# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

ВИНИТИ

Алгебра
Топология
Геометрия

том 27

РГАСНТИ 27.17.19; 27.17.23; 27.19.17 ISSN 0202—7445

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

# АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ

Том 27

Научный редактор
член-корр. АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1964 г.

МОСКВА 1989

1—7527

УДК 512.552.7+512.57+515.142.21

УДК 512.48

# ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА: ГРУППЫ ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И КЛАССИЧЕСКАЯ $K$-ТЕОРИЯ

*В. А. Артамонов, А. А. Бовди*

Понятие группового кольца впервые использовали Фробениус и Шур в начале столетия как полезное вспомогательное средство при изучении представлений конечных групп. На протяжении нескольких десятилетий групповые кольца рассматривались главным образом с точки зрения приложений в теории групп, представлений групп, а также в алгебраической топологии. В начале 50-х годов появился интерес к групповым кольцам бесконечных групп, чему в значительной степени способствовали проблемы, поставленные И. Капланским. За сравнительно короткое время в данной области получено очень много глубоких результатов, возник целый ряд трудно решаемых проблем, существенно расширилась тематика исследований, возросла их интенсивность, опубликован ряд монографий и обзорных статей. Все это позволяет говорить сегодня о возникновении на стыке теории групп и теории колец нового раздела алгебры — теории групповых колец.

В этой теории в настоящее время можно выделить следующие основные направления:

1. Кольцевые свойства группового кольца;
2. Проблема изоморфизма групповых колец;
3. Строение мультипликативной группы группового кольца;
4. K-теория групповых колец.

Наиболее продвинутым является первое направление, которому посвящено большинство публикаций. Систематическое и обстоятельное изложение кольцевых свойств группового кольца дано в книге Пассмана [130]. Основы этой теории изложены в учебном пособии А. А. Бовди [22]. Среди обзорных статей о кольцевых свойствах группового кольца выделим работу А. Е. Залесского и А. В. Михалева [26], содержащую наряду с подробным обзором до 1973 года доказательство многих результатов. Подробный обзор результатов об изоморфизме групповых колец дается в работе Сэндлинга [159].

В настоящем обзоре отражены работы, относящиеся к последним двум из отмеченных выше направлений в теории групповых колец. Он непосредственно примыкает к работе А. Е. Залесского и А. В. Михалева [26] и охватывает период, начиная с 1973 года. Обзор составлен по материалам РЖ «Математика», опубликованным в разделах «Теория групп», «Кольца и модули», «Гомологическая алгебра».

Исследование строения мультипликативной группы $U(KG)$ группового кольца $KG$ группы $G$ над коммутативным кольцом $K$ с единицей было начато в работе Сэндлинга и Хигмэна [158] в 40-е годы. Проблематика строения мультипликативной группы $U(\mathbf{Z}G)$ целочисленного группового кольца $\mathbf{Z}G$ выросла в основном из работ Хигмэна. Важную роль в изучении мультипликативной группы группового кольца сыграли работы С. Д. Бермана, Роггенкампа, Сегала, Цассенхауза и др. В последние годы интерес к этой теме стимулируется также связями с алгебраической K-теорией и алгебраической топологией. Обзоры результатов по группам обратимых элементов групповых колец изложены в [72], [77], [140], а также в монографиях [20], [100], [163]. В настоящем обзоре указаны основные направления исследований в теории мультипликативных групп целочисленных групповых колец. Доказательство многих результатов, приведенных в этой статье, изложено в [20].

В остальной части обзора затрагиваются результаты, описывающие строение конечно порожденных проективных модулей над целочисленными групповыми кольцами. Для понимания этих результатов приведены основные понятия классической $K$-теории. Наиболее продвинутой является теория проективных модулей над целочисленными групповыми кольцами конечных групп. Этой теме посвящена [181]. При рассмотрении бесконечных групп наибольшее внимание уделяется почти полициклическим группам. В последние годы интерес к строению групповых колец этих групп значительно возрос, здесь проделана большая подготовительная работа, и можно ожидать в ближайшее время в этой области существенного прогресса.

Отметим, что изучение группы обратимых элементов группового кольца $\mathbf{Z}G$ тесно связано с вычислением группы $K_1(\mathbf{Z}G)$.

## § 1. Элементы конечного порядка группы $V(\mathbf{Z}G)$

Подгруппа

$$V(KG)=\left\{\sum_{g\in G}\alpha_g g\in U(KG),\ (\alpha_g\in K)\,\middle|\,\sum_{g\in G}\alpha_g=1\right\}$$

мультипликативной группы $U(KG)$ группового кольца $KG$ называется нормированной мультипликативной группой.

Легко видеть, что если $U(K)$ — мультипликативная группа кольца $K$, то $U(KG)=V(KG)\times U(K)$ и $G$ является подгруппой группы $V(KG)$. Элементы группы $V(KG)$, не принадлежащие подгруппе $G$, называются нетривиальными элементами группы $V(KG)$.

В начале 40-х годов под влиянием задач алгебраической топологии Хигмэн начал исследовать строение элементов группы $V(\mathbf{Z}G)$. Он, а также, независимо от него, С. Д. Берман [5] доказали равенство нулю следа нееденичного элемента конечного порядка группы $V(\mathbf{Z}G)$ для конечной группы $G$ (т. е. коэффициента при единичном элементе в записи элемента через групповой базис $G$). Этот факт обобщался разными авторами, и он справедлив для группового кольца конечной группы над некоторыми коммутативными кольцами [39], [188]. Поэтому возникла следующая гипотеза:

**1.1.** Если порядки элементов группы $G$ необратимы в коммутативном кольце $K$ без делителей нуля характеристики 0, то след нееденичного элемента конечного порядка группы $V(KG)$ равен нулю.

В [13] и [55] независимо получен следующий результат:

**1.2.** Если $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 0 и ни одно из простых чисел из $\mathbf{Z}$ необратимо в $K$, то след нееденичного элемента конечного порядка группы $V(KG)$ равен нулю.

Отметим, что в силу теоремы Клиффа и Сегала [65] и Стройновского [175] о следе идемпотентного элемента групповой алгебры гипотеза 1.1 верна для группового кольца почти-полициклической группы и матричной группы над полем характеристики 0.

Вероятно, справедливо более общее предположение:

**1.3.** Пусть $G$ — нильпотентная группа и $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 0. Если порядок ни одного элемента группы $G$ необратим в $K$, то в носителе $\operatorname{Supp} x$ нетривиального элемента $x$ конечного порядка группы $V(KG)$ нет элементов из централизатора множества $\operatorname{Supp} x$.

Приведенное утверждение 1.3 верно и для группы $V(\mathbf{Z}G)$, когда $G$ почти полициклическая группа.

Обобщим понятие следа элемента группового кольца.

Зафиксируем простое число $p$ и обозначим через $G(n)$ совокупность всех элементов порядка $p^n$ группы $G$, полагая при этом, что $G(0)=\{1\}$. Если $x=\sum\limits_{g\in G}\alpha_g g$ — элемент кольца $KG$, то элемент $T^{(n)}(x)=\sum\limits_{g\in G(n)}\alpha_g$ называется $n$-ым обобщенным следом элемента $x$. Очевидно, что $T^{(0)}(x)$ совпадает со следом $\operatorname{tr} x$ элемента $x$.

**1.4.** Если групповое кольцо удовлетворяет предположению 1.1 и $x$ — элемент порядка $p^n$ группы $V(KG)$, то простое число

$p$ необратимо в $K$ и $\mathrm{Supp}\, x \cap G(n)$ непустое множество. Если кольцо $K/pK$ без нильпотентных элементов, то $T^{(i)}(x) = 0 (\mathrm{mod}\, pK)$ для всех $i < n$ и $T^{(n)}(x) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, pK)$.

В связи с этим утверждением возникает гипотеза:

**1.5.** Если $x$ — элемент порядка $p^n$ группы $V(\mathbf{Z}G)$, то $T^{(i)}(x) = 0$ для всех $i < n$ и $T^{(n)}(x) = 1$.

Гипотеза доказана только в частном случае.

**1.6.** [28]. Если $G$ — нильпотентная группа с абелевым коммутантом, то гипотеза 1.5 верна.

Из утверждения 1.4 следует, что порядок $p$-элемента группы $V(\mathbf{Z}G)$ делит порядок некоторого $p$-элемента группы $G$.

**1.7.** [29]. Если $G$ — конечная группа и $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 0, в котором простые делители порядка группы $G$ необратимы, то порядок конечной подгруппы группы $V(KG)$ делит порядок группы $G$.

Отсюда вытекает, что если $P$ — силовская $p$-подгруппа конечной группы $G$, то $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $V(\mathbf{Z}G)$. Это подтверждает следующее предположение:

**1.8.** Силовская $p$-подгруппа группы $G$ является силовской $p$-подгруппой группы $V(\mathbf{Z}G)$.

**1.9.** Гипотеза. Пусть показатель $n$ факторгруппы группы $G$ по ее центру конечен. Если $x$ — элемент конечного порядка группы $V(\mathbf{Z}G)$ и $m$ — наименьшее такое число, что $x^m \in G$, то $m$ делит $n$.

## § 2. Мультипликативная группа коммутативного целочисленного группового кольца

Пусть $LG$ — групповая алгебра конечной абелевой группы $G$ над полем алгебраических чисел $L$. Элемент $c$ называется целым алгебраическим элементом алгебры $LG$, если подкольцо, порожденное элементом $c$ и кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$, является конечно порожденным $\mathbf{Z}$-модулем.

Легко видеть, что множество всех целых алгебраических элементов алгебры $LG$ образует подкольцо $C$, которое называется кольцом целых величин алгебры $LG$. Пусть

$$LG = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_s —$$

разложение алгебры $LG$ в прямую сумму полей. Если $\overline{L}_i$ — кольцо целых алгебраических чисел поля $L_i$, то кольцо целых величин $C$ алгебры $LG$ допускает следующее разложение в прямую сумму

$$C = \overline{L}_1 \oplus \overline{L}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{L}_s.$$

Пусть $K$ — кольцо целых алгебраических чисел поля $L$ и $U(C)$ — мультипликативная группа кольца $C$. Очевидно, что $U(KG)$ подгруппа группы $U(C)$.

**2.1.** (Сэндлинг и Хигман [158]). Группа $U(KG)$ конечно порождена и является подгруппой конечного индекса группы $U(C)$.

Этот результат часто применяется для построения обратимых элементов кольца $ZG$.

**2.2.** [53], [158]. Пусть $G$ — конечная абелева группа порядка $n$. Если $m$ — число циклических подгрупп, а $t$ — число элементов порядка 2 группы $G$, то группа $V(ZG)$ представима в виде прямого произведения группы $G$ и свободной абелевой группы ранга $\frac{1}{2}(n+1+t-2m)$.

Басс [54] построил свободную абелеву подгруппу конечного индекса и ее свободные образующие в группе $V(ZG)$ для циклической группы $G$ порядка $m \geqslant 5$ и $m \neq 6$. Эти образующие часто используются при изучении строения мультипликативной группы целочисленного группового кольца. Изложим эту теорию.

Пусть $m$ — порядок и $E_d$ — множество всех элементов порядка $d$ циклической группы $G$, причем $m \geqslant 5$ и $m \neq 6$. Зафиксируем целое число $n$, кратное $m$ и значение функции Эйлера $\varphi(m)$. Если $b$, $c \in E_d$, и $b = c^r$, то введем следующий символ для обозначения элемента

$$[e(b)/e(c), n] = (1 + c + c^2 + \ldots + c^{r-1})^n + \frac{1-r^n}{d} \sum_{i=0}^{d-1} c^i.$$

Легко видеть, что этот элемент принадлежит кольцу $ZG$ и является обратимым элементом бесконечного порядка, так как выполняются следующие соотношения:

1. $[e(b)/e(c),\ n] = [e(b^{-1})/e(c),\ n] = [e(b^{-1})/e(c^{-1}),\ n]$,
2. $[e(b)/e(a),\ n] = [e(b)/e(c),\ n][e(c)/e(a),\ n]$

для всех $a, b, c \in E_d$.

Басс доказал следующую важную теорему:

**2.3.** Зафиксируем для каждого $d \mid m$ элемент $a_d \in E_d$ и обозначим через $S_d$ подмножество из $E_d$, имеющее единственного представителя в каждом подмножестве вида $\{b, b^{-1}\} \neq \{a_d, a_d^{-1}\}$, где $b \in E_d$. Элементы множества $\{[e(b)/e(a_d),\ n] \mid b \in S_d\}$ являются свободными образующими, и они порождают свободную подгруппу $B_d$ ранга $\frac{\varphi(d)}{2} - 1$. Прямое произведение групп $B_d$ ($d > 2$, $d/m$) есть подгруппа конечного индекса группы $V(ZG)$.

Обозначим через $W(G)$ подгруппу группы $V(ZG)$, порожденную мультипликативными группами $V(ZC)$ групповых колец всевозможных циклических подгрупп $C$ группы $G$.

**2.4.** (Милнор). Если $G$ — конечная абелева группа, то подгруппа $W(G)$ имеет конечный индекс в $V(ZG)$.

Из утверждений 2.3 и 2.4 вытекает следующее следствие:

**2.5.** Если $G$ — элементарная абелева $p$-группа, то множество всех обратимых элементов, построенных для каждого группового кольца циклической подгруппы группы $G$ методом, указанным в 2.3, является множеством свободных образующих подгруппы конечного индекса в группе $V(ZG)$.

Вероятно, трудной является проблема построения свободных образующих подгруппы без кручения конечного индекса в $V(ZG)$.

Возникает интересный вопрос об индексе $f(G)$ подгруппы $W(G)$ в группе $V(ZG)$. В работах [92], [93] получен следующий результат:

**2.6.** Пусть $G$ — элементарная абелева $p$-группа порядка $p^{n+1}$. Тогда:

1) $f(G) \leqslant p^N$, где $N = \frac{n}{2}(p-3)(1+p+p^2+\ldots+p^n)$;

2) если $p$ регулярное простое число, то $f(G)=1$;

3) если $p$ нерегулярное простое число, то $f(G)>1$.

Если $G$ — конечная абелева группа, то в силу утверждения 2.2 группа $V(ZG)$ является прямым произведением группы $G$ и свободной абелевой группы $F$. Образующие элементы подгруппы $F$ не известны и описаны, кроме указанных выше, в таких случаях:

1) $G=\langle a \mid a^5=1\rangle$ — циклическая группа порядка 5 и
$$F=\langle a^2+a^3-1\rangle;$$

2) $G=\langle a \mid a^8=1\rangle$ — циклическая группа порядка 8 и
$$F=\langle a^6+2a^5+a^4-a^2-a-1\rangle, \ ([100]).$$

Мэй [112], [113] обобщил утверждение 2.2 на бесконечные группы и получил следующий результат:

**2.7.** Пусть $G$ — произвольная абелева группа. Тогда: 1) Группа $V(ZG)$ является прямым произведением группы $G$ и свободной абелевой группы $F$. Если $G$ — бесконечная абелева группа и ее показатель не делит 4 или 6, то ранг группы $F$ совпадает с мощностью группы $G$.
2) Если $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 0 и порядок элемента группы $G$ необратим в $K$, то $V(KG)$ является прямым произведением группы $G$ и абелевой группы без кручения.

Если $Z_p$ — кольцо целых $p$-адических чисел и $G$ — конечная абелева $p$-группа, то строение группы $V(Z_pG)$ исследовалось в работах [91], [126].

## § 3. Тривиальность элементов конечного порядка и тривиальность мультипликативной группы группового кольца

Если группа $V(KG)$ совпадает с группой $G$, то говорят, что группы $V(KG)$ и $U(KG)$ тривиальны, или что в кольце $KG$ все обратимые элементы тривиальны.

Проблему тривиальности группы $V(ZG)$ впервые исследовал Хигмэн и доказал следующую теорему ([158]):

3.1. Если $G$ — периодическая группа, то $V(\mathbf{Z}G)=G$ тогда и только тогда, когда $G$ либо абелева группа и ее показатель делит 4 или 6, либо гамильтонова 2-группа.

Пусть $t(G)$ — совокупность всех элементов конечного порядка группы $G$. Легко проверить, что если циклическая подгруппа $\langle a\rangle$ порядка $n$ группы $G$ не является нормальной и элемент $g$ не принадлежит нормализатору подгруппы $\langle a\rangle$, то элемент $a+(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1})g(1-a)$ группы $V(\mathbf{Z}G)$ нетривиален и имеет порядок $n$. Поэтому из 3.1 следует утверждение:

3.2. Если $V(\mathbf{Z}G)=G$, то $t(G)$ — подгруппа; каждая ее подгруппа нормальна в $G$ и $t(G)$ либо гамильтонова 2-группа, либо такая абелева группа, показатель которой делит 4 или 6.

Вероятно, эти условия являются достаточными для тривиальности группы $V(\mathbf{Z}G)$.

Предположим, что $t(G)$ — подгруппа группы $G$ и рассмотрим вопрос о представлении группы $V(\mathbf{Z}G)$ в виде произведения $G\cdot V(\mathbf{Z}t(G))$.

3.3. Пусть $t(G)$ — подгруппа группы $G$, $t(G)\neq G$ и $V(\mathbf{Z}G)=$ $=G\cdot V(\mathbf{Z}t(G))$. Тогда каждая подгруппа группы $t(G)$ нормальна в $G$ и $t(G)$ либо абелева, либо такая гамильтонова группа, что мультипликативный порядок числа 2 по модулю порядка каждого элемента нечетного порядка группы $t(G)$ является нечетным числом.

3.4. [14], [90]. Пусть $t(G)$ — подгруппа, и каждая ее подгруппа нормальна в $G$. Если $t(G)$ либо абелева, либо такая гамильтонова группа, что мультипликативный порядок числа 2 по модулю порядка каждого элемента нечетного порядка группы $t(G)$ является нечетным числом и факторгруппа $G/t(G)$ правоупорядочена, то $V(\mathbf{Z}G)=G\cdot V(\mathbf{Z}t(G))$. В случае, когда $t(G)$ абелева или гамильтонова 2-группа, группа $V(\mathbf{Z}G)$ представима как произведение группы $G$ и свободной абелевой группы $F$, причем $F\cap G=1$.

Это утверждение играет важную роль в изучении группы $V(\mathbf{Z}G)$. Отсюда следует, что приведенные выше необходимые условия тривиальности группы $V(\mathbf{Z}G)$ являются и достаточными в случае, когда группа $G/t(G)$ правоупорядочена.

Если все элементы конечного порядка группы $V(KG)$ принадлежат подгруппе $G$, то говорят, что в группах $V(KG)$ и $U(KG)$ все элементы конечного порядка тривиальны.

Впервые Хигмэн и С. Д. Берман исследовали этот вопрос и доказали следующее утверждение:

3.5. [7]. Если $G$ — конечная группа, то в группе $V(\mathbf{Z}G)$ все элементы конечного порядка тривиальны тогда и только тогда, когда $G$ либо абелева, либо гамильтонова 2-группа.

Представляет интерес проблема тривиальности всех элементов конечного порядка группы $V(\mathbf{Z}G)$ для бесконечных групп $G$.

**3.6.** [14]. Пусть $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 0 и ни одно простое число из $\mathbf{Z}$ необратимо в $K$. Все элементы конечного порядка группы $V(KG)$ тривиальны тогда и только тогда, когда множество $t(G)$ всех элементов конечного порядка группы $G$ является нормальной подгруппой в $V(KG)$.

Отсюда вытекает теорема Сегала:

**3.7.** Если $G$ — группа без кручения, то и группа $V(\mathbf{Z}G)$ без кручения.

**3.8.** Проблема (Мальцев А. И). Если $G$ — группа без кручения и $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля, то группа $V(KG)$ тривиальна, т. е. $V(KG)=G$.

Ввиду утверждения 3.4, это справедливо для групповых колец $KG$ правоупорядоченных групп, а также, когда группа $G$ является $\Omega_1$-группой (Стройновский). Напомним, что группа $G$ называется $\Omega_1$-группой, если для любых двух конечных подмножеств $A$ и $B$ группы $G$, каждое из которых состоит не менее чем из двух элементов, среди элементов вида $gh$ ($g\in A$, $h\in B$) имеется хотя бы один элемент, не равный остальным элементам вида $gh$ ($g\in A$, $h\in B$).

Из 3.4, 3.5 и 3.6 следует

**3.9.** Если в группе $V(\mathbf{Z}G)$ все элементы конечного порядка тривиальны, то $t(G)$ — подгруппа; каждая ее подгруппа нормальна в $G$ и $t(G)$ либо абелева, либо гамильтонова 2-группа. В случае, когда группа $G/t(G)$ правоупорядочена, группа $V(\mathbf{Z}G)$ представима в виде произведения группы $G$ и свободной абелевой группы $F$, причем $F\cap G=1$.

В силу 3.4 и 3.6 эти условия являются и достаточными, когда факторгруппа $G/t(G)$ правоупорядочена.

Ввиду утверждения 1.2 периодическая часть центра $Z(V)$ группы $V(\mathbf{Z}G)$ совпадает с периодической частью группы $Z(G)$. Если центры группы $V(\mathbf{Z}G)$ и $G$ совпадают, то центр группы $V(\mathbf{Z}G)$ называется тривиальным.

Легко видеть, что $V(\mathbf{Z}Z(G))$ — подгруппа группы $Z(V)$. Если $G$ — периодическая группа и центр группы $V(\mathbf{Z}G)$ тривиален, то в силу 3.1 показатель центра $Z(G)$ группы $G$ делит 4 или 6. Однако обратное утверждение не всегда верно.

Нетрудно доказать, что если $G$ — конечная группа, то центр группы $V(\mathbf{Z}G)$ тривиален тогда и только тогда, когда в разложении центра групповой алгебры $\mathbf{Q}G$ над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$ в прямую сумму полей участвует только поле рациональных чисел и мнимое квадратичное расширение поля $\mathbf{Q}$.

Легко видеть, что если $G$ — нильпотентная группа ступени 2, то класс сопряженных элементов $C_a$ группы $G$, содержащий элемент $a$, имеет вид $aH$, где $H$ — подгруппа центра и содержится в коммутанте группы $G$.

Обобщением утверждения 3.1 является следующая теорема З. Ф. Патая:

3.10. [35]. Если $G$ — конечная нильпотентная группа ступени не выше 2, то центр группы $V(\mathbf{Z}G)$ тривиален тогда и только тогда, когда наименьшее общее кратное порядков всех смежных классов, как элементов соответствующих факторгрупп, являющихся классами сопряженных элементов группы $G$, делит 4 или 6.

## § 4. Периодические нормальные подгруппы мультипликативной группы группового кольца

Проблема тривиальности элементов конечного порядка группы $V(\mathbf{Z}G)$, а также выяснение вопроса, когда группа $V(\mathbf{Z}G)$ обладает одним из таких теоретико-групповых свойств как нильпотентность, локальная нильпотентность, квазинильпотентность, свойство быть группой с конечными классами сопряженных элементов (такие группы кратко принято называть $FC$-группами), $N$-группой или нильгруппой, показывает на важность описания групповых колец, мультипликативная группа которых имеет периодическую нормальную подгруппу. Исследование в этом направлении было начато С. Д. Берманом, А. Р. Россой [9], и в общем случае эта задача решена А. А. Бовди. Получены следующие результаты:

4.1. [11]. Пусть $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 0 и ни одно простое число из $\mathbf{Z}$ необратимо в $K$. Если $H$ — периодическая нормальная подгруппа группы $V(KG)$, то $H$ — подгруппа группы $G$, и она либо абелева, либо гамильтонова 2-группа. Каждая подгруппа группы $H$ нормальна в $V(KG)$.

Исследуем строение целочисленных групповых колец, мультипликативные группы которых обладают нецентральной периодической нормальной подгруппой.

4.2. [12]. Пусть $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 0, в котором 2 необратимо. Если $H$ — гамильтонова 2-подгруппа группы $G$ и $H$ — нормальна в $V(KG)$, то: 1) уравнение $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1$ в кольце $K$ обладает единственным ненулевым решением $z_1=1$, $z_2=z_3=0$;
2) элементы конечного порядка группы $G$ образуют гамильтонову 2-подгруппу, и каждая ее подгруппа нормальна в $G$.

4.3. [12]. Пусть $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 0, в котором число 2 необратимо, и периодическая абелева подгруппа $H$ группы $G$ нормальна в $V(KG)$. Если группа $G$ содержит такую подгруппу кватернионов $Q$, что $Q\cap H=\langle a\rangle$ — циклическая подгруппа 4-го порядка, то:

1) $H$ — прямое произведение циклической подгруппы $\langle a\rangle$ и такой подгруппы из центра группы $G$, показатель которой делит 4;

2) все элементы нечетного порядка группы $G$ образуют подгруппу $L$, каждая подгруппа которой нормальна в $G$, и $L$ — абелева группа;

3) если $S$ — силовская 2-подгруппа группы $G$ и $Q$ — подгруппа группы $S$, то группа $S \cdot L$ обладает такой абелевой подгруппой $A$ индекса 2, что $u^2=a^2$ и $uvu^{-1}=v^{-1}$ для всех $u \in S \cdot L \setminus A$ и $v \in A$;

4) выполняется утверждение 1) из 4.2.

Автоморфизм группы, отображающий каждую ее подгруппу на себя, называется степенным автоморфизмом. Группа степенных автоморфизмов периодической абелевой группы описана

**4.4.** [12], [15]. Пусть периодическая абелева подгруппа $H$ группы $G$ не содержится в центре $Z(G)$ группы $G$ и является нормальной в $V(ZG)$, а группа $G$ не обладает такой подгруппой квантернионов $Q$, что $Q \cap H$ — циклическая подгруппа 4-го порядка. Тогда централизатор подгруппы $H$ в группе $V(ZG)$ содержит все унипотентные элементы группы $V(ZG)$, а также все элементы конечного порядка группы $G$, факторгруппа $G/C_G(H)$ абелева и изоморфна подгруппе группы степенных автоморфизмов группы $H$. Более того:

1) если $H/H \cap Z(G)$ — группа типа $p^\infty$ или ее подгруппа и $h \in H \setminus Z(G)$, то в группе $G$ существует такая максимальная периодическая подгруппа $L$, что $L \cap \langle h \rangle = 1$ и $L$ содержит все $q$-элементы группы $G$, где $q$ — отличное от $p$ простое число. Каждая подгруппа группы $L$ нормальна в $G$, факторгруппа $G/L$ обладает единственной подгруппой порядка $p$ и группа $L$ либо абелева, либо гамильтонова. Кроме того, если $H/H \cap Z(G)$ группа типа $p^\infty$, то в группе $G$ элементы конечного порядка образуют подгруппу $t(G)$, которая совпадает с произведением подгрупп $L$ и $H$;

2) если $H/H \cap Z(G)$ не является группой типа $p^\infty$ или ее подгруппой, то в $G$ элементы конечного порядка образуют подгруппу $t(G)$, каждая ее подгруппа нормальна в $G$ и $t(G)$ либо абелева, либо гамильтонова группа.

**4.5.** Следствие [12]. Пусть $G$ — периодическая группа и $K$ — кольцо целых алгебраических чисел поля, являющегося расширением Галуа поля рациональных чисел. Группа $V(KG)$ содержит нецентральную периодическую абелеву нормальную подгруппу тогда и только тогда, когда: 1) группа $G$ имеет абелеву нормальную подгруппу $A$ индекса 2, обладающую таким элементом $a$ 4-го порядка, что для всех $v \in A$ и $u \in G \setminus A$ выполняются равенства $u^2=a^2$ и $uvu^{-1}=v^{-1}$; 2) $K$ — подкольцо поля действительных чисел.

Вильямсон [186] исследовал группу $V(ZG)$, обладающую элементом с конечным числом сопряженных, и получил такой результат:

**4.6.** Пусть $G$ — периодическая группа. Элемент $a$ конечного порядка из $V(ZG)$ имеет конечное число сопряженных в

$V(\mathbf{Z}G)$ тогда и только тогда, когда либо $a$ содержится в центре, либо $a$ имеет порядок 4 и содержится в абелевой подгруппе $A$ индекса 2 группы $G$ и для всех $v \in A$ и $u \in G \setminus A$ выполняются равенства $u^2 = a^2$ и $uvu^{-1} = v^{-1}$.

Теорема 4.6 непосредственно следует из 4.1 и 4.5, так как элемент $a$ и его сопряженные по лемме Дицмана порождают конечную нормальную подгруппу группы $V(\mathbf{Z}G)$.

Неизвестно, когда группа $V(\mathbf{Z}G)$ имеет нецентральный элемент бесконечного порядка, обладающий конечным числом сопряженных.

**4.7.** Проблема. Каково строение нормальных подгрупп группы $V(\mathbf{Z}G)$, состоящих из элементов с конечным числом сопряженных?

Согласно теореме Б. Неймана о строении $FC$-групп, элементы конечного порядка нормальной подгруппы $H$, состоящей из элементов с конечным числом сопряженных в $V(\mathbf{Z}G)$, образуют подгруппу $t(H)$ и факторгруппа $H/t(H)$ абелева без кручения. Строение подгруппы $t(H)$ описано выше.

Гонсалвес [84] доказал, что утверждение 4.1 остается справедливым и при более слабом предположении, что периодическая подгруппа $H$ является субнормальной в $V(\mathbf{Z}G)$.

## § 5. Теоретико-групповые свойства мультипликативной группы с тривиальными элементами конечного порядка

Если множество $t(V)$ элементов конечного порядка группы $V(\mathbf{Z}G)$ образует подгруппу, то она нормальна в $V(\mathbf{Z}G)$ и в силу утверждения 4.1 $t(V) = t(G)$. Поэтому подгруппа $t(G)$ нормальна в $V(\mathbf{Z}G)$, и в группе $V(\mathbf{Z}G)$ все элементы конечного порядка тривиальны. Следовательно, если группа $V(\mathbf{Z}G)$ удовлетворяет одному из таких теоретико-групповых свойств как нильпотентность, локальная нильпотентность, квазинильпотентность, свойство быть $FC$-группой, $N$-группой или нильгруппой, то в $V(\mathbf{Z}G)$ все элементы конечного порядка тривиальны.

Следующее утверждение играет важную роль в дальнейшем:

**5.1.** Пусть $t(G)$ — абелева группа и она либо содержится в центре группы $G$, либо для каждого элемента $g \in G$, не принадлежащего централизатору подгруппы $t(G)$, выполняется равенство $gag^{-1} = a^{-1}$ для всех $a \in t(G)$. Если $V(\mathbf{Z}G) = G \cdot V(\mathbf{Z}t(G))$, то $V(\mathbf{Z}G) = G \times F$, где $F$ — свободная абелева группа.

Утверждения 5.1 и 3.3 дают нам возможность описать строение группы $V(\mathbf{Z}G)$ с некоторыми свойствами, указанными выше.

Ради краткости изложения будем говорить, что группа $G$ удовлетворяет условию (А), если выполняется одно из условий: 1) $t(G)$ — подгруппа центра группы $G$; 2) $t(G)$ — абелева группа и для каждого $g \in G$, не принадлежащего централизатору подгруппы $t(G)$, выполняется равенство $gag^{-1} = a^{-1}$ для всех

$a \in t(G)$; 3) $t(G)$ — гамильтонова 2-группа, и каждая ее подгруппа нормальна в $G$.

**5.2.** [14]. Если в группе $V(\mathbf{Z}G)$ все элементы конечного порядка тривиальны, то факторгруппа $V(\mathbf{Z}G)/t(G)$ абелева тогда и только тогда, когда факторгруппа $G/t(G)$ абелева, и группа $G$ удовлетворяет условию (A). В этом случае, группа $V(\mathbf{Z}G) = G \times F$, где $F$ — свободная абелева группа.

Как известно, в силу теоремы Б. Неймана в $FC$-группе $G$ элементы конечного порядка образуют подгруппу $t(G)$, и фактор-группа $G/t(G)$ абелева. Поэтому из 5.2 вытекает следующий результат Сегала и Цассенхауза:

**5.3.** [166]. Группа $V(\mathbf{Z}G)$ является $FC$-группой тогда и только тогда, когда $G$ — $FC$-группа и удовлетворяет условию (A).

Сегал ([163], проблема 36) поставил вопрос об энгелевости группы $V(\mathbf{Z}G)$. Следующий результат, доказанный А. А. Бовди, дает на него ответ:

**5.4.** [14]. Если группа $V(\mathbf{Z}G)$ энгелева (ограниченно энгелева), то и группа $G$ энгелева (ограниченно энгелева), удовлетворяет условию (A), и если $t(G)$ не содержится в центре, то она является 2-группой.

Обратно, если группа $G$ удовлетворяет указанным выше условиям и факторгруппа $G/t(G)$ правоупорядочена, то группа $V(\mathbf{Z}G)$ является энгелевой (ограниченно энгелевой) и $V(\mathbf{Z}G) = G \times F$, где $F$ — свободная абелева группа.

Пусть $C$ является одним из таких теоретико-групповых свойств как нильпотентность, локальная нильпотентность, квазинильпотентность, свойство удовлетворять нормализаторному условию или быть $N$-группой или нильгруппой. Известно, что $C$-группа является энгелевой, $t(G)$ — подгруппа и факторгруппа $G/t(G)$ правоупорядочена.

**5.5.** Группа $V(\mathbf{Z}G)$ является $C$-группой тогда и только тогда когда $G$ $C$-группа, выполняется условие (A), и если $t(G)$ не содержится в центре, то она является 2-группой.

Отметим, что критерий нильпотентности группы $V(\mathbf{Z}G)$ получен Сегалом и Цассенхаузом [167], а для конечных групп $G$ — Полчино [136].

Предыдущие результаты приводят нас к структурной теореме, доказанной А. А. Бовди [14]:

**5.6.** Если группа $V(\mathbf{Z}G)$ является $C$-группой, то: 1) группа $V(\mathbf{Z}G)$ является прямым произведением группы $G$ и свободной абелевой группы; 2) в $C$-группе $G$ подгруппа $t(G)$ удовлетворяет одному из условий: a) $t(G)$—подгруппа центра группы $G$ в) $t(G)$ — гамильтонова 2-группа, и каждая ее подгруппа нормальна в $G$; c) $t(G)$ — абелева 2-группа, и если $g \in G$ не принадлежит централизатору подгруппы $t(G)$, то $gag^{-1} = a^{-1}$ для всех $a \in t(G)$.

Сегал и Цассенхауз поставили вопрос: когда группа $V(\mathbf{Z}G)$ периодическая над своим центром? ([163], проблема 35). Оказывается, что результат, полученный ими в случае ограниченного показателя группы $V(ZG)/Z(V)$, сохраняется и для неограниченного показателя.

5.7. [21]. Если группа $V(ZG)$ периодическая над своим центром $Z(V)$, то группа $G$ удовлетворяет условию (A), и фактор-группа группы $G$ по ее центру $Z(G)$ является периодической группой. Более того, если группа $G/t(G)$ правоупорядочена, то $V(ZG)=G\times F$, где $F$ — свободная абелева группа.

Клифф и Сегал [66] получили критерий, когда группа $G$ нормальна в $V(ZG)$. Легко видеть, что если $G$ нормальна в $V(ZG)$, то в силу 3.5 в группе $V(ZG)$ все элементы конечного порядка тривиальны.

5.8. Группа $G$ нормальна в $V(ZG)$ тогда и только тогда, когда группа $G$ удовлетворяет условию (A) и

$$V(ZG)=G\cdot V(Zt(G)).$$

На основании 5.1 получаем

5.9. Группа $G$ нормальна в $V(ZG)$ тогда и только тогда, когда $V(ZG)=G\times F$, где $F$ — свободная абелева группа.

5.10. Проблема. Если группа $V(ZG)$ нетривиальна и не обладает свободной подгруппой ранга 2, то в группе $V(ZG)$ все элементы конечного порядка тривиальны.

Это подтверждается теоремой Пикэла и Хартли ([90]). Они исследовали задачу, когда группа $V(ZG)$ не содержит свободных подгрупп ранга 2 при предположении, что группа $G$ является конечным расширением разрешимой группы. Поэтому, вероятно, справедлива следующая гипотеза:

5.11. Если группа $V(ZG)$ нетривиальна и не содержит свободных подгрупп ранга 2, то в $G$ элементы конечного порядка образуют подгруппу $t(G)$, каждая подгруппа которой нормальна в $G$ и $t(G)$ либо абелева группа, либо гамильтонова 2-группа.

В случае, когда $K$ — кольцо целых алгебраических чисел числового поля и $G$ — расширение периодической разрешимой группы при помощи нильпотентной группы без кручения, Гонсалвес [86] получил необходимые и достаточные условия того, чтобы группа $V(KG)$ не имела свободных подгрупп ранга 2.

Из результата Пикэла и Хартли следует теорема Сегала:

5.12. Если группа $V(ZG)$ разрешима, то в разрешимой группе $G$ элементы конечного порядка образуют подгруппу $t(G)$, каждая ее подгруппа нормальна в $G$ и $t(G)$ — либо абелева группа, либо гамильтонова 2-группа.

Отметим, что неизвестно, когда $V(ZG)$ сверхразрешимая группа.

Интенсивно изучается мультипликативная группа $V(Z_pG)$ $p$-адического группового кольца. Обобщением теоремы И. И. Хрипты о нильпотентности группы $V(Z_pG)$ является следующее утверждение:

**5.13.** [14]. Пусть $K$ — коммутативное локальное кольцо без делителей нуля характеристики 0. Если группа $V(KG)$ энгелева, то в энгелевой группе $G$ элементы конечного порядка содержатся в центре.

**5.14.** [140]. Неабелева группа $V(\mathbf{Z}_pG)$ является $FC$-группой тогда и только тогда, когда $G$—$FC$-группа, и $t(G)$ либо содержится в центре, либо в ней подгруппа, порядки элементов которой не делятся на $p$, является конечной или произведением группы $L$ типа $q^\infty$ и конечной, и коммутант группы $G$ содержится в $L$.

## § 6. Свободные подгруппы мультипликативной группы группового кольца

Если $G$ — конечная неабелева группа, которая не является гамильтоновой 2-группой, то по теореме Пикеля и Хартли группа $V(\mathbf{Z}G)$ обладает свободной подгруппой ранга 2. Возникает вопрос: обладают ли субнормальные подгруппы группы $V(\mathbf{Z}G)$ свободной подгруппой ранга 2?

Будем говорить, что подгруппа $M$ группы $H$ является субнормальной в подгруппе конечного индекса, если существует такая цепочка подгрупп $M_0=M\subset M_1\subset \ldots \subset M_k\subseteq H$, что $M_i$ нормальна в $M_{i+1}$ и подгруппа $M_k$ имеет конечный индекс в $H$.

**6.1.** [87]. Пусть $G$ — неабелева группа и $G$ не является гамильтоновой 2-группой. Если $L$ — субнормальная подгруппа в подгруппе конечного индекса группы $V(\mathbf{Z}G)$ и $G$ — подгруппа группы $L$, то $L$ обладает свободной подгруппой ранга 2.

Хартли следующим образом обобщил понятие субнормальной подгруппы. Подгруппа $M$ группы $H$ называется почти субнормальной, если существует такая цепочка подгрупп $M_0= =M\subset M_1\subset \ldots \subset M_k=H$, что $M_i$ либо нормальна в $M_{i+1}$, либо имеет конечный индекс в $M_{i+1}$ для всех $i$. Он получил следующий результат:

**6.2.** Пусть $G$ — конечная неабелева группа и $G$ не является гамильтоновой 2-группой. Тогда $V(\mathbf{Z}G)$ обладает такой нормальной подгруппой $H$, что $H$ имеет конечный индекс в $V(\mathbf{Z}G)$, и любая почти субнормальная подгруппа $L$ группы $V(\mathbf{Z}G)$ либо имеет свободную подгруппу ранга 2, либо $H\cap L$ содержится в центре группы $V(\mathbf{Z}G)$.

Вероятно, трудной является задача доказательства аналогичных утверждений для групповых колец бесконечных групп. Представляет также интерес изучение таких свойств группы $V(\mathbf{Z}G)$, когда она может содержать свободную подгруппу ранга 2.

Напомним, что если пересечение подгрупп нижнего центрального ряда группы $G$ равно единице, то группа $G$ называется обобщенно нильпотентной. Легко видеть, что обобщенно нильпотентные группы могут быть определены как группы, аппроксимируемые нильпотентными группами.

**6.3.** Проблема. Когда группа $V(\mathbf{Z}G)$ обобщенно нильпотентна?

Вейс и Массон получили такой результат:

**6.4.** ([118]). Если $G$ — конечная группа, то группа $V(\mathbf{Z}G)$ обобщенно нильпотентна тогда и только тогда, когда $G$ — нильпотентна и ее коммутант является $p$-группой.

Они также исследовали на обобщенную нильпотентность группу $V(\mathbf{Z}G)$, когда $G$ либо конечно порожденная нильпотентная группа, либо конечно порожденная $FC$-группа, но законченного результата не получили.

Заслуживает внимание также задача аппроксимации группы $V(\mathbf{Z}G)$ разрешимыми группами. Бандари [57] получил следующий частный результат:

**6.5.** Пусть коммутант группы $G$ либо аппроксимируется нильпотентными группами без кручения, либо дискриминируется группами из класса $\bigcup\limits_p M_p$, где $M_p$ — класс нильпотентных $p$-групп ограниченного показателя и $p$ пробегает все простые числа. Тогда группа $V(\mathbf{Z}G)$ аппроксимируется разрешимыми группами.

## § 7. Унитарная подгруппа мультипликативной группы группового кольца

Пусть $f$ — гомоморфизм группы $G$ в мультипликативную группу кольца целых чисел $\mathbf{Z}$. Если элементу $y=\sum\limits_{h\in G}\alpha_h h\ (\alpha_h\in\mathbf{Z})$ кольца $\mathbf{Z}G$ сопоставить элемент $y^f=\sum\limits_{h\in G}\alpha_h f(h)h^{-1}$, то отображение $y\to y^f$ является антиавтоморфизмом 2-го порядка кольца $\mathbf{Z}G$ и называется инволюцией, порожденной гомоморфизмом $f$.

Элемент $u\in U(\mathbf{Z}G)$ называется $f$-унитарным, если обратный элемент совпадает с $u^f$ или $-u^f$.

Легко видеть, что $f$-унитарные элементы группы $U(\mathbf{Z}G)$ образуют подгруппу $U_f(\mathbf{Z}G)$, которую будем называть $f$-унитарной подгруппой группы $U(\mathbf{Z}G)$. Если $U_f(\mathbf{Z}G)=U(\mathbf{Z}G)$, то группа $U(\mathbf{Z}G)$ называется $f$-унитарной.

Интерес к группе $U_f(\mathbf{Z}G)$ возник в алгебраической топологии и в унитарной K-теории.

**7.1.** Проблема С. П. Новикова. Каково строение унитарной подгруппы $U_f(\mathbf{Z}G)$? Когда группа $U(\mathbf{Z}G)$ $f$-унитарна?

Легко доказать, что если $f$ — тривиальный гомоморфизм, то $U_f(\mathbf{Z}G)=G\times U(\mathbf{Z})$. Поэтому представляет интерес строение группы $U_f(\mathbf{Z}G)$, когда $f$ — нетривиальный гомоморфизм.

При помощи теории Басса, изложенной в § 2, опишем строение группы $U_f(\mathbf{Z}G)$, когда $f$ — нетривиальный гомоморфизм, а $G$ — циклическая группа конечного порядка.

**7.2.** [18], [19]. Пусть $G$ — циклическая группа порядка $m=2^k\cdot t$, $(2,t)=1$ и $m\geqslant 6$. Зафиксируем для каждого $d\mid m$ элемент $a_d\in E_d$ и $S_d$ — подмножество в $E_d$, определенное в теореме 2.3. Если $M$ — множество всех делителей числа $m$, делящихся на $2^k$, а $f$ — гомоморфизм группы $G$ с ядром $\langle a^2\rangle$, то элементы множества

$$\{[e(b)/e(a_d), n]^2\cdot[e(b^2)/e(a_d^2), n]^{-1}\mid b\in S_d,\ d\in M\}$$

являются $f$-унитарными и свободными образующими подгруппы $W(G)$ ранга $\sum\limits_{d\in M}\left(\frac{\varphi(d)}{2}-1\right)$ группы $U_f(\mathbf{Z}G)$, где $\varphi$ — функция Эйлера. Подгруппа $W(G)$ имеет конечный индекс в группе $U_f(\mathbf{Z}G)$.

Проблема нахождения инвариантов группы $U_f(\mathbf{Z}G)$ для конечной абелевой группы $G$ пока остается открытой, но по всей вероятности справедлива следующая гипотеза:

**7.3.** Пусть $G$ — конечная абелева группа четного порядка, $f$ — гомоморфизм группы $G$ на группу $U(\mathbf{Z})$ с ядром $H$, $f(a)=-1$, а $L$ — множество всех таких циклических подгрупп группы $G$, образующие элементы которых содержатся в смежном классе $aH$. Тогда существует такое $n$, что каждый элемент из группы $U_f(\mathbf{Z}G)^n$ можно представить в виде произведения $y_1y_2\ldots y_t$, где каждый $y_i$ принадлежит некоторой подгруппе $W(C)\subseteq U_f(\mathbf{Z}C)$ и $C\in L$.

Представляет интерес вопрос, когда $U_f(\mathbf{Z}G)=G\times U(\mathbf{Z})$ в случае нетривиального гомоморфизма $f$. Такой случай возможен, как показывает следующий пример. Пусть $G=\langle a, b\mid a^4=b^2=1,\ bab=a^{-1}\rangle$ — группа диэдра 8-го порядка, а $f$ — гомоморфизм с ядром $\langle a^2, b\rangle$. Тогда $U_f(\mathbf{Z}G)=G\times U(\mathbf{Z})$.

Рассмотрим теперь задачу об $f$-унитарности группы $U(\mathbf{Z}G)$, исследованной в работе А. А. Бовди [17]:

**7.4.** Пусть $f$ — гомоморфизм группы $G$ на группу $U(\mathbf{Z})$ с ядром $A$ и группа $U(\mathbf{Z}G)$ $f$-унитарна. Тогда в $G$ существует такой элемент $b$, что $G=\langle A, b\rangle$ и выполняется одно из условий:

1) $A$ — абелева группа, показатель ее периодической части делит 4 или 6, порядок элемента $b$ делит 4 и $bab^{-1}=a^{-1}$ для всех $a\in A$;

2) $A$ — гамильтонова 2-группа, а группа $G$ представима в виде полупрямого произведения $A$ и группы $\langle b\rangle$ 2-го порядка, и каждая подгруппа группы $A$ нормальна в $G$;

3) $A$ — гамильтонова 2-группа, а группа $G$ представима в виде прямого произведения $A$ и циклической подгруппы $\langle b\rangle$ 4-го порядка;

4) $\langle b^4\rangle$ — нормальная подгруппа 2-го порядка, факторгруппа $A/\langle b^4\rangle$ абелева, а ее периодическая часть имеет показатель 2, и если $a \in A$, то $bab^{-1}$ совпадает с $a^{-1}$ или $a^{-1}b^4$;

5) в группе $G$ элементы конечного порядка образуют подгруппу $t(G)$, каждая подгруппа которой нормальна в $G$, и $t(G)$ удовлетворяет одному из условий:

5.1. $t(G)$ — либо абелева и ее показатель делит 4 или 6, либо гамильтонова 2-группа;

5.2. $t(G)$ — прямое произведение циклической группы $\langle b\rangle$ порядка 4 и абелевой группы, показатель которой делит 6;

5.3. $t(G)$ — прямое произведение циклической группы $\langle b\rangle$ порядка 8 и абелевой группы, показатель которой делит 4.

Вероятно, изложенные выше необходимые условия $f$-унитарности группы $U(\mathbf{Z}G)$ являются и достаточными. Это доказано в большинстве случаев (см. [17]).

## § 8. Конгруэнц-подгруппы мультипликативной группы группового кольца

Если идеал $I$ группового кольца $KG$ содержится в фундаментальном идеале, то подгруппа

$$I^+ = \{y \in V(KG) \mid y - 1 \in I\}$$

называется конгруэнц-подгруппой группы $V(KG)$.

Рассмотрим вопрос, когда группа $V(KG)$ является полупрямым произведением группы $G$ и конгруэнц-подгруппы $I^+$.

8.1. Пусть $G$ — круговая группа и $T$ — радикальная алгебра над коммутативным кольцом $K$ с единицей. Если $G$ изоморфна присоединенной группе алгебры $T$, то в группе $V(KG)$ существует такая конгруэнц-подгруппа $I^+$, что $V(KG)$ является полупрямым произведением $I^+$ и группы $G$.

Возникает интересное предположение, что группа $I^+$, определенная в утверждении 8.1, в случае, когда $K$ — кольцо целых чисел, является группой без кручения. Это подтверждается результатом Пассмана и Смита и такими его обобщениями:

8.2. [18]. Пусть $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 0 и $T$ — локально нильпотентная алгебра над $K$. Если группа $G$ изоморфна присоединенной группе кольца $T$ и порядок ни одного элемента группы $G$ необратим в кольце $K$, то $V(KG) = I^+ \lambda G$ и группа $I^+$ без кручения.

8.3. [81]. Пусть $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 0 и $T$ — обобщенно нильпотентная алгебра над $K$, т. е. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} T^i = 0$. Если $G$ изоморфна присоединенной группе кольца $T$, то $V(KG) = I^+ \lambda G$ и группа $I^+$ без кручения.

Из известных результатов о реализуемости нильпотентной группы ступени 2 в виде круговой группы и теоремы 8.2 следует, что $V(\mathbf{Z}G)=I^{+}\lambda G$ и группа $I^{+}$ без кручения в случае, когда выполняется одно из условий (см. [16], [18]):

1) $G$ — нильпотентная группа ступени 2 и ее центр 2-делим с однозначным извлечением корня второй степени в $Z(G)$;

2) факторгруппа группы $G$ по ее центру $Z(G)$ является прямым произведением циклических групп;

3) $G$ — нильпотентная группа ступени 2, и факторгруппа группы $G$ по коммутанту является делимой группой или периодической группой.

Интенсивно исследуется эта задача для конечных метабелевых групп. Изложим эти результаты.

В дальнейшем предполагаем, что $A$ — абелева нормальная подгруппа конечной группы $G$ и факторгруппа $G/A$ абелева. Если $I(A)$ — идеал кольца $\mathbf{Z}G$, порожденный элементами $a-1\,(a\in A)$, то элемент $y\in I(A)$ однозначно можно представить в виде

$$y=\sum_{g\in W,\,a\in A}\alpha_{g,a}g(a-1)\quad(\alpha_{g,a}\in\mathbf{Z}),$$

где $W$ — представители смежных классов группы $G$ по подгруппе $A$. Пусть $a^g=gag^{-1}$ и $k\in\mathbf{Z}$. Определим отображение $F_k: I(A)\to A$ следующим образом

$$F_k(y)=\prod_{g\in W,\,a\in A}(a^{\alpha_{g,a}})^{g^k}.$$

Легко видеть, что $F_k$ является гомоморфизмом аддитивной группы идеала $I(A)$ на абелеву группу $A$, ядром отображения $F_k$ является идеал $J_k$ кольца $\mathbf{Z}G$.

**8.4.** [95], [151]. Идеал $J_0$ совпадает с произведением фундаментального идеала $\Delta(\mathbf{Z}G)$ и идеала $I(A)$, а конгруэнц-подгруппа $J_0^+$ является группой без кручения.

**8.5.** [67]. Конгруэнц-подгруппа $J_k^+$ является группой без кручения при всех $k$.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании нормального дополнения группы $G$ в группе $V(\mathbf{Z}G)$. Вейс, Клифф и Сегал [67] получили следующий результат:

**8.6.** Пусть $A$ — абелева нормальная подгруппа конечной группы $G$ и факторгруппа $G/A$ — абелева нечетного порядка. Тогда $V(\mathbf{Z}G)$ представима как полупрямое произведение нормальной подгруппы $M$ без кручения и группы $G$. Группа $M$ является расширением конгруэнц-подгруппы $J_m^+$ при помощи конечно порожденной свободной абелевой группы, где $m=\frac{1}{2}(|G/A|-1)$.

Вопрос о существовании нормального дополнения группы $G$ в группе $V(\mathbf{Z}G)$ оказался весьма сложным в случае, когда группа $G/A$ имеет четный порядок. Только в частных случаях удалось получить положительный ответ.

8.7. [67], [151], [168]. Если $A$ — такая абелева нормальная подгруппа конечной группы $G$, что факторгруппа $G/A$ абелева и ее показатель делит 4 или 6, то $V(\mathbf{Z}G)=J_0{}^+\lambda G$.

8.8. [153]. Пусть $A$ — такая абелева нормальная подгруппа конечной группы $G$, что факторгруппа $G/A$ абелева. Если операция сопряжения индуцирует мономорфизм группы $G/A$ в группу автоморфизмов группы $A$, то группа $G$ обладает нормальным дополнением в $V(\mathbf{Z}G)$.

Пусть $C_k$ — циклическая группа порядка $k$. Роггенкамп и Скотт [152] показали, что если $G$ — группа Фробениуса и представима в виде полупрямого произведения $C_{73}\lambda C_8$ или $C_{241}\lambda C_{10}$, то группа $G$ не обладает нормальным дополнением в $V(\mathbf{Z}G)$.

Для $p$-адического группового кольца А. А. Бовди получен [18] следующий результат:

8.9. Пусть $G$ — нильпотентная $p$-группа ступени 2 и либо $p\neq 2$, либо $G/Z(G)$ — прямое произведение циклических групп. Тогда группа $V(\mathbf{Z}_pG)$ представима в виде полупрямого произведения конгруэнц-подгруппы $I^+$ без кручения и группы $G$.

## § 9. Сопряженность конечных подгрупп в мультипликативной группе группового кольца

Если $G$ — конечная группа и $K$ — коммутативное кольцо без делителей нуля характеристики 0, в котором простые делители порядка группы $G$ необратимы, то $G$ — максимальная конечная подгруппа группы $V(KG)$, а силовская подгруппа группы $G$ является силовской $p$-подгруппой группы $V(KG)$. Карпиловский [99] доказал конечность числа $m$ классов несопряженных подгрупп порядка $|G|$ группы $V(\mathbf{Z}G)$. Пирсон и Хьюс [94] установили, что $m=1$ для группы $G$ диэдра 6-го порядка, а для группы диэдра $G$ 8-го порядка С. Д. Берман и А. Р. Росса [10] доказали, что $m\geqslant 2$. Полчино [135] показал, что в последнем случае имеет место равенство.

Представляет интерес выяснение вопроса, когда $m\geqslant 2$. Отметим, что если $G$ — конечная $p$-группа и $m\geqslant 2$, то группа $V(\mathbf{Z}G)$ обладает несопряженными силовскими $p$-подгруппами.

9.1. [23]. Пусть конечная 2-группа $G$ не является гамильтоновой, а ее коммутант-циклическая подгруппа $\langle c\rangle$, и в $G$ существуют такие элементы $a$ и $b$, что $c=[a,b]$, $b\notin\langle c\rangle$ и $c$ перестановочен с элементом $a$ или $b$. Пусть в коммутанте $\langle c\rangle$ имеется такая подгруппа $H$ индекса 2, которая удовлетворяет одному из условий: 1) $b^2\in H$; 2) $b^4\in H$ и в централизаторе элементов $aH$ и $bH$ существует такая подгруппа $T/H$ индекса 2, что $b^2\in T$. Тогда группа $V(\mathbf{Z}G)$ обладает несопряженными подгруппами порядка $|G|$.

Роггенкамп и Скотт [155] получили следующий важный результат:

9.2. Пусть $G$ — конечная $p$-группа и $K$ — коммутативное локальное или полулокальное дедикиндово кольцо без делителей нуля характеристики 0, единственный максимальный идеал содержит простое число $p$. Если $H$ — подгруппа порядка $|G|$ группы $V(KG)$, то подгруппы $G$ и $H$ сопряжены в $V(KG)$.

Вейс [185] и Скотт [160] более сильный результат получили для $p$-адического группового кольца:

9.3. Пусть $G$ — конечная $p$-группа и $\mathbf{Z}_p$ — кольцо целых $p$-адических чисел. Тогда каждая конечная $p$-подгруппа группы $V(\mathbf{Z}_pG)$ сопряжена в $V(\mathbf{Z}_pG)$ с подгруппой группы $G$. В частности, все силовские $p$-подгруппы группы $V(\mathbf{Z}_pG)$ сопряжены и имеют порядок $|G|$.

Это утверждение дает ответ на предположение С. Д. Бермана о справедливости второй теоремы Силова для группы $V(\mathbf{Z}_pG)$.

Цассенхауз выдвинул следующие гипотезы:

9.4. Если $u$ — элемент конечного порядка группы $V(\mathbf{Z}G)$ и $R$ — поле рациональных чисел, то в группе $V(RG)$ элемент $u$ сопряжен с некоторым элементом группы $G$.

9.5. Если $H$ — конечная подгруппа порядка $|G|$ группы $V(\mathbf{Z}G)$, то подгруппы $H$ и $G$ сопряжены в группе $V(RG)$.

9.6. Если $H$ — конечная подгруппа группы $V(\mathbf{Z}G)$, то $H$ сопряжена с подгруппой группы $G$ в группе $V(RG)$.

А. И. Саксонов [39] и Сегал [163] доказали предположение 9.5 для нильпотентной группы $G$ ступени 2, а Роггенкамп и Скотт [154] получили следующий результат:

9.7. Пусть $G$ — либо нильпотентная группа, либо разрешимая группа с нормальной силовской $p$-подгруппой, но не обладающей нормальной подгруппой, порядок которой взаимно прост $p$. Если порядок конечной подгруппы $H$ группы $V(\mathbf{Z}G)$ совпадает с порядком $G$, то группы $H$ и $G$ сопряжены в группе $V(RG)$.

Роггенкамп и Скотт построили группу $G$ порядка 14400, которая является расширением абелевой группы при помощи нильпотентной, целочисленное групповое кольцо которой не удовлетворяет предположению 9.5.

Гипотеза 9.4 доказана для таких групп $G$:

1) нильпотентная группа ступени 2 ([148]);

2) метациклическая $p$-группа ([165]);

3) группа $G$ обладает такой абелевой нормальной подгруппой $A$, что факторгруппа $G/A$ абелева и относительно операции сопряжения $A$ является точным неприводимым $G/A$-модулем ([165]);

4) полупрямое произведение абелевой нормальной подгруппы $A$ и абелевой группы $B$ порядка $m$, причем $m$ меньше, чем каждый простой делитель порядка группы $A$, и либо $m$ простое число, либо $A$ — циклическая группа ([111]);

5) полупрямое произведение двух циклических групп, порядки которых взаимно просты ([59], [60], [148]).

6) (Фернандес) симметрическая группа 4-ой степени.

## § 10. Матричное представление и образующие элементы мультипликативной группы группового кольца

Довольно много работ посвящены матричному представлению группы $U(\mathbf{Z}G)$. Они дают нам возможность получить некоторую информацию о строении группы $U(\mathbf{Z}G)$, обладающей нетривиальными элементами конечного порядка. Матричное представление группы $U(\mathbf{Z}G)$ описано для таких групп $G$:

1) симметрическая группа 3-й степени ([94]);
2) симметрическая группа 4-й степени ([49], [187]);
3) знакопеременная группа 4-й степени ([46], [168]);
4) $G=\langle a, b \mid a^p=b^2, bab^{-1}=a^{-1}\rangle, p>2$ ([103]);
5) группа диэдра порядка 8 ([135]);
6) группа диэдра порядка $2p$, где $p$ — нечетное простое число ([133]);
7) группа диэдра порядка $2p_1p_2\dots p_s$, где $p_1, p_2, \dots, p_s$ — различные простые числа ([102]).

Приведем описание группы $V(\mathbf{Z}G)$ только в случае 1).

**10.1.** Если $S_3$ — симметрическая группа 3-й степени, то

$$U(\mathbf{Z}S_3)\simeq\left\{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}) \mid u_1+u_3\equiv u_2+u_4 \pmod 3\right\}.$$

В группе $V(\mathbf{Z}S_3)$ элементы конечного порядка имеют порядок 2 или 3. В группе $V(\mathbf{Z}S_3)$ все элементы 3-го порядка сопряжены, а элементы 2-го порядка распадаются на два класса сопряженных элементов.

Риттер и Сегал [147] свели описание $U(\mathbf{Z}G)$ для группы $G$ порядка $p^3 (p\neq 2)$ при помощи специального произведения к нахождению мультипликативных групп некоторых коммутативных групповых колец. При $p=3$ получаются точные матричные представления группы $U(\mathbf{Z}G)$ в группе $\mathrm{GL}(3, \mathbf{Z}(\varepsilon))$, где $\varepsilon$ — первообразный корень 3-й степени из 1. При помощи этого же произведения Галович, Райнер и Улом дали описание группы $V(\mathbf{Z}G)$, когда $G$ — группа порядка $pq$, где $p, q$ — простые числа и $q \mid p-1$.

Рассмотрим вопрос об образующих элементах группы $U(\mathbf{Z}G)$. Нетрудно доказывается следующее утверждение:

**10.2.** Если $G$ — конечная группа, то группа $V(\mathbf{Z}G)$ конечно порождена.

Риттер и Сегал [149] указали образующие элементы подгруппы $L$ конечного индекса группы $V(\mathbf{Z}G)$ при некоторых ограничениях для простых компонент рациональной групповой алгебры $\mathbf{Q}G$. Группа $L$ порождается центром группы $V(\mathbf{Z}G)$ и унипотентными элементами вида $1+x$, где $x^2=0$.

М. Мирович показал, что если $G$ — бесконечная группа диэдра, то группа $V(\mathbf{Z}G)$ не является конечно порожденной группой.

## § 11. Проективные модули и элементы классической $K$-теории

Для произвольного кольца $A$ через $\mathbf{P}(A)$ обозначим категорию всех конечно порожденных проективных левых $A$-модулей и их гомоморфизмов. Если $P\in\mathbf{P}(A)$, то через $[P]$ обозначим класс всех модулей из $\mathbf{P}(A)$, изоморфных $P$. В категории $\mathbf{P}(A)$ имеются конечные прямые суммы. Это позволяет ввести абелеву группу $K_0(A)$. Она задается множеством порождающих элементов $[P]$, $P\in\mathbf{P}(A)$, и множеством определяющих соотношений, имеющих вид

$$[P\oplus Q]-[P]-[Q]=0 \quad (P, Q\in\mathbf{P}(A)).$$

В дальнейшем для $P\in\mathbf{P}(A)$ через $[P]$ будем обозначать также образ класса $[P]$ в группе $K_0(A)$. Пусть $A^n$ — свободный арифметический $A$-модуль ранга $n$.

**11.1.** [43]. Если $x\in K_0(A)$, то $x=[P]-[A^n]$, где $P\in\mathbf{P}(A)$. Если $P, Q\in\mathbf{P}(A)$, то $[P]=[Q]$ в $K_0(A)$ тогда и только тогда, когда существует такое натуральное $n$, что $P\oplus A^n\cong Q\oplus A^n$.

Модули $P$ и $Q$ из $\mathbf{P}(A)$ называются стабильно изоморфными, если их образы в $K_0(A)$ совпадают. Таким образом, изучение проективных модулей над кольцом $A$ распадается на две задачи. Первая состоит в вычислении группы $K_0(A)$. Это позволяет описать проективные модули с точностью до стабильной изоморфности. Вторая задача — она называется проблемой сокращения — состоит в выяснении вопроса: являются ли изоморфными стабильно изоморфные модули. В частности, особый интерес вызывает вопрос о свободе стабильно свободных модулей, т. е. проективных модулей, стабильно изоморфных свободным модулям.

Отображение $n\to A^n$ аддитивной группы целых чисел $\mathbf{Z}$ в $K_0(A)$ задает гомоморфизм групп $i_*:\mathbf{Z}\to K_0(A)$. Группа $K_0(A)/i_*(\mathbf{Z})$ называется группой проективных классов $Cl(A)$. Она также часто обозначается как $SK_0(A)$. Из 11.1 вытекает

**11.2.** Образцы проективных модулей $P$ и $Q$ в $Cl(A)$ совпадают тогда и только тогда, когда $P\oplus A^n\simeq Q\oplus A^m$ для некоторых натуральных чисел $n$, $m$.

**11.3.** Пусть в кольце $A$ существует такой идеал $I$, что кольцо $A/I$ вложимо в тело $D$. Тогда гомоморфизм $i_*:\mathbf{Z}\to K_0(A)$ является расщепляющимся вложением, т. е. $K_0(A)=\mathbf{Z}\oplus Cl(A)$. В частности, при выполнении этих условий все конечно порожденные проективные $A$-модули стабильно свободны тогда и только тогда, когда $K_0(A)\simeq\mathbf{Z}$.

Для решения проблемы сокращения необходимо показать, что из изоморфности модулей $P\oplus A$ и $Q\oplus A$ вытекает $P\simeq Q$.

**11.4.** Пусть $M\in\mathbf{P}(A)$ допускает два разложения $M=P\oplus\oplus Ae_1=Q\oplus Ae_2$, где $Ae_1$ и $Ae_2$ — свободные циклические подмодули в $M$ с базами $e_1$ и $e_2$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) модули $P$ и $Q$ изоморфны;

б) существует такой автоморфизм $f$ модуля $M$, что $f(e_1)=e_2$.

Таким образом, проблема сокращения эквивалентна изучению строения группы автоморфизмов разложимых проективных модулей $M$ и действия этой группы на свободных циклических слагаемых в $M$. Транзитивность этого действия позволяет положительно решать проблему сокращения. Отметим важный частный случай стабильно свободных модулей. Элемент $a==(a_1,\ldots,a_n)\in A^n$, $a_i\in A$, назовем унимодулярным, если существуют такие элементы $b_1, b_2,\ldots,b_n\in A$, что $a_1b_1+\ldots++a_nb_n=1$. На множестве $U_{m_n}(A)$ всех унимодулярных элементов из $A^n$ действует справа группа $\mathrm{GL}(n,A)$.

**11.5.** Элемент $a\in A^n$ унимодулярен тогда и только тогда, когда $Aa$ является прямым слагаемым в $A^n$.

**11.6.** Пусть $r_0$ — натуральное число и кольцо $A$ удовлетворяет условию 11.3. Если $P\in\mathbf{P}(A)$, то положим

$$r(P)=\dim_D(D\otimes_{A/I}(P/IP)).$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

а) любой конечно порожденный проективный $A$-модуль $P$ с условием $r(P)\geqslant r_0$ свободен;

б) группа $\mathrm{GL}(n,A)$ при $n>r_0$ действует справа транзитивно на $U_{m_n}(A)$.

Предположим, что

$$M=P_1\oplus P_2\oplus\ldots\oplus P_k,\quad (P_i\in\mathbf{P}(A)).$$

Если $1\leqslant i\neq j\leqslant k$ и $f\in\mathrm{Hom}(P_i,P_j)$, то продолжим $f$ нулевым образом на все $P_m$ при $m\neq i$. Тогда $f$ становится эндоморфизмом модуля $M$, причем $f^2=0$. Следовательно, $x_{ij}(f)=1+f$ принадлежит $\mathrm{Aut}\,M$ и $x_{ij}(f)^{-1}=x_{ij}(-f)$. Обозначим через $E(P_1,\ldots,P_k)$ подгруппу в $\mathrm{Aut}\,M$, порожденную всеми $x_{ij}(f)$. Эта подгруппа называется группой элементарных автоморфизмов разложимого модуля $M=P_1\oplus P_2\oplus\ldots\oplus P_k$. В частности, если $P_1=\ldots=P_k=A$, то $E(P_1,\ldots,P_k)$ является группой элементарных матриц $E(k,A)$ в $\mathrm{GL}(k,A)$. Заметим, что группа $E(P_1,\ldots,P_k)$ зависит от разложения $M$ в прямую сумму модулей $P_1,\ldots,P_k$.

Если $Q\in\mathbf{P}(A)$, то естественное вложение $M$ в $M\oplus Q$ индуцирует вложение групп

$$\mathrm{Aut}\,M\to\mathrm{Aut}\,(M\oplus Q),\quad E(P_1,\ldots,P_k)\to E(P_1,\ldots,P_k,Q).$$

Пределы возникающих последовательностей групп всех автоморфизмов и групп всех элементарных автоморфизмов обозначаются через $\mathrm{GL}(A)$ и $E(A)$.

**11.7.** [4], [33]. $E(A)=[E(A), E(A)]=[\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}(A)]$. Более того, $\mathrm{GL}(A)$ и $E(A)$ совпадают соответственно с пределами диаграмм

$$\mathrm{GL}(n, A)\to\mathrm{GL}(n+1, A), E(n, A)\to E(n+1, A), n\geqslant 1.$$

Таким образом, группа $K_1(A)=\mathrm{GL}(A)/E(A)$ является абелевой.

Стабильным рангом $s.r.A$ кольца $A$ называется наименьшее натуральное число $n$, обладающее следующим свойством: если $a=(a_1, \ldots, a_{n+1})\in A^{n+1}$ — унимодулярный элемент, то существуют такие элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n\in A$, что строка

$$(a_1+a_{n+1}b_1, \ldots, a_n+a_{n+1}b_n)\in A^n$$

унимодулярна.

**11.8.** [43]. Пусть $n\geqslant 1+s.r.A$. Тогда группа $E(n, A)$ действует справа транзитивно на множестве $Um_n(A)$. Кроме того, $E(n, A)\lhd \mathrm{GL}(n, A)$ и естественное отображение $\mathrm{GL}(n, A)/ /E(n, A)\to K_1(A)$ является изоморфизмом.

**11.9.** [43], [97], [171]. Пусть $B$ нетерово справа подкольцо кольца $A$, причем $A$ является конечно порожденным правым $B$-модулем. Тогда $s.r.A\leqslant 1+K\cdot\dim B$.

## § 12. Проективные модули над целочисленными групповыми кольцами конечных групп

Всюду в этом параграфе через $G$ обозначается конечная группа.

**12.1.** [181]. Пусть $P\in\mathbf{P}(\mathbf{Z}G)$ и $n$ — натуральное число. Тогда $P\simeq I\oplus(\mathbf{Z}G)^d$, где $I$ — левый идеал в $\mathbf{Z}G$, причем $n\mathbf{Z}+ +(I\cap\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$.

Доказательство этого утверждения опирается на следующий результат.

**12.2** (А. В. Ройтер, [38]). Пусть $P$ и $Q$ конечно порожденные $\mathbf{Z}G$-модули, являющиеся аддитивными абелевыми группами без кручения. Для простого числа $q$ через $P_{(q)}$, $Q_{(q)}$, $\mathbf{Z}_{(q)}$ обозначим локализации $P, Q, \mathbf{Z}$ по мультипликативной полугруппе $\mathbf{Z}\setminus(q)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) $P_{(q)}\simeq Q_{(q)}$ для всех простых чисел $q$;

б) если $n$ — целое число, то существует такое вложение модулей $f: P\to Q$, что $mQ\subseteq f(P)$ для некоторого целого числа $m$, взаимно простого с $n$.

