интерес к вопросу о реальности алгоритмов, т. е. их сложности и практической реализуемости. Дело в том, что многие результаты о разрешимости проблем имеют вид теорем существования, устанавливают разрешимость проблемы «в принципе» и не могут быть реализованы практически.

1.3. Аппроксимируемость. Связь между финитной аппроксимируемостью конечно определенных групп и разрешимостью в них алгоритмических проблем обнаружена А. И. Мальцевым [130] (см. также [362, 472, 533]).

Группа G называется финитно аппроксимируемой, если для любого ее элемента $g \neq 1$ существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу, для которого $g^{\varphi} \neq 1$.

Если группа G конечно определена, то множество слов от порождающих элементов, равных 1 в G, рекурсивно перечислимо. Множество конечных групп также рекурсивно перечислимо, к тому же мы можем эффективно найти все гомоморфизмы G на данную конечную группу. Отсюда следует, что множество образов данного элемента $g \in G$ в конечных гомоморфных образах группы G рекурсивно перечислимо.

Применим параллельно два процесса перечисления. Если элемент g равен 1 в G, то он будет получен в первом процессе, в противном случае второй процесс укажет его нетривиальный гомоморфный образ. Это решает проблему равенства в группе G.

Если заменить в определении финитной аппроксимируемости предикат «равенства единичному элементу» на произвольный теоретико-групповой предикат $\Pi=\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то естественно определяется понятие финитной аппроксимируемости группы G относительно П. Это свойство обозначается аббревиатурой ФАП.

Наиболее часто рассматриваются предикаты сопряженности $C(x_1, x_2) \rightleftarrows \exists z (x_1 = z^{-1}x_2 z)$ и вхождения в подгруппу $B(x, H) \rightleftarrows x \in H$, свойства аппроксимируемости относительно которых обозначаются ФАС и ФАВ, соответственно. Если ввести ограничение, предполагая, что подгруппа конечно порождена, то получаем свойство ФАВ$_\omega$.

Если G — конечно определенная финитно аппроксимируемая относительно П группа, предикат П имеет рекурсивно перечислимую область истинности, то проблема истинности П в G разрешима. Доказательство по сути дела повторяет схему рассуждений, приведенную выше для предиката П⇌«равенство единичному элементу».

Понятие аппроксимируемости можно обобщить, перенеся его с класса конечных групп на произвольный (рекурсивно перечислимый) класс групп. Из него при естественных предположениях можно извлекать следствия алгоритмического характера.

В нашем обзоре результаты по обычной финитной аппроксимируемости групп почти не упоминаются. Относительно них см., например, обзор авторов совместно с Г. А. Носковым «Бесконечные группы» [171]. В то же время, финитная аппроксимируемость относительно других предикатов в обзоре освещается достаточно полно.

1.4. Книги, обзоры, статьи общего характера. Современное состояние алгоритмической теории групп отражено в трудах Калифорнийской 1973 г. и Оксфордской 1976 г. международных конференций по алгоритмическим вопросам алгебры.

Изложение результатов в этой области, полученных в 70-е годы, содержится в обзоре Г. А. Носкова, В. Н. Ремесленникова, В. А. Романькова [171].

Из книг, затрагивающих многие вопросы алгоритмического характера, отметим здесь учебник Магнуса, Карраса и Солитера [124] и монографию Линдона, Шуппа [119].

Книга Миллера [467] и его обзор [468] посвящены описанию результатов о разрешимости проблем в некоторых классах конечно определенных групп. О применении метода Нильсена см. обзорную статью Розенбергера [509]. Об алгоритмических проблемах в теории разрешимых групп можно узнать из обзоров М. И. Каргаполова [416] и В. Н. Ремесленникова, Н. С. Романовского [501]. Вопросы разрешимости уравнений в группах, в том числе и алгоритмические, обсуждаются в обзоре Линдона [444]. Связи с топологией посвящены книга [548] и обзорная статья [549] Стилуэлла, обзор Буна, Хакена, Поэнару [304]. Представляют интерес с нашей точки зрения лекции Коэна [340], Джонсона [414], обзор Эванса [371].

Мы затрагиваем алгоритмические вопросы для линейных групп, но не стремимся к достаточно полному их представлению ввиду наличия специальных обзоров Ю. И. Мерзлякова [148, 149]. Результаты, относящиеся к упорядоченным группам, можно найти в обзоре В. М. Копытова [111]. Остались вне поля нашего рассмотрения интересные и важные проблемы, связанные с теорией полей и проконечными группами. Не затрагиваются практические, машинные алгоритмы и алгоритмы для класса конечных групп.

1.5. Обозначения. Общепринятые понятия и обозначения в тексте обзора специально не оговариваются.

Используются следующие сокращения записи: к. п. — конечно порожденная; к. о. — конечно определенная; р. о. — рекурсивно определенная; р. п. — рекурсивно перечислимая (возможны также другие окончания сокращаемых терминов).

В тексте обзора отмечаются некоторые открытые проблемы. В большинстве случаев они хорошо известны, поэтому мы не указываем их авторов.

§ 2. Проблема равенства

2.1. Отрицательные решения. В 1952 году Петр Сергеевич Новиков построил пример к. о. группы с неразрешимой проблемой равенства. Первоначальный вариант примера, анонсированный в [160], опирался на неразрешимость проблемы эквивалентности в исчислениях Поста [494]. В полном тексте [162] (см. также [163, 164, 478]) конструкция группы упрощена. Теперь в ее основе лежит появившийся к тому времени результат Тьюринга [560] о неразрешимости проблемы равенства для полугрупп с сокращением. В доказательстве Тьюринга, однако, имелись пробелы. Но сам результат верен — это с наибольшей убедительностью подтверждено П. С. Новиковым и С. И. Адяном [165], построившими независимо довольно простой пример такой полугруппы.

Замечательный пример П. С. Новикова имел принципиальное значение для дальнейших исследований алгоритмических вопросов теории групп.

Бун [296], опираясь на результат Тьюринга [559] о существовании машины с неразрешимой проблемой промежуточной конфигурации и Поста [495], указавшего способ построения по машине системы исчисления, используя методы А. И. Мальцева [128] и Тьюринга [560], также пришел к построению к. о. группы с неразрешимой проблемой равенства. Улучшение и упрощение этого результата содержится в [297, 298].

Бриттон [317] добивается дальнейшего упрощения конструкции к. о. группы с неразрешимой проблемой равенства. Его методы уже чисто теоретико-групповые. Они заключаются в изучении и использовании свободных конструкций, т. е. свободного произведения с объединением и HNN-расширения. Показано, что применение свободных конструкций может выводить за пределы класса групп с разрешимой проблемой равенства. Неразрешимость в примере Бриттона вытекает из известного факта о несуществовании Универсальной машины Тьюринга. Другой пример Бриттона — группа Буна из [297, 298] содержится в [308].

В дальнейшем были найдены различные способы построения к. о. групп с неразрешимой проблемой равенства. Оригинальную идею выдвинули Маккензи и Томпсон. В их работе [464] группа появляется как группа некоторых преобразований множества бесконечных последовательностей натуральных чисел. Ондеро и Коэн [255] для построения группы применили введенную ими машину, впоследствии названную модулярной. Эта машина использовалась для аналогичных построений Стилуэллом [549], Калоркоти [415] (к последней работе, где передоказывается много результатов из этого параграфа, мы еще вернемся в п. 2.2). Отметим также примеры В. В. Борисова [33]. Другие примеры можно извлечь из обсуждаемых далее результатов о вложениях групп с сохранением определенных свойств.

Пример В. В. Борисова к. о. группы с неразрешимой проблемой равенства имеет 12 соотношений. Коллинз [342] построил такой пример с 14 соотношениями. В то же время хорошо известно (Магнус [452]), что группы с одним соотношением имеют разрешимую проблему равенства.

Проблема 1. Какое минимальное число соотношений может иметь к. о. группа с неразрешимой проблемой равенства? В частности, разрешима ли проблема равенства в к. о. группе с двумя соотношениями?

2.2. Степень неразрешимости. В своем выступлении на IV Математическом съезде в 1961 году А. И. Мальцев поставил следующую проблему: существуют ли к. о. группы с произвольной р. п. степенью неразрешимости проблемы равенства?

Для тьюринговых степеней положительный ответ дал А. А. Фридман [237, 238]. Схема его доказательства такова. По р. п. степени α строится машина Тьюринга, для которой α — степень неразрешимости некоторой проблемы типа остановки. Затем от машины переходим к полугруппе, и далее, используя метод Буна, к группе. Основное в доказательстве — установить, что α как степень неразрешимости проблемы равенства переносится с полугруппы на группу.

То же утверждение следует из результатов Клапема [334, 335], установившего, что при вложении Хигмэна [400] р. о. группы G в к. о. группу H степени неразрешимости проблемы равенства в G и H совпадают. Несколько позднее этим вопросом занимались Бун [300, 301] и Л. А. Бокуть [31], также ответившие на вопрос А. И. Мальцева.

Степенью неразрешимости проблемы равенства к. о. группы может быть любая р. п. табличная степень (М. К. Валиев [36], Бун [303], Коллинз [346], Ондеро и Коэн [256]). Относительно m-степеней см. работы О. В. Белеградека [25] и Йоккуша [413].

Калоркоти [415] дал новые доказательства приведенных результатов, касающихся тьюринговых и табличных степеней неразрешимости проблемы равенства. Он также передоказал теорему Хигмэна о вложении р. о. группы в к. о. группу. Основное преимущество используемой им модулярной машины вместо машины Тьюринга (такой вариант предлагался Ондеро и Коэном [256], Ротманом [513]) состоит в том, что нет необходимости проходить полугрупповую стадию, можно от машины идти сразу к группе. Вариант вложения, предложенный Калоркоти, сохраняет степень неразрешимости проблемы равенства.

О работах, посвященных сравнению степеней неразрешимости различных алгоритмических проблем, а также теоремам вложения с сохранением этих степеней, речь пойдет в § 3.

2.3. Положительные решения. Долгое время практически единственным классом к. о. групп с разрешимой проблемой равенства был класс групп с одним соотношением, для которого разрешающий алгоритм построен Магнусом в 1932 году [452].

Другим, уже достаточно широким классом к. о. групп с разрешимой проблемой равенства стал класс групп с малым сокращением.

Пусть $F(X)$ — свободная группа, R — симметризованное множество соотношений, т. е. множество циклически несократимых слов, содержащее вместе с каждым своим элементом обратный к нему и все его циклические перестановки. Общее начальное подслово двух различных слов из R называется куском.

Рассматриваются следующие условия относительно представления $\langle X|R\rangle$:

$C'(\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{R}$, — длина любого куска меньше λ от длины соответствующего слова;

$C(p)$, $p\in\mathbf{N}$, — никакой элемент из R не разбивается в произведение менее, чем p кусков;

$T(q)$, $q\in\mathbf{N}$, — для любого набора слов $r_1, r_2, \ldots, r_t\in R$, $3\leqslant t<q$, $r_i\neq r_{i+1}^{-1}$, по крайней мере одна из пар r_1r_2, $r_2r_3, \ldots, r_{t-1}r_t$, r_tr_1 не сократима.

Заметим, что из $C'(1/p)$ вытекает $C(p+1)$.

Условия малого сокращения определяются точно таким же образом для элементов любой группы, в которой есть понятие «длины» элемента, например, для элементов свободных произведений групп.

Группы с малым сокращением появились еще в работах Дена, однако их изучение по существу начато только в конце 40-х годов. В. А. Тартаковский [221—223] решил проблему равенства для к. о. факторгрупп свободных произведений циклических групп по множеству определяющих соотношений R, удовлетворяющему условию $C(7)$ (будем писать для краткости $R \in C(7)$). Бриттон [316] исследовал факторгруппы свободных произведений групп относительно множества соотношений $R \in C'(1/6)$ и решил в них проблему равенства. М. Д. Гриндлингер [384, 385] получил ряд интересных результатов, в частности, решил проблему равенства для случая $R \in C'(1/6)$. Шик [529] ввел в рассмотрение условие $T(q)$ и решил проблему равенства для случая $R \in C'(1/4) \wedge T(4)$. Наконец, Линдон [443] решил проблему равенства для случая $R \in C(6)$, следовательно, и для случая $C'(1/5)$, являющегося экстремальным, поскольку в [46] показано, что любая к. о. группа допускает представление (его можно получить эффективно из данного), в котором длина каждого куска не превышает 1/5 длины соотношения (в условии $C'(1/5)$ неравенство строгое!). Линдоном [443] также доказана разрешимость проблемы равенства в случаях $R \in C(4) \wedge T(4)$, $R \in C(3) \wedge T(6)$. Подробное изложение этих и некоторых других результатов по группам с малым сокращением содержится в книге Линдона, Шуппа [119].

Разрешимость проблемы равенства в группах с малым сокращением как правило вытекает из возможности применения к ним алгоритма Дена или его обобщений. Этот алгоритм в чистом виде основан на таком утверждении: если несократимое слово w определяет единицу в G, то w содержит более 1/2 некоторого соотношения. Алгоритм очевиден: в таком случае длину w можно эффективно уменьшить, не изменяя его значения в G. Ден доказал приведенное утверждение для фундаментальных групп ориентируемых замкнутых 2-многообразий.

Результаты Дена получались геометрически. Начальный этап развития теории групп с малым сокращением, однако, был чисто алгебраическим. Возрождение геометрического подхода в работе Линдона [443] открыло новый путь развития теории, приведшей к значительным результатам.

Теперь теория малых сокращений начинается с полузабытой в то время теоремы Ван Кампена [563], заново открытой Линдоном. Пусть $G=\langle X|R\rangle$ — задание группы через порождающие элементы и определяющие соотношения. Пусть $F=F(X)$ — свободная группа и N — нормальное замыкание множества R в F. Элемент w из F представляет единицу в G тогда и только

тогда, когда $w \in N$, т. е. является произведением элементов, сопряженных с элементами множества $R^{\pm 1}$, $w=c_1c_2\ldots c_k$. С каждым таким произведением связывается диаграмма на плоскости, содержащая всю существенную информацию относительно $c_1c_2\ldots c_k$.

При исследовании происходит переход к диаграммам более простого вида, позволяющим делать выводы из применяемых комбинаторных рассуждений. Геометрический подход позволил использовать числовые неравенства различного вида, вытекающие из комбинаторики и условий малого сокращения. Известны обобщения теоремы Ван Кампена и других утверждений на свободные произведения групп. Мы не приводим здесь более подробного изложения с соответствующими ссылками, поскольку все это содержится в довольно полном объеме в книге Линдона, Шуппа [119].

Дальнейшее развитие метода осуществлено в работах [173—175] А. Ю. Ольшанским, построившим с его использованием примеры бесконечной простой группы G без кручения, все собственные подгруппы которой циклические, и бесконечной группы H, все собственные подгруппы которой имеют простые порядки. Группа H эффективно задана порождающими элементами и определяющими соотношениями, подгруппы одинаковых порядков в ней сопряжены, проблемы равенства и сопряженности разрешимы.

Связи между проблемой равенства слов в полугруппе P и группе G с теми же соотношениями исследованы О. А. Саркисян [201]. В предыдущей работе (см. [171]) устанавливалось, что если система определяющих соотношений P не содержит циклов, то разрешимости проблемы делимости в P достаточно для разрешимости проблемы равенства в G. В [201] разрешимость проблемы делимости в рассматриваемом случае доказана. Поэтому в классе к. о. групп, задаваемых системами определяющих соотношений в положительном алфавите, не содержащими циклов, разрешима проблема равенства.

2.4. Характеризации групп. В работе Буна и Хигмэна [305] доказано, что к. п. группа G имеет разрешимую проблему равенства в том и только том случае, если существуют вложения $G \leqslant S \leqslant K$, где S — простая, K — к. о. группы.

Проблема 2. Верно ли, что к. п. группа имеет разрешимую проблему равенства в том и только том случае, если она вложима в простую к. о. группу?

Справедливо более сильное, чем в [305], утверждение Томпсона [556]: к. п. группа G имеет разрешимую проблему равенства в том и только том случае, когда существуют вложения $G \leqslant S \leqslant K$, где S — к. п. простая, K — к. о. группы. При этом элементы, не сопряженные в G, остаются таковыми и в S. Результат получен Томпсоном независимо от [305] и использует технику, развитую в [464].

В короткой заметке [502], опирающейся на приведенные утверждения, дается характеризация следующего вида. Группа $G=\text{гр}(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ имеет разрешимую проблему равенства тогда и только тогда, когда существует выполнимая формула первого порядка групповой сигнатуры $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такая, что из $H\models\Phi(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ следует вложимость G в H, продолжающая отображение $g_i\to h_i$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Херли [407] доказал, что к. п. группа имеет разрешимую проблему равенства тогда и только тогда, когда она вложима в группу автоморфизмов к. п. свободной алгебры некоторого р. о. минимального многообразия. А. В. Кузнецов [113] заметил, что к. п. группа имеет разрешимую проблему равенства тогда и только тогда, когда она вложима в простую к. о. алгебру.

По теореме Неймана [477] любая к. п. группа с разрешимой проблемой равенства вложима во все алгебраически замкнутые группы. Макинтайр [448] установил справедливость обратного утверждения: если к. п. группа вложима во все алгебраически замкнутые группы, то в ней разрешима проблема равенства. Более того, он показал, что если к. п. группа H_1 вложима в любую алгебраически замкнутую группу, в которую вложима к. п. группа H_2, то проблема равенства в H_1 сводима по Тьюрингу к проблеме равенства в H_2.

О. В. Белеградек [22] нашел необходимые и достаточные условия для обращения последнего утверждения на языке Q-сводимости. Отсюда и из упомянутого в [22] результата В. П. Добрицы, согласно которому любая Q-степень реализуется как степень проблемы равенства некоторой к. п. группы, следует, что в общем случае обращение теоремы Макинтайра неверно.

2.5. Сложность алгоритмов. В серии работ Авенхауза и Мадленера [266—269, 271] изучаются вопросы, связанные с оценкой сложности разрешающих алгоритмов, формулируемой на языке теории рекурсивных функций. Кроме того, устанавливается вложимость р. о. групп в к. о. с сохранением сложности проблемы равенства, изучается связь между сложностью проблемы равенства в группе и ее HNN-расширении.

Сравнению сложностей алгоритмов посвящены также работы Каннонито [324], Каннонито и Гаттердама [326], З. К. Литвинцевой [121], М. К. Валиева [561].

§ 3. Другие проблемы

3.1. Проблема сопряженности. Очевидно, что в группе с неразрешимой проблемой равенства проблема сопряженности также неразрешима. Поэтому целью работы П. С. Новикова [161] было дать более простой, чем в [162], пример к. о. группы с неразрешимой проблемой сопряженности. Показано, как

по произвольной системе Поста $\mathfrak{P}$ можно эффективно построить к. о. группу G и отображение φ такие, что слова w_1, w_2 эквивалентны в $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда, когда их образы w_1^φ, w_2^φ сопряжены в G. Следует отметить, что группа G в ряде случаев имеет разрешимую проблему равенства [30, 236].

Коллинз [341] доказал, что к. о. подгруппа G р. о. группы H с разрешимой проблемой сопряженности может иметь неразрешимую проблему сопряженности. Им же установлено [348], что способ вложения Хигмэна [400] р. о. группы в к. о. может привести к группе с неразрешимой проблемой сопряженности, если даже в исходной группе она была разрешима. В работе [343] Коллинз дает конструктивный переход от р. п. степени α к к. о. группе G, имеющей разрешимую проблему равенства и проблему сопряженности степени неразрешимости α. В работе [342] Коллинз указывает пример группы с 11 соотношениями и неразрешимой проблемой сопряженности.

А. В. Горяга и А. С. Киркинский [49] построили пример группы, показывающий, что разрешимость проблемы сопряженности не переносится на конечные расширения. В независимой от [49] работе Коллинза и Миллера [349] приведены примеры к. о. групп G_i и их подгрупп $H_i\leqslant G_i$, $i=1,2$, индексов 2, таких, что в G_1, H_2 проблема сопряженности разрешима, а в G_2, H_1 — нет.

Как и в случае проблемы равенства, наиболее широкий класс к. о. групп с разрешимой проблемой сопряженности образует группы с условиями малого сокращения. Соответствующие исследования проводились параллельно с изучением проблемы равенства в этих группах по той же схеме: вначале ряд результатов был получен чисто алгебраическими методами [53—57, 384, 428], затем с введением кольцевых диаграмм (см. [119]) был возрожден геометрический подход, которому посвящены работы [470, 531]. Наиболее сильные результаты, полученные Шуппом [531], показывают, что класс групп с условиями малого сокращения и разрешимой проблемой сопряженности так же широк, как аналогичный класс относительно проблемы равенства, в частности, он включает в себя группы с условием $C'(1/5)$ (см. [119] относительно этих результатов). Комерфорд [352] показал, что в группах с условиями малого сокращения (в частности, с условием $C'(1/5)$) подгруппы конечного индекса наследуют свойство иметь разрешимую проблему сопряженности.

Поскольку применение свободных конструкций не сохраняет разрешимости проблемы равенства, а следовательно, и проблемы сопряженности, в ряде работ изучались достаточные условия, при которых такое сохранение все же имеет место. Это так, если берется свободное произведение свободных групп с объединенной циклической подгруппой [17, 428], различные обобщения — в [355, 430, 435, 436]. В работах [259, 320, 336, 355, 409, 419] даются достаточные условия для разрешимости проблемы сопряженности HNN-расширений. В работах [97, 98] приведены некоторые достаточные условия для разрешимости проблемы сопряженности в расширениях групп.

Гурвиц [408] доказал разрешимость проблемы сопряженности для групп вида $F_n \ast F_m/[H, K]$, где $H \leqslant F_n$, $K \leqslant F_m$ — к. п. подгруппы, Ларсен [418] — для групп вида $F_n \underset{H=H^{\varphi}}{\ast} F_n$, где $H \leqslant F_n$ — к. п. подгруппа, φ — изоморфизм сомножителей.

В. Н. Ремесленников [185] доказал, что свободное произведение ФАС-групп является ФАС-группой (см. также [543]). Дайер [361] доказала, что свободное произведение ФАС-групп с конечным объединением и HNN-расширение ФАС-группы с конечными ассоциированными подгруппами является ФАС-группой. В ее работе [360] установлено, что свойством ФАС обладают конечные расширения свободных групп. В работах [158, 159] устанавливается аппроксимируемость свободных групп относительно сопряженности конкретными классами групп.

В работе В. Н. Ремесленникова и В. Г. Соколова [190] доказано, что если F/R — р. о. группа без кручения, в которой разрешимы проблемы сопряженности и вхождения в циклические подгруппы, то в группе F/R' разрешима проблема сопряженности. Ограничение «без кручения» снято в [393]. А. Л. Шмелькин [250] доказал, что если R — нормальная подгруппа свободного произведения групп G, лежащая в декартовой подгруппе, все сомножители G имеют разрешимые проблемы сопряженности и вхождения в циклические подгруппы, являются группами с однозначным извлечением корня, то в группе $F/R^{(l)}$, $l \in \mathbf{N}$, разрешима проблема сопряженности.

3.2. Проблема вхождения. В группе $F_2 \times F_2$ проблема вхождения неразрешима. Это простое следствие из существования к. о. группы с неразрешимой проблемой равенства получено К. А. Михайловой [150]. Напротив, свободное произведение групп с разрешимой проблемой вхождения также имеет разрешимую проблему вхождения [151]. Другое доказательство содержится в [308]. Оно основано на том факте, что разложение к. п. подгруппы свободного произведения в свободное произведение по теореме А. Г. Куроша можно осуществить эффективным образом. Обобщение приведенной разрешимости на нильпотентные произведения групп содержится в [251, 252].

В отличие от рассмотренных ранее проблем равенства и сопряженности разрешимость проблемы вхождения не следует из условий малого сокращения [503].

Некоторые достаточные условия разрешимости проблемы вхождения в свободных произведениях с объединением и HNN-расширениях приведены в [18, 82], расширениях — в [97, 98].

В работе В. Н. Безверхнего [15] указан пример группы вида $F_2 \underset{H=H^{\varphi}}{\ast} F_2$, где $H \leqslant F_2$ — к. п. подгруппа, φ — изоморфизм сомножителей, проблема вхождения в которой неразрешима (ср. с результатом Ларсена из 3.1).

Свободное произведение ФАВ-групп, как показал Н. С. Романовский [191], также является ФАВ-группой.

Н. Г. Шахова [247] доказала, что свойство ФАВ сохраняется при свободных произведениях с конечными объединениями и HNN-расширениях с конечными ассоциированными подгруппами.

Близкой по постановке к проблеме вхождения является обобщенная проблема равенства Магнуса. Пусть $G = \langle X \mid R \rangle$ — к. о. группа, $X' \subseteq X$, $H = \text{гр}\,(X')$. Существует ли алгоритм, решающий проблему вхождения в H? Магнус [452] дал положительный ответ в случае, когда R состоит из одного соотношения. М. Д. Гриндлингер [52] положительно решил эту проблему в случае, когда $R \in C'(1/6)$, и каждая левая половина слова из R (включающая среднюю букву, если она есть) содержит элемент из X'. Отрицательные решения указанной проблемы легко получить из отрицательных решений проблемы вхождения. Некоторое обобщение задачи Магнуса рассматривалось в [295].

3.3. Другие проблемы. Проблемы об элементах. В ряде работ Мак-Кула, Липшуца, Комерфорда рассматривались следующие алгоритмические проблемы:

порядка: каков порядок элемента?

степени: входит ли элемент в данную циклическую подгруппу?

корня: извлекается ли из элемента нетривиальный корень?

Проблемы степени и корня разрешимы в группах с условием $C'(1/6)$ [431]. Проблема степени разрешима в группах с одним соотношением [460]. Для любой пары взаимно простых чисел m, n существует р. о. группа, в которой проблема извлечения корня m-й степени разрешима, а n-й степени — нет ([437], близкий результат в [282]). О сохранении разрешимости указанных проблем в свободных конструкциях см. в [261, 429, 457, 458].

Независимость проблем порядка, степени, корня в классе р. о. групп показана в [432]. Существуют группы с разрешимой проблемой равенства и неразрешимыми проблемами порядка и степени [459]. Более точно, для любой тройки р. п. степеней $\alpha \leqslant \beta$, γ найдется к. о. группа, для которой α — степень неразрешимости проблемы равенства, β — степени, γ — порядка [347]. В работе [328] доказано, что алгоритмы, решающие проблемы равенства и степени для групп с одним соотношением, примитивно рекурсивны. Проблема сопряженности для степеней элементов рассматривалась в [263, 351].

Проблемы о подгруппах. Разрешимость проблемы сопряженности к. п. подгрупп свободной группы установлена

Д. И. Молдаванским [152] (см. также [307]). Обобщение этого результата на свободные произведения изложено в [153]: для разрешимости указанной проблемы необходимо и достаточно, чтобы она и проблема вхождения решались в сомножителях. М. Д. Гриндлингер [59] доказал, что в свободной группе 2-порожденные подгруппы сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены коммутаторы их порождающих элементов (один из них, возможно, в степени —1). О сопряженности подгрупп в свободных произведениях с объединением см. в [16, 272].

Алгоритмы нахождения порождающих элементов пересечения к. п. подгрупп свободной группы представлены в [14].

Различным характеризациям к. п. групп с разрешимыми алгоритмическими проблемами в духе теорем Буна — Хигмэна, Неймана (см. § 2) посвящены работы О. В. Белеградека [27] и Сачердоте [517]. Приведем один результат из [27]. Пусть $v(\bar{x}, \bar{y})$ — групповое слово от наборов переменных $\bar{x}, \bar{y}, \bar{g}$ — набор элементов группы G. Формула $\Pi(\bar{x}) \rightleftarrows \exists\bar{x}\,(v(\bar{x}, \bar{g})=1)$ определяет предикат, называемый вербальным. Пусть G — к. п. группа с разрешимой проблемой равенства. В этом случае область истинности предиката $P(\bar{x})$ на G рекурсивна тогда и только тогда, когда существуют вложения $G \leqslant S \leqslant K$, где S — простая, K — к. о. группы, и $P(\bar{x})$ — ограничение на G некоторого вербального в S предиката $\Pi(\bar{x})$.

§ 4. Разрешимые группы

Отрицательные решения основных алгоритмических проблем в классе всех к. о. групп определили необходимость их решения в важнейших классах групп. Несомненно, что одно из центральных мест в этих исследованиях заняли разрешимые группы. Общему направлению работы, некоторым результатам и проблемам посвящены обзорные доклады М. И. Каргаполова [416], В. Н. Ремесленникова и Н. С. Романовского [501].

Определились два подхода к постановке алгоритмических задач в рассматриваемом классе разрешимых групп. Во-первых, исследуются к. о. разрешимые группы, т. е. такие к. о. группы, в которых условия разрешимости вытекают из определяющих соотношений. Во-вторых, рассматриваются группы к. о. в многообразиях групп, т. е. группы, заданные конечным множеством соотношений по модулю тождеств, определяющих многообразие.

В целом можно сказать, что основные алгоритмические проблемы при обеих возможных постановках в классе разрешимых групп также решаются отрицательно. По этой причине мы выделяем к. п. нильпотентные и полициклические группы, где основные алгоритмические проблемы решаются положительно, а также метабелевы и близкие к ним группы, где специфика алгоритмических задач сводит их к вопросам о коммутативных кольцах и часто приводит к положительным решениям. При этом мы подходим к «границе разрешимости» алгоритмических проблем «снизу». Важной задачей является определение этой «границы».

4.1. Нильпотентные и полициклические группы. К. п. нильпотентные группы конечно определены, представимы матрицами над $\mathbf{Z}$, финитно аппроксимируемы (см. [89, 171, 244]). Все это позволяет дать различные алгоритмы, решающие в них проблему равенства. Важное значение имеет факт существования в произвольной к. о. нильпотентной группе без кручения G центрального ряда

$$G=G_0 \triangleright G_1 \triangleright \ldots \triangleright G_k \triangleright G_{k+1}=1$$

с бесконечными циклическими факторами. Если зафиксировать для каждого фактора G_{i-1}/G_i представитель $u_i \in G_{i-1}$, то любой элемент $g \in G$ однозначно записывается в виде

$$g=u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_{k+1}^{\alpha_{k+1}}, \quad \alpha_i \in \mathbf{Z}.$$

Элементы $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}$ образуют так называемую мальцевскую базу группы G, показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$ называются мальцевскими координатами элемента g. Координаты произведения двух элементов группы G определяются как значения некоторых фиксированных многочленов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k+1}$ от координат сомножителей. То же самое можно сказать относительно возведения элемента g в произвольную степень $\beta \in \mathbf{Z}$. Это позволяет определить для произвольного биномиального кольца $\mathfrak{O}$ понятие $\mathfrak{O}$-степенной группы $G^{\mathfrak{S}}$ (см. [244]), элементами которой являются выражения

$$g=u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_{k+1}^{\alpha_{k+1}}, \quad \alpha_i \in \mathfrak{S},$$

а их умножение и возведение в степень $\beta \in \mathfrak{O}$ производится с помощью многочленов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, упомянутых ранее.

В работе А. И. Мальцева [129] показано, как по произвольной подгруппе свободной нильпотентной группы конечного ранга определить ее мальцевскую базу. Это позволяет решить проблему равенства в любой к. п. нильпотентной группе.

М. И. Каргаполов и его ученики [91] установили разрешимость алгоритмических проблем равенства, сопряженности, вхождения и некоторых других проблем в $\mathfrak{O}$-степенных группах для достаточно широкого класса колец $\mathfrak{O}$. При этом разрешающие алгоритмы имеют унифицированный характер.

Полициклические группы так же, как к. п. нильпотентные группы, конечно определены, представимы матрицами над $\mathbf{Z}$, финитно аппроксимируемы (см. [89, 171, 244]). Следовательно, проблема равенства в них разрешима. Разрешимость проблем сопряженности и вхождения в полициклических группах следуют из их аппроксимационных свойств, к рассмотрению которых мы сейчас переходим.

О свойстве ФАВ. А. И. Мальцев [130] описал класс разрешимых групп со свойством ФАВ. Он указал, что в разрешимой группе G все подгруппы являются отделимыми тогда и только тогда, когда группа G является ограниченной. Это значит, что в G существует конечный нормальный ряд с абелевыми факторами, в которых примарные подгруппы конечны и никакая секция не содержит квазициклической группы. Очевидно, что в класс ограниченных разрешимых групп попадают все полициклические группы.

О свойстве ФАС. Первая работа — Блэкберна [293]. В ней доказано, что любая к. п. нильпотентная группа обладает свойством ФАС. Новые идеи М. И. Каргаполова позволили обобщить это утверждение на сверхразрешимые (М. И. Каргаполов [88]), почти нильпотентные [208] и, наконец, почти полициклические (В. Н. Ремесленников [184], независимое доказательство — Форманек [379]) группы.

Стиб [547] представил общую теорему об аппроксимационных свойствах к. п. нильпотентных групп, из которой следуют свойства ФАВ и ФАС.

В. Н. Ремесленников [183] доказал, что две подгруппы в к. п. нильпотентной группе G сопряжены в том и только том случае, если сопряжены образы этих подгрупп относительно любого гомоморфизма G на конечную группу. Обобщение этого результата на подгруппы полициклических групп получено Грюневальдом и Сигалом [390].

Хилтон и Ройтберг [401] обобщили свойство ФАС к. п. нильпотентных групп на случай, когда группа G действует на группе H (обе они к. п. и нильпотентны), а сопряженность в H понимается как принадлежность элементов из H одной G-орбите (классический случай: $G=H$, действие — сопряжение). По-видимому, справедлив аналог этого утверждения для полициклических групп.

4.2. Свободные разрешимые группы и группы вида F/N'. Пусть F — свободная группа с базой $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $N \Delta F$, T — свободный $\mathbf{Z}(F/N)$-модуль с базой $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Группа F/N', $N'=[N, N]$, вложима в группу матриц $M(F/N, T)$ вида

$$\begin{bmatrix} g & \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_n t_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g \in F/N, \quad \alpha_i \in \mathbf{Z}(F/N), \tag{1}$$

относительно отображения

$$w \to \begin{bmatrix} \bar{w} & \frac{\partial w}{\partial x_1} t_1 + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_n} t_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\bar{w}$ — образ w в F/N, $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ — значение i-й производной Фокса в $\mathbf{Z}(F/N)$ (см. [190]). При этом элемент (1) принадлежит образу F/N' тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1(x_1-1) + \ldots + \alpha_n(x_n-1) = g-1.$$

Легко видеть, что $M(F/N, T)$ является сплетением $A_n \wr F/N$ свободной абелевой группы A_n ранга n с группой F/N.

Пусть S_n — свободная разрешимая группа конечного ранга r ступени n. Тогда S_n имеет вид F_r/N', где N — прообраз в F_r последнего нееединичного коммутанта группы S_n. Из приведенных результатов следует, что в S_n разрешима проблема сопряженности. Впервые это доказали М. И. Каргаполов, В. Н. Ремесленников [90]. Проблема сопряженности в свободных полинильпотентных группах решена Р. А. Саркисяном [202].

Отметим, что проблема вхождения в S_n, $n \geqslant 3$, до сих пор не решена. Она легко сводится к вопросу об алгоритмической разрешимости систем линейных уравнений над $\mathbf{Z}S_{n-1}$. Для одного уравнения этот вопрос решается положительно, что позволило В. Г. Соколову [214] установить разрешимость проблемы равенства в группах с одним соотношением из последнего коммутанта. Обобщение этого результата на полинильпотентные группы типа $(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, 2)$ — в [83].

4.3. Общий случай. Отрицательные решения проблемы равенства. Первый пример к. о. в многообразии $\mathfrak{A}^l$, $l \geqslant 5$, группы с неразрешимой проблемой равенства построен В. Н. Ремесленниковым [186]. Им же доказано, что в некоторой к. о. в $\mathfrak{A}^4$ группе существует к. п. подгруппа, проблема вхождения в которую неразрешима.

Дальнейшее обобщение этих результатов осуществлено В. И. Епанчинцевым и Г. П. Кукиным [68]. Они доказали, что в любом многообразии групп, содержащем подмногообразие $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$, найдется к. о. в этом многообразии группа с неразрешимой проблемой равенства.

Наконец, О. Г. Харлампович [242] построила к. о. разрешимую ступени 3 группу G с неразрешимой проблемой равенства. Группа G задается в явном виде порождающими элементами и определяющими соотношениями. В доказательстве используется интерпретация машины Минского в группе, а также один прием построения группы по полугруппе, использовавшейся ранее в [172].

Положительные решения проблемы равенства. Известно, что к. п. метабелевы группы конечно определены в $\mathfrak{A}^2$, финитно аппроксимируемы и имеют разрешимую проблему равенства (см. [171]).

Прямой алгоритм, решающий в них проблему равенства, предложен Е. И. Тимошенко [228].

Граница разрешимости проблемы равенства в классе разрешимых групп лежит в свете приведенных результатов где-то вблизи многообразия метабелевых групп. Н. С. Романовский [195] показал, что проблема равенства разрешима для к. п. центрально метабелевых групп.

Интересно отметить, что к. о. группы, попадающие в многообразие $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$, финитно аппроксимируемы [292] и, следовательно, имеют разрешимую проблему равенства. Это утверждение контрастирует с упомянутым выше результатом Г. П. Кукина, В. И. Епанчинцева, показывая существенность в различии постановок задачи.

Другие проблемы. Проблема вхождения решена Н. С. Романовским для к. п. метабелевых [192] и к. п. $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$-групп [194].

Г. А. Носков [170] решил трудную задачу Каргаполова, показав разрешимость проблемы сопряженности в к. п. метабелевых группах. Отметим, что свойством ФАС эти группы обладают не всегда (М. И. Каргаполов, Е. И. Тимошенко [92], Верфриц [567, 569]).

§ 5. Другие группы

5.1. Линейные группы. Специфика задач. Можно выделить два подхода к постановке алгоритмических задач для линейных групп. Во-первых, задача ставится для к. п. группы матриц, заданной порождающими элементами или, более общо, для группы матриц определенного вида. Во-вторых, задача ставится для к. о. группы, про которую известно, что она представима матрицами. В первом случае проблема равенства решается сама собой. При второй постановке вопроса ее разрешимость часто вытекает либо из финитной аппроксимируемости к. п. линейных групп над полем, установленной в 1940 г. А. И. Мальцевым, либо из возможности перехода к первой постановке вопроса при помощи эффективного вложения группы в группу матриц.

Многие вопросы легко решаются для матричных групп над алгебраически замкнутым полем $\bar{k}$ вследствие разрешимости элементарной теории поля $\bar{k}$. Например, так решается проблема сопряженности в группе $GL_n(\bar{k})$, для которой существует эффективный алгоритм приведения матрицы к жордановой форме.

Ситуация резко усложняется, если мы переходим к незамкнутым полям, хотя и здесь в ряде случаев удается свести задачу к аналогичной задаче для алгебраического замыкания поля.

Алгоритмические задачи для целочисленных матриц (или более общо, для матриц над кольцом целых поля алгебраических чисел) как правило переформулируются на языке разрешимости диофантовых уравнений. В 1970 г. Ю. В. Матиясевич, подытоживая усилия многих математиков, доказал неразрешимость произвольной диофантовой проблемы. Отсюда следует, что при решении алгоритмических задач для целочисленных матриц мы должны выяснять специфику возникающих при этом диофантовых проблем.

Мы не видим необходимости сколь-либо полно представлять в настоящем обзоре алгоритмические результаты в теории линейных групп. Многие из них известны давно и включены в монографии по линейным группам, относительно других см., например, обзоры [148, 149].

Алгебраические группы. Основной прогресс в решении алгоритмических задач для матричных групп достигнут за последнее время в классе алгебраических групп и их арифметических подгрупп. Важные результаты, полученные в этой области Р. А. Саркисяном [203—207], Грюневальдом и Сигалом [388, 389, 391, 392], представляют принципиальную разрешимость многих алгоритмических задач, связанных с алгебраическими группами. Частично эти результаты уже обсуждались авторами и Г. А. Носковым в совместном обзоре «Бесконечные группы» [171]. Здесь мы дополняем указанное обсуждение.

Результаты Р. А. Саркисяна получаются путем рассмотрения алгебраических групп матриц, определенных над полем k алгебраических чисел. Пусть G — такая группа, W — открытая компактная подгруппа группы $G(A_k)$ конечных k-аделей группы G. Тогда 1) существует алгоритм, определяющий совпадение двойных смежных классов $G(k)a_1W$ и $G(k)a_2W$ в группе $G(A_k)$; 2) существует алгоритм, выписывающий все элементы указанного множества двойных смежных классов (известно, что это множество конечно.)

Из приведенных результатов Р. А. Саркисян выводит разрешимость проблемы сопряженности для наборов k-матриц относительно действия групп $GL_n(\mathfrak{O})$, $SL_n(\mathfrak{O})$, где $\mathfrak{O}$ — кольцо целых в k. При этом существенно используется работа Д. К. Фаддеева [232], которому этот результат был также известен (неопубликовано).

Из результатов Грюневальда и Сигала отметим их основные алгоритмические утверждения. Пусть G — алгебраическая подгруппа $GL_n(\mathbf{C})$, определенная конечной системой полиномиальных уравнений над $\mathbf{Q}$. Предположим, что Γ — эффективно заданная арифметическая подгруппа в $G(\mathbf{Z})$. В данном случае это значит, что Γ есть подгруппа конечного индекса в $G(\mathbf{Z})$, верхняя граница индекса задана, в $G(\mathbf{Z})$ разрешима проблема вхождения в Γ.

По теореме Бореля и Хариш-Чандры группа Γ конечно определена. При сделанных предположениях

1) существует алгоритм, выписывающий для Γ задание через конечные множества порождающих элементов и определяющих соотношений;

2) для любой пары векторов $v, w \in \mathbf{Q}^m$ эффективно определяется их принадлежность к одной орбите относительно действия группы $\rho(\Gamma)$, где ρ — представление G в $GL_m(\mathbf{C})$, заданное рациональными функциями над $\mathbf{Q}$.

Эти алгоритмы строятся с помощью «конструктивизации» фундаментальных областей для $G(\mathbf{Z})$ в $G(\mathbf{R})$. Существование фундаментальных областей было доказано (неконструктивно) Борелем и Хариш-Чандрой.

В качестве применения приведенных алгоритмов отметим разрешимость проблемы сопряженности в любой эффективно заданной арифметической подгруппе.

Относительно применений результатов Р. А. Саркисяна и Грюневальда—Сигала к проблеме изоморфизма см. § 7.

Отметим, что приведенные алгоритмы не являются реальными, скорее они дают разрешимость проблем «в принципе». В рассматриваемых случаях остается открытой

Проблема 3. Проблема построения реальных алгоритмов.

Определенный интерес вызывает

Проблема 4. Существует ли к. о. матричная группа с неразрешимой проблемой сопряженности?

Разрешимость алгоритмических проблем в группе $SL_2(\mathbf{Z})$ может быть выведена из ее абстрактного представления в виде произведения с объединением $SL_2(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_6 \underset{\mathbf{Z}_2}{*} \mathbf{Z}_4$. Относительно проблемы сопряженности в этой группе см. также [265]. Возможно, что описание группы $SL_3(\mathbf{Z})$ как «амальгамы» групп, сделанное в работе [541], также поможет при решении в этой группе алгоритмических вопросов.

Проблема вхождения неразрешима уже в группе $SL_4(\mathbf{Z})$, поскольку та содержит изоморфную копию групп $F_2 \times F_2$ (см. § 3). Здесь неразрешимость следует из существования к. о. группы с неразрешимой проблемой равенства. Близкую задачу рассматривал А. А. Марков [137], выводивший неразрешимость из более простых фактов. Проблемы вхождения в к. п. разрешимые группы матриц над полями алгебраических чисел и некоторыми нумерованными полями решены В. М. Копытовым [109, 110].

5.2. Периодические группы. Пусть $B(m, n)$ — свободная группа ранга m в многообразии всех групп периода n. Согласно знаменитой теореме П. С. Новикова и С. И. Адяна [9, 166] при $m \geqslant 2$ и достаточно больших нечетных n группа $B(m, n)$ бесконечна. Начальная граница $n \geqslant 4381$, указанная в [166], после упрощений доказательства теоремы, осуществленных в монографии С. И. Адяна [9], снижена до $n \geqslant 665$. Конструктивность используемых в работах П. С. Новикова и С. И. Адяна методов позволила установить разрешимость в группе $B(m, n)$ при нечетном $n \geqslant 665$ проблем равенства и сопряженности (см. [9]).

В [257] С. И. Адян доказал, что к. о. группа G, все определяющие соотношения которой имеют вид $r_i^{k_i n} = 1$, где $k_i n$ — нечетные числа, $n \geqslant 665$, не содержащая элементов порядка 2, имеет разрешимую проблему равенства (отмечено, что то же самое верно для проблемы сопряженности). Конечность множества соотношений не может быть заменена рекурсивностью.

В работе [10] С. И. Адян строит в группе $B(m, n)$ при нечетном $n \geqslant 665$ и $m \geqslant 66$ бесконечную систему дополнительных определяющих соотношений $r_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k, \ldots$, независимых по модулю тождества $x^n = 1$. Отсюда следует существование в группе $B(m, n)$ бесконечных возрастающих и убывающих цепей нормальных подгрупп (аналог этого утверждения для $m \geqslant 2$ и любого составного нечетного $n = ks$, $k \geqslant 665$, $s > 1$, был доказан в [9]). При тех же ограничениях на m, n строится факторгруппа G группы $B(m, n)$, заданная рекурсивным множеством дополнительных соотношений и имеющая неразрешимую проблему равенства.

Отметим также, что введенная С. И. Адяном в [11] конструкция периодического произведения групп сохраняет разрешимость проблем равенства и сопряженности.

§ 6. Проблемы подстановки

Пусть G — группа, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — набор переменных, $f(\bar{x}, G)$ — некоторое групповое слово от этих переменных и элементов группы G. Если $\bar{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ — набор элементов группы G, то естественно определяется значение $f(\bar{h}, G) \in G$ слова $f(\bar{x}, G)$ при подстановке вместо $\bar{x}$ набора $\bar{h}$.

В этом параграфе собраны сведения о результатах алгоритмического характера, так или иначе связанных с приведенной выше схемой подстановки элементов группы в групповое слово (или совокупность слов).

6.1. Уравнения. Пусть $f(\bar{x}, G) = 1$ — уравнение с коэффициентами из группы G. Класс (систем) уравнений $\mathscr{K}$ определенного типа называется алгоритмически разрешимым в G, если существует эффективная процедура, определяющая, имеет ли произвольное уравнение (система уравнений) из $\mathscr{K}$ решение в G или нет. Обзоры исследований по разрешимости уравнений в группах можно найти в книге Линдона, Шуппа [119], статье Линдона [444].

Наиболее интересным является вопрос о разрешимости произвольного уравнения в свободной неабелевой группе. Для уравнений от одной переменной имеется описание множества решений, полученное в работах Линдона [442], Лоренца [122] (см. также [119]). Множество решений задается конечным набором слов вида $ab^\gamma c$, где a, b, c — элементы свободной группы, γ — натуральный параметр. Для уравнений от двух и более переменных множество решений, вообще говоря, не задается через конечную совокупность параметрических слов (см. [171]). Ю. И. Хмелевский [243] построил алгоритм разрешимости в свободной группе систем уравнений вида $f(x_1, x_2) = a$, $u(x_1, G) = v(x_2, G)$, где слово $f(x_1, x_2)$ не содержит коэффициентов, а слова $u(x_1, G)$, $v(x_2, G)$ могут содержать коэффициенты, но переменные в них разделены.

Полное решение обсуждаемой проблемы получено совсем недавно Г. С. Маканиным [126]. Пусть

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m)=1$$

— произвольное уравнение от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ в свободной неабелевой группе F. Пусть δ — длина слова w. В работе [126] построена функция Φ от одной переменной такая, что если рассматриваемое уравнение имеет решение, то оно имеет также решение, длина каждой компоненты которого не превосходит $\Phi(\delta)$. Отсюда получаем простой алгоритм, распознающий разрешимость произвольного уравнения в группе F. Он заключается в подстановке вместо неизвестных всевозможных элементов группы длины не больше, чем δ. Поскольку можно ограничиться рассмотрением групп конечного ранга, это множество конечно.

Примеры к. о. групп с неразрешимой проблемой распознавания разрешимости уравнений строятся легко (см. [282, 444]). Они существуют уже в классе к. п. нильпотентных групп ступени 2.

В тезисах докладов 16-й Всесоюзной алгебраической конференции анонсирован результат Н. Н. Репина, согласно которому существуют к. п. нильпотентные группы, в которых алгоритмически неразрешимы уравнения от одного неизвестного.

Бескоэффициентные уравнения. Такое название носят уравнения вида $f(\bar{x})=g$, где левая часть не содержит коэффициентов из G. Если G — свободная группа в некотором многообразии, имеющая ранг r, а уравнение $f(\bar{x})=g$ не более, чем от r переменных, то рассматриваемую проблему можно трактовать как проблему эндоморфной сводимости в G, считая переменные $\bar{x}$ элементами базиса группы G. Действительно, уравнение имеет решение в том и только том случае, когда элемент g является эндоморфным образом элемента $f(\bar{x})$ в группе G.

Из классических результатов Нильсена и Уайтхеда вытекает алгоритм, распознающий разрешимость бескоэффициентных уравнений от двух переменных в абсолютно свободной группе F. Новые доказательства указанной алгоритмической разрешимости даны Уиксом (см. [171]) и Шуппом [532]. Обобщение на системы уравнений, как уже отмечалось, получено Ю. И. Хмелевским [243].

Слово $f(\bar{x})$ называется квадратичным, если каждая переменная из $\bar{x}$ входит в его запись дважды в степенях ± 1. Для квадратичных слов проблема эндоморфной сводимости в группе F решена Эдмундсом [363, 364]. Дальнейшие усиления и обобщения на свободные произведения — в работе Комерфорда, Эдмундса [354]. Продолжая исследования, Комерфорд

[353] установил разрешимость этой проблемы в группах с условиями $C(p)\wedge T(q)$ в случаях $p=7$, $q=3$; $p=5$, $q=4$; $p=4$, $q=6$.

В. А. Романьков [196] рассматривал проблему разрешимости бескоэффициентных уравнений в свободных нильпотентных группах. Им предложен метод интерпретации диофантовых уравнений в таких группах. Показано, как по произвольному диофантову уравнению $\mathscr{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)=0$ построить групповое уравнение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=a$, разрешимое в свободной нильпотентной группе ступени $l\geqslant 9$ в том и только том случае, если исходное уравнение разрешимо в $\mathbf{Z}$. Отсюда и из неразрешимости диофантовой проблемы следует неразрешимость проблемы распознавания разрешимости бескоэффициентных уравнений в свободных нильпотентных группах ступени $l\geqslant 9$ и проблемы эндоморфной сводимости в тех же группах достаточно большого ранга. Аналогичные результаты справедливы для свободных метабелевых [197, 198] и свободных разрешимых групп произвольной ступени $l\geqslant 3$ [197].

6.2. Проблема тождества. Слово от переменных $f(\bar{x})$ называется тождеством в группе G, если при подстановке любого набора $\bar{h}=(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ элементов из G в $f(\bar{x})$ вместо $\bar{x}$ получаем равенство $f(\bar{h})=1$. Иначе говоря, на G выполнено тождество $f(\bar{x})\equiv 1$.

Пусть $F(\mathfrak{M})$ — свободная группа в конечно базируемом многообразии $\mathfrak{M}$, определяемом тождеством $v(\bar{x})\equiv 1$. Большой интерес вызвала проблема, идущая от А. И. Мальцева (см. Коуровскую тетр.: вопросы 2.40(а), 3.4; [8]): всегда ли в группе $F(\mathfrak{M})$ разрешима проблема тождества? Иначе говоря, существует ли алгоритм, определяющий, является ли тождество $w(\bar{x})\equiv 1$ следствием тождества $v(x)\equiv 1$, или нет? Для группы $F(\mathfrak{M})$ бесконечного ранга указанная проблема равносильна проблеме равенства.

С. И. Адян [7] построил пример 2-порожденной группы, заданной р. п. множеством определяющих тождеств, для которой проблема тождества неразрешима. Полностью проблема решена Ю. Г. Клейманом [99, 100], доказавшим следующее утверждение: существует конечно базируемое многообразие групп $\mathfrak{M}\leqslant\mathfrak{A}^7$, в свободных нециклических группах которого неразрешима проблема равенства (а следовательно, и проблема тождества). Более того, можно указать слово $w(\bar{x})$ такое, что не существует алгоритма, определяющего, следует ли произвольное тождество $f(\bar{x})\equiv 1$ из $w(\bar{x})\equiv 1$, или нет.

В основе доказательств Ю. Г. Клеймана лежат две идеи, первая из которых принадлежит Вон Ли и заключается в том, что выполнимость тождеств кодируется подмножествами некоторой группы, удобной для вычислений. Вторая связана с интерпертацией многочленов в свободной нильпотентной группе, о которой мы говорили несколько ранее (см. п. 6.1).

6.3. Автоморфная сопряженность. В общем виде вопрос можно сформулировать так: существует ли алгоритм, определяющий для любой пары элементов $g, f \in G$ принадлежность их к одной орбите относительно действия группы $\mathrm{Aut}\, G$? Более общий вопрос отличается заменой g, f на наборы элементов $\bar{g}=(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, $\bar{f}=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Классический результат, утверждающий разрешимость проблемы автоморфной сопряженности для наборов элементов свободной группы, принадлежит Уайтхеду [572], алгебраические доказательства предложены Рапопорт, Хиггинсом и Линдоном [399] (см. [119]). Для подгрупп проблема также решена положительно Вальдхаузеном (см. [119]).

§ 7. Классы групп

Пусть $\mathscr{K}$ — класс групп или их заданий, α — некоторое свойство. Общий вопрос — проблема распознавания α в $\mathscr{K}$: существует ли алгоритм, определяющий по произвольной группе $G \in \mathscr{K}$, обладает она свойством α или нет? При такой постановке вопроса необходимо уточнять способ определения самого класса $\mathscr{K}$, например, $\mathscr{K}$ — р. п. класс заданий групп через конечные множества порождающих элементов и определяющих соотношений. Классический случай: $\mathscr{K}$ — класс всех заданий к. о. групп. Как правило, рассматриваются абстрактные (в другой терминологии — инвариантные) свойства, сохраняющиеся при изоморфизмах.

7.1. Нераспознаваемые свойства. Основные результаты по нераспознаваемости свойств в классах к. о. групп получены в серии работ С. И. Адяна [3—6]. Идеи его метода и формулировки утверждений в их первоначальном виде отмечены в заметке [3], опубликованной в 1955 году. Полный текст доказательств содержит работа [6]. Доказано, что проблема изоморфизма любой данной к. о. группе F_0 в классе к. о. групп неразрешима. Кроме того, получены общие утверждения, из которых следует нераспознаваемость в классе к. о. групп таких свойств, как тривиальность, коммутативность, нильпотентность, разрешимость, простота группы, свойства группы быть конечной, содержать свободную подгруппу, разлагаться в свободное произведение и др. Если абстрактное свойство α выполнено в некоторой к. о. группе и не выполнено ни в какой к. о. группе с неразрешимой проблемой равенства, то α в классе к. о. групп нераспознаваемо. В частности, не существует алгоритма, определяющего разрешимость проблемы равенства в к. о. группе.

Работа [4] содержит обобщение части результатов из [3, 6]. Пусть α — абстрактное свойство, выполненное в к. о. группе G_1 и не выполненное в любой к. о. группе, содержащей к. о. группу G_2. Такие свойства названы марковскими (А. А. Марков [136] доказал их нераспознаваемость в классе полугрупп). Тогда α нераспознаваемо в классе всех к. о. групп. Среди перечисленных ранее свойств есть марковские и немарковские (неясен вопрос только со свойством «быть простой группой»). Важно заметить, что свойство «быть группой, изоморфной данной к. о. группе F_0», не является марковским, если F_0 универсальна в классе всех к. о. групп, т. е. в нее вложима любая к. о. группа. По теореме Хигмэна [400] такие группы существуют.

Позднее аналогичные результаты были опубликованы Рабиным [498], включившим в доказательства использование свободных конструкций теории групп в явном виде.

Класс к. о. групп $\mathscr{K}$ называется полным, если любая к. о. группа вложима в группу из $\mathscr{K}$. Теорема о нераспознаваемости марковских свойств есть утверждение о том, что проблема принадлежности к. о. группы непустому неполному классу к. о. групп неразрешима. В работе [5] С. И. Адян дает обобщение этого результата. Полный класс $\mathscr{K}$ называется эффективно полным, если построение для любой к. о. группы некоторой ее накрывающей в $\mathscr{K}$ осуществляется эффективным образом. Пусть в эффективно полном классе к. о. групп $\mathscr{K}$ есть группа G_1, удовлетворяющая абстрактному свойству α, такая, что любое ее задание переписывается в её же задание упомянутым алгоритмом. Пусть существует к. о. группа G_2, не вложимая ни в какую к. о. группу со свойством α. Тогда проблема распознавания α в $\mathscr{K}$ неразрешима. Обусловленность действия алгоритма переписки на группу G_1 можно заменить на рекурсивность класса $\mathscr{K}$.

Конкретизация некоторых результатов о нераспознаваемости свойств в классах групп содержится в книге Миллера [467]. Существует рекурсивный класс к. о. групп вида $F_n \underset{F_k}{*} F_m$, все группы в котором финитно аппроксимируемы, очевидным образом к. о. и, следовательно, имеют разрешимую проблему равенства, для которого проблема изоморфизма неразрешима. Доказано также, что для любого отношения эквивалентности ε на $\mathbf{N}$ справедливо следующее утверждение: ε — р. п. тогда и только тогда, когда существует рекурсивный класс к. о. групп $\mathscr{K}=\{K_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ такой, что $K_i \simeq K_j$ тогда и только тогда, когда $i \underset{\varepsilon}{\sim} j$.

Бун [302] доказал, что для любого марковского свойства α, любой р. п. степени β существует рекурсивный класс к. о. групп $\mathscr{K}$, в котором проблема распознавания α имеет степень неразрешимости β. В этой же работе и другим способом в работе Йоккуша [412] доказано, что для любой пары р. п. степеней β_1, β_2 существует рекурсивное семейство $\mathfrak{B}$ рекурсивных классов к. о. групп такое, что проблема «имеет ли $\mathscr{K} \in \mathfrak{B}$ проблему изоморфизма степени β_1?» имеет степень β_2.

Коллинз [344] доказал нераспознаваемость в классе к. о. групп хопфовости (это свойство немарковское [171]). Основной результат его работы [345] состоит в том, что любое марковское свойство нераспознаваемо в классе к. о. групп с разрешимой проблемой равенства.

По определению, никакое марковское свойство не выполнено на универсальной к. о. группе. Божович [312] изучает некоторые другие алгебраические свойства, которым могут удовлетворять универсальные к. о. группы, и доказывает их нераспознаваемость. В [311] он устанавливает, что для любого марковского свойства α неразрешим вопрос: разлагается ли к. о. группа в нетривиальное свободное произведение групп с условием α или нет?

Пусть $\mathscr{K}_m$ — класс m-порожденных к. о. групп, α_n — марковское свойство, выполненное на некоторой n-порожденной к. о. группе. Р. Д. Павлов [176, 178] установил, что при $m \geqslant n+1$ свойство α_n нераспознаваемо в $\mathscr{K}_m$. Например, в $\mathscr{K}_2$ нераспознаваемы тривиальность, конечность, свобода. Аналогичные утверждения верны также для свойства группы «быть простой» и некоторых других свойств, в том числе заведомо немарковских. Им же доказано [179], что в $\mathscr{K}_2$ неразрешимы проблемы гомоморфизма и эпиморфизма.

Методом малых сокращений Шупп [535] доказал, что если G — к. о. группа, среди факторгрупп которой есть свободное произведение, отличное от $\mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_2$, α — марковское свойство, причем $\{e\} \in \alpha$, то в классе к. о. факторгрупп G свойство α нераспознаваемо.

Ларсен [420] определяет для нормальной подгруппы N свободной группы F подмножество $N_* \subseteq N$, состоящее из слов, все собственные подслова которых не лежат в N. Рассматривается проблема вхождения в N_* и аналогичные обобщения других алгоритмических проблем.

Проблема 5. Проблема изоморфизма для групп с одним соотношением.

По проблеме 5 имеются только частные результаты. Разрешимость доказана, например, для 2-порожденных групп с нетривиальным центром [492], кручением [497], для групп специального вида [507], некоторое обсуждение проблемы содержится в [404] (см. также книгу Линдона, Шуппа [119]). Хорошо известно, что в свободной группе нормальные подгруппы, порожденные элементами r_1, r_2, совпадают тогда и только тогда, когда элемент r_1 сопряжен с элементом r_2 или с его обратным. В то же время неверно (Цишанг [574], Мак-Кул, Петровски [461]), что группы $\langle X | r_i \rangle$, $i=1, 2$, изоморфны тогда и только тогда, когда элемент r_1 автоморфно сопряжен в $F(X)$ с одним из элементов $r_2^{\pm 1}$.

7.2. Разрешимые группы. Нильпотентные и полициклические группы. Важным следствием из результатов Грюневальда, Сигала и Р. А. Саркисяна (см. § 5) является алгоритмическая разрешимость проблемы изоморфизма в классе к. п. нильпотентных групп. Отметим, что разрешимость проблемы изоморфизма конкретной к. о. нильпотентной группе G следует уже из теоремы Пикеля [489] о конечности рода группы G, т. е. множества финитно аппроксимируемых групп с тем же самым, что у G, семейством конечных гомоморфных образов.

В то же время проблема эпиморфизма уже в классе 2-нильпотентных групп решается отрицательно. Это установлено В. Н. Ремесленниковым [187, 188]. Из неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах, доказанной В. А. Романьковым (см. § 6), следует неразрешимость проблемы эпиморфизма для к. п. нильпотентных групп, задаваемых в $\mathfrak{N}_l$, $l \geqslant 9$, одним соотношением.

Проблема 6. Проблема изоморфизма для полициклических групп.

Общий случай. Как уже отмечалось, основные алгоритмические проблемы в классе разрешимых групп решены отрицательно. Однако, с массовыми проблемами здесь дело обстоит иначе, чем в классе всех к. о. групп. Так, например, марковские свойства группы быть конечной, нильпотентной, абелевой, циклической, полициклической, сверхразрешимой в классе групп к. о. в $\mathfrak{A}^l$, $l \in \mathbf{N}$, распознаваемы (Каннонито [325], Баумслаг, Каннонито, Миллер [285]). Это, впрочем, не снимает вопрос о существовании общих утверждений о нераспознаваемости свойств в разрешимых группах.

Первый пример группы к. о. в $\mathfrak{A}^l$, $l \geqslant 7$, проблема изоморфизма которой неразрешима для к. о. в $\mathfrak{A}^l$ групп, указан А. С. Киркинским, В. Н. Ремесленниковым [96]. Другие примеры для групп к. о. в многообразиях, содержащих $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$, приведены Г. П. Кукиным [68].

Из нерешенных вопросов нами отмечаются:

Проблема 7. Проблема изоморфизма для к. п. метабелевых групп.

Проблема 8. Проблема изоморфизма для к. п. метабелевых групп конечного ранга.

7.3. Теоремы вложения. В нашем обзоре неоднократно упоминалась теорема Хигмэна о вложимости произвольной р. о. группы в к. о. группу. Вообще говоря, различные теоремы вложения играют важную роль при решении задач алгоритмического характера. Здесь мы укажем несколько результатов, не охваченных другими разделами обзора.

Замечено [467], что не существует к. о. группы с разрешимой проблемой равенства, в которую были бы вложимы все к. о. группы с разрешимой проблемой равенства. В то же время любая группа, заданная р. п. множествами порождающих элементов и определяющих соотношений и имеющая примитивно рекурсивную проблему равенства, примитивно рекурсивным образом вложима в к. о. группу с примитивно рекурсивной проблемой равенства [381].

В работах Баумслага, Каннонито, Миллера [283, 284, 286] изучаются условия вложимости счетных групп в к. о. группы. Доказано, например, что такая вложимость имеет место для метабелевых и локально почти полициклических групп. Счетные локально свободные группы и счетные локально линейные (ограниченной степени) группы вложимы в к. о. группы с разрешимой проблемой равенства. Установлено также, что счетная группа вложима в к. о. группу тогда и только тогда, когда она может быть представлена как подгруппа группы автоморфизмов к. о. группы.

Сачердоте [516] доказывает, что счетная группа вложима в к. о. группу тогда и только тогда, когда она имеет совместно рекурсивно перечислимую проблему равенства, счетная группа вложима в простую подгруппу к. о. группы тогда и только тогда, когда проблема равенства в ней совместно рекурсивна (определения в [516]).

7.4. Унифицированные алгоритмы. Как уже отмечалось, класс $\mathscr{K}$, для которого рассматривается массовая алгоритмическая проблема, должен быть правильно определен. Чаще всего в качестве $\mathscr{K}$ берут р. п. класс конечных представлений групп через порождающие элементы и определяющие соотношения. Анализ постановки массовых проблем и их решений содержится, например, в работах [468, 473], книге [467]. Важным является следующее заключение (см. Мостовский [473]): пусть П — теоретико-групповой предикат, $\mathscr{K}$ — р. п. класс конечных представлений групп, для которого существует алгоритм, определяющий истинность П, тогда существует аналогичный алгоритм для класса $\mathscr{K}^*$, являющегося изоморфным замыканием $\mathscr{K}$. Например, существуют унифицированные алгоритмы, решающие проблему равенства в классах конечных, абелевых групп, групп с одним соотношением. Отметим, что класс $\mathscr{P}$ к. о. групп с разрешимой проблемой равенства не является ни р. п., ни дополнением к р. п. Существует р. п. подкласс $\mathscr{P}_1 \subseteq \mathscr{P}$, для которого неразрешима проблема равенства (Бун, Роджерс [306]).

Справедливы аналоги этого утверждения для проблемы изоморфизма [473].

Локхарт [438] также рассматривает понятие рекурсивного класса групп с унифицированно разрешимой проблемой равенства. Типичный результат: если G — конечная группа, то в таком классе разрешима проблема изоморфизма группе G. В то же время существует р. п. класс конечных представлений с унифицированно разрешимой проблемой равенства, в котором свойства «быть без кручения», «иметь разрешимую проблему степени», «иметь разрешимую проблему порядка» нераспознаваемы.

§ 8. Фундаментальные группы

8.1. Постановка проблем. В 1892 году Пуанкаре определил понятие фундаментальной группы многообразия. Это дало основание для использования комбинаторной теории групп в топологии. Важным моментом является возможность перехода от n-многообразия при $n \leqslant 3$ к симплициальному комплексу с помощью процесса триангуляции, существование которого установлено в этом случае в работах Радо и Мойзе. Из работ Пуанкаре и более поздних работ Титце известно, что фундаментальные группы конечных симплициальных комплексов конечно определены. Их задания через порождающие элементы и определяющие соотношения могут быть эффективно выписаны. Для n-многообразий при $n \leqslant 3$ проблема гомеоморфизма становится чисто комбинаторной после сведения ее к проблеме комбинаторного гомеоморфизма симплициальных комплексов.

Комбинаторная теория групп зарождается в 80-е годы прошлого столетия в теории функций и топологии. В 1882 году Дик вводит в рассмотрение представление группы через порождающие элементы и определяющие соотношения. Это — отправной пункт теории, в самом начале развития которой подчеркнута определяющая роль свободной группы.

Существующие в топологии проблемы алгоритмического характера такие, как проблема гомеоморфизма, проблема гомотопической тривиальности (стягиваемости), проблема эквивалентности узлов и т. п., находят свое отражение в аналогичных вопросах для фундаментальных групп. При этом очевидным образом возникает соблазн решить указанные вопросы «одним махом», т. е. установить их разрешимость сразу для всех к. о. групп. Невозможность такого решения, как мы знаем, была установлена в 50-е годы, почти через полстолетия после постановки вопросов (проблема изоморфизма — Титце (1908 г.), проблемы равенства и сопряженности — Ден (1910 г.)). При этом стала очевидной необходимость детального изучения фундаментальных групп в важнейших случаях.

8.2. Группы поверхностей. Основная проблема топологической характеризации кривых на поверхностях — это вопрос о стягиваемости замкнутой кривой в точку. Еще в 1866 году Жордан предложил разложение произвольной кривой на составляющие, соответствующие каноническим порождающим элементам фундаментальной группы. При этом были указаны соотношения между порождающими. Работа Жордана содержала ошибки, к тому же один из пионеров теории групп в данном случае не понял, что имеет дело с группой. Как говорится, «невероятно, но факт».

Для замкнутых ориентируемых поверхностей проблема стягиваемости была решена после определения универсальной накрывающей поверхности. В данном случае, для нее есть только две возможности — сфера или плоскость. Из их односвязности следует, что замкнутая кривая p стягиваема в точку тогда и только тогда, когда ее поднятие $\tilde{p}$ — замкнутая кривая. Накрывающая кривая строится эффективно, что решает вопрос.

Возникающий алгоритм имеет комбинаторный характер. Основной его недостаток — громоздкость разбиений даже в случае, когда поверхность имеет род 2. Ден был первым, кто осознал преимущество алгебраического решения проблемы и построил так называемый алгоритм Дена (о нем шла речь в § 2). Используя вначале метрику на гиперболической плоскости, а затем после некоторого усовершенствования доказательства, ограничившись только топологическими соображениями, Ден решает для фундаментальных групп замкнутых ориентируемых поверхностей проблемы равенства и сопряженности [356].

8.3. Группы узлов. Узел K есть гомеоморфный образ окружности в $\mathbf{R}^3$. Мы считаем, что K — ручной (точные определения см. в [112]). Дополнительное пространство $\mathbf{R}^3 \setminus K$ есть конечный симплициальный комплекс, фундаментальная группа которого называется фундаментальной группой узла. Основные проблемы — проблема гомеоморфизма для дополнительных пространств и проблема эквивалентности узлов.

Ден дает алгебраическое решение проблемы равенства для группы узла «трилистник» и доказывает, что проблема гомеоморфизма для дополнительных пространств в случае, если один из узлов тривиален, сводится к выяснению коммутативности (цикличности) фундаментальной группы.

Проблему равенства для произвольной фундаментальной группы узла решил Вальдхаузен [564]. Его алгоритм унифицирован и отвечает на вопрос о коммутативности произвольной фундаментальной группы узла.

Алгоритм Вальдхаузена основан на методе Хакена [396] (усовершенствование в [530]), заключающемся в манипулировании поверхностями в 3-многообразии и последовательном снижении рода этих поверхностей. Если узел K тривиален, то процедура оканчивается нулевым родом. Другой основной элемент — лемма Дена также связана с манипулированием поверхностями в 3-многообразии. Ден в свое время дал ее ошибочное доказательство. Это важное утверждение впоследствии было доказано Папакирьякопулосом [481].

Прогресс в рассматриваемой области связан, как мы видим, с развитием теории поверхностей. Третьей важной основой алгоритма Вальдхаузена является решение проблемы сопряженности в группах классов отображений, полученное Хемионом [398].

Проблема равенства для групп узлов была бы решена другим способом, если бы удалось установить финитную аппроксимируемость этих групп.

Относительно проблемы сопряженности в группах узлов сведений пока немного. Вайнбаум [571] доказал, что если G — группа простого альтернированного узла, то группа $\bar{G} = G \ast \langle x \rangle$ имеет представление со свойствами $C(4)$ и $T(4)$. Затем Аппель и Шупп [264] доказали, что проблема сопряженности разрешима для группы любого альтернированного узла. Другое решение предложено в работе Дугопольского [359].

8.4. 3-многообразия. Приведенные выше результаты Вальдхаузена справедливы на самом деле для достаточно широкого класса 3-многообразий. Другой класс 3-многообразий с разрешимой проблемой равенства представлен Тёрстеном [557]. В общем случае проблема не решена. Отметим, что не всякая к. о. группа является фундаментальной группой 3-многообразия. Например, это можно сказать о свободной абелевой группе ранга 4 (Столлингс [542]).

Проблема была бы решена топологически, знай мы полную классификацию универсальных накрывающих для 3-многообразий, как это было для поверхностей. Известно, что в данном случае список не исчерпывается S^3 и $\mathbf{R}^3$ (Александер (1932 г.)). Полного описания пока нет.

8.5. n-многообразия, $n \geqslant 4$. Неизвестно, любое ли 4-многообразие триангулируемо. Ден показал, что любая к. о. группа реализуема как фундаментальная группа 4-многообразия, поэтому проблема стягиваемости для 4-многообразий неразрешима.

А. А. Марков [138, 139] доказал, что проблема гомеоморфизма в классе триангулируемых 4-многообразий неразрешима. Отметим, что проблема гомеоморфизма для n-многообразий при $n \geqslant 5$ не сводится к проблеме комбинаторного гомеоморфизма (Милнор [471]). Не существует алгоритма, распознающего S^5 (С. П. Новиков).

8.6. Группы кос. Геометрическое решение проблемы равенства для групп кос почти очевидно. Артин в 1926 году указал совершенно ясный алгебраический алгоритм для ее решения.

Полное доказательство разрешимости проблемы сопряженности в группах кос дано Гарсайдом [43] (ее решение также анонсировано Г. С. Маканиным [125]). Проблема вхождения в группах кос, содержащих не менее 5 нитей, неразрешима (Т. А. Маканина [127]).

В работе [20] В. Н. Безверхний и В. А. Гринблат рассматривают более широкий класс групп Артина конечного типа. Доказано, что проблема вхождения в циклические подгруппы в этом классе разрешима, а проблема вхождения в к. п. подгруппы — нет.

Относительно других вопросов см. обзор В. Я. Лина [118] и работы [19, 34, 51, 314, 555].

8.6. Книги и обзоры. В заключение укажем ряд книг и обзорных статей, в которых рассматриваются алгебраические аспекты теории групп, связанных с топологией. Это обзорные статьи Буна, Хакена, Поенару [304], Вальдхаузена [565], в которых обсуждаются проблемы из топологии, результаты и открытые вопросы. Книга Кроуэлла и Фокса «Введение в теорию узлов» [112] содержит прекрасное изложение основ теории, обзор и библиографию известных результатов, а также обсуждение открытых вопросов. Отметим лекции Масси [146], являющиеся вводным курсом в теорию фундаментальных групп, и более глубокие лекции Джако [410] и Столлингса [146] по теории групп многообразий. Наконец, отметим учебник Стилуэлла [548] по фундаментальным группам и его обзорную статью [549]. По группам кос имеется обстоятельный обзор В. Я. Лина [118], содержащий кроме всего прочего изложение алгоритмических аспектов теории групп кос.

У нас несколько выпали из рассмотрения вопросы, разбираемые в книгах Цишанга, Фогта, Колдьюи [575], Магнуса [453].

Не остались в стороне от топологии книги по комбинаторной теории групп Магнуса, Карраса, Солитера [124], Линдона, Шуппа [119], Коэна [340].

Глава 2

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ГРУПП

§ 9. Введение

В этой главе обзора будут рассмотрены работы, связанные с исследованиями по выразительности формального языка — исчисление предикатов первого порядка — применительно к групповой сигнатуре. Проникновение теоретико-модельных методов в исследования по теории групп привело к постановке ряда новых задач. Среди них наибольшее внимание специалистов привлекли проблемы элементарной эквивалентности групп и алгоритмической разрешимости элементарных теорий различных классов групп. Не остались без внимания исследования по таким глобальным теоретико-модельным характеристикам, как стабильность, категоричность, конечность ранга Морли, наличие модельного компаньона, сложность структуры генерических моделей.

9.1. Основные определения и обозначения. Все результаты будут формулироваться на языке групповой сигнатуры $\sigma = \langle \cdot, {}^{-1}, e\rangle$. Точное определение формулы логики первого порядка можно найти во многих книгах (например, в [75, 95, 225, 248]); там же приведены определения свободного и связанного вхождения переменных в формулу, замкнутой формулы (предложения), понятие пренексной нормальной формы для формул и истинности формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ на наборе элементов $g_1, \ldots, g_n$ группы G.

Пусть K — произвольный класс групп. Совокупность $\mathrm{Th}(K)$ всех замкнутых формул групповой сигнатуры, истинных на

группах данного класса, называется элементарной теорией класса K. Подмножество A теории T называется системой аксиом для T, если классы групп, на которых истинны все предложения из T и A, совпадают. По определению, теория T конечно (рекурсивно) аксиоматизируема, если множество аксиом для T можно выбрать конечным (рекурсивным). Любая непротиворечивая совокупность предложений A определяет аксиоматизируемый класс, состоящий из групп, на которых истинны все предложения из A.

Универсальной или $\forall$-формулой называется формула $\forall x_1, \ldots, \forall x_n \varphi$, где φ — бескванторная формула. Для класса групп K универсальная теория $\mathrm{Th}\,\forall\,(K)$ определяется как подмножество всех универсальных предложений $\mathrm{Th}\,(K)$. Теория T универсально аксиоматизируема, если множество аксиом для T можно выбрать из универсальных предложений. Более общо, если зафиксирован вид кванторной приставки Γ, то формулы в пренексной нормальной форме с Γ-приставкой называют Γ-формулами (например, $\exists$-формулы, $\forall\exists$-формулы), а соответствующие предложения из $\mathrm{Th}(K)$ — Γ-теорией класса K. Естественным образом определяется понятие Γ-аксиоматизируемого класса групп. Будем говорить, что теория T устойчива относительно некоторого группового оператора или групповой конструкции, если соответствующий аксиоматизируемый класс групп замкнут относительно этого оператора или конструкции.

Теорема 9.1 (Лось — Тарский). Теория T устойчива относительно подгрупп, если и только если T — универсальная теория.

Теорема 9.2 (Лось — Сушко — Чэн). Теория T устойчива относительно объединения цепей (индуктивна), если и только если теория T является $\forall\exists$-теорией.

Вопросами устойчивости теории относительно алгебраических конструкций занимался Линдон [439, 440, 441] (см. также [337]). Приведем один из его результатов. В случае групповой сигнатуры формулы вида $xy=z$, $x=y$ называют атомными, а формулы, которые получаются из атомных применением связок $\wedge$, $\vee$ и кванторов $\forall$, $\exists$, позитивными формулами.

Теорема 9.3. Теория T устойчива относительно гомоморфных образов, если и только если T аксиоматизируется позитивными формулами.

Подмножество H группы G называется формульным, если существует формула $\varphi(x)$ с одной свободной переменной x такая, что $\varphi(g)$ истинна в G тогда и только тогда, когда $g \in H$. В случае, когда φ содержит константные символы, то говорят об H как об относительно формульном подмножестве. Типичным примером формульной подгруппы является центр группы, а централизаторы конечных наборов элементов дают примеры относительно формульных подгрупп. Подгруппа H называется элементарной подгруппой группы G, если для любой формулы групповой сигнатуры $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и любых $h_1, \ldots, h_n$ из H $\varphi(h_1, \ldots, h_n)$ истинна в H тогда и только тогда, когда $\varphi(h_1, \ldots, h_n)$ истинна в G. В этой ситуации группу G называют элементарным расширением для H.

Теорема 9.4 (Воот — Тарский). Объединение цепи элементарных подгрупп будет элементарным расширением каждого члена этой цепи.

По заданной группе G расширим групповую сигнатуру σ до σ^*, добавив к σ новое множество константных символов $\langle c_g | g \in G\rangle$. Диаграммой $\mathscr{D}(G)$ группы G называется совокупность всех атомных формул и их отрицаний сигнатуры σ^*, истинных в G при естественной интерпретации константных символов. Полной диаграммой $F\mathscr{D}(G)$ назовем множество всех предложений сигнатуры σ^*, истинных в G.

9.2. **Неаксиоматизируемость.** Доказательство аксиоматизируемости класса алгебраических систем в каждом конкретном случае индивидуально. Универсально аксиоматизируемыми классами групп являются многообразия и квазимногообразия групп. Аксиоматизируемыми являются следующие классы групп: упорядоченные, без кручения, делимые, с однозначным извлечением корня. Имеются два стандартных метода для доказательства неаксиоматизируемости класса групп. Первый из них является следствием знаменитой теоремы компактности.

Теорема 9.5 (теорема компактности Гёделя — Мальцева). Пусть T — произвольное множество аксиом логики первого порядка. Если для каждого конечного подмножества T_0 множества T существует модель для всех аксиом из T_0, то существует модель для всех аксиом из T.

С помощью этой теоремы легко доказывается неаксиоматизируемость следующих классов групп: конечных, периодических, p-групп, нильпотентных, разрешимых, локально свободных. Из нее же следует, что если аксиоматизируемый класс групп замкнут относительно прямых произведений, то он замкнут и относительно декартовых произведений. Это обстоятельство позволило доказать неаксиоматизируемость класса доупорядочиваемых групп [87] и некоторых классов обобщенных разрешимых групп.

Другое фундаментальное свойство логики первого порядка, используемое для доказательства неаксиоматизируемости, есть следующая теорема о существовании моделей.

Теорема 9.6 (Лёвенгейм — Скулем). Пусть A — множество аксиом логики первого порядка.

1) Существование. Если A непротиворечиво, то существует модель для всех аксиом A.

2) Спуск. Пусть λ — бесконечный кардинал и пусть мощность A не превосходит λ. Если A непротиворечиво, то существует модель для A, множество элементов которой имеет мощность $\leqslant\lambda$.

3) Подъем. Если теория T имеет бесконечную модель, то она имеет модель любой бесконечной мощности, бóльшей или равной мощности теории T.

Так как любая теория групповой сигнатуры не более чем счетная, то из теоремы Лёвенгейма — Скулема следует, что любой аксиоматизируемый класс групп, содержащий бесконечные группы, содержит и группы произвольной бесконечной мощности. Поэтому любую бесконечную группу нельзя характеризовать с точностью до изоморфизма множеством аксиом логики первого порядка.

9.3. Насыщенные модели. Понятие насыщенной модели упростило многие доказательства в теории моделей и объединило большую часть теории. Интуитивно, насыщенная модель — это модель, в которой имеются все возможные теоретико-модельные типы элементов. 1-типом (или просто типом) $\Gamma(x)$ называется всякое максимальное непротиворечивое множество формул данной сигнатуры, зависящих от переменной x. Говорят, что группа G λ-насыщенна, если для любого подмножества X из G мощности, меньшей λ, группа G реализует произвольный тип $\Gamma(x)$ формул с константами из X, т. е. существует в G такой элемент g, что $\varphi(x) \in \Gamma(x)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(g)$ истинна в G. Группу G называют насыщенной, если она λ-насыщена, где λ — мощность G. Естественным образом определяются n-типы (формулы берутся от n переменных).

Роль насыщенных моделей особенно важна в исследовании полных теорий. Теория T называется полной, если для любой замкнутой формулы φ либо она, либо $\neg\varphi$ принадлежит T. Ясно, что если G — модель полной теории T, то $T = \mathrm{Th}(G)$. Две модели G_1 и G_2 элементарно эквивалентны ($G_1 \equiv G_2$) тогда и только тогда, когда $\mathrm{Th}(G_1) = \mathrm{Th}(G_2)$. В той степени как алгебра изучает алгебраические системы с точностью до изоморфизма, в такой же степени теория моделей изучает модели с точностью до элементарной эквивалентности. Алгебраическая классификация полных теорий — одна из новых привлекательных задач в алгебре.

Теорема 9.7. 1) Существование. Любая полная теория с бесконечными моделями имеет λ^+-насыщенную модель мощности 2^λ (λ^+ — следующий за λ кардинал). 2) Единственность. Любые две элементарно эквивалентные насыщенные системы одной мощности изоморфны.

Основным источником построения насыщенных моделей является конструкция ультрапроизведения, изложенная во многих книгах (например, в [95, 135, 225]). Алгебраический характер конструкции делает ее полезным орудием в применении теории моделей к алгебре.

Теорема 9.8. Если модели A_i принадлежат некоторому аксиоматизируемому классу K, то для любого ультрафильтра D

ультрапроизведение $\Pi_D A_i$ также принадлежит K. В частности, все ультрастепени системы A принадлежат теории A.

Теорема 9.9 (Кейслер). Пусть мощность сигнатуры σ класса моделей $\leqslant\lambda$ и пусть I — множество мощности λ. Тогда существует ультрафильтр D над I такой, что для любого семейства $\langle A_i;\ i\in I\rangle$ алгебраических систем сигнатуры σ ультрапроизведение $\Pi_D A_i$ является λ^+-насыщенной алгебраической системой.

Теорема 9.10 (Кейслер — Шелах). Пусть A и B — алгебраические системы одной сигнатуры. Следующие утверждения равносильны: 1) A элементарно эквивалентна B; 2) существует ультрафильтр D над I такой, что $\Pi_D A$ изоморфна $\Pi_D B$.

9.4. Книги и обзоры. Хорошим справочным материалом по теории моделей служит книга [225]. В первой главе этой книги объяснено большинство основных логических понятий. Написанная Кейслером вторая глава содержит введение в теорию моделей. Метод ультрапроизведений и его приложения к алгебре разобраны в третьей главе. В четвертой главе, написанной Макинтайром, на конкретных примерах из алгебры объясняется введенное Робинсоном понятие модельно полной теории (метод модельной полноты). Кроме этой книги для ознакомления с теоретико-модельной техникой мы рекомендуем книги [73, 95, 135, 200]. Испытательным полигоном для большинства результатов теории моделей служат алгебра, теория чисел и анализ. Среди многочисленных книг и обзоров по приложениям теории моделей выделим те, в которых затрагиваются приложения к теории групп.

Основные методы доказательств разрешимости и неразрешимости элементарных теорий изложены в книгах Тарского, Мостовского, Робинсона [554] и Ю. Л. Ершова [73]. Кроме того, в книге Ю. Л. Ершова приведена классификация полных теорий абелевых групп и показано на примерах из алгебры, как работает метод модельной полноты и родственное понятие относительной алгебраической замкнутости. Результаты по проблеме разрешимости элементарных теорий до 1964 года с подробным изложением методов доказательств собраны в обзоре Ю. Л. Ершова, И. А. Лаврова, А. Д. Тайманова, М. А. Тайцлина [74]. Обзорная статья Санкаппанавара [522] посвящена алгоритмическим вопросам, главным образом проблемам разрешения для формальных систем; ее можно рассматривать как дополнение к предыдущему обзору. Значительное место отведено истории вопроса, в частности истории возникновения точного понятия алгоритма. Вопросы разрешимости расширенных теорий, особенно расширенных теорий абелевых групп, разобраны в обзоре А. И. Кокорина и А. Г. Пинуса [107].

В книге Черлина [329], обзоре Болдуина [273] приведены классификации стабильных теорий групп и колец.

Основные результаты по проблеме категоричности собраны

в обзорной статье Фелгнера [375]. Теория алгебраически замкнутых групп и генерических групп излагается в упомянутой выше главе, написанной Макинтайром, в обзорах В. Я. Беляева, М. А. Тайцлина [28] и Г. А. Носкова, В. Н. Ремесленникова, В. А. Романькова [171]. Второй из этих обзоров содержит сводку теоретико-модельных результатов теории групп из работ, прореферированных в РЖ «Математика» за период 1970—1978 гг.

9.5 Замечание. Мы концентрируем внимание на приложениях к теории групп простейшего нетривиального формального языка — логики первого порядка. По этой причине часть результатов, требующих привлечения логик более высокого порядка, в том числе знаменитые локальные теоремы А. И. Мальцева, остались вне пределов обзора. Частичным оправданием выбранной нами позиции служит результат абстрактной теории моделей.

Теорема 9.10 (Линдстрём). Логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно $\wedge$, $\neg$, $\exists$ и удовлетворяющей теоремам компактности и Лёвенгейма—Скулема.

§ 10. Классификация групп по элементарным свойствам

Ряд новых интересных задач в теории групп возник в связи с применением в ней теоретико-модельных методов. К их числу относится проблема классификации групп с точностью до элементарной эквивалентности, или в другой формулировке — проблема классификации полных теорий групп.

Анализ решений проблемы элементарной классификации групп определенного класса, полученных до сих пор, позволяет выделить три основных метода доказательств: модельной полноты, перехода к насыщенным моделям и прямой, когда доказывается формульность характеристик, определяющих групповую структуру исследуемой группы. Наиболее полные результаты по проблеме элементарной эквивалентности получены для абелевых и линейных групп.

10.1. Абелевы группы. Весьма прозрачная и полезная в приложениях классификация абелевых групп по элементарным свойствам получена в 1954 г. польским математиком Шмелевой [552]. В настоящее время известны несколько доказательств ее результатов, полученных либо методом модельной полноты [85, 103] (исправление в [104, 278]), либо переходом к насыщенным группам [367], либо комбинацией этих методов [73].

Приведем элементарные инварианты, характеризующие полные теории абелевых групп, следуя статье Эклофа и Фишера [367]. Пусть A — произвольная абелева группа, p — простое число, $A[p]$ — ее нижний p-слой. Так как $\dim (p^kA/p^{k+1}A)$ — монотонно убывающая функция от k, то можно определить первую серию элементарных инвариантов для A.

$$T_f(p, A)=\begin{cases}\text{предельное значение для } \dim(p^k A/p^{k+1}A),\\ \text{если оно конечно,}\\ \infty \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Аналогично,

$$D(p, A)=\begin{cases}\text{предельное значение для } \dim(p^k A[p]),\\ \text{если оно конечно,}\\ \infty \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Кроме того,

$$U(p, n-1, A)=\begin{cases}\dim\left(\dfrac{p^{n-1}A[p]}{p^n A[p]}\right), \text{ если она конечна,}\\ \infty \text{ в противном случае;}\end{cases}$$

$$\operatorname{Exp}(A)=\begin{cases}0, \text{ если } A \text{ — группа конечного периода,}\\ \infty \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Теорема 10.1 (Шмелева [552]). Абелева группа A элементарно эквивалентна абелевой группе B тогда и только тогда, когда элементарные инварианты A равны соответствующим инвариантам B.

Схема доказательства теоремы в [367] такова. Любая группа элементарно эквивалентна насыщенной группе. Насыщенные абелевы группы являются алгебраически компактными, а потому могут быть классифицированы с точностью до изоморфизма с помощью инвариантов, являющихся кардинальными числами. Отсюда получается и классификация всех абелевых групп по элементарным свойствам.

Одним из наиболее важных следствий теоремы Шмелевой является разрешимость элементарной теории класса абелевых групп (см. § 12). Другим непосредственным следствием является результат о полноте теории класса всех делимых абелевых групп без кручения.

Сформулируем и другие результаты, которые сравнительно легко получаются из теоремы Шмелевой.

Теорема 10.2 (Эклоф [365]). На абелевых группах A и B выполняются одни и те же $\forall\exists$-предложения тогда и только тогда, когда A элементарно эквивалентна B.

Теорема 10.3 (Эклоф [365]). Абелевы группы A и B универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда:

1) $\operatorname{Exp}(A)=\operatorname{Exp}(B)$,
2) для каждого простого p и натурального n

$$\dim p^n A[p]=\dim p^n B[p].$$

В частности, все абелевы группы без кручения универсально эквивалентны между собой.

Теорема 10.4 (доказательство в [73]). Если A и B — элементарно эквивалентные абелевы группы и A сервантна в B, то A — элементарная подгруппа B.

Теория T называется модельно полной, если для всякой группы G теории T расширенная теория $T\cup D(G)$ сигнатуры σ^* является полной.

Рассмотрим формульное расширение σ_s сигнатуры абелевых групп, полученное добавлением семейства одноместных предикатов $D_{p,n}$, p — простое, $n\in\mathbf{N}$, определяемых формулой $\exists y(p^n g=x)$. Каждая абелева группа имеет соответственное σ_s-обогащение.

Теорема 10.5 (доказательство в [73]). Любая полная теория абелевых групп является модельно полной в сигнатуре σ_s.

Теория T называется индуктивной, если объединение возрастающей цепочки моделей T есть снова модель T.

Теорема 10.6 (Эклоф [365]). Для абелевой группы A следующие условия эквивалентны: 1) $\mathrm{Th}(A)$ индуктивна, 2) $\mathrm{Th}(A)$ модельно полна, 3) для любого простого p, $n\in\mathbf{N}$: а) если $D(p, A)=\infty$, то $U(p, n, A)=0$; б) если $U(p, n, A)=\infty$, то $U(p, m, A)=0$ для $m<n$; в) $T_f(p, A)=0$.

Теория T называется хорновской, если она устойчива относительно фильтрованных произведений. Фелгнер [377] описал в терминах шмелевских инвариантов все хорновские теории абелевых групп. Оказывается, что теория абелевой группы тогда и только тогда хорновская, когда эта группа элементарно эквивалентна своему прямому квадрату. К элементарной теории абелевых групп относятся работы [182, 357, 366].

10.2. Неабелевы группы. Для большинства естественно определяемых классов групп, не полностью лежащих в многообразии абелевых групп, элементарная теория неразрешима (см. § 12). Поэтому проблема классификации групп из этих классов по элементарным свойствам, как правило, является трудной задачей. Удовлетворительные результаты по ее решению получены для некоторых классов нильпотентных групп и для классических линейных групп. Сформулируем вначале результаты для степенных нильпотентных групп (определение в § 4).

Теорема 10.7 (А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников [154—156]). Пусть G и H — нильпотентные $\mathbf{Q}$-группы конечного ранга. Тогда G элементарно эквивалентна H тогда и только тогда, когда основы G и H изоморфны, причем G и H одновременно либо совпадают со своими основами, либо не равны им.

По определению, подгруппа $\bar{G}\leqslant G$ называется основой группы G, если $Z(\bar{G})\leqslant G'$ и $G=\bar{G}\times C$, где $Z(G)$ — центр G, G' — коммутант G и $C\leqslant Z(G)$. Основа по группе определяется единственным образом с точностью до изоморфизма. Эта теорема резко контрастирует с соответствующим результатом для абелевых групп и сводит проблему элементарной эквивалентности к проблеме изоморфизма для нильпотентных $\mathbf{Q}$-групп конечного ранга. Последняя проблема алгоритмически разрешима [207]. В [156] доказательство теоремы получено с помощью перехода к насыщенным группам и детального изучения связей между абстрактными и алгебраическими изоморфизмами унипотентных алгебраических k-групп, где k — поле нулевой характеристики. В [155] доказательство теоремы получено прямым методом; центральным моментом в нем является установление факта формульности множества баз специального вида в нильпотентной k-группе G конечного ранга для регулярно выделяемого поля k.

Теорема 10.8 (А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, в печати). Пусть G — нильпотентная $\mathbf{Q}$-группа конечного ранга. Тогда основа $\bar{G}$ разлагается в прямое произведение $\mathbf{Q}$-групп $\bar{G}=\prod_{i=1}^{n} G_i$ такое, что для произвольной группы H следующие условия эквивалентны: 1) $G\equiv H$; 2) H — нильпотентная $\mathbf{Q}$-группа и основа $\bar{H}$ разлагается в прямое произведение $\bar{H}=\prod_{i=1}^{n} H_i$, причем для любого i, $1\leqslant i\leqslant n$, существует поле k_i, удовлетворяющее условиям: а) $k_i\equiv\mathbf{Q}$; б) $H_i=G_i^{k_i}$, $G_i^{k_i}$ — k_i-пополнение G_i, при этом группы G и H либо совпадают со своими основами, либо одновременно не равны им.

Проблема 9. Описать универсальные классы, порожденные нильпотентными k-группами конечного ранга.

Ситуация в случае нильпотентных групп, т. е. степенных групп над кольцом $\mathbf{Z}$, более сложная, чем в случае поля $\mathbf{Q}$. Б. И. Зильбер [77] построил пример двух неизоморфных элементарно эквивалентных конечно порожденных 2-нильпотентных групп. Есть основания полагать, что этот пример в некотором смысле является исключением. В этой связи мы формулируем следующие две гипотезы.

Гипотеза 10. Пусть G и H — элементарно эквивалентные конечно порожденные нильпотентные группы и пусть $Z(G)\leqslant G'$. Тогда G и H — изоморфные группы.

Гипотеза 11. Элементарно эквивалентные конечно порожденные нильпотентные группы без кручения изоморфны.

Частным вопросам элементарной эквивалентности нильпотентных групп посвящены работы [279, 479]. Перейдем к результатам по классификации классических линейных групп по их элементарным свойствам.

Теорема 10.9 (А. И. Мальцев [134]). Группа $G(m, k_1)$ элементарно эквивалентна группе $G(n, k_2)$ ($G=\mathrm{GL}$, PG, SL, PS, $m\geqslant n\geqslant 3$, k_1, k_2 — поля нулевой характеристики) тогда и только тогда, когда $m=n$ и $k_1\equiv k_2$.

Доказательство теоремы в [134] получено прямым методом, в основе которого лежит факт формульности характеристики Сегре в указанных группах. Формульность характеристики Сегре в ортогональной группе над полем действительных чисел установлена в [81].

Теорему А. И. Мальцева можно доказать в настоящее время довольно быстро по следующей схеме. По теореме Кейслера—Шелаха (см. § 9) подходящие ультрастепени элементарно эквивалентных групп изоморфны. Ультрастепени сохраняют групповую структуру G и H и меняют только поля k_1 и k_2 на элементарно эквивалентные им поля K_1 и K_2. С помощью результатов О'Миры [2] об изоморфизмах классических групп получаем $m=n$, K_1 изоморфно K_2, что доказывает теорему.

Гипотеза 12. Прямо неразложимые алгебраические элементарно эквивалентные группы над алгебраически замкнутым полем изоморфны.

Проблема 13. Описать полные теории алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем.

Сделаем несколько замечаний относительно других классов неабелевых групп. Ю. И. Мерзляков [147] доказал совпадение позитивных теорий свободных некоммутативных групп (обобщения этого результата в [518, 519]). Однако, все еще не решен

Вопрос 14. Будут ли элементарно эквивалентны свободные неабелевы группы разных рангов?

Попытка отрицательного ответа на этот вопрос в РЖМат, 1978, 12А265 ДЕП является неудачной.

В. Г. Васильев [38, 39] доказал, что конечное расширение полициклической группы вложимо в любую группу, ей элементарно эквивалентную. Баудиш [279] заметил следующее: Пусть p — простое число, большее c. Все свободные нильпотентные группы класса c и показателя p^n с не менее, чем счетным числом порождающих, элементарно эквивалентны.

10.3. Разное. В ряде работ изучался вопрос о сохранении элементарной эквивалентности для различных теоретико-групповых конструкций.

Теорема 10.10 ([95], стр. 392). Фильтрованные произведения, фильтрованные степени, прямые произведения сохраняют элементарную эквивалентность.

Теорема 10.11 (В. Н. Ремесленников, не опубликовано, анонс в [189]). Пусть G_1, G_2, H_1, H_2 — группы. Предположим, что $H_1\equiv H_2$ и $G_1\equiv G_2$. Тогда свободное произведение групп $H_1 * G_1$ элементарно эквивалентно свободному произведению $H_2 * G_2$.

Не сохраняют элементарной эквивалентности: а) операция сплетения групп [227, 229, 230], б) нильпотентные произведения групп [480].

Большое число работ посвящено проблеме элементарной эквивалентности расширенных теорий абелевых групп (см. библиографию и обзор [107]). Приведем один результат такого рода.

Теорема 10.12 (Г. Т. Козлов, А. И. Кокорин [103, 104]). Абелевы групы без кручения G и G' с выделенными подгруппами H и H' соответственно элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда: а) $G \equiv G'$, б) $H \equiv H'$, в) $G/H \equiv G'/H'$, г) $G/pH \equiv G'/pH'$.

В ряде работ (см. библиографию) изучались вопросы элементарной классификации упорядоченных и структурно упорядоченных абелевых групп. Хорошей эффективной классификации в общем случае не найдено.

§ 11. Категоричные и стабильные группы

До 1971 года, когда вышла статья Макинтайра [447] с описанием ω_1-категоричных абелевых групп, работ по проблемам категоричности и стабильности в теории групп не было. В последние годы по этим проблемам получен ряд интересных результатов, хотя на некоторые естественные вопросы ответ пока еще не получен.

Пусть λ — бесконечная мощность. Теория T называется категоричной в мощности λ (или, короче, λ-категоричной), если все ее модели мощности λ изоморфны. Другими словами, λ-категоричные модели полностью характеризуются в мощности λ своими элементарными свойствами. Если A — алгебраическая система, X — подмножество ее основного множества, a_1, a_2 — ее элементы, то говорят, что a_1, a_2 имеют один тип над X, если a_1, a_2 удовлетворяют в A одним и тем же формулам с константами из X. Полная теория называется λ-стабильной, если для любой ее модели A и любого подмножества X мощности $\leqslant\lambda$ в A число типов элементов системы A над X не превосходит λ. Теория называется стабильной, если она стабильна хотя бы в одной мощности.

Теорема 11.1 (Морли). Счетная полная теория, категоричная в некоторой несчетной мощности, категорична во всех несчетных мощностях и ω-стабильна.

Следовательно, спектр категоричных теорий следующий: ω-категоричные, но не ω_1-категоричные теории, ω_1-категоричные, но не ω-категоричные теории, тотально категоричные теории, где ω — счетный кардинал, а ω_1 — первый несчетный кардинал.

Говорят, что группа λ-категорична, λ-стабильна, если такова ее теория. Основные нерешенные вопросы по проблемам категоричности и стабильности следующие:

Вопрос 15. Какова алгебраическая структура ω-категоричных и ω_1-категоричных групп?

Вопрос 16. Какова алгебраическая структура стабильных, суперстабильных, ω-стабильных групп?

По определению группа суперстабильна, если она стабильна во всех несчетных мощностях.

11.1. ω-категоричные и ω-стабильные группы. Справедлива следующая общая характеризация ω-категоричных теорий.

Теорема 11.2 (Воот, Энгелер, Рыль-Нардзевский, Свенониус). Для каждой счетной полной теории следующие условия эквивалентны: 1) T ω-категорична, 2) для каждого $n \in \mathbf{N}$ T имеет конечное число n-типов, 3) каждая счетная T-модель имеет конечное число n-орбит относительно действия ее группы автоморфизмов.

ω-категоричные, а также ω-стабильные группы во многих отношениях сходны с конечными. В самом деле, ввиду теоремы 11.2 и общих теоретико-модельных свойств, они удовлетворяют следующим условиям конечности [273, 274]:

1) ω-категоричные группы локально конечны в сильном смысле, т. е. существует функция $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такая, что n-порожденная подгруппа имеет порядок $\leqslant f(n)$;

2) ω-стабильные группы удовлетворяют условию минимальности для относительно формульных подгрупп;

3) для каждой ω-категоричной, стабильной группы существует функция $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такая, что каждая цепь n-определенных подгрупп имеет длину не более n;

4) стабильные группы удовлетворяют условию максимальности на централизаторы в сильном смысле: а именно, существует число m (зависящее только от G) такое, что для любого подмножества X из G существует m-элементное подмножество $Y \subseteq X$, для которого $C_G(X) = C_G(Y)$.

Описание всех ω-категоричных абелевых групп довольно просто.

Теорема 11.3 (например, [511]). Абелева группа ω-категорична тогда и только тогда, когда она имеет конечный период.

Спектр стабильных теорий так же, как и спектр категоричных теорий, не очень широк, что следует из следующего результата.

Теорема 11.4 (Шелах). Возможны только четыре следующих случая для счетной полной теории T:

1) T λ-стабильна для любого $\lambda \geqslant \omega$, что равносильно ω-стабильности T;

2) T λ-стабильна для всех $\lambda \geqslant \omega_1$ (т. е. T суперстабильна);

3) T λ-стабильна для λ специального типа ($\lambda^\omega = \lambda$), т. е. T стабильна;

4) T не стабильна.

Другими словами, наиболее широким классом групп является класс стабильных групп, строго содержащий подкласс суперстабильных групп. Последний в свою очередь строго содержит класс ω-стабильных групп.

Многими авторами независимо было замечено, что теория любой абелевой группы стабильна (см., например, [291]). Суперстабильные абелевы группы, по-видимому, не описаны (алгебраическую информацию о суперстабильных группах можно найти в [332]), а ω-стабильные абелевы группы описаны.

Теорема 11.5 (Макинтайр [447]). Абелева группа G является ω-стабильной тогда и только тогда, когда $G=D\oplus H$, где D — делимая группа, H — группа конечного периода.

При описании ω-категоричных и ω-стабильных неабелевых групп возникают значительные трудности, с одной стороны при рассмотрении нильпотентных групп, и простых с другой. Наилучшим результатом в этом направлении является

Теорема 11.6 (Баур, Черлин и Макинтайр [290]). 1) Любая ω-категоричная стабильная группа почти нильпотентна. 2) Любая ω-категоричная ω-стабильная группа почти абелева.

Независимо первая часть теоремы доказана Фелгнером [373, 374]. Не любая почти абелева группа конечного периода является ω-категоричной ω-стабильной группой. Частичные результаты по выделению последних в классе почти абелевых групп получены Б. И. Зильбером [79], Черлиным и Розенштейном [331] и Розенштейном [511].

Отметим нерешенные задачи.

Проблема 17. Любая ω-категоричная стабильная группа является почти абелевой.

Проблема 18. Любая ω-категоричная простая группа является конечной.

Известно, что гипотетическая бесконечная ω-категоричная простая группа должна содержать в себе бесконечное множество неизвестных к настоящему времени конечных простых групп.

11.2. ω_1-категоричные группы. При описании ω_1-категоричных групп полезно предварительно получить информацию об ω-стабильных группах конечного ранга Морли (определение ранга в [95, 200]). Это видно из следующих теоретико-модельных результатов.

Теорема 11.7 (Морли). Счетная полная ω_1-категоричная теория ω-стабильна и имеет конечный ранг Морли.

Теорема 11.8 (Воот, Болдуин и Лахлан). Счетная полная теория T ω_1-категорична тогда и только тогда, когда T ω-стабильна и не имеет 2-кардинальных моделей.

По определению модель A теории T 2-кардинальна, если в A существует бесконечное формульное подмножество мощности, меньшей, чем мощность A.

Удобство отмеченной выше схемы изучения ω_1-категоричных теорий заключается в том, что свойства ω-стабильности и конечности ранга Морли наследуются при относительной определимости (см. § 13) одной модели в другой. Следуя этой схеме, Макинтайр [447] получил описание абелевых ω_1-категоричных групп.

Теорема 11.9. Абелева группа ω_1-категорична тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $A=K\oplus H$, где K конечна, H — бесконечная p-группа, являющаяся прямой суммой копий фиксированной циклической p-группы;

2) $A=K\oplus D$, где K конечна, D — делимая группа, и для любого простого числа p D содержит только конечное число элементов порядка p.

Описание алгебраической структуры некоммутативных ω_1-категоричных групп представляется трудной задачей. К настоящему времени в этом направлении получены только следующие результаты.

Теорема 11.10 (Баур, Черлин, Макинтайр [290]). Тотально категоричные группы являются почти абелевыми группами.

В этой же статье описаны те почти абелевы группы, теория которых является тотально категоричной.

Теорема 11.11 (Зильбер [78]). Нильпотентная группа G без кручения ω_1-категорична тогда и только тогда, когда G есть неразложимая в прямое произведение k-группа конечного ранга над алгебраически замкнутым полем k.

Некоторые частные результаты по категоричным группам содержатся в статьях [372, 376].

Отметим следующие нерешенные задачи.

Проблема 19. ω_1-категоричные локально конечные простые группы являются группами Шевалле над локально конечным алгебраически замкнутым полем.

Проблема 20. Каждая простая ω-стабильная группа является алгебраической группой над алгебраически замкнутым полем. Или в более слабой формулировке. Каждая простая ω-стабильная линейная группа является алгебраической над алгебраически замкнутым полем.

В связи с последней проблемой заметим, что простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем ω_1-категорична [79].

11.3. Разное. Спектр ранга Морли ω-стабильных абелевых групп изучался в [512]. Примеры ω-стабильных не почти абелевых групп приведены в [279, 330]. Группы малого ранга Морли ($\leqslant 3$) изучались в [330]. Ряд фактов о суперстабильных группах и группах малых рангов ($\leqslant 3$), аналогичных рангу Морли для ω-стабильных групп, содержатся в [332].

О. В. Белеградек [24] доказал, что в любом неабелевом многообразии имеется нестабильная группа и, следовательно, по теореме Шелаха 2^λ групп произвольной несчетной мощности λ (см. также [274, 514, 515]).

При попытках классификации произвольных категоричных теорий в некоторых случаях неожиданно появляются группы [1, 80, 181]. Например, оказалось, что открытый вопрос о существовании конечно аксиоматизируемого ω_1-категоричного, но не ω-категоричного квазимногообразия равносилен выполнению одного из двух условий, либо существует бесконечное к. о. кольцо, являющееся телом, либо существует бесконечная к. о. группа, в которой имеется конечное число неединичных классов сопряженности таких, что любая неединичная циклическая подгруппа пересекается с одним из них.

§ 12. Разрешимые и неразрешимые теории групп

Наибольшее число работ по приложениям математической логики в группах связано с вопросами разрешимости элементарных теорий конкретных классов групп. Пусть K — произвольный класс групп. Теория $\mathrm{Th}(K)$ является разрешимой, если и только если существует эффективная процедура, позволяющая по любому предложению групповой сигнатуры сказать, принадлежит данное предложение $\mathrm{Th}(K)$ или нет. Для более формального определения разрешимости элементарной теории мы отсылаем к книгам по математической логике, упомянутым во введении.

12.1. Методы доказательств. Опишем кратко три основных метода доказательства разрешимости элементарных теорий: элиминации кванторов, рекурсивной аксиоматизируемости полной теории, модельной полноты.

Сущность метода элиминации кванторов состоит в построении алгоритма A, переводящего предложение φ сигнатуры теории T в бескванторное предложение $A(\varphi)$ такое, что φ принадлежит T тогда и только тогда, когда $A(\varphi)$ принадлежит T. Предполагается, что в сигнатуру добавлены два бескванторных символа **0** и **1** такие, что **1** и $\neg$**0** — доказуемые формулы. Теории плотного линейного порядка без наименьшего и наибольшего элемента, алгебраически замкнутых полей, вещественно замкнутых упорядоченных полей допускают элиминацию кванторов, и потому их теории разрешимы.

Другой подход, очень часто используемый для доказательства разрешимости теории, основан на следующем нетрудно доказуемом результате.

Теорема 12.1. Полная непротиворечивая теория разрешима тогда и только тогда, когда она рекурсивно аксиоматизируема.

Этот метод может быть использован и для доказательства разрешимости неполных теорий.

Теорема 12.2 (Ю. Л. Ершов). Теория T разрешима тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: 1) теория T рекурсивно перечислимо аксиоматизируема; 2) существует эффективная последовательность полных теорий $T_0, T_1, \ldots$ такая, что $T = \bigcap_{i \in \mathrm{N}} T_i$.

Доказательство полноты теории часто проводится методом модельной полноты (см. § 10), созданным Робинсоном. Систематическое применение этого метода привело к наиболее внушительным приложениям теории моделей: к 17-й проблеме Гильберта (Робинсон) и к гипотезе Артина (Акс и Кочен, Ю. Л. Ершов). Этим методом вместе с теоремой 12.2 наиболее естественно доказывается и разрешимость элементарной теории абелевых групп.

Нетрудно заметить, что теория, допускающая элиминацию кванторов, модельно полна. Обратное, вообще говоря, не верно. Однако можно получить характеризацию модельной полноты с помощью более слабого, чем выше, понятия элиминации кванторов.

Теорема 12.3 (Робинсон). Теория модельно полна, если и только если любая формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ на моделях теории T эквивалентна универсальной формуле $\psi(x_1, \ldots, x_n)$.

Следующая теорема приспособлена для приложений.

Теорема 12.4 (критерий Робинсона). Теория T сигнатуры σ модельно полна тогда и только тогда, когда для любых двух ее моделей A и B таких, что $A \subseteq B$, всякое примитивное предложение сигнатуры σ, истинное в B, истинно и в A.

Формула в пренексной нормальной форме называется примитивной, если она не содержит кванторов всеобщности, и ее бескванторная часть является конъюнкцией атомных формул или их отрицаний. Понятия полноты и модельной полноты теории T существенно различны. Однако существуют удобные признаки полноты модельно полных теорий. Модель A теории T называется первичной (для T), если A изоморфно вкладывается в любую модель теории T.

Модельно полная теория T полна в следующих случаях: 1) T имеет первичную модель, 2) любые две модели T имеют общее расширение, 3) любые две модели T универсально эквивалентны.

Основным методом доказательства неразрешимости теорий является метод относительной элементарной определимости. Современную форму этот метод получил в работах Ю. Л. Ершова. Пусть K — класс моделей сигнатуры σ, а M — некоторый класс групп. Будем говорить, что класс K относительно элементарно определим в M, если существуют такие формулы групповой сигнатуры $\varphi(\bar{x}; \bar{y}_0)$, $\psi(\bar{x}; \bar{y}_1, \bar{y}_2)$, $\theta_P(\bar{x}; \ldots)$ для всех предикатов P из σ $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{y}_i = (y_1^i, \ldots, y_m^i)$, что для любой модели A из K найдется группа B из M и элементы $a_1, \ldots, a_n$ в ней, удовлетворяющие условиям: 1) множество $C = \{\bar{b} \mid \bar{b} \in B^m, \varphi(\bar{a}; \bar{b})$ истинна в $B\}$ не пусто; 2) если $\tilde{C}$ — модель сигнатуры σ, основным множеством которой является C, а предикат P определяется формулой $\theta_P(\bar{a}; \ldots)$, то формула

$\psi(\bar{a};\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2)$ определяет отношение конгруэнтности η на модели $\tilde{C}$; 3) фактормодель $\tilde{C}/\eta$ изоморфна A.

Теорема 12.5. Если класс K относительно элементарно определим в классе групп M и теория $\mathrm{Th}(K)$ наследственно неразрешима, то теория $\mathrm{Th}(M)$ также наследственно неразрешима.

Теория T называется наследственно неразрешимой, если любая подтеория теории T неразрешима. При доказательстве неразрешимости элементарных теорий классов групп чаще всего используются следующие наследственно неразрешимые теории:

1) теория кольца целых чисел,

2) теория натуральных чисел со сложением и предикатом делимости,

3) теория класса всех конечных моделей двух эквивалентностей,

4) теория класса всех конечных моделей одного бинарного симметричного, но не рефлексивного предиката.

12.2. Разрешимые теории. В 1929 году Пресбургер [496] доказал фундаментальный результат о разрешимости натуральных чисел по сложению, из которого следует разрешимость элементарной теории бесконечной циклической группы. Другим фундаментальным результатом по проблеме разрешимости является следующая

Теорема 12.6 (Шмелева [552]). Элементарная теория класса всех абелевых групп разрешима.

В настоящее время известно несколько доказательств этой теоремы. Построение разрешающей процедуры для элементарной теории абелевых групп методом элиминации кванторов приведено в [115, 552]; доказательство с помощью теоремы 12.2 — в [73, 367]. Доказана также разрешимость элементарных теорий следующих классов абелевых групп [69]: периодических, делимых, циклических, p-групп, конечных моделей указанных выше классов.

С помощью описания полных теорий абелевых групп нетрудно выделить те из них, которые имеют разрешимую элементарную теорию. В частности, такими являются полные теории конечно порожденных абелевых групп. Свойство разрешимости элементарной теории переносится на конечные расширения групп [72]. Следовательно, конечно порожденные почти абелевы группы имеют разрешимую теорию.

В ряде работ изучались элементарные теории абелевых групп в расширенной сигнатуре. Доказана разрешимость следующих теорий:

1) упорядоченных абелевых групп в сигнатуре $\langle +, \leqslant \rangle$ [61],

2) абелевых групп без кручения в сигнатуре $\langle +, H(x) \rangle$, где $H(x)$ — предикат, выделяющий подгруппу [103, 115, 278],

3) делимых абелевых групп без кручения в сигнатуре со сложением и автоморфизмом [144].

Для более полного знакомства с этой тематикой отсылаем читателя к обзору [107], а также к работам [40, 64, 105, 123, 141, 144, 116, 117, 241, 276, 280, 281, 289, 505].

Для неабелевых групп элементарные теории, как правило, являются сложными. Однако для алгебраических линейных k-групп разрешимость элементарной теории во многом зависит от разрешимости теории поля k.

Теорема 12.7 (А. И. Мальцев [134]). Элементарная теория группы $G(n, k)$, где $G \in \{\mathrm{GL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{PSL}\}$, $n \geqslant 2$, разрешима тогда и только тогда, когда разрешима теория поля k.

Подобная теорема справедлива и для нильпотентных k-групп. Более точно, пусть A — конечный набор коэффициентов многочленов умножения и возведения в степень некоторой мальцевской базы k-группы G конечного ранга, $\mathrm{Th}(k_A)$ — теория поля k с выделенными константами из A. Тогда если теория $\mathrm{Th}(k_A)$ разрешима, то теория группы G также разрешима [91, 154]. В работе [154] доказано обращение этой теоремы для $\mathbf{Q}$-определенной k-группы конечного ранга для регулярно выделяемого поля k (поле k называется регулярно выделяемым, если для любого натурального числа n существует формула кольцевой сигнатуры, выделяющая поле k в любом своем конечном алгебраическом расширении степени не выше n).

Из нерешенных вопросов о разрешимости элементарных теорий групп наибольший интерес представляет

Гипотеза 23. Элементарная теория свободной группы разрешима.

12.3. Неразрешимые теории. Неразрешимость элементарной теории класса всех групп была доказана Тарским в 1949 году [553], а класса конечных групп — А. И. Мальцевым [133] (см. также [338]). В 1964 году Ю. Л. Ершов [70] доказал, что теория класса всех симметричных групп S_n, $n \in \mathbf{N}$, имеет наследственно неразрешимую теорию, интерпретируя в ней теорию двух эквивалентностей. Поэтому теория любого класса групп, содержащего внутри себя симметрические группы, также наследственно неразрешима. Методом относительной элементарной определимости доказана неразрешимость элементарных теорий следующих классов:

1) простых конечных групп [70];

2) 2-нильпотентных групп с тождеством $x^p = 1$ $(p \neq 2)$ [131];

3) линейных, специальных линейных, проективных, специальных проективных, ортогональных, симплектических групп матриц над любым полем [74].

Ю. Л. Ершов и Тарский высказали гипотезу о том, что любое неабелево многообразие групп имеет неразрешимую теорию. Ю. Л. Ершов [369] доказал эту гипотезу для многообразий, со-

4*

держащих конечную неабелеву группу. Окончательное решение гипотезы получено А. П. Замятиным [76]. Эта теорема показывает определенную завершенность результата Шмелевой о разрешимости элементарной теории абелевых групп.

В ряде работ изучались элементарные теории абелевых групп в расширенной сигнатуре и элементарные теории решеток подгрупп подклассов абелевых групп. Доказана неразрешимость следующих теорий:

1) решеточно упорядоченных абелевых групп [323];

2) решеток подгрупп абелевых групп [84];

3) решеток подгрупп конечных абелевых групп [101];

4) а) абелевых, б) делимых абелевых, в) абелевых без кручения, г) упорядоченных абелевых групп в сигнатуре со сложением и автоморфизмом [145];

5) наследственно неразрешима теория абелевых групп с предикатом, выделяющим подгруппу [142, 212, 288, 289].

Как и в случае разрешимых теорий, для более полного ознакомления с расширенными теориями отсылаем читателя к обзору [107] и к библиографии.

В работе [91] была высказана гипотеза, что конечно порожденная разрешимая группа имеет разрешимую теорию тогда и только тогда, когда она почти абелева. Эту гипотезу подтвердили Ю. Л. Ершов [72] для нильпотентных групп, Н. С. Романовский [193] для полициклических, Г. А. Носков [169] для разрешимых групп. В группе, не являющейся почти абелевой, Ю. Л. Ершов интерпретировал теорию кольца алгебраических целых чисел, которая как известно наследственно неразрешима, а два других автора — теорию натуральных чисел со сложением и делением.

Доказана неразрешимость элементарных теорий следующих конкретных групп:

1) свободной нильпотентной неабелевой группы [131];

2) свободной разрешимой неабелевой группы [132];

3) нильпотентной неабелевой **Q**-группы конечного ранга [154];

4) свободного произведения двух свободных групп с нетривиальным объединением [499].

12.4. Универсальные теории. Для большинства естественно определяемых классов групп разрешимость или неразрешимость фрагмента теории класса, содержащего формулы с двумя блоками кванторов, влечет соответствующее свойство и для всей теории. В то же время существуют группы (уже в классе абелевых групп) с разрешимой универсальной, но с неразрешимой элементарной теориями. По этой причине изучение фрагментов теорий с одним блоком кванторов (в силу двойственности между $\forall$-предложениями и $\exists$-предложениями, можно ограничиться только универсальными предложениями) приобретает самостоятельное значение.

Если класс групп K содержит конечно определенную группу $G=\langle x_1,\ldots,x_k;\ r_1=1,\ldots,r_l=1\rangle$ с неразрешимой проблемой равенства, то универсальная теория K неразрешима. В самом деле, фрагмент теории, состоящий из предложений вида $\forall x_1,\ldots,\forall x_k\ (r_1=1\wedge\ldots\wedge r_l=1\rightarrow w=1)$, w — групповое слово от $x_1,\ldots,x_k$, неразрешим, а с ним неразрешима и вся универсальная теория класса K. По этой причине неразрешимы универсальные теории следующих классов групп: всех [162], разрешимых [186], разрешимых ступени n, $n\geqslant 3$ [242].

Неразрешимость универсальной теории конечных групп доказана А. М. Слободским [211] (см. также [406]). Конкретные примеры нильпотентных и метабелевых групп с неразрешимой универсальной теорией построены В. А. Романьковым [199].

В [126] Г. С. Маканин отметил разрешимость универсальной теории свободной группы.

§ 13. Компаньон-теории. Экзистенциально замкнутые группы

Связь между теорией полей и теорией алгебраически замкнутых полей привела к понятию модельного компаньона и к его обобщениям: конечно форсингового компаньона и бесконечно форсингового компаньона. Для теории T групповой сигнатуры компаньон-теория, грубо говоря, это максимальная $T_{\forall\exists}$-теория, модельная совместная с T. $\forall\exists$-предложения в теории групп указывают нам обычно условия, относительно которых система уравнений и неравенств имеет решение. Поэтому в моделях компаньон-теории разрешимы все возможные в рамках данной теории T конечные системы уравнений и неравенств. С перечисленными выше тремя компаньон-теориями связаны, соответственно, три новых класса групп: экзистенциально замкнутые, конечно генерические, бесконечно генерические.

13.1. Компаньон-операции. Пусть T, T^* — некоторые теории одинаковой сигнатуры. Теория T^* называется модельным компаньоном теории T, если а) T и T^* взаимно модельно совместны, т. е. любая модель теории T вкладывается в модель теории T^*, и наоборот; б) T^* — модельно полная теория.

Теорема 13.1 (Робинсон). Теория T имеет не более одного модельного компаньона.

Укажем примеры модельных компаньонов для некоторых известных теорий: для полей — теория алгебраически замкнутых (а. з.) полей; для упорядоченных полей — теория действительно замкнутых упорядоченных полей; для абелевых групп — теория а. з. абелевых групп [551]; для абелевых групп без кручения — теория делимых абелевых групп без кручения. Модельный компаньон существует не для всякой теории. Уяснение основных свойств частичного отображения $T\rightarrow T^*$ привело к понятию компаньон-операции. Операция $T\rightarrow T^{\#}$ на теориях будет компаньон-операцией, если 1) $(T^{\#})_{\forall}=T_{\forall}$, 2) из $T_{\forall}=T'_{\forall}$ следует $T^{\#}=(T')^{\#}$, 3) $T_{\forall\exists}\subseteq T^{\#}$.

Оказалось, что существует много интересных компаньон-операций; в их числе конечный форсинг-компаньон (образ T^f) и бесконечный форсинг-компаньон (образ T^F). Модели T^f, T^F (в общей ситуации не все) строятся с помощью конструкций конечного и бесконечного форсинга, введенных в теорию моделей в 1969—70 годах Робинсоном, и называются, соответственно, конечно генерическими и бесконечно генерическими. Определение форсинга и его свойства изложены в книгах [225, 402].

Теорема 13.2. Если $\#$ — компаньон-операция и T^* — модельный компаньон, то $T^*=T^{\#}$.

Пусть T — некоторая индуктивная теория групп (т. е. T замкнута относительно объединения возрастающих цепей). Группа G теории T называется T-экзистенциально замкнутой (T-э. з.), если любая конечная система уравнений и неравенств с параметрами из G, имеющая решение в некотором T-расширении G, имеет решение уже в самой G. Если мы ограничимся только системами уравнений в данном определении, то получим определение T-алгебраически замкнутой (T-а. з.) группы. Обозначим A_T, E_T, f_T, F_T, соответственно, классы T-а. з., T-э. з., конечно генерических, бесконечно генерических групп для теории T. $\mathrm{Th}(E_T)$ — хороший кандидат на роль модельного компаньона теории T. Единственное препятствие в том, что класс E_T необязательно аксиоматизируем.

Теорема 13.3 (Эклоф и Саббагх [368]). Теория T имеет модельный компаньон, если и только если E_T будет аксиоматизируемым классом.

Доказано, что не имеют модельного компаньона следующие классы групп:

1) всех [368];
2) n-ступенно разрешимых, $n\geqslant 2$ [523];
3) n-ступенно нильпотентных, $n\geqslant 2$ [524];
4) n-ступенно нильпотентных без кручения, $n\geqslant 2$ [524].

При отсутствии модельного компаньона изучаются форсинг-компаньоны теории, основные свойства которых собраны в следующей теореме.

Теорема 13.4. 1) а) Теория $T^f(T^F)$ полна, если и только если T обладает свойством совместного вложения;

б) $f_T\subseteq E_T$, $F_T\subseteq E_T$;

в) $G\in f_T(F_T)$, если и только если G есть пополнение $T^f(T^F)$, т. е. из того, что G — подгруппа группы H теории $T^f(T^F)$, следует, что G — элементарная подгруппа;

2) T^* существует, если и только если $f_T(F_T)$ — аксиоматизирующий класс.

О группах из классов f_T, F_T известно следующее:

1) конечно генерическая 2-нильпотентная группа периодична [524];

2) с точностью до изоморфизма существует только одна счетная конечно генерическая 2-нильпотентная группа [526];

3) любая периодическая 2-нильпотентная группа вложима в конечную генерическую [526];

4) теория 2-нильпотентных групп конечного периода имеет ω-категоричный модельный компаньон, а потому для нее $E_T=f_T=F_T$ [526];

5) $f_T\neq F_T$, если T — теория: а) n-нильпотентных групп, $n\geqslant 2$ [524]; б) 2-нильпотентных групп без кручения [525]; в) 2-разрешимых групп [523].

13.2. Экзистенциально-замкнутые группы. В начале пятидесятых годов Скотт [536] ввел понятие алгебраически замкнутой (а. з.) группы и показал, что любая группа вложима в а. з. группу той же мощности. Нейман [476] доказал, что, во-первых, любая э. з. группа проста, и, во-вторых, для нееединичных групп понятия а. з. и э. з. группы совпадают. Из простых мощностных соображений следует, что существует 2^{ω} неизоморфных счетных а. з. групп. Сложность их групповой структуры подчеркивает

Теорема 13.5. (Нейман [477]). Любая конечно порожденная группа с разрешимой проблемой равенства вкладывается в любую а. з. группу.

Используя конструкцию конечного форсинга, Макинтайр [450] доказал обращение теоремы Неймана.

Теорема 13.6. Если конечно порожденная группа имеет неразрешимую проблему равенства, то существует а. з. группа, в которую она не вложима.

Общие соображения показывают, что любые две а. з. группы удовлетворяют одним и тем же $\forall\exists$-предложениям. Естественно возникает вопрос: являются ли любые две а. з. группы элементарно эквивалентными? Макинтайр [450] дал отрицательный ответ на этот вопрос; более того, в работах [26, 402] показано, что число элементарных типов а. з. групп равно 2^{ω}.

Во всех работах по этой проблеме существенную роль играло следующее обстоятельство, замеченное Макинтайром [450]: некоторые предикаты, не формульные в классе всех групп, являются формульными в классе а. з. групп. Например, n-местный предикат «подгруппа, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$ в G, проста» определим в классе а. з. групп. Вопрос о том, какие предикаты формульны в классе а. з. групп, изучался О. В. Белеградеком [23, 26] и М. Ю. Трофимовым [231] (см. также [28]). Известно также [450], что: а) а. з. группа не может быть задана рекурсивным множеством определяющих соотношений, б) любая счетная а. з. группа содержит собственную копию себя самой, в) не существует а. з. группы, которая вкладывается во все другие.

Перейдем к изложению результатов для многообразий нильпотентных групп. Баумслаг и Левин [287] изучали а. з. группы в классе 2-нильпотентных групп без кручения. Оказалось, что для любого положительного $m \leqslant \omega$ существует единственная счетная а. з. группа, центр которой — произведение m копий $\mathbf{Q}$. В [525] замечено, что в классе нильпотентных групп без кручения классы а. з. и э. з. совпадают. Сарацино и Вуд [526, 528] изучают периодические э. з. 2-нильпотентные группы. Они доказывают, что это в точности конечно генерические 2-нильпотентные группы. Любая периодическая 2-нильпотентная группа вложима в периодическую э. з. 2-нильпотентную группу. В любом бернсайдовом многообразии 2-нильпотентных групп и во всем многообразии 2-нильпотентных групп понятие а. з. группы шире понятия э. з. группы.

13.3. Замечание. В работе [35] доказано существование а. з. группы G, в которой разрешимы все разумно определяемые групповые уравнения с параметрами из G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абакумов А. И., Палютин Е. А., Тайцлин М. А., Шишмарев Ю. Е.*, Категоричные квазимногообразия. Алгебра и логика, 1972, *11*, № 1, 3—38 (РЖМат, 1972, 9А264)
2. Автоморфизмы классических групп. Сб. статей. Пер. с англ. и фр. М., Мир, 1976, 264с. (РЖМат, 1977, 4А230К)
3. *Адян С. И.*, Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп. Докл. АН СССР, 1955, *103*, № 4, 533—535 (РЖМат, 1956, 962)
4. —, Конечно определенные группы и алгоритмы. Докл. АН СССР, 1957, *117*, № 1, 9—12 (РЖМат, 1959, 2233)
5. —, Об алгоритмических проблемах в эффективно полных классах групп. Докл. АН СССР, 1958, *123*, № 1, 13—18 (РЖМат, 1959, 5443)
6. —, Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп. Тр. Моск. мат. о-ва, 1957, *6*, 231—298 (РЖМат, 1958, 8524)
7. —, Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, *34*, № 4, 715—734 (РЖМат, 1971, 2А181)
8. —, Тождественные соотношения в группах. В сб. «Междунар. конгресс математиков в Ницце». М., Наука, 1972, 7—13 (РЖМат, 1973, 4А288)
9. —, Проблема Бернсайда и тождества в группах. М., Наука, 1975, 336с. (РЖМат, 1975, 12А241К)
10. —, Нормальные подгруппы свободных периодических групп. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, *45*, № 5, 931—947 (РЖМат, 1982, 2А207)
11. —, Периодические произведения групп. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1976, *142*, 3—21 (РЖМат, 1977, 3А184)
12. *Безверхний В. Н.*, Решение проблемы вхождения для одного класса групп. В сб. «Вопр. теории групп и полугрупп». Тула, 1972, 3—86 (РЖМат, 1973, 8А193)
13. —, Нильсеновский метод сокращения для свободного произведения групп. Сб. науч. тр. Кафедры высш. мат. Тульск. политехн. ин-т, 1972, вып. 1, 44—70 (РЖМат, 1973, 9А218)
14. —, О пересечении конечно порожденных подгрупп свободной группы. Сб. науч. тр. Кафедры высш. мат. Тульск. политехн. ин-т, 1974, вып. 2, 51—56 (РЖМат, 1975, 5А203)
15. —, О неразрешимости проблемы вхождения для некоторого класса групп, Сб. науч. тр. Кафедры высш. мат. Тульск. политехн. ин-т, 1974, вып. 2, 117—121 (РЖМат, 1975, 5А209)
16. —, Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с объединением. Сб. научн. тр. Кафедры высш. мат. Тульск. политехн. ин-т, 1975, вып. 3, 90—94 (РЖМат, 1976, 12А282)
17. —, Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп. I, II. В сб. «Соврем. алгебра». Вып. 6. Л., 1977, 16—23, 24—32 (РЖМат, 1977, 11А257, 11А258)
18. —, Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп. Алгоритм. пробл. теории групп и полугрупп. Тула 1981, 20—62 (РЖМат, 1982, 6А200
19. —, *Гринблат В. А.*, О проблеме корня в группах Артина. Алгоритм. пробл. теории групп и полугрупп. Тула, 1981, 72—81 (РЖМат, 1982, 7А164)
20. —, —, О проблеме вхождения в группах Артина конечного типа. Сиб. мат. ж., 1982, *23*, № 4, 19—28 (РЖМат, 1982, 12А188)
21. *Безверхняя И. С.*, О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп. Алгоритм. пробл. теории групп и полугрупп. Тула, 1981, 102—116 (РЖМат, 1982, 6А199)
22. *Белеградек О. В.*, Об алгебраически замкнутых группах. Алгебра и логика, 1974, *13*, № 3, 239—255 (РЖМат, 1975, 5А210)
23. —, Об определимости в алгебраически замкнутых группах. Мат. заметки, 1974, *16*, № 3, 375—380 (РЖМат, 1975, 2А279)
24. —, О нестабильных теориях групп. Изв. вузов. Математика, 1978, № 8, 41—44 (РЖМат, 1979, 3А170)
25. —, Об m-степенях проблемы тождества слов. Сиб. мат. ж., 1978, *19*, № 6, 1232—1236 (РЖМат, 1979, 4А230)
26. —, Элементарные свойства алгебраически замкнутых групп. Fund. math., 1978, *98*, № 2, 83—101 (РЖМат, 1978, 9А147)
27. —, Алгебраические эквивалентны разрешимости теоретико-групповых алгоритмических проблем. Сиб. мат. ж., 1979, *20*, № 5, 953—963 (РЖМат, 1980, 1А183)
28. *Беляев В. Я., Тайцлин М. А.*, Об элементарных свойствах экзистенционально замкнутых систем. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 2, 39—94 (РЖМат, 1979, 8А72)
29. *Бобровский А. Н.*, Подгруппы и шрейеровские системы в свободном произведении групп с общим объединением. Тульск. гос. пед. ин-т. Тула, 1979. 15с. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 29 янв. 1980 г., № 382—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 5А206 ДЕП)
30. *Бокуть Л. А.*, О группах Новикова. Алгебра и логика, 1967, *6*, № 1, 25—38 (РЖМат, 1967, 12А56)
31. —, Об одном свойстве групп Буна. Алгебра и логика, 1966, *5*, № 5, 5—23; II. Алгебра и логика, 1967, *6*, № 1, 15—24 (РЖМат, 1967, 6А61, 11А77)
32. —, Степени неразрешимости проблемы сопряженности для конечно определенных групп. Алгебра и логика, 1968, *7*, № 5, 4—70 (РЖМат, 1970, 4А260)
33. *Борисов В. В.*, Простые примеры групп с неразрешимой проблемой тождества. Мат. заметки, 1969, *6*, № 5, 521—532 (РЖМат, 1970, 4А236)
34. *Брискорн Э., Сайто К.*, Группы Артина и группы Коксетера. Математика. Период. сб. пер. ин. статей, 1974, *18*, № 6, 56—79 (РЖМат, 1975, 3А287)
35. *Бродский С. Д.*, Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением. Иванов. ун-т. Иваново, 1980. 45с. Библиогр. 18 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 2 июня 1980 г., № 2214—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 9А229 ДЕП)
36. *Валиев М. К.*, Об одной теореме Г. Хигмана. Алгебра и логика, 1968, *7*, № 3, 9—22 (РЖМат, 1969, 9А135)
37. —, Примеры универсальных конечно определенных групп. Докл.

АН СССР, 1973, *211*, № 2, 265—268; Поправка. Докл. АН СССР, 1974, *215*, № 1, 10 (РЖМат, 1973, 12А233; 1974, 7А309)
38. *Васильев В. Г.*, О разрешимых элементарно эквивалентных группах. Докл. АН СССР, 1973, *208*, № 4, 761—763 (РЖМат, 1973, 6А117)
39. —, О разрешимых элементарно эквивалентных группах. В сб. «Некотор. вопр. теории групп и колец». Красноярск, 1973, 9—22 (РЖМат, 1974, 6А281)
40. *Васильев Э. С.*, Об элементарных теориях двуосновных моделей абелевых групп. В сб. «Алгебра». Вып. 2. Иркутск, 1973, 62—68 (РЖМат, 1974, 12А91)
41. —, Об элементарных теориях полных абелевых групп без кручения с p-адической топологией. Мат. заметки, 1973, *14*, № 2, 201—208 (РЖМат, 1974, 1А234)
42. —, Об элементарных теориях абелевых p-групп с высотами элементов. В сб. «Алгебраические системы». Иркутск, 1976, 17—20 (РЖМат, 1978, 3А149)
43. *Гарсайд Ф. А.*, Группа кос и другие группы. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1970, *14*, № 4, 116—132 (РЖМат, 1970, 12А165)
44. *Гладкий А. В.*, О классе нильпотентности группы с δ-базисом. Докл. АН СССР, 1959, *125*, № 5, 963—965 (РЖМат, 1960, 4949)
45. —, О групах с k-сократимым базисом. Докл. АН СССР, 1960, 134, № 1, 16—18 (РЖМат, 1961, 9А215)
46. *Гольберг А. И.*, О невозможности усиления некоторых результатов Гриндлингера и Линдона. Успехи мат. наук, 1978, *33*, № 6, 201—202 (РЖМат, 1979, 5А169)
47. *Гольдина Н. П.*, Решение некоторых алгоритмических проблем для свободных и свободных нильпотентных групп. Успехи мат. наук, 1958, *13*, № 3, 183—189 (РЖМат, 1959, 3548)
48. *Горюшкин А. П.*, О проблеме индекса. Уч. зап. Иванов. гос. пед. ин-т, 1972, *117*, 59—76 (РЖМат, 1973, 8А192)
49. *Горяга А. В., Киркинский А. С.*, Разрешимость проблемы сопряженности не переносится на конечные расширения групп. Алгебра и логика, 1975, *14*, № 4, 393—406 (РЖМат, 1976, 5А46)
50. *Гринблат В. А.*, Разрешимость проблемы тождества в одном классе групп. В сб. «Спец. главы высш. мат. в теории и практ. инж. задач». Тула, 1978, 92—95 (РЖМат, 1979, 6А155)
51. —, О нормализаторах групп Артина. Алгоритм. пробл. теории групп и полугрупп. Тула, 1981, 82—94 (РЖМат, 1982, 7А165)
52. *Гриндлингер М. Д.*, К магнусовой обобщенной проблеме тождества слов. Сиб. мат. ж., 1964, *5*, № 4, 955—957 (РЖМат, 1965, 1А60)
53. —, Решение проблемы сопряженности для одного класса групп, совпадающих со своими антицентрами, с помощью обобщенного алгоритма Дэна. Докл. АН СССР, 1964, *158*, № 6, 1254—1256 (РЖМат, 1965, 3А196)
54. —, Усиление двух теорем для одного класса групп. Сиб. мат. ж., 1965, *6*, № 5, 972—984 (РЖМат, 1966, 2А232)
55. —, К проблемам тождества слов и сопряженности. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, *29*, № 2, 245—268 (РЖМат, 1965, 12А228)
56. —, О проблеме сопряженности и совпадений с антицентром в теории групп. Сиб. мат. ж., 1966, *7*, № 4, 785—803 (РЖМат, 1968, 2А170)
57. —, Решения проблемы тождества слов для одного класса групп с помощью алгоритма Дэна и проблемы сопряженности с помощью одного обобщения алгоритма Дэна. Докл. АН СССР, 1964, *154*, № 3, 507—509 (РЖМат, 1964, 9А64)
58. —, К нахождению факторгруппы нормального делителя свободной группы по взаимному коммутанту. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1970, 7, № 3, 72—76 (РЖМат, 1971, 5А232)
59. —, Сопряженность подгрупп свободных групп. Сиб. мат. ж., 1970, *11*, № 5, 1178—1180 (РЖМат, 1971, 4А188)
60. *Гуревич Г. А.*, К проблеме сопряженности для групп с одним определяющим соотношением. Докл. АН СССР, 1972, *207*, № 1, 18—20; Тр. Мат. ин-та. АН СССР, 1973, *133*, 109—120 (РЖМат, 1973, 4А289; 1974, 3А153)
61. *Гуревич Ю. Ш.*, Элементарные свойства упорядоченных абелевых групп. Алгебра и логика, 964, *3*, № 1, 5—40 (РЖМат, 1964, 12А263)
62. —, Наследственная неразрешимость одного класса структурно упорядоченных абелевых групп. Алгебра и логика 1967, *6*, № 1, 45—62 (РЖМат, 1967, 12А220)
63. —, К элементарной теории структурно упорядоченных абелевых групп и K-линеалов. Докл. АН СССР, 1967, *175*, № 6, 1213—1215 (РЖМат, 1968, 3А234)
64. —, Разрешающая процедура для расширенной теории упорядоченных абелевых групп. (Редколлегия «Сиб. мат. ж. АН СССР). Новосибирск, 1973. 31 с. Библиогр. 17 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 29 авг. 1973 г., № 6708—73 Деп.) (РЖМат, 1974, 3А171 ДЕП)
65. —, *Кокорин А. И.*, Универсальная эквивалентность упорядоченных абелевых групп. Алгебра и логика, 1963, *2*, № 1, 37—39 (РЖМат, 1963, 11А185)
66. *Джунисов А. Т.*, О некоторых классах групп с финитно-отделимыми подгруппами. Тр. Ин-та мат. и мех. АН КазССР, 1971, *2*, 18—27 (РЖМат, 1971, 11А237)
67. *Дурнев В. Г.*, О системах уравнений на свободных нильпотентных группах. Вопр. теории групп и гомол. алгебры. Ярославль, 1981, 66—69 (РЖМат, 1982, 2А210)
68. *Епанчинцев В. И., Кукин Г. П.*, Проблема равенства в многообразии групп, содержащем $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$. Алгебра и логика (Новосибирск), 1979, *18*, № 3, 259—285 (РЖМат, 1980, 4А229)
69. *Ершов Ю. Л.*, Резрешимость элементарных теорий некоторых классов абелевых групп. Алгебра и логика, 1963, *1*, № 6, 37—41 (РЖМат, 1963, 10А247)
70. —, Неразрешимость теории симметрических и простых конечных групп. Докл. АН СССР, 1964, *158*, № 4, 777—779 (РЖМат, 1965, 3А372)
71. —, Разрешимость некоторых неэлементарных теорий. Алгебра и логика, 1964 *3*, № 2, 45—47 (РЖМАт, 1965, 4А82)
72. —, Об элементарных теориях групп. Докл. АН СССР, 1972, *203*, № 6, 1240—1243 (РЖМат, 1972, 8А295)
73. —, Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука. 1980, 415с. (РЖМат, 1980, 12А21 К)
74. —, *Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А.*, Элементарные теории. Успехи мат. наук, 1965, *20*, № 4, 37—108 (РЖМат, 1967, 4А90)
75. —, *Палютин Е. А.*, Математическая логика. М.: Наука, 1979, 320с. (РЖМат, 1979, 12А19 К)
76. *Замятин А. П.*, Неабелево многообразие групп имеет неразрешимую элементарную теорию. Алгебра и логика, 1978, *17*, № 1, 20—27 (РЖМат, 1978, 12А264)
77. *Зильбер Б. И.*, Пример двух элементарно эквивалентных, но не изоморфных конечно порожденных метабелевых групп. Алгебра и логика, 1971, *10*, № 3, 309—315 (РЖМат, 1972, 1А360)
78. —, Несчетно категоричные нильпотентные группы и алгебры Ли. Изв. вузов. Мат., 1982, № 5, 75 (РЖМат, 1982, 10А147)
79. —, Группы и кольца, теория которых категорична. Fund. math., 1977, *95*, № 3, 173—188 (РЖМат, 1977, 12А334)
80. —, Строение моделей категоричных теорий и проблема конечной аксиоматизируемости. Кемеров. ун-т. Кемерово, 1977. 80с. Библиогр. 13 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 12 июля 1977 г., № 2800—77 Деп.) (РЖМат, 1977, 11А123 ДЕП)
81. *Иванов К. А.*, Элементарные свойства унитарной и ортогональной групп. (Редколлегия ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.»). Минск, 1974. 23с. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 окт. 1974 г., № 2735—74 Деп.) (РЖМат, 1975, 3А307 ДЕП)

82. *Иванов С. Г.*, Проблема вхождения для свободного произведения групп с объединенной подгруппой. Сиб. мат. ж., 1975, *16*, № 6, 1155—1171 (РЖМат, 1976, 5А232)
83. *Иофинова М. Е.*, О полинильпотентных группах с одним определяющим соотношением. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1974, № 3, 9—12 (РЖМат, 1974, 10А237)
84. *Каргаполов М. И.*, Об элементарной теории структур подгрупп. Алгебра и логика, 1962, *1*, № 3, 46—53 (РЖМат, 1963, 7А210)
85. —, Об элементарной теории абелевых групп. Алгебра и логика, 1963, *1*, № 6, 26—36 (РЖМат, 1963, 10А246)
86. —, Классификация упорядоченных абелевых групп по элементарным свойствам. Алгебра и логика, 1963, *2*, № 2, 31—46 (РЖМат, 1964, 2А357)
87. —, Доупорядочиваемые группы. I. Алгебра и логика, 1963, *2*, № 6, 5—14 (РЖМат, 1964, 8А193)
88. —, Финитная аппроксимируемость сверхразрешимых групп относительно сопряженности. Алгебра и логика, 1967, *6*, № 1, 63—68 (РЖМат, 1967, 9А144)
89. —, *Мерзляков Ю. И.*, Основы теории групп. М.: Наука, 1982, 288 с. (РЖМат, 1983, 1А189 К)
90. —, *Ремесленников В. Н.*, Проблема сопряженности для свободных разрешимых групп. Алгебра и логика, 1966, *5*, № 6, 15—25 (РЖМат, 1968, 3А222)
91. —, —, *Романовский Н. С., Романьков В. А., Чуркин В. А.*, Алгоритмические вопросы для $\mathfrak{O}$-степенных групп. Алгебра и логика, 1969, *8*, № 6, 643—659 (РЖМат, 1970, 9А177)
92. —, *Тимошенко Е. И.*, К вопросу о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности метабелевых групп. Тезисы докл. 4-го Всесоюзн. симп. по теории групп. Новосибирск, 1973, 86—88
93. *Кашинцев Е. В.*, К проблеме тождества. Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-т, 1969, *61*, 136—147 (РЖМат, 1970, 3А244)
94. —, Обобщение одного результата Гриндлингера. Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-т, 1969, *61*, 152—155 (РЖМат, 1970, 1А198)
95. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.*, Теория моделей. Пер. с англ. М.: Мир, 1977, 616с. (РЖМат, 1978, 4А89 К)
96. *Киркинский А. С., Ремесленников В. Н.*, Проблема изоморфизма для разрешимых групп. Мат. заметки, 1975, *18*, № 3, 437—443 (РЖМат, 1976, 3А233)
97. *Классен В. П.*, Проблема вхождения для некоторого класса групп. Алгебра и логика, 1970, *9*, № 3, 306—312 (РЖМат, 1970, 11А188)
98. —, К проблемам вхождения и сопряженности для некоторых расширений групп. В сб. «Вопр. теории групп и полугрупп». Тула, 1972, 87—95 (РЖМат, 1973, 8А210)
99. *Клейман Ю. Г.*, Тождества и некоторые алгоритмические проблемы в группах. Докл. АН СССР, 1979, *244*, № 4, 814—818 (РЖМат, 1979, 12А242)
100. —, О тождествах в группах. Тр. Моск. мат. о-ва, 1982, *44*, 62—108 (РЖМат, 1982, 8А196)
101. *Козлов Г. Т.*, Неразрешимость элементарной теории решеток подгрупп конечных абелевых p-групп. Алгебра и логика, 1970, *9*, № 2, 167—171 (РЖМат, 1970, 12А177)
102. —, Неразрешимость теории абелевых групп с цепью подгрупп. В сб. «Алгебра». Вып. 1. Иркутск, 1972, 21—24 (РЖМат, 1973, 12А81)
103. —, *Кокорин А. И.*, Элементарная теория абелевых групп без кручения с предикатом, выделяющим подгруппу. Алгебра и логика, 1969, *8*, № 3, 320—334 (РЖМат, 1970, 4А262)
104. —, —, Доказательство леммы о модельной полноте. Алгебра и логика, 1975, *14*, № 5, 533—535 (РЖМат, 1976, 8А281)
105. *Кокорин А. И., Козлов Г. Т.*, Расширенные элементарная и универсальная теории решеточно упорядоченных абелевых групп с конечным числом нитей. Алгебра и логика, 1968, 7, № 1, 91—103 (РЖМат, 1968, 10А163)
106. —, *Мартьянов В. И.*, Универсальные расширенные теории. В сб. «Алгебра». Вып. 2. Иркутск, 1973, 107—113 (РЖМат, 1975, 1А179)
107. —, *Пинус А. Г.*, Вопросы разрешимости расширенных теорий. Успехи мат. наук, 1978, *33*, № 2, 49—84 (РЖМат, 1978, 8А103)
108. —, *Хисамиев Н. Г.*, Элементарная классификация структурно упорядоченных абелевых групп с конечным числом нитей. Алгебра и логика, 1966, *5*, № 1, 41—50 (РЖМат, 1967, 6А154)
109. *Копытов В. М.*, Разрешимость проблемы вхождения в конечно порожденные разрешимые группы матриц над полем алгебраических чисел. Алгебра и логика, 1968, *7*, № 6, 53—63 (РЖМат, 1969, 8А192)
110. —, Разрешимость проблемы вхождения в конечно порожденные разрешимые группы матриц над нумерованным полем. Алгебра и логика, 1971, *10*, № 2, 169—182 (РЖМат, 1971, 12А282)
111. —, Упорядоченные группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия, 1981, *19*, 3—30 (РЖМат, 1982, 2А223)
112. *Кроуэлл Р., Фокс Р.*, Введение в теорию узлов. Перев. с англ. М.: Мир, 1967, 348с. (РЖМат, 1967, 9А343 К)
113. *Кузнецов А. В.*, Алгоритмы как операции в алгебраических системах. Успехи мат. наук, 1958, *13*, № 3, 240—241 (РЖМат, 1959, 2235)
114. *Кукин Г. П., Романьков В. А.*, Школа по математической логике и алгоритмическим проблемам алгебры. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 3, 227—228 (РЖМат, 1979,11А150)
115. *Ливчак А. Б.*, Разрешающая процедура для элементарной теории абелевой группы без кручения с выделенной подгруппой. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1973, *8*, № 3, 73—81 (РЖМат, 1973, 9А235)
116. —, Элиминация равенства в теории абелевых групп с выделенными подгруппами. В сб. «Алгебраические системы». Иркутск, 1976, 79—93 (РЖМат, 1978, 3А150)
117. —, Замечания к статье Ливчака А. Б. «Разрешающая процедура для элементарной теории абелевой группы без кручения с выделенной подгруппой». Мат. зап. Уральск. ун-т, 1980, *12*, № 1, 161 (РЖМат, 1981, 8А188)
118. *Лин В. Я.*, Косы Артина и связанные с ними группы и пространства. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия, 1979, *17*, 159—228 (РЖМат, 1980, 2А556)
119. *Линдон Р., Шупп П.*, Комбинаторная теория групп. Пер. с англ. М.: Мир, 1980, 447с. (РЖМат, 1980, 12А202 К)
120. *Лисовик Л. П.*, О проблеме вхождения в регулярные подмножества для свободного произведения групп. (Редколлегия «Сиб. мат. ж.» Сиб. отд. АН СССР). Новосибирск, 1978. 14с. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 31 окт. 1978 г., № 3406—78 Деп.) (РЖМат, 1979, 2А162 ДЕП)
121. *Литвинцева З. К.*, О сложности некоторых проблем для групп и полугрупп. Докл. АН СССР, 1970, *191*, № 5, 989—992 (РЖМат, 1970, 9А178)
122. *Лоренц А. А.*, О представлениях множеств решений систем уравнений с одним неизвестным в свободной группе. Докл. АН СССР, 1968, *178*, № 2, 290—292 (РЖМат, 1968, 6А265)
123. *Луковников Н. Г., Мартьянов В. И.*, Универсальные элементно-подгрупповые теории абелевых групп. Алгоритмич. вопр. алгебр. систем. Иркутск, 1978, 42—57 (РЖМат, 1979, 4А228)
124. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.*, Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений. Пер. с англ. М.: Наука, 1974, 455с. (РЖМат, 1975, 1А282 К)
125. *Маканин Г. С.*, Проблема сопряженности в группе кос. Докл. АН СССР, 1968, *182*, № 3, 495—496 (РЖМат, 1969, 3А187)

126. —, Уравнения в свободной группе. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1982, *46*, № 6, 1199—1273 (РЖМат, 1983, 4А202)
127. *Маканина Т. А.*, Проблема вхождения для группы кос $\mathfrak{B}_{n+1}$ при $n+1\geqslant 5$. Мат. заметки, 1981, *29*, № 1, 31—33 (РЖМат, 1981, 4А174)
128. *Мальцев А. И.*, О включении ассоциативных систем в группы. Мат. сб., 1939, *6*, № 2, 331—336; II. Мат. сб., 1940, *8*, № 2, 251—264
129. —, Два замечания о нильпотентных группах. Мат. сб., 1955, *37*, № 3, 567—575 (РЖМат, 1957, 146)
130. —, О гомоморфизмах на конечные группы. Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-т, 1958, *18*, № 5, 49—60 (РЖМат, 1960, 4941)
131. —, Об одном соответствии между кольцами и группами. Мат. сб., 1960, *50*, № 3, 257—266 (РЖМат, 1961, 2А155)
132. —, О свободных разрешимых группах. Докл. АН СССР, 1960, *130*, № 3, 495—498 (РЖМат, 1961, 3А191)
133. —, Неразрешимость элементарной теории конечных групп. Докл. АН СССР, 1961, *138*, № 4, 771—774 (РЖМат, 1962, 5А288)
134. —, Об элементарных свойствах линейных групп. В сб. «Некоторые пробл. мат. и мех.» Новосибирск. Сиб. отд. АН СССР, 1961, 110—132 (РЖМат, 1963, 1А279)
135. —, Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с. (РЖМат, 1970, 7А280 К)
136. *Марков А. А.*, Невозможность некоторых алгоритмов в теории ассоциативных систем. Докл. АН СССР, 1951, *77*, 19—20
137. —, К проблеме представимости матриц. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1958, *4*, № 2, 157—168 (РЖМат, 1959, 81)
138. —, Insolubility of the problem of homeomorphy. Proc. Internat. Congr. Math., 1958. London and New York, Cambridge Univ. Press, 1960, 300—306
139. —, Неразрешимость проблемы гомеоморфии. Докл. АН СССР, 1958, *121*, № 2, 218—220 (РЖМат, 1959, 4362)
140. *Маркшайтис Г. Н.* О разрешимости проблемы тождества слов для некоторых групп. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1980, *20*, № 2, 87—90 (РЖМат, 1980, 12А206)
141. *Мартьянов В. И.*, Разрешимость теорий некоторых классов абелевых групп с предикатами групповым и автоморфизма. В сб. «Алгебра». Вып. 1. Иркутск, 1972, 55—68 (РЖМат, 1973, 12А62)
142. —, О теории абелевых групп с предикатами, выделяющими подгруппы, и операциями эндоморфизмов. Алгебра и логика, 1975, *14*, № 5, 536—542 (РЖМат, 1976, 8А282)
143. —, Разрешимость теории полных абелевых групп без кручения конечного ранга с предикатами сложения и автоморфизма. В сб. «Алгебраические системы». Иркутск, 1976, 94—106 (РЖМат, 1978, 3А151)
144. —, Разрешимость теории полных абелевых групп без кручений с автоморфизмами. Алгоритмич. вопр. алгебр. систем. Иркутск, 1978, 58—72 (РЖМат, 1979, 7А211)
145. —, Неразрешимость теории абелевых групп с автоморфизмом. Мат. заметки, 1978, *23*, № 4, 515—520 (РЖМат, 1978, 9А148)
146. *Масси У., Столлингс Дж.*, Алгебраическая топология. Введение. Пер. с англ. М.: Мир, 1977, 344с. (РЖМат, 1977, 6А383 К)
147. *Мерзляков Ю. И.*, Позитивные формулы на свободных группах. Алгебра и логика, 1966, *5*, № 4, 25—42 (РЖМат, 1967, 2А191)
148. —, Линейные группы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1970. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1971, 75—110 (РЖМат, 1972, 3А203)
149. —, Линейные группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Алгебра. Топол. Геометрия, 1978, *16*, 35—89 (РЖМат, 1979, 2А165)
150. *Михайлова К. А.*, Проблема вхождения для прямых произведений групп. Докл. АН СССР, 1958, *119*, 1103—1105; Мат. сб., 1966, *70*, № 2, 241—251 (РЖМат, 1959, 79; 1966, 12А190)
151. —, Проблема вхождения для свободных произведений групп. Докл. АН СССР, 1959, *127*, № 4, 746—748; Мат. сб., 1968, *75(117)*, 199—210 (РЖМат, 1960, 2668)

152. *Молдаванский Д. И.*, Сопряженность подгрупп свободной группы. Алгебра и логика, 1969, *8*, № 6, 691—694
153. — Сопряженность подгрупп свободного произведения. Уч. зап. Иванов. Гос. пед. ин-т, 1972, *106*, 123—135 (РЖМат, 1973, 1А204)
154. *Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.*, Изоморфизмы и элементарные свойства нильпотентных степенных групп. Докл. АН СССР, 1981, *258*, № 5, 1056—1059 (РЖМат, 1981, 11А157)
155. —, —, Формульность множества мальцевских баз и элементарные теории конечномерных алгебр. I, II. Сиб. мат. ж., 1982, *23*, № 5, 152—167; 1983, *24*, № 2, 97—113 (РЖМат, 1983, 5А215)
156. —, —, Изоморфизмы и элементарные свойства нильпотентных степенных групп. В кн. «Мат. логика и теория алгоритмов». Новосибирск: Наука, 1982, 56—87 (Труды Ин-та математики)
157. *Нагорный Н. М.*, Пример группы с нерекурсивным центром. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1958, *4*, № 4, 304—308 (РЖМат, 1959, 6530)
158. *Некрицухин А. И.*, Об аппроксимации свободных групп относительно сопряженности. I. В сб. «Полугруп. многообразия и полугруппы эндоморфизмов». Л., 1979, 138—142 (РЖМат, 1980, 1А214)
159. —, Об аппроксимации свободных групп относительно сопряженности. Мат. заметки, 1981, *29*, № 3, 381—385 (РЖМат, 1981, 7А200)
160. *Новиков П. С.*, Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества. Докл. АН СССР, 1952, *85*, № 4, 709—712
161. —, Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, *18*, № 6, 485—524 (РЖМат, 1955, 2521)
162. —, Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1955, *44*, 3—143 (РЖМат, 1956, 112)
163. —, О неразрешимости проблемы тождества слов в группе и некоторых других проблем алгебры. Czech. Math. J., 1956, *6*, № 4, 450—454 (РЖМат, 1958, 5444)
164. —, Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра М.: Наука, 1979, 396 с.
165. —, *Адян С. И.*, Проблема тождества для полугрупп с односторонним сокращением. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1958, *4*, № 1, 66—88 (РЖМат, 1959, 4361)
166. —, —, О бесконечных периодических группах. I, II, III. Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968, *32*, №№ 1, 2, 3, 212—244, 251—524, 709—731 (РЖМат, 1969, 4А169, 4А170, 4А171)
167. —, —, Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, *32*, № 4, 971—979
168. —, —, О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, *32*, № 5, 1176—1190 (РЖМат, 1969, 4А48)
169. *Носков Г. А.*, Об элементарной теории конечно порожденной почти разрешимой группы. 16-я алгебр. конфер. Тезисы докладов. Часть I. Ленинград, 1981, 118
170. —, О сопряженности в метабелевых группах. Мат. заметки, 1982, *31*, № 4, 495—507 (РЖМат, 1982, 8А195)
171. —, *Ремесленников В. Н., Романьков В. А.*, Бесконечные группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия, 1979, *17*, 65—157 (РЖМат, 1980, 3А137)
172. *Ольшанский А. Ю.*, О проблеме конечного базиса в группах. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, *34*, № 2, 376—384 (РЖМат, 1970, 10А155)
173. —, Бесконечные группы с циклическими подгруппами. Докл. АН СССР, 1979, *245*, № 4, 785—787 (РЖМат, 1979, 10А159)
174. —, Бесконечная простая нётерова группа без кручения. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, *43*, № 6, 1328—1393 (РЖМат, 1980, 4А233)

175. —, Бесконечная группа с подгруппами простых порядков. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, *44*, № 2, 309—321 (РЖМат, 1980, 8А182)
176. *Павлов Р. Д.*, К проблеме распознавания групповых свойств. Мат. заметки, 1971, *10*, № 2, 169—180 (РЖМат, 1972, 1А93)
177. —, Подгруппы одного вида конечно определенных групп. Годишн. Софийск. ун-т. Фак. мат. и мех., 1973—1974 (1977), *68*, 59—80 (РЖМат, 1978, 21А325)
178. —, О проблеме распознавания групповых свойств в ограниченных алфавитах. Сердика Бълг. мат. списание, 1979, *5*, № 3, 252—271 (РЖМат, 1980, 8А28)
179. —, К проблеме распознавания гомоморфизмов конечно определенных групп. Сердика. Бълг. мат. списание, 1979, *5*, № 4, 370—373 (РЖМат, 1980, 9А225)
180. *Паласиньски М.*, К проблеме тождества и сопряженности для конечно определенных групп. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1980, *26*, № 4, 311—326 (РЖМат, 1981, 4А173)
181. *Палютин Е. А.*, Описание категоричных квазимногообразий. Алгебра и логика, 1975, *14*, № 2, 145—185 (РЖМат, 1975, 11А137)
182. *Рабинович Е. Д.*, Максимальные абелевы группы. «Вопросы теории групп». Кемерово, 1980, 42—53. Библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 13 марта 1980 г., № 961—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 7А124 ДЕП)
183. *Ремесленников В. Н.*, Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах. Алгебра и логика, 1967, *6*, № 2, 61—76 (РЖМат, 1969, 1А231)
184. —, Сопряженность в полициклических группах. Алгебра и логика, 1969, *8*, № 6, 712—725 (РЖМат, 1970, 9А166)
185. —, Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности. Сиб. мат. ж., 1971, *12*, № 5, 1085—1099 (РЖМат, 1972, 1А355)
186. —, Пример группы, конечно определенной в многообразии $\mathfrak{N}^5$, с неразрешимой проблемой равенства. Алгебра и логика, 1973, *12*, № 5, 577—602 (РЖМат, 1974, 8А230)
187. —, Об одной алгоритмической задаче для нильпотентных групп и колец. Тезисы докл. 6-го Всесоюзн. симп. по теории групп. Киев, 1978, 50—51 (РЖМат, 1979, 1А201К)
188. —, Об одной алгоритмической задаче для нильпотентных групп и колец. Сиб. мат. ж., 1979, *20*, № 5, 1077—1081 (РЖМат, 1980, 1А184)
189. —, Нестандартные свободные произведения. Тезисы докл. 7-го Всесоюзн. симп. по теории групп. Красноярск, 1980, 97 (РЖМат, 1981, 1А188К)
190. —, *Соколов В. Г.*, Некоторые свойства вложения Магнуса. Алгебра и логика, 1970, *9*, № 5, 566—578 (РЖМат, 1971, 5А240)
191. *Романовский Н. С.*, О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, *33*, № 6, 1324—1329 (РЖМат, 1970, 6А208)
192. —, О некоторых алгоритмических проблемах для разрешимых групп. Алгебра и логика, 1974, *13*, № 1, 26—34
193. —, Об элементарной теории почти полициклической группы. Мат. сб., 1980, *111*, № 1, 135—143 (РЖМат, 1980, 5А170)
194. —, О проблеме вхождения для расширений абелевых групп с помощью нильпотентных. Сиб. мат. ж., 1980, *21*, № 2, 170—174 (РЖМат, 1980, 7А159)
195. —, О проблеме равенства для центрально метабелевых групп. Сиб. мат. ж., 1982, *23*, № 4, 201—205 (РЖМат, 1982, 12А158)
196. *Романьков В. А.*, О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и в свободных кольцах. Алгебра и логика, 1977, *16*, № 4, 457—471 (РЖМат, 1978, 7А235)
197. —, О некоторых алгоритмических вопросах для разрешимых групп. Тезисы докл. 6-го Всесоюзн. симп. по теории групп. Киев, 1978, 52 (РЖМат, 1979, 1А201К)
198. —, Об уравнениях в свободных метабелевых группах. Сиб. мат. ж., 1979, *20*, № 3, 671—673 (РЖМат, 1979, 10А158)

199. —, Об универсальной теории нильпотентных групп. Мат. заметки, 1979, *25*, № 4, 487—495 (РЖМат, 1979, 8А142)
200. *Сакс Дж.*, Теория насыщенных моделей. Пер. с англ. М.: Мир, 1976, 190 с. (РЖМат, 1976, 8А151К)
201. *Саркисян О. А.*, О проблемах тождества и делимости в полугруппах и группах без циклов. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, *45*, № 6, 1424—1440 (РЖМат, 1982, 6А155)
202. *Саркисян Р. А.*, Сопряженность в свободных полинильпотентных группах. Алгебра и логика, 1972, *11*, № 6, 694—710 (РЖМат, 1973, 8А191)
203. —, Об одной проблеме вхождения для групп аделей. Мат. заметки, 1979, *25*, № 1, 37—50 (РЖМат, 1979, 5А370)
204. —, Проблема сопряженности для наборов целочисленных матриц. Мат. заметки, 1979, *25*, № 6, 811—824 (РЖМат, 1979, 10А245)
205. —, Когомологии Галуа и некоторые вопросы теории алгоритмов. Мат. сб., 1980, *111*, № 4, 579—609 (РЖМат, 1980, 8А403)
206. —, Алгоритмические вопросы для линейных алгебраических групп. I, II. Мат. сб., 1980, *113*, №№ 2, 3, 179—216, 400—436 (РЖМат, 1981, 2А450, 2А451)
207. —, Об одной проблеме равенства для когомологий Галуа. Алгебра и логика, 1980, *19*, № 6, 707—725 (РЖМат, 1981, 7А437)
208. *Сексенбаев К.*, Финитная аппроксимируемость конечного расширения нильпотентной группы относительно сопряженности. Алгебра и логика, 1967, *6*, № 6, 29—31 (РЖМат, 1968, 8А209)
209. *Семенов А. Л.*, Интерпретация свободных алгебр в свободных группах. Докл. АН СССР, 1980, *252*, № 6, 1329—1332 (РЖМат, 1980, 11А161)
210. *Слободской А. М.*, Универсальная теория группы $GL_3(\mathbf{Z})$. Алгоритмич. вопр. алгебр. систем и ЭВМ. Иркутск, 1979, 200—217 (РЖМат, 1980, 8А157)
211. —, Неразрешимость универсальной теории конечных групп. Алгебра и логика, 1981, *20*, № 2, 207—230 (РЖМат, 1982, 2А176)
212. —, *Фридман Э. И.*, О теориях абелевых групп с предикатами, выделяющими подгруппы. Алгебра и логика, 1975, *14*, № 5, 572—575 (РЖМат, 1976, 8А283)
213. —, —, Неразрешимые универсальные теории решеток подгрупп абелевых групп. Алгебра и логика, 1976, *15*, № 2, 227—234 (РЖМат, 1976, 11А222)
214. *Соколов В. Г.*, Алгоритм тождества слов для одного класса разрешимых групп. Сиб. мат. ж., 1971, *12*, № 6, 1405—1410 (РЖМат, 1972, 3А192)
215. *Солдатова В. В.*, Группы с δ-базисом при $\delta<1/4$ и одним дополнительным условием. Сиб. мат. ж., 1966, *7*, № 3, 627—637 (РЖМат, 1966, 11А168)
216. —, Об одном классе конечно определенных групп. Докл. АН СССР, 1967, *172*, № 6, 1276—1277 (РЖМат, 1967, 7А211)
217. *Стендер П. В.*, О применении метода решета к решению проблемы тождества для некоторых групп со счетным множеством порождающих элементов и счетным множеством определяющих соотношений. Мат. сб., 1953, *32*, № 1, 97—107 (РЖМат, 1953, 84)
218. *Тайцлин М. А.*, Об элементарных теориях решеток подгрупп. Алгебра и логика, 1970, *9*, № 4, 473—483 (РЖМат, 1971, 3А100)
219. *Тартаковский В. А.*, О процессе погашения. Докл. АН СССР, 1947, *58*, 1605—1608
220. —, О проблеме тождества для некоторых типов групп. Докл. АН СССР, 1947, *58*, 1909—1910
221. —, Решение проблемы тождества для группы с k-сократимым базисом при $k>6$. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, *13*, 483—494
222. —, Метод решета в теории групп. Мат. сб., 1949, *25*, 3—50
223. —, Применение метода решета к решению проблемы тождества в некоторых типах групп. Мат. сб., 1949, *25*, 251—274
224. —, О примитивной композиции. Мат. сб., 1952, *30*, 39—52
225. Теория моделей. Справочная книга по математической логике. Часть I. Перев. с англ. М.: Наука, 1982, 392 с. (РЖМат, 1982, 12А14К)

226. *Тимошенко Е. И.*, Сопряженность в свободных метабелевых группах. Алгебра и логика, 1967, *6*, № 2, 89—94 (РЖМат, 1968, 1А261)
227. —, О сохранении элементарной и универсальной эквивалентности при сплетении. Алгебра и логика, 1968, *7*, № 4, 114—119 (РЖМат, 1969, 5А214)
228. —, Некоторые алгоритмические вопросы для метабелевых групп. Алгебра и логика, 1973, *12*, № 2, 232—240 (РЖМат, 1974, 2А234)
229. —, Некоторые элементарные свойства сплетений. Новосиб. инж.-строит. ин-т. Новосибирск, 1977, 8 с. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 29 ноября 1977 г., № 4360—77 Деп.) (РЖМат, 1978, 5А156 ДЕП)
230. —, Об элементарных теориях сплетений. Вопр. теории групп и гомол. алгебры (Ярославль), 1979, № 2, 169—174 (РЖМат, 1980, 6А215)
231. *Трофимов М. Ю.*, Об определимости в алгебраически замкнутых группах. Алгебра и логика, 1975, *14*, № 3, 320—327 (РЖМат, 1976, 2А219)
232. *Фаддеев Д. К.*, Об эквивалентности систем целочисленных матриц. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1966, *30*, № 2, 449—454 (РЖМат, 1966, 10А101)
233. *Фаермарк Д. С.*, Алгоритм для установления тождества слов в нильпотентном произведении групп, заданных конечным числом образующих и определяющих соотношений. Докл. АН СССР, 1961, *137*, № 2, 291—294 (РЖМат, 1962, 1А216)
234. *Френкель В. И.*, Об алгоритмических проблемах в частично упорядоченных группах. Успехи мат. наук, 1962, *17*, № 4, 173—179 (РЖМат, 1963, 7А155)
235. —, Об алгоритмических проблемах в частично упорядоченных группах. Докл. АН СССР, 1963, *152*, № 1, 67—70 (РЖМат, 1964, 3А168)
236. *Фридман А. А.*, О взаимоотношении между проблемой тождества и проблемой сопряженности в конечно определенных группах. Тр. Моск. мат. о-ва, 1960, *9*, 329—356 (РЖМат, 1961, 3А99)
237. —, Степени неразрешимости проблемы тождества в конечно определенных группах. Докл. АН СССР, 1962, *147*, № 4, 805—808 (РЖМат, 1963, 12А47)
238. —, Степени неразрешимости проблемы тождества для конечно определенных групп. М.: Наука, 1967, 189 с. (РЖМат, 1969, 2А79К)
239. —, Решение проблемы сопряженности в одном классе групп. Тр. Мат. ин-та. АН СССР, 1973, *133*, 233—242 (РЖМат, 1974, 2А219)
240. *Фридман Э. И.*, Неразрешимость элементарной теории абелевых групп без кручения с конечным множеством сервантных подгрупп. В сб. «Алгебра». Вып. 1. Иркутск, 1972, 97—101 (РЖМат, 1974, 1А233)
241. —, Об универсальных теориях решеток подгрупп групп. Алгоритмич. вопр. алгебр. систем и ЭВМ. Иркутск, 1979, 172—176 (РЖМат, 1980, 8А156)
242. *Харлампович О. Г.*, Конечно определенная разрешимая группа с неразрешимой проблемой равенства. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, *45*, № 4, 854—873 (РЖМат, 1981, 12А187)
243. *Хмелевский Ю. И.*, Системы уравнений в свободной группе. I, II. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, *35*, № 6, 1237—1268; 1972, *36*, № 1, 110—179 (РЖМат, 1972, 6А230; 1972, 9А177)
244. *Холл Ф.*, Нильпотентные группы. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1968, *12*, № 1, 3—36 (РЖМат, 1968, 8А203)
245. *Шатрова Н. П.*, Верхняя оценка степени сложности алгоритма решения проблемы сопряженности для одного класса групп. В сб. «Соврем. алгебра. Полугруппов. конструкции». Л., 1981, 105—127 (РЖМат, 1981, 11А158)
246. —, Оценка степени сложности алгоритма решения проблемы тождества слов и сопряженности для одного класса групп. Алгоритм. пробл. теории групп и полугрупп. Тула, 1981, 3—20 (РЖМат, 1982, 6А169)
247. *Шахова Н. Г.*, О финитной аппроксимируемости относительно вхождения некоторых HNN-расширений. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1981, № 5, 57—62 (РЖМат, 1982, 1А231)

248. *Шенфилд Дж.*, Математическая логика. Перев. с англ. М., Наука, 1975, 527 с. (РЖМат, 1976, 2А43К)
249. *Ширванян В. Л.*, Проблема равенства слов для групп с рекурсивным множеством определяющих соотношений вида $A^n=1$. Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер. Докл. АН АрмССР, 1980, *71*, № 4, 193—197 (РЖМат, 1981, 8А191)
250. *Шмелькин А. Л.*, О некоторых факторгруппах свободного произведения. Тр. Семинара им. И. Г. Петровского. МГУ, 1979, № 5, 208—216 (РЖМат, 1979, 12А243)
251. *Щепин Г. Г.*, К проблеме вхождения для нильпотентного произведения конечно определенных групп. Докл. АН СССР, 1965, *160*, № 2, 294—297 (РЖМат, 1965, 6А163)
252. —, К проблеме вхождения в конечно определенных группах. Сиб. мат. ж., 1968, *9*, № 2, 443—448 (РЖМат, 1968, 8А198)
253. *Ябанжи Г. Г.*, Проблема равенства слов для некоторых групп многообразия N_2A. Бул Акад. Штиинце РССМолд., Изв. АН МолдССР. Сер. физ.-техн. и мат. н., 1981, № 1, 39—44 (РЖМат, 1981, 10А218)
254. *Aanderaa S.*, A proof of Higman's embedding theorem using Britton extensions of groups. Word Probl. Decis. Probl. and Burnside Probl. Group Theory. Amsterdam — London, 1973, 1—18 (РЖМат, 1974, 7А312)
255. —, *Cohen D. E.*, Modular machines, the word problem for finitely presented groups and Collins' theorem. Word problems II. Amsterdam — New York — Oxford, North-Holland, 1980, 1—16
256. —, —, Modular machines and the Higman-Clapham-Valiev embedding theorem. Word problems II. Amsterdam — New York — Oxford, North-Holland, 1980, 17—28
257. *Adian S. I.*, On the word problem for groups defined by periodic relations. Lect. Notes Math., 1980, *806*, 41—46 (РЖМат, 1981, 4А172)
258. —, Classifications of periodic words and their application in group theory. Lect. Notes Math., 1980, *806*, 1—40 (РЖМат, 1981, 3А191)
259. *Anshel M.*, The conjugacy problem for HNN groups and the word problem for commutative semigroups. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *61*, № 2, 223—224 (РЖМат, 1977, 11А218)
260. —, Vector groups and the equality problem for vector addition systems. Math. Comput., 1978, *32*, № 142, 614—616 (РЖМат, 1979, 3А171)
261. —, Decision problems for HNN groups and commutative semigroups. Houston J. Math., 1978, *4*, № 2, 137—142 (РЖМат, 1979, 4А233)
262. —, *Stebe P.*, The solvability of the conjugacy problem for certain HNN groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, *80*, № 2, 266—270 (РЖМат, 1974, 12А182)
263. —, —, Conjugate powers in free products with amalgamation. Houston J. Math., 1976, *2*, № 2, 139—147 (РЖМат, 1976, 11А223)
264. *Appel K. I., Schupp P. E.*, The conjugacy problem for the group of any tame alternating knot is solvable. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *33*, № 2, 329—336 (РЖМат, 1973, 1А538)
265. *Appelgate H., Onishi H.*, Continued fractions and the conjugacy problem in $SL_2(\mathbf{Z})$. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 11, 1121—1130 (РЖМат, 1981, 11А210)
266. *Avenhaus J., Madlener K.*, Komplexitätsuntersuchungen für Einrelatorgruppen. Z. angew. Math. und Mech., 1977, *57*, № 5, T313 — T314 (РЖМат, 1977, 12А211)
267. —, —, Komplexität bei Gruppen: Der Einbettungssatz von Higman. Z. angew. Math. und Mech., 1977, *57*, № 5, T314 — T315 (РЖМат, 1978, 1А144)
268. —, —, Subrekursive Komplexität bei Gruppen. Acta Inform., 1977, *9*, № 1, 87—104 (РЖМат, 1978, 6А211)
269. —, —, Subrekursive Komplexität bei Gruppen. II. Der Einbettungssatz von Higman für entscheidbare Gruppen. Acta Inform., 1978, *9*, № 2, 183—193 (РЖМат, 1979, 3А172)

270. —, —, String matching and algorithmic problems in free groups. Rev. colomb. mat., 1980, *14*, № 1, 1—15 (РЖМат, 1981, 4A127)
271. —, —, An algorithm for the word problem in HNN extensions and the dependence of its complexity on the group representation. RAIRO. Inf. théor., 1981, *15*, № 4, 355—371 (РЖМат, 1982, 8A147)
272. —, —, How to compute generations for the intersection of subgroups in free groups. Lect. Notes Comput. Sci., 1981, *112*, 88—100 (РЖМат, 1982, 2A204)
273. *Baldwin J. T.*, Stability theory and algebra. J. Symbol. Log., 1979, *44*, № 4, 599—608 (РЖМат, 1980, 8A65)
274. —, *Saxl J.*, Logical stability in group theory. J. Austral. Math. Soc., 1976, *21*, № 3, 267—276 (РЖМат, 1977, 2A85)
275. *Basarab S. A.*, On the elementary theories of Abelian profinite groups and Abelian torsion groups. Rev. roum. math. pures et appl., 1977, *22*, № 3, 299—309 (РЖМат, 1977, 11A217)
276. *Baudisch A.*, Theorien abelscher Gruppen mit einem einstellungen Prädikat. Fund. math., 1974, *83*, № 2, 121—127 (РЖМат, 1974, 8A242)
277. —, Die elementare Theorie der Gruppen vom Typ p^∞ mit Untergruppen. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1975, *21*, № 4, 347—352 (РЖМат, 1976, 3A196)
278. —, A note on the elementary theory of torsion free Abelian groups with one predicate for subgroups. Wiss. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-natur wiss. R., 1977, *26*, № 5, 611—612 (РЖМат, 1979, 12A196)
279. —, Application of the theorem of Širšov-Witt in the theory of groups and Lie algebras. Addendum. Prepr. Akad. Wiss. DDR. Zentralinst. Math. und Mech., 1980, № 30, 9 pp. (РЖМат, 1981, 7A142)
280. —, The elementary theory of Abelian groups with *m*-chains of pure subgroups. Prepr. Akad. Wiss. DDR. Zentralinst. Math. und Mech., 1979, № 5, 1—26 (РЖМат, 1979, 12A197)
281. —, The elementary theory of Abelian groups with *m*-chains of pure subgroups. Fund. math., 1981, *112*, № 2, 148—157 (РЖМат, 1982, 1A187)
282. *Baumslag G., Boone W. W., Neumann B. H.*, Some unsolvable problems about elements and subgroups of groups. Math. scand., 1959, *7*, № 1, 191—201 (РЖМат, 1961, 4A82)
283. —, *Cannonito F. B., Miller Ch. F.*, III., Infinitely generated subgroups of finitely presented groups. I. Math. Z., 1977, *153*, № 2, 117—134 (РЖМат, 1977, 11A256)
284. —, —, —, Infinitely generated subgroups of finitely presented groups. Part. II. Math. Z., 1980, *172*, № 2, 97—105 (РЖМат, 1981, 1A221)
285. —, —, —, Some recognizable properties of solvable groups. Math. Z., 1981, *178*, № 3, 289—295 (РЖМат 1982, 7A204)
286. —, —, —, Computable algebra and group embeddings. J. Algebra, 1981, *69*, № 1, 186—212 (РЖМат, 1981, 10A220)
287. —, *Levin F.*, Algebraically closed torsion-free nilpotent groups of class 2. Communs Algebra, 1976, *4*, 533—560 (РЖМат, 1976, 12A284)
288. *Baur W.*, Undecidability of the theory of Abelian groups with a subgroup. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *55*, № 1, 125—128 (РЖМат, 1977, 4A149)
289. —, Decidability and undecidability of theories of Abelian groups with predicates for subgroups. Compos. math., 1975, *31*, № 1, 23—30 (РЖМат, 1976, 6A222)
290. —, *Cherlin G., Macintyre A.*, Totally categorical groups and rings. J. Algebra, 1979, *57*, № 2, 407—440 (РЖМат, 1979, 12A194)
291. *Berthier D.*, Stability of non-model-complete theories: products, groups. J. London Math. Soc., 1975, *11*, № 4, 453—464 (РЖМат, 1976, 4A82)
292. *Bieri R., Strebel R.*, Valuations and finitely presented metabelian groups. Proc. London Math. Soc., 1980, *41*, № 3, 439—464 (РЖМат, 1981, 6A392)
293. *Blackburn N.*, Conjugacy in nilpotent groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1965 *16*, № 1, 143—148 (РЖМат, 1965, 12A220)
294. *Boler J.*, Conjugacy in Abelian-by-cyclic groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *55*, № 1, 17—21 (РЖМат, 1977, 3A162)

295. *Boone W. W.*, Certain simple, unsolvable problems of group theory. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1954, *A57*, № 3, 231—237; № 5, 492—497; 1955, *A58*, № 2, 252—256; № 5, 571—577; Indag. math., 1954, *16*, № 3, 231—237; № 5, 492—497; 1955, *17*, № 2, 252—256; № 5, 571—577 (РЖМат, 1956, 8531)
296. —, Certain simple, unsolvable problems of group theory. V, VI. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1957, *A60* № 1, 22—27; № 2, 227—232; Indag. math., 1957, *19*, № 1, 22—27; № 2, 227—232 (РЖМат, 1959, 78)
297. —, The word problem. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1958 *44*, № 10, 1061—1065 (РЖМат, 1959, 9680)
298. —, The word problem. Ann. Math., 1959, *70*, № 2, 207—265 (РЖМат, 1960, 11183)
299. —, Partial results regarding word problems and recursively enumerable degrees of unsolvability. Bull. Amer. Math. Soc., 1962, *68*, № 6, 616—623 (РЖМат, 1963, 12A48)
300. —, Finitely presented group whose word problem has the same degree as that of an arbitrarily given Thue system (an application of methods of Britton). Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1965, *53*, № 2, 265—269 (РЖМат, 1966, 1A66)
301. —, Word problems and recursively enumerable degrees of unsolvability. A sequel on finitely presented groups. Ann. Math., 1966, *84*, № 1, 49—84 (РЖМат, 1967, 6A60)
302. —, Decision problems about algebraic and logical systems as a whole and recursively enumerable degrees of unsolvability. Contributions to Math. Logic (Colloquium, Hannover, 1966). Amsterdam, North-Holland, 1968, 13—33
303. — Word problems and recursively enumerable degrees of unsolvability. An emendation. Ann. Math., 1971, *94*, № 3, 389—391 (РЖМат, 1972, 6A246)
304. —, *Haken W., Poenaru V.*, On recursively unsolvable problems in topology and their classification. Contributions to Math. Logic. Amsterdam, North-Holland, 1968, 37—74
305. —, *Higman G.*, An algebraic characterization of groups with soluble word problem. J. Austral. Math. Soc., 1974, *18*, № 1, 41—53 (РЖМат, 1975, 7A314)
306. —, *Rogers H. Jr.*, On a problem of JHC Whitehead and a problem of Alonzo Church. Math. scand, 1966, *19*, № 2, 185—192 (РЖМат, 1969, 2A81)
307. *Boydron Y.*, Conjugaison des sous-groupes d'un groupe libre. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 22, A1447—A1448 (РЖМат, 1973, 11A197)
308. —, Algorithmes dans les produits libres. C. r. Acad. sci., 1976, *282*, № 3, A135—A138 (РЖМат, 1976, 8A313)
309. —, *Truffault B.*, Problème de l'ordre généralesé pour les groupes libres. C. r. Acad. sci., 1974, *A279*, № 25, 843—845 (РЖМат, 1975, 8A261)
310. —, —, Classes doubles dans un groupe libre. C. r. Acad. sci., 1974, *A279*, № 21, 773—775 (РЖМат, 1975, 8A260)
311. *Božović N. B.*, A note on a generalization of some undecidability results in group theory. Publ. Inst. math., 1979, *26*, 61—63 (РЖМат, 1980, 9A188)
312. —, On some classes of unrecognizable properties of groups. Publ. Inst. math., 1979, *26*, 65—68 (РЖМат, 1980, 9A189)
313. *Brahana T. R.*, On the isomorphism problem for finitely generated torsion free class 2 nilpotent groups. Glas. mat., 1972, *7*, № 2, 167—172 (РЖМат, 1973, 7A224)
314. *Brieskorn E., Saito K.*, Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen. Invent. math., 1972, *17*, № 4, 245—271 (РЖМат, 1973, 5A195)
315. *Brighman R. C.*, On the isomorphism problem for just-infinite groups. Communs Pure and Appl. Math., 1971, *24*, № 6, 789—796 (РЖМат, 1972, 8A292)

316. *Britton J. L.*, Solution of the word problem for certain types of groups. I, II. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, *3*, № 1, 45—54; № 2, 68—90 (РЖМат, 1960, 151, 152)
317. —, The word problem for groups. Proc. London Math. Soc., 1958, *8*, № 32, 493—506 (РЖМат 1960, 13589)
318. —, The word problem. Ann. Math., 1963, *77*, № 1, 16—32 (РЖМат, 1964, 10A175)
319. —, On the conjugacy problem and difference equations. J. London Math. Soc., 1978, *17*, № 2, 240—250 (РЖМат, 1978, 11A211)
320. —, The conjugacy problem for an HNN extension of an Abelian group. Math. Sci., 1979, *4* № 2, 85—92 (РЖМат, 1980, 1A220)
321. *Bryant R. M., Groves J. R. J.*, Wreath products and ultraproducts of groups. Quart. J. Math., 1978, *29*, № 115, 301—308 (РЖМат, 1979, 4A267)
322. *Burns R. G.*, On finitely generated subgroups of free products. J. Austral. Math. Soc., 1971, *12*, № 3, 358—364 (РЖМат, 1971, 12A260)
323. *Buszkowski W.*, Undecidability of the theory of lattice-orderable groups. Funct. et approxim. (PRL), 1979, *7*, 23—28 (РЖМат, 1981, 2A165)
324. *Cannonito F. B.*, The algebraic invariance of the word problem in groups. Word Probl. Decis. Probl. and Burnside Probl. Group Theory. Amsterdam — London, 1973, 348—364 (РЖМат, 1974, 7A340)
325. —, Two decidable Markov properties over a class of solvable groups. Алгебра и логика (Новосибирск), 1980, *19*, № 6, 646—658 (РЖМат, 1981, 7A143)
326. —, *Gatterdam R. W.*, The computability of group constructions. Part I. Word Probl. Decis. Probl. and Burnside Probl. Group Theory. Amsterdam—London, 1973, 365—400 (РЖМат, 1974, 7A114)
327. —, —, The word problem in polycyclic groups is elementary. Compos. math., 1973, *27*, № 1 39—45 (РЖМат, 1974, 7A116)
328. —, —, The word problem and power problem in 1-relator groups are primitive recursive. Pacif. J. Math., 1975, *61*, № 2, 351—359 (РЖМат, 1976, 11A68)
329. *Cherlin G.*, Model theoretic algebra. Selected topics. Lect. Notes Math., 1976, *521*, 234 pp. (РЖМат, 1976, 12A117)
330. —, Groups of small Morley rank. Ann. Math. Log., 1979, № 1-2, 1—28 (РЖМат, 1980, 7A64)
331. —, *Rosenstein J. G.*, On $\aleph_0$-categorical Abelian by finite groups. J. Algebra, 1978, *53*, № 1, 188—226 (РЖМат, 1979, 1A203)
332. —, *Shelah S.*, Superstable fields and groups. Ann. Math. Log., 1980, *18*, № 3, 227—270 (РЖМат, 1981, 2A237)
333. *Chiti E.*, Modelli saturati per particolari teorie di gruppi abeliani ordinati. Boll. Unione mat. ital., 1980, *2*, suppl., 145—155 (РЖМат, 1981, 6A135)
334. *Clapham C. R. J.*, Finitely presented groups with word problems of arbitrary degrees of insolubility. Proc. London Math. Soc., 1964, *14*, № 56, 633—676 (РЖМат, 1965, 7A175)
335. —, An embedding theorem for finitely generated groups. Proc. London Math. Soc., 1967, *17*, № 3, 419—430 (РЖМат, 1969, 2A272)
336. —, The conjugacy problem for a free product with a amalgamation. Arch. Math., 1971, *22*, № 4, 358—362 (РЖМат, 1972, 3A190)
337. *Clare F.*, Operations on elementary classes of groups. Algebra. Univ., 1975, *5*, № 1 120—124 (РЖМат, 1976, 2A218)
338. *Cobham A.*, Undecidability in group theory. Notices Amer. Math. Soc., 1962, *9*, 406
339. *Cockcroft W. H.*, The word problem in a group extension. Quart. J. Math., Oxford Ser., 1951, *(2)2*, 123—134
340. *Cohen D. E.*, Combinatorial group theory. A topological approach. London, Queen Mary College (Univ. London), 1978, 182 pp.