Модуль $M$ над кольцом $\mathbf{Z}G$ называется локально свободным, если для любого простого числа $p$ модуль $M_{(p)}$ над кольцом $\mathbf{Z}_{(p)}G$ свободен.

**12.3.** [145], [181]. Пусть $P$ — конечно порожденный $\mathbf{Z}G$-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) модуль $P$ проективен;

б) модуль $P$ локально свободен;

в) для любого простого числа $p$, делящего порядок группы $G$, модуль $P/pP$ над кольцом $\mathbf{Z}/_{(p)}G$ проективен.

В силу 12.1 каждый проективный модуль $P$ задается числом $d$ и левым идеалом $I$ в $\mathbf{Z}G$.

**12.4.** Модуль $P$ однозначно определяет число $d$.

Доказательство этого утверждения основано на 12.3 и равенстве

$$d=|G|^{-1}(\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}} P)-1.$$

Для описания модуля $P$ в силу 12.1 остается выяснить: насколько по модулю $P$ однозначно определен локально свободный левый идеал $I$ и описать строение таких идеалов.

**12.5.** Пусть $I$ и $J$ — такие локально свободные левые идеалы в $\mathbf{Z}G$, что $I\oplus(\mathbf{Z}G)^d\simeq J\oplus(\mathbf{Z}G)^d$ для некоторого натурального числа $d$. Тогда $I\oplus\mathbf{Z}G\simeq J\oplus\mathbf{Z}G$.

Доказательство основано на 11.8 и 11.9, поскольку кольцо $\mathbf{Z}G$ является модулем конечного типа над одномерным кольцом $\mathbf{Z}$.

Перейдем к рассмотрению строения локально свободных левых идеалов в $\mathbf{Z}G$.

**12.6.** Пусть $I$ и $J$ — локально свободные левые идеалы в $\mathbf{Z}G$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) модули $I$ и $J$ изоморфны;

б) существует такой обратимый элемент $u\in\mathbf{Q}G$, что $I=Ju$, где $Q$ — поле рациональных чисел.

Для группового кольца $\mathbf{Z}G$ выполнены условия утверждения 11.3. Действительно, в качестве идеала $I$ нужно взять фундаментальный идеал $A(\mathbf{Z}G)$. Таким образом, $K_0(\mathbf{Z}G)=\mathbf{Z}\oplus Cl(\mathbf{Z}G)$, причем по 12.5 группа $Cl(\mathbf{Z}G)$ порождается классами $[J]$, где $J$ — локально свободные левые идеалы в $\mathbf{Z}G$. Кроме того, $[I]=[J]$ тогда и только тогда, когда $I\oplus\mathbf{Z}G=J\oplus\mathbf{Z}G$. Если $I\oplus[I]=\mathbf{Z}G\oplus I_1$, то $[I]+[J]=[I_1]$.

**12.7.** [145]. Группа $Cl(\mathbf{Z}G)$ конечна.

**12.8.** [145], [181]. Пусть группа $G$ не имеет в качестве гомоморфных образов следующие группы:

1) обобщенную группу кватернионов $Q_n$ порядка $4n$, $n\geqslant 2$;

2) бинарную группу тетраэдра $\hat{T}$ порядка 24;

3) бинарную группу октаэдра $\hat{O}$ порядка 48;

4) бинарную группу икосаэдра $I$ порядка 120.

Если $I$ и $J$ — локально свободные левые идеалы в $\mathbf{Z}G$ и

$$I\oplus\mathbf{Z}G\simeq J\oplus\mathbf{Z}G, \tag{1}$$

то $I\simeq J$.

**12.9.** [179]. Пусть $G$ — группа из списка 1)—4) из 12.8. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) если $I$ и $J$ — локально свободные левые идеалы в $\mathbf{Z}G$ и выполняется условие (1), то $I \simeq J$;

б) $G$ одна из групп $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, $O_5$, $\hat{T}$, $\hat{O}$, $\hat{I}$.

Ряд работ посвящен вопросу об описании конечных групп, у которых все конечно порожденные проективные модули свободны. Для таких групп $G$ группа классов $Cl(\mathbf{Z}G)=0$, и выполнены условия сокращения. В силу 12.8 для конечных абелевых групп справедлива теорема о сокращении. Поэтому из условия $Cl(\mathbf{Z}G)=0$ для конечной абелевой группы $G$ вытекает свобода всех конечно порожденных проективных $\mathbf{Z}G$-модулей.

**12.10.** [63]. Пусть $G$ — конечная абелева группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $Cl(\mathbf{Z}G)=0$;

2) либо группа $G$ имеет порядок 4, либо $G$ является циклической группой порядка $n \leqslant 11$, или $n=13$, 14, 17, 19.

**12.11.** [76]. Пусть $G$ — конечная неабелева группа и $Cl(\mathbf{Z}G)=0$. Тогда $G$ одна из следующих групп:

1) группа диэдра $D_n$, $n \geqslant 3$;

2) группы $A_4$, $S_4$ и $A_5$.

**12.12.** [145]. $Cl(\mathbf{Z}D_4)=Cl(\mathbf{Z}A_n)=Cl(\mathbf{Z}S_m)=0$ при $2 \leqslant n \leqslant 5$ и $2 \leqslant m \leqslant 4$.

**12.13.** Если $G$ — циклическая группа простого порядка $p$, то $Cl(\mathbf{Z}G)=Cl(R)$, где $R$ — кольцо целых величин поля $\mathbf{Q}[\exp(2\pi i/p)]$, [145], [40], [41].

Обзор результатов по вычислению группы классов можно найти в [8], [31], [62], [69], [70], [125].

В [177] доказано, что для конечной разрешимой группы неконечно порожденные проективные модули свободны. Этот результат не распространяется на неразрешимые группы [45], [107].

Как известно, ([176]), для любой конечной группы $G$ и любого целого числа $k$, взаимно простого с порядком группы $G$, идеал

$$I_k=\mathbf{Z}G\cdot k+\mathbf{Z}G\cdot N,\ N=\sum_{g\in G} g$$

локально свободен. В группе $Cl(\mathbf{Z}G)$ выполняется соотношение

$$[I_k]+[I_m]=[I_{km}],\ [I_1]=0.$$

Таким образом, все элементы $[I_k]$ образуют подгруппу Суона $T(\mathbf{Z}G)$ в $Cl(\mathbf{Z}G)$. Пусть $n=|G|$, $Z_n$ — кольцо классов вычетов по модулю $n$ и $U(Z_n)$ — мультипликативная группа кольца $Z_n$. Гомоморфизм колец $f:\mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$, при котором $f(g)=1$, $g \in G$, индуцирует гомоморфизм групп обратимых элементов

$$f^*: U(\mathbf{Z}G/\mathbf{Z}GN) \to U(Z_n).$$

Как отмечено в [176], $[I_k]=[I_m] \in Cl(\mathbf{Z}G)$ в том и только в том случае, если $k^{-1}m \in \operatorname{Im} f^*$. Поэтому

$$T(\mathbf{Z}G) \simeq U(Z_n)/\mathrm{Im} f^*.$$

**12.14.** [52]. Пусть конечная группа $G$ обладает таким нормальным делителем $H$, что $G/H$ является прямым произведением $r$ циклических групп порядка $m$, $r+m>4$, причем $x^{m^t}=1$ для всех $x \in G$, где $t \geqslant 1$. Тогда отображение $f^*$ не сюръективно, т. е. $T(\mathbf{Z}G) \neq 0$.

**12.15.** [184]. Для группы диэдра $D_{2^n}$ группа Суона нулевая. Если $G$ — группа обобщенных кватернионов порядка $2^n$ или полудиэдральная группа

$$SD_{2^n} = \langle a, b \mid a^{2^{n+1}} = b^2 = 1,\ bab = a^{2^n-1} \rangle,$$

то группа Суона кольца $\mathbf{Z}G$ имеет порядок 2.

Отметим, что если $G$ — циклическая группа, то $T(\mathbf{Z}G)=0$.

**12.16.** [182]. Пусть $G$ — нециклическая $p$-группа, $p>2$. Тогда $T(\mathbf{Z}G)$ — циклическая группа порядка $|G|p^{-1}$.

**12.17.** [119]. Пусть $G$ — нециклическая 2-группа, отличная от групп, указанных в 12.15. Тогда $T(\mathbf{Z}G)$ циклическая группа порядка $\frac{1}{4}\,|G|$. Если $H$ — произвольная конечная группа с условием $T(\mathbf{Z}H)=0$, то силовская $p$-подгруппа в $H$ циклична при нечетном $p$, а при $p=2$ — либо циклична, либо диэдральна.

Подробнее со свойствами группы $T(\mathbf{Z}G)$ можно познакомиться в [62], [119], [182], [184].

Перейдем к рассмотрению группы $K_1(\mathbf{Z}G)$.

**12.18.** [3], [146]. Пусть $I$ — локально свободный левый идеал в $\mathbf{Z}G$. Тогда естественный гомоморфизм $\mathrm{Aut}(I \oplus \mathbf{Z}G) \to K_1(\mathbf{Z}G)$ сюръективен. В частности, группа $K_1(\mathbf{Z}G)$ конечно порождена.

Вложение $\mathbf{Z}G$ в $\mathbf{Q}G$ индуцирует гомоморфизм групп $K_1(\mathbf{Z}G) \to K_1(\mathbf{Q}G)$. Ядро этого гомоморфизма обозначается через $SK_1(\mathbf{Z}G)$. Таким образом, вычисление группы $K_1(\mathbf{Z}G)$ сводится к вычислению групп $SK_1(\mathbf{Z}G)$, $K_1(\mathbf{Q}G)$ и нахождению образа этого гомоморфизма. Заметим, что

$$\mathbf{Q}G = \mathrm{Mat}(n_1, D_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Mat}(n_t, D_t),$$

где $D_i$ — тела, конечномерные над $\mathbf{Q}$. Следовательно, в силу [43]

$$K_1(\mathbf{Q}G) \simeq \prod_{i=1}^{t} K_1(D_i) = \prod_{i=1}^{t} (U(D_i)/[U(D_i), U(D_i)]).$$

Отметим в связи с этим принципиальный результат В. П. Платонова [36], показывающий, что группа $SK_1(D)$ для некоторых тел может быть бесконечной.

**12.19.** [146]. Группа $SK_1(\mathbf{Z}G)$ конечна.

**12.20.** [146]. Ранг конечно порожденной абелевой группы $K_1(\mathbf{Z}G)$ равен $s-t$, где $s$ — число неизоморфных неприводимых вещественных представлений группы $G$, а $t$ — число неизоморфных неприводимых рациональных представлений группы $G$.

**12.21.** [50]. Пусть $G$ конечная абелева группа. Тогда

$$SK_1(\mathbf{Z}G)=\left[\prod_{p>2} SK_1(\mathbf{Z}G_p)^{q(G/G_p)}\right]\times SK_1(\mathbf{Z}G_2)\times SK_1(OG_2)^{q(G/G_2)-1},$$

где $q(H)$ — число неприводимых рациональных представлений группы $H$, $O$ — любое тотально мнимое кольцо целых алгебраических чисел, в которых 2 неразветвлено и $H_p$ — силовская $p$-подгруппа в $H$.

**12.22.** [51]. Для конечной абелевой группы $G$ следующие условия эквиваленты:

а) $SK_1(\mathbf{Z}G)=1$;

б) $G$ — одна из групп: 1) элементарная абелева группа порядка $2^n$; 2) все силовские $p$-подгруппы в $G$ либо цикличны, либо имеют тип $(p, p^n)$.

**12.23.** [173]. Пусть $p$ нечетное простое число и $G$ — элементарная абелева $p$-группа ранга $k$. Тогда $SK_1(\mathbf{Z}G)$ является элементарной абелевой $p$-группой ранга

$$\frac{p^k-1}{p-1}\binom{p+k-1}{p}.$$

**12.24.** Группа $SK_1(\mathbf{Z}G)=1$ в следующих случаях:

а) $G=D_n$ — группа диэдра и $n\geqslant 3$;

б) $G=T$ или $\hat{I}$;

в) $G$ — подгруппа в $S_6$, [173].

**12.25.** Пусть $R$ — кольцо целых величин максимального вещественного поля корней степени $2^n$ из 1, $P$ — единственный простой идеал в $R$ над 2. Если $n\geqslant 2$, то точны следующие последовательности

$$0\to K_1(\mathbf{Z}D_{2^n})\to K_1(\mathbf{Z}D_{2^{n-1}})\oplus U(R)\to U(R/2P)\to 0,$$

$$0\to U(R\,2P)\to K_1(\mathbf{Z}D_{2^n})\to K_1(\mathbf{Z}D_{2^{n-1}})\to 0.$$

В работе [96] рассматривается естественный гомоморфизм

$$s: U(\mathbf{Z}G)\to K_1(\mathbf{Z}G),$$

и исследуется вопрос о том, когда выполнено одно из условий

$$SK_1(\mathbf{Z}G)\cap \operatorname{Im} s=0, \qquad (SK_1(\mathbf{Z}G))\,(\operatorname{Im} s)=K_1(\mathbf{Z}G).$$

Для ряда метациклических групп $G$ с условием $SK_1(\mathbf{Z}G)=0$ показывается, что $K_1(\mathbf{Z}G)=\operatorname{Im} s$.

С вычислениями $K_0(\mathbf{Z}G)$, $K_1(\mathbf{Z}G)$ и смежными вопросами можно познакомиться в [8], [31], [50], [51], [62], [69], [70], [82], [89], [104], [120]—[125], [127], [128], [146].

## § 13. Проективные модули над групповыми кольцами почти полициклических групп

В этом параграфе, если не оговорено противное, через $G$ обозначается почти полициклическая группа, т. е. группа $G$, обладающая рядом подгрупп

$$1=G_0\subset G_1\subset\ldots\subset G_n\subset G_{n+1}=G,$$

причем $G_i\lhd G_{i+1}$, факторгруппы $G_{i+1}/G_i$ цикличны при $i\leqslant n-1$ и $G/G_n$ — конечная группа. Число бесконечных факторов $G_{i+1}/G_i$ в этом ряду называется полициклическим рангом группы $G$. Он является инвариантом группы, т. е. не зависит от выбора ряда.

Рассмотрим вопрос о строении проективных $\mathbf{Z}G$-модулей. Важный принципиальный шаг в этом направлении сделан А. А. Суслиным и Суоном.

**13.1.** [42], [43], [178]. Если $G$ — свободная абелева группа, $k$ — кольцо главных идеалов, то все конечно порожденные проективные модули над кольцом $kG$ свободны.

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать случай неабелевой группы $G$.

**13.2.** [79]. Если $G$ — группа без кручения, то $K_0(\mathbf{Z}G)\simeq\mathbf{Z}$.

**13.3.** [117]. Пусть $K$ — поле характеристики 0 и $L$ — совокупность всех конечных подгрупп в $G$. Тогда сюръективен естественный гомоморфизм

$$\bigoplus_{H\in L}K_0(KH)\to K_0(KG).$$

**13.4.** [2]. Пусть $G$ — конечно порожденная бесконечная нильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны: а) все конечно порожденные проективные $\mathbf{Z}G$-модули свободны; б) $G=G_0\times G_1$, где $G_0$ — свободная абелева группа, $G_1$ — циклическая группа порядка 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Доказательство этого результата использует конструкцию модулей $I_k$ из § 12, которые строятся по периодической части группы $G$.

Как отмечалось в § 12, для кольца $\mathbf{Z}G$ выполнены условия 11.3, если в качестве $I$ взять фундаментальный идеал $A(\mathbf{Z}G)$, в силу следующего утверждения:

**13.5.** [78]. Если $G$ — группа без кручения, то кольцо $\mathbf{Z}G$ вложимо в двустороннее тело частных $D(G)$. На этом основано доказательство следующего утверждения:

**13.6.** Пусть $G$ — группа без кручения, $P\in P(\mathbf{Z}G)$ и

$$r=r(P)=\dim_{D(G)}(D(G)\otimes_{\mathbf{Z}G}P).$$

Тогда $r$ совпадает с рангом свободной абелевой группы $P/A(\mathbf{Z}G)P$. Более того, существует такое натуральное число $m$, что $(\mathbf{Z}G)^{r+m}\simeq P\oplus(\mathbf{Z}G)^m$. Число $r$ называется рангом модуля $P$.

Таким образом, если $G$ не имеет кручения, то для доказательства теоремы о свободе конечно порожденных проективных $\mathbf{Z}G$-модулей необходимо решать проблему сокращения (см 11.4).

Для проективных $\mathbf{Z}G$-модулей ранга 1 проблема сокращения, вообще говоря, решается отрицательно. Рассмотрим группы (см. [56], [75])

$$H_1=\langle a, b \mid a^2=b^3\rangle,$$
$$H_2=\langle a, b \mid [a, b, b]=1, \quad [b, a]=a^2ba^{-2}=ab^{-1}a^{-1}\rangle.$$

Тогда существует счетное число неизоморфных левых идеалов $P$ в $\mathbf{Z}H_i$, для которых $P\oplus\mathbf{Z}H_i\simeq(\mathbf{Z}H_i)^2$. Группа $H_2$ является расширением свободной абелевой группы с помощью свободной абелевой группы. Замеченная в этих работах [56], [75] ситуация оказалась достаточно общей.

**13.7.** [1]. Пусть неабелева группа $G$ является объединением возрастающего субнормального ряда

$$1=H_0\subset H_1\subset\ldots,$$

причем все факторы $H_{i+1}/H_i$ являются свободными абелевыми группами. Если $K$ — коммутативное кольцо, то существует такой нециклический левый идеал $P$ в $KG$, что $P\oplus KG\simeq(KG)^2$ Если $K=\mathbf{Z}$, то существует счетное число неизоморфных левых идеалов $P_j$ в $\mathbf{Z}G$ с условием $P_j\oplus\mathbf{Z}G\simeq(\mathbf{Z}G)^2$.

Левый идеал $P$ строится следующим образом. В группе $G$ выбираются элементы $x$, $y$ так, что $[y, xyx^{-1}]=1$ и элементы $y$, $xyx^{-1}$, $x^{-1}yx$ независимы в свободной абелевой группе $H_{i+1}/H_i$ для некоторого $i\geqslant0$. Затем рассматривается гомоморфизм свободных $KG$-модулей $f: KG\oplus KG\to KG$, при котором для любых $u, v\in KG$

$$f(u, v)=u(1+x(xyx^{-1}-1))+v(xyx^{-1}-1).$$

Проверяется, что $f$ является эпиморфизмом, и в качестве $P$ берется $\ker f$.

**13.8.** [1]. Пусть $G$ — конечно порожденная нильпотентная неабелева группа без кручения. Тогда существует счетное число неизоморфных левых идеалов $P_j$ в $\mathbf{Z}G$ с условием $P_j\oplus\mathbf{Z}G\simeq\simeq(\mathbf{Z}G)^2$. Если $K$ — произвольное коммутативное кольцо, то существует такой нециклический левый идеал $P$ в $KG$, что $P\oplus KG\simeq(KG)^2$.

**13.9.** [106]. Пусть $G$ — почти полициклическая группа без кручения, которая не является нильпотентной. Тогда существует такой нециклический левый идеал $P$ в $\mathbf{Q}G$, что $P\oplus\mathbf{Q}G\simeq\simeq(\mathbf{Q}G)^2$.

Таким образом, из 13.8 и 13.9 следует, что для почти полициклической группы $G$ без кручения следующие условия эквивалентны: 1) все конечно порожденные проективные $\mathbf{Q}G$-модули свободны; 2) группа $G$ абелева.

Отметим, что конструкция работы [1] в [172] обобщена на случай кольца косых (лорановских) многочленов (см. ниже).

Все построенные выше примеры несвободных модулей имеют ранг 1. В связи с этим возникает вопрос о свободе проективных $ZG$-модулей ранга не меньше 2, в предположении, что группа $G$ не имеет кручения.

**13.10.** Пусть $P \in P(ZG)$ имеет ранг не меньше $r+2$, где $r$ — полициклический ранг группы $G$ без кручения. Тогда модуль $P$ свободен.

Доказательство вытекает из 11.8 и 11.9 (см. [171]).

Напомним определение кольца косых (лорановских) многочленов.

Пусть $f$ — автоморфизм кольца $B$ и $A$ — множество всевозможных конечных сумм

$$g=\sum_i b_i x^i, \quad b_i \in B,$$

где $i \geqslant 0$ (соответственно, $i \in \mathbf{Z}$). Множество $A$ очевидным образом является аддитивной абелевой группой. Кроме того, в $A$ естественно вводится умножение, для которого $xb=f(b)x$ при любом $b \in B$. Получающееся ассоциативное кольцо $A$ называется кольцом косых (лорановских) многочленов. Элементы $A$ называются косыми многочленами. Можно говорить о старших (младших) коэффициентах косых многочленов.

Кольцо косых (лорановских) многочленов $A$ обозначается через $A=B[x,f]$ (соответственно, $A=B[x^{\pm 1},f]$). Кольцо косых (лорановских) многочленов $B[x^{\pm 1},f]$ является локализацией кольца $B[x,f]$ по мультипликативной системе $(x^n, n \geqslant 0)$, удовлетворяющей условию Оре.

**13.11.** [115]. Пусть кольцо $B$ нётерово слева. Обозначим через $S$ множество всех таких многочленов из кольца $A$ косых (лорановских) многочленов, у которых старший (и младший) коэффициент обратим в $B$. Тогда $S$ мультипликативная полугруппа, удовлетворяющая левому условию Оре.

**13.12.** Пусть кольцо $B$ нётерово слева, $A=B[x^{\pm 1},f]$. Предположим, что $a \in Um_n(A)$, $n \geqslant 3$, причем существует такая матрица $Y \in E(n, S^{-1}A)$, что $aY=(1,0,\ldots,0)$. Тогда найдется такая матрица $Y' \in E(n,A)$, что $aY'=c$ принадлежит $Um_n(B[x^{-1},f^{-1}])$.

Этот результат является обобщением результатов [42].

**13.13.** Пусть $B$ кольцо с автоморфизмом $f$, и $C$ — центральное подкольцо в $B$, на котором $f$ действует тождественно. Предположим, что $a \in Um_n(B[x,f])$, $n \geqslant 3$. Обозначим через $I$ подмножество в $C$, состоящее из нуля и всех таких $c \in C$, что $aY=(1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ для некоторой матрицы $Y \in E(n, B_c[x,f])$. Тогда $I$ идеал в $C$.

Это утверждение называется локализационным принципом Квилена—Суслина.

**13.14.** В условии 13.13 следующие условия эквивалентны для $a \in Um_n(B[x, f])$, $n \geqslant 3$:

а) существует такая матрица $Y \in E(n, B[x, f])$, что $aY = (1, 0, \ldots, 0)$;

б) для любого максимального идеала $M$ в $C$ существует такая матрица $Y \in E(n, B_M[x, f])$, что $aY = (1, 0, 0, \ldots, 0)$.

Заметим, что если $B$ является конечно порожденным модулем над кольцом $C$, и $M$ — максимальный идеал в $C$, то кольцо $B_M$ является полулокальным. Это означает, что $B_M$ имеет конечное число максимальных идеалов, и факторкольцо по любому максимальному идеалу изоморфно кольцу квадратных матриц конечного порядка над некоторым телом.

**13.15.** Пусть $B$ нетерово слева, регулярное слева кольцо с автоморфизмом $f$ и радикалом Джекобсона $J$. Пусть $A = B[x^{\pm 1}, f]$ и $m = 2 + \max(2, s.r.(B/y), s.r.(A/J(A)))$. Если $n \geqslant m$, $Y \in E(n, A)$, $Y \equiv 1 \pmod{J(A)}$, то $Y = Y_- Y_0 Y_+$, где

$$Y_- \in E(n, B[x^{-1}, f^{-1}]), \qquad Y_0 \in \mathrm{GL}(n, B), \qquad Y_+ \in E(n, B[x, f]).$$

В частности, если $B$ полулокально, то $m = 4$.

Из 13.11—13.15 вытекает следующий результат:

**13.16.** Пусть кольцо $B$ является модулем конечного типа над своим центральным нетеровым подкольцом $C$. Предположим, что $f$ — автоморфизм кольца $B$, действующий тождественно на $C$. Пусть $A = B[x, f]$ и $a \in Um_n(A)$, $n \geqslant 4$. Если существует такая матрица $Y \in E(n, S^{-1}A)$, что $aY = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, то найдется такая матрица $Y' \in E(n, A)$, что $aY = (1, 0, 0, \ldots, 0)$.

Применение теоремы 13.16 для групповых колец позволяет получить следующий результат.

**13.17.** Пусть группа $G$ обладает абелевыми нормальными подгруппами $N \subseteq H$, причем $G/N$ и $H$ — свободные абелевые группы. Предположим, что группа $G/H$ конечна, а ранг свободной абелевой группы $N$ равен $r$. Если $P \in P(\mathbf{Z}G)$ имеет ранг меньше $\max(3, r+2)$, то модуль $P$ свободен. Если $Y \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{Z}G)$ и $n \geqslant \max(4, r+3)$, то $Y = Y_0 \operatorname{diag}(eg, 1, \ldots, 1)$, где $Y_0 \in E(n, \mathbf{Z}G)$ $e = \pm 1$, $g \in G$.

Схема, изложенная в 13.11—13.16, разработана А. А. Сусли ным для решения задачи о свободе конечно порожденного про ективного модуля над коммутативным групповым кольцом Таким образом, для того, чтобы применять эту схему для про извольных почти полициклических групп без кручения, необхо димо доказать некоммутативный аналог утверждения 13.13 Это приводит к изучению строения примарных идеалов в груп повых кольцах и исследованию возможности локализаций по этим идеалам.

Если $P$ — примарный идеал кольца $A$, то через $C(P)$ обо значается множество всех таких элементов $c \in A \setminus P$, что обра $c$ в $A/P$ не является делителем нуля. Предположим, что $C(P)$ удовлетворяет условию Оре. Тогда кольцо $A_p = C(P)^{-1}A$ назы вается классической локализацией $A$, если $A_P/PA_P$ — простое артиново кольцо.

Подгруппа $H$ в почти полициклической группе $G$ называется орбитальной, если $H$ имеет в $G$ конечное число сопряженных подгрупп. Другими словами, индекс нормализатора $H$ в $G$ конечен. Группа $G$ называется *os*-группой, если для любой орбитальной подгруппы $H$ в $G$ выполнены следующие три эквивалентных условия:

1) существуют такие нормальные подгруппы $N_1$, $N_2$ группы $G$, что $N_1 \subset H \subset N_2$ и $N_2/N_1$ конечно;

2) существует такая нормальная подгруппа $N$ группы $G$, что $N \subset H$ и $H/N$ конечно;

3) существует такая нормальная подгруппа $N$ группы $G$, что $H \subset N$ и индекс $H$ в $N$ конечен.

Примерами *os*-групп являются конечно порожденные нильпотентные группы без кручения. Полное описание примарных идеалов получено для групповых алгебр *os*-групп над полем.

**13.18.** [131]. Пусть $G$ — почти полициклическая группа без кручения. Тогда в $G$ содержится характеристическая *os*-подгруппа конечного индекса.

**13.19.** [131], [132]. Пусть $K$ — поле и $G$ является *os*-группой. Если $P$ — примарный идеал в $KG$, то обозначим через $P^*$ множество всех таких $g \in G$, что $1-g \in P$. Тогда $P^*$ — нормальная подгруппа в $G$. Обозначим через $P'$ образ $P$ в $K(G/P^*)$. Тогда

$$P' = (P' \cap K\Delta(G/P^*))K(G/P^*).$$

При этом существуют такие примарные идеалы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ в $K(G/P^*)$, образующие орбиту действия группы $G$ посредством сопряжения, что $P \cap K\Delta(G/P^*) = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_r$. Подгруппы $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_r^*$ в $G/P^*$ конечны.

Отметим, что $\Delta(H)$ — это множество всех элементов группы $H$, имеющих конечное число сопряженных элементов. Если $H$ — почти полициклическая группа без кручения, то $\Delta(H)$ — абелева группа, содержащая центр группы $H$ в качестве подгруппы конечного индекса. Если при этом группа $H$ нильпотентна, то $\Delta(H)$ совпадает с центром $H$.

**13.20.** [131], [132]. Пусть $K$ — поле или $K = Z$. Тогда каждый примарный идеал $P$ в $KG$ является пересечением примитивных идеалов.

**13.21.** [97]. Пусть задана *os*-группа $G$, и $P$, $Q$ — такие примарные идеалы в $\mathbf{Z}G$, что $P \subset Q$. Если $I$ — правый (левый) идеал в $\mathbf{Z}G$, то существует такое натуральное число $n$, что $P + (I \cap Q^n) \subseteq IQ + P$.

Из 13.21 вытекает, что для любого примарного идеала $P$ в групповом кольце $\mathbf{Z}G$, где $G$ является *os*-группой, локализация $\mathbf{Z}G_P$ существует и является классической.

Более подробно со свойствами примарных идеалов и локализаций в групповых кольцах можно познакомиться в [97].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Артамонов В. А.* Проективные несвободные модули над групповыми кольцами разрешимых групп // Мат. сб.— 1981.— *116*, № 2.— С. 232—244 (РЖМат, 1982, 3А305).
2. —, Проективные модули над групповыми кольцами нильпотентных групп // В кн.: Алгебра— М.: сб. работ, посвящ. 90-летию со дня рождения О. Ю. Шмидта, 1982.— С. 7—23 (РЖМат, 1983, 4А264).
3. —, Строение проективных групп в произведениях многообразий // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. МГУ— 1982.— № 8.— С. 58—74 (РЖМат, 1982, 12А317).
4. *Басс Х.* Алгебраическая К-теория. // М.: Мир, 1973 (РЖМат, 1974, 5А439).
5. *Берман С. Д.* О некоторых свойствах целочисленных групповых колец // Докл. АН СССР. 1953.— *91*, № 1.— С. 7—9 (РЖМат, 1954, 1А1574).
6. —, Про одну необхідну умову ізоморфізму цілочислених групових кілець // Докл. АН УССР.— 1953.— № 5.— С. 313—316 (РЖМат, 1954, 4А2872).
7. —, Об уравнении $x^m=1$ в целочисленном групповом кольце // Укр. мат. ж.— 1955.— *7*, № 3.— С. 253—261 (РЖМат, 1956, 6А4378).
8. —, Представления конечных групп // Итоги науки. Алгебра 1964.— М.: ВИНИТИ, 1966.— С. 83—122 (РЖМат, 1967, 5А237).
9. —, *Росса А. Р.* О целочисленных групповых кольцах— В кн.: Третья научная конференция молодых математиков Украины.— Киев, 1966.— С. 75.
10. —, —, О целочисленных групповых кольцах конечных и периодических групп // Алгебра и мат. логика.— Киев: изд-во Киевского ун-та, 1966.— С. 44—53 (РЖМат, 1967, 10А183).
11. *Бовди А. А.* Периодические нормальные делители мультипликативной группы группового кольца // Сиб. мат. ж.— 1968.— *9*, № 3.— С. 495—498 (РЖМат, 1968, 10А154).
12. —, Периодические нормальные делители мультипликативной группы группового кольца II // Сиб. мат. ж.— 1970.— *11*, № 3.— С. 492—511 (РЖМат, 1970, 10А180).
13. —, Об изоморфизме целочисленных групповых колец // Материалы XXIX Науч. конф .проф.-преподават. состава Ужгор. ун-та. Секц. мат. н.— Ужгор. ун-т, Ужгород, 1975.— С. 104—109. Деп. в ВИНИТИ 10.III.1976, № 705—76 Деп. (РЖМат, 1976, 7А332).
14. —, О строении целочисленного группового кольца с тривиальными элементами конечного порядка // Сиб. мат. ж.— 1980.— *21*, № 4.— С. 28—37 (РЖМат, 1980, 11А277).
15. —, Периодические нормальные подгруппы мультипликативной группы целочисленного группового кольца // Тезисы сообщений 16-ой Всесоюзной алгебраической конференции.— Л.: изд-во Ленинградского ун-та, 1981.— С. 21.
16. —, О строении групповых базисов группового кольца // Мат. заметки.— 1982.— *32*, № 4.— С. 459—468 (РЖМат, 1983, 2А153).
17. —, Унитарность мультипликативной группы целочисленного группового кольца // Мат. сб.— 1982.— *119*, № 3.— С. 387—400 (РЖМат, 1983, 3А254).
18. —, Унитарная подгруппа и конгруэнц.-подгруппа мультипликативной группы целочисленного группового кольца // Докл. АН СССР.— 1985.— *284*, № 5.— С. 1041—1044 (РЖМат, 1986, 3А263).
19. —, Унитарная подгруппа мультипликативной группы целочисленного группового кольца циклической группы // Мат. заметки.— 1987.— *41*, № 4.— С. 469—474 (РЖМат, 1987, 8А210).
20. —, Мультипликативная группа целочисленного группового кольца / Ужгор. ун-т.— Ужгород, 1987.— 210 с. Деп. в УкрНИИНТИ 24.09.87, № 2712—Ук 87 (РЖМат, 1988, 2А238).

21. —, О строении мультипликативной группы целочисленного группового кольца // Докл. АН СССР.— 1988.— *301*, № 6.— С. 1295—1297 (РЖМат, 1989, 1А188).
22. —, Групповые кольца.— Киев, УМК ВО, 1988.
23. —, *Докучаев М. А.* О сопряженности групповых базисов целочисленного группового кольца // Мат. исслед. (Кишинев).— 1985.— № 85.— С. 32—42 (РЖМат, 1986, 5А284).
24. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Коммутативная алгебра.— М.: Мир, 1971 (РЖМат 1973, 9А376).
25. *Залесский А. Е.* Об одном предположении Капланского // Докл. АН СССР.— 1972.— *203*, № 4.— С. 749—751 (РЖМат, 1972, 8А332).
26. —, *Михалёв А. В.* Групповые кольца // Итоги науки и техн. Современные проблемы математики. *2*.— М.: ВИНИТИ, 1973.— С. 5—118.
27. *Докучаев М. А.* Мультипликативные группы групповых колец групп порядка 8 / Ужгор. ун-т.— Ужгород, 1987.— 35 с. Деп. в УкрНИИНТИ 29.12.87, № 3316—Ук 87 (РЖМат, 1988, 5А159).
28. —, Обобщённый след элемента конечного порядка мультипликативной группы целочисленного группового кольца / Ужгор. ун-т.— Ужгород, 1988.— 18 с.— Библиогр.: 4 назв. Рус. Деп. в УкрНИИНТИ 25.10.88, № 2718—Ук 88 (РЖМат, 1989, 2А172).
29. *Жмудь Э. М., Куренной Г. Ч.* О конечных группах единиц целочисленного группового кольца // Вестн. Харьковск. ун-та. Сер. механ.—матем.— 1967.— *26*.— С. 20—26 (РЖМат, 1969, 3А165).
30. *Керер Е. Ш.* О проективных идеалах скрещенной групповой алгебры свободной абелевой группы ранга два / Харьк. ун-т.— Харьков, 1983. Деп. в УкрНИИНТИ 25.1.84. № 101 Ук—Д84 (РЖМат, 1984, 6А232).
31. *Кострикин А. И., Чубаров И. А.* Представления конечных групп // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия, 1985.— *23*.— С. 119—195 (РЖМат, 1986, 4А261).
32. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр— М.: Наука, 1969 (РЖМат 1969, 6А210).
33. *Милнор Дж.* Введение в алгебраическую К-теорию.— М.: Мир, 1974 (РЖМат, 1975, 4А456).
34. *Новиков С. П.* Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов К-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов II // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— *34*, № 3.— С. 475—500 (РЖМат, 1971, 1А320).
35. *Патай З. Ф.* О центре мультипликативной группы целочисленного группового кольца // Материалы 2-ой Конф. молодых ученых Зап. науч. центра АН УССР. Сек. мат. н. Ужгор. ун-т.— Ужгород, 1975.— С. 37—41 (РЖМат, 1976, 9А254).
36. *Платонов В. П.* Проблема Танака—Артина и приведенная К-теория // Изв. АН СССР, Сер. матем.— 1976.— *40*, № 2.— С. 227—261 (РЖМат, 1976, 12А473).
37. *Ракиашвили Г. Г.* О строении проективных модулей над скрещенными групповыми кольцами // Сообщ. АН ГрузССР.— 1981.— *101*, № 3.— С. 549—552 (РЖМат, 1981, 11А411).
38. *Ройтер А. В.* О целочисленных представлениях, принадлежащих одному роду // Изв. АН СССР.— 1966.— *30*.— С. 1315—1324 (РЖМат, 1967, 7А219).
39. *Саксонов А. И.* О групповых кольцах конечных групп // Publ. Math.— 1971.— *18*, № 1—4.— С. 187—209 (РЖМат, 1973, 5А256).
40. *Столин А. А.* О группе $K_0$ для целочисленного группового кольца циклической группы порядка $p^2$ / Харьков ун-т.— Харьков, 1979.— 21 с. Деп. в ВИНИТИ 16.5.80. № 1887—80 Деп. (РЖМат, 1980, 8А366).
41. —, О группе Пикара целочисленного группового кольца примарной циклической группы / Харьк. ун-т.— Харьков, 1987.— 26 с. Деп. в УкрНИИНТИ 27.01.87. № 506—Ук87 (РЖМат, 1987, 6А433).

42. *Суслин А. А.* О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов // Изв. АН СССР, Сер. мат.— 1977.— *41*, № 2.— С. 235—252 (РЖМат, 1977, 9А462).
43. —, Алгебраическая K-теория // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1982.— *20*.— С. 71—152 (РЖМат, 1983, 2А319).
44. *Хрипта И. И.* О нильпотентности мультипликативной группы группового кольца // Латв. мат. ежегодник.— 1973.— *13*.— С. 119—127 (РЖМат, 1974, 2А267).
45. *Akasaki T.* A note on nonfinitely generated projective ZП-modules // Proc. Amer. Math. Soc.— 1982.— *86*, № 3.— 391 с. (РЖМат, 1983, 6А235).
46. *Allen P. J., Hobby C.* A characterization of units in $Z[A_4]$ // J. Algebra.— 1980.— *66*, № 2.— С. 534—543 (РЖМат, 1981, 4А202).
47. —, —, A note on the unit group of $ZS_3$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *99*, № 1.— С. 9—14 (РЖМат, 1987, 11А227).
48. —, —, Units in integral group rings of some metacyclic groups // Can. Math. Bull.— 1987.— *30*, № 2.— С. 231—240 (РЖМат, 1988, 3А293).
49. —, —, A characterization of units in $ZS_4$ // Commun. Algebra.— 1988.— *16*, № 7.— С. 1479—1505 (РЖМат, 1988, 11А262).
50. *Alperin R. C., Dennis R. K., Stein M. R.* $SK_1$ of finite abelian groups I // Invent. Math.— 1985.— *82*, № 1.— С. 1—18 (РЖМат, 1986, 4А489).
51. —, —, —, *Oliver R.* $SK_1$ of finite abelian groups II // Invent. math.— 1987.— *87*, № 2.— С. 253—302 (РЖМат, 1987, 5А375).
52. *Artamonov V. A.* Nonfree projectives in products of group varieties // Univers. Algebra and Appl. Pap. Stefan Banach Int. Math. Cent. Semest., Febr. 15 — June 9, 1978— Warsawa, 1982.— С. 7—13 (РЖМат, 1983, 10А153).
53. *Ayoub R. G., Ayoub Chr.* On the group ring of a finite abelian group // Bull. Austral. Math. Soc.— 1969.— *1*, № 2.— С. 245—261 (РЖМат, 1970, 9А218).
54. *Bass H.* The Dirichlet unit theorem, induced characters, and Whitehead groups of finite groups // Topology.— 1966.— *4*, № 4.— С. 391—410 (РЖМат, 1967, 9А207).
55. —, Euler characteristics and characters of discrete groups // Invent. math.— 1976.— *35*.— С. 155—196 (РЖМат, 1977, 5А280).
56. *Berridge P. H., Dunwoody M. J.* Non-free projective modules for torsion-free groups // J. London Math. Soc.— 1979.— *19*, № 3.— С. 433—436 (РЖМат, 1980, 2А426).
57. *Bhandari A. K.* Some remarks on the unit groups of integral group rings // Arch. Math.— 1985.— *44*, № 4.— С. 319—322 (РЖМат, 1985, 11А303).
58. —, *Luthar I. S.* Conjugacy classes of torsion units of the integral group ring of $D_p$ // Commun. Algebra.— 1983.— *11*, № 14.— С. 1607—1627 (РЖМат, 1984, 1А194).
59. —, —, Torsion units of integral group rings of metacyclic groups // J. Number Theory.— 1983.— *17*, № 2.— С. 270—283 (РЖМат, 1984, 6А238).
60. —, —, Certain conjugacy classes of units in integral group rings of metacyclic groups // J. Number Theory.— 1984.— *18*, № 2.— С. 215—228 (РЖМат, 1984, 12А256).
61. *Brown K. A., Lenagan T. H., Stafford J. T.* K-theory and stable structure of some Noetherian group rings // Proc. London Math. Soc.— 1981.— *42*, № 2.— С. 193—230 (РЖМат 1981, 11А409).
62. *Bürgisser B.* On the projective class group of arithmetic groups // Math. Z.— 1983.— *184*, № 3.— С. 339—357 (РЖМат 1984, 2А354).
63. *Cassou-Noguès Ph.* Classes d'idéaux d'algébre d'une groupe abelien // C. R. Acad. sci. Paris.— 1973.— *276*, № 14.— С. A973—A975 (РЖМат, 1973, 10А339).
64. *Cliff G. H.* Ranks of projective modules of group rings // Commun. Algebra.— 1985.— *13*, № 5.— С. 1115—1130 (РЖМат, 1986, 2А262).

65. —, *Sehgal S. K.* On the trace of an idempotent in a group ring // Proc. Amer. Math. Soc.— 1977.— *62*, № 1.— С. 11—14 (РЖМат, 1977, 12А275).
66. —, —, Groups which are normal in the unit groups of their group rings // Arch. Math.— 1980.— *33*, № 6.— С. 529—537 (РЖМат, 1980, 10А129).
67. —, —, *Weiss A. R.* Units of integral group rings of metabelian groups // J. Algebra.— 1981.— *73*, № 1.— С. 167—185 (РЖМат, 1982, 5А205).
68. —, *Weiss A. R.* Moody's induction theorem // Ill. J. Math.— 1988.— *32*, № 3.— С. 489—500 (РЖМат, 1989, 7А312).
69. *Curtis C. W., Reiner I.* Methods of representation theory with applications to finite groups and orders. Vol. 1— New York: John Wiley and Sons, 1981 (РЖМат, 1982, 6А217).
70. —, —, Methods of representation theory with applications to finite groups and orders. Vol. 2.— New York: John Wiley and Sons, 1987 (РЖМат, 1988, 2А198).
71. *Dennis R. K.* Units of group rings // J. Algebra.— 1976.— *43*, № 2.— С. 655—664 (РЖМат, 1977, 8А316).
72. —, The structure of the Unit group of group rings // Ring Theory, Proc. 2nd Ok. a Conf., 1975.— New York—Basel, 1977.— С. 103—130 (РЖМат, 1978, 5А256).
73. —, $NK_1$ of finite groups // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *100*, № 2.— С. 229—232.
74. *Dicks W.* Groups, trees and projective modules // Lect. Notes Math.— 1980.— *790*.— 127 pp. (РЖМат, 1980, 12А422).
75. *Dunwoody M. J.* The homotopy type of a two-dimensional complex // Bull. London Math. Soc.— 1976.— *8*, № 3.— С. 282—285 (РЖМат, 1977, 6А400).
76. *Endo Sh., Hironaka Y.* Finite groups with trivial class groups // J. Math. Soc. Japan.— 1979.— *31*, № 1.— С. 161—174 (РЖМат, 1979, 8А410).
77. *Farkas D. R.* Group rings: an annotated questionnaire // Commun. Algebra.— 1980.— *8*, № 6.— С. 585—602 (РЖМат, 1980, 10А186).
78. —, *Snider R. L.* $K_0$ and noetherian group rings // J. Algebra.— 1976.— *42*, № 1.— С. 192—198 (РЖМат, 1977, 5А193).
79. *Farrell F. T., Hsiang W. C.* The Whitehead group of poly-(finite or cyclic) groups // J. London. Math. Soc.— 1981.— *24*, № 2.— С. 308—324 (РЖМат, 1982, 4А424).
80. *Furukawa T.* Note on groups with isomorphic group algebras // Math. J. Okayama Univ.— 1982.— *24*, № 1.— С. 1—6 (РЖМат, 1983, 2А157).
81. —, The group of normalized units of a group ring // Osaka J. Math.— 1986.— *23*, № 1.— С. 217—221 (РЖМат, 1987, 3А292).
82. *Galovich S., Reiner I., Ullom S.* Class groups for integral representations of metacyclic groups // Mathematika.— 1972.— *19*, № 1.— С. 105—111 (РЖМат, 1973, 5А367).
83. *Gonçalves J. Z.* Free subgroups of units in group rings // Can. Math. Bull.— 1984.— *27*, № 3.— С. 309—312 (РЖМат, 1985, 3А257).
84. —, Normal and subnormal subgroups in the group of units of group rings // Bull. Austral. Math. Soc.— 1985.— *31*, № 3.— С. 355—363 (РЖМат, 1986, 6А347).
85. —, Group rings with solvable unit groups // Commun. Algebra.— 1986.— *14*, № 1.— С. 1—19 (РЖМат, 1986, 7А188).
86. —, Free subgroups and the residual nilpotence of the group of units of modular and $p$-adic group rigns // Can. Matth. Bull.— 1986.— *29*, № 3.— С. 321—328 (РЖМат, 1987, 3А252).
87. —, *Ritter J., Sehgal S.* Subnormal subgroups in U(ZG) // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *103*, № 2.— С. 375—382 (РЖМат, 1989, 4А172).
88. *Gupta N.* Free group rings / Contemp. Math.— 1987.— *66*.— С. 1—129 (РЖМат, 1988, 1А299).
89. *Gustafson W. H., Roggenkamp K. W.* A Mayer—Vietoris sequence for Picard groups with applications to integral group rings of dihedral and

quaternion groups // Ill. J. Math.— 1988.— *32*, № 3.— С. 375—406 (РЖМат, 1989, 6А319).
90. *Hartley B., Pickel P. F.* Free subgroups in the unit groups of integral group rings // Can. J. Math.— 1980.— *32*, № 6.— С. 1342—1352 (РЖМат, 1981, 10А262).
91. *Hoechsmann K., Ritter J.* Logarithms and units in *p*-adic abelian group rings // Arch. Math.— 1987.— *49*, № 1.— С. 23—28 (РЖМат, 1988, 2А315).
92. —, *Sehgal S. K.* Units in regular abelian *p*-group rings // J. Number Theory.— 1988.— *30*, № 3.— С. 375—381 (РЖМат, 1989, 4А269).
93. —, —, Units in regular elementary abelian group rings // Arch. Math.— 1986.— *47*, № 5.— С. 413—417 (РЖМат, 1987. 5А258).
94. *Hughes I., Pearson K. R.* The group of units of the integral group ring $ZS_3$ // Can. Math. Bull.— 1972.— *15*, № 4.— С. 529—534 (РЖМат, 1973, 8А219).
95. *Jackson D. A.* The groups of units of the integral group rings of finite metabelian and finite nilpotent groups // Quart. J. Math.— 1969.— *20*, № 79.— С. 319—331 (РЖМат, 1970, 5А180).
96. *Jajodia S., Magurn B. A.* Surjective stability of units and simple homotopy type // J. Pure and Appl. Algebra.— 1980.— *18*, № 1.— С. 45—58 (РЖМат, 1981, 1А417).
97. *Jategaonkar A. V.* Localization in Noetherian rings // Lect. Notes Math. London Math. Soc.— 1986.— XII, № 98.— 324 с. (РЖМат, 1986, 9А204).
98. *Jespers E., Smith P. F.* Integral group rings of torsion-free polycyclic-by-finite groups are maximal orders // Commun. Algebra.— 1985.— *13*, № 3.— С. 669—680 (РЖМат, 1986, 12А296).
99. *Karpilovsky G.* On the isomorphism problem for integral group rings // J. Algebra.— 1979.— *59*, № 1.— С. 1—4 (РЖМат, 1980, 1А300).
100. —, Commutative group algebras.— New York: M. Dekker Inc., 1978.
101. *Kaplansky I.* Problems in the theory of rings revisited // Amer. Math. Mon.— 1970.— *77*, № 5.— С. 445—454 (РЖМат, 1971, 2А216).
102. *Kleinert E.* Einheiten in $Z[D_{2m}]$ // J. Number Theory.— 1981.— *13*, № 4.— С. 541—561 (РЖМат, 1982, 6А218).
103. —, Units in $Z[Q_p]$ // J. Number Theory.— 1987.— *26*, № 2.— С. 227—236 (РЖМат, 1987, 12А182).
104. *Keating M. E.* Whitehead groups of dihedral 2-groups // Lect. Notes Math.— 1982.— *966*.— С. 122—127 (РЖМат, 1983, 9А345).
105. *Kropholder, Linnell, Moody.* Applications of a new K-theoretic theorem to soluble group rings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *104*.— С. 675—684 (РЖМат, 1989, 8А257).
106. *Lewin J.* Projective modules over group-algebras of torsion-free groups // Mich. Math. J.— 1982.— *29*, № 1.— С. 59—64 (РЖМат, 1982, 12А270).
107. *Linnell P. A.* Nonfree projective modules for integral group rings // Bull. London Math. Soc.— 1982.— *14*, № 2.— С. 124—126 (РЖМат, 1982, 9А184).
108. *Magurn B. A.* Whitehead groups of some hyperelementary groups // J. London Math. Soc.— 1980.— *21*, № 1.— С. 176—188 (РЖМат, 1981, 1А416).
109. —, Uses of units in Whitehead groups // Lect. Notes Math.— 1981.— *882*.— С. 261—268 (РЖМат, 1982, 4А426).
110. —, *Oliver R., Vaserstein L.* Units in Whitehead groups of finite groups // Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ.— 1981—1982.— № 27.— 56 с (РЖМат, 1982, 11А314).
111. *Marciniak Z., Ritter J., Sehgal S. K., Weiss A.* Torsion units in integral group rings of some metabelian groups II // J. Number Theory.— 1987.— *25*, № 3.— С. 340—352 (РЖМат, 1987, 8А256).
112. *May W.* Group algebras over finitely generated rings // J. Algebra.— 1976.— *39*, № 2.— С. 483—511 (РЖМат, 1976, 12А356).

113. —, Unit groups and isomorphism theorems for commutative group algebras // Group and Semigroup Rings. Proc. Int. Conf., Johannesburg, 7—13 July, 1985.— Amsterdam e. a., 1986.— C. 163—178 (РЖМат, 1987, 10A183).
114. *McConnell J. C.* The K-theory of filtered rings and skew Laurent extensions // Lect. Notes Math.— 1985.— № 1146.— C. 288—298 (РЖМат, 1986, 5A444).
115. —, *Robson J. C.* Noncommutative Noetherian rings.— Chichester e. a.: John Wiley and Sons, 1987 (РЖМат, 1988, 6A223).
116. *Mitsuda T.* On the torsion units of integral dihedral group rings // Commun. Algebra.— 1986.— *14*, № 9.— C. 1707—1728 (РЖМат, 1987, 3A291).
117. *Moody J. A.* Induction theorems for infinite groups // Bull. Amer. Math. Soc.— 1987.— *17*, № 1.— C. 113—116.
118. *Musson I., Weiss A.* Integral group rings with residually nilpotent unit groups // Arch. Math.— 1982.— *38*, № 6.— C. 514—530 (РЖМат, 1983, 1A233).
119. *Nagasaki I.* Homotopy representation groups and Swan subgroups // Osaka J. Math.— 1987.— *24*, № 2.— C. 253—261.
120. *Oliver R.* $SK_1$ for finite group rings I // Invent. Math.— 1980.— *57*, № 2.— C. 183—204 (РЖМат, 1980, 8A360).
121. —, $SK_1$ for finite group rings II // Prepr. Ser. Math. inst. Aarhus univ. — 1979 / 1980.— *47*, № 25.— C. 195—231 (РЖМат, 1980, 11A280).
122. —. $SK_1$ for finite group rings III // Lect. Notes Math.— 1981.— *854*.— C. 299—337 (РЖМат, 1981, 12A390).
123. —, $SK_1$ for finite group rings IV // Proc. London Math. Soc.— 1983.— *46*, № 1.— C. 1—37 (РЖМат, 1983, 7A372).
124. —, Class groups of cyclic p-groups // Mathematika (Gr. Brit.).— 1983.— *30*, № 1.— C. 26—57 (РЖМат, 1984, 4A413).
125. —, Projective class groups of integral group rings: a survey // Lect. Notes Math.— 1985.— № 1142.— C. 211—232 (РЖМат, 1986, 3A518).
126. —, Central units in $p$-adic group rings // Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ.— 1986—1987.— № 1.— 9 c. (РЖМат, 1987, 5A256).
127. —, $SK_1$ of finite group rings V // Comment. math. helv.— 1987.— *62*, № 3.— C. 465—509 (РЖМат, 1988, 2A378).
128. —, Whitehead groups of finite groups // London Math. Soc. Lect. Notes Ser.— 1988.— № 132.— C. 1—347 (РЖМат, 1989, 2A332).
129. *Passi I. B. S., Sehgal S. K.* Integral group rings // J. Algebra.— 1972.— *23*, № 2.— C. 343—349 (РЖМат, 1973, 5A260).
130. *Passman D. C.* The algebraic structure of group rings.— New York: e. a., John Wiley and Sons, 1977 (РЖМат, 1978, 11A289).
131. —, Group rings, crossed products and galois theory // Reg. Conf. Ser. Math., № 64, Amer. Math. Soc., 1986 (РЖМат, 1986, 12A283).
132. —, Infinite crossed products. Preprint. Mathematics Dept. University of Wisconsin.— 1989.
133. —, *Smith P. F.* Units in integral group rings // J. Algebra.— 1981.— *69*, № 1.— C. 213—239 (РЖМат, 1981, 10A263).
134. *Peterson G. L.* On the automorphism group of an integral group ring I // Arch. Math.— 1977.— *28*, № 6.— C. 577—583 (РЖМат, 1978, 1A252).
135. *Polcino M. C.* The group of units of the integral group ring $Z\bar{D}_4$ // Bol. Soc. brasil. mat.— 1973.— *4*, № 2.— C. 85—92 (РЖМат, 1976, 3A208).
136. —, Integral group rings with nilpotent unit groups // Can. J. Math.— 1976.— *28*, № 5.— C. 954—960 (РЖМат, 1977, 5A176).
137. —, Group rings whose units form an FC-group // Arch. Math.— 1978.— *30*, № 4.— C. 380—384 (РЖМат, 1979, 5A213).
138. —, Group rings whose torsion units form a subgroup // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— *81*, № 2.— C. 172—174 (РЖМат, 1981, 12A251).
139. —, Group rings whose torsion units form a subgroup II // Commun. Algebra.— 1981.— *9*, № 7.— C. 699—712 (РЖМат, 1981, 10A265).
140. —, Units of group rings: a short survey // London Math. Soc. Lect.

Note Ser.— 1982.— № 71.— С. 281—297 (РЖМат, 1983, 9A211).
141. —, Torsion units in group rings and a conjecture of H. J. Zassenhaus // Group and Semigroup Rings. Proc. Int. Conf., Johannesburg, 7—13 July, 1985.— Amsterdam e. a., 1986.— С. 179—192 (РЖМат, 1987, 10A184).
142. —, *Ritter J., Sehgal S. K.* On conjecture of Zassenhaus on torsion units in integral group rings II // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *97*, № 2.— С. 201—206 (РЖМат, 1987, 1A254).
143. —, *Sehgal S. K.* Torsion units in integral group rings of metacyclic groups // J. Number theory.— 1984.— *19*, № 1.— С. 103—114 (РЖМат, 1985, 1A351).
144. *Reiner I.* Projective class groups of symmetric and alternating groups // Linear and Multilinear Algebra.— 1975.— *3*, № 1—2.— С. 147—153 (РЖМат, 1976, 8A528).
145. —, Class groups and Picard groups of group rings and orders // Regional conference serie in Math., 26, CBMS, Amer. Math. Soc., 1976.— С. 1—43.
146. —, *Roggenkamp K. W.* Integral representations and presentation of finite groups // Lect. Notes Math.— 1979.— *744*.— С. 148—273 (РЖМат, 1980, 6A278).
147. *Ritter J., Sehgal S. K.* Integral group rings of some $p$-groups // Can. J. Math.— 1982.— *34*, № 1.— С. 233—246 (РЖМат, 1982, 11A176).
148. —, —, On a conjecture of Zassenhaus on torsion units in integral group rings // Math. Ann.— 1983.— *264*, № 2.— С. 257—270 (РЖМат, 1984, 1A196).
149. —, —, Cetain normal subgroups of units in group rings // J. reine angew. Math.— 1987.— *381*.— С. 214—220 (РЖМат 1988, 6A308).
150. *Roggenkamp K. W.* Structure of integral group rings // Lect. Notes Math. — 1981.— *867*.— С. 421—440 (РЖМат, 1982, 2A263).
151. —, Units in integral metabelian group rings. I. Jackson's unit theorem revisited // Quart. J. Math.— 1981.— *32*, № 126.— С. 209—224 (РЖМат, 1981, 12A252).
152. —, *Scott L. L.* Units in metabelian group rings: non-splitting examples for normalized units // J. Pure and Appl. Algebra.— 1983.— *27*.— С. 299—314 (РЖМат, 1983, 8A219).
153. —, —, Units in group rings: splittings and the isomorphism problem // J. Algebra.— 1985.— *96*, № 2.— С. 397—417 (РЖМат, 1986, 4A304).
154. —, —, The isomorphism problem for integral group rings of finite nilpotent groups // London Math. Soc. Lect. Note Ser.— 1986.— № 121.— С. 291—299 (РЖМат, 1987, 8A260).
155. —, —, Isomorphisms of $p$-adic group rings // Ann. Math.— 1987.— *126*, № 3.— С. 593—647 (РЖМат, 1988, 7A255).
156. *Röhl F.* On the isomorphism problem for integral group-rings of circle-groups // Math. Z.— 1982.— *180*, № 3.— С. 419—422 (РЖМат, 1982, 12A264).
157. *Sandling R.* Note on the integral group ring problem // Math. Z.— 1972.— *124*, № 3.— С. 255—258 (РЖМат, 1972, 6A271).
158. —, Graham Higman's thesis «Units in group rings» // Lect. Notes Math.— 1981.— *882*.— С. 93—116 (РЖМат, 1982, 5A210).
159. —, The isomorphism problem for group rings: a survey // Lect. Notes Math.— 1985.— № 1142.— С. 256—288 (РЖМат, 1986, 4A301).
160. *Scott L.* Recent progress on isomorphism problem // Arcata Conf. Represent. Finite groups: Proc. Summer. Res. Inst., Arcata, Calif., July 7—25, 1986. Pt 1. Providence, RI.— 1987.— С. 259—273 (РЖМат, 1988, 11A219).
161. *Sehgal S. K.* Units in commutative integral group rings // Math. J. Okayama Univ.— 1970.— *14*, № 2.— С. 135—138 (РЖМат, 1972, 1A489).
162. —, On class sums in $p$-adic group rings // Can. J. Math.— 1971.— *23*, № 3.— С. 541—543 (РЖМат, 1972, 2A363).
163. —, Topics in group rings.— New York—Basel: M. Dekker, 1978 (РЖМат 1979, 7A338).
164. —, *Sehgal Sur. K., Zassenhaus H. J.* Isomorphism of integral group rings of abelian by nilpotent class two groups // Commun. Algebra.— 1984.— *12*,

№ 19—20.— С. 2401—2407 (РЖМат, 1985, 5A267).
165. —, *Weiss Al.* Torsion units in integral group rings of some metabelian groups // J. Algebra.— 1986.— *103*, № 2.— С. 490—499 (РЖМат, 1987, 3A290).
166. —, *Zassenhaus H. J.* Group rings whose units form an FC-group // Math. Z.— 1977.— *153*, № 1.— С. 29—35 (РЖМат, 1977, 8A317).
167. —, —, Integral group rings with nilpotent unit groups // Communs Algebra.— 1977.— *5*, № 2.— С. 101—111 (РЖМат, 1977, 12A277).
168. *Sekiguchi K.* On the units of integral group rings // Tokyo J. Math.— 1980.— *3*, № 1.— С. 149—162 (РЖМат, 1981, 1A264).
169. —, On the automorphism group of the *p*-adic group ring of a metacyclic *p*-group II // J. Algebra.— 1986.— *100*, № 1.— С. 191—213 (РЖМат, 1986, 11A268).
170. *Small L. W.*, ed. Noetherian rings and their applications // Math. Surv. and Monogr. № 24.— Providence: Amer. Math. Soc., 1987 (РЖМат, 1988, 6A222).
171. *Stafford J. T.* On the stable range of right Noetherian rings // Bull. London Math. Soc.— 1981.— *13*, № 1.— С. 39—41 (РЖМат, 1981, 6A399).
172. —, Stably free, projective right ideals // Compot. math.— 1985.— *54*, № 1.— С. 63—78 (РЖМат, 1985, 9A139).
173. *Stein M. R.* Whitehead groups of finite groups // Bull. Amer. Math. Soc.— 1978.— *84*, № 2.— С. 201—212 (РЖМат, 1978, 8A420).
174. *Strojnowski A.* A note on U. P. groups // Commun. Algebra.— 1980.— *8*, № 3.— С. 231—234 (РЖМат, 1980, 7A122).
175. —, Idempotents and zero divizors in group rings // Commun. Algebra.— 1986.— *14*, № 7.— С. 1171—1185 (РЖМат, 1987, 2A237).
176. *Swan R. G.* Periodic resolutions for finite groups // Ann. Math.— 1960.— *72*, № 2.— С. 267—291 (РЖМат, 1961, 7A387).
177. —, The Grothendick ring of a finite group // Topology.— 1963.— *2*, № 2. — С. 85—110 (РЖМат, 1965, 12A320).
178. —, Projective modules over Laurent polynomial rings // Trans. Amer. Math. Soc.— 1978.— *237*.— С. 111—120 (РЖМат, 1979, 2A293).
179. —, Projective modules over binary polyhedral groups // J. reine und angew. Math.— 1983.— № 342.— С. 66—172 (РЖМат, 1983, 12A451).
180. —, Torsion-free cancellation over orders // Ill. J. Math.— 1988.— *32*, № 3. — С. 329—360 (РЖМат, 1989, 7A311).
181. —, *Evans E. G.* K-theory of finite groups and orders // Lect. Notes Math.— 1970.— *149*.— 241 с. (РЖМат, 1971, 7A446).
182. *Taylor M. J.* The locally free class groups of prime power order // Ill. J. Algebra.— 1978.— *50*, № 2.— С. 463—487 (РЖМат, 1978, 11A450).
183. —, The locally free classgroup of the symmetric group // J. Math.— 1979.— *23*, № 4.— С. 687—702 (РЖМат, 1980, 7A354).
184. *Ullom S. V.* Nontrivial lower bounds for class groups of integral group rings // Ill. J. Math.— 1976.— *20*, № 2.— С. 361—371 (РЖМат, 1977, 4A411).
185. *Weiss A.* Rigidity of *p*-adic *p*-torsion // Ann. Math.— 1988.— *127*, № 2. — С. 317—332 (РЖМат, 1988. 11A264).
186. *Williamson A.* On the conjugacy classes in an integral group ring // Can. Math. Bull.— 1978.— *21*, № 4.— С. 491—496 (РЖМат, 1979, 8A246).
187. *Yilmaz A.* A characterization of units in $ZS_4$ // Hecettepe Bull. Natur. Sci. and Eng.— 1985—1986.— *14—15*.— С. 41—52 (РЖМат, 1988, 5A177).
188. *Zassenhaus H. J.* On the torsion units of finite group rings // Estud. mat. Lisboa.— 1974.— С. 119—120 (РЖМат, 1976, 9A297).
189. *Ziegenbalg J.* Isomorphe Gruppenringe lokal endlicher Gruppen // J. reine und angem. Math.— 1975.— *277*.— С. 82—88 (РЖМат, 1976, 4A243).

УДК 512.48

# УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

*В. А. Артамонов*

Предлагаемый вниманию читателей обзор составлен по материалам, опубликованным в разделе «Универсальные алгебры» РЖ «Математика» с 1976 по 1988 год. Он непосредственно продолжает обзор [4]. Число опубликованных за эти годы работ по универсальным алгебрам приблизилось к двум тысячам. Поэтому ограниченность объема вынуждает автора отразить лишь те основные направления и работы, которые, по его мнению, являются наиболее яркими и перспективными. Та же ограниченность объема диктует необходимость сокращения списка литературы, в который включены лишь работы, относящиеся к направлениям, отраженным в обзоре. Полный список литературы может быть легко восстановлен с помощью сводных томов «Математика 13», годовых авторских и систематическо-предметных указателей. Кроме того, достаточно полные списки литературы по разделам универсальной алгебры можно найти в монографиях и обзорах, вышедших после 1975 года.

Среди монографий в первую очередь можно выделить вторые издания книг Гретцера [340], Кона [225], весьма содержательные и небольшие по объему книги [107], [199], а также [33], [34], [102], [198], [258], [312], [453], [555]. Из обзоров можно указать [7], [11], [109], [133], [320], [321], [341], [381], [383], [405] и др. В настоящем обзоре, как правило, не затрагиваются темы, изложенные в [107], [109], [199].

В разделе «Универсальные алгебры» реферативного журнала публиковались многочисленные рефераты по специальным классам алгебр: BCK-алгебрам, решеткам с дополнительными операциями, мультиоператорным группам, генетическим алгебрам и т. д. В обзоре отражены лишь те из этих исследований, в которых рассматриваются универсально-алгебраические вопросы: изучение многообразий, конгруэнций, эндоморфизмов и т. д., но не включены работы по топологическим алгебрам, частичным алгебрам, теории моделей.

В обзоре за основу взята терминология и обозначения из [5], [199]. Всюду через $\operatorname{Con} A$, $\operatorname{Sub} A$ обозначается решетка конгруэнций и подалгебр в алгебре $A$. Универсальная алгебра сигнатуры $T=(T_n,\ n\geqslant 0)$ называется *унарной*, если $T_n$ непусто в том и только в том случае, если $n=1$. Унарная алгебра является *унаром*, если $T_1$ одноэлементно. Унарные алгебры часто также называются *полигонами*. Универсальная алгебра $A$ сигнатуры $T$ называется *аффинной*, если в $A$ существует такая структура абелевой аддитивной группы, что для любых $t\in T_n$, $n\geqslant 1$, $x, y\in A^n$, выполнено равенство $t(x)+t(y)=t(x+y)+t(0)$. Другими словами, $A$ является модулем над некоторым кольцом $R$, причем если $t\in T_n$, $n\geqslant 1$, $x=(x_1, \ldots, x_n)\in A^n$, то $t(x)=a_1x_1+ +\ldots+a_nx_n+a_0$, где $a_i\in R$. В случае, когда $R$ — поле и все операции из $T$ идемпотентны (т. е. $a_0=0$, $a_1+\ldots+a_n=1$), аффинная алгебра $A$ называется *аффинным пространством*. Ограниченная решетка $A$ с унарной операцией $x^*$ называется *р-алгеброй*, если для любых $x, y\in A$ из $x\wedge y=0$ вытекает $y\leqslant x^*$. Если дуальная к $A$ решетка также является $p$-алгеброй с унарной операцией $x^+$, то $A$ называется *двойной р-алгеброй*. Эти алгебры дистрибутивны (модулярны и т. д.), если таковой является решетка $A$. Дистрибутивная решетка с единицей называется *алгеброй Браувера*, если в ней имеется бинарная операция $x\to y$, причем $a\leqslant x\to y$ в том и только в том случае, если $a\wedge x\leqslant y$. Алгебра Браувера с нулем называется *алгеброй Хейтинга*. *Алгеброй Оккама* называется ограниченная решетка с антиэндоморфизмом. ВСК-*алгеброй* называется алгебра с одной бинарной операцией $xy$ и нульарной операцией 0, причем, если положить $x\leqslant y$ при $xy=0$, то 1) $(yx)(xa)\leqslant ay$, 2) $x(xy)\leqslant y$, 3) $x\leqslant x$, 4) $x\leqslant y$ и $y\leqslant x$ влечет $x=y$, 5) $0\leqslant x$. Алгебра $A$ сигнатуры $T$ называется *абелевой* в смысле А. Г. Куроша, если все операции из $T_0$ выделяют в $A$ один и тот же элемент, являющийся подалгеброй. Кроме того, если $t\in T_n$, $s\in T_r$ и $x_{ij}\in A$, $1\leqslant i\leqslant \leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant n$, то $s(t(x_{11},\ldots,x_{1n}),\ldots,t(x_{r1},\ldots,x_{rn}))= =t(s(x_{11}, \ldots, x_{r1}), \ldots, s(x_{1n}, \ldots, x_{rn}))$.

Алгебра $A$ сигнатуры $T$ является *редуктом* алгебры $A$ сигнатуры $S$, если каждая операция из $T$ является главной производной операцией относительно сигнатуры $S$.

Пусть задана система $T$-алгебр $A_i$, $i\in I$, причем множество индексов $I$ является $T$-алгеброй. Предположим, что для любых $i_1, \ldots, i_n\in I$ и любого $t\in T_n$ имеется гомоморфизм $T$-алгебр $A_{i_j}\to A_{t(i_1,\ldots,i_n)}$ и выполняются необходимые условия согласования, связывающие коммутативность диаграмм с суперпозицией операций. Объединение $A=\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ естественным образом превращается в $T$-алгебру и называется *агассиз-суммой* алгебр $A_i$, $i\in I$. В случае, когда $I$ является полурешеткой, причем $t(i_1,\ldots,i_n)=i_1\wedge\ldots\wedge i_n$ для любого $t\in T_n$, агассиз-сумма называется *суммой Плонки*.

Под классом универсальных алгебр понимается класс алгебр одной сигнатуры, замкнутый относительно изоморфизма. Класс $K$ имеет *определимые главные конгруэнции*, если существует такая формула $\Phi(x, y, z, u)$ узкого исчисления предикатов сигнатуры класса $K$, что в любой $K$-алгебре $A$ для любых элементов $a, b, c, d \in A$ пара $(c, d)$ лежит в главной конгруэнции $\Theta(a, b)$ в том и только в том случае, если истинно $\Phi(a, b, c, d)$.

*Строгим мальцевским условием* называется формула второй ступени высказываний вида $(\exists p_0, \ldots, p_n)H$, где $H$ — конъюнкция равенств от полиномиальных символов $p_0, \ldots, p_n$. *Мальцевским условием* называется счетная дизъюнкция строгих мальцевских условий $S_i$, $i \geqslant 1$, причем $i \geqslant j$ влечет $S_i \Rightarrow S_j$. *Слабым мальцевским условием* называется конъюнкция мальцевских условий.

*Спектром класса $K$* называется набор порядков конечных $K$-алгебр. Спектр многообразия всегда является мультипликативным подмоноидом в моноиде натуральных чисел.