341. *Collins D. J.*, On embedding groups and the conjugacy problem. J. London Math. Soc., 1969, *1*, № 4, 674—682 (РЖМат, 1972, 2A286)
342. —, Word and conjugacy problems in groups with only a few defining relations. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1969, *15*, № 4, 305—324 (РЖМат, 1970, 9A176)
343. —, Recursively enumerable degrees and the conjugacy problem. Acta math., 1969, *122*, № 1—2, 115—160 (РЖМат, 1969, 9A49)
344. —, On recognising Hopf groups. Arch. Math., 1969, *20*, № 3, 235—240 (РЖМат, 1970, 4A261)
345. —, On recognising properties of groups which have solvable word problem. Arch. Math., 1970, *21*, № 1, 31—39 (РЖМат, 1970, 10A164)
346. —, Truth-table degrees and the Boone groups. Ann. Math., 1971, *94*, № 3, 392—396 (РЖМат, 1972, 6A247)
347. —, The word, power and order problems in finitely presented groups. Word Probl. Decis. Probl. and Burnside Probl. Group Theory. Amsterdam — London, 1973, 401—420 (РЖМат, 1974, 6A299)
348. —, Conjugacy and the Higman embedding theorem. Word problems II. Amsterdam — New York — Oxford, North-Holland, 1980, 81—85
349. —, *Miller C. F.*, III. The conjugacy problem and subgroups of finite index. Proc. London Math. Soc., 1977, *34*, № 3, 535—556 (РЖМат, 1977, 11A247)
350. *Comerford L. P., Jr*, Powers and conjugacy in small cancellation groups. Arch. Math., 1975, *26*, № 4, 353—360 (РЖМат, 1976, 2A258)
351. —, A note on power-conjugacy. Houston J. Math., 1977, *3*, № 3, 337—341 (РЖМат, 1978, 11A212)
352. —, Subgroups of small cancellation groups. J. London Math. Soc., 1978, *17*, № 3, 422—424 (РЖМат, 1979, 1A243)
353. —, Quadratic equations over small cancellation groups. J. Algebra, 1981, *69*, № 1, 175—185 (РЖМат, 1981, 12A193)
354. —, *Edmunds C. C.*, Quadratic equations over free groups and free products. J. Algebra, 1981, *68*, № 2, 276—297 (РЖМат, 1981, 11A202)
355. —, *Truffault B.*, The conjugacy problem for free products of sixth-groups with cyclic amalgamation. Math. Z., 1976, *149*, № 2, 169—181 (РЖМат, 1977, 1A172)
356. *Dehn M.*, Über die Topologie des dreidimensional Raumes. Math. Ann., 1910, *69*, 137—168
357. *Deissler R.*, Minimal and prime models of complete theories of torsion free Abelian groups. Algebra univers., 1979, *9*, № 2, 250—265 (РЖМат, 1980, 1A182)
358. *Do Long Van*, Problèmes des mots et de conjugaison pour une classe de groupes de presentation finie. C. r. Acad. sci., 1981, sér. 1, *292*, № 17, 773—776 (РЖМат, 1982, 1A228)
359. *Dugopolski M. J.*, A new solution to the word problem in the fundamental groups of alternating knots and links. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, *272*, № 1, 375—382 (РЖМат, 1983, 2A444)
360. *Dyer J. L.*, Separating conjugates in free-by-finite groups. J. London Math. Soc., 1979, *20*, № 2, 215—221 (РЖМат, 1980, 6A257)
361. —, Separating conjugates in amalgamated free products and HNN-extensions. J. Austral. Math. Soc., 1980, *A29*, № 1, 35—51 (РЖМат, 1980, 9A228)
362. *Dyson V. H.*, The word problem and residually finite groups. Notices Amer. Math. Soc., 1964, *11*, 743
363. *Edmunds C. C.*, A condition equivalent to the solvability of the endomorphism problem for free groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *76*, № 1, 23—24 (РЖМат, 1980, 5A171)
364. —, On the endomorphism problem for free groups. II. Proc. London Math. Soc., 1979, *38*, № 1, 153—168 (РЖМат, 1979, 7A240)
365. *Eklof P. C.*, Some model theory for Abelian groups. J. Symbol. Log., 1972, *37*, № 2, 335—342 (РЖМат, 1973, 3A125)

366. —, Methods of logic in Abelian group theory. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 251—269 (РЖМат, 1978, 7А234)
367. —, *Fischer E. R.*, The elementary theory of Abelian groups. Ann. Math. Log., 1972, *4*, № 2, 115—171 (РЖМат, 1972, 10А61)
368. —, *Sabbagh G.*, Model-completions and modules. Ann. Math. Log., 1970, *2*, № 3, 251—295 (РЖМат, 1971, 7А101)
369. *Ershov Y. L.*, Theories of non-abelian varieties of groups. Proc. Tarski Symp., Berkeley, Calif., 1971. (Proc. Symp. Pure Math., Vol. 25). Providence, R. I., 1974, 255—264 (РЖМат, 1975, 10А103)
370. *Evans B.*, A class of π_c-groups closed under cyclic amalgamations. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, *79*, № 1, 200—201 (РЖМат, 1973, 9А217)
371. —, Word problems. Bull. Amer. Math. Soc., 1978, *84*, № 5, 789—802 (РЖМат, 1979, 4А232)
372. *Felgner U.*, On $\aleph_0$-categorical extra-special p-groups. Log. et anal., 1975, *18*, № 71—72, 407—498 (РЖМат, 1977, 12А83)
373. —, Stability and $\aleph_0$-categoricity of non-abelian groups. Colloquium, Oxford, 1976. Amsterdam, North-Holland, 1977, 301—324
374. —, $\aleph_0$-categorical stable groups. Math. Z., 1978, *160*, № 1, 27—49 (РЖМат, 1979, 1А202)
375. —, Kategorizität, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1980, *82*, № 1, 12—32 (РЖМат, 1981, 2А99)
376. —, The model theory of *FC*-groups. Math. Logic Lat. Amer. Proc. 4 Lat. Amer. Symp., Santiago, 18—22 Dec., 1978. Amsterdam e. a., 1980, 163—190 (РЖМат, 1982, 12А98)
377. —, Horn-theories of Abelian groups. Lect. Notes Math., 1980, *834*, 163—173 (РЖМат, 1981, 8А79)
378. *Finkelstein H.*, Solving equations in groups: a survey of Frobenius' theorem. Period. math. hung., 1978, *9*, № 3, 187—204 (РЖМат, 1979, 1А249)
379. *Formanek E.*, Conjugace separability in polycyclic groups. J. Algebra, 1976, *42*, № 1, 1—10 (РЖМат, 1977, 6А177)
380. *Gaglione A. M., Waldinger N. V.*, A generalization of the bracketing process applied in the commutator calculas. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 10, 961—981 (РЖМат, 1981, 1А217)
381. *Gatterdam R. W.*, The Higman theorem for primitive recursive groups — a preliminary report. Word Probl. Decis. Probl. and Burnside Probl. Group Theory. Amsterdam — London, 1973, 421—425 (РЖМат, 1974, 7А115)
382. *Glass A. M. W., Pierce K. R.*, Existentially complete Abelian lattice-ordered groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, *261*, № 1, 255—270 (РЖМат, 1981, 5А156)
383. —, —, Existentially complete lattice-ordered groups. Isr. J. Math., 1980, *36*, № 3—4, 257—272 (РЖМат, 1981, 7А141)
384. *Greendlinger M.*, On Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems, with applications. Commun. Pure and Appl. Math., 1960, *13*, № 4, 641—677 (РЖМат, 1962, 6А166)
385. —, Dehn's algorithm for the word problem. Commun. Pure and Appl. Math., 1960, *13*, № 1, 67—83 (РЖМат, 1962, 6А165)
386. —, An analogue of a theorem of Magnus. Arch. Math., 1961, *12*, № 2, 94—96 (РЖМат, 1962, 6А167)
387. —, A class of groups all of whose elements have trivial centralizers. Math. Z., 1962, *78*, № 1, 91—96 (РЖМат, 1964, 1А233)
388. *Grunewald F.*, Solution of the conjugacy problem in certain arithmetic groups. Word problems II. Amsterdam, North-Holland, 1979, 101—139
389. —, *Segal D.*, A note on arithmetic groups. Bull. London Math. Soc., 1978, *10*, № 3, 297—302 (РЖМат, 1979, 8А441)
390. —, —, Conjugacy in polycyclic groups. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 8, 775—798 (РЖМат, 1978, 12А340)
391. —, —, The solubility of certain decision problems in arithmetic and algebra. Bull. (New Ser.) Amer. Math. Soc., 1979, *1*, № 6, 915—918 (РЖМат, 1980, 6А217)

392. —, —, Some general algorithms. I. Arithmetic groups. II. Nilpotent groups. Ann. Math., 1980, *112*, № 3, 531—583, 585—617 (РЖМат, 1981, 8А189, 8А190)
393. *Gupta C. K.*, On the conjugacy problem for F/R', Proc. Amer. Math. Soc., 1982, *85*, № 2, 149—153 (РЖМат, 1983, 1А219)
394. —, *Gupta N. D.*, Generalized Magnus embeddings and some applications. Math. Z., 1978, *160*, № 1, 75—87 (РЖМат, 1978, 12А322)
395. *Haken W.*, Zum Identitätsproblem bei Gruppen. Math. Z., 1952, *56*, 335—362
396. —, Theorie der Normalflächen. Ein Isotopiekriterium für den Kreisknoten. Acta math., 1961, *105*, № 3—4, 245—375 (РЖМат, 1962, 6А252)
397. *Heineken H., Neumann P. M.*, Identical relations and decision procedures for groups. J. Austral. Math. Soc., 1967, *7*, № 1, 39—47 (РЖМат, 1968, 3А223)
398. *Hemion G.*, On the classification of homeomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds. Acta math., 1979, *142*, № 1—2, 123—155 (РЖМат, 1979, 8А550)
399. *Higgins P. J., Lyndon R. C.*, Equivalence of elements under automorphisms of a free group. J. London Math. Soc., 1974, *8*, № 2, 254—258 (РЖМат, 1975, 2А265)
400. *Higman G.*, Subgroups of finitely presented groups. Proc. Roy. Soc. London, 1961, *A262*, № 1311, 455—475 (РЖМат, 1963, 8А67)
401. *Hilton P., Roitberg J.*, Profinite completion and generalizations of a theorem of Blackburn. J. Algebra, 1979, *60*, № 1, 289—306 (РЖМат, 1980, 5А219)
402. *Hirschfeld J., Wheeler W. H.*, Forcing, arithmetic, division rings. Lect. Notes Math., 1975, *454*, 266 pp. (РЖМат, 1976, 3А93)
403. *Holland W. C., McCleary S. H.*, Solvability of the word problem in free lattice-ordered groups. Houston J. Math., 1979, *5*, № 1, 99—105 (РЖМат, 1980, 1А233)
404. *Horadam K. J.*, A quick test for nonisomorphism of one-relator groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1981, *81*, № 2, 195—200 (РЖМат, 1981, 11А196)
405. *Huber-Dyson V.*, An inductive theory for free products of groups. Algebra univers., 1979, *9*, № 1, 35—44 (РЖМат, 1979, 12А195)
406. —, A reduction of the open sentence problem for finite groups. Bull. London Math. Soc., 1981, *13*, № 4, 331—338 (РЖМат, 1982, 1А186)
407. *Hurley B.*, A note on the word problem for groups. Quart. J. Math., 1980, *31*, № 123, 329—334 (РЖМат, 1981, 4А128)
408. *Hurwitz R. D.*, On the conjugacy problem in a free product with commuting subgroups. Math. Ann., 1976, *221*, № 1, 1—8 (РЖМат, 1976, 10А149)
409. —, On cyclic subgroups and the conjugacy problem. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *79*, № 1, 1—8 (РЖМат, 1980, 12А178)
410. *Jaco W.*, Lectures on three-manifold topology. Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 1980, XII, 251 pp. (РЖМат, 1981, 1А583К)
411. *Jaffard P.*, Théorie aximatique des groupes par des systèmes de générateurs. Bull. Sci. Math., 1951, (2)*75*, 114—128
412. *Jockusch C. G., Jr*, Supplement to Boone's «Algebrais systems». Contributions to Math. Logic (Colloguium Hannover, 1966). Amsterdam, North-Holland, 1968, 34—36
413. —, Fine degrees of word problems of cancellation semigroups. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1980, *26*, № 1, 93—95 (РЖМат, 1980, 9А187)
414. *Johnson D. L.*, Topics in the theory of group presentations. London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1980, № 42, 311 pp. (РЖМат, 1981, 1А218К)
415. *Kalorkoti K. A.*, Decision problems in group theory. Proc. London Math. Soc., 1982, *44*, № 2, 312—332 (РЖМат, 1982, 8А148)
416. *Kargapolov M. I.*, Some questions in the theory of soluble groups. Lect. Notes Math., 1974, *372*, 389—394 (РЖМат, 1975, 6А321)
417. *Komori Y.*, Completeness of the theories on ordered Abelian groups and embedding relations. Nagoya Math. J., 1980, *77*, 33—39 (РЖМат, 1980, 8А155)

418. *Larsen L.*, The solvability of the conjugacy problem for certain free products with amalgamation. J. Algebra, 1976, *43*, № 1, 28—41 (РЖМат, 1977, 7А186)
419. —, The conjugacy problem and cyclic HNN constructions. J. Austral. Math. Soc., 1977, *A23*, № 4, 385—401 (РЖМат, 1978, 9А227)
420. —, Decision problems and minimal identities in groups. Scr. Agder distriktshogsk. Fagsek. mat., 1979, № 1, 38 pp. (РЖМат, 1980, 6А216)
421. *Lazard D.*, Algorithmes fondamentaux en algèbre commutative. Astérisque, 1976, № 38—39, 131—138 (РЖМат, 1977, 8А432)
422. *Lewin T.*, On roots in free groups. Mich. Math. J., 1980, *27*, № 1, 31—38 (РЖМат, 1981, 1А215)
423. *Lipschutz S.*, Elements in *S*-groups with trivial centralizers. Commun. Pure and Appl. Math., 1960, *13*, № 4, 679—683 (РЖМат, 1962, 6А168)
424. —, On powers of elements in *S*-groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, *13*, № 2, 181—186 (РЖМат, 1963, 3А185)
425. —, On square roots in eighth-groups. Commun. Pure and Appl. Math., 1962, *15*, № 1, 39—43 (РЖМат, 1964, 1А234)
426. —, An extension of Greendlinger's results on the word problem. Proc. Amer. Math. Soc., 1964, *15*, № 1, 37—43 (РЖМат, 1965, 6А160)
427. —, Powers in eigth-groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, *16*, № 5, 1105—1106 (РЖМат, 1966, 9А150)
428. —, Generalization of Dehn's result on the conjugacy problem. Proc. Amer. Math. Soc., 1966, *17*, № 3, 759—762 (РЖМат, 1967, 1А180)
429. —, On powers in generalized free products of groups. Arch. Math., 1969, *19*, № 6, 575—576 (РЖМат, 1970, 1А206)
430. —, On the conjugacy problem and Greendlinger's eighth-groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, *23*, № 1, 101—106 (РЖМат, 1970, 8А167)
431. —, On Greendlinger groups. Commun. Pure and Appl. Math., 1970, *23*, № 5, 743—747 (РЖМат, 1971, 9А154)
432. —, *Miller C. F., III.*, Groups with certain solvable and unsolvable decision problems. Commun. Pure and Appl. Math., 1971, *24*, № 1, 7—15 (РЖМат, 1971, 12А280)
433. —, On the word problem and *T*-fourth-group. Word Probl. Decis. Probl. and Burnside Probl. Group Theory. Amsterdam — London, 1973, 443—451 (РЖМат, 1974, 6А272)
434. —, Identity theorems in small-cancellation groups. Commun. Pure and Appl. Math., 1973, *26*, № 5—6, 775—780 (РЖМат, 1974, 12А180)
435. —, The conjugacy problem and cyclic amalgamations. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, *81*, № 1, 114—116 (РЖМат, 1975, 11А291)
436. —, Groups with solvable conjugacy problems. Ill. J. Math., 1980, *24*, № 2, 192—195 (РЖМат, 1981, 2А197)
437. —, *Lipschutz M.*, A note on root decision problems in groups. Can. J. Math., 1973, *25*, № 4, 702—705 (РЖМат, 1974, 4А188)
438. *Lockhart J.*, Decision problems in classes of group presentations with uniformly solvable word problem. Arch. Math., 1981, *37*, № 1, 1—6 (РЖМат, 1982, 2А177)
439. *Lyndon R. C.*, Properties preserved in subdirect products. Pacif. J. Math., 1959, *9*, № 1, 155—164 (РЖМат, 1961, 4А98)
440. —, Properties preserved under homomorphism. Pacif. J. Math., 1959, *9*, № 1, 143—154 (РЖМат, 1961, 4А97)
441. —, Properties preserved under algebraic constructions. Bull. Amer. Math. Soc., 1959, *65*, № 5, 287—299 (РЖМат, 1961, 7А98)
442. —, Groups with parametric exponents. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, *96*, № 3, 518—533 (РЖМат, 1963, 2А192)
443. —, On Dehn's algorithm. Math. Ann, 1966, *166*, № 3, 208—228 (РЖМат, 1968, 2А169)
444. —, Equations in groups. Bol. Soc. brasil. mat., 1980, *11*, № 1, 79—102 (РЖМат, 1981, 12А191)

445. —, *Schupp P. E.*, Combinatorial group theory. (Ergeb. Math., 89). Berlin e. a., Springer, 1977, XIV, 339 pp. (РЖМат, 1978, 5А184К)
446. —, *Wicks M. J.*, Commutators in free groups. Can. Math. Bull., 1981, *24*, № 1, 101—106 (РЖМат, 1981, 12А192)
447. *Macintyre A.*, On ω_1-categorical theories of Abelian groups. Fund. math., 1971, *70*, № 3, 253—270 (РЖМат, 1972, 1А361)
448. —, Omitting quantifier-free types in generic structures. J. Symbol. Log., 1972, *37*, № 3, 512—520 (РЖМат, 1973, 5А101)
449. —, Martin's axiom applied to existentially closed groups. Math. scand., 1973, *32*, № 1, 46—56 (РЖМат, 1974, 10А136)
450. —, On algebraically closed groups. Ann. Math., 1972, *96*, № 1, 53—97 (РЖМат, 1973, 2А217)
451. —, Existentially closed structures and Jensen's principle. Isr. J. Math., 1976, *25*, № 3—4, 202—210 (РЖМат, 1977, 8А209)
452. *Magnus W.*, Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation. Math. Ann., 1932, *106*, 295—307.
453. —, Non-euclidean tessellations and their groups. New York, Acad. Press, 1974, XIV, 207 pp. (РЖМат, 1975, 6А334)
454. *Maier B. J.*, Existenziell abgeschlossene lokal endliche *p*-Gruppen. Arch. Math., 1981, *37*, № 2, 113—128 (РЖМат, 1982, 4А238)
455. *Matthews J.*, The conjugacy problem in wreath products and free metabelian groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1966, *121*, № 2, 329—339 (РЖМат, 1967, 1А179)
456. *Mayoh B. H.*, Groups and semigroups with solvable word problems. Proc. Amer. Math. Soc., 1967, *18*, № 6, 1038—1039 (РЖМат, 1968, 9А138)
457. *McCool J.*, Elements of finite order in free product sixth-groups. Glasgow Math. J., 1968, *9*, № 2, 128—145 (РЖМат, 1969, 9А139)
458. —, The order problem and the power problem for free product sixth-groups. Glasgow Math. J., 1969, *10*, № 1, 1—9 (РЖМат, 1970, 2А201)
459. —, Unsolvable problems in groups with solvable work problem. Can. J. Math., 1970, *22*, № 4, 836—838 (РЖМат, 1971, 7А239)
460. —, The power problem for groups with one defining relator. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, *28*, № 2, 427—430 (РЖМат, 1972, 6А226)
461. —, *Pietrowski A.*, On free products with amalgamation of two infinite cyclic groups. J. Algebra, 1971, *18*, № 3, 377—383 (РЖМат, 1972, 5А213)
462. —, —, On recognising certain one relation presentations. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *36*, № 1, 31—33 (РЖМат, 1973, 7А216)
463. *McDonough T. P.*, Root-closure in free groups. J. London Math. Soc., 1970, *2*, № 1, 191—192 (РЖМат, 1972, 1А329)
464. *McKenzie R., Thompson R. J.*, An elementary construction of unsolvable word problems in group theory. Word Probl. Decis. Probl. and Burnside Probl. Group Theory. Amsterdam — London, 1973, 457—478 (РЖМат, 1974, 7А341)
465. *Meskin S.*, A finitely generated residually finite group with an unsolvable word problem. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, *43*, № 1, 8—10 (РЖМат, 1975, 2А96)
466. *Miller C. F.*, III, On Britton's theorem A. Proc. Amer. Math. Soc., 1968, *19*, № 5, 1151—1154 (РЖМат, 1971, 9А155)
467. —, On group-theoretic decision problems and their classification. Ann. Math. Stud., 1971, № 68, 106 pp. (РЖМат, 1972, 6А248)
468. —, Decision problems in algebraic classes of groups (a survey). Word Probl. Decis. Probl. and Burnside Probl. Group Theory. Amsterdam — London, 1973, 507—523 (РЖМат, 1974, 6А301)
469. —, The word problem in quotients of a group. Aspects of effective algebra (Clayton, 1979), 1981, 246—250
470. —, *Schupp P. E.*, The geometry of Higman-Neumann-Neumann extensions. Commun. Pure and Appl. Math., 1973, *26*, № 5—6, 787—802 (РЖМат, 1974, 10А242)

471. *Milnor J. W.*, Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. Ann. Math., 1961, *74*, № 3, 575—590 (РЖМат, 1962, 10А232)
472. *Mostowski A. W.*, On the decidability of some problems in special classes of groups. Fund. math., 1966, *59*, № 2, 123—135 (РЖМат, 1967, 7А210)
473. —, Uniform algorithms for deciding group-theoretic problems. Word Probl. Decis. Probl. and Burnside Probl. Group Theory. Amsterdam — London, 1973, 525—551 (РЖМат, 1974, 7А342)
474. —, Decision problems in group theory. Techn. Report, 1969, *19*, Univ. Iowa
475. *Mutzbauer O.*, Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2 (2. Teil). Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1977, *58*, 163—174 (РЖМат, 1981, 10А128)
476. *Neumann B.*, A note on algebraically closed groups. J. London Math. Soc., 1952, *27*, № 2, 247—249
477. —, The isomorphism problem for algebraically closed groups. Word Probl. Decis. Probl. and Burnside Probl. Group Theory. 1973, 553—562 (РЖМат, 1974, 7А313)
478. *Novikov P. S.*, On the algorithmic insolvability of the word problem in group theory. Amer. Math. Soc. Tranlat., 1958, Ser. 2, *9*, 1—122 (РЖМат, 1959, 4396)
479. *Oger F.*, Des groupes nilpotents de classe 2 sans torsion de type fini ayant les mêmes images finies peuvent ne pas être élémentairement équivalents. C. r. Acad. sci., 1982, sér. 1, *294*, № 1, 1—4 (РЖМат, 1982, 8А146)
480. *Olin P.*, Elementary properties of *V*-free products of groups. J. Algebra, 1977, *47*, № 1, 105—114 (РЖМат, 1978, 3А147)
481. *Papakyriakopoulos C. D.*, On Dehn's lemma and the asphericity of knots. Ann. Math., 1957, *66*, № 1, 1—26 (РЖМат, 1959, 7848)
482. *Peczynski N., Reiwer W.*, On cancellations in HNN-groups. Math. Z., 1978, *158*, № 1, 79—86 (РЖМат, 1978, 9А216)
483. *Perraud J.*, Sur les conditions de petite simplification et l'algorithme de Dehn. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 12, A659—A662 (РЖМат, 1977, 11А248)
484. —, Sur les conditions de petite simplification dans un produit libre. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 13, A735 — A737 (РЖМат, 1978, 1А192)
485. —, Sur l'utilisation de l'algorithme de Dehn dans un produit libre. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 21, A1341 — A1344 (РЖМат, 1977, 12А213)
486. —, Sur les conditions de petite simplification $C''(1/2)$ et $T(4)$, $C'(1/4)$ et $T^*(4)$ dans un produit libre. C. r. Acad. sci., 1978, *AB286*, № 23, 1095—1098 (РЖМат, 1979, 1А248)
487. —, Sur le problème des mots des quotients de groupes et produits libres. Bull. Soc. math. France, 1980, *108*, № 3, 285—331 (РЖМат, 1981, 6А167)
488. —, Sur la condition de petite simplification $C'(1/6)$ dans un produit libre amalgamé. C. r. Acad. sci., 1980, *AB291*, № 4, A247 — A250 (РЖМат, 1981, 4А175)
489. *Pickel P. F.*, Finitely generated nilpotent groups with isomorphic finite quotients. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, *160*, 327—341 (РЖМат, 1972, 5А222)
490. —, Metabelian groups with the same finite quotients. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, *11*, № 1, 115—120 (РЖМат, 1975, 6А318)
491. —, A property of finitely generated residually finite groups. Bull. Austral. Math. Soc., 1976, *15*, № 3, 347—350 (РЖМат, 1977, 10А145)
492. *Pietrowski A.*, The isomorphism problem for one-relator groups with non-trivial centre. Math. Z., 1974, *136*, № 2, 95—106 (РЖМат, 1974, 12А181)
493. *Poizat B.*, Sous-groupes définissables d'un groupe stable. J. Symbol. Log., 1981, *46*, № 1, 137—146 (РЖМат, 1981, 11А74)
494. *Post E.*, Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Bull. Amer. Math. Soc., 1944, *50*, № 5, 284—316
495. —, Recursive unsolvability of a problem of Thue. J. Symbol. Log., 1947, *12*, 1—11
496. *Presburger H.*, Über die Vollständigheit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzen Zahlen, in welchem die Additionals einige Operation hervortritt. Comptes rendus du 1 Congres des Mathematiciens des Pays Slaves Warszawa, 1929, 92—101, 395
497. *Pride S. J.*, The isomorphism problem for two-generator one-relator groups with torsion is solvable. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *227*, 109—139 (РЖМат, 1977, 12А210)
498. *Rabin M. O.*, Recursive unsolvability of group theoretic problems. Ann. Math., 1958, *67*, № 1, 172—194 (РЖМат, 1959, 7677)
499. —, A simple method for undecidability proofs and some applications. Logic, Methodol. and Philos. Sci. Amsterdam, 1965, 58—68 (РЖМат, 1969, 6А97)
500. *Reineke J.*, Minimale Gruppen. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1975, *21*, № 4, 357—379 (РЖМат, 1976, 3А197)
501. *Remeslennikov V. N., Romanovskii N. S.*, Algorithmic problems for solvable groups. Word problems II. Amsterdam — New York — Oxford, North-Holland, 1980, 337—346
502. *Rips E.*, Another characterization of finitely generated groups with a solvable word problem. Bull. London Math. Soc., 1982, *14*, № 1, 43—44 (РЖМат, 1982, 6А168)
503. —, Subgroups of small cancellation groups. Bull. London Math. Soc., 1982, *14*, № 1, 45—47 (РЖМат, 1982, 6А195)
504. *Robinson A.*, On the notion of algebraic closedness for noncommutative groups and fields. J. Symbol. Log., 1971, *36*, № 3, 441—444 (РЖМат, 1972, 7А225)
505. —, *Zakon E.*, Elementary properties of ordered Abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, *96*, № 2, 222—235 (РЖМат, 1961, 5А233)
506. *Rogers P.*, Preservation of saturation and stability in a variety of nilpotent groups. J. Symbol. Log., 1981, *46*, № 3, 499—512 (РЖМат, 1982, 4А197)
507. *Rosenberger G.*, Zum Isomorphieproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation. Ill. J. Math., 1976, *20*, № 4, 614—621 (РЖМат, 1977, 7А212)
508. —, Produkte von Potenzen und Kommutatoren in freien Gruppen. J. Algebra, 1978, *53*, № 2, 416—422 (РЖМат, 1979, 1А245)
509. —, Applications of Nielsen's reduction method to the solution of combinatorial problems in group theory: a survey. London Math. Soc. Lect. Notes Ser., 1979, № 36, 339—358 (РЖМат, 1980, 5А197)
510. —, Gleichungen in freien Produkten mit Amalgam. Math. Z., 1980, *173*, № 1, 1—11 (РЖМат, 1981, 5А187)
511. *Rosenstein J.*, $\aleph_0$-categoricity of groups. J. Algebra, 1973, *25*, № 3, 435—467 (РЖМат, 1974, 1А235). Correction to «...». J. Algebra, 1977, *48*, № 2, 236—240 (РЖМат, 1978, 5А195)
512. *Rothmaler P.*, Total transzendente abelsche Gruppen und Morley-Rang. Rept. Acad. Wiss. DDR. Zentralinst. Math. und Mech., 1978, № 5, 45S. (РЖМат, 1979, 7А210)
513. *Rotman J. J.*, The theory of groups; an introduction. Boston, Allyn and Bacon, 1973. 342 pp. (РЖМат, 1974, 11А225К)
514. *Sabbagh G.*, Catégoricité et stabilité: quelques exemples parmi les groupes et anneaux. C. r. Acad. sci., 1975, *280*, № 10, A603 — A606 (РЖМат, 1975, 11А126)
515. —, Catégoricité en $\aleph_0$ et stabilité: constructions les préservant et conditions de chaine. C. r. Acad. sci., 1975, *280*, № 9, A531—A533 (РЖМат, 1975, 9А96)
516. *Sacerdote G. S.*, A characterization of the subgroups of finitely presented groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1976, *82*, № 4, 609—611 (РЖМат, 1977, 2А248)
517. —, The Boone-Higman theorem and the conjugacy problem. J. Algebra, 1977, *49*, № 1, 212—221 (РЖМат, 1978, 5А157)
518. —, Almost all free products of groups have the same positive theory. J. Algebra, 1973, *27*, № 3, 475—485 (РЖМат, 1974, 5А265)

519. —, Elementary properties of free groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, *178*, 127—138 (РЖМат, 1974, 2A233)
520. —, Subgroups of finitely presented groups. Proc. London Math. Soc., 1977, *35*, № 2, 193—212 (РЖМат, 1978, 3A168)
521. *Sanchez C. M.*, Minimal words in the free group of rank two. J. Pure and Appl. Algebra, 1980, *17*, № 3, 333—337 (РЖМат, 1980, 12A205)
522. *Sankappanavar H. P.*, Decision problems: history and methods. Math. Logic Proc. 1st Brazil. Conf., 1977. New York — Basel, 1978, 241—291 (РЖМат, 1979, 5A67)
523. *Saracino D.*, Wreath products and existentially complete solvable groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, *197*, 327—339 (РЖМат, 1976, 8A280)
524. —, Existentially complete nilpotent groups. Isr. J. Math., 1976, *25*, № 4, 241—248 (РЖМат, 1977, 8A207)
525. —, Existentially complete torsion-free nilpotent groups. J. Symbol. Log., 1978, *43*, № 1, 126—134 (РЖМат, 1979, 1A204)
526. —, *Wood C.*, Periodic existentially closed nilpotent groups. J. Algebra, 1979, *58*, № 1, 189—207 (РЖМат, 1979, 12A198)
527. —, —, Abstract 78T — E47. Notices Amer. Math. Soc., 1978, *25*, A-441
528. —, —, Periodic existentially closed nilpotent groups. J. Algebra, 1979, *58*, № 1, 189—207 (РЖМат, 1979, 12A198)
529. *Schiek H.*, Ähnlichkeitsanalyse von Gruppenrelationen. Acta math., 1956, *96*, № 3—4, 157—252 (РЖМат, 1958, 9566)
530. *Schubert H.*, Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen. Math. Z., 1961, *76*, № 2, 116—148 (РЖМат, 1964, 4A258)
531. *Schupp P. E.*, On Dehn's algorithm and the conjugacy problem. Math. Ann., 1968, *178*, № 2, 119—130 (РЖМат, 1969, 9A132)
532. —, On the substitution problem for free groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, *23*, № 2, 421—423 (РЖМат, 1970, 8A168)
533. —, A note on recursively enumerable predicates in groups. Fund. math., 1969, *66*, № 1, 61—63 (РЖМат, 1970, 5A58)
534. —, On Greendlinger's lemma. Commun. Pure and Appl. Math., 1970, *23*, № 2, 233—240 (РЖМат, 1971, 2A180)
535. —, Embeddings into simple groups. J. London Math. Soc., 1976, *13*, № 1, 90—94 (РЖМат, 1976, 12A72)
536. *Scott W.*, Algebraically closed groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1951, *2*, 118—121
537. *Seidenberg A.*, Constructions in algebra. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, *197*, 273—313 (РЖМат, 1976, 8A541)
538. *Shelah S.*, *Ziegler M.*, Algebraically closed groups of large cardinality. J. Symbol. Log., 1979, *44*, № 4, 522—532 (РЖМат, 1980, 6A105)
539. *Smith R. L.*, Effective aspects of profinite groups. J. Symbol. Log., 1981, *46*, № 4, 851—863 (РЖМат, 1982, 8A145)
540. *Soulé C.*, Cohomologie de $SL_3(\mathbf{Z})$. C. r. Acad. sci., 1975, *280*, № 5, A251 — A254 (РЖМат, 1975, 8A402)
541. —, The cohomology of $SL_3(\mathbf{Z})$. Topology, 1978, *17*, № 1, 1—22 (РЖМат, 1978, 10A302)
542. *Stallings J. R.*, On the recursiveness of sets of presentations of 3-manifold groups. Fund. math., 1962, *51*, № 2, 191—194 (РЖМат, 1963, 4A256)
543. *Stebe P. F.*, A residual property of certain groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, *26*, № 1, 37—42 (РЖМат, 1971, 8A188)
544. —, Conjugacy separability of certain free products with amalgamation. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, *156*, May, 119—129 (РЖМат, 1972, 2A287)
545. —, Conjugacy separability of certain Fuchsian groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, *163*, Jap., 173—188 (РЖМат, 1972, 9A196)
546. —, Residual solvability of an equation in nilpotent groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *54*, 57—58 (РЖМат, 1977, 1A204)
547. —, Nests in nilpotent groups. Houston J. Math., 1976, *2*, № 3, 419—426 (РЖМат, 1977, 3A187)
548. *Stillwell J.*, Classical topology and combinatorial group theory. New York — Heidelberg — Berlin, Springer, 1980, XII, 301 pp. (РЖМат, 1981, 7A540K)
549. —, The word problem and the isomorphism problem for groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1982, *6*, № 1, 33—56 (РЖМат, 1982, 9A136)
550. *Stonehewer S. E.*, Modular subgroup structure in infinite groups. Proc. London Math. Soc., 1976, *32*, № 1, 63-100 (РЖМат, 1976, 9A229)
551. *Szele T.*, Ein Analogen der Korpertheories für abelsche Gruppen, J. reine und angew. Math., 1950, *188*, 167—192
552. *Szmielew W.*, Elementary properties of Abelian groups. Fund. math., 1955, *41*, № 2, 203—271 (РЖМат, 1957, 2074)
553. *Tarski A.*, Undecidability group theory J. Simbol. Log., 1949, *14*, 76—77
554. —, *Mostowski A.*, *Robinson R. M.*, Undecidable theories. Amsterdam, North-Holland Publishing Comp., 1953, 98pp. (РЖМат, 1958, 2684K)
555. *Thomas R. S. D.*, *Paley B. T.*, Garside's braid-conjugacy solution implemented. Util. Math., 1974, *6*, 321—335 (РЖМат, 1977, 1A171)
556. *Thompson R. J.*, Embeddings into finitely generated simple groups which preserve the word problem. Word problems II. Amsterdam — New York — Oxford, North—Holland, 1980, 401—441
557. *Thurston W.*, Lecture Notes, Princeton Math. Dept. Princeton, 1977
558. *Truffault B.*, Sur le problème des mots pour les groupes de Greendlinger. C. r. Acad. sci., 1968, *267*, № 1, A1—A3 (РЖМат, 1969, 9A131)
559. *Turing A. M.*, On computabile *N* numbers with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. London Math. Soc., 1936, *2*, № 42, 230—265
560. —, The word problem in semigroups with cancellation. Ann. Math., 1950, *52*, 491—505
561. *Valiev M. K.*, On polynomial reducibility of the word problem under embedding of recursively presented groups in finitely presented groups. Lect. Notes Comput. Sci., 1975, *32*, 432—438 (РЖМат, 1976, 2A81)
562. —, Universal group with twenty-one defining relations. Discrete Math., 1977, *17*, № 2, 207—213 (РЖМат, 1977, 12A215)
563. *Van Kampen E. R.*, On some lemmas in the theory of groups. Amer. J. Math., 1933, *55*, 268—273
564. *Waldhausen F.*, The word problem in fundamental groups of sufficiently large irreducible three-manifolds. Ann. Math., 1968, *88*, № 2, 272—280 (РЖМат, 1969, 4A468)
565. —, Recent results on sufficiently large 3-manifolds. Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 1978, *32*, 21—38
566. *Wamsley J. W.*, Computing soluble groups. Lect. Notes Math., 1977, *573*, 118—125 (РЖМат, 1978, 1A152)
567. *Wehrfritz B. A. F.*, Two examples of soluble groups that are not conjugacy separable. J. London Math. Soc., 1973, *7*, № 2, 312—316 (РЖМат, 1974, 5A261)
568. —, Conjugacy separating representations of free groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, *40*, № 1, 52—56 (РЖМат, 1974, 5A260)
569. —, Another example of a soluble group that is not conjugacy separable. J. London Math. Soc., 1976, *14*, № 2, 380—382 (РЖМат, 1977, 8A263)
570. *Weinbaum C. M.*, Visualizing the word problem, with an application to sixth groups. Pacif. J. Math., 1966, *16*, № 3, 557—578 (РЖМат, 1968, 2A171)
571. —, The word and conjugacy problems for the knot group of any tame, prime, alternating knot. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, *30*, № 1, 22—26 (РЖМат, 1973, 9A522)
572. *Whitehead J. H. C.*, On equivalent sets of elements in a free group. Ann. Math., 1936, *37*, 782—800
573. *Ziegler M.*, Gruppen mit vorgeschriebenem Wortproblem. Math. Ann., 1976, *219*, № 1, 43—51 (РЖМат, 1976, 6A253)
574. *Zieschang H.*, Über die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam. Invent. math., 1970, *10*, № 1, 4—37 (РЖМат, 1971, 2A182)
575. —, *Vogt E.*, *Coldewey H.-D.*, Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen. Berlin—Heidelberg—New York, Springer, 1970, VIII, 203 S.

УДК 512.74

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

В. П. Платонов, С. А. Рапинчук

Введение

Настоящий обзор является продолжением обзора [68] и охватывает, в основном, работы по линейным алгебраическим группам, прореферированные в РЖ Математика в 1974—1982 годах. Число опубликованных за этот период работ, связанных с линейными алгебраическими группами, весьма велико, но из-за ограниченности объема мы были вынуждены ряд интересных тем оставить за рамками данного обзора (в особенности это касается теории групповых схем). По той же причине оказалось невозможным уделить всем рассматриваемым в обзоре вопросам одинаковое внимание, в силу чего, например, комментарии к работам по таким направлениям, как действия алгебраических групп или теория представлений, получились незаслуженно краткими.

Мы не обсуждаем здесь также многочисленных приложений теории алгебраических групп; в частности, относительно приложений теории алгебраических групп к абстрактным линейным группам мы отсылаем к обзору [35].

За рассматриваемый период вышел ряд книг по теории алгебраических групп (Хамфри [114], Стейнберг [109], Хохшильд [225], Уотерхауз [382])*, среди которых хотелось бы особо отметить книгу Хамфри [114]. Четкое, последовательное и замкнутое в себе изложение делает книгу Хамфри доступной широкому кругу математиков, использующих в своей работе методы алгебраических групп.

К сожалению, пока не существует книги, посвященной теории алгебраических групп над незамкнутыми полями. Давно уже существует потребность также в книге по арифметической теории алгебраических групп. Частично этот пробел восполняется лекциями Хамфри [231]** и обзором [82], в котором отражено современное состояние арифметической теории алгебраических групп.

* Недавно появилась также книга: Springer T. A., Linear algebraic groups. Boston, Birkhaüser, 1981.

** Выходит русский перевод.

Настоящий обзор, как и [68], состоит из двух глав, посвященных, соответственно, структурной и арифметической теориям линейных алгебраических групп.

Терминология и обозначения, используемые нами, являются общепринятыми. В частности, если G — линейная алгебраическая группа, определенная над полем K, то группа K-рациональных точек обозначается через $G(K)$ или G_K. $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ — соответственно кольцо целых чисел, поле рациональных, вещественных и комплексных чисел.

Глава 1

СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

§ 1.1. Структурные результаты о линейных алгебраических группах

В рассматриваемый период были получены важные результаты о структуре групп рациональных точек простых алгебраических групп над незамкнутыми полями, концентрирующиеся вокруг известной гипотезы Кнезера—Титса* (см. [73, 114, 159, 377]), которая оказалась связанной с рядом других проблем теории алгебраических групп, например, проблемой рациональности односвязных многообразий, проблемой слабой аппроксимации полупростых групп над произвольными полями и т. д.

Пусть G — K-простая односвязная K-изотропная алгебраическая группа над произвольным полем K. Гипотеза Кнезера—Титса состоит в следующем: группа $G(K)$ является проективно-простой, т. е. факторгруппа $G(K)/c(G(K))$ по центру $c(G(K))$ проста как абстрактная группа. Эквивалентная формулировка: $G(K)$ совпадает с группой $G(K)^+$, порожденной K-рациональными точками унипотентных радикалов параболических K-подгрупп группы G. Если $G(K)=SL(m, D)$, где D — конечномерное центральное над полем K тело, то в этом случае гипотеза Кнезера—Титса совпадает с более старой гипотезой Таннака—Артина, высказанной в 1943 г.: группа $SL(1, D)$ элементов D с приведенной нормой, равной единице, совпадает с коммутантом $[D^*, D^*]$ мультипликативной группы D^*, или на языке K-теории, приведенная группа Уайтхеда $SK_1(D)\simeq SL(1,D)/[D^*, D^*]$ конечномерного тела D тривиальна**.

В 1943 г. Накаяма—Мацусима доказали, что $SK_1(D)=1$ для p-адического поля K, затем Ванг (1950) получил аналогичный результат в более сложной ситуации поля K алгебраиче-

* См. Tits J., Algebraic and abstract simple groups. Ann. Math., 1964, *80*, № 2, 313—329 (РЖМат, 1965, 4А143).

** См. Басс Х., Алгебраическая K-теория. М., Мир, 1973, с. 222 (РЖМат, 1974, 5А439К).

ских чисел. С другой стороны, Шевалле (1961) и Стейнберг (1965) доказали гипотезу Кнезера—Титса, соответственно, для K-разложимых и K-квазиразложимых групп, а В. П. Платонов (1969) — для произвольных алгебраических групп над недискретными локально компактными полями. Эти результаты способствовали формированию мнения, что указанные выше гипотезы должны иметь утвердительный ответ.

Однако в 1975 г. первым из авторов обзора был получен отрицательный ответ на эти гипотезы. А именно, вначале в работе [71] были построены первые примеры тел D над полем рациональных функций $\mathbf{Q}(x, y)$, для которых $SK_1(D)\neq 1$, а затем в серии работ [72—78] была развита приведенная K-теория для вычисления группы $SK_1(D)$. Оказалось, что группа $SK_1(D)$ может быть любой конечной и даже бесконечной абелевой группой конечного периода для подходящих тела D и поля K. При этом указанная в этих работах конструкция тел D с нетривиальной группой Уайтхеда $SK_1(D)$ является в действительности универсальной.

Важную роль в приложениях приведенной K-теории, в частности, к проблеме рациональности групповых многообразий (см. § 1.5), играет так называемая теорема стабильности [76]: пусть D — конечномерное центральное над K тело и F — чисто трансцендентное расширение K; тогда каноническое вложение $D\to D\otimes_K F$ индуцирует изоморфизм приведенных групп Уайтхеда: $SK_1(D)\simeq SK_1(D\otimes_K F)$. Отметим, что при других расширениях поля K группа $SK_1(D)$ может меняться весьма причудливым образом (см. [73]).

После выхода работ [71—77] исследования по приведенной K-теории стали интенсивно проводиться рядом других авторов (см. [185, 186, 22, 23, 32]). Полученные в этих последующих работах результаты представляют некоторое обобщение и детализацию первоначальных теорем. Обзор основных результатов приведенной K-теории содержится в докладе В. П. Платонова [310] на Международном математическом конгрессе в Хельсинки, докладе Титса [377] на семинаре Бурбаки и трудах семинара Драксла—Кнезера [186]. При исследовании гипотезы Кнезера—Титса в общей ситуации первым из авторов был развит метод спуска, который показывает, что общая ситуация в существенной степени сводится к изучению внутренних и внешних форм типа A_n. Случай внутренних форм, когда $G(K)=SL(m, D)$, был рассмотрен выше. Для внешних форм типа A_n, т. е. когда $G(K)=SU(n, D)$, где D — конечномерное тело с инволюцией второго рода, положение оказалось вполне аналогичным. Здесь также вводится приведенная унитарная группа Уайтхеда $SUK_1(D)$, измеряющая возможное отклонение от положительного решения гипотезы Кнезера—Титса. Вначале В. П. Платоновым и В. И. Янчевским [91] было показано, что группа $SUK_1(D)$ может быть нетривиальной, а затем В. И. Янчевским в [123—125] была развита приведенная унитарная K-теория, являющаяся аналогом приведенной K-теории в унитарной ситуации и позволяющая во многих случаях вычислить группу $SUK_1(D)$.

После доказательства гипотезы Кнезера—Титса для локально компактных полей (1969) следующим естественным шагом было исследование ситуации над глобальными полями. Сначала методом спуска гипотеза Кнезера—Титса была доказана для функциональных глобальных полей (см. [70, 377]) и, за исключением некоторых форм типов E_6 и D_4 для полей алгебраических чисел (см. [377]). Позднее Титс сообщил первому из авторов, что ему удалось завершить доказательство и для оставшихся типов. Подробнее структура групп рациональных точек над глобальными полями будет обсуждаться в § 2.8.

Переходим к рассмотрению других структурных результатов теории алгебраических групп. Они уже не объединяются тематическим единством, поэтому наше изложение приобретает более фрагментарный характер.

Работа Бореля и Титса [160] посвящена обобщению полученных ими в 1965 г. (РЖМат, 1967, 6А218, 8А226) результатов на некоторые классы нередуктивных K-групп G над произвольным полем K. В частности, определяются так называемые псевдопараболические подгруппы и доказывается, что минимальные K-определенные псевдопараболические подгруппы сопряжены при помощи элементов из $G(K)$. В ряде случаев удается также построить систему Титса в $G(K)$.

В [69] показано, что нетривиальные изогении связных групп несюръективны на K-точках для любого бесконечного конечно порожденного поля K (условие конечно порожденности поля K существенно и, например, для вещественных или p-адических полей утверждение теряет силу). Отсюда выводится отрицательный ответ на гипотезу Дьедонне* о тривиальности спинорной нормы унитарной группы над телом с инволюцией первого рода.

В работах Г. М. Томанова [111, 112] изучается подгруппа Фраттини алгебраических групп. Доказано, что подгруппа Фраттини группы K-точек $G(K)$ произвольной связной K-группы G над произвольным полем K нильпотентна. Приводятся примеры несвязных групп, подгруппа Фраттини которых не обязательно нильпотентна.

В работе [113] рассматривается вопрос о строении группы $G\subset GL(n, \Omega)$, обладающей обобщенным групповым тождеством с коэффициентом из группы $GL(n, \Omega)$. Доказано, что если на G выполняется строгое обобщенное тождество с коэффициентами из самой группы, то G — конечное расширение разрешимой группы.

* Dieudonne J., On the structure of unitary groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1952, *72*, 367—385.

Отметим содержательные обзорные доклады Спрингера [351] и Титса [376], посвященные изложению общих результатов о строении редуктивных групп соответственно над произвольными и локальными полями (теория Брюа—Титса).

В работе Селигмана [336] соответствие между алгебраическими группами и p-алгебрами Ли применяется для описания двумерных алгебраических алгебр Ли над полями положительной характеристики. Такеути в [368] обобщает результаты Хохшильда о накрытиях алгебраических групп над полями нулевой характеристики на случай полей положительной характеристики. Роль алгебры Ли здесь играет так называемая гипералгебра алгебраической группы.

Природа некоторых результатов об алгебраических группах иногда проясняется, если эти результаты рассматривать в общем контексте групповых схем (см., например, книгу Крафта [259]). Не имея возможности подробно представить эту тематику, мы отсылаем заинтересованного читателя к книге [382], а здесь отметим лишь несколько последних результатов. В работе Уотерхауза [383] показано, что над алгебраически замкнутым полем треугольные групповые схемы разлагаются в полупрямое произведение унипотентной и диагонализируемой частей. Одномерные аффинные групповые схемы описаны в [384].

Из результатов классического стиля отметим вычисление мультипликатора Шура групп Шевалле над конечными полями, завершенное Стейнбергом [357].

§ 1.2. Классы сопряженных элементов и централизаторы в алгебраических группах. Регулярные элементы

Изучение классов сопряженных элементов в алгебраических группах ведется уже довольно давно. Помимо самостоятельного интереса, возникающие здесь проблемы и результаты имеют приложения в теории представлений, особенно применительно к случаю групп рациональных точек над конечными полями, а их аналоги для групп Ли — в дифференциальной геометрии. Изложение многих результатов о классах сопряженных элементов содержится в лекциях Спрингера—Стейнберга [102, 352]. Стимулирующее влияние на исследования по классам сопряженных элементов оказали проблемы, сформулированные Стейнбергом в его докладе на Международном математическом конгрессе в Москве (1966). Решение одной из них дает следующая теорема, доказанная самим Стейнбергом в [356]: пусть G — полупростая алгебраическая группа, определенная над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики; тогда элементы $a, b \in G$ сопряжены в G в том и только в том случае, если для любого неприводимого рационального представления $f: G \to GL(V)$ элементы $f(a)$, $f(b)$ сопряжены в

$GL(V)$ (аналогичный результат получен в [356] и для алгебр Ли). Положительное решение другой проблемы Стейнберга о конечности числа классов сопряженности унипотентных элементов в полупростых группах было получено Люстигом [277]. Как известно, над полями характеристики $p>5$ требуемая конечность была установлена Ричардсоном в 1967 г., однако распространить его метод на малые характеристики, по-видимому, нельзя. В [277] был разработан принципиально новый подход, с помощью которого было показано, что число унипотентных классов не превосходит $[W]^2(r+1)^2$, где $[W]$ — порядок группы Вейля, r — ранг полупростой группы (отметим, что метод Ричардсона никаких оценок не дает). Из теоремы конечности выводится следующий факт [322]: пусть G — полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K, P — параболическая подгруппа в G, U_P — унипотентный радикал P; тогда существует элемент $u_P \in U_P$, класс сопряженности которого в P открыт в U_P. На основе этого результата в работах Бэла—Картера [137—139] была получена классификация унипотентных классов над полями нулевой и достаточно большой характеристики. Метод этих работ близок к методу, разработанному Стейнбергом и Спрингером и базирующемуся на теореме Джекобсона—Морозова, однако полученные результаты выглядят изящнее. В [242] показно, что если подгруппы Леви двух параболических подгрупп P и Q сопряжены в G, то элементы u_P и u_Q также сопряжены в G. Класс сопряженности элемента u_P в G называется ричардсоновским. Описание таких классов на языке систем корней получено в [221].

В работе Бартельса [143] изучается сопряженность в алгебраических группах над локально компактными полями и полями алгебраических чисел. Для p-адических полей с помощью вычисления когомогий централизаторов находится число различных классов сопряженных элементов с фиксированным минимальным полиномом. Над полем алгебраических чисел изучается вопрос о справедливости локально глобального принципа для сопряженности. Приводятся примеры, когда этот принцип выполняется ($SL(p)$, (p — простое), $SL(1, D)$, D — тело простого индекса) и когда нет. Работа Делиня—Люстига [175] посвящена доказательству глубоких результатов о представлениях группы G_K рациональных точек редуктивной группы G над конечным полем K и их связях с классами сопряженных элементов в G_K. В качестве следствия получается, что число классов G_K-сопряженных унипотентных элементов группы G_K не меньше числа классов G_K-сопряженных K-определенных максимальных торов G. В [266] доказывается (по-видимому, известный) результат о том, что число классов сопряженности в группе $PGL(n, q)$ равно числу классов сопряженности в $GL(n, q)$, лежащих в $SL(n, q)$. Целью работы А. Е. Залесского [34] является изучение сопряженности корневых элементов в нормализаторах максимальных торов группы Шевалле над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики (элемент $x \in G$ называется корневым, если он сопряжен в G с элементом вида $\varphi_\alpha(\operatorname{diag}(d, d^{-1}))$, где $\varphi_\alpha : SL(2) \to G$ — канонический гомоморфизм, соответствующий корню α).

Изучение классов сопряженных элементов тесно связано с изучением соответствующих централизаторов. В работе Стейнберга [354] изучается связность и односвязность централизаторов в полупростых алгебраических группах (см. также [102]). Доказано, что для односвязной группы G и полупростого $t \in G$ централизатор $Z_G(t)$ связен, откуда выводится, что для абстрактной разрешимой подгруппы $A \subset G$, состоящей из полупростых элементов, связная компонента $Z_G(A)^0$ редуктивна и факторгруппа $Z_G(A)/Z_G(A)^0$ разрешима. Кроме того, находятся условия, при которых коммутирующее множество полупростых элементов лежит в одном торе. В [180] рассматривается простая группа Шевалле G над алгебраическим замыканием конечного поля и группа G_σ неподвижных точек относительно автоморфизма Фробениуса, и исследуются централизаторы полупростых элементов в G и G_σ. В частности, с помощью геометрического описания классов сопряженности в G получен критерий, когда связная редуктивная подгруппа в G максимального ранга будет связным централизатором полупростого элемента. В работах Элкингтона [190] и Паршала [308] изучаются централизаторы унипотентных элементов в полупростых группах.

Как известно, элемент $x \in G$ называется регулярным, если размерность $\dim Z_G(x)$ его централизатора равна рангу группы. В [218] дана характеризация регулярных, а также полупростых и унипотентных элементов, в терминах их действия на многообразии $F = G/P$, где P — такая параболическая подгруппа редуктивной группы G, что ядро неэффективности действия G на F совпадает с центром G. Регулярные унипотентные элементы могут быть также охарактеризованы как неособые точки многообразия V унипотентных элементов группы G. Интересные результаты о разрешении особенностей многообразия V получены Стейнбергом [352, 355]. Приводится следующая конструкция десингуляризации V, принадлежащая Спрингеру: пусть B — борелевская подгруппа группы G и $\mathscr{B} = G/B$ — многообразие борелевских подгрупп, положим $U = \{(v, gB) \in V \times \mathscr{B} \mid g^{-1}vg \in B\}$; тогда проекция $\pi : U \to V$ дает разрешение особенностей V. Слой $\pi^{-1}(u) = \mathscr{B}^u$ есть многообразие борелевских подгрупп, содержащих u. В [355] получены результаты о размерности и числе неприводимых компонент слоев π, в частности установлено неравенство $\dim \mathscr{B}^u \leqslant 1/2(\dim Z_G(u) - \operatorname{rang} G)$, а в [345] показано, что все неприводимые компоненты $\mathscr{B}^u$ имеют одинаковую размерность. Указанное неравенство частично подтверждает общую гипотезу Стейнберга (см. [352]) о том, что для любого $x \in G$ $\dim Z_G(x) = \operatorname{rang} G + 2\dim \mathscr{B}^x$. Для полупростых элементов эта гипотеза доказана Ямазаки [388].

Если основное поле K не является алгебраически замкнутым, то иногда полезно рассматривать так называемые K-регулярные элементы, т. е. такие элементы $x \in G(K)$, что $\dim Z_G(x)$ равна размерности централизатора максимального K-разложимого подтора. Андре [131] для $\operatorname{char} K = 0$ доказано существование полупростых и унипотентных K-регулярных элементов и дан критерий K-регулярности элемента в терминах разложения по корневым подгруппам. В [307] изучаются K-регулярные элементы в положительной характеристике p. При некоторых арифметических ограничениях на p (исключающих бесконечное множество простых и зависящих от типа системы корней группы) доказывается существование унипотентных K-регулярных элементов, лежащих в унипотентных радикалах минимальных параболических K-подгрупп. Отметим, что для квазиразложимых групп существование K-регулярных элементов было доказано Стейнбергом в любых характеристиках.

§ 1.3. Морфизмы и автоморфизмы алгебраических групп

Существование на алгебраической группе G двух согласованных структур — абстрактной группы и алгебраического многообразия — естественно приводит к постановке вопроса о связи и взаимоопределяемости этих структур. Одна из точных математических вариаций этой общей проблемы такова: может ли произвольный абстрактный гомоморфизм $\varphi : G(K) \to H(K')$ групп рациональных точек алгебраических групп G, H над полями K, K' соответственно, быть получен из некоторого рационального морфизма и гомоморфизма полей $K \to K'$. В общем случае, конечно, существуют абстрактные гомоморфизмы, ни в каком смысле не сводимые к рациональным морфизмам, однако ситуация резко меняется, если рассматривать группы, удовлетворяющие некоторым естественным условиям «жесткости» (например, полупростые). Наиболее общие результаты об абстрактных гомоморфизмах полупростых групп были получены в работе Бореля и Титса [159] (см. также [353]). Так как этот результат оказался исключительно важным в методологическом отношении, мы приведем его полную формулировку. Итак, пусть K и K' — бесконечные поля, G, G' — почти простые алгебраические группы, определенные над K и K', соответственно, причем G — K-изотропна. Далее, пусть H — подгруппа $G(K)$, содержащая $G(K)^+$ (см. § 1.1) и $\alpha : H \to G'(K')$ — гомоморфизм. Тогда если $\alpha(H)$ плотно по Зарисскому в G' и G односвязна, либо G' — присоединенная группа, то существуют гомоморфизм полей $\varphi : K \to K'$, K'-изогения $\beta : {}^\varphi G \to G'$ с ненулевым дифференциалом (${}^\varphi G$ — группа, получаемая заменой поля определения с K на K' при помощи φ) и гомоморфизм $\gamma : H \to c(G'(K'))$

(центр $G'(K')$)), такие, что $\alpha(g)=\gamma(g)\beta(\varphi(g))$ для любого $g\in H$. Из этой теоремы выводятся факты о линейных и проективных представлениях для H над K'. Кроме того, в [159] приводится детализация основной теоремы для случая локально компактных полей. Оказывается, что здесь при $K\neq\mathbf{C}$ гомоморфизм α всегда непрерывен. В [330] результаты [159] распространяются на не почти простые и даже нередуктивные группы G', при этом случай, когда K есть поле вещественных чисел, рассматривался ранее Титсом в [369].

В указанных выше работах решающую роль играло предположение о K-изотропности группы G. Простые примеры показывают, что для анизотропных групп абстрактные гомоморфизмы могут иметь более сложную природу. Окончательных результатов в этом случае, справедливых для любого поля, еще нет. Некоторое продвижение здесь получено в работах Вейсфейлера [385—387]. Значительно больше удалось сделать для групп над полями алгебраических чисел. Основные результаты в этом направлении принадлежат Г. А. Маргулису [46—48] (см. также [374]). Мы не будем приводить здесь формулировки его результатов в полной общности, отсылая заинтересованного читателя к докладу [48], отметим лишь следующий ключевой результат: пусть G — связная полупростая $\mathbf{R}$-группа $\mathbf{R}$-ранга >1, причем $G^0_{\mathbf{R}}$ не имеет компактных множителей, и Γ — неприводимая решетка в $G^0_{\mathbf{R}}$; пусть также K — локальное поле характеристики нуль, F — полупростая присоединенная K-группа и $\varphi:\Gamma\to F_K$ — такой гомоморфизм, что $\varphi(\Gamma)$ плотно по Зарисскому в F; тогда: (1) если K не есть $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то $\varphi(\Gamma)$ относительно компактна, (2) если K есть $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то F можно так разложить в прямое произведение K-групп F_1 и F_2, что $\pi_1(\varphi(\Gamma))$ относительно компактно, а $\pi_2\circ\varphi$ продолжается до рационального гомоморфизма группы G, где $\pi_i:F\to F_i$ $(i=1, 2)$ — естественные проекции (см. добавление к [96]). Из этой теоремы и некоторых ее обобщений получаются законченные результаты об абстрактных гомоморфизмах групп рациональных точек полупростых групп над числовыми полями.

В [119] изучались абстрактные изоморфизмы разрешимых групп. При некоторых дополнительных предположениях доказывается, что любой абстрактный изоморфизм между группами рациональных точек связных разрешимых групп описывается стандартным образом. Отметим идейную близость работы [119] с работами [58, 86], посвященными выяснению вопроса об определяемости разрешимых групп их арифметическими подгруппами.

Обсуждение ряда проблем по абстрактным гомоморфизмам алгебраических групп можно найти в [238].

К изучению абстрактных гомоморфизмов примыкает работа [226], в которой исследуется, когда из абстрактной расщепляемости точной последовательности $1\to A\to E\to G\to 1$ алгебраических групп вытекает ее расщепляемость в категории алгебраических групп. Показано, что такая импликация справедлива, если характеристика основного поля равна нулю, E унипотентна, а G определена над полем алгебраических чисел.

Остановимся теперь на результатах о структуре группы $W^K(G)$ всех бирациональных K-определенных автоморфизмов K-определенной алгебраической группы G. Цикл работ, открываемый статьей Хохшильда и Мостова (см. [146] в [68]), связан с изучением вопроса о том, когда $W^K(G)$ является группой K-точек некоторой алгебраической группы, причем отображение $W^K(G)\times G\to G$, $(\alpha, g)\to\alpha(g)$, рационально (иначе говоря, когда $W^K(G)$ является алгебраической группой преобразований). Хохшильд и Мостов показали, что в случае алгебраически замкнутого поля K нулевой характеристики необходимым и достаточным условием здесь является консервативность группы G, т. е. локальная конечность алгебры регулярных функций $K[G]$ как $W^K(G)$-модуля. Консервативные группы в характеристике 0 изучаются в [189, 264, 265], причем в [265] допускаются незамкнутые поля.

В работе А. А. Шаромета [120] исследуется вопрос об алгебраичности группы $W^K(G)$ как группы преобразований для незамкнутых полей. Для полей нулевой характеристики получено следующее необходимое и достаточное условие (здесь S — максимальный центральный тор в G): группа $W^K(G)$ является алгебраической группой преобразований тогда и только тогда, когда $W^K(S)$ — конечная группа и не существует нетривиального гомоморфизма $G/S\to S$, определенного над K. Для полей K положительной характеристики указано достаточное условие.

Нетрудно показать (см. [193, 360]), что в случае положительной характеристики группа $W^K(U)$ не является алгебраической группой преобразований, если U — унипотентная группа размерности >1. Тем не менее, если U — максимальная унипотентная K-расщепимая подгруппа в K-расщепимой простой алгебраической группе G, то группа $W^K(U)$ может быть полностью описана (см. [194]). Более подробно, $W^K(U)$ содержится в расщепляющейся точной последовательности

$$1\to N(K)\to W^K(U)\to H(K)\to 1, \tag{1}$$

где $H(K)$ — группа рациональных точек некоторой алгебраической группы, а $N(K)=1$, если $\operatorname{char} K=0$ и $N(K)=\prod_{n=1}^{\infty} G_a(K)$, если $\operatorname{char} K>3$ (G_a — одномерная аддитивная группа). Оказывается, что если G не изогенна SL_3, то $W^K(U)$ разрешима.

Последовательность (1) показывает, что в положительной характеристике $W^K(G)$, вообще говоря, не содержит максимальной алгебраической подгруппы. Наоборот, для алгебраически замкнутых полей K характеристики нуль Хохшильдом [224] доказано существование в $W^K(G)$ наибольшей связной алгебраической подгруппы. Если $K=\mathbf{C}$, то эта подгруппа совпадает со связной компонентой группы всех автоморфизмов как комплексной группы Ли.

Традиционным является исследование свойств максимальных торов, борелевских подгрупп и т. д., инвариантных относительно автоморфизма σ связной группы G. Такого рода вопросы изучаются в работе Готтлиб [200]. В частности, показано, что если инвариантные относительно σ максимальные торы T_1, T_2 группы G содержатся в инвариантных борелевских подгруппах B_1, B_2, то T_1 и T_2 сопряжены при помощи σ-инвариантного элемента (интересно, что пары (T_1, B_1) и (T_2, B_2), вообще говоря, сопряженными при помощи σ-инвариантного элемента не являются). Изучалась также двойственная задача описания свойств автоморфизмов, сохраняющих ту или иную подгруппу. В этой связи напомним, что σ называется квазиполупростым, если в G существуют тор T и содержащая его борелевская подгруппа B, инвариантные относительно σ (Стейнберг). В [187] показано, что если G является полупростой группой над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, причем ее борелевская подгруппа не имеет центра и внешних автоморфизмов, то всякий квазиполупростой автоморфизм σ является полупростым. Последнее означает, что σ реализуется сопряжением посредством полупростого элемента некоторой содержащей G алгебраической группы.

Наконец, Хохшильдом в [222] показано, что если G_0 — связная компонента группы G и централизатор G_0 в G конечен, а центр G тривиален, то связная компонента башни автоморфизмов стабилизируется, однако сама группа автоморфизмов может неограниченно возрастать.

§ 1.4. Вопросы рациональности для полупростых алгебраических групп

Наряду со структурными проблемами, обсуждавшимися выше, большой интерес представляет исследование геометрических свойств линейных алгебраических групп. Среди большого числа возникающих здесь вопросов одним из наиболее важных представляется вопрос о том, когда многообразие связной K-определенной группы G рационально над K. Ответ на этот вопрос оказывается существенно зависящим от того, является ли основное поле K алгебраически замкнутым или нет.

Если K алгебраически замкнуто то, например, из существования разложений Леви и Брюа легко следует, что G — K-рациональное многообразие (для случая $K=\mathbf{C}$ этот факт был, фактически, известен еще Пикару). Для незамкнутых полей ситуация гораздо сложнее. В 1954 г. Шевалле показал, что трехмерный норменный тор $R^{(1)}_{L/K}(G_m)$, соответствующий биквадратичному расширению $L=K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ поля K, не является рациональным над K. Серром был построен пример нерационального полупростого группового многообразия. Тем не менее, оказалось, что более слабое свойство унирациональности всегда имеет место для редуктивных групп над произвольными полями. Эта важная теорема была вначале доказана Шевалле в характеристике нуль, затем Розенлихтом для совершенных полей K и, наконец, Гротендиком в общем случае. Таким образом, вопрос о K-рациональности редуктивных групповых K-многообразий имеет характер относительного варианта известной проблемы Люрота. Так как редуктивная группа представляется в виде почти прямого произведения тора и полупростой группы, то в качестве основных естественно изучать два случая: 1) G — тор; 2) G — полупростая группа. В первом случае оказалось, что богатая геометрическая информация о G может быть получена из рассмотрения соответствующего класса Пикара (см. [22]). Наоборот, во втором случае изучение чисто геометрических инвариантов не приводит к цели. Достигнутый здесь за последние годы прогресс обусловлен применением методов, заимствованных из приведенной K-теории. Алгебраические торы будут рассматриваться в следующем параграфе, а здесь основное внимание направлено на полупростые групповые многообразия.

Как уже отмечалось, проблема рациональности полупростых групповых многообразий была отрицательно решена Серром (соответствующий контрпример фактически содержится в заключительном параграфе его книги «Когомологии Галуа» (М., Мир, 1968). Однако характер предложенного Серром построения таков, что получающаяся в результате группа не является односвязной. В связи с этим возникла гипотеза, что многообразия односвязных групп всегда рациональны. Долгое время эта гипотеза не имела совершенно никакого продвижения. Качественный скачок здесь был достигнут в последние 5—6 лет и связан с возникновением и развитием приведенной K-теории. Впервые большая серия контрпримеров к этой гипотезе была указана В. П. Платоновым в [76], в связи с исследованием проблемы слабой аппроксимации в алгебраических группах (см. 2.3). Более подробно, в [76] были построены примеры таких конечномерных тел D над полем K, что для ряда дискретных нормирований поля K группа G, определяемая $SL(1,D)$, не обладает свойством слабой аппроксимации относительно этих нормирований. В частности, многообразие G не является рациональным над K. В результате дальнейших исследований оказалось, что истинная причина нерациональности групповых многообразий типа $SL(1,D)$ заключается в нетривиальности приведенной группы Уайтхеда $SK_1(D)$. Именно, в [79] на основе теоремы стабильности приведенной K-теории был доказан следующий результат: если многообразие алгебраической группы G, определяемой $SL(1, D)$, рационально над K, то $SK_1(D)=1$. Таким образом, из приведенной K-теории вытекает, что рассматриваемые многообразия сравнительно редко бывают рациональными. Интерпретация этого феномена на языке R-эквивалентности была дана в [23]. Отметим также, что примеры нерациональных односвязных групповых многообразий, принадлежащих к внешним формам типа A_n, т. е. многообразий, определяемых $SU(m, D)$, где D — конечномерное тело с инволюцией второго рода, были построены В. И. Янчевским в [125] на основе приведенной унитарной K-теории. Роль группы $SK_1(D)$ здесь играет приведенная унитарная группа Уайтхеда $SUK_1(D)$.

Ряд исследований был посвящен изучению рациональности спинорных многообразий $\mathrm{Spin}_n(f)$, где f — невырожденная квадратичная форма степени n над K. Интерес к этому классу многообразий обусловлен тем обстоятельством, что группа $\mathrm{Spin}_n(f)$ является двулистным накрытием специальной ортогональной группы $SO_n(f)$, которая всегда рациональна (бирациональный изоморфизм $SO_n(f)$ и аффинного пространства кососимметрических относительно f матриц задается преобразованием Кэли—Диксона $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$). Ввиду этого, обнаруженный в [80] факт существования нерационального многообразия $\mathrm{Spin}_6(f)$ для подходящей формы f кажется весьма удивительным. Позднее в [81] были даны примеры нерациональных $\mathrm{Spin}_n(f)$ для всех размерностей $n=4k+2$, $k \geqslant 1$. В то же время, во многих случаях, важных для приложений, была установлена рациональность многообразий $\mathrm{Spin}_n(f)$. Так, многообразие $\mathrm{Spin}_n(f)$ всегда рационально, если либо $n \leqslant 5$, либо форма f является K-изотропной (см. [80]). Отсюда легко получить, что спинорные многообразия над p-адическими полями являются рациональными. Рациональность многообразия $\mathrm{Spin}_n(f)$ над полем вещественных чисел была доказана в [89]. Случай полей алгебраических чисел еще не изучен до конца, однако существенная теорема о рациональности спинорных многообразий над полем рациональных чисел доказана В. И. Черноусовым в [116].

Отметим еще работу [33], в которой установлена рациональность однородного пространства $SO_n(f)/D$, где D — подгруппа диагональных матриц в $SO_n(f)$.

В связи с этими результатами можно указать на такую гипотезу: многообразия полупростых присоединенных групп всегда рациональны (по крайней мере, в нулевой характеристике). Отметим также, что пока остаются открытыми интересные вопросы о рациональности норменных многообразий, определяемых $SL(n, D)$ над полями p-адических и алгебраических чисел.

Изучение геометрических инвариантов многообразий полупростых групп посвящены работы В. Л. Попова [92] и Иверсена [236].

§ 1.5. Алгебраические торы

Важный класс алгебраических групп составляют алгебраические торы, т. е. группы, изоморфные над замкнутым полем произведению мультипликативных групп G_m. Их изучение основано на том замечательном факте, что сопоставление тору его группы характеров определяет двойственность между категорией $C(L|K)$, торов, определенных над полем K и разложимых над его расширением Галуа L, и категорией конечно порожденных $\mathbf{Z}$-свободных $\mathbf{Z}[Gal(L|K)]$-модулей. Кроме того, оказывается, что свойства модуля характеров тесно связаны со свойствами некоторых бирациональных инвариантов исходного тора. Это обстоятельство служит основой для широкого использования при изучении алгебраических торов геометрических и когомологических методов. Наиболее существенные результаты здесь принадлежат В. Е. Воскресенскому, Эндо и Мияте, Ленстра (см., в частности, [16—21, 191, 268]). Эти и многие другие факты об алгебраических торах (включая, в частности, результаты работы [117]) детально разбираются в книге В. Е. Воскресенского [22], и поэтому здесь мы прокомментируем работы, опубликованные, в основном, после выхода этой книги.

Как уже отмечалось, для торов геометрические свойства играют первостепенную роль, и поэтому одной из основных задач в теории алгебраических торов является задача получения бирациональной классификации того или другого класса торов. Существующие методы позволяют в принципе получать классификацию относительно более слабого отношения так называемой стабильной эквивалентности и, в частности, выделять стабильно рациональные торы. Поэтому важное место в этой теории занимает вопрос о рациональности стабильно рациональных торов (проблема Зарисского для алгебраических торов). Пока не существует контрпримеров к проблеме Зарисского, однако и доказана она лишь в немногих случаях. Так, в [3] доказана рациональность стабильно рациональных торов с циклическим полем разложения степени $2^s p^t$. Обсуждение некоторых подходов к проблеме Зарисского для торов с циклическим полем разложения содержится в [25, 39].

Хорошо известно, что одномерные и двумерные торы всегда рациональны (см. [22]), однако среди трехмерных уже имеются и нерациональные торы, что, естественно, вызывает постановку вопроса об их бирациональной классификации. Такая классификация получена Б. Э. Кунявским [42, 44].

При исследовании бирациональных свойств алгебраических торов важно выбрать удачную проективную бирациональную модель. Один из способов построения таких моделей рассмотрен в [26, 29]. В самой общей постановке вопрос о возможных моделях изучается теорией тороидальных вложений (см. [254]).

К проблеме бирациональной классификации относится также работа [43].

Круг интересных вопросов связан с исследованием полугруппы $\mathcal{L}(L|K)$ классов стабильной эквивалентности алгебраических торов, определенных над полем K и разложимых над его расширением Галуа L. В [41] показано, что если L — биквадратичное расширение поля K, то $\mathcal{L}(L|K)$ порождается классом норменного тора $R^{(1)}_{L|K}(G_m)$. В работе А. Л. Чистова [118] изучается вопрос о конечной порожденности полугруппы $\mathcal{L}(L|K)$. Оказывается, $\mathcal{L}(L|K)$ конечно порождена тогда и только тогда, когда конечно порождены все полугруппы $\mathcal{L}(L|L_p)$, где L_p — неподвижное поле силовской p-подгруппы G_p группы $G=Gal(L|K)$. Далее, при $p\neq 2$ $\mathcal{L}(L|L_p)$ не является конечно порожденной, если G_p нециклическая. Для $p=2$ окончательного ответа еще нет.

В работах Колье—Телена и Сансука [173] (см. также [172]) проведено вычисление для торов T группы $T(K)/R$ классов рациональных точек относительно R-эквивалентности. Основные результаты здесь таковы: 1) если тор T расщепим над метациклическим расширением K, то $T(K)/R=0$; 2) если K — конечного типа над простым полем, то группа $T(K)/R$ конечна; 3) для норменного тора T, соответствующего расширению Галуа L/K $T(K)/R\simeq H^{-1}(G, L^*)$. Используя 3) и теорему стабильности (см. 1.1), можно дать интерпретацию некоторых результатов приведенной K-теории на языке R-эквивалентности (см. [22—24]), в частности $SK_1(D)\simeq SL(1, D)/R$.

Алгебраические торы представляют также интересный объект с арифметической точки зрения, причем для них арифметические инварианты (группа Шафаревича—Тейта, числа Тамагавы, ядро слабой аппроксимации) тесно связаны с геометрическими (см. [22]). Детальному изучению этой связи для торов, возникающих в задаче погружения числовых полей с абелевым ядром, посвящена работа [40]. В [27] показано, что использование техники торов позволяет получить некоторые оценки чисел классов числовых полей.

§ 1.6. Действия алгебраических групп. Орбиты и однородные пространства

Следующее утверждение хорошо известно для алгебраических групп над полем нулевой характеристики: пусть G — редуктивная группа, H — ее замкнутая подгруппа; тогда аффинность фактора G/H равносильна редуктивности связной компоненты H. Для полей положительной характеристики это утверждение независимо получено в [63, 324].

Изучению различных вопросов, связанных с действиями алгебраических групп, посвящены работы Бялыницкого-Бирули

[148—152]. Укажем сперва на несколько общих результатов, касающихся действия произвольной связной группы G на полном многообразии X (см. [152]): 1) если X содержит плотную орбиту, то множество неподвижных точек X^G конечно или пусто; если действие нетривиально, то всегда существует нетривиальная замкнутая орбита; 2) если X проективно и содержит плотную орбиту, то X^G состоит самое большое из одной точки; 3) множество X^*, являющееся объединением замкнутых орбит, замкнуто, а X^G есть объединение некоторых связных компонент в X^*. В [150] рассматривается действие одномерного тора $T=G_m$ на гладком полном многообразии X и строится клеточное разбиение $X=\bigcup_{i=1}^{r} W_i$, возникающее из разложения $X^T=\bigcup_{i=1}^{r} X_i$ многообразия неподвижных точек на неприводимые компоненты. Клетки W_i являются локально замкнутыми подмножествами, однако замыкание клеткой, вообще говоря, не является (т. е. разбиение может не быть стратификацией). Показано, что если X проективно, то построенное разбиение — фильтрация (существует такая последовательность $X_0\supset\ldots\supset X_m$ в X, что $X_0=X$, $X_m=\varnothing$, а $X_j\setminus X_{j+1}$ — клетка), причем условие проективности существенно (см. [243]). В [152] разбиение с аналогичными свойствами строится для действия группы $SL(2)$.

Отметим следующий любопытный результат Луна [274]. Пусть H — редуктивная подгруппа редуктивной алгебраической группы G, действующей на аффинном многообразии X (основное поле — алгебраически замкнутое характеристики нуль). Тогда: 1) если $x\in X^H$, то орбита Gx замкнута в том и только том случае, если замкнута орбита $N_G(H)x$; 2) если дополнительно X — конечномерное линейное пространство, а действие линейно, то $0\in\overline{Gx}$ в том и только в том случае, когда $0\in\overline{N_G(H)x}$. В [302] показано, что редуктивность группы G эквивалентна тому, что при любом действии G на гладкой схеме схема неподвижных точек также является гладкой.

В. Л. Поповым [92] вычислены группы Пикара однородных пространств линейной алгебраической группы G. Рассмотрения базируются на построении моделей конечномерных линейных и проективных представлений в линейных системах на G.

В [122] изучаются различные представления проективного многообразия в виде фактора G/P по параболической подгруппе. Более точно, пара $(\hat{G}, \hat{P})$, состоящая из связной алгебраической группы $\hat{G}$ и ее замкнутой подгруппы $\hat{P}$ называется расширением пары (G, P) с аналогичными свойствами, если $G\subset\hat{G}$, $G\cap\hat{P}=P$, $G/P\to\hat{G}/\hat{P}$ — изоморфизм алгебраических многообразий и действие G на $\hat{G}/\hat{P}$ локально эффективно. Далее рассматривается случай, когда G — полупростая группа, P — ее параболическая подгруппа, и дается классификация возможных расширений.

С арифметической точки зрения важно изучение орбит групп целых и рациональных точек алгебраических групп. Качественное рассмотрение этих вопросов содержится в работах Е. А. Нисневича [59—62]. В частности, им получено обобщение теоремы конечности Бореля и Хариш—Чандры о распадении целочисленных орбит.

К тематике этого параграфа относятся также работы [13, 36, 67, 93, 132, 162, 248, 258, 271, 275].

§ 1.7. Представления алгебраических групп

Теория представлений алгебраических групп и групп рациональных точек (включая конечные группы Шевалле) является в настоящее время весьма обширной областью исследования, обсуждению результатов которой следовало бы посвятить специальный обзор. Из-за ограниченности объема мы не можем уделить здесь этой теме должного внимания и вынуждены ограничиться краткими комментариями к богатому библиографическому материалу.

Прежде всего укажем, что основами теории представлений алгебраических групп можно познакомиться по книге Стейнберга [109]. Кроме стандартных фактов о представлениях полупростых алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем, эта книга содержит изложение теорем Стейнберга о рациональных представлениях конечных групп Шевалле. Новое доказательство теорем Стейнберга, данное в [253], основывается на изучении когомологий пучков на однородных пространствах (см. также [252]). Довольно удачным введением в теорию представлений групп Шевалле является книга Хамфри [228].

Многочисленные работы посвящены изучению представлений рациональных точек редуктивных групп над конечными полями (см. [175, 176, 276, 279, 304, 305, 347]. Особенно здесь следует отметить основополагающую работу Делиня—Люстига [175].

Если G — полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K характеристики >0, то всегда существуют не вполне приводимые рациональные представления G. Степень отсутствия полной приводимости характеризуется так называемой теорией блоков. Напомним, что блок — это класс эквивалентности простых G-модулей относительно следующего отношения: $M_1 \sim M_2$, если M_1 и M_2 встречаются в числе композиционных факторов некоторого неразложимого G-модуля. Донкиным [182, 183] получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы простые рациональные G-модули со старшими весами λ и μ лежали в одном блоке (частный случай этого результата — см. в [232]). Один из приемов исследования представлений в характеристике $p>0$ основан на использовании двойственности между категорией конечномерных G-модулей и категорией конечномерных модулей над гипералгеброй U_K группы G (см. [241]). В [171] изучается вопрос о том, когда рациональное действие борелевской подгруппы B

связной группы G на некотором B-модуле V может быть расширено до действия всей группы G. Оказывается, это имеет место в том и только том случае, если действие подгруппы B расширяется до действия каждой минимальной параболической подгруппы $P \supset B$ (так как полупростой ранг P равен 1, то проверка последнего условия сводится к $SL(2)$). В [291] получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы любое представление алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G поднималось до представления группы G (характеристика равна 0). Работа [170] посвящена исследованию вопроса о том, когда для группы G и ее подгруппы H функтор индуцирования из категории рациональных H-модулей в категорию рациональных G модулей сохраняет точность коротких точных последовательностей. Показано, что это эквивалентно аффинности фактора G/H. Последнее условие для редуктивной группы G эквивалентно редуктивности H (см. 1.6).

Мы здесь совершенно не затрагиваем теории представлений групп рациональных точек алгебраических групп над локальными полями и адельных групп, связь этих вопросов с теорией автоморфных функций и когомологиями дискретных подгрупп (см., в частности, [154—156, 161, 346]).

Различным вопросам теории представлений посвящены работы [4, 28, 140, 181, 228, 233, 239, 240, 245, 260, 271, 323, 326, 339, 363, 380].

§ 1.8. Теория инвариантов

Теория инвариантов относится к числу наиболее классических математических дисциплин. В последние 10—15 лет исследования по теории инвариантов вновь (уже в который раз!) активизировались, благодаря четкому выявлению связей с рядом вопросов алгебраической геометрии, в частности, с проблемой модулей (см. [31]). Вместе с алгебро-геометрической проблематикой в теорию инвариантов проникли и геометрические методы исследования, так что сама теория инвариантов стала дисциплиной, тесно граничащей с коммутативной алгеброй, алгебраической геометрией и теорией алгебраических групп (см. [197]). Поэтому в нашем обзоре результатов, связанных с алгебраическими группами, невозможно, хотя бы бегло, не остановиться на достижениях теории инвариантов, тем более, что здесь в последнее время был получен ряд важных результатов.

Прежде всего, необходимо отметить полученное Хабоушем [211] доказательство гипотезы Мамфорда о геометрической редуктивности редуктивных алгебраических групп. Важность этой гипотезы для теории инвариантов объясняется ее связью со следующей классической проблемой: пусть задано регулярное действие алгебраической K-определенной группы G на конечно порожденной K-алгебре R; когда алгебра инвариантов R^G будет конечно порожденной? Если поле K имеет характеристику 0, то конечная порожденность алгебры R^G для произвольной редуктивной группы G была установлена в начале 60-х годов Нагатой с использованием теоремы о полной приводимости представлений таких групп. В характеристике $p>0$ теорема о полной приводимости теряет силу, и поэтому предпринимались попытки найти какое-нибудь более слабое условие, гарантирующее конечную порожденность алгебры R^G и априори выполняющееся в положительной характеристике для широкого класса групп. Таким условием оказалось введенное Мамфордом условие геометрической редуктивности группы G, которое в геометрических терминах означает следующее: для любого линейного действия группы G на n-мерном проективном пространстве $\mathbf{P}^n$ и любой неподвижной точки $x_0 \in \mathbf{P}^n$ существует инвариантная относительно группы G гиперповерхность, не содержащая x_0. Мамфорд предположил, что все редуктивные алгебраические группы являются геометрически редуктивными. Это и было доказано Хабоушем (другое доказательство — см. в [232], некоторые частные случаи — в [196, 367]). Как уже отмечалось, отсюда следует конечная порожденность алгебр инвариантов R^G редуктивных групп G в любых характеристиках (14-я проблема Гильберта для случая редуктивных групп). Геометрическая природа этого результата вскрывается в работах [201, 202] (см. также [230]).

С качественной точки зрения указанная теорема о конечной порожденности представляется максимально общей, однако для теории инвариантов важна и количественная сторона вопроса, т. е. определение мощности минимальной системы образующих. Для случая полей характеристики нуль эта задача была решена В. Л. Поповым [95, 315]. Он рассматривал связную полупростую группу G, линейно действующую на векторном пространстве V и получил явную оценку сверху на число элементов минимальной однородной системы образующих алгебры инвариантов $K[V]^G$. Отметим также, что в [11] указан алгоритм построения минимальной полной системы инвариантов для действия связных унипотентных групп.

Одной из современных тенденций в теории инвариантов является исследование структурных свойств алгебры инвариантов $K[V]^G$. В частности, для приложений представляет интерес вопрос о том, когда $K[V]^G$ является кольцом многочленов (а также более общий вопрос о рациональности поля инвариантов $K(V)^G$). Если K — поле характеристики 0, а G — конечная группа, то ответ на первый вопрос дается известной теоремой Шепарда—Тодда: $K[V]^G$ является кольцом многочленов тогда и только тогда, когда G порождается псевдоотражениями. В работе Каца, Попова и Винберга [244] определены все неприводимые простые связные группы с таким свойством.

В работе Хостера и Робертса [227] показано, что $K[V]^G$ всегда является кольцом Коэна—Маколея, если группа G редуктивна; для регулярного действия ортогональной группы на кольце многочленов это проверено также в [261].

Несколько работ посвящено выяснению условий, при которых $K[V]$ является свободным $K[V]^G$-модулем. Вначале в [94] были найдены простые неприводимые группы с этим свойством, а затем в [333] рассмотрены и приводимые группы. Кроме того, оказалось, что такие группы могут быть охарактеризованы следующим геометрическим условием: все слои факторморфизма $V \to V/G$ имеют одинаковую размерность (см. [1]).

Исследование группы Пикара кольца инвариантов $K[V]^G$ содержится в [282].

К сожалению, на сегодняшний день мы не обладаем сколько-нибудь полной информацией о том, когда поле инвариантов $K(x_1, \ldots, x_d)^G$ будет чисто трансцендентным расширением поля K, особенно, если действие G на образующие $x_1, \ldots, x_d$ не является линейным. Наиболее законченные результаты здесь имеются для конечных абелевых групп линейных преобразований (см. [22, 268, 269]). Кроме того, Э. Б. Винбергом [14] доказано, что поле инвариантов $K(V)^G$ связной разрешимой алгебраической группы $G \subset GL(V)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль является полем рациональных функций.

Остается отметить, что конспективное, но весьма удачное изложение как классических, так и некоторых современных результатов теории инвариантов содержится в книге Спрингера [350]. Ее русский перевод [108] сопровождается примечаниями переводчика (приложение 3), комментирующими достижения последних лет.

§ 1.9. Проаффинные алгебраические группы. Другие обобщения алгебраических групп

При исследовании ряда задач наряду с линейными алгебраическими группами используются некоторые их обобщения (проаффинные алгебраические группы, дифференциальные алгебраические группы и др.). В настоящем параграфе мы очень кратко обсудим эти вопросы.

Исследование проаффинных алгебраических групп было начато Хохшильдом и Мостовым (см. Amer. J. Math., 1969, **91**, № 4, 1127—1140 (РЖМат, 1970, 12А343). Проаффинная алгебраическая группа над полем K была определена ими как пара (G, A), состоящая из абстрактной группы G и K-алгебры A функций на G со значениями в K и удовлетворяющая следующим условиям: 1) если $f \in A$, то пространство V_f, порожденное левыми и правыми сдвигами функции f на элементы G, конечномерно над K; 2) если $f \in A$, то функция f^*, определяемая формулой $f^*(x)=f(x^{-1})$, также принадлежит A; 3) A разделяет точки G; 4) для любого гомоморфизма $\varphi: A \to K$ найдется такой $x \in G$, что $\varphi(f)=f(x)$. Если алгебра A имеет конечное число образующих, то, очевидно, получаем обычную K-определенную аффинную группу. В общем случае, благодаря условиям 1) и 3), группа G аппроксимируется аффинными алгебраическими группами. В цитированной статье Хохшильдом и Мостовым для характеристики нуль были получены проаффинные аналоги некоторых теорем теории аффинных алгебраических групп (доказано существование унипотентных радикалов, факторов Леви, сопряженность факторов Леви). Их методы развиваются в [295], где показано, что проразрешимые проаффиные группы являются полупрямыми произведениями унипотентного радикала и любого максимального подтороида, причем все максимальные подтороиды сопряжены (см. также [361]). Этот результат позволяет распространить на проаффинные группы теорию подгрупп Бореля.

Одно из преимуществ категории проаффинных групп над категорией аффинных групп состоит в том, что в ней всегда существует универсальная накрывающая. Для характеристики нуль это установлено Хохшильдом (Pacif. J. Math., 1970, **35**, № 2, 399—415 (РЖМат, 1971, 8А313)), а для положительной характеристики — Магидом [280]. В [309] проводится вычисление функтора Ext в категории проаффинных групп.

Проаффинные алгебраические группы можно представлять себе через проективные пределы аффинных групп; двойственная конструкция индуктивного предела приводит к понятию бесконечномерной алгебраической группы (см. [122, 217]). Отметим также, что специализацией понятия проаффинной группы является понятие биалгебраической группы (см. [300]).

В работе Магида [281] изучаются левые алгебраические группы, т. е. многообразия, снабженные структурой группы, для которой левые сдвиги являются морфизмами. Естественность их рассмотрения вытекает из известной теоремы Хохшильда и Мостова о том, что комплексная аналитическая группа, обладающая точным линейным представлением, допускает структуру левой алгебраической группы. Также в связи с этой теоремой в [285, 286] исследовался вопрос о максимальной алгебраической подгруппе в комплексной аналитической группе.

Как известно, алгебраические группы играют важную роль в теории Пикара—Вессио для дифференциальных уравнений. Алгебраическому аспекту этой теории посвящена книга Колчина [257]. Отметим, что в эту книгу не вошли исследования по дифференциальным аналогам алгебраических многообразий и дифференциальным алгебраическим группам (см. об этом работы Кассиди [166—168]).

§ 1.10. Другие вопросы

В [321] указана конструкция общей точки наименьшей алгебраической группы, алгебра Ли которой содержит данный набор матриц. В [320] получена характеризация линейных алгебраических групп G над полем характеристики нуль, для которых существует инъекция данной алгебры Ли L в алгебру Ли $L(G)$.

Работа Фаунтлероя [192] посвящена выяснению условий на поле K, при которых для любых связных разрешимых K-подгрупп A, $B \subset GL(n)$ справедливо равенство $[A, B](K) = [A(K), B(K)]$ (предполагается, что A нормализует B). В его же работе [193] показано, что для связной унипотентной группы G над совершенным полем K в алгебре регулярных функций $K[G]$ систему полиномиальных образующих можно выбрать таким образом, что для любого связного нормального делителя $N \subset G$ соответствующий идеал $I(N)$ порождается $\operatorname{codim} N$ p-многочленами.

В [284] изучаются интегральные в смысле Бурбаки аналитические подгруппы H в связной линейной алгебраической группе G над полем комплексных чисел, плотные в топологии Зарисского. Показано, в частности, что всегда существует такой алгебраический тор T, что $G=HT$.

Глава 2

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

§ 2.0. Введение

Арифметическая теория линейных алгебраических групп изучает арифметические свойства линейных алгебраических групп, определенных в основном над полем алгебраических чисел или полем алгебраических функций одной переменной с конечным полем констант. Методы этой теории и ее проблематика берут свое начало от классических исследований по арифметике квадратичных форм (Гаусс, Эрмит, Минковский, Хассе, Зигель), структуре группы единиц полей алгебраических чисел (Дирихле), дискретным подгруппам групп Ли в связи с теорией автоморфных функций, топологией и кристаллографией (Риман, Клейн, Пуанкаре и др.). В самостоятельную область математики арифметическая теория алгебраических групп оформилась в последние пятнадцать — двадцать лет. Это были годы необычайно интенсивного развития, в течение которых были установлены фундаментальные факты, составившие ядро теории. Вместе с тем, эта теория еще далека от своего завершения. Изложение наиболее существенных результатов арифметической теории линейных алгебраических групп, полученных к настоящему времени содержится в обзоре [82] первого из авторов. Там же имеется обширная библиография (255 наименований) работ, посвященных различным арифметическим вопросам. Здесь мы не собираемся дублировать [82] и ограничимся комментариями к работам, опубликованным после 1974 года. За более полной информацией читатель отсылается к [82].

Условимся теперь о некоторых обозначениях, которыми мы будем пользоваться в этой части. Всюду, если противное особо не оговаривается, K обозначает глобальное поле, т. е. поле, являющееся конечным расширением либо поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$, либо поля рациональных функций $F_q(t)$ одной переменной с конечным полем констант. Через V^K обозначается множество всех неэквивалентных нормирований K, V^K_∞ и V^K_f — соответственно подмножества архимедовых и неархимедовых нормирований (отметим, что в функциональном случае $V^K_f = V^K$).

Для всякого конечного непустого подмножества $S \subset V^K$, содержащего в числовом случае V^K_∞, $O(S)$ — кольцо S-целых элементов K, т. е.

$$O(S) = \{a \in K \mid v(a) \geqslant 0 \quad \forall v \in V^K \setminus S\};$$

при $S = V^K_\infty$ для поля K алгебраических чисел $O(S) = O$ является кольцом целых элементов поля K.

Для любого $v \in V^K$ через K_v обозначается пополнение K относительно v; для $v \in V^K_f$ O_v — кольцо целых элементов в K_v.

Предполагаются известными основные результаты алгебраической теории чисел.*

Отметим также, что если G — алгебраическая группа, определенная над K, то через G_K, G_O, $G_{O(S)}$ обозначаются соответственно подгруппы K-точек, единиц и S-единиц группы G.

§ 2.1. Арифметические группы

Пусть G — линейная алгебраическая группа, определенная над глобальным полем K, S — конечное подмножество в V^K содержащее в числовом случае V^K_∞, и $G_{O(S)}$ — группа S-единиц. Напомним, что подгруппа $H \subset G$ называется S-арифметической, если она соизмерима с $G_{O(S)}$, т. е. пересечение $H \cap G_{O(S)}$ имеет конечный индекс как в H, так и в $G_{O(S)}$. Если K — поле алгебраических чисел и $S = V^K_\infty$, то говорят просто об арифметических подгруппах. Основные теоремы об арифметических и S-арифметических подгруппах в числовом случае были получены

* См. Вейль А., Основы теории чисел. М., Мир, 1972. Алгебраическая теория чисел (под редакцией Дж. Касселса и А. Фрелиха). М., Мир, 1969.

к концу 60-х годов и в настоящее время считаются классическими. Это, прежде всего, теория приведения для арифметических подгрупп. (Борель, Хариш-Чандра), из которой вытекает конечная представимость арифметических подгрупп и существование в них лишь конечного числа не сопряженных между собой конечных подгрупп. Конечная представимость S-арифметических подгрупп была установлена Бером. Конечность числа классов сопряженности конечных подгрупп для S-арифметических групп доказана в работе Бореля и Серра [158], где дано также другое доказательство их конечной представимости, использующее конструкцию основы Титса для неархимедовых локальных групп G_{K_v}, $v \in S \setminus V^K_\infty$. Аналогичные вопросы в функциональном случае не имеют столь однозначного ответа, ибо, как заметил Нагао еще в 1959 г., здесь существуют S-арифметические группы, не являющиеся конечно порожденными. Почти полное решение вопроса о конечной порожденности S-арифметических подгрупп было получено Бером: S-арифметическая подгруппа редуктивной алгебраической группы G, определенной над функциональным глобальным полем K, является конечно порожденной, если полупростой K-ранг G равен нулю или $\operatorname{card} S > 1$. Наиболее общий результат о конечной представимости S-арифметических подгрупп получен Борелем и Серром [158]: всякая S-арифметическая подгруппа H полупростой K-анизотропной группы G конечно представима; при этом конечные подгруппы группы H образуют конечное число классов сопряженных. Если $\operatorname{rang}_K G \geqslant 1$, то ситуация становится более запутанной. Например, группа $SL(3, F_q[t])$ конечно порождена, но не является конечно представимой (Бер [146]); S-арифметическая группа $SL(2, O(S))$ конечно представима тогда и только тогда, когда $\operatorname{card} S > 2$ (см. Штулер [358]).

В некоторых случаях получено явное описание образующих и соотношений для $\mathbf{G}_O$; для групп Шевалле над $\mathbf{Q}$ это сделано Бером в [145], для $SL(2)$ над глобальным полем — см. работу Серра [104, 105]. Кнезер [256] исследовал вопрос о порождаемости целочисленных ортогональных групп отражениями. В [340] получена обобщающая теорему Дирихле формула для ранга S-арифметической подгруппы в торе.

Если G определена над $\mathbf{Q}$ и группа $G_\mathbf{R}$ компактна, то группа единиц $G_\mathbf{Z}$ является конечной. Более того, если O — кольцо целых чисел вполне вещественного числового поля K, то группа G_O также конечна. В рассматриваемой ситуации существует довольно естественная гипотеза: $G_O = G_\mathbf{Z}$. Пока эта гипотеза доказана Бартельсом и Китаока лишь в том случае, когда $K/\mathbf{Q}$ является нильпотентным расширением Галуа, т. е. группа Галуа $Gal(K/\mathbf{Q})$ нильпотентна (см. [144]). Из справедливости этой гипотезы вытекают следующие интересные утверждения (см. [141]): 1) если L и M положительно определенные квадратичные $\mathbf{Z}$-решетки, то L и M изоморфны, если изоморфны O-решетки OL и OM; 2) если $K/\mathbf{Q}$ — расширение Галуа, то естественное отображение когомологий

$$H^1(Gal(K/Q),\ G_O) \to \prod_w H^1(Gal(K_w/Q_v),\ G_{O_w}) \quad (w\,|\,v)$$

имеет тривиальное ядро.

Были исследованы алгоритмические вопросы в арифметических группах. Основные факты содержатся в работах Груневальда и Сегала [207, 208] и Р. А. Саркисяна [99—101]. Их результаты состоят в следующем. Показано, что для любой явно заданной ариметической группы H существует алгоритм для нахождения ее образующих и соотношений, а также, что в H алгоритмически разрешима проблема сопряженности. Доказательство последнего утверждения получается из более общего результата о том, что существует алгоритм, позволяющий выяснить, принадлежит ли данный элемент x векторного пространства W, на котором действует G, орбитам $G_K y$ и $G_O y$ $(y \in W_K)$ или нет. На этом пути показано (см. [208]), что алгоритмически разрешима проблема изоморфизма для конечно порожденных нильпотентных групп. Отметим также, что в [100] исследованы некоторые алгоритмические вопросы для адельных групп.

§ 2.2. Группы аделей и числа Тамагавы

Группы аделей представляют один из основных инструментов исследования в арифметической теории алгебраических групп. Напомним, что, по определению, группа аделей G_A алгебраической группы G над глобальным полем K есть ограниченное топологическое произведение $\prod_{v \in V^K} G_{K_v}(G_{O_v})$ групп G_{K_v} с отмеченными подгруппами G_{O_v} (для архимедовых v полагаем $G_{O_v} = G_{K_v}$). Подгруппа $G_{A(\infty)} = G_\infty \times \prod_{v \in V_f^K} G_{O_v}$, где $G_\infty = \prod_{v \in V_\infty^K} G_{K_v}$ — архимедова часть группы аделей, называется подгруппой целых аделей. Группа K-точек G_K диагональным образом вкладывается в G_A как дискретная подгруппа, называемая группой главных аделей. (Отметим результат Мюрейза [299], показывающий, что точки группы G_K в некотором смысле равномерно распределены в G_A).

Естественно возникает задача построения теории приведения для G_A относительно G_K. Эта задача для числовых полей может быть решена либо на основе теории приведения Бореля и Хариш—Чандры для арифметических подгрупп, либо непосредственно адельными методами (Годеман). Подход Годемана

позволяет построить теорию приведения и в функциональном случае (Хардер). Для нас наибольший интерес представляют следующие два результата теории приведения: 1) в числовом случае число двойных смежных классов $G_{A(\infty)} \backslash G_A / G_K$ конечно (в функциональном случае конечно число классов $G_{A(s)} \backslash G_A / G_K$ относительно группы S-целых аделей $G_{A(S)}$ для непустого подмножества $S \subset V^K$; 2) объем факторпространства $G_A^{(1)}/G_K$ в мере Хаара конечен, где $G_A^{(1)}$ — подгруппа таких аделей $g = (g_v) \in G_A$, что $\prod_{v \in V^K} |\chi(g_v)|_v = 1$ для любого K-определенного характера χ группы G (здесь предполагается, что V^K состоит из нормализованных нормирований) (см. [82]). Эти две теоремы конечности приводят к двум исключительно важным арифметическим инвариантам: к числу классов $cl(G)$ группы G, которое по определению равно числу двойных классов $G_{A(\infty)} \backslash G_A / G_K$ и которое мы обсудим в 2.4, и к числу Тамагавы $\tau(G)$, определяемому как объем $G_A^{(1)}/G_K$ в мере Тамагавы (см. [82]). При описании значений $\tau(G)$ удобно различать случаи унипотентных групп, алгебраических торов и полупростых групп. Легко показать, что для унипотентной группы G всегда $\tau(G) = 1$. Числа Тамагавы торов также известны, как в числовом, так и в функциональным случаем (Оно, 1963). Для полупростых групп над числовыми полями Оно была получена редукция вычисления $\tau(G)$ к односвязным группам (см. [68]). Для односвязных групп существует гипотеза, что всегда $\tau(G) = 1$ (А. Вейль). К настоящему времени это доказано для большинства типов простых групп над числовыми полями (Вейль, Марс). Унифицированное доказательство гипотезы Вейля для групп Шевалле над числовыми полями было дано Ленглендсом. Хардер [213] усовершенствовал метод Ленглендса и доказал гипотезу Вейля для групп Шевалле над функциональными полями. (Отметим, что для других полупростых групп над функциональными полями вычисление $\tau(G)$ остается пока проблематичным). Лэй [262] вычислил число Тамагавы квазиразложимой группы G в терминах числа Тамагавы ее максимального тора. Вычисление $\tau(G)$ для редуктивных групп см. в [263].

§ 2.3. Аппроксимация в алгебраических группах

С определением группы аделей и адельной топологии связано понятие сильной аппроксимации, играющее исключительно важную роль в арифметической теории алгебраических групп и ее приложениях. Напомним постановку проблемы сильной аппроксимации. Пусть G — линейная алгебраическая группа, определенная над глобальным полем K, S — конечное подмножество V^K и G_S — подгруппа группы аделей G_A, состоящая из аделей с единичными v-компонентами для $v \notin S$; когда

$\overline{G_S G_K}=G_A$, где черта означает замыкание в адельной топологии? (Если сильная аппроксимация имеет место для $S=V_\infty{}^K$, то говорят об абсолютной сильной аппроксимации). Окончательному решению проблемы сильной аппроксимации предшествовал ряд результатов (см. [82]); отметим только найденные Кнезером в числовом случае и распространенные Бером на функциональный случай необходимые условия для сильной аппроксимации: а) G_S некомпактна, б) G — односвязная группа. Достаточность этих условий в числовом случае была установлена Платоновым (см. [68]) методом редукции к гипотезе Кнезера—Титса над локальными полями (см. 1.1). При этом справедливость гипотезы Кнезера—Титса была доказана им для локальных полей как нулевой, так и положительной характеристики (другое доказательство в нулевой характеристике — см. в [220]).

Спустя несколько лет Прасадом [317] и Г. А. Маргулисом [51] была доказана достаточность условий а), б) и в функциональном случае. Здесь доказательство наряду с использованием гипотезы Кнезера — Титса опирается на следующее утверждение, представляющее и самостоятельный интерес: пусть H — замкнутая недискретная подгруппа группы K_v-точек G_{K_v} простой K_v-изотропной группы G, такая что на факторе G_{K_v}/H существует конечная G_{K_v}-инвариантная борелевская мера, тогда $H\supset G^+_{K_v}$ (см. 1.1); в частности, пространство G_{K_v}/H компактно.

Наряду с сильной аппроксимацией, иногда существенную роль играет свойство слабой аппроксимации. Говорят, что алгебраическая группа G, определенная над произвольным полем K, обладает свойством слабой аппроксимации относительно конечного множества P неэквивалентных нормирований поля K, если диагональное вложение $G_K\to\prod_{v\in P} G_{K_v}$ имеет плотный образ в естественной топологии, индуцированной нормированиями $v\in P$.

Слабая аппроксимация всегда имеет место для полупростых односвязных групп над глобальными полями. Этот факт непосредственно следует из сильной аппроксимационной теоремы, однако, можно дать и непосредственное доказательство (см. [82]). Условие односвязности здесь существенно. Еще в 1961 г. Серр построил примеры неодносвязных полупростых групп и алгебраических торов над глобальным полем, не обладающие свойством слабой аппроксимации. Тем не менее, присоединенные полупростые группы всегда обладают свойством слабой аппроксимации (Хардер). Кроме того, любая редуктивная группа обладает слабой аппроксимацией для почти всех P, т. е. существует такое конечное подмножество $P_0\subset V_f{}^K$, что при $P\cap P_0=\varnothing$ справедливо свойство слабой аппроксимации для P (см. [15]). Исследование слабой аппроксимации для торов содержится в книге В. Е. Воскресенского [22].

Свойство слабой аппроксимации представляет интерес для групп не только над глобальным, но и над произвольным полем. Исследуя слабую аппроксимацию над глобальными полями, Кнезер предположил, что свойство слабой аппроксимации имеет место для полупростых односвязных групп над произвольным полем*, в частности группа G, определяемая $SL(n, D)$, где D — конечномерное тело с центром K, всегда обладает слабой аппроксимацией (легко показать, что здесь можно ограничиться случаем $n=1$). Отрицательный ответ на эту гипотезу Кнезера был получен первым из авторов в [75, 76] на основе построенной им приведенной K-теории (см. 1.1). Точная формулировка результата из [76] такова: существуют такие тела D произвольной степени $m=n^2$, $n>1$, над полем K, что для бесконечного множества $W=\{w_i\}$ дискретных нормирований поля K группа G, определяемая $SL(1, D)$, не обладает слабой аппроксимацией относительно одноэлементного множества $\{w_i\}$; более того, порядки групп $SL(1, D\otimes_K K_{w_i})/\overline{SL(1, D)}$, выражающих отклонения от слабой аппроксимации (черта означает замыкание в w_i-адической топологии), не ограничены в совокупности. Унитарный вариант этой ситуации исследован В. И. Янчевским [125].

§ 2.4. Числа и группы классов алгебраических групп

Одной из наиболее важных и естественных арифметических характеристик алгебраической K-группы G (K — поле алгебраических чисел) является число классов $cl(G)$. Напомним, что $cl(G)$ есть число двойных смежных классов $G_{A(\infty)}xG_K$ в разложении группы аделей G_A по подгруппам $G_{A(\infty)}$ и G_K целых и главных аделей, соответственно. Хорошо известно, что для ортогональной группы $G=O_n(f)$ невырожденной квадратичной формы f число $cl(G)$ совпадает с числом классов в роде квадратичной формы f, а для одномерного разложимого тора T над полем K $cl(T)$ есть число классов идеалов поля K. Эти примеры с одной стороны демонстрируют содержательность числа $cl(G)$, а с другой — важность и трудность задачи вычисления $cl(G)$. К настоящему времени наиболее полно исследован вопрос об изменении $cl(\varphi(G))$ в зависимости от K-реализации $\varphi: G\to GL(r, \mathbf{C})$ полупростой группы G. Основные результаты в этом направлении получены в работах В. П. Платонова, А. А. Бондаренко, А. С. Рапинчука [84, 85].

* См. Kneser M., Schwache approximation in algebraische Gruppen. Colloq. Theor. Groupes Algebriques. Bruxelles. Louvain Paris, 1962, 41—52.

Прежде всего отметим, что значения, принимаемые $cl(G)$, существенно различаются для групп компактного и некомпактного типа. Мы называем полупростую группу G неопределенной или группой некомпактного типа, если для каждого K-простого сомножителя G^i группы G соответствующая архимедова часть G^i_∞ группы аделей некомпактна. В противном случае группа G называется группой компактного типа. Неопределенность группы G эквивалентна тому, что для односвязной накрывающей $\widetilde{G}$ справедлив абсолютный случай сильной аппроксимационной теоремы (см. 2.3), откуда нетрудно получить, что $cl(\varphi(G))$ является делителем числа вида m^d, $d \geqslant 0$, где m — порядок ядра F универсального накрытия $\pi: \widetilde{G} \to G$, т. е. порядок фундаментальной группы. В связи с этим первым из авторов в 1971 г. была сформулирована следующая гипотеза: для неопределенной полупростой K-группы G и произвольного числа m^d, $d \geqslant 0$ существует такая K-реализация φ_d группы G, что $cl(\varphi_d(G)) = m^d$. Эта гипотеза была доказана в [84]. Там же был поставлен более общий вопрос о реализации в качестве $cl(\varphi(G))$ всех априори возможных чисел классов, т. е. чисел вида $p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, где $p_1, \ldots, p_r$ — все различные простые делители m. Еще более тонкий вопрос связан с возможностью реализации в качестве группы классов произвольной конечной абелевой экспоненты f, где f — показатель фундаментальной группы F. Определение группы классов $\mathscr{G}cl(\varphi(G))$, данное в [84], базируется на том факте, что для неопределенной полупростой группы G главный класс $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ является нормальным делителем $\varphi(G)_A$, содержащим коммутант $[\varphi(G)_A, \varphi(G)_A]$, так что $\mathscr{G}cl(\varphi(G)) = \varphi(G)_A / \varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ есть конечная абелева группа, порядок $[\mathscr{G}cl(\varphi(G))]$ которой равен числу классов $cl(\varphi(G))$.

Вопрос о группах классов в значительной степени решается следующей теоремой реализации (см. [85]): пусть G — неопределенная полупростая K-группа, f — показатель ее фундаментальной группы F; для любой конечной абелевой группы B экспоненты f существует такая K-реализации φ_B группы G, что $\mathscr{G}cl(\varphi_B(G)) \simeq B$; в частности, эффективно определяется такое l, что G является линейной группой степени l и для любого числа вида $p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, где $p_1, \ldots, p_r$ — различные простые делители порядка $[F]$, существует такая решетка $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \subset K^l$, что $cl\left(G^{M(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)}\right) = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ (здесь $cl(G^M)$ — число классов группы G в реализации, определяемой решеткой M, или в другой интерпретации число классов в роде M относительно группы G).

Вопрос о минимальной размерности l, в которой реализуются все возможные числа классов $cl(\varphi(G))$ для полупростой группы G степени n, в полной общности пока не исследован. Отметим

лишь, что если фундаментальная группа F является циклической, то достаточно рассматривать реализации φ степени $2n$ (см. [84]). Замечательно, что одноклассные решетки относительно действия неопределенной полупростой группы существуют в любой размерности (см. [84]), причем среди них обязательно имеется свободная решетка (см. [98]).

Совсем иной оказывается ситуация для групп компактного типа, как показывает следующий результат, полученный в [84]: если G — полупростая алгебраическая группа степени n, имеющая компактный тип, то для любого натурального d существует также такая решетка $M(d) \subset K^{2n}$, что $cl(G^{M(d)})$ делится на d. Отсюда вытекает существование таких реализаций φ, что главный класс $\varphi(G)_{A(\infty)}\varphi(G)_K$ не является подгруппой в $\varphi(G)_A$, и группу классов $\mathscr{G}cl(\varphi(G))$ здесь определить нельзя.

В общем случае точное вычисление числа $cl(G)$ представляется малореальным, и поэтому естественно ставить вопрос о получении разного рода оценок для $cl(G)$. Такие оценки могут быть получены при исследовании связей между числами классов группы G и ее наиболее важных подгрупп (параболических подгрупп, максимальных торов). Можно показать, что если P — K-определенная параболическая подгруппа G, то $cl(G) \leqslant cl(P)$. Отсюда легко выводится, что для разложимой группы G $cl(G) \leqslant cl(S)$, где S — максимальный разложимый тор (см. [10]). Последний результат получается также в виде весьма частного случая следующего общего утверждения из [84], для формулировки которого мы напомним некоторые определения. Для произвольной алгебраической группы G через Ш(G) обозначается ядро канонического отображения $H^1(K, G) \to \prod\limits_{v \in V^K} H^1(K_v, G)$. Пусть теперь G — полупростая K-определенная группа и T — максимальный K-тор в G. Обозначим через $T_1 = \pi^{-1}(T)$ прообраз T при универсальном накрытии $\pi: \widetilde{G} \to G$, и пусть $\hat{T}_1$ — группа характеров тора T. Пусть также L — поле разложения тора T_1 и $\Pi = Gal(L/K)$. Тогда для неопределенной полупростой K-группы G

$$cl(T) \geqslant \frac{cl(G)}{[\text{Ш}(T)]\,[H^1(\Pi, \hat{T}_1)]}.$$

Отсюда легко получить существование такой константы M, зависящей только от бирациональных свойств группы G, что $\min\limits_{T \subset G} cl(T) \geqslant \frac{1}{M} cl(G)$. В [84] строятся примеры, показывающие, что оценок противоположного характера, т. е. типа $cl(G) \geqslant \frac{1}{M} \min\limits_{T \subset G} cl(T)$, не существует.

Некоторые оценки чисел классов торов получены также в [27, 341].

§ 2.5. Проблема рода

Проблема рода заключается в вычислении числа классов в роде, измеряющего отклонение от локально глобального принципа в вопросах эквивалентности различных объектов арифметического типа. Классическим инвариантом такой природы, восходящим, фактически, к Лагранжу и Гауссу, является число классов в роде квадратичной формы. К настоящему времени проблема рода не исследована до конца ни для одного класса арифметических объектов, однако в ряде случаев здесь был достигнут определенный прогресс.

Прежде всего, развитые в [84, 85] методы вычисления чисел классов алгебраических групп позволили решить задачу о числе классов в роде решеток на полной матричной алгебре относительно сопряженности. Напомним, что две решетки $L, N \subset M(n, K)$ принадлежат одному роду, если их локализации L_v, N_v сопряжены при помощи элемента из $GL(n, K_v)$ для всех $v \in V_f^K$, и одному классу, если L, N сопряжены при помощи элемента из $GL(n, K)$. Полное описание чисел $c(L)$ классов в роде здесь дает следующее утверждение из [85]. Пусть $n = p_1^{\gamma_1} \ldots p_r^{\gamma_r}$ — каноническое разложение числа n, тогда для любой решетки $L \subset M(n, K)$ число $c(L)$ имеет вид $p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}$. Обратно, для любого числа $p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}$ существует такая решетка $L(\beta_1, \ldots, \beta_r) \subset M(n, K)$, что $c(L(\beta_1, \ldots, \beta_r)) = p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}$. При четном n 2-компонента была также вычислена в [55]. Отметим связь этих результатов с упоминавшейся в 2.4 проблемой нахождения представления минимальной степени, в котором реализуются все априори возможные числа классов $cl(\varphi(G))$: здесь мы на самом деле имеем решение этой задачи для присоединенной реализации проективной группы $G = PGL(n, \mathbf{C})$. Некоторое обобщение рассуждений из [85] позволяет получить аналогичный результат для присоединенных реализаций всех неопределенных классических групп (см. [9]).

Развитая техника подсчета чисел классов была применена также к проблеме рода в арифметических группах. Пусть G — связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$, $G_{\mathbf{Z}}$ — группа единиц. Говорят, что элементы $a, b \in G_{\mathbf{Z}}$ принадлежат одному роду, если они сопряжены в группах $G_{\mathbf{Q}}$ и $G_{\mathbf{Z}_p}$ для всех простых p, и одному классу, если они сопряжены в $G_{\mathbf{Z}}$. Для всякого $a \in G_{\mathbf{Z}}$ обозначим через $[a]_G$ множество элементов, принадлежащих тому же роду, что и a, и пусть $f_G(a)$ — число классов, на которые распадается G-род $[a]_G$ элемента a (конечность $f_G(a)$ следует из теоремы конечности для числа двойных классов). Проблема рода здесь заключается в изучении свойств функции $f_G(a)$ $(a \in G_{\mathbf{Z}})$.

При исследовании проблемы рода для полупростых групп основной интерес представляет вопрос о том, является ли функция f_G ограниченной на $G_{\mathbf{Z}}$ или нет. В 1971 году первым из авторов было показано, что f_G не является ограниченной на любой арифметической подгруппе $H \subset G_{\mathbf{Z}}$, если G — $\mathbf{Q}$-изотропна, и сформулирована гипотеза, что аналогичный результат имеет место и для $\mathbf{Q}$-анизотропных групп, при том естественном условии, что группа $G_{\mathbf{Z}}$ бесконечна, т. е. группа вещественных точек $G_{\mathbf{R}}$ должна быть некомпактной. Для ортогональных и унитарных групп над $\mathbf{Q}$ эта гипотеза была подтверждена в [53, 54]. Доказательство гипотезы в общей ситуации было получено А. С. Рапинчуком [97].

Наконец, укажем на полученную в [98] характеризацию чисел классов в роде положительно определенных квадратичных форм. Описание чисел классов $c(f)$ в роде неопределенных квадратичных форм хорошо известно (см. Kneser M., Arch. Math., 1956, 7, 323—332 (РЖМат, 1958, 976)): если $\dim f \geqslant 3$, то $c(f)$ имеет вид 2^d, причем любая степень двойки реализуется как $c(g)$ для подходящей формы g, рационально эквивалентной f. В то же время получить достаточно общую характеризацию чисел классов положительно определенных форм долгое время не удавалось. Прогресс здесь был достигнут совсем недавно (см. [98]). На основе адельных вычислений было показано, что для любой положительно определенной формы f размерности $\dim f \geqslant 2$ над вполне вещественным полем K и любого натурального числа d существует такая форма f_d, K-эквивалентная форме f, что $c(f_d)$ делится на d.

§ 2.6. Классификация максимальных арифметических подгрупп

Проблема описания максимальных арифметических подгрупп в алгебраических группах восходит к Гурвицу и Гекке. Число относящихся к этой проблеме работ довольно значительно, однако большинство из них было опубликовано до 1974 года и вошло в обзор [68] (см. также [82]). Поэтому здесь мы отметим лишь небольшое число дальнейших результатов.

В идейном плане полная классификация максимальных арифметических подгрупп была получена В. П. Платоновым (см. [68]) посредством редукции к локальному случаю и использованию результатов Брюа и Титса о структуре групп над неархимедовыми полями. Для разложимых групп над $\mathbf{Q}$ эта классификация вообще имеет окончательный характер. На основе этого подхода А. А. Бондаренко [5—8] получил явное описание максимальных арифметических подгрупп в разложимых ортогональных группах. Сюда же относятся и работы Аллана [129—130].

Рольфс в работе [329] усовершенствовал метод В. П. Платонова и получил классификацию максимальных арифметических подгрупп в разложимых группах над произвольным полем алгебраических чисел K. Кроме того, Рольфс [327] вычислил в когомологической форме факторгруппу $N_G(H)/H$, где H — максимальная арифметическая подгруппа группы K-точек G_K.

§ 2.7. Конгруэнц-проблема

Пусть G — линейная алгебраическая группа, определенная над глобальным полем K, S — конечное множество V^K, содержащее V^K_∞. Конгруэнц-проблема в классической постановке может быть сформулирована следующим образом: всякая ли подгруппа конечного индекса в $G_{O(S)}$ является S-конгруэнц-подгруппой, т. е. содержит подгруппу вида

$$G_{O(S)}(\mathfrak{A})=\{x\in G_{O(S)} \mid x\equiv e \pmod{\mathfrak{A}}\},$$

где $\mathfrak{A}\subset O(S)$ — ненулевой идеал. На $G_{O(S)}$ можно ввести две хаусдорфовы топологии, определяемые, соответственно, подгруппами конечного индекса и S-конгруэнц-подгруппами. Эти топологии естественным образом индуцируют топологии на группе G_K. Пусть $\hat{G}_K$ и $\bar{G}_K$ — пополнения G_K соответственно в топологии подгрупп конечного индекса и S-конгруэнц-топологии. Тогда существует канонический сюръективный непрерывный гомоморфизм $\pi_S:\hat{G}_K\to\bar{G}_K$. Ядро $\operatorname{Ker}\pi_S$ называется конгруэнц-ядром и обозначается через $C^S(G_K)$. Это — проконечная группа, измеряющая отклонение от положительного решения конгруэнц-проблемы в классической постановке. Вообще говоря, $C^S(G_K)\neq 1$, поэтому в современной постановке конгруэнц-проблема формулируется как проблема вычисления ядра $C^S(G_K)$. В первую очередь здесь необходимо выяснить, когда $C^S(G_K)$ является тривиальным или конечным, и когда бесконечным. Уже довольно давно известно (см. [82]), что в этих вопросах основным является случай K-простых односвязных групп. В этой ситуации существует так называемая конгруэнц-гипотеза, принадлежащая Серру*: пусть G — односвязная простая алгебраическая группа над глобальным полем K; тогда конгруэнц-ядро $C^S(G_K)$ конечно, если $\sum\limits_{v\in S}\operatorname{rang}_{K_v}G\geqslant 2$ и $\operatorname{rang}_{K_v}G>0$ для всех $v\in S\setminus V^K_\infty$; и $C^S(G_K)$ бесконечно при $\sum\limits_{v\in S}\operatorname{rang}_{K_v}G=1$. Классические результаты по конгруэнц-проблеме, принадлежащие Бассу — Лазару — Серру (1965), Меннике (1965), Мацумото (1969), Серру (1970), подтверждают эту гипотезу. К настоящему времени наиболее общие условия конечности $C^S(G_K)$ были получены Рагунатаном [319]. В предположении, что $\operatorname{rang}_K G>1$, им показано, что $C^S(G_K)$ является конечной группой, если K — поле алгебраических чисел; если же $\operatorname{char} K=p>0$, то силовская p-подгруппа группы $C^S(G_K)$ имеет в ней конечный индекс. Кроме того, Рагунатан показал, что при $\operatorname{rang}_K G>1$ любой нецентральный нормальный делитель произвольной S-арифметической подгруппы имеет в ней конечный индекс. Последний результат содержится в значительно более общей теореме Г. А. Маргулиса (см. [50, 51]): если H — произвольная, S-арифметическая подгруппа K-простой алгебраической группы G, причем $\sum\limits_{v\in S}\operatorname{rang}_{K_v}G\geqslant 2$, то любая нормальная подгруппа H либо имеет конечный индекс, либо является конечной центральной подгруппой.

Для спинорных групп $G=\operatorname{Spin}_n(f)$, где f — невырожденная квадратичная форма размерности n, конгруэнц-проблема была исследована Кнезером [255]. В основном тексте статьи им доказано, что при $n\geqslant 8$ и $\sum\limits_{v\in S}\operatorname{rang}_{K_v}G\geqslant 2$ $C^S(G_K)$ лежит в центре $\hat{G}_K$, а в примечаниях при корректуре указано, что эта теорема распространяется и на все размерности $n\geqslant 5$ (отметим, что пока это единственный результат о центральности конгруэнц-ядра, в котором допускаются анизотропные группы). Если дополнительно известно, что форма f является K-изотропной, то в [255] дано исчерпывающее вычисление $C^S(G_K)$.

В [179] теорема Мацумото о конгруэнц-ядре для групп Шевалле была обобщена на квазиразложимые группы. Результат здесь следующий: если G — квазиразложимая простая группа над глобальным полем K, причем $\operatorname{rang}_K G\geqslant 2$, то

$$C^S(G_K)=\begin{cases}\text{подгруппа } \mu_K, & \text{если } S \text{ вполне мнимо,}\\ (1), & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где μ_K — группа корней из 1 в K.

Бэком [135] анонсировано решение конгруэнц-проблемы для большинства изотропных и классических групп, при этом случай $G_K=SL(n, D)$, $n>1$, где D — конечномерное тело с центром K, был разобран ранее в совместной работе с Рехманом [136]*. Отметим, что для $G_K=SL(1, D)$ конгруэнц-проблема остается пока нерешенной (даже в случае, когда D — тело кватернионов).

---

* Серр Ж.-П., Проблема конгруэнц-подгрупп для SL_2. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1971, *15*, № 6, 12—45 (РЖМат, 1972, 2А566).

* Уже появилось развернутое изложение результатов работы [136] (см. Bak A., Rehman U., The congruence subgroup and metaplectic problems for $SL_n\geqslant 2$ of division algebras. J. Algebra, 1982, *78*, № 2, 475—547).

Значительно меньше удалось пока сделать в случае, когда $\sum_{v\in S}\operatorname{rang}_{K_v} G = 1$.

Бесконечность группы $C^S(G_K)$ в этих условиях доказана Серром для группы $SL(2)$, а точная структура конгруэнц-ядра известна лишь для группы $G_{\mathbf{Q}}=SL(2, \mathbf{Q})$, $S=\{\infty\}$ (см. О. В. Мельников [56]). В этом последнем случае $C^{\{\infty\}}(SL(2, \mathbf{Q}))$ — свободная проконечная группа счетного ранга, что доказывается, исходя из свободы конгруэнц-подгрупп-$SL(2, \mathbf{Z})(m)$ уровня $m\geqslant 3$. В настоящее время появилась реальная возможность перенести этот результат на группу $SL(2, K)$ над мнимым квадратичным полем $K=\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, ибо вначале Циммерт [389] для некоторых значений d, а затем Груневальд — Швермер [203] в общем случае доказали следующую теорему: для всякого порядка R поля K в группе $SL(2, R)$ имеется подгруппа H конечного индекса с неабелевой свободной факторгруппой.

§ 2.8. Группы рациональных точек над глобальными полями

Пусть G — K-простая алгебраическая группа, определенная над произвольным полем K. Исследование структуры группы G_K представляет важную и в общем случае очень трудную проблему. Если группа G односвязна и K-изотропна, то основной проблемой здесь с 1964 г. была гипотеза Кнезера—Титса (см. 1.1). После полученного первым автором в 1975 г. отрицательного ответа на эту гипотезу (см. 1.1) стало ясно, что необходимо резко ограничить класс рассматриваемых полей K.

Как уже отмечалось в 1.1, гипотеза Кнезера—Титса доказана в настоящее время для недискретных локально компактных и глобальных полей K.

В то же время для K-анизотропных групп G к настоящему времени мало что известно о строении группы G_K. Один из ключевых возникающих здесь вопросов: когда группа $G_K/c(G_K)$ проста? Даже для минимального случая трехмерной группы G имеются пока непреодолимые трудности. Более обнадеживающей является ситуация для глобального поля K, так как здесь существует следующая правдоподобная гипотеза (см. [70]): группа $G_K/c(G_K)$ тогда и только тогда проста, когда для всех $v\in V_f^K$ просты локальные группы $G_{K_v}/c(G_{K_v})$. Эквивалентная форма этой гипотезы: если G — K-простая односвязная K-группа, то группа $G_K/c(G_K)$ проста как абстрактная группа тогда и только тогда, когда для всех $v\in V_f^K$ группа G является K_v-изотропной. Отметим тесную связь обсуждаемой гипотезы с конгруэнц-проблемой, а также тот факт, что она содержит гипотезу Кнезера—Титса над глобальным полем в качестве частного случая. Долгое время единственным результатом, относящимся к анизотропному случаю гипотезы была теорема Кнезера 1956 года о простоте группы $G_K/c(G_K)$ для спинорной группы $G=\operatorname{Spin}_n(f)$, соответствующей квадратичной форме f над числовым полем K размерности $n\geqslant 5$. Из оставшихся случаев $n=3, 4$ в рассмотрении нуждается фактически лишь $n=3$, ибо структура $\operatorname{Spin}_4(f)$ определяется структурой $\operatorname{Spin}_3(g)$. Для $\operatorname{Spin}_3(f)$ сформулированная выше гипотеза была высказана Кнезером еще в 1956 г., и до недавнего времени ее не удавалось доказать.

Решающий шаг здесь был сделан в работе [87], где развита мультипликативная арифметика тел кватернионов D над полями алгебраических чисел, примененная затем к описанию коммутанта группы $\operatorname{Spin}_3(f)\simeq SL(1, D)$. Основной результат из [87] может быть сформулирован в виде следующей теоремы: Пусть D — алгебра кватернионов над полем алгебраических чисел K; группа $SL(1, D)$ тогда и только тогда совпадает со своим коммутантом, когда для неархимедовых нормирований v поля K $D_v=D\otimes_K K_v$ является полной матричной алгеброй $M(2, K_v)$; более того, при выполнимости последнего условия каждый элемент из $SL(1, D)$ есть произведение не более трех своих коммутаторов. Использование методов работы [87] позволило впоследствии полностью доказать гипотезу Кнезера (см. [52]).

Недавно методы и результаты работы [87] были перенесены на тела произвольного индекса (см. [88]). Итак, пусть теперь D — тело индекса n над полем K алгебраических чисел, T — совокупность тех неархимедовых нормирований v поля K, для которых $D_v=D\otimes_K K_v$ является телом. Тогда, если $v(n)=0$ для $v\in T$, то коммутант $[D^{(1)}, D^{(1)}]$ группы $D^{(1)}=SL(1, D)$ может быть описан следующим образом:

$$[D^{(1)}, D^{(1)}]=D^{(1)}\cap\prod_{v\in T}[D_v^{(1)}, D_v^{(1)}];$$

в частности, если $T=\varnothing$, то $D^{(1)}=[D^{(1)}, D^{(1)}]$. Кроме того, в [88] получены некоторые результаты о нормальных делителях $D^{(1)}$, порожденных циклическими подполями (в [90] был исследован локальный вариант этой проблемы).

Отметим, что исследованная в [88] ситуация является несколько более общей, чем в обсуждавшейся выше гипотезе, ибо допускаются группы G типа $SL(1, D)$ с компактными пополнениями G_{K_v} для неархимедовых v. Чтобы охватить и эту ситуацию, основная гипотеза была несколько обобщена Г. А. Маргулисом в [51]: пусть G — односвязная K-простая группа над глобальным полем K, $T=\{v\in V_f^K \mid G_{K_v}$ — компактна$\}$; тогда для любого нецентрального нормального делителя $N\subset G_K$ найдется такой открытый нормальный делитель $W \subset G_T = \prod_{v \in T} G_{K_v}$, что $N = G_K \cap W$. В такой форме гипотеза была подтверждена в [52] для групп $SL(1, D)$, D — тело кватернионов.

Выше были приведены все основные результаты об описании нормальных делителей групп рациональных точек над глобальными полями. Ситуация здесь только начинает проясняться. Однако с качественной стороны имеется следующий законченный результат (Маргулис [51]): для односвязной K-простой группы G над глобальным полем K любой нецентральный нормальный делитель $H \subset G_K$ имеет конечный индекс.

§ 2.9. Когомологии Галуа и принцип Хассе

Основные результаты о когомологиях Галуа вошли в [68], поэтому здесь мы упомянем лишь последние результаты в этом направлении.

Изучение когомологий Галуа над глобальными полями базируется на рассмотрении естественного отображения $\theta: H^1(K, G) \to \prod_{v \in V^K} H^1(K_v, G)$ и исследовании его ядра $\operatorname{Ker}\theta$, которое конечно и обозначается через $Ш(G)$. В общем случае $Ш(G) \neq 1$ даже для полупростых групп, однако для полупростых односвязных групп G к настоящему времени почти доказано, что всегда $Ш(G) = 1$ (Хардер). «Почти» означает: за исключением групп типа E_8 над числовыми полями. Над функциональными полями тривиальность группы $Ш(G)$ доказана полностью (см. [213, 214]). Если $Ш(G) = 1$, то говорят, что для группы G выполняется принцип Хассе, и в этом случае часто можно полностью описать $H^1(K_v, G)$. Так, если группа G односвязна, то $H^1(K_v G) = 1$ для всех $v \in V_f^K$, поэтому рассмотрение θ равносильно рассмотрению $\theta_\infty: H^1(K, G) \to \prod_{v \in V_\infty^K} H^1(K_v, G)$. Отображение θ_∞ всегда сюръективно (см. [157]), в силу чего условие $Ш(G) = 1$ здесь эквивалентно биективности отображения θ_∞. В частности, если поле K является функциональным или вполне мнимым, то $H^1(K_v, G) = 1$ для всех $v \in V^K$ и $H^1(K, G) = 1$.

Когомологии Галуа алгебраических торов изучаются в книге В. Е. Воскресенского [22]. Здесь $Ш(T)$ является конечной абелевой группой, называемой группой Шафаревича — Тейта тора T. Как заметил Оно, для норменного тора $T = R^{(1)}_{L/K}(G_m)$, соответствующего расширению полей L/K, тривиальность группы $Ш(T)$ равносильна выполнимости в расширении L/K классического норменного принципа Хассе. В этой связи отметим следующий факт (см. [82, 143]): если L/K — расширение простой степени, то для L/K выполняется норменный принцип Хассе, т. е. $Ш(R^{(1)}_{L/K}(G_m)) = 1$.

Укажем также на следующий результат, полученный при изучении группы $SL(1, D)$ над числовыми полями (см. [88]): пусть $G = SL(n, \mathbf{C})$ и $\mathcal{T}$ — многообразие максимальных торов группы G; тогда для любого двухэлементного подмножества $S \subset V_f^K$ найдется такое открытое подмножество $W \subset \mathcal{T}_S = \prod_{v \in S} \mathcal{T}_{K_v}$, что $Ш(T) = 1$ при $T \in \mathcal{T}_K \cap W$. Неизвестно, справедливо ли аналогичное утверждение для произвольной полупростой группы G, даже если ограничиться более слабой формулировкой: существует конечное подмножество $S \subset V_f^K$ и открытое подмножество $W \subset \mathcal{T}_S$, для которых $Ш(T) = 1$ при $T \in \mathcal{T}_K \cap W$.

§ 2.10. Когомология арифметических подгрупп

Работы последних лет обнаруживают новые тенденции в исследованиях по когомологиям арифметических и S-арифметических подгрупп. Предшествующие работы были связаны главным образом, с выяснением качественной стороны вопроса и концентрировались вокруг проблем, связанных с вычислением таких когомологических инвариантов, как когомологическая размерность, характеристика Эйлера—Пуанкаре и т. п. Основные результаты здесь принадлежат Борелю, Серру, Хардеру и Рагунатану (см., в частности, [106, 107, 115, 158, 215]); их изложение содержится в докладах [153] и [337] (см. также обзоры [68, 82]). В последующих работах центр тяжести переносится на непосредственное вычисление самих групп когомологий $H^i(\Gamma, M)$ с коэффициентами в Γ-модуле M. Как и раньше, используется действие группы Γ на некотором топологическом пространстве X и связь когомологий Γ с когомологиями пространства X/Γ. В ряде случаев при этом удается определить клеточное действие группы Γ на подходящем явно заданном CW-комплексе, что и приводит к явным когомологическим вычислениям. Типичный пример — работа Мендозы [292], в которой изучаются когомологии подгрупп Γ конечного индекса группы $PGL(2, O)$, где O — кольцо целых мнимого квадратичного поля. Когомологические инварианты группы Γ могут быть вычислены при помощи стандартного действия группы Γ на трехмерном пространстве Лобачевского Λ^3, однако для явного вычисления когомологий это действие не подходит, ибо размерность пространства Λ^3 превосходит когомологическую размерность группы Γ (равную двум). В связи с этим Мендоза строит двумерный подкомплекс в Λ^3, на котором индуцированное действие группы Γ обладает рядом хороших свойств, и используя свою конструкцию, вычисляет когомологии группы Γ. Конструкция соответствующих комплексов для групп $SL(n, \mathbf{Z})$

($n \geqslant 3$), а также получаемые с их помощью когомологические вычисления содержатся в [134, 344], для группы $SL(n, \mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$ — в [298].

Вычисление когомологий арифметических подгрупп тесно связано с изучением представлений содержащих их групп Ли, однако мы здесь не будем рассматривать эту весьма специальную теорию, отсылая к книге Бореля и Уолаха [161], а также к работам [155, 156, 346].

Отметим в заключение два факта о когомологиях S-арифметических групп над функциональными полями. Хардер [216] показал, что если K — функциональное глобальное поле, $S \subset V^K$ — конечное подмножество и Γ — конгруэнц-подгруппа группы $G_{O(S)}$ (G — группа Шевалле над K в канонической реализации), то $H^i(\Gamma, \mathbf{Q}) = 0$, если $i \neq 0$ и $i \neq r[S]$, где r — ранг G.

Штулер [359] рассматривает арифметические подгруппы Γ группы $PGL(2, O(S))$ и доказывает для них гипотезу Серра о том, что Γ является $(FP)_{[S]-1}$-группой, но не является $(FP)_{[S]}$-группой (группа Γ называется $(FP)_n$-группой, если тривиальный Γ-модуль $\mathbf{Z}$ обладает резольвентой $0 \leftarrow \mathbf{Z} \leftarrow P_0 \leftarrow \ldots \ldots \leftarrow P_n \leftarrow P_{n+1}$ из проективных $\mathbf{Z}[\Gamma]$-модулей, в которой модули P_i являются конечно порожденными для $i \leqslant n$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамович О. М.*, Равноразмерные представления простых алгебраических групп. Геометрич. методы в задачах алгебры и анализа. Ярославль, 1980, 120—125 (РЖМат, 1981, 8А452)
2. *Алексеевский А. В.*, Группы компонент централизаторов унипотентных элементов в полупростых алгебраических группах. Тр. Тбилис. мат. ин-та. АН ГрузССР, 1979, *62*, 5—27 (РЖМат, 1980, 2А465)
3. *Башмаков М. И., Чистов А. Л.*, О рациональности некоторого класса торов. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1978, *148*, 27—29 (РЖМат, 1979, 1А512)
4. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И.*, Новая модель представлений конечных полупростых алгебраических групп. Успехи мат. наук, 1974, *29*, № 3, 185—186 (РЖМат, 1975, 2А474)
5. *Бондаренко А. А.*, К проблеме максимальности арифметических подгрупп в ортогональных группах типа B_n. Мат. заметки, 1974, *16*, № 1, 151—161 (РЖМат, 1974, 11А522)
6. —, К классификации максимальных арифметических подгрупп в ортогональных группах типа (D_l). Докл. АН БССР, 1974, *18*, № 9, 773—776 (РЖМат, 1975, 2А475)
7. —, Классификация максимальных арифметических подгрупп в ортогональных группах типа (D_l). Докл. АН БССР, 1975, *19*, № 11, 969—972 (РЖМат, 1976, 4А431)
8. —, К классификации максимальных арифметических подгрупп в разложимых группах. Мат. сб., 1977, *102*, № 2, 155—172 (РЖМат, 1977, 7А430)
9. —, Числа и группы классов полупростых неопределенных алгебраических групп в канонических реализациях. Докл. АН БССР, 1981, *25*, № 9, 773—776 (РЖМат, 1982, 1А570)

10. —, *Рапинчук А. С.*, К оценке числа двойных классов групп аделей алгебраических групп. Докл. АН БССР, 1978, *22*, № 5, 397—400 (РЖМат, 1978, 10А358)
11. *Бродский И. Б.*, Об инвариантах унипотентных групп. Успехи мат. наук, 1976, *31*, № 1, 243—244 (РЖМат, 1976, 8А596)
12. *Винберг Э. Б.*, О линейных группах, связанных с периодическими автоморфизмами полупростых алгебраических групп. Докл. АН СССР, 1975, *221*, № 4, 767—770 (РЖМат, 1975, 9А358)
13. —, О замыкании орбиты редуктивной линейной группы. Алгебра, М., 1980, 31—36 (РЖМат, 1981, 4А428)
14. —, Рациональность поля инвариантов треугольной группы. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1982, № 2, 23—24 (РЖМат, 1982, 7А512)
15. *Воскресенский В. Е.*, О слабой аппроксимации в алгебраических группах. Исслед. по теории чисел. Вып. 4. Саратов, Саратов. ун-т, 1972, 3—7 (РЖМат, 1973, 2А378)
16. —, Стабильная эквивалентность алгебраических торов. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, *38*, № 1, 3—10 (РЖМат, 1974, 6А561)
17. —, Некоторые вопросы бирациональной геометрии алгебраических торов. Proc. Int. Congr. Math., Vancouver, 1974. V. 1. S. 1., 1975, 343—347 (РЖМат, 1976, 10А261)
18. —, О бирациональных инвариантах алгебраических торов. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 2, 207—208 (РЖМат, 1975, 9А361)
19. —, О модулях Пикара проективных моделей алгебраических торов. Исслед. по теории чисел. Вып. 5. Саратов, Саратов. ун-т, 1975, 14—21 (РЖМат, 1976, 8А579)
20. —, О модулях Пикара проективных моделей алгебраических торов II. Исслед. по теории чисел. Вып. 6. Саратов, Саратов. ун-т, 1975, 18—33 (РЖМат, 1976, 7А545)
21. —, Замечания к моей работе «Стабильная эквивалентность алгебраических торов». Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, *41*, № 1, 230 (РЖМат, 1977, 7А428)
22. —, Алгебраические торы. М., Наука, 1977, 224с. (РЖМат, 1978, 7А561К)
23. —, О приведенной группе Уайтхеда простой алгебры. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 6, 247—248 (РЖМат, 1978, 9А392)
24. —, Вопросы R-эквивалентности полупростых групп. Зап. науч. семинаров Ленингр. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *86*, 49—65 (РЖМат, 1979, 8А446)
25. —, О рациональности алгебраических торов. Исслед. по теории чисел. (Саратов), 1978, № 7, 10—19 (РЖМат, 1979, 8А449)
26. —, Проективные модели алгебраических торов. Семинар по арифметике алгебр. многообразий. Саратов, 1979, 4—7 (РЖМат, 1981, 1А467)
27. —, Целочисленные структуры в алгебраических торах и группы классов числовых полей. Семинар по арифметике алгебр. многообразий. Саратов, 1979, 8—15 (РЖМат, 1981, 1А468)
28. —, О линейных представлениях мультипликативной группы поля. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1980, *103*, 48—51 (РЖМат, 1981, 7А439)
29. —, Проективные инвариантные модели Демазюра. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1982, *46*, № 2, 195—210 (РЖМат, 1982, 7А508)
30. *Гриндлингер О. М.*, Интерпретация особых простых групп Ли и их параболических подгрупп. Алгоритм. пробл. теории групп и полугрупп. Тула, 1981, 95—102 (РЖМат, 1982, 7А547)
31. *Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д.*, Геометрическая теория инвариантов. М., Мир, 1974, 280с. (РЖМат, 1975, 1А471 К)
32. *Ершов Ю. Л.*, Нормирования тел и группа SK_1. Докл. АН СССР, 1978, *239*, № 4, 768—771 (РЖМат, 1979, 1А447)
33. *Жук И. К.*, О рациональности некоторых однородных пространств груп-

пы SO(q). Докл. АН БССР, 1982, *26*, № 9, 773—775 (РЖМат, 1983, 1А466)
34. *Залесский А. Е.*, Полупростые корневые элементы алгебраических групп. Ин-т мат. АН БССР. Препр., 1980, № 13, 23с., ил. (РЖМат, 1981, 5А389)
35. —, Линейные группы. Успехи мат. наук, 1981, *36*, № 5, 57—107 (РЖМат, 1982, 2А222)
36. *Кац В. Г.*, К вопросу об описании пространства орбит линейных алгебраических групп. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 6, 173—174 (РЖМат, 1976, 6А448)
37. —, Классификация простых алгебраических супергрупп. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 3, 214—215 (РЖМат, 1977, 11А409)
38. *Клячко А. А.*, О рациональности алгебраических торов. Исслед. по теории чисел. Вып. 5. Саратов, Саратов. ун-т, 1975, 93—96 (РЖМат, 1976, 8А580)
39. —, Модели Демазюра для специального класса торов. Семинар по арифметике алгебр. многообразий. Саратов, 1979, 32—37 (РЖМат, 1981, 1А471)
40. *Крючков А.*, Арифметические инварианты одного класса алгебраических торов. Изв. АН ЭстССР. Физ., мат., 1977, *26*, № 1, 9—12 (РЖМат, 1977, 9А393)
41. *Кунявский Б. Э.*, О торах с биквадратичным полем разложения. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, *42*, № 3, 580—587 (РЖМат, 1978, 12А748)
42. —, О бирациональной классификации торов малой размерности. Семинар по арифметике алгебр. многообразий. Саратов, 1979, 37—42 (РЖМат, 1981, 1А472)
43. —, Резольвенты для модулей характеров алгебраических торов. Приближен. методы мат. физ. Саратов, 1980, 88—92 (РЖМат, 1980, 9А421)
44. —, Бирациональные и арифметические свойства трехмерных торов. Куйбышев. ун-т. Куйбышев, 1981. 25с. Библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 9 окт. 1981 г., № 4746—81 Деп.) (РЖМат, 1982, 1А588 ДЕП)
45. *Липницкий В. А.*, К проблеме Таннака—Артина над специальными полями. Докл. АН СССР, 1976, *228*, № 1, 26—29 (РЖМат, 1976, 9А397)
46. *Маргулис Г. А.*, Арифметичность и конечномерные представления равномерных решеток. Функц. анализ и его прил., 1974, *8*, № 3, 77—78 (РЖМат, 1974, 12А300)
47. —, Арифметичность неравномерных решеток в слабо некомпактных группах. Функц. анализ и его прил., 1975, *9*, № 1, 35—44 (РЖМат, 1975, 6А570)
48. —, Дискретные группы движений многообразий неположительной кривизны. Proc. Int. Congr. Math. Vancouver, 1974, V. 2. S. 1., 1975, 21—34 (РЖМат, 1976, 9А415)
49. —, Коограниченные подгруппы в алгебраических группах над локальными полями. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 2, 45—57 (РЖМат, 1977, 11А416)
50. —, Факторгруппы дискретных подгрупп и теория меры. Функц. анализ и его прилож., 1978, *12*, № 4, 64—80 (РЖМат, 1979, 5Б854)
51. —, Конечность факторгрупп дискретных подгрупп. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 3, 28—39 (РЖМат, 1979, 12А506)
52. —, О мультипликативной группе алгебры кватернионов над глобальным полем. Докл. АН СССР, 1980, *252*, № 3, 542—546 (РЖМат, 1980, 9А420)
53. *Матвеев Г. В.*, Род элементов ортогональных групп. Мат. заметки, 1973, *13*, № 5, 695—702 (РЖМат, 1973, 9А403)
54. —, Род элементов унитарных групп. Докл. АН БССР, 1974, *18*, № 5, 391—393 (РЖМат, 1974, 9А501)
55. —, Принцип Хассе для решеток в полной матричной алгебре. Мат. заметки, 1981, *30*, № 6, 801—805 (РЖМат, 1982, 5А332)

56. *Мельников О. В.*, Конгруэнц-ядро группы $SL_2(\mathbf{Z})$. Докл. АН СССР, 1976, *228*, № 5, 1034—1036 (РЖМат, 1976, 11А520)
57. *Мерзляков Ю. И.*, Рациональные группы. М., Наука, 1980. 364с. (РЖМат, 1981, 4А396К)
58. *Милованов М. В.*, Определяемость разрешимых алгебраических групп плотными целочисленными подгруппами. Мат. заметки, 1975, *18*, № 5, 719—730 (РЖМат, 1976, 4А432)
59. *Нисневич Е. А.*, Неабелевы когомологии и теоремы конечности для целочисленных орбит полупростых групповых схем. Успехи мат. наук, 1974, *29*, № 3, 219—220 (РЖМат, 1975, 1А473)
60. —, Теоремы конечности для распадения целочисленных орбит алгебраических групп. Докл. АН БССР, 1974, *18*, № 9, 777—780 (РЖМат, 1975, 2А447)
61. —, Этальные когомологии, *T*-род и целочисленные орбиты аффинных групповых схем. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 3, 167—168 (РЖМат, 1975, 12А431)
62. —, Неабелевы когомологии и теоремы конечности для целочисленных орбит аффинных групповых схем. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, *39*, № 4, 773—795 (РЖМат, 1975, 12А432)
63. —, Аффинные однородные пространства и конечные подгруппы арифметических групп над функциональными полями. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 1, 73—74 (РЖМат, 1977, 8А457)
64. *Носков Г. А.*, Алгебраические группы с регулярными группами автоморфизмов. Мат. сб., 1977, *103*, № 3, 358—366 (РЖМат, 1977, 11А415)
65. *Онищик А. Л.*, Об одном классе подгрупп простых алгебраических групп. Вопр. теории групп и гомол. алгебры. Ярославль, 1981, 93—103 (РЖМат, 1982, 2А480)
66. —, О включениях между транзитивными алгебраическими группами. Изв. вузов. Мат., 1982, № 2, 28—35 (РЖМат, 1982, 7А489)
67. *Панюшев Д. И.*, О пространствах орбит конечных и связных линейных групп. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1982, *46*, № 1, 95—99 (РЖМат, 1982, 5А428)
68. *Платонов В. П.*, Алгебраические группы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 11 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)» М., 1974, 5—36 (РЖМат, 1974, 10А362)
69. —. Гипотеза Дьедонне и несюръективность накрытий алгебраических групп на *k*-точках. Докл. АН СССР, 1974, *216*, № 5, 986—989 (РЖМат, 1974, 11А519)
70. —, Арифметические и структурные проблемы в линейных алгебраических группах. Proc. Int. Congr. Math., Vancouver, 1974. V. 1. S. l., 1975, 471—476 (РЖМат, 1976, 12А438)
71. —, О проблеме Таннака—Артина. Докл. АН СССР, 1975, *221*, № 5, 1038—1041 (РЖМат, 1975, 11А469)
72. —, Проблема Таннака—Артина и группы проективных конорм. Докл. АН СССР, 1975, *222*, № 6, 1299—1302 (РЖМат, 1976, 1А446)
73. —, Проблема Таннака—Артина и приведенная *K*-теория. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, *40*, № 2, 227—261 (РЖМат, 1976, 12А473)
74. —, Замечания к моей работе «Проблема Таннака—Артина и приведенная *K*-теория». Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, *40*, № 5, 1198 (РЖМат, 1977, 4А413)
75. —, Об аппроксимации в алгебраических группах над произвольными полями. Докл. АН СССР, 1976, *229*, № 4, 804—807 (РЖМат, 1976, 12А507)
76. —, Приведенная *K*-теория и аппроксимация в алгебраических группах. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1976, *142*, 198—207 (РЖМат, 1977, 4А412)
77. —, О бесконечности приведенной группы Уайтхеда. Докл. АН СССР, 1976, *227*, № 2, 299—301 (РЖМат, 1976, 7А483)
78. —, Бесконечность приведенной группы Уайтхеда в проблеме Таннака—Артина. Мат. сб., 1976, *100*, № 2, 191—200 (РЖМат, 1977, 1А369)

79. —, Бирациональные свойства приведенной группы Уайтхеда. Докл. АН БССР, 1977, *21*, № 3, 197—198 (РЖМат, 1977, 8А416)
80. —, К проблеме рациональности спинорных многообразий. Докл. АН СССР, 1979, *248*, № 3, 524—527 (РЖМат, 1980, 3А373)
81. —, Бирациональные свойства спинорных многообразий. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1981, *157*, 161—169 (РЖМат, 1982, 2А152)
82. —, Арифметическая теория алгебраических групп. Успехи мат. наук, 1982, *37*, № 3, 3—54 (РЖМат, 1982, 10А385)
83. —, *Бондаренко А. А., Рапинчук А. С.*, Числа классов алгебраических групп. Докл. АН СССР, 1979, *245*, № 1, 28—31 (РЖМат, 1979, 7А481)
84. —, —, —, Числа и группы классов алгебраических групп. I. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, *43*, № 3, 603—627 (РЖМат, 1979, 9А418)
85. —, —, —, Числа и группы классов алгебраических групп. II. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, *44*, № 2, 395—414 (РЖМат, 1980, 8А402)
86. —, *Милованов М. В.*, Определяемость алгебраических групп арифметическими подгруппами. Докл. АН СССР, 1973, *209*, № 1, 43—46 (РЖМат, 1973, 7А438)
87. —, *Рапинчук А. С.*, О группе рациональных точек трехмерных групп. Докл. АН СССР, 1979, *247*, № 2, 279—282 (РЖМат, 1979, 11А397)
88. —, —, Мультипликативная структура тел над числовыми полями и принцип Хассе. Докл. АН СССР, 1982, *266*, № 3, 560—564 (РЖМат, 1983, 2А365)
89. —, *Черноусов В. И.*, О рациональности канонических спинорных многообразий. Докл. АН СССР, 1980, *252*, № 4, 796—800 (РЖМат, 1980, 9А419)
90. —, *Янчевский В. И.*, О гипотезе Хардера. Докл. АН СССР, 1975, *221*, № 4, 784—787 (РЖМат, 1975, 11А468)
91. —, —, О гипотезе Кнезера—Титса для унитарных групп. Докл. АН СССР, 1975, *225*, № 1, 48—51 (РЖМат, 1976, 4А430)
92. *Попов В. Л.*, Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, *38*, № 2, 294—322 (РЖМат, 1974, 7А620)
93. —, Классификация трехмерных аффинных алгебраических многообразий, квазиоднородных относительно алгебраической группы. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, *39*, № 3, 566—609 (РЖМат, 1975, 9А376)
94. —, Представления со свободным модулем ковариантов. Функц. анализ и его прил., 1976, *10*, № 3, 91—92 (РЖМат, 1977, 2А502)
95. —, Конструктивная теория инвариантов. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, *45*, № 5, 1100—1120 (РЖМат, 1982, 2А501)
96. *Рагунатан М.*, Дискретные подгруппы групп Ли. М., Мир, 1977, 320с. (РЖМат, 1977, 9А533)
97. *Рапинчук А. С.*, К гипотезе Платонова о роде в арифметических группах. Докл. АН БССР, 1981, *25*, № 2, 101—104 (РЖМат, 1981, 8А451)
98. —, Числа классов в роде квадратичных форм и алгебраические группы. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, *45*, № 4, 775—792 (РЖМат, 1981, 12А437)
99. *Саркисян Р. А.*, Алгоритмические вопросы для линейных алгебраических групп. I. Мат. сб., 1980, *113*, № 2, 179—216 (РЖМат, 1981, 2А450)
100. —, Алгоритмические вопросы для линейных алгебраических групп. II. Мат. сб., 1980, *113*, № 3, 400—436 (РЖМат, 1981, 2А451)
101. —, Об одной проблеме равенства для когомологий Галуа. Алгебра и логика (Новосибирск), 1980, *19*, № 6, 707—725 (РЖМат, 1981, 7А437)
102. Семинар по алгебраическим группам. М., Мир, 1973, 315 с. (РЖМат, 1974, 5А470К)
103. Семинар по арифметике алгебраических многообразий. Саратов, Саратов. ун-т, 1979, 45 с. (РЖМат, 1980, 9А429К)
104. *Серр Ж.-П.*, Деревья, амальгамы и SL_2. Математика. Период. сб. пер. ин. статей, 1974, *18*, № 1, 3—51 (РЖМат, 1974, 6А279)
105. —, Деревья, амальгамы и SL_2. Математика. Период. сб. пер. ин. статей, 1974, *18*, № 2, 3—27 (РЖМат, 1974, 9А245)

106. —, Когомологии дискретных групп. Математика. Период. сб. пер. ин. статей, 1974, *18*, № 3, 123—144 (РЖМат, 1974, 11А450)
107. —, Когомологии дискретных групп. Математика. Период. сб. пер. ин. статей, 1974, *18*, № 4, 3—33 (РЖМат, 1974, 11А451)
108. *Спрингер Т.*, Теория инвариантов. Математика. Нов. в зарубеж. науке (Москва), 1981, № 24, 191с., ил. (РЖМат, 1981, 7А442)
109. *Стейнберг Р.*, Лекции о группах Шевалле. М., Мир, 1975, 262с. (РЖМат, 1975, 11А304К)
110. *Сысоева Т. Ю.* Редуктивные линейные алгебраические группы, порожденные квазиотражениями. Сердика. Бълг. мат. списание, 1975(1976), *1*, № 3-4, 337—345 (РЖМат, 1976, 12А502)
111. *Томанов Г. М.*, Подгруппа Фраттини алгебраических групп. Докл. АН БССР, 1979, *23*, № 3, 205—208 (РЖМат, 1979, 8А430)
112. —, Подгруппа Фраттини и нормальные подгруппы алгебраических групп. Докл. АН БССР, 1981, *25*, № 6, (РЖМат, 1982, 2А500)
113. —, Обобщенные групповые тождества в линейных группах. Докл. АН БССР, 1982, *26*, № 1, 9—12 (РЖМат, 1982, 5А172)
114. *Хамфри Дж.*, Линейные алгебраические группы. М., Наука, 1980, 399с. (РЖМат, 1981, 2А433К)
115. *Хардер Г.*, Формула Гаусса—Бонне для дискретных арифметических групп. Математика. Период. сб. пер. ин. статей, 1974, *18*, № 6, 20—55 (РЖМат, 1975, 3А490)
116. *Черноусов В. И.*, О рациональности спинорных многообразий над полем рациональных чисел. Докл. АН БССР, 1981, *25*, № 4, 293—296 (РЖМат, 1981, 8А458)
117. *Чистов А. Л.*, О бирациональной эквивалентности торов с циклическим полем разложения. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1976, *64*, 153—158 (РЖМат, 1977, 5А346)
118. —, О числе образующих полугруппы классов алгебраических торов относительно стабильной эквивалентности. Докл. АН СССР, 1978, *242*, № 5, 1027—1029 (РЖМат, 1979, 2А320)
119. *Шаромет А. А.*, Абстрактные изоморфизмы разрешимых алгебраических групп. Докл. АН СССР, 1975, *223*, № 1, 53—55 (РЖМат, 1976, 3А437)
120. —, Группы автоморфизмов алгебраических групп. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1976, № 3, 5—11 (РЖМат, 1976, 11А511)
121. *Шафаревич И. Р.*, О некоторых бесконечномерных группах. II. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, *45*, № 1, 214—226 (РЖМат, 1981, 6А441)
122. *Эльбаради М. Т.*, Расширения алгебраических групп, транзитивных на проективных многообразиях. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 2, 229—230 (РЖМат, 1980, 9А427)
123. *Янчевский В. И.*, О приведенной унитарной *К*-теории. Докл. АН СССР, 1976, *229*, № 6, 1332—1334 (РЖМат, 1877, 1А375)
124. —, Приведенная унитарная *К*-теория и тела над гензелевыми дискретно нормированными полями. Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978, *42*, № 4, 879—918 (РЖМат, 1979, 2А282)
125. —, Приведенная унитарная *К*-теория. Приложения к алгебраическим группам. Мат. сб., 1979, *110*, № 4, 579—596 (РЖМат, 1980, 4А405)
126. *Abe E.*, A generalization of groups with a root data and coverings of the groups. Tsukuba J. Math., 1977, *1*, 7—26 (РЖМат, 1979, 1А493)
127. —, Coverings of twisted Chevalley groups over commutative rings. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1977, *A13*, № 366—382, 194—218 (РЖМат, 1977, 10А300)
128. Algebraische Gruppen. Tagungsber. Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1976, № 25, 1—14 (РЖМат, 1978, 9А412)
129. *Allan N. D.*, A note on the arithmetic of the orthogonal group. Rev. colomb. mat., 1973, *7*, № 2, 53—66 (РЖМат, 1974, 7А619)
130. —, A note on the arithmetic of the orthogonal group. II. Port. Math., 1974, *33*, № 3—4, 193—197 (РЖМат, 1975, 9А359)
131. *Andre P. P.*, *k*-regular elements in semisimple algebraic groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, Jan., *201*, 105—124 (РЖМат, 1975, 7А585)

132. *Anh N. H.*, Prehomogeneous vector space defined by a semisimple algebraic group. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, *81*, № 2, 402—406 (РЖМат, 1976, 2А552)
133. Arbeitsgemeinschaft über Kohomologie arithmetischer Gruppen. Tagunsber. Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1980, № 44, 1—7 (РЖМат, 1981, 11А397)
134. *Ash A.*, Cohomology of congruence subgroups of SL(n, **Z**). Math. Ann., 1980, *249*, № 1, 55—73 (РЖМат, 1981, 1А404)
135. *Bak A.*, Le problème des sous-groupes de congruence et le problème métaplectique pour les groupes classiques de rang >1. C. r. Acad. sci., 1981, sér. 1, *292*, № 5, 307—310 (РЖМат, 1981, 9А340)
136. —, *Rehmann U.*, Le probléme de sous-groupes de congruence dans $SL_{n\geqslant 2}$ sur un corps gauche. C. r. Acad. sci., 1979, *AB289*, № 3, A151 (РЖМат, 1980, 4А457)
137. *Bala P., Carter R. W.*, The classification of unipotent and nilpotent elements. Indag. math., 1974, *36*, № 1, 94—97 (РЖМат, 1974, 7А601)
138. —, —, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. I. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1976, *79*, № 3, 401—425 (РЖМат, 1976, 11А517)
139. —, —, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. II. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1976, *80*, № 1, 1—18 (РЖМат, 1977, 1А421)
140. *Ballard J. W.*, Some generalized characters of finite Chevalley groups. Math. Z., 1976, *147*, № 2, 163—174 (РЖМат, 1976, 10А161)
141. *Bartels H.-J.*, Zur Galoiskohomologie definiter arithmetischer Gruppen. J. reine und angew. Math., 1978, *298*, 89—97 (РЖМат, 1978, 12А747)
142. —, Definite arithmetische Gruppen. J. reine und angew. Math., 1978, № 301, 27—29 (РЖМат, 1979, 1А489)
143. —, Zur Arithmetik von Konjugationsklassen in algebraischen Gruppen. J. Algebra, 1981, *70*, № 1, 179—199 (РЖМат, 1981, 12А432)
144. —, *Kitaoka Y.*, Endliche arithmetische Untergruppen der GL_n. J. reine und angew. Math., 1980, *313*, 151—156 (РЖМат, 1980, 7А438)
145. *Behr H.*, Explizite Präsentation von Chevalleygruppen über *Z*. Math. Z., 1975, *141*, № 3, 235—241 (РЖМат, 1975, 10А263)
146. —, $SL_3(F_q[t])$ is not finitely presentable. London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1979, № 36, 213—224 (РЖМат, 1980, 6А478)
147. *Besson G.*, Groupe Lie *p*-adique, immeuble et cohomologie. Lect. Notes Math., 1981, *867*, 130—140 (РЖМат, 1982, 3А458)
148. *Bialynicki-Birula A.*, Some theorems on actions of algebraic gropus. Ann. Math., 1973, *98*, № 3, 480—497 (РЖМат, 1974, 5А483)
149. —, On fixed points of torus actions on projective varieties. Bull. Acad. pol. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1974, *22*, № 11, 1097—1101 (РЖМат, 1976, 2А556)
150. —, Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of torus. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1976, *24*, № 9, 667—674 (РЖМат, 1977, 7А437)
151. —, On algebraic action of SL(2). Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1978, *26*, № 4, 293—294 (РЖМат, 1979, 1А517)
152. —, On action of SL(2) on complete algebraic varieties. Pacif. J. Math., 1980, *86*, № 1, 53—58 (РЖМат, 1981, 3А446)
153. *Borel A.*, Cohomology of arithmetic groups. Proc. Intern. Congr. Math. Vancouver, 1974, *1*, S. l. 1975, 435—442 (РЖМат, 1977, 4А402)
154. —, Admissible representations of a semosimple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup. Invent. math., 1976, *35*, 233—259 (РЖМат, 1977, 4А443)
155. —, Cohomologie des sous-groupes discrets et representations des groupes semisimples. Asterisque, 1976, № 32—33, 73—112 (РЖМат, 1977, 4А403)
156. —, Stable and L^2-cohomology of arithmetic groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1980, *3*, № 3, 1025—1027 (РЖМат, 1981, 7А378
157. —, *Harder G.*, Existence of discrete cocompact subgroups of reductive groups over local fields. J. reine und angew. Math., 1978, *298*, 53—64 (РЖМат, 1978, 12А746)
158. —, *Serre J.-P.*, Cohomologie d'immeubles et de groupes *S*-arithmetiques. Topology, 1976, *15*, № 3, 211—232 (РЖМат, 1977, 2А430)
159. —, *Tits J.*, Homomorphismes «abstraits» de groupes algébriques simples. Ann. Math., 1973, *97*, № 3, 499—571 (РЖМат, 1974, 1А438)
160. —, —, Théorèmes de structure et de conjugasion pour les groupes algébriques linéaires. C. r. Acad. Sci., 1978, *AB287*, № 2, A55—A57 (РЖМат, 1979, 1А487)
161. —, *Wallach N.*, Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups. Ann. Math. Stud. 1980, № 94, 387pp. (РЖМат, 1981, 1А406К)
162. *Borho W., Kraft H.*, Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reductiver Gruppen. Comment. Math. helv., 1979, *54*, № 1, 61—104 (РЖМат, 1979, 7А485)
163. *Britto J.*, On defining a subgroup of the special linear group by a congruence. J. Indian Math. Soc., 1976, *40*, № 1—4, 235—243 (РЖМат, 1978, 4А364)
164. —, On the construction of non-congruence subgroups. Acta arithm., 1977, *33*, № 3, 261—267 (РЖМат, 1978, 4А365)
165. *Carter R. W.*, Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type. Proc. London Math., Soc., 1978, *37*, № 3, 491—507 (РЖМат, 1979, 8А158)
166. *Cassidy P. J.*, Differential algebraic groups. Amer. J. Math., 1972, *94*, № 3, 891—954 (РЖМат, 1973, 7А430)
167. —, The differential rational representation algebra on a linear differential algebraic group. J. Algebra, 1975, *37*, № 2, 223—238 (РЖМат, 1976, 5А446)
168. —, Unipotent differential algebraic groups. In: Contribution to Algebra. N. Y.-San Francisco-London, Academic Press, 1977, 88—115
169. *Chahal J. S.*, Solution of the congruence subgroup problem for solvable algebraic groups. Nagoya Math. J., 1980, *79*, 141—144 (РЖМат, 1981, 3А438)
170. *Cline E., Parshall B., Scott L.*, Induced modules and affine quotients. Math. Ann., 1977, *230*, 1—14 (РЖМат, 1978, 2А422)
171. —, —, —, Induced modules and extensions of representations. Invent. math., 1978, *47*, № 1, 41—51 (РЖМат, 1979, 1А491)
172. *Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J.*, Torseurs sous de groupes de type multiplicatif; applications a l'étude des points rationnels de certaines varietes algebriques. C. r. Acad. Sci., Sér. 1, *282*, № 18, 1113—1116 (РЖМат, 1977, 1А419)
173. —, —, La *R*-équivalence sur les tores. Ann. sci. Ecole norm. super., 1977, *10*, № 2, 175—229 (РЖМат, 1978, 2А426)
174. *Deligne P.*, Extensions centrales non résiduellement finites de groupes arithmetiques. C. r. Acad. Sci., 1978, *AB297*, № 4, A203—A208 (РЖМат, 1979, 4А181)
175. —, *Lusztig G.*, Representations of reductive groups over finite fields. Ann. Math., 1976, *103*, № 1, 103—161 (РЖМат, 1976, 10А263)
176. —, —, Duality for representations of a reductive group over a finite field. J. Algebra, 1982, *74*, № 1, 284—291 (РЖМат, 1982, 7А505)
177. *Demazure M.*, Automorphismes et déformations des variétés de Borel. Invent. math., 1977, *39*, № 2, 179—180 (РЖМат, 1977, 11А407)
178. *Deodhar V. V.*, On central extensions of rational points of algebraic groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, *81*, № 3, Part 1, 573—575 (РЖМат, 1976, 1А447)
179. —, On central extensions of rational points of algebraic groups. Amer. J. Math., 1978, *100*, № 2, 303—386 (РЖМат, 1979, 4А480)
180. *Deriziotis D. I.*, Centralizers of semisimple elements in Chevalley group. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 19, 1997—2014 (РЖМат, 1982, 7А497)

181. *Donkin S.*, Hopf complements and injective comodules for algebraic groups. Proc. London Math. Soc., 1980, *40*, № 2, 298—319 (РЖМат, 1980, 9А410)
182. —, Blocks of rational representations of semisimple algebraic group. Bull. Amer. Math. Soc., 1980, *3*, № 2, 867—869 (РЖМат, 1981, 4А414)
183. —, The blocks of a semisimple algebraic group. J. Algebra, 1980, *67*, № 1, 36—53 (РЖМат, 1981, 5А384)
184. *Douai J.-C.*, Cohomologie galoisienne des groupes semisimples definis sur les corps globaux. C. r. Acad. sci., 1975, Sér. 1, *281*, № 24, 1077—1080 (РЖМат, 1976, 8А521)
185. *Draxl P.*, SK_1 von Algebren über vollstandig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelescher Körpererweiterungen. J. reine und angew. Math., 1977, *293—294*, 116—142 (РЖМат, 1978, 6А419)
186. —, *Kneser M.*, SK_1 von Schiefkörpern. Lect. Notes Math., 1980, *778*
187. *Ekong S.-D.*, Sur les automorphismes de certains groupes algebriques affines semisimples. Publs Dép. math., 1974, *11*, № 3, 29—38 (РЖМат, 1975, 7А584)
188. —, Sur les groupes algebriques affines algebriquement complets. Publ. Dép. math., 1975, *12*, № 2, 71—81 (РЖМат, 1976, 6А438)
189. —, Some results on automorphisms of affine algebraic groups. J. Math. Phys., 1978, *19*, № 12, 2546—2554 (РЖМат, 1979, 7А480)
190. *Elkington G. B.*, Centralizers of unipotent elements in semisimple algebraic groups. J. Algebra, 1972, *23*, № 1, 137—163 (РЖМат, 1973, 4А563)
191. *Endo S., Miyata T.*, On a classification of the function fields of algebraic tori. Nagoya Math. J., 1975, *56*, 85—104 (РЖМат, 1975, 9А288)
192. *Fauntleroy A.*, Rational points of commutator subgroups of solvable algebraic groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, *194*, 249—275 (РЖМат, 1975, 4А495)
193. —, Defining normal subgroups of unipotent algebraic groups. Proc. Amer. Math., Soc., 1975, *50*, 14—19 (РЖМат, 1976, 5А444)
194. —, Automorphism groups of unipotent groups of Chevalley type. Pacif. J. Math., 1976, *66*, № 2, 373—390 (РЖМат, 1978, 1А412)
195. *Fine B., Tretkoff M.*, The SQ-universality of certain arithmetically defined linear groups. J. London Math., Soc., 1976, *13*, № 1, 65—68 (РЖМат, 1977, 2А501)
196. *Formanek E., Procesi C.*, Mumford's conjecture for the general linear group. Adv. Math., 1976, *19*, № 3, 292—305 (РЖМат, 1976, 12А504)
197. *Fossum R. M.*, Invariant theory, representation theory, commutative algebra-ménage à trois. Lect. Notes Math., 1981, *867*, 1—37 (РЖМат, 1982, 5А427)
198. *Gerardin P.*, Groupes reductifs et groupes resolubles. Lect. Notes Math., 1975, *466*, 79—85 (РЖМат, 1976, 3А449)
199. *Goto M.*, On an integer associated with an algebraic group. J. Math., Soc., Jap., 1977, *29*, № 1, 161—163 (РЖМат, 1977, 10А303)
200. *Gottlieb S. J.*, Algebraic automorphisms of algebraic groups with stable maximal tori. Pacif. J. Math., 1977, *72*, № 2, 461—470 (РЖМат, 1978, 6А474)
201. *Grosshans F.*, Observable groups and Hilbert's fourteenth problem. Amer. J. Math., 1973, *95*, № 1, 229—253 (РЖМат, 1974, 4А323)
202. —, Open sets of points with good stabilizers. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, *80*, № 3, 518—521 (РЖМат, 1975, 1А476)
203. *Grünewald F. J., Schwermer J.*, Free non-abelian quotients of SL_2 over orders of imaginary quadratic number fields. J. Algebra, 1981, *69*, № 2, 298—304 (РЖМат, 1981, 11А462)
204. —, —, A non-vanishing theorem for the cuspidal cohomology of SL_2 over imaginary quadratic integers. Math. Ann., 1981, *258*, № 2, 183—200 (РЖМат, 1982, 7А430)
205. —, *Segal D.*, A note on arithmetic groups. Bull. London Math. Soc., 1978, *10*, № 3, 297—302 (РЖМат, 1979, 8А441)

206. —, —, The solubility of certain decision problems in arithmetic and algebra. Bull. (New Ser.) Amer. Math., Soc., 1979, *1*, № 6, 915—918 (РЖМат, 1980, 6А217)
207. —, —, Some general algorithms. I. Arithmetic groups. Ann. Math., 1980, *112*, № 3, 531—583 (РЖМат, 1981, 8А189)
208. —, —, Some general aglorithms. II. Nilpotent groups. Ann. Math., 1980, *112*, № 3, 585—617 (РЖМат, 1981, 8А190)
209. —, —, Conjugacy of subgroups in arithmetic groups. Proc. London Math., Soc., 1982, *44*, № 1, 47—70 (РЖМат, 1982, 8А483)
210. *Haboush W. J.*, Deformation theoretic methods in the theory of algebraic transformation spaces. J. Math. Kyoto Univ., 1974, *14*, 341—370
211. —, Reductive groups are geometrically reductive. Ann. Math., 1975, *102*, № 1, 67—83 (РЖМат, 1976, 4А434)
212. —, Homogeneous vector bundles and reductive subgroups of reductive algebraic groups. Amer. J. Math., 1978, *100*, № 6, 1123—1137 (РЖМат, 1979, 11А410)
213. *Harder G.*, Chevalley groups over function fields and automorphic forms. Ann. Math., 1974, *100*, № 2, 249—306 (РЖМат, 1975, 6А568)
214. —, Über die Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen III. J. reine und angew. Math., 1975, *274—275*, 125—138 (РЖМат, 1976, 1А503)
215. —, On the cohomology of discrete arithmetically defined groups. Discrete subgroups Lie Groups and Appl. Moduli. Pap. Bombay Colloq. 1973, Oxford e. a., 1975, 129—160 (РЖМат, 1977, 2А436)
216. —, Die Kohomologie *S*-arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern. Invent. math., 1977, *42*, 135—175 (РЖМат, 1978, 4А303)
217. *Harris L. A., Kaup W.*, Linear algebraic groups in infinite dimensions. Ill. J. Math., 1977, *21*, № 3, 666—674 (РЖМат, 1978, 10А354)
218. *Herb R. A., O'Brian N. R.*, A characterization of unipotent semisimple and regular elements in a reductive algebraic group. Bull. London Math., Soc., 1976, *8*, № 3, 233—238 (РЖМат, 1977, 7А435)
219. *Hesselink W. H.*, Uniform instability in reductive groups. J. reine und angew. Math., 1978, № 303—304, 74—96 (РЖМат, 1979, 5А371)
220. *Hijikata H.*, On the structure of semisimple algebraic groups over valuation fields. I. Jap. J. Math., New ser., 1975, *1*, № 2, 225—300 (РЖМат, 1977, 9А504)
221. *Hirai T.*, On Richardson classes of unipotent elements in semisimple algebraic groups. Proc. Jap. Acad., 1981, *A57*, № 7, 367—372 (РЖМат, 1982, 5А411)
222. *Hochschild G. P.*, Automorphism towers of affine algebraic groups. J. Algebra, 1972, *22*, № 2, 365—373 (РЖМат, 1973, 1А401)
223. —, Lie algebra cohomology and affine algebraic groups. Ill. J. Math., 1974, *18*, № 1, 170—176 (РЖМат, 1974, 11А447)
224. —, Algebraic automorphism groups. Ill. J. Math., 1975, *19*, № 1, 131—144 (РЖМат, 1976, 3А452)
225. —, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras. New York e. a.: Springer, 1981, 267pp. (Grad. Texts Math., № 75) (РЖМат, 1982, 2А478К)
226. —, *Wigner D.*, Abstractly split group extensions. Pacif. J. Math., 1977, *68*, № 2, 447—453 (РЖМат, 1978, 6А465)
227. *Hochster M., Roberts J.*, Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen — Macaulay. Adv. Math., 1974, *13*, № 2, 115—175 (РЖМат, 1974, 11А479)
228. *Humphreys J. E.*, Ordinary and modular representations of Chevalley groups. Lect. Notes Math., 1976, *528*, 127 p., (РЖМат, 1977, 2А282)
229. —, On the hyperalgebra of a semisimple algebraic group. Contribution to Algebra. New York-San Francisco-London: Academic Press, 1977, 203—210

230. —, Hilbert's fourteenth problem. Amer. Math. Mon., 1978, *85*, № 5, 341—353 (РЖМат, 1979, 3А406)
231. —, Arithmetic groups. Lect. Notes Math., 1980, *789*, 158pp. (РЖМат, 1981, 2А435К)
232. —, *Jantzen J. C.*, Blocks and indecomposable modules for semisimple algebraic groups. J. Algebra, 1978, *54*, № 2, 494—503 (РЖМат, 1979, 5А368)
233. —, *Verma D. N.*, Projective modules for finite Chevalley groups. Bull. Amer. Math., Soc., 1973, *79*, № 3, 467—468 (РЖМат, 1974, 3А204)
234. *Hurrelbrink J.*, Endlich präsentierete arithmetische Gruppen und K_2 über Laurent—Polynomringen. Math., Ann., 1977, *225*, 123—129 (РЖМат, 1977, 9А430)
235. —, *Rehmann U.*, Zur endlichen Präsentation von Chevalley Gruppen über den euklidischen imaginärquadratischen Zahlringen. Arch. Math., 1976, *27*, № 2, 123—133 (РЖМат, 1976, 11А515)
236. *Iversen B.*, The geometry of algebraic groups. Adv. Math., 1976, *20*, № 1, 57—85 (РЖМат, 1976, 11А518)
237. —, Brauer group of a linear algebraic group. J. Algebra, 1976, *42*, № 2, 295—301 (РЖМат, 1977, 4А445)
238. *James D., Waterhouse W., Weisfeiler B.*, Abstract homomorphisms of algebraic groups: problems and bibliography. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 1, 95—114 (РЖМат, 1981, 8А424)
239. *Jantzen J. C.*, Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen und Zugeordnete kontravariante Formen. Bonn. math. Schr., 1973, № 67 (РЖМат, 1976, 3А448)
240. —, Darstellungen halbeinfacher Gruppen und kontravariante Formen. J. reine und angew. Math., 1977, *290*, 117—141 (РЖМат, 1977, 10А304)
241. —, Über Darstellungen höherer Frobenius-Kerne halbeinfacher algebraischer Gruppen. Math. Z., 1978, *164*, № 3, 271—292 (РЖМат, 1979, 7А479)
242. *Johnston D. S., Richardson R. W.*, Conjugacy classes in parabolic subgroups of semisimple algebraic groups II. Bull. London Math. Soc., 1977, *9*, № 3, 245—250 (РЖМат, 1978, 7А557)
243. *Jurkeiwicz J.*, An example of algebraic torus action which determines the nonfiltrable decomposition. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1977, *25*, № 11, 1089—1092 (РЖМат, 1978, 6А478)
244. *Kac V. G., Popov V. L., Vinberg E. B.*, Sur les groupes lineares algebriques dont l'algebre des invariants est libre. C. r. Acad. sci., 1976, Sér. 1, *283*, № 12, 875—878 (РЖМат, 1977, 6А325)
245. —, *Weisfeiler B.*, Coadjoint action of a semisimple algebraic group and the center of the enveloping algebra in characteristic p. Indag. Math., 1976, *38*, № 2, 136—151 (РЖМат, 1976, 11А514)
246. *Kallen W. L. J. van der,* Infinitesimally central extensions of Chevalley groups. Lect. Notes Math., 1973, *356*, 147pp. (РЖМат, 1974, 9А496)
247. *Kambayashi T.*, On certain algebraic groups attached to local number fields. J. reine und angew. Math., 1975, *273*, 41—48 (РЖМат, 1975, 10А351)
248. —, Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group action on an affine space. J. Algebra, 1979, *60*, № 2, 439—451 (РЖМат, 1980, 6А482)
249. *Kawanaka N.*, Unipotent elements and characters of finite Chevalley groups. Proc. Jap. Acad., 1975, *51*, № 3, 156—158 (РЖМат, 1976, 3А212)
250. —, Unipotent elements and characters of finite Chevalley groups. Osaka J. Math., 1975, *12*, № 2, 523—554 (РЖМат, 1976, 5А214)
251. *Kempf G. R.*, Instability in invariant theory. Ann. Math., 1978, *108*, № 2, 299—316 (РЖМат, 1979, 4А486)
252. —, Algebraic representations of reductive groups. Proc. Int. Congr. Math., Helsinki, 15—23 Aug., 1978. Vol. 2. Heusinki, 1980, 575—577 (РЖМат, 1982, 7А499)

253. —, Representations of algebraic groups in prime characteristics Ann. Sci. Ec. norm. supér., 1981, *14*, № 1, 61—76 (РЖМат, 1981, 10А394)
254. —, *Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B.*, Toroidal embedding. I. Lect. Notes Math., 1973, *339*, 309pp. (РЖМат, 1974, 7А621)
255. *Kneser M.*, Normalteiler ganzzahliger Spingruppen. J. reine und angew. Math., 1979, *311—312*, 191—214 (РЖМат, 1980, 5А432)
256. —, Erzeugung ganzzahliger orthogonaler Gruppen durch Spiegelungen. Math., Ann., 1981, *255*, № 4, 453—462 (РЖМат, 1982, 1А557)
257. *Kolchin E. R.*, Differential algebra and algebraic groups. New York, Acad. Press, 1973, 446pp. (РЖМат, 1974, 8А315К)
258. *Konarski J.*, Decompositions of normal algebraic varieties determines by an action of a one-dimensional torus. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1978, *26*, № 4, 295—300 (РЖМат, 1979, 1А518)
259. *Kraft H.*, Kommutative algebraische Gruppen und Ringe. Lect. Notes Math., 1975, *455*, 163 S. (РЖМат, 1976, 2А533)
260. —, Bahnenräume bei linearen Darstellungen reductiver Gruppen. Monogr. Enseign. math., 1978, № 26, 187—189 (РЖМат, 1979, 5А372)
261. *Kutz R. E.*, Cohen-Macaulay rings and ideal theory in rings of invariants of algebraic groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, *194*, 115—129 (РЖМат, 1975, 5А407)
262. Lai K. F., On the Tamagawa number of quasi-split groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1976, *82*, № 2, 300—302 (РЖМат, 1976, 12А506)
263. —, Tamagawa number of reductive algebraic groups. Compos. math., 1980, *41*, № 2, 153—188 (РЖМат, 1980, 12А455)
264. *Lee D. H.*, On the group of automorphisms of affine algebraic groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *237*, 145—152 (РЖМат, 1978, 12А735)
265. —, On conservative affine algebraic groups. J. Algebra, 1982, *74*, № 1, 241—245 (РЖМат, 1982, 7А495)
266. *Lehrer G. I.*, Characters, classes and duality in isogenous groups. J. Algebra, 1975, *36*, № 2, 278—286 (РЖМат, 1976, 3А217)
267. —, The Schur index of the *p*-regular characters of the Borel subgroup. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *76*, № 2, 196—198 (РЖМат, 1980, 6А468)
268. *Lenstra H. W.*, Jr., Rational functions invariant under a finite Abelian group. Invent. Math., 1974, *25*, № 3—4, 299—325 (РЖМат, 1975, 2А394)
269. —, Rational functions invariant under a cyclic group. Queen's Pap. Pure and Appl. Math., 1980, № 54, 91—99 (РЖМат, 1982, 2А362)
270. *Liehl B.*, On the group SL_2 over orders of arithmetic type. J. reine und angew. Math., 1981, *323*, 153—171 (РЖМат, 1981, 11А466)
271. *Lipsman R. L.*, Algebraic transformation groups and representation theory. Math. Ann., 1975, *214*, № 2, 149—157 (РЖМат, 1975, 9А360)
272. —, The CCR property for algebraic groups. Amer. J. Math., 1975, *97*, № 3, 741—752 (РЖМат, 1976, 8А577)
273. *Lubotsky A., Magid A.*, Cohomology of unipotent and prounipotent groups. J. Algebra, 1982, *74*, № 1, 76—95 (РЖМат, 1982, 7А494)
274. *Luna D.*, Adherences d'orbite et invariants. Invent. Math., 1975, *29*, № 3, 231—238 (РЖМат, 1976, 3А451)
275. —, *Vust T.*, Une théorème sur les orbites affines des groupes algebriques semisimple. Ann. Scuola norm. supér. Pisa. sci. fis. e mat., 1973(1974), *27*, № 3, 527—535 (РЖМат, 1974, 8А367)
276. *Lusztig G.*, Sur la conjecture de Macdonald C. r. Acad. sci., 1975, *280*, № 6, А317—А320 (РЖМат, 1975, 7А583)
277. —, On the finiteness of the number of unipotent classes. Invent. Math., 1976, *34*, № 3, 201—213 (РЖМат, 1977, 6А327)
278. —, Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius. Invent. math., 1976, *38*, № 2, 101—159 (РЖМат, 1977, 8А463)
279. —, On the unipotent characters of exceptional groups over finite fields. Invent. math., 1980, *60*, № 2, 173—192 (РЖМат, 1981, 2А223)
280. *Magid A. R.*, The universal group cover of a pro-affine algebraic group. Duke Math. J., 1975, *42*, № 1, 43—49 (РЖМат, 1975, 10А390)

281. —, Left algebraic groups. J. Algebra, 1975, *35*, № 1-3, 253—272 (РЖМат, 1976, 2A534)
282. —, Fundamental, Picard and class groups of rings of invariants. Can. J. Math., 1976, *28*, № 3, 659—664 (РЖМат, 1977, 1A424)
283. —, Covering spaces of algebraic groups. Amer. Math. Mon., 1976, *83*, № 8, 614—621 (РЖМат, 1977, 5A335)
284. —, Analytic subgroups of affine algebraic groups. Duke Math. J., 1977, *44*, № 4, 875—882 (РЖМат, 1978, 8A466)
285. —, Analytic left algebraic groups. Amer. J. Math., 1977, *99*, № 5, 1045—1059 (РЖМат, 1978, 10A352)
286. —, Analytic left algebraic groups. II. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *238*, 165—177 (РЖМат, 1979, 2A315)
287. —, Separately algebraic group laws. Amer. J. Math., 1978, *100*, № 2, 407—409 (РЖМат, 1979, 1A476)
288. —, Brauer groups of linear algebraic groups with characters. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *71*, № 2, 164—168 (РЖМат, 1979, 5A367)
289. *Margrave G.*, Special arithmetic subgroups of Chevalley groups. Amer. J. Math., 1979, *101*, № 6, 1285—1301 (РЖМат, 1980, 7A426)
290. *Markus L.*, Exponentials in algebraic matrix groups. Adv. math., 1973, *11*, № 3, 351—367 (РЖМат, 1974, 7A618)
291. *Meden F.*, Relèvement de représentations de l'algèbre de Lie d'un groupe linéare algébrique. C. r. Acad. sci., 1975, *280*, № 23, A1613—A1616 (РЖМат, 1976, 2A573)
292. *Mendoza E. R.*, Cohomology of PGL(2) over imaginary quadratic integers. Bonn. math. Schr. 1980, № 128 (РЖМат, 1981, 11A395)
293. *Meyer H.-M., Oberst U.*, Fixpunkt und Struktursätze für affine algebraische Gruppenschemata in charakteristik *p*. Math., Ann., 1977, *227*, № 1, 67—96 (РЖМат, 1977, 10A294)
294. *Minbashian F.*, The automorphism group of algebraic groups. J. Algebra, 1976, *43*, № 1, 122—128 (РЖМат, 1977, 8A476)
295. *Minrashian F.*, Pro-affine algebraic groups. Amer. J. Math., 1973, *95*, № 1, 174—192 (РЖМат, 1974, 3A330)
296. *Miyanishi M.*, On the algebraic fundamental group of an algebraic group. J. Math. Kyoto Univ., 1972, *12*, № 2, 351—367 (РЖМат, 1973, 4A566)
297. *Morgan C. L.*, Autoaddition formulae and algebraic groups. Aequat. math., 1976, *14*, № 3, 325—343 (РЖМат, 1977, 2A496)
298. *Moss K.*, Homology of $SL(n, \mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$. Duke Math. J., 1980, *47*, № 4, 803—818 (РЖМат, 1981, 9A311)
299. *Murase A.*, On the uniform distribution property of certain linear algebraic groups. Pacif., J. Math., 1980, *88*, № 1, 163—187 (РЖМат, 1981, 4A415)
300. *Nakao Z.*, Bi-algebraic groups. J. Algebra, 1979, *57*, № 1, 1—9 (РЖМат, 1979, 12A486)
301. *Nishikawa A.*, Note on morphisms of affine algebraic groups. Math. J. Okayama Univ., 1975, *18*, № 1, 31—34 (РЖМат, 1976, 9A409)
302. *Norman P.*, A fixed point criterion for linear reductivity. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *50*, 95—96 (РЖМат, 1976, 5A445)
303. *Oberst U.*, The use of representations in the invariant theory of not necessarily reductive groups. Lect. Notes Math., 1978, *641*, 112—127 (РЖМат, 1979, 1A515)
304. *Ohmori Z.*, On the Schur indices of reductive groups. Quart. J. Math., 1977, *28*, № 111, 357—361 (РЖМат, 1978, 4A199)
305. —, On the Schur indices of reductive groups. II. Quart. J. Math., 1981, *32*, № 128, 443—452 (РЖМат, 1982, 5A410)
306. *Ono T.*, A remark on Gaussian sums and algebraic groups. J. Math. Kyoto Univ., 1973, *13*, 139—142.
307. *Parshall B.*, Regular elements in algebraic groups of prime characteristic. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, *39*, № 1, 57—62 (РЖМат, 1974, 3A329)

308. —, A class of unipotent elements in a simple algebraic group. J. Algebra, 1975, *36*, № 1, 26—37 (РЖМат, 1976, 2A553)
309. *Peterson B.*, Extensions of pro-affine algebraic groups. Pacif. J. Math., 1978, *77*, № 1, 189—231 (РЖМат, 1979, 4A474)
310. *Platonov V. P.*, Algebraic groups and reduced *K*-theory. Proc. Int. Congr. Math., Helsinki, 15—23 Aug., 1978. Vol. 1. Helsinki, 1980, 311—317 (РЖМат, 1982, 6A362)
311. *Pommerening K.*, Observable radizielle Untergruppen von halbeinfachen algebraischen Gruppen. Math. Z., 1979, *165*, № 3, 243—250 (РЖМат, 1979, 8A443)
312. —, Über die unipotenten Klassen reductiver Gruppen. J. Algebra, 1977, *49*, № 2, 525—536 (РЖМат, 1978, 6A472)
313. —, Über die unipotenten Klassen reductiver Gruppen II. J. Algebra, 1980, *65*, № 2,
314. —, Invarianten unipotenter Gruppen. Math. Z., 1981, *176*, № 3, 359—374 (РЖМат, 1981, 8A446)
315. *Popov V. L.*, Constructive invariant theory. Astérisque, 1981, № 87—88, 303—334 (РЖМат, 1982, 7A509
316. *Prasad G.*, Triviality of certain automorphisms of semisimple groups over local fields. Math. Ann., 1975, *218*, № 3, 219—227 (РЖМат, 1976, 6A437)
317. —, Strong approximation for semisimple groups over function fields. Ann. Math., 1977, *105*, № 3, 553—572 (РЖМат, 1978, 1A414)
318. *Raghunathan M. S.*, A note on orbits of reductive groups. J. Indian Math. Soc., 1974(1975), *38*, № 1—4, 65—70 (РЖМат, 1976, 10A264)
319. —, On the congruence subgroup problem. Publ. Math. I. H. E. S., 1976, № 46, 107—161
320. *Reinoehl J. H.*, Lie algebras and affine algebraic groups. Pacif. J. Math., 1980, *86*, № 1, 287—300 (РЖМат, 1981, 3A426)
321. *Reutenauer C.*, Point générique du plus petit groupe algébrique dont l'algèbre de Lie contient plusieurs matrices données. C. r. Acad. sci., 1981, sér. 1, *293*, № 12, 577—580 (РЖМат, 1982, 7A482)
322. *Richardson R. W.*, Jr., Conjugacy classes in parabolic subgroups of semisimple algebraic groups. Bull. London Math. Soc., 1974, *6*, № 1, 21—24 (РЖМат, 1974, 9A498)
323. —, The conjugating representation of a semisimple algebraic group. Bull. Amer. Math., Soc., 1976, *82*, № 6, 933—935 (РЖМат, 1977, 8A464)
324. —, Affine coset spaces of reductive algebraic groups. Bull. London Math. Soc., 1977, *9*, № 1, 38—41 (РЖМат, 1978, 1A418)
325. —, Commuting varieties of semisimple Lie algebras and algebraic groups. Compos. math., 1979, *38*, № 3, 311—327 (РЖМат, 1979, 12A490)
326. —, The conjugating representation of a semisimple group. Invent. math., 1979, *54*, № 3, 229—245 (РЖМат, 1980, 6A469)
327. *Rohlfs J.*, Über maximale arithmetische definierte Gruppen. Math. Ann., 1978, *234*, № 3, 239—252 (РЖМат, 1978, 12A741)
328. —, Arithmetische definierte Gruppen mit Galoisoperation. Invent. math., 1978, *48*, № 2, 185—205 (РЖМат, 1979, 5A283)
329. —, Die maximalen arithmetische definierte untergruppen zerfallender einfacher Gruppen. Math. Ann., 1979, *244*, 219—231
330. *Rosenberg A.*, Homomorphismes «abstraits» de groupes algébriques et de groupes de Lie. C. r. Acad. sci., 1981, sér. 1, *292*, № 4, 247—249 (РЖМат, 1981, 8A423)
331. *Rousseau G.*, Immeubles spheriques et theorie des invariants. C. r. Acad. sci., 1978, sér. 1, *286*, 247—250 (РЖМат, 1978, 11A489)
332. *Schneider H.-J.*, Zerlegbare Erweiterungen affiner Gruppen. J. Algebra, 1980, *66*, № 2, 569—593 (РЖМат, 1981, 4A394)
333. *Schwarz G.*, Lifting smooth homotopies of orbit spaces. Publ. math. I. H. E. S., 1980, № 51, 37—136
334. *Schwermer J.*, A note on link complements and arithmetic groups. Math. Ann., 1980, *249*, № 2, 107—110 (РЖМат, 1981, 1A401)

335. *Selbach M.*, Klassifikationstheorie halbeinfacher algebraischer Gruppen. Bonn. math. Schr., 1976, № 83, 140 S. (РЖМат, 1977, 8A465)
336. *Seligman G. B.*, Om two-dimensional algebraic groups. Scr. math., 1973, *29*, № 3-4, 453—465 (РЖМат, 1974, 2A391)
337. *Serre J.-P.*, Arithmetic groups. London Math. Soc. Lect. Notes Ser., 1979, *36*, 105—135 (РЖМат, 1980, 4A461)
338. —, Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate Astérisque, 1979, № 65, 155—188 (РЖМат, 1980, 2A459)
339. *Shoji T.*, On the Springer representations of Chevalley groups of type F_4. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 5, 409—440 (РЖМат, 1980, 9A418)
340. *Shyr J.-M.*, A generalization of Dirichlet's unit theorem. J. Number Theory, 1977, *9*, № 2, 213—217 (РЖМат, 1977, 12A486)
341. —, On some class number relations of algebraic tori. Mich. Math. J., 1977, *24*, № 3, 365—377 (РЖМат, 1979, 3A401)
342. *Sit W. Y.*, Typical differential dimension of the intersection of linear differential algebraic groups. J. Algebra, 1974, *32*, № 3, 476—487 (РЖМат, 1975, 7A586)
343. *Sit K.-Y. C.*, On bounded elements of linear algebraic groups. Trans. Amer. Math., Soc., 1975, *209*, № 482, 185—198 (РЖМат, 1977, 1A420)
344. *Soulé C.*, The cohomology of $SL_3(\mathbf{Z})$. Topology. 1978, *17*, 1—22 (РЖМат, 1978, 10A302)
345. *Spaltenstein N.*, On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups. Topology, 1977, *16*, № 2, 203—204 (РЖМат, 1977, 10A306)
346. *Speh B.*, Unitary representations of $SL(n, \mathbf{R})$ and the cohomology of congruence subgroups. Lect. Notes Math., 1981, *880*, 483—505 (РЖМат, 1982, 5A342)
347. *Springer T. A.*, Characters of finite Chevalley groups. Harmon. Anal. Homogen. Spaces. (Proc. Symp. Pure Math., Vol. 26). Providence, R. I., 1973, 401—406 (РЖМат, 1976, 4A212)
348. —, Trigonometric sums. Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. Invent. math., 1976, *36*, 173—207 (РЖМат, 1977, 6A184)
349. —, Representations de groupes de Weyl et elements nilpotents d'algebres de Lie. Lect. Notes Math., 1977, *586*, 86—92 (РЖМат, 1978, 2A418)
350. —, Invariant theory. Lect. Notes Math., 1977, *585*, 112p. (РЖМат, 1978, 4A369)
351. —, Reductive groups. Automorphic Forms, Representations and *L*-Funct. Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 1. Providence, R. I., 1979, 3—27 (РЖМат, 1980, 7A428)
352. *Steinberg R.*, Conjugacy classes in algebraic groups. Lect. Notes Math., 1974, *366*, 159 pp. (РЖМат, 1974, 9A495)
353. —, Abstract homomorphisms of simple algebraic group (after A. Borel and J. Tits). Lect. Notes Math., 1974, *383*, 307—326 (РЖМат, 1975, 1A459)
354. —, Torsion in reductive groups. Adv. Math., 1975, *15*, № 1, 63—92 (РЖМат, 1975, 6A571)
355. —, On the desingularization of the unipotent variety. Invent. math., 1976, *36*, 209—224 (РЖМат, 1977, 3A363)
356. —, Conjugacy in semisimple algebraic groups. J. Algebra, 1978, *55*, № 2, 348—350 (РЖМат, 1979, 8A429)
357. —, Generators, relations and coverings of algebraic groups. II. J. Algebra, 1981, *71*, № 2, 527—543 (РЖМат, 1982, 3A504)
358. *Stuhler U.*, Zur Frage der endlichen Präsentierbarkeit gewisser arithmetischer Gruppen im Funktionenkorperfall. Math. Ann., 1976, *224*, № 3, 217—232 (РЖМат, 1977, 5A348)
359. —, Homological properties of certain arithmetic groups in the function field case. Invent. math., 1980, *57*, № 3, 263—281 (РЖМат, 1980, 9A424)

360. *Sullivan J. B.*, Automorphisms of affine unipotent groups in positive characteristics. J. Algebra, 1973, *26*, № 1, 140—151 (РЖМат, 1974, 1A439)
361. —, A decomposition theorem for pro-affine solvable algebraic groups over algebraically closed fields. Amer. J. Math., 1973, *95*, № 1, 221—228 (РЖМат, 1974, 3A331)
362. —, A proof of the finite generation of invariants of a normal subgroup. Pacif. J. Math., 1974, *51*, № 2, 571—572 (РЖМат, 1975, 6A573)
363. —, Representations of the hyperalgebra of an algebraic group. Amer. J. Math., 1978, *100*, № 3, 643—652 (РЖМат, 1979, 4A473)
364. —, Relations between the cohomology of an algebraic group and its infinitesimal subgroups. Amer. J. Math., 1978, *100*, № 5, 995—1014 (РЖМат, 1979, 9A417)
365. —, Simply connected groups, the hyperalgebra and Verma's conjecture. Amer. J. Math., 1978, *100*, 1015—1019
366. *Sweedler M. E.*, Conjugacy of Borel subgroups: an easy proof. Adv. Math., 1976, *20*, № 1, 86—100 (РЖМат, 1976, 12A501)
367. *Takeuchi M.*, A note on geometrically reductive groups. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1973, Sec. 1A, *20*, № 3, 387—396 (РЖМат, 1974, 7A600)
368. —, On the coverings and hyperalgebras of affine algebraic groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *211*, 249—275 (РЖМат, 1976, 8A571)
369. *Tits J.*, Homomorphismes «abstraits» de groupes de Lie. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic. 1972, Vol. 13. London — New York, 1974, 479—499 (РЖМат, 1975, 7A597)
370. —, Buildings of spherical type and finite *BN*-pairs. Lect. Notes Math., 1974, *386*, 299 pp. (РЖМат, 1975, 3A268 К)
371. —, On buildings and their applications. Proc. Int. Congr. Math., Vancouver, 1974, vol. I. S. l., 1975, 209—220 (РЖМат, 1976, 10A257)
372. —, Systèmes générateurs de groupes de congruence. C. r. Acad. sci., 1976, *283*, № 9, A693 — A695 (РЖМат, 1977, 6A285)
373. —, A «theorem of Lie-Kolchin» for trees. In: Contributions to Algebra. New York — San Francisco — London: Academic Press, 1977, 377—388
374. —, Travaux de Margulis sur les sousgroupes discrets de groupes de Lie. Lect. Notes Math., 1977, *567*, 174—190 (РЖМат, 1978, 1A413)
375. —, Endliche Spiegelungsgruppen die als Weylgruppen auftreten. Invent. math., 1977, *43*, 283—295 (РЖМат, 1978, 8A233)
376. —, Reductive groups over local fields. Automorphic Forms, Representations and L-Funct. Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., Corvallis, Ore, 1977. Part 1. Providence, R. I., 1979, 29—69 (РЖМат, 1980, 7A429)
377. —, Groupes de Whitehead de groupes algebriques simples sur un corps (d'après V. P. Platonov et al.). Lect. Notes Math., 1978, *677*, 218—236 (РЖМат, 1979, 4A449)
378. *Veldkamp F.*, Regular characters and regular elements. Commun. Algebra, 1977, *5*, № 12, 1259—1273 (РЖМат, 1978, 10A353)
379. —, Regular elements in anisotropic tori. In: Contributions to Algebra, New York — San Francisco — London: Academic Press, 1977, 389—424.
380. *Verma D.-N.*, The role of affine Weyl groups in the representation theory of algebraic Chevalley groups and their Lie algebras. «Lie Groups and Their Representations». Budapest, 1975, 653—703 (РЖМат, 1976, 5A448)
381. *Waldschmidt M.*, Nombres transcendants et groupes algébriques. Astérisque, 1979, № 69-70, 218 p. (РЖМат, 1980, 8A449К)
382. *Waterhouse W. C.*, Introduction to affine group schemes. (Grad. Texts Math., № 66). New York, e. a., Springer, 1979, 164 pp. (РЖМат, 1981, 1A422К)
383. —, Subgroups of $ax+b$ and the splitting of triangular group schemes. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *79*, № 4, 520—522 (РЖМат, 1981, 3A427)
384. —, *Weisfeiler B.*, One-dimensional affine group schemes. J. Algebra, 1980, *66*, № 2, 550—568 (РЖМат, 1981, 4A393)
385. *Weisfeiler B.*, On abstract homomorphisms of anisotropic algebraic groups

over real-closed fields. J. Algebra, 1979, *60*, № 2, 485—519 (РЖМат, 1980, 6А465)
386. —, Abstract isomorphisms of simple algebraic groups split by quadratic extensions. J. Algebra, 1981, *68*, № 2, 335—368 (РЖМат, 1981, 9А337)
387. —, Monomorphisms between subgroups of groups of type G_2. J. Algebra, 1981, *68*, № 2, 306—334 (РЖМат, 1981, 9А341)
388. *Yamazaki Y.*, On the variety of Borel subgroups containing a given diagonalizable subset. Natur. Sci. Rept. Ochanomizu Univ., 1978, *29*, № 1, 11—17 (РЖМат, 1979, 1А492)
389. *Zimmert R.*, Zur SL_2 der ganzen Zahlen eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers. Invent. math., 1973, *19*, № 1, 73—81 (РЖМат, 1973, 6А470)

УДК 512.544.6

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ

А. Е. Залесский

Предлагаемый обзор составлен, в основном, по работам, прореферированным в РЖ «Математика» в 1978—1982 годах. Он является продолжением серии обзоров [139, 99, 101] и имеет целью систематизировать накопленный материал в области линейных групп за указанный период. Недавний обзор автора [55] имеет иную направленность: там сделана попытка обсудить наиболее важные идеи теории линейных групп. Однако некоторые темы рассмотрены там достаточно подробно и в таких случаях мы ограничиваемся ссылкой на [55], добавляя, если необходимо, информацию о новейших результатах. Это дает нам возможность уделить больше внимания проблематике, которая там не затронута вовсе, в первую очередь, такой важной теме, как теория линейных групп над кольцами, где в последние годы ведется исключительно интенсивная работа, а число публикаций достигает 40% общего числа статей о линейных группах за 1978—1982 гг. Теорию линейных групп довольно трудно отделять от смежных областей таких, как алгебраическая K-теория, теория алгебраических линейных групп, групп Ли, конечных групп и др. К счастью, в серии «Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия» изданы три превосходных обзора А. А. Суслина [146], Д. В. Алексеевского [1], В. П. Платонова и А. С. Рапинчука [120], что часто избавляет нас от необходимости входить в подробности, когда приходится говорить о пограничных вопросах.

Обзор состоит из двух глав. В первой рассмотрены общие вопросы теории линейных групп над кольцами; несколько утрируя, можно сказать, что гл. 1 посвящена изучению некоторых функторов из категории колец в категорию групп. Во второй главе рассматривается структурная теория линейных групп; результаты здесь, в основном, относятся к какому-то классу линейных групп над фиксированным кольцом или полем.

Автор признателен Н. А. Вавилову за некоторые полезные комментарии по гл. 1.

Глава 1

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ НАД КОЛЬЦАМИ

В этой главе излагаются результаты о линейных группах, достаточно тесно связанных с основным кольцом, таких, как полная линейная группа и классические группы. Для этих типов групп, главным образом, обсуждаются вопросы описания нормальных подгрупп, автоморфизмов и гомоморфизмов, о промежуточных подгруппах. Одним из главных стимулов стремительного роста исследований этих проблем явилось построение в 60-х годах основ алгебраической K-теории. В рамках последней, в частности, была решена проблема описания нормальных подгрупп стабильной полной линейной группы над произвольным кольцом. Напомним, что под стабильной линейной группой (слово «полной» обычно опускают) понимают объединение, точнее, индуктивный предел естественно вложенных друг в друга полных линейных групп. Другим важным стимулом оказалось решение конгруэнцпроблемы для группы $SL(n, \mathbf{Z})$, $n\geqslant 3$.

В теории линейных групп над кольцами в последние годы достигнут значительный прогресс, связанный с переходом к рассмотрению колец наиболее общей природы, отказом от предположений о коммутативности, целостности, преодолением ограничений типа размерности кольца (стабильный ранг и др.). Имеется тенденция к обобщению результатов о линейных группах над кольцами на группы единиц ассоциативных колец более общей природы, чем кольца матриц. Однако попытка проследить за этим увела бы от темы данной статьи.

§ 1. Нормальные подгруппы полной линейной группы

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, I — его двусторонний идеал. Обозначим через $GL(n, R)$ группу обратимых матриц степени n над R, через $GL(n, I)$ — ее подгруппу, состоящую из всех матриц, сравнимых с единичной по модулю I, и через $C(n, I)$ — группу тех элементов $x\in GL(n, R)$, для которых $xa=ax \pmod I$ для всех $a\in GL(n, R)$. Пусть, далее, $E(n, R)$ — группа, порожденная всеми элементарными матрицами $1+ae_{ij}$ ($a\in R$, $1\leqslant i\neq j\leqslant n$), и $E(n, I)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $E(n, R)$, содержащая все матрицы вида $1+ae_{ij}$ ($a\in I$, $1\leqslant i\neq j\leqslant n$). При $n=2$ группы $E(n, R)$ и $E(n, I)$ не всегда нормальны в $GL(n, R)$ (см. [144]); при $n\geqslant 3$ это открытый вопрос. Однако, как показал А. А. Суслин [145], для коммутативного кольца R при $n\geqslant 3$ группы $E(n, I)$ нормальны в $GL(n, R)$ для каждого I. (Это верно также для колец, конечно порожденных как модули над своими центрами (А. А. Суслин); доказательство приведено в работе М. С. Туленбаева [153], § 1). Если всякий нормальный делитель группы $GL(n, R)$ заключен между $E(n, I)$ и $C(n, I)$ для подходящего идеала I кольца R, то говорят, что описание нормальных подгрупп в $GL(n, R)$ является стандартным. При $n\geqslant 4$ Уилсон (1972) и при $n\geqslant 3$ И. З. Голубчик [39] установили стандартность нормальных и даже нормализуемых группой $E(n, R)$ подгрупп для произвольного коммутативного кольца R. В [41] И. З. Голубчик анонсировал справедливость этого утверждения для существенно более широкого класса колец, включающего кольца с полиномиальным тождеством. (Полное доказательство приведено в его диссертации [42]). Заметим, что для произвольных колец стандартное описание нормальных подгрупп имеет место при условии, что n больше 2 и больше стабильного ранга кольца R; при этом условии группа $E(n, I)$ нормальна в $GL(n, R)$ для любого I (см. [178]).