Предположим, что $A$ — некоторая $T$-алгебра и $B$ — булева алгебра, причем $B$ — полная алгебра, если $A$ бесконечна. Рассмотрим множество $A[B]$ всех таких отображений $p$ из $A$ в $B$, что 1) если $x \neq y \in A$, то $p(x) \wedge p(y) = 0$; 2) $\vee p(a) = 1$. Множество $A[B]$ превращается в $T$-алгебру следующим образом: если $n \geqslant 0$, и $p_1, \ldots, p_n \in A[B]$, то для $t \in T_n$ через $t(p_1, \ldots, p_n)$ обозначается отображение $A$ в $B$, при котором для $a \in A$ выполнено равенство $t(p_1, \ldots, p_n)(a) = \bigcup [p_1(x_1) \wedge \ldots \wedge p_n(x_n)]$, где объединение берется по всем таким наборам $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$, что $t(x_1, \ldots, x_n) = a$. Алгебра $A[B]$ называется *булевой степенью* или *булевым расширением* алгебры $A$.

## § 1. Многообразия и другие классы универсальных алгебр

Класс $K$ назовем *дистрибутивным* (*модулярным*, *перестановочным*, *$n$-перестановочным*), если для алгебры $A$ из $K$ решетка $\mathrm{Con}\, A$ дистрибутивна (соответственно, модулярна, перестановочна, $n$-перестановочна). Напомним, что $n$-перестановочность означает, что для любых $c, c' \in \mathrm{Con}\, A$ выполнено равенство

$$\underbrace{c \cdot c' \cdot c \cdot \ldots}_{n} = \underbrace{c' \cdot c \cdot c' \cdot \ldots}_{n}$$

Для любого класса $K$ через $\mathrm{Si}\, K$ обозначается класс всех подпрямо неразложимых $K$-алгебр. Для произвольного класса $K$ через $\mathrm{S}K$, $\mathrm{P}K$, $\mathrm{H}K$, $P_uK$ обозначаются классы алгебр, изоморфных соответственно всем подалгебрам, прямым произведениям, факторалгебрам, ультрапроизведениям алгебр из $K$. Для (квази-) многообразия $K$ через $L(K)$ (соответственно $L_q(K)$) обозначается решетка под- (квази-) многообразий в $K$. Эта решетка алгебраична. Тождество $u = v$ называется *регулярным*, если в запись слов $u$ и $v$ входят одни и те же переменные. Напомним также, что в решетке $L$ элемент $a$ покрывает элемент $b$, если $b<a$ и из неравенств $b\leqslant x\leqslant a$ следует либо $a=x$, либо $b=x$.

**1.1. Решетки (квази-) многообразий.** Обзоры по этой теме опубликованы в [7], [11], [133]. Остановимся на работах, не вошедших в эти обзоры.

В статье [244] рассматривается дистрибутивное многообразие $K$, порожденнное конечной алгеброй $A$. В $\mathrm{Si}\,K$ вводится отношение $B\leqslant C$, если $B\in\mathrm{HS}(C)$. Таким образом, в $\mathrm{Si}\,K$ можно говорить об идеалах. Показывается, что $L(K)$ является конечной дистрибутивной решеткой, изоморфной решетке идеалов в $\mathrm{Si}\,K$. С помощью этого результата в [190] описывается решетка многообразий алгебр Оккама с тождеством $x\wedge x^{00}=x$. В этой решетке 20 элементов.

В решетке $L$ всех многообразий двойных дистрибутивных $p$-алгебр любой собственный фильтр континуален [291]. Если $K$ — собственное многообразие, порождаемое конечной алгеброй, то $K$ имеет в $L$ бесконечное число покрытий, причем среди этих покрытий могут быть многообразия, не порождаемые конечной алгеброй.

Решетка $A$ с оператором замыкания $\overline{x}$ называется модальной алгеброй, если $\overline{x\wedge\overline{y}}=\overline{x}\wedge\overline{y}$. В [172] показано, что подпрямо неразложимые модальные алгебры и только они являются пополнениями дистрибутивных решеток $D$ с единицей 1 при помощи внешней единицы $1$, причем $\overline{1}=1$ и $\overline{d}=d\in D\setminus 1$. Кроме того, если $a$, $b\in D$ и $a+x=1$ в $D$ тогда и только тогда, когда $b+x=1$, то $a=b$. Из этого описания вытекает, что решетка многообразий модальных алгебр является ординарной суммой $2^2+\omega+1$, где $1$ — внешняя единица. В работе [97] рассматриваются многообразия HRI-алгебр, т. е. алгебр Хейтинга с унарной операцией $\sim a$, причем

$$\sim(a\vee b)=(\sim a)\wedge(\sim b),\quad \sim\sim a=a,\quad \sim\neg a=\neg\neg a,$$

где $\neg a=a\to 0$. Показано, что решетка многообразий таких алгебр конечна и каждое многообразие порождается одной из восьми подпрямо неразложимых конечных HRI-алгебр.

Многообразия правоальтернативных неассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики с дистрибутивной решеткой подмногообразий описаны В. Д. Мартиросяном [94]. Каждое такое многообразие задается тождествами третьей степени. Характеризация решеток многообразий унарных алгебр получена С. Р. Когаловским [74]. Отмечено, что такая решетка может быть устроена как угодно сложно.

Пусть $R(K)$ — множество всех регулярных тождеств, выполненных в многообразии $K$. Обозначим через $K'$ многообразие, заданное $R(K)$. Тогда $K'$ покрывает $K$ в решетке всех многообразий заданной сигнатуры. При этом $L(K')$ является прямым произведением $L(K)$ и двуэлементной цепи [284], [334]. Уточнение этого результата в случае, когда сигнатура состоит из нульарных и унарных операций, получена в [513]. Предположим, что в сигнатуре $T$ нет нульарных символов. Обозначим через $R$ (соответственно $N$) многообразия $T$-алгебр, все тождества которых регулярны (соответственно не все тождества регулярны). Тогда $R$, $N$ — подрешетки в решетке многообразий всех $T$-алгебр. Если $V \in N$, то существует конечная $T$-алгебра $A$, не лежащая в $V$. Естественное отображение $V \to V'$ задает вложение верхних полурешеток $N \to R$ [514].

Пусть сигнатура $T$ не содержит нульарных операций. Если $t \in T_n$, положим

$$u_1 = t,\ u_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) = t(u_i(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_i(x_1, \ldots, x_n)).$$

Предположим, что $K$ — многообразие $T$-алгебр, в котором выполнен набор тождеств $X$:

$$t(x_1, \ldots, x_n) = t(u(x_1, \ldots, x_1), \ldots, u(x_n, \ldots, x_n)),$$
$$t(x_1, \ldots, x_n) = t(u_i(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_i(x_1, \ldots, x_n)),\ i \geqslant 2,$$

для всех $t \in T_n$, где $u$ — некоторое слово, не являющееся переменной. Пусть $B$ — базис тождеств для $K$ и $B'$ — пополнение $X$ с помощью регулярных тождеств из $B$, а также с помощью тождеств вида $u(w, \ldots, w) = u(v, \ldots, )v)$, где $w = v$ — тождество из $B$, причем в $w$ и $v$ входят разные множества переменных. Тогда многообразие, задаваемое системой тождеств $B'$, состоит из всех таких $T$-алгебр $A$, что в $A$ имеется такая конгруэнция $c$, для которой $A/c \in K$, и ограничение $c$ на подалгебру всех значений операций $T$ в $A$ тождественно [530].

Предположим, что $V$ — минимальное многообразие $T$-алгебр, $K$ — такое многообразие $T$-алгебр, что для любой $T$-алгебры $A \in (V \cup K) \setminus K$ в $A^2$ найдется такая конгруэнция $c$, что $A^2/c \in V$. Тогда $V \cup K$ покрывает $K$ [285].

Решетка $L$ самодуальна, если в $L$ имеется антиизоморфизм. Пусть $V$ (квази-)многообразие, причем либо $V$ перестановочно, либо в $L(V)$ (соответственно в $L_q(V)$) выполнено квазитождество $b \wedge c = 0 \to (a \vee b) \wedge c = a \not> c$. Тогда следующие условия эквивалентны [36]:

а) если $U$ — под(квази-)многообразие в $V$, то решетка $L(U)$ (соответственно $L_q(U)$) самодуальна;

б) $L(U)$ (соответственно $L_q(U)$ является прямым произведением конечного числа конечных цепей. Предположим, что $W$ — такое (квази-)многообразие алгебр, что в каждой $W$-алгебре каждая нетривиальная конгруэнция обладает нетривиальным классом, являющимся подалгеброй. Тогда следующие условия эквивалентны: а) решетка $L(W)$ (соответственно $L_q(W)$) с дополнениями; б) решетка $L(W)$ (соответственно $L_q(W)$) булева; в) $W$ является объединением конечного числа минимальных (квази-)многообразий [37]. Для локально конечного многообразия $V$ следующие условия эквивалентны [454]: а) решетка $L(V)$ конечна; б) $L(V)$ удовлетворяет условиям максимальности и минимальности; в) $V$ содержит лишь конечное число конечных критических алгебр. Рассмотрим группоид $M$, заданный на поле вычетов по модулю 3 с помощью операции умножения $x \cdot y = 2x^2y(x+y+1)$. Тогда многообразие $V$, порожденное $M$ не удовлетворяет ни условию максимальности, ни условию минимальности для подмногообразий [480]. Более того, решетка $L(V)$ континуальна [481].

Пусть $T$ — некоторая сигнатура и $a$, $b$ — два слова сигнатуры $T$ в алфавите $X$. Предположим, что тождество $a=b$ нерегулярно. Тогда многообразие $T$-алгебр, заданное этим тождеством, неразложимо в объединение в многообразии всех $T$-алгебр в том и только в том случае, когда $T=T_0$ [377]. Предположим, что тождество $a=b$ регулярно, причем $f(a)$ и $g(b)$ не являются подсловами в $b$ и $a$ для любых унарных слов $f$ и $g$. Тогда многообразие $T$-алгебр, заданное тождеством $a=b$, неразложимо в объединение. Пусть, наконец $f(a)$ — подслово в $b$ и $g(b)$ — подслово в $a$. Многообразие, заданное регулярным тождеством $a=b$, неразложимо в объединение в том и только том случае, если $b$ получается из $a$ с помощью перестановки переменных, причем эта перестановка имеет простой порядок.

В работе [401] для ряда многообразий $p$-алгебр $V$ изучаются расщепляющие алгебры, т. е. подпрямо неразложимые $V$-алгебры $A$, для которых существует наибольшее подмногообразие $U \subseteq V$, не содержащее $A$. Доказана конечность таких $p$-алгебр.

Пусть $K$ — многообразие универсальных алгебр с определимыми главными конгруэнциями. Тогда в $K$ любая конечно представимая подпрямо неразложимая $K$-алгебра расщепляема в $K$ [185]. Если в $K$ число основных операций конечно, то любая подпрямо неразложимая конечная $K$-алгебра расщепляющая. Предположим, что $K$ — локально конечное многообразие и $A$ — такая подпрямо неразложимая $K$-алгебра, что для любого гомоморфизма $p: B \to A$, $B \in K$, существует такая конечная подалгебра $C$ в $B$, что $p(C)=p(B)$. Если многообразие $K$ перестановочно, то алгебра $A$ расщепляющая [249] (см. также [1]).

В решетке многообразий всех моноидов многообразие, задаваемое тождествами

$$x_0{}^2x_1{}^2\ldots x_n{}^2x_0 = x_0x_1{}^2\ldots x_n{}^2x_0{}^2,\ n \geqslant 0,$$

не имеет покрытий [516]. Существуют такие многообразия полугрупп $U$, что в решетке $L(U)$ есть элементы, не обладающие покрытиями. Отметим, что решетка многообразий ВСК-алгебр дистрибутивна, [487].

Интересен цикл работ В. А. Горбунова, В. И. Туманова В. П. Белкина по решеткам квазимногообразий алгебраических систем. В статье [17] доказана континуальность любого нетривиального фильтра в решетке квазимногообразий алгебр сигнатуры $T$, если $T$ содержит либо два унарных символа, либо операцию арности не меньше двух. Аналогичный результат верен для квазимногообразий луп, квазигрупп, групп. Любая подпрямо неразложимая конечноопределенная группа удовлетворяет некоторому квазитождеству, причем в множестве таких групп нет универсальной группы. В любой решетке $L_q(V)$ выполнено квазитождество

$$x\vee y=x\vee z\to x\vee y=x\vee(y\wedge z) \qquad (1)$$

[48]. Поэтому модулярная решетка $L_q(V)$ дистрибутивна. Если решетка $L_q(V)$ с относительными дополнениями, то она булева. Конечная решетка $L_q(V)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда в нее не вкладывается фиксированная семиэлементная решетка. Решетка $L_q(V)$ дистрибутивна, если выполнено одно из следующих условий: а) конечно порожденные подпрямо неразложимые системы из $V$ проективны; б) любое подквазимногообразие в $V$ задается тождествами. Пусть $V$ локально конечное квазимногообразие конечной сигнатуры. Решетка $L_q(V)$ есть решетка с псевдодополнениями в том и только в том случае, когда в $L_q(V)$ выполнено квазитождество, двойственное к (1). Если в $L_q(V)$ любой элемент обладает покрытием, то конечность $L_q(V)$ эквивалентна тому, что $V$ порождается конечным множеством конечных систем. Булева алгебра изоморфна решетке вида $L_q(V)$ [53] в том и только в том случае, если она не более чем счетна и изоморфна решетке всех подмножеств некоторого множества. Любая свободная решетка вложима в решетку $L_q(V)$ для некоторого $V$.

Предположим, что $K$ — квазимногообразие алгебраических систем, и $A$ — такая конечно порожденная $K$-система, что любое подквазимногообразие в $K$ порождается факторсистемами системы $A$. Обозначим через $C_K(A)$ множество всех таких конгруэнций $c$ в $A$, что $A/c\in K$. Тогда $C_K(A)$ замкнуто в Con $A$ относительно пересечений и объединений возрастающих цепей [54]. Решетка $L_q(K)$ совпадает с решеткой подмножеств $M$ в $C_K(A)$, обладающих следующими свойствами: а) $M$ замкнуто относительно пересечений и объединений возрастающих цепей; б) если $a\in C_K(A)$, $b\in M$, и $A/a\leqslant a/b$, то $a\in M$. В частности, если $A$ свободная $K$-алгебра счетного ранга, то в условии б) можно ограничиться требованием $A/a\simeq A/b$.

Отметим, что каждая конечная дистрибутивная решетка реализуется в виде $L_q(V)$ для некоторого конечно базируемого локально конечного квазимногообразия $V$ конечной сигнатуры [132]. Двуэлементная алгебра конечной сигнатуры порождает минимальное квазимногообразие [49].

Квазимногообразия унаров изучались В. К. Карташовым. В [65] найдены условия конечности решетки подквазимногообразий унаров. Показано существование континуума квазимногообразий унаров, не имеющих независимого базиса квазитождеств. Найдены условия (полу-)дистрибутивности, булевости, существования псевдодополнений в $L_q(V)$ [70]. Отметим также, что решетка многообразий алгебр сигнатуры $T = T_0 \cup T_1$ изучалась в [513]. Категоричные многообразия унарных алгебр описаны Е. Б. Кацовым [72]. Отметим, в связи с этим, обзор [405].

М. В. Сапиром [117] описаны локально конечные многообразия $V$ групп, колец, полугрупп, у которых решетка $L_q(V)$ конечна. Критерий дистрибутивности решетки $L_q(V)$, где $V$ — многообразие алгебр Хейтинга, найден в [289]. В работе [290] строится серия алгебр $A_n$ порядка $n \geqslant 1$, порождающих полупримальные многообразия $V_n$, причем не существует нетривиального решеточного тождества, выполненного во всех решетках $L_q(V_n)$. В работах [170], [171] описаны решетки многообразий дистрибутивных ограниченных алгебр Оккама, задаваемых соответственно тождествами $x^0 = x^{000}$ и $x \wedge x^{00} = x$. В первом многообразии имеется 12 подпрямо неразложимых алгебр, и, следовательно, решетка подмногообразий в нем конечна. Аналогичный результат верен и для второго многообразия. В статье [183] исследуются условия конечности $L_q(V)$ для квазимногообразия $V$ специальных алгебр. Решетки квазимногообразий рассматриваются также в работах [39], [41], [55], [68]. Отметим статью [61], в которой изучаются многообразия универсальных алгебр, в которых каждое подквазимногообразие является подмногообразием.

Ряд работ посвящен изучению решеток универсальных классов алгебр. Пусть $L$ — решетка универсальных классов унаров, $U \in L$. Тогда следующие условия эквивалентны [40]:

1) существует такое конечное множество $X$ в $L$ покрытий $U$, причем если $W \in L$ и $W > U$, то $W \geqslant W_0$ для некоторого $W_0 \in X$;

2) существует такой конечный класс $H$ конечных унаров, что $U$ состоит из всех унаров, в которые не вложим ни один унар из $H$. Предположим, что универсальный класс $U \in L$ порождается конечным классом $K$ конечно порожденных унаров. Тогда следующие условия эквивалентны.

3) существует не обязательно конечное подмножество $X$ в $L$ со свойством 1) и независимое в решетке $L$;

4) в $K$ содержится бесконечный унар.

Таким образом, универсальный класс $U$, порождаемый конечным множеством конечно порожденных унаров, задается конечной независимой системой универсальных формул тогда и только тогда, когда все унары из $K$ конечны. Предположим, что $L$ — решетка универсальных классов алгебраических систем конечной сигнатуры и $U \in L$. Тогда $U$ неразложимо в объединение в $L$ в том и только в том случае, если $U$ порождается одной системой [41]. Класс $U$ вполне неразложим в пересечение в $L$ тогда и только тогда, когда $U$ является наибольшим универсальным классом, состоящим из систем, в которые не вложима фиксированная конечно порожденная система. Отметим, что в решетке $L$ универсальных классов нет максимальных элементов.

В работе [521] строится пример многообразия $V$ универсальных алгебр, обладающего следующими свойствами:

а) конечные $V$-алгебры порождают арифметическое многообразие $K$ в $V$;

б) существует универсальное предложение, истинное в $K$, но не истинное в $V$.

Универсальные классы монадических алгебр рассматриваются в [450]. Близкие вопросы исследуются в работах [31], [64], [118].

Ряд работ посвящен изучению независимых многообразий алгебр. Многообразия $K_1, \ldots, K_n$ называются независимыми, если существует такое слово $p(x_1, \ldots, x_n)$, что $p(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ — тождество в $K_i$, $i=1, \ldots, n$. При $n=2$ это эквивалентно тому, что $K_1 \cap K_2$ одноэлементно, $K_1 \cup K_2 = K_1 \times K_2$, и выполнены некоторые ограничения на конгруэнции алгебр из $K_1 \cup K_2$ [269], [270]. При любом $n$ независимость эквивалентна тому, что любая подалгебра в $A_1 \times \ldots \times A_n$, $A_i \in K_i$, представима в виде прямого произведения алгебр из $K_1, \ldots, K_n$, и любая конгруэнция в $A_1 \times \ldots \times A_n$ разлагается в прямое произведение конгруэнций $A_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ [579]. В [228] рассматриваются независимые многообразия BCI-алгебр (обобщений BCK-алгебр), см. также [509].

Важным направлением в теории решеток (квази-)многообразий алгебр является описание атомов этих решеток, т. е. минимальных или (квази-)эквациально полных (квази-)многообразий. В [379] описаны все простые дистрибутивные группоиды, т. е. группоиды, в которых выполнены тождества $(ab)c = (ac)(bc)$, $a(bc) = (ab)(ac)$. Список таких группоидов исчерпывается следующим:

1) двуэлементный группоид с нулевым умножением;

2) двуэлементный группоид правых (левых) нулей;

3) двуэлементная решетка;

4) группоид $H(q, a)$, определенный на поле $\mathbf{F}_q$ из $q$ элементов с помощью операции $x * y = ax + (1-a)y$, где $a \in F_q \setminus (0, 1)$, причем $\mathbf{F}_q$ порождается над своим простым подполем элементом $a$. Отмечается, что $H(q, a) \simeq H(q', a')$ тогда и только тогда, когда $q = q'$ и $a' = a^{p^k}$, где $q$ — степень простого числа $p$. Каждый из простых группоидов порождает минимальное многообразие дистрибутивных группоидов, и таким образом получаются все минимальные многообразия таких группоидов. Описаны тождества этих многообразий.

Аналогичное описание минимальных многообразий $(m, n)$-колец, $n$-групп и $n$-полугрупп дано в [9]. Нетрудно видеть, что минимальными многообразиями $n$-групп и $n$-полугрупп являются многообразия, задаваемые тождествами а) $x_1 \ldots x_n = y_1 \ldots y_n$; б) $x_1 \ldots x_n = x_1$;

в) $x_1 \ldots x_n = x_n$; г) $x^i y^{n-i} = x^j y^{n-j}$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$, $x^n = x$.

В [9] показывается, что минимальное многообразие $n$-групп и $n$-полугрупп, отличное от а)—г), порождается $n$-группой $\mathbf{A}$ следующего вида. Пусть $H$ — циклическая группа порядка $n-1$ с образующей $x$, $p$ — простое число. Тогда $A$ — неприводимый $\mathbf{F}_p H$-модуль, в котором введена $n$-арная операция

$$a_1 \ldots a_n = a_1 + x a_2 + \ldots + x^{n-1} a_n.$$

Обратно, многообразие, порождаемое такой $n$-группой, является минимальным. Минимальное многообразие $(m, n)$-колец порождается одной из следующих конечных алгебр $A$:

1) $A = \mathbf{F}_q$ — конечное поле из $q$ элементов, порождаемое над своим простым подполем элементом $a$, причем операции $n$-арного сложения и $m$-арного умножения имеют, соответственно, вид $x_1 + \ldots + x_n$ и $a x_1 \ldots x_m$;

2) $A = \mathbf{F}_q$ как и в 1), причём характеристика поля $p$ делит $m-1$, а операции $n$-арного сложения и $m$-арного умножения имеют вид соответственно $x_1 + \ldots + x_n$ и $x_1 + a x_2 + \ldots + a^{m-1} x_m$;

3) $A = \mathbf{F}_p$, $p$ просто и делит $m-1$, причём $n$-арная операция сложения и $m$-арная операция умножения имеют соответственно вид $x_1 + \ldots + x_n$ и $x_1$ (или $x_m$).

Обратно, каждое из $(m, n)$-колец вида 1)—3) порождает минимальное многообразие. Отметим, что построенные $n$-группы и $(m, n)$-кольца $A$, порождающие минимальные многообразия, являются простыми и могут содержать лишь одноэлементные подалгебры. Порождаемые ими многообразия перестановочны.

В работе [499] построены минимальные локально конечные дистрибутивные многообразия алгебр без свойства амальгамируемости. Примеры локально конечных бесконечно аксиоматизируемых многообразий группоидов приведены в [498]. Континуум минимальных многообразий $\Omega$-группоидов построен в работе [136], (см. также [115]). Предположим, что $K$ — минимальное многообразие алгебр, причём в любой $K$-алгебре любая подалгебра является классом некоторой конгруэнции, и каждая конгруэнция содержит класс, являющийся подалгеброй. Если $K$ абелево в смысле А. Г. Куроша, то $K$ рационально эквивалентно (в смысле А. И. Мальцева) либо многообразию векторных пространств над полем, либо многообразию аффинных пространств [234] (см. также [286], [364], [497]).

Многообразие $K$ алгебр конечной сигнатуры $T$ называется ограниченным, если существует такое натуральное число $m$, что в $K$ любой терм эквивалентен терму длиной не больше $m$. Зафиксируем некоторое слово $e = x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ из свободной полугруппы, не являющееся степенью. Если $M$ — произвольное множество, то в $M^n$ введём $n$-арную операцию $t$, полагая

$$t\left((a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nn})\right) = (a_{1i_1}, \ldots, a_{ni_n}).$$

В работе [378] показано, что $n$-группоиды $(M^n, t)$ образуют минимальное ограниченное многообразие $V_e$. Находятся тождества, определяющие это многообразие, и доказывается, что любое минимальное ограниченное многообразие $n$-группоидов либо имеет вид $V_e$ для некоторого слова $e$, либо задаётся тождеством $t(x_1, \ldots, x_n) = t(y_1, \ldots, y_n)$. Многообразие $V_e$ для разных $e$ эквивалентны как категории. Все многообразия вида $V_e$ независимы.

Предположим, что $K$ — минимальное локально конечное многообразие и $A$ — алгебра из $K$, имеющая наименьший неединичный порядок. Тогда алгебра $A$ проста и каждая собственная подалгебра в $A$ одноэлементна. Конечная алгебра $A$ с этими свойствами называется *плейн-алгеброй* [9], [555]. Таким образом, каждое минимальное локально конечное многообразие порождается плейн-алгеброй. Обратно, если плейн-алгебра $A$ идемпотентна, то она порождает минимальное многообразие $K$, причём Si $K=A$, и если сигнатура в $A$ конечна, то $K$ конечно базируемо [565] (см. также [9]).

Интересный аспект теории многообразий универсальных алгебр различных сигнатур изучается в [312]. Пусть $V$ и $W$ — многообразия алгебр сигнатур $T$ и $S$. Скажем, что $V \leqslant W$, если существует функтор $W \to V$, сохраняющий носители алгебр. Другими словами, каждому $t \in T_n$, $n \geqslant 0$, сопоставлено слово $f_t(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры $S$, причём если $(A, S) \in W$, то $(A, (f_t, t \in T)) \in V$. Предположим, что $C$ и $D$ — клоны главных производных операций свободных алгебр счётного ранга в $V$ и $W$. Тогда условие $V \leqslant W$ эквивалентно тому, что задан гомоморфизм клонов $C \to D$. Положим $V \sim W$, если $V \leqslant W$ и $W \leqslant V$. Таким образом, возникает решетка $L$ классов эквивалентных многообразий. Показано, что в $L$ объединение классов $[V] \vee [W]$ совпадает с образом свободного произведения $V * W$, $[V] \wedge [W] = [V \times W]$. Решетка $L$ не модулярна. Элемент $a$ решетки $L$ называется $\wedge$-примарным, если из $x \wedge y \leqslant a$ в $L$ вытекает либо $x \leqslant a$, либо $y \leqslant a$. Показано, что образы следующих многообразий в $L$ являются $\wedge$-примарными: 1) абелевы группы фиксированной простой экспоненты; 2) полурешетки; 3) любое многообразие, порождённое конечными решетками; 4) ограниченные дистрибутивные решетки; 5) любое многообразие унарных алгебр. Элемент $a$ решетки $L$ называется $\wedge$-неприводимым, если из $x \wedge y = a$ в $L$ вытекает либо $x = a$, либо $y = a$. Доказывается, что в $L$ образы следующих многообразий $\wedge$-неприводимы: 1) все группы; 2) все абелевы группы; 3) кольца с единицей; 4) модулярные решетки; 5) векторные пространства. Предположим, что многообразие $K$ порождается конечной алгеброй, порядок которой содержит $n$ простых множителей. Если образ $K$ в $L$ содержит пересечение $n+1$ элемента, то образ $K$ содержит пересечение $n$ из этих элементов. Фильтр в $L$ называется мальцевским, если он порождён образами счетного числа конечно базируемых многообразий конечного типа. Мальцевский фильтр конгруэнцрегулярных многообразий (т. е. в каждой алгебре многообразия любая конгруэнция определяется любым своим классом) примарен. Фильтр конгруэнц-равномерных многообразий (т. е. в каждой алгебре многообразия все классы каждой конгруэнции равномощны) не примарен. Фильтр дистрибутивных многообразий является собственным пересечением двух мальцевских фильтров.

В [449] показано, что существуют только две интерпретации $K \to H$, тривиальная и дуальная, многообразия $K$ ограниченных дистрибутивных решеток в многообразии $H$ алгебр Хейтинга. Существует только тривиальная интерпретация $H$ в $H$ (см. также [92], [93], [141], [547]. Пусть $K_n$ — многообразие алгебр Хейтинга, порождаемое алгеброй Хейтинга, заданной на $n$-элементной цепи. Тогда не существует интерпретации $K_n$ в $K_{n+1}$ [571]. В многообразии $K$ всех модальных алгебр рассмотрим подмногообразия $T$, $B$, $M$, которые задаются соответственно тождествами $\bar{x} \leqslant x$, $\bar{x} \leqslant \bar{\bar{x}}$, $(\bar{\bar{x}}')' \leqslant x$. Тогда $T \wedge M$ — многообразие монадических алгебр. В [450] показано, что существуют четыре интерпретации многообразия ограниченных дистрибутивных решеток и булевых алгебр в $T \wedge M$. Существуют восемь интерпретаций $T$, $B \wedge T$ и $T \wedge M$ в $T \wedge M$.

**1.2. (Квази-)многообразия с условиями конечности.** В этой части рассматриваются результаты по конечной базируемости, по многообразиям, порождаемым конечными алгебрами, спектры многообразий и т. д. Напомним, что конечная алгебра конечной сигнатуры, порождающая дистрибутивное многообразие, конечно базируема [152], [194]. В то же время конечная решетка может не иметь конечного базиса квазитождеств, [35], [555]. Если $K$ — дистрибутивное многообразие конечной сигнатуры, причём класс Si $K$ строго элементарен, то $K$ конечно базируемо [382]. Предположим, что многообразие универсальных алгебр $H$ порождается конечной алгеброй, причём в любой $H$-алгебре решетка подалгебр дистрибутивна. Тогда $H$ конечно базируемо [549].

В статье [461] строятся бесконечные цепи бесконечно базируемых многообразий, порождаемых конечными алгебрами. Отметим, что многообразие, порождённое конечным группоидом, может содержать континуум подмногообразий [288], [481]. Более того, в [463] строятся конечные конечно базируемые группоиды $A$ со следующим свойством: любое локально конечное многообразие, содержащее $A$ и не порождаемое $A$, является бесконечно базируемым.

Объединения конечно базируемых многообразий алгебр рассматриваются в работах [590], [600]. Пусть $V$ — многообразие алгебр сигнатуры $T$, причём $T_1 = T_0 = \varnothing$ и $V$ задаётся конечным набором тождеств, в обе части которых каждая переменная входит одинаковое число раз. Тогда любое покрытие $V$ конечно базируемо [590]. В частности, любая конечная полугруппа с единственным идемпотентом конечно базируема. Модулярное резидуально малое многообразие, порождённое конечной алгеброй, конечно базируемо [460]. Резидуальная малость означает, что мощности подпрямо неразложимых алгебр многообразия ограничены. Предположим, что в модулярном многообразии $K$ конечной сигнатуры существует такая формула $\Phi(x, y, z, t)$ языка первой ступени, что в каждой $K$-алгебре $A$ для элементов $a, b, c, d$ истинно $\Phi(a, b, c, d)$ в том и только в том случае, если $[\theta(a, b), \theta(c, d)]=0$, где $[\,,\,]$ — коммутатор конгруэнций (см. § 2.1). Тогда в $K$ любая конечная алгебра содержится в конечно базируемом многообразии [460].

Предположим, что $K$ — локально конечное многообразие, в котором $\mathrm{Si}\,K$ состоит из конечного числа конечных алгебр. Если $K$ имеет определимые главные конгруэнции, то $K$ конечно базируемо [456]. Если $K$ — конечно базируемое многообразие с определимыми главными конгруэнциями, то конечно базируемые подмногообразия в $K$ образуют подрешетку [185]. Более того, если $X$ — подкласс в $K$, задаваемый конечным набором позитивных универсальных предложений, то $\mathrm{HSP}(X)$ конечно базируемое подмногообразие в $K$.

Пусть в многообразии $K$ существуют такие слова $p_i(x, y, z, t)$, $q_i(x, y, z, t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что в каждой $K$-алгебре для главных конгруэнций справедливо равенство

$$\theta(a, b) \cap \theta(c, d) = \bigcup_{i=1}^{n} \theta(p_i(a, b, c, d), q_i(a, b, c, d)).$$

В этом случае $K$ дистрибутивно, компактные конгруэнции в любой $K$-алгебре образуют подрешетку, класс $\mathrm{Si}\,K$ универсален. Если $H$ — конечное множество конечных алгебр из $\mathrm{Si}\,K$, то квазимногообразие, порожденное $H$, конечно базируемое [186].

Любой идемпотентный редукт абелевой группы и модуля над конечным кольцом конечно базируем [561]. Любая конечная дистрибутивная $p$-алгебра вложима в конечную дистрибутивную $p$-алгебру, не имеющую независимого базиса квазитождеств [129]. В работе В. Л. Мурского [104] оценивается доля бесконечно базируемых алгебр данного порядка с заданной конечной сигнатурой. Вопросы конечно базируемости рассматриваются также в работах [153], [483].

Конечная нетривиальная алгебра $A$ *парапримальна*, если для любого множества $I$, любой подалгебры $B$ в $A^I$ и любого конечного подмножества $J$ в $I$ проекция $B$ в $A^J$ совпадает с

$$\prod_{j \in J} p_j(B),$$

как только все $p_j(B)$ неодноэлементны. Здесь через $p_j$ обозначается естественная проекция $A^J$ на $j$-ый множитель $A$. Свойство парапримальности эквивалентно тому, что $A$ просто и

$\mathrm{HSP}(A)$ перестановочно [221]. Если при этом $\mathrm{HSP}(A) = \mathrm{SP}(A)\,(=\mathrm{PS}(A))$, то $A$ называется *прямым стоуновским образующим*. Каждое минимальное локально конечное перестановочное многообразие имеет прямой стоуновский образующий $A$ с одноэлементными подалгебрами. Обратно, такая алгебра $A$ порождает минимальное многообразие. Если $B$ — алгебра из такого многообразия, $c \in \mathrm{Con}(B)$, то все классы $c$ равномощны. Пусть $A$ — парапримальная алгебра. Тогда в $\mathrm{HSP}(A)$ любая алгебра является подпрямым произведением примальных алгебр [223]. Предположим, что многообразие $V$ порождается парапримальными алгебрами $B_1, \ldots, B_r$. Если $D$ — конечная алгебра из $V$, то $D = A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_r$, где $A_0$ — аффинная алгебра, $A_1, \ldots, A_r$ — неаффинные подалгебры в $B_1, \ldots, B_r$. Любая конгруэнция в $D$ является произведением конгруэнций в $A_0, \ldots, A_r$ [456].

Пусть $A$ — подпрямое произведение алгебр $A_i$, $i \in I$. Предположим, что $J$ такое подмножество в $I$, что для любых $i, j \in J$ из $\mathrm{Ker}\, p_i \cap A^2 = \mathrm{Ker}\, p_j \cap A^2$ следует $i = j$. Алгебра $A$ регулярна, если проекция

$$p_J : A \to \prod_{j \in J} A_j$$

сюръективна. Алгебра $A$ *стандартна*, если $p_J$ сюръективно как только $\mathrm{Ker}\, p_M \cap A^2 < \mathrm{Ker}\, p_J \cap A^2$ для любого конечного подмножества $M$ в $J$. Для локально конечного многообразия $V$ следующие условия эквивалентны [432]:

1) $V$ арифметично и полупросто (т. е. $\mathrm{Si}\, V$ состоит из простых алгебр);

2) в $V$ подпрямое произведение подпрямо неразложимых алгебр регулярно;

Предположим, что $M$ — многообразие, порожденное конечным множеством $K$ конечных алгебр. Тогда следующие условия эквивалентны:

3) $M$ полупросто и перестановочно;

4) подпрямое произведение алгебр из $\mathrm{Si}(\mathrm{HS}(K))$ стандартно. Локально конечное полупростое перестановочное многообразие $M$ является объединением двух своих независимых подмногообразий $M_{ab}$ и $M_{ap}$, где $M_{ab}$ ($M_{ap}$) максимальное абелево (арифметичное) подмногообразие в $M$. Дальнейшее развитие этой тематики можно найти в [9], [63], [346], [417].

В работах [182], [602] строятся многообразия алгебр Хейтинга и BCK-алгебр, не порождаемые своими конечными алгебрами.

Многочисленны исследования по изучению класса подпрямо неразложимых алгебр в различных многообразиях. Частично они отражены в обзорах [107], [340] (см. также [155], [302], [303]). Для нетривиальной $p$-алгебры $L$ следующие условия эквивалентны [397]:

1) центр $C(L)$, т. е. множество дополняемых элементов в $L$ состоит из нуля и единицы, и в $L$ найдутся такие элементы $a \neq b$, что $a^* = b^*$ и для любых элементов $x \neq y \in L$ из $x^* = y^*$ вытекает $\theta(x, y) \geqslant \theta(a, b)$;

2) алгебра $L$ подпрямо неразложима и не проста.

Если $p$-алгебра $L$ квазимодулярна, т. е. в ней выполнено тождество

$$x \wedge ((x \wedge y) \vee z^{**}) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z^{**}),$$

то подпрямая неразложимость $L$ эквивалентна тому, что центр $C(L)$ тривиален и $D(L) = (x \in L, x^* = 0)$ — подпрямо неразложимая решетка. Двойная $p$-алгебра, являющаяся решеткой конечной длины и удовлетворяющая тождеству квазимодулярности (или двойственному тождеству) подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда центр ее тривиален и $D(L) \cap \overline{D}(L)$ — подпрямо неразложимая решетка, где $\overline{D}(L) = (x \in L, x^+ = 1)$ [400]. Конечная двойная дистрибутивная $p$-алгебра проста в том и только в том случае, если она имеет тривиальный центр и из $a^* = b^*$, $a^+ = b^+$ следует $a = b$. Для конечной двойной дистрибутивной $p$-алгебры $A$ следующие условия эквивалентны:

1) алгебра $A$ подпрямо неразложима и не проста;

2) центр $A$ тривиален и $D(A) \cap \overline{D}(A)$ содержит два элемента;

3) $\mathrm{Con}\, A$ состоит из трех элементов.

Пусть $L$ двойная $p$-алгебра, причем для любого $x \in L$ найдется такое натуральное число $n$, что операция $+*$, примененная $n$ и $n+1$ раз к $x$, дает одинаковый результат. Тогда следующие условия эквивалентны [398]:

1) алгебра $L$ подпрямо неразложима и не проста;

2) центр $C(L)$ тривиален и в $L$ найдутся такие различные элементы $a$, $b$, что $a^* = b^*$, $a^+ = b^+$, причем для любых элементов $x \neq y \in L$ с этим же условием имеем $\theta(a, b) \leqslant \theta(x, y)$ (см. также [399]). Этот результат обобщен в [166], где рассматриваются алгебры $A$, в которых диагональ в $A \times A$ неразложима в $\mathrm{Con}\, A$ в пересечение. Отмечается, что в $p$-полурешетках это свойство эквивалентно подпрямой неразложимости. Для квазимодулярной $p$-алгебры $L$ это свойство эквивалентно тому, что центр в $L$ тривиален, и $D(L)$ — решетка с этим свойством. Пусть двойная $p$-алгебра $L$ регулярна, т. е. каждая конгруэнция в $L$ определяется любым своим классом. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) диагональ в $L$ неразложима;

2) для любого $a \in L \setminus 1$, $a = a^{++}$, пересечение результатов $n$-кратного применения операции $+*$ к $a$ для всех $n$ равно нулю. Для нерегулярной дистрибутивной двойной $p$-алгебры неразложимость диагонали эквивалентна подпрямой неразложимости алгебры.

Отметим, что в [164] описаны подпрямо неразложимые алгебры Хейтинга. В [529] описываются $p$-алгебры $L$, являющиеся алгеброй де Моргана относительно операции $x'$, т. е. $x''=x$ $(x\vee y)'=x'\wedge y'$. Положим $x^+=x'^*$,

$$C(L)=(x\in L,\ x^*=x^+).$$

Если алгебра $L$ содержит не менее пяти элементов, то $L$ подпрямо неразложимо в том и только в том случае, есл $D(L)\cap\bar{D}(L)$ простая алгебра де Моргана, причем есл $|C(L)|>2$, то $C(L)=(0, 1, a=a', a^*)$ и $D(L)\cap\bar{D}(L)$ либо одноэлементно, либо состоит из четырех элементов. Близкие вопросы затрагиваются в [172], [396].

В ряде работ рассматривается строение простых алгебр многообразиях. $p$-алгебра проста в том и только в том случае если она содержит не более двух элементов [397]. Пусть $B$ — простая алгебра из многообразия унарных алгебр, порожденного конечной алгеброй $A$. Тогда $|B|\leqslant(|A|-1)!$ за исключением случаев $|B|=2$, 4, 7, когда $|A|=2$, 3, 4 [442]. Пусть $K$ — конечно базируемое многообразие конечной сигнатуры. Тогд рекурсивно определенная $K$-алгебра имеет разрешимую проблему равенства в том и только в том случае, если она вложим в циклическую рекурсивно определенную простую алгебр [298]. Предположим, что $K$ — многообразие универсальных алгебр с нульарной операцией 0, причем многообразие $K$ является 0-регулярным, т. е. в каждой $K$-алгебре любая конгруэнци определяется своим классом, содержащим 0. Пусть в любой $K$-алгебре $A$ для любых различных элементов $a, b\in A$ существует такая унарная производная операция $p(x)$, что $p(0)=0$ $p(a)=b$. Тогда каждая $K$-алгебра вкалывается в простук $K$-алгебру [430].

Многообразие $K$ обладает свойством расширения конгруэнций, сокращенно, CEP, если для любой алгебры $A$ из $K$ и любой подалгебры $B$ в $A$ отображение ограничения $\mathrm{Con}\,A\to$ $\to\mathrm{Con}\,B$ сюръективно. Для многообразия $K$ со свойством CEP резидуальная малость эквивалентна тому, что существенны расширения два-порожденной нециклической $K$-алгебры составляют множество [479]. В [56] получена характеризация резидуально малых квазимногообразий алгебраических систем В этой же работе показано существование в универсальны классах простых алгебр. Отметим, что для многообразия ассоциативных колец $K$ следующие условия эквивалентны [457]

1) $K$ резидуально мало;

2) в $K$ выполнено либо тождество $xy=0$, либо

$$(x-x^n)(y-y^n)-((x-x^n)(y-y^n))^n$$

для некоторого $n\geqslant 2$.

Пусть конечная алгебра $A$ порождает модулярное многообразие $K$. Тогда следующие условия эквивалентны [458]:

1) $K$ резидуально мало;

2) мощности алгебр из $\mathrm{Si}\,K$ ограничены некоторым натуральным числом, зависящим от $A$;

3) если $C \in K$, $c, c' \in \mathrm{Con}\,C$ и $c \leqslant [c', c']$, то $c = [c, c']$;

4) если $A \in K$, $c, c' \in \mathrm{Con}\,A$, то $c[c', c'] \leqslant [c, c']$. Здесь $[c, c']$ коммутатор двух конгруэнций (см. § 2.1).

Тонким спектром многообразия называется функция, сопоставляющая каждому кардиналу $k$ число неизоморфных алгебр мощности $k$ в этом многообразии. С тонким спектром связано понятие скелета многообразия — совокупности классов изоморфных алгебр этого многообразия. Обзоры результатов по спектрам, тонким спектрам, скелетам многообразий приведены в [107], [340] (см. также [109], [465], [466], [475], [503], [519], [566], [569]. В [458] рассматриваются многообразия $K$, у которых моноид $\mathrm{Spec}\,K$ конечно порожден. Если $K$ — некоторый класс алгебр, то через $\mathrm{Pr}(K)$ обозначим множество всех простых делителей чисел из $\mathrm{Spec}\,K$. Предположим, что $K$ конечный класс конечных алгебр. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $\mathrm{Pr}(\mathrm{SP}(K))$ конечно;

2) многообразие $\mathrm{HSP}(K)$ имеет равномерные конгруэнции, т. е. классы каждой конгруэнции в любой алгебре из $\mathrm{HSP}(K)$ равномощны;

3) $S(K)$ имеет равномерные конгруэнции и $\mathrm{HSP}(K)$ перестановочно;

4) $\mathrm{Pr}(\mathrm{HSP}(K)) = \mathrm{Pr}(S(K))$;

5) $\mathrm{Pr}(\mathrm{SP}(K)) = \mathrm{Pr}(S(K))$.

Более того, каждая конечная алгебра из $\mathrm{HSP}(K)$ лежит в $K$ в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:

а) $\mathrm{HSP}(K)$ перестановочно;

б) каждая конечная алгебра из $S(K)$ является прямым произведением простых алгебр и алгебр, полиномиально эквивалентных модулям над некоторым кольцом;

в) если $U$ — подмногообразие в $\mathrm{HSP}(K)$, порожденное прямыми множителями в $K$-алгебрах, полиномиально эквивалентными модулям, то каждая конечная $U$-алгебра лежит в $K$. Отметим, что к этой тематике примыкает изучение категоричных многообразий [221], [320].

**1.3. Мальцевские условия.** Совокупность всех строгих условий Мальцева, выполненных в многообразии $K$ называется *теорией Мальцева.* Теории Мальцева образуют полную решетку мощности $2^{\aleph_0}$, дуальную к решетке специальных классов Мальцева [124]—[128] (см. также [89], [90]).

Следующие свойства многообразия $K$ выражаются мальцевскими условиями:

1) в любой $K$-алгебре компактные конгруэнции являются главными [157], [208], [601], [608];

2) $\mathrm{Con}(A\times B)=\mathrm{Con}\,A\times\mathrm{Con}\,B$ для любых алгебр $A$, $B$ из $K$ [203], [274].

3) каждая допустимая толерантность в прямом произведении двух К-алгебр разлагается в произведение допустимых толерантностей сомножителей [204];

4) любая подалгебра в любой $K$-алгебре является классом некоторой конгруэнции [205], [415];

5) любое рефлексивное, транзитивное допустимое бинарное отношение в любой $K$-аглебре является конгруэнцией [218];

6) любое допустимое рефлексивное бинарное отношение в любой $K$-алгебре определяется любым своим классом [276];

7) любая подалгебра в любой $K$-алгебре $A$, содержащая класс конгруэнции в $A$, является объединением классов этой конгруэнции [206];

8) любая подалгебра в $A\times B$, где $A, B\in K$, разлагается в прямое произведение подалгебр в $A$ и в $B$ [207];

9) регулярность многообразия [209];

10) $K$ обладает свойством CEP (или аналогичным свойством для допустимых толерантностей) [210], [277];

11) любая конгруэнция на любой подалгебре прямого произведения алгебр $A_i\in K$, $i\in I$, задается некоторым фильтром в $I$ [309];

12) естественный гомоморфизм $A*(B\times c)\to(A*B)\times(A*c)$ для всех алгебр $A$, $B$, $c$ из $K$ сюръективен [248] (здесь $*$ — свободное произведение в $K$);

13) любая компактная конгруэнция в любой $K$-алгебре является объединением не более, чем $n$ главных конгруэнций [520];

14) свойство $n$-перестановочности [441].

Отметим, что по [408] из свойства 4) вытекает CEP. Близкие вопросы затрагиваются в работах [174], [208], [211]—[215], [217], [236], [240], [246], [275], [277]—[280], [476], [504], [609].

К обсуждаемой теме относятся и работы, в которых изучаются многообразия с определимыми главными конгруэнциями. Это свойство связано со свойствами подпрямо неразложимых алгебр многообразия и близко к свойствам дистрибутивности многообразия, свойству CEP [107]. Отметим, что единственным многообразием решеток с определимыми главными конгруэнциями является многообразие дистрибутивных решеток [464]. Работы по определимым главным конгруэнциям отражены в книгах [107], [199], обзоре [109]. Отметим лишь, что многообразие $K$ универсальных алгебр имеет определимые главные конгруэнции тогда и только тогда, когда множество всех компактных конгруэнций в любой $K$-алгебре является верхней полурешеткой с дуальными относительными псевдодополнениями [185]. Отсюда вытекает, что для многообразия $K$ следующие условия эквивалентны:

1) $K$ обладает определимыми главными конгруэнциями и порождается конечными алгебрами;

2) многообразие дуальных полурешеток Брауэра, порожденное верхними полурешетками компактных конгруэнций $K$-алгебр, совпадает с многообразием дистрибутивных решеток с дуальными относительными дополнениями. Дальнейшее развитие этих исследований проведено в [184], [413], 573].

Более общая ситуация рассматривается в статье [307], где изучаются равномерные схемы конгруэнций в многообразиях. Это свойство для многообразия $K$ эквивалентно тому, что в прямом произведении $K$-алгебр пара $(a, b)$ лежит в главной конгруэнции $\theta(c, d)$ в том и только в том случае, если это верно при проекции элементов $a, b, c, d$ в любой множитель. Для дистрибутивного многообразия наличие равномерной схемы эквивалентно определимости главных конгруэнций. Многообразие $K$ обладает равномерной схемой, если выполнено одно из следующих условий:

1) $K$ арифметично (т. е. перестановочно и дистрибутивно) и порождается конечной алгеброй, в которой любая подалгебра является подпрямым произведением простых алгебр;

2) в $K$ все конгруэнции идеальны;

3) $K$ дистрибутивно, порождается конечной алгеброй и обладает свойством CEP.

Другим обобщением понятия определимости главных конгруэнций является рассмотренная в [573] определимость $n$-порожденных конгруэнций в классах алгебр. Отмечается, что если класс $K$ алгебр замкнут относительно ультрапроизведений и факторалгебр, то свойства определимости главных и компактных конгруэнций эквивалентны в $K$.

К рассматриваемой теме близко и изучение (дуально) дискриминаторных многообразий. Напомним, что тернарным дискриминатором называется функция

$$t(x, y, z)=\begin{cases} x, & \text{если } x \neq y; \\ z, & \text{если } x=y. \end{cases}$$

Если в алгебре $A$ тернарный дискриминатор представляется некоторым словом, то алгебра $A$ проста [199]. Многообразие $K$ называется дискриминаторным, если $K$ порождается классом $X$, причем в каждой алгебре из $X$ тернарный дискриминатор представляется некоторым словом. В этом случае $K=SP_u(X \cup 0)$, где 0 — одноэлементная алгебра. Подпрямо неразложимая алгебра в $K$ проста, а само многообразие $K$ арифметично [594]. Если многообразие $K$ имеет конечную сигнатуру и конечно порождено, то класс всех подпрямых произведений простых $K$-алгебр конечно аксиоматизируем [172]. Мальцевская характеризация дискриминаторных многообразий указана в [433]. Здесь же изучена связь дискриминаторности и парапримальности.

Предположим, что $K$ локально конечное многообразие, в котором все подпрямо неразложимые алгебры просты. Тогда для любого натурального числа $n$ существует такое слово $t(x, y, z, u_1, \dots, u_n)$, что в любой простой $K$-алгебре $A$, порожденной элементами $a_1, \dots, a_n$ функция $t(x, y, z) = t(x, y, z, a_1, \dots, a_n)$ задает тернарный дискриминатор [195], [196].

Дискриминаторность многообразия $K$ эквивалентна тому, что $K$ дистрибутивно и в любой $K$-алгебре $A$ любая главная конгруэнция $\theta(a, b)$ имеет в $\operatorname{Con} A$ дополнение $c$, причем $\theta(a, b)(a)$ имеет непустое пересечение с каждым классом $c$ [454].

Дуальным дискриминатором $d(x, y, z)$ называется функция

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ z, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Многообразие $K$ дуально дискриминаторно, если во всех подпрямо неразложимых $K$-алгебрах дуальный дискриминатор представляется некоторым словом. Мальцевская характеризация таких многообразий получена в [308]. В дуально дискриминаторных многообразиях определимы главные конгруэнции и выполнено свойство CEP (см. также [484]).

**1.4. Различные свойства классов алгебр.** Многообразие $K$ называется *шрейеровым*, если любая подалгебра свободной $K$-алгебры является свободной. Серия работ посвящена изучению шрейеровых многообразий $n$-полугрупп, $n$-групп и $(m, n)$-колец. Если $U$ шрейерово многообразие $n$-групп, причем циклическая свободная $n$-группа из $U$ бесконечна, то $n \leqslant 5$ или $n = 7$, [8]. Обратно, при этих $n$ многообразия всех $n$-групп и всех абелевых $n$-групп шрейеровы. Все минимальные многообразия $n$-групп из [9] шрейеровы. Пусть $U$ не минимальное неабелево шрейерово многообразие $n$-групп, причем свободная $U$-группа ранга три вложима в разрешимую группу (по теореме Поста каждая $n$-группа вкладывается в некоторую группу). Предположим, что $q$ — одно из чисел: 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 32, 33, 35, 36, 40, 44, 45, 48, 60, 84, $d$ — натуральное число, делящее $\Phi_q(1)$, где $\Phi_q(X)$ — циклотомический полином, причем $q$ делит $(n-1)d$. При этом $d = 1$, если $q$ непримарно, и $d = 1$ или $d = p$, если $q$ — степень простого числа $p$. Положим $R = \mathbb{Z}[X]/\Phi_q(X)$. Тогда $U$ — свободная $n$-группа ранга $r+1$ совпадает с $R$-модулем [8]

$$A = (z/a)\, b \oplus Ry_1 \oplus \dots \oplus Ry_r, \quad Xb = b, \quad R_{y_i} \simeq R,$$

причем свободными образующими являются элементы 0, $y_1, \dots$, $\dots, y_r$. Операция в $A$ имеет вид

$$a_1 \dots a_n = b + a_0 + Xa_1 + \dots + X^{n-1} a_n.$$

В [139] показано, что шрейерово многообразие $n$-полугрупп, состоящее не только из $n$-групп задается одним из следующих тождеств: $x_1 \dots x_n = x_1$, $x_1 \dots x_n = x_n$, $x_1 \dots x_n = y_1 \dots y_n$. Каждое из этих многообразий минимально. Полное описание шрейеровых многообразий $(m, n)$-колец получено в [140].

В [121] рассматриваются унарные алгебры с моноидом унарных операций $R$. Пусть $I$ левый идеал в $R$, причем $xr=x$ для всех $x \in I$, $r \in R$. Предположим, что $K$ многообразие всех $R$-алгебр $A$, в которых $ix=iy$ для всех $x, y \in A$, $i \in I$. Показывается, что следующие условия эквивалентны:

а) все (конечно порожденные) подалгебры свободной $K$-алгебры свободны;

б) каждый главный идеал в $R$, не лежащий в $I$, порождается сократимым справа элементом, пересечение любых двух несравнимых левых идеалов в $R$ содержится в $I$ (и $R$ удовлетворяет условию максимальности для главных левых идеалов, не лежащих в $I$). В $K$ все проективные объекты свободны в том и только в том случае, когда для любого идемпотента $e$ существуют такие $a, b \in R$, что $e=ab$, $bea=1$.

В. Фляйшер [137] изучает многообразия полигонов над $\Omega$-кольцами, в которых все полигоны $n$-свободны для некоторого $n \geqslant 2$. Он показал, что такое многообразие рационально эквивалентно многообразию векторных пространств над телом. Предположим, что $K$-многообразие абелевых в смысле А. Г. Куроша алгебр с нульарной операцией 0, причем в любой $K$-алгебре любая конгруэнция определяется классом, содержащим 0 (свойство 0-регулярности). Если все К-алгебры проективны (инъективны), то $K$ рационально эквивалентно многообразию модулей над кольцом, являющимся прямой суммой конечного числа конечных полей.

Предположим, что в многообразии $K$ для любого слова $a$ множество таких слов $b$, что $a=b$ — тождество в $K$, конечно. Тогда в $K$ проективные алгебры свободны [462], см. также [58]. В [10] описано строение конечно порожденных проективных групп в произведении многообразия всех абелевых групп на локально конечное многообразие групп.

Предположим, что $K$ — многообразие алгебр без нульарных операций, заданное регулярными тождествами. Если в $K$ все конечно порожденные алгебры инъективны (проективны), то все операции в $K$ унарны [138]. В «проективном» случае множество унарных операций либо пусто, либо состоит из тождественной операции. Инъективные алгебры Окхама в многообразии, заданном тождеством $x \wedge x^{00}=x$, описаны в [170]. Они сводятся к булевым степеням подпрямо неразложимых алгебр. Если $K$ неразложимое в объединение многообразие алгебр Окхама с тождеством $x \wedge x^{00}=x$, то в нем любую алгебру можно вложить в инъективную.

Алгебра $A$ из многообразия $K$ *слабо инъективна*, если любой сюръективный гомоморфизм $B \to A$, где $B$ — подалгебра в алгебре $C$ из $K$, продолжается до гомоморфизма $C$ в $A$. Предположим, что $A$ — конечная подпрямо неразложимая алгебра с неабелевым монолитом, причем многообразие $K$, порожденное $A$, модулярно. Если в $K$·любая конгруэнция на любой $K$-алгебре определяется своими ограничениями на произвольную подалгебру, то алгебра $A$ слабо инъективна в $K$ [244]. Предположим дополнительно, что алгебра $A$ функционально полна. Тогда $A$ является ограниченной булевой степенью. В работе [245] указаны достаточные условия, при которых (слабо) инъективные алгебры являются прямым произведением конечного числа ограниченных булевых степеней.

В многообразиях алгебр Хейтинга с регулярной инволюцией любая алгебра вложима в инъективную [96], [97], [468]. Строение инъективных оболочек двойных стоуновских алгебр изучается в [394]. Другие результаты по проективным и инъективным алгебрам в многообразиях можно найти в [249], [404], [411], [412], [422].

Много внимания в прошедшие годы было уделено изучению регулярных тождеств многообразий. Д. М. Смирнов [123] описывает группы автоморфизмов свободных алгебр $F_r$ конечного ранга $r$ в многообразии, заданном регулярными тождествами (предполагается, что в сигнатуре нет нульарных символов). Показано, что $\mathrm{Aut}\, F_r$ является полупрямым произведением симметрической группы $S_r$ и $\mathrm{Aut}\, F_1$, причем группа $\mathrm{Aut}\, F_1$ может быть любой.

Для произволнього многообразия $K$, как и выше, через $K'$ обозначим многообразие, заданное регулярными тождествами, выполненными в $K$. В статье [528] указывается представление свободной $K'$-алгебры в виде суммы Плонки свободных $K$-алгебр. Предположим, что в $K$ выполнено нетривиальное тождество вида $p(x, y) = x$. Если $K$ конечно базируемо, то это верно и для $K'$ [332] (см. также [331], [336]). Если в $K$ разрешима проблема тождества, то это верно и для $K'$ [334]. Предположим, что $V$ многообразие, заданное всеми тождествами $a = b$, выполненными в $K$, где ни $a$, ни $b$ не являются переменными. Тогда $K$ конечно базируемо в том и только в том случае, когда $V$ конечно базируемо [333].

Ряд работ посвящен EDZ-многообразиям. Пусть $J$ некоторое множество слов сигнатуры $T$, и $\Phi(J)$ — множество всех слов, содержащих элементы из $J$ в качестве подслов. Предположим, что сигнатура $T$ содержит нульарную операцию 0. EDZ-многообразием называется класс $Z_J$ алгебр сигнатуры $T$, задаваемый тождествами $f = 0$, где $f \in \Phi(J)$. Множество $J$ называется неприводимым, если из того, что $u, v \in J$ и $u$ подслово в $v$, вытекает $u = v$. Если $J$ неприводимо, то следующие условия эквивалентны [373]:

1) $Z_J$ — шрейерово многообразие;

2) если $f(t_1, \ldots, t_n) \in J$, то $t_1, \ldots, t_n$ — единственные переменные в $J$.

В $Z_J$ любая амальгама двух алгебр вложима в алгебру из $Z_J$, и поэтому эпиморфизмы в $Z_J$ сюръективны. Предположим, что сигнатура $T$ конечна, $J$ неприводимо. Тогда $Z_J$ порождается конечной алгеброй в том и только в том случае, когда $Z_J$ локально конечно и $J$ конечно [431]. В статье [374] рассматривается вопрос о вложимости в $Z_J$ любой алгебры в простую (подпрямо неразложимую) алгебру, о резидуальной малости $Z_J$.

Ряд работ посвящен рассмотрению категорных свойств классов алгебр. В [376] показывается, что если $V$, $W$ два многообразия идемпотентных алгебр, изоморфных как категории, то $V$ и $W$ рационально эквивалентны в смысле А. И. Мальцева. Предположим, что $T$ и $T'$ две сигнатуры. Пусть $d_i(T)=|\bigcup\limits_{j\geqslant i} T_j|$. Многообразие всех $T$-алгебр как категория изоморфно некоторому многообразию $T'$-алгебр в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:

1) если $d_0(T)$ бесконечно, то $d_0(T)\leqslant d_0(T')$;

2) если $d_1(T)$ бесконечно, то $d_1(T)\leqslant d_1(T')$;

3) минимальные числа среди $d_i(T)$, $i\geqslant 0$, не превосходят минимального из чисел $d_i(T')$, $i\geqslant 0$;

4) если $d_2(T')=0$, то $d_i(T)\leqslant d_i(T')$ для всех $i\geqslant 0$;

5) если $d_1(T')=1$, то либо $d_1(T)=0$, либо $d_i(T)\leqslant d_i(T')$ для всех $i$;

6) если $d_0(T')=1$, то $d_0(T)\leqslant 1$;

7) если $T_0'$ непусто, то и $T_0$ непусто.

Пусть $K$ класс алгебр, причем $\mathrm{SPK}=K$. Предположим, что $K$ как категория изоморфно многообразию универсальных алгебр. Тогда $K$ является многообразием [158]. Если $K$ изоморфно квазимногообразию алгебр, то $K$ является квазимногообразием [159].

Категория $C$ универсальна, если в нее в качестве полной подкатегории вложимо любое многообразие универсальных алгебр. Это условие эквивалентно тому, что в $C$ в качестве полной подкатегории вложима категория неориентируемых графов. В [429] строится пример универсального конечно порожденного многообразия дистрибутивных двойных $p$-алгебр. В [145] показывается, что категория $C$ алгебр Клини (т. е. ограниченных дистрибутивных решеток с антиэндоморфизмом $\sim a$, причем $\sim\sim a=a$, $a\wedge(\sim a)\leqslant b\vee(\sim b)$) почти универсальна. Это означает, что в $C$ вложима категория неориентируемых графов с помощью функтора $F$, причем любой непостоянный гомоморфизм $f: F(a)\to F(b)$, где $a$, $b$ — графы, имеет вид $f=F(p)$, где $p: a\to b$ — морфизм графов. Категория алгебр де Моргана универсальна [146]. В частности, для любого моноида $M$ и любого бесконечного кардинала $\alpha$ существует такое семейство алгебр де Моргана $A_i$, $i<2^\alpha$, мощности $\alpha$, что

$$\operatorname{End} A_i\simeq M,\ \operatorname{Hom}(A_i, A_j)=0,\ i\neq j.$$

Если $M$ конечно, то все $A_i$ можно выбрать конечными.

Многообразия дистрибутивных $p$-алгебр образуют цепь $B_{-1}\subset\subset B_0\subset B_1\subset\ldots$ [144]. В $B_3$ содержится полная категория $B$ со следующими свойствами:

а) любая категория универсальных алгебр вложима в подкатегорию непостоянных морфизмов в $B$;

б) если $a$, $b\in B$, то постоянные морфизмы из $a$ в $b$ образуют счетное множество.

Многообразия мультиоператорных алгебр, в частности, теория свободных разложений, умножение многообразий, рассматриваются в работах М. С. Бургина [23]—[28].

Класс $K$ универсальных алгебр называется *предмногообразием*, если $SK=PK=K$ и $K$ содержит одноэлементную алгебру. В [81] отмечается, что произведение в смысле А. И. Мальцева предмногообразий решеток снова является предмногообразием решеток. Совокупность этих предмногообразий не является множеством. Существуют предмногообразия решеток, не являющиеся произведением неразложимых предмногообразий (см. также [80], [82], [83]). В работах [12], [13] исследуется вопрос о перенесении в различные аксиоматизируемые классы алгебраических систем теоремы Биркгофа о подпрямых разложениях. Статья [151] посвящена изучению классов алгебр $K$, замкнутых относительно подалгебр, факторалгебр, прямых степеней и конечных произведений. В [604] рассматриваются классы алгебр, являющиеся редуктами алгебр из фиксированного многообразия. Эти классы замкнуты относительно прямых произведений, специальных факторалгебр и содержат свободные алгебры. Отметим, что в [574] показывается, что для многообразия $K$ следующие условия эквивалентны:

а) $K$ как квазимногообразие порождается своими конечными алгебрами;

б) любая конечнопредставимая $K$-алгебра финитно аппроксимируема;

в) $K$ как универсальный класс порождается своими конечными алгебрами.

Универсальное предложение

$$(\forall p_1, \ldots, p_n)(\forall x_1, \ldots, x_m)(u=v)$$

языка второй ступени, где $p$, $v$ слова от переменных $x_1,\ldots,x_m$ и функциональных символов $p_1, \ldots, p_n$ называется сверхтождеством [100], [569]. Изучение алгебр со сверхтождествами связано с рассмотрением слабых гомоморфизмов алгебр (см. § 2.2, [100]), тождествами в клонах главных производных операций. Пусть $X$ множество тождеств некоторой сигнатуры и $E(X)$ (соответственно $H(X)$) — множество всех (сверх-)тождеств, вытекающих из X. Обозначим через $R(X)$ множество всех регулярных тождеств из $E(X)$. Если $K$ — многообразие алгебр, то через $H(K)$ и $E(K)$ обозначаются все сверхтождества и все тождества многообразия $K$. В [335] показано, что $E(H(X))=H(E(X))=$

$=H(X)$, $H(R(X))\subseteq R(H(X))$, $E(H(K)\cup H(K'))\subseteq H(E(K)\cup \cup E(K'))$, $E(K)\subseteq H(E(K))$, $H(E(K)\cap E(K'))\subseteq H(E(K))\cap \cap H(E(K'))$, $H(E(E(K)\cup E(K')))=E(H(E(K)\cup H(E(K')))$. Более подробно со сверхтождествами можно ознакомиться в [101], [102].

Многочисленны работы, в которых изучаются многообразия конкретных алгебр. В [420] строится теория многообразий алгебр Брауэра. В [227] доказывается арифметичность многообразий позитивно-импликативных, коммутативных и импликативных BCK-алгебр. Многообразия коммутативных BCK-алгебр дистрибутивны и 3-перестановочны; многообразие BCI-алгебр не 3-перестановочно, [365]. Многообразие BCK-алгебр 3-перестановочно [361]. Все BCK-алгебры не образуют многообразия алгебр типа (2,0) [601]. Не существует наибольшего многообразия BCK-алгебр [603]. Существуют наибольшее и наименьшее квазимногообразия BCK-алгебр, [386]. Существует многообразие BCK-алгебр, не порождаемое своими конечными алгебрами [490]. Не образуют многообразия и все BCC-алгебры (обобщения BCK-алгебр) [423]. Пусть $R_a$ — оператор правого умножения на элемент $a$ в BCK-алгебрах. Многообразие BCK-алгебр, задаваемое тождеством вида

$$xR^k_{xy}R^k_{yx}=yR^k_{yx}R^k_{xy},\ k\geqslant 1,$$

является 3-дистрибутивным [227]. В классе BCK-алгебр $E_k$, задаваемом тождеством $xR_y{}^k=xR_y{}^{k+1}$, определимы главные конгруэнции. Класс $E_k$ является многообразие алгебр типа (2, 0) и при $k\geqslant 2$ содержит два-порожденные бесконечные алгебры [287]. Класс $E_k$ обладает свойством амальгамируемости в том и только в том случае, если $k=1$ [486]. Многообразие BCK-алгебр $K$, порождаемое конечной алгеброй, обладает свойством амальгамируемости в том и только в том случае, когда $K$ порождается двуэлементной алгеброй (0, 1), в которой $xy=\max(0, x-y)$.

Класс всех BCK-алгебр с тождеством $x(x(y(yx)))=y(y(x(xy)))$ является многообразием алгебр типа (2, 0) [226], [230]. Оно 3-дистрибутивно. Многообразие BCK-алгебр, задаваемое тождеством $xy=(xy)y$, обладает свойством амальгамируемости [483]. Многообразие BCK-алгебр, порождаемое конечной BCK-алгеброй $A$, обладает свойством амальгамируемости тогда и только тогда, когда $|A|\leqslant 2$. В [325] рассматриваются многообразия дистрибутивных алгебр Оккама, порождаемые конечной алгеброй. Найдены тождества таких многообразий, рассмотрены свободные и инъективные алгебры этих многообразий. Полное описание многообразий алгебр Оккама с тождеством $x\bigwedge x^{00}=x$ получено в [190]. Пусть $K_{n,0}$ многообразие дистрибутивных решеток с унарной операцией $f$, причем $f(x\wedge y)=f(x)\bigvee f(y)$, $f^{2n}(x)=x$. В $K_{n,0}$ каждая подпрямо неразложимая алгебра проста [586]. Решетка конгруэнций в любой алгебре из $K_{n,0}$ является булевой. Решетка подмногообразий в $K_{n,0}$ семиэлементна. $K_{n,0}$ не обладает свойством амальгамируемости. Близкие вопросы затрагиваются в работах [1], [57], [231], [232], [281], [491], [492], [551].

В заключение этого параграфа отметим работу [459], где каждой алгебре $A$ конечной сигнатуры сопоставляется группоид $\Gamma(A)$. Он конечен (конечнобазируем) тогда и только тогда, когда этим свойством обладает $A$. Более того, $\operatorname{End}\Gamma(A)\simeq\simeq\operatorname{End}A$, $\operatorname{Sub}\Gamma(A)\simeq\operatorname{Sub}A$ и сопоставление $A\to\Gamma(A)$ функториально.

## § 2. Производные структуры и конструкции в универсальных алгебрах

**2.1. Конгруэнции и отношения в алгебрах.** Если $K$ — некоторый класс алгебр, то через $\operatorname{Con}K$ обозначается многообразие решеток, порожденное всеми решетками конгруэнций алгебр из $K$. Обзор результатов о структуре $\operatorname{Con}K$ можно найти в [381], [383]. Отметим важный результат С. В. Полина [112], показывающий существование многообразия $P$ универсальных алгебр со следующими свойствами:

1) $\operatorname{Con}P$ собственное многообразие решеток;

2) не все решетки конгруэнций $P$-алгебр модулярны;

3) каждая решетка $\operatorname{Con}A$, $A\in P$ обладает таким эпиморфизмом $f$ на дистрибутивную решетку $C$, что $f^{-1}(c)$ является дистрибутивной подрешеткой в $\operatorname{Con}A$ для любого $c\in C$. В [250] показано, что если $K$ — многообразие универсальных алгебр, в котором не все решетки конгруэнций модулярны, то $\operatorname{Con}K\supseteq\supseteq\operatorname{Con}P$. При этом многообразие $P$ является 4-перестановочным. Найдены нетривиальные тождества от трех и четырех переменных, выполненные в $\operatorname{Con}P$.