Случай $n=2$ является, как известно, более сложным. Так, группа $GL(2, \mathbf{Z})$ содержит свободные нормальные подгруппы конечного индекса и потому имеет необозримо много нормальных подгрупп, в том числе конечного индекса, которые не привязываются к идеалам кольца $\mathbf{Z}$. Однако можно ожидать стандартного описания нормальных подгрупп в случае, если кольцо R содержит достаточно много обратимых элементов (см., например, [338]).

Если кольцо R коммутативно, то естественно возникает вопрос о совпадении групп $SL(n, I)$ и $E(n, I)$, который тесно связан с конгруэнцпроблемой. Напомним, что подгруппы $GL(n, I)$ и $SL(n, I)=SL(n, R)\cap GL(n, I)$ называются конгруэнцподгруппами. В простейшей форме конгруэнцпроблема формулируется следующим образом: всякая ли подгруппа конечного индекса группы $SL(n, R)$ содержит конгруэнцподгруппу. Из теоремы Уилсона—Голубчика следует, что при $n\geqslant 3$ подгруппа конечного индекса обязана содержать $E(n, I)$ при некотором $I\neq 0$, причем в этом случае, как нетрудно убедиться, факторкольцо R/I конечно. Поэтому конгруэнцпроблема решается положительно, если $SL(n, I)=E(n, I)$ для любого идеала I. Последняя формула верна для колец стабильного ранга 1 (см. [178]). Басс, Милнор и Серр (1968) вычислили факторгруппу $SL(n, I)/E(n, I)$ ($n\geqslant 3$) для колец, содержащих кольца целых элементов полей алгебраических чисел. Вопрос о совпадении $SL(2, R)$ и $E(2, R)$ для колец специального вида рассматривается в [324, 326, 327].

В более современной форме конгруэнцпроблема заключается в вычислении (или описании) конгруэнцядра. Оно определяется как ядро естественного эпиморфизма $SL^{**}(n, R)—SL^{*}(n, R)$, где $SL^{**}(n, R)$ — пополнение группы $SL(n, R)$ по проконечной топологии, определяемой всеми подгруппами конечного индекса, а $SL^{*}(n, R)$ — всеми конгруэнцподгруппами. Постановка конгруэнцпроблемы естественным образом обобщается на арифметические подгруппы алгебраических линейных, в частности, классических, групп, определенных над глобальным полем. Исследования конгруэнцпроблемы в такой постановке освещены в обзоре В. П. Платонова [118].

Для тела D конечной размерности над своим центром группа $\mathrm{SL}(n, D)$ определяется как подгруппа элементов из $\mathrm{GL}(n, D)$ с приведенной нормой 1. Для произвольных тел D, конечномерных над центром, вопрос о совпадении групп $E(n, D)$ и $SL(n, D)$ — старая проблема, поставленная в начале 40-х годов Таннакой и Артином. Для тел над полями алгебраических чисел она решается положительно (Ванг, 1954). В общем случае отрицательное решение получено В. П. Платоновым (1975); позднее была развита специальная техника исследования факторгруппы $\mathrm{SL}(n, D)/E(n, D)$. Этот круг вопросов довольно подробно освещен в обзоре автора ([55], § 6), а также в обзоре В. П. Платонова и А. С. Рапинчука [120]. Заметим, что конгруэнцпроблема рассматривается также для группы $\mathrm{SL}(n, O) = \mathrm{SL}(n, D) \cap \mathrm{GL}(n, O)$, где D — тело над полем алгебраических чисел, а O — кольцо целых элементов тела D. Полное решение конгруэнцпроблемы для группы $\mathrm{SL}(n, O)$ при $n \geqslant 3$ и, при некоторых ограничениях, при $n=2$ дали Бак и Рекман [174, 175, 176].

В работах [166, 167, 168] изучается нормальное строение бесконечномерной линейной группы. Этот вопрос тесно связан с вопросом описания двусторонних идеалов кольца эндоморфизмов свободного модуля бесконечного ранга в терминах идеалов кольца R; однако, насколько нам известно, исчерпывающего ответа на этот последний вопрос пока еще нет. Стоит обратить внимание на то обстоятельство, что бесконечному множеству Ω можно естественным образом сопоставить три бесконечномерные линейные группы над заданным кольцом R. Именно, пусть V — свободный модуль над R с базисом $\{v_\omega\}_{\omega \in \Omega}$. Наибольшая группа — это $\mathrm{Aut}(\Omega, R)$, группа обратимых элементов кольца эндоморфизмов $\mathrm{End}_R(V)$. Наименьшая — $\mathrm{SGL}(\Omega, R)$, стабильная линейная группа на множестве Ω — состоит из всех элементов $g \in \mathrm{Aut}(\Omega, R)$, каждый из которых перемещает лишь конечное число базисных элементов v_ω. Эта группа не является нормальной в $\mathrm{Aut}(\Omega, R)$ и ее нормальное замыкание в $\mathrm{Aut}(\Omega, R)$ состоит из всех элементов $g \in \mathrm{Aut}(\Omega, R)$ таких, что $(1-g)V$ лежит в конечно порожденном свободном подмодуле модуля V. Обозначения здесь еще не устоялись, но именно эта последняя группа представляется нам наиболее естественным аналогом группы $\mathrm{GL}(n, R)$, мы будем обозначать ее через $\mathrm{GL}(\Omega, R)$. Подчеркнем, что факторгруппа $\mathrm{Aut}(\Omega, R)/\mathrm{GL}(\Omega, R)$ велика и о ней известно мало даже для случая, когда R — поле. Можно отметить, что здесь играют роль теоретико-множественные соображения, например, нормальные подгруппы группы $\mathrm{Aut}(\Omega, R)$ над полем R привязываются к промежуточным мощностям между счетной мощностью и мощностью множества Ω.

Нормальное строение группы $\mathrm{SGL}(\Omega, R)$ для счетного Ω исчерпывающим образом изучено Бассом (см. [178], гл. 4). Нормальное строение группы $\mathrm{GL}(\Omega, R)$ аналогично нормальному строению стабильной группы $\mathrm{SGL}(\Omega, R)$ (см. [335]). В общем случае в работах [168, 166] (во второй сняты некоторые ограничения, наложенные в первой) доказано, что в каждой нормальной подгруппе $1 \neq H \subset \mathrm{Aut}(\Omega, R)$ содержится группа $E(\Omega, q)$, где q — некоторый ненулевой идеал кольца R, а $E(\Omega, q)$ — нормальное замыкание в $\mathrm{Aut}(\Omega, R)$ подгруппы, порожденной элементарными матрицами над q. В работе Аррела [167] описаны в подобных терминах субнормальные подгруппы группы $\mathrm{Aut}(\Omega, R)$.

§ 2. Нормальные подгруппы классических групп

Для классических групп наиболее общие результаты (в смысле наименьших ограничений на кольцо R) получены в следующем контексте. Пусть R — кольцо с инволюцией*, пусть R_n — кольцо $(n \times n)$-матриц над R и e_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ — матричные единицы. Пусть ε — элемент центра кольца R такой, что $\varepsilon\varepsilon^* = 1$. Положим $f = \Sigma e_{i, i+n} + \varepsilon e_{i+n, i} \in \mathrm{GL}(2n, R)$ и далее

$$U(\varepsilon, n, R) = \{g \in \mathrm{GL}(2n, R) \mid g f \bar{g}^* = f\},$$

где $\bar{g}$ обозначает транспонированную матрицу. Если инволюция * нетривиальна на R (что всегда имеет место, если кольцо R некоммутативно), то группу $U(\varepsilon, n, R)$ называют обычно унитарной. Если же инволюция тривиальна на R, то при $\varepsilon = -1$, а также при $\varepsilon = 1$ и $2R = 0$ группу $U(\varepsilon, n, R)$ называют симплектической, и при $\varepsilon = 1$, $2R \neq 0$ эту группу называют ортогональной (впрочем, иногда термины «унитарная» и «ортогональная» группа применяют к группе $U(\varepsilon, n, R)$ в общем случае). Пусть J — идеал кольца R, инвариантный относительно действия инволюции * . Через $E(\varepsilon, n, R)$ обозначим подгруппу группы $U(\varepsilon, n, R)$, порожденную матрицами вида

$$1 + \lambda e_{ij} - \lambda^* e_{j+n, i+n}; \quad 1 + \lambda e_{i, j+n} - \lambda^* \varepsilon^* e_{i+n, j}; \quad 1 + \lambda e_{i+n, j} + \varepsilon \lambda^* e_{j+n, i}$$

где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $\lambda \in R$. Пусть $E(\varepsilon, n, J)$ — наименьшая нормальная подгруппа группы $E(\varepsilon, n, R)$, содержащая матрицы, выписанные выше, но с условием $\lambda \in J$. Пусть еще $C(\varepsilon, n, J)$ — подгруппа группы $U(\varepsilon, n, R)$, образованная матрицами, скалярными по модулю J. Для коммутативного кольца R И. З. Голубчиком [40] анонсированы следующие результаты (полное изложение имеется в его диссертации [42]). Пусть $n \geqslant 3$ и N — подгруппа группы $U(\varepsilon, n, R)$, нормализуемая группой $E(\varepsilon, n, R)$. Тогда

$$E(\varepsilon, n, J) \subset N \subset C(\varepsilon, n, J)$$

для некоторого идеала J кольца R, инвариантного относительно инволюции*. Более того, результат сохраняется, если кольцо R некоммутативно, но факторкольцо по радикалу Джекобсона является PI-кольцом, либо регулярно в смысле Неймана.

В широком контексте классические группы определяют как группы всех элементов g матричного кольца R_n, которые удовлетворяют условию $\bar{g}^*Fg=F$, где $F\in GL(n, R)$, $F=\bar{F}^*$ — произвольная (но фиксированная) матрица, $*$ — произвольная (и также фиксированная) инволюция кольца R и черта обозначает транспонирование. Максимальное число m такое, что $\bar{T}^*FT=\operatorname{diag}(f, F_1)$, где $F_1\in GL(n-2m, R)$ и $f\in GL(2m, R)$ — матрица, определенная в предыдущем абзаце, называется индексом классической группы. Индекс играет важную роль в рассматриваемых вопросах, и общая тенденция такова, что чем меньше индекс, тем более узкие классы колец удается эффективно рассматривать. Джеймс [284] описывает нормальные подгруппы унитарной группы над локальным кольцом индекса $\geqslant 1$ (при некоторых дополнительных ограничениях на кольцо). Кольцо R называется полным, если для любых a, b, $c\in R$, порождающих R как идеал, найдется такой элемент $w\in R$, что элемент $a+bw+cw^2$ обратим. Ясно, что полное кольцо имеет стабильный ранг 1 (положить $c=0$). В [282, 312, 340] изучены ортогональные группы индекса 1 над полными кольцами С. Л. Крупецкий [88] (без ограничений на индекс) описал нормальные подгруппы унитарной группы, определяемой диагональной матрицей F, над кольцом целых элементов неразветвленного расширения локального поля характеристики 2 (см. еще [409]).

В. И. Копейко [78] показал, что для коммутативного основного кольца R при $n\geqslant 2$ группа $E(-1, n, J)$ для любого идеала J кольца R нормальна в симплектической группе $U(-1, n, R)$; в частности, подгруппа, порожденная элементарными симплектическими матрицами, нормальна в симплектической группе. В работе А. А. Суслина и В. И. Копейко [147] доказано, что группы $E(1, n, R)$ нормальны в ортогональной группе $U(1, n, R)$ при $n\geqslant 3$. Рассуждения основаны на результате А. А. Суслина [145] о том, что группы $E(n, J)$ при $n\geqslant 3$ нормальны в $GL(n, R)$ для любого коммутативного кольца R и любого его идеала J. Кроме того, в [145, 78, 147] исследуются подгруппы специальной линейной, симплектической и ортогональной групп над R, где R — кольцо полиномов над коммутативным нётеровым кольцом A. В частности, если A — поле или $A=\mathbf{Z}$, установлено, что $E(n, R)=SL(n, R)$ при $n\geqslant 3$ (см. [145]), что симплектические группы над R при $n\geqslant 2$ порождаются симплектическими элементарными матрицами [78], а для ортогональных групп $U(1, n, R)$ для всех $n\geqslant 3$ доказан изоморфизм факторгрупп $U(1, n, R)/E(1, n, R)$ (см. [147]).

Проблема описания нормальных подгрупп полной линейной группы, а также классических групп относится также к алгебраической K-теории и получает там новое освещение. Обозначим через $K_1(R)$ факторгруппу стабильной линейной группы $SGL(\Omega, R)$ по ее подгруппе $E(\Omega, R)$, порожденной элементарными матрицами (здесь Ω — счетное множество, по традиции). Отображение $R\to K_1(R)$ есть функтор из категории колец в категорию абелевых групп и его исследование является одной из задач алгебраической K-теории. Поведение факторгруппы $GL(n, R)/E(n, R)$ при $n\to\infty$, точнее, вопрос о ее изоморфизме с $K_1(R)$, начиная с некоторого n, называется задачей о стабилизации функтора K_1. В соответствующей интерпретации вопрос о стабилизации возникает и для классических групп. Именно с этих позиций исследовались группы $E(n, R)$ и $E(\varepsilon, n, R)$ в работах [145, 78, 147]. Подробнее об этом см. [178, 146].

Если кольцо R коммутативно, то проблема описания нормальных подгрупп рассматривалась и в более общем контексте, а именно, для групп Шевалле над R. Обычно она изучается для групп Шевалле нормальных, а также некоторых скрученных типов. Подгруппа, порожденная корневыми подгруппами над R, называется элементарной. Описание нормальных подгрупп элементарных групп Шевалле ранга $\geqslant 2$ вытекает из работы Абе и Судзуки (РЖМат, 1977, 2А500) (см. [30], § 15). Обсуждение трудностей перехода ко всей группе Шевалле читатель найдет в [30]. С другой стороны, для колец арифметического типа (мы имеем ввиду подкольца полей алгебраических чисел, содержащие подкольца целых алгебраических чисел) имеются содержательные результаты о нормальных подгруппах (и о конгруэнцпроблеме) арифметических подгрупп алгебраических линейных групп. Подробности читатель найдет в обзорах [118], § 8 и [120].

§ 3. Линейные группы над кольцами, содержащими группу диагональных матриц, и смежные вопросы

В 1976 г. З. И. Боревич предложил подход к описанию подгрупп полной линейной группы над ассоциативным кольцом, содержащих группу диагональных матриц. Этот подход оказался достаточно плодотворным и распространен З. И. Боревичем и его учениками также на классические группы и отчасти на группы Шевалле над коммутативными кольцами.

В обзоре автора [55] были изложены результаты, относящиеся к группам над полями (см. [15, 72, 73, 74, 75]), и здесь мы не будем обсуждать этот случай. Отметим только, что из результатов этих работ вытекают некоторые из опубликованных в последнее время результатов о максимальных подгруппах линейных групп над полями (см., например, [304, 307, 222]). В основе языка, на котором дается описание подгрупп, содержащих диагональ, лежит введенное З. И. Боревичем понятие сетевых подгрупп, возникавшее до этого в различных частных случаях.

Именно, пусть Λ — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, n — натуральное число. Набор $\sigma=(\sigma_{ij})$, $1\leqslant i, j\leqslant n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} кольца Λ называется сетью в Λ порядка n, если для любых i, j, r имеет место включение $\sigma_{ir}\sigma_{rj}\subset\subset\sigma_{ij}$. Для большинства приложений наиболее важен случай, когда все σ_{ij} являются идеалами в Λ. В этом случае σ называется сетью идеалов в Λ. Сеть идеалов называется D-сетью, если $\sigma_{ii}=\Lambda$ для всех i. Для произвольной сети σ в Λ порядка n через $M(\sigma)$ обозначим совокупность тех матриц $a=(a_{ij})$ порядка n с коэффициентами из Λ, для которых $a_{ij}\in\sigma_{ij}$ при всех i, j. Тогда $M(\sigma)$ — подкольцо кольца $M(n, \Lambda)$, называемое сетевым подкольцом. Наибольшая подгруппа в полной линейной группе $G=\mathrm{GL}(n, \Lambda)$, содержащаяся в мультипликативной системе $1+M(\sigma)$, где 1 — единичная матрица, называется сетевой подгруппой, соответствующей сети σ, и обозначается $G(\sigma)$. Существенную роль играет также (сетевой) нормализатор $N(\sigma)$ подгруппы $G(\sigma)$ в $\mathrm{GL}(n, \Lambda)$, а также группа $E(\sigma)$, порожденная всеми матрицами вида $1+\lambda e_{ij}$, $\lambda\in\sigma_{ij}$, $i\neq j$. В итоге серии работ, из которых к рассматриваемому нами периоду относятся [6, 8, 9, 22, 27], получен следующий результат.

Пусть Λ — полулокальное кольцо, среди простых факторов которого отсутствуют поля из трех, четырех и пяти элементов и кольцо матриц порядка 2 над полем из двух элементов. Тогда для любой подгруппы $H\subset\mathrm{GL}(n, \Lambda)$, содержащей группу $D(n, \Lambda)$ диагональных матриц, существует единственная D-сеть $\sigma=(\sigma_{ij})$ идеалов кольца Λ такая, что $G(\sigma)\subset H\subset N(\sigma)$. Если при тех же предположениях группа H нормализуется группой $D(n, \Lambda)$, то $E(\sigma)\subset H\subset N(\sigma)$ для однозначно определенной D-сети σ.

Естественно возникает вопрос, когда две подгруппы, содержащие группу диагональных матриц, сопряжены в полной линейной группе. Для матрично локального кольца (т. е. кольца, факторкольцо по радикалу Джекобсона J которого простое артиново) ответ дается следующим результатом Н. А. Вавилова [24] и В. А. Койбаева [74]. Пусть Λ — матрично локальное кольцо такое, что факторкольцо Λ/J состоит более чем из трех элементов. Тогда если две подгруппы H и F группы $\mathrm{GL}(n, \Lambda)$, содержащие $D(n, \Lambda)$, сопряжены в $\mathrm{GL}(n, \Lambda)$, то они сопряжены при помощи матрицы-перестановки. В [74] найдено условие сопряженности и при условии $|\Lambda/J|=3$.

Факторгруппа $N(\sigma)/G(\sigma)$ изучается в [9, 14]. В [14] также доказано, что две D-сетевые подгруппы группы $\mathrm{GL}(n, \Lambda)$, где Λ — матрично локальное кольцо, факторкольцо по радикалу которого отлично от поля из двух элементов, сопряжены в $\mathrm{GL}(n, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда они сопряжены при помощи матрицы-перестановки.

Как показывают примеры, описание всех подгрупп, содержащих группу диагональных матриц, не может быть распространено далеко за пределы класса полулокальных колец. Н. А. Вавилов [27] выделил класс подгрупп, содержащих диагональ, которые удается описать для почти произвольного основного кольца. Обозначим через $B(n, \Lambda, J)$ максимальную подгруппу группы $\mathrm{GL}(n, \Lambda)$, состоящую из матриц, элементы которых под диагональю принадлежат радикалу Джекобсона J кольца Λ. Пусть Λ — кольцо, которое порождается как кольцо группой своих обратимых элементов и такое, что для некоторых обратимых элементов ε, $\eta\in\Lambda$ элементы $\varepsilon-1$, $\eta-1$, $\varepsilon\eta-1$ также обратимы. Тогда для любой подгруппы H, содержащейся в $B(n, \Lambda, J)$ и содержащей $D(n, \Lambda)$, существует единственная D-сеть σ идеалов кольца Λ такая, что $H=G(\sigma)$.

Поскольку задача описания всех подгрупп, содержащих группу диагональных матриц, в общем случае необозрима, рассматривается также более специальная задача описания подгрупп, содержащих группу клеточно-диагональных матриц с достаточно большими размерами клеток. Пусть $\nu=(n_1, \ldots, n_t)$ — разбиение числа n. Оно определяет сеть $[\nu]$ над произвольным кольцом Λ по формуле $[\nu]_{ij}=\Lambda$, если $i\sim j$, и $[\nu]_{ij}=0$ в противном случае. Группа $D(\nu, \Lambda)$ клеточно диагональных матриц — это сетевая подгруппа $G([\nu])$, а группа $E(\nu, \Lambda)$ · элементарных клеточно-диагональных матриц — это группа $E([\nu])$.

Различные результаты об описании подгрупп, содержащих группу $E(\nu, \Lambda)$, или $D(\nu, \Lambda)$, можно найти в работах З. И. Боревича и Н. А. Вавилова [12, 22, 27]. Например, в [12] в предположении, что Λ — дедекиндово кольцо, размеры клеток не менее 3, доказано, что для каждой группы H, содержащей $E(\nu, \Lambda)$, имеет место включение $E(\sigma)\subset H\subset N(\sigma)$, где σ — единственная сеть идеалов кольца Λ. Если в разбиении ν встречается число 2, то стандартное описание подгрупп, содержащих $E(\nu, \Lambda)$ не имеет места даже в случае, когда Λ является полем. В этом случае в качестве примитивных неприводимых групп могут появляться симплектические группы, а также ортогональные, если $|\Lambda|=2$. Полное описание линейных групп над полями, содержащих $E(\nu, \Lambda)$, при условии, что размеры клеток не менее 2, имеется в работе В. А. Койбаева [75].

В ряде работ изучались различные свойства сетевых подгрупп. Так, З. И. Боревич и Е. В. Дыбкова [13] получили формулу для индекса сетевой подгруппы, соответствующей сети без нулевых идеалов, над дедекиндовым кольцом, все поля вычетов которого конечны. З. И. Боревич и Л. Ю. Колотилина [16] показали при некоторых ограничениях, что нормализатор сетевой подгруппы $G(\sigma)$ в $\mathrm{GL}(n, \Lambda)$ совпадает с ее субнормализатором (т. е. «башня нормализаторов» состоит из одного этажа). А. А. Пащевский [109] описывает автомоморфизмы некоторых D-сетевых подгрупп полной линейной группы над коммутативным полулокальным кольцом. Х. Ролофф [124] вычисляет центральные ряды и ряды коммутантов некоторых сетевых подгрупп.

Предпринимались попытки распространить в большей или меньшей степени результаты о группах, содержащих диагональ, на классические группы.

Пусть f_n — матрица порядка n, у которой на побочной диагонали стоят 1 и нули на остальных позициях. Если $m=2n$, то пусть $F_m=\begin{pmatrix} 0 & f_n \\ f_n & 0 \end{pmatrix}$. Пусть R — коммутативное кольцо. Полная ортогональная группа $\mathrm{GO}(n, R)$ состоит из всех матриц $x \in \mathrm{GL}(n, R)$ таких, что $xf_n\bar{x}=\lambda f_n$ для некоторого обратимого элемента $\lambda \in R$. (Здесь $\bar{x}$ — транспонированная матрица). При $m=2n$ полная симплектическая группа $\mathrm{GSp}(m, R)$ состоит из всех матриц $x \in \mathrm{GL}(m, R)$, для которых $xF_m\bar{x}=\lambda F_m$ для некоторого обратимого элемента $\lambda \in R$. Сеть $\sigma=(\sigma_{ij})$ порядка m называется симплектической, если $\sigma_{ij}=\sigma_{m+1-j,m+1-i}$ и m четно; сеть σ называется ортогональной, если $\sigma_{ij}=\sigma_{m+1-j,m+1-i}$ и, дополнительно, $\sigma_{i,m+1-i}=\sum\limits_{\substack{j\neq i \\ j\neq m+1-i}} \sigma_{ij}\sigma_{j,m+1-i}$ для всех $1\leqslant i,\ j\leqslant n$. Пусть Γ — (полная) симплектическая или (полная) ортогональная группа и σ — сеть идеалов кольца R соответствующего типа. Тогда σ определяет сетевую подгруппу $\Gamma(\sigma)=G(\sigma)\cap\Gamma$. Обозначим через $T(m, R)$ подгруппу диагональных матриц группы Γ.

В работах [31] и [423] установлен следующий результат. Пусть R — коммутативное полулокальное кольцо, все поля вычетов которого содержат не менее семи элементов и в котором элемент 2 обратим. Если H — подгруппа группы $\Gamma=\mathrm{GSp}(2n, R)$ или $\Gamma=\mathrm{GO}(2n, R)$, содержащая диагональ $T(2n, R)$, то существует единственная D-сеть σ идеалов кольца R (соответственно, симплектическая или ортогональная) такая, что $\Gamma(\sigma)\subset H\subset N_\Gamma(\sigma)$, где $N_\Gamma(\sigma)$ — нормализатор группы $\Gamma(\sigma)$ в Γ. Кроме того, для случая локальных колец в [31] и [423] вычислена факторгруппа $N_\Gamma(\sigma)/\Gamma(\sigma)$, получено описание подгрупп группы Γ, нормализуемых $T(2n, R)$ и ряд других близких результатов. Аналогичные результаты для унитарной группы $\mathrm{GU}(2n, R)$, где R — полулокальное (не обязательно коммутативное) кольцо с инволюцией, получены в [29].

В [13, 14] рассматривался вопрос о сопряженности D-сетевых подгрупп в симплектической группе над локальным кольцом. В [50] найдена формула индекса сетевой подгруппы симплектической группы для случая дедекиндова кольца с конечными полями вычетов и сети без нулевых идеалов.

Ведется работа, направленная на распространение изложенных результатов на разложимые группы Шевалле над коммутативными кольцами. Публикации с полными доказательствами относятся к описанию подгрупп, содержащих параболические (см. Судзуки [414, 415], Н. А. Вавилов [21, 25, 30]). Отметим, что в [30] дан обзор имеющихся результатов; в частности, там указывается на ряд ошибок в относящейся к этой теме работе В. М. Левчука (РЖМат, 1982, 8А205).

§ 4. Автоморфизмы и изоморфизмы

В течение последних лет продолжалось интенсивное изучение проблемы описания автоморфизмов и, в более общей постановке, изоморфизмов и даже гомоморфизмов классических групп над кольцами. Рассмотрим следующие типы автоморфизмов группы $\mathrm{GL}(n, R)$, где R — кольцо с 1:

(а) Автоморфизмы, индуцированные автоморфизмом кольца R.

(б) Внутренние автоморфизмы, индуцированные сопряжением при помощи некоторой матрицы $g \in \mathrm{GL}(n, R)$ или даже, в более общем контексте, при помощи некоторой матрицы $g \in \mathrm{GL}(n, S)$ такой, что $g\mathrm{GL}(n, R)g^{-1}=\mathrm{GL}(n, R)$, где S — расширение кольца R. Обычно кольцо S явно описывается в терминах кольца R и при этом автоморфизмы типа (а) не сводятся к типу (б) (если допустить, что кольцо S произвольно, то такое сведение, очевидно, всегда возможно).

(в) контраградиентные автоморфизмы: $A\to(\bar{A})^{-1}e+A(1-e)$, где $A \in \mathrm{GL}(n, R)$, e — некоторый идемпотент кольца R и $A\to\bar{A}$ — операция транспонирования матриц.

(г) Автоморфизмы вида $A\to\chi(A)A$, где $A \in \mathrm{GL}(n, R)$ и χ — некоторый гомоморфизм группы $\mathrm{GL}(n, R)$ в центр кольца матриц R_n.

Автоморфизмы, которые являются композициями автоморфизмов типов (а), (б), (в), (г), принято называть стандартными (по-видимому, более удобно было бы представлять стандартный автоморфизм как композицию автоморфизмов, индуцированных автоморфизмами или антиавтоморфизмами матричного кольца R_n, и центральных автоморфизмов (т. е. типа (г)).

Уотерхаус [437] доказал, что при $n\geqslant3$ все автоморфизмы группы $\mathrm{GL}(n, R)$ над коммутативным кольцом R с условием $1/2 \in R$ являются стандартными. Более частные результаты получили ранее Макдональд [337] и В. Я. Блошицын [5]. В работе В. М. Петечука [113] было устранено предположение о делении на 2 в кольце R, но при условии $n\geqslant4$. Автор вначале доказывает стандартность автоморфизмов группы $E(n, R)$, порожденной элементарными матрицами, а затем распространяет свой результат на группы $SL(n, R)$ и $GL(n, R)$, используя тот факт, что группа $E(n, R)$ является характеристической подгруппой в $GL(n, R)$ (то, что она нормальна, было доказано А. А. Суслиным [145]). С другой стороны, при $n\geqslant 3$ И. З. Голубчик и А. В. Михалев [45] анонсировали стандартность автоморфизмов на группе $E(n, R)$ для произвольно некоммутативного кольца R с условием $1/2\in R$.

При $n=3$ В. М. Петечук [111, 114] обнаружил нестандартные автоморфизмы групп $SL(n, R)$ и $GL(n, R)$. По-видимому, существование таких автоморфизмов обусловлено известным изоморфизмом классических групп $SL(3,2)$ и $PSL(2,7)$.

В действительности, перечисленные сейчас результаты остаются в силе для более общей ситуации. Пусть R и T — ассоциативные кольца с единицей и пусть $\varphi: GL(n, R)\to GL(m, T)$ — изоморфизм групп. Если $n\geqslant 3$, $m\geqslant 3$, $1/2\in R$, $1/2\in S$, то существуют центральные идемпотенты e, f в кольцах матриц R_n и T_m, соответственно, кольцевой изоморфизм $\theta: eR_n\to fT_m$, кольцевой антиизоморфизм $\tau: (1-e)R_n\to(1-f)T_m$ такие, что $\varphi(A)=(\theta eA+\tau((1-e)A^{-1})$ для всех $A\in E(n, R)$ (И. З. Голубчик и А. А. Михалев [45]). Для коммутативных колец R, T и при $n\geqslant 4$ аналогичный результат справедлив для групп $GL(n, R)$, $SL(n, R)$ (ограничение о делении на 2 не накладывается; см. В. М. Петечук [115]).

Эти общие результаты в некоторой степени обесценивают разработанную О'Мирой теорию изоморфизмов линейных групп, богатых трансвекциями. Следует оговориться, однако, что группа, богатая трансвекциями, не обязана лежать между $E(n, R)$ и $GL(n, R)$ для подходящего кольца R. Естественно возникает вопрос об описании групп, богатых трансвекциями. Это было сделано В. Н. Сережкиным ([129] для случая поля и [130] для случая тела) и, независимо, Васерштейном [421]. Оказалось, что всякая подгруппа $G\subset GL(n, T)$, богатая трансвекциями, содержит $E(n, R)$ для некоторого подкольца R основного тела T, причем T — наименьшее тело, содержащее R.

Случай $n=2$, как известно, гораздо более сложен. Примеры нестандартных автоморфизмов, а также результаты, устанавливающие при определенных ограничениях стандартность автоморфизмов двумерных групп, можно найти в работах [48, 49, 53, 54, 173, 336, 339, 380, 381].

Изложению симплектической версии метода вычетных пространств посвящена книжка О'Миры [357] (имеется русский перевод) (см. также [134])*. В. М. Петечук [110] доказывает стандартность автоморфизмов симплектических групп $Sp(2n, R)$, $n\geqslant 3$, над локальным кольцом R с полем вычетов характеристики 2 (соответствующий результат для случая полей вычетов 2 был известен ранее). Заметим, что в [357] и в обзоре [102] обсуждается нестандартный автоморфизм группы $Sp(4, R)$, где R — кольцо характеристики 2 (т. е. $2R=0$). Этот автоморфизм, в действительности, индуцируется автоморфизмом системы корней типа C_2 (РЖМат, 1975, 11А304 К, § 10, пример (в) после теоремы 28) и, следовательно, автоморфизмом алгебры Ли $Sp(4, R)$. Вообще, автоморфизм симплектической группы над кольцом следовало бы называть стандартным, если он индуцируется автоморфизмом соответствующей алгебры Ли над этим кольцом. Обобщенно говоря, стандартно то, что возникает из соответствующего линейного объекта.

Теория автоморфизмов и гомоморфизмов унитарных и ортогональных групп разрабатывается в работах [197, 254, 285, 287, 288, 323] (области целостности), [284] (локальные кольца). В обзоре [286] сформулированы общие проблемы и гипотезы относительно описания автоморфизмов и гомоморфизмов классических групп над кольцами. Заметим, что прогресс, достигнутый в самое последнее время в теории автоморфизмов полной линейной группы над кольцами, еще, в сущности, не коснулся классических групп. Несомненно, однако, что и здесь в ближайшее время произойдет перестройка, которая поднимет теорию на значительно более высокий уровень общности.

§ 5. Образующие и соотношения

Один из основных аспектов этого круга вопросов связан с заданием групп Шевалле над кольцами при помощи образующих и соотношений, приспособленных к системе корней. В классическом случае речь идет о задании специальной линейной группы соотношениями между элементарными матрицами. Точнее говоря, эти соотношения задают группу Стейнберга $St_n(\Lambda)$ над кольцом Λ; при этом имеется естественный гомоморфизм группы Стейнберга на группу $E_n(\Lambda)$, порожденную элементарными матрицами. Пусть $K_{2,n}(\Lambda)$ — ядро гомоморфизма. Для стабильной группы мы получаем эпиморфизм $St(\Lambda)\to E(\Lambda)$, ядро которого обозначают через $K_2(\Lambda)$. Исследование отображения $\Lambda\to K_2(\Lambda)$ является одним из направлений алгебраической K-теории.

Группа $E_n(\Lambda)$, $n\geqslant 2$, как известно, совпадает со своим коммутантом; для групп с этим свойством мультипликатор Шура определяют как ядро универсального центрального расширения. При этом мультипликатор Шура такой группы G канонически изоморфен второй группе когомологий $H^2(G, Z)$. М. С. Туленбаев [153] доказал, что для кольца Λ, которое конечно порождено как модуль над своим центром, мультипликатор Шура группы $E_n(\Lambda)$ при $n\geqslant 5$ изоморфен $K_{2,n}(\Lambda)$; в частности, эта группа лежит в центре группы Стейнберга $St_n(\Lambda)$. В ходе доказательства этой теоремы получается новое представление

* Чтобы заглавие работы [134] не ввело в заблуждение, процитируем: «Хорошо известно, что в случае симплектических групп основное тело автоматически является полем, однако мы не будем этим пользоваться...», см. [134], стр. 726

группы Стейнберга $\mathrm{St}_n(\Lambda)$ при $n\geqslant 4$ образующими и соотношениями (см. также [295]). Более подробно этот круг вопросов рассмотрен в [146] (§§ 6, 7) и в [192].

В ряде работ предлагаются задания различных классических групп образующими и соотношениями иных типов. Например, Ж. С. Сатаров указал систему образующих и соотношений, задающих унитарную группу над комплексным полем [127], над локальным полем [126], над полем из четырех элементов [125]. Образующие и соотношения симплектической и ортогональной групп над конечными полями характеристики 2 указаны Финкельштейном и Соломоном [242].

В серии работ Эллерса [226, 227, 228, 229, 230] изучается вопрос о выводимости соотношений между образующими типа псевдоотражений из наиболее коротких соотношений. Например, в [230] установлено, что каждое соотношение между псевдоотражениями в проективной линейной группе степени n есть следствие соотношений длины $\leqslant 4$ и длины n. См. также [355].

Еще одна тема — оценки наименьшего числа множителей в записи элемента группы через заданную систему образующих. Так, Дьякович и Мальцан [217] нашли точную формулу для наименьшей длины записи в виде произведений отражений для элементов ортогональной группы ненулевого индекса над полем вещественных чисел (см. также Мальцан [331]). Симплектическую группу над кольцами специального вида с этой точки зрения рассматривал Исибаси [274, 276, 279] (для случая поля ответ был известен ранее). Он же рассматривал вопрос о кратчайшем представлении элементов ортогональной группы над некоторыми кольцами в виде произведения симметрий [275, 281]; см. также его работу [277] об унитарной группе.

Отметим результат Бера [182] о том, что группа $\mathrm{SL}_3(\mathbf{F}_q[t])$ не является конечно представимой. В действительности, автор доказывает подобный результат также для других групп Шевалле ранга 2 (при условии, что поле $\mathbf{F}_q$ не содержит корня четвертой степени из 1). Доказательство опирается на технику геометрического характера, разработка которой восходит к теории Серра [388] групп, действующих на деревьях. Упомянем здесь также статью Суле [398] о группах Шевалле над кольцами полиномов, основанную на той же технике.

Глава 2

ПОДГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

§ 6. Строение бесконечных линейных групп

Г. А. Маргулис и Сойфер [95, 332] доказали, что в конечно порожденной линейной группе G все максимальные подгруппы имеют конечный индекс тогда и только тогда, когда G — конечное расширение разрешимой группы. Как отмечают авторы, их результат получен в связи с вопросом В. П. Платонова (1971): существуют ли в $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$, $n\geqslant 3$, максимальные подгруппы бесконечного индекса? Работа [95] дала повод В. П. Платонову и, независимо, Прасаду поставить вопрос, всякая ли максимальная подгруппа бесконечного индекса в $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$, $n\geqslant 3$, содержит свободную подгруппу конечного индекса. В [96, 332] дан отрицательный ответ. Более того, доказано, что $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$, $n\geqslant 4$, обладает максимальной подгруппой бесконечного индекса с абелевой подгруппой $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

Отметим следующий результат Басса [179]: если G — линейная группа с конечным числом образующих и для некоторого элемента $g\in G$ уравнение $x^p=g$ имеет решение для бесконечного множества простых чисел p, то элемент g имеет конечный порядок. Это используется Бассом для изучения идемпотентов в групповых кольцах линейных групп характеристики 0.

Опираясь на результаты Серра [388], Басс [180] прояснил строение линейных групп степени 2. Им доказана следующая

Теорема. Пусть F — поле, конечно порожденное над своим простым подполем, и $\bar{F}$ — его алгебраическое замыкание. Пусть $\Gamma\subset \mathrm{GL}(2, F)$ — группа и Γ_u — подгруппа, порожденная всеми унипотентными элементами группы Γ. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

(а) Γ/Γ_u обладает бесконечной циклической факторгруппой;

(б) $\Gamma=\Gamma_0 \underset{\Lambda}{*} \Gamma_1$ — свободное произведение с объединенной подгруппой Λ, причем $\Gamma_0\neq\Lambda\neq\Gamma_1$ и каждая конечно порожденная унипотентная подгруппа группы Γ сопряжена в Γ с подгруппой группы Γ_0 или Γ_1;

(в) Γ сопряжена в $\mathrm{GL}(2, \bar{F})$ с группой треугольных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, где a, d — корни из единицы;

(г) Γ сопряжена с подгруппой группы $\mathrm{GL}(2, A)$, где A — подкольцо поля $\bar{F}$ и аддитивная группа кольца A конечно порождена.

В частности, если поле F имеет простую характеристику, то A — конечное поле, так что в случае (г) группа Γ конечна.

Басс [180] вводит и исследует группы целого типа n-представлений над областью A; это такие группы G, для которых каждое представление $\rho: G\to \mathrm{GL}(n, K)$, где K — поле частных кольца A, обладает тем свойством, что следы всех матриц $\rho(G)$ являются целыми над A. Группа G называется группой целого типа над A, если она является n-целой для любого натурального n. Оказывается, что свойство быть целой группой над A замкнуто относительно расширений групп, а также относительно прямых произведений (и, очевидно, относительно конечных расширений). Басс отмечает, что если F — поле алгебраических чисел и G — алгебраическая группа, определенная над F, то ее группа F-точек является целой над полем рациональных чисел. Группа $SL(n, \mathbf{Z})$ является $\mathbf{Z}$-целой при $n \geqslant 3$. Отметим, что группы 2-целого типа возникли в связи с исследованием подгрупп группы SL_2 в работе Серра [387] (см. также теорему Басса о подгруппах группы SL_2, приведенную выше).

Альперин и Шален [165, 166] получили ряд содержательных результатов о когомологической размерности линейных групп. Пусть $\Gamma \subset GL(n, A)$, где A — конечно порожденная область целостности характеристики 0, $n>0$. Доказано, что группа Γ обладает подгруппой конечного индекса и конечной когомологической размерности тогда и только тогда, когда числа Гирша конечно порожденных унипотентных подгрупп группы Γ ограничены в совокупности (напомним, что числом Гирша полициклической группы H называется число бесконечных факторов нормального ряда группы H с циклическими факторами). В частности, из этой теоремы следует, что все конечно порожденные подгруппы в $GL(n, \mathbf{Q})$, где $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел или в унитарной группе $U(n, \mathbf{C})$, или в мультипликативной группе конечномерного тела характеристики 0, обладают подгруппой конечного индекса конечной когомологической размерности.

В 1965 г. В. П. Платонов поставил вопрос, является ли всякая простая бесконечная периодическая линейная группа группой Шевалле нормального или скрещенного типа. Кегель [303] заметил, что это следовало бы из конечности числа спорадических простых конечных групп. А. В. Боровик [18] анонсировал решение этой задачи для полей нечетных характеристик, разумеется, не используя классификации простых конечных групп. Доказательство А. В. Боровика имитирует технику, применяемую для классификации конечных простых групп компонентного типа, но удачное использование бесконечности исходной группы позволяет избежать многих трудностей, преодоление которых в случае конечных групп требует больших усилий.

Обобщенные тождества в линейных группах изучаются в работах И. З. Голубчика и А. В. Михалева [43, 44] и Г. М. Томанова [151, 152]. Пусть G — произвольная группа и F — свободная группа со счетным множеством образующих $X_1, X_2, \ldots$ Пусть H — свободное произведение групп G и F и пусть $h \in H$. Элемент $h \neq 1$ называется обобщенным тождеством группы G, если $\varphi h = 1$ для любого гомоморфизма φ группы H в G. Можно несколько расширить это понятие: пусть E — подгруппа группы G. Элемент $h \in H$ будем называть обобщенным тождеством группы E с коэффициентами в G, если $\varphi h = 1$ для любого гомоморфизма $\varphi : H \to G$ такого, что $\varphi(F) \subset E$. Удобно элементы группы G, входящие в каноническое выражение для элемента h, называть коэффициентами элемента h. Наличие обычного тождества на неединичной нормальной подгруппе группы G влечет наличие обобщенного тождества на G. Известно, что линейные

группы над полем с обычным тождеством — это в точности конечные расширения разрешимых линейных групп (В. П. Платонов, 1967). Вопрос о существовании обобщенного тождества в линейной группе G над полем легко сводится к случаю, когда связная компонента замыкания $\bar{G}$ группы G в топологии Зарисского — простая алгебраическая группа; кроме того, основное поле можно считать алгебраически замкнутым. В [152] доказано, что в группе $G \subset PGL(n, K)$ не выполняются обобщенные тождества с коэффициентами в $PGL(n, k)$ тогда и только тогда, когда $\bar{G} \supset PSL(n, K)$ и $|K| = \infty$. Для групп $G = PSp$ и $G = PSO$ в [152] явно указаны обобщенные тождества с коэффициентами в G, а также получены условия на коэффициенты элемента h, при выполнении которых h не является обобщенным тождеством классических групп. Отсутствие некоторых видов тождественных соотношений с коэффициентами в $GL(n, T)$ на классических группах над произвольным телом T устанавливается в работах И. З. Голубчика и А. В. Михалева [43, 44].

В работах В. С. Конюха [76, 77] дано описание неабелевых примитивных максимальных локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$, где P — произвольное поле; показано, что существование таких подгрупп определяется свойствами факторгрупп $\bar{P}^*/\bar{P}^{*p}$, где P^* — мультипликативная группа поля P и p — простой делитель числа n. В этих терминах решен вопрос о конечности числа классов сопряженности таких подгрупп в $GL(n, P)$.

В ряде работ изучается вопрос о свободе группы, порожденной явно записанными унипотентными матрицами определенного вида (см. [61, 62, 63, 100, 131, 382]).

В работе И. Д. Иванюты [60] описаны силовские p-подгруппы стабильной линейной группы над полем из q элементов, причем $p>2$ не делит q.

§ 7. Классические группы и их подгруппы

Книжка Хигмана [264] представляет собой вводный курс лекций о классических группах над полями. Изоморфизмам симплектических групп над кольцами посвящена книга О'Миры [357]; в первой части этой книги дается изложение простейших свойств симплектических групп над полями. Результаты последних лет о классических группах над телами отражены в обзоре автора ([55], гл. II), и мы здесь не будем дублировать этот материал. Отметим, что там довольно подробно обсуждаются такие вопросы, как строение специальной линейной группы над телом и решение проблемы Таннаки—Артина (по этой теме см. также [120]), нормальное строение анизотропных групп, а также строение некоторых классов подгрупп классических (прежде всего полной линейной) групп над телом. Ниже этот материал будет дополнен.

Несколько работ посвящено доказательству максимальности некоторых типов подгрупп классических групп над произвольным полем (случай конечного поля рассматривается в § 8 ниже). Дай [222] доказал, что ортогональная группа характеристики 2 и индекса $\geqslant 1$ тогда и только тогда максимальна в содержащей ее симплектической группе, когда основное поле совершенно. Для любого основного поля в [223] установлено, что нормализатор симплектической группы $\mathrm{Sp}(2n, k)$ в $\mathrm{GL}(2n, k)$ является максимальной подгруппой последней. Отметим, что это легко можно вывести из данного Маклафлиным [342] описания неприводимых линейных групп, порожденных подгруппами корневого типа, т. е. подгруппами, сопряженными в $\mathrm{GL}(2n, k)$ с группой матриц вида $\mathrm{diag}(\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}, 1_{n-2})$. Вопрос о том, является ли нормализатор ортогональной группы в $\mathrm{GL}(n, k)$ максимальной подгруппой последней, для произвольного поля k, насколько нам известно, не рассматривался (здесь характеристика поля отлична от 2). Общий вопрос можно сформулировать следующим образом. Пусть k — поле характеристики $p=0$, $G\subset H$ — связные k — определенные алгебраические группы, $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{h}$ — их алгебры Ли и $G_k=H_k$ — их группы k-точек соответственно. Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является максимальной подалгеброй в $\mathfrak{h}_2$. Верно ли, что нормализатор группы G_1 в G_2 является максимальной подгруппой в G_2? Этот вопрос имеет смысл и для $p>0$, но требует уточнения, которое учитывало бы особенности поведения алгебр Ли алгебраических групп ненулевых характеристик. С этой точки зрения, уместно, как нам кажется, рассматривать и серию работ Кинга [305, 306, 307, 308]. Так, в [306] он доказывает максимальность подгрупп, стабилизирующих некоторое вполне изотропное пространство, в ортогональной группе над произвольным полем характеристики $\neq 2$; случай характеристики 2 рассмотрен отдельно [308]. Это в точности максимальные параболические подгруппы ортогональной группы. Заметим, что максимальные параболические подгруппы группы G_k k-точек связной алгебраической линейной группы, определенной над произвольным полем k, в действительности максимальны в G_k как абстрактные группы (см. РЖМат, 1967, 6А218, следствие 5.18). В [305] доказывается максимальность подгрупп, стабилизирующих некоторые невырожденные подпространства. В [307] доказана максимальность некоторых типов импримитивных (или блочно-мономиальных) подгрупп в классических группах над любым полем. Отметим, что некоторые из этих результатов можно вывести из описания подгрупп, содержащих группу диагональных матриц. Напомним, что в настоящее время имеется практически исчерпывающее описание подгрупп полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, T)$ $|T|>2$, содержащих группу диагональных матриц $D(n, T)$ для любого тела T (см. [6, 9, 15, 27, 73, 74]). (Стоит, однако, оговориться, что задача описания подгрупп специальной линейной группы над полем (например, рациональных чисел), содержащих диагональ, даже для матриц степени 2 не решена). Для полной симплектической группы $\mathrm{GSp}(2l, P)$ Н. А. Вавиловым и Е. В. Дыбковой [31], для полной ортогональной группы $\mathrm{GO}(2l, P)$ индекса l Н. А. Вавиловым [423] (P — любое поле, $|P|>7$, $\mathrm{char}(P)\neq 2$) найдены подгруппы, содержащие группу диагональных матриц.

Следует отметить, что диагональные подгруппы классических групп зависят от того, в каком базисе заданы классические группы. Выше речь шла о диагональных подгруппах классических групп, заданных в базисе Витта. Серия работ З. И. Боревича и С. Л. Крупецкого [17] и С. Л. Крупецкого [84, 85, 86, 87, 90] посвящена описанию содержащих диагональ подгрупп унитарной группы над полем, причем эти группы задаются в ортогональном базисе. Полное описание удается получить лишь для весьма специальных полей, а именно: (1) конечного поля; (2) квадратичного расширения евклидова подполя поля вещественных чисел; (3) неразветвленного квадратичного расширения локального поля характеристики, отличной от 2. В [89] получено описание содержащих диагональ подгрупп унитарной группы над телом вещественных кватернионов. Следует подчеркнуть, что в случае (3) группа диагональных матриц записывается над кольцом O целых элементов соответствующего локального поля, и, следовательно, задача включает в себя описание содержащих диагональ унитарных подгрупп над кольцом O.

С точки зрения теории алгебраических линейных групп, диагональные подгруппы классических групп представляют собой разложимые торы, если группа записана в базисе Витта. Рассматривают также задачу описания подгрупп групп Шевалле, содержащих максимальные (не обязательно разложимые) торы. Случай конечного поля в достаточно общей ситуации рассмотрен Зейцем [384, 385]. Первым примером результата такого рода может служить работа Кантора [298]. Для случая бесконечного поля (и тем более, кольца) наиболее естественно рассматривать разложимые торы. Кроме того, трудности, не преодоленные пока даже для группы SL, заставляют рассматривать в этом контексте расширенные группы Шевалле (упрощенно говоря, расширенные при помощи диагональных автоморфизмов такие, как GL, GSp, GO). Описание подгрупп расширенных групп Шевалле над полем, содержащих максимальный разложимый тор, анонсировано Н. А. Вавиловым* (пред-

* Вавилов Н. А., О подгруппах расширенных групп Шевалле, содержащих максимальный тор. XIV Всесоюзная алгебр. конф. Тезисы, ч. I. Ленинград, Ленингр. ун-т, 1981, 26—27.

полагается, что основное поле содержит не менее семи элементов и его характеристика отлична от 2 и 3 в случае, если система корней содержит корни разной длины).

В работе М. Т. Эльбаради [158] найдены следующие разложения классических групп над произвольным полем в произведение подгрупп: $SL_{2n}=SL_{2n-1}\cdot Sp_{2n}$; $SO_{2m}=SL_m\cdot SO_{2m-1}$ (здесь ортогональные группы — максимального индекса, а группа SL_m реализована как подгруппа вида $\operatorname{diag}(A, \bar{A}^{-1})$, $A\in SL_m$ в ортогональной группе, записанной в базисе Витта); $O_7=G_2\cdot O_5$, где G_2 — семимерное представление алгебраической группы типа G_2, естественно возникающее из алгебры Кэли—Диксона.

Максимальные унипотентные абелевы линейные группы изучаются в работах [69, 70, 361], а для других классических групп — в [362, 448].

§ 8. Конечные линейные группы

Это направление теории линейных групп в значительной мере отражено в обзоре автора [55]. Именно, там изложены следующие темы: исследования связей между степенью конечной линейной группы и строением ее силовских подгрупп (из самых последних результатов отметим [239]; группы, порожденные матрицами с минимальным полиномом степени 2; классификация конечных линейных групп, порожденных псевдоотражениями (как в нулевой, так и в положительной характеристике); группы, порожденные матрицами с двумя отличными от 1 собственными значениями; группы малых степеней; описание групп, содержащих заданные группы определенных типов. Некоторые из этих тем затронуты также в кратких обзорах Уэйлса [434] и Кантора [299]. Эти темы, разумеется, не исчерпывают исследования в области конечных линейных групп. Здесь мы дополним [55] изложением не затронутых там вопросов.

В теории конечных групп находит многочисленные важные применения теорема Холла и Хигмена (1958) о p-разрешимых линейных группах (применению линейных методов в теории конечных групп посвящена книга Блэкберна и Хупперта [271], где, в частности, обсуждается и теорема Холла—Хигмена). Пусть G — конечная линейная группа над полем характеристики $p>0$, которая является расширением неприводимой экстраспециальной q-группы ($q\neq p$) при помощи циклической группы C порядка p^r (экстраспециальная группа есть нильпотентная группа класса 2 с циклическим центром). Теорема утверждает, что минимальный полином элемента порядка p^r группы C имеет степень p^r, за исключением некоторых точно описываемых случаев. Пусть V — пространство, в котором действует G. Серия работ Бергера [185, 186, 187] (остальные работы этой серии прореферированы ранее 1978 г.) посвящена изучению действия группы C в V. В частности, доказано, что в неисключительных случаях ограничение $V|C$ содержит регулярный C-подмодуль. В работе Кнаппа и Шмида [314] показано, что в исключительных случаях модуль $V|C$ однороден, т. е. является прямой суммой изоморфных модулей, причем размерность каждого из них равна степени минимального полинома порождающего элемента группы C. Как известно, последняя величина равна p^{n-a} (p^a-1) для некоторого a. Доказано, что число a есть дефект блока, которому принадлежит рассматриваемое неприводимое представление. Пусть теперь H — неприводимая p-разрешимая группа над полем характеристики p. Элемент c порядка p^r назовем исключительным, если степень его минимального полинома строго меньше p^r. Хартли [259] изучает расположение исключительных элементов в группе H; например, при $p\neq 3$ доказано, что исключительные элементы лежат в $O_{p',p}(G)$, т. е. в нормальной подгруппе, которая является расширением p'-группы при помощи p-группы. При $p=3$ можно гарантировать включение исключительных элементов в группу $O_{3',3,3',3}$ и этот результат неулучшаем (см. также [258]).

В связи с потребностями теории конечных групп исследуются и классифицируются конечные линейные группы характеристики 2 с предписанными свойствами специального характера. Так, Куперстейн и Мэйсон [206] указали список неприводимых $\mathbf{Z}_2$-модулей V конечных групп Шевалле G характеристики 2 со следующим свойством: группа G содержит инволюцию a такую, что коразмерность пространства $(a-1)V$ в V не превосходит 2-ранга группы G (т. е. максимального ранга элементарных абелевых 2-подгрупп). Там же частично описаны неприводимые $\mathbf{Z}_2G$-модули V этого же класса групп со свойством: группа G обладает элементарной абелевой подгруппой A такой, что коразмерность пространства A-неподвижных точек в V не превосходит ранга группы A. Подобный вопрос для знакопеременных групп и известных спорадических групп рассмотрен Ашбахером [169]. Отметим, что там же поставлен вопрос (восходящий к Глауберману) об описании конечных групп G без нормальных силовских 2-подгрупп, обладающих $\mathbf{Z}_2G$-модулем V, на котором некоторая элементарная абелева группа A порядка 4 действует квадратично (т. е. $[A, [A, V]]=0$). Здесь $\mathbf{Z}_2$ — поле из двух элементов.

Демпвольф [210] определил конечные неприводимые группы $G\subset GL(V)$ характеристики 2 со следующими свойствами:

(а) порождается такими инволюциями $g\in G$, что $(1+g)$ — матрица ранга 2;

(б) G содержит элементарную абелеву группу E порядка 8 такую, что матрицы $1+g$ $(g\in G)$ все ранга $\leqslant 2$, и $\dim W=2$, где $W=\sum\limits_{g\in E}(g+1)V$.

Дай [221, 222], по существу, описал подгруппы группы $GL(n, 2)$, содержащие симметрическую или знакопеременную группу степени $n+1$ или $n+2$ в ее неприводимом представлении степени n. В то время как для рассмотрения симметрической группы достаточно использовать сравнительно элементарную работу Маклафлина (РЖМат, 1969, 10А102) о классификации порожденных трансвекциями подгрупп группы $SL(n, 2)$, рассмотрение знакопеременной группы требует иного подхода; автор использовал достаточно глубокие классификационные результаты теории конечных простых групп.

Классификация конечных неприводимых линейных групп положительной характеристики, порожденных отражениями, дана в работах [56, 57, 58, 429, 432]. Любопытно, что для групп этого класса удается решить обратную задачу Галуа для некоторых важных полей (Г. В. Белый [4]). С использованием этой классификации описаны неприводимые конечные линейные группы степеней 4, 5 в характеристике $p>5$ (см. [59, 143, 213, 431, 353], а также работы [31, 32] библиографии предыдущего обзора [101]).

В работах Д. А. Супруненко [135, 136] и Т. И. Копыловой [80, 81, 82] изучаются минимальные неприводимые линейные группы, т. е. группы, каждая собственная подгруппа которых приводима. В [135] показано, что минимальная группа простой степени над полем вещественных чисел либо разрешима, либо проста; кроме того, описываются вещественные минимальные неприводимые группы нечетной степени, обладающие абелевой нормальной подгруппой, факторгруппа по которой циклична. В [136] этот класс групп изучается для произвольного основного поля, но с дополнительными теоретико-групповыми ограничениями. Упомянутые работы Т. И. Копыловой посвящены описанию минимальных неприводимых разрешимых групп степени $p^?$, где p — простое число (см. также [427]).

В [183, 23] описаны подгруппы Картера полной линейной группы над конечным полем.

Коснемся работ о конечных линейных группах над телом.

Хартли и Шахаби [260], исходя из конечности числа спорадических простых конечных групп, доказывают следующий аналог известной теоремы Жордана:

Существует функция $f: N \to N$ такая, что каждая конечная линейная группа степени n над произвольным телом характеристики 0 обладает двуступенно разрешимой нормальной подгруппой, индекс которой ограничен числом $f(n)$.

Титс [417] отмечает, что конечная простая группа Холла—Янко порядка 604800 реализуется трехмерными матрицами над телом кватернионов.

Хикари [265, 266] изучает конечные группы (2×2)-матриц над произвольным телом.

Геометрические вопросы, касающиеся конечных линейных групп, рассмотрены в § 9.

§ 9. Замечания о геометрии линейных групп

С геометрией традиционно связывают общую теорию классических групп, даже над кольцами (см. [336]). Нам нет нужды освещать эту тему здесь, так как ей посвящен отдельный параграф. Геометрический аппарат используется при изучении дискретных групп движений пространств постоянной кривизны и дискретных подгрупп вещественных и комплексных линейных групп. Весьма поучительным является использование недавних результатов по геометрии многогранников в пространстве Лобачевского в работах [35, 107], где получены новые результаты о целочисленных ортогональных группах гиперболических квадратичных форм. Тесные связи с геометрией обнаруживает теория инвариантов. В этой области ведется интенсивная работа. Краткий обзор результатов об инвариантах бесконечных групп читатель найдет в статье Д. В. Алексеевского в (см. [1], § 7), а также в [120]. Не располагая полным списком работ по теории инвариантов конечных линейных групп, отметим [46, 268].

Разнообразные результаты об орбитах действий на V полупростых групп Ли и алгебраических групп в их представлениях в $GL(V)$ читатель найдет в обзорах Д. В. Алексеевского [1] и В. П. Платонова и А. С. Рапинчука [120]. Отметим здесь работу Каца [291], в которой содержится описание комплексных алгебраических линейных групп, имеющих конечное число орбит в их естественном действии на векторном пространстве.

Было бы безнадежно осветить здесь сколько-нибудь полно многочисленные связи геометрии с теорией линейных групп. Мы лишь попытаемся прокомментировать работы, в которых рассматривается естественное действие линейной группы в ее векторном пространстве.

Фолкляйн [424] доказал, что если группа $G\subset GL(n, K)$ действует транзитивно на множествах r линейно независимых векторов в K^n и $r\geqslant\min\left(\frac{n}{2}, 2\right)$, то $G\supset SL(K^n)$.

В работе Камерона и Кантора [198] описаны линейные группы над конечным полем, действующие дважды транзитивно на множестве прямых: такая группа либо содержит $SL(K^n)$, либо изоморфна знакопеременной группе A_7, действующей в четырехмерном пространстве над полем из двух элементов. Там же описаны группы, действующие транзитивно на «антифлагах» («антифлагом» авторы называют пару, состоящую из гиперплоскости и не лежащей на ней прямой). Подобный результат получен для классических групп индекса $\geqslant3$, но множество антифлагов понимается в более узком смысле — прямая и гиперплоскость предполагаются изотропными. В качестве следствия для классических групп (кроме $Sp(2n, 2)$) получено описание их представлений ранга 3 подстановками. Полное описание таких представлений получено Кантором и Либлером [300]. Отметим, что это эквивалентно описанию подгрупп H классических групп G с тремя двойными классами HgH $(g \in G)$.

Представляет интерес задача об описании линейных групп, действующих транзитивно на множестве ненулевых векторов. Пример такой группы доставляет мультипликативная группа K^* поля K, если поле K реализовано в регулярном представлении над подполем k и индекс $K:k=n<\infty$; таким образом, $K^* \subset \mathrm{GL}(n, k)$. Поскольку любая группа $H \supset K^*$ также транзитивна, то сформулированная выше задача включает описание групп, содержащих K^*. Образующая мультипликативной группы конечного поля K в этой ситуации называется циклом Зингера; Кантор [298] описал линейные группы $H \subset \mathrm{GL}(n, k)$, $|k|=q<\infty$, содержащие цикл Зингера. Как оказалось, такая группа заключена между $\mathrm{GL}(n/s, q^s)$ и ее нормализатором в $\mathrm{GL}(n, k)$; здесь s делит n и $\mathrm{GL}(n/s, q^s)$ вложена в $\mathrm{GL}(n, k)$ естественным образом. Отметим, что известны разрешимые транзитивные группы (см., например, [271]).

Действие полной линейной группы на своем векторном пространстве индуцирует вложение ее в симметрическую группу. Этим вложением полной линейной группы интересовался еще Жордан. Помимо действия на векторах, естественно рассматривать действие на прямых и, в более общем контексте, на множестве подпространств фиксированной размерности. Возникающая при этом группа подстановок изоморфна группе перестановок смежных классов по соответствующей максимальной параболической подгруппе, т. е. подгруппе, стабилизирующей подпространство соответствующей размерности. Кантором (РЖМат, 1975, 4В385)*, со ссылкой на Титса, была сформулирована общая задача описания надгрупп групп подстановок, возникающих из действия конечных групп Шевалле на смежных классах по фиксированной максимальной параболической подгруппе. Термин «надгруппа» означает подгруппу симметрической группы, содержащую заданную группу подстановок. Будем говорить, что группа подстановок почти максимальна, если каждая ее надгруппа либо лежит в ее нормализаторе, либо содержит знакопеременную группу. Известно, что при $n \geqslant 3$ группа $\mathrm{SL}(n, q)$, $|q|<\infty$ почти максимальна в ее действии на прямых; элементарное доказательство, использующее только результаты Жордана и Маркграфа прошлого века, опубликовано в [189]. Некоторые результаты для $n=2$ получены в [190]. В. А. Устименко-Бакумовский [154] доказал, что эта группа почти максимальна в ее действии на подпространствах произвольной фиксированной размерности m, где $1 \leqslant m < n$. Ф. Г. Лазебник [92] и Лист [328] доказали почти максимальность ортогональной группы над полем из двух элементов в ее действии на сингулярных прямых. В. В. Ждан-Пушкин [52], используя метод из [154], установил почти максимальность конечных унитарных и ортогональных групп индекса $\geqslant 3$ в их действии на изотропных прямых. В [52] также описаны надгруппы симплектической группы над конечным полем в ее действии на прямых (см. еще [211, 220]).

* Заметим, что вопросы геометрии конечных линейных групп затрагиваются в ряде других работ этого автора в 1970—77 гг.

§ 10. Группы целочисленных матриц

Конечные группы над Z. Продолжаются исследования конечных групп целочисленных матриц, главным образом, с точки зрения многомерной кристаллографии. В идеале необходимо было бы дать полное описание конечных групп целочисленных матриц с точностью до эквивалентности над $\mathbf{Z}$. Эта задача полностью решена только при $n=3$ (еще в прошлом веке) и при $n=4$ в семидесятых годах, уже с применением ЭВМ. В дальнейшем усилия сосредоточились на описании максимальных конечных групп целочисленных матриц. После работы С. С. Рышкова (1972) следующий шаг сделали Плескен и Пост [366, 367, 368, 369], которым удалось определить классы сопряженных абсолютно неприводимых максимальных конечных целочисленных групп для $n=6$, 7, 8, 9. В их методике сначала описываются с точностью до целочисленной эквивалентности минимальные абсолютно неприводимые конечные подгруппы в $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$, т. е. группы, все собственные подгруппы которых приводимы. При малых n эти группы устроены довольно просто. После этого находятся их инвариантные целочисленные квадратичные формы (если группа абсолютно неприводима, то такая форма единственна с точностью до множителя), а затем ее группа целочисленных автоморфизмов. Последняя конечна и, в действительности, является максимальной конечной группой целочисленных матриц, содержащей исходную минимальную группу. Число $k(n)$ максимальных абсолютно неприводимых конечных подгрупп в $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$, $n \leqslant 9$, согласно Плескену и Посту, дается следующей таблицей:

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$k(n)$	2	3	6	7	17	7	26	20

Отметим, что эти авторы также указали полный список (с точностью до множителя $\mathbf{Z}$-эквивалентности) невырожденных положительно определенных квадратичных форм с абсолютно неприводимой группой целочисленных автоморфизмов при $n \leqslant 9$.

А. А. Кирилюк и В. П. Рудько [68] рассмотрели максимальные разрешимые конечные неприводимые группы целочисленных матриц степени p, где p — простое число. Получена оценка сверху на число классов $\mathbf{Z}$-эквивалентности таких групп, а в некоторых случаях — точная формула.

Следует отметить, что исследования конечных групп целочисленных матриц мотивируются в значительной степени многомерной кристаллографией. По этой теме отметим подходящий для начального ознакомления обзор Фаркаша [233]. Основной объект этой теории — кристаллографическая группа, определяемая как дискретная группа Г движений евклидова пространства R^n с фундаментальной областью конечного объема. Хорошо развита теория дискретных и, в частности, кристаллографических групп движений евклидова пространства, порожденных отражениями относительно гиперплоскостей. В. Л. Попов [371] получил классификацию порожденных отражениями дискретных групп движений комплексных эрмитовых пространств. Развивается теория дискретных и кристаллографических групп движений и в других пространствах постоянной кривизны (см. обзор [1], § 4.3), причем эта теория оказывает влияние и на некоторые аспекты теории линейных групп. В частности, с теорией порожденных отражениями дискретных групп движений пространства Лобачевского связаны недавние результаты о целочисленных ортогональных группах, к обзору которых мы переходим.

Целочисленные ортогональные группы. Пусть $f=\sum_{i,j=0}^{n}a_{ij}x_ix_j$ — квадратичная симметричная форма с целыми рациональными коэффициентами. Обозначим через $O(f, \mathbf{Z})$ группу целочисленных линейных преобразований, сохраняющих форму f. Форма f называется гиперболической, если ее сигнатура имеет вид $(n, 1)$. В этом случае группа $O(f, \mathbf{Z})$ может рассматриваться как дискретная группа движений n-мерного пространства Лобачевского. С геометрической точки зрения, представляют интерес гиперболические формы, для которых группа $O(f, \mathbf{Z})$ содержит подгруппу конечного индекса, порожденную отражениями относительно векторов с положительным квадратом. В частности, геометрические соображения позволяют тогда указать явно представление группы $O(f, \mathbf{Z})$ образующими и соотношениями. В работе Э. Б. Винберга и И. М. Каплинской [37] завершена классификация унимодулярных гиперболических форм с указанным свойством (унимодулярность означает, что $\det(a_{ij})=\mp 1$). Окончательный результат таков: если f — унимодулярная гиперболическая форма, то группа $O(f, \mathbf{Z})$ содержит подгруппу конечного индекса, порожденную отражениями, тогда и только тогда, когда $n<20$. Условие унимодулярности является, конечно, весьма ограничительным. В [35] Э. Б. Винберг доказал, что при $n\geqslant 30$ группа $O(f, \mathbf{Z})$ для гиперболической формы f не содержит подгрупп конечного индекса, порожденных отражениями. Этот результат имеет геометрическую интерпретацию: в пространстве Лобачевского размерности $n\geqslant 30$

не существует арифметических дискретных групп некомпактного типа, порожденных отражениями. В действительности, результат, сформулированный выше, удается доказать также при условии, что коэффициенты a_{ij} лежат в кольце A целых элементов чисто вещественного поля K алгебраических чисел (см. [34, 35]). Более того, в пространстве Лобачевского размерности $\geqslant 30$ не существует дискретных групп компактного типа как арифметических, так и неарифметических, порожденных отражениями. Что касается случая $n<30$, то В. В. Никулин [107] доказал, что при $n\geqslant 2$ для фиксированной степени поля K существует конечное число классов подобия гиперболических форм с коэффициентами в A таких, что группа $O(f, A)$ содержит подгруппу конечного индекса, порожденную отражениями. В другой работе [108] В. В. Никулин дал полную классификацию таких целочисленных гиперболических форм f, что группа $O(f, \mathbf{Z})$ содержит подгруппу конечного индекса, порожденную отражениями относительно целочисленных векторов с квадратом 2. Эта задача возникла в связи с классификацией алгебраических поверхностей типа К3 в алгебраической геометрии (см. [108]).

Другие результаты о группах над Z. Дайер [225] вычислил «башню» автоморфизмов для групп $SL(n, \mathbf{Z})$ и $GL(n, \mathbf{Z})$ (речь идет о вычислении групп $A_i(G)$, где $A_{i+1}(G)=\mathrm{Aut}(A_i(G))$, $A_0(G)=G$ для некоторой исходной группы G). Как правило, башня состоит из одного этажа $G\subset A_1(G)$; исключения: $GL(n, \mathbf{Z})$ с четным $n>2$ — 5 этажей; $GL(2, \mathbf{Z})$ — 4 этажа; $SL(2, \mathbf{Z})$ — 8 этажей.

Когомологии подгрупп конечного индекса в $SL(3, \mathbf{Z})$ и $SL(4, \mathbf{Z})$ обсуждаются в работах Аша [170, 171]. По поводу когомологий группы $SL(3, \mathbf{Z})$ см. также [397]. Мультипликаторы Шура некоторых целочисленных классических групп вычислены Стейном [404]. Подробнее эта тема изложена в [120] (§ 2.9).

В статье [346] изучаются регулярные эллиптические элементы в модулярной группе Зигеля $Sp(2n, \mathbf{Z})$, т. е. элементы g конечного порядка, для которых размерность пространства g-неподвижных точек в присоединенном представлении равна n.

Бендер [184] в явной форме выписывает две образующие и 8 соотношений, определяющих группу $Sp(4, \mathbf{Z})$. Смит [394] нашел систему образующих и соотношений для ядра естественного отображения группы $GL(n, \mathbf{Z})$ на $GL(n, 2)$.

Следует иметь ввиду, что такие вопросы о целочисленных классических группах, как когомологии, нормальные подгруппы и конгруэнцпроблема, образующие и соотношения, рассматриваются в настоящее время как часть общей проблемы исследования арифметических подгрупп алгебраических линейных групп. Читателю, желающему ознакомиться с современными исследованиями в таком общем контексте, мы рекомендуем обзор [120], ч. II.

Модулярная группа. Пусть $G=\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ — модулярная группа. Подгруппа бесконечного индекса группы G исследовалась Статтерсом [407]. Он же в [408] дал некоторые новые характеризации подгрупп второго рода группы G. Брункер, Бернс и Уигольд [194] исследуют вопрос о существовании $2^{\aleph_0}$ неизоморфных факторгрупп группы G, принадлежащих некоторому классу групп. Этот вопрос решается для любых групп вида $\langle x, y \mid x^2=y^3=(xy)^{6p}=1\rangle$, где $p>5$ — простое число, которые, в свою очередь, являются факторгруппами группы G (так как $G=\langle x, y \mid x^2=y^3=1\rangle$). Коэн [200] доказывает, что группа $\mathrm{PSU}(3, q^2)$ для любого $q\neq 2$ является факторгруппой группы $\langle x, y \mid x^2=y^3=(xy)^n=1\rangle$ для подходящего n (указано выражение n через q). В [247] найдена рекуррентная формула для числа подгрупп заданного индекса m в G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеевский Д. В.*, Группы Ли. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия, 1982, *20*, 153—192 (РЖМат, 1983, 3А462)
2. *Антонян Л. В.*, Классификация четыревекторов восьмимерного пространства. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу с прил. к геометрии, мех. и физ. МГУ, 1981, № 20, 144—161 (РЖМат, 1981, 9А303)
3. *Балтаг И. А., Гарит В. П.*, Двумерные дискретные аффинные группы. Кишинев: «Штиинца», 1981, 118 с. (РЖМат, 1982, 2А219К)
4. *Белый Г. В.*, О расширениях Галуа максимального кругового поля. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, *43*, № 2, 267—276 (РЖМат, 1979, 8А374)
5. *Блощицын В. Я.*, Автоморфизмы общей линейной группы над коммутативным кольцом, не порождаемым делителями нуля. Алгебра и логика (Новосибирск), 1978, *17*, № 6, 639—642 (РЖМат, 1979, 11А203)
6. *Боревич З. И.*, О некоторых подгруппах полной линейной группы. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1977, *71*, 42—46 (РЖМат, 1978, 1А198)
7. —, О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1978, *75*, 22—31 (РЖМат, 1978, 9А236)
8. —, *Вавилов Н. А.*, О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1978, *75*, 32—34 (РЖМат, 1978, 9А237)
9. —, —, Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, *148*, 43—57 (РЖМат, 1979, 1А261)
10. —, —, Об определителях в сетевых подгруппах. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, *114*, 37—49 (РЖМат, 1982, 9А221)
11. —, —, О сетевом определителе над локальным кольцом Безу. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, *116*, 5—13 (РЖМат, 1983, 3А197)
12. —, —, *Наркевич В.*, О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *94*, 13—20 (РЖМат, 1980, 5А436)
13. —, *Дыбкова Е. В.*, Об индексе сетевых подгрупп в полной и специальной линейных группах над дедекиндовым кольцом. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, *148*, 58—64 (РЖМат, 1979, 1А262)
14. —, —, *Колотилина Л. Ю.*, О сопряженности сетевых подгрупп в линейных группах. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *86*, 11—18 (РЖМат, 1979, 11А197)
15. —, *Койбаев В. А.*, Подгруппы полной линейной группы над полем из пяти элементов. Алгебра и теория чисел, Орджоникидзе, Северо-осетинский ун-т, 1978, 9—37
16. —, *Колотилина Л. Ю.*, О субнормализаторе сетевых подгрупп в полной линейной группе над кольцом. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, *116*, 14—19 (РЖМат, 1983, 3А198)
17. —, *Крупецкий С. Л.*, Подгруппы унитарной группы, содержащие группу диагональных матриц. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *86*, 19—29 (РЖМат, 1979, 11А198)
18. *Боровик А. В.*, Периодические линейные группы нечетной характеристики. Докл. АН СССР, 1982, *266*, № 6, 1289—1291 (РЖМат, 1983, 3А196)
19. *Вавилов Н. А.*, Параболические подгруппы полной линейной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1977, *71*, 66—79 (РЖМат, 1977, 12А227)
20. —, Подгруппы полной линейной группы над кольцом, содержащие группу клеточно-треугольных матриц. I, II. Вестн. ЛГУ, 1977, № 19, 139—140; 1982, № 13, 5—9 (РЖМат, 1978, 7А286; 1982, 12А203)
21. —, О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1978, *75*, 43—58 (РЖМат, 1978, 6А476)
22. —, Об описании подгрупп полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *86*, 30—33 (РЖМат, 1979, 11А199)
23. —, Нильпотентные подгруппы в полной линейной группе над конечным полем, совпадающие со своим нормализатором. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *86*, 34—39 (РЖМат, 1979, 11А200)
24. —, О сопряженности подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц. Заседания Моск. мат. об-ва, окт. 1978 — апр. 1979. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 5, 216—217 (РЖМат, 1980, 2А217)
25. —, О параболических подгруппах групп Шевалле скрещенного типа над полулокальным кольцом. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *94*, 21—36 (РЖМат, 1980, 5А437)
26. —, Разложение Брюа для подгрупп, содержащих группу диагональных матриц. I, II. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1980, *103*, 20—30; 1982, *114*, 50—61 (РЖМат, 1981, 7А438; 1982, 10А386)
27. —, О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц. Вестн. ЛГУ, 1981, № 1, 10—15 (РЖМат, 1981, 7А195)
28. —, Некоторые примеры подрадикальных подгрупп в полной линейной группе над кольцом. Структурные свойства алгебраических систем. Нальчик, Кабардино-балкарский ун-т, 1981, 12—20
29. —, О подгруппах унитарной группы над полулокальным кольцом. Успехи мат. наук, 1982, *37*, № 4, 147—148 (РЖМат, 1983, 1А231)
30. —, Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, *116*, 20—43 (РЖМат, 1983, 3А199)
31. —, *Дыбкова Е. В.*, Подгруппы полной симплектической группы, содержащие группы диагональных матриц. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1980, *103*, 31—47 (РЖМат, 1981, 8А234)
32. —, *Колотилина Л. Ю.*, О нормальном строении полной линейной группы над полулокальным кольцом. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *94*, 37—39 (РЖМат, 1980, 5А438)
33. —, *Плоткин Е. Б.*, Сетевые подгруппы групп Шевалле. Зап. науч. семи-

наров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *94*, 40—49 (РЖМат, 1980, 5А439)

34. *Винберг Э. Б.*, Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности. Функц. анализ и его прил., 1981, *15*, № 2, 67—68 (РЖМат, 1981, 10А229)
35. —, Отсутствие кристаллографических групп отражений компактного типа в пространстве Лобачевского размерности $\geqslant 30$. МГУ. М., 1982. 51 с. Библиогр. 13 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 1 июля 1982 г., № 3418—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 11А135ДЕП)
36. —, Отсутствие арифметических кристаллографических групп отражений в пространстве Лобачевского размерности $\geqslant 30$. МГУ. М., 1982. 23 с. Библиогр. 12 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 1 июля 1982 г., № 3417—82Деп.) (РЖМат, 1982, 11А136ДЕП)
37. —, *Каплинская И. М.*, О группах $O_{18,1}(Z)$ и $O_{19,1}(Z)$. Докл. АН СССР, 1978, *238*, № 6, 1273—1275 (РЖМат, 1978, 7А285)
38. —, *Элашвили А. Г.*, Классификация тривекторов девятимерного пространства. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. МГУ, 1978, № 18, 197—233 (РЖМат, 1978, 9А430)
39. *Голубчик И. З.*, О полной линейной группе над ассоциативным кольцом. Успехи мат. наук, 1973, *28*, № 3, 179—180 (РЖМат, 1973, 12А259)
40. —, О нормальных делителях ортогональной группы над ассоциативным кольцом с инволюцией. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 6, 165 (РЖМат, 1976, 7А480)
41. —, Нормальные делители линейных групп над кольцами. Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат.-мех., 1978, № 6, 79
42. —, Нормальные делители в группах единиц ассоциативных колец. Автореф. канд. дисс. Ин-т мат. с вычисл. центром Акад. наук Молд. ССР. Кишинев, 1982, 9 с.
43. —, *Михалев А. В.*, Обобщенные групповые тождества в классических группах. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 6, 155—156 (РЖМат, 1981, 4А186)
44. —, —, Обобщенные групповые тождества в классических группах. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, *114*, 96—119 (РЖМат, 1982, 9А220)
45. —, —, Об изоморфизме полных линейных групп. Пятый Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей, Новосибирск, Ин-т мат. СО АН СССР, 1982, 40
46. *Гордеев Н. Л.*, Об инвариантах линейных групп, порожденных матрицами с двумя неединичными собственными значениями. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, *114*, 120—130 (РЖМат, 1982, 10А352)
47. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А.*, Силовские p-подгруппы полной линейной группы над дискретно нормированными кольцами. Докл. АН УССР, 1979, *А*, № 5, 326—329 (РЖМат, 1979, 10А161)
48. *Дроботенко В. С., Погориляк Е. Я.*, Автоморфизмы общей и специальной двумерных линейных групп над локальными кольцами. Ужгород. ун-т, Ужгород, 1981. 31 с. Библиогр. 16 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 8 июня 1981 г., № 2740—81Деп.) (РЖМат, 1981, 10А231ДЕП.)
49. —, *Росса А. Р.*, Автоморфизмы двумерной полной линейной группы над кольцом классов вычетов по mod 2^n. Материалы XXXI Итог. науч. конф. проф.-преп. состава Ужгород. ун-та. Секц. мат. н. Ужгород. ун-т, Ужгород, 1978, 188—221. Библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 29 сент. 1978 г., № 3131—78 Деп.) (РЖМат, 1979, 1А265ДЕП)
50. *Дыбкова Е. В.*, Индекс сетевой подгруппы в симплектической группе над дедекиндовым кольцом. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1978, *75*, 74—86 (РЖМат, 1978, 9А238)
51. *Ершов Ю. Л.*, Гензелевы нормирования тел и группа SK_1. Мат. сб., 1982, *117*, № 1, 60—68 (РЖМат, 1982, 6А366)
52. *Ждан-Пушкин В. В.*, Решетки надгрупп групп $PU_n(q)$, действующих

на изотропных прямых. Вопр. теории групп и гомол. алгебры. Ярославль, 1981, 38—48 (РЖМат, 1982, 2А220)

53. *Жилинская З. П., Росса А. Р.*, Автоморфизмы двумерной специальной линейной группы над кольцом классов вычетов по mod 2^n. Материалы 33 итог. науч. конф. проф.-преп. состава Ужгород. ун-та. Секц. мат. н. Ужгород, 1981, 191—211. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 11 мая 1981 г., № 2086—81 Деп.) (РЖМат, 1981, 8А229 ДЕП)
54. —, —, Автоморфизмы двумерной специальной линейной группы над коммутативным локальным кольцом. Материалы 35 науч. конф. проф.-преп. состава Ужгород. ун-та. Секц. мат. н., Ужгород, 1982, 227—239. Библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 23 авг. 1982 г. № 4640—82 Деп) (РЖМат, 1982, 12А198ДЕП)
55. *Залесский А. Е.*, Линейные группы. Успехи мат. н., 1981, *36*, № 5, 57—107 (РЖМат, 1982, 2А222)
56. —, *Сережкин В. Н.*, Конечные линейные группы, порожденные отражениями, над полями нечетных характеристик. Ин-т мат. АН БССР. Препр., 1979, № 20/76, 59 с. (РЖМат, 1980, 5А195)
57. —, —, Линейные группы, порожденные псевдоотражениями. Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. н., 1977, № 5, 9—16 (РЖМат, 1978, 3А173)
58. —, —, Конечные линейные группы, порожденные отражениями. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1980, *44*, № 6, 1279—1307 (РЖМат, 1981, 4А156)
59. —, *Супруненко И. Д.*, Классификация конечных неприводимых линейных групп степени 4 над полем характеристики $p>5$. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1978, № 6, 9—15 (РЖМат, 1979, 4А245)
60. *Иванюта И. Д.*, Силовские p-подгруппы группы $GL(q)$. Укр. мат., 1980, *32*, № 6, 813—818 (РЖМат, 1981, 6А191)
61. *Игнатов Ю. А.*, Свободные и несвободные подгруппы $PSL_2(\mathbf{C})$, порожденные двумя параболическими элементами. Мат. сб., 1978, *106*, № 3, 372—379 (РЖМат, 1978, 12А324)
62. —, Группы дробно-линейных преобразований, порожденные тремя элементами. Мат. заметки, 1980, *27*, № 4, 507—513 (РЖМат, 1980, 8А183)
63. —, Корни из единицы как несвободные точки комплексной плоскости. Мат. заметки, 1980, *27*, № 5, 825—827 (РЖМат, 1980, 9А226)
64. Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами. Сб. статей. Пер. с англ. М.: Мир, 1980, 272 с. (РЖМат, 1981, 1А226К)
65. *Кирилюк А. А.*, Минимальные неприводимые разрешимые подгруппы группы $GL(2, R_p)$. Материалы 32 итог. Науч. конф. проф.-преп. состава Ужгород. ун-та. Секц. мат. н. Ужгород, 1978, 166—190. Библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 8 июня 1979 г., № 2079—79 Деп.) (РЖМат, 1979, 10А160 ДЕП)
66. —, Конечные подгруппы группы $GL(3, \mathbf{Z}_2)$. Теор. и прикл. вопр. дифференц. уравнений и алгебры, Киев, 1978, 114—119 (РЖМат, 1979, 6А196)
67. —, Конечные подгруппы группы $GL(3, \mathbf{Z}_p)$. Материалы XXXI Итог. науч. конф. проф.-преп. состава Ужгород. ун-та. Секц. мат. н. Ужгород. ун-т. Ужгород, 1978, 222—249. Библиогр. 14 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 29 сент. 1978 г., № 3131—78 Деп) (РЖМат, 1979, 1А263ДЕП)
68. —, *Рудько В. П.*, О конечных неприводимых разрешимых подгруппах группы $GL(p, \mathbf{Z})$. Докл. АН УССР, 1980, *А*, № 8, 17—20 (РЖМат, 1980, 12А210)
69. *Князева В. Ф.*, О максимальных абелевых подгруппах группы треугольных матриц. Харьков. ун-т. Харьков, 1978. 18 с. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 8 июня 1978 г., № 1850—78 Деп.) (РЖМат, 1978, 11А221 ДЕП)
70. —, Об одном типе максимальных абелевых подгрупп группы треугольных матриц. Харьков. ун-т, Харьков, 1978. 23 с. Библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 16 марта 1979 г., № 937—79 Деп.) (РЖМат, 1979, 7А250 ДЕП)
71. *Козел П. Т., Фам Кань Зыонг*, О порядке элементов симплектической

группы. Вестн. Белорус. ун-та, 1977, сер. 1, № 3, 15—18 (РЖМат, 1978, 4А153)

72. *Койбаев В. А.*, Примеры немономиальных линейных групп без трансвекций. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1977, *71*, 153—154 (РЖМат, 1978, 1А199)

73. —, Подгруппы полной линейной группы над полем из четырех элементов. Алгебра и теория чисел (Нальчик), 1979, № 4, 21—31 (РЖМат, 1982, 8А207)

74. —, Подгруппы полной линейной группы над полем из трех элементов. Структурные свойства алгебраических систем. Нальчик, Кабардино-балкарский ун-т, 1981, 56—68

75. —, О подгруппах полной линейной группы, содержащих группу элементарных клеточно-диагональных матриц. Вестн. ЛГУ, 1982, № 13, 33—40 (РЖМат, 1982, 12А204)

76. *Конюх В. С.*, Метабелевы подгруппы полной линейной группы над произвольным полем. Докл. АН БССР, 1978, *22*, № 5, 389—392 (РЖМат, 1978, 10А153)

77. —, Примитивные локально нильпотентные линейные группы. Ин-т мат. АН БССР. Препр., 1980, № 18/98, 25 с. (РЖМат, 1981, 9А154)

78. *Копейко В. И.* Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов. Мат. сб., 1978, *106*, № 1, 94—107 (РЖМат, 1978, 8А421)

79. *Копылова Т. И.*, Минимальные неприводимые немономиальные разрешимые линейные группы степени p^2. Ин-т мат. АН БССР. Препр., 1978, № 18/50, 20 с. (РЖМат, 1979, 3А209)

80. —, Минимальные неприводимые немономиальные разрешимые линейные группы степени p^2. Докл. АН БССР, 1978, *22*, № 11, 967—968 (РЖМат, 1979, 3А210)

81. —, О минимальных неприводимых разрешимых линейных группах. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1978, № 6, 20—22 (РЖМат, 1979, 4А273)

82. —, Минимальные неприводимые нильпотентные линейные группы степени p^2. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1979, № 5, 30—34 (РЖМат, 1980, 2А220)

83. —, Минимальные неприводимые разрешимые нильпотентные линейные группы степени p^2. Ин-т мат. АН БССР. Препр., 1979, № 11(67), 46 с. (РЖМат, 1980, 3А143)

84. *Крупецкий С. Л.*, Подгруппы ортогональной группы, содержащие группу клеточно диагональных матриц. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *94*, 73—80 (РЖМат, 1980, 5А440)

85. —, О некоторых подгруппах унитарной группы над квадратичным расширением упорядоченного евклидова поля. Алгебра и теория чисел (Нальчик), 1979, № 4, 39—48 (РЖМат, 1982, 8А208)

86. —, О подгруппах унитарной группы над локальным полем. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *94*, 81—103 (РЖМат, 1980, 5А441)

87. —, О подгруппах унитарной группы над диадическим локальным полем. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1980, *103*, 79—89 (РЖМат, 1981, 8А235)

88. —, О нормальном строении унитарной группы над локальным кольцом. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, *114*, 150—163 (РЖМат, 1982, 9А218)

89. —, Промежуточные подгруппы в унитарной группе над телом кватернионов. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, *116*, 96—101 (РЖМат, 1983, 3А201)

90. —, *Шокуев В. Н.*, Подгруппы конечной унитарной группы, содержащие диагональ. Структурные свойства алгебраических систем, Нальчик, Кабардино-балкарский ун-т, 1981, 69—79

91. *Курсов В. В.*, Коммутаторы мультипликативной группы конечномерного центрального тела. Докл. АН БССР, 1982, *26*, № 2, 101—103 (РЖМат, 1982, 6А367)

92. *Лазебник Ф. Г.*, О некоторых бесконечных сериях максимальных подгрупп знакопеременных групп. Вопр. теории групп и гомологич. алгебры 1977, № 1, 125—135 (РЖМат, 1978, 11А200)

93. *Лиопо В. А.*, *Орехов А. В.* Матричное представление групп симметрии бордюров, лент и стержней. Хабаровск. политехн. ин-т. Хабаровск, 1981. 13 с. Библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 4 июня 1981 г., № 2724—81 Деп.) (РЖМат, 1981, 9А155 ДЕП)

94. *Маргулис Г. А.*, О мультипликативной группе алгебры кватернионов над глобальным полем. Докл. АН СССР, 1980, *252*, № 3, 542—546 (РЖМат, 1980, 9А420)

95. — *Сойфер Г. А.*, Критерий существования максимальных подгрупп бесконечного индекса в конечно порожденной линейной группе. Докл. АН СССР, 1977, *234*, № 6, 1261—1264 (РЖМат, 1977, 11А268)

96. —, —, Несвободные максимальные подгруппы бесконечного индекса группы $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 4, 203—204 (РЖМат, 1980, 1А227)

97. *Масенас Р. Р.*, *Сойфер Г. А.*, О максимальных подгруппах группы $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, $n \geqslant 3$. Вопр. теории групп, Кемерово, 1980, 58—63. Библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 13 марта 1980 г., № 961—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 7А168 ДЕП)

98. *Менщиков С. А.*, Некоторые подгруппы полной линейной группы. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1979, *11*, № 3, 116—126 (РЖМат, 1980, 2А218)

99. *Мерзляков Ю. И.*, Линейные группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Алгебра. Топол. Геометрия. 1971, 75—110 (РЖМат, 1972, 3А203)

100. —, Матричные представления свободных групп. Докл. АН СССР, 1978, *238*, № 3, 527—530 (РЖМат, 1978, 5А220)

101. —, Линейные группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Алгебра. Топол. Геометрия. 1978, *16*, 35—89 (РЖМат, 1979, 2А165)

102. —, Теория изоморфизмов классических групп в 1976—1980 годах. Дополнение I. В сб. «Изоморфизмы классическ. групп над целостн. кольцами». М., Мир, 1980, 252—258 (РЖМат, 1981, 2А209)

103. —, Рациональные группы. М.: Наука, 1980. 464 с. (РЖМат, 1981, 4А396К)

104. *Михайлова М. А.*, Конечные приводимые группы, порожденные псевдоотражениями. Моск. гос. пед. ин-т, М., 1981. 21 с. Библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 22 марта 1982 г., № 1248—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 8А186 ДЕП)

105. *Никулин В. В.*, Целочисленные симметричные билинейные формы и некоторые их геометрические приложения. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, *43*, № 1, 111—147 (РЖМат, 1979, 6А484)

106. —, О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Докл. АН СССР, 1979, *248*, № 6, 1307—1309 (РЖМат, 1980, 2А406)

107. —, О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1981, *45*, № 1, 113—142 (РЖМат, 1981, 6А182)

108. —, О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат. 1981, *18*, 3—114 (РЖМат, 1982, 1А585)

109. *Пащевский А. А.*, Автоморфизмы D-сетевых подгрупп над полулокальным кольцом. Структурные свойства алгебраических систем, Нальчик, Кабардино-балкарский ун-т, 1981, 91—96

110. *Петечук В. М.*, Автоморфизмы симплектической группы над некоторыми локальными кольцами. МГУ. М., 1980. 30 с. Библиогр. 13 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 5 июня 1980 г., № 2224—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 9А234 ДЕП)

111. —, Автоморфизмы групп $\mathrm{SL}_3(K)$, $\mathrm{GL}_3(K)$. МГУ. М., 1980. 21 с. Биб-

лиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 5 июня 1980 г., № 2225—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 9А235 ДЕП)
112. —, Автоморфизмы групп SL_n, GL_n над некоторыми локальными кольцами. Мат. заметки, 1980, *28*, № 2, 187—204 (РЖМат, 1980, 12А218)
113. —, Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами. Мат. сб., 1982, *117*, № 4, 534—547 (РЖМат, 1982, 8А206)
114. —, Автоморфизмы групп $SL_3(K)$, $GL_3(K)$. Мат. заметки, 1982, *31*, № 5, 657—668 (РЖМат, 1982, 9А164)
115. —, Изоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами. Пятый Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей, Новосибирск, Ин-т мат. СО АН СССР, 1982, 101
116. *Петров Е. Е.*, О классах сопряженных элементов группы $SL(2, \mathbf{Z}/p^\lambda\mathbf{Z})$, $p\neq 2$. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. МГУ, 1981, № 20, 119—129 (РЖМат, 1981, 8А233)
117. *Пецык А. Л.*, О силовских p-подгруппах групп $SL_n(K)$ и $PSL_n(K)$. Ужгород. гос. ун-т. Ужгород, 1981. 13 с. Библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 16 марта 1981 г., № 1182—81 Деп.) (РЖМат, 1981, 7А194 ДЕП)
118. *Платонов В. П.*, Арифметическая теория алгебраических групп. Успехи мат. наук, 1982, *37*, № 3, 4—54 (РЖМат, 1982, 10А385)
119. —, *Рапинчук А. С.*, Мультипликативная структура тел над числовыми полями и принцип Хассе. Докл. АН СССР, 1982, *266*, № 3, 560—564 (РЖМат, 1983, 2А365)
120. —, —, Алгебраические группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия, 1983, *21*, 80—134
121. —, *Янчевский В. И.*, SK_1 для тел некоммутативных рациональных функций. Докл. АН СССР, 1979, *249*, № 5, 1064—1068 (РЖМат, 1980, 7А364)
122. *Попов В. Л.*, Классификация спиноров размерности четырнадцать. Тр. Моск. мат. о-ва, 1978, *37*, 173—217 (РЖМат, 1978, 12А749)
123. *Премет А. А., Супруненко И. Д.*, Квадратичные модули для групп Шевалле над полями нечетных характеристик. Ин-т мат. АН БССР. Препр., 1981, № 22/123, 42 с. (РЖМат, 1982, 3А517)
124. *Ролофф Х.*, Нижние центральные ряды и ряды коммутантов сетевых подгрупп полной линейной группы. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, *114*, 180—186 (РЖМат, 1982, 9А219)
125. *Сатаров Ж. С.*, Определяющие соотношения унитарной группы над полем из четырех элементов. Ред. ж. Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астрон. Л., 1982. 14 с. Библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 4 авг. 1982 г., № 4261—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 11А133 ДЕП)
126. —, Определяющие соотношения унитарной группы над локальным полем. Ред. ж. Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астрон. Л., 1982. 24 с. Библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 3 авг. 1982 г., № 4227—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 11А134 ДЕП)
127. —, Определяющие соотношения в унитарной группе. Структурные свойства алгебраических систем, Нальчик, Кабардино-балкарский ун-т, 1981, 97—108
128. *Сережкин В. Н.*, Подгруппы симплектических групп, богатые трансвекциями. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1981, № 3, 10—16 (РЖМат, 1981, 11А207)
129. —, О линейных группах, богатых трансвекциями. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1981, № 5, 10—15 (РЖМат, 1982, 3А225)
130. —, Замечание о линейных группах, богатых трансвекциями, над телом. VIII Всес. симп. по теор. групп. Сумы, 1982, 116
131. *Сойфер Г. А., Травникова Н. А.*, Свободные подгруппы специальной линейной группы. Вопр. теории групп. Кемерово, 1980, 54—57. Библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 13 марта 1980 г., № 961—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 7А167 ДЕП)

132. *Сосновский Ю. В.*, Коммутаторное строение симплектических групп. Мат. заметки, 1978, *24*, № 5, 641—648 (РЖМат, 1979, 3А181)
133. —, К общей теории изоморфизмов линейных групп. Изоморфизмы классическ. групп над целостн. кольцами. М.: Мир, 1980, 259—268 (РЖМат, 1981, 2А202)
134. —, Изоморфизмы симплектических групп над телами характеристики, не равной 2. Алгебра и логика (Новосибирск), 1980, *19*, № 6, 726—739 (РЖМат, 1981, 7А244)
135. *Супруненко Д. А.*, О вещественных минимальных неприводимых матричных группах. Докл. АН СССР, 1978, *238*, № 1, 29—32 (РЖМат, 1978, 6А242)
136. —, О мономиальных минимальных неприводимых группах. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, *148*, 225—232 (РЖМат, 1979, 1А260)
137. —, Об унипотентных группах матриц над телом. Докл. АН СССР, 1979, *247*, № 2, 289—291 (РЖМат, 1979, 11А196)
138. —, О нильпотентных матрицах и унипотентных матричных группах над телом. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1979, № 5, 5—10 (РЖМат, 1980, 2А219)
139. —, *Вольвачев Р. Т.*, Линейные группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Алгебра. Топол. Геометрия. 1967, 45—61 (РЖМат, 1967, 10А169)
140. *Супруненко И. Д.*, Подгруппы $GL(n, p^m)$, содержащие $SL(2, p)$ в неприводимом представлении степени n. I, II. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1979, № 1, 18—24; № 2, 11—16 (РЖМат, 1979, 6А172, 8А186)
141. —, Подгруппы $GL(n, p)$, содержащие $SL(2, p)$ в неприводимом представлении степени n. Мат. сб., 1979, *109*, № 3, 453—468 (РЖМат, 1979, 10А162)
142. —, Неприводимые подгруппы $GL(n, p^r)$, содержащие вполне приводимое представление группы $SL(2, p)$ с двумя неприводимыми компонентами, I, II. Ин-т мат. АН БССР. Препр., 1980, № 1/81, 52 с.; № 2/82, 36 с. (РЖМат, 1980, 7А169, 7А170)
143. —, Конечные неприводимые группы степени 4 над полями характеристик 3 и 5. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1981, № 3, 16—22 (РЖМат, 1981, 11А208)
144. *Суслин А. А.*, Об одной теореме Кона. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1976, *64*, 127—130 (РЖМат, 1977, 5А289)
145. —, О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, *41*, № 2, 235—252 (РЖМат, 1977, 9А462)
146. —, Алгебраическая K-теория. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия, 1982, *20*, 71—152 (РЖМат, 1983, 2А319)
147. —, *Копейко В. И.*, Квадратичные модули и ортогональная группа над кольцами многочленов. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1977, *71*, 216—250 (РЖМат, 1977, 12А446)
148. *Сучков Н. М.*, О некоторых линейных группах с дополнительными подгруппами. Алгебра и логика, 1977, *16*, № 5, 603—620 (РЖМат, 1978, 8А245)
149. *Тишин Ю. В.*, О линейности обобщенных свободных произведений абелевых линейных групп. Докл. АН БССР, 1980, *24*, № 1, 7—10 (РЖМат, 1980, 6А246)
150. *Толасов Б. А.*, О числе нормальных делителей треугольной группы, содержащихся в унитреугольной подгруппе. Алгебра и теория чисел, 1977, № 2, 122—126 (РЖМат, 1978, 7А282)
151. *Томанов Г. М.*, Обобщенные групповые тождества в линейных группах. Докл. АН БССР, 1982, *26*, № 1, 9—12 (РЖМат, 1982, 5А172)
152. —, Обобщенные групповые тождества в линейных группах и подгруппа Фраттини алгебраических групп. Автореф. канд. дисс. Минск, Ин-т мат. АН БССР, 1982, 11 с.
153. *Туленбаев М. С.*, Мультипликатор Шура группы элементарных матриц