Конгруэнция с на подалгебре $B$ прямого произведения алгебр $A_i$, $i\in I$, *разложима*, если существуют такие конгруэнции $c_i\in\operatorname{Con}A_i$, $i\in I$, и фильтр $F$ в $I$, что пара $(x, y)\in B^2$ принадлежит $c$ в том и только в том случае, если множество тех $i\in I$, для которых $(x_i, y_i)\in c_i$ содержится в $F$. Конгруэнция $c$ в $B$ фильтральна, если она разложима, причем все $c_i$ можно выбрать диагональными. Конгруэнция $c$ в $B$ идеальна, если существует такой идеал $J$ в

$$\prod_{i\in I}\operatorname{Con}A_i,$$

что пара $(x, y)\in B^2$ принадлежит $c$ в том и только в том случае, если $\Delta(x, y)\in J$, где $i$-ая компонента $(x, y)$ совпадает с главной конгруэнцией $\theta(x_i, y_i)\in\operatorname{Con}A_i$. Любая разложимая конгруэнция идеальна. В работе [179] исследуется вопрос о представлении любой конгруэнции $c$ в виде пересечения конечного числа разложимых конгруэнций. В [573] показывается, что для класса $K$ следующие условия эквивалентны:

1) $P_u K$ имеет определимые компактные конгруэнции, т. е. для любого натурального числа $n$ существует формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z, t)$, причем в каждой $K$-алгебре пара $(c, d)$ лежит в $\theta(a_1, b_1) \cup \ldots \cup \theta(a_n, b_n)$ в том и только в том случае, когда имеет место $\Phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c, d)$;

2) любая конгруэнция в ультрапроизведении $K$-алгебр задается с помощью $\Delta(x, y)$ как и выше с заменой прямого произведения на ультрапроизведение;

3) если $A_i \in K$, $i \in I$ и $D$ ультрафильтр на $I$, то для любых $a, b \in \Pi_D A_i$ справедливо равенство

$$\theta(a, b) = \Pi_D \theta(a_i, b_i).$$

В частности, если $HK = P_u K = K$, то $K$ обладает определимыми компактными конгруэнциями в том и только в том случае, когда $K$ обладает определимыми главными конгруэнциями.

Многообразие $V$ называется *фильтральным*, если Si $V$ состоит из простых алгебр, и если алгебра $A$ является подпрямым произведением алгебр $A_i \in V$, $i \in I$, то любая конгруэнция в $A$ фильтральна. В [306] показывается, что если $K$ нетривиальное фильтральное многообразие, то Con $K$ совпадает с классом всех решеток идеалов (обобщенных) булевых алгебр (см. также [172]). Пусть $A$ — конечная алгебра из дистрибутивного многообразия. Тогда любая конгруэнция на декартовой степени $A^I$ является пересечением разложимых конгруэнций [473]. Для бесконечных алгебр это утверждение неверно. Пусть $K$ — финитно аппроксимируемое многообразие алгебр конечной сигнатуры, порожденное конечной алгеброй. Если все конгруэнции на прямых произведениях $K$-алгебр фильтральны, то $K$ содержит лишь конечное число критических алгебр [14]. Пусть $X$ — класс алгебр, причем все конгруэнции в поднрямых произведениях алгебр из $X$ фильтральны. Тогда это верно и для всех алгебр из $SP(X)$ [301]. Найдены мальцевские условия, характеризующие это свойство для многообразий алгебр.

Для любого многообразия $K$ сопоставление каждой алгебре $A$ из $K$ решетки конгруэнций Con $A$ задает функтор из $K$ в категорию алгебраических решеток. Свойства этого функтора исследуются в [304]. Предположим, что $A$ — счетная (конечная) универсальная алгебра и $L$ — пополнение решетки Con $A$ с помощью внешней единицы. Тогда $L \simeq$ Con $B$, где $B$ — счетный (конечный) группоид [74].

Известно, что решетками конгруэнций универсальных алгебр могут быть алгебраические решетки и только они. В [576] исследуется вопрос о представлении конечной решетки в виде решетки конгруэнций конечной универсальной алгебры. Решение этой задачи эквивалентно представлению любой конечной решетки в виде интервала решетки подгрупп конечной группы [363]. Существуют конечные простые решетки, не изоморфные решеткам конгруэнций конечных $n$-группоидов.

Обозначим через $M_n$ модулярную решетку длины 2 с $n$ атомами. Если $A$ — конечная универсальная алгебра и $\mathrm{Con}\, A \simeq M_7$, то $A$ обладает главными конгруэнциями [542]. Каждая решетка $M_n$, где $n = p^d + 1$, $p$ — простое число, реализуется в виде решетки конгруэнций алгебры из $p^{2dm}$ элементов [575]. Алгебры $A$, у которых решетка $\mathrm{Con}\, A$ атомарна, булева, стоуновская изучаются в [402].

Схемой конгруэнций $S$ называется набор слов $p_0, \ldots, p_n$ от переменных $x, y_j^i$, $0 \leqslant j \leqslant k_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, и отображение

$$t : (0, 1, \ldots, n) \to (0, 1).$$

Если $A$ — универсальная алгебра, то скажем, что четверка элементов $(a_0, a_1, b_0, b_1) \in A^4$ находится в отношении $S(A)$, если существуют такие элементы $c(i, j) \in A$, где $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant k_i$, что

1) $b_0 = p_0(a_{t(0)}, c(0, 1), \ldots, c(0, k_0))$;

2) $p_i(a_{1-t(i)}, c(i, 0), \ldots, c(i, k_i) = p_{i+1}(a_{t(i+1)}, c(i+1, 0), \ldots$ $\ldots, c(i+1, k_{i+1}))$;

3) $b_1 = p_n(a_{1-t(n)}, c(n, 0), \ldots, c(n, k_n))$.

Скажем, что схема $S$ равномерно представима в классе $K$, если для любой алгебры $A$ из $K$ четверка $(a, b, c, d) \in A^4$ лежит в $S(A)$ в том и только в том случае, если $(c, d) \in \theta(a, b)$. Схема $S$ равномерно представима в некотором многообразии тогда и только тогда, когда она представима в некоторой простой алгебре $A$ [176]. Пусть в $S$ нет констант. Тогда $S$ имеет равномерную представимость в некотором многообразии в том и только в том случае, когда $p_0, \ldots, p_n$ не менее, чем бинарны. Предположим, что в сигнатуре нет нульарных операций и есть неунарная операция. Тогда для $T$-алгебры $A$ следующие условия эквивалентны: 1) каждый унарный полином в $A$ задает биекцию; 2) для каждой схемы $S$ существует расширение $B \supseteq A$, в котором схема $S$ представима [177]. Для схемы $S$, не содержащей унарных полиномов, существует такая алгебра $A(S)$ и элементы $a, b, c, d \in A(S)$, что $(c, d) \in \theta(a, b)$ в $A(S)$, причем эта принадлежность реализуется с помощью $S$. Кроме того, если некоторая схема $S'$ реализует в $A(S)$ включение $(c, d) \in \theta(a, b)$, то это верно во всех алгебрах, в которых $S$ равномерно представима. Близкие вопросы — отношения и системы операций, определяемые формульными схемами — рассматриваются в [558].

В ряде работ рассматривается вопрос о разложимости конгруэнций на прямых произведениях алгебр в прямое произведение сомножителей. Пусть $p_i$ — проекция $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ на $A_i$. Тогда конгруэнция $c$ на $A$ разложима в том и только в том случае, если

$$c = \bigcap_{i=1}^{n} (c \cup \mathrm{Ker}\, p_i)$$

[578]. В частности, если $\mathrm{Con}\, A$ дистрибутивна, то это верно для любой конгруэнции $c$ на $A$. Если $\mathrm{Con}\, A$ модулярна, то это уже неверно [576], [579].

В любой бесконечной конечно порожденной алгебре $A$ конечной сигнатуры существует такая конгруэнция $p$, что $A/p$ бесконечно и $A/c$ конечно, как только $c > p$ [525]. Более того, если $A/c$ конечно, то $c$ компактная конгруэнция. Если $\mathrm{Con}\, A$ модулярная решетка с относительными дополнениями, то любая нетривиальная конгруэнция содержит минимальную конгруэнцию и содержится в максимальной [580]. Предположим, что $A$ — такая универсальная алгебра, что для любой собственной конгруэнции $c$ в $A$ найдется такая конгруэнция $p$, содержащая $c$, что $A/p \simeq A$. В [107] охарактеризованы вполне дистрибутивные решетки конгруэнций таких алгебр.

Скажем, что для подмножества $L$ в $\mathrm{Con}\, A$ справедлива китайская теорема об остатках, если для любых $p_1, \ldots, p_n \in L$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ из условий $(a_i, a_j) \in p_i \cup p_j$ вытекает $(a, a_i) \in p_i$ для некоторого $a \in A$. Изучению этого свойства посвящены работы [152], [225]. Предположим, что $L$ — компактно порожденная подрешетка в $\mathrm{Con}\, A$, замкнутая относительно пересечений и состоящая из перестановочных конгруэнций. Обозначим через $P$ множество всех простых элементов из $L$. Положим

$$F = \bigcup_{p \in P} A/p.$$

Тогда $F$ является пучком алгебр над $P$, причем имеется естественный изоморфизм между $A$ и алгеброй глобальных сечений этого пучка [225]. Наличие такого изоморфизма вытекает из китайской теоремы об остатках.

Ряд работ посвящен изучению решеток конгруэнций унарных алгебр. В [550] рассмотрен вопрос о дополняемости в решетках конгруэнций полигонов над коммутативным моноидом. В [64] охарактеризованы унары с дистрибутивной решеткой конгруэнций. Работы [77] — [79], [372] посвящены вопросу о восстановлении унара по своей решетке конгруэнций.

Много исследований посвящено конгруэнциям в $p$-алгебрах и их обобщениях. В [351] получено описание главных конгруэнций (двойных) $p$-алгебр $A$ в терминах главных конгруэнций $A$ как решетки. Пусть $A$ — дистрибутивная двойная $p$-алгебра. Рассмотрим в $A$ конгруэнцию $\Phi$, состоящую из всех пар $(x, y) \in A^2$, для которых $x^* = y^*$. Алгебра $A$ будет регулярной (т. е. каждая конгруэнция в $A$ определяется любым своим классом) в том и только в том случае, если $\Phi$ тривиальна [161]. Решетка $\mathrm{Con}\, A$ булева тогда и только тогда, когда $\Phi$ тривиально, центр $C(A)$ конечен и любая нормальная цепь в $A$ конечна. Отсюда вытекает, что двойная алгебра Стоуна (т. е. $x^{**} \vee x^* = 1$) проста в том и только в том случае, если $A$ — двух- или трехэлементная цепь.

Алгебраическая решетка $L$ является решеткой конгруэнций дистрибутивной $p$-алгебры (стоуновской алгебры) в том и только в том случае, если верхняя полурешетка компактных элементов в $L$ образует двойственную алгебру Хейтинга (двойственную относительную стоуновскую алгебру), в которой множество всех таких $x$, что $x^*=0$ является решеткой с относительными дополнениями [395]. Для произвольной $p$-алгебры $L$ положим $B(L)=(x\in L,\ x=x^{**})$.

Тогда $B(L)$ — булева алгебра и $D(L)$ — фильтр в $L$. Имеется естественное отображение ограничения

$$d\colon \operatorname{Con} L \to \operatorname{Con} B(L) \times \operatorname{Con} D(L).$$

Предположим, что $p$-алгебра $L$ содержит модулярный остов, т. е. если в $L$ содержится пятиугольник (пентагон) $(u, v, x, y, z)$, то $u^*=v^*=x^*=y^*=z^*$. В этом случае гомоморфизм $d$ инъективен, причем образ $d$ состоит из таких пар

$$(f_1, f_2) \in \operatorname{Con} B(L) \times \operatorname{Con} D(L),$$

что если $a\in B(L)$, $u\in D(L)$, $u\geqslant a$, то $u\equiv 1 \bmod f_2$ влечет $a\equiv 1 \bmod f_1$. Аналогично, если $L$ двойная $p$-алгебра с модулярным остовом, то каждая конгруэнция в $L$ однозначно определяется парой конгруэнций $f_1\in\operatorname{Con} B(L)$, $f_2\in\operatorname{Con} D(L)$, для которых выполнены указанные выше условия. Кроме того, если $x\equiv 1 \bmod f_i$, то $x^{+*}\equiv 1 \bmod f_j$, $j\neq i$.

Для двойной $p$-алгебры $L$ положим

$$\overline{D}(L)=(x\in L,\ x^+=1),\quad D(L)\cap\overline{D}(L)=K(L).$$

В [165] рассматривается отображение ограничения

$$d'\colon \operatorname{Con} L \to \operatorname{Con} B(L) \times \operatorname{Con} K(L)$$

и описывается образ $d'$ в случае, когда решетка $L$ дистрибутивна. Отмечается, что $d'$ инъективно. Предположим, что в $L$ выполнено тождество $(x\wedge y)\vee z^{**}=(x\wedge y)\vee(x\wedge z^{**})$. Если решетка $L$ модулярна, то $\operatorname{Con} K(L)$ изоморфна подрешетке в $\operatorname{Con} L$ состоящей из всех конгруэнций, содержащих конгруэнцию

$$\Phi=((a,b)\mid a^*=b^*,\ a^+=b^+)$$

[167]. В [294] для любой булевой алгебры $B$ и любой решетки $D$ с единицей описываются такие пары конгруэнций $f_1\in\operatorname{Con} B$, $f_2\in\operatorname{Con} D$, которые определяют конгруэнцию в такой квазимодулярной $p$-алгебре $A$, что $B(A)\simeq B$, $D(A)\simeq D$. Отмечается, что если в $A$ выполнено тождество $x=x^{**}\wedge(x\vee x^*)$, то две конгруэнции $f$ и $g$ в $A$ являются $n$-перестановочными в том и только в том случае, если этим свойством обладают пары $f_1, g_1$ и $f_2, g_2$. Регулярность конгруэнций в $p$-алгебрах и $p$-полурешетках исследуется в [585]. В [188] рассматриваются конгруэнции в алгебрах Оккама с тождеством $x\wedge x^{00}=x$. Указывается явный вид формулы, задающей в таких алгебрах глав-

ные конгруэнции. Среди конгруэнций выделяется конгруэнция $\Phi$ состоящая из всех пар $(a, b)$ с условием $a^0=b^0$. Отмечается, что если $c\cup\Phi$ — единичная конгруэнция, то $c$ — единичная конгруэнция. Поэтому если $\mathrm{Con}\, L$ обладает наибольшей неединичной конгруэнцией, то этой конгруэнцией является $\Phi$. Решетка $\mathrm{Con}\, L$ является цепью в том и только в том случае, когда $\mathrm{Con}\, L$ содержит не более трех элементов. Близкие вопросы для двойных алгебр Окхама рассматриваются в [189]. В алгебрах Клини пересечение главных конгруэнций является главной. Для алгебр де Моргана это уже не так [143]. Условия, при которых решетка конгруэнций алгебры Окхама обладает дополнениями, найдены в [541].

В [583] показано, что дистрибутивная $p$-алгебра $A$ является алгеброй Стоуна в том и только в том случае, если для любого максимального фильтра $P$ в $A$, любого примарного фильтра $C$, $C\subset P$, и любого $x\in A\setminus P$ найдется такое $y\in C$, что $x\wedge y=0$. Это эквивалентно тому, что любые элементы из $A$ разделяются конгруэнцией, являющейся объединением двух конгруэнций, имеющих два и три класса.

Близкие вопросы рассматриваются в [540]. Обзоры результатов по допустимым толерантностям и другим допустимым отношениям в алгебрах изложены в [213], [272].

Одним из важнейших достижений теории конгруэнций является построение теории коммутаторов в модулярных многообразиях алгебр. Если $c, c'$ — конгруэнции на алгебре $A$ из модулярного многообразия, то коммутант $[c, c']$ состоит из всех таких пар $(x, y)$ элементов $A$, что $((x, x), (y, y))$ лежит в конгруэнции алгебры $c\subseteq A^2$, порожденной всеми такими $((a, a), (b, b))\in A^4$, что $(a, b)\in c'$. Тогда $[c, c']\in\mathrm{Con}\, A$, причем

а) $[c, c']=[c', c]\subseteq c\cap c'$;

б) $[c, \bigcup c_i]=\bigcup[c, c_i]$;

в) $f^{-1}[c, c']=[f^{-1}c, f^{-1}c']$ для любого гомоморфизма $f: B\to A$ [107], [346].

Обратно, пусть в модулярном многообразии $K$ в каждой алгебре $A$ на $\mathrm{Con}\, A$ задана бинарная операция $(c, c')$, выделяющая конгруэнцию со свойствами а)—в), где $[c, c']$ нужно заменить на $(c, c')$. Тогда $(c, c')\subseteq[c, c']$ (см. [107]). В дистрибутивных многообразиях и только в них коммутатор любых двух конгруэнций совпадает с их пересечением [349]. Рассмотрение теории коммутаторов позволяет говорить о разрешимых, нильпотентных универсальных алгебрах и переносить на них соответствующие результаты о разрешимых и нильпотентных группах, кольцах [555].

Рассмотрим два свойства конгруэнций в алгебрах из класса $M$, лежащего в модулярном многообразии $K$:

(С2) $[c, c]=c\wedge[1, 1]$ для любой конгруэнции $c$ в любой $M$-алгебре;

$(S)$ если $A$ — произвольная $M$-алгебра и $B$-подалгебра в $A$, то для любых конгруэнций $c$ и $c'$ в $A$ ограничение коммутатора $[c, c']$ на $B$ совпадает с коммутатором ограничения $c$ и $C'$ на $B$. Выполнимость условий (C2) и (S) в $M=K$ эквивалентна тому, что $\mathrm{Si}\,K$ обладает свойством (C2), а $P_u(\mathrm{Si}\,K)$ обладает свойством (S) [411]. Многообразие $K$ обладает свойством (C2) тогда и только тогда, когда каждая алгебра из $\mathrm{Si}\,K$ либо аффинна, либо в решетке конгруэнций каждой алгебры из $\mathrm{Si}\,K$ из условия $[c, c']=0$ вытекает либо $c=0$, либо $c'=0$. Объединение двух многообразий со свойством (C2) ((C2) и (S)) обладает этим свойством в том и только том случае, если оба многообразия обладают этим свойством. Если объединение многообразий $K_1 \cup K_2$ обладает свойством (C2), то любая алгебра из $K_1 \cup K_2$ является подпрямым произведением алгебр из $K_1$, $K_2$ и аффинной алгебры. Для многообразия $K$ следующие условия эквивалентны:

а) каждая алгебра из $K$ есть подпрямое произведение аффинной алгебры и алгебры, в которой коммутант любых двух конгруэнций совпадает с их пересечением (свойство нейтральности);

б) $K$ — объединение аффинного и дистрибутивного многообразий;

в) каждая алгебра из $\mathrm{Si}\,K$ либо аффинна, либо нейтральна, причем подалгебра ультрапроизведений нейтральных алгебр из $\mathrm{Si}\,K$ нейтральна.

Предположим, что $A$ — алгебра из модулярного многообразия $K$, причем $A^2$ обладает свойством CEP. Тогда $A$ обладает свойствами (C2), (S), CEP [412]. Многообразие $K$ обладает свойством CEP в том и только в том случае, если этим свойством обладают квадраты алгебр из $\mathrm{Si}\,K$ и алгебры из $P_u(\mathrm{Si}\,K)$. Многообразие групп и алгебр Ли обладает свойством (S) или CEP в том и только в том случае, когда оно абелево. Для многообразия $K$ ассоциативных колец следующие условия эквивалентны:

а) $K$ обладает свойством (C2);

б) $K$ обладает свойством CEP;

в) в $K$ выполнено тождество $(xy)^n=xy$ для некоторого $n>1$.

Пусть $A$ — конечная нильпотентная алгебра, порождающая модулярное многообразие $K$, причем $A$ является прямым произведением алгебр примарных порядков. Пусть $F(n)$ — свободная $K$-алгебра ранга $n$. В [175] показано, что $\log F(n)$ является многочленом фиксированной степени от $n$.

**2.2. Гомоморфизмы универсальных алгебр.** В [556] рассматривается вопрос о том, когда моноид преобразований множества $X$ является моноидом эндоморфизмов некоторой универсальной алгебры, заданной на $X$ (см. также [46]). Пусть $G$ — группа преобразований множества $X$, $L$ — система подмножеств в $X$. В [421] найден критерий того, что на $X$ существует такая структура универсальной алгебры, что $G$ — группа ее автоморфизмов, а $L$ — решетка подалгебр. Абстрактная характеризация моноидов эндоморфизмов квадратов универсальных алгебр предложена в [320]. В частности, если $G$ — конечная группа четного порядка, не делящегося на четыре, то существует такая алгебра, порядок которой совпадает с порядком группы $G$, что $G \simeq \mathrm{Aut}\, A^2$. Если $(X, P)$ — алгебраическая система, где $P$ — множество предикатов, то на $X$ существует такая система операций $F$, что $\mathrm{Aut}(X, P) = \mathrm{Aut}(X, F)$ [509]. На множестве всех эндоморфизмов алгебры $A$ сигнатуры $T$ можно поточечно ввести структуру $T$-алгебры. Структура полученных алгебр изучается в книге [33].

Предположим, что задано семейство алгебр $(A_i, T(i))$, $i \in I$, различных сигнатур. Пусть $A = \Pi A_i$, $T = \Pi T(i)$. Тогда $A$ следующим образом превращается в $T$-алгебру. Если $a_j = (\ldots, a_{ji}, \ldots)$, $a_{ji} \in A_i$, $i \in I$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $t = (\ldots, t_i, \ldots)$ $t_i \in T(i)$, то $t(a_1, \ldots, a_n) = (\ldots, t_i(a_{1i}, \ldots, a_{ni}), \ldots)$ [207]. В этой статье рассматривается вопрос о разложении гомоморфизмов $T$-алгебр $f: (A, T) \to (B, T)$, где $B$ является произведением $T(i)$-алгебр $B_i$, $i \in I$, в произведение гомоморфизмов $T(i)$-алгебр $f_i: A_i \to B_i$.

Предположим, что в сигнатуре $T$ выделен элемент $f \in T_n$. Через $E_{ij}(f)$ обозначим множество всех таких автоморфизмов $h \in \mathrm{Aut}\, A$ алгебры $A$ сигнатуры $T$, что

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, h(x_i), x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, h'(x_j), x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

при всех $x_1, \ldots, x_n \in A$ и при некотором $h' \in \mathrm{Aut}\, A$. Тогда $E_{ij}(f)$ — нормальный делитель в $\mathrm{Aut}\, A$ [219]. Во многом группы $E_{ij}(f)$ ведут себя как элементарные матрицы в полных линейных группах (см. также [508]).

Ряд работ посвящен эндоморфизмам унарных алгебр. В статье [553] описаны унары, моноид эндоморфизмов которых инверсен (регулярен). Пусть $A$ — полугруппа преобразований множества $X$. В [369] изучаются структуры унарных алгебр на $X$, моноид эндоморфизмов которых совпадает с $A$. Унары, обладающие лишь тождественным автоморфизмом, одноэлементны [371]. Унары, моноид эндоморфизмов которых либо коммутативен, либо удовлетворяет условию $x^2 = y^2 = xy$ влечет $x = y$, рассматриваются в [22], [23] (см. также [425], [474]). Для любого несчетного унара $A$ имеем $|\mathrm{End}\, A| = |\mathrm{Con}\, A| = |\mathrm{Sub}\, A| = 2^{|A|}$ [426].

Отображение $h$ алгебры $A$ сигнатуры $T$ в алгебру $B$ сигнатуры $T'$ называется слабым гомоморфизмом, если существует такой эпиморфизм клонов главных производных операций $T(A) \to T'(B)$, $f \to f^*$, что $f^*(h(x_1), \ldots, h(x_n)) = hf(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $x_i \in A$, $f \in T(A)_n$. Обзор результатов по слабым гомоморфизмам приведен в [321]. Отметим ряд работ, опубликованных после выхода этого обзора. В подпрямо неразложимых ди стрибутивных $p$-алгебрах, содержащих не менее трех элемен тов, любой слабый изоморфизм является изоморфизмом [322 Предположим, что $f: L \to L'$ слабый эпиморфизм дистрибути ных $p$-алгебр, причем $L'$ не является булевой алгеброй. Тогд $f$ — изоморфизм. Предположим, что $A$ — унар с операцией $g$ причем $g \neq g^{n+1}$ для всех $n$. Тогда любой слабый автоморфиз $A$ является автоморфизмом [515]. Если же $g = g^{n+1}$ для неко торого $n$, то группа слабых автоморфизмов является полупря мым произведением группы автоморфизмов и группы вычето по модулю некоторого натурального числа $d$, делящего $n$ (с также [506]).

Алгебра $A$ сигнатуры $T$ предпримальна, если она конечн и клон $T(A)$ главных производных операций на $A$ максимале в клоне $O(A)$ всех конечноместных операций на $A$. Групп слабых автоморфизмов предпримальной алгебры $A$ изоморфн группе автоморфизмов клона $T(A)$ [257]. Близкие вопросы ра сматриваются в [26], [134], [353], [443], [467].

**2.3. Основные конструкции.** (Под)прямые разложения ал гебраических систем изучаются в [202]—[204], [231], [350], [494 [579].

Интересная конструкция, связанная с прямыми произвед ниями, рассматривается в [99]. Пусть $B$ — булево кольцо, пр чем для любого подмножества $T$ в $B$ множество всех таки $b \in B$, что $Tb = 0$ образует главный идеал. Рассмотрим множест $A$ и пусть для каждого $e \in B \setminus 0$ определено множество $eA$, пр чем 1) $1A = A$; 2) если $v \leqslant u$, то $v(ua) = va$ для любого $a \in A$ 3) если $L$ — ортогональное семейство элементов из $B \setminus 0$ и $u$ - ортогональная сумма всех $e$ из $L$, то отображения $ua \to e$ $a \in A$, $e \in L$, задают биекцию $uA$ и прямого произведения вс $eA$, $e \in L$.

Отображение

$$F: \bigcup_{e \in B \setminus 0} (eA)^n \to \bigcup_{e \in B \setminus 0} eA$$

называется $B$-допустимым, если каждое $eA$ замкнуто отно тельно $F$ и $F(ua_1, \ldots, ua_n) = uF(ea_1, \ldots, ea_n)$ при $u \leqslant$

Аналогичным образом вводится понятие $B$-допустимого буле предиката. Это позволяет говорить об ортогонально полных н В булевых алгебраических системах. Предположим, что на задан ультрафильтр $I$ и $\Phi$ — хорновская формула языка пе вой ступени в ортогонально полной над $B$ алгебраической си теме. Один из основных результатов работы [99] показывае что если формула $\Phi$ истинна по модулю $I$, то найдется так $e \in I$, что формула $\Phi$ истинна в $eA$. Предположим, что сущес вует такое $u \in I$, что формула $\Phi$ истинна в $vA$ для всех $v \leqslant$

Тогда Ф истинна по модулю $I$. Более того, в [99] разобран многосортный вариант этой конструкции, и отмечены связи с булевыми произведениями. Необходимо также отметить близость конструкции ортогонально полных алгебр к агассиз-суммам.

Рассмотрение подпрямых произведений алгебр тесно связано с изучением пучков универсальных алгебр. Предположим, что $A$ — универсальная алгебра, и $L$ — арифметическая $(0, 1)$-подрешетка в $\operatorname{Con} A$, $P$ — множество простых фильтров в $L$. Если $x \in P$, то положим $A_x = A/\sup(P \setminus x)$. В [595] на $P$ вводится топология Зарисского и исследуется представление $A$ глобальными сечениями пучка

$$\bigcup_{x \in P} A_x.$$

В [403] рассматривается многообразие $K$ универсальных алгебр сигнатуры $T$, причем предполагается, что $K$ перестановочно и $T$ содержит такую тернарную операцию $m(x, y, z)$ и нульарную операцию $e$, что в некотором подклассе $H$ в $K$, заданном предложениями узкого исчисления предикатов и замкнутого относительно подалгебр, выполнены тождества $m(x, y, x) = m(x, y, y) = e$. В произвольной $K$-алгебре $A$ во множестве $X$ всех конгруэнций $c$ на $A$ с условием $A/c \in H$ вводится топология Зарисского и строится пучок $T$-алгебр над $X$, слоями которого являются $A/c$, $c \in X$. Показано, что естественное представление $A$ в виде алгебры глобальных сечений этого пучка является изоморфизмом для всех алгебр из $K$ тогда и только тогда, когда каждая подпрямо неразложимая $K$-алгебра лежит в $H$. Пучкам алгебр посвящена книга [434], работы [324], [596], [597].

Важным примером пучка алгебр является булево произведение алгебр. Предположим, что $X$ — булево пространство, т. е. топологическое хаусдорфово компактное пространство с базой из открыто-замкнутых подмножеств. Подпрямое произведение $A$ алгебр $A_x$, $x \in X$, называется булевым произведением алгебр $A_x$, если

1) для любых $a, b \in A$ множество тех $x \in X$, для которых проекции $a$ и $b$ в $A_x$ совпадают, открыто-замкнуто в $X$;

2) пусть $a, b \in A$ и $y$ — открыто-замкнутое подмножество в $X$; тогда существует такое $c \in A$, что проекция $c$ в $A_x$ совпадает с проекцией $a$, если $x \in Y$, и с проекцией $b$, если $x \in X \setminus Y$.

Предположим, что $L$ — арифметичная подрешетка в $\operatorname{Con} A$ с относительными дополнениями и $L$ содержит все главные конгруэнции. Для любого простого идеала $x$ в $L$ положим $A_x = A/(\sup x)$. Тогда $A$ является булевым произведением всех алгебр $A_x$ [226]. Отметим, что булево произведение $A$ является алгеброй глобальных сечений соответствующего пучка. Обзор результатов по этой тематике можно найти в [597]. Отметим лишь, что если в многообразии $K$ каждая алгебра является булевым произведением алгебр из конечного множества конечных алгебр, то $K$ является объединением двух независимых многообразий, одно из которых абелево, а другое дискриминаторно [409].

Частным случаем булева произведения является булева степень $A[B]$. Она получается как булево произведение алгебр $A_x \simeq A$, где $x$ пробегает пространство $X$ всех максимальных идеалов в (полной) булевой алгебре $B$. Базу открытых множеств в $X$ составляют идеалы, не содержащие заданный элемент $b \in B$. Различные описания булевых степеней и их приложений можно найти в [147], [579], [607].

В работах польских алгебраистов часто встречается конструкция агассиз-сумм, сумм Плонки. В статьях [329], [330] показано, что агассиз-суммы решеток являются решетками. Прямое произведение решеток не является агассиз-суммой. Предположим, что в сигнатуре $T$ отсутствуют нульарные и унарные символы. Тогда для многообразия $K$ алгебр сигнатуры $T$ следующие условия эквивалентны: (а) $K$ задается регулярными тождествами; (б) $K$ замкнуто относительно сумм Плонки [337] (см. также [338], [339]). Предположим, что $C$ — многообразие идемпотентных полугрупп и $K$ — многообразие $T$-алгебр. В статье [435] описывается многообразие $T$-алгебр, порожденное суммами Плонки алгебр из $K$, причем системы индексов берутся из $C$. Близкие вопросы изучаются в [436], [507], [510], [512].

**2.4. Системы подалгебр.** Критерий отсутствия подалгебры Фраттини в универсальной алгебре найден в статье [493]. Отметим, что алгебра Хейтинга $H$ является алгеброй Фраттини некоторой алгебры Хейтинга тогда и только тогда, когда в $H$ пересечение любых двух ненулевых элементов отлично от нуля, [142]. Более того, если $k$ — бесконечный кардинал, $k \geqslant |H|$, такой, что существует $2^k$ неизоморфных алгебр Хейтинга $A$ мощности $k$, для которых $\Phi(A) = H$. Булева алгебра $A$ с унарной операцией $a^-$ называется алгеброй замыкания, если $0^- = 0$, $a \leqslant a^- \leqslant a^{--}$, $(a \vee b)^- = a^- \vee b^-$. Элемент $a \in A$ замкнут, если $a = a^-$. В [592] показано, что в алгебре замыкания $A$ подалгебра Фраттини $\Phi(A)$ порождается замкнутыми элементами, причем стоуновское пространство $\Phi(\Phi(A))$ удовлетворяет условию максимальности. Обратно, предположим, что алгебра замыкания $A$ порождается замкнутыми элементами, и в стоуновском пространстве булевой алгебры $A$ множество максимальных элементов конечно. Тогда существует такая алгебра замыкания $B$, что $A \simeq \Phi(B)$. Предположим, что $A$ произвольная алгебра замыкания и $C$ подалгебра в $A$, порожденная замкнутыми элементами. Если в $C$ множество простых идеалов удовлетворяет условию минимальности, то любая собственная подалгебра в $A$ содержится в максимальной.

В статье [15] рассматривается обобщение на универсальные алгебры теоремы Хигмана об эффективных вложениях конечно порожденных рекурсивно определенных над своей конечно порожденной подалгеброй $B$ алгебр $A$ в алгебры конечно определенные над $B$. В [533] изучаются системы подалгебр в декартовой степени алгебры $A$, определяемые набором проекций. Алгебры с $n$-дистрибутивной решеткой подалгебр описываются в [317]. В [427], [428] охарактеризованы решетки подалгебр универсальных алгебр, в которых полугруппа эндоморфизмов каждой подалгебры тривиальна. Условия, при которых решетка подалгебр унара является двойной алгеброй Брауэра найдены в [160]. Напомним, что алгебра Брауэра называется двойной, если в ней имеется бинарная операция $b—a$, причем $b—a\leqslant x$ тогда и только тогда, когда $a\cup x\geqslant b$. Двойная алгебра Брауэра изоморфна решетке подалгебр унара в том и только в том случае, если

1) в $A$ выполнено тождество $(b—a)\vee(a—b)=1$;

2) если $a$, $b$ — неразложимые в объединение элементы, $a<b$, то для любого подмножества $X$ в $A$ из $a\leqslant\sup X$ следует $a\leqslant x$ для некоторого $x\in X$;

3) если $C$ — цепь неразложимых в объединение элементов в $A$, то либо $\inf C=0$, либо $\inf C\in C$.

Число подалгебр в конечной BCK-алгебре вычисляется в [380]. Решетка подалгебр алгебры Хейтинга $A$ полумодулярна сверху [591]. Эта решетка атомарна в том и только в том случае, если $A$ является алгеброй Стоуна. Кроме того, в этой работе описаны алгебры Хейтинга $A$, в которых решетка подалгебр булева (см. также [592]).

Предположим, что $G$ — группа и $L$ — алгебраическая решетка, причем задан гомоморфизм $f: G\to\operatorname{Aut}L$. Тогда существует универсальная алгебра $A$ со следующими свойствами: а) $G\simeq\operatorname{Aut}A$; б) $L\simeq\operatorname{Sub}A$, причем $f$ индуцирован действием $G$ как группы автоморфизмов в $\operatorname{Sub}A$ [305]. Конкретный вариант этой задачи рассмотрен в [494] (см. также [250]).

В работе [6] изучаются неассоциативные конечномерные алгебры над полем, не имеющие ненулевых собственных подалгебр. В [564] классифицируются подалгебры декартовой степени $A^k$, $k\geqslant2$, $A$ — идемпотентная универсальная алгебра, в терминах аффинных подалгебр и проекций $A^k$ в $A$. В качестве следствия получено описание с точностью до локальной рациональной эквивалентности простых идемпотентных алгебр, содержащих не менее трех элементов, и не имеющих неодноэлементных собственных подалгебр. Если $p$ — тернарная мальцевская операция на конечном множестве $A$, то клон главных производных операций алгебры $(A,p)$ обладает минимальным подклоном в том и только в том случае, если на $A$ можно так задать структуру элементарной абелевой группы, что $p(a,b,c)=a—b+c$. Конечный идемпотентный группоид $A$ с минимальным клоном главных производных операций рационально эквивалентен алгебре $(A, a-b+c)$ при некоторой структуре элементарной абелевой группы на $A$ тогда и только тогда, когда в $A$ имеется минимальный подгруппоид, содержащий не менее трех элементов.

В статье [2] описываются минимальные множества образующих в унарных алгебрах, максимальные подалгебры и их пересечения.

## § 3. Системы операций в алгебрах

**3.1. Клоны операций.** Если $A$ — некоторое множество, то через $O(A)$ обозначим клон всех конечноместных операций на $A$. Предположим, что множество $A$ бесконечно. Тогда число максимальных подклонов в $O(A)$ равно $2^{2^{|A|}}$ [532]. Если $X$ — конечное множество, содержащее не менее трех элементов, то в $O(X)$ наименьшая длина неуплотняемого ряда подклонов равна 6, если $|X|$ — составное число, и равна 5, если порядок $X$ — простое число [563]. В последнем случае существует $(|X|-2)!\ (|X|+4)$ неуплотняемых цепей подклонов.

Зафиксируем отношение $\gamma$ на конечном множестве $X$ и обозначим через $\mathrm{Pol}\,\gamma$ подклон в $O(X)$, состоящий из всех операций на $X$, сохраняющих отношение $\gamma$. Важным инвариантом $\mathrm{Pol}\,\gamma$ является такое наименьшее натуральное число $r$, что $n$-арная операция $f$, $n>r$. лежит в $\mathrm{Pol}\,\gamma$ в том и только в том случае, если все операции арности не выше $r$, полученные из $f$ отождествлением аргументов, лежат в $\mathrm{Pol}\,\gamma$. Исследованию этого инварианта и вычислению его для ряда важных отношений посвящена работа [536]. Подклон в $\mathrm{Pol}\,\gamma$, состоящий из всех операций на $X$, значения которых лежат в фиксированном подмножестве $Y$ в $X$, изучается в [62], [86].

Предположим, что $\gamma$ — бинарное отношение, задающее на $X$ частичный порядок с наибольшим и наименьшим элементами. Тогда многообразие, порожденное алгеброй $(X, \mathrm{Pol}\,\gamma)$, является 4-дистрибутивным. Подклон всех несюръективных операций из $\mathrm{Pol}\,\gamma$ конечно порожден [253]. Если $Y$ — подмножество в $X$ и $C_Y$ — подклон в $O(X)$, порожденный всеми операциями, значения которых лежат в $Y$, то $C_Y$ конечно порожден, если $C$ содержит $k$-арную операцию $d$, $k\geqslant 3$, удовлетворяющую тождеством $d(x, y, \ldots, y)=d(y, x, y, \ldots, y)=\ldots$ $\ldots=d(y, \ldots, y, x)$ для всех $x, y\in X$. Предположим, что $Y$ состоит из двух элементов, и $H$ — максимальный подклон в $O(Y)$, содержащий тождественную операцию, $P$ — подклон в $C_Y$, порожденный всеми операциями, ограничение которых на $Y$ лежит в $H$. Тогда $P$ — максимальный подклон в $C_Y$ [193]. Более того, если $B$ — конечно порожденный подклон в $O(Y)$, содержащий тождественную операцию и $A$ — подклон в $C_Y$, порожденный всеми операциями, ограничение которых на $Y$ принадлежит $B$, тогда $A$ — конечно порожденный клон. При этом, если $B$ порождается операциями арности не выше $k$, то $A$ порождается операциями арности не выше $\max(r, 3)$. Эти результаты позволяют полностью описать решетку подклонов в $C_Y$ в случае, когда $X$ состоит из трех элементов.

Пусть $C$ — абстрактный клон. Тогда существует такое множество $X$ и моноид $M$ преобразований на $X$, что $C$ изоморфно клону всех операций на $X$, перестановочных с $M$ [539].

Предположим, что $G$ — группа преобразований конечного множества $X$. Обозначим через $O_G(X)$ множество всех операций в $X$, перестановочных с действием $G$. В [255] указан алгоритм для вычисления числа $n$-местных операций из $O_G(X)$. Полностью эти числа найдены в случаях, когда $G=S_m$, $G=A_m$, $m=|X|$ и когда действие $G$ в $X$ регулярно. Предположим, что $G$ — циклическая группа простого порядка $p$ с образующей $s$, действующей в $X$ без неподвижных точек, $|X|\geqslant 2$. Тогда максимальные подклоны в $O_G(X)$ имеют вид $O_G(X)\cap \mathrm{Pol}\,\rho$, где $\rho$ — одно из следующих отношений:

1) $\rho$ состоит из пар $(x, t(x))$, где $t$ — перестановка на $X$, причем порядок группы, порожденной $s$, $t$ равен $pq$, где $q$ — простое число;

2) $\rho$ — аффинное отношение в $X$, заданное структурой некоторой элементарной абелевой $p$-группы в $X$, причем $s(x)=x+c$, где $x$, $c\in X$;

3) $\rho$ — отношение на $X$ с рядом специальных свойств, причем если $(a_0, \ldots, a_{p-1})\in\rho$ и $b_i=s^i(a_i)$, $0\leqslant i\leqslant p-1$, то $(b_0, \ldots, b_{p-1})\in\rho$. Отметим, что на конечном множестве $X$ существует конечное число подклонов в $O(X)$, имеющих вид $\mathrm{Pol}\,\rho$, где $\rho$ — отношение на $X$, определяемое атомарной $\exists\wedge$-формулой [200] (см. также [197]). Предположим, что $p$ — простое число и $G$ — циклическая группа преобразований в поле вычетов $\mathbf{F}_p$, порожденная $s(x)=x+1$. Тогда в $O_G(\mathbf{F}_p)$ имеется только два максимальных подклона $I_s$ и $L_s$ [562]. Подклон $I_s$ состоит из всех идемпотентных операций в $O_G(\mathbf{F}_p)$, а $L_s$ состоит из всех операций вида

$$f(x_1, \ldots, x_n)=c_1x_1+\ldots+c_nx_n+c_0,\ c_i\in\mathbf{F}_p,\ c_1+\ldots+c_n=1.$$

Клон $I_s$ содержит только следующие максимальные подклоны:

а) все операции из $I_s$, сохраняющие некоторое подмножество $B$ в $\mathbf{F}_p$, причем $1<|B|<p$ и $a-b+c\notin B$ для любых трех различных элементов $a$, $b$, $c$ из $B$;

б) все операции из $I_s$, перестановочные с оператором умножения в $\mathbf{F}_p$ на некоторый фиксированный элемент, имеющий в мультипликативной группе $\mathbf{F}_p^*$ простой порядок.

Минимальные подклоны в $O_G(X)$, где $G$ — группа всех преобразований в конечном множестве $X$ описаны в [240]. Обозначим через $l_k$ проекцию $X^k$ на первый множитель, а через $r_k$ —

на последний, если все аргументы различны; в противном случае $l_k(a_1, \ldots, a_k)=a_k$, $r_k(a_1, \ldots, a_k)=a_1$. Пусть

$$s(x, y, z)=\begin{cases} z, & \text{если } x=y; \\ y, & \text{если } x=z; \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Предположим, что $X$ содержит $n$ элементов. Минимальными подклонами в $O_G(X)$ являются подклоны, содержащие следующие функции (и только эти подклоны): а) $l_n$, $n\geqslant 5$, и дуальный дискриминатор $d$; б) $l_4$, $d$, $f$, если $n=4$; в) $l_3$, $d$, $r_3$, если $n=3$; г) $s$, $d$, $r_2$, если $n=2$. Здесь $f$ — тернарная операция на $X=(0, 1, 2, 3)$, принимающая следующие значения: $f(1,2,3)=f(0,1,1)=f(1,0,1)=f(1,1,0)=f(0,0,0)=0$. Описаны также все подклоны в $O_G(X)$, содержащие дуальный дискриминатор. Отметим, что в [445] приведено простое доказательство существования минимальных клонов на конечном множестве, содержащем не менее трех элементов.

Рассмотрим универсальную алгебру, заданную на булевой алгебре (0, 1). Эта алгебра имеет дистрибутивную решетку конгруэнций в том и только в том случае, если следующие операции:

$$m(x, y, z)=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x),$$
$$s(x, y, z)=x\wedge(y\vee z), \quad s'(x, y, z)=x\vee(y\wedge z),$$
$$r(x, y, z)=s(x, y, z'), \quad r'(x, y, z)=s'(x, y, z'),$$

— являются главными производными операциями [265]. Двуэлементная алгебра будет $n$-перестановочной в том и только в том случае, если либо $p(x, y, z)=x+y+z$, $r(x, y, z)$, либо $p(x, y, z)$, $r'(x, y, z)$ являются главными производными операциями. Аналогичным образом можно охарактеризовать двумерные алгебры, порождающие модулярное многообразие.

Операция $f$ на множестве $X$ называется ТС-операцией, если при фиксации всех аргументов, кроме одного, получается операция, которая либо тождественна, либо не имеет в $X$ неподвижных точек. Число таких $n$-арных операций не менее $k^{(k-1)n+1}$, $k=|X|$ [178]. Если $X$ состоит из двух элементов (0, 1), то число таких операций равно $2^{n+1}$, причем все они имеют вид

$$f(x_1, \ldots, x_n)=c_0+c_1x_1+\ldots+c_nx_n, \quad c_i=0, 1.$$

Если $X$ состоит из трех элементов, то число таких операций равно $3^{2n+1}+3\cdot 2^{2n-1}-18n-6$. При $k\geqslant 4$ число $n$-арных ТС-операций не превосходит $2k^{(k-1)n+1+m}$, где $m=k^2+k^3+\ldots+k^{k-2}$. На конечном множестве $X$ существует счетное число клонов, порождаемых ТС-операциями. Если $X$ содержит не менее трех элементов, то существует клон, состоящий из ТС-операций, в котором бесконечно много подклонов. Этот клон не является конечно порожденным. Клон $C$ операций на $X$ состоит из

ТС-операций в том и только в том случае, если $C \leqslant \mathrm{Pol}\,\rho$, где $\rho$ — 4-арное отношение со следующим свойством:

$$(x, x, y, z) \in \rho \Leftrightarrow (y, z, x, x) \in \rho \Leftrightarrow (x, y, x, z) \in \rho \Leftrightarrow (y, x, z, x) \in \rho \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = z.$$

Предположим, что алгебра $(X, C)$ порождает гамильтоново многообразие. Тогда в любой алгебре этого многообразия ТС-клон $C$ задает ТС-операции. Кроме того, в этой работе описаны все максимальные клоны ТС-операций на трехэлементном множестве $X$. На трехэлементном множестве существует в точности 9 минимальных клонов, состоящих из ТС-операций [59]. Имеется только два максимальных клона ТС-операций: $L$ и $B$. Клон $L$ состоит из всех операций $c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, $c_i \in \mathbf{F}_3 = X$, а $B$ состоит из всех операций вида $f_0(f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n))$, где $f_i$ — унарные операции и сложение ведется по модулю 2. В этой работе описана решетка подклонов в $O_Y(X)$, $Y = (0, 1)$, и решетка подклонов в $L$. Минимальные ТС-клоны на трехэлементном множестве при действии группы всех подстановок разбиваются на 5 классов эквивалентности [254].

Предположим, что $A$ — примальная алгебра сигнатуры $T$. Тогда на $A \times A$ существует 9 клонов, содержащих $T$ [535]). Клон главных производных операций сигнатуры $T \times T$ на $A \times A$ имеет вид $\mathrm{Pol}\,\rho_1 \cap \mathrm{Pol}\,\rho_2$, $\rho_1$ и $\rho_2$ состоят соответственно из пар $((a, b), (a, c))$, $((a, b), (c, b)) \in A^4$, где, $a, b, c \in A$ [263]. Если $t$ — тернарный дискриминатор, то клон главных производных операций сигнатуры $T$ имеет вид $\mathrm{Pol}\,\rho$, где $\rho$ состоит из $((a, b), (b, a))$, $a, b \in A$. Предположим, что $A_1$, $A_2$ — примальные алгебры сигнатур $T_1$ и $T_2$. В $A_1 \times A_2$ рассмотрим операцию $\mathrm{Sh}(x, y, z, u)$, принимающую значение $(t, u_2)$, где $t = x_1$, если $z_2 = u_2$, и $t = y_1$, если $z_2 \neq u_2$. Тогда алгебра $A_1 \times A_2$ сигнатуры $(T_1 \times T_2) \vee \mathrm{Sh}$ является предпримальной.

Предположим, что множество $X$ содержит не менее трех элементов. Тогда имеется вложение решетки подмножеств натуральных чисел в решетку подклонов в $O(X)$ [348] (см. также [252]). На трехэлементном множестве существует 84 минимальных клона. Если отождествить клоны, получающиеся с помощью перестановок множества $X$, то получается 24 класса минимальных клонов [238].

В [521] показано, что если $A$ парапримальная алгебра, то в клоне главных производных операций на $A$ есть минимальный клон $C$, относительного которого $A$ является парапримальной $C$-алгеброй. Предположим, что $A_1, \ldots, A_k$ — все аффинные подалгебры парапримальной алгебры $A$. Рассмотрим в $A$ тернарный дискриминатор $t(x, y, z)$, который на каждой алгебре $A_i = \mathbf{F}_{q_i}$, $q_i$ — степень простого числа, имеет вид $t(x, y, z) = x - y + z$. Пусть $h(x, y)$ — бинарная операция, которая на $A_i$ имеет вид $h(x, y) = a_i x + (1 - a_i) y$, где $a_i$ — образующий циклической группы $\mathbf{F}^*_{q_i}$. Предположим, что вне $A_i$ операция

$h(x,y)$ совпадает с проекцией на первый множитель, $A_i \cap A_j$ при $i \neq j$ содержит не более одного элемента. Тогда $(A, t, h)$ — минимальная парапримальная алгебра, имеющая те же аффинные подалгебры, что и $A$.

Пусть $\Gamma$ — система отношений на множестве $A$ и $\mathrm{Pol}\,\Gamma$ — все операции на $A$, сохраняющие каждое из отношений системы $\Gamma$, т. е.

$$\mathrm{Pol}\,\Gamma = \bigcap_{\rho \in \Gamma} \mathrm{Pol}\,\rho.$$

Если $F$ — система операций на $A$, то через $F^0$ обозначим множество всех таких отношений $\rho$ в $A$, что $F \leqslant \mathrm{Pol}\,\rho$. Формульной схемой над системой отношений $\Gamma$ называется тройка $W = (S, X, (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где $X = (x_i, i \in I)$ — множество неизвестных, $x_{i_j} \in X$, $S$ — множество формул над $\Gamma$, т. е. формул вида либо $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, $R \in \Gamma$, либо $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$, где $f, g$ — операции из $\Gamma$. При этом каждая операция отождествляется с отношением — своим графиком. Формульная схема $W$ определяет отношение $R_W$ в $A$, состоящее из всех $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in A^n$, удовлетворяющих $S$. Тогда $R_W \subseteq (\mathrm{Pol}\,\Gamma)^0$. Любая подалгебра декартовой степени $(A^n, \mathrm{Pol}\,\Gamma)$ задается формульной схемой над $\Gamma$. Отношение $R$ лежит в $(\mathrm{Pol}\,\Gamma)^0$ тогда и только тогда, когда $R$ является объединением системы направленных отношений, определяемых формульными схемами над $\Gamma$. Операция $f$ лежит в $\mathrm{Pol}\,\Gamma$ в том и только в том случае, если $f$ можно определить по $\Gamma$ локально. Предположим, что $\Gamma_k$, $k \geqslant 1$, — системы $k$-арных отношений. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) существует такая структура $T$-алгебры на $A$, что $\Gamma_k = (\mathrm{Sub}\,A^k, T)$;

2) если отношение $R$ определяется формульной схемой над $\bigcup_{i \geqslant 1} \Gamma_i$, то $R \leqslant \bigcup_{i \geqslant 1} \Gamma_i$;

3) каждое $\Gamma_k$ замкнуто относительно объединений направленных систем.

Если $F$ — система операций на $A$, то $F = \mathrm{Pol}(F^0)$ тогда и только тогда, когда $F$ содержит операцию, которую можно определить по $F$ локально. Если $E$ — моноид преобразований на $A$, то $E = \mathrm{End}(A, F)$ для некоторой системы операций $F$ на $A$ тогда и только тогда, когда $E$ содержит все операции, которые можно определить по $E$ локально [557].

Если $C$ — некоторый абстрактный клон, то скажем, что на множестве $X$ задана структура $C$-алгебры, если имеется гомоморфизм клонов $C \to O(X)$. Тогда все $C$-алгебры образуют многообразие, по которому $C$ восстанавливается как клон главных производных операций свободной алгебры счетного ранга. Два многообразия рационально эквивалентны в том и только в том случае, если их клоны изоморфны.

Конгруэнциям в клоне $C$ соответствуют подмногообразия в многообразии $C$-алгебр. Эти вопросы обсуждаются в работах [62], [85], [147], [156], [260], [264], [292], [410], [456], [545]. Предположим, что $A$ — эквациально компактная алгебра. В [91] в клоне главных производных операций на $A$ рассматриваются такие подклоны $C$, что $A$, как $C$-алгебра, эквациально компактна.

К клонам тесно примыкают позиционные алгебры, изучаемые в [128] и связанные с системой операций, близких к квазигрупповым. К понятию клона тесно примыкает также понятие алгебры Менгера (или суперассоциативной системы). Основным примером алгебр Менгера является алгебра $O_n(X)$ всех $n$-местных функций на множестве $X$ с $(n+1)$-местной операцией суперпозиции. Если $n\geqslant 2$, то алгебра Менгера $O_n(X)$ проста [440]. Обзор работ по алгебрам Менгера приведен в [543] (см. также [29]—[31], [38], [103], [122], [130], [131], [441]—[443]). Обобщением алгебр Менгера являются поликатегории, изучаемые в [113], [114].

С каждой универсальной алгеброй $A$ связывается последовательность $p_n=p_n(A)$, $n\geqslant 0$, где $p_n$ — число существенных (т. е. зависящих от всех своих аргументов) главных производных операций на $A$. Алгебра $A$ с одной основной операцией арности не выше 4 полиномиально эквивалентна аффинному пространству над полем из $p$ элементов ($p$ просто) тогда и только тогда, когда

$$p_k=1/p((p-1)^k-(-1)^k),\ 1\leqslant k\leqslant 4,$$

и в $A$ нет подалгебр $B$ порядка $1<|B|<p$ [235]. Если алгебра $A$ идемпотентна, то существует такое натуральное число $m$, что для всех $n\geqslant m$, из $\infty>p_n(A)>1$ вытекает $p_{n+1}(A)>p_n(A)$ [406]. Предположим, что $a_m$ — наименьшее такое целое число, что $m>3$ и существует такая универсальная алгебра $A$, что $p_1(A)=\ldots=p_{m-1}(A)=0$ и $p_m(A)=a_m$. Тогда $a_m=m$ [407]. Более того, при $k\geqslant m$ для такой алгебры $A$ имеем $p_k(A)=$ $=kf_m(k)$, где последовательность $f_m(k)$ не зависит от алгебры $A$. Для любого натурального числа $a$ существует такая алгебра $C$ порядка $a$, что

$$p_k(C)=a^{a^k}-\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}p_i(C).$$

Для любой другой алгебры $B$ порядка $a$ имеем $p_k(B)\leqslant p_k(C)$ [537]. Более того, существует трехэлементный группоид $A$, у которого $p_k(A)=2^k$ для всех $k$. Не существует двухэлементного группоида с этим свойством.

Существует коммутативный группоид $A$ порядка $n+2$, у которого $p_0=p_1=0$, $p_2=2$, причем для любого коммутативного группоида $B$ и любого числа $k$ выполнено неравенство $p_k(B) \geqslant \geqslant p_k(A)$ [283]. Близкие вопросы разбираются в [326]. Предположим, что задан идемпотентный группоид $A$. Тогда существует такая алгебра $B$, что $p_k(B) = k(p_k(A) + p_{k-1}(A))$, $k \geqslant 0$ [438]. Если $C$ и $D$ — две идемпотентные алгебры, то существует такая алгебра $H$, что

$$p_n(H) = \sum_{i,j=2}^{n} p_i(C)\, p_j(D) \binom{n}{i} \binom{i}{n-j}.$$

Предположим, что $A$ — идемпотентный группоид. Тогда $p_3(A) < 6$ в том и только в том случае, если $A$ — одна из следующих алгебр (с точностью до полиномиальной эквивалентности):

1) $A$ — полурешетка;

2) $A$ — дистрибутивная квазигруппа Стейна;

3) $A$ — прямоугольная связка;

4) $p_k(A) = k$ для всех $k \geqslant 0$ [282] (см. также [419]).

**3.2 Интерполяция и полнота в алгебрах.** Алгебра $A$ называется (локально) *$n$-полиномиально полной*, если для любой $n$-арной операции $f$ на $A$ и любого (конечного) подмножества $X$ в $A$ существует такая $n$-арная производная операция $p$, что значения $p$ и $f$ на $X^n$ совпадают. Соотношения между (локальной) $n$-полиномиальной полнотой при различных $n$ рассматриваются в [342], [343], [360], [387], [388]. Распространение понятия локальной $n$-полиномиальной полноты на произвольные кардиналы исследуется в [393].

Конечная алгебра $A$ является $n$-полиномиально полной для всех $n$ в том и только в том случае, когда

1) алгебра $A$ проста;

2) существует такой элемент 0 в $A$, бинарные производные операции $p$, $s$, $n$-арная производная операция $f$, не являющаяся константой, что $p(x, x) = 0$, отображение $x \to p(x, a)$ биективно при любом $a$ из $A$, $s(0, x) = s(x, 0) = x$ и $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, если среди $x_1, \ldots, x_n$ не менее $n-1$ раз встречается 0 [416]. Другая характеризация таких алгебр получена в [367].

Говорят, что универсальная алгебра $A$ обладает свойством интерполяции, если она локально $n$-полиномиально полна для всех $n$. В случае конечности алгебры $A$ это эквивалентно функциональной (или полиномиальной) полноте алгебры $A$. Предположим, что $A$ — универсальная алгебра с одной операцией арности не меньше двух, причем алгебра $A$ проста, не имеет собственных подалгебр, порядок $A$ свободен от квадратов; тогда алгебра $A$ функционально полна [59]. Предположим, что $A$ — конечная алгебра, порождающая дистрибутивное многообразие, причем в $A$ содержится не менее трех элементов. Тогда функциональная полнота $A$ эквивалентна выполнению следующих условий:

1) алгебра $A$ проста;

2) в $A^n$ при $2 \leqslant n < |A|$ нет подалгебр, замкнутых относительно перестановок координат, содержащих все элементы вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ с $a_1 = a_2$, и подмножество $C \times A^{n-1}$ для некоторого непустого подмножества $C$ в $A$;

3) если в $A$ задан частичный порядок с наибольшим и наименьшим элементами, то существует не монотонная основная операция [534].

На конечном множестве, содержащем не менее четырех элементов, существует континуум неэквивалентных структур функционально полных алгебр [251]. Если множество состоит из трех элементов, то на нем существует не менее счетного числа неэквивалентных структур функционально полных алгебр. Исследование функциональных полных алгебр в перестановочных и других многообразиях алгебр проводится в [63]. Полнота в коалгебрах рассматривается в [239]. В статье [384] изучаются аффинно полные многообразия $V$, т. е. многообразия, в которых в любой алгебре $A$ операция, сохраняющая Con $A$, является производной. Тогда в $V$ любая подпрямо неразложимая алгебра конечна и не содержит собственных подалгебр. Если $B$ — подалгебра в $V$-алгебре $A$, и $f$ — операция на $B$, сохраняющая Con $B$, то $f$ однозначно продолжается до операции в $A$, сохраняющей Con $A$. Если $V$ дистрибутивно и порождается алгеброй $A$, $B$ — подалгебра в $A$, то $B$ порождает $V$. Если сигнатура $V$ конечна, то порядки подпрямо неразложимых алгебр в $V$ ограничены ($V$ дистрибутивно). Арифметичное многообразие конечной сигнатуры аффинно полно в том и только в том случае, когда оно порождается конечной алгеброй без собственных подалгебр. Близкие вопросы изучаются в [154], [168], [389].

Операция $f$ арности $k$ на алгебре $A$ обладает свойством $n$-интерполируемости, если для любого подмножества $X$ в $A$, содержащего не более $n$ элементов, существует такая производная операция $p$, что ограничения $p$ и $f$ на $X^k$ совпадают. Свойство $n$-интерполируемости на $A$ эквивалентно тому, что алгебра $A$ проста, существует такой элемент $a \in A$ и бинарная непостоянная операция $q$ на $A$ со свойством 2-интерполируемости, что $q(a, x) = q(x, a)$ для всех $x$, и существует тернарная мальцевская операция со свойством $n$-интерполируемости [368]. Отсюда следует, что свойство $n$-интерполируемости для всех операций и для тернарного дискриминатора эквивалентны. Отметим, что свойство интерполяции эквивалентно выполнимости свойств $n$-интерполируемости для всех $n$. Более того, для произвольной алгебры $A$ следующие условия эквивалентны:

1) $A$ обладает свойством интерполяции;

2) $A$ обладает свойством $n$-интерполируемости для всех бинарных операций на $A$ и всех $n$;

3) тернарный дискриминатор на $A$ обладает свойством $n$-интерполируемости для всех $n$;

4) дуальный дискриминатор на $A$ обладает свойством $n$-интерполируемости для всех $n$;

5) алгебра $A$ проста, существует такой элемент $a \in A$ и бинарные операции $p$, $t$, $q$ со свойством $n$-интерполируемости для всех $n$, что $q$ не постоянно и $p(x, x)=a$, $t(p(x, y), y)=x$ $q(x, a)=q(a, x)=a$ для всех $x$, $y \in A$ [390]. Другие критерии интерполируемости найдены в [308], [391]. Отметим, что если простая алгебра в перестановочном многообразии не обладает свойством интерполируемости, что она аффинна, причем соответствующая абелева группа на алгебре либо не имеет кручения, либо является элементарной абелевой $p$-группой, $p$ — простое число [390].

Интерполируемость в алгебрах Менгера изучается в [470] Обзор результатов по интерполируемости можно найти также в [478].

Алгебра $A$ называется *предполиномиально полной* (*предпримальной*), если клон (главных) производных операций максимален в клоне $O(A)$ всех операций на $A$. Предполиномиально полные алгебры подробно рассматриваются в [544]. Предпримальным алгебрам посвящена монография [258]. Дается описание предпримальных конечных алгебр. Показывается, что если предпримальная алгебра содержит не менее трех элементов, то она либо квазипримальна, либо задается постоянными операциями. Любые собственные подалгебры и факторалгебры предпримальной алгебры являются примальными. Группа автоморфизмов предпримальной конечной алгебры либо единична, либо — это циклическая группа простого порядка. Независимое в смысле Марчевского подмножество в предпримальной алгебре состоит не более, чем из одного элемента [5]. Кроме того, рассмотрены свойства многообразий, порождаемых предпримальными конечными алгебрами.

Предположим, что конечная алгебра $A$ порождает 2-дистрибутивное многообразие и в $A$ нет нетривиальных собственных подалгебр. Тогда алгебра $A$ предпримальна в том и только в том случае, когда в $A \times A$ имеются только две подалгебры: диагональ и вся алгебра $A \times A$ [259]. Предпримальность прямых произведений двух примальных алгебр исследуется в [263].

Тернарная операция $m(x, y, z)$ называется мажоритарной, если $m(x, x, y)=m(x, y, x)=m(y, x, x)=x$. В [260] отмечается, что если в конечной алгебре $A$ мажоритарная операция является главной производной, то клон всех главных производных операций состоит из всех операций на $A$, сохраняющих все подалгебры в $A \times A$. Более того, пусть $A$ порождает многообразие $K$, и $V$ — многообразие универсальных алгебр, эквивалентное $K$, эквивалентность задается с помощью функтора $H: K \to V$. Тогда $H(A)$ — конечная алгебра, порождающая $V$, причем в $H(A)$ мажоритарная операция является главной производной. При этом, если $A$ состоит из двух элементов, то в $H(A)$

нет нетривиальных толерантностей, являющихся подалгебрами. В этой работе описаны многообразия универсальных алгебр, эквивалентные (как категории) многообразиям, порождаемым двуэлементной алгеброй, в которой мажоритарная операция является главной производной. Предположим, что $A$ — конечная алгебра, в которой мажоритарная операция является главной производной. Алгебра $A$ примарна в том и только в том случае, когда в $A \times A$ нет нетривиальных подалгебр [262]. Алгебра $A$ предпримальна тогда и только тогда, когда в $A \times A$ имеются нетривиальные подалгебры и для любых таких двух подалгебр $s_1$, $s_2$ выполнено условие $\mathrm{Pol}\, s_1 = \mathrm{Pol}\, s_2$. Алгебра $A$ функционально полна в том и только в том случае, когда она проста и выполнены следующие условия:

1) в $A$ нет нетривиальной структуры решетки;

2) в $A \times A$ нет нетривиальной подалгебры, содержащей пары $(a, c)$ для всех $a \in A$ при некотором $c \in A$ и задающей рефлексивное, симметричное отношение на $A$. Конечная алгебра Оккама с псевдодополнениями функционально полна в том и только в том случае, если она проста. Пусть $K$ — многообразие алгебры Оккама с псевдодополнениями, заданное тождеством $x \wedge x'^{*} = (x \wedge x'^{*})'^{*}$, где $x^{*}$ — псевдодополнение, $x'$ — дуализм в алгебре Оккама. Тогда единственной предпримальной алгеброй в $K$ является трехэлементная цепь $(0 < a < 1)$, где $a = a'$. В $K$ свойства алгебры быть простой, функционально полной и квазипримальной эквивалентны.

Каждая алгебра из $K$ обладает примальной подалгеброй. Алгебра $A$ из $K$, содержащая не менее четырех элементов, обладает предпримальным гомоморфным образом в том и только в том случае, когда центр $A$ (т. е. множество дополняемых элементов) состоит лишь из 0 и 1. Отметим, что в этой работе показано, что в $K$ имеется 6 подпрямо неразложимых алгебр и 10 подмногообразий.

В [446] рассматривается категория универсальных упорядоченных алгебр, причем если $p: A \to B$ — гомоморфизм, то ограничение порядка в $B$ на образ $p(A)$ задает в образе наименьший порядок, при котором гомоморфизм $p$ является изотонным отображением. В этой категории можно говорить о многообразиях. Пусть $A$ — конечная упорядоченная алгебра, в которой любая изотонная операция является главной производной операцией. Предположим, что порядок в $A$ либо тривиален, либо решеточен. Если $B$ — алгебра из многообразия, порожденного $A$, то $B \simeq A[C]$, где $C$ — ограниченная дистрибутивная решетка, причем $C$ является булевой алгеброй, если порядок в $A$ тривиален. Операция $p$ на $B$ является производной в том и только в том случае, если $p$ сохраняет все рефлексивные, транзитивные подалгебры в $B \times B$ [447]. Близкие вопросы рассматриваются в [253].

**3.3. Алгебры полиномов, аффинные алгебры, алгебры с большими группами автоморфизмов.**

Пусть задана сигнатура

$$T = \bigcup_{n \geq 0} T_n.$$

Для любого $n \geqslant 0$ и любого $t \in T_n$ введем символы унарных операций $h_{1,t}, \ldots, h_{n,t}$. Обозначим через $T'$ сигнатуру, состоящую из $T_0$, всех $h_{i,t}$, нульарной операции $O$ и бинарной операции сложения. Рассмотрим многообразие $T'$-алгебр, задаваемое тождествами коммутативности, ассоциативности сложения и тождеством $0+x=x$. Пусть $A$ — свободная алгебра этого многообразия со счетной базой $X$. Если $t \in T_n$, то в $A$ положим

$$t(a_1, \ldots, a_n) = h_{1,t}(a_1) + \ldots + h_{n,t}(a_n).$$

Тогда $A$ превращается в $T$-алгебру, причем $T$-подалгебра $F$ в $A$, порождаемая $X$, является свободной $T$-алгеброй с базой $X$ [375]. Имеется критерий принадлежности элемента из $A$ подалгебре $F$.

Пусть $K$ — многообразие алгебр, $A \in K$, и $X$ — некоторое множество. Через $A[X]$ обозначим $K$-свободное произведение $A$ и $K$-свободной алгебры с базой $X$. Тогда каждый элемент из $A[X]$ задает в $A$ производную операцию. Условия, при которых получаемый гомоморфизм клонов $A[X] \mapsto O(A)$ является вложением (биекцией) исследуется в [464]. Пусть $K$ — многообразие алгебр де Моргана. В [269] находится канонический вид элементов алгебры полиномов $A[X]$ в многообразии $K$. Близкие вопросы изучаются в статье [293].

Пусть $K$ — многообразие почтиколец и $A[x]$ — алгебра полиномов в $K$ от одной переменной $x$. Если $I$ — подмножество в $A$, то идеал в $A$, порожденный $I$, состоит из всех сумм элементов $p(a)$, где $p \in A[x]$ и $p(0)=0$, $a \in I$. Если $M$ — максимальный идеал в $A$, то для $b \in A \setminus M$ множество всех таких $p \in A[x]$, что $p(b) \in M$, является максимальным левым идеалом в $A[x]$. Отсюда вытекает, что если $R(A)$ — пересечение всех максимальных идеалов в $A$ и $p \in J_i(A[x])$, то $p(A) \subseteq R(A)$. Здесь $J_i$, $i=0$, $1/2$, 1, 2,— различные обобщения понятия радикала Джекобсона на почтикольца [502].

В статье [561] получен критерий того, что на $T$-алгебре $A$ можно ввести такую структуру модуля над кольцом $K$, что каждая операция $t \in T_n$, $n \geqslant 0$, имеет вид

$$t(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_0, \ a_i \in K, \ a_1 + \ldots + a_n = 1.$$

Пусть $V$ — модулярное многообразие и $A$ — алгебра из $V$, причем в $\mathrm{Con}\, A^2$ существует общее дополнение к ядрам двух проекций $A^2$ на $A$. Тогда алгебра $A$ полиномиально эквивалентна модулю над некоторым кольцом [352]. Отсюда вытекает, что если $U$, $W$ — два подмногообразия в $V$, причем $U$ дистрибутивно, а $W$ абелево, то $U$ и $W$ независимы. Предположим, что $V$ порождается конечным числом конечных универсальных алгебр, каждая из которых либо порождает дистрибутивное многообразие, либо обладает указанным выше свойством для конгруэнций $A^2$. Тогда $V$ конечно базируемо.

Для сигнатуры $T$ через $T^*$ обозначим пополнение $T$ тернарной операцией $+$, а через $V^*(T)$ — многообразие всех $T^*$-алгебр, порождаемое всеми аффинными $T$-алгебрами, в которых $+(x, y, z)=x-y+z$. Пусть $Q(T)$ — класс всех $T$-подалгебр алгебр из $V^*(T)$. Тогда $Q(T)$ — бесконечно базируемое квазимногообразие $T$-алгебр [522]. При этом $Q(T)$ не содержит все абелевы $T$-алгебры, у которых главные производные операции являются ТС-операциями. Пусть $A$ — некоторая $T$-алгебра, $Z(A)$ — свободная абелева аддитивная группа с базой, состоящей из элементов $A$. Обозначим через $L(A)$ подмножество в $Z(A)$, состоящее из всех элементов, у которых сумма координат равна нулю. Тогда $L(A)$ является $T^*$-подалгеброй в $Z(A)$, если положить $+(x, y, z)=x-y+z$. Пусть $E(A)$ — наибольшая факторалгебра алгебры $L(A)$, в которой каждая операция из $T$ является гомоморфизмом относительно операции $+$. Тогда $E(A)\in V^*(T)$ и является наибольшей алгеброй, в которую $R(A)$, ретракт $A$ в $Q(T)$, вложим в качестве $T$-подалгебры. Близкие вопросы изучаются в работе [469].

Предположим, что $A$ — алгебра из перестановочного многообразия. Тогда следующие условия эквивалентны [346]:

1) алгебра $A$ аффинна;

2) любая основная операция перестановочна с тернарной мальцевской операцией $p(x, y, z)$;

3) диагональ в $A^2$ является классом некоторой конгруэнции в $A^2$;

4) в $\mathrm{Con}\, A^2$ существует общее дополнение к ядрам проекций $A^2$ на $A$.

Пусть $A$ — простая алгебра в перестановочном многообразии, причем $\mathrm{Con}\, A^2=M_k$, $k\leqslant 3$. Тогда алгебра $A$ аффинна. Если $A$ — бесконечная простая алгебра в перестановочном многообразии, то либо $A$ обладает свойством интерполяции, либо $A$ аффинна. Предположим, что в перестановочном многообразии $K$ имеется нульарная операция, выделяющая подалгебры, и в каждой $K$-алгебре любая подалгебра является классом некоторой конгруэнции. Тогда $K$ полиномиально эквивалентно многообразию всех модулей над некоторым кольцом.

Аффинные алгебры Штейна рассматриваются в [58].

Алгебра $A$ называется *однородной*, если любая подстановка на множестве $A$ является автоморфизмом этой алгебры. Конечная не функционально полная алгебра полиномиально эквивалентна одной из следующих алгебр:

1) $(\mathbf{F}_2, x+1)$; 2) $(\mathbf{F}_2, x+y+z)$;

3) $(\mathbf{F}_2, x+y+z+1)$; 4) $(\mathbf{F}_2, xy+yz+zx)$;

5) $(\mathbf{F}_3, 2x+2y)$; 6) $(\mathbf{F}_4, x+y+z)$

[237]. В [240] описаны на конечном множестве $X$ минимальные клоны операций $C$, для которых $X$ как $C$-алгебра является од-

нородной. Отметим, что полученное выше описание однородных конечных не функционально полных алгебр повторяется в [308].

Предположим, что в алгебре $A$ содержится не менее четырех элементов и группа автоморфизмов алгебры $A$ действует в $A$ трижды транзитивно. Тогда либо $A$ обладает свойством интерполяции, либо полиномиально эквивалентна аффинному пространству над полем из двух элементов [392]. В конечном случае эта теорема доказана в [559]. Более того, в последней работе показано, что если $A$ конечна и группа автоморфизмов действует в $A$ четырежды транзитивно, то $A$ состоит из четырех элементов. Простая конечная алгебра с трижды транзитивной группой автоморфизмов функционально полна.

Предположим, что алгебра $A$ содержит не менее четырех элементов и группа автоморфизмов действует в $A$ дважды транзитивно. Предположим, что для любого элемента $a$ из $A$ в $A\setminus a$ нет нетривиального частичного порядка, инвариантного относительно действия стабилизатора группы $\mathrm{Aut}\,A$ в точке $a$. Тогда либо $A$ обладает интерполяционным свойством, либо $A$ полиномиально эквивалентна аффинному пространству над полем из двух элементов [558]. Алгебры Стейна с дважды транзитивной группой автоморфизмов рассматриваются в [451].

Предположим, что $X$ — конечное множество, содержащее не менее трех элементов. Тогда существует континуум различных структур алгебр на $X$, группа автоморфизмов которых содержит транзитивный цикл на $X$, [95]. Если $X$ состоит из четырех элементов, то с точностью до полиномиальной эквивалентности на $X$ существует 20 различных структур алгебр, группа автоморфизмов которых совпадает с группой четных подстановок на $X$. Если же в $X$ содержится $k\geqslant 5$ элементов, то таких структур $8k-11$. Явно указаны представители каждой структуры.

В статье [4] изучаются конечные универсальные алгебры $A$, в которых группа всех полиномиальных подстановок на $A$ содержит транзитивную циклическую подгруппу. Полное описание таких алгебр получено в случае, когда $A$ — разрешимая группа с операторами $\mathrm{Aut}\,A$, $\mathrm{End}\,A$, и в случае, когда $A$ — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

**3.4. Расширения, решение систем уравнений, эквациальная компактность.** Если $p: A\to B$ — гомоморфизм алгебр, то под $\mathrm{Im}\,p$ понимается конгруэнция в $B$, порождаемая всеми парами $(p(a), p(a'))$, где $a, a'\in A$. Последовательность гомоморфизмов $A\to B\to C$ универсальных алгебр называется точной, если образ первого гомоморфизма совпадает с ядром второго. Это определение предложено Г. И. Житомирским [66]. В этом случае будем считать алгебру $B$ расширением $A$ при помощи $C$, если гомоморфизм $A$ в $B$ — вложение, а $B$ в $C$ сюръективно. Расширение $B$ алгебры $A$ при помощи $C$ существует в том и только в том случае, когда существует такой гомоморфизм $p: A\to C$, что $\mathrm{Im}\,p$ — диагональ в $C^2$. В статье найдены достаточные условия при которых мальцевское произведение двух классов алгебр $V$, $V'$ совпадало бы с классом всех расширений алгебр из $V$ при помощи алгебр из $V'$. Найдены также достаточные условия того, чтобы в многообразии алгебр произведение подмногообразий являлось подмногообразием.

Предположим, что $K$ — класс алгебраических систем и $U$, $V$ — подклассы в $K$. Через $U*V$ обозначается класс всех расширений в $K$ всех систем из $U$ при помощи систем из $V$. Через $U \cdot V$ обозначается класс всех систем $A$ из $K$, обладающих такой подсистемой $B \in U$ и конгруэнцией $c$, что $B$ является объединением $c$-классов и $A/c \in V$. Через $UV$ обозначается мальцевское произведение классов $U$, $V$ в $K$. В работе [366] показано, что если $SK=K$, $SU=U$ и в любой $K$-системе содержится одноэлементная подсистема, то $U \cdot V=UV$. Если $K$, $V$ — многообразия, задаваемые регулярными тождествами, причем в $K \setminus V$ лежит простая система, то $V*V=V \cdot V \neq VV$. Найдены достаточные условия, при которых в квазимногообразии $K$ класс $U \cdot V$ является квазимногообразием для квазимногообразий $U$, $V$. Отмечается, что если в $K$ имеется нульарная операция, выделяющая одноэлементную подалгебру, и $K$ является перестановочным многообразием, то $U*V=U \cdot V=UV$ для любых подмногообразий $U$, $V$ в $K$.

В [420] строится теория произведений многообразий алгебр Браувера. Если $f: L_1 \to L_2$ — гомоморфизм алгебр Браувера, то $\mathrm{Ker}\, f=(a \in L_1,\ f(a)=1)$ является фильтром в $L_1$. Скажем, что $L_1$ является расширением $L_0$ при помощи $L_2$, если существует такой эпиморфизм $f: L_1 \to L_2$, что $L_1/\mathrm{Ker}\, f \simeq L_0$. Это позволяет ввести произведения классов алгебр Браувера. Показано, что все многообразия алгебр Браувера относительно умножения образуют континуальную полугруппу с нулем и единицей. Каждая конечная алгебра порождает неразложимое многообразие. Каждое собственное многообразие обладает свойством сокращения. Локально конечные подмногообразия образуют свободную подполугруппу.

Отметим, что расширения многоосновных алгебр Хиггинса при помощи универсальных алгебр рассматриваются в [75] (см. также [76]). Умножение многообразий мультиоператорных алгебр исследуется в [23].

Расширение $B \subset A$ универсальных алгебр называется сильным, если любая конгруэнция на $B$ имеет не более одного продолжения до конгруэнции на $A$. В [584] показано, что любая модулярная решетка конечной длины является сильным существенным расширением любой своей максимальной цепи. Модулярная решетка является сильным расширением своей цепи, если в решетке конечна длина любой ограниченной цепи. Таким образом, если дистрибутивная решетка $A$ является *сильным расширением* своей цепи $B$, то $\mathrm{Con}\, B \simeq \mathrm{Con}\, A$. Любая ограниченная дистрибутивная решетка обладает сильным булевым расширением.

Решения систем уравнений в универсальных алгебрах по модулю различных допустимых толерантностей рассматривается в [201]. Если в многообразии $K$ любая амальгама двух алгебр вложима в некоторую $K$-алгебру, то для любой алгебры $A$ из $K$, любой непротиворечивой системы уравнений $p_i=q_i$, где $p_i$, $q_i$ — элементы алгебры полиномов $A[X]\in K$, существует такое расширение $B$ алгебры $A$, что эта система имеет в $B$ не менее двух решений [356]. Для многообразия $K$ следующие условия эквивалентны:

1) пусть $A$ — произвольная алгебра из $K$, причём любая система уравнений из $A[X]\in K$, разрешимая в $K$ и имеющая в каждом расширении $A$ в $K$ не более одного решения, имеет единственное решение в $A$;

2) в $K$ любая амальгама двух алгебр вложима в некоторую $K$-алгебру [359].

Аналогичная характеризация получена для многообразий, в которых любая алгебра $A$ алгебраически замкнута, т. е. если система уравнений над $A$ имеет решение в некотором расширении в многообразии алгебры $A$, то эта система имеет решение в алгебре $A$. (см. также [357], [358]).

Предположим, что в алгебре $A$, лежащей в модулярном многообразии, решения любой системы уравнений из $A[X]$ образуют класс некоторой конгруэнции в декартовой степени алгебры $A$. Тогда $A$ полиномиально эквивалентна многообразию модулей над коммутативным кольцом [345].

Расширение алгебр $A\subset B$ называется чистым, если любая конечная система уравнений из $A[X]$, имеющая решение в $B$ имеет решение в $A$. В [567] показано, что если $C$ — квазипримальная алгебра, то в многообразии $K$, порождённом $C$, любая алгебра обладает чистым расширением, изоморфным прямому произведению подалгебр алгебры $C$. Любое расширение в $K$ является чистым в том и только в том случае, если $C$ не имеет неединичных собственных подалгебр. Кроме того, каждая конечная алгебра в $K$ является прямым произведением подалгебр алгебры $C$, и если в $C$ нет неединичных собственных подалгебр, то $C$ инъективно в $K$.

Предположим, что $T$ — некоторая сигнатура, причём $T_0$ непусто. Рассмотрим свободную $T$-алгебру с пустым множеством свободных образующих. Тогда эту алгебру можно вложить в топологическую компактную хаусдорфову $T$-алгебру [472]. В [88] построены примеры решеток, не вложимых ни в какую эквациально компактную решетку, найдена полурешетка с псевдодополнениями, не имеющая эквациально компактных оболочек (см. также [87], [220], [311]). В [72] рассматривается эквациальная компактность в унарных алгебрах

В [437] строится пример эквациально компактной свободной алгебры с базами разной мощности.

**3.5. Компьютерная универсальная алгебра.** В последние годы выделилось новое направление в универсальной алгебре — компьютерная универсальная алгебра. Среди обзоров по этой теме можно отметить [149], [606].

Ряд статей посвящен оценке сложности вычислений в универсальных алгебрах. Пусть $A$ — конечная универсальная алгебра порядка $n$ с двумя бинарными операциями. Тогда существует алгоритм, распознающий за время $o(n^2)$ является ли алгебра $A$ кольцом [327]. Этот результат не может быть улучшен. Существует алгоритм, распознающий за время $o(n^{5/2})$ является ли $A$ решеткой.

Пусть $K_n$ — класс алгебр конечной сигнатуры $T$, причём в каждой алгебре содержится не менее $n$ элементов. В классе $K_3$ любой алгоритм распознаёт простоту алгебры за время не менее

$$O\left(\sum_{f\in T} |A|^{\mathrm{arf}}\right),$$

где arf — арность операции $f$ [256]. Аналогичная оценка имеется в $K_4$ для алгоритма, распознающего подпрямую неразложимость алгебры.

Пусть $T$ — некоторая сигнатура и $E$ — система тождеств сигнатуры $T$ в счётном алфавите $X$. В работах [299], [448], [497] рассматривается вопрос, задаёт ли пара слов $a$, $b$ в алфавите $X$ тождество в многообразии, определяемом набором тождеств $E$. Аналогичный вопрос рассматривается для $T$-алгебры, порождаемой множеством $X$ и набором определяющих соотношений $E$. В работе [273] по алгебре $A$ сигнатуры $T$ с неоднозначным действием $T$ строится обычная алгебра $A$ сигнатуры $T$. Исследуются связи между этими алгебрами, в частности, вопросы вычислений в этих алгебрах. Отметим, что алгебры с неоднозначными операциями возникают при построении теории арифметики вычислительных машин [477].

В статье [548] изучаются размытые конгруэнции и отношения на универсальных алгебрах. Пусть $B$ — булева алгебра и $A$ — универсальная алгебра сигнатуры $T$. Размытым отношением эквивалентности на $A$ называется отображение $p: A\times A\to B$, обладающее следующими свойствами:

1) $p(a,a)=1$ для всех $a\in A$;
2) $p(a,b)=p(b,a)$ для всех $a,b\in A$;
3) $p(a,b)\supseteq \bigcup_{c\in A}(p(a,c)\wedge p(c,b))$ для любых $a$, $b\in A$.

Размытое отношение эквивалентности называется размытой конгруэнцией, если для любого $n\geqslant 0$, $t\in T_n$, любых $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n\in A$, выполнено соотношение

$$p(t(a_1, \ldots, a_n), p(b_1, \ldots, b_n)) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} p(a_i, b_i).$$

Рассмотрение размытых конгруэнций связано с изучением булевых степеней алгебр. Исследования по размытым алгебрам и близким вопросам можно найти в [67], [116], [120], [316], [347], [355], [385], [482], [550], [554], [588], [589].

Алгебраические вопросы теории автоматов рассматриваются в работах [3], [18], [45], [46], [105], [110], [135], [180], [181], [187], [191], [267], [268], [295]—[297], [313]—[315], [344], [364], [471], [495], [496], [501], [518], [598]. Обзор по базам данных изложен в [111]. В качестве основы для построения теории здесь используются многоосновные алгебры (алгебры со схемой операций в смысле Хиггинса). Теория Галуа баз данных исследуется в [19] (см. также [44], [418], [525]). Связи между универсальными алгебрами и языками программирования рассматриваются в [150], [224], [424], [524], [572], [599]. Отметим лишь применение теории А. И. Ширшова в высоте для теории языков [526].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Абашидзе М. А.* О многообразии алгебр Магари // Логико-методол. исслед.— Тбилиси, 1983.— С. 121—134. (РЖМат, 1983, 9А265).
2. *Абраган И.* О минимальных множествах образующих в унарных алгебрах // Mat. čas.— 1975.— *25*, № 4.— С. 305—317 (РЖМат, 1976, 7А376).
3. *Альшанский Л. А.* Линейные автоматы и треугольные произведения // Латв. мат. ежегод. (Рига).— 1986.— № 30.— С. 98—109. (РЖМат, 1987, 2А305).
4. *Анашин В. С.* Разрешимые группы с операторами и коммутативные кольца, обладающие транзитивными полиномами // Алгебра и логика (Новосибирск).— 1982.— *21*, № 6.— С. 627—646 (РЖМат, 1983, 12А361).
5. *Артамонов В. А.* Универсальные алгебры // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1976.— *14*.— С. 191—248 (РЖМат, 1977, 6А234).
6. — Об алгебрах без собственных подалгебр // Мат. сб.— 1977.— *104*, № 3.— С. 428—459 (РЖМат, 1978, 5А308).
7. — Решетки многообразий линейных алгебр // Успехи мат. наук.— 1978. — *33*, № 2.— С. 135—167 (РЖМат, 1978, 8А342).
8. — О шрейеровых многообразиях $n$-групп и $n$-полугрупп // Тр. семинара им. И. Г. Петровского / МГУ.— 1979.— № 5.— С. 193—203 (РЖМат, 1979, 12А336).
9. — Минимальные многообразия обобщенных полугрупп, групп и колец // Сиб. мат. ж.— 1980.— *21*, № 3.— С. 6—22 (РЖМат, 1980, 10А244).
10. — Строение проективных групп в произведениях многообразий // Тр. семинара им. И. Г. Петровского / МГУ.— 1982.— № 8.— С. 58—74 (РЖМат, 1982, 12А317).
11. — Решетки многообразий // Упорядоченные множества и решетки.— Саратов: Саратов. у-т, 1983.— № 7.— С. 97—106 (РЖМат, 1984, 3А425).
12. *Байрамов Р. А., Мамедов О. М.* $\Sigma$-подпрямые представления в аксиоматизируемых классах // Докл. АН АзССР.— 1980.— *36*, № 4.— С. 3—7 (РЖМат, 1981, 1А329).

13. —, — О нестандартных подпрямых представлениях в аксиоматизируемых классах // Сиб. мат. ж.— 1984.— *25*, № 3.— С. 14—29 (РЖМат, 1984, 10А288).
14. —, *Махмудов А. А., Фейзуллаев Р. Б.* О некоторых условиях конечности и операторов в теории многообразий // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1977.— № 5.— С. 93—98 (РЖМат, 1978, 7А245).
15. *Белеградек О. В.* Классы алгебр с внутренними отображениями // Исслед. по теор. программир.— Алма-Ата, 1981.— С. 3—10 (РЖМат, 1982, 4А337).
16. —, *Ковешникова Н. И.* О подалгебрах относительно конечно определенных алгебр // Вопросы теории групп; Кем. гос. ун-т.— Кемерово, 1980. — С. 22—23.— Библиогр.: 2 назв. Рус.— Деп. в ВИНИТИ 13.03.80, № 961—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 7А283 ДЕП).
17. *Белкин В. П., Горбунов В. А.* Фильтры решеток квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика.— 1975.— *14*, № 4.— С. 373—392 (РЖМат, 1976, 5А315).
18. *Бойко С. Н.* Автоморфизмы треугольных произведений биавтоматов // Алгебра и дискретн. мат.: Теор. основы мат. обесп. ЭВМ.— Рига, 1986. — С. 13—24 (РЖМат, 1987, 2А302).
19. — Теория Галуа баз данных.; Риж. ин-т инж. гражд. авиации.— Рига, 1987.— 23 с.,— Библиогр.: 3 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 24.03.87, № 2106—В87 (РЖМат, 1987, 7А310 ДЕП).
20. *Бочкин А. М.* Унары с сепаративным моноидом эндоморфизмов // Изв. вузов. Мат.— 1983.— № 5.— С. 71—74. (РЖМат, 1983, 12А345).
21. — Унары с коммутативным моноидом эндоморфизмов // Свойства полугрупп.— Л., 1984.— С. 3—14 (РЖМат, 1984, 12А342).
22. *Бродский С. Д., Когаловский С. Р.* Замечания о многообразиях алгебраических систем // Acta sci. math.— 1981.— *43*, № 3—4.— С. (РЖМат 1982, 7А324).
23. *Бургин М. С.* Умножение многообразий линейных Ω-алгебр // Изв. вузов. Мат.— 1976.— № 5.— С. 3—14 (РЖМат, 1977, 1А308).
24. — Представления линейных Ω-алгебр в виде произведений // Изв. вузов. Мат.— 1980.— № 10.— С. 6—14 (РЖМат, 1981, 8А301).
25. — Многообразия Куроша линейных над полем Ω-алгебр // Вопр. теории групп и гомол. алгебры.— Ярославль, 1981.— С. 17—27 (РЖМат, 1982, 2А322).
26. — Представление алгебраических и топологических конструкций обобщенно связанными отношениями // Свойства полугрупп.— Л., 1984.— С. 15—25 (РЖМат, 1984, 12А340).
27. — Аппроксимация линейных алгебр и группоидов // Алгебр. системы с одним действием и отношением.— Л., 1985.— С. 3—13 (РЖМат, 1986, 1А344).
28. — Функторные операции в многообразиях линейных Ω-алгебр // Теория полугрупп и ее приложения.— Саратов, 1987.— № 8.— С. 9—20 (РЖМат, 1987, 9А345).
29. *Буртман М. И.* Суперпозиция многоместных линейных отображений.; Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1983.— 34 с.— Библиогр.: 4 назв. — Рус.— Деп. в ВИНИТИ 23.11.83, № 6221—83 Деп. (РЖМат, 1984, 3А403 ДЕП).
30. — Плотные вложения в алгебре Менгера линейных отображений.; Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1983.— 34 с.— Библиогр.: 6 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 31.01.84, № 563—84 Деп. (РЖМат, 1984, 6А278 ДЕП).
31. — Конгруэнции на алгебре Менгера линейных отображений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1984.— *5*, № 3.— С. 8—14 (РЖМат, 1985, 10А309).
32. *Важенин Ю. М.* Критические теории // Сиб. мат. ж.— 1988.— *29*, № 1. — С. 23—31 (РЖМат, 1988, 6А276).
33. *Валуцэ И. И.* Отображения. Алгебраические аспекты теории.— Кишинев: Штиинца, 1976.— 140 с. (РЖМат, 1977, 4А325).

34. — Основы теории универсальных алгебр.— Кишинев: Кишинев. политехн. ин-т, 1982.
35. *Велкин В. П.* О квазитождествах некоторых конечных алгебр // Мат. заметки.— 1977.— *22*, № 3.— С. 335—338 (РЖМат, 1978, 2А277).
36. *Верников Б. М.* Наследственно самодуальные многообразия и квазимногообразия // Изв. вузов. Мат.— 1984.— № 9.— С. 25—29 (РЖМат, 1985, 4А288).
37. —, *Волков М. В.* Дополнения в решетках многообразия и квазимногообразий // Изв. вузов. Мат.— 1982.— № 11.— С. 17—20 (РЖМат, 1983, 4А330).
38. *Гаджиев Ф. А.* Об алгебрах Менгера // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1984.— *163*.— С. 78—80 (РЖМат, 1984, 12А343).
39. *Гварамия А. А.* Теорема Мальцева о квазимногообразиях для многосортных алгебр // Алгебра и дискретн. мат.— Рига, 1984.— С. 33—45 (РЖМат, 1984, 10А287).
40. *Гильман Е. А.* О решетке универсальных классов унаров. / Сарат. ин-т механиз. с. х.— Саратов, 1982.— 22 с.— Библиогр.: 6 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 19.12.82, № 6186—82 Деп. (РЖМат, 1983, 4А338 ДЕП).
41. — О решетках подквазимногообразий локально конечных квазимногообразий алгебраических систем // Упорядочен. множества и решетки: Некоторые алгебр. прил. теории решеток.— Саратов, 1982.— С. 22—32 (РЖМат, 1984, 2А306).
42. — Неразложимые элементы решеток универсальных классов // Изв. вузов. Мат.— 1983.— № 12.— С. 58—60 (РЖМат, 1984, 6А277).
43. *Гисин В. Б.* Вложения в точные категории и характеризация предмногообразий универсальных алгебр // Соврем. алгебра.— Л., 1977.— Вып. 6. — С. 86—89 (РЖМат, 1977, 10А195).
44. —, *Цаленко М. Ш.* Алгебраическая теория систем и ее приложения // Систем. исслед.: Методол. пробл. Ежегод. 1984.— М., 1984.— С. 130—151 (РЖМат, 1985, 8А344).
45. *Гобечия М. И.* Многообразия биавтоматов // Тр. Тбилис. ун-та.— 1981.— *225*.— С. 160—197 (РЖМат, 1983, 3А302).
46. — О неразложимых многообразиях биавтоматов // Сообщ. АН ГрССР.— 1985.— *119*, № 1.— С. 37—39 (РЖМат, 1986, 6А445).
47. *Голубов Э. А., Сапир М. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых конструкций универсальных алгебр // Мат. зап. Уральск. ун-та.— 1978.— *11*, № 1.— С. 26—40 (РЖМат, 1979, 8А328).
48. *Горбунов В. А.* О решетках квазимногообразий // Алгебра и логика.— 1976.— *15*, № 4.— С. 436—457 (РЖМат, 1977, 8А358).
49. — Квазитождества двуэлементных алгебр // Алгебра и логика.— 1983.— *22*, № 2.— С. 121—127 (РЖМат, 1984, 5А298).
50. — Характеризация резидуально малых квазимногообразий // Докл. АН СССР.— 1984.— *275*, № 2.— С. 293—296 (РЖМат, 1984, 7А259).
51. — Об аксиоматизируемости репличных классов // Мат. заметки.— 1984.— *35*, № 5.— С. 641—645 (РЖМат, 1984, 9А276).
52. — Мощности подпрямо неразложимых систем в квазимногообразиях // Алгебра и логика. (Новосибирск).— 1986.— *25*, № 1.— С. 3—50 (РЖМат, 1987, 1А307).
53. —, *Туманов В. И.* Об одном классе решеток квазимногообразий // Алгебра и логика (Новосибирск).— 1980.— *19*, № 1.— С. 59—80 (РЖМат, 1980, 12А327).
54. —, — О строении решеток квазимногообразий // Докл. АН СССР.— 1980.— *254*, № 2.— С. 272—275 (РЖМат, 1981, 2А300).
55. —, — Строение решеток квазимногообразий // Тр. Ин-та мат. СО АН СССР.— 1982.— *2*.— С. 12—44 (РЖМат, 1984, 2А305).
56. *Горностаев О. М.* Квазимногообразия, порожденные классами моделей / Ред. Сиб. мат. ж.— Новосибирск, 1983.— 10 с.— Библиогр.: 3 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 1.04.85, № 2206—85 Деп. (РЖМат, 1985, 7А331 ДЕП).

57. *Григолия Р. Ш.* Свободные алгебры Магари с конечным числом образующих // Логико-метод. исслед.— Тбилиси, 1983.— С. 135—149 (РЖМат, 1983, 9А264).
58. — Свободные $D^*$-алгебры с конечным числом образующих. Проективные $D^*$-алгебры // Методол. исслед.— Тбилиси, 1985.— С. 47—48 (РЖМат, 1986, 3А370).
59. *Деметрович Я., Мальцев И. А.* О существенно минимальных ТС-клонах на трехэлементном множестве // MTA Szàmitàstechn. és autom. kut. intéz. kõzl.— 1984.— № 31.— С. 115—151 (РЖМат, 1985, 12А298).
60. —, *Ханак Л.* О конечных алгебрах с одной операцией // Алгебра и логика.— 1980.— *19*, № 6.— С. 640—645 (РЖМат, 1981, 7А302).
61. *Джаббарзаде В. М.* О строении многообразий, квазимногообразий и предмногообразий универсальных алгебр // Спец. вопр. алгебры и топол.— Баку, 1980.— С. 46—55 (РЖМат, 1981, 3А297).
62. — О клонах полиномиальных функций конечных алгебр из некоторых многообразий // Материалы 6 Респ. конф. мол. ученых по мат. и мех., посвящ. 40-летию Победы, Баку, 6—8 мая, 1985. Мат.— Баку, 1985.— С. 69—71 (РЖМат, 1986, 6А446).
63. — Распознавание функциональной полноты конечных алгебр в многообразиях с конгруэнц-условиями; Азерб. пед. ин-т.— Баку, 1987.— 59 с., ил.— Библиогр.: 28 назв.— Рус.— Деп. в АзНИИНТИ 05.11.87, № 900—Аз87 (РЖМат, 1988, 3А369).
64. *Егорова Д. П.* Структура конгруэнций унаров / Волгогр. гос. пед. ин-т. — Волгоград, 1977.— 41 с.— Библиогр.: 6 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 26.08.77, № 3465—77 Деп. (РЖМат, 1977, 12А330 ДЕП).
65. —, *Карташов В. К., Скорняков Л. А.* О многообразиях гетерогенных унаров // Алгебраич. ситемы.— Иваново, 1981.— С. 122—133 (РЖМат, 1983, 3А297).
66. *Житомирский Г. И.* Расширения универсальных алгебр // Теория полугрупп и ее прил.— Саратов, 1978.— № 4.— С. 19—40 (РЖМат, 1979, 2А233).
67. *Игнатов В. В.* Строение конвексоров / МГУ.— М., 1984.— 28 с.— Библиогр.: 9 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 17.12.84, № 8018—84 Деп. (РЖМат, 1985, 4А294 ДЕП).
68. — Квазимногообразия конвексоров // Изв. вузов. Мат.— 1985.— № 7.— С. 12—14 (РЖМат, 1986, 1А345).
69. *Карташов В. К.* Квазимногообразия унаров // Мат. заметки.— 1980.— *27*, № 1.— С. 7—20 (РЖМат, 1980, 6А337).
70. — О решетках квазимногообразий унаров // Сиб. мат. ж.— 1985.— *26*, № 3.— С. 49—62 (РЖМат, 1985, 10А314).
71. *Кацов Е. Б.* Категоричность теории полигонов // Успехи мат. наук.— 1987.— *42*, № 3.— С. 187 (РЖМат, 1987, 11А301).
72. *Кельтенова Р. Т.* Эквациональная компактность алгебр унарных операций.— Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.— 1975.— № 5.— С. 82—84 (РЖМат, 1976, 6А331).
73. *Когаловский С. Р.* О решетках многообразий унарных алгебр / Иванов. инж.-строит. ин-т. Иваново, 1984.— 19 с.— Библиогр.: 6 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 23.07.84, № 5280—84 Деп. (РЖМат, 1984, 11А241 ДЕП).
74. —, *Солдатова В. В.* О решетках конгруэнтностей счетных алгебр / Иванов. ун-т, Иванов. текстил. ин-т.— Иваново, 1981.— 16 с.— Библиогр.: 3 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 29.01.82, № 392—82 Деп. (РЖМат, 1982, 5А268 ДЕП).
75. *Коротенков Ю. Г.* Расширения и сплетения в классах универсальных алгебр / Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина.— М., 1976.— 22 с.— Библиогр.: 4 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 26.04.76, № 1413—76 Деп. (РЖМат, 1976, 9А347 ДЕП).
76. — Произведения многообразий алгебр с перестановочными конгруэнциями / Ин-т мед.-биол. пробл.— М., 1988.— 22 с.— Библиогр.: 4 назв. — Рус.— Деп. в ВИНИТИ 15.03.88, № 2048—В88 (РЖМат, 1988, 7А313 ДЕП).

77. *Куринной Г. Ч.* Унары с общими конгруэнциями. I.; Харьков, 1980.— 52 с.— Библиогр.: 16 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 13.03.80, № 957—80 Деп. (РЖМат, 1980, 7А285 ДЕП).
78. — Унары с общими конгруэнциями. II; Харьков. ун-т.— Харьков, 1980.— 62 с.— Библиогр.: 16 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 13.03.80, № 958—80 Деп. (РЖМат, 1980, 7А268 ДЕП).
79. — Об определимости унара конгруэнциями // Изв. вузов. Мат.— 1981.— № 3.— С. 76—78 (РЖМат, 1981, 9А253).
80. *Лендер В. Б.* О репличных эквивалентностях на структурах // Мат. зап. Уральск. ун-та.— 1975.— *9,* № 3.— С. 60—72 (РЖМат, 1976, 8А416).
81. — О предмногообразиях структур, не являющихся вполне разложимыми // Сиб. мат. ж.— 1977.— *18,* № 2.— С. 348—357 (РЖМат, 1977, 10А193).
82. — О нормально разрешимых структурах // Изв. вузов. Мат.— 1977.— № 12.— С. 44—53 (РЖМат, 1978, 9А334).
83. — Об RNA-разрешимых структурах // Изв. вузов. мат.— 1979.— № 2. — С. 69—72 (РЖМат, 1979, 11А283).
84. *Лысенко Ф. Ф.* О биркгофских *R*-классах алгебраических систем // Соврем. алгебра. Полугруппов. конструкции.— Л., 1981.— С. 23—30 (РЖМат, 1981, 9А246).
85. *Мальцев И. А.* О конгруэнциях на подалгебрах итеративных алгебр Поста // Дискретн. анализ.— Новосибирск, 1976.— вып. 29.— С. 40—52 (РЖМат, 1977, 10А200).
86. — Инварианты квазиклеток итеративных алгебр Поста // Сиб. мат. ж.— 1985.— *26,* № 1.— С. 220—223 (РЖМат, 1985, 8А366).
87. *Мамедов О. М.* Обобщенно неразложимые алгебры и некоторые типы многообразий алгебр / Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1976.— 13 с.— Библиогр.: 4 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 23.11.76, № 4045—76 Деп. (РЖМат, 1977, 4А327).
88. — Об эквациальной компактности в решетках и общих алгебрах / Ин-т мат. и мех. АзербССР.— Баку, 1981.— 27 с., ил.— Библиогр.: 16 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 30.01.81, № 414—81 Деп. (РЖМат, 1981, 5А264 ДЕП).
89. — Фильтрованные произведения многообразий: определение и некоторые свойства / Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1985.— 4 с. Библиогр.: 4 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 6.12.85, № 8378—В (РЖМат, 1986, 4А356 ДЕП).
90. — О классах Мальцева / Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1986.— 4 с. Библиогр.: 4 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 03.03.86, № 2384—В (РЖМат, 1986, 7А303 ДЕП).
91. — О клонах эквациально компактных универсальных алгебр / Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1987.— 7 с.— Библиогр.: 8 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 11.06.87, № 4272—В37 (РЖМат, 1987, 10А232 ДЕП).
92. — Многообразия ограниченных дистрибутивных решеток не имеет покрытия в решетке интерпретаций / Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1988. 12 с.— Библиогр.: 4 назв.: Рус.— Деп. в ВИНИТИ 1.04.88, № 2490—В88 (РЖМат, 1988, 7А311 ДЕП).
93. — К вопросу о простоте фильтра конгруэнц-модулярности в решетке интерпретаций / Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1988.— 7 с.— Библиогр.: 2 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 25.05.88, № 4007—В88 (РЖМат, 1988, 9А307 ДЕП).
94. *Мартиросян В. Д.* О дистрибутивности решеток подмногообразий (—1,1)-алгебр / МГУ.— М., 1981.— 13 с.— Библиогр.: 10 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 13.07.81, № 3457—81 Деп. (РЖМат, 1981, 12А308 ДЕП).
95. *Марченков С. С.* О классификации алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов // Докл. АН СССР.— 1982.— *265,* № 3.— С. 533—536 (РЖМат, 1982, 11А219).

96. *Месхи В. Ю.* Об одном дискриминаторном многообразии алгебр Гейтинга с инволюцией // Алгебра и логика (Новосибирск).— 1982.— *21*, № 5.— С. 537—552 (РЖМат, 1983, 9А259).
97. — Инъективно полные многообразия алгебр Гейтинга с регулярной инволюцией // Методы логич. исслед.— Тбилиси, 1987.— С. 55—63 (РЖМат, 1987, 11А292).
98. *Миронов В. В.* Объединение одночленных многообразий алгебр // Мат. заметки.— 1984.— *35*, № 6.— С. 789—794 (РЖМат, 1984, 10А286).
99. *Михалёв А. В.* Ортогонально полные многосортные алгебраические системы // Докл. АН СССР.— 1986.— *289*, № 6.— С. 1304—1308 (РЖМат, 1987, 1А299).
100. *Мовсисян Ю. М.* К теории универсальных алгебр // Изв. АН АрмССР. Мат.— 1976.— *11*, № 6.— С. 485—502 (РЖМат, 1977, 7А313).
101. — Теорема Альберта в категории бинарных алгебр // Докл. АН АрмССР.— 1984.— *78*, № 1.— С. 3—7 (РЖМат, 1984, 9А274).
102. — Введение в теорию алгебр со сверхтождествами.— Ереван: Изд-во ун-та, 1986.— 240 с. (РЖМат, 1987, 3А333).
103. *Мурадов Ф. Х.* Суперассоциативные алгебры непрерывных отображений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1985.— *6*, № 5.— С. 8—13 (РЖМат, 1986, 10А276).
104. *Мурский В. Л.* О доле замкнутых классов без конечного базиса тождеств // Докл. АН СССР.— 1987.— *293*, № 5.— С. 1054—1057 (РЖМат, 1987, 10А237).
105. *Перанидзе И. Н.* Треугольное умножение в теории биавтоматов // Тр. Тбилис. ун-та.— 1981.— *225*.— С. 198—229 (РЖМат, 1983, 3А301).
106. — Конструкция сплетения биавтомата с представлением // Тр. ун-та вычисл. мат. АН ГрССР.— 1986.— *26*, № 2.— С. 100—107 (РЖМат, 1986, 11А366).
107. *Пинус А. Г.* Конгруэнц-модулярные многообразия алгебр.— Иркутск: Изд-во ун-та, 1986.— 131 с. (РЖМат, 1986, 12А325).
108. — О квазипростых алгебрах // Исслед. алгебр. систем по свойствам их подсистем.— Свердловск, 1987.— С. 108—118 (РЖМат, 1988, 4А274).
109. — Конгруэнц-дистрибутивные многообразия алгебр.// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1988.— *26*.— С. 45—83 (РЖМат, 1989, 4А230).
110. *Плоткин Б. И.* Биавтоматы // Тр. Тбилис. ун-та.— 1981.— *225*.— С. 123—159 (РЖМат, 1983, 3А303).
111. — Модели и базы данных // Тр. ВЦ АН ГрССР.— 1982.— *22*, № 2.— С. 50—77 (РЖМат, 1983, 6А294).
112. *Полин С. В.* О тождествах в решетках конгруэнций универсальных алгебр // Мат. заметки.— 1977.— *22*, № 3.— С. 443—451 (РЖМат, 1978, 2А276).
113. *Реди Э.* О поликатегории многоместных отношений и поликольцоиде частичных многоместных функций / Уч. зап. Тартус. ун-та.— 1975.— вып. *366*.— С. 3—26 (РЖМат, 1976, 5А317).
114. — О представлении поликольцоидов // Уч. зап. Тартус. ун-та.— 1976.— вып. *390*.— С. 43—55 (РЖМат, 1977, 2А362).
115. *Румянцев А. К.* Независимый базис для квазитождеств свободной канторовой алгебры // Мат. сб.— 1975.— *98*, № 1.— С. 130—142 (РЖМат, 1976, 1А346).
116. *Салимов Ф. И.* О максимальных подалгебрах алгебр распределений // Изв. вузов. Мат.— 1985.— № 7.— С. 14—20 (РЖМат, 1986, 1А346).
117. *Сапир М. В.* Многообразия с конечным числом подквазимногообразий // Сиб. мат. ж.— 1981.— *22*, № 6.— С. 168—187 (РЖМат, 1982, 3А373).
118. *Сизый С. В.* Финитно аппроксимируемые унары // Мат. заметки.— 1988.— *43*, № 3.— С. 401—406 (РЖМат, 1988, 7А305).
119. *Скиба А. Н.* О конечных подформациях многообразий алгебраических систем // Вопр. алгебры.— Минск, 1986, № 2.— С. 7—20 (РЖМат, 1987, 1А305).

120. *Скорняков Л. А.* Алгебра стохастических распределений // Изв. вузов. Мат.— 1982.— № 11.— С. 59—67 (РЖМат, 1983, 4А339).
121. — Шрейеровы и холловы многообразия унарных алгебр // Вестн. МГУ. Мат., мех.— 1983.— № 3.— С. 24—28 (РЖМат, 1983, 10А285).
122. *Слипенко А. К.* Симметрические оперативы отображений // Укр. мат. ж.— 1985.— *37*, № 3.— С. 323—327 (РЖМат, 1985, 10А313).
123. *Смирнов Д. М.* О регулярно определимых многообразиях алгебр // Алгебра и логика.— 1976.— *15*, № 3.— С. 331—342 (РЖМат, 1977, 3А270).
124. — Об универсальной определимости классов Мальцева // Алгебра и логика (Новосибирск).— 1982.— *21*, № 6.— С. 721—738 (РЖМат, 1983, 12А346).
125. — Условия Мальцева и представимость многообразий // Алгебра и логика (Новосибирск).— 1983.— *22*, № 6.— С. 693—706 (РЖМат, 1984, 11А240).
126. — Решетка теорий Мальцева // Алгебра и логика (Новосибирск).— 1984.— *23*, № 3.— С. 296—304 (РЖМат, 1985, 3А318).
127. — Классы Мальцева с заданным свойством // Алгебра и логика.— 1987. — *26*, № 2.— С. 204—219 (РЖМат, 1988, 6А278).
128. *Сохацкий Ф. Н.* Позиционные алгебры. Алгебры Белоусова // Мат. исслед.— Кишинёв, 1987.— № 95.— С. 101—120 (РЖМат, 1987, 10А233).
129. *Тропин М. П.* О базисах конечных дистрибутивных $p$-алгебр // Алгебра и логика (Новосибирск).— 1987.— *26*, № 4.— С. 456—480 (РЖМат, 1988, 7А312).
130. *Трохименко В. С.* О некоторых алгебрах Менгера отношений // Изв. вузов. Мат.— 1978.— № 2.— С. 87—95 (РЖМат, 1978, 9А338).
131. — К теории рестриктивных алгебр Менгера // Укр. мат. ж.— 1984.— *36*, № 1.— С. 82—87 (РЖМат, 1984, 9А271).
132. *Туманов В. И.* Конечные дистрибутивные решетки квазимногообразий // Алгебра и логика (Новосибирск).— 1983.— *22*, № 2.— С. 168—181 (РЖМат, 1984, 5А299).
133. Упорядоченные множества и решетки.— Братислава: ун-т им. Коменского, 1985.— С. 5—301.
134. *Фейзуллаев Р. Б.* Об алгебрах полиморфизмов $n$-арных моделей // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1983.— *4*, № 1.— С. 3—6 (РЖМат, 1984, 2А303).
135. *Финкельштейн М. Я.* О сложности линейных автоматов // Абелевы группы и модули.— Томск, 1981.— С. 198—221 (РЖМат, 1982, 7А338).
136. *Флоря Р. С.* О минимальных многообразиях Ω-группоидов // Изв. АН МолдССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1982.— № 1.— С. 14—17 (РЖМат, 1982, 10А267).
137. *Фляйшер В.* Ω-кольца, над которыми все полигоны $n$-свободны // Уч. зап. Тартус. ун-та.— 1976.— вып. *390*.— С. 56—83 (РЖМат, 1977, 2А361).
138. — Нормальные многообразия алгебр // Изв. АН ЭстССР. Физ. мат.— 1980.— *29*, № 1.— С. 17—21 (РЖМат, 1980, 9А310).
139. *Хашина Ю. А.* Шрейеровы многообразия $n$-полугрупп // Вестн. МГУ. Мат., Мех.— 1984.— № 1.— С. 17—21 (РЖМат, 1984, 5А142).
140. — Шрейеровы многообразия $(m, n)$-колец / Ред. Сиб. мат. ж.— Новосибирск, 1985.— 32 с.— Библиогр.: 11 назв.— Рус.— Деп. в ВИНИТИ 7.08.85, № 5879—85 Деп. (РЖМат, 1985, 12А266 ДЕП).
141. *Чупона Горги, Марковски С.* Сместуванья на универзални алгебри // Годишен зб. Природно-мат. фак. Ун-т Скопje.— 1975 (1976).— *А*, № 25—26.— С. 15—34 (РЖМат, 1978, 9А333).
142. *Adams M. E.* Maximal subalgebras of Heyting algebras // Proc. Edinburg Math. Soc.— 1986.— *29*, № 3.— С. 359—365 (РЖМат, 1987, 5А283).
143. — Principal congruences in de Morgan algebras // Proc. Edinburgh Math. Soc.— 1987.— *30*, № 3.— С. 415—421 (РЖМат, 1988, 3А361).

144. —, *Koubek V., Sichler J.* Homomorphisms of distributive $p$-algebras with countably many minimal prime ideals // Bull. Austral. Math. Soc.— 1987. — *35*, № 3.— С. 427—439 (РЖМат, 1988, 1А360).
145. —, *Priestly H. A.* Kleene algebras are almost universal // Bull. Austral. Math. Soc.— 1986.— *34*, № 3.— С. 343—373 (РЖМат, 1987, 9А322).
146. —, — Morgan algebras are universal // Discrete Math.— 1987.— *66*, № 1—2.— С. 1—13 (РЖМат, 1988, 1А358).
147. *Andréka H., Comer S. D., Németi I.* Clones of operations on relations / Lect. Notes Math.— 1985.— *1149*.— С. 17—21 (РЖМат, 1986, 4А367).
148. —, *Németi I.* HSPK is equational class, without the axiom of choice // Algebra univers.— 1981.— *13*, № 2.— С. 163—166 (РЖМат, 1982, 8А338).
149. —, — Importance of universal algebra for computor science // Universal Algebra and Links Logic, Algebra, Combinatorics and Comput. Sci.— Berlin, 1984.— С. 204—205 (РЖМат, 1985, 6А266).
150. *Arbib M. A.* Free dynamics and algebraic semantics // Lect. Notes Comput. Sci.— 1977.— *56*.— С. 212—227 (РЖМат, 1979, 6А267).
151. *Ash C. J.* Pseudovarieties, generalized variieties and similarly described classes // J. Algebra.— 1985.— *92*, № 1.— С. 104—115 (РЖМат, 1985, 10А318).
152. *Baker Kirby A.* Finite equational classes for finite algebras in a congruence-distributive equational class // Adv. Math.— 1977.— *24*, № 3.— С. 207—243 (РЖМат, 1977, 12А327).
153. —, *McNulty G. F., Werner H.* The finitely based varieties of graph algebras // Acta sci. math.— 1987.— *51*, № 1—2.— С. 3—15 (РЖМат, 1988, 3А371).
154. —, *Pixley A. F.* Polynomial interpolation and the chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Z.— 1975.— *143*, № 2.— С. 165—174 (РЖМат, 1976, 1А347).
155. *Baldwin J. T., Berman J.* The number of subdirectly irreducible algebras in a variety // Algebra univers.— 1975.— *5*, № 3.— С. 379—389 (РЖМат, 1976, 11А385).
156. —, — Elementary classes of varieties // Houston J. Math.— 1981.— *7*, № 4.— С. 473—492 (РЖМат, 1983, 2А252).
157. —, — Definable principal congruence relations: Kith and kin // Acta sci. math.— 1982.— *44*, № 3—4.— С. 255—270 (РЖМат, 1983, 9А254).
158. *Banaschewski B.* On categories of algebras equivalent to a variety // Algebra univers.— 1983.— *16*, № 2.— С. 264—267 (РЖМат, 1984, 1А247).
159. *Bankston P., Fox R.* On categories of algebras equivalent to a quasivariety // Algebra univers.— 1983.— *16*, № 2.— С. 153—158 (РЖМат, 1984, 1А248).
160. *Bartol W.* Subalgebra lattices of monounary algebras // Algebra univers. — 1981.— *12*, № 1.— С. 66—69 (РЖМат, 1981, 11А333).
161. *Beazer R.* The determination congruence on double $p$-algebras // Algebra univers.— 1976.— *6*, № 2.— С. 121—129 (РЖМат, 1977, 7А312).
162. — Some remarks on distributive double $p$-algebras // Algebra univers.— 1978.— *8*, № 1.— С. 5—14 (РЖМат, 1978, 6А344).
163. — Regular double $p$-algebras with Stone congruence lattices // Algebra univers.— 1979.— *9*, № 2.— С. 238—243 (РЖМат, 1979, 12А343).
164. — Subdirectly irreducible double Heyting algebras // Algebra univers.— 1980.— *10*, № 2.— С. 220—224 (РЖМат, 1980, 12А331).
165. — Congruence pairs of distributive double $p$-algebras with non-empty core // Houston J. Math.— 1980.— *6*, № 4.— С. 443—454 (РЖМат, 1982, 2А329).
166. — Finitely subdirectly irreducible algebras with pseudocomplementation // Algebra univers.— 1981.— *12*, № 3.— С. 376—386 (РЖМат, 1982, 4А340).

167. — On congruence lattices of some *p*-algebras and double *p*-algebras / Algebra univers.— 1981.— *13*, № 3.— С. 379—388 (РЖМат, 198 7А333).
168. — Affine complete double Stone algebras with bounded core // Algebr univers.— 1983.— *16*, № 2.— С. 237—244 (РЖМат, 1984, 1А252).
169. — On some small varieties of distributive Ockham algebras // Glasgo Math. J.— 1984.— *25*, № 2.— С. 175—181 (РЖМат, 1984, 12А336).
170. — Injectives in some small varieties of Ockham algebras // Glasgo Math. J.— 1984.— *25*, № 2.— С. 183—191 (РЖМат, 1984, 12А337).
171. — Varieties of modal lattices // Houston J. Math.— 1986.— *12*, № 3,- С. 357—369 (РЖМат, 1987, 11А294).
172. *Bergman C.* The amalgamation class of discriminator variety is finitel axiomatizable // Lect. Notes Math.— 1983.— *1004*.— С. 1—9 (РЖМа 1984, 3А408).
173. — Saturated algebras in filtral varieties // Algebra univers.— 1987.— *2* № 1—2.— С. 101—110 (РЖМат, 1988, 7А309).
174. *Bergman G. M.* On the existence of subalgebras of direct products wit prescribed *d*-fold projections // Algebra univers.— 1977.— *7*, № 3.— С 341—356 (РЖМат, 1978, 2А242).
175. *Berman J., Blok W. J.* Free spectra of nilpotent varieties // Algebr univers.— 1987.— *24*, № 3.— С. 279—282 (РЖМат, 1988, 9А312).
176. —, *Grätzer G.* Uniform representations of congruence schemes // Paci J. Math.— 1978.— *76*, № 2.— С. 301—311 (РЖМат, 1979, 1А351).
177. —, —, *Platt C. R.* Extending algebras to model congruence schemes / Can. J. Math.— 1986.— *38*, № 2.— С. 257—276 (РЖМат, 1987, 1А303)
178. —, *McKenzie R.* Clones satisfying the term conditions // Discrete Mat — 1984.— *52*, № 1.— С. 7—29 (РЖМат, 1985, 4А284).
179. *Bernardi C., Mazzanti G.* Different types of congruences in direct pro ducts // J. Algebra.— 1982.— *74*, № 1.— С. 96—111 (РЖМат, 198 7А323).
180. *Betti R., Kasangian S.* Tree automata and enriched category theory / Rend. Ist. mat. Univ. Trieste.— 1985.— *17*, № 1—2.— С. 71—7 (РЖМат, 1987, 3А335).
181. *Blattner M., Head T.* Automata that recognize intersections of free sub monoids // Inform. and Contr.— 1977.— *35*, № 3.— С. 173—17 (РЖМат, 1978, 11А384).
182. *Blok W. J.* $2^{\aleph_0}$ varieties of Heyting algebras not generated by the finite members // Algebra univers.— 1977.— *7*, № 1.— С. 115—11 (РЖМат, 1977, 12А323).
183. —, *Dziobiak W.* On the lattice of quasivarieties of Sugihara algebras / Stud. log.— 1986.— *45*, № 3.— С. 275—280 (РЖМат, 1987, 7А298).
184. —, *Köhler P., Pigozzi D.* On the structure of varieties with equationall definable principal congruences. II // Algebra univers.— 1984.— *18*, № — С. 334—379 (РЖМат, 1985, 4А290).
185. —, *Pigozzi D.* On the structure of varieties with equationally definab principal congruences. I // Algebra univers.— 1982.— *15*, № 2.— С 195—227 (РЖМат, 1983, 11А354).
186. —, — A finite basis theorem for quasivarieties // Algebra univers.— 1986.— *22*, № 1.— С. 1—13 (РЖМат, 1987, 1А308).
187. *Bloom S. L.* Frontiers of one-letter languages // Acta cybern.— 1985.— *7*, № 1.— С. 1—18 (РЖМат, 1985, 10А322).
188. *Blyth T. S., Noor A. S., Varlet J. C.* Congruences on double MS-algebra // Bull. Soc. roy. sci. Liège.— 1987.— *56*, № 2.— С. 143—152 (РЖМа 1988, 6А271).
189. —, *Varlet J. C.* Subvarieties of the class of MS-algebras // Proc. Ro Soc. Edinburgh. A.— 1983.— *95*, № 1—2.— С. 157—169 (РЖМат, 198 3А414).
190. —, — Congruences on MS-algebras // Bull. Soc. roy. sci. Liège.— 198 — *53*, № 6.— С. 341—362 (РЖМат, 1985, 8А354).

191. *Budach L., Hoehnke H.-J.* Automaten und Funktoren (Math. Lehrb. und Monogr., Abt. 2. Math. Monogr., 35)— Berlin: Akad.— Verl., 1975.— XI, 383 с.: ил. (РЖМат, 1976, 2А396).
192. *Bulman-Fleming S., Werner H.* Equational compactness in quasi-primal varieties // Algebra univers.— 1977.— *7*, № 1.— С. 33—46 (РЖМат, 1977, 12А297).
193. *Burosch G., Dassow J., Harnau W., Lau D.* On subalgebras of an algebra of predicates // Elektron. Informationsverarb. und Kybern.— 1985.— *21*, № 1—2.— С. 9—22 (РЖМат, 1985, 9А177).
194. *Burris St.* On Baker's finite basis theorem for congruence distributive varieties // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— *73*, № 2.— С. 141—148 (РЖМат, 1979, 12А333).
195. — Discriminator polynomials in arithmetical varieties // Algebra univers. — 1985.— *20*, № 3.— С. 397—399 (РЖМат, 1986, 5А320).
196. — Iterated discriminator varieties have undecidable theories // Algebra univers.— 1985.— *21*, № 1.— С. 54—61 (РЖМат, 1986, 8А299).
197. — Primitive positive clones which are endomorphism clones // Algebra univers.— 1987.— *24*, № 1—2.— С. 41—49 (РЖМат, 1988, 6А275).
198. —, *McKenzie R.* Decidability and Boolean representations. Part I: Decidable varieties with modular congruence lattices. Part II: Boolean representable varieties // Mem. AMS.— 1981.— № 246.— 106 с. (РЖМат, 1982, 2А323).
199. —, *Sankappanavar H. P.* A course in universal algebra // Grad. Text. Math.— 1981.— *78*.— XVI, 276 с. (РЖМат, 1982, 6А283).
200. —, *Willard R.* Finitely many primitive positive clones // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *101*, № 3.— С. 427—430 (РЖМат, 1988, 6А273).
201. *Chajda I.* Systems of equations and tolerance relations // Czechosl. Mat. J.— 1975.— *25*, № 2.— С. 302—308 (РЖМат, 1976, 1А344).
202. — On the unique factorization problem // Math. Slovaca (ČSSR).— 1976, — *26*, № 3.— С. 201—205 (РЖМат, 1977, 4А326).
203. — Direct decomposability of congruences in congreunce-permutable varieties // Math. Slov. (ČSSR).— 1982.— *32*, № 1.— С. 93—96 (РЖМат, 1982, 7А332).
204. — Varieties with directly decomposable diagonal subalgebras // Ann. Univ. sci. budapest. Sec. math.— 1982.— *25*.— С. 193—201 (РЖМат, 1983, 4А328).
205. — Tolerance Hamiltonian varieties of algebras // Acta sci. math.— 1982. — *44*, № 1—2.— С. 13—16 (РЖМат, 1983, 5А284).
206. — Coherence, regularity and permutability of congruences // Algebra univers.— 1983.— *17*, № 2.— С. 170—173 (РЖМат, 1984, 10А285).
207. — Varieties with directly decomposable subalgebras and homomorphisms Algebra univers.— 1984.— *19*, № 1.— С. 11—15 (РЖМат, 1985, 4А287).
208. — A Mal'cev condition for congruence principal permutable varieties // Algebra univers.— 1984.— *19*, № 3.— С. 337—340 (РЖМат, 1985, 8А352).
209. — Regularity in arithmetical varieties // Arch. math. (ČSSR).— 1984.— *20*, № 4.— С. 177—182 (РЖМат, 1985, 10А316).
210. — Varieties with tolerance and congruence extension property // Arch. math. (ČSSR).— 1985.— *21*, № 1.— С. 5—12 (РЖМат, 1986, 4А359).
211. — Weakly regular algebras in varieties with principal compact congruences // Czechosl. Math. J.— 1986.— *36*, № 1.— С. 140—146 (РЖМат, 1986, 9А252).
212. — Relatives of 3-permutability and principal tolerance trivial varieties // Ann. Univ. sci. budapest. Ser. math.— 1985 (1986).— *28*.— С. 37—47 (РЖМат, 1987, 2А300).
213. — Tolerance and congruence conditions: connections and applications // Mathematica (RSR).— 1986.— *28*, № 1.— С. 31—37 (РЖМат, 1987, 4А346).

214. — Congruence distributivity in varieties with constants // Arch. math (ČSSR).— 1986.— *22*, № 3.— С. 121—124 (РЖМат, 1987, 8А291).
215. — Directly decomposable congruences in varieties with nullary operation // Math. Slov.— 1987,— *37*, № 1.— С. 31—35 (РЖМат, 1987, 9А343).
216. — Algebras with principal tolerances // Math. slov.— 1987.— *37*, № 2.— С. 169—172 (РЖМат, 1987, 9А344).
217. —, *Duda J.* Rees algebras and their varieties // Publ. math.— 1985.— *32*, № 1—2.— С. 17—22 (РЖМат, 1986, 9А253).
218. —, *Rachunek J.* Relational characterizations of permutable and *n*-permutable varieties // Czechosl. Math. J.— 1983— *33*, № 4.— С 505—508 (РЖМат, 1984, 6А287).
219. *Chawla L. M.* Exchange groups of automorphisms of algebras // Bull Soc. roy. sci. Liège— 1975— *44*, № 5—6.— С. 315—321 (РЖМат, 1976 5А310).
220. *Chiaro M. R.* Locally equational completeness of rings and semigroup / Proc. Amer. Math. Soc.— 1977.— *66*, № 2.— С. 189—193 (РЖМат 1978, 8А344).
221. *Clark D.* $\aleph_0$-categoricity in infra-primal varieties // Algebra univers.— 1984— *19*, № 2.— С. 160—176 (РЖМат, 1985, 6А270).
222. —, *Krauss P. H.* Para primal algebras // Algebra univers.— 1976.— *6* № 2.— С. 165—192 (РЖМат, 1977, 9А369).
223. —, — Varieties generated by para primal algebras // Algebra univers.— 1977— *7*, № 1.— С. 93—114 (РЖМат, 1977, 12А322).
224. *Clément F.-M.* Systemes dynamiques et fibrations concept d'opt-automat // Cah. topol. et géom. differ.— 1982— *23*, № 2.— С. 193—196 (РЖМат 1983, 1А326).
225. *Cohn P. M.* Universal algebra.— Dordrecht e. a.: Reidel Publ. Co., 1981.— XVI, 412 с. (РЖМат, 1982, 2А320).
226. *Cornish W. H.* The chinese remainder theorem and sheaf representation // Fund. Math.— 1977— *96*, № 3.— С. 177—187 (РЖМат, 1978, 4А247)
227. — 3-permutability and quasicommutative BCK-algebras // Math. jap.— 1980— *25*, № 4.— С. 477—496 (РЖМат, 1981, 3А299).
228. — Two independet varieties of BCI-algebras // Math. Semin. Notes Kob Univ.— 1980— *8*, № 2.— С. 413—420 (РЖМат, 1981, 5А265).
229. — Varieties generated by finite BCK-algebras // Bull. Austral. Math. Soc — 1980— *22*, № 3.— С. 411—430 (РЖМат, 1981, 9А245).
230. — A large variety of BCK-algebras // Math. jap.— 1981.— *26*, № 3.— С. 339—344 (РЖМат, 1982, 2А325).
231. — A ternary variety generated by lattices // Comment. math. Univ. Carol.— 1981.— *22*, № 4.— С. 773—784 (РЖМат, 1982, 7А330).
232. — Two-based definitions of bounded commutative BCK-algebras // Math Semin. Notes Kobe Univ.— 1983.— *11*, № 1.— С. 9—15 (РЖМат, 198 9А279).
233. —, *Stewart P. H.* Direct and subdirect decompositions of universal algebras with Boolean orthogonality // Acta math. Acad. sci. hung.— 198 — *38*, № 1—4.— С. 9—14 (РЖМат, 1982, 7А322).
234. *Csákány B.* Varieties in which congruences and subalgebras are amicabl // Acta sci. math.— 1975.— *37*, № 1—2.— С. 25—31 (РЖМат, 197 4А299).
235. — On affine spaces over prime fields // Acta sci. math.— 1975.— *3* № 1—2.— С. 33—36 (РЖМат, 1976, 5А308).
236. — Congruences and subalgebras // Ann. Univ. sci. budapest. Sec. math.— 1975 (1976)— *18*.— С. 37—44 (РЖМат, 1977, 3А269).
237. — Homogeneous algebras // Contrib. Gen. Algebra. Proc. Klagenfu Conf., 1978.— Klagenfurt, 1979.— С. 77—81 (РЖМат, 1981, 1А330).
238. — All minimal clones on the three-element set // Acta cybern.— 1983.— *6*, № 3.— С. 227—238 (РЖМат, 1984, 6А283).
239. — Completeness in coalgebras // Acta sci. math.— 1985.— *48*, № 1—4.— С. 75—84 (РЖМат, 1986, 5А316).

240. — *Gavalcová T.* Finite homogeneous algebras. I. // Acta sci. math.— 1980— *42*, № 1—2.— С. 57—65 (РЖМат, 1981, 7А299).
241. *Czédli G.* A characterization for congruence semi-distributivity // Lect. Notes Math.— 1983— *1004*— С. 104—110 (РЖМат, 1984, 3А407).
242. *Czelakowski J., Dziobiak W.* Another proof that $ISP_r(K)$ is the least quasivariety containing $K$ // Stud. log.— 1982— *41*, № 4.— С. 343—345 (РЖМат, 1985, 3А325).
243. *Davey B.* A subdirectly irreducible distributive double $p$-algebras // Algebra univers.— 1978— *8*, № 1.— С. 73—88 (РЖМат, 1978, 6А345).
244. — On the lattice of subvarieties // Houston J. Math.— 1979.— *5*, № 2.— С. 183—192 (РЖМат, 1980, 5А284).
245. —, *Kovács L. G.* Absolute subretracts and weak injectives in congruence modular varieties // Trans. Amer. Math. Soc.— 1986— *297*, № 1.— С. 181—196 (РЖМат, 1987, 3А332).
246. —, *Miles K. R., Schumann V. J.* Quasi-identities, Mal'cev conditions and congruence regularity // Acta sci. math.— 1987.— *51*, № 1—2.— С. 39—55 (РЖМат, 1988, 3А370).
247. —, *Werner H.* Injectivity and Boolean powers // Math. Z.— 1979— *166*, № 3.— С. 205—223 (РЖМат, 1979, 11А285).
248. —, — Distributivity of coproducts over products // Algebra univers.— 1981— *12*, № 3.— С. 387—394 (РЖМат, 1982, 5А275).
249. *Day A.* Splitting algebras and a weak notion of projectivity // Algebra univers.— 1977.— *5*, № 2.— С. 153—162 (РЖМат, 1976, 11А386).
250. —, *Freese R.* A characterization of identities implying congruence-modularity. I. // Can. J. Math.— 1980.— *32*, № 5.— С. 1140—1167 (РЖМат, 1981, 7А284).
251. *Demétrovics J., Hannák L.* On the number of functionally complete algebras // Proc. 12th Int. Symp. Multiple-Valued Log., Paris, May 25—27, 1982.— New York, N. Y., 1982.— С. 329—330 (РЖМат, 1983, 8А328).
252. —, — The number of reducts of a preprimal algebra // Algebra univers.— 1983.— *16*, № 2.— С. 178—185 (РЖМат, 1984, 2А311).
255. —, —, *Rónyai L.* On monotone clones // MTA. Számitástechn. és. autom. kut. intéz. tanulm.— 1987.— № 202.— С. 39—62 (РЖМат, 1988, 5А253).
253. —, *Malcev I. A.* Essentially minimal $TC$-clones on three-element base set // Math. Repts. Acad. Sci. Can.— 1986.— *8*, № 3.— С. 191—196 (РЖМат, 1986, 10А277).
254. —, *Rónyai L.* On free spectra of selfdual clones // Мат. структуры. Вычисл. мат. Мат. моделир. т. 2.— София, 1984.— С. 136—140 (РЖМат, 1985, 11А336).
256. *Demlová M., Demel J., Koubek V.* Simplicity of algebras requires to investigate almost all operations // Comment. math. Univ. carol.— 1982.— *23*, № 2.— С. 325—335 (РЖМат, 1982, 11А225).
257. *Denecke K.* Schwache Automorphismen präprimaler Algebren, die arithmetische Varietaten erzeugen // Rostok Math. Kolloq.— 1978.— № 10.— С. 23—36 (РЖМат, 1980, 5А283).
258. — Preprimal algebras // Math. Res., 1982.— № 11.— 162 с. (РЖМат, 1983, 9А251).
259. — Eine algebraische Charakterisierung einer Klasse präprimaler Algebren // Rostok math. Kolloq.— 1983.— № 23. С. 43—53 (РЖМат, 1984, 6А288).
260. — Varieties generated by two-element majority algebras and their equivalences // Wiss. Beitr. M.-Luther-Univ. Halle-Wittenberg.— 1986.— *M*, № 40.— С. 35—56 (РЖМат, 1987, 4А334).
261. — Algebraische Klons // Algebra und Graphentheor. Beitr. Jahrestag., Siebenlelen, 28. Okt. — 1. Nov., 1985.— Freiberg, 1986.— С. 25—29 (РЖМат, 1987, 7А304).
262. — Functional completeness in pseudocomplemented de Morgan algebras // Wiss. Beitr. M.-Luther-Univ. Halle-Wittenberg.— 1987.— *M*, № 46.— С. 135—150 (РЖМат, 1987, 9А328).

263. — Squares of primal algebras // Z. Math. Log. und Grundl. Math.— 1987.— *33*, № 1.— С. 69—77 (РЖМат, 1987, 11А288).
264. —, *Lau D.* Kongruenzen auf Klons und vollinvariante Kongruenzen relativ freier Algebren. II. // Rostok math. Kolloq.— 1986.— № 29.— С. 4—20 (РЖМат, 1987, 3А331).
265. —, *Reschke M., Luders O.* Kongruenzdistributivität, Kongruenzvertauschbarkeit und Kongruenzmodularität zweielementiger Algebren // J. Inf. Process and Cybern. EIK.— 1988.— *24*, № 1—2.— С. 65—78 (РЖМат, 1988, 12А271).
266. *Dixon P. G.* Classes of algebraic systems defined by universal Horn sentences // Algebra univers.— 1977.— *7*, № 3.— С. 315—339 (РЖМат, 1978, 4А241).
267. *Do Long Van.* Codes infinitaires et aotumatés non-ambigus // Publ. Dep. math.—1985.— № 2/В.— С. 97—107 (РЖМат, 1986, 8А305).
268. *Dömösi P.* On a problem concerning the products of automata // Dep. Math. K. Marx Univ. Econ. Budapest [Publ.].— 1983.— № 3.— С. 113—120 (РЖМат, 1985, 9А185).
269. *Dorninger D., Schweigert D.* Zur Darstellung van Polynomen auf De Morgan Algebren // Czech. Mat. J.— 1980.— *30*, № 1.— С. 65—70 (РЖМат, 1980, 9А314).
270. *Draškovičová H.* Mal'cev type conditions for two varieties // Math. Slovaca (ČSSR).— 1977.— *27*, № 2.— С. 177—180 (РЖМат, 1977, 12А235).
271. — Conditions for independence of varieties // Math. Slovaca (ČSSR).— 1977.— *27*, № 3.— С. 303—305 (РЖМат, 1978, 3А221).
272. *Drbohlav K.* Remarks on tolerance algebras // Acta univ. carol. Math. et phys.— 1981.— *22*, № 1.— С. 11—16 (РЖМат, 1982, 4А339).
273. *Dubinsky A.* Computations on arbitrary algebras // Lect. Notes Comput. Sci.— 1975.— *37*.— С. 319—341 (РЖМат, 1976, 7А381).
274. *Duda J.* A Mal'cev Characterization of *n*-permutable varieties with directly decomposable congruences // Algebra univers.— 1983.— *16*, № 3.— С. 269—274 (РЖМат, 1984, 4А342).
275. — Regularity of algebras with applications to congruence class geometry // Arch. math.— 1983.— *19*, № 4.— С. 199—208 (РЖМат, 1984, 6А290).
276. — Mal'cev conditions for regular and weakly regular subalgebras of the square // Acta sci. math.— 1983.— *46*, № 1.— С. 29—34 (РЖМат, 1984, 9А277).
277. — Congruences on products in varieties satisfying the CEP // Math. Slov.— 1986.— *36*, № 2.— С. 171—177 (РЖМат, 1987, 1А309).
278. — 3-permutable and directly decomposable congruences // Glas. math.— 1986.— *21*, № 1.— С. 75—80 (РЖМат, 1987, 4А333).
279. — Varieties having directly decomposable congruence classes // Čas. pěstov. mat.— 1986.— *111*, № 4.— С. 394—403 (РЖМат, 1987, 6А338).
280. — Arithmeticity at 0 // Czechosl. Math. J.— 1987.— *37*, № 2.— С. 197—206 (РЖМат, 1987, 12А245).
281. *Dudek J.* On the variety $V_\infty(+, 0)$ // Math. Semin. Notes. Kobe Univ.— 1982.— *10*, № 1.— С. 9—15 (РЖМат, 1983, 2А248).
282. — Polynomial characterization of some idempotent algebras // Acta sci. math.— 1986.— *50*, № 1—2.— С. 39—49 (РЖМат, 1987, 4А342).
283. — On the minimal extension of sequences // Algebra univers.— 1986.— *23*, № 3.— С. 308—312 (РЖМат, 1988, 1А356).
284. —, *Graczyńska E.* The lattice of varieties of algebras // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math.— 1981.— *29*, № 7—8.— С. 337—340 (РЖМат, 1982, 4А343).
285. —, *Płonka J.* On covering in lattice of varieties of algebras // Bull. Pol. Acad. Sci. Math.— 1983.— *31*, № 1—2.— С. 1—4 (РЖМат, 1984, 4А343).
286. *Duncan H. F.* Some equationally complete algebras // Amer. Math. Mon. — 1977.— *84*, № 7.— С. 544—548 (РЖМат, 1978, 8А343).