конечного порядка. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *86*, 162—169 (РЖМат, 1979, 8А406)

154. *Устименко-Бакумовский В. А.*, Максимальность группы $P\Gamma L_n(q)$, действующей на подпространствах размерности m. Докл. АН СССР, 1978, *240*, № 6, 1305—1308 (РЖМат, 1978, 11А203)

155. *Шмидт Р. А.*, О подгруппах полной линейной группы над полем частных дедекиндова кольца. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *94*, 119—130 (РЖМат, 1980, 5А442)

156. —, О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца главных идеалов. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *86*, 185—187 (РЖМат, 1979, 11А201)

157. —, О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца Безу. Структурные свойства алгебраических систем, Нальчик, Кабардино-балкарский ун-т, 1981, 133—135

158. *Эльбаради М. Т.*, О разложениях классических групп. Вопр. теории групп и гомол. алгебры. Ярославль, 1981, 115—124 (РЖМат, 1982, 2А221)

159. *Юферев В. П.*, О мономиальных нильпотентных линейных группах с абелевым коммутантом. Ин-т мат. АН БССР. Препр., 1981, № 1/102, 24 с. (РЖМат, 1981, 9А153)

160. *Янчевский В. И.*, Приведенная унитарная K-теория и тела над гензелевыми дискретно нормированными полями. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1978, *42*, № 4, 879—918 (РЖМат, 1979, 2А282)

161. —, Приведенные унитарные группы Уайтхеда тел некоммутативных рациональных функций. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, *94*, 142—148 (РЖМат, 1980, 5А386)

162. —, Приведенные унитарные группы Уайтхеда и некоммутативные рациональные функции. Докл. АН БССР, 1980, *24*, № 7, 588—591 (РЖМат, 1980, 11А409)

163. *Abold H., Plesken W.*, Ein Sylowsatz für endliche p-Untergruppen von $GL(n, \mathbf{Z})$. Math. Ann., 1978, *232*, 183—186 (РЖМат, 1978, 7А261)

164. *Alperin R. C., Shalen P. B.*, Linear groups of finite cohomological dimension. Bull. Amer. Math. Soc., 1981, *4*, № 3, 339—341 (РЖМат, 1982, 2А416)

165. —, —, Linear groups of finite cohomological dimension. Invent. math., 1982, *66*, № 1, 89—98 (РЖМат, 1982, 8А419)

166. *Arrel D. G.*, The normal subgroup structure of the infinite general linear group. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1981, *24*, № 3, 197—202 (РЖМат, 1982, 3А222)

167. —, The subnormal subgroup structure of the infinite general linear group. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1982, *25*, № 1, 81—86 (РЖМат, 1982, 7А214)

168. —, *Robertson E. F.*, Infinitive dimensional linear groups. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1978, *A78*, № 3—4, 237—240 (РЖМат, 1978, 12А671)

169. *Aschbacher M.*, GF(2)-representations of finite groups. Amer. J. Math., 1982, *104*, № 4, 683—772 (РЖМат, 1983, 5А182)

170. *Ash A.*, Cohomology of subgroups of finite index of $SL(3, \mathbf{Z})$ and $SL(4, \mathbf{Z})$. Bull. Amer. Math. Soc., 1977, *83*, № 3, 367—368 (РЖМат, 1978, 1А371)

171. —, Cohomology of congruence subgroups of $SL(n, \mathbf{Z})$. Math. Ann., 1980, *249*, № 1, 53—73 (РЖМат, 1981, 1А404)

172. *Avrunin G. S.*, 2-cohomology of some unitary groups. Ill. J. Math., 1980, *24*, № 2, 317—322 (РЖМат, 1981, 2А380)

173. *Bachmuth S., Mochizuki H. Y.*, Automorphism groups and subgroups of SL_2 over division rings. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 14, 1531—1558 (РЖМат, 1980, 4А244)

174. *Bak A.*, Le problème des sous-groupes de congruence et le problème métaplectique pour les groupes classiques de rang >1. C. r. Acad. sci., 1981, sér 1, *292*, № 5, 307—310 (РЖМат, 1981, 9А340)

175. —, *Rehmann U.*, Le probléme des sous-groupes de congruence dans $SL_{n\geqslant 2}$ sur un corps gauche. C. r. Acad. sci., 1979, *AB289*, № 3, A151 (РЖМат, 1980, 4А457)

176. —, —, The congruence subgroup and metaplectic problems for $SL_{n\geqslant 2}$ of division algebras. J. Algebra, 1982, *78*, № 2, 475—547 (РЖМат, 1983, 3А381)

177. *Baskan T., Macbeath A. M.*, Centralizers of reflections in crystallographic groups. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1982, *92*, № 1, 79—91 (РЖМат, 1983, 3А192)

178. *Bass H.*, Algebraic K-theory. New York, Benjamin, 1968, XIX, 762pp. (РЖМат, 1970, 7А364)

179. —, Euler characteristics and characters of discrete groups. Invent. math., 1976, *35*, 155—196 (РЖМат, 1977, 5А280)

180. —, Groups of integral representation type. Pacif. J. Math., 1980, *86*, № 1, 15—51 (РЖМат, 1981, 3А202)

181. —, Automorphismes de schemas et de groupes de type fini. Lect. Notes Math., 1982, *924*, 310—321 (РЖМат, 1982, 12А463)

182. *Behr H.*, $SL_3(F_q[t])$ is not finitely presentable. London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1979, № 36, 213—224 (РЖМат, 1980, 6А478)

183. *Bellani T. M. Ch., Di Martino L.*, I sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti di $GL_n(q)$. Rend. Ist. Lombardo Accad. Sci. e lett., 1976, *A110*, № 2, 589—596 (РЖМат, 1978, 12А310)

184. *Bender P.*, Eine Präsentation der symplektischen Gruppe $Sp(4, \mathbf{Z})$ mit 2 Erzeugenden und 8 definierenden Relationen. J. Algebra, 1980, *65*, № 2, 328—331 (РЖМат, 1981, 3А204)

185. *Berger T. R.*, Hall-Higman type theorems. III. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *228*, 47—83 (РЖМат, 1978, 2А185)

186. —, Hall-Higman type theorems. V. Pacif. J. Math., 1977, *73*, № 1, 1—62 (РЖМат, 1978, 8А214)

187. —, Hall-Higman type theorems. VI. J. Algebra, 1978, *51*, № 2, 416—424 (РЖМат, 1978, 11А233)

188. *Bertuccioni I.*, A short proof of a theorem of Suslin-Kopeiko. Arch. Math., 1982, *39*, № 1, 9—10 (РЖМат, 1983, 2А318)

189. *Bhattacharya P.*, On groups containing the projective special linear group. Arch. Math., 1981, *37*, № 4, 295—299 (РЖМат, 1982, 5А167)

190. —, Permutation groups containing projective special linear groups of the same degree: A problem of Mathieu. Arch. Math. 1981, *37*, № 3, 198—205 (РЖМат, 1982, 4А227)

191. *Brenner J. L., Lyndon R. C.*, Nonparabolic subgroups of the modular group. J. Algebra, 1982, *77*, № 2, 311—322 (РЖМат, 1983, 3А193)

192. *Britto J.*, On defining a subgroup of the special linear group by a congruence. J. Indian Math. Soc., 1976, *40*, № 1—4, 235—243 (РЖМат, 1978, 4А364)

193. —, On the construction of non-congruence subgroups. Acta arithm., 1977, *33*, № 3, 261—267 (РЖМат, 1978, 4А365)

194. *Brunner A. M., Burns R. G., Wiegold J.*, On the number of quotients, of one kind or another, of the modular group. Math. Sci., 1979, *4*, № 2, 93—98 (РЖМат, 1980, 1А228)

195. *Burns R. G., Farouqi I. H.*, Maximal normal subgroups of the integral linear groups of countable degree. Bull. Austral. Math. Soc., 1976, *15*, № 3, 439—451 (РЖМат, 1977, 10А121)

196. *Bürgisser B.*, Finite p-periodic quotients of general linear groups. Math. Ann., 1981, *256*, № 1, 121—132 (РЖМат, 1982, 2А413)

197. *Callan D.*, The isomorphisms of unitary groups over noncommutative domains. J. Algebra, 1978, *52*, № 2, 475—503 (РЖМат, 1978, 12А355)

198. *Cameron P. J., Kantor W. M.*, 2-transitive and antiflag transitive collineation groups of finite projective spaces. J. Algebra, 1979, *60*, № 2, 384—422 (РЖМат, 1980, 5А193)

199. *Cohen A. M.*, Finite quaternionic reflection groups. J. Algebra, 1980, *64*, № 2, 293—324 (РЖМат, 1981, 2A196)
200. *Cohen T.*, On non-Hurwitz groups and non-congruence subgroups of the modular group. Glasgow Math. J., 1981, *22*, № 1, 1—7 (РЖМат, 1981, 7A196)
201. *Concini C. D.*, The MOD 2 cohomology of the orthogonal groups over a finite field. Adv. Math., 1978, *27*, № 3, 191—229 (РЖМат, 1978, 9A388)
202. *Conlon S. B.*, Nonabelian subgroups of prime-power order of classical groups of the simple prime degree. Lect. Notes Math., 1977, *573*, 17—50 (РЖМат, 1977, 10A126)
203. *Cooperstein B. N.*, Minimal degree for a permutation representation of a classical group. Isr. J. Math., 1978, *30*, № 3, 215—235 (РЖМат, 1979, 3A200)
204. —, *S* and *F*-pairs for groups of Lie type in characteristic two. Santa Cruz Conf. Finite Groups. Santa Cruz. Calif., 1979, Providence, R. I., 1980, 249—253 (РЖМат, 1981, 11A175)
205. —, Nearly maximal representations for the special linear group. Mich. Math. J., 1980, *27*, № 1, 3—19 (РЖМат, 1981, 1A214)
206. —, *Mason G.*, Some questions concerning the representations of Chevalley groups of characteristic two. Preprint. Univ. California, Santa Cruz, 1979, 99 p.
207. *Curtis M. L.*, Matrix groups. New York e. a., Springer, 1979. XII, 191 pp., (РЖМат, 1980, 7A461K)
208. *Dempwolff U.*, Some subgroups of GL$(n, 2)$ generated by involutions. I. J. Algebra, 1978, *54*, № 2, 332—352 (РЖМат, 1979, 8A156)
209. —, Some subgroups of GL$(n, 2)$ generated by involutions. II. J. Algebra, 1979, *56*, № 1, 255—266 (РЖМат, 1979, 10A135)
210. —, Some subgroups of SL$(n, 2^m)$. I. Result. Math., 1981, *4*, № 1, 1—21 (РЖМат, 1981, 12A179)
211. *Derr J. B.*, Stabilizers of isotropic subspaces in classical groups. Arch. Math., 1980, *34*, № 2, 100—107 (РЖМат, 1981, 1A210)
212. *Di Martino L.*, Simple linear groups all of whose involutions are 2-reflections. Bull. Unione mat. Ital., 1978, *B15*, № 5, 509—526
213. —, *Wagner A.* The irreducible subgroups of PSL(V_5, q) where q is odd. Result. Math., 1979, *2*, 54—61
214. *Dixon J. D.*, Irreducible solvable linear groups of odd degree. J. Algebra, 1977, *47*, № 2, 305—312 (РЖМат, 1978, 2A152)
215. —, Linear groups with bounded trace values. Math. Repts Acad. Sci. Can., 1982, *4*, № 2, 107—110 (РЖМат, 1982, 9A170)
216. *Djoković D. Z.*, Relations between reflections in the unitary group and hermitian hyperquadrics in the complex projective space. Linear Algebra and Appl., 1981, *35*, 129—153 (РЖМат, 1981, 9A308)
217. —, *Malzan J. G.*, Products of reflections in $U(p, q)$ Mem. AMS, 1982, № 259, vi, 82 pp. (РЖМат, 1982, 11A299)
218. *Doyle C.*, *James D.*, Discreteness criteria and high order generators for subgroups of SL$(2, R)$. Ill. J. Math., 1981, *25*, № 2, 191—200 (РЖМат, 1982, 2A218)
219. *Dwyer W. G.*, Twisted homological stability for general linear groups. Ann. Math., 1980, *111*, № 2, 239—251 (РЖМат, 1981, 1A405)
220. *Dye R. H.*, Interrelations of symplectic and orthogonal groups in characteristic two. J. Algebra, 1979, *59*, № 1, 202—221 (РЖМат, 1980, 2A216)
221. —, Symmetric groups as maximal subgroups of orthogonal and symplectic groups over the field of two elements. J. London Math. Soc., 1979, *20*, № 2, 227—237 (РЖМат, 1980, 6A236)
222. —, On the maximality of the orthogonal groups in the symplectic groups in characteristic two. Math. Z., 1980, *172*, № 3, 203—212 (РЖМат, 1981, 2A370)
223. —, Maximal subgroups of GL$_{2n}(K)$, SL$_{2n}(K)$, PGL$_{2n}(K)$ and PSL$_{2n}(K)$

associated with symplectic polarities. J. Algebra, 1980, *66*, № 1, 1—11 (РЖМат, 1981, 3A203)
224. —, Alternating groups as maximal subgroups of the special orthogonal groups over the field of two elements. J. Algebra, 1981, *71*, № 2, 472—480 (РЖМат, 1982, 3A194)
225. *Dyer J. L.*, Automorphism sequences of integer unimodular groups. Ill. J. Math., 1978, *22*, № 1, 1—30 (РЖМат, 1978, 12A356)
226. *Ellers E. W.*, Decomposition of equiaffinities into reflections. Geom. dedic. 1977, *6*, № 3, 297—304 (РЖМат, 1978, 10A259)
227. —, Relations in classical groups. J. Algebra, 1978, *51*, № 1, 19—24 (РЖМат, 1978, 12A664)
228. —, Factorization of affinities. Can. J. Math., 1979, *31*, № 2, 354—362 (РЖМат, 1980, 1A392)
229. —, Generators and relations for classical groups. Lect. Notes Math., 1980, *792*, 40—45 (РЖМат, 1981, 1A225)
230. —, Relations in the projective general linear group and in the affine subgroup. J. Algebra, 1982, *77*, № 2, 333—337 (РЖМат, 1983, 3A194)
231. *Evans R. J.*, Non-free groups generated by two parabolic matrices. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1979, *84*, № 2, 179—180 (РЖМат, 1980, 3A138)
232. *Falkowski B.-J.*, A note on the first order cohomology for SL$(n, \mathbf{C})$. J. Indian Math. Soc., 1978, *42*, № 1—4, 105—107 (РЖМат, 1980, 12A413)
233. *Farkas D. R.*, Crystallographic groups and their mathematics. Rocky Mount. J. Math., 1981, *11*, № 4, 511—551 (РЖМат, 1982, 8A209)
234. *Feit W.*, *Tits J.*, Projective representations of minimum degree of group extentions. Can. J. Math., 1978, *30*, № 5, 1092—1102 (РЖМат, 1979, 5A185)
235. —, *Lindsey J. H.*, Complex linear groups of degree less than $2^{1/2}p-3$. J. Algebra, 1978, *52*, № 1, 145—167 (РЖМат, 1978, 12A317)
236. *Ferguson P. A.*, On finite complex linear groups of degree $(q-1)/2$. J. Algebra, 1980, *63*, № 2, 287—300 (РЖМат, 1980, 11A188)
237. —, Finite complex linear groups of degree less than $(2q+1)/3$. Santa Cruz Conf. Finite Groups. Santa Cruz. Calif., 1979. Providence, R. I., 1980, 413—417 (РЖМат, 1981, 10A205)
238. —, Finite linear groups of degree less than $p-2$. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 7, 675—690 (РЖМат, 1981, 9A130)
239. —, Complex linear groups of degree at most $(q-1)/2$. J. Algebra, 1982, *79*, № 1, 9—36 (РЖМат, 1983, 5A188)
240. *Fields K. L.*, On the group of integral automorphs of a positive definite quadratic form. J. London Math. Soc., 1977, *15*, № 1, 26—28 (РЖМат, 1977, 12A224)
241. *Fine B.*, Congruence subgroups of the Picard group. Can. J. Math., 1980, *32*, № 6, 1474—1481 (РЖМат, 1981, 9A151)
242. *Finkelstein L.*, *Solomon R.*, A presentation of the symplectic and orthogonal groups. J. Algebra, 1979, *60*, № 2, 423—438 (РЖМат, 1980, 6A242)
243. *Fluch W.*, Theorem der linearen Gruppen. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1982, *A85*, № 2, 143—146 (РЖМат, 1982, 12A183)
244. *Gattazzo R.*, Sottogruppi *Q*-congruenziali di SL(n, R). Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1976 (1977), *55*, 179—193 (РЖМат, 1978, 10A355)
245. *Geller S. C.*, On the GE_n of a ring. Ill. J. Math. 1977, *21*, № 1, 109—112 (РЖМат, 1978, 1A377)
246. *Gérardin P.*, Immeubles des groupes lineaires generaux. Lect. Notes Math., 1981, *880*, 138—178 (РЖМат, 1982, 5A409)
247. *Godsil C.*, *Imrich W.*, *Rasen R.*, On the number of subgroups of given index in the modular group. Monatsh. Math., 1979, *87*, № 4, 273—280 (РЖМат, 1979, 12A248)
248. *Grecu E.*, Sur le groupe symplectique pseudo-orthogonal. Bull. Math. Soc. sci. math. RSR, 1980, *24*, № 3, 263—271 (РЖМат, 1981, 9A309)
249. *Green Sh. M.*, Generators and relations for the special linear group over

a division ring. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *62*, № 2, 229—232 (РЖМат, 1978, 3А283)
250. *Greenleaf F. P., Moskowitz M., Rothschild L. P.*, An unipotent group associated with certain linear groups. Colloq. math., 1980, *43*, № 1, 41—45 (РЖМат, 1981, 11А498)
251. *Grunewald F. J., Schwermer J.*, Free non-abelian quotients of SL_2 over orders of imaginary quadratic number fields. J. Algebra, 1981, *69*, № 2, 298—304 (РЖМат, 1981, 11А462)
252. *Guralnick R., Taussky O.*, A remark concerning unipotent matrix groups. Linear and Multilinear Algebra, 1979, *7*, № 1, 87—89 (РЖМат, 1979, 7А252)
253. *Günther G.*, A geometric characterisation of orthogonal groups for characteristic 2. Geom. dedic., 1976, *5*, № 3, 321—346 (РЖМат, 1977, 12А221)
254. *Hahn A. J.*, Isomorphism theory for orthogonal groups over arbitrary integral domains. J. Algebra, 1978, *51*, № 1, 233—287 (РЖМат, 1978, 12А743)
255. —, Unipotent elements and the spinor norms of Wall and Zassenhaus. Arch. Math., 1979, *32*, № 2, 114—122 (РЖМат, 1980, 1А438)
256. —, Category equivalences and linear groups over rings. J. Algebra, 1982, *77*, № 2, 505—543 (РЖМат, 1983, 3А190)
257. *Harada K., Yamaki H.*, The irreducible subgroups of $GL_n(2)$ with $n \leqslant 6$. Roy Soc. Can. Math. Repts., 1979, *1*, № 2, 75—78 (РЖМат, 1980, 3А133)
258. *Hargraves B. B.*, The existence of regular orbits for nilpotent groups. J. Algebra, 1981, *72*, № 1, 54—100 (РЖМат, 1982, 3А187)
259. *Hartley B.*, Some theorems of Hall-Higman type for small primes. Proc. London Math. Soc., 1980, *41*, № 2, 340—362 (РЖМат, 1981, 4А152)
260. —, *Shojaci Sh. M. A.*, Finite groups of matrices over division rings. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1982, *92*, № 1, 55—64 (РЖМат, 1983, 3А168)
261. *Herstein I. N.*, Multiplicative commutators in division rings. II. Rend. circ. mat. Palermo, ser. II, 1950, *29*, 485—489
262. *Herzog M., Praeger Ch. E.*, On the order of linear groups of fixed finite exponent. J. Algebra, 1976, *43*, № 1, 216—220 (РЖМат, 1977, 8А225)
263. *Hesselink W. H.*, Nilpotency in classical groups over a field of characteristic 2. Math. Z., 1979, *166*, № 2, 165—181 (РЖМат, 1979, 8А442)
264. *Higman D. G.*, Classical groups. — *Taylor D. E.* Appendix. Techn. hogesch. Eindhoven. Onderafdel. wisk. Rept., 1978, № 4, 21+III pp. (РЖМат, 1979, 9А176; 1981, 11А216)
265. *Hikari M.*, On finite multiplicative subroups of simple algebras of degree 2. J. Math. Soc. Jap., 1976, *28*, № 4, 737—748 (РЖМат, 1977, 9А263)
266. —, On simple groups which are homomorphic images of multiplicative subgroups of simple algebras of degree 2. Math. Repts Acad. Sci. Can., 1982, *4*, № 2, 93—96 (РЖМат, 1982, 10А155)
267. *Howlett R. B.*, Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups. J. London Math. Soc., 1980, *21*, № 1, 62—80 (РЖМат, 1980, 12А189)
268. *Huffman W. C.*, Polynomial invariants of finite linear groups of degree two. Can. J. Math., 1980, *32*, № 2, 317—330 (РЖМат, 1981, 1А442)
269. —, Imprimitive linear groups generated by elements containing an eigenspace of codimension two. J. Algebra, 1980, *63*, № 2, 499—513 (РЖМат, 1980, 11А191)
270. —, *Wales D. B.*, Linear groups of degree nine with no elements of order seven. J. Algebra, 1978, *51*, № 1, 149—163 (РЖМат, 1978, 11А196)
271. *Huppert B., Blackburn N.*, Finite groups. II. Berlin e. a.: Springer, 1982. 531 pp. (РЖМат, 1983, 2А119К)
272. *Isaacs I. M.*, Linear groups as stabilizers of sets. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *62*, № 1, 28—30 (РЖМат, 1977, 12А226)
273. —, Characters of solvable groups. Santa Cruz Conf. Finite Groups. Santa

Cruz, Calif., 1979. Providence, R. I., 1980, 377—484 (РЖМат, 1981, 10А244)
274. *Ishibashi H.*, Generators of a symplectic group over a local valuation domain. J. Algebra, 1978, *53*, № 1, 125—128 (РЖМат, 1978, 12А352)
275. —, Generators of $O_n(V)$ over a quasi semilocal semihereditary domain. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 10, 1043—1064 (РЖМат, 1980, 1А437)
276. —, Generators of $Sp_n(V)$ over a quasi semilocal semihereditary domain. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 16, 1673—1683 (РЖМат, 1980, 3А145)
277. —, Generators of $U_n(V)$ over a quasi semilocal semihereditary domain. J. Algebra, 1979, *60*, № 1, 199—203 (РЖМат, 1980, 4А456)
278. —, Minimal set of generators of symplectic groups over finite fields. Czech. Mat. J., 1980, *30*, № 4, 629—632 (РЖМат, 1981, 5А159)
279. —, Generators of $Sp_n(V)$ over a quasi semilocal semihereditary ring. J. Pure and Appl. Algebra, 1981, *22*, № 2, 121—129 (РЖМат, 1982, 5А421)
280. —, Simple coefficient extensions of symplectic groups. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 1, 47—65 (РЖМат, 1981, 7А435)
281. —, Generators of orthogonal groups over valuation rings. Can. J. Math., 1981, *33*, № 1, 116—128 (РЖМат, 1981, 11А305)
282. —, Structure of $O(V)$ over full rings. J. Algebra, 1982, *75*, № 1, 1—9 (РЖМат, 1982, 11А367)
283. *Iwahori N., Yokonuma T.*, On self-dual, completely reducible finite subgroups of $GL(2, k)$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1981, Sec. 1A, *28*, № 3, 829—842 (РЖМат, 1982, 11А115)
284. *James D. G.*, Unitary groups over local rings. J. Algebra, 1978, *52*, № 2, 354—363 (РЖМат, 1978, 12А354)
285. —, Homomorphisms of unitary groups. Math. Z., 1981, *178*, № 3, 343—352 (РЖМат, 1982, 7А496)
286. —, *Waterhouse W., Weisfeiler B.*, Abstract homomorphisms of algebraic groups: problems and bibliography. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 1, 95—114 (РЖМат, 1981, 8А424)
287. —, *Weisfeiler B.*, On the geometry of unitary groups. J. Algebra, 1980, *63*, № 2, 514—540 (РЖМат, 1980, 11А437)
288. *Johnson A. A.*, The automorphisms of the orthogonal groups $\Omega_n(V)$, $n \geqslant 5$. J. reine und angew. Math., 1978, *298*, 112—155 (РЖМат, 1978, 12А635)
289. *Jorgensen T.*, A note on subgroups of $SL(2, \mathbf{C})$. Quart. J. Math., 1977, *28*, № 110, 209—211 (РЖМат, 1978, 2А176)
290. *Justin J.*, Groupes linéaires répétitifs. C. r. Acad. sci., 1981, Sér. 1, *292*, № 6, 349—350 (РЖМат, 1981, 9А150)
291. *Kac V. G.*, Some remarks on nilpotent orbits. J. Algebra, 1980, *64*, № 1, 190—213 (РЖМат, 1980, 11А303)
292. *Kallen W.* van der, Homology stability for linear groups. Invent math., 1980, *60*, № 3, 269—295 (РЖМат, 1981, 2А383)
293. —, Generators and relations in algebraic K-theory. Proc. Int. Congr. Math., Helsinki, 15—23 Aug., 1978. Vol. 1. Helsinki, 1980, 305—310 (РЖМат, 1982, 6А361)
294. —, Stability for K_2 of Dedekind rings of arithmetic type. Lect. Notes Math., 1981, *854*, 217—249 (РЖМат, 1981, 12А388)
295. —, Another presentation for Steinberg groups. Proc. Kon. ned. akad. wetensch. 1977, *A80*, № 4, Indag. math., 1977, *39*, № 4, 304—312 (РЖМат, 1978, 12А672)
296. *Kantor W. M.*, Permutation representations of the finite classical groups of small degree or rank. J. Algebra, 1979, *60*, № 1, 158—168 (РЖМат, 1980, 4А220)
297. —, Subgroups of classical groups generated by long root elements. Trans. Amer. Math. Soc., 1979, *248*, № 2, 347—379 (РЖМат, 1979, 12А231)

298. —, Linear groups containing a Singer cycle. J. Algebra, 1980, *62*, № 1, 232—234 (РЖМат, 1980, 7A154)
299. —, Generation of linear groups. Geom. Vein: Coxeter Festschrift, New York e. a., 1981, 497—509 (РЖМат, 1983, 2A160)
300. —, *Liebler R. A.*, The rank 3 permutation representations of the finite classical groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, *271*, № 1, 1—71 (РЖМат, 1982, 11A118)
301. *Kassels Ch.*, Un calcul d'homologie du groupe lineaire général. C. r. Acad. sci., 1979, *AB288*, № 9, A481 — A483 (РЖМат, 1979, 10A259)
302. —, Homologie du groupe linéaire general et *K*-théorie stable. C. r. Acad. sci., 1980, *AB290*, № 22, A1041 — A1044 (РЖМат, 1981, 2A382)
303. *Kegel O. H.*, Über einfache local endliche Gruppen. Math. Z., 1967, *95*, № 3, 169—195 (РЖМат, 1968, 1A210)
304. *Key J. D.*, Some maximal subgroups of certain projective unimodular groups. J. London Math. Soc., 1979, *19*, № 2, 291—300 (РЖМат, 1979, 11A202)
305. *King O.*, Maximal subgroups of the classical groups associated with non-isotropic subspaces of a vector space. J. Algebra, 1981, *73*, № 2, 350—375 (РЖМат, 1982, 6A203)
306. —, On some maximal subgroups of the classical groups. J. Algebra, 1981, *68*, № 1, 109—120 (РЖМат, 1981, 7A157)
307. —, Imprimitive maximal subgroups of the general linear, special linear, symplectic and general symplectic groups. J. London Math. Soc., 1982, *25*, № 3, 416—424 (РЖМат, 1982, 12A200)
308. —, Maximal subgroups of the orthogonal group over a field of characteristic two. J. Algebra, 1982, *76*, № 2, 540—548 (РЖМат, 1982, 12A201)
309. *Kirchheimer F.*, Die Normalteiler der symplektischen Gruppen über beliebigen lokalen Ringen. J. Algebra, 1978, *50*, № 1, 228—241 (РЖМат, 1978, 7A281)
310. —, Über explizite Präsentationen Hilbertscher Modulgruppen zu totall-reellen Körpern der Klassenzahl eins. J. reine und angew. Math., 1981, *321*, 120—137 (РЖМат, 1981, 8A449)
311. —, *Wolfart J.* Explizite Präsentation gewisser Hilbertscher Modulgruppen durch Erzengende und Relationen. J. reine und angew. Math., 1980, *315*, 139—173 (РЖМат, 1980, 11A488)
312. *Kirkwood B., McDonald B. R.*, The symplectic group over a ring with one in its stable range. Pacif. J. Math., 1981, *92*, № 1, 111—125 (РЖМат, 1981, 11A212)
313. *Knapp W.*, Linear *p*-auflösbare Gruppen. Math. Z., 1978, *159*, № 2, 181—196 (РЖМат, 1978, 10A142)
314. —, *Schmid P.*, Theorem *B* of Hall-Higman revisited. J. Algebra, *73*, № 2, 376—385 (РЖМат, 1982, 6A180)
315. *Kneser M.*, Normalteiler ganzzahliger Spingruppen. J. rtine und angew. Math., 1979, *311—312*, 191—214 (РЖМат, 1980, 5A432)
316. —, Erzeugung ganzzahliger orthogonaler Gruppen durch Spiegelungen. Math. Ann., 1981, *255*, № 4, 453—462 (РЖМат, 1982, 1A557)
317. *Krzywiec R., Krzenińska M. E.*, Ogólna liniowa grupa wielociagowa. Zesz. nauk PGdań, 1978, № 285, 3—15 (РЖМат, 1979, 11A195)
318. *Küsefoglu A. S.*, The second degree cohomology of finite orthogonal groups. I, II. J. Algebra, 1979, *56*, № 1, 207—220; 1980, *67*, № 1, 88—109 (РЖМат, 1979, 9A378; 1981, 5A320)
319. *Laffey T. J.*, Finite groups generated by a pair of unitary matrices with normal sum. Proc. Roy Irish. Acad., 1977, *A77*, № 5, 61—74 (РЖМат, 1978, 6A219)
320. —, *p*-soluble linear groups with Sylow *p*-intersections of small rank. J. Algebra, 1979, *60*, № 1, 1—10 (РЖМат, 1980, 4A239)
321. *Larcher H.*, The cusp amplitudes of the congruence subgroups of the classical modular group. III. J. Math., 1982, *26*, № 1, 164—172 (РЖМат, 1982, 11A364)

322. *Lee R.*, On unstable cohomology classes of $SL_n(\mathbf{Z})$. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1978, *75*, № 1, 43—44 (РЖМат, 1978, 10A303)
323. *Leung K. W.*, The isomorphism theory of projective pseudo-orthogonal groups. J. Algebra, 1979, *61*, № 2, 367—387 (РЖМат, 1980, 8A444)
324. *Leutbecher A.*, Euklidischer Algorithmus und die Gruppe GL_2. Math. Ann., 1978, *231*, № 3, 269—285 (РЖМат, 1978, 8A418)
325. *Lichtman A. I.*, On normal subroups of multiplicative group of skew fields generated by a polycyclic-finite group. J. Algebra, 1982, *78*, № 2, 548—577 (РЖМат, 1983, 4A207)
326. *Liehl B.*, Die Gruppe SL_2 über Ordnungen von arithmetischen Typ. Diss. Dokt. Naturwiss. Fachbereich Math. Techn. Univ. München, 1979, *73* s. (РЖМат, 1980, 12A469Д.)
327. —, On the group SL_2 over orders of arithmetic type. J. reine und angew. Math., 1981, *323*, 153—171 (РЖМат, 1981, 11A466).
328. *List R. J.*, On permutation groups containing $O_{2n}(2)$ as subgroup. J. Algebra, 1978, *50*, № 1, 1—11 (РЖМат, 1978, 6A230)
329. *Lubotzky A.*, Free quotients and the congruence kernel of SL_2. J. Algebra, 1982, *77*, № 2, 411—418 (РЖМат, 1983, 3A379)
330. *Macdonald J. G.*, Numbers of conjugacy classes in some finite classical groups. Bull. Austral. Math. Soc., 1981, *23*, № 1, 23—48 (РЖМат, 1981, 12A202)
331. *Malzan J.*, Products of positive reflections in the orthogonal group. Can. J. Math., 1982, *34*, № 2, 484—499 (РЖМат, 1983, 2A295)
332. *Margulis G. A., Soifer G. A.*, Maximal subgroups of infinite index in finitely generated linear groups. J. Algebra, 1981, *69*, № 1, 1—23 (РЖМат, 1981, 11A461)
333. *Mason A. W.*, A note on subgroups of $GL(n, A)$ which are generated by commutators. J. London Math. Soc., 1975, *11*, № 4, 509—512 (РЖМат, 1976, 4A382); II. J. reine und angew. Math., 1981, *322*, 118—135 (РЖМат, 1981, 7A381)
334. —, A further note on subgroups of $GL(n, A)$ which are generated by commutators. Arch. Math., 1981, *37*, № 5, 401—405 (РЖМат, 1982, 7A441)
335. *Maxwell G.*, Infinite general linear groups over rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, *151*, № 2, 371—375 (РЖМат, 1971, 9A339)
336. *McDonald B. R.*, Geometric algebra over local rings. Mongr. and Textb. Pure and Appl. Math., № 36. Marcel Dekker, New York — Basel, 1976. xiv, 421 pp. (РЖМат, 1978, 5A408K)
337. —, Automorphisms of $GL_n(R)$. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *246*, 155—171 (РЖМат, 1979, 11A408)
338. —, GL_2 of rings with many units. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 9, 869—888 (РЖМат, 1980, 11A205)
339. —, Aut $(GL_2(R))$ for rings. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 2, 205—220 (РЖМат, 1981, 7A382)
340. —, *Hershberger B.*, The orthogonal group over a full ring. J. Algebra, 1978, *51*, № 2, 536—549 (РЖМат, 1978, 12A744)
341. —, *Kirkwood B. H.*, The orthogonal and the special orthogonal groups over a full ring. J. Algebra, 1981, *68*, № 1, 121—143 (РЖМат, 1981, 7A434)
342. *McLaughlin J.*, Some groups generated by transvections. Arch. Math., 1967, *18*, № 4, 364—368 (РЖМат, 1968, 5A291)
343. *Menal P.*, Algunos grupos lineales residualmente finitos. Actas 4 Jornadas mat. luso-esp., Jaca, 1977. T. 2. Zaragoza, s. a., 497—498 (РЖМат, 1981, 2A207)
344. *Mendoza E. E.*, Cohomology of PGL_2 over imaginary quadratic integers. Bonn math. Schr., 1980, № 128, vi, 83 pp. (РЖМат, 1981, 7A379)
345. *Mez H. C.*, Existentially closed linear groups. J. Algebra, 1982, *76*, № 1, 84—98 (РЖМат, 1982, 12A245)
346. *Midorikawa H.*, On regular elliptic conjugacy classes of the siegel mo-

dular group. Proc. Jap. Acad., 1982, *A58,* № 3, 120—123 (РЖМат, 1982, 11A365)
347. *Mimura Y.*, On orthogonal groups over the integers of a non-dyadic local field. J. Number. Theory, 1981, *13,* № 3, 415—419 (РЖМат, 1982, 3A516)
348. *Mochizuki H. V.*, Unipotent matrix groups over division rings. Can. Math. Bull., 1978, *21,* № 2, 249—250 (РЖМат, 1979, 1A258)
349. *Monson B. R.*, The Schäflian of a crystallographic Coxeter group. Math. Repts Acad. Sci. Can., 1982, *4,* № 3, 145—147 (РЖМат, 1982, 12A184)
350. *Morgan C. L.*, On counting types of symmetries in finite unitary reflection groups. Can. J. Math., 1979, *31,* № 2, 252—254 (РЖМат, 1980, 1A393)
351. *Moss K. N.*, Homology of $SL(n, \mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$. Duke Math. J., 1980, *47,* № 4, 803—818 (РЖМат, 1981, 9A311)
352. *Mwene B.*, On the subgroups of the group $PSL_4(2^m)$. J. Algebra, 1976, *41,* № 1, 79—107 (РЖМат, 1977, 4A188)
353. —, On some subgroups of $PSL(4, q)$, q odd. Geom. dedic., 1982, *12,* № 2, 189—199 (РЖМат, 1982, 8A187)
354. *Newman M.*, Normalizers of modular groups. Math. Ann., 1978, **238**, № 2, 123—129 (РЖМат, 1979, 5A177)
355. *Nolte W.*, Das Relationenproblem für eine klasse von Untergruppen orthogonaler Gruppen. J. reine und angew. Math., 1977, *292,* 211—220 (РЖМат, 1978, 1A190)
356. *Oliver R. K.*, On Bieberbach's analysis of discrete euclidean groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *80,* № 1, 15—21 (РЖМат, 1981, 4A185)
357. *O'Meara O. T.*, Symplectic groups. Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 1978, xii, 122 pp. (РЖМат, 1980, 11A209K)
358. *Ostrom T. G.*, Solvable linear groups on vector spaces whose dimension is the product of two primes. Aequat. math., 1978, *18,* № 1—2, 77—102 (РЖМат, 1978, 12A291)
359. *Pálfy P. P.*, A polynomial bound for the orders of primitive solvable groups. J. Algebra, 1982, *77,* № 1, 127—137 (РЖМат, 1983, 1A215)
360. *Parson A. L.*, Normal congruence subgroups of the Hecke groups $G(2^{(1/2)}$ and $G(3^{(1/2)})$. Pacif. J. Math., 1977, *70,* № 2, 481—487 (РЖМат, 1978, 12A343)
361. *Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H.*, On the maximal abelian subgroups of the linear classical algebraic groups. Math. Repts Acad. Sci. Can., 1980, *2,* № 5, 231—236 (РЖМат, 1981, 11A213)
362. —, —, —, On the maximal abelian subgroups of the quadratic classical algebraic groups. Math. Repts Acad. Sci. Can., 1980, *2,* № 5, 237—242 (РЖМат, 1981, 11A214)
363. *Phan K.-W.*, On groups generated by three-dimensional special unitary groups. I, II. J. Austral. Math. Soc., 1977, *A23,* № 1, 67—77; *A23,* № 2, 129—146 (РЖМат, 1978, 1A168, 5A169)
364. *Platonov V. P.*, Algebraic groups and reduced K-theory. Proc. Int. Congr. Math., Helsinki, 15—23 Aug., 1978, Vol. 1. Helsinki, 1980, 311—317 (РЖМат, 1982, 6A362)
365. *Plesken W.*, The Bravais group and the normaliser of a reducible finite subgroup of $GL(n, \mathbf{Z})$. Commun. Algebra, 1977, *5,* № 4, 375—396 (РЖМат, 1978, 6A241)
366. —, *Pohst M.*, On maximal finite irreducible subgroups of $GL(n, \mathbf{Z})$. The five and seven dimensional cases. Math. Comput., 1977, *31,* № 138, 536—551 (РЖМат, 1978, 12A350)
367. —, —, On maximal finite irreducible subgroups of $GL(n, \mathbf{Z})$. II. The six dimensional case. Math. Comput., 1977, *31,* № 138, 552—573 (РЖМат, 1978, 12A351)
368. —, —, On maximal finite irreducible subgroups of $GL(n, \mathbf{Z})$. III. The nine dimensional case. Math. Comput., 1980, *34,* № 149, 245—258 (РЖМат, 1980, 11A206)

369. —, —, On maximal finite irreducible subgroups of $GL(n, \mathbf{Z})$. IV. Remarks on even dimensions with applications to $n=8$. Math. Comput., 1980, *34,* № 149, 259—275 (РЖМат, 1980, 11A207)
370. —, —, On maximal finite irreducible subgroups of $GL(n, \mathbf{Z})$. V. The eight dimensional case and a complete description of dimensions less than ten. Math. Comput., 1980, *34,* № 149, 277—301 (РЖМат, 1980, 11A208)
371. *Popov V. L.*, Discrete complex linear groups. Commun. Math. Inst. Rijksuniv. Utreht, 1982, *15,* 89p.
372. *Prince A. R.*, An analogue of Maschke's theorem for certain representations of A_6 over $GF(2)$. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1982, *A91,* № 3—4, 175—177 (РЖМат, 1982, 10A205)
373. *Queen L.*, Modular functions and finite simple groups. Santa Cruz Conf. Finite Groups. Santa Cruz. Calif., 1979. Providence, R. I., 1980, 561—566 (РЖМат, 1981, 10A170)
374. *Rais M.*, Le théorème fondamental des invariants pour les groupes finis. Ann. Inst. Fourier, 1977, *27,* № 4, 247—256 (РЖМат, 1978, 10A320)
375. *Rankin R. A.*, Subgroups of the unimodular group defined by a congruence. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1979, *86,* № 3, 451—459 (РЖМат, 1980, 6A251)
376. *Read E. W.*, On the finite imprimitive unitary reflection groups. J. Algebra, 1977, *45,* № 2, 439—452 (РЖМат, 1977, 12A237)
377. *Rehmann U.*, Zentrale Erweiterungen der speziellen linearen Gruppe eines Schiefkörpers. J. reine und angew. Math., 1978, № 301, 77—104 (РЖМат, 1979, 4A447)
378. —, Die Kommutatorfaktorgruppe der Normeinsgruppe einer $\mathfrak{p}$-adische Divisionsalgebra. Arch. Math., 1979, *32,* № 4, 318—322 (РЖМат, 1980, 1A439)
379. —, *Stuhler U.*, On K_2 of finite dimensional division algebras over arithmetical fields. Invent. math., 1978, *50,* № 1, 75—90 (РЖМат, 1979, 5A325)
380. *Ren H., Wan Zhexian*, Automorphisms of $PGL_2(K)$ over any skew field K. Шусюэ сюэбао, Acta Math. sin., 1982, *25,* № 2, 208—218 (РЖМат, 1982, 9A165)
381. —, Automorphisms of $PSL_2^{\mp}(K)$ over any skew field K. Шусюэ сюэбао, Acta math. sin., 1982, *25,* № 4, 484—492 (РЖМат, 1983, 4A209)
382. *Scharlemann M.*, Subgroups of $SL(2, \mathbf{R})$ freely generated by three parabolic elements. Linear and Multilinear Algebra, 1979, *7,* № 3, 177—191 (РЖМат, 1980, 1A212)
383. *Scott L. L.*, Representations in characteristic p. Santa Cruz Conf. Finite Groups. Santa Cruz. Calif., 1979. Providence, R. I., 1980, 319—331 (РЖМат, 1981, 10A259)
384. *Seitz G. M.*, Subgroups of finite groups of Lie type. J. Algebra, 1979, *61,* № 1, 16—27 (РЖМат, 1980, 8A169)
385. —, On the subgroup structure of classical groups. Commun. Algebra, 1982, *10,* № 8, 875—885 (РЖМат, 1982, 10A160)
386. *Serre J.-P.*, Le problème des groupes de congruence pour SL_2. Ann. Math. 1970, *92,* № 3, 489—527 (РЖМат, 1971, 7A469)
387. —, Amalgames et points fixes. Lect. Notes Math., 1974, *372,* 633—640 (РЖМат, 1975, 6A305)
388. —, Arbres, amalgames, SL_2. Astérisque, 1977, № 46, 189 p. (РЖМат, 1978, 4A160K)
389. *Servedio F.*, Canonical reducible cubic forms in $n(\geqslant 3)$-variables and their infinite orthogonal groups. J. Pure and Appl. Algebra, 1979, *15,* № 3, 283—291 (РЖМат, 1980, 1A504)
390. *Shalen P. B.*, Linear representations of certain amalgamated products. J. Pure and Appl. Algebra, 1979, *15,* № 2, 187—197 (РЖМат, 1979, 12A267)
391. *Sharpe R. W.*, On the structure of the Steinberg group $St(\Lambda)$. J. Algebra, 1981, *68,* № 2, 453—467 (РЖМат, 1981, 8A385)

392. *Shult E.*, Group-related geometries. Santa Cruz Conf. Finite Groups. Santa Cruz, Calif., 1979. Providence, R. I., 1980, 457—460 (РЖМат, 1981, 10A171)
393. SK_1 von Schiefkörpern. Seminar Bielefeld-Göttingen, 1976. Lect. Notes Math., 1980, *778*, 1—123 (РЖМат, 1981, 2A393)
394. *Smythe N.*, A presentation for a group of integer matrices. Can. Math. Bull., 1982, *25*, № 2, 215—221 (РЖМат, 1982, 11A132)
395. *Snaith V.*, On the homology of the general linear groups over $\mathbf{Z}/4$. Can. J. Math., 1978, *30*, № 4, 851—855 (РЖМат, 1979, 2A278)
396. *Solazzi R. E.*, Four-dimensional symplectic groups. J. Algebra, 1977, *49*, № 1, 225—237 (РЖМат, 1978, 7A280)
397. *Soulé Ch.*, The cohomology of $SL_3(\mathbf{Z})$. Topology, 1978, *17*, № 1, 1—22 (РЖМат, 1978, 10A302)
398. —, Chevalley groups over polynomial rings. London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1979, № 36, 359—367 (РЖМат, 1980, 6A479)
399. *Southcott J. B.*, Trace polynomials of words in special linear groups. J. Austral. Math. Soc., 1979, *A28*, № 4, 401—412 (РЖМат, 1980, 7A158)
400. *Stanley R. P.*, Relative invariants of finite groups generated by pseudoreflections. J. Algebra, 1977, *49*, № 1, 134—148 (РЖМат, 1978, 6A431)
401. —, Invariants of finite groups and their applications to combinatorics. Bull. (New Ser.) Amer. Math. Soc., 1979, *1*, № 3, 475—511 (РЖМат, 1980, 1A452)
402. *Steffen G.*, Irreduzible zyklische Matrixgruppen über dem Restklassenring mod p^k. Rostock. Math. Kolloq., 1978, № 8, 5—29 (РЖМат, 1978, 12A344)
403. —, Eigenschaften von Matrixgruppen über dem Restklassenring modulo p^k. Rostock. Math. Kolloq., 1979, № 12, 17—30 (РЖМат, 1980, 5A231)
404. *Stein M. R.*, The Schur multipliers of $Sp_6(\mathbf{Z})$, $spin_8(\mathbf{Z})$, $spin_7(\mathbf{Z})$, and $F_4(\mathbf{Z})$. Math. Ann. 1975, *215*, № 2, 165—172 (РЖМат, 1976, 1A428)
405. *Steinberg R.*, Generators, relations and covering of algebraic groups. II. J. Algebra, 1981, *71*, № 2, 527—543
406. *Stensholt E.*, Certain embeddings among finite groups of Lie type. J. Algebra, 1978, *53*, № 1, 136—187 (РЖМат, 1979, 2A150)
407. *Stothers W. W.*, Subgroups of infinite index in the modular group. I, II, III. Glasgow Math. J., 1978, *19*, № 1, 33—43; 1981, *22*, № 1, 101—118; № 2, 119—131 (РЖМат, 1978, 9A239; 1981, 7A198, 11A211)
408. —, Groups of the second kind within the modular group. Ill. J. Math. 1981, *25*, № 3, 390—397 (РЖМат, 1982, 4A241)
409. *Strecker G.*, Unitäre Gruppen über beliebigen lokalen Ringen. J. Algebra, 1979, *57*, № 1, 258—270 (РЖМат, 1979, 12A502)
410. *Strickland E.*, The symplectic group and determinants. J. Algebra, 1980, *66*, № 2, 511—533 (РЖМат, 1981, 5A390)
411. *Strooker J. R.*, The fundamental group of the general linear group. J. Algebra, 1977, *48*, № 2, 477—508 (РЖМат, 1978, 5A384)
412. *Sullivan J. B.*, The second Lie algebra cohomology group and Weyl modules. Pacif. J. Math., 1980, *86*, № 1, 321—326 (РЖМат, 1981, 2A376)
413. *Suslin A. A.*, Stability in algebraic *K*-theory. Preprint LOMI, 1980, № E-2, 28 pp. (РЖМат, 1981, 1A421)
414. *Suzuki K.*, On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings. Tohoku Math. J., 1976, *28*, № 1, 57—66 (РЖМат, 1976, 10A152)
415. —, On parabolic subgroups of Chevalley groups over commutative rings. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1977, *A13*, № 366—382, 225—232 (РЖМат, 1977, 10A301)
416. *Thomson M. W.*, Representations of certain verbal wreath products by matrices. Math. Z., 1979, *167*, № 3, 239—257 (РЖМат, 1980, 1A246)
417. *Tits J.*, Endliche Spiegelungsgruppen, die als Weylgruppen auftreten. Invent. math., 1977, *43*, № 3, 283—295 (РЖМат, 1978, 8A233)
418. —, Quaternions over $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$, Leech's lattice and the sporadic group of Hall-Janko. J. Algebra, 1980, *63*, № 1, 56—75 (РЖМат, 1980, 10A114)

419. *Traina C. R.*, Trace polynomial for two generator subrgoups of $SL(2, \mathbf{C})$. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *79*, № 3, 369—372 (РЖМат, 1981, 2A200)
420. *Tuler R.*, Subgroups of SL_2Z generated by elementary matrices. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1981, *A88*, № 1—2, 43—47 (РЖМат, 1981, 7A384)
421. *Vaserstein L. N.*, On full subroups in the sence of O'Meara. J. Algebra, 1982, *75*, № 2, 437—444 (РЖМат, 1982, 11A312)
422. —, On the normal subgroups of GL_n over a ring. Lect. Notes Math., 1981, *854*, 456—465 (РЖМат, 1981, 12A392)
423. *Vavilov N. A.*, On subgroups of split orthogonal groups in even dimensions. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., 1981, *29*, № 9—10, 425—429 (РЖМат, 1982, 5A171)
424. *Volklein H.*, Transitivitätsfragen bei linearen Gruppen. J. Algebra, 1982, *78*, № 2, 341—356 (РЖМат, 1983, 4A216)
425. *Vorst T.*, The general linear group of polynomial rings over regular rings. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 5, 499—509 (РЖМат, 1981, 8A404)
426. *Vust Th.*, Sur la théorie classique des invariants. Comment. math. helv., 1977, *52*, № 2, 259—295 (РЖМат, 1978, 3A306)
427. *Waall R. W.* van der, On minimal symplectic groups. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1977, *A80*, № 5; Indag. math., *39*, № 5, 463—468 (РЖМат, 1978, 8A212)
428. —, On *p*-rational monomial matrix groups and Hadamard matrices. Proc. Kon. ned. acad. wetensch., 1982, *A85*, № 2, 237—246 (РЖМат, 1982, 12A199)
429. *Wagner A. C.*, Collineation groups generated by homologies of order greater than 2. Geom. dedic., 1978, *7*, № 4, 387—398 (РЖМат, 1979, 4A261)
430. —, The minimal number of involutions generating some finite three-dimensional groups. Boll. Unione mat. ital., 1978, *A15*, № 2, 431—439 (РЖМат, 1979, 1A211)
431. —, The subgroups of $PSL(5,2^a)$. Result. Math., 1978, *1*, № 1, 207—226
432. —, Determination of the finite primitive reflection groups over an arbitrary field of characteristic not two. Part I, II, III. Geom. Dedic., 1980, *9*, № 2, 239—253; 1981, *10*, № 1—4, 191—203, 475—523 (РЖМат, 1980, 11A190; 1981, 9A137, 9A138)
433. *Wales D. B.*, Linear groups of degree *n* containing an involution with two eigenvalues-1. II. J. Algebra, 1978, *53*, № 1, 58—67 (РЖМат, 1979, 3A184)
434. —, Connections between finite linear groups and linear algebra. Linear and Multilinear Algebra, 1979, *7*, № 4, 267—279 (РЖМат, 1980, 3A146)
435. *Wall G. E.*, Conjugacy classes in projective and special linear groups. Bull. Austral. Math., Soc., 1980, *22*, № 3, 339—364 (РЖМат, 1981, 10A234)
436. *Wan Zhe-xian, Wu Xiao-lung*, On the second commutator subgroup of $PGL_2(\mathbf{Z})$. Math. Repts Acad. Sci. Can., 1980, *2*, № 6, 303—308 (РЖМат, 1981, 11A215)
437. *Waterhouse W. C.*, Automorphisms of $GL_n(R)$. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *79*, № 3, 347—351 (РЖМат, 1981, 2A359)
438. *Wehrfritz B. A. F.* On the Lie-Kolchin-Mal'cev theorem. J. Austral. Math. Soc., 1978, *A26*, № 3, 270—276 (РЖМат, 1979, 5A178)
439. —, Nilpotence in groups of semi-linear maps. Proc. London Math. Soc., 1978, *36*, № 3, 448—479 (РЖМат, 1978, 11A218)
440. —, Hypercentral unipotent subgroups of linear groups. Bull. London Math. Soc., 1978, *10*, № 3, 310—313 (РЖМат, 1979, 7A251)
441. —, On finitely generated soluble linear groups. Math. Z., 1980, *170*, № 2, 155—167 (РЖМат, 1980, 8A203)
442. —, The rank of a linear *p*-group; an apalogy. J. London Math. Soc., 1980, *21*, № 2, 237—243 (РЖМат, 1980, 12A204)

443. —, Wieland's subnormality criterion and linear groups. J. Algebra, 1980, *67*, № 2, 491—503 (РЖМат, 1981, 7А197)
444. —, Groups whose irreducible representations have finite degree. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1981, *90*, № 3, 411—421 (РЖМат, 1982, 4А257)
445. —, Groups whose irreducible representations have finite degree: III. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1982, *91*, № 3, 397—406 (РЖМат, 1982, 12А196)
446. *Weintraub S. H.*, $PSL_2(\mathbf{Z}_p)$ and the Atiyah-Bott fixed-point theorem. Houston J. Math., 1980, *6*, № 3, 427—430 (РЖМат, 1981, 8А443)
447. *Weisfeiler B.*, On abstract monomorphisms between big subgroups of some groups of type B_2 in characteristic 2. J. Algebra, 1979, *60*, № 1, 202—224 (РЖМат, 1980, 5А423)
448. *Wong W. J.*, Abelian unipotent subgroups of finite orthogonal groups. J. Austral. Math. Soc., 1982, *A32*, № 2, 223—245 (РЖМат, 1982, 10А157)
449. *Yoshida T.*, On the Hall-Higman and Shult theorems. Hokkaido Math. J., 1978, *7*, № 2, 336—338 (РЖМат, 1979, 3А196)

УДК 512.552;
512.553;
512.56

КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ МОДУЛЕЙ И СТРУКТУРЫ ПОДМОДУЛЕЙ

В. Т. Марков, А. В. Михалев, Л. А. Скорняков, А. А. Туганбаев

Настоящий обзор составлен по материалам реферативного журнала «Математика» за 1973—1982 гг. и является продолжением аналогичного обзора А. В. Михалева [89]. Он тесно примыкает к обзорам по теории колец [119, 4, 17, 18, 3], теории модулей [120, 121, 90, 91, 122, 79] и теории абелевых групп [93, 95, 96]. Отметим, что авторы не преследовали целей полноты изложения результатов, касающихся абелевых групп.

За этот период различные разделы теории колец, связанные с кольцами эндоморфизмов модулей и структурами подмодулей, были отражены в обширной монографической литературе. В первую очередь отметим книги по теории колец: Л. А. Бокуть [16]; Ю. Д. Дрозд, В. В. Кириченко [43]; переводы книг Каша [55] и Фейса [158]; Кон [65] и [252]; Андерсон и Фуллер [184]; Беренс [212]; Коззенс и Фейс [577]; Шарп и Вамош [609]. Далее, кольца частных систематически изучаются в книгах Штенштрема [623] и Ламбека [453]. Вопросы, относящиеся к линейным группам над кольцами, затронуты в книгах Д. А. Супруненко [127], Верфритца [661], Ю. И. Мерзлякова [87], Макдональда [503] и двух сборников переводов статей [1, 52], а также в последнем обзоре [49] А. Е. Залесского, помещенного в этом томе. Полугруппы эндоморфизмов рассматриваются в книге Петрича [562].

Если не оговорено противное, то всюду далее основное кольцо обозначается через R, все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными и имеющими единицу, а модули — левыми и унитарными. Слово «идеал» всегда означает двусторонний идеал. Как и в предыдущих обзорах, широко используются следующие обозначения: $M_n(R)$ — кольцо $(n\times n)$-матриц над R, R-Mod — категория всех левых R-модулей;

$J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R;

$\Pi M_\alpha (\sqcup M_\alpha)$ — прямое произведение (прямая сумма) модулей M_α;

$\operatorname{Soc} M$ — цоколь модуля M;

$Z(M)$ — сингулярный подмодуль модуля M;

$E(M)$ — инъективная оболочка модуля M;

$\operatorname{End}_R(M)$ — кольцо эндоморфизмов R-модуля M (иногда $\operatorname{End} M$);

$L_R(M)$ — структура подмодулей R-модуля M (иногда $L(M)$);

$\operatorname{Aut}_R(M)$ — группа автоморфизмов R-модуля M (иногда $\operatorname{Aut} M$);

$|X|$ — мощность множества X;

Z, **Q**, **R** — кольца целых, рациональных и действительных чисел, соответственно.

§ 1. Кольца эндоморфизмов различных классов модулей

В ряде статей с различных точек зрения рассматриваются эндоморфизмы векторных пространств над телами.

Стюарт [625] описал структуру идеалов алгебры Ли линейных преобразований бесконечномерного векторного пространства. В. П. Солтан [125] привел необходимые и достаточные условия того, что два линейных оператора в конечномерном комплексном пространстве имеют одни и те же инвариантные подпространства. Густафсон [337] передоказал с помощью теории модулей над коммутативными артиновыми кольцами неравенство Шура $\dim_F(R) \leqslant g(n) = [n^2/4]+1$ для размерности максимальной коммутативной подалгебры R в алгебре $\operatorname{End}_F(V)$ линейных преобразований n-мерного векторного пространства V над полем F. Там же изучается строение таких подалгебр R размерности $g(n)$. В этом случае алгебра R локальна, $J^2(R)=0$ и $R/J(R) \cong F$. Новотны [540] описывает перестановочные линейные операторы в конечномерных векторных пространствах. Курка [452] отметил, что кольцо эндоморфизмов счетномерного векторного пространства является эквационально компактным модулем над собой с двумя свободными образующими. Хак [341] применяет теорию колец эндоморфизмов векторных пространств и соответствующие слабые топологии для изучения однородных компонент цоколя кольца. Доулингс [269] исследует множества идемпотентов, которые порождают полугруппу сингулярных эндоморфизмов конечномерного векторного пространства. Хансен и Робинсон [351] рассматривают такой линейный оператор f действительных векторных пространств E, V с внутренним произведением, что $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)^\perp$, $F = fE \oplus (fE)^\perp$. Э. А. Бабаев и А. А. Махмудов [6] изучают вопрос о строгости изоморфизма между полугрудами пар линейных отображений векторных пространств. Л. Г. Мустафаев [97, 98] исследует свойства мультипликативной полугруппы $S(X)$ кольца $K(X)$ всех линейных непрерывных преобразований нормированного пространства X размерности, большей чем 1, над полем действительных или комплексных чисел. В частности, он доказал, что подполугруппа $H(X)$ полугруппы $S(X)$, состоящая из всех преобразований, переводящих X в свои одномерные подпространства, и нулевого преобразования, является вполне простой, причем полугруппы $H(X)$ и $S(X)$ определяют пространство X с точностью до топологического изоморфизма. Махала [486] доказал, что каждое обобщенное полулинейное преобразование векторного пространства индуцирует гомоморфизм соответствующего проективного пространства и каждый гомоморфизм проективного пространства может быть индуцирован обобщенным полулинейным преобразованием. Он же обобщил этот результат в [488]. В. М. Усенко [153] рассматривает полугруппы полулинейных преобразований. В [534] отмечено, что структура левых аннуляторов кольца эндоморфизмов векторного пространства является подструктурой структуры его левых идеалов.

Полное кольцо матриц над R можно рассматривать как кольцо эндоморфизмов свободного R-модуля. В связи с этим отметим некоторые результаты о кольцах матриц, интересные с этой точки зрения. Ряд свойств левых идеалов кольца R_n установил Стоун [627]. В частности, для локального кольца R оказалось, что все максимальные левые идеалы кольца R_n сопряжены. Гарднер [318] отметил, что кольцо матриц наследует свойство T-нильпотентности. Напомним, что кольцо R с инволюцией называется бэровским $*$-кольцом, если для любого подмножества $A \subseteq R$ имеем $Ann_R(A) = Re$, где $e = e^2 = e^*$. Хандельман [345] исследовал, когда это свойство наследуется кольцом матриц. В случае коммутативности кольца R это имеет место тогда и только тогда, когда R — полунаследственный порядок в самоинъективном кольце, $M = M^*$ для любого максимального идеала из R и инволюция, естественным образом возникающая на поле R/M, положительна. Некоторые условия (в терминах кольца эндоморфизмов), обеспечивающие свободу модуля, приведены в [422].

В следующих работах затронуты кольца эндоморфизмов проективных и близких к ним модулей.

Миллер [512] изучает свойства конечно порожденного проективного модуля P_A над кольцом A и его кольца эндоморфизмов B. Модуль P называется инъектором, совершенным инъектором, проектором, совершенным проектором, флетъектором, если соответственно функтор ${}_BP \otimes_A (-)$ сохраняет инъективные модули, инъективные оболочки, проективные модули, проективные накрытия, плоские модули. Приводятся характеризации указанных классов модулей. Например, P_A — флетъектор тогда и только тогда, когда модуль ${}_BP$ — плоский. Ю. А. Дрозд [282] исследует такие свойства E кольца R, что кольцо R обладает свойством E тогда и только тогда, когда этим свойством обладают все кольца End (P) для любого конечно порожденного проективного R-модуля P, являющегося прямой суммой не более чем N неразложимых модулей для некоторого фиксированного числа N. Нита [537] рассматривает некоторые свойства кольца R, переносящиеся на кольца эндоморфизмов проективных образующих. Хилл [378] доказал, что кольцо эндоморфизмов конечно порожденного проективного левого модуля, в котором все подмодули проективны, является наследственным слева кольцом. Алмквист [178, 179] изучает свойства эндоморфизмов конечно порожденных проективных модулей над коммутативными кольцами. Пусть F — конечно порожденный свободный R-модуль, $\{N_i\}$ — система его конечно порожденных подмодулей, D — подкольцо в $\mathrm{End}_R(F)$, состоящее из эндоморфизмов, переводящих каждый из модулей N_i в себя. М. Я. Финкельштейн [159] доказал, что если кольцо R совершенно (справа или слева) или полупримарно, то кольцо D обладает тем же свойством.

Пусть D — неразложимый проективный A-модуль, где A — конечномерная алгебра над полем, $M \in L(D)$. Брандт [225] рассматривает взаимоотношение следующих свойств: (1) включение $M \to D$ индуцирует изоморфизм $\mathrm{End}(M) \cong \mathrm{Hom}(M, D)$; (2) M — характеристический подмодуль; (3) M — вполне инвариантный подмодуль.

Эллигер [287] установил, что если M — квазипроективный модуль, каждый ненулевой подмодуль которого обладает максимальным подмодулем, то аналогичным свойством обладает кольцо $\mathrm{End}(M)$ как левый модуль над собой. Тивари и Кумар [636] показали, что кольцо $\mathrm{End}(M)/J(\mathrm{End}(M))$ регулярно, если M — псевдопроективный модуль, удовлетворяющий некоторым дополнительным ограничениям (модуль M называется псевдопроективным, если для любых эпиморфизмов $g, h: M \to \overline{M}$ найдется такой гомоморфизм $f: M \to M$, что $g = hf$). Фуджита [308] при выполнении некоторых дополнительных требований находит условия для конечномерного рефлексивного модуля M над круллевым порядком R в полупростом артиновом кольце, влекущие неравенство $\mathrm{gl.dim}(\mathrm{End}_R(M)) \leqslant 2$. Конечномерный модуль T над конечномерной алгеброй A называется наклоняющим модулем, если: 1) $\mathrm{proj.dim}(T) \leqslant 1$; 2) $\mathrm{Ext}(T, T) = 0$; 3) $T\text{-codim}(A_A) \leqslant 1$. Хаппель и Рингель [352] изучают алгебры вида $\mathrm{End}(T)$, где T — наклоняющий модуль над конечномерной наследственной алгеброй A. Модуль M называется d-непрерывным, если: 1) для любого $A \in L(M)$ верно, что $M = M_1 \oplus M_2$, где $M_1 \subseteq A$ и $A \cap M_2$ — малый подмодуль в M_2; 2) если фактормодуль M/N изоморфен прямому слагаемому модуля M, то N — прямое слагаемое модуля M. Мохаммед и Сингх [516] установили следующие свойства кольца эндоморфизмов E d-непрерывного модуля M: 1) $E/J(E)$ — регулярное кольцо; 2) $J(E) = \{f \in E \mid f(M)$ — малый подмодуль в $M\}$; 3) в кольце E идемпотенты можно поднимать по модулю радикала $J(E)$; 4) если модуль M неразложим, то кольцо E локально. Сюда примыкает также работа [515].

Ряд работ посвящен кольцам эндоморфизмов инъективных и близких к ним модулей.

Ниши [535] описал строение кольца эндоморфизмов неразложимого инъективного модуля над прюферовой областью и определил его центр. Миллер и Тёрнидж [514] выяснили, когда кольцо эндоморфизмов инъективного кообразующего является полунаследственным справа кольцом, а также кольцом, в котором все главные правые идеалы проективны. Хансен [350] описал строение колец эндоморфизмов инъективных модулей над полупримарным кольцом R с условием $\mathrm{gl.dim}(R/J^2(R)) < \infty$. Онодера [548] доказал, что если ${}_RM$ — инъективный проективный модуль с существенным конечно порожденным цоколем и каждый его простой фактормодуль изоморфен подмодулю из M, то кольцо $\mathrm{End}_R(M)$ является инъективным кообразующим как модуль над собой. Модуль M называется линейно компактным, если в нем разрешима любая конечно разрешимая система конгруэнций $x \equiv x_\alpha(\mathrm{mod}(M_\alpha))$, где $\{M_\alpha\}$ — семейство подмодулей модуля M. Кольцо R называется левым кольцом Мориты, если модуль ${}_RR$ и все инъективные оболочки простых левых R-модулей линейно компактны. Онодера [551] установил, что если R — левое кольцо Мориты, то все кольца эндоморфизмов инъективных левых R-модулей с существенным конечно порожденным цоколем являются правыми кольцами Мориты. Там же показано, что если кольцо R линейно компактно слева, M — линейно компактный инъективный модуль с существенным конечно порожденным цоколем, то M — линейно компактный кообразующий категории правых $\mathrm{End}_R(M)$-модулей. О кольцах эндоморфизмов линейно компактных модулей см. также [549].

Харада и Ишии [356] нашли достаточные условия левой артиновости кольца эндоморфизмов нётерова квазиинъективного правого модуля. Они же исследовали кольца эндоморфизмов квазиинъективных объектов абелевых категорий. Эллигер [287] доказал, что кольцо эндоморфизмов квазиинъективного полуартинова модуля является полунётеровым справа кольцом. Деспанде [272] установил, что если M — квазиинъективный модуль с существенным цоколем над полулокальным кольцом R, то: 1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J^n(\mathrm{End}(M)) = 0$; 2) если, к тому же, M — инъективный артинов кообразующий, то кольцо $\mathrm{End}(M)$ полно в топологии, определяемой степенями $J(\mathrm{End}(M))$. Кольца эндоморфизмов квазиинъективных модулей затрагивал Асхан [172]. Модуль M называется непрерывным, если каждый его подмодуль является существенным подмодулем некоторого прямого слагаемого модуля M и любой подмодуль модуля M, изоморфный прямому слагаемому модуля M, сам является прямым слагаемым. Свойства кольца эндоморфизмов непрерывного модуля, аналогичные свойствам кольца эндоморфизмов квазиинъективного модуля, указал Бишо [217]. Деспанде и Феллер [273] доказали, что если рациональное пополнение нётерова модуля M содержит квазиинъективную оболочку модуля M, то $J^n M=0$, где $J=J(\mathrm{End}(E(M)))$. Муссон [524] касался свойств колец эндоморфизмов инъективных оболочек конечно порожденных модулей над групповыми кольцами полициклических групп. С. Т. Главацкий ([25], с. 163; [27], с. 36) привел ряд результатов о кольцах эндоморфизмов топологических инъективных модулей. Кольца эндоморфизмов квазифробениусовых модулей затрагивали Хаугер и Циммерман [360].

Пусть $_RM$ — модуль, у которого размерность Голди конечна и равна n, $N(M)$ — идеал кольца $\mathrm{End}_R(M)$, образованный всеми f, у которых ядра являются существенными подмодулями, $D=\mathrm{End}(M)/N(M)$. Шок [611] доказал: 1) кольцо D вкладывается во вполне приводимое кольцо размерности Голди n; 2) цепочка правых (левых) аннуляторов в кольце D состоит не более чем из n членов; 3) все нильподкольца кольца D нильпотентны и их индекс нильпотентности не превосходит $n+1$.

Голдсмит [322] охарактеризовал кольца эндоморфизмов редуцированных модулей без кручения над коммутативными полными кольцами дискретного нормирования. Нита [336] затрагивает кольца эндоморфизмов модулей над кольцами, у которых каждый простой левый модуль изоморфен левому идеалу. Фаркаш и Снайдер [297] показали, что любая конечномерная алгебра с делением над полем F характеристики ноль изоморфна кольцу эндоморфизмов некоторого простого модуля над алгеброй Вейля $A(F)$. Йондруп [420] доказал, что регулярность коммутативного кольца R равносильна тому, что все R-модули с локальными кольцами эндоморфизмов просты.

Махала [480] исследует связь между свойствами структур главных левых идеалов колец эндоморфизмов некоторых однородных вполне приводимых модулей и автоморфизмами этих колец. Он же [481] изучает свойства эндоморфизмов аддитивной группы кольца эндоморфизмов вполне приводимого модуля. К. В. Агапитов [2] выяснил строение кольца биэндоморфизмов точного примарного модуля над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом. Циммерман — Хьюзген [684] исследует вопрос, когда функтор $\mathrm{Hom}_R(M,—)$ переводит инъективные оболочки R-модулей в инъективные оболочки $\mathrm{End}(M)$-модулей. Е. Ш. Керер [58] изучает эндоморфизмы конечно порожденных модулей над областями главных идеалов.

Укажем некоторые из работ, посвященных кольцам эндоморфизмов абелевых групп.

Абелева группа G называется эндожесткой, если для любого $h\in\mathrm{End}(G)$ найдется такое целое число n, что $h(g)=ng$ для всех $g\in G$. Шелах [610] при предположении, что $2^{\aleph_0}<2^{\aleph_1}$, доказал существование эндожесткой сильно $\aleph_1$-свободной абелевой группы мощности $\aleph_1$.

П. А. Крылов [72] описал строение кольца эндоморфизмов неразложимой абелевой группы без кручения, у которой все p-базисные подгруппы цикличны. С. Ф. Кожухов [64] охарактеризовал абелевы группы без кручения конечного ранга с кольцами эндоморфизмов, являющимися подкольцами поля рациональных чисел. Там же описаны абелевы группы G без кручения конечного ранга, у которых каждый нетождественный автоморфизм регулярен и $pG=G$ хотя бы для одного простого числа p.

Хубер и Уорфилд [381] рассматривают ядра и коядра гомоморфизмов $A^X\to A^Y$, где A — редуцированная абелева группа без кручения конечного ранга, особо выделяя случай, когда кольцо $\mathrm{End}(A)$ наследственно. Кольца эндоморфизмов и квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения изучали Корнелиус [256] и Леувен [465]. Свойства колец эндоморфизмов сепарабельных абелевых групп без кручения исследовали Уэбб [659, 660] и Баззони и Метелли [205]. Бреннер [226] использует свойства разложения некоторых малых диаграмм модулей для изучения кольца эндоморфизмов абелевой группы без кручения. Кольца эндоморфизмов счетных абелевых групп без кручения затрагиваются, в частности, в обзоре Орсатти [554].

И. Х. Беккер и С. К. Россошек [10] исследуют абелевы группы без кручения A, которые с помощью действия своего фиксированного эндоморфизма превращаются в периодический модуль над кольцом $Z[x]$. Арнольд и Лэди [193] для случая, когда A — абелева группа без кручения конечного ранга, выясняют, когда кольцо $\mathrm{End}(A)$ является областью главных правых идеалов или наследственным справа кольцом, а также обладает тем свойством, что $BA\neq A$ для любого правого идеала B из $\mathrm{End}(A)$.

Кольца эндоморфизмов примарных периодических абелевых групп исследовали Монк [517], Корнер [257], Хаузен и Джонсон [372], Ричман и Уокер [582]. Кольца эндоморфизмов сервантных подгрупп вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга изучает Арнольд [191]. Ряд результатов о кольцах эндоморфизмов абелевых групп без кручения приведен П. А. Крыловым [75].

Шульц [607] получил ряд следствий из существования изоморфизма кольца и кольца эндоморфизмов его аддитивной группы. Топологические аспекты колец эндоморфизмов абелевых групп рассматривались в работах [276, 274, 277, 423, 194, 346, 430].

А. Г. Григорян [36] изучал кольца эндоморфизмов модулей над малыми преаддитивными категориями. Бергман [215] исследовал действие на модуле булева кольца с помощью идемпотентных эндоморфизмов модуля. Карлсон [243] изучает конечно порожденные модули над групповой алгеброй конечной p-группы с коэффициентами из поля F характеристики p, у которых кольца F-эндоморфизмов изоморфны прямой сумме одномерного тривиального FG-модуля и некоторого свободного модуля.

§ 2. Свойства отдельных эндоморфизмов

Саббах [593] доказал, что каждый сюрьективный или инъективный эндоморфизм конечно представимого левого модуля над совершенным справа кольцом является автоморфизмом. Кокс и Раш [259] установили, что трансфинитная нильпотентность первичного радикала коммутативного кольца R равносильна тому, что все сюрьективные эндоморфизмы любых плоских R-модулей конечного локального ранга являются автоморфизмами, и привели пример плоского модуля конечного внешнего ранга, обладающего неинъективным сюрьективным эндоморфизмом. Стефенсон [624] доказал, что если M-модуль с дистрибутивной структурой подмодулей и каждый ненулевой подфактор модуля M обладает максимальным (минимальным) подмодулем, то любой сюрьективный (инъективный) эндоморфизм модуля M является автоморфизмом. Армендариц, Фишер и Снайдер [190] рассматривают вопрос, когда инъективные или сюрьективные эндоморфизмы конечно порожденных модулей являются автоморфизмами, передоказывая при этом известные результаты и приводя примеры.

Такеути [634] доказал, что любой эндоморфизм неразложимого модуля, обладающего артиновым проективным накрытием, является либо автоморфизмом, либо нильпотентным эндоморфизмом. Шарп [608] исследует свойства модулей над коммутативным нётеровым кольцом R, являющихся конечными прямыми суммами модулей, у которых умножение на любой элемент кольца R является либо нильпотентным, либо сюрьективным эндоморфизмом. Бальцержик [199] вычисляет следы p-тых внешних степеней суммы двух эндоморфизмов конечно порожденных проективных модулей над коммутативным кольцом. Дэвисон [266] называет гомоморфизм $f: M\to N$ модулей над коммутативным кольцом обратно дистрибутивным, если $f^{-1}(A+B)=f^{-1}(A)+f^{-1}(B)$ для всех A, $B\in L(N)$. Он также доказывает, что свойство обратной дистрибутивности локально, и выясняет, какие ограничения на кольцевое расширение $A\subseteq B$ коммутативных колец накладывает обратная дистрибутивность вложения.

Модули, у которых все эндоморфизмы подмодулей продолжаются на весь модуль, изучал В. Е. Говоров [28] и А. А. Туганбаев [130, 131, 132, 136, 140, 144, 145, 147, 149, 150, 151, 152]. Он же [131, 135] исследовал модули, в которых все автоморфизмы подмодулей продолжаются до автоморфизмов (эндоморфизмов) самого модуля, а также модули, у которых все эндоморфизмы фактормодулей поднимаются на весь модуль [133, 134, 136, 137, 141, 142]. Модули, у которых все идемпотентные эндоморфизмы подмодулей продолжаются до эндоморфизмов самого модуля, рассматривали Джереми [418], Гоэл и Джейн [320] и Ахсан [173].

А. П. Мишина [92] описала абелевы группы, у которых все эндоморфизмы (автоморфизмы) подгрупп продолжаются до эндоморфизмов (автоморфизмов) самой группы. Она же [94] описала абелевы группы со свойством подъема всех эндоморфизмов (автоморфизмов) факторгрупп на саму группу. Ю. М. Фирсов [160] сформулировал на матричном языке условия продолжения автоморфизма (эндоморфизма) подгруппы свободной абелевой группы до автоморфизма (эндоморфизма) всей группы. Михель [511] рассматривает системы инвариантов для нильпотентных эндоморфизмов конечно порожденных свободных абелевых групп.

§ 3. Кольцевые свойства колец эндоморфизмов

В данном параграфе предполагается, что эндоморфизмы действуют на левых модулях справа, а на правых модулях, когда они встречаются, — слева. Начнем с работ, в которых описаны свойства основного кольца R и R-модуля M, связанные, в первую очередь, с первичностью и полупервичностью кольца $\mathrm{End}_R(M)$. Для абелевой группы G эти свойства исследовал П. А. Крылов [74]. Пусть V — делимая оболочка группы G без кручения, $K(V)=\mathrm{End}\,\mathbf{Q}(V)$, $\mathscr{E}(G)$ — кольцо квазиэндоморфизмов группы G, т. е. делимая оболочка подгруппы $\mathrm{End}\ (G)$ в $K(V)$. Доказана эквивалентность следующих свойств: 1) $\mathscr{E}(G)$ — тело; 2) G — сильно неразложимая группа, совпадающая со своим псевдоцоколем (т. е. сервантной подгруппой, порожденной всеми вполне инвариантными сервантными подгруппами). Доказана также эквивалентность следующих условий: 1) $\mathscr{E}(G)$ — простое кольцо; 2) $\mathrm{End}\,\mathbf{Z}(G)$ — первичное кольцо; 3) группа G квазиизоморфна прямой сумме сильно неразложимых попарно квазиизоморфных групп, совпадающих со своими псевдоцоколями. Аналогичный результат связывает полупервичность кольца $\mathrm{End}\,\mathbf{Z}(G)$ с классической полупростой кольца $\mathscr{E}(G)$: каждое из этих условий эквивалентно совпадению группы G со своим псевдоцоколем. Он же [69] привел достаточное условие полупростоты кольца $\mathrm{End}\ (G)$ для случая, когда G совпадает со своим псевдоцоколем. Хатчинсон и Зельманович [393] отметили, что если

R — существенная подпрямая сумма первичных колец R_α, т. е. R — существенный подмодуль в $\prod_\alpha R_\alpha$ и M — модуль без кручения над R, то $\mathrm{End}_R(M)$ — существенная подпрямая сумма первичных колец. Реско [578], рассматривая вопрос о примитивности тензорного произведения примитивной алгебры A над коммутативной областью целостности K на плоскую K-алгебру B, доказал, что если существует такой простой точный A-модуль U, что алгебра $\mathrm{End}_A(U)\otimes_K B$ примитивна, то и алгебра $A\otimes_K B$ примитивна. Фейс [293] показал, что кольцо $\mathrm{End}_R(E)$ является телом для любого неразложимого инъективного модуля E в том и только в том случае, когда любой конеприводимый левый идеал кольца R является критическим. Здесь же отметим работу [600].

Перейдем к результатам, касающимся выполнения различных условий конечности в кольцах эндоморфизмов. Арнольд и Лэди [193] нашли условия, при которых кольцо эндоморфизмов абелевой группы без кручения конечного ранга является кольцом главных правых идеалов без делителей нуля, соответственно, наследственным кольцом, кольцом, над которым каждый проективный модуль свободен. Хилл [378] показал, что если любой подмодуль конечно порожденного проективного R-модуля P проективен, то $\mathrm{End}\,P$ — наследственное слева кольцо. Гупта и Варадараджан [336] установили правую нётеровость кольца эндоморфизмов квазиинъективного артинова модуля. Харада и Ишии [356] указали некоторые достаточные условия левой артиновости кольца эндоморфизмов квазиинъективного нётерова модуля, а Рангасвами [574] — то же для артинова модуля. Голди и Смолл [321] показали, что если R — нётерово слева кольцо и M — конечно порожденный R-модуль, то кольцо $T=\begin{pmatrix}\mathrm{End}\,M & 0\\ M & R\end{pmatrix}$ — левое кольцо Голди, и все нильподкольца кольца $\mathrm{End}\,M$ нильпотентны. Фишер [300] и Гордон [327] доказали нильпотентность нильподколец кольца эндоморфизмов артинова модуля, а также модуля, имеющего конечную размерность Крулля. Аналогичный результат для рационального пополнения нётерова модуля получен в [273]. Смало [616] показал, что если M — модуль конечной длины и n — максимальное число изоморфных между собой факторов его композиционного ряда, то $J(\mathrm{End}\,M)^n=0$.

Вопрос об алгебраичности тел эндоморфизмов простых модулей, на который указала Смит [617], исследовал Ирвинг [395, 396, 397]. Он называет алгебру A над полем k удовлетворяющей теореме Гильберта о нулях, если тело эндоморфизмов любого простого A-модуля алгебраично над k. Среди прочих результатов отметим построение примеров алгебр и полугрупп, имеющих подэкспоненциальный, но не степенной рост

размерности подпространств, порожденных словами от образующих не более чем заданной длины, а также нётеровых примитивных алгебр, не удовлетворяющих теореме Гильберта о нулях. С другой стороны, Кошон [245] доказал, что если R — фильтрованная алгебра над полем k, причем $R_0=k$, и $\mathrm{gr}\,R$ — конечно порожденная коммутативная k-алгебра, то $\mathrm{End}\,M\otimes_k k'$ — алгебраическая k'-алгебра для любого расширения k' поля k и любого модуля M конечной длины.

Керр [436] привел пример коммутативного кольца Голди, кольцо матриц над которым уже не является кольцом Голди, а Гордон и Робсон [329] отметили существование примера критического левого идеала L в нётеровом первичном кольце R такого, что кольцо $\mathrm{End}_R(L)$ не имеет левой размерности Крулля. Джатегаонкар [410] построил пример артинова (нётерова первичного) кольца R, содержащего такой левый идеал L, что кольцо $\mathrm{End}_R(L)$ не артиново (не нётерово) ни слева, ни справа.

Осо́фская [555] приводит оценки для слабой глобальной размерности колец эндоморфизмов свободных модулей. Смало [615] показал, что если R — артинова алгебра с радикалом J и $J^n=0$, но $J^{n-1}\neq 0$, то $\mathrm{gl.dim}\left(\mathrm{End}_R\left(\bigoplus_{i=0}^{n} A/J^i\right)\right)\leqslant n$, причем эта оценка неулучшаема. Глобальную размерность некоторых колец эндоморфизмов рефлексивных модулей исследовал Роггенкамп]586].

Сальче и Менегаццо [594] описали абелевы группы, кольца эндоморфизмов которых линейно компактны в конечной топологии. Настасеску [525] доказал полуартиновость кольца эндоморфизмов конечно порожденного полуартинова квазипроективного модуля. Некоторые условия конечности для колец эндоморфизмов квазипроективных и квазиинъективных модулей встречаются у Эллигера [286, 287].

Рангасвами [572] нашел необходимое условие самоинъективности слева кольца эндоморфизмов абелевой группы. А. В. Иванов [51] указал необходимые и достаточные условия самоинъективности слева и самоинъективности справа этого кольца, а также выполнения в нем аннуляторного условия. Например, кольцо $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G)$ самоинъективно справа тогда и только тогда, когда $G=D\oplus A$, где D — делимая группа, A — редуцированная вполне инвариантная сервантная подгруппа в $\prod_{p\in\pi} T_p$, где π — множество всех простых чисел, а T_p — прямая сумма изоморфных циклических p-групп, причем при $D\neq 0$, A — периодическая группа. Ряд результатов о самоинъективности колец эндоморфизмов различных классов R-модулей и ее связи со свойствами самого кольца R и категории R-Mod получили Г. М. Бродский [20], Г. М. Бродский и А. Г. Григорян [22]. Обобщение многих результатов на модули над малыми категориями содержится в работах А. Г. Григоряна [35, 36]. Гудёрл и Бойль [326] использовали кольца эндоморфизмов несингулярных инъективных модулей для изучения строения самоинъективных регулярных колец.

Г. М. Бродский и А. Г. Григорян ([25], 2, с. 18) изучали кольца эндоморфизмов методами теории кручений. Среди полученных результатов: коммутативное кольцо R полупросто и артиново (регулярно и полуартиново) тогда и только тогда, когда кольцо эндоморфизмов любого инъективного R-модуля регулярно (удовлетворяет условию: правый аннулятор любого собственного конечно порожденного левого идеала содержит ненулевой идемпотент). Эрлих [285] показал, что регулярное кольцо $S = \mathrm{End}\, M$ является обратимо регулярным, т. е. для любого $a \in S$ существует обратимый элемент $u \in S$ такой, что $aua = a$, тогда и только тогда, когда в модуле M дополнения изоморфных прямых слагаемых изоморфны. Найден также класс модулей, для которых обратимая регулярность кольца эндоморфизмов эквивалентна его регулярности и конечности в смысле Неймана (т. е. из $xy=1$ следует $yx=1$ для $x, y \in S$). Условие конечности в смысле Неймана в кольцах эндоморфизмов рассматривал также Петерсон [560].

Армендариц [189] доказал, что если R — коммутативное кольцо или регулярное V-кольцо, а M — модуль с артиновыми первичными факторами (т. е. M/PM — артинов модуль для любого первичного идеала P кольца R), то кольцо $S = \mathrm{End}_R(M)$ сильно π-регулярно (т. е. для любого $a \in S$ существует такое целое $n \geqslant 1$, что $a^n \in a^{n+1}S$). Джереми [417, 418] указал ряд условий, при которых кольцо эндоморфизмов модуля порождено своими идемпотентами. Бэровские кольца эндоморфизмов модулей изучал Кхури [440, 442, 443]. Например, если M — несингулярный модуль и $\mathrm{Hom}_R(M, U) \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля $U \subseteq M$, то кольцо $\mathrm{End}_R(M)$ является бэровским тогда и только тогда, когда любое дополнение в M — прямое слагаемое. Никольсон [528] доказал, что кольцо эндоморфизмов регулярного модуля над I_0-кольцом является полупростым I_0-кольцом (кольцо R называется I_0-кольцом, если любой односторонний идеал, не лежащий в $J(R)$, содержит ненулевой идемпотент, модуль M называется регулярным, если для любого $x \in M$ существует гомоморфизм $\alpha: M \to R$ такой, что $x = \alpha(x)x$).

Метелли и Сальче [510] охарактеризовали в терминах минимальных идемпотентов и топологии, порожденной их аннуляторами, кольца эндоморфизмов абелевых групп без кручения, удовлетворяющих двум условиям: любые две сервантные подгруппы ранга 1 изоморфны, и любое конечное подмножество содержится в прямом слагаемом, разлагающемся в прямую сумму групп ранга 1. В [685] показано, что если M — алгебраически компактный модуль и $S = \mathrm{End}\, M$, то $S/J(S)$ — самоинъективное справа регулярное кольцо. Вагонер [653] переносит свойство кольца быть кообразующим, а Берджесс и Рафаэль [232] — свойства ортогональной полноты и полноты кольца на кольцо эндоморфизмов проективного модуля P конечного типа (Вагонер дополнительно требует, чтобы все простые эпиморфные образы модуля P вкладывались в P). Хирано [380] показал, что конечно порожденный модуль M является V-модулем (т. е. каждый подмодуль в M — пересечение максимальных подмодулей) тогда и только тогда, когда M — самообразующий и $\mathrm{End}\, M$ является V-кольцом. Кастанья [244] отметил, что любой эндоморфизм абелевой p-группы, являющейся счетной прямой суммой периодически полных групп, представляется в виде суммы двух автоморфизмов.

Г. М. Бродский [19, 21] показал, что ${}_RR$ — кообразующий (R — квазифробениусово кольцо) тогда и только тогда, когда для любого свободного модуля M (любого проективного образующего любого инъективного кообразующего M) в кольце $\mathrm{End}_R(M)$ выполняется аннуляторное условие $l(r(J)) = J$ для любого конечно порожденного левого идеала J ($l(r(J)) = J$ и $r(l(I)) = I$ для любых конечно порожденных правого идеала I и левого идеала J. Чаттерс и Кхури [248] использовали аналогичный подход для характеризации несингулярных cs-колец (т. е. колец, в которых каждый дополняемый левый идеал является прямым слагаемым). Грин [332] установил, что если U является p-подгруппой конечной группы G, и представление Y группы G, индуцированное тривиальным представлением группы U, имеет фробениусову алгебру в качестве кольца эндоморфизмов, то $\mathrm{Soc}\, Y$ и $Y/J(Y)$ — простые модули. Китамура [447] отметил, что если $B \subset A$ — расширение колец, причем ${}_BA$ и A_B — конечно порожденные проективные модули и M_A — образующий, являющийся конечно порожденным проективным A-модулем, то A — фробениусово (квазифробениусово, левое квазифробениусово) расширение кольца B тогда и только тогда, когда расширение $\mathrm{End}_B(M) \supset \mathrm{End}_A(M)$ обладает соответствующим свойством.

Циммерман [683] установил полупримарность кольца $\mathrm{End}\, M$ в том случае, когда счетная прямая сумма копий конечно порожденного модуля M выделяется прямым слагаемым из их прямого произведения.

Гордон и Грин [328], развивая теорию представлений нётеровых колец, аналогичную теории представлений артиновых колец, называют модуль M строго неразложимым, если он нётеров, и $K\dim M/(A+B) = K\dim M$ для любых ненулевых подмодулей A, B модуля M с нулевым пересечением, и α-неразложимым, если он строго неразложим, $K\dim M = \alpha$ и M — модуль Макколея, т. е. $K\dim N = \alpha$ для любого ненулевого подмодуля $N \subseteq M$ (здесь $K\dim M$ обозначает размерность Крулля модуля M). Доказано, что кольцо эндоморфизмов α-неразложимого модуля обладает многими свойствами коммутативных примарных колец.

Флёри [301] и Харада [355] указали ряд условий, при которых кольцо эндоморфизмов пустотелого модуля локально (модуль называется пустотелым, если все его собственные подмодули малы). Например, это верно, если основное кольцо совершенно слева или справа (Харада). А. Г. Завадский и В. В. Кириченко [47] описали нётеровы кольца R, для которых $\mathrm{End}_R(M)$ — кольцо дискретного нормирования для любого неразложимого модуля M без кручения в смысле Басса. П. А. Крылов [73] исследовал кольца эндоморфизмов сервантных подгрупп группы целых p-адических чисел. В частности, он показал, что если такая подгруппа A совпадает со своим псевдоцоколем, то $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(A)$ — кольцо дискретного нормирования. Хаузен [364] отметила, что абелева p-группа A при ($p\geq5$) имеет (единственную) максимальную вполне инвариантную подгруппу тогда и только тогда, когда кольцо $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(A)$ имеет (единственный) минимальный ненулевой идеал. Шорс и Льюис [612] доказали, что кольцо эндоморфизмов цепного модуля M является кольцом нормирования, если M — точный модуль над областью целостности (в общем случае это не так). Макино [491] указал необходимые и достаточные условия (в терминах подфакторов неразложимых прямых слагаемых модуля M над обобщенно однорядным кольцом) того, что кольцо $\mathrm{End}\,M$ обобщенно однорядно. Вамош [642] называет модуль T тестовым, если для любого ненулевого R-модуля M, $\mathrm{Hom}_R(M, T)\neq0$, а кольцо R называет TC-кольцом, если каждый тестовый R-модуль является кообразующим. Доказано, что если M — простой модуль над TC-кольцом R, то $\mathrm{End}_R(E(M))$ — локальное кольцо, конечно порожденные односторонние идеалы которого свободны как модули над ним.

Хаугер [359] указал условия совершенности справа кольца эндоморфизмов конечно порожденного самопроективного модуля. Ру [591] называет кольцо R кольцом Накаямы, если каждый конечно порожденный R-модуль разлагается в прямую сумму локальных модулей (т. е. модулей, содержащих наибольший собственный подмодуль), и доказывает, что если P — минимальный кообразующий над кольцом Накаямы R, то $\mathrm{End}_R(R)$ — полусовершенное цепное справа кольцо.

Кольцо R называется qc-кольцом, если любой циклический R-модуль квазиинъективен. Ахсан [172] показал, что если R является qc-кольцом, то $\mathrm{End}_R(M)$ является qc-кольцом для циклического и полусовершенным кольцом для конечно порожденного проективного модуля M. Пусть $\sigma[M]$ — полная подкатегория в категории R-Mod, порожденная всеми подфакторами прямых сумм копий R-модуля M. Модуль M называется σ-полусовершенным, если любой фактормодуль модуля M обладает проективным накрытием в $\sigma[M]$. Висбауер [670] доказал эквивалентность σ-полусовершенности модуля M и полусовершенности кольца $\mathrm{End}\,M$. Он же [671] исследовал кольцо эндоморфизмов инъективной оболочки модуля M в категории $\sigma[M]$ и указал, в частности, достаточные условия его регулярности и классической полупростоты. Рангасвами [574] отметил, что если M — квазипроективный кообразующий и $\mathrm{End}\,M$ — совершенное кольцо, то M — конечно порожденный проективный модуль.

В ряде работ рассматривались коммутативные кольца эндоморфизмов. Вопрос о коммутативности кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп исследовали Шульц [606] и Лоувер [459]. Критерии коммутативности колец эндоморфизмов и квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения указали Леувен [463], Т. М. Флешер ([26], с. 109) и В. Х. Фарукшин [154]. Последний изучал также кольца эндоморфизмов и квазиэндоморфизмов модулей без кручения конечного ранга над локализациями $\mathbf{Z}_p$, указал достаточные условия включения $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}_p}(M)\subseteq\mathbf{Q}$ ([25], ч. 1, с. 164), необходимое и достаточное условие совпадения $\mathscr{E}(M)=\mathbf{Q}$ [26, с. 107] для редуцированного неразложимого модуля M (где $\mathscr{E}(M)$ — кольцо квазиэндоморфизмов), в ряде случаев описал тензорное произведение p-адического пополнения кольца $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}_p}(M)$ на $\mathbf{Q}$ ([27], с. 137). Близкие вопросы рассматривали ранее С. Ф. Кожухов [64] и Батлер [234]. Фаччини [289] для некоторого класса колец R указал критерии коммутативности кольца $\mathrm{End}_R(R_D/R)$, где R_D — инъективная оболочка R относительно кручения Диксона.

Бенабдаллах и Бирц [214] построили пример суперразложимой (т. е. не имеющей неразложимых ненулевых прямых слагаемых) группы G без кручения такой, что $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G)$ — коммутативное кольцо, аддитивная группа которого изоморфна группе G, а К. И. Бейдар [7] — пример коммутативного полупервичного кольца R и точного конечно представимого R-модуля M такого, что $\mathrm{End}_R(M)$ — коммутативное кольцо, но M не изоморфен никакому идеалу кольца R. Кокс [258], напротив, привел некоторые достаточные условия наличия такого изоморфизма, а также независимо получил один результат Аламелю [174, 175] о коммутативности кольца эндоморфизмов идеала. Фукс [307] доказал, что для любого измеримого кардинала $\mathfrak{m}$ существует абелева группа A мощности $\mathfrak{m}$ такая, что $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(A)\cong\mathbf{Z}$. Сюда же относятся и некоторые замечания из [462].

Е. А. Дементьева и Л. Е. Загорин ([25], ч. 2, с. 42) исследовали Z-подалгебры некоторого подкольца в $\mathrm{End}_R(M)$, где Z — центр локального кольца R, а M — свободный R-модуль. Джозеф [421] показал, что если R — алгебра с фильтрацией над полем k и $\mathrm{gr}\,R$ — коммутативная конечно порожденная k-алгебра, то размерность коммутативных подалгебр в кольце эндоморфизмов конечно порожденного R-модуля M не превосходит размерности Крулля модуля M.

Паско [559] получил частичное обращение известной теоремы Прочези, доказав, что если P — проективный модуль над первичным нётеровым PI-кольцом R, причем $\mathrm{End}_R(P)$ является PI-кольцом, то P — конечно порожденный модуль. Кроме того, для коммутативного нётерова (дедекиндова) кольца R найдены критерии того, что $\mathrm{End}_R(M)$ является PI-кольцом, если M — инъективный (периодический) R-модуль. К. И. Бейдар ([27], с. 18), отвечая на вопрос Бергмана, показал, что если M — конечно порожденный R-модуль и R — нётерова коммутативная алгебра над полем k, то кольцо $\mathrm{End}_R(M)$ изоморфно подкольцу кольца матриц конечного порядка над некоторым полем $K\supseteq k$.

Арибо [188] явно указал максимальный идеал кольца эндоморфизмов линейного пространства над телом, содержащий все эндоморфизмы конечного ранга. Ауслендер [196] исследовал локально матричные центральные сепарабельные алгебры. Харт [358] показал, что если G — делимая абелева p-группа, H — произвольная абелева p-группа и кольца эндоморфизмов групп G и H как объектов факторкатегории категории p-групп по классу Серра, образованному ограниченными p-группами, изоморфны, то группы G и H изоморфны как объекты указанной факторкатегории. Связь между свойством сокращения модуля M и стабильным рангом кольца $\mathrm{End}\,M$ исследовал Уорфилд [657], между нормами и конормами на периодически полной абелевой группе и односторонними идеалами ее кольца эндоморфизмов — Либерт [475]. Джиннах [419] установил, что при некоторых дополнительных условиях проективность R-модуля $\mathrm{End}_R(M)$ влечет проективность модуля M (R — коммутативное нётерово кольцо). Рефлексивные модули M над локальной нормальной областью R, для которых $\mathrm{End}_R(M)$ — проективный R-модуль, исследовал Трегер [639].

Макссон и Смит [496] изучали почтикольцо $C(R, M)$ таких отображений $f: M\to M$, что $f(\alpha v)=\alpha f(v)$ для любых $\alpha\in R$ и $v\in M$. Описаны кольца R такие, что для любого модуля M $C(R, M)$ — кольцо (оно совпадает в этом случае с $\mathrm{End}_R(M)$). Почтикольца, порожденные эндоморфизмами некоторой неабелевой группы, исследовал К. К. Каарли [54].

§ 4. Радикалы колец эндоморфизмов

Начнем с работ, в которых исследовалось строение радикала Джекобсона (и некоторых других радикалов) колец эндоморфизмов абелевых групп. П. А. Крылов описал строение радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов для различных классов абелевых групп без кручения [67, 68, 71], а также строение факторкольца $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G)/J(\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G))$. Более давние результаты о кольцах эндоморфизмов абелевых групп без кручения отражены в обзорной статье Орсатти [553]. Хаузен [366, 367] описала $J(\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G))$ для вполне проективной примарной группы G и для вполне проективной редуцированной группы G. Хаузен и Джонсон [371] решили аналогичный вопрос для достаточно проективной группы (т. е. группы, любое счетное подмножество которой содержится во вполне проективном прямом слагаемом). Хаузен [369] охарактеризовала сумму $N(\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G))$ всех нильпотентных идеалов кольца $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G)$ как множество таких эндоморфизмов φ, что существует цепочка вполне инвариантных подгрупп $G=G_0\supset G_1\ldots\supset G_{m+1}=0$ такая, что $G_i\varphi\subseteq G_{i+1}$ при $i=0,\ldots,m$. П. А. Крылов [68] описал нильрадикал кольца $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G)$ для достаточно широкого класса абелевых групп G без кручения (включающего все группы конечного ранга), а в [70] указал критерий нильпотентности $J(\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G))$ для сепарабельной группы G без кручения. Хаузен и Джонсон [370] доказали эквивалентность следующих свойств p-примарной группы G: 1) для любого элемента $a\in G$ существует целое n такое, что $aJ(\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G))^n=0$; 2) существует целое m такое, что p^mG — делимая группа. К этой работе примыкает статья Хаузен [368], в которой доказано, что идеал J кольца $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G)$ квазирегулярен тогда и только тогда, когда индуцируемое им подкольцо кольца $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(G[p])$ оказывается нильцоколем (здесь G — вполне проективная p-группа, $G[p]$ — ее цоколь). Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп встречаются также в [462].