287. *Dyrda K.* None of the variety $E_n$, $n \geqslant 2$, is locally finite // Demonstr. math.— 1987.— *20*, № 1—2.— C. 215—219 (РЖМат, 1988, 11А332).
288. *Dziobiak W.* A variety generated by a finite algebra with $2^{\aleph_0}$ subvarieties // Algebra univers.— 1981.— *13*, № 2.— C. 148—156 (РЖМат, 1982, 8А340).
289. — On distributivity of the lattice of subvarieties of a variety of Heyting algebras (abstract) // Bull. Sec. Logic— 1983.— *12*, № 1.— C. 37—40 (РЖМат, 1985, 2А333).
290. — On subquasivariety lattices of semi-primal varieties // Algebra univers.— 1985.— *20*, № 1.— C. 127—129 (РЖМат, 1985, 12А302).
291. — The subvariety lattice of the distributive double *p*-algebras // Bull. Austral. Math. Soc.— 1985.— *31*, № 3.— C. 377—387 (РЖМат, 1986, 6А449).
292. *Eigenthaler G.* Einige Bemerkungen über Clones und interpolierbare Funktionen auf universellen Algebren // Beitr. Algebra und Geom. Bd. 15. — Berlin, 1983.— C. 121—127 (РЖМат, 1984, 1А244).
293. —, *Wiesenbauer J.* On the concept of length in the sense of Lausch-Nöbauer and its generalizations // J. Austral. Math. Soc. A.— 1977.— *24*, № 2.— C. 162—169 (РЖМат, 1978, 7А424).
294. *El-Assar Sanaa.* Two notes on the congruence lattice of the *p*-algebras // Acta math. Univ. Comen.— 1985.— C. 46—47.— C. 13—20 (РЖМат, 1988, 9А313).
295. *Ésik Z.* On homomorphic realization of monotone automata // Dep. Math. K. Marx Univ. Econ. Budapest [Publ.].— 1983.— № 3.— C. 63—76 (РЖМат, 1985, 10А319).
296. — On isomorphic realization of automata with $\alpha_0$-products // Acta cybern (Magy).— 1987.— *8*, № 2.— C. 119—134 (РЖМат, 1988, 3А376).
297. —, *Virágh J.* On products of automata with identity // Acta cybern. (Magy).— 1986.— *7*, № 3.— C. 299—311 (РЖМат, 1986, 9А256).
298. *Evans T.* An algebra has a solvable word problem if and only if it is embeddable in a finitely generated simple algebra // Algebra univers.— 1978.— *8*, № 2.— C. 197—204 (РЖМат, 1978, 12А519).
299. *Fages F.* Associative-commutative unification // Lect. Notes Comput. Sci. — 1984.— *170*, C. 194—208 (РЖМат, 1985, 3А331).
300. *Fleischer I.* Abstract characterization for the automorphism group acting on the subalgebra lattice // Algebra univers.— 1981.— *12*, № 2.— C. 256—257 (РЖМат, 1981, 12А306).
301. *Franci R.* Algebre a congruenze *M*-ideali // Rend. semin. mat. Univ. e politecn. Torino.— 1979.— *37*, № 2.— C. 135—143 (РЖМат, 1980, 7А282).
302. *Freese R.* Subdirectly irreducible algebras in modular varieties // Lect. Notes Math.— 1983.— *1004*.— C. 142—152 (РЖМат, 1984, 2А307).
303. —, *McKenzie R.* Residually small varieties with modular congruence lattices // Trans. Amer. Math. Soc.— 1981.— *264*, № 2.— C. 419—430 (РЖМат, 1981, 12А307).
304. *Fried E.* On the behaviour of congruence-functors // Algebra univers.— 1987.— *24*, № 1—2.— C. 188—191 (РЖМат, 1988, 7А310).
305. —, *Grätzer G.* On automorphisms of the subalgebra lattice indexed by automorphisms of the algebra // Acta sci. math.— 1978.— *40*, № 1—2.— C. 49—52 (РЖМат, 1979, 1А356).
306. —, — Classes of congruence lattices of filtral varieties // Stud. sci. math. hung.— 1984.— *19*, № 2—4.— C. 259—264 (РЖМат, 1987, 7А297).
307. —, —, *Quackenbush R.* Uniform congruence scheme // Algebra univers.— 1980.— *10*, № 2.— C. 176—188 (РЖМат, 1980, 11А340).
308. —, *Kaiser H. K., Márki L.* An elementary approach to polynomial interpolation in universal algebras // Algebra univers.— 1982.— *15*, № 1.— C. 40—57 (РЖМат, 1983, 5А281).
309. —, *Kiss E. W.* Connections between congruence-lattices and polynomial properties // Algebra univers.— 1983.— *17*, № 3.— C. 227—262 (РЖМат, 1984, 12А333).

310. —, *Pixley A. F.* The dual discrimator function in universal algebra // Acta sci. math.— 1979.— *41*, № 1—2.— C. 83—100 (РЖМат, 1979 12A329).
311. *Fujiwara T.* Algebraically closed algebraic extensions in universal classes // Proc. 2nd Symp. Semigroups.— Tokyo, 1978.— C. 55—67 (РЖМат 1979, 9A309).
312. *Garcia O. C., Taylor W.* The lattice of interpretability types of varieties // Mem. AMS, 1984.— *50*, № 305.— V, 125 c. (РЖМат, 1985, 1A403).
313. *Gécseg F.* On $\nu_1$-products of commutative automata // Acta cybern.— 1985.— *7*, № 1.— C. 55—59 (РЖМат, 1985, 10A323).
314. — Products of automata— Berlin: Akad. Verl., 1986. VIII, 107 c (РЖМат, 1987, 9A346).
315. —, *Imreh B.* On $\alpha_1$-product of tree automata // Acta cybern. (Magy).— 1987.— *8*, № 2.— C. 135—141 (РЖМат, 1988, 3A377).
316. *Gerla G., Tortora R.* Normalization of fuzzy algebras // Fuzzy Sets and Syst.— 1985.— *17*, № 1.— C. 73—82 (РЖМат, 1986, 3A371).
317 *Gerstmann H.* Über die schwache Distributivität des Verbandes der subalgebren idempotenter Algebren // Contrib. Gen. Algebra. 2. Proc. Klagenfurt Conf., June 10—13, 1982.— Wien; Stuttgart, 1983.— C. 123—131 (РЖМат, 1984, 3A398).
318. *Givant St.* Union decompositions and universal classes categorical in power // Algebra univers.— 1980.— *10*, № 2.— C. 155—175 (РЖМат 1981, 1A328).
319. — The number of non-isomorphic denumerable models of certain Horn classes // Algebra univers.— 1981.— *13*, № 1.— C. 56—68 (РЖМат 1982, 6A288).
320. *Głazek K.* Some old and new problems in the independence theory // Colloq. math.— 1979.— *42*.— C. 127—189 (РЖМат, 1980, 10A247).
321. — Weak homomorphisms of general algebras and related topics // Math Semin. Notes Kobe Univ.— 1980.— *8*, № 1.— C. 1—36 (РЖМат, 1981 3A282).
322. —, *Katriňák T.* Weak homomorphisms of distributive *p*-algebras // Univers. Algebra and Appl. Pap. Stefan Banach. Int. Math. Cent. Semestr. Febr. 15 — June 9, 1978.— Warsawa, 1982.— C. 383—390 (РЖМат, 1983 9A256).
323. —, *Michalski J.* Weak homomorphisms of general algebras // Rocz. Pol tow. mat.— 1977.— Ser. 19.— № 2.— C. 211—228 (РЖМат, 1977 12A319).
324. *Gnani G.* Proprietá topologiche delle classi filtrali // Boll. Unione mat ital. B.— 1980.— *17*, № 3.— C. 1420—1429 (РЖМат, 1981, 5A266).
325. *Goldberg M. S.* Distributive Ockham algebras: free algebras and injectivity // Bull. Austral. Math. Soc.— 1981.— *24*, № 2.— C. 161—20 (РЖМат, 1982, 5A271).
326. *Golema-Hartman K.* Minimal algebras in some class of algebras // Colloq. math.— 1976.— *36*, № 2.— C. 187—193 (РЖМат, 1977, 12A320).
327. *Goralcik P., Goralcikova A., Koubek V., Rödl V.* Fast recognition of rings and lattices // Lect. Notes Comput. Sci.— 1981.— *117*.— C. 137—14 (РЖМат, 1982, 3A375).
328. *Gould M.* Endomorphism and automorphism structure of direct squares of universal algebras // Pacif. J. Math.— 1975.— *59*, № 1.— C. 69—8 (РЖМат, 1976, 5A311).
329. *Graczyńska E.* On the sums of double systems of some algebras. I // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1975.— *23*, № 5.— C. 509—513 (РЖМат, 1976, 3A338).
330. — On the sums of double systems of some universal algebras. II // Bull Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1975 (1976).— 2 № 10.— C. 1055—1058 (РЖМат, 1976, 7A382).
331. — On normal identities // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math.— 1982.— *30*, № 9—10.— C. 403—405 (РЖМат, 1983, 11A352).

332. — On regular identities // Algebra univers.— 1983.— *17*, № 3.— C. 369—375 (РЖМат, 1984, 11А239).
333. — On bases for normal identities // Stud. sci. math. hung.— 1984.— *19*, № 2—4.— C. 317—320 (РЖМат, 1987, 6А341).
334. — The word problem for regular identities // Wiss. Beitr. M.-Luther-Univ. Halle-Wittenberg.— 1987.—*M*, № 46.— C. 41—49 (РЖМат, 1987, 9А336).
335. — Connections between identities and hyperidentities // Bull. Sec. Log.— 1988.— *17*, № 1.— C. 34—41 (РЖМат, 1988, 12А283).
336. —, *Pastijn F.* Proofs of regular identities // Houston J. Math.— 1982.— *8*, № 1.— C. 61—67 (РЖМат, 1983, 2А251).
337. —, — A generalization of Płonka sums // Fund. math.— 1984.— *120*, № 1.— C. 53—62 (РЖМат, 1984, 11А242).
338. —, *Wroński A.* On weak Agassiz systems of algebras // Colloq. math.— 1978.— *40*, № 1.— C. 9—12 (РЖМат, 1979, 11А282).
339. —, — On normal Agassiz systems of algebras // Colloq. math.— 1978.— *40*, № 1.— C. 1—8 (РЖМат, 1979, 11А286).
340. *Grätzer G.* Universal algebra / 2nd Ed.— New York e. a.: Springer, 1979.— XX, 581 c. (РЖМат, 1980, 5А279).
341. — Universal algebra and lattice theory: a story and three research problems // Universal Algebra and Links Logic, Algebra, Combinatorics and Comput. Sci.— Berlin, 1984.— C. 1—13 (РЖМат, 1985, 6А260).
342. *Grossman P. A.* Local polynomial functions on semilattices // J. Algebra. — 1981.— *69*, № 2.— C. 281—286 (РЖМат, 1981, 11А328).
343. — Polynomial interpolation on universal algebras // Bull. Austral. Math. Soc.— 1983.— *27*, № 2.— C. 315—317 (РЖМат, 1984, 1А245).
344. *Grzymala-Busse J. W.* On the set of all automata with the same monoid of endomorphisms // Lect. Notes Comput. Sci.— 1975.— *32*.— C. 246—251 (РЖМат, 1976, 1А351).
345. *Gumm H. P.* Über die Lösungsmengen von Gleichungssystemen über allgemeinen Algebren // Math. Z.— 1978.— *162*, № 1.— C. 51—62 (РЖМат, 1979, 1А353).
346. — Algebras in permutable varieties; Geomentrical properties of affine algebras // Algebra univers.— 1979.— *9*, № 1.— C. 8—34 (РЖМат, 1979, 8А331).
347. *Guz W.* Fuzzy σ-algebras of physics // Int. J. Theor. Phys.— 1985.— *24*, № 5.— C. 481—493 (РЖМат, 1986, 3А369).
348. *Haddad L., Rosenberg I. G.* An interval of finite clones isomorphic to $\mathcal{P}(N)$ // Math. Repts. Acad. Sci. Can.— 1986.— *8*, № 6.— C. 375—379 (РЖМат, 1987, 5А286).
349. *Hagemann J., Herrmann Ch.* A concrete ideal multiplication for algebraic systems and its relation to congruence distributivity // Arch. Math.— 1979.— *32*, № 3.— C. 234—245 (РЖМат, 1979, 12А341).
350. *Hatvany Cs.* Direct decomposability for algebras // Lucr. semin. mat. şi. fiz. Inst. politehn. Timişoara.— 1985.— mai.— C. 49—50 (РЖМат, 1986, 11А354).
351. *Hecht T., Katriňák T.* Principal congruences of *p*-algebras and double *p*-algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— *58*, C. 25—31 (РЖМат, 1977, 7А300).
352. *Herrmann Cr.* Affine algebras in congruence modular varieties // Acta sci. math.— 1979.— *41*, № 1—2.— C. 119—125 (РЖМат, 1979, 12А330).
353. *Higgins A. W.* A representation theorem for weak automorphisms of a universal algebra // Algebra univers.— 1985.— *20*, № 2.— C. 179—193 (РЖМат, 1986, 3А367).
354. *Hoehnke H.-J.* Subfunctors associated with quasivarieties // Abh. Akad. Wiss. DDR. Abt. Math., Naturwiss., Tehn.— 1984.— № 2.— C. 81—84 (РЖМат, 1985, 8А353).
355. *Höhle U.* $\mathfrak{G}$-fuzzy topologies on algebraic structures // J. Math. Anal. and Appl.— 1985.— *108*, № 1.— C. 113—150 (РЖМат, 1986, 3А372).

356. *Hule H.* Über die Eindeutigkeit der Lösungen algebraischer Gleichungssysteme // J. Reine und angew. Math.— 1976.— *282*,— C. 157—161 (РЖМат, 1976, 10А206).
357. — Relations between the amalgamation property and algebraic equations // J. Austral. Math. Soc. A.— 1978.— *25*, № 3.— C. 257—263 (РЖМат, 1978, 12А513).
358. — Solutionally complete varieties // J. Austral. Math. Soc. A.— 1979.— *28*, № 1.— C. 82—86 (РЖМат, 1980, 1А349).
359. —, *Müller W. B.* On the com patibility of algebraic equations with extensions // J. Austral. Math. Soc.— 1976.— *21*, № 3.— C. 381—383 (РЖМат, 1977, 2А360).
360. —, *Nöbauer W.* Local polynomial fuctions on universal algebras // An. Acad. brasil. cienc.— 1977.— *49*, № 3.— C. 365—372 (РЖМат, 1978, 9А330).
361. *Idziak P. M.* On varieties of BCK-algebras // Math. jap.— 1983.— *28*, № 1.— C. 157—162 (РЖМат, 1983, 8А329).
362. — Generalized complex algebras and regular identities // Bull. Sec. Logic.— 1985.— *14*, № 2.— C. 84—90 (РЖМат, 1986, 1А342).
363. *Ihringer Th.* Congruence lattices of finite algebras: the characterization problem and the role of binary operations // Algebra-Ber.— 1986.— *13*, № 53.— C. 1—39 (РЖМат, 1988, 9А303).
364. *Imreh B.* On finite definite automata // Acta cybern.— 1985.— *7*, № 1.— C. 61—65 (РЖМат, 1985, 10А324).
365. *Iséki K.* A note on the variety of BCI-algebras of the type (1, 0, 0, 0) // Math. Semin. Notes Kobe Univ.— 1980.— *8*, № 3.— C. 509—511 (РЖМат, 1981, 9А244).
366. *Iskander A. A.* Extensions of algebraic systems // Trans. Amer. Math. Soc.— 1984.— *281*, № 1.— C. 309—327 (РЖМат, 1984, 8А275).
367. *Istinger M., Kaiser H. K.* A characterization of polynomially complete algebras // J. Algebra.— 1979.— *56*, № 1.— C. 103—110 (РЖМат, 1979, 10А219).
368. —, —, *Pixley A. F.* Interpolation in congruence permutable algebras // Colloq. math.— 1979.— *42*.— C. 229—239 (РЖМат, 1980, 10А241).
369. *Jakubiková D.* Systems of unary algebras with common endomorphisms. I // Czech. mat. J.— 1979.— *29*, № 3.— C. 406—420 (РЖМат, 1980, 2А317).
370. — Systems of unary algebras with common endomorphisms. II // Czech. Mat. J.— 1979.— *29*, № 3.— C. 421—429 (РЖМат, 1980, 2А318).
371. *Jakubiková-Studenovská D.* On weakly rigid monounary algebras // Math. Slovaca. (ČSSR).— 1980.— *30*, № 2.— C. 197—206 (РЖМат, 1981, 1А327).
372. — On congruence relations of monounary algebras. I // Czechosl. Math. J.— 1982.— *32*, № 3.— C. 437—459 (РЖМат, 1983, 4А331).
373. *Ježek Jaroslav.* EDZ varieties: the Schreier property and epimorphisms onto // Comment. math. Univ. carol.— 1976.— *17*, № 2.— C. 281—290 (РЖМат, 1976, 12А404).
374. — Varieties of algebras with equationally defined zeros // Czech. mat. J. — 1977.— *27*, № 3.— C. 394—414 (РЖМат, 1978, 2А274).
375. — Terms and semiterms // Comment. math. Univ. carol.— 1979.— *20*, № 3.— C. 447—460 (РЖМат, 1980, 3А245).
376. — A note on isomorphic varieties // Comment. math. Univ. carol.— 1982. — *23*, № 3.— C. 579—588 (РЖМат, 1983, 3А298).
377. — On join-irreducible equational theories // Lect. Notes Math.— 1983.— *1004*.— C. 159—165 (РЖМат, 1984, 2А309).
378. — Minimal bounded varieties // Comment. math. Univ. Carol.— 1988.— *29*, № 2.— C. 261—265 (РЖМат, 1988, 12А281).
379. —, *Kepka T.* Atoms in the lattice of varieties of distributive groupoids // Lattice Theory. Proc. Colloq. Szeged, 1974.— Amsterdam, 1976.— C. 185—194 (РЖМат, 1979, 5А263).

380. *Jiang Hao.* A theorem on the estimation of the number of subalgebras in a finite BCK-algebra // Ханчжоу дасюэ сюэбао. Цзыжань кэсюэ бань = J. Hangzhou Univ. Natur. Sci. Ed.— 1986.— *13*, № 1.— С. 6—11 (РЖМат, 1986, 7А297).
381. *Jónsson B.* Varieties of algebras and their congruence varieties // Proc. Int. Congr. Math. Vancouver, 1974. Vol. 1.— S. l., 1975.— С. 315—320 (РЖМат, 1976, 9А343).
382. — On finitely based varieties of algebras // Colloq. math.— 1979.— *42*.— С. 255—261 (РЖМат, 1980, 10А245).
383. — Congruence varieties // Algebra univers.— 1980.— *10*, № 3.— С. 355—394 (РЖМат, 1980, 12А328).
384. *Kaarli K., Pixley A. F.* Affine complete varieties // Algebra univers.— 1987.— *24*, № 1—2.— С. 74—90 (РЖМат, 1988, 7А308).
385. *Kaaz M. A.* Concerning a quantum-like uncertainty relation or pairs of complementary fuzzy sets // J. Math. Anal. and Appl.— 1987.— *121*, № 1. — С. 273—303 (РЖМат, 1987, 7А290).
386. *Kabziński J. K.* Quasivarieties for BCK-logic // Bull. Sec. Logic.— 1983. — *12*, № 3.— С. 130—133 (РЖМат, 1985, 3А323).
387. *Kaiser Hans K.* Über lokal polynomvollständige universale Algebren // Abh. math. Semin. Univ. Hamburg.— 1975.— *43*.— С. 158—165 (РЖМат, 1976, 2А404).
388. — Contributions to the theory of polynomially complete algebras // An Acad. brasil ciênc.— 1976.— *48*, № 1.— С. 1—5 (РЖМат, 1978, 1А290).
389. — Über kompatible Funktionen in universalen Algebren // Acta math. Acad. sci. hung.— 1977.— *30*, № 1—2.— С. 105—111 (РЖМат. 1978, 7А430).
390. — Interpolation in universal algebra // Universal Algebra and Links Logic, Algebra, Combinatorics and Comput. Sci.— Berlin, 1984.— С. 29—40 (РЖМат, 1985, 6А269).
391. —, *Lidl R.* Erweiterungs- und Rédeipolynomvollständigkeit universaler Algebren // Acta math. Acad. sci. hung.— 1975.— *26*, № 3—4.— С. 251—257 (РЖМат, 1976, 7А375).
392. —, *Márki L.* Remarks on a paper of L. Szabó and A. Szendrej // Acta sci. math.— 1980.— *42*, № 1—2. С. 95—98 (РЖМат, 1981, 7А300).
393. —, *Nöbauer W.* Über interpolierbare Funtionen auf universalen Algebren // Beirt. Algebra und Geom. Bd. 12.— Berlin, 1982.— С. 51—55 (РЖМат, 1982, 10А263).
394. *Katriňák T.* Essential extensions and injective hulls of double Stone algebras // Algebra univers.— 1977.— *7*, № 1.— С. 5—23 (РЖМат, 1978, 2А282).
395. — Congruence lattices of distributive *p*-algebras // Algebra univers.— 1977.— *7*, № 2.— С. 265—271 (РЖМат, 1978, 4А245).
396. — Congruence pairs on *p*-algebras with a modular frame // Algebra univers.— 1978.— *8*, № 2.— С. 205—220 (РЖМат, 1978, 10А214).
397. — Subdirectly irreducible *p*-algebras // Algebra univers.— 1979.— *9*, № 1.— С. 116—126 (РЖМат, 1979, 8А334).
398. — Subdirectly irreducible double *p*-algebras of finite range // Algebra univers.— 1979.— *9*, № 2.— С. 135—141 (РЖМат, 1979, 12А342).
399. — Subdirectly irreducible distributive doubel *p*-algebras // Algebra univers.— 1980.— *10*, № 2.— С. 195—219 (РЖМат, 1980, 12А330).
400. — Subdirectly irreducible double *p*-algebras of finite length // Houston J. Math.— 1980.— *6*, № 4.— С. 523—541 (РЖМат, 1982, 2А330).
401. — Splitting *p*-algebras // Algebra univers.— 1984.— *18*, № 2.— С. 199—224 (РЖМат, 1985, 3А324).
402. —, *El-Assar S.* Algebras with Boolean and Stone congruence lattices // Acta math. hung.— 1986.— *48*, № 3—4.— С. 301—316 (РЖМат, 1987, 7А307).
403. *Kennison J. F., Ledbetter C. S.* Sheaf representations and the Dedekind reals // Lect. Notes Math.— 1979.— *753*.— С. 500—513 (РЖМат, 1980, 5А282).

404. *Kilp M., Knauer U.* Characterization of monoids by properties of regular acts // J. Pure and Appl. Algebra.— 1987.— *46,* № 2—3.— С. 217—231 (РЖМат, 1988, 2А290).
405. —, —, *Michalev A. V., Skornjakov L. A.* Acts over Monoids.— Oldenburg: Univ. Oldenburg, 1982.— 42 с.
406. *Kisieiewicz A.* The $p_n$-sequences of idempotent algebras are strictly increasing // Algebra univers.— 1981.— *13,* № 2.— С. 233—250 (РЖМат, 1982, 8А332).
407. — Minimal extensions of minimal representable sequences // Algebra univers.— 1986.— *22,* № 2—3.— С. 244—252 (РЖМат, 1987, 5А282).
408. *Kiss E. W.* Each Hamiltonian variety has the congruence extension property // Algebra univers.— 1981.— *12,* № 3.— С. 395—398 (РЖМат, 1982, 4А345).
409. — Finitely Boolean representable varieties // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *89,* № 4.— С. 579—582 (РЖМат, 1984, 8А274).
410. — Term functions and subalgebras // Acta sci. math.— 1984.— *47,* № 3—4.— С. 303—306 (РЖМат, 1985, 10А308).
411. — Injectivity and related concepts in modular variaeties I. Two commutator properties // Bull. Austral. Math. Soc.— 1985.— *32,* № 1.— С. 33—44 (РЖМат, 1986, 7А299).
412. — Injectivity and related concepts in modular varieties II. The congruence extension property // Bull. Austral. Math. Soc.— 1985.— *32,* № 1.— С. 45—53 (РЖМат, 1986, 7А300).
413. — Definable principal congruences in congruence distributive varieties // Algebra univers.— 1985.— *21,* № 2—3.— С. 213—224 (РЖМат, 1986, 12А321).
414. *Knarr N., Wiegand C.* Ein Kriterium für Topologische Ternärkörper // Arch. Math.— 1986.— *46,* № 4.— С. 368—370 (РЖМат, 1986, 12А323).
415. *Kluktovits L.* Hamiltonian varieties of universal algebras // Acta sci. math.— 1975.— *37,* № 1—2.— С. 11—15 (РЖМат, 1976, 4А297).
416. *Knoebel R. A.* Further conclusions on functional completeness // Fund. math.— 1978.— *99,* № 2.— С. 93—112 (РЖМат, 1978, 10А217).
417. — The equational classes generated by single functionally precomplete algebras // Mem. AMS— 1985.— *57,* № 332.— 83 с. (РЖМат, 1986, 6А440).
418. *Knuth E.* A foundation for conceptual data structures by cylindric and partial algebras // Period. math. hung.— 1987.— *18,* № 4.— С. 295—316 (РЖат, 1988, 2А292).
419. *Koh K. M.* Idempotent algebras with three essentially binary polynomials // Algebra univers.— 1980.— *10,* № 2.— С. 232—246 (РЖМат, 1980, 12А323).
420. *Köhler P.* Varieties of Brouwerian algebras // Mitt. Mat. Sem. Geissen, 1975.— № 116.— 83 с.: ил. (РЖМат, 1975, 4А298).
421. *Kollár J.* Automorphism groups of subalgebras; a concrete characterization // Acta sci. math.— 1978.— *40,* № 3—4.— С. 291—295 (РЖМат, 1979, 6А260).
422. — Injectivity and congruence extension property in congruence distributive equational classes // Algebra univers.— 1980.— *10,* № 1.— С. 21—26 (РЖМат, 1980, 10А246).
423. *Komori Y.* The class of *BCC*-algebras is not a variety // Math. jap.— 1984.— *29,* № 3.— С. 391—394 (РЖМат, 1984, 12А338).
424. *König R.* Beiträge zut algebraischen Theorie der formalen Sprachen // Arbetsber. Inst. math. Masch. und Datenverarb., 1983.— *16,* № 2.— 180 с. (РЖМат, 1984, 3А419).
425. *Kopeček Oldřich.* Homomorphisms of machines. (Part I) // Arch. mat.— 1978.— *14,* № 1.— С. 45—50 (РЖМат, 1979, 3А281).
426. — $|\mathrm{End}\,A| = |\mathrm{Con}\,A| = |\mathrm{Sub}\,A| = 2^{|A|}$ for any uncountable 1-unary algebra *A* // Algebra univers.— 1983.— *16,* № 3.— С. 312—317 (РЖМат, 1984, 6А279).

427. *Koubek V.* Subalgebra lattices, simplicity and rigidity // Acta sci. math.— 1984.— *47,* № 1—2.— С. 71—83 (РЖМат, 1985, 3А311).
428. —, *Rödl V.* On hereditary rigid algebras // Algebra univers.— 1986.— *22,* № 2—3.— С. 120—141 (РЖМат, 1987, 5А284).
429. —, *Sichler J.* Universal varieties of distributive double *p*-algebras // Glasgow Math. J.— 1985.— *26,* № 2.— С. 121—131 (РЖМат, 1986, 2А312).
430. *Kowol G.* Embeddings of universal algebras into simple ones // Algebra univers.— 1984.— *19,* № 1.— С. 83—91 (РЖМат, 1985, 4А289).
431. *Kozák M.* Finiteness conditions on EDZ-varieties // Comment. math. Univ. Carol.— 1986.— *17,* № 3.— С. 461—472 (РЖМат, 1977, 7А304).
432. *Krauss P. H.* Direct factor varieties // Algebra univers.— 1983.— *17,* № 3.— С. 329—338 (РЖМат, 1984, 11А238).
433. — Mysterious varieties // Algebra univers.— 1984.— *19,* № 2.— С. 243—249 (РЖМат, 1985, 7А329).
434. —, *Clark D. M.* Global subdirect products // Mem. AMS— 1979.— № 210.— 109 с. (РЖМат, 1979, 9А306).
435. *Kuras J.* Agassiz bands of algebras // Bull. Pol. Acad. Sci.: Math.— 1984.— *32,* № 11—12.— С. 643—645 (РЖМат, 1985, 8А359).
436. — Even equations and Agassiz sums // Colloq math.— 1987.— *53,* № 1.— С. 9—16 (РЖМат, 1987, 11А290).
437. *Kurka A.* Equationally compact algebras with bases of different cardinalities // Algebra univers.— 1981.— *12,* № 3.— С. 399—401 (РЖМат, 1982, 4А341).
438. *Lakser H.* Principal congruences in *N*-permutable varieties // Algebra univers.— 1982.— *14,* № 1.— С. 64—67 (РЖМат, 1982, 9А268).
439. *Lampe W. A., Taylor W.* Simple algebras in varieties // Algebra univers.— 1982.— *14,* № 1.— С. 36—43 (РЖМат, 1982, 9А269).
440. *Länger H.* Verallgemeinerung eines Satzes von Nöbauer und Philipp // Arch. Math.— 1976.— *27,* № 1.— С. 1—2 (РЖМат, 1976, 9А345).
441. — A characterization of algebras of polynomial functions // J. Algebra.— 1980.— *65,* № 2.— С. 412—415 (РЖМат, 1981, 2А303).
442. — Homogeneous superassociative systems // Colloq. math.— 1980.— *43,* № 1.— С. 55—60 (РЖМат, 1981, 10А295).
443. —, *Poschel R.* Relational systems with trivial endomorphisms and polymorphisms // J. Pure and Appl. Algebra.— 1984.— *32,* № 2.— С. 129—142 (РЖМат, 1984, 12А332).
444. *Lee Sin-Min.* On the sequaences representable by idempotent algebras // Math. Semin. Notes Kobe Univ.— 1980.— *8,* № 2.— С. 287—294 (РЖМат, 1981, 5А269).
445. *Lengvárszky Z.* A note on minimal clones // Acta sci. math.— 1986.— *50,* № 3—4.— С. 335—336 (РЖМат, 1987, 9А330).
446. *Lenkehegyi A.* On the fundamental theorem of lattice-primal algebras // Kobe J. Math.— 1985.— *2,* № 2.— С. 103—115 (РЖМат, 1986, 11А361).
447. — Algebraic functions in varieties generated by lattice-primal algebras // Algebra univers.— 1986.— *23,* № 1.— С. 5—9 (РЖМат, 1987, 7А301).
448. *Lescanne P.* Term rewriting systems and algebra // Lect. Notes Comput. Sci.— 1984.— *170.*— С. 166—174 (РЖМат, 1985, 3А332).
449. *Lewin R.* Interpretations into Heyting algebras // Algebra univers.— 1987.— *24,* № 1—2.— С. 149—166 (РЖМат, 1988, 6А282).
450. — Interpretations into monadic algebras // Stud. log.— 1987.— *46,* № 4. — С. 329—342 (РЖМат, 1988, 9А290).
451. *Libicher J.* Doubly homogeneous Stein algebras // Sb. pr. Ped. fak. Ostrave. A.— 1984.— *19,* № 87.— С. 3—22 (РЖМат, 1986, 6А459).
452. *Lucas Th.* Universal classes of monadic algebras // Z. math. Log. und Grundl. Math.— 1976.— *22,* № 1.— С. 35—44 (РЖМат, 1976, 11А389).
453. *Lugowski H.* Grundzüge der Universellen Algebra.— Leipzig: Teubner Verlagsgesel., 1976.— 239 с. (РЖМат, 1977, 12А317).

454. *Macdonald Sh. O., Vaughan-Lee M. R.* Varieties that make one Cross // J. Austral. Math. Soc. A.— 1978.— *26*, № 3.— С. 368—383 (РЖМат, 1979, 5А205).
455. *McKenzie R.* A finite algebra *A* with SP(*A*) not elementary // Algebra univers.— 1978.— *8*, № 1.— С. 5—7 (РЖМат, 1978, 6А338).
456. — Para primal varieties: A study of finite axiomatizability and definable principal congruences in locally finite varieties // Algebra univers.— 1978. — *8*, № 3. С. 336—348 (РЖМат, 1978, 11А378).
457. — Residually small varieties of *K*-algebras // Algebra univers.— 1982.— *14*, № 2.— С. 181—196 (РЖМат, 1982, 10А266).
458. — Narrowness implies uniformity // Algebra univers.— 1982.— *15*, № 1. — С. 67—85 (РЖМат, 1983, 5А283).
459. — A new product of algebras and a type reduction theorem // Algebra univers.— 1984.— *18*, № 1.— С. 29—69 (РЖМат, 1985, 3А326).
460. — Finite equational bases for congruence modular varieties // Algebra univers.— 1987.— *24*.— С. 224—250 (РЖМат, 1988, 9А310).
461. *McNulty G. F.* Infinite chains of non-finitely based equational theories // Algebra univers.— 1981.— *13*, № 3.— С. 373—378 (РЖМат, 1982, 7А325).
462 —, *Nordahl T., Scheiblich H. E.* Injectives and projectives in term finite varieties of algebras // Can. J. Math.— 1983.— *35*, № 5.— С. 769—775 (РЖМат, 1984, 9А280).
463. —, *Shallon C. R.* Inherently nonfinitely based finite algebras // Lect. Notes Math.— 1983.— *1004*.— С. 206—231 (РЖМат, 1984, 2А308).
464. *Meldrum J. D. P., Pilz G.* Polynomial algebras and polynomial maps // Contr. Gen. Algebra. 2. Proc. Klagenfurt Conf., June 10—13, 1982.— Wien; Stuttgart, 1983.— С. 263—272 (РЖМат, 1984, 3А410).
465. *Mendelson N. S.* The spectrum of idempotent varieties of algebras with binary operators based on two variable identities // Aequat. math.— 1978. — *17*, № 2—3.— С. 384 (РЖМат, 1979, 3А278).
466. — The spectrum of idempotent varieties of algebras with binary operators based on two variable identities // Aequat. math.— 1978.— *18*, № 3. — С. 330—332 (РЖМат, 1979, 7А370).
467. *Mervartová J.* On some properties of genomorphisms of *C*-algebras // Arch. math.— 1983.— *19*, № 2.— С. 99—107 (РЖМат, 1984, 1А243):
468. *Meskhi V. J.* Injectivity in the variety of Heyting algebras with regular involution // 8 Int. Congr. Log., Methodol. and Phil. Sci., LMPS'87, Moscow 17—22 Aug., 1987. Vol. 5,: Sec. 1—6. Pt 1.— Moscow, 1987.— С. 113—114 (РЖМат, 1988, 1А364).
469. *Micale B.* Sul centralizzatore del sistema di operazioni di certe algebre // Rev. mat. Univ. Parma.— 1986.— *12*.— С. 89—100 (РЖМат, 1988, 3А363).
470. *Mlitz R.* Sull'interpolazione nell'algebra universale // Proc. Conf. Near-rings and Near-fields, San Benedetto del Tronto, 13—19 sett., 1981— Parma, 1982.— С. 183—186 (РЖМат, 1983, 8А332).
471. *Muir A., Warner M. W.* Lettice valued relations and automatas // Discrete Appl. Math.— 1984.— 7, № 1.— С. 65—78 (РЖМат, 1984, 4А333).
472. *Mycielski J., Taylor W.* A compactification of the algebra of terms // Algebra univers.— 1976.— *6*, № 2.— С. 159—163 (РЖМат, 1977, 7А301).
473. *Nelson E.* Filtered products of congruences // Algebra univers.— 1978.— *8*, № 2.— С. 266—268 (РЖМат, 1978, 11А374).
474. — Homomorphisms of mono-unary algebras // Pacif. J. Math.— 1982.— *99*, № 2.— С. 427—429 (РЖМат, 1982, 11А221).
475. *Neumann W. D.* Mal'cev conditions, spectra and Kronoker product // J. Austral. Math. Soc. A.— 1978.— *24*, № 1.— С. 103—117 (РЖМат, 1978, 9А337).
476. *Niederle J.* Conditions for trivial principal tolerances // Arch. math.— 1983.— *19*, № 3.— С. 145—152 (РЖМат, 1984, 6А291).

477. *Niemlnen J.* Blocks, error algebras and flou sets // Glas. mat.— 1979.— *14*, № 2.— С. 381—385 (РЖМат, 1980, 7А288).
478. *Nöbauer W.* Local polynomial functions: results and problems // Univers. Algebra and Appl. Pap. Stefan Banach Int. Cent. Semest., Febr. 15 — June 9, 1978.— Warszawa, 1982.— С. 197—202 (РЖМат, 1983, 9А255).
479. *Normak P.* To residual smallness // Уч. зап. Тарт. ун-та— 1987.— № 764.— С. 53—56 (РЖМат, 1987, 11А295).
480. *Oates-Williams Sh.* Murskii's algebra does not satisfy min // Bull. Austral. Math. Soc.— 1980.— *22*, № 2.— С. 199—203 (РЖМат, 1981, 8А305).
481. — On the variety generated by Murskii's algebra // Algebra univers.— 1984.— *18*, № 2.— С. 175—177 (РЖМат, 1985, 3А320).
482. *Ostasiewicz W.* Przykłady rozmytych struktur algebraicznych // Pr. nauk AE Wrocławiu.— 1982.— № 203.— С. 71—93 (РЖМат, 1983, 7А287).
483. *Padmanabhan R.* Equational theory of algebras with a majority polynomial // Algebra univers.— 1977.— *7*, № 2.— С. 273—275 (РЖМат, 1978, 5А307).
484. —, *Wolk B.* Equational theoreies with a minority polynomial // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— *83*, № 2.— С. 238—242 (РЖМат, 1982, 5А273).
485. *Pałasińska K.* The amalgamation property for some classes of *BCK*-algebras // Bull. Sec. Logic.— 1985.— *14*, № 3.— С. 109—113 (РЖМат, 1986, 6А447).
486. — Amalgamation property in some classes of BCK-algebras // Repts. Math. Log.— 1987.— № 21.— С. 73—84 (РЖМат, 1988, 9А299).
487. *Pałasiński M.* The distributivity of the lattice of varieties of BCK-algebras // Math. Semin. Notes Kobe Univ.— 1982.— *10*, № 2/2.— С. 747—748 (РЖМат, 1984, 3А412).
488. — Varieties of commutative BCK-algebras not generated by their finite members // Bull. Sec. Logic.— 1983.— *12*, № 3.— С. 134—135 (РЖМат, 1985, 3А321).
489. — No non-trivial quasivariety of BCK-algebras has decidable first order theory // Stud. log.— 1987.— *46*, № 4.— С. 343—345 (РЖМат, 1988, 9А314).
490. —, *Romanowska A.* Varieties of commutative *BCK*-algebras not generated by their finite members // Demonstr. math.— 1985.— *18*, № 2.— С. 499—508 (РЖМат, 1986, 7А302).
491. —, *Woźniakowska B.* An equational basis for commutative *BCK*-algebras // Math. Semin. Notes. Kobe Univ.— 1982.— *10*, № 1.— С. 175—178 (РЖМат, 1983, 2А246).
492. *Pálfy P. P.* On certain congruence lattices of finite unary algebras // Comment. math. Univ. carol.— 1978.— *19*, № 1.— С. 89—95 (РЖМат, 1978, 10А222).
493. *Pasini A.* On the Frattini subalgebra $\Phi(U)$ of an algebra $U$ // Boll. Unione mat. ital.— 1975.— *12*, № 1—2.— С. 37—40 (РЖМат, 1976, 6А330).
494. *Pattison Ph., Barlett W. K.* A factorization procedure for finite algebras // J. Math. Phsychol.— 1982.— *25*, № 1.— С. 51—81 (РЖМат, 1983, 1А322).
495. *Péak I.* On some compositions of mealy-automata // Dep. Math. K. Marx Univ. Econ. Budapest [Publ.]— 1983.— № 3.— С. 23—47 (РЖМат, 1985, 9А187).
496. *Pécuchet J. P.* Automates boustrophedon, semi-groupe de Birget et monoide inversif libre // RIARO. Inf. theor.— 1985.— *19*, № 1.— С. 71—100 (РЖМат, 1986, 3А381).
497. *Pelin A., Gallier J. H.* Solving word problems in free algebras using complexity functions // Lect. Notes Comput. Sci.— 1984.— *170*.— С. 476—495 (РЖМат, 1985, 3А333).

498. *Pigozzi D.* Minimal, locally finite varieties that are not finitely axiomatizable // Algebra univers.— 1979.— *9*, № 3.— С. 374—390 (РЖМат 1980, 6А339).
499. — On the structure of equationally complete varieties // Colloq. math.— 1981.— *45*, № 2.— С. 191—201 (РЖМат, 1983, 1А325).
500. — On the structure of equationally complete varieties. II. // Trans. Amer Math. Soc.— 1981.— *264*, № 2.— С. 301—319 (РЖМат, 1981, 12А309)
501. *Pilz G.* Strictly connected group automata // Proc. Roy. Irish Acad. A.— 1986.— *86*, № 2.— С. 115—118 (РЖМат, 1988, 3А373).
502. —, *So Yong-Sian.* Near-rings of polynomials over Ω-groups // Monatsh Math.— 1981.— *91*, № 1.— С. 73—76 (РЖМат, 1981, 10А293).
503. *Pinus A. G.* Skeletons of congruence distributive varieties // 8 Int. Congr Log., Methodol. and Phil. Sci., LMPS'87, Moscow, 17—22 Aug., 1987 Vol. 5.: Sec. 1—6. Pt 1.— Moscow, 1987.— С. 123—125 (РЖМат, 1988 1А363).
504. *Pixley A. F.* Characterization of arithmetical varieties // Algebra univers — 1979.— *9*, № 1.— С. 87—98 (РЖМат, 1979, 8А330).
505. — Some remarks on the two discriminators // Stud. sci. math. hung.— 1984.— *19*, № 2—4.— С. 339—345 (РЖМат, 1987, 6А442).
506. *Płonka E.* Remarks on weak automorphisms of 1-unary algebras // Demonstr. math.— 1987.— *20*, № 1—2.— С. 185—190 (РЖМат, 1988 11А321).
507. *Płonka J.* Remark on direct products and the sums od direct systems o algebras // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1975.— *23*, № 5.— С. 515—518 (РЖМат, 1976, 3А336).
508. — On splitting automorphism of relational systems // Scripta Fac. sci natur. UJEP brun-Math.— 1974 (1975).— *4*, № 1.— С. 55—57 (РЖМат 1976, 6А328).
509. — On automorphism groups of relational systems and universal algebra // Colloq. math.— 1979.— *42*.— С. 341—344 (РЖМат, 1980, 10А243)
510. — On the sum of a system of disjoint unary algebras corresponding to a given type // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math.— 1982.— *30*, № 7—8 — С. 305—309 (РЖМат, 1983, 6А292).
511. — Some characterizations of indepenedent varieties of algebras // Bull Pol. Acad. Sci. Math.— 1983.— *31*, № 9—12.— С. 321—324 (РЖМат 1985, 1А402).
512. — On the sum of a direct system of universal algebras with nullary polynomials // Algebra univers.— 1984.— *19*, № 2.— С. 197—207 (РЖМат, 1985, 6А267).
513. — On the lattice of varities of unary algebras // Simon Stevin— 1985.— *59*, № 4.— С. 353—364 (РЖМат, 1986, 10А282).
514. — On lattices of varieties of universal algebras // Colloq. math.— 1987,— *53*, № 1.— С. 1—7 (РЖМат, 1987, 11А291).
515. *Polák L.* Weak automorphisms of 1-unary algebras // Univers. Algebra and APPL. Pap. Stefan Banach. Int. Math. Cent. Semest., Febr. 15 — June 9, 1978.— Warszawa, 1982,— С. 273—275 (РЖМат, 1983, 9А261)
516. *Pollak G.* Some lattices of varieties containing elements without cover / Quad. Ric. sci.— 1981.— № 109.— С. 91—99 (РЖМат, 1982, 5А272)
517. *Polonijo M.* On affine Steiner ternary algebras // Algebr. Conf., Novi Sad, 1981.— Novi Sad, 1982.— С. 137 (РЖМат, 1983, 4А333).
518. *Puskás Cs.* A common method for analysis of finite deterministic and non-deterministic automata // Dep. Math. K. Marx Univ. Budapest (Publ.) — 1983.— № 3.— С. 77—89 (РЖМат, 1985, 9А186).
519. *Quackenbush R. W.* Algebras with minimal spectrum // Algebra univers — 1980.— *10*, № 1.— С. 117—129 (РЖМат, 1980, 10А238).
520. — Varieties with *n*-principal compact congruences // Algebra univers.— 1982.— *14*, № 3.— С. 292—296 (РЖМат, 1983, 2А250).
521. — Minimal para primal algebras // Contrib. Gen. Algebra. 2. Proc Klagenfurt Conf., June 10—13, 1982— Wien; Stuttgart, 1983.— С. 291—301 (РЖМат, 1984, 3А400).

522. — Quasi-affine algebras // Algebra univers.— 1985.— *20*, № 3.— С. 318—327 (РЖМат, 1986, 5А312).
523. — Finitely determined arithmetical varieties need not be universally-finite // Algebra univers.— 1986.— *22*, № 2—3.— С. 302—303 (РЖМат, 1987, 5А288).
524. *Reichel H.* Partial algebras — a sound basis for structural induction // Universal Algebra and Links Logic, Algebra, Combinatorics and Comput. Sci.— Berlin, 1984.— С. 230—240 (РЖМат, 1985, 7А328).
525. — Initial computability, algebraic specifications and partial algebras.— Berlin: Akad. Verl., 1987.— 221 с. (РЖМат, 1988, 2А291).
526. *Restivo A., Reutenauer C.* Some applications of a theorem of Shirshov to language theory // Inf. and Contr.— 1984.— *57*, № 2—3.— С. 205—213 (РЖМат, 1984, 10А291).
527. *Rival I., Sands B.* A note on the congruence lattice of a finitely generated algebra // Proc. Amer. Math. Soc.— 1978.— *72*, № 3.— С. 451—455 (РЖМат, 1979, 6А263).
528. *Romanowska A.* On free algebras in some equational classes defined by regular equations // Demonstr. math.— 1978.— *11*, № 4.— С. 1131—1137 (РЖМат, 1979, 8А332).
529. — Subdirectly irreducible pseudocomplemented de Morgan algebras // Algebra univers.— 1981.— *12*, № 1.— С. 70—75 (РЖМат, 1981, 11А332).
530. — Some varieties of algebras defined by externally compatible identities // Demonstr. math.— 1987.— *20*, № 1—2.— С. 109—119 (РЖМат, 1988, 11А331).
531. —, *Traczyk T.* Commutative BCK-algebras. Subdirectly irreducible algebras and varieties // Math. jap.— 1982.— *27*, № 1.— С. 35—48 (РЖМат, 1982, 10А264).
532. *Rosenberg I. G.* The set of maximal closed classes of operations on an infinite set A has cardinality $2^{2^{|A|}}$ // Arch. Math.— 1976.— *27*, № 6.— С. 561—568 (РЖМат, 1977, 6А235).
533. — The subalgebra systems of direct powers // Algebra univers.— 1978.— *8*, № 2.— С. 221—227 (РЖМат, 1978, 10А216).
534. — Functionally complete algebras in congruence distributive varieties // Acta sci. math.— 1981.— *43*, № 3—4.— С. 347—352 (РЖМат, 1982, 7А329).
535. — Clones containing the direct square of a primal algebra // Proc. 12th Int. Symp. Multi-Valued Log., Paris, May 25—27, 1982— New York, N. Y., 1982.— С. 30—34 (РЖМат, 1983, 8А327).
536. —, *Szendrei A.* Degrees of clones and relations // Houston J. Math.— 1983.— *9*, № 4.— С. 545—580 (РЖМат, 1984, 10А283).
537. *Rozalija M., Mihajlović V.* Some remarks on $p_n$-sequences of algebras // Зб. рад. Прир.-мат. фак. Унив. Новом Саду. Сер. мат.— 1984.— *14*, № 2.— С. 223—232 (РЖМат, 1987, 8А290).
538. *Sangalli A. A. L.* Sugli automorfismi delle categorie di algebre simili // Riv. mat. Univ. Parma— 1974.— *3*.— С. 233—238 (РЖМат, 1977, 7А308).
539. — On the structure and representation of clones // Algebra univers.— 1988.— *25*, № 1.— С. 101—106 (РЖМат, 1988, 9А304).
540. *Sankappanavar H. P.* A characterization of principal congruences of de Morgan algebras and its applications // Math. Logic Lat. Amer. Proc. 4 Lat. Amer. Symp., Santiago, 18—20 Dec., 1978.— Amsterdam e. a., 1980.— С. 341—349 (РЖМат, 1982, 12А318).
541. — Pseudocomplemented Ockham and de Morgan algebras // Z. Math. Log. und Grundl. Math.— 1986.— *32*, № 5.— С. 385—394 (РЖМат, 1987, 6А332).
542. *Sauer N., Stone M. G., Weedmark R. H.* Every finite algebra with congruence lattice $M_7$ has principal congruences // Lect. Notes Math.— 1983.— *1004*.— С. 273—292 (РЖМат, 1984, 3А409).

543. *Schein B. M., Trohimenko V. S.* Algebras of multiple functions // Semigroup Forum.— 1979.— *17,* № 1.— С. 1—64 (РЖМат, 1979, 8А337).
544. *Schweigert D.* On prepolynomially complete algebras // J. London Math. Soc.— 1979.— *20,* № 2.— С. 179—185 (РЖМат, 1980, 6А335).
545. — On varieties of clones // Semigroup Forum— 1983.— *26,* № 3—4.— С. 275—285 (РЖМат, 1983, 9А258).
546. — Congruence relations of multialgebras // Discrete Math.— 1985.— *53.*— С. 249—253 (РЖМат, 1985, 10А303).
547. — On weak isomorphisms and equational theories // Contrib. Gen. Algebra. 3: Proc. Vienna Conf., Juni 21—24, 1984.— Wien; Stuttgart, 1985.— С. 335—340 (РЖМат, 1986, 6А454).
548. *Šešelja B.* Fuzzy congruence relations and constructions of algebras // Зб. рад. Прир.-мат. фак. Ун-т Новом Саду. Сер. мат.— 1982.— *12.*— С. 447—455 (РЖМат, 1984, 9А281).
549. *Shapiro J.* Finite equational bases for subalgebra distributive varieties // Algebra univers.— 1987.— *24,* № 1—2.— С. 36—40 (РЖМат, 1988, 6А279).
550. *Shi En Wei.* A BCK algebraic characteristic of the fuzzy inverse operator // Fuzzy Sets and Syst.— 1987.— *23,* № 3.— С. 387—391 (РЖМат, 1988, 2А280).
551. *Simi G.* Sulla varietà delle algebre premodali // Boll. Unione mat. ital.— 1980.— *2.*— С. 365—371 (РЖМат, 1981, 7А305).
552. *Skornjakov L. A.* Complements in the congruence lattice of a polygon over a commutative monoid // Lattice Theory Proc. Colloq. Szeged, 1974.— Amsterdam, 1976.— С. 395—412 (РЖМат, 1979, 5А261).
553. — Unary algebras with regular endomorphism monoids // Acta sci. math.— 1978.— *40,* № 3—4.— С. 375—381 (РЖМат, 1979, 6А265).
554. — Convexors // Stud. sci. math. hung.— 1981.— *116,* № 1—2.— С. 25—34 РЖМат, 1983, 12А357).
555. *Smith J. D. H.* Mal'cev varieties // Lect. Notes Math.— 1976.— *554.*— VIII, 158 с. (РЖМат, 1977, 8А356).
556. *Stone M. G.* On endomorphism structure for algebras over a fixed set // Colloq. math.— 1975— *33,* № 1.— С. 41—45 (РЖМат, 1976, 5А314).
557. *Szabó L.* Concrete representation of related structures of universal algebras. I // Acta sci. math.— 1978.— *40,* № 1—2.— С. 175—184 (РЖМат, 1979, 1А357).
558. — Interpolation in algebras with doubly primitive automorphism groups // Elektron. Informationsverarb. und Kybern.— 1983.— *19,* № 12.— С. 603—610 (РЖМат, 1984, 6А282).
559. —, *Szendrei A.* Almost all algebras with triply transitive automorphism groups are functionally complete // Acta sci. math.— 1979.— *41,* № 3—4.— С. 391—402 (РЖМат, 1980, 9А312).
560. *Szendrei A.* On weakly commuting operations // Contrib. Gen. Algebra. Proc. Klagenfurt Conf. 1978.— Klagenfurt, 1979.— С. 373—380 (РЖМат, 1981, 1А320).
561. — Identities in idempotent affine algebras // Algebra univers.— 1981.— *12,* № 2.— С. 172—199 (РЖМат, 1981, 12А311).
562. — Algebras of prime cardinality with a cyclic automorphisms // Arch Math.— 1982.— *39,* № 5.— С. 417—427 (РЖМат, 1983, 6А291).
563. — Short maximal chains in the lattice of clones over a finite set / Math. Nachr.— 1983.— *110.*— С. 43—58 (РЖМат, 1983, 11А345).
564. — Idempotent algebras with restrictions on subalgebras // Acta sci math.— 1987.— *51,* № 1—2.— С. 251—268 (РЖМат, 1988, 3А362).
565. — Every idempotent plain algebra generates a minimal variety // Algebra univers.— 1988.— *25,* № 1.— С. 36—39 (РЖМат, 1988, 11А330).
566. *Taylor Walter.* The fine spectrum of a variety // Algebra univers.— 1975.— *5,* № 2.— С. 263—303 (РЖМат, 1976, 11А387).
567. — Pure compactifications in quasi-primal varieties // Can. J. Math.— 1976.— *28,* № 1.— С. 50—62 (РЖМат, 1976, 10А207).

568. — Varieties obeying homotopy laws // Can. J. Math.— 1977.— *29*, № 3.— C. 498—527 (РЖМат, 1977, 12А326).
569. — Mal'tsev conditions and spectra // J. Austral. Math. Soc.— 1980. A.— *29*, № 2.— C. 143—152 (РЖМат, 1980, 9А309).
570. — Hyperidentities and hypervarieties // Aequat. math.— 1981.— *22*, № 2—3.— C. 312—314 (РЖМат, 1982, 6А289).
571. — A note on interpretations of Heyting algebras // Algebra univers.— 1987.— *24*, № 3.— C. 289—291 (РЖМат, 1988, 9А311).
572. *Trnková V., Adámek J.* Analysis of languages accepted by varietor machines in category // Univers. Algebra and Appl. Pap. Stefan Banach Int. Math. Cent. Semest., Febr. 15—June 9, 1978— Warszawa, 1982.— C. 257—272 (РЖМат, 1983, 10А288).
573. *Tulipani S.* On classes of algebras with the definability of congruences // Algebra univers.— 1982.— *14*, № 3.— C. 269—279 (РЖМат, 1983, 2А253).
574. — On the universal theory of classes of finite models // Trans. Amer. Math. Soc.— 1984.— *284*, № 1.— C. 163—170 (РЖМат, 1985, 4А286).
575. *Tůma J.* A simple geometric proof of a theorem on $M_n$ // Comment. math. Univ. carol.— 1985.— *26*, № 2.— C. 233—239 (РЖМат, 1986, 1А338).
576. — Some finite congruence lattices. I. // Czechosl. Math. J.— 1986.— *36*, № 2.— C. 298—330 (РЖМат, 1987, 1А304).
577. *Urosu C.* Congruences décomposable sur produits directs des algēbres universelles // An. Univ. Timişoara. Ser. şti. fiz.-chim.— 1980.— *18*, № 2. — C. 177—185 (РЖМат, 1982, 5А269).
578. — Asupra laticei congrue Intelor unei sume directe de algebre universale // Bull. Sci. şi tehn. Inst. politehn. Timişoara. Ser. mat.-fiz.— 1980.— *25*, № 1.— C. 21—25 (РЖМат, 1982, 5А274).
579. — Sousalgèbres complètes des produits direct des algèbres universelles // An. Univ. Timişoara. Ser. şti. mat.— 1981.— *19*, № 1.— C. 91—95 (РЖМат, 1983, 1А324).
580. — Congruente compact decompozabile pe produse directe // Bul. şti. şi. tehn. Inst. politehn. Timişoara. Mat.-fiz.— 1981.— *26*, № 2.— C. 17—19 (РЖМат, 1983, 10А282).
581. — Sur le congruences dans produits des varietes // Lucr. semin. mat. şi. fiz. Inst. politehn. Traian Vuia, Timişoara, 1982.— Timişoara, 1982.— C. 25—28 (РЖМат, 1985, 5А311).
582. — Sur les proprietés laticeales des congruences // Lucr. semin. mat. şi. fiz. Inst. politehn. Timişoara, 1983, noiem.— Timişoara, 1983.— C. 76—78 (РЖМат, 1985, 10А311).
583. *Varlet J. C.* Large congruences in *p*-algebras and double *p*-algebras // Algebra univers.— 1979.— *9*, № 2.— C. 165—178 (РЖМат, 1979, 12А238).
584. — A strengthening of the notion of essential extension // Bull. Soc. roy. sci. Liège— 1979.— *48*, № 11—12.— C. 432—437 (РЖМат, 1980, 10А239).
585. — Regularity in *p*-algebras and *p*-semilattices // Univers. Algebra and Appl. Pap. Stefan Banach Int. Math. Cent. Semestr., Febr. 15 — June 9, 1978.— Warszawa, 1982.— C. 369—378 (РЖМат, 1983, 9А263).
586. *Vas de Carvalho J.* The subvariety $K_{2,0}$ of Ockham algebras // Bull. Soc. roy. sci. Liège— 1984.— *53*, № 6.— C. 393—400 (РЖМат, 1985, 8А347).
587. *Vogel H.-J.* Kongruenzen auf Klons und vollinvariante Kongruenzen relativ freier Algebren. I. // Rostock math. Kolloq.— 1986.— № 30.— C. 37—55 (РЖМат, 1987, 9А342).
588. *Vojvodić G., Šešelja B.* On one decomposition of fuzzy sets and relations // Proc. Conf. Algebra and Logic. Zagreb, 7—9 June, 1984.— Novi Sad, 1985.— C. 177—184 (РЖМат, 1986, 4А361).
589. —, — On the lattice of weak fuzzy congruence relations on algebras // Зб. рад. Прир.-мат. фак. Унив. Новом Саду. Сер. Мат.— 1985.— *15*, № 1.— C. 199—207 (РЖМат, 1987, 9А325).

590. *Volkov M. V.* On the join of varieties // Simon Stevin (Belg.).— 1984.— *58*, № 4.— C. 311—317 (РЖМат, 1985, 8A357).
591. *Vrancken-Mawet L.* The 0-distributivity in the class of subalgebra lattices of Heyting algebras and closure algebras // Comment. math. Univ. carol. — 1987.— *28*, № 2.— C. 387—396 (РЖМат, 1988, 1A362).
592. — Sous-algèbres de Frattini d'algèbre de fermeture // Bull. Soc. math. Belg. B.— 1987.— *39*, № 1.— C. 33—45 (РЖМат, 1988, 12A272).
593 — *Hansoul G.* The subalgebra lattice of a Heyting algebra // Czechosl. Math. J.— 1987.— *37*, № 1.— C. 34—41 (РЖМат, 1987, 10A229).
594. *Werner H.* Discriminator-algebras. Algebraic representation and model theoretic properties // Stud. Alg. und Anwend.— 1978.— C. 6 (РЖМат, 1978, 11A381).
595. — A generalization of Comer's sheaf-representation theorem // Contrib. Gen. Algebra. Proc. Klagenfurt Conf., 1978.— Klagenfurt, 1979.— C. 395—397 (РЖМат, 1981, 3A301).
596. — Sheaf constructions in universal algebras and model theory // Univers. Algebra and Appl. Pap. Stefan Banach Int. Math. Cent. Semestr., Febr. 15 — June 9, 1978.— Warszawa, 1982.— C. 133—179 (РЖМат, 1983, 9A257).
597. — Boolean constructions and their role in universal algebra and model theory // Universal Algebra and Links Logic, Algebra, Combinatorics and Comput. Sci.— Berlin, 1984.— C. 106—114 (РЖМат, 1985, 6A271).
598. *Wille R.* Allgemeine Algebra — zwischen Grundlageforschung und Anwendbarkeit // Mathematikunterricht— 1976.— *22*, № 2.— C. 40—64 (РЖМат, 1976, 12A414).
599. *Wojdylo B.* Programming language from algebraic point of view // Contrib. Gen. Algebra. Proc. Klagenfurt Conf., 1978.— Klagenfurt, 1979. — C. 405—421 (РЖМат, 1981, 2A305).
600. *Wózniakowska B.* Finitely axiomatizable varities of *BCK*-algebras // Semigroup Forum— 1985.— *31*, № 3.— C. 361—366 (РЖМат, 1985, 12A299).
601. *Wroński A.* *BCK*-algebras do not form a variety // Math. jap.— 1983.— *28*, № 2.— C. 211—213 (РЖМат, 1983, 11A349).
602. — On varieties of commutative *BCK*-algebras not generated by their finite members // Math. jap.— 1985.— *30*, № 2.— C. 227—233 (РЖМат, 1985, 11A340).
603. —, *Kabziński J. K.* There is no largest variety of *BCK*-algebras // Math. jap.— 1984.— *29*, № 4.— C. 545—549 (РЖМат, 1985, 3A322).
604. *Zembery I.* Almost equational classes of algebras // Algebra univers.— 1986.— *23*, № 3.— C. 293—307 (РЖМат, 1988, 1A366).
605. *Zimmermann U., Köhler P.* Products of finitely based varieties of Brouwerian semilattices // Algebra univers.— 1984,— *18*, № 1.— C. 110—116 (РЖМат, 1985, 2A337).
606. *Zippel R.* The future of computer algebra // SIGSAM Bull.— 1984.— *18*, № 2.— C. 6—7 (РЖМат, 1985, 3A334).
607. *Zlatoš P.* A characterization of some Boolean powers // Arch. Math.— 1979.— *33*, № 2.— C. 133—143 (РЖМат, 1980, 5A281).
608. — A Mal'cev condition for compact congruence to be principal // Acta sci. math.— 1981.— *43*, № 3—4.— C. 383—387 (РЖМат, 1982, 7A331).
609. — On congruences in direct sums of algebras // Comment. math. Univ. carol.— 1983.— *24*, № 3.— C. 519—524 (РЖМат, 1984, 7A258).

УДК 515.142.21

# ОБЩИЕ ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ И КОГОМОЛОГИЙ. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ТИПИЧНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

*Е. Г. Скляренко*

Даже если первоначально иметь дело только с такими «хорошими» объектами, как многообразия и полиэдры, при изучении многих конкретных задач, касающихся таких объектов, приходится сталкиваться и с более общими образованиями — подмножествами и факторпространствами, пространствами отображений, орбитами точек и пространствами орбит, множествами неподвижных и периодических точек, точек совпадения отображений и др. Разумеется, это предполагает развитие более общих, чем классические, теорий гомологий и когомологий, теорий, приспособленных для применения в любых возникающих в процессе исследования ситуациях. Указанная причина для развития таких теорий, однако, не единственная и, возможно, даже не главная (хотя так и принято порою считать). Дело в том, что как в самой топологии, так и в некоторых смежных областях (в дифференциальной геометрии, в алгебраической геометрии, в функциональном и комплексном анализе и др.) возникают объекты, в том числе и триангулируемые, задаваемые не с помощью триангуляций (которые обычно бывает трудно указать), а путем их разбиения на отдельные сравнительно простые составные части, т. е. фактически с помощью покрытия (так определяются многообразия, аналитические пространства, алгебраические многообразия и др.). При этом нередко случается, что область коэффициентов для гомологий или когомологий, задаваемая отдельно на каждой из таких частей, не оказывается одинаковой по объекту в целом, что послужило одной из причин развития теорий с непостоянными коэффициентами (не менее важные другие см. в главе 1, п. 6.1 главы 4).

Хорошо известно, что хотя сингулярная теория определена для любых топологических пространств без ограничений, для применений в общих ситуациях она оказывается непригодной.

Так, для связного компакта $S$, гомеоморфного соленоиду (а подобные компакты встречаются в качестве аттракторов в теории динамических систем), поскольку $S$ — объединение континуума своих компонент линейной связности с тривиальными сингулярными гомологиями и когомологиями, нульмерные гомологии и когомологии совпадают соответственно с континуальными прямой суммой и прямым произведением группы коэффициентов (несмотря на связность $S$!), в то время как одномерные равны нулю (несмотря на то, что $S$ допускает нетривиальные отображения на окружность!). Наоборот, в трехмерном евклидовом пространстве существуют компакты с нетривиальными сингулярными группами сколь угодно высоких размерностей (см. [77], [78]), хотя с позиций здравого смысла такие компакты не должны нести на себе циклы размерности $\geqslant 3$. Известны и некоторые другие недостатки сингулярной теории (см. § 1 гл. 3). Все такие «аномалии» свидетельствуют о том, что за определенными границами сингулярная теория, в общем, перестает быть теорией гомологий и когомологий.

К настоящему времени накоплено большое множество разных подходов к конструированию гомологий и когомологий общих пространств. Встречаются и такие, которые приводят к различным результатам (в одинаковых категориях). Казалось бы, поскольку имеется много логически возможных путей для обобщений, это вполне естественно. В особенности это касается теории гомологий — в отличие от когомологий, которые проявляют своего рода «устойчивость» по отношению к многообразию возможных начальных определений (различные определения, как правило, приводят к одной и той же теории), гомологии обычно чувствительно реагируют на логические нюансы в исходных определениях, и может показаться, что едва ли не каждое новое определение приводит к новой теории. Причиной затруднений, наблюдающихся при построении гомологий, принято считать неточность функтора обратного предела, из-за которой гомологии Чеха $\check{H}_n(X)$, например, отличаются от групп $H_n(\check{C}_*)$, где $\check{C}_*$ — обратный предел (при условии, что он существует) цепей нервов покрытий $X$ из некоторой измельчающейся системы. В случае некомпактного $X$, однако, следует учитывать, кроме того, еще и отличие групп $\check{H}_n(X)$, $H_n(\check{C}_*)$ соответственно от $\check{H}_n^c(X)$ и $H_n(\check{C}_*^c)$, где $\check{H}_n^c$ и $\check{C}_*^c$ — прямые пределы групп $\check{H}_n$ и $\check{C}_*$, отвечающих всем компактным подпространствам $C \subset X$ (гомологии Чеха и цепи типа Чеха с компактными носителями). При определении гомологий цепями типа $\check{C}_*$ результат может измениться и при учете естественно возникающей в таких цепных комплексах топологии обратного предела. См. также замечания в § 4 гл. 3 и § 7 гл. 3.

И все же при всем многообразии подходов, отвечающих поставленным целям и различным категориям топологических пространств, бытовавшее по 60-е годы представление, будто за пределами категорий полиэдров существует множество не эквивалентных между собой теорий гомологий и когомологий, ошибочно. Одним из наиболее существенных итогов развития в этой области явилось выделение (при множестве способов описания) фактически одной естественной теории гомологий и одной единой теории когомологий. В случае когомологий это теория пучковых когомологий (в том числе по разным семействам носителей), и ее единственность — одно из следствий применяемого там аппарата теории пучков. В случае гомологий — это теория с компактными (а также замкнутыми локально компактными) носителями, здесь также имеется много аргументов в пользу ее единственности. Именно эти теории встречаются в любых приложениях, и практика — критерий их истинности.

Что касается других теорий, для всех без исключения вариантов их развитие в лучшем случае состоит (обычно этим и завершаясь) в проверке аксиом Стинрода—Эйленберга или их модификаций. Наблюдаемая нередко тенденция на основе даваемых новых определений (изолированно от других) проверять по-существу одни и те же свойства, заключенные в таких аксиомах, мало оправдана — возникающие таким образом теории либо эквивалентны утвердившейся, либо, отличаясь от нее, не имеют перспектив для самостоятельного развития, оказываясь теорией гомологий (или когомологий) фактически только по названию. Необходимо учитывать, кроме того, что заключенные в аксиомах Стинрода—Эйленберга свойства однозначно определяют теорию только в категории конечных полиэдров, а за ее пределами (даже в категориях полиэдров) вместе с гомологиями и когомологиями им могут удовлетворять и совсем случайные функторы, от гомологий и когомологий весьма далекие (см. [112]). Завершать вследствие этого испытание новой теории проверкой обсуждаемых аксиом мало оправдано, с этого скорее нужно начинать, поскольку в аксиомах содержится лишь минимум предъявляемых к теории требований (см. п. 5.3 гл. 3). Без учета этого гомологии (реже — когомологии), изобретаемые в общих категориях топологических пространств, могут оказаться отличающимися от обычных в подкатегориях полиэдров, а это уже противоречит здравому смыслу, поскольку по самому изначальному определению гомологии и когомологии полиэдров — это группы, определяемые формулой границы для симплекса.

Аппарат теории пучков, первоначально возникший как естественный язык для описания когомологий, открыв широкие возможности для применения средств гомологической алгебры, полностью изменил лицо классической теории когомологий и неизмеримо обогатил ее содержание. Фактически возникла новая теория, по отношению к которой прежняя — только одно из конкретных проявлений новой, которая объединила все такие проявления в единую схему, оказавшуюся (в свою очередь!) одним из наиболее типичных примеров еще более общей конструкции из гомологической алгебры — одного из четырех возможных вариантов конструирования производных функторов. С тех пор, однако, как такой взгляд на когомологии окончательно сложился в 50-е годы, с одной стороны, в научной периодике было найдено множество упрощений, прояснились многие казавшиеся на первых порах довольно громоздкими идеи, а с другой — из-за недостаточно широкого освещения всех полезных идей и конструкций в литературе учебного характера некоторые из них стали забываться, а иногда и теряться*). Освещению всех основных идей, изложению упрощенного подхода к построению пучковых когомологий придается в настоящем обзоре первостепенное значение.

Выяснилось в последние десятилетия значение языка теории пучков и для гомологий, причем не только при описании цепей. Что касается цепей, большую роль играет то обстоятельство, что они складываются в вялые пучки. Это позволяет, в частности, выявить дуальность между параллельными основными конструкциями, используемыми при описании гомологий и когомологий, отчетливо согласующуюся со всеми соотношениями двойственности Пуанкаре. И хотя в своем развитии теория гомологий несколько уступает теории когомологий, гомологии прочно вошли в обращение, заняв в многочисленных приложениях соответствующее им место. Обе теории вместе, освещая многие известные ранее конструкции с иных позиций, нередко приводят к результатам и связям, оказывающимся новыми в том числе и в классических категориях полиэдров.

---

*) Об этом свидетельствует, например, недавно появившаяся книга [110], посвященная пучковым когомологиям. Пучки в ней — скорее дань моде, чем естественный необходимый язык теории когомологий. Автор, в частности, «сумел» даже обойтись без основной конструкции пучка как накрывающего пространства, ограничившись удовлетворяющим стандартным формальным требованиям контравариантным функтором на категории открытых подмножеств топологического пространства. Правда, «удалось» это сделать ценой некоторых усилий. В частности, трудоемким оказалось определение когомологий подпространства (приспособленным, к тому же, не для всех подпространств). Когомологии пары и вовсе оказались поняты не до конца (см. п. 9 в гл. II и п. 8 в гл. IV в [110]).

## Глава 1

# КОГОМОЛОГИИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПУЧКЕ

Отражая лишь одну сторону предмета, а именно, возможность оперировать когомологиями с системами коэффициентов весьма общего типа, это название, возможно, не самое удачное. Оно порождало, например, ничем более не подкрепленные попытки определить также и гомологии с коэффициентами в пучках. Полезно представлять, однако, что далеко не менее важна другая сторона — необходимость и естественность языка теории пучков как при описании коцепей, так и для построения, развития и многочисленных применений самой теории когомологий вообще. Этот язык открыл неограниченные возможности для применения в теории когомологий всех средств современной гомологической алгебры. К наиболее принципиальным достижениям, получаемым средствами гомологической алгебры, следует бесспорно отнести интерпретацию когомологий пространства как производных функторов от функтора его нульмерных когомологий (в категории пучков на этом пространстве). Такая интерпретация, однозначно определяя природу когомологий, позволяет, в частности, уверенно отделять от них внешне схожие с когомологиями конструкции, а при конкретных способах описания когомологий — четко очерчивать границы, в пределах которых используемые конструкции все еще приводят к группам когомологий.

## § 1. Пучки и предпучки

**1.1. Предпучок** $A$ на топологическом пространстве $X$ со значениями в категории абелевых групп или модулей — это контравариантный функтор из категории открытых подмножеств $U\subset X$ и их отображений включения в категорию абелевых групп (или модулей). Под гомоморфизмом $A\to B$ предпучков на $X$ понимается обычное преобразование функторов.

Если значения $A(U)$ предпучка $A$ — какого-либо типа функции, то $A$, очевидно, удовлетворяет следующим условиям:

(S1) Если ограничения $\xi\in A(U)$ на некоторые $U_\lambda\subset U$, для которых $U=\bigcup\limits_\lambda U_\lambda$, равны нулю, то и $\xi=0$.

(S2) Если $\xi_\lambda\in A(U_\lambda)$ таковы, что ограничения любой пары $\xi_\lambda$, $\xi_\mu$ на $U_\lambda\cap U_\mu$ совпадают, то на $U=\bigcup\limits_\lambda U_\lambda$ существует такой элемент $\xi\in A(U)$, что его ограничения на все $U_\lambda$ совпадают с $\xi_\lambda$.

Разумеется, в общем случае ни одно из этих условий не выполняется (например, для предпучков, значениями которых являются когомологии $H^n(U)$ или гомологии пар $H_n(X, X\setminus U)$).

Типичные примеры предпучков определяются коцепями любого конкретного типа. Поскольку коцепи — это обычно функции со значениями в группах коэффициентов, определенны хотя и не в точках $x$, но на некоторых расположенных в топс логическом пространстве $X$ объектах (сингулярных симплеı сах, наборах точек, пересечениях элементов покрытий, набора касательных векторов и т. п.), предпучки коцепей (открыты $U \subset X$ сопоставляются функции на объектах, попавших в $U$ всегда удовлетворяют, очевидно, условию (S2). Условие (S1 конечно, в общем случае нарушается, поскольку конкретна коцепь может оказаться отличной от нуля только на «крупных объектах (не содержащихся в элементах $U_\lambda$ достаточно мелкı го покрытия).

**1.2. Пучок** абелевых групп (или модулей) на $X$ — это тı пологическое пространство $\mathscr{A}$ (вообще говоря, нехаусдорфовс вместе с являющейся локальным гомеоморфизмом проекцие $\pi : \mathscr{A} \to X$, слои которой $\mathscr{A}_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in X$, суть абелевы групп (или модули) с непрерывными (в топологии всего $\mathscr{A}$) а. гебраическими операциями. Гомоморфизмом пучков $\mathscr{A} \to$ называется любое (совместимое с проекциями на $X$) непреры ное отображение (автоматически оказывающееся локальны гомеоморфизмом), ограничения которого на слои оказываютı гомоморфизмами $\mathscr{A}_x \to \mathscr{B}_x$.

Непрерывное отображение $s : N \to \mathscr{A}$ произвольного подмн жества $N \subset X$, при котором $s(x) \in \mathscr{A}_x$, называется сечением пу ка $\mathscr{A}$ на $N$. Над любым множеством всегда определено нул вое сечение, образованное нулями слоев $\mathscr{A}_x$. Существованı нетривиальных сечений над достаточно малыми открытым множествами обеспечивается тем, что $\pi$ — локальный гомеомо физм. Группы (или модули) $\mathscr{A}(U)$, состоящие из всех сеч ний $\mathscr{A}$ на $U$, образуют, очевидно, предпучок, удовлетворяющı условиям (S1) и (S2) — предпучок сечений пучка $\mathscr{A}$. Наоб рот, по любому предпучку $A$ нетрудно построить отвечающı ему пучок $\mathscr{A} = r(A)$. Его слоями в точках $x \in X$ являются пр мые пределы $\mathscr{A}_x = \varinjlim_{x \in U} A(U)$, а топология задается всеми мн жествами $U_a$, состоящими из образов $a \in A(U)$ при переходе прямым пределам в тех слоях $\mathscr{A}_x$, для которых $x \in U$. Говоря что пучок $\mathscr{A}$ порожден предпучком $A$. Функтор $r$, относящı предпучку $A$ пучок $\mathscr{A} = r(A)$, иногда называют рефлекторо Как и участвующий в его определении прямой предел, эт функтор точен (оставляет точными короткие точные послед вательности).

Имеется, очевидно, естественное преобразование функтор $r : A(U) \to \mathscr{A}(U)$. Оно тогда и только тогда есть эквивалеı ность функторов, когда предпучок $A$ удовлетворяет услови (S1) и (S2), см. § 1.2 гл. 2 в [107]. Поскольку для предпучк коцепей требование (S1) выполнено не всегда, полезно по нить, что одно условие (S2) обеспечивает эпиморфнос $A(U) \to \mathscr{A}(U)$ для любого паракомпактного $U \subset X$, § 3.9 гл. 2

[107]. Аналогично, в случае паракомпактного $X$ из (S2) вытекает, что всякое сечение $s$, заданное на замкнутом множестве $Y \subset X$ (а если $X$ наследственно паракомпактно, то и на любом $Y$), служит ограничением на $Y$ сечения вида $r(a)$, $a \in A(U)$, $U$ — некоторая окрестность $Y$.

**1.3.** Замечание. Наблюдаемая иногда тенденция (как в [110]) отождествлять пучки с удовлетворяющими условиям (S1) и (S2) предпучками, мало оправдана. При таком подходе, в частности, трудности встают уже при определении факторпучка (заключенные в требованиях (S1) и (S2) свойства утрачиваются: точная последовательность пучков в обычном смысле перестает быть точной при переходе к предпучкам сечений). В случае пучков коцепей теряется естественная ясность любых конструкций, в которых должны учитываться носители коцепей (рассматриваемых как сечения пучков). Лишая возможности рассматривать ограничения пучков на подпространства, это приводит также к ничем не оправданным затруднениям при описании когомологий подмножеств, к искусственным способам определения когомологий пар (использующим, к тому же, ненужные ограничения).

## § 2. Что такое пучковые когомологии?

**2.1. Пучки коцепей.** Пучки $\mathscr{A}^n$, порождаемые предпучками любых конкретных коцепей, посредством кограничного оператора $d$ для этих коцепей объединяются в дифференциальный градуированный пучок $\mathscr{A}^*$, т. е. в последовательность вида $\ldots \to \mathscr{A}^{n-1} \xrightarrow[d]{} \mathscr{A}^n \xrightarrow[d]{} \mathscr{A}^{n+1} \to \ldots$, в которой, разумеется, $d^2 = dd = 0$. При типичных ограничениях на $X$, обычно зависящих от вида используемых коцепей (таким ограничением часто оказывается требование паракомпактности $X$), отображение $r: A^*(X) \to \mathscr{A}^*(X)$ комплекса коцепей в комплекс сечений либо изоморфно, либо индуцирует изоморфизм когомологий. Таким образом, в типичных случаях когомологии $X$ совпадают с когомологиями $H^n(\mathscr{A}^*(X))$ комплекса сечений $\mathscr{A}^*$.

**2.2. Мягкие и вялые пучки.** Свойства составляющих $\mathscr{A}^n$ дифференциального пучка коцепей $\mathscr{A}^*$ определяются следующими простыми наблюдениями. Конкретные коцепи, используемые при определении когомологий, обычно обладают следующим очевидным свойством: любая коцепь, заданная на произвольном подмножестве пространства $X$, продолжается до коцепи $X$. В соответствии с п. 1.2 это означает, что в случае паракомпактного пространства $X$ пучки коцепей удовлетворяют условию: всякое сечение, заданное на замкнутом подмножестве $Y \subset X$, продолжается до сечения на всем $X$. Пучки, обладающие таким свойством, называются мягкими. В случае наследственно паракомпактного $X$ сечения пучков коцепей продолжаются на все пространство и с любых подмножеств. Пучки (на некотором пространстве $X$), обладающие таким свойством для открытых $U\subset X$, называются вялыми.

Таким образом, в типичных случаях возникающие при описании когомологий топологического пространства пучки коцепей оказываются мягкими или вялыми. В соответствии с п. 1.2 на паракомпактном пространстве всякий вялый пучок является мягким. Аналогичным образом, в случае наследственно паракомпактного пространства ограничения вялых пучков на любые подпространства — вялые пучки (следствие 2 в § 3.3 гл. 2 в [107]). Ясно, что вялым является ограничение вялого пучка на любое открытое множество, и ограничение мягкого пучка на любое замкнутое множество — мягкий пучок.

**2.3. Резольвенты.** Поскольку сечения пучков $\mathscr{A}^*$, определяя когомологии пространства $X$, играют роль коцепей, естественно ожидать, что их ограничения на подпространства (по крайней мере на достаточно «хорошие») должны давать когомологии этих подпространств. В соответствии с обсуждавшимися выше свойствами мягких и вялых пучков в случае точки $x\in X$ (считаем, что точки — замкнутые множества) ограничения сечений на $x$ — это просто слои $\mathscr{A}_x^*$ дифференциального пучка $\mathscr{A}^*$. Поскольку когомологии точки тривиальны, это означает точность последовательности пучков

$$0\to\mathscr{G}\to\mathscr{A}^0\to\mathscr{A}^1\to\ldots\to\mathscr{A}^n\to\ldots. \tag{1}$$

Здесь $\mathscr{G}$ пока что — просто ядро $d:\mathscr{A}^0\to\mathscr{A}^1$. В случае когомологий с коэффициентами в $G$ это постоянный пучок $X\times G$ (см. ниже), обозначаемый обычно просто через $G$.

Всякая точная последовательность вида (1) называется резольвентой пучка $\mathscr{G}$.

Точность последовательности $\mathscr{A}^*$ в членах положительной размерности означает, что каждый коцикл локально когомологиче нулю: если $d\xi=0$, $\xi\in A^p(U)$, для определяемого $\xi$ в точке $x\in U$ элемента $a_x^p\in\mathscr{A}_x^p$ имеем $da_x^p=0$, поэтому $a_x^p=da_x^{p-1}$ для некото рого $a_x^{p-1}\in\mathscr{A}_x^{p-1}$, и в достаточно малой окрестности $V\subset U$ этой точки $\xi|_V=d\eta$, где $\eta\in A^{p-1}(V)$ определяет $a_x^{p-1}$

Это условие очень естественно и подтверждает интуитивно по нятное представление о том, что всякий класс когомологий положительной размерности должен занимать в пространств $X$ некоторый «объем» в том смысле, что у каждой точки $x\in$ найдется столь малая окрестность $U_x$, что ограничение $h$ на $U$ равно нулю. Условие эквивалентно требованию точности по следовательности (1). Оно означает, что в каждой точке $x\in$ при $p>0$ имеют место соотношения $\varinjlim\limits_{x\in U} H^p(U)=0$, а посколь $\mathscr{A}_x^*=\varinjlim A^*(U)$ и точный функтор $\varinjlim$ перестановочен с переходо к гомологиям, это означает ацикличность $\mathcal{A}_x^*$ в положительных размерностях, т. е. точность последовательности $\mathcal{A}^*$.

**2.4. Нульмерные когомологии** $H^0(X; G)$ с коэффициентами в $G$ реализованы выше как группы сечений имеющего изоморфные $G$ слои ядра $\mathcal{K}$ гомоморфизма $d: \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1$ и, поскольку каждая точка $x \in X$ служит ретрактом $X$, представляются в виде прямой суммы $H^0(X; G) = G \oplus \Gamma_x'$, где $\Gamma_x'$ — ядро ограничения $H^0(X; G)$ на $x$ (а первое прямое слагаемое — не зависящий от $x$ образ $G = H^0(x; G)$ при ретракции $X \to x$). Элементы $g \in G \subset \subset H^0(X; G)$, рассматриваемые как сечения $\mathcal{K}$, при ограничении на $x \in X$ дают, очевидно, один и тот же элемент $g$ слоев $G$ пучка $\mathcal{K}$, т. е. являются его постоянными сечениями. Но это и означает, что $\mathcal{K} = X \times G$.

Аналогичным образом показывается, что в случае когомологий с коэффициентами в любой локально постоянной системе $\mathcal{G}$ ядром $d: \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1$ оказывается сама $\mathcal{G}$. Поэтому и в более общих ситуациях, когда возникают резольвенты вида (1) (с мягкими или вялыми пучками $\mathcal{A}^p$), пучок $\mathcal{G}$ называется пучком коэффициентов. Приведенная трактовка нульмерных групп хорошо прослеживается и на любой конкретной конструкции когомологий, см. §§2, 3, 4 и 7 гл. 3.

**2.5. Основная идея.** Итак, в естественных ситуациях дифференциальный градуированный пучок $\mathcal{A}^*$, сечениями которого определяются когомологии $X$, представляет собой резольвенту пучка коэффициентов $\mathcal{G}$, состоящую из мягких или вялых пучков. Основополагающий факт есть следующее утверждение: для всех резольвент пучка $\mathcal{G}$, независимо от их природы и способа возникновения, когомологии комплекса сечений $\mathcal{A}^*(X)$ канонически изоморфны между собой, если составляющие резольвенты пучки $\mathcal{A}^p$ являются мягкими или вялыми (более обще — ацикличными, см. ниже). Следствием этого является корректность определения когомологий $H^p(X; \mathcal{G})$ топологического пространства $X$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{G}$ как когомологий $H^p(\mathcal{A}^*(X))$ комплекса сечений на $X$ любой резольвенты $\mathcal{A}^*$ пучка $\mathcal{G}$, состоящей из пучков указанного типа.

Фундаментальному значению такой интерпретации когомологий будет дано во всей статье ниже множество подтверждений. Но уже из сказанного ясно, что она прежде всего однозначно определяет теорию (об этом говорит и простое аксиоматическое описание когомологий как функтора аргумента $\mathcal{G}$, см. п. 3.3 гл. 3 в [69] и ниже п. 4.6). В самом деле, хотя конкретные коцепи (как сингулярные) порой определены для любых топологических пространств без каких-либо ограничений, описываемые ими когомологии употребляются обычно при тех или иных условиях. Во всех без исключения случаях такие условия (обычно описывающие категорию топологических пространств, наиболее естественную для применений данной теории) выявляются при сопоставлении рассматриваемых когомологий с пучковыми. Чтобы сформулировать обсуждаемые условия, нужно ответить на два конкретных вопроса: а) когда возникающие пучки коцепей образуют резольвенту? (локальные условия); б) когда возникающие пучки являются мягкими, вялыми или просто ацикличными? (глобальные условия). Этим определятся границы, в которых данная конкретная теория когомологий совпадает с пучковой. Заметим, что в ряде типичных случаев (например, для коцепей типа Чеха, в теории когомологий Александера—Спаньера, для когомологий де Рема и др.) ответ на а) положителен без каких-либо ограничений. Нередко, однако, это приводит к очень существенным ограничениям (например, в случае сингулярной теории). Условиями, обеспечивающими б), обычно являются некоторые требования паракомпактности. См. также конец п. 4.6 ниже.

В любых примерах «аномалий» в поведении каких-то когомологий такие явления объясняются отклонением этих когомологий от пучковых. Наоборот, при совпадении конкретных когомологий с пучковыми к их поведению не предъявляется никаких претензий. Поэтому по меньшей мере наивными (и заведомо бесперспективными) выглядят предпринимаемые время от времени попытки ввести новые теории, обычно неясно, **для каких** целей предлагаемые, но будто бы существующие наряду с обычными когомологиями — любая такая «новая» теория попросту перестает быть теорией когомологий, поскольку ее нельзя построить, не отказавшись от каких-либо наиболее естественных из обсуждавшихся выше свойств и их следствий (типа аддитивности, жесткости и др.).

**2.6. Некоторые примеры.** Случается, что резольвенты, составленные ацикличными пучками, определяются объектами, внешне далекими от каких-либо коцепей. Подобные ситуации возникают в задачах дифференциального исчисления, в функциональном и комплексном анализе, в алгебраической геометрии (и др. областях). Поскольку определяющие когомологии сечения этих резольвент совпадают, как правило, с самими рассматриваемыми объектами, во всех таких случаях через когомологии проявляется влияние на разрешимость указанных задач, внешне с топологией никак не связанных, топологического устройства объемлющего пространства.

Типичный пример — дифференциальный пучок $\Omega^*$ ростков дифференциальных форм на гладком многообразии с операцией $d$ внешнего дифференцирования, являющийся (в силу известной леммы Пуанкаре) резольвентой постоянного пучка $R$ ($R$ — поле действительных чисел). Эта резольвента $\varphi$-ациклична для любого паракомпактифицирующего семейства носителей $\varphi$ (см. § 3 ниже) и потому определяет когомологии (в том числе с носителями в указанных $\varphi$) многообразия с коэффициентами в $R$ (теорема де Рама). Тем самым вопрос о разрешимости для замкнутой $k$-формы $\omega\in\Omega^k$ (т. е. при $d\omega=0$) уравнения $\omega=d\tilde{\omega}$ зависит только от топологического строения многообразия (или области, в которой определена форма $\omega$). Заметим, что в терминах дифференциальных форм выражаются конкретные тензоры в геометрии, механике, физике, а в терминах операции $d$ — некоторые дифференциальные уравнения.

Аналоги теоремы де Рама имеют место для комплекснозначных дифференциальных форм на комплексном многообразии $X$. Каждая форма $\omega\in\mathscr{E}^r(X)$ степени $r$ полной алгебры $\mathscr{E}^*(X)=\bigoplus_r \mathscr{E}^r(X)$ внешних комплекснозначных дифференциальных форм локально записывается в виде линейных комбинаций форм вида $dz^{i_1}\wedge\ldots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\ldots\wedge d\bar{z}^{j_q}$, $p+q=r$, поэтому $\mathscr{E}^r(X)$ — прямая сумма $\bigoplus_{p+q=r}\mathscr{E}^{p,q}(X)$ дифференциальных форм бистепени $(p, q)$, и внешняя производная $d:\mathscr{E}^r(X)\to\mathscr{E}^{r+1}(X)$ в однородных членах представляется как прямая сумма $d=\partial\oplus\bar{\partial}$ дифференцирований $\partial:\mathscr{E}^{p,q}(X)\to\mathscr{E}^{p+1,q}(X)$, $\bar{\partial}:\mathscr{E}^{p,q}(X)\to\mathscr{E}^{p,q+1}(X)$. При фиксированном $p\geqslant 0$ (на $n$-мерном комплексном многообразии $X$) возникает дифференциальный пучок $0\to\Omega^p\to\mathscr{E}^{p,0}\to\mathscr{E}^{p,1}\to\ldots\ldots\to\mathscr{E}^{p,n}\to 0$, где $\Omega^p$ — пучок голоморфных форм типа $(p, 0)$ называемых голоморфными формами степени $p$), причем $\mathscr{E}^{p,q}(X)$ — сечения пучков $\mathscr{E}^{p,q}$. В силу доказанного Гротендиком для $\bar{\partial}$ аналога леммы Пуанкаре дифференциальный пучок $\mathscr{E}^{p,*}$ — резольвента (Дольбо — Гротендика) пучка $\Omega^p$, а поскольку она (как и в теореме де Рама) состоит из тонких пучков, то для любого паракомпактифицирующего семейства $\varphi$ носителей $H^q(\Gamma_\varphi(\mathscr{E}^{p,*}))$*) — это когомологии $X$ с коэффициентами в пучке $\Omega^p$ и с носителями в $\varphi$ (теорема Дольбо [147]).

Имеются аналоги теорем де Рама и Дольбо для дифференциальных форм со значениями в векторных расслоениях и, соответственно, в голоморфных векторых расслоениях над многообразиями. Резольвенты типа Дольбо—Гротендика для пучков $\Omega^p$ строятся и в случае форм бистепени $(p, q)$, в разложениях которых в качестве коэффициентов могут фигурировать аналитические функции на $R^{2n}(=C^n)$, распределения в смысле Шварца [109], а также гиперфункции в смысле Сато (см. [139]). Последнее лежит в основе доказательства теоремы Сато, дающей одну из основных интерпретаций гиперфункций: для открытого множества $U\subset R^n\subset C^n$ когомологии $H^p_U(C^n;\mathcal{O})$ (с расположенными в $U$ носителями и с коэффициентами в пучке $\mathcal{O}$ ростков голоморфных функций на $C^n$) равны нулю при $p\neq n$, а предпучок $U\to H^n_U(C^n;\mathcal{O})$ совпадает с (вялым) пучком гиперфункций на $R^n$ (см. [139]).

---

*) $\Gamma_\varphi(\mathscr{A})$ — сечения пучка $\mathscr{A}$ с носителями в $\varphi$.

**2.7. Некоторые свойства когомологий,** непосредственно вытекающие из определения. Очевидно свойство П-аддитивности пучковых когомологий: $H^n(X; \mathcal{G})$ суть прямые произведения $H^n(X_\lambda; \mathcal{G}_\lambda)$, если $X = \bigcup_\lambda X_\lambda$, где $X_\lambda$ — попарно не пересекающиеся открыто-замкнутые подпространства $X$, а $\mathcal{G}_\lambda$ — ограничения $\mathcal{G}$ на $X_\lambda$. Аналогично свойство $\Sigma$-аддитивности когомологий $H_c^p(X; \mathcal{G})$ с компактными носителями: в указанной ситуации $H_c^p(X; \mathcal{G})$ — прямые суммы $H_c^p(X_\lambda; \mathcal{G}_\lambda)$. Несмотря на всю их очевидность, эти свойства играют очень важную роль в вопросах аксиоматики (см. п. 5.3 гл. 3).

Возможность продолжать сечения с замкнутых подмножеств $Y$ паракомпактного пространства $X$ на некоторые их окрестности, а в случае наследственно паракомпактного $X$ — и с любых подмножеств $Y \subset X$, позволяет (в силу ацикличности ограничений на такие $Y$ вялых или мягких пучков, см. п. 2.2) получать когомологии $Y$ исходя из ограничений на $Y$ сечений $\mathcal{A}^*$, а когомологии пар $(X, Y)$ — исходя из ядра ограничения $\mathcal{A}^*(X)$ на $Y$, интерпретируя их как когомологии $X$, определяемые всеми коцепями, носители которых не задевают $Y$ (т. е. лежат в $X \setminus Y$). Для указанных $Y$, кроме того, $H^p(Y; \mathcal{G}) = \varinjlim H^p(U; \mathcal{G})$, где $U$ — всевозможные окрестности $Y$ в $X$ (свойство жесткости когомологий). См. также § 5.

## § 3. Когомологии как производные функторы. Гомоморфизм сравнения. Носители

**3.1. Производные функторы.** Для когомологий с постоянными или локально постоянными коэффициентами наличие указанных в § 2 резольвент — следствие описания когомологий с помощью каких-то конкретных коцепей. Наличие подобных резольвент для произвольного пучка $\mathcal{G}$ — это уже факт, устанавливаемый в теории пучков, прежде всего — в категории пучков абелевых групп (или модулей). В этой категории (на произвольном топологическом пространстве) достаточно инъективных объектов: каждый пучок $\mathcal{G}$ может быть вложен в инъективный $\mathcal{I}$ (см. [87], [107], [108]). Полагая $\mathcal{I}^0 = \mathcal{I}$, беря в качестве $\mathcal{I}^1$ инъективный пучок, содержащий факторпучок $\mathcal{I}^0/\mathcal{G}$ и очевидным образом продолжая этот процесс, получим инъективную резольвенту $\mathcal{I}^*$ пучка $\mathcal{G}$. Поскольку инъективные пучки всегда вялые (§ 5 гл. 2 в [87] или § 7.1 гл. 2 в [107]), сечения $\mathcal{I}^*$ определяют когомологии $H^n(X; \mathcal{G})$. В этом и состоит интерпретация когомологий как производных функторов функтора нульмерных когомологий.

Вспомним, что некоторый ковариантный функтор $F$ называется точным слева, если для любой короткой точной последовательности объектов базовой категории $0 \to \mathcal{G}' \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}'' \to 0$

точна последовательность $0 \to F(\mathcal{G}') \to F(\mathcal{G}) \to F(\mathcal{G}'')$. Функтор $F$ называется аддитивным, если разности любых морфизмов $f, g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ он сопоставляет разность $f_* - g_* = (f-g)_*$ соответствующих гомоморфизмов $f_* = F(f)$, $g_* = F(g)$. Для такого $F$ (при условии, что в базовой категории имеется достаточный запас инъективных объектов) определены правые производные функторы $F^n : F^n(\mathcal{G}) = H^n(F(\mathcal{J}^*))$, где $\mathcal{J}^*$ — произвольная инъективная резольвента объекта $\mathcal{G}$.

В нашем случае $F$ — это функтор сечений, обозначаемый обычно как $\Gamma : \Gamma(\mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$ — группа (или модуль) сечений пучка $\mathcal{G}$ на $X$. Точность слева и аддитивность $\Gamma$ очевидны. В соответствии с § 2 $\Gamma(\mathcal{G}) = H^0(X; \mathcal{G})$. Таким образом, в категории пучков на $X$ когомологии $H^n(X; \mathcal{G})$ — это правые производные функторы точного слева ковариантного аддитивного функтора сечений $\Gamma$ — функтора нульмерных когомологий. Когомологии с коэффициентами в пучках являют собой один из наиболее типичных примеров производных функторов, все основные идеи теории производных функторов прослеживаются на них наиболее полно, просто и четко.

**3.2. Гомоморфизм сравнения.** Если $\mathcal{L}^*$ — произвольная резольвента объекта $\mathcal{B}$, то всякий морфизм $\mathcal{B} \to \mathcal{G}$, как известно, продолжается до морфизма резольвент $\mathcal{L}^* \to \mathcal{J}^*$, определяемого с точностью до гомотопии (морфизмы $f, g : \mathcal{L}^* \to \mathcal{J}^*$ называются гомотопными, если $f - g = Dd + dD$, где $D : \mathcal{L}^n \to \mathcal{J}^{n-1}$ — некоторые морфизмы, определенные для всех $n > 0$; они называются гомотопией между $f$ и $g$). При $\mathcal{B} = \mathcal{G}$, в частности, всегда имеется естественное преобразование $\gamma : H^n(F(\mathcal{L}^*)) \to F^n(\mathcal{G})$, называемое гомоморфизмом сравнения (с производными функторами на объекте $\mathcal{G}$ сравниваются когомологии, определяемые случайной резольвентой $\mathcal{L}^*$ объекта $\mathcal{G}$; в случае, когда $\mathcal{L}^*$ также состоит из инъективных объектов, $\gamma$ — естественный изоморфизм). Этот гомоморфизм возникает и в ряде других типичных ситуаций (см. ниже).

В частности, для любой резольвенты $\mathcal{L}^*$ пучка $\mathcal{G}$ определен естественный гомоморфизм сравнения $\gamma : H^n(\Gamma(\mathcal{L}^*)) \to H^n(X; \mathcal{G})$.

**3.3. Когомологии с носителями.** Под носителем коцепи $\xi$ понимается множество $|\xi| \subset X$, замкнутое по самому определению и такое, что дополнение к нему состоит из всех точек $x \in X$, обладающих свойством: ограничения $\xi$ на достаточно малые окрестности $x$ равны нулю. В случае, когда коцепь представлена как сечение пучка $\mathcal{A}$, $|\xi|$ есть множество всех тех $x \in X$, в которых это сечение отлично от нуля — носитель сечения. Поскольку проекция $\pi : \mathcal{A} \to X$ — локальный гомеоморфизм, а все нули в $\mathcal{A}$ образуют сечение на $X$, если сечение $\xi$ обращается в нуль в некоторой точке, то оно равно нулю и в некоторой окрестности этой точки.

Имеется множество естественных ситуаций, когда наряду с обычными приходится рассматривать когомологии с какими-то специальными носителями. Так, несмотря на то, что они сводятся к обычным при переходе к одноточечным компактификациям, в категории локально компактных пространств и их собственных отображений самостоятельное значение имеют когомологии с компактными носителями. Как отмечалось в п. 2.7, в подходящих случаях когомологии пары $(X, Y)$ совпадают с когомологиями $X$ с носителями, расположенными в $X\setminus Y$.

Под семейством носителей $\varphi$ в пространстве $X$ понимается любая система замкнутых множеств, удовлетворяющая условиям: а) если $F_1, F_2 \in \varphi$, то $F_1 \cup F_2 \in \varphi$; б) $F' \in \varphi$, если $F' \subset F$ и $F \in \varphi$. Семейство носителей называется паракомпактифицирующим, если все $F \in \varphi$ паракомпактны и для любого $F \in \varphi$ найдется такое $F' \in \varphi$, что $F \subset \operatorname{Int} F'$. Примерами паракомпактифицирующих семейств служат семейство компактных подпространств локально компактного пространства, семейство замкнутых подмножеств, содержащихся в $X\setminus Y$, в случае замкнутого подмножества $Y$ паракомпактного пространства $X$.

Так же, как обычные, определяются когомологии $H^n_\varphi(X; \mathscr{G})$ пространства $X$ с носителями в семействе $\varphi$ (и с коэффициентами в пучке $\mathscr{G}$). При этом фактически используется подфунктор $\Gamma_\varphi$ функтора $\Gamma(\mathscr{G})$ аргумента $\mathscr{G}$, состоящий из всех сечений пучков $\mathscr{G}$ с носителями в $\varphi$, который, как и $\Gamma$, точен слева и аддитивен. Поэтому, как и $H^n(X; \mathscr{G})$, когомологии $H^n_\varphi(X; \mathscr{G})$ совпадают в категории пучков на $X$ с правыми производными функтора $\Gamma_\varphi$. Так же, как выше, $\Gamma_\varphi(\mathscr{G}) = H^0_\varphi(X; \mathscr{G})$ и определен гомоморфизм сравнения $\gamma: H^n(\Gamma_\varphi(\mathscr{L}^*)) \to H^n_\varphi(X; \mathscr{G})$.

## § 4. Другие типичные способы сравнения

**4.1. Итерированный связывающий гомоморфизм.** Пусть $\mathscr{Z}^k$ — ядро морфизма $d: \mathscr{L}^k \to \mathscr{L}^{k+1}$ в резольвенте $\mathscr{L}^*$ некоторого объекта $\mathscr{G}$. Короткие точные последовательности $0 \to \mathscr{Z}^k \to \mathscr{L}^k \to \mathscr{Z}^{k+1} \to 0$ определяют связывающие гомоморфизмы $\delta: F^{n-k-1}(\mathscr{Z}^{k+1}) \to F^{n-k}(\mathscr{Z}^k)$ производных функторов, композиция которых вместе с аналогичным гомоморфизмом $H^n(F(\mathscr{L}^*)) \to F^1(\mathscr{Z}^{n-1})$, отвечающим случаю $k = n-1$, определяет итерированный связывающий гомоморфизм $\Delta: H^n(F(\mathscr{L}^*)) \to F^n(\mathscr{G})$ (учитываем, что $\mathscr{Z}^0 = \mathscr{G}$). Пользуясь схемой рассуждений, аналогичной конструкции из § 7 гл. 5 в [92] (приспособленной там для иного варианта производных функторов), индукцией по $n$ можно установить, что гомоморфизм сравнения $\gamma$ совпадает с $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \Delta$ (некоторыми авторами эти гомоморфизмы ошибочно отождествляются, см., например, § 4.7 гл. 2 в [107], § 4 гл. 2 в [87]).

**4.2. Ацикличные объекты (пучки).** Пучки коцепей, возникающие в практике, инъективными не бывают. В связи с этим естественно знать, какие же резольвенты можно использовать для определения когомолгии, аналогично — для вычисления производных функторов.

По отношению к функтору $F$ объект $\mathscr{L}$ называется $F$-ацикличным, если $F^n(\mathscr{L})=0$ при $n>0$. Аналогично, пучок $\mathscr{L}$ называется ацикличным, если $H^n(X;\mathscr{L})=0$ для всех $n>0$, и, соответственно, φ-ацикличным, если обращаются в нуль $H_\gamma^n(X;\mathscr{G})$. Примерами φ-ацикличных пучков (для любых семейств φ) служат все вялые пучки (§ 3.1 гл. 2 в [107]). Несложно устанавливается и ацикличность мягких пучков на паракомпактном хаусдорфовом пространстве (§ 3.5 гл. 2 в [107]).

Роль ацикличных объектов вскрывает конструкция предыдущего пункта: для любой резольвенты $\mathscr{L}^*$, состоящей из $F$-ацикличных объектов $\mathscr{L}^p$, все $\delta$, а потому и их композиция $\Delta$, являются, очевидно, изоморфизмами. Следовательно (поскольку $\gamma$ для них — изоморфизм), любые такие резольвенты объекта $\mathscr{G}$ определяют $F^n(\mathscr{G})$. В этом точный смысл основного утверждения, сформулированного в п. 2.5 (для $F=\Gamma$ или $\Gamma_\varphi$). Из конструкции $\Delta=\pm\gamma$ видно, что требование $F$-ацикличности далеко не случайно (оно необходимо, например, для того, чтобы были изоморфизмами составляющие $\Delta$ связывающие гомоморфизмы $\delta$).

**4.3. Каноническая резольвента Годемана.** Особое место в теории пучковых когомологий занимает каноническая резольвента Годемана. В некоторых ситуациях она практически незаменима (см., например, § 5).

Для произвольного пучка $\mathscr{G}$ пусть $\mathscr{C}^0(\mathscr{G})$ — пучок ростков произвольных (включая любые разрывные) сечений пучка $\mathscr{G}$, $\mathscr{C}^1(\mathscr{G})$ — пучок $\mathscr{C}^0(\mathscr{C}^0(\mathscr{G})/\mathscr{G})$ и т. д. Возникает вялая резольвента $\mathscr{C}^*(\mathscr{G})$, оказывающаяся вместе с комплексами $\Gamma_\varphi(\mathscr{C}^*(\mathscr{G}))$ (для любых семейств φ) точным функтором аргумента $\mathscr{G}$. Это дает возможность почти автоматически получать все обычные свойства когомологий (функтриальность по $\mathscr{G}$, различные спектральные последовательности и т. п.). В частности, любой короткой точной последовательности пучков коэффициентов $0\to\mathscr{G}'\to\mathscr{G}\to\mathscr{G}''\to 0$ отвечает, очевидно, точная последовательность когомологий

$$\ldots\to H^n_\varphi(X;\mathscr{G}')\to H^n_\varphi(X;\mathscr{G})\to H^n_\varphi(X;\mathscr{G}'')\to H^{n+1}_\varphi(X;\mathscr{G}')\to\ldots \quad (2)$$

(φ — любое семейство носителей). Благодаря своим качествам резольвента может быть легко использована для независимого описания основ теории пучковых когомологий (см. [107]).

**4.4. Двойные комплексы.** Пользуясь функториальными свойствами резольвенты Годемана, для любого градуированного дифференциального пучка $\mathscr{L}^*$ определяем биградуированный дифференциальный пучок $\mathscr{C}^*(\mathscr{L}^*)=\{\mathscr{C}^p(\mathscr{L}^q)\}$ с полным дифференциалом $d=d'+(-1)^p d''$ (при этом $d^2=0$), где $d'$ и $d''$ — гомоморфизмы, индуцированные соответственно дифференциалом в $\mathscr{C}^*$ и оператором кограницы в $\mathscr{L}^*$. С помощью простого диаграммного поиска (типа рассуждений в лемме В. 32 и теореме В. 32 в [139], например) легко убедиться, что в случае, когда $\mathscr{L}^*$ — резольвента $\mathscr{G}$, вложение $\mathscr{C}^*(\mathscr{G})$ в $\mathscr{C}^*(\mathscr{L}^0) \subset \subset \mathscr{C}^*(\mathscr{L}^*)$ позволяет отождествить $H_\varphi^*(X; \mathscr{G})$ с когомологиями двойного комплекса $\Gamma_\varphi(\mathscr{C}^*(\mathscr{L}^*))$, рассматриваемого в полной градуировке ($n$-мерные коцепи суть $\bigoplus_{p+q=n} \Gamma_\varphi(\mathscr{C}^p(\mathscr{L}^q))$). Поскольку определяющее $\gamma$ отображение $\mathscr{L}^* \to \mathscr{J}^*$ продолжается до отображения биградуированных дифференциальных пучков $\mathscr{C}^*(\mathscr{L}^*) \to \to \mathscr{C}^*(\mathscr{J}^*)$, тождественного на дифференциальном градуированном пучке $\mathscr{C}^*(\mathscr{G})$, возникающее при вложении $\mathscr{L}^*$ в $\mathscr{C}^0(\mathscr{L}^*) \subset \mathscr{C}^*(\mathscr{L}^*)$ отображение $H^n(\Gamma_\varphi(\mathscr{L}^*))$ (также являющееся изоморфизмом для ацикличных $\mathscr{L}^q$) совпадает с гомоморфизмом сравнения $\gamma$.

Аналогичные выводы можно сделать, оперируя с инъективным биградуированным пучком $\mathscr{J}^*(\mathscr{L}^*)$ (который, однако, строится сложнее, чем $\mathscr{C}^*(\mathscr{L}^*)$). Биградуированные дифференциальные пучки типа $\mathscr{C}^*(\mathscr{L}^*)$ или $\mathscr{J}^*(\mathscr{L}^*)$ и отвечающие им двойные комплексы сечений служат источником для всех типичных спектральных последовательностей, возникающих в теории гомологий и когомологий топологических пространств (см. § 6 гл. 3 в [69]; см. также ниже конец гл. 2 и § 5 гл. 4).

**4.5. Определяющие свойства гомоморфизма $\gamma$.** Гомоморфизм сравнения может возникать и во многих других конкретных ситуациях (например, в спектральных последовательностях), причем установить его тождество с первоначально определенным не всегда просто. Поэтому представляет интерес его аксиоматическое описание. Приведем его в терминах абстрактных производных функторов $F^n$.

Заметим, что преобразование $\gamma$ тождественно в размерности 0: Если морфизм $f: \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ продолжается до морфизма резольвент $\tilde{f}$. $\mathscr{L}^* \to \mathscr{M}^*$, то $\gamma \tilde{f}_* = f_* \gamma$. Наконец, если короткая точная последовательность объектов дополняется до короткой точной последовательности резольвент, остающейся точной и после применения функтора $F$, то $\gamma\tilde{\delta} = \delta\gamma$ ($\tilde{\delta}$ — связывающий гомоморфизм для когомологий комплексов, полученных применением функтора $F$ к резольвентам). Оказывается, существует только одно преобразование $\gamma$: $H^n(F(\mathscr{L}^*)) \to F^n(\mathscr{G})$ с такими свойствами, см. п. 3.2 гл. 3 в [69] (здесь $\mathscr{L}^*$ — резольвента объекта $\mathscr{G}$).

**4.6. Сравнение с когомологическими функторами.** Сравнивать с производными функторами $F^n(\mathscr{G})$ можно не только когомологии, определяемые различными резольвентами, но и любые функторы когомологического типа. Пусть $\{\Phi^n\}$, $n \geqslant 0$ — любая связанная последовательность когомологических функторов (это означает, что как и для $F^n$, всякой короткой точной последовательности аргументов $0 \to \mathcal{G}' \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}'' \to 0$ отвечает точная последовательность

$$\ldots \to \Phi^n(\mathcal{G}') \to \Phi^n(\mathcal{G}) \to \Phi^n(\mathcal{G}'') \xrightarrow[\delta_\Phi]{} \Phi^{n+1}(\mathcal{G}') \to \ldots,$$

а для отображения $f$ указанной короткой точной последовательности в любую другую — отображение отвечающих им последовательностей когомологических функторов с тождеством $f_*^\Phi \delta_\Phi = \delta_\Phi f_*^\Phi$). В предположении, что $\Phi^0 = F$, имеется единственное естественное преобразование $\mu : F^n(\mathcal{G}) \to \Phi^n(\mathcal{G})$ (свойство универсальности производных функторов $F^n$), тождественное в размерности 0 и такое, что для всякого морфизма $f : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ имеет место $f_*^\Phi \mu = \mu f_*$, а для всякой короткой точной последовательности аргументов $\delta_\Phi \mu = \mu \delta$. Преобразование $\mu$ тогда и только тогда изоморфизм, когда при $n > 0$ все $\Phi^n$ обращаются в нуль на инъективных объектах (следовательно, и на любых $F$-ацикличных). Это — аксиоматическая характеристика производных функторов (в частности, пучковых когомологий, см., например, § 4.8 гл. 2 в [107] и п. 3.3 гл. 3 в [69]).

Таким образом (ср. с п. 2.5 выше), пучковые когомологии отличаются еще и тем примечательным свойством, что допускают (посредством $\mu$) сравнить с ними любую другую (достаточно «приличную») теорию когомологий. Именно это позволяет получить наиболее простое доказательство (при естественных ограничениях) совпадения с $H_\varphi^*(X; \mathcal{G})$ когомологий Чеха (см. гл. 4 в [69]).

## § 5. Когомологии подпространств и пар. Свойства жесткости и вырезания

**5.1. Подпространства.** Как отмечалось выше в п. 2.7, при некоторых типичных условиях ограничения $\mathcal{A}|_Y$ ацикличных пучков $\mathcal{A}$ (в частности, членов $\mathcal{A}^q$ ацикличных резольвент $\mathcal{A}^*$) на подпространства $Y \subset X$ ацикличны. Так будет для вялых $\mathcal{A}$ и открытых $Y$, для мягких $\mathcal{A}$ и замкнутых $Y$, когда $X$ паракомпактно, для вялых $\mathcal{A}$ и любых $Y$, когда $X$ наследственно паракомпактно (в частности, метризуемо), для мягких $\mathcal{A}$ и локально замкнутых (в частности, для открытых) $Y$, когда $X$ наследственно паракомпактно (см. п. 2.2 выше и § 3.4 гл. 2 в [107]). Ясно, что для таких $\mathcal{A}^*$ и $Y$ когомологии $Y$ с коэффициентами в $\mathcal{G}|_Y$, обозначаемые обычно просто через $H^*(Y; \mathcal{G})$, получаются исходя из резольвент $\mathcal{A}^*|_Y$ пучков $\mathcal{G}|_Y$. Более того, ограничения сечений $\mathcal{A}^*(X)$ на $Y$ определяют естественные гомоморфизмы $H^n(X; \mathcal{G}) \to H^n(Y; \mathcal{G})$. В случае когомологий $H^n_\varphi(X; \mathcal{G})$ с носителями в семействе $\varphi$ их естественно сравнивать с $H^n_{\varphi \cap Y}(Y; \mathcal{G})$, где $\varphi \cap Y$ — пересечение семейства $\varphi$ с $Y$ (состоящее из всех $F \cap Y$, $F \in \varphi$). Аналогичные заключения справедливы в случае, когда $(\varphi\cap Y)$-ациклично ограничение на $Y$ некоторой $\varphi$-ацикличной резольвенты $\mathscr{A}^*$ пучка $\mathscr{G}$ на $X$. Для вялых $\mathscr{A}^*$ это так в каждом из следующих случаев (см. § 10 гл. 2 в [87]): а) для открытых $Y$ и любых $\varphi$; б) для паракомпактифицирующих семейств $\varphi$, если каждое $F\cap Y$, $F\in\varphi$, имеет в $X$ фундаментальную систему паракомпактных окрестностей; в) для любых $\varphi$, если $X$ наследственно паракомпактно (так как пучки $\mathscr{A}^*|_Y$ вялые); г) для паракомпактифицирующих $\varphi$, если $Y$ замкнуто в $X$; д) для семейства всех замкнутых подмножеств в $X$, если $Y$ — компактное подпространство произвольного хаусдорфова пространства $X$.

В общем случае ограничение ацикличного пучка $\mathscr{A}$ на подпространство может не быть ацикличным. Например, постоянный пучок $G$ ацикличен на всяком пространстве $X$, имеющем тривиальные когомологии (с коэффициентами в $G$), но в $X$ могут содержаться подпространства с нетривиальными в положительных размерностях когомологиями. Однако индуцированные вложением $i: Y\subset X$ гомоморфизмы ограничения $i^*$: $: H^n_\varphi(X;\mathscr{G})\to H^n_{\varphi\cap Y}(Y;\mathscr{G})$ могут быть определены с помощью любой $\varphi$-ацикличной резольвенты $\mathscr{A}^*$ пучка $\mathscr{G}$ на $X$. В самом деле, гомоморфизмы сравнения $\gamma$ для $\mathscr{A}^*$ и $\mathscr{A}^*|_Y$ (выраженные, например, через итерированный связывающий гомоморфизм $\Delta$) совместимы с ограничением пучков и их сечений на $Y$. Поэтому $i^*$ определяется как композиция отображения когомологий, индуцированного ограничением на $Y$ сечений $\mathscr{A}^*$ с носителями в $\varphi$, и отвечающего $\mathscr{A}^*|_Y$ гомоморфизма сравнения $\gamma$ на $Y$. Независимость $i^*$ от выбора $\mathscr{A}^*$ вытекает, например, из рассмотрения гомоморфизмов $\mathscr{A}^*$ в любые инъективные резольвенты $\mathscr{J}^*$ для $\mathscr{G}$, для которых проверка независимости (от выбора $\mathscr{J}^*$) не составляет труда.

С иных позиций гомоморфизм $i^*$ описывается в § 10 гл. 2 в [87].

Ниже (п. 5.3) будет использована еще одна конструкция гомоморфизма ограничения $i^*$, целиком зависящая от особых качеств канонической резольвенты Годемана. Пусть $\tilde{\mathscr{F}}$ временно означает ограничение пучка $\mathscr{F}$ на $Y$. Поскольку любое сечение пучка $\mathscr{C}(\tilde{\mathscr{G}})=\mathscr{C}^0(\tilde{\mathscr{G}})$ распространяется до сечения $\mathscr{C}^0(\mathscr{G})$ (при этом легко добиться, чтобы носителем распространенного сечения было замыкание носителя исходного), возникает эпиморфизм пучков $\widetilde{\mathscr{C}^0(\mathscr{G})}\xrightarrow[\rho]{}\mathscr{C}^0(\tilde{\mathscr{G}})$, обеспечивающий наличие эпиморфизма $\Gamma_\varphi(\mathscr{C}^0(\mathscr{G}))\to\Gamma_{\varphi\cap Y}(\mathscr{C}^0(\tilde{\mathscr{G}}))$. Возникает эпиморфизм пучков $\widetilde{\mathscr{Z}^1(\mathscr{G})}=$ $=(\mathscr{C}^0(\mathscr{G})/\mathscr{G})|_Y=\widetilde{\mathscr{C}^0(\mathscr{G})}/\tilde{\mathscr{G}}\xrightarrow[\rho']{}\mathscr{C}^0(\tilde{\mathscr{G}})/\tilde{\mathscr{G}}=\mathscr{Z}^1(\tilde{\mathscr{G}})$. Повторив аргументы, получим эпиморфизмы $\widetilde{\mathscr{C}^1(\mathscr{G})}=\widetilde{\mathscr{C}^0(\mathscr{Z}^1(\mathscr{G}))}\xrightarrow[\rho]{}\mathscr{C}^0(\widetilde{\mathscr{Z}^1(\mathscr{G})})\to$

$\to \mathscr{C}^0(\mathscr{Z}^1(\tilde{\mathscr{G}})) = \mathscr{C}^1(\tilde{\mathscr{G}})$. Отображение $\rho$, как отмечено выше, обеспечивает эпиморфизм $\Gamma_\varphi(\mathscr{C}^1(\mathscr{G})) = \Gamma_\varphi(\mathscr{C}^0(\widetilde{\mathscr{Z}^1}(\mathscr{G}))) \to \Gamma_{\varphi\cap Y}(\mathscr{C}^0(\widetilde{\mathscr{Z}^1(\mathscr{G})}))$ и вместе со вторым отображением (индуцированным $\rho'$) — эпиморфизм $\Gamma_\varphi(\mathscr{C}^1(\mathscr{G})) \to \Gamma_{\varphi\cap Y}(\mathscr{C}^1(\tilde{\mathscr{G}}))$. Имеем снова эпиморфизм $\widetilde{\mathscr{Z}^2}(\mathscr{G}) \to \mathscr{Z}^2(\tilde{\mathscr{G}})$. Продолжение рассуждений показывает наличие эпиморфизма дифференциальных пучков $\widetilde{\mathscr{C}^*(\mathscr{G})} \xrightarrow[\alpha]{} \mathscr{C}^*(\tilde{\mathscr{G}})$, обеспечивающего эпиморфизмы $\Gamma_\varphi(\alpha)$: $\Gamma_\varphi(\mathscr{C}^*(\mathscr{G})) \to \Gamma_{\varphi\cap Y}(\mathscr{C}^*(\tilde{\mathscr{G}}))$ для любых $Y \subset X$ и произвольных семейств носителей $\Phi$, которые и индуцируют $i^*$ (поскольку композиция $\alpha$ с сохраняющим когомологии $Y$ отображением $\mathscr{C}^*(\tilde{\mathscr{G}})$ в любую инъективную резольвенту $\tilde{\mathscr{G}}$ определяет для резольвенты $\widetilde{\mathscr{C}^*(\mathscr{G})}$ гомоморфизм сравнения $\gamma$, а его композиция с гомоморфизмом ограничения на $Y$ для $\mathscr{C}^*(\mathscr{G})$ как раз и есть $i^*$).

**5.2. Жесткость.** Если сверх того, что $(\varphi\cap Y)$-ациклично ограничение на $Y$ некоторой $\varphi$-ацикличной резольвенты $\mathscr{A}^*$ пучка $\mathscr{G}$ на $X$, всякое сечение $\mathscr{A}^*|_Y$ на $Y$ с носителем в $\varphi\cap Y$ продолжается до сечения на некоторой окрестности $N \supset Y$ (с носителем в $\varphi\cap N$), то, как легко заметить, $H^n_{\varphi\cap Y}(Y;\mathscr{G}) = \varinjlim_N H^n_{\varphi\cap N}(N;\mathscr{G})$ — свойство $\varphi$-жесткости когомологий. Так будет во всех случаях ацикличности или $(\varphi\cap Y)$-ацикличности ограничения $\mathscr{A}^*$ на $Y$, перечисленных в предыд. п., кроме случая в), который вписывается в общее правило при дополнительном требовании паракомпактифицируемости $\varphi$ (§ 10 гл. 2 в [87]). Без этого условия соотношение нарушается: в случае, когда $\varphi$ и $Y$ — одна точка $y \in X$, для всех ее окрестностей $H^n_{\varphi\cap N}(N;\mathscr{G}) = H^n(X, X\setminus y;\mathscr{G})$ (см. след. п.) — локальные группы когомологий, которые, ясно, могут быть отличны от нуля, в то время как $H^n_\varphi(y;\mathscr{G}) = 0$ при $n > 0$ как когомологии точки.

**5.3. Пары.** Наличие эпиморфизмов $\Gamma_\varphi(\alpha)$ позволяет определить когомологии пары $H_\varphi^n(X, Y;\mathscr{G})$ (относительные когомологии $X \bmod Y$) как когомологии ядра $\Gamma_\varphi(\alpha)$. Для любого $Y \subset X$ и любого семейства носителей $\varphi$ возникает точная последовательность когомологий пары

$$\ldots \to H_\varphi(X, Y;\mathscr{G}) \to H^n_\varphi(X;\mathscr{G}) \xrightarrow[i^*]{} H^n_{\varphi\cap Y}(Y;\mathscr{G}) \to H^{n+1}_\varphi(X, Y;\mathscr{G}) \to \ldots \quad (3)$$

Фактически полностью эта конструкция приведена в § 4.9 гл. 2 в [107] (в общем случае автор не заметил, однако, наличие эпиморфизма $\Gamma_\varphi(\alpha)$, поэтому точная последовательность (3) определена в [107] только для замкнутых $Y$). В полном виде последовательность (3) приведена в § 12 гл. 2 в [87] (хотя вывод несколько отличен от нашего). Лишь для частных случаев когда $Y$ — открытое или замкнутое подмножество локально компактного пространства $X$, когомологии пар определены в [110] (определение для открытых $Y$ дается отдельно, а возникающие когомологии называются почему-то локальными).

В размерности нуль точная последовательность (3) дает тождество $H^0_\varphi(X, Y; \mathcal{G}) = \Gamma_{\varphi|(X\setminus Y)}(\mathcal{G}) = H^0_{\varphi|(X\setminus Y)}(X; \mathcal{G})$, где $\varphi|(X\setminus Y)$ — ограничение семейства $\varphi$ на $X\setminus Y$ (составленное всеми $F \in \varphi$, $F \subset X\setminus Y$). Естественно ожидать, что и при $n > 0$ относительные когомологии должны совпадать с производными $H^n_{\varphi|(X\setminus Y)}(X; \mathcal{G})$ функтора $\Gamma_{\varphi|(X\setminus Y)}(\mathcal{G})$. Однако так будет не всегда. Для этого необходимо, чтобы включение $\Gamma_{\varphi|(X\setminus Y)}(C^*(\mathcal{G})) \subset \subset \operatorname{Ker} \Gamma_\varphi(\alpha)$ индуцировало изоморфизм когомологий, в частности, само бы было изоморфизмом. Расхождения в общих ситуациях могут быть объяснены тем, что при общих способах определения гомоморфизма $i^*$ кроме ограничения на $Y$ ацикличных резольвент $\mathcal{A}^*$ пучка $\mathcal{G}$ на $X$ (при котором ядро как раз и состоит из сечений с носителями в $\varphi|(X\setminus Y)$) приходится также рассматривать отвечающий $\mathcal{A}^*|_Y$ гомоморфизм сравнения, а в случае неэпиморфности ограничения $\Gamma_\varphi(\mathcal{A}^*) \to \Gamma_{\varphi\cap Y}(\mathcal{A}^*|_Y)$ — еще и гомоморфизм когомологий, отвечающий вложению $\operatorname{Im} \Gamma_\varphi(\mathcal{A}^*) \subset \subset \Gamma_{\varphi\cap Y}(\mathcal{A}^*|_Y)$. Поэтому $H^*_\varphi(X, Y; \mathcal{G}) = H^*_{\varphi|(X\setminus Y)}(X; \mathcal{G})$ по крайней мере в тех случаях, когда оказывается $(\varphi\cap Y)$-ацикличным ограничение $\varphi$-ацикличной резольвенты и эпиморфным — ограничение соответствующих сечений (ср. с п. п. 5.1 и 5.2). Независимость в таких случаях определения $H^*_\varphi(X, Y; \mathcal{G})$ от выбора $\mathcal{A}^*$ — следствие независимости $i^*$ и аргументов типа леммы о пяти изоморфизмах.

Существенность условия сюръективности ограничения на $Y$ сечений $\mathcal{A}^*$ обнаруживается при попытке использовать для открытых $Y \subset X$ мягкие резольвенты (для наследственно паракомпактных $X$ пучки $\mathcal{A}^*|_Y$ остаются мягкими, см. п. 5.1). При $\dim X = = n < \infty$ существуют, как известно, мягкие резольвенты $\mathcal{A}^*$ постоянного пучка $Z$ длины $n$ (см. п. 4.2 гл. 4). Для таких $\mathcal{A}^*$ группы $H^q(X, Y; Z)$ не совпадают с когомологиями комплекса $\Gamma_{X\setminus Y}(\mathcal{A}^*)$: может случиться, например, что $H^{n+1}(X, Y; Z) \neq 0$ (см. п. 3.3 гл. 4), хотя при $q > n$ все $\mathcal{A}^q$ нулевые. Тем не менее для открытых $Y \subset X$ и паракомпактифицирующих $\varphi$ (как устанавливается с помощью вялых резольвент $\mathcal{A}^*$) $H^*_\varphi(X, Y; \mathcal{G}) = = H^*_{\varphi|(X\setminus Y)}(X; \mathcal{G})$.

Этот изоморфизм имеет место во всех случаях, перечисляемых в начале п. 5.1, кроме случая в) для непаракомпактифицирующих $\varphi$ (ср. с п. 5.2): если $\varphi$ и $Y$ — одна точка $y \in X$, то при $n > 1$ (в силу точной последовательности (3)) $H^n_\varphi(X, y; \mathcal{G}) = H^n_\varphi(X; \mathcal{G}) =$

$=H^n(X, X\setminus y; \mathcal{G})$, в то время как $H^n_{\varphi|(X\setminus y)}(X; \mathcal{G})=0$, поскольку семейство $\varphi|(X\setminus y)$ пусто.

В случае, когда подпространство $Y$ замкнуто, для любого семейства носителей $\varphi$ все члены точной последовательности (3) допускают интерпретацию когомологий с подходящими коэффициентами самого пространства $X$ (с теми же носителями). Пусть $\mathcal{G}_{X\setminus Y}$ — подпучок в $\mathcal{G}$, совпадающий с $\mathcal{G}$ над $X\setminus Y$ и равный нулю на $Y$, $\mathcal{G}_Y=\mathcal{G}/\mathcal{G}_{X\setminus Y}$ — факторпучок (совпадающий на $Y$ с ограничением $\mathcal{G}$ и нулевой на $X\setminus Y$). Сечения $\mathcal{C}^*(\mathcal{G}|_Y)$ с носителями в $\varphi\cap Y$ совпадают, очевидно, с сечениями (с носителями в $\varphi$) пучков $\mathcal{C}^*(\mathcal{G}_Y)$, а отображение $\Gamma_\varphi(\alpha)$ индуцируется гомоморфизмом дифференциальных пучков $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})\to\mathcal{C}^*(\mathcal{G}_Y)$, поэтому когомологическая последовательность (3) совпадает с последовательностью (2) из п. 4.3

$$\ldots\to H^n_\varphi(X; \mathcal{G}_{X\setminus Y})\to H^n_\varphi(X; \mathcal{G})\to H^n_\varphi(X; \mathcal{G}_Y)\to$$
$$\to H^{n+1}_\varphi(X; \mathcal{G}_{X\setminus Y})\to\ldots, \tag{4}$$

отвечающей короткой точной последовательности пучков коэффициентов

$$0\to\mathcal{G}_{X\setminus Y}\to\mathcal{G}\to\mathcal{G}_Y\to 0.$$

Для паракомпактифицирующих семейств $\varphi$ к когомологиям пространства $X$ могут быть сведены и когомологии любого локально замкнутого подпространства $Y\subset X$. Имеют место изоморфизмы $H^n_{\varphi|Y}(Y; \mathcal{G})=H^n_\varphi(X; \mathcal{G}^X)$ (§ 10 гл. 2 в [87]). Здесь $\mathcal{G}$ — некоторый пучок на $Y$, а $\mathcal{G}^X$ — единственный пучок на $X$, индуцирующий $\mathcal{G}$ на $Y$ и нуль на $X\setminus Y$.

При подходящих ограничениях на пространство $X$ (условиях типа паракомпактности) и его подмножества в терминах сечений пучков коцепей на $X$ (сечений одной и той же ацикличной, например, вялой, резольвенты $\mathcal{A}^*$ пучка коэффициентов $\mathcal{G}$) могут быть определены и когомологии пар $(Y, A)$ подмножеств $X$. Если ограничения $\mathcal{A}^*$ на $Y$ и $A$ ацикличны (по отношению к отвечающему ситуации паракомпактифицирующему семейству носителей $\varphi$), то группы $H^n_{\varphi\cap Y}(Y, A; \mathcal{G})$ определяются ограничением на $Y$ всех сечений $\mathcal{A}^*$ с носителями в $\varphi$, обращающихся в нуль на $A$, т. е. сечениями на $Y$ пучков $\mathcal{A}^*$ с носителями в семействе $(\varphi\cap Y)|_{(Y\setminus A)}=\varphi|_{(X\setminus A)}\cap Y$. Стандартным образом описываются точные последовательности когомологий таких пар, троек, различных триад (см. также § 2 гл. 4).

**5.4. Вырезания.** Из того, что $H^n_\varphi(X, Y; \mathcal{G})=H^n_\varphi(X; \mathcal{G}_{X\setminus Y})$ для замкнутых $Y\subset X$, вытекает свойство вырезания для таких пар — наличие изоморфизмов $H^n_\varphi(X, Y; \mathcal{G})=H^n_{\varphi|(X\setminus U)}(X\setminus U, Y\setminus U; \mathcal{G})$ для любых открытых в $X$ множеств $U\subset Y$ (в частности, для $U=\operatorname{Int} Y$). В общем случае, когда $Y$ не замкнуто, можно аналогично вырезать произвольные (не обязательно открытые) множества, содержащиеся вместе с замыканием в $\operatorname{Int} Y$. В самом деле, построенное в п. 5.1 отображение $\alpha$ пучков на $Y$ на $\operatorname{Int} Y$, очевидно, является изоморфизмом, поэтому определяющие когомологии пар $(X, Y)$ и $(X \setminus U, Y \setminus U)$ сечения пучков $\mathscr{C}^*(\mathscr{G})$ совпадают.

В каждом случае, когда $H^*_\varphi(X, Y; \mathscr{G}) = H^*_{\varphi|(X\setminus Y)}(X; \mathscr{G})$ (см. пред. п.), а семейство $\varphi|_{(X\setminus Y)}$ остается паракомпактифицирующим (аналогично и для любых $\varphi$, если $Y$ замкнуто), объединение всех $F \in \varphi|_{(X\setminus Y)}$ содержится в $\operatorname{Int}(X \setminus Y)$, поэтому вложение $X \setminus Y \subset X$ индуцирует изоморфизм вырезания в виде $H^*_\varphi(X, Y; \mathscr{G}) = H^*_{\varphi|(X\setminus Y)}(X \setminus Y; \mathscr{G})$. Такого изоморфизма нет для произвольных $\varphi$: $H^n(X, X \setminus y; \mathscr{G}) = H^n_y(X; \mathscr{G}) \neq H^n_y(y; \mathscr{G})$ (пример из п. 5.2).

В тех случаях, когда группы $(X, Y)$ сводятся к когомологиям с подходящими носителями пространства $X \setminus Y$, эти группы, конечно, отличаются от обычных когомологий $X \setminus Y$ (вырезание $Y$ в таких случаях довольно условно) и зависят как от топологии $X \setminus Y$, так и от вложения $X \setminus Y \subset X$ (которым как раз определяется подходящее семейство носителей в $X \setminus Y$). Вырезание в чистом виде имеет место, однако, для когомологий локально компактных пространств с компактными носителями: если $Y$ замкнуто, $H^n_c(X, Y; \mathscr{G}) = H^{nc}(X \setminus Y; \mathscr{G})$. В частности, при постоянных коэффициентах когомологии локально компактного $X$ совпадают с когомологиями одноточечной компактификации $X$.

При $\varphi = c$ символ $\varphi|_{(X\setminus Y)}$ выше всегда может быть заменен на $c$, а для замкнутых $Y$ аналогичным образом заменяется и $\varphi \cap Y$. Если $\varphi$ — семейство всех замкнутых множеств, символы $\varphi$ и $\varphi \cap Y$ в точной последовательности (3) обычно опускаются.

## *Глава 2*

## ГОМОЛОГИИ

Гомологии полиэдров геометрически намного нагляднее когомологий, поэтому и появились в топологии намного раньше. По причинам, обсуждавшимся во введении, их развитие, однако, оказалось намного более трудным. В частности, несмотря на множество предлагавшихся до сих пор достаточно общих конструкций гомологий с переменными коэффициентами, получить их интерпретацию как производных функторов функтора нульмерных гомологий $H_0$ пока не удалось, до конца корректная теория гомологий (по множеству признаков дуальных когомологиям) в настоящее время построена только для локально постоянных коэффициентов.

Выше было приведено немало аргументов в пользу однозначности теории когомологий, отклонения от некоторых естественных и легко формулируемых условий при конкретных способах построения теории тут же ведут к «патологиям». Ясно, что аргументы, подтверждающие однозначность теории гомологий, должны быть иными. Немаловажная роль при выявлении «правильной» теории гомологий среди множества, как казалось, логически возможных вариантов принадлежит ее связям с когомологиями. Этому способствовало и наличие большого числа задач и наблюдений, служивших своеобразным критерием для ее опознания, в которых «... даже если интересоваться главным образом утверждениями, содержащими в себе только когомологии, в доказательствах приходится оперировать группами, играющими роль групп гомологий, и потому это предполагает наличие некоторой теории гомологий» (стр. 23 в [85]).

## § 1. Фактор компактности

**1.1. Компактные носители.** Прежде всего выяснилось, что «обычные» гомологии (встречающиеся в применениях) — это гомологии $H_*^c$ с компактными носителями: гомологии пространства $X$ совпадают с прямым пределом $\varinjlim H_n(C)$, взятым по всем компактным подмножествам $C \subset X$ (аналогично для любых пар $(X, Y) : H_n^c(X, Y) = \varinjlim H_n(C, C')$, где $C$ и $C'$ — всевозможные компактные подмножества в $X$ и $Y$). Именно такими оказываются группы в классических теориях — симплициальные и клеточные гомологии, сингулярные: хотя их определения, как кажется, с компактностью нисколько не связаны, но используемые при их построении цепи конечны и потому имеют компактные носители.

В пользу гомологий с компактными носителями говорят многие факты. Например, для дополнительных в $n$-мерной сфере $S^n$ множеств $X$ и $Y = S^n \setminus X$ дополнения $U = S^n \setminus C$ к всевозможным компактным подмножествам $C \subseteq X$ — это всевозможные окрестности $Y$. Каждая такая окрестность $U$ — полиэдр, и группы $H^p(U; G)$ определены однозначно, а по свойству жесткости $H^p(Y; G) = \varinjlim_{U} H^p(U; G)$. Но $H^p(Y; G) = H_q(X; G)$, где $q = n - p - 1$ (двойственность Ситникова), и $H^p(U; G) = H_q(C; G)$ (двойственность Стинрода), см. п. 5.6 гл. 8 в [69], поэтому $H_q(X; G) = H_q^c(X; G)$ — гомологии с компактными носителями. Аналогично, если $X$ — подпространство (ориентируемого и кусочно-линейного) компактного многообразия $M^n$, группы $H_p(X; G)$ должны совпадать с $H^{n-p}(M^n, Y; G)$, где $Y = M^n \setminus X$ (двойственность Пуанкаре — Лефшеца, см. п. 5.6 гл. 8 в [69]), а $H_p(C; G)$ для компактных $C \subset X$ — с $H^{n-p}(M^n, U; G)$, где $U = M^n \setminus C$ — полиэдральные окрестности $Y$, и поскольку $H^{n-p}(M^n, Y; G) = \varinjlim_{U} H^{n-p}(M^n, U; G)$ (вследствие свойства жесткости для $Y$, точных последовательностей когомологий пар $(M^n, Y)$, $(M^n, U)$ и леммы о пяти изоморфизмах), снова $H_p(X; G) =$

$=H_p^c(X;\ G)$. Таким образом, по крайней мере для подпространств евклидовых пространств теория гомологий с компактными носителями — единственная приемлемая.

Все эти наблюдения говорят о том, что фактор компактности, по-видимому, присущ самой природе гомологий, неотделим от нее (см. также п. 1.3 ниже). Группы $H_*^c$, называемые нередко (начиная с работы Милнора [128]) гомологиями Стинрода—Ситникова, стали широко применяться в топологии с начала 60-х годов (упражнения к гл. 9 в [106], [1], [86], [128], [137] и др.), и применения этих групп не выявили с тех пор никаких их дефектов. Тем не менее вплоть до настоящего времени появляются работы, авторы которых почему-то считают, будто перед распространением теории гомологий за пределы компактной категории стоят какие-то трудности, в связи с чем в них предлагаются довольно громоздкие новые определения, независимые от указанного фактора. Нередко предлагаемые новые теории называются авторами гомологиями Стинрода—Ситникова или Стинрода, см., например, [94], [116], [121], [122], [130] (при этом обычно цитируется, как ни странно, указанная выше работа Милнора [128]). Построение новых теорий обычно мотивируется неприспособленностью для категорий шейпов и общих топологических пространств сингулярной теории, перечисляются известные ее недостатки, однако неясно, свободны ли от таких недостатков предлагаемые новые гомологии (судя по всему, вряд ли, к тому же к некоторым недостаткам сингулярных добавляются новые (см. [124]): отличие от нуля в отрицательных размерностях, нарушение свойства аддитивности для бесконечных дискретных объединений, невозможность выразить гомологии таких объединений через гомологии слагаемых). При этом гомологии $H_*^c$ с компактными носителями почему-то полностью игнорируются*), хотя связи с ними, как правило, легко вскрываются, выявляя и суть самих новых теорий (которые могут рассматриваться в лучшем случае как вспомогательные конструкции для изучения поведения обычных, см. в связи с этим п. 6.3 гл. 8 в [69]). В категории компактных пространств их природа (в том числе совпадение с обычными) выяснена в работе [43] (из нее вытекают, в частности, результаты [123]).

Разумеется, сколь-нибудь удовлетворительных конструкций гомологий, в которых бы явно не прослеживалось влияние компактности, пока не найдено. Впрочем, пока и не обнаружено хоть каких-нибудь поводов для отказа от теории $H_*^c$ в пользу какой-то более совершенной (которой, видимо, просто не существует). См. также п. 5.3 гл. 3 ниже.

**1.2. Компактные пространства.** Благодаря свойству компактных носителей выяснение вопроса об однозначности теории го-

*) Странная манера — не замечать пути, предложенного К. А. Ситниковым, и в то же время приписывать Н. Стинроду и К. А. Ситникову нечто, к чему эти авторы не имели ни малейшего отношения.

мологий целиком зависит от категории $\mathscr{B}_0$ компактных (хаусдорфовых) пространств. Убедительными аргументами в пользу такой однозначности в категории $\mathscr{B}_0$ представляются следующие. Для компакта $C$, лежащего в сфере $S^n$, группы $H_p(C; G)$ должны совпадать с однозначно определенными $H^{n-p-1}(S^n \setminus C; G)$ (двойственность Стинрода, см. предыд. п.). Разумеется, также и $H^p(C; G) = H^c_{n-p-1}(S^n \setminus C; G)$ (двойственность Понтрягина).

Произвольный метризуемый компакт $C$, подклеивая друг к другу цилиндры кусочно линейных отображений нервов покрытий из некоторой измельчающейся последовательности покрытий $C$, можно вложить в стягиваемый компакт $\tilde{C}$ такой, что $\tilde{C} \setminus C$ — локально конечный полиэдр (см. [62], [63]), поэтому $H_p(C; G) = H_{p+1}(\tilde{C}, C; G) = H_{p+1}(\tilde{C} \setminus C; G)$ — гомологии 2-го рода полиэдра, см. след. п. (в частности, многообразие групп $H_p(C)$, $C \in \mathscr{B}_0$, не шире аналогичного многообразия гомологий 2-го рода полиэдров). «Законность» последнего вырезания подтверждается наличием аналогичного тождества $H_p(K, L) = H_p(K \setminus L)$ для любых конечных полиэдров. Аналогичные аргументы, разумеется, применимы и к когомологиям, они дают $H^p(C; G) = H^{p+1}_c(\tilde{C} \setminus C; G)$.