Либерт [472] описал $J(\mathrm{End}\,M)$ для прямой суммы M циклических модулей над областью главных идеалов. Такеути [633] показал, что если M — прямой псевдоинъективный модуль, то $J(\mathrm{End}\,M)$ совпадает с множеством эндоморфизмов, имеющих существенное ядро (модуль M называется прямым, если любой его подмодуль существен в некотором прямом слагаемом). Ряд результатов о различных радикалах колец эндоморфизмов проективных модулей получил Ягерман [405]. Мотозе [521] доказал, что если квазипроективный модуль P удовлетворяет условию обрыва убывающих цепочек малых подмодулей (возрастающих цепочек существенных подмодулей), то $J(\mathrm{End}\,P)$ является T-нильпотентным справа (слева) идеалом. Ягерман [403] и Сэнде [599] рассматривают связь между радикалами колец, участвующих в ситуации Мориты.

§ 5. Кольца частных колец эндоморфизмов и порядки в кольцах эндоморфизмов

В данном параграфе отражены работы, в которых изучаются кольца частных колец эндоморфизмов и порядки в некоторых кольцах эндоморфизмов. Гордон и Грин [328] показали, что если кольцо R — конечно порожденный модуль над своим центром, то модуль Макколея M строго неразложим тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}_R(M)$ — левый порядок в артиновой локальной алгебре. Пусть M — $E(R)$-полупростой образующий в R-Mod. Идзава [402] приводит условия, при которых полное кольцо частных кольца $\mathrm{End}\, M$ является, соответственно, полусовершенным самоинъективным, квазифробениусовым, регулярным, классически полупростым. Хатчинсон [389] показал, что левое полное кольцо частных кольца R изоморфно прямому произведению колец линейных преобразований векторных пространств над телами (в дальнейшем для краткости кольца линейных преобразований будем называть FL-кольцами) тогда и только тогда, когда $Z_l(R)=0$ и решетка замкнутых левых идеалов кольца R атомна. Хатчинсон и Зельманович [392] рассмотрели ситуацию Мориты (R, M, N, S) с точным модулем M_S и условием невырожденности: из $[N, m]=0$ для $m \in M$ следует, что $m=0$. Оказалось, что левое полное кольцо частных кольца S является прямым произведением FL-колец, если и только если модуль M несингулярен, и решетка его замкнутых R-подмодулей атомна. Указаны также критерии классической полупростоты кольца S.

П. А. Крылов ([27], с. 82) показал, что если M — образующий категории R-Mod, то кольцо $\mathrm{End}_R(M)$ — левый порядок в классически полупростом кольце тогда и только тогда, когда R — левый порядок в классически полупростом кольце, и M — конечномерный модуль без кручения в смысле Басса; при этом оказывается, что $\mathrm{End}_R(M)$ — левый порядок в $\mathrm{End}_R(E(M))$.

Каннингэм, Раттер и Тернидж [262] показали, что если P — конечно порожденный проективный модуль и $S=\mathrm{End}_R(P)$, то существует соответствие $\bar{t} \mapsto t$ между кручениями $\bar{t}$ и t в категориях S-Mod и R-Mod, соответственно, и при этом $Q_{\bar{t}}(S) \cong P \otimes Q_t(R)$, где $Q_t(R)$ — кольцо частных относительно кручения t. В [469] при некоторых условиях на ситуацию Мориты (R, M, N, S) установлен изоморфизм $Q_{\bar{\sigma}}(S) \cong \mathrm{End}_R(\bar{M}_\sigma, \bar{M}_\sigma)$, где σ — кручение в категории R-Mod, $\bar{\sigma}$ — соответствующее ему кручение в S-Mod, и $\bar{M}_\sigma$ обозначает σ-инъективную оболочку модуля M. Локализации кольца эндоморфизмов объекта абелевой категории с прямыми пределами рассматривал Ульмер [640].

Блэр [219] показал, что если P — конечно порожденный проективный модуль над коммутативным кольцом R, то кольцо $\mathrm{End}_R(P)$ имеет классическое двустороннее кольцо частных, которое можно получить обращением регулярных элементов кольца R, действующих как умножения на модуле P. Джатегаонкар [410] передоказывает и уточняет известную теорему Зельмановича: пусть R — левый (двусторонний, ограниченный) порядок в классически полупростом кольце, M — конечномерный R-модуль без кручения в смысле Басса. Тогда кольцо $\mathrm{End}_R(E(M))$ классически полупросто, и $\mathrm{End}_R(M)$ — левый (двусторонний, ограниченный) порядок в кольце $\mathrm{End}_R(E(M))$. Близкие вопросы для полного кольца частных исследовал Кхури [444]. Масайке [494, 495], используя теорию кручений, нашел необходимые и достаточные условия того, что кольцо эндоморфизмов модуля является максимальным порядком. Некоторые достаточные условия этого получил ранее Коззенс [260].

В ряде работ исследовались кольца Джонсона, т. е. кольца, левые полные кольца частных которых являются FL-кольцами. Так, в уже упоминавшейся работе Хатчинсона [389] доказано, что R — кольцо Джонсона в том и только в том случае, когда $Z_l(R)=0$, решетка замкнутых левых идеалов кольца R атомна, и в любых двух атомах этой решетки найдутся изоморфные ненулевые подмодули. Удри [382] охарактеризовал кольца Джонсона как несингулярные кольца, примарные как модуль над собой. Другое описание колец Джонсона дал О'Мира [542], он же доказал [544], что если FL-кольцо Q — полное левое кольцо частных кольца R, то R_R — существенный подмодуль в Q_R. Роуен [592] охарактеризовал первичные кольца Джонсона как кольца, имеющие такой главный левый идеал V, что $V/r(V)$ — область Оре, а Мюллер [522] исследовал их с точки зрения ситуаций Мориты.

Известная проблема Фейса об описании классических порядков в FL-кольцах была решена независимо Удри [383] и О'Мирой [522]. Последний показал также, что если V — линейное пространство над телом D, то все правые порядки в кольце $\mathrm{End}_D(V)$ первичны тогда и только тогда, когда $\dim_D V \leqslant S/S_0$ [543]. Ханнах [348] показал, что первичная групповая алгебра либо является кольцом Джонсона, либо её полное левое кольцо частных — простое кольцо, не конечное в смысле Неймана.

Блэр [218] привел пример конечно порожденного модуля над коммутативным кольцом, кольцо эндоморфизмов которого не удовлетворяет левому условию Оре. Чаттерс [247] показал, что кольцо матриц порядка 2 над нётеровым слева кольцом, имеющим левое классическое кольцо частных, может уже не иметь левого классического кольца частных. Штенштрем [622] полностью описал полное кольцо частных кольца треугольных матриц специального вида.

§ 6. Представление колец кольцами эндоморфизмов

Рангасвами описал бэровские регулярные кольца, изоморфные полным кольцам эндоморфизмов абелевых групп [571]. Батлер [235] указал представление конечномерной $\mathbf{Q}$-алгебры в виде алгебры квазиэндоморфизмов редуцированного $\mathbf{Z}_p$-модуля. Абстрактную характеризацию колец эндоморфизмов редуцированных модулей без кручения над полным кольцом дискретного нормирования дал Либерт [470, 471]. Он также получил описание колец эндоморфизмов свободных модулей над областью главных идеалов [473], включающее некоторые топологические условия, и показал [474], что структура всех левых идеалов кольца эндоморфизмов полного редуцированного модуля без кручения M над полным кольцом дискретного нормирования изоморфна структуре всех идеалов структуры полных подмодулей в M. Имеются также двойственные результаты для делимых периодических модулей. Описание кольца эндоморфизмов неразложимого инъективного модуля в терминах топологии, заданной степенями ассоциированного с этим модулем простого идеала, дал Ниши [535]. Представления колец в виде колец эндоморфизмов модулей над некоторыми кольцами изучили также Сю [672] и Гёбель [319].

Зельманович [679], обобщая теорему Фейса—Утуми, доказал, что если R — левый порядок в простом артиновом кольце Q, то существуют матричные единицы $e_{ij}\in Q$ и элемент $r\in D$ такие, что $rRr\subseteq\Sigma De_{ij}$ и $\Sigma rDe_{ij}\subseteq R$ (где D — пересечение централизатора C элементов e_{ij} с R). При этом, если R — подпрямо неразложимый, наследственный или максимальный порядок, то существует порядок C' в C, наследующий соответствующее свойство порядка R и такой, что порядок R эквивалентен порядку $\Sigma C'e_{ij}$.

Куеббеманн [570] показал, что для любого тела D характеристики 0, конечномерного над своим центром k, существует такой простой модуль V над алгеброй Вейля $A(k)$, что $\mathrm{End}_{A(k)}(V)\cong D$. Фейс [292] исследовал вопрос об изоморфизме простого кольца кольцу эндоморфизмов конечно порожденного проективного модуля над простым кольцом без делителей нуля. Боушелл и Шульц [224] изучали такие кольца R, что их регулярные представления в кольцах эндоморфизмов их аддитивных групп оказываются изоморфизмами.

Грэйвс и Молнар [330] для любой алгебры инцидентности A над локально конечным частично упорядоченным множеством P построили пучок топологических групп над P такой, что A изоморфна кольцу эндоморфизмов этого пучка. Максвелл [497] рассматривал представления алгебр с инволюцией в кольцах эндоморфизмов эрмитовых пространств.

Ряд работ содержит различные обобщения теоремы плотности Джекобсона. Модуль M называется полупервичным (первичным), если для любого $0\neq m\in M$ (любых ненулевых $m_1, m_2\in M$) существует гомоморфизм $f\in\mathrm{Hom}_R(M, R)$ такой, что $(mf)m\neq 0$ $((m_1f)m_2\neq 0)$. Зельманович [678] получил обобщение теоремы плотности на кольца, обладающие точным конечномерным полупервичным модулем. Именно, пусть $\{V_i, i\in I\}$ —

семейство правых линейных пространств над телами Δ_i, $i\in I$, $V=\coprod_{i\in I}V_i$, $\Delta=\prod_{i\in I}\Delta_i$, тогда $\mathrm{End}_\Delta(V)\cong\prod_{i\in I}\mathrm{End}_{\Delta_i}(V_i)$.

Размерность подмодуля U в Δ-модуле V определяется равенством $\dim_\Delta U=\max_{i\in I}\dim_{\Delta_i}\pi_i(U)$, где $\pi_i: V\to V_i$ — естественная проекция. Автор называет подкольцо R кольца $\mathrm{End}_\Delta(V)$ плотным, если для любого $\tau\in\mathrm{End}_\Delta(V)$ и для любого подмодуля $U\subset V$ такого, что $\dim_\Delta U<\infty$, существуют такие r, $s\in R$, что $\tau r\tau=s$, $rV\subseteq U$ и $r|U$ — автоморфизм Δ-модуля U. Доказана эквивалентность следующих условий: 1) R — (полу) первичное кольцо, $Z_l(R)=0$ и R имеет точный конечномерный левый идеал; 2) R имеет точный несингулярный конечномерный (полу) первичный модуль; 3) существуют пространства $V_1, \ldots, V_n$ над телами $\Delta_1\ldots\Delta_n$ такие, что R плотно в $\mathrm{End}_\Delta(V)$ (причем $n=1$).

Другой аналог теоремы плотности исследуется Зельмановичем в [680, 681, 682]. Определены слабо примитивные (слева) кольца, как кольца, имеющие точный модуль M, который вкладывается в любой свой ненулевой подмодуль, но не вкладывается ни в какой свой собственный фактормодуль. Доказана эквивалентность следующих условий: 1) R — слабо примитивное кольцо; 2) существует тело Δ и правое Δ-пространство V, являющееся левым R-модулем и содержащее такой точный R-подмодуль M, что $M\Delta=V$ и для любых $m_1, \ldots, m_t\in M$, линейно независимых над Δ, и любого эндоморфизма $\tau\in\mathrm{End}_\Delta(V)$ существуют $r, s\in R$ такие, что $r\tau(m_i)=sm_i$ и $0\neq rm_i\in m_i\Delta$ для всех $r=1, \ldots, t$. К этой серии работ примыкает и заметка [532].

Для любого модуля M пусть $\mathrm{Bic}(M)=\mathrm{End}_S(M)$, где $S=\mathrm{End}_R(M)$, и $\varphi_M: R\to\mathrm{Bic}(M)$ — естественный гомоморфизм. Ламбек [454] называет инъективный модуль I приятным, если любой I-полупростой фактормодуль кольца частных $Q_I(R)$ кольца R относительно модуля I является I-делимым модулем. Он доказывает, что $Q_I(R)$ в этом случае является полным подкольцом кольца $\mathrm{Bic}(I)$ в конечной топологии. Другое обобщение теоремы плотности, принадлежащее Ламбеку [455], переносит ее на модули. Для любого модуля A пусть $S(A)=\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(A, M), M)$, где M — фиксированный R-модуль и $S=\mathrm{End}_R(M)$. Если модуль M вполне приводим, то образ естественного гомоморфизма $A\to S(A)$ плотен в $S(A)$ в конечной топологии. Там же содержится следующий результат: пусть $R\to T$ — эпиморфизм колец, M — инъективный T-модуль, причем связанный с ним как с R-модулем функтор локализации Q_M в R-Mod точен справа. Тогда для любого R-модуля A модуль $Q_M(A)$ плотен в $S(A)$ в конечной топологии и $S(A)$ — пополнение $Q_M(A)$ в M-адической топологии.

Обобщение теоремы плотности на случай произвольного конечного числа попарно неизоморфных неразложимых модулей получил Лоуренс [458]. Блэнд и Райли [220] указали такую топологию на втором централизаторе t-кокритического модуля M, что если M — циклический квазипроективный модуль, то подкольцо $\varphi_M(R)$ оказывается плотным подкольцом в $\operatorname{Bic}(M)$ относительно этой топологии (модуль M называется t-кокритическим для некоторого кручения t, если он t-полупрост, а все его истинные фактормодули t-периодичны).

Некоторые обобщения теоремы плотности получили также Марубаяси [493], Кезлан [437] и Бани [200]. Фуллер [309] установил связь между теоремой плотности Джекобсона и эквивалентностями некоторых подкатегорий категории модулей. Онодера [550] и Суидлер [630] доказали утверждения, в некотором смысле двойственные к теореме плотности.

Ряд свойств вторых централизаторов примарных модулей над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом установил К. В. Агапитов ([25], ч. 2, с. 157). Идзава [401] показал, что второй централизатор конечно копорожденного инъективного конечно порожденного проективного модуля над нётеровым кольцом — примарное QF-3-кольцо.

Судзуки [629] анализирует выполнение второго централизаторного условия (т. е. условия, что φ_M — изоморфизм) для точного модуля над артиновым кольцом. Модуль M называется сбалансированным, если гомоморфизм φ_M сюръективен. Макино [490] приводит ряд утверждений, эквивалентных тому, что прямая сумма фиксированных цепных модулей — сбалансированный модуль. Изучению сбалансированных модулей посвящены также работы [206, 207].

Длаб и Рингель [278, 279] рассматривали сбалансированные кольца (т. е. кольца, над которыми все левые и все правые модули сбалансированы). Они показали, в частности, что локальное кольцо R с коммутативным телом вычетов $\Delta = R/J(R)$ сбалансировано тогда и только тогда, когда либо R — артиново однорядное кольцо, либо $J(R)^2=0$ и $\dim_\Delta J(R)=2$. Хаугер и Циммерман [361] указали ряд условий, при которых кольцо оказывается сбалансированным с одной стороны. Сингх и Бег [613] описали строение непервичных колец R таких, что каждое собственное факторкольцо кольца R сбалансировано слева.

Говорят, что модуль M (кольцо R) удовлетворяет условию F_h, если $\operatorname{Hom}_R({}_BB_B, {}_RM_S) \cong {}_SM_S$, где $B=\operatorname{Bic}(M)$, $S=\operatorname{End}_R(M)$ (если все точные R-модули удовлетворяют условию F_h). В [400] исследуются модули, удовлетворяющие условию F_h, приведены примеры, показывающие его отличие от условия сбалансированности. Кольца, удовлетворяющие условию F_h, изучали Татикава и Иванага [631].

§ 7. Определяемость модулей их кольцами эндоморфизмов

Остановимся сначала на цикле работ, в которых эта задача рассматривалась для абелевых групп. В [267] приведено упрощенное доказательство определяемости прямой суммы ограниченной p-группы и делимой p-группы своим кольцом эндоморфизмов. С. Я. Гриншпон [37] получил условия (в предположении справедливости обобщенной гипотезы континуума), при которых из изоморфизма групп эндоморфизмов p-групп вытекает их изоморфизм. А. М. Себельдин [113, 115] рассматривает полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов. Харт [358] аналог этой задачи для p-групп рассматривает в факторкатегории по классу ограниченных групп. Хауптфляйш [362] показал, что для однородных сепарабельных групп без кручения одного типа каждый изоморфизм их колец эндоморфизмов индуцируется изоморфизмом этих групп. П. А. Крылов и А. М. Себельдин [76] (исправление РЖМат, 1975, 4А, с. 36) доказали, что редуцированная алгебраически компактная абелева группа без кручения определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех абелевых групп без кручения тогда и только тогда, когда она почти делима. В [116] А. М. Себельдин свел вопрос об определяемости абелевой группы без кручения своим кольцом эндоморфизмов в классе всех абелевых групп к этому же вопросу в классе всех абелевых групп без кручения (приведено необходимое условие для определяемости, которое оказывается и достаточным для однородно разложимой группы в классе сепарабельных групп без кручения). В [117] им показано, что нередуцированная абелева группа без кручения определяется своей группой эндоморфизмов тогда и только тогда, когда она определяется своей группой эндоморфизмов в классе всех абелевых групп без кручения и ее редуцированная часть не разлагается в прямую сумму двух вполне характеристических подгрупп, одна из которых — ненулевая алгебраически компактная группа. Мэй и Тубасси [499] выяснили свойства абелевых групп с неизоморфными периодическими частями, но с изоморфными кольцами эндоморфизмов. В [500] они для смешанных абелевых групп ранга без кручения 1 привели достаточные условия, при которых из изоморфизма колец эндоморфизмов следует изоморфизм самих групп (в общем случае возможно, что это не так). В [498] Мэй решает эту задачу для непериодической абелевой группы с большой делимой подгруппой. Вопросы определяемости вполне разложимой абелевой группы без кручения ее кольцом эндоморфизмов затронуты Л. И. Власовой [24].

Редуцированные периодические абелевы группы с антиизоморфными кольцами эндоморфизмов исследовал Десте [275].

Вопросы определяемости модулей над полными кольцами дискретного нормирования идемпотентными эндоморфизмами рассматривали Стрингол [628] и А. Г. Солонина [123].

Айзекс [398] опубликовал статью методического характера об автоморфизмах матричных алгебр над коммутативным кольцом. Роберт [584], исходя из общих свойств функтора Hom, уточнил в случае примарных однорядных колец классические результаты об изоморфизмах колец эндоморфизмов и структуре подмодулей. Вопрос о том, когда каждый автоморфизм алгебры матриц над коммутативным кольцом является внутренним, затронут Йокоямой в [677]. Ковач [449] отметил, что всякий R-гомоморфизм из R_n в себя (R — коммутативное кольцо) является ограничением внутреннего автоморфизма кольца матриц S_n для некоторого коммутативного кольца S, содержащего кольцо R. Махала [482] показал, что каждый автоморфизм структуры левых аннуляторов идеалов линейных преобразований ограниченного ранга индуцируется автоморфизмом кольца эндоморфизмов векторного пространства.

Описание автоморфизмов кольца треугольных эндоморфизмов векторных пространств счетной размерности приведено в [167]. Ленцинг [583] сформулировал следующий результат:

1) если P_R, Q_S — образующие, $\varphi : \mathrm{End}_R P \to \mathrm{End}_S Q$ — изоморфизм, то φ индуцируется эквивалентностью $\Phi : \text{Mod-}R \to \text{Mod-}S$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathrm{End}_R{}^0 P) = \mathrm{End}_S{}^0 Q$, где $\mathrm{End}_R{}^0 P$ — кольцо эндоморфизмов конечного ранга; 2) всякий изоморфизм $\psi : \mathrm{End}_R{}^0 P \to \mathrm{End}_S{}^0 Q$ индуцируется категорной эквивалентностью Φ и расширяется единственным образом до изоморфизма $\varphi : \mathrm{End}_R P \to \mathrm{End}_S Q$; 3) если P_R, Q_S — проективные модули бесконечного ранга, то всякий изоморфизм $\varphi : \mathrm{End}_R P \to \mathrm{End}_S Q$ индуцируется категорной эквивалентностью и $\varphi(\mathrm{End}_R{}^0 P) = \mathrm{End}_S{}^0 Q$. Если P — проективный модуль, не являющийся конечно порожденным и содержащий унимодулярный элемент, подкольцо Σ кольца $\mathrm{End}_R P$ содержит все эндоморфизмы «конечного ранга», группа Пикара $\mathrm{Pic}\, R$ тривиальна, φ — автоморфизм кольца Σ, то Макдональд [502] привел доказательство того, что φ индуцируется полулинейным преобразованием (этот результат близок к аналогичным результатам об изоморфизмах колец эндоморфизмов А. В. Михалева, Л. М. Глускина, Стефенсона (РЖМат, 1967, 6А165, 9А162; 1968, 1А298; 1970, 12А196; 1971, 12А343).

§ 8. Модули как модули над своими кольцами эндоморфизмов

Под эндосвойством модуля будем понимать его свойство как модуля над кольцом его эндоморфизмов. Например, эндопроективный модуль — это модуль, проективный над своим кольцом эндоморфизмов. В этом смысле используются термины

эндоинъективность, эндоплоскостность, эндоинъективная оболочка, эндопроективная размерность и т. п.

Арнольд и др. [195] установили эквивалентность следующих свойств редуцированной абелевой группы A без кручения конечного ранга с кольцом эндоморфизмов E: (1) A — эндопроективна; (2) A — эндоквазипроективна; (3) для любого простого числа p группа $Q_p \otimes A$, где Q_p — группа всех рациональных чисел со знаменателем, не делящимся на p, является проективным циклическим $(Q_p \otimes E)$-модулем; (4) для любого $n>0$ существуют $f \in \mathrm{Hom}_E(A, E)$, $g \in \mathrm{Hom}_E(E, A)$ и $m>0$ такие, что НОД$(m, n)=1$ и $fg = m1_A$; (5) если C — центр кольца E, то $\mathrm{Hom}_Z(C, A) = \mathrm{Hom}_C(C, A)$ и $A \cong I \oplus K$, где I — идеал в C, являющийся точным проективным C-модулем, а K — некоторый C-модуль. Отмечено, что каждая эндопроективная группа A как $(\mathrm{End}\, A)$-модуль порождается двумя элементами и что эндопроективность сохраняется при переходе к почти (но не квази!) изоморфной группе. Онодера [552] установил, что эндоплоскостность R-модуля M равносильна инъективности $(\mathrm{End}\, M)$-модуля $\mathrm{Hom}_R(M, Q)$ для любого инъективного кообразующего R-модуля Q.

И. В. Бобылев [13, 15] доказал, что для любого $n \leqslant \infty$ существует счетная редуцированная абелева группа эндопроективной размерности n. Этим решается задача Дугласа и Фарахата [КЭ : 60]. Тот же результат опубликовал позднее Ангадхата Гаур [185]. Частичное решение задачи Дугласа и Фарахата предложили Ричман и Уокер [581]. Кроме того, была вычислена эндопроективная размерность неразложимых инъективных модулей над регулярными нётеровыми коммутативными областями и инъективных модулей над регулярными нётеровыми коммутативными областями и инъективных модулей специального вида над кольцами Горенштейна [15] и абелевых групп с периодической частью, имеющей кручение [581]. И. В. Бобылев [14] показал также, что эндопроективная размерность периодической абелевой группы не превосходит 1 и обращается в нуль, если для каждого простого числа p порядки элементов p-примарной компоненты ограничены в совокупности (ср. [М65 : 205], [КЭ : 61]). Обзор результатов об эндопроективной размерности абелевых групп опубликовал Фарахат [295].

Фукс [306] доказал, что периодическая абелева группа эндоквазипроективна тогда и только тогда, когда p-компонента этой группы для любого простого числа p либо имеет ограниченные в совокупности порядки элементов, либо обладает базисной подгруппой, порядки элементов которой в совокупности не ограничены. Сюда же относятся работы Винсонхалера и Уиклеса [646, 647]. Во второй из этих работ показано, что любая эндоквазипроективная абелева группа без кручения конечного ранга квазиизоморфна аддитивной группе модуля над прямой суммой дедекиндовых областей, содержащего основное кольцо в качестве прямого слагаемого. Из результатов первой отметим: сильно неразложимая абелева группа A конечного ранга эндоквазипроективна тогда и только тогда, когда A/P^kA — циклический $(\mathrm{End}A)$-модуль для любого первичного идеала P кольца $\mathrm{End}\,A$. Там же на языке типов охарактеризованы эндоквазипроективные эндонеразложимые прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1.

Ричман и Уокер [580] доказали, что эндоинъективный модуль A над коммутативной областью главных идеалов R имеет вид $A=\prod_p A_p \oplus D$, где D — делимый R-модуль конечного ранга, а A_p — конечные прямые суммы циклических модулей над p-адическими пополнениями кольца R, причем выполнено одно из следующих условий: 1) $D=0$ и A_p периодичны для всех p; 2) D — периодический или без кручения, $A_p=0$ почти для всех p и все A_p периодичны; 3) R — полное кольцо дискретного нормирования и D — без кручения. Пул и Рейд [569] установили эндоквазиинъективность делимой абелевой группы и прямой суммы циклических p-групп. Описание эндоинъективной оболочки $\hat{A}$ абелевой группы A при тех или иных ограничениях на A предложили Винсонхалер и Уиклес [648, 668, 649]. В частности, если A — абелева группа без кручения конечного ранга, то $\hat{A}$ разлагается в прямую сумму модулей, дуальных правым идеалам кольца квазиэндоморфизмов группы A.

В. С. Пятков [109] доказал, что к числу эндодистрибутивных абелевых групп принадлежат однородно сепарабельные и алгебраически компактные группы. Он также предложил полное описание абелевых групп, структура вполне инвариантных подгрупп которых обладает дополнениями. А. А. Туганбаев [27] отметил, что $(\mathrm{End}_R M)$-подмодули любого неразложимого инъективного R-модуля M образует цепь в том и только в том случае, когда структура левых идеалов кольца R дистрибутивна.

Рейд [575] начал систематическое изучение эндоконечно порожденных абелевых групп. Им доказано, что абелева группа A, для которой $(Q\otimes\mathrm{End}\,A)$-модуль $Q\otimes A$ неприводим, эндоконечно порождена тогда и только тогда, когда A имеет конечный ранг и индекс любой из ее вполне инвариантных подгрупп конечен. Группа без кручения конечного ранга изоморфна аддитивной группе дробных идеалов некоторого подкольца поля алгебраических чисел в том и только том случае, когда A эндоконечно порождена, а $(Q\otimes\mathrm{End}\,A)$-модуль $Q\otimes A$ неприводим. Описано строение эндоконечно порожденных абелевых групп, у которых нильрадикал кольца эндоморфизмов обращается в нуль. Есть и другие результаты. Оксфорд и Уолс [556] доказали, что периодическая абелева группа эндоциклична в том и только том случае, когда она разлагается в конечную прямую сумму примарных циклических p-групп и групп типа q^∞, причем все p и q, участвующие в разложении, различны. Описаны также эндоциклические сепарабельные группы без кручения.

Как следствие более общих результатов Каш и Парейгис [426] установили следующие факты о $E-R$-бимодуле M, где $E=\mathrm{End}\,M_R$: 1) Если M_R — инъективный кообразующий, то для любого $a\in M$ модули ${}_E Ea$ и $(aR)_R$ просты одновременно; 2) Если $f\in E$, то модули Ef и fM просты одновременно; 3) Если M_R — кообразующий, то ${}_E Ea$, где $a\in M$, прост тогда и только тогда, когда $(aR)_R$ прост и лежит в некотором инъективном подмодуле модуля M_R.

С. К. Росошек [112] отметил, что прямая корректность модуля M (т. е. если M и какой-то модуль N изоморфны прямым слагаемым друг друга, то $M\cong N$) равносильна прямой корректности как модуля $(\mathrm{End}\,M)_{\mathrm{End}\,M}$, так и модуля ${}_{\mathrm{End}\,M}\mathrm{End}\,M$.

Исследовались абелевы группы, все эндоморфные образы которых вполне характеристичны [460]. Гальперин и Розенталь [344] предложили другое доказательство теоремы Бернсайда: если конечномерное линейное пространство над алгебраически замкнутым полем является неприводимым модулем над некоторой алгеброй своих линейных преобразований, то эта алгебра содержит все линейные преобразования пространства.

Теперь остановимся на работах, где кольца характеризуются эндосвойствами модулей над ними. И. В. Бобылев [14] и Снайдер [619] доказали, что кольцо однорядно тогда и только тогда, когда все левые и все правые модули над ним эндопроективны. И. В. Бобылев исследовал также кольца, над которыми эндопроективны все квазиинъективные модули. В другой работе он [15] рассмотрел глобальную эндопроективную размерность кольца. В частности, оказалось, что для счетных и коммутативных колец обращение этой размерности в нуль влечет однорядность кольца. Камилло и Фуллер [241] доказали, что псевдофробениусовы кольца характеризуются эндоплоскостностью всех точных квазиинъективных модулей. Заметим, что всякий точный образующий модуль эндопроективен. Десал и Никольсон [271] начали изучение эндопримитивных слева колец, т. е. колец, обладающих точным эндопростым квазиинъективным левым модулем. Этот класс колец оказался замкнутым относительно эквивалентности в смысле Мориты. Установлен ряд кольцевых свойств этого класса. В частности, с ним связан радикал, лежащий между радикалами Джекобсона и Левицкого. Исследовались коммутативные кольца с эндопроективными идеалами [595, 596], но полученные здесь результаты специфичны для коммутативной алгебры. Снайдер [618] доказал, что из эндоконечности всех простых модулей над групповой алгеброй группы G вытекает, что G содержит абелеву группу конечного индекса (ср. [296]). Грюсо [335] рассматривал категорию $\mathfrak{K}$ когерентных функторов из категории $\mathfrak{M}$ конечно представимых R-модулей в категорию абелевых групп. В частности, он установил, что каждый объект из $\mathfrak{K}$ содержит простой подобъект, если каждый модуль M из $\mathfrak{M}$ имеет конечную длину как $\operatorname{End} M$-модуль.

Сандомирский [598], Гупта и Варадарьян [336] рассматривали $\operatorname{End} A$-модуль $H = \operatorname{Hom}_R(A, B)$. Из результатов Сандомирского отметим: модуль H артинов (нётеров) тогда и только тогда, когда B удовлетворяет условию минимальности (максимальности) для всех таких подмодулей C, что $TC = C$, где T — идеал следа модуля A. Хабаз и Тубасси [438, 439] исследовали $(\operatorname{End} T)$-модуль $\operatorname{Ext}(A, T)$, где A и T — абелевы группы. В частности, в предположении периодичности группы T получен ряд результатов о наименьшем натуральном числе n таком, что всякое конечное подмножество из $\operatorname{Ext}(A, T)$ лежит в n-порожденном подмодуле. Фадин [290] доказал, что $(\operatorname{End} T)$-модуль $\operatorname{Ext}(T, A)$, где T и A — абелевы группы, проективен тогда и только тогда, когда A — редуцированная, а T — редуцированная периодическая. К этому же кругу вопросов относятся работы [450, 243].

§ 9. Кольца эндоморфизмов и разложения модулей в прямые суммы

Будем говорить, что подмодуль A модуля M обладает свойством замены относительно прямого разложения $M = \coprod_a D_a$, если равенство $M = A \oplus B$ влечет существование таких подмодулей $D_a' \subseteq D_a$, что $M = A \oplus (\coprod_a D_a')$. Подмодуль A модуля M обладает свойством (конечной) замены в M, если он обладает свойством (конечной) замены относительно любого (конечного) прямого разложения модуля M. Модуль A обладает свойством (конечной) замены, если он обладает свойством (конечной) замены в любом содержащем его модуле. Уорфилд [656] доказал, что модуль M обладает свойством конечной замены тогда и только тогда, когда $\operatorname{End}(M)$ обладает свойством замены. Там же показано, что достаточным условием того, чтобы модуль M обладал свойством конечной замены, является следующее условие на кольцо $E = \operatorname{End} M$: $(\forall f' \in E \ \exists f = f^2 \in E \ (Ef' + J(E) = Ef + J(E)))$. Монк [518] показал, что свойство конечной замены модуля M равносильно тому, что для любого $f \in \operatorname{End}(M)$ найдутся такие h, $g \in \operatorname{End} M$, что $hfh = h$, $g(1-f)(1-hf) = 1-hf$, и привел пример полупримитивного кольца со свойством замены, не являющегося регулярным. Это показывает, что приведенное выше достаточное условие Уорфилда не является необходимым. Николсон [530] доказал, что свойство конечной замены модуля M равносильно тому, что в кольце $\operatorname{End} M$ идемпотенты можно поднимать по модулю любого левого (правого) идеала.

Модуль с локальным кольцом эндоморфизмов называется вполне неразложимым. Проективный модуль, все фактормодули которого имеют проективные накрытия, называются полусовершенным. Ямагата [673] установил эквивалентность следующих условий для проективного модуля M, являющегося прямой суммой вполне неразложенных модулей: 1) M — полусовершенный модуль; 2) модуль M обладает свойством конечной замены; 3) каждое прямое слагаемое модуля M обладает в любом содержащем его модуле свойством замены относительно прямых разложений, состоящих из двух прямых слагаемых; 4) $J(\operatorname{End}(M)) = \{f \in \operatorname{End}(M) \mid f(M) \subseteq J(R)M\}$. Ямагата [674] доказал также, что если M — прямая сумма неразложимых инъективных модулей, то равносильны условия: 1) M обладает свойством замены; 2) M обладает свойством конечной замены; 3) $J(\operatorname{End} M) = \{f \in \operatorname{End} M \mid \operatorname{Ker} f\}$ — существенный подмодуль модуля M.

В этой же работе приведен пример неквазиинъективного модуля, удовлетворяющего вышеуказанным условиям.

Уокер и Уорфилд [654] доказали вариант теоремы Крулля—Ремака—Шмидта для аддитивных категорий и рассматривали изоморфные продолжения для прямых сумм вполне неразложимых объектов. Исследованию прямых слагаемых прямых сумм вполне неразложимых модулей посвящены также работы [353, 354, 424, 425, 254, 399, 208, 209, 468].

Модуль A обладает свойством сокращения (степенного сокращения), если для любого прямого разложения $A \oplus B \cong \cong A \oplus C$ верно, что $B \cong C$ ($B^n \cong C^n$ для некоторого натурального числа n). Гудерл [324] указал достаточные условия для степенного сокращения, зависящие только от $\operatorname{End} A$. Фукс [305] привел достаточные условия для выполнения свойства сокращения для модуля M, у которого все ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами. Эванс [288] доказал, что любой конечно порожденный модуль над коммутативным нётеровым локальным кольцом сокращаем.

Арнольд, Хантер и Ричман [192] исследуют прямые суммы модулей, у которых кольца эндоморфизмов являются кольцами главных идеалов, и приводят приложения к прямым суммам нормированных групп и к абелевым группам без кручения. Некоторые условия (сформулированные в терминах модуля эндоморфизмов модуля частных), при которых чистый подмодуль выделяется прямым слагаемым, приведены в [465]. Ленцинг [467] доказал, что если M — конечно порожденный модуль и прямая сумма счетного числа копий модуля M выделяется прямым слагаемым из прямого произведения счетного числа копий модуля M, то $\operatorname{End}(M)$ — полупримарное кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов.

§ 10. Эквивалентность и двойственность

В ряде работ были предприняты попытки получить обобщения теорем Мориты об эквивалентностях категорий модулей.

Като [427], Мюллер [522], Като и Отаке [429] исследовали эквивалентности Мориты подкатегорий категории модулей, индуцированные контекстом Мориты. Фуллер [309] установил связи между эквивалентностями подкатегорий модулей и теоремой плотности. Этот подход развивался Адзумайей [197] и Сато [602, 603, 604]. Парейгис [558] получил аналоги теорем Мориты для моноидальных категорий.

Пусть U — прямая сумма всех конечно порожденных R-модулей и $E=\{\varphi\in\mathrm{End}_R U|\varphi$ аннулирует почти все слагаемые модуля $U\}$. Это кольцо E называется функториальным кольцом кольца R. Эквивалентность колец в смысле Мориты равносильна изоморфности их функториальных колец. Фуллер и Хуллингер [317] отметили, что кольцо R нётерово тогда и только тогда, когда кольцо E когерентно.

Хатчинсон и Тёрнидж [391] рассматривают условия на контекст Мориты, при которых возникает эквивалентность Мориты колец частных основных колец.

Классы колец, в которых из эквивалентности Мориты следует их изоморфизм, изучает Бонами [222]. Чиба [249] отметил, что если R — полулокальное кольцо, $J(R)$ — локально нильпотентный идеал и кольца многочленов $R[x]$ и $S[x]$ эквивалентны в смысле Мориты, то кольца R и S также эквивалентны в смысле Мориты.

Расширился список свойств колец, сохраняющихся при эквивалентности Мориты: сбалансированность слева (Длаб и Рингель [278]); регулярность факторкольца $R/J(R)$ и возможность подъема идемпотентов по модулю $J(R)$ (Никольсон [529]), доминантность справа (Кавада [432, 433]). И. З. Голубчик и В. Т. Марков [29] доказали инвариантность относительно эквивалентностей Мориты левой локализационной размерности. Икехата [394] рассматривает классы расширений колец, инвариантных относительно эквивалентностей Мориты (такими будут, в частности, симметрические расширения, QF-расширения, сепарабельные расширения). Ряд общих свойств стабильно эквивалентных колец приведен в [384].

Длаб и Рингель [280] отмечают, что ручные наследственные полупримарные кольца оказываются эквивалентными в смысле Мориты произведению тензорного кольца и конечного числа колец треугольных матриц специального вида. Стаффорд [620] отмечает, что известный пример простого нётерова кольца, не являющегося областью и содержащего лишь тривиальные идемпотенты, построенный А. Е. Залесским и О. М. Нерославским [50], оказывается кольцом, которое не эквивалентно в смысле Мориты области целостности. В [621] им показано, что простое нётерово кольцо конечной глобальной размерности и размерности Крулля единица эквивалентно в смысле Мориты области целостности. Видеманн [669] изучает кольца, эквивалентные порядкам Басса. Эквивалентности колец инцидентности затронуты Начевым [99].

И. Н. Балаба ([27], с. 10] получила градуированный вариант теоремы Мориты (т. е. критерий эквивалентности категорий градуированных модулей над градуированными кольцами). А. В. Жожикашвили [46] показал, что эквивалентность категорий аффинных модулей влечет изоморфизм основных колец. Такеути [632] получил аналог теоремы Мориты для категорий комодулей.

В ряде работ стал широко применяться контекст Мориты. Так, Сандс, Никольсон, Ягерман и Уоттерс [599, 406, 404, 531] исследуют нормальные радикалы колец. А. Г. Григорян [27] описал сингулярный идеал кольца обобщенных матриц, ассоциированного с контекстом Мориты. Ханнула [349] использует контекст Мориты для построения примеров квазифробениусовых колец. А. И. Кашу [56, 57] изучает связи между кручениями и предкручениями колец, входящих в контекст Мориты. Хатчинсон [390] рассматривает свойства контекста Мориты, получающегося из данного контекста с помощью пополнения Ламбека.

Значительное число работ посвящено изучению двойственности Мориты колец. Ру [588] привел условия на идемпотенты e и f, при которых бимодуль ${}_{fRf}R_{eRe}$ определяет двойственность. В [589] он дал достаточные условия на артиново кольцо иметь самодвойственность, а в [590] охарактеризовал кольца эндоморфизмов инъективных неразложимых модулей над некоторыми локальными нётеровыми кольцами.

Вамош [643] рассматривает следующий вопрос: если $R\subseteq T$ и T (соответственно, R) обладает двойственностью Мориты, то при каких условиях на расширение кольцо R (соответственно, T) также обладает двойственностью. Положительные ответы на оба вопроса получены им, если модуль ${}_RT$ либо конечно порожден, либо линейно компактен в дискретной топологии. В этой же работе даны новые примеры коммутативных колец с двойственностью.

Если R — полулокальное кольцо и T — кольцо эндоморфизмов минимального кообразующего в R-Mod, то Вамош [644] доказал, что категория артиновых левых R-модулей дуальна категории нётеровых правых T-модулей. Сато [601] рассматривает двойственности периодических модулей над одномерным кольцом Горенштейна, являющимся QF-3-кольцом.

Макдональд [479] показал, что двойственность между подкатегориями, замкнутыми относительно подмодулей, фактормодулей и конечных прямых сумм, в R-Mod и Mod-S представима (т. е. индуцируется бимодулем) тогда и только тогда, когда все модули в обеих подкатегориях линейно компактны. Ань [186] отметил, что нётеровы сильно линейно компактные кольца с двойственностью Мориты обладают и аналогом двойственности Понтрягина. Лемонье [466] показал, что условие AB5* позволяет ослабить обычные условия для существования двойственности Мориты.

Миллер и Тернидж [513] выясняют, когда кольцо эндоморфизмов конечно порожденного проективного модуля имеет двойственность с кольцом эндоморфизмов некоторого инъективного модуля. Кернер [435] анализирует полусовершенные кольца, имеющие двойственность с кольцами эндоморфизмов инъективных кообразующих. Сюда примыкает работа Кавады [431]. Связи между двойственностью Мориты и нётеровостью кольца эндоморфизмов анализируются Джатегаонкаром [411].

Цикл работ Като [428], Отаке [541] и доклад Ламбека [456] посвящены установлению двойственностей между локализациями и колокализациями. Теорема Матлиса о том, что если P — ненулевой простой идеал коммутативного кольца R, то пополнение локализации $\hat{R}_P$ по нему обладает двойственностью Мориты и изоморфно кольцу $\mathrm{End}\,(E(R/P))$, обобщается в работе Апхэм [641] на полупервичные идеалы вполне ограниченных нётеровых колец. Вопросы двойственности для локализаций универсальных обертывающих нильпотентных алгебр Ли и групповых алгебр конечно порожденных групп затронуты Алевом [177].

Мюллер [523] охарактеризовал самодуальные кольца конечного типа, Фуллер и Хаак [315] затронули вопросы двойственности для артиновых колец, колчаны которых являются деревьями, Хаак [338] показал, что широкий класс рядных колец обладает двойственностью Мориты, а в [339] он отметил, что кольцо инцидентности конечного предупорядоченного множества над телом обладает самодвойственностью. Фуллер и Хаак [316] выяснили условия на конечную полугруппу G, при которых имеет место двойственность между полугрупповыми кольцами RG и SG над двойственными кольцами R и S.

Ямагата [675] обобщает теоремы о двойственности Мориты на случай аддитивных функторов со значениями в абелевых группах. В [676] он рассматривает расширения над артиновыми кольцами с самодвойственностью. В [448] Китамура изучает квазифробениусовы расширения с двойственностью Мориты.

§ 11. Автоморфизмы модулей, линейные группы над кольцами

Вместе с каждым R-модулем M естественно возникает группа $\mathrm{Aut}_R M$ всех его автоморфизмов. Если M — свободный модуль ранга n, то мы, естественно, получаем полную линейную группу $GL_n(R)$ над кольцом R, что объясняет связи материала этого раздела с теорией линейных групп. Хаузен [365] показывает, как по группе автоморфизмов редуцированной абелевой p-группы эффективно определить ее ульмовские инварианты. А. Г. Солонина [124] доказала, что если $p\geqslant 5$, то для редуцированных p-адических модулей с непериодическими базисными подмодулями из изоморфизма их групп автоморфизмов следует существование полулинейного изоморфизма между ними. Сюда примыкает ее доклад ([26], с. 96) о связях групп автоморфизмов модуля и его базисного подмодуля над кольцом дискретного нормирования. Другой доклад А. Г. Солониной ([25], с. 186) посвящен вопросам определяемости p-адических модулей в различных классах модулей своими группами автоморфизмов.

Ряд известных теорем о линейных группах (о финитной аппроксимируемости, об энгелевой структуре, о подгруппе Фраттини) переносится Верфритцем в [662, 663, 664] на группы автоморфизмов конечно порожденных модулей над конечно порожденными коммутативными кольцами. Сюда примыкает статья Хаузен [363]. На группу автоморфизмов конечномерного в смысле Голди модуля Санчес [597] распространяет ряд фактов о линейных группах. Верфритц [665] изучает группы полулинейных автоморфизмов конечно порожденных модулей.

Автоморфизмам линейных групп над кольцами посвящена обширная литература (см., например, [1, 48, 49, 52, 82, 84, 85, 86, 87, 127, 503, 546, 661]). Мы коснемся здесь лишь автоморфизмов полной линейной группы $GL_n(R)$ над кольцом R.

В цикле работ (Помфре и Макдональд [565], В. С. Дроботенко, Э. С. Дроботенко и Е. Я. Погориляк [39, 40, 106], Хан [342], Г. А. Носков [100], Макдональд [504], В. Я. Блощицын [12]), завершившим статьей Уотерхауза [658], была доказана стандартность автоморфизмов группы $GL_n(R)$ при $n\geqslant 3$, если $1/2\in R$. В. М. Петечук ([101, 102], [27], с. 101) доказал, что над коммутативным кольцом это верно всегда при $n\geqslant 4$. В [103] В. М. Петечук для группы $GL_3(R)$, где R — коммутативное локальное кольцо и $R/J(R)\cong\mathbf{Z}_2$, нашел нестандартные автоморфизмы.

О'Мира [546, 547] развил общую теорию изоморфизмов линейных групп, богатых трансвекциями, в частности, над телами. Сюда примыкает статья Ю. В. Сосновского [126]. Автоморфизмы группы $GL_n(R)$ над некоммутативным полулокальным кольцом рассматривают В. С. Дроботенко и Е. Я. Погориляк [41].

И. З. Голубчик и А. В. Михалев [27, 33] показали, что над произвольным ассоциативным кольцом R с $1/2\in R$ каждый автоморфизм группы $GL_n(R)$ при $n\geqslant 3$ стандартен на подгруппе, порожденной элементарными и диагональными матрицами. Этот результат может быть получен и с помощью метода специализации йордановых систем Е. И. Зельманова. Как показывает пример В. Н. Герасимова, на всю группу $GL_n(R)$ результат в общем случае не может быть перенесен. И. З. Голубчик и А. В. Михалев [32] приводят достаточные условия (в частности, если R—PI-кольцо и $1/2 \in R$), при которых каждый автоморфизм стандартен на всей группе $GL_n(R)$.

Хан [343] предлагает описание автоморфизмов линейных групп над кольцами с телами частных или над полупростыми артиновыми кольцами с помощью эквивалентностей категорий модулей.

А. А. Пащевский ([25], т. 1, с. 124) приводит достаточные условия стандартности автоморфизмов сетевых подгрупп линейных групп над локальной областью целостности.

Цикл работ был посвящен особому случаю, когда $n=2$. Ю. И. Мерзляков [83] описал автоморфизмы двумерных конгруэнцгрупп над областью целостности. Работа Далла [284] посвящена автоморфизмам двумерных линейных групп над коммутативными областями целостности. В. С. Дроботенко и Е. Я. Погориляк [42, 104, 105] описали автоморфизмы группы $GL_2(R)$ над некоторыми классами локальных колец R (в ряде случаев ими был дан критерий существования нестандартных автоморфизмов). Макдональд [505, 506] описывает автоморфизмы группы $GL_2(R)$ над коммутативным кольцом, в котором «много обратимых элементов» (например, если $1/2 \in R$ и R/J ($R \not\cong \mathbf{Z}_3$). Сюда примыкает работа Рена [576].

Ряд свойств группы $GL_2(R)$ над булевым кольцом R привел Розенстейн [587]. Берлинь [216] отметил, что если группа $GL_n(R)$ над бесконечным булевым кольцом R $\aleph_0$-категорична, то кольцо R $\aleph_0$-категорично.

Хирано [379] отметил условия на кольцо, при которых каждый инъективный (сюръективный) эндоморфизм любого конечно порожденного модуля является изоморфизмом. Продолжение до автоморфизма вполне разложимого модуля автоморфизмов квазиразложений над дедекиндовой областью рассматривает С. Ф. Кожухов [26]. Т. М. Флешер ([25], т. 1, с. 167) изучает абелевы группы без кручения конечного ранга, в которых всякий эндоморфный образ вполне характеристичен. Ловер [459] доказал существование для любого $n>0$ абелевой группы без кручения ранга $8n$ с некоммутативным кольцом эндоморфизмов ранга $4n$, в которой всякий эндоморфный образ вполне характеристичен.

Кастанья [244] рассматривает эндоморфизмы прямой суммы абелевых групп, являющиеся суммой двух автоморфизмов. А. М. Себельдин [114] для вполне разложимой абелевой группы без кручения дает критерий равенства каждого эндоморфизма сумме конечного числа автоморфизмов. В. Х. Фахрушин [155, 156] доказал, что если счетная редуцированная обобщенно примарная абелева группа имеет конечный ранг, то ее кольцо эндоморфизмов аддитивно порождается группой автоморфизмов. Условия на счетно порожденный редуцированный модуль над полным кольцом дискретного нормирования, при которых каждый эндоморфизм есть сумма двух эндоморфизмов,

приведены А. Г. Солониной ([27], с. 125). Абелевы группы без ненулевых нильпотентных эндоморфизмов изучает С. Ф. Кожухов [62]. Монк [517] доказал существование p-группы G при $p\neq 2$ и широкой подгруппы G_1 в ней, для которых кольцо $\operatorname{End} G$ порождается группой $\operatorname{Aut} G$, но это уже не так для G_1.

П. А. Крылов [26] рассматривает абелевы группы, все топологические изоморфизмы колец эндоморфизмов которых в конечной топологии индуцируются групповыми изоморфизмами. О. В. Мельников [80, 81] изучает вопрос о компактности групп автоморфизмов локально компактных абелевых групп. Сюда примыкает и статья Плаумана [564].

Подмодули эрмитова модуля, инвариантные относительно действия унитарной группы, анализирует А. Э. Иозапавичюс [53].

В книге Верфритца [666] отражен материал о строении моноида эндоморфизмов нётерова модуля над коммутивным кольцом. И. С. Понизовский [568] изучает неприводимые матричные полугруппы. Сайзер [614] дает необходимые и достаточные условия приводимости к треугольному виду полугруппы матриц над телом (в частности, это так, если подгруппа состоит из идемпотентных матриц). Полугруппу эндоморфизмов конечной абелевой группы рассматривает Раплоне [557]. Инверсные полугруппы локальных автоморфизмов абелевых групп изучает А. Л. Либих [78]. П. Пуусемп [108] рассматривает вопросы определяемости периодических и ограниченных абелевых групп полугруппами эндоморфизмов. В. Г. Фаянс [157] эффективно строит группу частных полугруппы неособенных матриц с неотрицательными элементами из линейно упорядоченного тела и описывает ее автоморфизмы. Конгруэнции и инверсные подполугруппы полугруппы линейных преобразований векторного пространства над телом изучают Т. Н. Шаронова [162, 163, 164] и Л. Б. Шнеперман [166].

Вопросы представимости линейных полугрупп и групп над коммутативным кольцом в виде булевой степени затронуты Буррисом и Вернером [233].

Если G — периодическая абелева группа, H — произвольная абелева группа, $S(G)$ — полугруппа изоморфных отображений между подгруппами в G, то $S(G)\cong S(H)$ тогда и только тогда, когда $G\cong H$ (Кирквуд [446]). Э. А. Бабаев [5] показал, что пару линейных пространств над телом можно охарактеризовать полугрудой линейных отображений. И. Х. Беккер [9] выделил классы модулей, определяющихся своими аффинными группами.

В [8] И. Х. Беккер для абелевых групп без кручения с периодическими группами автоморфизмов приводит когомологическую характеризацию конечных групп автоморфизмов, а в ([25], т. 2, с. 11) им дана когомологическая характеризация абелевых групп без кручения с периодическими группами автоморфизмов.

С. Ф. Кожухов [61] охарактеризовал абелевы группы без кручения конечного ранга с циклическими группами автоморфизмов, в [63] — абелевы группы без кручения с конечными группами автоморфизмов. А. З. Шляфер [165] описал конечные группы автоморфизмов модулей над порядками полей алгебраических чисел, а в ([27], с. 151] выяснил, какие конечные группы возникают в качестве групп автоморфизмов точных модулей на абелевой группе без кручения. Моргадо [520] отмечает свойства группы автоморфизмов конечной абелевой p-группы.

Работа А. А. Суслина [128] посвящена выяснению строения специальной и линейной групп над кольцами многочленов. Сюда примыкают работа Форста [651] и статья Архера и Харта [187].

Обобщенные групповые тождества в классических линейных группах над телами рассматривают И. З. Голубчик и А. В. Михалев [30, 31]. Г. М. Томанов [129] исследует этот вопрос в алгебраических группах.

Отметим, что книга Ньюмена [527] посвящена теории канонических форм матриц над кольцами главных идеалов, а книга Кона [251) — подобию матриц над телами.

§ 12. Структура подмодулей модуля

Хатчинсон [385, 386] доказал, что класс структур, вложимых в структуры подмодулей модуля над коммутативным кольцом с ненулевой единицей определяется хорновскими формулами и, следовательно, является квазимногообразием. Он же [387] отметил, что структура вложима в структуру подмодулей некоторого модуля над кольцом R тогда и только тогда, когда ее двойственная структура вложима в структуру подмодулей модуля над кольцом, противоположным кольцу R.

А. А. Кравченко [66] установил, что минимальная порождающая система структуры всех подпространств конечномерного векторного пространства над конечным полем из q элементов состоит не более чем из $\max(q+3,8)$ элементов, причем эта оценка не зависит от размерности пространства. Свойства структуры подпространств конечномерного векторного пространства, инвариантных относительно данного линейного оператора, рассматривали Дедденс и Филмор [270], а также Конвэй и Халмош [255]. Пусть (V, G) — представление группы G в векторном пространстве V над полем, $L(V, G)$ — структура всех G-инвариантных подпространств из V. С. М. Вовси [652] доказал, что: (1) для любого частично упорядоченного множества T существует такое представление (V, G), что $L(V, G)\cong \cong 2^T$); (2) для любой конечной дистрибутивной структуры D существует такое конечномерное представление (V, G), что $L(V, G)\cong D$.

Представлениям структур структурами подпространств векторных пространств посвящены работы [281, 561]. Пусть $E(V)$ — полная структура радиально замкнутых сбалансированных выпуклых подмножеств векторного пространства V. В [302] показано, что свойство элемента A структуры $E(V)$ быть подпространством в V равносильно тому, что A имеет дополнение, причем одномерность пространства A эквивалентна атомности (как элемента структуры $E(V)$) пересечения любых двух ненулевых элементов, строго меньших A.

Кхури [440, 441] рассматривает связь между свойствами структуры подмодулей модуля и его кольца эндоморфизмов. Проблему слов в некоторых многообразиях структур подмодулей исследуют Херман [373], а также Херман и Хун [376]. Они же [377] изучают каркасы некоторых специальных структур подмодулей для таких модулей как Q^n, Z^n, $C^n(P_k)$. Хатчинсон и Седдели [388] получили классификацию структурных многообразий вида $HL(R)$, где $HL(R)$ — многообразие модулярных структур, порожденное классом структур подмодулей всех R-модулей. Логические аспекты изучения класса структур подмодулей всех левых R-модулей рассматривают Маккаи и Макнулти [492]. Пусть A, B — модули. Робер [585] показал, что модуль A является B-проективным модулем тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}(A, -)$ — структурный гомоморфизм из структуры $L(B)$ в структуру подгрупп из $\mathrm{Hom}(A, B)$. Пусть F — аддитивная топология на кольце A, M — A-модуль,

$$D_F(M)=\{N\in L(M)\,|\,N=\{m\in M\,|\,(N:m)\in F\}\}.$$

Настасеску [526] изучает свойства структуры $D_F(M)$, рассматривая, в частности, случаи, когда $D_F(M)$ — дистрибутивная или нётерова структура. Структуру G-допустимых подмодулей модуля M, где G — группа автоморифзмов, рассматривал Бэр [198].

Свойства структуры вполне инвариантных подгрупп абелевой группы исследуют С. Я. Гриншпон [38], Мур и Хьюит [519], Магдер [489]. Калугареану [237], рассматривая свойства псевдодополнений в модулярных структурах, высказал ряд замечаний о структуре подгрупп абелевой группы. Пусть A — абелева группа, $D(A)$ — подструктура структуры $L(A)$, образованная всеми такими N, что хотя бы одна из группы N, A/N конечно порождена. Фалтингс [294] изучает такие абелевы группы A, для которых найдется такая абелева группа B, что структуры $D(A)$ и $D(B)$ антиизоморфны. Н. П. Белякова [11] изучает структуру f-допустимых подгрупп абелевой группы A, где $f\in\mathrm{Aut}(A)$, $f^2=1$.

Пусть R — нелокальная коммутативная область главных идеалов с полем частных K, $T=K/R$, E — R-модуль,

$$D(E)=\mathrm{Hom}(E, T),\ M\in L(E),\ M^0=\{f\in D(E)\,|\,f(M)=0\}.$$

Ханна и Якуб [34] доказали, что отображение $M \to M^0$ является антиизоморфизмом структуры $L(E)$ на структуру $L(D(E))$ тогда и только тогда, когда E — модуль конечной длины. Николя [533] исследует модули над дедекиндовыми кольцами с условием максимальности для n-порожденных подмодулей. Курзио [263] описал модули над коммутативными областями главных идеалов, у которых каждый собственный подмодуль лежит в максимальном подмодуле. Пусть M — нётеров модуль над коммутативным кольцом, $h(M)$ — верхняя грань порядковых типов цепей циклических подмодулей модуля M упорядоченных по обратному включению. Родес [579] доказывает существование цепи порядкового типа $h(M)$, получает неравенство $h(M) \leqslant \leqslant \omega |\mathrm{Ass}(M)|$ и характеризует такие модули M, что $h(M/N) \leqslant \omega$ для всех $N \in L(M)$.

И. М. Гоян [34] вводит и изучает аналоги изолированных компонент для подмодулей модуля над любым кольцом, которые используются для уточнения теоремы единственности примарных разложений. Грин [331] получил в терминах специально введенной категории троек критерии разложимости в прямую сумму вершины коуниверсального квадрата модулей. Г. М. Бродский [27, с. 20] привел один результат, касающийся индуцируемости изоморфизма структур подмодулей M, N некоторой эквивалентностью категорий $\mathrm{Gen}(M)$, $\mathrm{Gen}(N)$. Структуру вполне инвариантных подмодулей конечно порожденного модуля над дедекиндовой областью описал В. С. Пятков [109].

Г. Ч. Куринной [77] доказал, что если R — вполне примарное однорядное кольцо, представимое в виде прямой суммы максимального идеала и некоторого подкольца, M — свободный модуль ранга $\geqslant 3$, то структура $L(M)$ изометрически вложима в модулярную структуру с дополнениями и определяет кольцо R. Херманн и Хун [375] задают такие равенства $F(n)$, что для каждого модуля M, содержащего R^3 в качестве подмодуля, они выполняются тогда и только тогда, когда $n = \mathrm{char}(R)$. Уэллер [667] рассматривают взаимосвязь между теоретико-структурными свойствами $L(R^3)$ и арифметическими свойствами соответствующих им колец.

Гросс [333, 334] находит условия, при которых структурный изоморфизм двух подструктур векторного пространства с кососимметрическим скалярным произведением индуцируется изометрией. Условия индуцированности изометриями изоморфизмов структур тех или иных подпространств со скалярным произведениями приводят также Бани [201], Хаапсало [340], Макасей и Мухли [501]. Пусть E — векторное пространство над полем, обладающее невырожденной эрмитовой формой, F — структура всех ортогонально замкнутых подпространств. Келлер [434] доказал, что модулярность структуры F равносильна конечномерности пространства E. Штелтинг [626] описывает множество подмодулей ранга 1 проективного метрического модуля ранга 3.

Фриз [303] показал, что структура всех подпространств n-мерного векторного пространства над полем Z/pZ ($n \geqslant 4$, p — простое число) проективна в классе всех модулярных структур. В [464] определяется проективное замыкание любой n-мерной ($n \geqslant 2$) аффинной структуры и доказывается его существование и единственность.

В проективной геометрии хорошо известна теорема Штаудта: всякое взаимно однозначное отображение проективной прямой на себя, сохраняющее гармонические четверки и оставляющее на месте точки 0, 1, ∞, является тождественным. Этот результат допускает естественную формулировку на языке теории тел. Возможности обобщения этой теоремы на случай модулей над кольцами изучались в работах [476, 477, 478, 605, 204, 506, 451, 409].

Обобщая результат Л. А. Скорнякова [118], Махала [483, 484] доказывает, что каждое проективное отображение относительно допустимого модуля индуцируется полулинейным преобразованием. Он же продолжает исследование этого вопроса в [487].

§ 13. Дистрибутивные модули и кольца

Модуль M называется дистрибутивным (цепным), если структура $L(M)$ дистрибутивна (является цепью). Дистрибутивное справа и слева (цепное справа и слева) кольцо называется арифметическим, если структура его (двусторонних) идеалов дистрибутивна.

А. В. Михалев [88] отметил один класс колец, являющихся арифметическими. Ли Синмин [461] привел пример локального арифметического кольца, в котором идеалы не образуют цепь. Об арифметических кольцах см. также [213].

Менцель [508] (рассматривая на самом деле абелевы группы с операторами) доказал, что дистрибутивность модуля M равносильна каждому из следующих условий: (1) $\mathrm{Hom}(A/A(\cap B), B/(A\cap B))=0$ для любых A, B, $\in L(M)$; (2) для любых не совпадающих модулей A, $B \in L(M)$ верно, что модули $A/(A\cap B)$, $B/(A\cap B)$ не изоморфны. Камилло [240] отметил, что в условии (2) можно ограничиться тем случаем, когда $A/(A\cap B)$, $B/(A\cap B)$ — простые модули. В другой своей работе [509] Менцель показал, что дистрибутивность модуля ${}_RM$ равносильна тому, что $(Ra+Rb)/(Ra\cap Rb)$ — циклический модуль с образующим $(Ra\cap Rb)+a+b$ для любых элементов a, $b \in M$.

Если A, B — подмножества модуля ${}_RM$, то через $(B:A)$ обозначим множество $\{r \in R \mid ra \in B,\ \forall a \in A\}$. Кольцо называется инвариантным слева, если все его левые идеалы являются идеалами. Стефенсон [624] доказал, что дистрибутивность модуля ${}_RM$ равносильна равенству $R=(Ra:b)+(Rb:a)$ для любых элементов a, $b \in M$. Там же он установил следующие свойства дистрибутивного модуля ${}_RM$ с кольцом эндоморфизмов E: (1) все максимальные (минимальные) подмодули модуля M вполне инвариантны; (2) для любого модуля N, гомоморфизма $f:N\to M$ и произвольных A, $B\in L(M)$ верно равенство $f^{-1}(A+B)=f^{-1}(A)+f^{-1}(B)$; (3) для любого модуля N, гомоморфизма $f:M\to N$ и произвольных A, $B\in L(M)$ верно равенство $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$; (4) для любого модуля N, гомоморфизмов f, $g:N\to M$ и произвольного $X\in L(N)$ верны равенства $N=g^{-1}(fN)+f^{-1}(gN)$, $X=(X\cap g^{-1}(fX))+(X\cap f^{-1}(gX))$; (5) для любого модуля N, гомоморфизмов f, $g:M\to N$ и произвольного $X\in L(N)$ верны равенства $0=g(\operatorname{Ker} f)\cap f(\operatorname{Ker} g)$, $X=(X+gf^{-1}(X))\cap(X+fg^{-1}(X))$; (6) если $f\in E$, $A\in L(M)$, то $A=A\cap f^{-1}(A)+f(A\cap f^{-1}(A))=(A+fA)\cap f^{-1}(A+fA)$; (7) если $f\in E$, $A\in L(M)$, причем $f^nA\subseteq\sum_{i=0}^{n} f^iA$ для некоторого $n\geqslant 1$, то $fA\subseteq A$; (8) если каждый ненулевой подфактор модуля M обладает максимальным (минимальным) подмодулем, то все подмодули модуля M вполне инвариантны. В этой же работе описаны дистрибутивные слева кольца, являющиеся либо полусовершенными, либо совершенными справа или слева кольцами, а также доказано, что дистрибутивные слева нётеровы слева кольца инвариантны слева.

А. А. Туганбаев [139] показал, что левая дистрибутивность нётерова слева кольца R равносильна тому, что кольцо R инвариантно слева и выполнено одно из следующих условий: (1) $R=(A:B)+(B:A)$ для любых левых идеалов A, B; (2) $B=(B:A)A$ для любых левых идеалов A, B, где $B\subseteq A$. Там же доказано: 1) если R — нётерово справа и слева кольцо, то (правая и левая) дистрибутивность кольца R равносильна тому, что R — конечное прямое произведение цепных артиновых колец и инвариантных наследственных нётеровых областей; 2) дистрибутивное слева полупервичное левое или правое кольцо Голди разлагается в конечное прямое произведение областей; 3) левая дистрибутивность левого кольца Безу равносильна тому, что все его максимальные левые идеалы являются идеалами; 4) полулокальное кольцо R дистрибутивно слева тогда и только тогда, когда R — левое кольцо Безу, а $R/J(R)$ — конечное прямое произведение тел. А. А. Туганбаев [139, 148] получил также полное описание нётеровых слева дистрибутивных колец, обобщающее результаты Камилло [240]. Он же [146] доказал, что для дистрибутивного слева кольца R равносильны следующие условия: (1) R — несингулярное слева кольцо, удовлетворяющее условию максимальности либо для левых аннуляторов, либо для прямых сумм левых идеалов; (2) R — конечное прямое произведение правых областей Оре. Кроме того, отмечено, что все подмодули конечно порожденного дистрибутивного модуля над инвариантным слева кольцом вполне инвариантны, что обобщает результат Стефенсона [624] для коммутативного случая. А. А. Туганбаев [138] доказал: 1) если $R/J(R)$ — конечное прямое произведение тел, то дистрибутивность модуля ${}_RM$ равносильна тому, что M — модуль Безу; 2) дистрибутивность модуля M над совершенным слева самобазисным кольцом равносильна тому, что все подмодули модуля M цикличны; 3) для любого кольца R существует такая мощность $t(R)$, которая ограничивает мощности всех дистрибутивных R-модулей; 4) дистрибутивный модуль над полуцепным слева кольцом является прямой суммой равномерных модулей; 5) дистрибутивный модуль над нётеровым слева полуцепным справа и слева кольцом является полуцепным модулем; 6) дистрибутивный модуль над полулокальным кольцом является модулем Безу; 7) если кольцо R коммутативно, то разложимость всех его инъективных модулей в прямую сумму дистрибутивных модулей равносильна тому, что R — конечное прямое произведение коммутативных однорядных колец и дедекиндовых областей; 8) если все максимальные левые идеалы кольца R являются идеалами, то любой левый R-модуль Безу является дистрибутивным модулем (последнее обобщает результат Албу и Настасеску [176] для коммутативного случая).

Различные характеризации колец, над которыми каждый модуль является прямой суммой дистрибутивных модулей, получили А. А. Туганбаев [138] и Фуллер [314]. Сюда же относятся работы [310, 311, 312, 313 и 253]. Вамош [145] установил цикличность конечно порожденного дистрибутивного артинова модуля (см. также [138]).

Шорес и Льюис [612] доказали, что кольцо $\operatorname{End}(M)$, где M — дистрибутивный модуль над коммутативным кольцом, является обратным пределом коммутативных дистрибутивных колец и, в частности, коммутативно. Албу и Настасеску [176] обобщили на случай модулей результат Йенсена [413] для колец, доказав, что дистрибутивность модуля A над коммутативным кольцом R равносильна тому, что A_M — цепной R_M-модуль для любого максимального идеала M кольца R. Там же они доказали, что тензорное произведение дистрибутивных модулей над коммутативным кольцом является дистрибутивным модулем и что $\operatorname{End}_R(A)\cong R/\operatorname{Ann}_R(A)$, если A — конечно порожденный дистрибутивный модуль над коммутативным кольцом R. В. Б. Репницкий [111] описал конечно порожденные дистрибутивные модули над коммутативными ласкеровыми кольцами, неразложимые дистрибутивные модули над коммутативными нётеровыми кольцами, доказал, что кольцо эндоморфизмов дистрибутивного модуля над коммутативным нётеровым кольцом является коммутативным дистрибутивным кольцом. А. А. Туганбаев [139, 143], обобщая результаты Албу и Настасеску [176] для коммутативного случая, установил эквивалентность следующих свойств модуля M над инвариантным справа кольцом R: (1) M — дистрибутивный модуль; (2) $R=(A:B)+(B:A)$ для любых конечно порожденных A, $B\in L(M)$; (3) $B=(B:A)A$ для любого конечно порожденного $A\in L(M)$ и произвольного $B\in L(A)$; (4) $((B+C):A)=(B:A)+(C:A)$ для любых A, B, $C\in L(M)$, где B, C — конечно порождены; (5) $(A:(B\cap C))=(A:B)+(A:C)$ для любых A, B, $C\in L(M)$, где B, C — конечно порождены.

Из результатов Уорфилда [655] следует, что дистрибутивность кольца равносильна тому, что каждый его конечно представимый модуль является прямым слагаемым прямой суммы циклических модулей.

Назовем кольцо R локально цепным слева, если для любого его максимального левого идеала M верно, что M — идеал, левое кольцо частных по Габриэлю R_M существует и является цепным слева кольцом. А. А. Туганбаев ([143], [27], с. 134) доказал, что если либо кольцо R удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов, либо все нильпотентные элементы кольца R центральны, то левая дистрибутивность кольца R равносильна свойству быть локально цепным слева кольцом. Это обобщает аналогичные результаты Брунгса [228] для областей и нётеровых слева колец и Лациса [457] для инвариантных слева колец специального вида.

А. А. Туганбаев [143] доказал следующие свойства дистрибутивного R-модуля M: 1) любой существенно **замкнутый подмодуль** модуля M вполне инвариантен; 2) если $R\to T$ — эпиморфизм колец, превращающий кольцо T в плоский правый R-модуль, то $_T(T\otimes_R M)$ — дистрибутивный модуль. Там же доказано, что: 1) левая дистрибутивность нётерова слева полупервичного кольца равносильна тому, что кольцо является конечным прямым произведением инвариантных слева наследственных слева областей; 2) левая полунаследственность инвариантного слева редуцированного кольца равносильна тому, что оно дистрибутивно слева и является левым порядком в регулярном кольце. А. А. Туганбаев ([26], с. 102) получил следующие результаты: (1) кольцо R является дистрибутивным слева нётеровым (справа и слева) кольцом тогда и только тогда, когда R — конечное прямое произведение цепных слева артиновых колец и инвариантных наследственных нётеровых областей; (2) дистрибутивное справа нётерово слева кольцо является конечным прямым произведением цепных справа артиновых колец и областей.

Ачкар [171] доказал, что левая дистрибутивность кольца многочленов $R[x]$ равносильна тому, что R — коммутативное регулярное кольцо. При предположении коммутативности кольца R, аналогичный результат получил ранее Камилло [239]. Он же отметил в [238], что полунаследственность коммутативного кольца R равносильна тому, что R — дистрибутивное кольцо и для любого элемента $a\in R$ идеал $aR+\mathrm{Ann}(a)$ содержит регулярный элемент. Йенсен [413] доказал, что для коммутативного кольца R неравенство w. gl. dim $(R)\leqslant 1$ (т. е. все подмодули плоских модулей являются плоскими) равносильно тому, что R — дистрибутивное полупервичное кольцо. А. А. Туганбаев ([27], с. 134) показал, что аналогичный результат верен, если коммутативность кольца заменить на его инвариантность. Там же отмечено, что все главные левые идеалы дистрибутивного слева несингулярного слева кольца являются плоскими. А. А. Туганбаев ([25], с. 159) показал, что дистрибутивное слева несингулярное слева полулокальное кольцо является конечным прямым произведением правых областей Безу.

А. А. Туганбаев ([27], с. 133) получил следующее описание дистрибутивных групповых колец FG с коммутативным кольцом коэффициентов F: дистрибутивность кольца FG равносильна выполнению одного из следующих трех условий: (1) F — регулярное кольцо, G — абелева группа, у которой порядки элементов обратимы в кольце F, $r_0(G)\leqslant 1$ (где $r_0(G)$ — ранг без кручения); (2) F — дистрибутивное кольцо, G — периодическая абелева группа, причем для любого максимального идеала M кольца F такого, что char $(F/M)=p>0$, кольцо частных F_M является полем и $r_p(G)\leqslant 1$; (3) F — дистрибутивная алгебра над полем рациональных чисел Q и для любого нечетного числа n, являющегося порядком элемента из G, кольцо $F\otimes_Q H(n)$ — дистрибутивно, где $H(n)$ — алгебра кватернионов над полем деления круга $Q(\varepsilon_n)$.

Коммутативные дистрибутивные полугрупповые кольца коммутативных полугрупп, вложимых в группы, описали Харди и Шорес [357]. Коммутативные дистрибутивные полугрупповые кольца исследовались также в [250]. Цепные справа полугрупповые кольца описал И. Б. Кожухов [59]. Он же [60] получил некоторые результаты о дистрибутивных полугрупповых кольцах.

Беренс [210, 211] исследовал кольца, обладающие точным дистрибутивным модулем. Дистрибутивным модулям и кольцам посвящена глава 9 его книги [212]. Камилло и Зельманович [242] отметили, что если модуль дистрибутивен, то $d(A+B)=d(A)+d(B)-d(A\cap B)$ для любых его подмодулей A, B, где $d(X)$ — размерность Голди модуля X. Дистрибутивные модули затрагиваются в работах [298, 299, 315, 338, 650].

Модуль M называется мультипликационным, если для любого его подмодуля N найдется такой идеал A, что $N=AM$. Барнард [203] доказал, что модуль над коммутативным кольцом является дистрибутивным тогда и только тогда, когда все его конечно порожденные подмодули являются мультипликационными. О мультипликационных модулях см. также [182, 183, 407].

А. А. Туганбаев ([25], с. 159) показал, что левая дистрибутивность нётерова слева кольца R равносильна тому, что каждый левый идеал кольца R является произведением первичных двусторонних идеалов. Аналогичный результат для нётеровых слева областей получил Брунгс [228]. Дистрибутивные кольца рассматривались также в работах [412, 168, 169, 170, 227].

Условия дистрибутивности некоторых структур подпространств векторного пространства изучали Ким и Руш [445], Херман [374]. Е. М. Вечтомов ([27], с. 28) выяснил, когда кольцо непрерывных функций со значением в непрерывном теле является дистрибутивным кольцом.

Н. И. Дубровин [45] построил пример цепного кольца с односторонними делителями нуля. Там же исследовались цепные кольца R, у которых $J(R)$ — единственный (ненулевой) первичный или вполне первичный идеал. Он же [44] построил пример простой радикальной цепной области (без единицы). О цепных модулях и кольцах см. также [23, 39, 60, 612, 223, 229, 230, 231, 566, 567, 637, 638].

ЛИТЕРАТУРА

1. Автоморфизмы классических групп. Сб. пер. с англ. и франц. М., Мир, 1976, 264 с. (РЖМат, 1977, 4А230К)
2. *Агапитов К. В.*, Эпиморфизмы обобщенных однорядных колец и вторые централизаторы периодических модулей над ограниченными наследственными нётеровыми первичными кольцами. Абелевы группы и модули. Томск, 1981, 3—19 (РЖМат, 1982, 7А255)
3. *Андрунакиевич В. А., Арнаутов В. А., Гоян И. М., Рябухин Ю. М.*, Ассоциативные кольца. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Алгебра. Топол. Геометрия, 1978, *16*, 91—190 (РЖМат, 1979, 2А213)
4. —, —, *Рябухин Ю. М.*, Кольца. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия, 1965 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1967, 133—180 (РЖМат, 1967, 10А198)
5. *Бабаев Э. А.*, Полугруды полулинейных отображений. Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н. 1979, № 5, 7—12 (РЖМат, 1980, 9А179)
6. —, *Махмудов А. А.*, Об изоморфизмах полугруд линейных отображений линейного пространства. Ин-т мат. и мех. АН АзССР. Баку, 1981. 33 с., библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 8 окт. 1981 г., № 4712—81 Деп) (РЖМат, 1982, 1А180 Деп)
7. *Бейдар К. И.*, О модулях над коммутативными полупервичными кольцами. Мат. заметки, 1980, *29*, № 1, 15—18 (РЖМат, 1981, 4А375)
8. *Беккер И. Х.*, Абелевы группы без кручения с периодическими группами автоморфизмов и первые группы когомологий. Редкол. Сиб. мат. ж. СО АН СССР. Новосибирск, 1981, 28 с., библиогр. 8 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 4 дек. 1981 г., № 5656—81 Деп) (РЖМат, 1981, 4А208)
9. —, Об аффинных группах модулей. Материалы 7 регион. конф. по мат. и мех., Томск, 17—19 ноябр., 1981. Секц. алгебры. Томск, 1981, 2—3. Библ. 1 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 16 марта 1982 г., № 1197—82 Деп) (РЖМат, 1982, 8А272 Деп)
10. —, *Россошек С. К.*, Полиномиальная расщепляемость и слабо жесткие системы абелевых групп без кручения. Абелевы группы и модули. Томск, 1979, 3—13 (РЖМат, 1980, 3А110)
11. *Белякова Н. П.*, Об изоморфизмах структур α-допустимых подгрупп абелевых групп без кручения. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 10, 3—13 (РЖМат, 1974, 7А315)
12. *Блощицын В. Я.*, Автоморфизмы общей линейной группы над коммутативным кольцом, не порождаемым делителями нуля. Алгебра и логика (Новосибирск), 1978, *17*, № 6, 639—642 (РЖМат, 1979, 11А203)
13. *Бобылев И. В.*, Проективная размерность абелевой группы над кольцом своих эндоморфизмов. Успехи мат. наук, 1973, *28*, № 2, 229—230 (РЖМат, 1973, 8А331)
14. —, Кольца, над которыми каждый модуль эндопроективен. Успехи мат. наук, 1974, *29*, № 3, 182 (РЖМат, 1974, 11А446)
15. —, Эндопроективная размерность модулей. Сиб. мат. ж., 1975, *16*, № 4, 663—683 (РЖМат, 1976, 1А426)
16. *Бокуть Л. А.*, Ассоциативные кольца. I (Кольцевые конструкции); II (категории модулей, вложения в тела). Новосибирск, 1977, 1981
17. —, *Жевлаков К. А., Кузьмин Е. Н.*, Теория колец. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1970, 9—56 (РЖМат, 1970, 7А242)
18. —, *Кузьмин Е. Н., Ширшов А. И.*, Кольца. (Ин-т АН СССР. Сиб. отд. мат. Препринт). Новосибирск, 1973, 45 с. (РЖМат, 1974, 6А325)
19. *Бродский Г. М.*, О кручениях в модулях. Мат. заметки, 1973, *14*, № 4, 527—534 (РЖМат, 1974, 3А210)
20. —, Кольца эндоморфизмов свободных модулей. Мат. сб. 1974, *94*, № 2, 226—242 (РЖМат, 1974, 10А271)
21. —, Аннуляторные условия в кольцах эндоморфизмов модулей. Мат. заметки, 1974, *16*, № 6, 933—942 (РЖМат, 1975, 7А377)
22. —, *Григорян А. Г.*, О кольцах эндоморфизмов модулей. Докл. АН АрмССР, 1979, *69*, № 1, 15—18 (РЖМат, 1980, 5А242)
23. *Вишнякова Н. И., Кладов Г. К.*, Модули ранга 1 над обобщенным кольцом нормирования. В сб. «Вычисл. мат. и вычисл. техн.» Вып. 5. Харьков, 1974, 135—137 (РЖМат, 1975, 7А566)
24. *Власова Л. И.*, Об определяемости групп группами гомоморфизмов. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1979, № 5, 52—55 (РЖМат, 1980, 3А112)
25. XVI Всесоюзная алгебраическая конференция, 22—25 сентября 1981 г. Тезисы докладов. (ЛОМИ АН СССР, ЛГУ, МГУ). Л., 1981, ч. 1, 192 с., ч. 2, 208 с. (РЖМат, 1982, 2А165К)
26. IV Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей (Ин-т мат. с вычисл. центром АН МолдССР). Кишинев, 1980, 128 с (РЖМат, 1981, 1А248К)
27. V Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Новосибирск, 21—23 сент. 1982 г. Тез. сообщ. Новосибирск. Ин-т мат. 1982, 156 с. (РЖМат, 1983, 4А133К)
28. *Говоров В. Е.*, Малоинъективные модули. Алгебра и логика. Семинар, 1963, *2*, № 6, 21—50 (РЖМат, 1965, 4А227)
29. *Голубчик И. З., Марков В. Т.*, Локализационная размерность *PI*-колец. Тр. сем. им. И. Г. Петровского, 1981, № 6, 39—46 (РЖМат, 1981, 11А257)
30. —, *Михалёв А. В.*, Обобщенные групповые тождества в классических группах. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 6, 155—156 (РЖМат, 1981, 4А186)
31. —, —, Обобщенные групповые тождества в классических группах. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, *114*, 96—119 (РЖМат, 1982, 9А220)
32. —, —, Эпиморфизмы проективных групп над ассоциативными кольцами. Алгебра. Сб. работ, посвящ. 90-летию со дня рождения О. Ю. Шмидта. М., 1982, 34—45 (РЖМат, 1983, 4А306)
33. —, —, Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1983, № 3, 61—72
34. *Гоян И. М.*, Изолированные компоненты модулей. Мат. исслед. (Кишинев), 1979, № 49, 54—60 (РЖМат, 1979, 8А265)

35. *Григорян А. Г.*, Кольца эндоморфизмов модулей над малыми предаддитивными категориями. Докл. АН АрмССР, 1978, *67*, № 4, 216—220 (РЖМат, 1979, 8А277)
36. —, Кольца эндоморфизмов модулей над малыми предаддитивными категориями. Мат. исслед. (Кишинев), 1981, № 62, 38—56 (РЖМат, 1981, 7А254)
37. *Гриншпон С. Я.*, Примарные абелевы группы с изоморфными группами эндоморфизмов. Мат. заметки, 1973, *14*, № 5, 733—740 (РЖМат, 1974, 6А225)
38. —, О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения. Абелевы группы и модули. Томск, 1981, 56—92 (РЖМат, 1982, 7А174)
39. *Дроботенко В. С., Дроботенко Э. С.*, Автоморфизмы полной линейной группы над коммутативным вполне примарным кольцом. В сб. «Материалы 1-й обл. конф. молодых ученых Закарпатья, посвящ. 50-летию образования СССР. Секц. мат. н.», Ужгород. ун-т, Ужгород, 1972, 130—138 (РЖМат, 1974, 11А313)
40. —, —, *Погориляк Е. Я.*, Автоморфизмы линейных групп над коммутативными кольцами с условием минимальности. Успехи мат. наук, 1973, *28*, № 6, 205—206 (РЖМат, 1974, 7А327)
41. —, *Погориляк Е. Я.*, Автоморфизмы полной линейной группы над некоммутативным полулокальным кольцом. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 3, 157—158 (РЖМат, 1977, 12А228)
42. —, —, Автоморфизмы общей и специальной двумерных линейных групп над локальными кольцами. Ужгород ун-т. Ужгород, 1981, 31с., библиогр. 16 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 8 июня 1981 г., № 2740 Деп) (РЖМат, 1981, 10А231)
43. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.*, Конечномерные алгебры. Учеб. пособие для студ. мех.-мат. фак. ун-тов. Киев, Вища школа, 1980, 190 с. (РЖМат, 1981, 1А252)
44. *Дубровин Н. И.*, Цепные области. Вестн. МГУ. Мат. мех., 1980, № 2, 51—54 (РЖМат, 1980, 7А216)
45. —, О цепных кольцах. Успехи мат. наук, 1982, *37*, № 4, 139—140 (РЖМат, 1982, 12А252)
46. *Жотикашвили А. В.*, Об эквивалентности категорий аффинных модулей. Мат. заметки. 1978, *24*, № 4, 475—486 (РЖМат, 1979, 4А320)
47. *Завадский А. Г., Кириченко В. В.*, Модули без кручения над первичными кольцами. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1976, *57*, 100—116 (РЖМат, 1976, 8А363)
48. *Залесский А. Е.*, Линейные группы. Успехи мат. н., 1981, *36*, № 5, 57—107 (РЖМат, 1982, 2А222)
49. —, Линейные группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия, 1983, *22*, 135—182
50. —, *Нерославский О. М.*, Существуют простые нётеровы кольца с делителями нуля, но без идемпотентов. Commun. Algebra, 1977, *5*, № 3, 231—244 (РЖМат, 1978, 2А215)
51. *Иванов А. В.*, Абелевы группы с самоинъективными кольцами эндоморфизмов и кольцами эндоморфизмов с аннуляторным условием. Абелевы группы и модули. Томск, 1981, 93—109 (РЖМат, 1982, 7А171)
52. —, Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами. Пер. с англ. М., Мир, 1980, 272 с. (РЖМат, 1981, 1А226К)
53. *Иозапавичюс А. Э.*, Инвариантные подмодули эрмитова модуля. Успехи мат. наук. 1975, *30*, № 6, 171—172 (РЖМат, 1976, 6А301)
54. *Каарли К.*, О почти кольцах, порожденных эндоморфизмами некоторых групп. Уч. зап. Тартус. ун-та, 1978, № 464/22, 3—12 (РЖМат, 1979, 1А337)
55. *Каш Ф.*, Модули и кольца. М., Мир, 1981, 368 с. (РЖМат, 1982, 3А247К)

56. *Кашу А. И.* Морита-контексты и кручения модулей. Мат. заметки, 1980, *28*, № 4, 491—499 (РЖМат, 1981, 2А263)
57. —, Джансовы и идеальные кручения в Морита-контекстах. Мат. исслед. (Кишинев), 1981, № 62, 65—75 (РЖМат, 1981, 7А256)
58. *Керер Е. Ш.*, О кольце эндоморфизмов конечно порожденного модуля над кольцом главных идеалов. Вестн. Харьков ун-та, 1975, № 119, мат. и мех., вып. 40, 67—75 (РЖМат, 1975, 12А415)
59. *Кожухов И. Б.*, Цепные полугрупповые кольца. Успехи мат. наук, 1974, *29*, № 1, 169—170 (РЖМат, 1974, 6А345)
60. —, Цепные полугрупповые кольца и их обобщения. Моск. ин-т электрон. техн. М., 1978, 38с., библиогр. 24 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 25 мая 1979 г., № 1862—79 Деп) (РЖМат, 1979, 9А245 ДЕП)
61. *Кожухов С. Ф.*, Абелевы группы без кручения конечного ранга с циклическими группами автоморфизмов. Томск. ун-т. Томск, 1977, 25 с., библ. 9 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 26 авг. 1977 г., № 3464—77 ДЕП) (РЖМат, 1977, 12А186)
62. —, Абелевы группы без нильпотентных эндоморфизмов. Абелевы группы и модули. Томск, 1979, 87—94 (РЖМат, 1980, 2А184)
63. —, Абелевы группы без кручения с конечными группами автоморфизмов. Редкол. Сиб. мат. ж. СО АН СССР. Новосибирск, 1980, 19 с., библ. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 ноября 1980 г., № 4930—80 Деп.) (РЖМат, 1981, 3А176)
64. —, Регулярно полные абелевы группы. Изв. вузов. Мат., 1980, № 12, 14—19 (РЖМат, 1981, 5А158)
65. *Кон П.*, Свободные кольца и их связи. Пер. с англ., М., Мир, 1975, 422с. (РЖМат, 1976, 5А259)
66. *Кравченко А. А.*, О минимальном числе образующих структуры подпространств конечномерного линейного пространства. Зап. науч. семинаров. Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, *114*, 148—149 (РЖМат, 1982, 9А297)
67. *Крылов П. А.*, Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения конечного ранга. В сб. «Материалы 4-й Науч. конф. по мат. и мех. Т. 1». Томск, Томск. ун-т, 1974, 116—117 (РЖМат, 1974, 11А304)
68. —, Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения. Мат. сб., 1974, *95*, № 2, 214—228 (РЖМат, 1975, 4А288)
69. —, О полупростоте колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения. Группы и модули, Томск, 1976, 23—27
70. —, Радикалы колец эндоморфизмов сепарабельных абелевых групп без кручения. Группы и модули, Томск, 1976, 27—34
71. —, Суммы автоморфизмов абелевых групп и радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов. Изв. высш. учеб. заведений. Мат., 1976, № 4, 56—66 (РЖМат, 1976, 11А227)
72. —, Абелевы группы без кручения с циклическими p-базисными подгруппами. Мат. заметки, 1976, *20*, № 6, 805—813 (РЖМат, 1977, 4А156)
73. —, О сервантных подгруппах группы целых p-адических чисел. Абелевы группы и модули. Томск, 1979, 122—126 (РЖМат, 1980, 2А181)
74. —, Абелевы группы без кручения и их кольца эндоморфизмов. Изв. вузов. Мат., 1979, № 11, 26—33 (РЖМат, 1980, 6А219)
75. —, Об абелевых группах без кручения. Материалы 7 Регион. конф. по мат. и мех., Томск, 17—19 нояб., 1981. Секц. алгебры. Томск, 1981, 21—34. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 16 марта 1982 г., № 1197—82 Деп.) (РЖМат, 1982, 8А160 ДЕП)
76. —, *Себельдин А. М.*, Об определяемости абелевой группы без кручения своим кольцом эндоморфизмов. В сб. «Материалы 4-й Науч. конф. по мат. и мех. Т. 1». Томск, Томск. ун-т, 1974, 117 (РЖМат, 1974, 10А199) (Испр. к реф. РЖМат, 1975, № 4, с. 36)
77. *Куринной Г. Ч.*, О структуре подмодулей модуля с тремя свободными образующими над вполне примарным однорядным кольцом. Докл. АН УССР, 1977, *А*, № 6, 491—492 (РЖМат, 1978, 3А200)

78. *Либих А. Л.*, Инверсные полугруппы локальных автоморфизмов абелевых групп. В сб. «Исслед. по алгебре». Вып. 3. Саратов, Саратов. ун-т, 1973, 25—33 (РЖМат, 1974, 8А208)
79. *Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А.*, Модули. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия, 1981, *19*, 31—134 (РЖМат, 1982, 3А253)
80. *Мельников О. В.*, Группы автоморфизмов компактных вполне несвязных абелевых групп. Докл. АН БССР, 1972, *16*, № 9, 777—780 (РЖМат, 1973, 2А225)
81. —, Группы автоморфизмов компактных вполне несвязных абелевых групп. Докл. АН БССР, 1975, *19*, № 2, 101—104 (РЖМат, 1975, 7А335)
82. *Мерзляков Ю. И.*, Линейные группы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1970. (Итоги науки. ВИНИТИ. АН СССР)». М., 1971, 75—110 (РЖМат, 1972, 3А203)
83. —, Автоморфизмы двумерных конгруэнцгрупп. Алгебра и логика, 1973, *12*, № 4, 468—477 (РЖМат, 1974, 6А294)
84. —, Обзор новейших результатов об автоморфизмах классических групп. В сб. «Автоморфизмы классических групп», М., Мир, 1976, 250—259 (РЖМат, 1977, 4А230)
85. —, Линейные группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Алгебра. Топол. Геометрия, 1978, *16*, 35—89 (РЖМат, 1979, 2А165)
86. —, Теория изоморфизмов классических групп в 1976—1980 годах. Дополнение 1. Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами. М., Мир, 1980, 252—258 (РЖМат, 1981, 2А209)
87. —, Рациональные группы. М., Наука, 1980, 464 с. (РЖМат, 1981, 4А396)
88. *Михалев А. В.*, Специальные структурные пространства колец. Докл. АН СССР, 1963, *150*, № 7, 259—261 (РЖМат, 1964, 9А224)
89. —, Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1974, *12*, 51—76 (РЖМат, 1975, 6А408)
90. —, *Скорняков Л. А.*, Модули. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». 1968. М., 1970, 57—100 (РЖМат, 1970, 11А207)
91. —, — (ред.), Модули. АН СССР. Сиб. отд. Ин-т математики. Препринт. Новосибирск, 1973, 44с, 48с., 30с., 88с. (РЖМат, 1973, 10А249К—10А252К)
92. *Мишина А. П.*, Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп. Вестн. Моск. ун-та Матем. механ., 1962, № 4, 39—43 (РЖМат, 1963, 2А183)
93. —, Абелевы группы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1965 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1967, 9—44 (РЖМат, 1967, 10А146)
94. —, Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1972, № 1, 62—66 (РЖМат, 1972, 5А163)
95. —, Абелевы группы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 10. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1972, 5—45 (РЖМат, 1973, 2А172)
96. —, Абелевы группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия, 1979, *17*, 6—63 (РЖМат, 1980, 3А105)
97. *Мустафаев Л. Г.*, Полугруппы линейных непрерывных преобразований. I. Спец. вопр. алгебры и топол. Баку, 1980, 56—60 (РЖМат, 1981, 3А156)
98. —, Полугруппы линейных непрерывных преобразований. II. Спец. вопр. алгебры и топол. Баку, 1980, 61—65 (РЖМат, 1981, 3А157)
99. *Начев Н. А.*, О кольцах инцидентности. Вестн. Моск. ун-та Мат., мех., 1977, № 1, 36—42 (РЖМат, 1977, 11А296)
100. *Носков Г. А.*, Автоморфизмы группы $GL_n(\mathfrak{o})$ при $\dim \mathrm{Max}(\mathfrak{o}) \leqslant n$-2. Мат. заметки, 1975, *17*, № 2, 285—291 (РЖМат, 1975, 6А335)
101. *Петечук В. М.*, Автоморфизмы группы SL_n, GL_n над некоторыми локальными кольцами. Мат. заметки, 1980, *28*, № 2, 187—204 (РЖМат, 1980, 12А218)
102. —, Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами. Мат. сб. 1982, *117*, № 4, 534—547 (РЖМат, 1982, 8А206)
103. —, Автоморфизмы групп $SL_3(K)$, $GL_3(K)$. Мат. заметки, 1982, *31*, № 5, 657—668 (РЖМат, 1982, 9А164)
104. *Погориляк Е. Я.*, Автоморфизмы группы матриц второго порядка над коммутативным локальным кольцом. Мат. сборник. Киев, Наук. думка, 1976, 76—80 (РЖМат, 1977, 2А281)
105. —, *Дроботенко В. С.*, Нестандартные автоморфизмы групп $GL_2(K)$ над локальным кольцом K. В сб. «Тр. XXVIII Науч. конф. проф.-преподав. состава Ужгород. ун-та. Секц. мат. н.» Ужгород. ун-т. Ужгород, 1974, 201—206, библ. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 11 февр. 1975 г., № 314—75 Деп.) (РЖМат, 1975, 6А336)
106. —, —, *Дроботенко Э. С.*, Автоморфизмы полной линейной группы над коммутативным полулокальным кольцом. Тр. XXVIII Науч. конф. проф.-преподават. состава Ужгород. ун-та. Секц. мат. н. Ужгород, 1974, 187—200, библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 11 февр. 1975, № 314—75 Деп) (РЖМат, 1977, 2А287)
107. *Пуусемп П.*, Об определяемости периодической абелевой группы своей полугруппой эндоморфизмов. Изв. АН Эст. ССР. Физ. мат, 1980, *29*, № 3, 241—245 (РЖМат, 1981, 1А193)
108. —, Об определяемости периодической абелевой группы своей подгруппой эндоморфизмов в классе всех периодических абелевых групп. Изв. АН ЭстССР. Физ., мат. 1980, *29*, № 3, 246—253 (РЖМат, 1981, 1А194)
109. *Пятков В. С.*, О вполне инвариантных подмодулях некоторых классов модулей. Кемеров. ун-т. Кемерово 1979, 11с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 27 июля 1979 г., № 2790—79 Деп) (РЖМат, 1979, 10А197 ДЕП)
110. —, Об абелевых группах как модулях над своим кольцом эндоморфизмов. Кемеров. ун-т. Кемерово, 1979, 11с., библиогр. 9 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 2 янв. 1980 г., № 20—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 4А197)
111. *Репницкий В. Б.*, Арифметические модули. Мат. сб., 1979, *110*, № 1, 150—157 (РЖМат, 1979, 12А467)
112. *Россошек С. К.*, Корректность колец и модулей. В сб. «Материалы 4-й Научн. конф. по мат. и мех. Т. 1». Томск, Томск. ун-т, 1974, 120—121 (РЖМат, 1974, 12А219)
113. *Себельдин А. М.*, Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ринга 1 с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов. Мат. заметки, 1973, *14*, № 6, 867—878 (РЖМат, 1974, 7А255)
114. —, Суммы автоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1975, № 2, 85—92 (РЖМат, 1975, 10А215)
115. —, Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов. II. Абелевы группы и модули. Томск, 1979, 151—156 (РЖМат, 180, 2А182)
116. —, Абелевы группы без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов. Абелевы группы и модули. Томск, 1979, 157—162 (РЖМат, 1980, 2А191)
117. —, Определяемость нередуцированной абелевой группы без кручения своей группой эндоморфизмов. Абелевы группы и модули. Томск, 1980, 102—108 (РЖМат, 1980, 11А168)
118. *Скорняков Л. А.*, Проективные отображения модулей. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, № 4, 511—520 (РЖМат, 1961, 5А274)
119. —, Кольца. В сб. «Алгебра. Топология. 1962. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1963, 59—79 (РЖМат, 1964, 11А217)
120. —, Модули. В сб. «Алгебра. Топология. 1962. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1963, 80—89 (РЖМат, 1964, 11А220)

121. —, Модули. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1965 (Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР)». М., 1967, 181—216 (РЖМат, 1967, 10А199)
122. —, *Михалев А. В.*, Модули. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 14. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1976, 57—190 (РЖМат, 1977, 6А209)
123. *Солонина А. Г.*, Об определяемости модулей над полными кольцами дискретного нормирования неразложимыми идемпотентными эндоморфизмами (Моск. Гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина. М., 1975, 15 с., библиогр. 7 назв.) (Рукопись деп. в ВИНИТИ 15 сент. 1975 г. № 2660—75 Деп.) (РЖМат, 1976, 2А347)
124. —, Об определяемости *p*-адических модулей группами автоморфизмов. Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина. М., 1975, 15., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 15 сент. 1975 г., № 2647—75 Деп) (РЖМат, 1976, 2А348)
125. *Солтан В. П.*, О конечномерных линейных операторах с одинаковыми инвариантными подпространствами. В сб. «Мат. исследования». Т. 8. Вып. 4(30), Кишинев, Штиинца, 1973, 80—100 (РЖМат, 1974, 4А272)
126. *Сосновский Ю. В.*, К общей теории изоморфизмов линейных групп. Изоморфизмы классическ. групп над целостными кольцами. М., Мир, 1980, 259—268 (РЖМат, 1981, 2А202)
127. *Супруненко Д. А.*, Группы матриц. М., Наука, 1972, 352 с. (РЖМат, 1972, 8А290К)
128. *Суслин А. А.*, О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, *41*, № 2, 235—252 (РЖМат, 1977, 9А462)
129. *Томанов Г. М.*, Обобщенные групповые тождества в линейных группах. Докл. АН БССР, 1982, *26*, № 1, 9—12 (РЖМат, 1982, 5А172)
130. *Туганбаев А. А.*, О модулях, близких к инъективным. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 2, 233—234 (РЖМат, 1977, 11А310)
131 —, Строение модулей, близких к инъективным. Сиб. мат. ж., 1977, *18*, № 4, 890—898 (РЖМат, 1978, 1А256)
132. —, Квазиинъективные и малоинъективные модули. Вестн. Моск. ун-та. Мат. механ., 1977, № 2, 61—64 (РЖМат, 1978, 1А257)
133. —, Модули над наследственными нётеровыми первичными кольцами. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 4, 267—268 (РЖМат, 1978, 1А258)
134. —, Строение модулей, близких к проективным. Мат. сб., 1978, *106*, № 4, 554—565 (РЖМат, 1978, 12А450)
135. —, Псевдоинъективные модули и продолжение автоморфизмов. Тр. Семинара им. И. Г. Петровского, МГУ, 1978, № 4, 241—248 (РЖМат, 1979, 5А217)
136. —, Характеризации колец, использующие малоинъективные и малопроективные модули. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1979, № 3, 48—51 (РЖМат, 1979, 10А198)
137. —, Малопроективные модули. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1979, № 5, 43—47 (РЖМат, 1980, 3А197)
138. —, Кольца, над которыми каждый модуль является прямой суммой дистрибутивных модулей. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1980, № 1, 61—64 (РЖМат, 1980, 6А285)
139. —, Дистрибутивные нётеровы кольца. Вестн. МГУ Мат., мех., 1980, № 2, 30—34 (РЖМат, 1980, 7А219)
140. —, Кольца, все факторкольца которых малоинъективны. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 2, 223—224 (РЖМат, 1980, 10А172)
141. —, О квазипроективных модулях. Сиб. мат. ж., 1980, *21*, № 3, 177—183 (РЖМат, 1980, 10А192)
142. —, Малопроективные модули. Сиб. мат. ж., 1980, № 5, 109—113 (РЖМат, 1981, 2А265)
143. —, Дистрибутивные модули. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 5, 245—246 (РЖМат, 1981, 3А246)

144. —, О самоинъективных кольцах. Изв. вузов. Мат., 1980, № 12, 71—74 (РЖМат, 1981, 4А208)
145. —, Кольца, над которыми все циклические модули малоинъективны. Тр. семинара им. И. Г. Петровского. МГУ, 1981, № 6, 257—262 (РЖМат, 1981, 11А227)
146. —, Целозамкнутые кольца. Мат. сб., 1981, *115*, № 4, 544—559 (РЖМат, 1981, 12А232)
147. —, Малоинъективные кольца. Изв. вузов. Мат., 1981, № 9, 50—53 (РЖМат, 1982, 3А252)
148. —, Целозамкнутые нётеровы кольца. Успехи мат. наук, 1981, *36*, № 5, 195—196 (РЖМат, 1982, 3А271)
149. —, О малоинъективных модулях. Абелевы группы и модули. Томск, 1981, 175—180 (РЖМат, 1982, 7А280)
150. —, Кольца, все факторкольца которых малоинъективны справа. Абелевы группы и модули. Томск, 1981, 166—174 (РЖМат, 1982, 7А284)
151. —, Малоинъективные модули. Мат. заметки, 1982, *31*, № 3, 447—456 (РЖМат, 1982, 7А279)
152. —, Малоинъективные кольца. Успехи мат. наук., 1982, *37*, № 5, 201—202 (РЖМат, 1983, 3А234)
153. *Усенко В. М.*, Полугруппы полулинейных преобразований. Харьк. ин-т радиоэлектрон. Харьков, 1982, 17 с. Библиогр. 16 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 9 авг. 1982 г. № 4391—82 Деп) (РЖМат, 1982, 12А142 Деп)
154. *Фарукшин В. Х.*, Эндоморфизмы абелевых групп без кручения. Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина, М., 1981, 42 с. Библиогр. 20 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 28 мая 1981 г., № 2579—81 Деп) (РЖМат, 1981, 9А108 ДЕП)
155. —, Эндоморфизмы обобщенно примарных групп без кручения. Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина. М., 1981, 11 с. Библиогр. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 13 июля 1981 г., № 3469—81 Деп) (РЖМат, 1981, 12А156)
156. —, Эндоморфизмы редуцированных обобщенно примарных групп без кручения. Моск. гос. пед. ин-т. М., 1982, 11 с. Библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 14 апр. 1982 г., № 1821—82 Деп) (РЖМат, 1982, 8А154ДЕП)
157. *Фаянс В. Г.*, Группа частных полугруппы неособенных матриц с неотрицательными элементами. Успехи мат. наук, 1973, *28*, № 6, 221—222 (РЖМат, 1974, 7А241)
158. *Фейс К.*, Алгебра: Кольца, модули и категории. Т. 1, 2. М., Мир, 1977, 1, 688 с., 1979, 2, 464 с. (РЖМат, 1978, 6А178)
159. *Финкельштейн М. Я.*, Кольца квазиэндоморфизмов. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1979, № 3, 44—47 (РЖМат, 1979, 10А189)
160. *Фирсов Ю. М.*, Об эндоморфизмах подгрупп свободных абелевых групп. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1971, *375*, 90—99 (РЖМат, 1972, 5А225)
161. *Халезов Е. А.*, Автоморфизмы матричных полугрупп. Уч. зап. Иванов. гос. пед. ин-т., 1972, *106*, 136—138 (РЖМат, 1973, 1А181)
162. *Шарапова Т. Н.*, Элементарные инверсные подполугруппы полугруппы линейных преобразований. В сб. «Исслед. по алгебре». Вып. 4, Саратов, Саратов. ун-т, 1974, 115—118 (РЖМат, 1975, 3А229)
163. —, Конгруэнции на полугруппах линейных операторов. Докл. АН УССР, 1979, *А*, № 1, 17—19 (РЖМат, 1979, 6А149)
164. —, Конгруэнции на полугруппе линейных преобразований. Всес. заоч. машиностр. ин-т. М., 1979, 19 с. Библиогр. 6 назв (Рукопись деп. в ВИНИТИ 11 сент. 1979 г., № 3265—79 Деп) (РЖМат, 1980, 1А168 ДЕП)
165. *Шляфер А. З.*, Модули с конечными группами автоморфизмов над областями целостности. Материалы регион. конф. по мат. и мех., Томск, 17—19 ноябр. 1981. Секц. алгебры. Томск, 1981, 52—54. Библиогр.

1 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 16 марта 1982 г., № 1197—82 Деп) (РЖМат, 1982, 8А248)

166. *Шneперман Л. Б.*, Максимальные инверсные подполугруппы полугруппы линейных преобразований. Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1974, № 11, 93—100 (РЖМат, 1975, 7А252)

167. *Abdeljaouad J., Abdeljaouad M.*, Automorphismes de l'anneau des indomorphismes triangulaires d'un espace vectoriel de dimension dénombrable. Bull. Soc. math. Belg., 1976, *28*, № 4, 297—311 (РЖМат, 1980, 8А221)

168. *Achkar H.*, Sur les anneaux arithmétiques. C. r. Acad. sci., 1974, *A278*, № 5, 307—309 (РЖМат, 1974, 8А254)

169. —, Sur les propriétés des anneaux arithmétiques à gauche. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 17, A993—A995 (РЖМат, 1977, 10А161)

170. —, Anneaux arithmétiques à gauche. C. r. Acad. sci., 1978, *AB286*, № 20, A871—A873 (РЖМат, 1978, 12А399)

171. —, Anneaux arithmétiques à gauche: propriétés de transfert. C. r. Acad. sci., 1979, *288*, № 11, A583—A586 (РЖМат, 1979, 12А277)

172. *Ashan J.*, On П-injective modules. Tamkang J. Math., 1979, *10*, № 2, 223—229 (РЖМат, 1981, 5А239)

173. —, Modules over *qc*-rings. Stud. sci. math. hung., 1974, *9*, № 3—4, 321—325

174. *Alamelu S.*, On commutativity of endomorphism rings of ideals. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, *37*, № 1, 29—31 (РЖМат, 1973, 10А332)

175. —, Commutativity of endomorphism rings of ideals. II. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *55*, № 2, 271—274 (РЖМат, 1977, 3А345)

176. *Albu T. Năstăsescu C.*, Modules arithmétiques. Acta math. Acad. sci. hung., 1974, *25*, № 3—4, 299—311 (РЖМат, 1975, 7А564)

177. *Alev J.*, Dualité dans les algébres enveloppantes et les anneaux de groups. C. r. Acad. sci., 1978, *AB287*, № 6, A387—A390 (РЖМат, 1979, 5А209)

178. *Almkvist G.*, Endomorphisms of finitely generated projective modules over a commutative ring. Ark. mat., 1973, *11*, № 2, 263—301 (РЖМат, 1974, 10А342)

179. —, The Grothendieck group of the category of endomorphisms. J. Algebra, 1974, *28*, № 3, 375—378 (РЖМат, 1974, 10А343)

180. *Alperin J. L.*, Diagrams for modules. J. Pure and Appl. Algebra, 1980, *16*, № 2, 111—119 (РЖМат, 1980, 7А249)

181. *Anderson D. D.*, A remark on the lattice of ideals of a Prüfer domain. Pacif. J. Math., 1975, *57*, № 2, 323—324 (РЖМат, 1976, 3А410)

182. —, Multiplication ideals, multiplication rings, and the ring $R(X)$. Can. J. Math., 1976, *28*, № 4, 760—768 (РЖМат, 1977, 5А295)

183. —, Some remarks on multiplication ideals. Math. jap., 1980, *25*, № 4, 463—469 (РЖМат, 1981, 4А368)

184. *Anderson F. W., Fuller K. R.*, Rings and categories of modules. (Grad. Texts Math. 13). New York, Springer, 1974, VIII, 339 pp. (РЖМат, 1975, 7А380)

185. *Angad-Gaur H. W. K.*, The homological dimension of a torsion-free Abelian group of finite rank as a module over its ring of endomorphisms. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1977(1978), *57*, 299—309

186. *Anh Pham Ngoc.*, Duality over Noetherian rings with a Morita duality. J. Algebra, 1982, *75*, № 1, 275—285 (РЖМат, 1982, 11А163)

187. *Archer J., Hart R.*, Linear groups and projective modules over shew polynomial rings. Bull. London Math. Soc., 1980, *12*, № 5, 377—382 (РЖМат, 1981, 2А412)

188. *Ariband F.*, Un ideal maximal de l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension infinie. Lect. Notes Math., 1979, № 740, 184—189 (РЖМат, 1980, 4А282)

189. *Armendariz E. P.*, Modules with Artinian prime factors. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *78*, № 3, 311—314 (РЖМат, 1980, 11А286)

190. —, *Fisher J. W., Snider R. L.*, On injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules. Commun. Algebra, 1978, *6*. № 7, 659—672 (РЖМат, 1978, 11А311)

191. *Arnold D. M.*, Pure subgroups of finite rank completely decomposable groups. Lect. Notes Math., 1981, *874*, 1—30 (РЖМат, 1982, 3А160)

192. —, *Hunter R., Richman F.*, Global Azumaya theorems in additive categories. J. Pure and Appl. Algebra, 1980, *16*, № 3, 223—242 (РЖМат, 1980, 8А299)

193. —, *Lady E. L.*, Endomorphism rings and direct sums of torsion free Abelian groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *211*, 225—237 (РЖМат, 1976, 7А240)

194. —, *Murley C. E.*, Abelian groups A, such that Hom $(A, —)$ preserves direct sums of copies of *A*. Pacif. J. Math., 1975, *56*, № 1, 7—20 (РЖМат, 1976, 3А199)

195. —, *Pierce R. S., Reid J. D., Vinsonhaler C., Wickless W.*, Torsion-free Abelian groups of finite rank projective as modules over their endomorphism rings. J. Algebra, 1981, *71*, № 1, 1—10 (РЖМат, 1982, 2А185)

196. *Auslander B. L.*, Central separable algebras wich are locally endomorphism rings of free modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, *30*, № 3, 395—404 (РЖМат, 1973, 10А355)

197. *Azumaya G.*, Some aspects of Fuller's theorem. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 34—35 (РЖМат, 1979, 11А246)

198. *Baer R.*, Direct decompositions into primary components. Algebra Univers., 1973, *3*, 16—50

199. *Balcerzyk S.*, On traces of exterior powers of a sum of two endomorphisms of a projective module. Colloq. math., 1971, *23*, № 2, 203—211 (РЖМат, 1972, 4А471)

200. *Bäni W.*, Über ringe, welche dicht in ihrer Modulkategorie sind. Manuscr. math., 1973, *10*, № 4, 379—394 (РЖМат, 1974, 3А213)

201. —, Inner product spaces of infinite dimension; on the lattice method. Arch. Math., 1979, *33*, № 4, 338—347 (РЖМат, 1980, 8А341)

202. *Barnard A. D.*, Distributive extensions of modules. J. Algebra, 1981, *70*, № 2, 303—315 (РЖМат, 1981, 12А406)

203. —, Multiplication modules. J. Algebra, 1981, *71*, № 1, 174—178 (РЖМат, 1982, 2А442)

204. *Bartolone C., Di Franco F.*, A remark on the projectivities of the projective line over a commutative ring. Math. Z., 1979, *169*, № 1, 23—29 (РЖМат, 1980, 4А421)

205. *Bazzoni S., Metelli C.*, On Abelian torsion free separable groups and their endomorphism rings. Symp. math. Ist. Naz. Alta mat. Francesco Severi. Vol. 23. Roma, 1979, 259—285 (РЖМат, 1980, 9А198)

206. *Beachy J. A.*, Bicommutators of cofaithful, fully divisible modules: corrigendum. Can. J. Math., 1974, *26*, № 1, 256 (РЖМат, 1974, 9А311)

207. —, *T*-faithful subcategories and localization. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, *195*, № 468, 61—79 (РЖМат, 1975, 5А242)

208. *Beck I.*, On modules whose endomorphism ring is local. Isr. J. Math., 1978, *29*, № 4, 393—407 (РЖМат, 1979, 1А323)

209. —, An independence structure of indecomposable modules. Ark. mat., 1978, *16*, № 2, 171—178 (РЖМат, 1979, 9А252)

210. *Behrens E.-A.*, Distributiv darstellbare Ringe. Math. Z., 1960, *73*, № 5, 409—432 (РЖМат, 1962, 3А232)

211. —, Distributiv darstellbare Ringe. II., Math. Z., 1961, *76*, № 4, 367—384 (РЖМат, 1963, 3А235)

212. —, Ring theory. New York—London, Acad. Press, 1972, 320 pp, (РЖМат, 1974, 2А244 К)

213. —, Noncommutative arithmetic rings. Rings, Modules and Radicals. Amsterdam—London, 1973, 67—71 (РЖМат, 1976, 2А297)

214. *Benabdallah K., Birtz A.*, Sur une famille de groupes Abéliens superdécomposable. Can. Math. Bull., 1981, *24*, № 2, 213—218 (РЖМат, 1981, 11А162)

215. *Bergman G. M.*, Boolean rings of projection maps. J. London Math. Soc., 1972, *4*, № 4, 593—598 (РЖМат, 1972, 12А283)
216. *Berline C.*, Categoricité en $\aleph_0$ du groupe linéaire d'un anneau de Boole. C. r. Acad. sci., 1975, *280*, № 12, A753—A754 (РЖМат, 1975, 10А107)
217. *Bichot J.*, Modules continus. Publs Dép. math., 1971, *8*, № 1, 55—61 (РЖМат, 1973, 7А271)
218. *Blair W. D.*, An endomorphism ring which is not Ore. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, *44*, № 2, 275—277 (РЖМат, 1975, 2А462)
219. —, Quotient rings of algebras which are module finite and projective. Acta sci. math., 1974, *36*, № 3—4, 265—266 (РЖМат, 1975, 11А368)
220. *Bland P., Riley S.*, Density relative to a torsion theory. Proc. Amer. Math. Soc., 1981, *82*, № 4, 527—532 (РЖМат, 1982, 2А244)
221. *Boisen M. B., Jr., Sheldon R. B.*, A note on prearithmetical rings. Acta math. Acad. sci. hung., 1976, *28*, № 3—4, 257—259 (РЖМат, 1977, 9А460)
222. *Bonami L.*, Morita-equivalent rings are isomorphic. Arch. Math., 1980, *34*, № 2, 100—110 (РЖМат, 1981, 2А239)
223. *Botto-Mura R. T., Brungs H. H., Fisher J. L.*, Chain rings and valuation semigroups. Commun. Algebra, 1977, *5*, № 14, 1529—1547 (РЖМат, 1978, 7А223)
224. *Bowshell R. A., Schultz P.*, Unital rings whose additive endomorphisms commute. Math. Ann., 1977, *228*, № 3, 197—214 (РЖМат, 1978, 1А229)
225. *Brandt J.*, Characteristic submodules. J. London Math. Soc., 1982, *25*, № 1, 35—38 (РЖМат, 1982, 8А276)
226. *Brenner S.*, Decomposition properties of some small diagrams of modules. Symp. math. Ist. naz. alta mat. conv. nov.-dic. 1972. Vol. 13. London—New York, 1974, 127—141 (РЖМат, 1975, 7А378)
227. *Brungs H. H.*, Multiplikative Idealtheorie in nicht kommutativen Ringen. Mitt. Math. Sem. Giessen, 1974, № 110, 58 S. (РЖМат, 1975, 5А260)
228. —, Rings with a distributive lattice of right ideals. J. Algebra, 1976, *40*, № 2, 392—400 (РЖМат, 1977, 3А220)
229. —, Semigroups associated with right cahin rings. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 1, 79—85 (РЖМат, 1980, 8А230)
230. —, *Törner G.*, Chain rings and prime ideals. Arch. Math., 1976, *27*, № 3, 253—260 (РЖМат, 1977, 2А303)
231. —, —, Embedding right chain rings in chain rings. Can. J. Math., 1978, *30*, № 5, 1079—1086 (РЖМат, 1979, 5А199)
232. *Burgess W. D., Raphael R.*, Sur deux notions de complétude dans les anneaux semipremiers. C. r. Acad. sci., 1976, *283*, № 13, A927—A929 (РЖМат, 1977, 8А298)
233. *Burris S., Werner H.*, Remarks on Boolean products. Algebra univers., 1980, *10*, № 3, 333—344 (РЖМат, 1981, 1А307)
234. *Butler M. C. R.*, On locally free torsion-free rings of finite rank. J. London Math. Soc., 1968, *43*, № 2, 297—300 (РЖМат, 1969, 2А235)
235. —, A Galois-theoretic description of certain quasi-endomorphism rings. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic. 1972. Vol. 13. London—New York, 1974, 143—151 (РЖМат, 1975, 7А568)
236. *Butts H. S., Smith W.*, Prüfer rings. Math. Z., 1967, *95*, № 3, 196—211 (РЖМат, 1967, 10А283)
237. *Călugareanu G. G.*, Some remarks about mutual pseudocomplements in lattices. Mathematica (RSR), 1980, *22*, № 2, 237—239 (РЖМат, 1982, 5А243)
238. *Camillo V. P.*, A note on semi-hereditary rings. Arch. Math., 1973, *24*, № 2, 142—143 (РЖМат, 1973, 10А341)
239. —, Semi-hereditary polynomial rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, *45*, № 2, 173—174 (РЖМат, 1975, 6А540)
240. —, Distributive modules. J. Algebra, 1975, *36*, № 1, 16—25 (РЖМат, 1976, 2А346)
241. —, *Fuller K. R.*, Rings whose faithful modules are flat over their endomorphism rigns. Arch. Math., 1976, *27*, № 5, 522—525 (РЖМат, 1977, 5А200)
242. —, *Zelmanowitz J. M.*, Dimension modules. Pacif. J. Math., 1980, *91*, № 2, 249—261 (РЖМат, 1981, 11А281)
243. *Carlson J. F.*, Endo-trivial modules over (p, p)-groups. Ill. J. Math., 1980, *24*, № 2, 287—295 (РЖМат, 1981, 2А261)
244. *Castagna F.*, Endomorphisms of countable direct sums of torsion complete groups. Acta math. Acad. sci. hung., 1972, *23*, № 1—2, 45—50 (РЖМат, 1973, 7А198)
245. *Cauchon G.*, Commutant des modules longueur finie sur certaines algèbres filtrées. Lect. Notes Math., 1980, **825**, 10—18 (РЖМат, 1981, 6А252)
246. *Cezus F. A., Magill K. D., Jr., Subbiah S.*, Maximal ideals of semigroups of endomorphisms. Bull. Austral. Math. Soc., 1975, *12*, № 2, 211—225 (РЖМат, 1976, 1А176)
247. *Chatters A. W.*, Three examples concerning the ore condition in Noetherian rings. Proc. Edinburgh. Math. Soc., 1980, *23*, № 2, 187—192 (РЖМат, 1981, 4А224)
248. —, *Khuri S. M.*, Endomorphism rings of modules over non-singular *CS* rings. J. London Math. Soc., 1980, *21*, № 3, 434—444 (РЖМат, 1981, 2А240)
249. *Chiba K.*, A note on Morita-equivalence of polinomial rings. Math. J. Okayama Univ., 1977, *19*, № 2, 121—122 (РЖМат, 1978, 5А406)
250. *Chouinard L. G., Hardig B. R., Shores T. S.*, Arithmetical and semihereditary semigroup rings. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 17, 1593—1652 (РЖМат, 1981, 4А365)
251. *Cohn P. M.*, The similarity reduction of matrices over a skew field. Math. Z., 1973, *132*, № 2, 151—163 (РЖМат, 1974, 3А280)
252. —, Skew field constructions. London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1977, № 27, xii, 253 pp. (РЖМат, 1978, 2А211)
253. *Colby R. R., Fuller K. R.*, Modules over diserial rings. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 5, 511—532 (РЖМат, 1981, 8А269)
254. *Conlon S. B.*, Some remarks on the Krull-Schmidt theorem. Proc. Symp. Pure Math. V. 21. Represent. Theory Finite Groups and Relat. Top. Providence, R. I., 1971, 29—31 (РЖМат, 1974, 8А268)
255. *Conway J. B., Halmos P. R.*, Finite-dimensional points of continuity of lat. Linear Algebra and Appl., 1980, *31*, 93—102 (РЖМат, 1981, 1А357)
256. *Cornelius E. F., Jr*, Characterization of a class of torsion free groups in terms of endomorphisms. Pacif. J. Math., 1978, *79*, № 2, 341—355 (РЖМат, 1979, 11А170); Поправка: ibid, 1979, *85*, № 2, 501 (РЖМат, 1981, 1А196)
257. *Corner A. L. S.*, On endomorphism rings of primary Abelian groups. II. Quart. J. Math., 1976, *27*, № 105, 5—13 (РЖМат, 1976, 9А196)
258. *Cox S. H., Jr*, Commutative endomorphism rings. Pacif. J. Math., 1973, *45*, № 1, 87—91 (РЖМат, 1973, 11А395)
259. —, *Rush D. E.*, Endomorphisms of finite rank flat modules. Duke Math. J., 1972, *39*, № 2, 323—326 (РЖМат, 1973, 2А363)
260. *Cozzens J. H.*, Maximal orders and reflexive modules. Trans. Amer. Math., Soc., 1976, *219*, № 492, 323—336 (РЖМат, 1977, 5А195)
261. —, *Faith C.*, Simple Noetherian rings. Cambridge Univ. Press, 1975, 135 pp. (РЖМат, 1977, 3А227 К)
262. *Cunningham R. S., Rutter E. A., Jr., Turnidge D. R.*, Rings of quotients of endomorphism rings of projective modules. Pacif. J. Math., 1972, *41*, № 3, 647—668 (РЖМат, 1973, 3А276)
263. *Curzio M.*, Un problema di massimo in teoria dei moduli. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 1972, *42*, 111—118
264. *Damiano R. F.*, Coflat rings and modules. Pacif. J. Math., 1979, *81*, № 2, 349—369 (РЖМат, 1980, 3А198)
265. *Dauns J.*, Simple modules and centralizers. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, *166*, 457—477 (РЖМат, 1973, 1А257)

266. *Davison T. M. K.*, Distributive homomorphisms of rings and modules. J. reine und angew. Math., 1974, *271*, 28—34 (РЖМат, 1975, 7А562)
267. *Dawley E. G.*, A note on abelian *p*-groups and their endomorphism rings. Black mathematicians and their works, Dorrance, Ardmore, 1980, 137—138
268. *Dawlings R. J. H.*, Products of idempotents in the semigroup of singular endomorphims of a finite-dimensional vector space. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1981, *91*, № 1—2, 123—133 (РЖМат, 1982, 7А149)
269. —, Sets of idempotents that generate the semigroup of singular endomorphisms of a finite-dimensional vector space. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1982, *25*, № 2, 133—139 (РЖМат, 1982, 12А246)
270. *Deddens J. A., Fillmore P. A.*, Reflexive linear transformations. Linear Algebra and Appl., 1975, *10*, № 1, 89—93 (РЖМат, 1975, 12А350)
271. *Desale G., Nicholson W. K.*, Endoprimitive rings. J. Algebra, 1981, *70*, № 2, 548—560 (РЖМат, 1982, 1А286)
272. *Deshpande V. K.*, Completions of Noetherian hereditary prime rings. Pacif. J. Math., 1980, *90*, № 2, 285—297 (РЖМат, 1981, 7А232)
273. —, *Feller E. H.*, Endomorphism rings of essential extensions of a Noetherian module. Isr. J. Math., 1974, *17*, № 1, 46—49 (РЖМат, 1975, 2А323)
274. *D'Este G.*, Sui gruppi abeliani il cui anello degli endomorfismi è numerabile e non discreto nella topologia finita. Atti Ist. veneto sci. lett. ed arti. Cl. sci. mat. e natur., 1975—1976, *134*, 239—243 (РЖМат, 1978, 4А150)
275. —, Abelian groups with anti-isomorphic endomorphism rings. Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 1978, *60*, 55—75
276. —, A theorem on the endomorphism ring of reduced torsion-free Abelian groups and some applications. Ann. Mat. Pura Appl., 1978, *116*, 381—392
277. —, On topological rings which are endomorphism rings of reduced torsion-free Abelian groups. Quart. J. Math., 1981, *32*, № 127, 303—311 (РЖМат, 1982, 3А265)
278. *Dlab V., Ringel C. M.*, Balanced rings. Lect. Notes Math., 1972, *246*, 73—143 (РЖМат, 1972, 8А314)
279. —, —, Balanced local rings with commutative residue fields. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, *78*, № 5, 771—774 (РЖМат, 1973, 5А248)
280. —, —, The representations of tame hereditary algebras. Represent. Theory Algebras. Proc., Philadelphia Conf. New York — Basel, 1978, 329—353 (РЖМат, 1979, 4А314)
281. —, —, Perfect elements in the free modular lattices. Math. Ann., 1980, *247*, № 2, 95—100 (РЖМат, 1980, 10А229)
282. *Drozd Yu.*, Minors and theorems of reduction. Rings, Modules and Radicals. Amsterdam — London, 1973, 173—176 (РЖМат, 1976, 2А342)
283. *Dugas M.*, Fast freie Abelsche Gruppen mit Endomorphismenring Z. J. Algebra, 1981, *71*, № 2, 314—321 (РЖМат, 1982, 3А166)
284. *Dull M. H.*, Automorphisms of the two-dimentional linear groups over integral domains. Amer. J. Math., 1974, *96*, № 1, 1—40 (РЖМат, 1975, 12А412)
285. *Ehrlich G.*, Units and one-sided units in regular rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, *216*, 81—90 (РЖМат, 1976, 12А348)
286. *Elliger S.*, Präradikale und Endomorphismenringe von Moduln. Aequat. math., 1974, *10*, № 1, 118—119 (РЖМат, 1974, 9А307)
287. —, Präradikale und Endomrophismenringe von Moduln. Eequat. math., 1975, *12*, № 1, 84—93 (РЖМат, 1975, 10А300)
288. *Evans E. G.*, Krull-Schmidt theorem and cancellation over local rings. Pacif. J. Math., 1973, *46*, № 1, 115—121 (РЖМат, 1973, 12А394)
289. *Facchini A.*, Rings whose finitely generated torsion modules in sense of Dickson decompose into direct sums of cyclic submodules. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1980, *68*, № 1, 13—21 (РЖМат, 1981, 11А273)
290. *Fadyn J. N.*, The projectivity of Ext (T, A) as a module over $E(T)$. Pacif. J. Math., 1979, *85*, № 2, 383—392

291. *Faith C.*, A correspondence theorem for projective modules and the structure of simple Noetherian rings. Symp. mat. Ist. naz. alta mat. Vol. 8. London — New York, 1972, 309—345 (РЖМат, 1972, 9А248)
292. —, A correspondence theorem for projective modules and the structure of simple Noetherian rings: addendum. Symp. math. Conv., 1971—1972. Vol. 10. London — New York, 1972, 471—472 (РЖМат, 1973, 10А253)
293. —, On the structure of indecomposable injective modules. Commun. Algebra, 1974, *2*, № 6, 559—571 (РЖМат, 1975, 9А225)
294. *Faltings K.*, Primare Abelsche Gruppen mit Semidualitat. Arch. Math., 1975, *26*, № 1, 14—19 (РЖМат, 1975, 12А194)
295. *Farahat H. K.*, Homological dimension and Abelian groups. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 379—383 (РЖМат, 1978, 8А408)
296. *Farkas D. R., Snider R.*, Group algebras whose simple modules are injective. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, *194*, 241—248 (РЖМат, 1975, 4А308)
297. —, —, Commuting rings of simple $A(k)$-modules. J. Austral. Math. Soc., 1981, *A31*, № 2, 142—145 (РЖМат, 1982, 4А289)
298. *Feinberg R. B.*, Faithful distributive modules over incidence algebras. Pacif. J. Math., 1976, *65*, № 1, 35—45 (РЖМат, 1977, 6А213)
299. —, Characterization of incidence algebras. Discrete Math., 1977, *17*, № 1, 47—70 (РЖМат, 1977, 11А323)
300. *Fisher J. W.*, Nil subrings of endomorphism rings of modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, № 1, 75—78 (РЖМат, 1973, 1А261)
301. *Fleury P.*, Hollow modules and local endomorphism rings. Pacif. J. Math., 1974, *53*, № 2, 379—385 (РЖМат, 1975, 8А311)
302. *Fourneau R.*, Caractérisations de certains sous-lattis du lattis des convexes équilibrés radialement fermés. Bull. Soc. roy. sci. Liege, 1981, *50*, № 9—10, 310—312 (РЖМат, 1982, 8А322)
303. *Freese R.*, Projective geometries as projective modular lattices. Trans. Amer. Math. Soc., 1979, *251*, 329—342 (РЖМат, 1980, 1А338)
304. *Fritsch R., Wolff G.*, Structuren für die Menge der affinen Endomorphismen eines Modules bzw. eines affinen Raumes. Mitt. Math. Sem. Giessen, 1978, № 130, 93—106 (РЖМат, 1978, 11А295)
305. *Fuchs L.*, The cancellation property for modules. Lect. Notes Math., 1972, *246*, 191—212 (РЖМат, 1972, 8А347)
306. —, On torsion Abelian groups quasi-projective over their endomorphism rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, *42*, № 1, 13—15 (РЖМат, 1975, 2А219)
307. —, Indecomposable Abelian groups of measurable cardinality. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic. 1972. Vol. 13. London — New York, 1974, 233—244 (РЖМат, 1975, 7А267)
308. *Fujita H.*, Endomorphism rings of reflexive modules over Krull orders. Osaka J. Math., 1980, *17*, № 2, 439—448
309. *Fuller K. R.*, Density and equivalence. J. Algebra, 1974, *29*, № 3, 528—550 (РЖМат, 1975, 2А303)
310. —, Weakly symmetric rings of distributive module type. Commun. Algebra, 1977, *5*, № 9, 997—1008 (РЖМат, 1978, 7А337)
311. —, Rings of left invariant module type. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 2, 153—167 (РЖМат, 1978, 12А408)
312. —, On a generalization of serial rings. Represent. Theory Algebras. Proc., Philadelphia Conf., New York — Basel, 1978, 353—367 (РЖМат, 1979, 4А291)
313. —, Biserial rings. Lect. Notes Math., 1979, *734*, 64—90 (РЖМат, 1980, 3А179)
314. —, On a generalization of serial rings. II. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 7, 635—661 (РЖМат, 1980, 8А231)
315. —, *Haack J.*, Rings with quivers that are trees. Pacif. J. Math., 1978, *76*, № 2, 371—379 (РЖМат, 1979, 2А192)
316. —, —, Diality for semigroup rings. J. Pure and Appl. Algebra, 1981, *22*, № 2, 113—119 (РЖМат, 1982, 5А209)

317. —, *Hullinger H.*, Rings with finiteness conditions and their categories of functors. J. Algebra, 1978, *55*, № 1, 94—105 (РЖМат, 1979, 7A317)
318. *Gardner B. J.*, Some aspects of *T*-nilpotence. Pacif. J. Math., 1974, *53*, № 1, 117—130 (РЖМат, 1975, 5A254)
319. *Göbel R.*, Darstellung von Ringen als Endomorphismenringe. Arch. Math., 1980, *35*, № 4, 338—350
320. *Goel V. K., Jain S. K.*, π-injective modules and rings whose cyclics are π-injective. Commun. Algebra, 1978, *6*, № 1, 59—73
321. *Goldie A., Small L. W.*, A note on rings of endomorphisms. J. Algebra, 1973, *24*, № 2, 392—395 (РЖМат, 1973, 5A239)
322. *Goldsmith B.*, Endomorphism rings of torsion-free modules over complete discrete valuation ring. J. London Math. Soc., 1978, *18*, № 3, 464—471 (РЖМат, 1979, 9A273)
323. *Goodearl K. R.*, Ring theory. Nonsingular rings and modules. Marcel Dekker, New York — Basel, 1976, 206 pp.
324. —, Power-cancellation of groups and modules. Pacif. J. Math., 1976, *64*, № 2, 287—411 (РЖМат, 1977, 6A212)
325. —, Von Neumann regular rings. London e. a., Pitman, 1979, 370 pp. (РЖМат, 1981, 6A222K)
326. —, *Boyle A. K.*, Dimension theory for nonsingular injective modules. Mem. AMS, 1976, *177*, VIII, 112 pp. (РЖМат, 1977, 5A201)
327. *Gordon R.*, Nilpotency in endomorphism rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, *45*, № 1, 38—40 (РЖМат, 1975, 6A389)
328. —, *Green E. L.*, A representation theory for Noetherian rings. J. Algebra, 1976, *39*, № 1, 100—130 (РЖМат, 1976, 12A357)
329. —, *Robson J. C.*, Semiprime rings with Krull dimension are Goldie. J. Algebra, 1973, *25*, № 3, 519—521 (РЖМат, 1973, 11A240)
330. *Graves W., Molnar S.*, Incidence algebras as algebras of endomorphisms. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, *79*, № 4, 815—820 (РЖМат, 1974, 9A253)
331. *Green E. L.*, On the decomposability of amalgamated sums. J. Pure and Appl. Algebra, 1979, *14*, № 3, 259—272 (РЖМат, 1979, 11A218)
332. *Green J. A.*, Endomorphism rings of some modular representations. Var. Publs Ser. Mat. inst. Aarhus Univ., 1978, № 29, 1—7 (РЖМат, 1979, 7A280)
333. *Gross H.*, Isomorphisms between lattices of linear subspaces which are induced by isometries. J. Algebra, 1977, *49*, № 2, 537—546 (РЖМат, 1978, 6A320)
334. —, The lattice method in the theory of quadratic spaces of non-denumerable dimensions. J. Algebra, 1982, *75*, № 1, 23—42 (РЖМат, 1982, 11A264)
335. *Gruson L.*, Simple coherent functors. Lect. Notes Math., 1975, *488*, 156—159 (РЖМат, 1976, 4A300)
336. *Gupta A. K., Varadarajan K.*, Modules over endomorphism rings. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 14, 1291—1333 (РЖМат, 1981, 3A243)
337. *Gustafson W. H.*, On maximal commutative algebras of linear transformations. J. Algebra, 1976, *42*, № 2, 557—563 (РЖМат, 1977, 6A262)
338. *Haack J. K.*, Self-duality and serial rings. J. Algebra, 1979, *59*, № 2, 345—363 (РЖМат, 1980, 2A242)
339. —, Incidence rings with self-duality. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *78*, № 2, 165—169 (РЖМат, 1980, 12A287)
340. *Haapasalo L.*, Von Vektorraumisometrien induzierte Verbandsisomorphismen zwischen nicht orthostabilen und nicht distributiven Vektorraumverbänden. Ann. acad. sci. fenn., 1981, Ser. Al Diss., № 37, 86 s., ill. (РЖМат, 1982, 6A346)
341. *Hacque M.*, Quelques remarques sur la notion de socle. Commun. Algebra, 1982, *10*, № 10, 1003—1025 (РЖМат, 1982, 12A269)
342. *Hahn A. J.*, Isomorphisms of the integral classical groups and their congruence subgroups. Amer. J. Math., 1975, *97*, № 4, 865—887 (РЖМат, 1977, 2A446)
343. —, Category equivalences and linear groups over rings. J. Algebra, 1982, *77*, № 2, 505—543 (РЖМат, 1983, 3A190)

344. *Halperin I., Rosenthal P.*, Burnside's theorem on algebras of matrices. Amer. Math. Mon., 1980, *87*, № 10, 810 (РЖМат, 1981, 7A346)
345. *Handelman D.*, Prüfer domains and Baer rings. Arch. Math., 1977, *29*, № 3, 241—251 (РЖМат, 1978, 8A284)
346. —, Free rank $n+1$ dense subgroups R^n and their endomorphisms. J. Funct. Anal., 1982, *46*, № 1, 1—27 (РЖМат, 1982, 10A195)
347. *Hanna A., Yaqub F. M.*, Duality in modules over principal ideal domains. Acta math. Acad. sci. hung., 1971, *22*, № 1—2, 203—206 (РЖМат, 1972, 5A285)
348. *Hannah J.*, Countability in regular self-injective rings. Quart. J. Math., 1980, *31*, № 123, 315—327 (РЖМат, 1981, 3A227)
349. *Hannula T. A.*, The Morita context and the construction of *QF* rings. Lect. Notes Math., 1973, *353*, 113—130 (РЖМат, 1974, 6A334)
350. *Hansen F.*, Dreiesks-Darstellung von Endomorphismenringen injektiver Moduln. J. reine und angew. Math., 1978, *302*, 206—220 (РЖМат, 1979, 5A333)
351. *Hansen G. W., Robinson D. W.*, On the existence of generalized inverses. Linear Algebra and Appl., 1974, *8*, № 2, 95—104 (РЖМат, 1974, 12A260)
352. *Happel D., Ringel C. M.*, Construction of tilted algebras. Lect. Notes Math., 1981, № 903, 125—144 (РЖМат, 1982, 7A421)
353. *Harada M.*, On the exchange property in a direct sum of indecomposable modules. Osaka J. Math., 1975, *12*, № 3, 719—736 (РЖМат, 1976, 11A351)
354. —, A ring theoretical prouf in a factor category of indecomposable modules. J. Math. Soc. Jap., 1976, *28*, № 1, 160—167 (РЖМат, 1976, 11A352)
355. —, A note on hollow modules. Rev. Union. mat. argent., 1977—1978, *28*, № 3—4, 186—194 (РЖМат, 1979, 8A257)
356. —, *Ishii T.*, On endomorphism rings of Noetherian quasi-injective modules. Osaka J. Math., 1972, *9*, № 2, 217—223 (РЖМат, 1973, 9A278)
357. *Hardy B. R., Shores T. S.*, Arithmetical semigroup rings. Can. J. Math., 1980, *32*, № 6, 1361—1371 (РЖМат, 1981, 10A274)
358. *Hart N.*, Determining groups from endomorphism rings for Abelian groups modulo bounded groups. Acta math. Acad. sci. hung., 1971, *22*, № 1—2, 154—162 (РЖМат, 1972, 5A259)
359. *Hauger G.*, Aufsteigende Kettenbedingung für zyklische Moduln und perfekte Endomorphismringe. Acta math. Acad. sci. hung., 1976, *28*, № 3—4, 275—278 (РЖМат, 1977, 9A324)
360. —, *Zimmermann W.*, Quasi-Frobenius Moduln. Arch. Math., 1973, *24*, № 4, 379—386 (РЖМат, 1974, 7A393)
361. —, —, Dichte ringe. Math. Ann., 1974, *210*, № 1, 1—6 (РЖМат, 1975, 2A302)
362. *Hauptfleisch G. I.*, Torsion-free Abelian groups with isomorphic endomorphism rings. Arch. Math., 1973, *24*, № 3, 269—273 (РЖМат, 1973, 12A195)
363. *Hausen J.*, Structural relations between general linear groups and automorphism groups of Abelian *p*-groups. Proc. London Math. Soc., 1974, *28*, № 4, 614—630 (РЖМат, 1975, 4A264)
364. —, On automorphism groups and endomorphism rings of Abelian *p*-groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *210*, 123—128 (РЖМат, 1976, 5A194)
365. —, How automorphism groups reveal Ulm invariants. J. Algebra, 1977, *44*, № 1, 9—28 (РЖМат, 1977, 8A212)
366. —, The Jacobson radical of endomorphism rings of totally projective groups of finite type. J. reine und angew. Math., 1977, *292*, 19—24 (РЖМат, 1978, 3A193)
367. —, The Jacobson radical of some endomorphism rings. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 332—336 (РЖМат, 1978, 10A167)
368. —, Quasi-regular ideals of some endomorphism rings. Ill. J. Math., 1977, *21*, № 4, 845—851 (РЖМат, 1978, 11A315)
369. —, Radicals in endomorphism rings of primary Abelian groups. Symp. math. Ist. Naz. Alta mat. Francesco Severi. Vol. 23, Roma, 1979, 63—66 (РЖМат, 1980, 9A197)

370. —, *Johnson J. A.*, Characterization of the primary Abelian groups, bounded modulo the divisible subgroup, by the radical of their endomorphism rings. Arch. Math., 1977, *29*, № 6, 566—570 (РЖМат, 1978, 10А172)
371. —, —, Ideals and radicals of some endomorphism rings. Pacif. J. Math., 1978, *74*, № 2, 365—372 (РЖМат, 1978, 12А401)
372. —, —, Separability of sufficiently projective *p*-groups as reflected in their endomorphism rings. J. Algebra, 1981, *69*, № 2, 270—280 (РЖМат, 1981, 11А161)
373. *Herrmann C.*, On the equational theory of submodules lattices. Proc. Univ. Houston Lattice theory Conf. (Houston, Tex., 1973), Dept. Math., Univ. Houston, Houston, Tex., 1973, 105—118
374. —, On a condition sufficient for the distributivity of lattices of linear subspaces. Arch. Math., 1979, *33*, № 3, 235—238 (РЖМат, 1980, 6А329)
375. —, *Huhn A. P.*, Zum Begriff der Charakteristik modularer Verbände. Math. Z., 1975, *144*, № 3, 185—194 (РЖМат, 1976, 3А326)
376. —, —, Zum Wortproblem für freie Untermodulverbände. Arch. Math., 1975, *26*, № 5, 449—453 (РЖМат, 1976, 6А314)
377. —, —, Lattices of normal subgroups which are generated by frames. Lattice Theory. Proc. Colloq., Szeged, 1974. Amsterdam, 1976, 97—136 (РЖМат, 1979, 6А254)
378. *Hill D. A.*, Endomorphism rings of hereditary modules. Arch. Math., 1977, *28*, № 1, 45—50 (РЖМат, 1977, 10А178)
379. *Hirano Yasuyuki*, On Fitting's lemma. Hiroshima Math. J., 1979, *9*, № 3, 623—626 (РЖМат, 1980, 7А248)
380. —, Regular modules and *V*-modules. Hiroshima Math. J., 1981, *11*, № 1, 125—142 (РЖМат, 1981, 11А279)
381. *Huber M., Warfield R. B., Jr.*, Homomorphisms between Cartesian powers of an Abelian group. Lect. Notes Math., 1981, *874*, 202—227 (РЖМат, 1982, 3А267)
382. *Hudry A.*, Sur les modules primaires de O. Goldman. C. r. Acad. sci., 1972, *274*, № 25, A1772—A1774 (РЖМат, 1973, 1А251)
383. —, Sur un probleme de C. Faith. J. Algebra, 1975, *34*, № 3, 365—374 (РЖМат, 1976, 1А296)
384. *Hullinger H. L.*, Stable equivalence and rings whose modules are a direct sum of finitely generated modules. J. Pure and Appl. Algebra, 1980, *16*, № 3, 265—273 (РЖМат, 1980, 8А269)
385. *Hutchinson G.*, The representation of lattices by modules. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, *79*, № 1, 172—176 (РЖМат, 1973, 9А296)
386. —, On the representation of lattices by modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *209*, № 482, 311—351 (РЖМат, 1977, 1А289)
387. —, A duality principle for lattices and categories of modules. J. Pure and Appl. Algebra, 1977, *10*, № 2, 115—119 (РЖМат, 1978, 10А223)
388. —, *Czédli G.*, A test for identities satisfied in lattices of submodules. Algebra univers., 1978, *8*, № 3, 269—309 (РЖМат, 1978, 12А500)
389. *Hutchinson J. J.*, Quotient full linear rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, *28*, № 2, 375—378 (РЖМат, 1972, 5А281)
390. —, The completion of a Morita context. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 8, 717—742 (РЖМат, 1980, 10А189)
391. —, *Turnidge D. R.*, Morita equivalent quotient rings. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 7, 669—675 (РЖМат, 1977, 2А307)
392. —, *Zelmanowitz J.*, Quotient rings of endomorphism rings of modules with zero singular submodules. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *35*, № 1, 16—20 (РЖМат, 1973, 6А300)
393. —, —, Subdirect sum decompositions of endomorphism rings. Pacif. J. Math., 1973, *47*, № 1, 129—134 (РЖМат, 1974, 5А286)
394. *Ikehata Shuichi*, On Morita equivalence in ring extensions. Math. J. Okayama Univ., 1975, *18*, № 1, 73—79 (РЖМат, 1976, 10А188)
395. *Irving R. S.*, Rings with subexponential growth and irreducible representations. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *72*, № 3, 445—450 (РЖМат, 1979, 6А212)

396. —, Generic flatness and the nullstellensatz for Ore extensions. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 3, 259—277 (РЖМат, 1979, 11А357)
397. —, Noetherian algebras and the Nullstellensatz. Lect. Notes Math., 1979, *740*, 80—87 (РЖМат, 1980, 5А244)
398. *Isaacs I. M.*, Automorphisms of matrix algebras over commutative rings. Linear Algebra and Appl., 1980, *31*, 215—231 (РЖМат, 1981, 2А358)
399. *Ishii T.*, On locally direct summands of modules. Osaka J. Math., 1975, *12*, № 2, 473—482 (РЖМат, 1976, 4А250)
400. *Iwanaga Y.*, The F_h-condition and double centralizer condition. Sci. Repts. Tokyo Kyoiku Daigaku Sec. A, 1973, *12*, № 313—328, 16—24 (РЖМат, 1974, 10А282)
401. *Izawa T.*, A module whose double centralizer is semi-primary *QF*-3. Rep. Fac. Sci. Shizuoka Univ., 1975, *10*, 3—8
402. —, Maximal quotient rings of endomorphism rings of $E(R_R)$-torsion-free generators. Can. J. Math., 1981, *33*, № 3, 585—605 (РЖМат, 1982, 3А288)
403. *Jaegermann M.*, Morita contexts and radicals. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1972, *20*, № 8, 619—623 (РЖМат, 1973, 4А340)
404. —, Normal radicals of rings of additive categories. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1974, *22*, № 9, 883—885 (РЖМат, 1975, 7А347)
405. —, Normal radicals of endomorphism rings of free and projective modules. Fund. math., 1975, *86*, № 3, 237—250 (РЖМат, 1975, 11А354)
406. —, Normal radicals. Fund. math., 1977, *95*, № 3, 147—155 (РЖМат, 1978, 2А203)
407. *Jain R. K.*, Generalized multiplication modules. Riv. mat. Univ. Parma, 1981, *7*, 461—472 (РЖМат, 1982, 11А334)
408. *James D. G.*, Projective geometry for orthogonal groups. J. reine und angew. Math., 1980, № 319, 104—117 (РЖМат, 1981, 4А338)
409. —, *Weisfeiler B.*, On the geometry of unitary groups. J. Algebra, 1980, *63*, № 2, 514—540 (РЖМат, 1980, 11А437)
410. *Jategaonkar A. V.*, Endomorphism rings of torsionless modules. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, *161*, 457—466 (РЖМат, 1972, 6А279)
411. —, Morita duality and Noetherian rings. J. Algebra, 1981, *69*, № 2, 358—371 (РЖМат, 1981, 12А237)
412. *Jensen C. U.*, On characterisations of Prüfer rings. Math. scand., 1963, *13*, № 1, 90—98 (РЖМат, 1966, 1А346)
413. —, A remark on arithmetical rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1964, *15*, № 6, 951—954 (РЖМат, 1965, 5А213)
414. —, A remark on flat and projective modules. Can. J. Math., 1966, *18*, № 5, 943—949 (РЖМат, 1967, 4А197)
415. —, A remark on the distributive law for an ideal in a commutative ring. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1966, *7*, № 4, 193—198 (РЖМат, 1967, 4А280)
416. —, Arithmetical rings. Acta math. Acad. sci. hung., 1966, *17*, № 1—2, 115—123 (РЖМат, 1967, 10А282)
417. *Jeremy L.*, Anneaux engendrés par leurs idempotents. Quasi-continuité de M^I. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 24, A1541—A1543 (РЖМат, 1974, 2А271)
418. —, Modules et anneaux quasi-continus. Can. Math. Bull., 1974, *17*, № 2, 217—228 (РЖМат, 1975, 7А396)
419. *Jinnah M. I.*, A note on *PG*-modules. Math. scand., 1975, *37*, № 1, 27—28 (РЖМат, 1976, 12А459)
420. *Jøndrup S.*, Indecomposable modules. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978. New York — Basel, 1979, 97—104 (РЖМат, 1980, 7А247)
421. *Joseph A.*, A generalization of Quillen's lemma and its application to the Weyl algebras. Isr. J. Math., 1977, *28*, № 3, 177—192 (РЖМат, 1978, 6А272)
422. *Jothilingam P.*, A note on a theorem of M. Auslander. J. London Math. Soc., 1974, *9*, № 2, 302—304 (РЖМат, 1975, 7А572)
423. *Kabenjuk M. I.*, Some topologies on Abelian group related to the ring of

its endomorphisms. Topology. 4th Colloq., Budapest, 1978. Vol. 2. Amsterdam e. a., 1980, 705—712 (РЖМат, 1981, 4A134)
424. *Kahlon U. S.*, Problem of Krull-Schmidt-Azumaya-Matlis. J. Indian Math. Soc., 1971, *35*, № 1—4, 255—261 (РЖМат, 1973, 1A254)
425. *Kanbara Hikoji*, Note on Krull-Remak-Schmidt-Azumaya's theorem. Osaka J. Math., 1972, *9*, № 3, 409—413 (РЖМат, 1973, 11A257)
426. *Kasch F.*, *Pareigis B.*, Einfache Untermoduln von Kogeneratoren. Sitzungsber. Bayer: Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1972. München, 1973, 45—76 (РЖМат, 1974, 7A394)
427. *Kato Toyonori*, *U*-distinguished modules. J. Algebra, 1973, *25*, № 1, 15—24 (РЖМат, 1973, 11A254)
428. —, Duality between colocalization and localization. J. Algebra, 1978, *55*, № 2, 351—374 (РЖМат, 1979, 9A233)
429. —, *Ohtake Koichiro*, Morita contexts and equivalences. J. Algebra, 1979, *61*, № 2, 360—366 (РЖМат, 1980, 8A216)
430. *Katz E.*, *Morris S. A.*, On endomorphisms of Abelian topological groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1982, *85*, № 2, 181—183 (РЖМат, 1983, 1A236)
431. *Kawada Yutaka*, A note on cogenerators in the category of modules. Proc. Jap. Acad., 1972, *48*, № 7, 470—473 (РЖМат, 1973, 10A254)
432. —, On dominant modules and dominant rings. Proc. 10th Symp. Ring Theory, Matsumoto, 1977. Okayama, 1978, 62—82 (РЖМат, 1978, 11A275)
433. —, On dominant modules and dominant rings. J. Algebra, 1979, *56*, № 2, 409—435 (РЖМат, 1979, 8A253)
434. *Keller H. A.*, On the lattice of all closed subspaces of a Hermitian space. Pacif. J. Math., 1980, № 1, 105—110 (РЖМат, 1981, 6A374)
435. *Kerner O.*, A remark on Morita duality. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 12, 1127—1131 (РЖМат, 1977, 8A295)
436. *Kerr J. W.*, An example of a Goldie ring whose matrix rings is not Goldie. J. Algebra, 1979, *61*, № 2, 590—592 (РЖМат, 1980, 7A217)
437. *Kezlan T. P.*, On *K*-primitive rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *74*, № 1, 24—28 (РЖМат, 1980, 1A256)
438. *Khabbaz S. A.*, *Toubassi E. H.*, The module structure of Ext(F, T) over the endomorphism ring of T. Pacif. J. Math., 1974, *54*, № 1, 169—176 (РЖМат, 1975, 10A303)
439. —, —, Ext(A, T) as a module over End(T). Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *48*, № 2, 269—275 (РЖМат, 1976, 4A150)
440. *Khuri S. M.*, Baer endomrophism rings and closure operators. Can. J. Math., 1978, *30*, № 5, 1070—1078 (РЖМат, 1979, 5A195)
441. —, Endomorphism rings and lattice isomorphisms. J. Algebra, 1979, *56*, № 2, 401—408 (РЖМат, 1979, 8A219)
442. —, Modules with Baer, *CS* or left Utumi endomorphism rings. Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf., 1978. New York — Basel, 1979, 705—710 (РЖМат, 1980, 7A213)
443. —, Endomorphism rings of nonsingular modules. Ann. Sci. Math. Québec, 1980, *49*, № 2, 145—152
444. —, Modules whose endomorphism rings have isomorphic maximal left and right quotient rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1982, *85*, № 2, 161—162 (РЖМат, 1983, 2A188)
445. *Kim K. H.*, *Roush F. W.*, Reflexive lattices of subspaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *73*, № 1, 17—18 (РЖМат, 1980, 9A304)
446. *Kirkwood I.*, The isomorphism semigroup of a periodic Abelian group. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1980, *A86*, № 1—2, 43—52 (РЖМат, 1981, 2A166)
447. *Kitamura Y.*, A remark on the endomorphism ring theorem of quasi-Frobenius extensions. Bull. Tokyo Gakugei Univ., 1975, *27*, № 4, 55—59
448. —, Quasi-Frobenius extensions with Morita duality, J. Algebra, 1981, *73*, № 2, 275—286 (РЖМат, 1982, 6A250)
449. *Kovacs A.*, Homomorphisms of matrix rings into matrix rings. Pacif. J. Math., 1973, *49*, № 1, 161—170 (РЖМат, 1974, 9A288)

450. *Kuebler R.*, *Reid J. D.*, On a paper of Fred Richman and Elbert A. Walker (Math. Z. 89, 1965, 77—81). Rocky Mountain J. Math., 1975, *5*, № 4, 585—592
451. *Kulkarni M.*, Fundamental theorem of projective geometry over a commutative ring. Indian J. Pure and Appl. Math., 1980, *11*, № 12, 1561—1565 (РЖМат, 1981, 5A359)
452. *Kurka A.*, Equationally compact algebras with bases of different cardinalities. Algebra univers., 1981, *12*, № 3, 399—401 (РЖМат, 1982, 4A341)
453. *Lambek J.*, Torsion theories, additive semantics and rings of quotients. Berlin, Springer, 1971, VI+94 (РЖМат, 1973, 9A274K)
454. —, Bicommutators of nice injectives. J. Algebra, 1972, *21*, № 1, 60—73 (РЖМат, 1972, 11A202)
455. —, Localization at epimorphisms and quasi-injectives. J. Algebra, 1976, *38*, № 1, 163—181 (РЖМат, 1976, 11A345)
546. —, Remarks on localization and duality. Ring Theory. Proc. Anwerp. Conf., 1978. New York — Basel, 1979, 711—728 (РЖМат, 1980, 7A240)
457. *Latsis D.*, Localization dans les anneaux duos. C. r. Acad. sci., 1976, *282*, № 24, A1403 — A1406 (РЖМат, 1977, 2A308)
458. *Lawrence J.*, A note on the density theorem. Can. Math. Bull., 1981, *24*, № 2, 249 (РЖМат, 1981, 10A269)
459. *Lawver D. A.*, On the commutativity and generalized regularity of $\Xi(G)$. Acta math. Acad. sci. hung., 1973, *24*, № 1—2, 107—112 (РЖМат, 1974, 1A198)
460. —, Abelian groups in which endomorphic images are fully invariant. J. Algebra, 1974, *29*, № 2, 232—245 (РЖМат, 1975, 1A257)
461. *Lee Sin-Min*, On the constructions of local and arithmetic rings. Acta math. Acad. sci. hung., 1978, *32*, № 1—2, 31—34 (РЖМат, 1979, 5A201)
462. *Leeuwen L. C. A. van*, Remarks on endomorphism rings of torsion-free Abelian groups. Acta sci. math., 1971, *32*, № 3—4, 345—350 (РЖМат, 1972, 9A222)
463. —, On the endomorphisms and quasi-endomorphisms of torsion-free groups. Beitr. Algebra und Geom. Wiss. Beitr. M.-Luther-Univ. Halle Wittenberg, 1975, № 4, 15—22 (РЖМат, 1977, 2A206)
464. *Leichtweiss K.*, Über den projektiven Abschluss affiner Verbände. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1974, *42*, Nov., 53—71 (РЖМат, 1975, 11A394)
465. *Lemaire C.*, Sous-modules purs et sommantes directes. Can. J. Math., 1973, *25*, № 6, 1159—1164 (РЖМат, 1974, 8A269)
466. *Lemonnier B.*, *AB*5* et la dualité de Morita. C. r. Acad. sci., 1979, *289*, № 2, A47—A50 (РЖМат, 1980, 3A194)
467. *Lenzing H.*, Direct sums of projective modules as direct summands of their direct product. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 7, 681—691 (РЖМат, 1977, 2A331)
468. *Leron U.*, Matrix methods in decompositions of modules. Linear Algebra and Appl., 1980, *31*, 159—171 (РЖМат, 1981, 1A274)
469. *Leu Hsi-Muh*, The ring of quotients of a module endomorphism ring. Tamkang J. Math., 1976, *7*, № 1, 77—86 (РЖМат, 1977, 5A191)
470. *Liebert W.*, Endomorphism rings of reduced torsion-free modules over complete discrete valuation rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, *169*, 347—363 (РЖМат, 1973, 5A273)
471. —, Endomorphism rings of reduced complete torsion-free modules over complete discrete valuation rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *36*, № 2, 375—378 (РЖМат, 1973, 6A299)
472. —, The Jacobson radical of some endomorphism rings. J. reine und angew. Math., 1973, *262—263*, 166—170 (РЖМат, 1974, 6A364)
473. —, Endomorphism rings of free modules over principal ideal domains. Duke Math. J., 1974, *41*, № 2, 323—328 (РЖМат, 1975, 3A339)
474. —, One-sided ideals in the endomorphism rings of the complete torsion-free modules and divisible torsion modules over complete discrete valua-

tion rings. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov.-dic. 1972. Vol. 13. London — New York, 1974, 273—298 (РЖМат, 1975, 7А379)
475. —, Ulm valuations and co-valuations on torsion-complete p-groups. Lect. Notes Math., 1977, *616*, 337—353 (РЖМат, 1978, 8А200)
476. *Limaye B. V., Limaye N. B.*, Fundamental theorem for the projective line over non-commutative local rings. Arch. Math., 1977, *28*, № 1, 102—109 (РЖМат, 1977, 9А362)
477. —, —, The fundamental theorem for the projective line over non-commutative local rings. Aequat. math., 1977, *16*, № 1—2, 187—188 (РЖМат, 1978, 6А435); Поправка: Arch. Math., 1977, *29*, № 6, 672 (РЖМат, 1978, 8А339)
478. —, —, The fundamental theorem for the projective line over commutative rings. Aequat. math., 1977, *16*, № 3, 275—281 (РЖМат, 1978, 10А213)
479. *MacDonald R. N. S.*, Representable dualitie between finitely closed subcategories of modules. Can. J. Math., 1979, *31*, № 3, 465—475 (РЖМат, 1980, 1А306)
480. *Machala F.*, O automorfismech definovaných na okruhu endomorfismu homogenniho totálně rozložitelného modulu. Čas. pěstov. mat., 1971, *96*, № 4, 353—360 (РЖМат, 1972, 4А324)
481. —, Über einige Endomorphismen der additiven Gruppe des Endomorphismenringes eines vollstädig reduziblen Moduls. Mat. Čas., 1972, *22*, № 2, 131—140 (РЖМат, 1972, 12А262)
482. —, Über Automorphismen des Endomorphismenringes eines Vektorraumes. Čas. pěstov. mat., 1973, *98*, № 1, 78—86 (РЖМат, 1973, 8А230)
483. —, Über Automorphismen eines Annullatorenverbandes gewisser Teilringe im Endomorphismenring eines homogenen vollstandig reduziblen Moduls. Sb. Praci Přirodoved. Fak. Univ. Palackeho v Olomouci, 1973, *41*, 15—26
484. —, Projektive Abbildung von Moduln. Czechosl. Math. J., 1974, *24*, № 1, 26—39 (РЖМат, 1974, 11А328)
485. —, Bemerkungen zu einem Satz von L. A. Skornjakov über proektive Abbildung von Moduln. Mat. čas, 1974, *24*, № 4, 301—306 (РЖМат, 1975, 6А390)
486. —, Homomorphismen von projektiven Räumen und verallgemeinerte Semilineare Abbildungen. Čas. pěstov. mat., 1975, *100*, № 2, 142—154 (РЖМат, 1975, 12А300)
487. —, Projektive Abbildungen projektiver Räume mit Homomorphismus. Czechosl. Mat. J., 1975, *25*, № 2, 214—226 (РЖМат, 1976, 1А338)
488. —, Homomorphismen projektiver Räume mit Homomorphismus. Czechosl. Mat. J., 1975, *25*, № 3, 454—474 (РЖМат, 1976, 4А288)
489. *Mader A.*, The fully invariant subgroups of reduced algebraically compact groups. Publs. Math., 1970, *17*, № 1—4, 299—306 (РЖМат, 1973, 11А171)
490. *Makino R.*, Balanced conditions for direct sums of serial modules. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1974, *12*, № 329—346, 181—201 (РЖМат, 1975, 10А302)
491. —, Serial endomorphism rings. Proc. Jap. Acad., 1975, *51*, № 7, 530—534 (РЖМат, 1976, 6А290)
492. *Makkai M., McNulty G.*, Universal Horn axiom sistems for lattices of submodules. Algebra univers., 1977, *7*, № 1, 25—31 (РЖМат, 1978, 2А223)
493. *Marubayashi Hidotoshi*, A note on locally uniform rings and modules. Proc. Jap. Acad., 1971, *47*, № 1, 11—14 (РЖМат, 1972, 1А453)
494. *Masaike Kanzo*, Endomorphisms of modules over maximal orders. Proc. 10th Symp. Ring. Theory, Matsumoto, 1977. Okayama, 1978, 95—98 (РЖМат, 1978, 11А316)
495. —, Endomorphisms of modules over maximal orders. Math. J. Okayama Univ., 1979, *21*, № 1, 33—40 (РЖМат, 1980, 3А196)
496. *Maxson C. J., Smith K. C.*, Centralizer near-rings that are endomorphism rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *80*, № 2, 189—195 (РЖМат, 1981, 4А251)

497. *Maxwell G.*, Representations of algebras with involution. Can. J. Math., 1972, *24*, № 4, 592—597 (РЖМат, 1973, 2А240)
498. *May W.*, Endomorphism rings of Abelian groups with ample divisible subgroups. Bull. London Math. Soc., 1978, *10*, № 3, 270—272 (РЖМат, 1979, 9А210)
499. —, *Toubassi E.*, Endomorphisms of Abelian groups and the theorem of Baer and Kaplansky. J. Algebra, 1976, *43*, № 1, 1—13 (РЖМат, 1977, 8А213)
500. —, —, A result on problem 87 of L. Fuchs. Lect Notes Math., 1977, *616*, 354—367 (РЖМат, 1978, 8А198)
501. *McAsey M. J., Muhly P. S.*, On projective equivalence of invariant subspace lattices. Linear Algebra and Appl., 1982, *43*, 167—175 (РЖМат, 1982, 11А265)
502. *McDonald B. R.*, Endomorphism rings of infinitely generated projective modules. J. Algebra, 1977, *45*, № 1, 69—82 (РЖМат, 1977, 12А281)
503. —, Geometric algebra over local rings. Mongr. and Textb. Pure and Appl. Math., № 36. Marcel Dekker, New York — Basel, 1976, 421 pp. (РЖМат, 1978, 5А408К)
504. —, Automorphisms of $GL_n(R)$. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *246*, 155—171 (РЖМат, 1979, 11А408)
505. —, GL_2 of rings with many units. Commun. Algebra, 1980, *8*, № 9, 869—888 (РЖМат, 1980, 11А205)
506. —, Projectivities over rings with many units. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 2, 195—204 (РЖМат, 1981, 7А382)
507. —, Aut $(GL_2(R))$ for rings. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 2, 205—220 (РЖМат, 1981, 7А383)
508. *Menzel W.*, Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatorgruppe. Teil II. Distributive und 𝔐-Verbände von Untergruppen einer Abelschen Operatorgruppe. Math. Z., 1960, *74*, № 1, 52—65 (РЖМат, 1961, 9А308)
509. —, Ein Kriterium für die Distributivität des Untergruppenverbandes einer Abelschen Operatorgruppe. Math. Z., 1961, *75*, № 3, 271—276 (РЖМат, 1961, 12А341)
510. *Metelli C., Salce L.*, The endomorphism ring of an Abelian torsionfree homogeneous separable group. Arch. Math., 1975, *26*, № 5, 480—485 (РЖМат, 1976, 5А272)
511. *Michel H.*, Nilpotente Endomorphismen von freien abelschen Gruppeen. Publs. math., 1971, *18*, № 1—4, 261—272 (РЖМат, 1973, 6А219)
512. *Miller R. W.*, Endomorphism rings of the finitely generated projective modules. Pacif. J. Math., 1973, *47*, № 1, 199—220 (РЖМат, 1974, 5А287)
513. —, *Turnidge D. R.*, Morita duality for endomorphism rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *31*, № 1, 91—94 (РЖМат, 1972, 10А171)
514. —, —, Factors of cofinitely generated injective modules. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 3, 233—243 (РЖМат, 1977, 1А260)
515. *Mohamed S., Müller B. J.*, Decomposition of dual-continuous modules. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 87—94 (РЖМат, 1979, 9А246)
516. —, *Singh S.*, Generalizations of decomposition theorems known over perfect rings. J. Austral. Math. Soc., 1977, *A24*, № 4, 496—510 (РЖМат, 1978, 12А410)
517. *Monk G. S.*, On the endomorphism ring of an Abelian p-group and of a large subgroup. Pacif. J. Math., 1972, *41*, № 1, 183—193 (РЖМат, 1973, 2А171)
518. —, A characterization of exchange rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *35*, № 2, 349—353 (РЖМат, 1973, 7А247)
519. *Moore J. D., Hewett E. J.*, On fully invariant subgroups of Abelian p-groups. Comment math. Univ. St. Pauli, 1972, *20*, № 2, 97—106 (РЖМат, 1972, 11А121)
520. *Morgado E. R.*, Sobre el grupo de automorfismos de un p-grupo abeliano finito. Cienc. mat., 1981, *2*, № 2, 105—119 (РЖМат, 1982, 5А141)

521. *Motose K.*, Note on the endomorphism ring. J. Fac. Sci. Shushu Univ., 1971, *6*, № 1, 35—36 (РЖМат, 1972, 12A261)
522. *Müller B. J.*, The quotient category of a Morita context. J. Algebra, 1974, *28*, № 3, 389—407 (РЖМат, 1974, 12A238)
523. *Müller W.*, On Artin rings of finite representation type. Lect. Notes Math., 1975, *488*, 236—243 (РЖМат, 1976, 4A237)
524. *Musson I. M.*, Injective modules for group rings of polycyclic groups. I. Quart. J. Math., 1980, *31*, № 124, 429—448 (РЖМат, 1981, 6A243); II. ibid., 1980, *31*, № 124, 449—466 (РЖМат, 1981, 6A244)
525. *Năstăsescu C.*, L'anneau des endomorphismes d'un module de torsion. J. Algebra, 1972, *23*, № 3, 476—481 (РЖМат, 1973, 5A268)
526. —, La structure des modules par rappor à une topologie additive. Tohoku Math. J., 1974, *26*, № 2, 173—201 (РЖМат, 1975, 2A451)
527. *Newman M.*, Integral matrices. New York, Acad. Press, 1972, VII, 224 pp. (РЖМат, 1975, 2A415K)
528. *Nicholson W. K.*, *I*-rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *207*, 361—373 (РЖМат, 1976, 5A249)
529. —, Semiregular modules and rings. Can. J. Math., 1976, *28*, № 5, 1105—1120 (РЖМат, 1977, 5A188)
530. —, Lifting idempotents and exchange rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *229*, 269—278 (РЖМат, 1978, 2A200)
531. —, *Watters J. F.*, Normal radicals and normal classes of rings. J. Algebra, 1979, *59*, № 1, 7—15 (РЖМат, 1980, 2A244)
532. —, —, *Zelmanowitz J. M.*, On extensions of weakly primitive rings. Can. J. Math., 1980, *32*, № 4, 937—944 (РЖМат, 1981, 6A212)
533. *Nicolas A.-M.*, Sur les modules tels que toute suite croissante de sous-modules engendrés par *n* générateurs soit stationaire. J. Algebra, 1979, *60*, № 1, 249—260 (РЖМат, 1980, 5A396)
534. *Niewieczerzal D.*, Some examples of rings with annihilators conditions. Bull. Acad. Pol. sci. Sér. sci. math. astron. et phys., 1978, *26*, № 1, 1—5 (РЖМат, 1978, 11A249)
535. *Nishi M.*, On the ring of endomorphisms of an indecomposable injective module over a Prüfer ring. Hiroshima Math. J., 1972, *2*, № 2, 271—283 (РЖМат, 1974, 1A419)
536. *Niţą C.*, *S*-inele si inele *N*-regulate. Stud. şi cerc. mat., 1972, *24*, № 4, 579—621 (РЖМат, 1973, 2A242)
537. —, Quelques remarques sur l'endomorphismes d'un module, generateur projectif. C. r. Acad. sci., 1976, *282*, № 21, A1219—A1220 (РЖМат, 1977, 2A324)
538. —, Sur l'anneau des endomorphismes d'un module, générateur projectif. J. Algebra, 1977, *49*, № 1, 149—153 (РЖМат, 1978, 8A324)
539. *Northcott D. G.*, A first course of homological algebra. Cambridge Univ. Press, 1973, xi, 206 pp.
540. *Novotný M.*, Zaměnitelnost endomorfismu linéarnich prostoru. Čas. pěstov. mat., 1982, *107*, № 2, 124—138 (РЖМат, 1982, 11A220)
541. *Ohtake K.*, A generalization of Kato's theorem on Morita duality. J. Pure and Appl. Algebra, 1980, *17*, № 3, 323—332 (РЖМат, 1981, 1A269)
542. *O'Meara K. C.*, Right orders in full linear ringe. Bull. Austral. Math. Soc., 1972, *6*, № 3, 468—470 (РЖМат, 1973, 1A239)
543. —, Primeness of right orders in full linear rings. J. Algebra, 1973, *26*, № 2, 172—184 (РЖМат, 1974, 4A218)
544. —, Intrinsic extensions of prime rings. Pacif. J. Math., 1974, *51*, № 1, 257—269 (РЖМат, 1975, 3A334)
545. —, Right orders in full linear rings. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *203*, 299—318 (РЖМат, 1976, 1A298)
546. *O'Meara O. T.*, Lectures on linear groups. Providence (R. I.). Amer. Math. Soc., 1974, VII, 88 pp. (РЖМат, 1977, 9A188K)
547. —, A general isomorphism theory for linear groups. J. Algebra, 1977, *44*, № 1, 93—142 (РЖМат, 1977, 1A255)

548. *Gnodera T.*, Ein Satz über koendlich erzeugte RZ-Moduln. Tohoku Math. J., 1971, *23*, № 4, 691—695 (РЖМат, 1972, 11A203)
549. —, Linearly compact modules and cogenerators. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I, 1972, *22*, № 3—4, 116—125 (РЖМат, 1972, 12A253)
550. —, Koendlich erzeugte Moduln und Kogeneratoren. Hokkaido Math. J., 1973, *2*, № 1, 69—83 (РЖМат, 1973, 12A287)
551. —, Linearly compact modules and cogenerators. II. Hokkaido Math. J., 1973, *2*, № 2, 243—251 (РЖМат, 1974, 3A223)
552. —, On modules which are flat over their endomorphism rings. Hokkaido Math. J., 1978, *7*, № 2, 179—182 (РЖМат, 1979, 5A348)
553. *Orsatti A.*, Anelli di endomorfismi di gruppi abeliani senza torsione. Symp. mat. Ist. naz. alta mat. V. 8. London — New York, 1972, 179—191 (РЖМат, 1972, 10A124)
554. —, Alcuni aspetti della teoria dei gruppi Abeliani. Boll. Unione mat. ital., 1976, *A13*, № 3, 485—533 (РЖМат, 1977, 8A210)
555. *Osofski B. L.*, Weak global dimension of endomorphism rings of free modules. J. Pure and Appl. Algebra, 1982, *24*, № 2, 203—211 (РЖМат, 1983, 2A306)
556. *Oxford E.*, *Walls G.*, Endocyclic groups. Arch. Math., 1979, *32*, № 2, 109—113 (РЖМат, 1980, 1A186)
557. *Pannone M. A.*, Semigruppi di endomorfismi di gruppi abeliani finiti. Rend. Mat., 1972, (1973), *5*, № 4, 785—802 (РЖМат, 1973, 11A150)
558. *Pareigis B.*, Non-additive ring and module theory. III. Morita equivalences. Publ. math., 1978, *25*, № 1—2, 177—186 (РЖМат, 1979, 6A270)
559. *Pascand J.-L.*, Anneaux d'endomorphismes à identités polynomiales. C. r. Acad. sci., 1975, *280*, № 17, A1093 — A1096 (РЖМат, 1975, 10A291)
560. *Peterson R. D.*, One-sided inverses in rings. Can. J. Math., 1975, *27*, № 1, 218—224 (РЖМат, 1975, 9A219)
561. *Petrich M.*, Jacobson-type theorems of lattices. Algebra Univers., 1972, *2*, № 2, 224—233
562. —, Rings and semigroups. Lect Notes Math., 1974, *380*, VIII, 182 pp. (РЖМат, 1975, 2A201)
563. *Pierce St.*, Multiplicative maps of matrix semigroups over Dedekind rings. Arch. Math., 1973, *24*, № 1, 25—29 (РЖМат, 1973, 8A149)
564. *Plaumann P.*, Automorphism groups of locally compact Abelian groups. Lect Notes Math., 1981, *874*, 272—282 (РЖМат, 1982, 3A264)
565. *Pomfret J.*, *McDonald B. R.*, Automorphisms of $GL_n(R)$, R a local ring. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, *173*, 379—388 (РЖМат, 1973, 11A215)
566. *Pondělíček B.*, The chain of right ideals in rings and semigroups. Ann. Univ. sci. Budapest. Sec. Math., 1977, *20*, 21—22 (РЖМат, 1978, 7A323)
567. *Poneleit V.*, Lineare Kompaktheit und die Zerlegung endlich erzeugter Moduln bei einreihigen Duoringen. Mitt. Math. Sem. Giessen, 1976, № 121, 85—92 (РЖМат, 1977, 5A208)
568. *Ponizovskii I. S.*, On irreducible matrix semigroups. Semigroup Forum, 1982, *24*, № 2—3, 117—148 (РЖМат, 1982, 10A122)
569. *Poole G. D.*, *Reid J. D.*, Abelian groups quasi-injective over their endomorphism rings. Can. J. Math., 1972, *24*, № 4, 617—621 (РЖМат, 1973, 3A284)
570. *Quebbemann H.-G.* Schiefkörper als Endomorphismenringe einfacher Moduln über einer Weil-algebra. J. Algebra, 1979, *59*, № 2, 311—312 (РЖМат, 1980, 1A318)
571. *Rangaswamy K. M.*, Regular and Baer rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, *42*, № 2, 354—358 (РЖМат, 1975, 4A283)
572. —, Abelian groups with self-injective endomorphism rings. Lect. Notes Math., 1974, *372*, 595—604 (РЖМат, 1975, 7A352)
573. —, Endomorphism representations of Zorn rings and subclasses of rings with enough idempotents. J. reine und angew. Math., 1975, *276*, 44—55 (РЖМат, 1976, 2A294)

574. —, Some remarks on the endomorphism rings of quasi projective modules. Publ. Math., 1979, *26*, № 1—2, 71—73 (РЖМат, 1980, 1A307)
575. *Reid J.*, Abelian groups finitely generated over their endomorphism rings. Lect. Notes. Math., 1981, *874*, 41—52 (РЖМат, 1982, 3A266)
576. *Ren H., Wan Z.*, Automorphisms of $PGL_2(K)$ over any skew field K. Шусюэ сюэбао, Acta math. sin., 1982, *25*, № 2, 208—218 (РЖМат, 1982, 9A165)
577. *Renault G.*, Algèbre non commutative. Paris, Gauthier—Villars, 1975. ix, 181 pp. (РЖМат, 1976, 2A202 K)
578. *Resco R.*, A reduction theorem for the primitivity of tensor products. Math. Z., 1980, *170*, № 1, 65—76 (РЖМат, 1980, 7A210)
579. *Rhodes C.*, Sur des chaînes d'idéaux principaux dans un anneau commutatif Noetherien. C. r. Acad. sci., 1975, *281*, № 13, A495—A497 (РЖМат, 1976, 5A418)
580. *Richman F., Walker E. A.* Modules over PIDs that are injective over their endomrophism rings. Ring theory (Proc. Conf., Park City, Utah 1971). Academic Press, New York, 1972, 363—372
581. —, —, Homological dimension of Abelian groups over their endomorphism rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *54*, 65—68 (РЖМат, 1977, 1A357)
582. —, —, Cyclic Ext. Rocky Mount. J. Math., 1981, *11*, № 4, 611—615 (РЖМат, 1982, 8A152)
583. Ringe, Moduln und Homologishe Methoden. Tagungsber. Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1977, № 20, 1—15 (РЖМат, 1979, 3A237)
584. *Robert E.*, Sur quelques propriétés du foncteur Hom. Thèse doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Paul Sabatier, 1970, 80 p. (РЖМат, 1973, 11A367D)
585. —, Une propriété d'exatitude du foncteur hom et quelques caratérisations de modules projectifs. J. Algebra, 1974, *28*, № 2, 253—282 (РЖМат, 1974, 11A327)
586. *Roggenkamp K. W.*, Bass algebras. J. Pure and Appl. Algebra, 1977, *9*, № 2, 169—179 (РЖМат, 1978, 2A391)
587. *Rosenstein J. G.*, On $GL_2(R)$ where R is a Boolean ring. Can. Math., Bull., 1972, *15*, № 2, 263—275 (РЖМат, 1973, 2A227)
588. *Roux B.*, Sur la dualité de Morita. Tohoku Math. J., 1971, *23*, № 3, 457—472 (РЖМат, 1972, 6A277)
589. —, Modules sur les anneaux artiniens. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 3, A171—A174 (РЖМат, 1973, 9A277)
590. —, Modules injectifs indécomposables sur les anneaux artiniens et dualité de Morita. Semin. P. Dubreil. Algèbre. Univ. Paris, 1972—1973, *26*, 10/1—10/19 (РЖМат, 1976, 7A320)
591. —, Sur les anneaux de Köthe. An. Acad. brasil. ciénc., 1976, *48*, № 1, 13—28 (РЖМат, 1978, 1A222)
592. *Rowen L. H.*, Monomial conditions on prime rings. Isr. J. Math., 1977, *27*, № 2, 131—149 (РЖМат, 1978, 2A212)
593. *Sabbagh G.*, Endomorphisms of finitely presented modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, *30*, № 1, 75—78 (РЖМат, 1973, 9A273)
594. *Salce L., Menegazzo F.*, Abelian groups whose endomorphism ring is linearly compact. Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1975, *53*, 315—325 (РЖМат, 1977, 1A176)
595. *Sally J. D., Vasconcelos W.*, Stable rings and a problem of Bass. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, *79*, № 3, 574—576 (РЖМат, 1973, 12A387)
596. —, —, Stable rings. J. Pure and Appl. Algebra, 1974, *4*, № 3, 319—336 (РЖМат, 1975, 5A410)
597. *Sanchez Pedro Pablo*, On automorphism groups of finite dimensional modules. Compos. math., 1974, *28*, № 1, 21—31 (РЖМат, 1975, 3A341)
598. *Sandomierski F. L.*, Modules over the endomorphism ring of a finitely generated projective module. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *31*, № 1, 27—31 (РЖМат, 1972, 11A201)
599. *Sands A. D.*, Radicals and Morita contexts. J. Algebra, 1973, *24*, № 2, 335—345 (РЖМат, 1973, 7A250)

600. *Sarath B.*, Structure of some Noetherian injective modules. Can. J. Math., 1980, *32*, № 6, 1277—1287 (РЖМат, 1981, 11A275)
601. *Sato H.*, Duality of torsion modules over a *QF*-3 one-dimensional Gorenstein ring. Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1975, *A13*, № 347—365, 28—36 (РЖМат, 1976, 8A548)
602. *Sato Masahisa*, On equivalences between module categories. Proc. 10-th Symp. Ring Theory, Matsumoto, 1977. Okayama, 1978, 83—94 (РЖМат, 1978, 11A307)
603. —, Fuller's theorem on equivalences. J. Algebra, 1978, *52*, № 1, 274—284 (РЖМат, 1978, 12A447)
604. —, On equivalences between module subcategories. J. Algebra, 1979, *59*, № 2, 412—420 (РЖМат, 1980, 2A257)
605. *Schaeffer H.*, Das von Staudtsche Theorem in der Geometrie der Algebren. J. reine und angew. math., 1974, *267*, 133—142 (РЖМат, 1974, 12A232)
606. *Schultz Ph.*, On a paper of Szele and Szendrei on groups with commutative endomorphism rings. Acta math. Acad. sci. hung., 1973, *24*, № 1—2, (РЖМат, 1973, 12A191)
607. —, The endomorphism ring of the additive group of a ring. J. Austral. Math. Soc., 1973, *15*, № 1, 60—69 (РЖМат, 1974, 1A250)
608. *Sharp R. Y.*, Secondary representations for injective modules over commutative Noetherian rings. Proc. Edinburgh. Math. Soc., 1976, *20*, № 2, 143—151 (РЖМат, 1977, 6A210)
609. *Sharpe D. W., Vámos P.*, Injective modules. Cambridge Univ. Press, 1972, IX, 190 pp. (РЖМат, 1973, 9A275)
610. *Shelah S.*, On endo-rigid, strongly $\aleph_1$-free Abelian groups in $\aleph_1$. Isr. J. Math., 1981, *40*, № 3—4, 291—295 (РЖМат, 1982, 11A105)
611. *Shock R. C.*, The ring of endomorphisms of a finite dimensional module. Isr. J. Math., 1972, *11*, № 3, 309—314 (РЖМат, 1972, 12A256)
612. *Shores T., Lewis W. J.*, Serial modules and endomorphism rings. Duke Math. J., 1974, *41*, № 4, 889—909 (РЖМат, 1975, 8A419)
613. *Singh S., Beg A.*, Restricted balanced rings. Arch. Math., 1979, *33*, № 2, 127—130 (РЖМат, 1980, 8A209)
614. *Sizen W. S.*, Triangularizing semigroups of matrices over a skew field. Linear Algebra and Appl., 1977, *16*, № 2, 177—187 (РЖМат, 1977, 12A376)
615. *Smalø S. O.*, Global dimension of special endomorphism rings over Artin algebras. Ill. J. Math., 1978, *22*, № 3, 414—427 (РЖМат, 1979, 7A423)
616. —, A limit on the Lowy length of the endomorphism ring of a module of finite length. Proc. Amer. Math. Soc., 1981, *81*, № 2, 164—166 (РЖМат, 1981, 11A272)
617. *Smith M.*, Finitely generated algebras over a field. Lect. Notes Math., 1979, *700*, 299 (РЖМат, 1979, 8A209)
618. *Snider R. L.*, Group algebras whose simple modules are finite dimensional over their commuting rings. Commun. Algebra, 1974, *2*, № 1, 15—25 (РЖМат, 1975, 5A273)
619. —, Rings whose modules are projective over endomorphism rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, *46*, № 2, 164—168 (РЖМат, 1975, 10A304)
620. *Stafford J. T.*, A simple Noetherian rings not Morita equivalent to a domain. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *68*, № 2, 159—160 (РЖМат, 1978, 11A272)
621. —, Morita equivalence of simple Noetherian rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *74*, № 2, 212—214 (РЖМат, 1980, 1A274)
622. *Stenström B.*, The maximal ring of quotients of a triangular matrix ring. Math. scand., 1974, *34*, № 2, 162—166 (РЖМат, 1975, 11A367)
623. —, Rings of quotients. An introduction to methods of ring theory. Berlin e. a., Springer, 1975, VIII, 309 pp. (РЖМат, 1976, 1A299)
624. *Stephenson W.*, Modules whose lattice of submodules is distributive. Proc. London Math. Soc., 1974, *28*, № 2, 291—310 (РЖМат, 1974, 9A309)

625. *Stewart I.*, The Lie algebra of endomorphisms of an endomorphisms of an infinite-dimensional vector space. Compos. math., 1972, *25*, № 1, 79—86 (РЖМат, 1973, 3A290)
626. *Stölting R.*, Ebene metrische Geometrien über projektiven Moduln. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg., 1980, *50*, 166—177 (РЖМат, 1981, 4A262)
627. *Stone D. R.*, Maximal left ideals and idealizers in matrix rings. Can. J. Math., 1980, *32*, № 6, 1397—1410 (РЖМат, 1981, 10A267)
628. *Stringall R. W.*, Primary modules determined by indecompossable idempotent endomorphisms. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *31*, № 1, 54—56 (РЖМат, 1972, 11A200)
629. *Suzuki Y.*, Double centralizers of torsionless modules. Proc. Jap. Acad., 1974, *50*, № 8, 612—615 (РЖМат, 1975, 11A376)
630. *Sweedler M.*, The predual theorem to the Jacobson-Bourbaki theorem. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *213*, 391—406 (РЖМат, 1976, 9A273)
631. *Tachikawa Hiroyki, Iwanaga Yasuo*, Morita's E_h-condition and double centralizers. I. J. Algebra, 1973, *26*, № 2, 167—171 (РЖМат, 1974, 3A212); II. ibid., 1974, *31*, № 1, 73—90 (РЖМат, 1975, 3A340)
632. *Takeuchi Mitsuhiro*, Morita theorems for categories of comodules. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1977, Sec. 1A, *24*, № 3, 629—644 (РЖМат, 1978, 10A224)
633. —, On direct modules. Hokkaido Math. J., 1972, *1*, № 2, 168—177 (РЖМат, 1973, 8A246)
634. —, The endomorphism ring of a indecomposable module with an Artinian projective cover. Hokkaido Math. J., 1975, *4*, № 2, 265—267 (РЖМат, 1976, 2A312)
635. *Thoma K.*, Die Untermoduln von $M(n, K)$. Arch. Math., 1979, *33*, № 4, 326—333 (РЖМат, 1980, 8A365)
636. *Tiwary A. K., Kumar A.*, On endomorphism ring of a pseudoprojective module. Ann. Fac. Sci. Univ. Nat. Zaire (Kinshasa). Sect. math., phys. 1978, *4*, № 1, 67—73
637. *Törner G.*, Some remarks on the structure of indecomposable injective modules over valuation rings. Commun. Algebra, 1976, *4*, № 5, 467—482 (РЖМат, 1977. 1A259)
638. —, Unzerlegbare injektive Moduln über Kettenringen. J. reine und angew. Math., 1976, *285*, 172—180 (РЖМат, 1977, 3A238)
639. *Treger R.*, Reflexive modules. J. Algebra, 1978, *54*, № 2, 444—466 (РЖМат, 1979, 7A453)
640. *Ulmer F.*, Localizations of endomorphism rings and fixpoints. J. Algebra, 1976, *43*, № 2, 529—551 (РЖМат, 1977, 9A325)
641. *Upham M. H.*, Localization and completion of *FBN* hereditary rings. Commun Algebra, 1979, *7*, № 12, 1269—1307 (РЖМат, 1980, 3A188)
642. *Vámos P.*, Test modules and cogenerators. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *56*, № 1, 8—10 (РЖМат, 1977, 2A327)
643. —, Rings with duality. Proc. London Math. Soc., 1977, *35*, № 2, 275—289 (РЖМат, 1978, 4A329)
644. —, Semi-local Noetherian *PI*-rings. Bull. London Math. Soc., 1977, *9*, № 3, 251—256 (РЖМат, 1978, 10A177)
645. —, Finitely generated Artinian and distributive modules are cyclic. Bull. London Math. Soc., 1978, *10*, № 3, 287—288 (РЖМат, 1979, 8A275)
646. *Vinsonhaler C.*, Torsion free Abelian groups quasi-projective over their endomorphism rings. II. Pacif. J. Math., 1978, *74*, № 1, 261—265 (РЖМат, 1978, 11A302); Поправка: Pacif. J. Math., 1978, *79*, № 2, 564—565
647. —, *Wickless W. J.*, Torsion free Abelian groups quasi-projective over their endomorphism rings. Pacif. J. Math., 1977, *68*, № 2, 527—535 (РЖМат, 1978, 5A260)
648. —, —, Injective hulls of torsion-free Abelian groups as modules over their endomorphism rings. J. Algebra, 1979, *58*, № 1, 64—69 (РЖМат, 1980, 1A191)

649. —, —, The injective hull of a separable *p*-group as an *E*-module. J. Algebra, 1981, *71*, № 1, 32—40 (РЖМат, 1982, 1A192)
650. *Vogel A.*, Spectrum of a locally cyclic modules over a commutative von Neumann regular ring. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 16, 1617—1637 (РЖМат, 1982, 3A482)
651. *Vorst T.*, The general linear group of polynomial rings over regular rings. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 5, 499—509 (РЖМат, 1981, 8A404)
652. *Vovsi S. M.*, Lattices of invariant subspaces of group representations. Algebra univers., 1981, *12*, № 2, 221—223 (РЖМат, 1982, 1A258)
653. *Wagoner R. L.*, Cogenerator endomorphism rings. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, *28*, № 2, 347—351 (РЖМат, 1972, 5A261)
654. *Walker C. L., Warfield R. B., Jr.*, Unique decomposition and isomorphic refinement theorems in additive categories. J. Pure and Appl. Algebra, 1976, *7*, № 3, 347—359 (РЖМат, 1976, 10A210)
655. *Warfield R. B.*, Decomposability of finitely presented modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, *25*, № 1, 167—172 (РЖМат, 1971, 10A222)
656. —, Exchange rings and decompositions of modules. Math. Ann., 1972, *199*, № 1, 31—36 (РЖМат, 1973, 5A233)
657. —, Cancellation of modules and groups and stable range of endomorphism rings. Pacif. J. Math., 1980, *91*, № 2, 457—485 (РЖМат, 1981 11A408)
658. *Waterhouse W. C.*, Automorphisms of $GL_n(R)$. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *79*, № 3, 347—351 (РЖМат, 1981, 2A359)
659. *Webb M. C.*, The endomorphism ring of homogeneously decomposable separable groups. Arch. Math., 1978, *31*, № 3, 235—243 (РЖМат, 1979, 9A146)
660. —, The endomorphism ring of pointed separable torsion-free Abelian groups. J. Algebra, 1978, *55*, № 2, 446—454 (РЖМат, 1979, 9A147)
661. *Wehrfritz B. A. F.*, Infinite linear groups. An account of the group-theoretic properties of infinite groups of matrices. Springer, Berlin e. a., 1973, XIV, 229 pp. (РЖМат, 1973, 12A247K)
662. —, Finitely generated groups of module automorphisms and finitely generated metabelian groups. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 17. London—New York, 1975, 261—275 (РЖМат, 1977, 2A263)
663. —, Automorphism groups of Noetherian modules over commutative rings. Arch. Math., 1976, *27*, № 3, 276—281 (РЖМат, 1977, 2A469)
664. —, Finite central height in linear groups. Linear Algebra and Appl., 1977, *17*, № 1, 59—64 (РЖМат, 1977, 12A223)
665. —, Nilpotence in groups of semi-linear maps. Proc. London Math. Soc., 1978, *36*, № 3, 448—479 (РЖМат, 1978, 11A218)
666. —, Lectures around complete local rings. Queen Mary College Mathematics Notes, London, 1979
667. *Weller H.*, Zusammenhang zwischen verbandstheoretischen Eigenschaften des Verbandes $Z(R^3)$ und arithmetischen Eigenschaften des zugehörigen Rings. Mitt. Math. Sem. Giessen, 1975, № 118, 59 S. (РЖМат, 1976, 4A291)
668. *Wickless W. J.*, *T* as an *E*-submodule of *G*. Pacif. J. Math., 1979, *83*, № 2, 555—564 (РЖМат, 1980, 8A159)
669. *Wiedemann A.*, Orders with loops in their Auslender-Reiten graph. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 6, 641—656 (РЖМат, 1981, 11A387)
670. *Wisbauer R.*, σ-semiperfecte und σ-perfekte moduln. Math. Z., 1978, *162*, № 2, 131—138 (РЖМат, 1979, 4A319)
671. —, Localization of modules and the central closure of rings. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 14, 1455—1493 (РЖМат, 1982, 2A261)
672. *Xu Y. H.*, A theory of rings that are isomorphic to complete rings of linear transformations. I. Acta Math. Sinica, 1979, *22*, № 2, 204—218. II ibid., 1979, *22*, № 3, 303—315. III ibid., 1979, *22*, № 4, 389—403. IV. ibid., 1979, *22*, № 5, 556—568
673. *Yamagata Kunio*, On projective modules with the exchange property. Sci.

Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1974, *12*, № 329—346, 149—158 (РЖМат, 1975, 8А330)
674. —, The exchange property and direct sums of indecomposable injective modules. Pacif. J. Math., 1974, *55*, № 1, 301—317 (РЖМат, 1975, 9А228)
675. —, On Morita duality for additive group valued functors. Commun. Algebra, 1979, *7*, № 4, 367—392 (РЖМат, 1979, 12А347)
676. —, On extensions over artinian rings with self-dualities. Tsukuba J. Math., 1980, *4*, № 1, 67—75 (РЖМат, 1981, 2А252)
677. *Yokoyama Yuichi*, A note on automorphisms of matrix algebras. TRU Math., 1981, *17*, № 1, 103—111 (РЖМат, 1982, 2А246)
678. *Zelmanowitz J.*, Semiprime modules with maximum conditions. J. Algebra, 1973, *25*, № 3, 554—574 (РЖМат, 1974, 1А269)
679. —, Orders in simple Artinian rings are strongly equivalent to matrix rings. Pacif. J. Math., 1973, *48*, № 2, 621—627 (РЖМат, 1974, 9А290)
680. —, An extension of the Jacobson density theorem. Bull. Amer. Math. Soc., 1976, *82*, № 4, 551—553 (РЖМат, 1977, 2А295)
681. —, Dense rings of linear transformations. Ring theory II, Proc. 2-nd Ohla Conf., 1975. New York—Basel, 1977 (РЖМат, 1978, 6А274)
682. —, Weakly primitive rings. Commun. Algebra, 1981, *9*, № 1, 23—45 (РЖМат, 1981, 9А188)
683. *Zimmermann W.*, Über die aufsteigende Kettenbedingung für Annulatoren. Arch. Math., 1976, *27*, № 3, 261—266 (РЖМат, 1976, 12А360)
684. *Zimmermann-Huisgen B.*, Endomorphism rings of self-generators. Pacif. J. Math., 1975, *61*, № 2, 587—602 (РЖМат, 1976, 12А340)
685. —, *Zimmermann W.*, Algebraically compact rings and modules. Math. Z., 1978, *161*, № 1, 81—93 (РЖМат, 1978, 12А468)

ВЫПУСКИ И ТОМА СЕРИИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ:

Алгебра. Топология. 1962, М., 1964
Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962. М., 1964
Геометрия. 1963, М., 1965
Математический анализ. 1963, М., 1965
Теория вероятностей. 1963, М., 1965
Алгебра. 1964, М., 1966
Математический анализ. 1964, М., 1966
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1964, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967
Математический анализ, 1965, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968
Математический анализ, 1966, М., 1967
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1966, М., 1967
Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969
Математический анализ. 1967, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1967, М., 1969
Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970
Математический анализ. 1968, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1968, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1970
Математический анализ. 1969, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1969, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971
Математический анализ. 1970, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970, М., 1971
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 10. М., 1972: Том 11, 1974; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1977; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1981; Том 19, 1982; Том 20, 1982; Том 21, 1983
Математический анализ. Том 10, 1973; Том 11, 1973; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1977; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1980; Том 19, 1982; Том 20, 1982
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 10, 1972; Том 11; 1974; Том 12, 1975; Том 13, 1976; Том 14, 1977; Том 15, 1978; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1981; Том 19, 1982; Том 20, 1983; Том 21, 1983
Современные проблемы математики. Том 1, 1973; Том 2, 1973; Том 3, 1974; Том 4, 1975; Том 5, 1975; Том 6, 1976; Том 7, 1976; Том 8, 1977; Том 9, 1977; Том 10, 1978; Том 11, 1978; Том 12, 1979; Том 13, 1979; Том 14, 1979; Том 15, 1980; Том 16, 1980; Том 17, 1981; Том 18, 1981; Том 19, 1982; Том 20, 1982; Том 21, 1982; Том 22, 1983
Проблемы геометрии. Том 7, 1975; Том 8, 1977; Том 9, 1979; Том 10, 1978, Том 11, 1981; Том 12, 1981; Том 13, 1982, Том 14, 1983

СОДЕРЖАНИЕ

(соответствует рубрике 27.01. — 27.21 Рубрикатора ГАСНТИ)

Технический редактор *А. М. Мартынова*

Сдано в набор 21.04.83 Подписано в печать 05.09.83
Формат бумаги 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 1 Литературная гарнитура.
Высокая печать. Усл. печ. л. 16,0 Уч.-изд. л. 19,52 Тираж 750
Заказ 3403 Цена 2 р. 80 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-42-42

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

ИНТ. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 21, 1983, 1—256

Индекс 56720

УДК 510
512.54.0

В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков, Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 21 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1983, 3—79, библ. 575

Дается обзор результатов алгоритмического характера. Представляются теоретико-модельные методы и результаты в теории групп.

УДК 512.74

В. П. Платонов, А. С. Рапинчук, Алгебраические группы. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 21 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1983, 80—134, библ. 389

Работа является продолжением обзора В. П. Платонова, опубликованного в серии «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 12» (ИНТ, 1974 г.). Состоит из двух частей, первая из которых посвящена структурным проблемам и вопросам рациональности для алгебраических групп, вторая — арифметической теории алгебраических групп. Особое внимание уделяется свойствам полупростых групп и групп их рациональных точек.

УДК 512.544.6

А. Е. Залесский, Линейные группы. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 21 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1983, 135—182, библ. 449

Настоящая обзорная статья составлена по работам, прореферированным в Реферативном журнале «Математика» в 1978—1982 гг.; и является продолжением обзоров «Линейные группы», опубликованных в 1967, 1971, 1977 годах в серии «Алгебра. Топология. Геометрия» (ИНТ). Основное внимание уделено линейным группам над кольцами и строению бесконечных линейных

ОПЕЧАТКИ

Итоги науки и техн. «Алгебра. Топ. Геом.» № 21, 1983 г.

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
17	21 снизу	$G^{\mathfrak{D}}$	$G^{\mathfrak{G}}$
18	10 снизу	$N\triangle F$	$N\lhd F$
64	28 сверху	$\mathfrak{N}^5$	$\mathfrak{A}^5$