Таким образом, независимо от способа описания цепей, по крайней мере в подкатегории метризуемых компактов группы гомологий (аналогично, когомологий) определены однозначно. Однако любые определяющие эти группы цепи и коцепи без труда могут быть построены и для компактов без условия метризуемости, чем подтверждается однозначность определяемых ими теорий и в этом более общем случае. Кстати, каждая конкретная конструкция таких цепей и коцепей применима только в категории $\mathscr{B}_0$ и за ее пределами должна быть существенно изменена (см. §§ 3 и 4 гл. 3). В свете обнаруженной связи с симплициальными теориями 2-го рода не является неожиданным наличие в категории $\mathscr{B}_0$ свободных коцепей, определяющих целочисленные когомологии, и естественного совпадения комплексов гомоморфизмов таких коцепей в абелевы группы $G$ с комплексами цепей с коэффициентами в $G$. (Конструкция $C \subset \tilde{C}$ проливает свет также на аксиоматику гомологий и когомологий в категории метрических компактов, см. § 2 гл. 7 в [69].)

**1.3. Теории 2-го рода.** Столь же естественно, как поверхности типа сферы или тора, двумерными циклами в трехмерном пространстве считать и уходящие в бесконечность поверхности типа параболоида или однополостного гиперболоида. Гомологии $H_*$ локально компактных пространств, основанные на рассмотрении цепей с любыми замкнутыми носителями (а не только компактными), обычно называются гомологиями 2-го рода (см. гл. 3). В категории $\mathscr{B}$ локально компактных (хаусдорфовых) пространств и их собственных отображений группы $H_*$ представляют столь же естественный интерес, как и $H_*^c$. Двойственная теория когомологий 2-го рода — это уже встречавшиеся нам выше когомологии $H_c^*$ с компактными носителями.

Теория $H_*$ на первый взгляд кажется исключительной, т. е. не укладывающейся в очерченные выше рамки. Сомнения рассеиваются, однако, при переходе в $\mathscr{B}$ к компактификациям $\tilde{X}$ локально компактных $X$ одной точкой $*$ (и добавлениям к компактным пространствам из подкатегории $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$ изолированной отмеченной точки $*$) — возникает категория $\tilde{\mathscr{B}}$ компактных пространств с отмеченной точкой и с морфизмами, переводящими дополнения к отмеченным точкам в такие же дополнения. Фактически $\mathscr{B}$ подменяется изоморфной ей категорией $\tilde{\tilde{\mathscr{B}}}$ компактных пар вида $(\tilde{X}, *)$ (и указанных выше отображений). Поскольку на (полной) подкатегории $\mathscr{B}_0 \subset \tilde{\tilde{\mathscr{B}}}$ существует лишь одна естественная теория (гомологий или когомологий), а для каждого $\tilde{X} \in \tilde{\tilde{\mathscr{B}}}$ найдется гомеоморфный ему (возможно, с точностью до одной изолированной точки) компакт из $\mathscr{B}_0$, только одна естественная теория возможна и в категории $\mathscr{B}$. При этом группы гомологий (или когомологий) локально компактного $X \in \mathscr{B}$, совпадая с группами пары $(\tilde{X}, *)$, суть просто приведенные гомологии (или когомологии) одноточечной компактификации $X$. Таким образом, компактность дает знать о себе и в случае гомологий 2-го рода.

Заметим, что изоморфизм когомологий 2-го рода $H_*$ локально компактного пространства $X$ (приведенным) когомологиям одноточечной компактифации $\tilde{X}$ был установлен в п. 5.4 гл. 1 выше. Отметим также, что в силу сделанных наблюдений связь между теориями 2-го рода и обычными описывается точными последовательностями (гомологий и когомологий) пары $(\tilde{X}, X)$ (см. также п. 2.4 гл. 2 в [69]).

Единственность распространения на категорию $\mathscr{B}$ теорий 2-го рода с подкатегории полиэдров может быть установлена и непосредственно, без апелляции к одноточечным компактификациям, как для категории $\mathscr{B}_0$ в п. 1.2 выше (см. [63]).

До недавнего времени считалось, что теории 2-го рода $H_*$ и $H_c^*$ определены только в категории $\mathscr{B}$. Что касается гомологий $H_*$, то это не так. В частности, уже для полиэдра (или клеточного комплекса) $K$ наряду с обычными (конечными) цепями $C_*^c(K; G)$ можно рассматривать и содержащие их любые локально конечные $C_*(K; G)$, которые и определяют группы $H_n(K; G)$. В общем случае (см. ниже) группы $H_n(X; G)$ — это прямые пределы $\varinjlim_B H_n(B; G)$, определяемые по всем замкнутым локально компактным подпространствам $B$ пространства $X$. Индуцированные гомоморфизмы $f_*$ гомологий $H_*$

определены для любых совершенных (т. е. замкнутых с компактными прообразами точек) непрерывных отображений $f: X \to Y$ (совпадающих с собственными в подкатегории $\mathscr{B}$). Гомологии 2-го рода общих пространств были впервые рассмотрены Г. Б. Иванадзе [27].

## § 2. Пучки цепей

**2.1. Постановка задачи.** По всей своей природе, начиная с классических определений, гомологии дуальны когомологиям, и естественно ожидать поэтому, что в теории гомологий в ее окончательной форме (которая бы содержала в себе и их трактовку как соответствующих производных функторов) должно столь же широко фигурировать понятие копучка, как понятие пучка — в теории когомологий. Как отмечено в начале главы, такой теории пока, к сожалению, нет. Давно замечено, однако, что немаловажную роль в теории гомологий играют и пучки. Они возникают, в частности, при рассмотрении цепей.

В отличие от когомологий, для которых (в типичных случаях) коцепи подпространства $Y \subset X$ получаются ограничением на $Y$ коцепей $X$ (в частности, как сечений пучков коцепей $\mathscr{A}^*$), а коцепи пары $(X, Y)$ — коцепями-сечениями на $X$ с носителями в $X \setminus Y$, цепи $Y \subset X$ — это часть цепей $X$, чьи носители оказываются в $Y$, в то время как гомологии пары $(X, Y)$ получаются из факторизации всех цепей по цепям $Y$ (своеобразным «ограничением» цепей $X$ на $X \setminus Y$). Таким образом, при использовании любых цепей $C_*$, определяющих гомологии, на $X$ возникают градуированные дифференциальные предпучки $U \to C_*(X, X \setminus U)$. В большинстве случаев, однако, сколь-нибудь примечательной связи (кроме естественного гомоморфизма в сечения возникающих пучков) между исходными цепями и возникающими дифференциальными пучками $\mathscr{C}_*$ не наблюдается. В случае сингулярных цепей, например, можно лишь утверждать (см. п. 2.9 гл. 4 в [87]), что пучки $\mathscr{C}_*$ являются гомотопически тонкими, а естественные преобразования $C_*(X, X \setminus U) \to \mathscr{C}_*(U)$ — мономорфизмы, оказывающиеся изоморфизмами, вообще говоря, лишь для $U = X$. (Описание этих пучков имеется также в конце § 2 гл. 2 в [143], гомотопическая тонкость пучков — в предложении 7 и его следствии в гл. 6 этой книги.)

**2.2. О цепях, складывающихся в пучки.** Как будет видно из дальнейшего содержания настоящей статьи, имеется множество примеров, подтверждающих естественность и эффективность, а в некоторых случаях и незаменимость языка и средств теории пучков в задачах, связанных с применением гомологий. В частности, большое значение имеет наличие вялых пучков цепей. Однако такие пучки возникают не при каждом подходе к построению гомологий (для этой цели непригодны, например, основанные на рассмотрении «регулярных» или «истинных» циклов конструкции родоначальников обсуждаемой теории Н. Стинрода и К. А. Ситникова), и далеко не все цепи, дающие нужные гомологии, вообще складываются в пучки.

Пучки цепей появились впервые в [85] и [86]. Предназначенная для любых пучков коэффициентов и насыщенная поэтому гомологической алгеброй основная конструкция авторов, однако, оказалась не только сложной, но и в значительной мере формальной и искусственной. Цепи для гомологий локально компактного пространства $X$ были определены лишь для коэффициентов в основном кольце $R$. Они оказались сечениями определяемых ими вялых пучков $\mathscr{C}_{\bullet}(R):\mathscr{C}_{\bullet}(R)(U)=C_{\bullet}(X, X\setminus U; R)$ для любых открытых множеств $U\subset X$. Что же касается любых других коэффициентов $\mathscr{G}$, то цепей как таковых для них нет, формально построены лишь дифференциальные градуированные пучки для гомологии $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$, и в качестве цепей любой замкнутой пары $(X, Y)$ используются не имеющие конкретной интерпретации сечения $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})(U)$, $U=X\setminus Y$. Пучки $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$ оказываются тонкими (следовательно, мягкими).

Как выяснилось позже, обсуждаемые конструкции до конца корректны только для локально постоянных коэффициентов $\mathscr{G}$ с конечно порожденными слоями. Это подтверждается, в частности, и тем, что все основные применения ограничиваются именно такими коэффициентами (см. [87]). Об искусственности конструкции говорит хотя бы тот факт, что составляющие $\mathscr{C}_n$ дифференциальных пучков $\mathscr{C}_{\bullet}$ обращаются в нуль только при $n\leqslant -2$. Недостатки теории обсуждаются в начале гл. 5 и в § 14 гл. 5 книги [87], а также в [62]. См. в связи с этим § 6 гл. 3 ниже.

В работах [62], [64] для постоянных коэффициентов (без предположения метризуемости локально компактных пространств — в примечании к § 1 в [64]*) и в § 3 работы [64] — для локально постоянных коэффициентов $\mathscr{G}$ были построены цепи $C_n(X;\mathscr{G})$, $n\geqslant 0$, определяемые которыми пучки $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$ всегда вялые, а для любых открытых $U\subset X$ имеет место $\mathscr{C}_{\bullet}(U)(\mathscr{G})=C_{\bullet}(X, X\setminus U;\mathscr{G})$. Наиболее полное описание порождающих такие пучки цепей, независимое от коцепей и когомологий, было дано в § 3 работы [68].

Такие же конструкции применимы и к появившимся позже цепям Масси. Хотя эти цепи построены в [126] только для постоянных коэффициентов $G$ (как $\mathrm{Hom}_R(C_c^*, G)$ для специальных коцепей с компактными носителями $C_c^*$ с коэффициентами в основном кольце $R$), поскольку их определение носит локальный характер, путем естественных отождествлений на пересечениях открытых множеств они могут быть определены

*) См. также § 2 в [65].

для любых локально постоянных коэффициентов $\mathcal{G}$ (существенно, что коцепи $C_c^*$ — свободные $R$-модули и, представляя собой вариант коцепей Александера—Спаньера, оказываются сечениями с компактными носителями мягких пучков).

Краткое описание обсуждаемых цепей (и коцепей) см. в §§ 3 и 4 гл. 3.

**2.3. Локально компактные пространства.** Естественно выделить этот случай, поскольку гомологии 2-го рода представляют самостоятельный интерес (п. 1.3 выше).

Суть конструкции пучков цепей, обсуждавшихся выше, заключается в следующем. Хотя цепи в [62], [64] и [68] строятся независимо от коцепей, на достаточно малых открытых множествах $U \subset X$ они (как и цепи Масси) имеют вид $C_*(X, X \setminus U; \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}_R(C_c^*(U; R), G)$, где $G$ — слой $\mathcal{G}$, а $C_c^*$ — свободные коцепи с коэффициентами в основном кольце $R$, имеющие компактные носители. Для любых замкнутых множеств $Y \subset X$ (например, для $Y = X \setminus U$) возникают точные последовательности $0 \to C_c^*(U; R) \to C_c^*(X; R) \to C_c^*(Y; R) \to 0$, расщепляющиеся (поскольку $C_c^*(Y; R)$ свободны) в каждой отдельной размерности. Вместе с мягкостью пучков коцепей $\mathscr{C}^*(R)$, сечениями которых служат $C_c^*(U; R)$, это свойство и обеспечивает наличие для любых открытых $U \subset X$ соотношений $\mathscr{C}_*(\mathcal{G})(U) = C_*(X, X \setminus U; \mathcal{G})$ для определяемых рассматриваемыми цепями пучков $\mathscr{C}_*(\mathcal{G})$ на $X$ (в частности, вялость $\mathscr{C}_*(\mathcal{G})$ — следствие указанной выше расщепляемости коцепей пар $(X, Y)$).

Основная причина сложности обсуждавшейся выше конструкции гомологий из [85], [86] в том, что авторы не располагали свободными коцепями с компактными носителями. С помощью довольно искусственных приемов, использующих средства теории гомотопий, свободные коцепи были впервые построены в [128] для компактных пространств. Эти коцепи, однако, не являются сечениями определяемых ими пучков (об искусственности их конструкции свидетельствует, в частности, то, что они отличны от нуля во всех размерностях, включая и любые отрицательные). Близким к [62], [64] методом свободные коцепи с компактными носителями в категории локально компактных пространств были определены позже в [39]. Обладая, по всей видимости, такими же свойствами, что и коцепи автора и Масси, они также, вероятно, могут быть использованы для построения варианта вялых пучков цепей. Подобные вопросы, однако, в [39] не рассматриваются.

**2.4. Носители. Гомологии подпространств и пар.** В соответствии со сделанными наблюдениями для любого замкнутого множества $B \subset X$ ядром эпиморфизма $\mathscr{C}_*(\mathcal{G})(X) \to \mathscr{C}_*(\mathcal{G})(X \setminus B)$ служат цепи $B$. Таким образом, обычные гомологии $H_*^c(X; \mathcal{G})$ пространства $X$ определяются комплексом сечений дифференциального пучка $\mathscr{C}_*(\mathcal{G})$ с компактными носителями, и для любого подмножества $Y \subset X$ группы $H^c(Y; \mathcal{G})$ — подкомплексом, составленным сечениями с носителями в $Y$. Представляющие самостоятельный интерес гомологии 2-го рода подпространства $Y \subset X$ определяются всеми теми цепями $X$ (вообще говоря, бесконечными), носители которых содержатся в $Y$, составляя семейство $\theta$ всех замкнутых в $X$ множеств, расположенных в $Y$. Эти гомологии, обозначаемые через $H^{\theta}_*(Y; \mathcal{G})$, определяются комплексом сечений $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})$ с носителями в $\theta$. Группы $H^{\theta}_*(Y; \mathcal{G})$ зависят, очевидно, не только от топологии $Y$, но и от способа вложения $Y$ в $X$, они совпадают с $H_*(Y; \mathcal{G})$, когда $Y$ замкнуто, и с $H^c_*(Y; \mathcal{G})$ — когда компактно замыкание $Y$ в $X$. Заметим, что во всех случаях гомологии $Y$ — это одновременно и гомологии $H^{\varphi}_*(X; \mathcal{G})$ пространства $X$ с подходящим семейством носителей $\varphi$ (совпадающим с ограничением семейства $c$ на $Y$ в случае обычных гомологий и с $\theta$ — в случае гомологий 2-го рода). Семейство $\varphi$ при этом вполне может быть и не паракомпактифицирующим (в рассмотренных выше случаях, например, это так для любого $Y$, не являющегося открытым).

Итак, по разным причинам приходится рассматривать гомологии пространства $X$ с носителями в различных семействах $\varphi$. Картина, возникающая при описании гомологий $H^{\varphi}_*$ для подпространств и пар, оказывается двойственной той, какая имеет место в случае когомологий (см. п. 2.1). Гомологии произвольного подпространства $Y \subset X$ определяются подкомплексом $C^{\theta(\varphi)}_* \subset C^{\varphi}_*(X; \mathcal{G})$ сечений пучков $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})$ с носителями в $\theta(\varphi) = \varphi|_Y$, т. е. ядром операции ограничения сечений на $X \setminus Y$ (для сравнения: в случае коцепей такое ядро определяет когомологии пары $(X, X \setminus Y)$ при некоторых дополнительных условиях, см. п. 5.3 гл. 1), в то время как гомологии пары $H^{\varphi}_*(X, Y; \mathcal{G})$ — соответствующим факторкомплексом, совпадающим с комплексом ограничений на $X \setminus Y$ сечений из $\Gamma_{\varphi}(\mathcal{C}_*(\mathcal{G})) = C^{\varphi}_*(X; \mathcal{G})$. Поскольку пучки $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})$ вялые, для любого замкнутого $Y$ этот факторкомплекс совпадает с комплексом сечений пучков $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})|_{X \setminus Y}$ с носителями в семействе $\varphi \cap \cap (X \setminus Y)$ (состоящем, очевидно, из тех замкнутых в $X \setminus Y$ множеств, чьи замыкания в $X$ принадлежат $\varphi$). При условии, что семейство $\varphi$ паракомпактифицирующее, аналогичное утверждение справедливо также для открытых $Y$, а если $X$, кроме того, наследственно паракомпактно, то и для любых $Y \subset X$ (причины существенности требования паракомпактифицируемости для $\varphi$ те же, что и в случае когомологий). В каждом случае возникает точная последовательность гомологий пары

$$\ldots \to H^{\varphi}_n(Y; \mathcal{G}) \to H^{\varphi}_n(X; \mathcal{G}) \to H^{\varphi}_n(X, Y; \mathcal{G}) \to H^{\varphi}_{n-1}(Y; \mathcal{G}) \to \ldots.$$

Здесь $H^{\varphi}_n(Y; \mathcal{G}) = H^{\theta(\varphi)}_n(Y; \mathcal{G}) = H^{\theta(\varphi)}_n(X; \mathcal{G})$, а в случае замкнутого $Y$ также $H^{\varphi}_n(X, Y; \mathcal{G}) = H^{\varphi \cap (X \setminus Y)}_n(X \setminus Y; \mathcal{G})$ (поскольку для открытых $U$ пучки $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})\setminus_U$ — это те же $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})$, но построенные на локально компактном пространстве $U$). В случае, когда $\varphi$ — семейство всех замкнутых множеств, а $Y$ замкнуто, символ $\varphi$ в точной последовательности можно опустить. При этом $H_n(X, Y; \mathscr{G}) = H_n(X\setminus Y; \mathscr{G})$ (в частности, гомологии $H_n(X; G)$ некомпактного пространства $X$ с коэффициентами в $R$-модуле $G$ совпадают с приведенными гомологиями $H_n(\tilde{X}, *; G)$ компактификации $\tilde{X}$ пространства $X$ одной точкой $*$). Для незамкнутых $Y$ символ $\varphi$ (в случае всех замкнутых множеств) можно опустить в гомологиях $X$ и $(X, Y)$, заменив его на $\theta$ в членах, отвечающих $Y$.

**2.5. Общие пространства.** Пучки цепей (хотя и с чуть менее примечательными свойствами) существуют не только на локально компактных пространствах.

Для открытого множества $U$ локально компактного пространства $B$ ограничение $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})|_Y$ пучка $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})$ на замкнутое множество $Y = B\setminus U$ определяет в силу предыдущего п. своими сечениями гомологии пары $(B, U)$ и отличается, разумеется, от пучка $\mathscr{C}_*(\mathscr{G}|_U)$, построенного подобно $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})$ для локально компактного пространства $Y$. Сопоставление каждому открытому множеству $V\subset B$ сечений $\mathscr{C}_*(\mathscr{G}|_Y)$ на $V\cap Y$ (т. е. цепей пары $(Y, Y\setminus(V\cap Y))$) определяет прямой образ $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^Y$ пучка $\mathscr{C}_*(\mathscr{G}|_Y)$ при вложении $Y\subset B$. Этот пучок на $B$ совпадает с $\mathscr{C}_*(\mathscr{G}|_Y)$ на $Y$ и равен нулю на $B\setminus Y$. Поскольку ограничения коцепей $C_c^*(V; R)\to C_c^*(V\cap Y; R)$ эпиморфны, а цепи (по крайней мере на малых участках) получаются из коцепей как $\mathrm{Hom}_R(C_c^*, G)$, для пучков цепей возникают включения $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^Y\subset\mathscr{C}_*(\mathscr{G})$ (в частности, всегда $\mathscr{C}_*(\mathscr{G}|_Y)\subset\mathscr{C}_*(\mathscr{G})|_Y$, поэтому и $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^Y\subset\mathscr{C}_*(\mathscr{G})_Y$). Такие включения локально изоморфны в точках $y\in\mathrm{Int}\,Y$. Отсюда следует, между прочим, что $\mathscr{C}_*(\mathscr{G}) = \varinjlim_{C}\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^C = \bigcup_C \mathscr{C}_*(\mathscr{G})^C$ — прямой предел по всем компактным подмножествам $C\subset B$.

Пусть теперь $X$ — произвольное (паракомпактное и хаусдорфово) пространство, $\mathscr{G}$ — система коэффициентов на $X$. Для всякого замкнутого локально компактного подмножества $B\subset X$ через $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^B$ будем обозначать прямой образ пучка $\mathscr{C}_*(\mathscr{G}|_B)$ при включении $B\subset X$. Этот пучок вял (как прямой образ вялого). Включениям $B\subset F$ замкнутых локально компактных подпространств в $X$ отвечают, очевидно, включения $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^B\subset\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^F$. Таким образом, возникает направленная по включению индуктивная система вялых пучков $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^B$. Пусть $\mathscr{C}_*(\mathscr{G}) = \varinjlim_{B}\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^B = \bigcup_B\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^B$, где $B$ — всевозможные замкнутые локально компактые подпространства.

В соответствии с предложением 3.6 в [22] (см. также [34]) $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})$ — мягкие пучки. Они также $c$-мягкие: для любого замкнутого $Y\subset X$ отображение $\Gamma_c(\mathscr{C}_*(\mathscr{G}))\to\Gamma_c(\mathscr{C}_*(\mathscr{G})|_Y)$ эпиморфно (аналогичным образом определяются $\varphi$-мягкие пучки для любого семейства $\varphi$). В самом деле, если $\xi'$ — сечение на $Y$ с компактным носителем $|\xi'|$, то (из того, что $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$ — объединение $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^B$) найдется такое содержащее $|\xi'|$ компактное множество $C\subset X$, что нетривиальная часть $\xi'$ окажется определенным на $C\cap Y$ сечением $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^C$ (пользуемся открытостью $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^C$ в $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$ и компактностью $|\xi'|$), которое продолжается до совпадающего с $\xi'$ на $Y$ сечения $\xi$ вялого пучка $C_{\bullet}(\mathscr{G})^C\subset\subset C_{\bullet}(\mathscr{G})$. Заметим, однако, что семейство $c$ в $X$ в общем случае не является паракомпактифицирующим, поэтому, хотя пучки $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$ мягкие, неясно, являются ли они $c$-ацикличными ($\varphi$-ацикличность $\varphi$-мягких пучков устанавливается для паракомпактифицирующих семейств $\varphi$, см. §§ 3.6 и 4.13 гл. 2 в [107] или § 9 гл. 2 в [87]).

Пучки $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$ — это пучки цепей пространства $X$: все их сечения — цепи $X$ с (замкнутыми) локально компактными носителями, определяющие мало пока изученные гомологии 2-го рода $H_n(X;\, \mathscr{G}) = \underset{\to\infty}{\lim} H_n(B;\, \mathscr{G})$ (см. конец п. 1.3 выше). В самом деле, пусть $\xi$ — любое сечение $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$, $\xi(x)\neq 0$ для некоторой точки $x\in X$. Найдется $B$ такое, что $\xi(x)\in\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^B\subset\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$, поэтому $\xi(U)\subset\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^B$ для некоторой окрестности $U$ точки $x$. Следовательно, носитель $|\xi|$ — локально компактное (замкнутое) подпространство $X$. Пусть далее $B=|\xi|$. Для всякого содержащего $B$ замкнутого локально компактного множества $F\subset X$ сечения $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^F$ с носителями в $B$, будучи цепями пространства $B$, являются сечениями в $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^B\subset\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^F$. Таким образом, рассматриваемое сечение $\xi$ (пучка $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$) принадлежит $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^B$, если оно служит сечением какого-нибудь $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^F$. Но в силу мягкости $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$ его можно представить в виде локально конечной суммы $\xi=\sum_{\lambda}\xi_{\lambda}$ с компактными $|\xi_{\lambda}|$, поэтому локально, вблизи каждой точки $x\in B$, сечение $\xi$ принадлежит какому-то $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^F$, $B\subset F$ (аргументы те же, что и при доказательстве $c$-мягкости $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$ выше). Следовательно, $\xi$ — сечение $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})^B$.

Итак, $\Gamma(\mathscr{C}_*(\mathscr{G})) = \underset{\overrightarrow{B}}{\lim}\, C_*(B;\, \mathscr{G}) = \underset{\overrightarrow{B}}{\lim}\, \Gamma(\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^B) = C_*(X;\, \mathscr{G})$ — цепи $X$ с любыми (замкнутыми) локально компактными носителями $B\subset X$ (символ $\underset{\rightarrow}{\lim}$ здесь может быть заменен на знак суммы $\Sigma$ или объединения $\cup$).

Поскольку для локально компактного $B$, как замечено выше, пучки $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})$ исчерпываются подпучками $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^C$ по компактным $C\subset B$, и в общем случае $\mathscr{C}_*(\mathscr{G}) = \underset{\overrightarrow{C}}{\lim}\, \mathscr{C}_*(\mathscr{G})^C = \bigcup_{C} \mathscr{C}_*(\mathscr{G})^C$, где $C\subset X$ — всевозможные компактные подпространства. Поэтому $\Gamma_c(\mathscr{C}_*(\mathscr{G})) = \underset{C\overrightarrow{\subset} X}{\lim}\, C_*(C;\, \mathscr{G}) = \underset{C\overrightarrow{\subset} X}{\lim}\, \Gamma(\mathscr{C}_*(\mathscr{G})^C) = C_*^c(X;\, \mathscr{G})$ — цепи $X$

с компактными носителями (символ $\varinjlim$ может быть заменен на $\Sigma$ или $\bigcup$). Ими определяются гомологии с компактными носителями $H_*^c(X;\ \mathcal{G})$. Поскольку $C_*^c(X;\ \mathcal{G})\subset C_*(X;\ \mathcal{G})$, возникают естественные преобразования $H_n^c(X;\ \mathcal{G})\to H_n(X;\ \mathcal{G})$, включающиеся в точную гомологическую последовательность (ср. со случаем локально компактных пространств, см. п. 1.3 выше).

Такие же выводы справедливы и относительно сечений $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})$ на любых открытых множествах $U\subset X$ — ими служат цепи $U$ соответственно с локально компактными или компактными носителями. Не всякое замкнутое в $U$ локально компактное множество $B'$ имеет вид $U\cap B$ для аналогичного $B\subset\subset X$, поэтому пучки $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})$ вялыми, видимо, не являются. Как обычно, гомологии ($H_*$ или $H_*^c$) подпространства $Y\subset X$ определяются цепями (сечениями пучков $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})$) с носителями (нужного типа) в $Y$, в то время как гомологии пары $(X, Y)$ — соответствующим факторкомплексом. В случае открытого $Y=U$ этот факторкомплекс (в силу мягкости и $c$-мягкости пучков $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})$) совпадает с комплексом сечений (соответствующего типа) ограничения $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})|_{X\setminus U}$ (определяющим, таким образом, соответственно $H_*(X, U; \mathcal{G})$ и $H_*^c(X, U; \mathcal{G})$). Для компактных $C$ поэтому $H_n(X, X\setminus C; \mathcal{G})=H_n^c(X, X\setminus C; \mathcal{G})$.

**2.6. Пучки локальных гомологий.** В качестве С выше можно взять любую точку $x\in X$, получим $H_p(X,\ X\setminus x;\ \mathcal{G})=$ $=H_p^c(X,\ X\setminus x;\ \mathcal{G})=H_p^x(\mathcal{G})$ — локальные группы гомологий. Но $H_p^x(\mathcal{G})=H_p^c(X,\ X\setminus x;\ \mathcal{G})$ равны, очевидно, прямым пределам $\varinjlim_U H_p^c(X,\ X\setminus U;\ \mathcal{G})$, т. е. служат слоями пучков $\mathcal{H}_p(\mathcal{G})$ локальных гомологий, определяемых предпучками $U\to H_p^c(X,\ X\setminus U;\ \mathcal{G})$. Аналогично, поскольку цепи $X\setminus x$ исчерпываются цепями с носителями в множествах $X\setminus U$ для всех окрестностей $U$ точки $x$, имеем $H_p^x(\mathcal{G})=H_p(X,\ X\setminus x;\ \mathcal{G})=\varinjlim_U H_p(X,\ X\setminus U;$ $\mathcal{G})$. Эти пределы совпадают также с $\varinjlim_N H_p(X,\ X\setminus N;\ \mathcal{G})$, где $N$ — всевозможные замкнутые окрестности точек $x\in X$. Так, однако, определяются производные пучки $\tilde{\mathcal{H}}_*(\mathcal{G})$ дифференциального пучка $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})$. Преобразования функторов $H_p^c\to H_p$ определяют гомоморфизмы пучков $\mathcal{H}_p(\mathcal{G})\to\tilde{\mathcal{H}}_p(\mathcal{G})$, изоморфные на слоях, т. е. изоморфизмы. Тем самым пучки локальных гомологий $\mathcal{H}_p(\mathcal{G})$ — это производные пучки дифференциального пучка цепей $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})$. В терминах сингулярных гомологий 2-го рода для локально компактных пространств аналогичная конструкция рассматривалась впервые Картаном. Она существенно сложнее и несет в себе меньше информации (ср. с п. 2.1 выше).

**2.7. Спектральная последовательность Картана.** Поскольку пучки $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$ мягкие, при условии $\dim_G X < \infty$ ($G$ — слой $\mathscr{G}$) для любого замкнутого подмножества $Y$ произвольного паракомпактного (хаусдорфова) пространства $X$ и паракомпактифицирующего семейства носителей $\varphi$ возникают сходящиеся соответственно к $H^{\varphi}_{-p-q}(X, X\setminus Y; \mathscr{G})$ и $H^{\varphi|_{X\setminus Y}}_{-p-q}(X\setminus Y; \mathscr{G})$ спектральные последовательности со вторыми членами $E_2^{pq} = H^p_{\varphi}(Y; \mathscr{H}_{-q}(\mathscr{G}))$ и $E_2^{pq} = H^p_{\varphi}(X, Y; \mathscr{H}_{-q}(\mathscr{G}))$. В частности, обычные когомологии ($\varphi$ — семейство всех замкнутых множеств) сходятся к гомологиям 2-го рода. Если пространство $X$ локально компактно, то пучки $\mathscr{C}_{\bullet}(\mathscr{G})$ вялые, поэтому аналогичный результат справедлив и для открытых $Y \subset X$, а если $X$ еще и наследственно паракомпактно — то вообще для любых $Y \subset X$ (в случае замкнутых $Y$ результат верен и для непаракомпактифицирующих $\varphi$). Как показывает пример счетного произведения окружностей (локальные гомологии которого равны нулю), предположение о конечности $\dim_G X$ существенно.

В терминах сингулярных теорий (для локально компактных пространств) такая спектральная последовательность была впервые построена Картаном (см. описание в п. 8.6 гл. 5 в [87]) и использовалась для доказательства средствами пучков двойственности Пуанкаре. Кроме Картана спектральная последовательность изучалась (в категории полиэдров) Фери и Зиманом. В терминах гомологий Бореля—Мура (при типичных для них ограничениях, см. § 6 гл. 3 ниже, и только для локально компактных пространств) спектральная последовательность построена в § 8 гл. 5 в [87].

## *Глава 3*

## НАИБОЛЕЕ ТИПИЧНЫЕ КОНКРЕТНЫЕ ПОДХОДЫ

Разумеется, к описанию гомологий и когомологий общих (или, наоборот, каких-то конкретных) пространств имеется много подходов. Это позволяет в конкретных случаях, учитывая специфику рассматриваемых задач, применять отвечающие нуждам наиболее эффективные из них (функториально зависящие от пространства там, где рассматриваются отображения, использующие конкретного типа покрытия и предельные переходы цепи и коцепи типа Чеха в задачах, где учитываются свойства размерности, специфика устройства пространства или использующие функтор $\varprojlim^1$ или даже функторы $\varprojlim^p$ предельные соотношения, и т. п.). Всякий раз, когда пространство снабжено какой-то дополнительной структурой (локально компактно, обладает некоторыми локальными свойствами, является многообразием или полиэдром и т. д.), на нем обычно возникают учитывающие эту структуру цепи и коцепи, специальные резольвенты. Так, на многообразиях, например, кроме обычных сингулярных цепей (следовательно, и коцепей) можно рассматривать цепи, порожденные гладкими сингулярными симплексами, симплексами, диффеоморфными (или гомеоморфными) стандартному, и др. Соответствующие им коцепи (обычно после локализации, см. ниже) объединяются в ацикличные пучки, составляющие при естественных ограничениях резольвенты. На локально компактных пространствах сечениями мягких пучков оказываются естественные для таких пространств коцепи с компактными носителями. Существует много вариантов (в том числе с элементами непрерывности, гладкости) коцепей типа Александера—Спаньера, также складывающихся в ацикличные пучки*).

Ниже будут освещены конструкции, выдержавшие испытание временем, прошедшие проверку в многочисленных приложениях. В частности, будут даны описания цепей, складывающихся в обсуждавшиеся в предыдущей главе дифференциальные пучки. Само собой разумеется, что определяемые ими гомологии совпадают с теми, наличие которых было установлено в § 1 гл. 2 независимо от каких-то конкретных определений. Попутно будут рассматриваться подходящие новые свойства гомологий и когомологий.

## § 1. Сингулярная теория

Эта теория незаменима в гомотопической топологии, в теории расслоений, при изучении пространств отображений, в задачах классификации отображений. С ее помощью получается наиболее простое описание групп клеточных комплексов, их гомотопической инвариантности и других основных свойств.

**1.1. Границы применимости.** Хорошо известно (и легко следует из содержания § 2 гл. 1), что пучки $\mathcal{S}^*$ сингулярных коцепей с коэффициентами в $R$-модуле $G$ являются мягкими, если $X$ паракомпактно, и вялыми, если $X$ наследственно паракомпактно (п. 5.2 гл. 3 в [69]). Их сечениями являются «локализованные» коцепи: для паракомпактного $X$ имеется эпи-

*) Проводимое иногда деление способов построения групп гомологий и когомологий общих пространств на спектровые и проекционные в зависимости от того, определяются ли нужные группы как пределы групп гомологий (или когомологий) во вспомогательных конструкциях (чаще всего определяемых расматриваемыми системами покрытий) или как гомологии (когомологии) пределов фигурирующих в этих контрукциях цепей (коцепей), не вполне оправдано, поскольку имеется множество способов построения, не связанных с предельными переходами или покрытиями. Таковы, например, подходы родоначальников точной геории гомологий Н. Стинрода и К. А. Ситникова, а также подходы Милиора, Бореля и Мура, Масси (и некоторые др.).

морфизм $C_s^*(X; G) \to \Gamma(\mathcal{S}^*)$ комплекса сингулярных коцепей, ядром которого являются коцепи, каждая из которых обращается в нуль на сингулярных симплексах мелкости некоторого (зависящего от коцепи) открытого покрытия $X$. Поскольку состоящий из таких коцепей подкомплекс в $C_s^*(X; G)$ ацикличен (см. п. 5.2 гл. 3 в [69]), сингулярные когомологии $H_s^n(X; G)$ совпадают с $H^n(\Gamma(\mathcal{S}^*))$. Это не означает еще, что $H_s^n(X; G) = H^n(X; G)$ — пучковые когомологии, ибо в общем случае $\mathcal{S}^*$ не есть резольвента $G$, необходимым и достаточным условием для этого (п. 2.3 гл. 1 выше) является обращение в нуль для любого открытого $U \subset X$ ограничений на достаточно малые окрестности точек $x \in U$ любых элементов $h \in H_s^n(U; G)$ (когомологии в размерности 0 — приведенные). Условие выполнено, например, если для любой окрестности $U$ произвольной точки $x \in X$ найдется (зависящая от $n$) меньшая окрестность $V$, для которой отображение $H_s^n(U; G) \to H_s^n(V; G)$ нулевое (когомологическая локальная связность $X$ над $G$; когомологии в размерности 0 — приведенные). Это так, в частности, если $X$ слабо локально стягиваемо (окрестности $V$ выше стягиваются по $U$ в $x$). При сформулированных локальных условиях также $H_s^n(X, U; G) = H^n(X, U; G)$ для любых открытых паракомпактных $U$. Аналогичное равенство для пар $(X, Y)$ с замкнутыми $Y$ имеет место лишь тогда, когда сформулированным локальным условиям вместе с $X$ удовлетворяют и $Y$.

В категории пар слабо локально стягиваемых (хаусдорфовых, паракомпактных) пространств сингулярные гомологии $H_*^s$ совпадают с гомологиями $H_*^c$, обсуждавшимися в предыдущей главе: с теорией $H_*^c$ в указанной категории совпадают любые гомологии с компактными носителями, обладающие стандартными свойствами (в объеме аксиом Стинрода—Эйленберга) и обращающиеся в нуль в отрицательных размерностях (теорема 8 в [63]).

Как отмечалось во введении, в применениях теории гомологий и когомологий обычно нельзя избежать рассмотрения подпространств изучаемого пространства. Известные затруднения в применениях сингулярной теории объясняются именно этим: указанные выше локальные свойства теряются при переходе к подпространствам, и хотя сечения $\mathcal{S}^*$ на таких подпространствах по-прежнему определяют когомологии, они перестают совпадать с сингулярными. В соответствии с материалом, изложенным в главах 1—2, все «патологии», присущие сингулярной теории за пределами категории слабо локально стягиваемых пространств (см. введение), не свидетельствуют ни о чем, кроме того факта, что вне определенных границ сингулярные группы $H_*^s$ и $H_s^*$ попросту перестают быть группами гомологий и когомологий.

**1.2. Некоторые свойства.** Пусть $C_*^\alpha \subset C_*^s(X; G)$ — подкомплекс комплекса сингулярных цепей, порожденный сингулярными симплексами мелкости некоторого открытого покрытия $\alpha$. Для любого такого $\alpha$ включение цепных комплексов индуцирует изоморфизм гомологий $H_*^s$. Соответственно ограничение коцепей на симплексы мелкости $\alpha$ индуцирует изоморфизм когомологий $H_s^*$ (именно это позволяет осуществить локализацию коцепей, см. предыдущий п.).

Даже когда $Y$ замкнуто в $X$, для открытого в $X$ множества $U \subset Y$ включение $(X \setminus U, Y \setminus U) \to (X, Y)$ индуцирует изоморфизм групп $H_*^s$ и $H_s^*$ (свойство вырезания), вообще говоря, только при условии, что замыкание $\bar{U}$ содержится в $\operatorname{Int} Y$ (ср. с п. 5.4 гл. 1 и п. 5.4 гл. 3 ниже). В этом убеждаемся переходом к цепям и коцепям мелкости покрытия $\alpha = \{\operatorname{Int} Y, X \setminus \bar{U}\}$. Аналогично, для $X_1, X_2 \subset X$ точные последовательности Майера — Вьеториса триад (обычная и аддиционная) имеют место, вообще говоря, только при условии, что*) $X' = X_1 \cup X_2 = \operatorname{Int} X_1 \cup \operatorname{Int} X_2$, и наличие индуцированного включением $C_*^\alpha \subset C_*^s(X'; G)$, $\alpha = \{\operatorname{Int} X_1, \operatorname{Int} X_2\}$, изоморфизма гомологий — одно из многочисленных (эквивалентных друг другу) условий, фигурирующих в описании «вырезаемых» триад (см., например, [99]). Для рассматриваемых нами теорий $H_*^c$ и $H^*$ подобные условия являются лишними (по крайней мере для замкнутых и открытых $X_i$, см. ниже § 2 гл. 4).

**1.3. Теория 2-го рода.** Для локально компактных пространств кроме конечных нередко рассматриваются любые локально конечные сингулярные цепи (множество образов сингулярных симплексов, входящих в цепь, локально конечно), определяемые ими группы называются сингулярными гомологиями 2-го рода (см. также п. п. 2.1, 2.6 и 2.7 гл. 2). Аналогично, подкомплекс комплекса сингулярных коцепей локально компактного $X$, состоящий из коцепей с компактными носителями (для каждой коцепи $\xi$ найдется компактное множество, на дополнении к которому $\xi$ обращается в нуль), определяет сингулярные когомологии 2-го рода (т. е. с компактными носителями). Такие $\xi$ характеризуются тем, что отличны от нуля только на конечном числе сингулярных симплексов из любого локально конечного набора таких симплексов. Сингулярные теории 2-го рода были определены в [91].

## § 2. Когомологии Александра—Спаньера

**2.1. Основные определения.** Роль $n$-мерных «сингулярных» симплексов играют упорядоченные наборы точек $(x_0, \ldots, x_n)$ пространства $X$, под коцепями понимаются первоначально функции на таких наборах со значениями в $R$-модуле $G$, опера-

*) Операция Int здесь — в пространстве $X'$.

тор кограницы аналогичен этому оператору для сингулярных коцепей. В отличие от сингулярной теории, однако, всякий коцикл $\xi$ при таком подходе оказывается кограницей: $\xi = d\eta$, где $\eta(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \xi(y, x_0, \ldots, x_{n-1})$, а $y$ — фиксированная точка пространства $X$. Положение исправляется рассмотрением локализованных коцепей Александера — Спаньера $\widetilde{A^n}(X)$, определяемых факторизацией группы $A^n(X)$ указанных выше функций по подгруппе, состоящей из функций $\xi$, обращающихся в нуль на элементах некоторого (зависящего от $\xi$) открытого покрытия $X$. Когомологиями Александера — Спаньера топологического пространства $X$ с коэффициентами в $G$ называются группы $H^n(\widetilde{A^*(X)})$. Для любого подпространства $Y \subset X$ имеется очевидный эпиморфизм $\widetilde{A^*(X)} \to \widetilde{A^*(Y)}$, ядром которого определяются когомологии пары $(X, Y)$. Стандартно получается точная последовательность когомологий пары $(X, Y)$, а также точная последовательность когомологий, отвечающая короткой точной последовательности модулей коэффициентов.

Нульмерные коцепи, очевидно, — это функции аргумента $x \in X$. В терминах локализованных коцепей условие $d\xi = 0$ для такой функции $\xi$ означает, что ее значения равны на элементах некоторого достаточно мелкого открытого покрытия $X$, т. е. что $\xi$ локально постоянна и $H^0(X; G)$ — это группа локально постоянных функций на $X$ со значениями в $G$ (ср. с п. 2.4 гл. 1).

**2.2. Связь с пучками.** Для предпучка $U \to A^*(U)$ имеем $H^q(A^*(U)) = 0$ при $q > 0$, в то время как $H^0(A^*(U))$ — группы локально постоянных функций на $U$, поэтому для любого топологического пространства $X$ возникающий дифференциальный пучок $\mathcal{A}^*$ — резольвента постоянного пучка $G$. Так же, как в § 1 выше, для паракомпактного $X$ пучки $\mathcal{A}^*$ оказываются мягкими, а их сечения $\mathcal{A}^*(X)$ — (локализованными) коцепями Александера — Спаньера $\widetilde{A^*(X)}$ (п. п. 3.7 и 3.9 гл. 2 в [107], § 2 гл. 3 в [87], п. 5.3 гл. 3 в [69]). Если же $X$ наследственно паракомпактно, пучки $\mathcal{A}^*$ оказываются вялыми (п. 5.3 гл. 3 в [69]), а равенство $\mathcal{A}^*(U) = \widetilde{A^*(U)}$ имеет место для любых открытых $U \subset X$. Таким образом, для паракомпактных пространств когомологии Александера — Спаньера совпадают с пучковыми.

Обратим внимание на внешнее расхождение в определениях когомологий подпространств $Y$ и пар $(X, Y)$ коцепями Александера — Спаньера и сечениями пучков $\mathcal{A}^*$ (в условиях, разумеется, когда они совпадают). Когомологии пары в первом случае определяются подкомплексом $\widetilde{A^*(X)}'$, состоящим из всех коцепей с нулевым на $Y$ ограничением, а во втором — подкомплексом $\widetilde{A^*(X)''} \subset \widetilde{A^*(\dot{X})'}$, каждая коцепь которого обращается в нуль в достаточно малой окрестности $Y$ (поскольку когомологии $Y$ определяются сечениями $\mathscr{A}^*|_Y$, в общем, не совпадающими с $\widetilde{A^*(Y)}$). При отвечающих случаю предположениях паракомпактности (см. выше), однако, сечения $\mathscr{A}^*|_Y$, продолжаясь до сечений $\mathscr{A}^*$, отображаются на $A^*(Y)$, и это отображение совпадает с эпиморфизмом факторизаций $\mathscr{A}^*(X) = \widetilde{A^*(X)}$ по указанной паре подкомплексов. Поскольку $\widetilde{A^*(Y)}$ — сечения резольвенты типа $\mathscr{A}^*$, построенной на $Y$, в силу обсуждавшегося в гл. 1 устройства гомоморфизма сравнения эпиморфизм сечений $\mathscr{A}^*|_Y$ на $\widetilde{A^*(Y)}$ (который можно реализовать отображением ацикличных резольвент) индуцирует изоморфизм когомологий $Y$. Аналогичный изоморфизм для пар — следствие леммы о пяти изоморфизмах. Похожие рассуждения, применимые к замкнутым $Y \subset X$, см. в п. 4.10 гл. 2 в [107].

2.3. Замечания. В приложениях встречаются различные модификации коцепей Александера—Спаньера. Так, в [126] успешно применяется подкомплекс всех локально конечнозначных коцепей в $\widetilde{A^*(X)}$. Иногда используются непрерывные коцепи (с коэффициентами в поле $R$ действительных чисел), в том числе представляющиеся в виде сумм конечного числа произведений функций одной переменной [30]. Один из вариантов описывается в следующем параграфе. При соответствующих предположениях паракомпактности все подобные коцепи легко складываются в ацикличные пучки, поэтому определяемые ими когомологии всегда эквивалентны пучковым. В каждом случае при рассмотрении когомологий подпространств и пар приходится считаться с возможным различием между коцепями подмножеств (и пар) и соответствующими сечениями возникающих дифференциальных пучков-резольвент, не приводящим, однако (в отличие от случая сингулярной теории) к отклонениям в когомологиях. Подобная картина, впрочем, может возникать и при использовании коцепей любого иного типа.

## § 3. Свободные коцепи Масси и ассоциированные с ними цепи

**3.1. Конструкция коцепей.** Носителем $|\xi|$ коцепи $\xi$ Александера—Спаньера (аналогично, представляемого коциклом $\xi$ элемента группы когомологий) называется (минимальное) замкнутое множество, на дополнении к которому $\xi$ обращается в нуль. Пусть $B$ — локально компактное (паракомпактное и хаусдорфово) пространство. Подкомплекс комплекса $\widetilde{A^*(B)}$ коцепей Александера—Спаньера, составленный всеми коцепями с компактными носителями, определяет когомологии 2-го рода (когомологии с компактными носителями). Эти группы функториальны, очевидно, по отношению к собственным отображениям, инвариантны относительно собственных гомотопий и т. д. (см. [141]). Состоящая из локально постоянных функций группа $H_c^0(B; G)$ отлична от нуля только в том случае, если в $B$ содержатся компактные открыто-замкнутые подмножества.

В книге [126] когомологии локально компактных пространств строятся с помощью конечнозначных коцепей Александера—Спаньера с компактными носителями. Факт, что таким образом определяются те же группы $H_*^c$ (в [126] этот вопрос не рассматривается), можно установить средствами теории пучков. Именно, в комплексе таких коцепей $C_c^*(B; G)$ пусть $C_M^*(B; G)$ — подкомплекс, составленный коцепями с носителями в множестве $M \subset B$. Пусть $\mathscr{C}^*(G)$ — градуированный дифференциальный пучок, определенный предпучком $U \to D^*(U) = C_c^*(B; G)/C^*_{B/U}(B; G)$. Пучки $\mathscr{C}^*(G)$ мягкие и $\Gamma_c(\mathscr{C}^*(G)|_U) = C_c^*(U; G)$ для любого открытого $U \subset B$. В самом деле, коцепь $\xi \in C_c^*(B; G)$ определяет в $D^*(U)$ нулевой элемент только при условии, что $|\xi| \subset B \setminus U$, поэтому предпучок удовлетворяет условию (S1) п. 1.1 гл. 1 и естественное отображение $r: D^*(U) \to \mathscr{C}^*(G)(U)$ мономорфно, т. е. коцепи $\xi$ с носителем в $U$ отвечает сечение $\mathscr{C}^*(G)$ с тем же носителем. Наоборот, если $s$ — сечение $\mathscr{C}^*(G)$ с компактным носителем $|s| \subset U$, то для любой точки $x \in |s|$ найдутся окрестность $V_x \subset U$ и элемент $c_x \in D^*(V_x)$ такие, что $r(c_x)$ совпадает на $V_x$ с $s$. Выбирая из покрытия $\{V_x\}$ множества $|s|$ конечное и пользуясь мономорфностью $r$, нетрудно найти коцепь $\xi$ с носителем $|s|$, совпадающую (при вложении $r$) с сечением $s$. Аналогичные рассуждения устанавливают $c$-мягкость $\mathscr{C}^*(G)$, из которой (поскольку $B$ локально компактно и паракомпактно) легко следует мягкость. Факт, что $\mathscr{C}^*(G)$ — резольвента $G$, вытекает из общих соображений, изложенных в п. п. 2.3 и 2.4 гл. 1 (поскольку приведенные когомологии точки равны нулю, см. пример 1 в § 1.1 в [126]; в размерности 0 можно использовать аргументы из п. 2.1 выше). Более подробно подобные рассуждения проводятся в § 7 статьи [62] (хотя и для иного типа коцепей).

Примечательным свойством рассматриваемых коцепей является то, что для любого открытого $U \subset B$ комплексы $C_c^*(U; R)$ свободны*) ($R$ — любое кольцо главных идеалов). Кроме того, модули $C_c^p(U; R)$ выделяются в $C_c^p(B; R)$ прямыми слагаемыми (§ 4.4 в [126]). Это означает, в частности (см.

*) Краткое сообщение об этом и о возможности построения на этой основе теории гомологий (см. след. пункт) было опубликовано в [125].

§ 5 гл. 1 выше), что сечения с компактными носителями пучков $\mathscr{C}^*(R)$ над любыми замкнутыми $Y\subset B$ — также свободные коцепные комплексы.

**3.2. Цепи локально компактных пространств.** Естественность существования свободных коцепей, а также форм связи их с цепями подтверждается соображениями, приведенными в п. п. 1.2 и 1.3 гл. 2. Именно так определяются цепи в главе 4 книги [126] (см. также [125]): $C_*(B; G)=\mathrm{Hom}_R(C_c^*(B; R), G)$. Точной последовательности $0\to C_c^*(U; R)\to C_c^*(B; R)\to C_c^*(F; R)\to 0$ с замкнутым $F=B\setminus U$ отвечает (в силу расщепляемости в каждой размерности) короткая точная последовательность цепей $0\to C_*(F; G)\to$ $\to C_*(B; G)\to C_*(U; G)\to 0$ и, следовательно, точная последовательность гомологий пары $(B, F)$, в которой $H_*(B, F; G)$ — гомологии комплекса $C_*(B, F; G)=C_*(U; G)$. Подкомплекс $C^c_*(B; G)\subset$ $\subset C_*(B; G)$ цепей с компактными носителями определяется в [126] как объединение всех $C_*(F; G)$ по компактным $\mathscr{C}\subset B$. Определение носителя $|\xi|$ (не только компактного) цепи $\xi\in C_*(B; G)$ можно дать и непосредственно: это минимальное (замкнутое) множество такое, что $\xi$ обращается в нуль на всех коцепях с (компактными) носителями в $B\setminus|\xi|$. Любая коцепь из $C_c^*(B, R)$ в силу мягкости этих пучков представляется в виде суммы коцепей с носителями любой мелкости, поэтому носитель ненулевой цепи всегда непуст.

Этих сведений, очевидно, достаточно для развития теории в плане § 2 гл. 2 (в частности, для построения вялых пучков цепей). Как отмечалось в п. 2.2 гл. 2, аналогичным образом цепи строятся и для локально постоянных систем коэффициентов $\mathscr{G}$.

**3.3. Общий случай.** Вложение замкнутого множества $F\subset B$ индуцирует включение цепей $C_*(F; \mathscr{G})\subset C_*(B; \mathscr{G})$, поэтому для произвольного (паракомпактного хаусдорфова) пространства $X$ определены комплексы цепей $C^c_*(X; \mathscr{G})=\bigcup\limits_{C\subset X} C_*(C; \mathscr{G})$ и $C_*(X; \mathscr{G})=$ $=\bigcup\limits_{B\subset X} C_*(B; \mathscr{G})$, где $C$ — всевозможные компактные, а $B$ — замкнутые локально компактные подпространства $X$, следовательно, и гомологии $H^c_*(X; \mathscr{G})$ и $H_*(X, \mathscr{G})$ первого (т. е. с компактными носителями) и второго рода. Аналогично определяются цепи и гомологии произвольных пар $(X, Y)$ (по соотвествующим парам $(C, C')$ и $(B, B')$, $C'\subset Y$ и $B'\subset Y$). Эти цепи складываются в мягкие пучки, см. п. 2.5 гл. 2. В [126] рассматриваются только $H^c_*$ определяемые как $H^c_q(X, Y; G)=\varinjlim H_q(C, C'; G)$ (гл. 9 в [126]).

**3.4.** Замечания. Удобным преимуществом цепей и коцепей Масси является их функториальная зависимость (при фиксированных коэффициентах) от пространства $X$. Имеются и недостатки. Так, цепи и коцепи отличны от нуля во всех положительных размерностях, в связи с чем, например, приходится специально доказывать (см. теорему 3.21 гл. 3 в [126]), что гомологии и когомологии многообразия $M$ равны нулю в размерностях $q > \dim M$. Подход неприменим для получения соотношений, связывающих $H_*$ с гомологиями Чеха $\check{H}_*$. Возникает необходимость в проверке (см. § 4.11 в [126]) инвариантности гомологий при замене кольца (такой инвариантности нет, например, в теории Бореля — Мура, см. ниже § 6). Вопрос об инвариантности не возникает при прямых определениях цепей (независимо от коцепей), см. след. параграф.

## § 4. Цепи и коцепи типа Чеха

**4.1. Свободные коцепи** типа Чеха с коэффициентами в кольце главных идеалов $R$, определяющие когомологии $H_c^*$ с компактными носителями, были построены в [62] (для пространств без второй аксиомы счетности — в примечании к § 1 в [64]; см. также § 2 в [65] или замечания после теоремы 3.1 в [68]). Для этого рассматривались локально конечные покрытия $\alpha$ локально компактного (паракомпактного хаусдорфова) пространства $B$, состоящие из «канонических» компактных множеств $F$ (совпадающих с замыканиями $\operatorname{Int} F$) таких, что $\operatorname{Int} F \cap \operatorname{Int} F' = \varnothing$ для любых $F \neq F'$ из $\alpha$. Для таких покрытий $\alpha, \beta$ пусть $\alpha \wedge \beta$ — покрытие, составленное из замыканий множеств $\operatorname{Int} F \cap \operatorname{Int} F'$, $F \in \alpha$, $F' \in \beta$. Пусть $\omega$ — любая система таких покрытий $\alpha$, удовлетворяющая требованиям: 1) для $\alpha, \beta \in \omega$ существует $\gamma \in \omega$, вписанное в $\alpha \wedge \beta$ $(\alpha \wedge \beta < \gamma)$; 2) покрытия из $\omega$ локально измельчаются (для любой окрестности $U$ точки $x \in B$ найдется такое $\alpha \in \omega$, что $F \subset U$, если $x \in F$, $F \in \alpha$). Проекции нервов вписанных друг в друга покрытий из $\omega$ однозначны, являются собственными сюръективными отображениями, поэтому для любого $R$-модуля $G$ определен комплекс $C^*_{\omega c}(B; G) = \varinjlim_{\alpha \in \omega} C^*_c(\alpha; G)$ коцепей с компактными носителями (являющийся, очевидно, объединением своих подкомплексов $C^*_c(\alpha; G)$). Для любой системы $\omega$ указанного типа он и определяет (см. ниже) группы $H^*_c(B; G)$.

Вместо бесконечных покрытий $\alpha$ при построении теории удобнее использовать пары $(\alpha, \alpha')$, где $\alpha \in \omega$, а $\alpha'$ — любая часть $\alpha$, содержащая все элементы $\alpha$, кроме конечного числа. Считая, что $(\alpha, \alpha') < (\beta, \beta')$, если $\alpha < \beta$ и объединение $\beta'$ содержится в объединении всех $F \in \alpha'$, и учитывая, что $C^*_c(\alpha; G) = \varinjlim_{\alpha'} C^*(\alpha, \alpha'; G)$, заключаем, что $C^*_{\omega c}(B; G) = \varinjlim_{(\alpha, \alpha')} C^*(\alpha, \alpha'; G)$. В случае $G = R$ модули $C^q(\alpha, \alpha'; R)$ свободны и конечно порождены, а индуктивная система таких модулей удовлетворяет условиям [114], поэтому

$C^q_c(B; R)$ — свободные $R$-модули (содержащие $C^q(\alpha, \alpha'; R)$ как прямые слагаемые).

Пары $(\alpha, \alpha')$ можно трактовать как канонические покрытия компактификации $\widetilde{B}$ (в случае некомпактного $B$) одной точкой $*$, поэтому $C^*_{\omega c}(B; G)$ служит одновременно комплексом коцепей компактной пары $(\widetilde{B}, *)$. Из-за коммутирования операций $\varinjlim$ и $H^q$ когомологии $C^*_{\omega c}(B; G)$ совпадают с пределом $\varinjlim H^q(\alpha, \alpha'; G)$, который, как известно, есть просто когомологии Чеха $H^q(\widetilde{B}, *; G)$. Отсюда $H^*_c(B; G) = H^*(\widetilde{B}, *; G)$ (и, в частности, когомологии не зависят от выбора $\omega$).

Требование, чтобы покрытия $\alpha \in \omega$ состояли из канонических множеств, довольно обременительно (например, при рассмотрении когомологий подпространств в $B$), но оно не существенно. Можно рассматривать локально конечные покрытия, состоящие из любых замкнутых множеств (возможно, с повторениями), не все из которых даже компактны. Однако вместе с требованиями 1) и 2) выше каждой паре $\alpha < \beta$ должна отвечать некоторая сюръективная проекция их нервов, совпадающая с композицией промежуточных при $\alpha < \gamma < \beta$. Такие покрытия возникают, например, когда $\omega$ — пересечение с $B$ системы локально конечных покрытий каноническими замкнутыми множествами любого объемлющего $B$ пространства $X$. Коцепи $C^*_{\omega c}(B; G)$ в этом случае следует определять через предел коцепей пар $(\alpha, \alpha')$, в которых $\alpha'$ — система всех множеств из $\alpha$, кроме конечного числа компактных. Остаются в силе все основные утверждения о комплексе $C^*_{\omega c}(B; G)$, высказанные выше (включая об их свободности при $G = R$). Кроме того, ограничение $\omega$ на любое замкнутое множество $A \subset B$ (получающееся из пересечений $F \cap A$, $F \in \alpha$, $\alpha \in \omega$) определяет коцепи $C^*_{\omega c}(A; G)$ и эпиморфизм $C^*_{\omega c}(B; G) \to C^*_{\omega c}(A; G)$ (расщепляющийся при $G = R$, поскольку коцепи $A$ также свободны, в каждой отдельной размерности*).*

Легко определяется носитель коцепи из $C^*(\alpha, \alpha'; G)$ (объединение пересечений тех множеств из $\alpha$, на которых коцепь отлична от нуля), следовательно, и любой коцепи комплекса $C^*_{\omega c}(B; G)$, являющегося объединением комплексов пар $(\alpha, \alpha')$ (по всем $\alpha \in \omega$ и всем $\alpha'$). Поэтому так же, как в § 3, определяются предпучки коцепей, приводящие к пучкам $\mathscr{C}^*_{\Phi}(G)$ на $B$, сечениями с компактными носителями которых служат $C^*_{\omega c}(B; G)$. Из общих соображений, изложенных в § 2 гл. 1, вытекает их $c$-мягкость, а, следовательно (ср. с § 3), и мягкость. Поскольку для компактных окрестностей $A$ точек $x \in B$ когомологии комплекса $C^*_{\omega}(A; G)$, бу-

---

* Так как, очевидно, $C^*_{\omega c}(B, G) = C^*_{\omega c}(B; R) \otimes_R G$, расщепляемость имеет место и для любого $R$-модуля коэффициентов $G$.

дучи прямыми пределами когомологий $H^n(\alpha', G)$ по $\alpha' = \alpha \cap A$, совпадают с $H^n(A; G)$, а пределы этих групп по таким окрестностям точек совпадают с когомологиями точки, $\mathscr{C}^*_\omega(G)$ — мягкая резольвента постоянного пучка $G$ (в размерности нуль коцепь покрытия, рассматриваемая как сечение $\mathscr{C}^0_\omega(G)$, служит коциклом в точности тогда, когда она принимает постоянные значения на связных компонентах нерва $\alpha$, и рассматриваемая как функция на элементах покрытия $\alpha$, локально постоянна на $B$, ср. с п. 2.4 гл. 1). Отсюда еще раз вытекает, в частности, независимость определения когомологий от участвующей в нем системы покрытий $\omega$.

**4.2** Цепи локально компактных пространств были построены в [62] (для пространств без 2-й аксиомы счетности — в примечании к § 1 в [64]). Они определяются как $C^\omega_*(B; G) = \varprojlim_{\alpha \in \omega} C_*(\alpha; C) = \varprojlim_{(\alpha,\alpha')} C_*(\alpha, \alpha'; G)$, где $\omega$, $\alpha$ и $\alpha'$ — те же, что и в предыд. п. Возникают такие же, как для когомологий $H^*_c$, взаимоотношения $H_*(B; G)$ с гомологиями одноточечной компактификации $B$. Точно так же кроме систем $\omega$ канонических покрытий можно рассматривать более широкие (удовлетворяющие требованиям 1) и 2), с однозначными сюръективными проекциями нервов, состоящие из замкнутых локально конечных покрытий).

Рассматриваемое определение цепей не зависит, очевидно, от коцепей (ср. с п. 3.4 выше). Однако связь (являющаяся основой определения в § 3) имеется: $C^\omega_*(B; G) = \mathrm{Hom}_R(C^*_{\omega c}(B; R), G)$ (следствие очевидного соотношения $\mathrm{Hom}(\varinjlim \ldots, G) = \varprojlim \mathrm{Hom}(\ldots, G)$). Ее следствием, в частности, является независимость возникающих гомологий от фигурирующей в определении системы покрытий $\omega$. Если $\sigma$ — другая такая система, то для $\tau = \omega \wedge \sigma$ имеются отображения комплексов свободных коцепей (с коэффициентами в $R$) $C^*_{\omega c} \to C^*_{\tau c}$, $C^*_{\sigma c} \to C^*_{\tau c}$, индуцирующие тождественный изоморфизм когомологий и потому являющиеся цепными гомотопическими эквивалентностями (§ 4 в [62]). Следовательно, гомотопическими эквивалентностями являются и отображения цепей $C^\tau_* \to C^\omega_*$ и $C^\tau_* \to C^\sigma_*$. Другим следствием (с учетом свойств пучков $\mathscr{C}^*_\omega(R)$) является возможность трактовать цепи (ср. с § 3) как сечения вялых пучков, пользоваться теорией в плане § 2 гл. 2.

Сложнее обстоит дело для локально постоянных коэффициентов $\mathscr{G}$ (со слоем $G$). Цепные комплексы $C^\omega_*(B; G)$ определяются так же (при этом на $\omega$ накладывается дополнительное требование: элементы покрытий $\alpha \in \omega$ должны быть достаточно мелкими, чтобы ограничение $\mathscr{G}$ на каждое множество $F \in \alpha$ было постоянно). Что касается пучков цепей $\mathscr{C}^{\omega}_{*}(\mathscr{G})$, то, поскольку цепи можно отождествить с функциями на свободных образующих комплекса $C^{*}_{\omega c}$ $(B;\ R)$ со значениями в слоях $\mathscr{G}$ над носителями образующих, эти пучки строятся таким же образом, как и для постоянных коэффициентов и обладают теми же свойствами (см. § 3 в [64]; в частности, поскольку $\mathscr{C}^{*}_{\omega}(\mathscr{G})$ локально изоморфны вялым пучкам $\mathscr{C}^{\omega}_{*}(G)$, они также вялые в соответствии с п. 3.1 гл. 2 в [107]).

Не очевидно, однако, даже то, почему $C^{\omega}_{*}(B;\mathscr{G})\neq 0$, ибо имеются примеры проективных систем свободных групп конечного ранга с эпиморфными отображениями, но с нулевыми (или счетно порожденными) пределами [38]. Тем не менее это так, имеются даже эпиморфизмы $C^{\omega}_{*}(B;\mathscr{G})\to C_{*}(\alpha,\alpha';\mathscr{G})$ (лемма 3.2 в [68]). Удается показать (лемма 3.3 в [68]), что точной последовательности систем коэффициентов $0\to\mathscr{G}'\to\mathscr{G}\to\mathscr{G}''\to 0$ отвечает короткая точная последовательность соответствующих цепных комплексов (для постоянных коэффициентов это очевидное следствие из связи со свободными коцепями). Отсюда, пользуясь наличием функториального вложения любого $R$-модуля $G$ в компактный $S=\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G, S^1), S^1)$ ($S^1$ — группа приведенных по модулю 1 действительных чисел), строим для $\mathscr{G}$ короткую точную последовательность систем $0\to\mathscr{G}\to\mathscr{S}\to\mathscr{K}\to 0$, в которой $\mathscr{S}$ имеет компактные слои $S$, и, учитывая, что $\varprojlim\limits_{(\alpha,\alpha')}{}^{p} C_{*}(\alpha,\alpha';\mathscr{S})=0$ при $p\geqslant 1$, с помощью отвечающей короткой точной последовательности проективных систем

$$0\to C_{*}(\alpha,\alpha';\mathscr{G})\to C_{*}(\alpha,\alpha';\mathscr{S})\to C_{*}(\alpha,\alpha';\mathscr{K})\to 0$$

точной последовательности производных функторов $\varprojlim{}^{p}$ заключаем, что $\varprojlim\limits_{(\alpha,\alpha')}{}^{p} C_{*}(\alpha,\alpha';\mathscr{G})=0$ при $p\geqslant 1$ и для любых систем коэффициентов $\mathscr{G}$.

Более тонкий анализ конструкций показывает (§ 3 в [68]), что $\varprojlim\limits_{(\alpha,\alpha')}{}^{p} Z_n(\alpha,\alpha';\mathscr{G})=0$ при $p\geqslant 2$ ($Z_n(\alpha,\alpha';\mathscr{G})$ — циклы комплексов $C_{*}(\alpha,\alpha';\mathscr{G})$). Отсюда вытекает (теорема 3.2 в [68]), что $\varprojlim\limits_{(\alpha,\alpha')}{}^{p} H_k(\alpha,\alpha';\mathscr{G})=0$ при $p\geqslant 2$ и имеют место точные последовательности

$$0\to\varprojlim_{(\alpha,\alpha')}{}^{1} H_{k+1}(\alpha,\alpha';\mathscr{G})\to H_k(B;\mathscr{G})\to\varprojlim_{(\alpha,\alpha')} H_k(\alpha,\alpha';\mathscr{G})\to 0 \qquad (1)$$

(см. по этому поводу также пп. 1.1, 1.2 гл. 8 в [69]). С помощью специальных систем покрытий и средств гомологической алгебры устанавливается (конец § 3 в [68]), что крайние члены этой последовательности не зависят от выбора $\omega$. Сравнивая, как и выше, такие последовательности для $\omega$, $\sigma$ и $\tau=\omega\wedge\sigma$, с помощью леммы о пяти изоморфизмах заключаем, что определение групп $H_k(B; \mathscr{G})$ не зависит от $\omega$ (теорема 3.1 в [68]).

Не зависят от выбора $\omega$ и определяемые пересечением с $Y$ системы $\omega$ гомологии $H_*(Y; \mathscr{G})$ любого замкнутого подпространства $Y \subset B$. Независимость от $\omega$ гомологий пар $(B, Y)$ — следствие указанного выше способа сравнивания, точных последовательностей гомологий пар и леммы о пяти изоморфизмах. Наконец, независимость от $\omega$ гомологий любых подпространств $M \subset B$ вытекает из их представления в виде прямого предела по подходящим (замкнутым в $B$) носителям.

Определяющий гомологии замкнутого множества $Y \subset B$ комплекс $C_*^{\omega}(Y; \mathscr{G})$ (получаемый с помощью системы покрытий $Y$, являющихся пересечениями с $Y$ покрытий из $\omega$) совпадает с подкомплексом в $C_*^{\omega}(B; \mathscr{G})$, состоящим из всех цепей с носителями в $Y$. В самом деле, носитель цепи $\xi \in C_*^{\omega}(B; \mathscr{G})$ — это (минимальное) замкнутое множество $|\xi|$ такое, что для любой точки $x \in B \setminus |\xi|$ найдутся такая окрестность $U$ этой точки и такое $\alpha \in \omega$, что образ $\xi$ в $C_*(\alpha, \alpha'; \mathscr{G})$ (пусть множества из $\alpha'$ не пересекаются с $U$) имеет нулевые коэффициенты при всех пересечениях множеств из $\alpha$ (отвечающих симплексам нерва $\alpha$), имеющих непустое пересечение с $U$. Для цепей с достаточно малыми носителями утверждение вытекает из совпадения этого определения носителя с определением, данным в § 3 для постоянных коэффициентов (примененным к цепям $C_*^{\omega}(B; \mathscr{G})$), для любых — из их разложения в суммы цепей с достаточно малыми носителями.

**4.3. Общий случай.** Чтобы получить цепи для гомологий произвольного (паракомпактного хаусдорфова) пространства $X$, фиксируем на $X$ удовлетворяющую требованиям 1) и 2) выше систему $\omega$ локально конечных покрытий замкнутыми каноническими множествами, для элементов каждого покрытия которой из $F \neq F'$ следует $\operatorname{Int} F \cap \operatorname{Int} F' = \varnothing$. Пересекая $\omega$ с каждым компактным множеством $C \subset X$ или любым замкнутым локально компактным $B \subset X$, получим для них комплексы $C_*^{\omega}(C; \mathscr{G})$, $C_*^{\omega}(B; \mathscr{G})$, и как прямые пределы таких комплексов по указанным $C$ и $B$ — цепные комплексы $C_*^{\omega c}(X; \mathscr{G})$ и $C_*^{\omega}(X; \mathscr{G})$, которые и определяют нужные гомологии $H_*^c$ и $H_*$ пространства $X$, а при учете носителей и т. п. — также любых подпространств $X$ и пар. Независимость возникающих гомологий от $\omega$ вытекает, например, из соотношений типа $H_n^c(X; \mathscr{G}) = \varinjlim_{C \subset X} H_n(C; \mathscr{G})$, $H_n(X; \mathscr{G}) = \varinjlim_{B \subset X} H_n(B; \mathscr{G})$ и т. д.

**4.4. Некоторые замечания.** Недостатком конструкции цепей (а также и коцепей), рассмотренных в настоящем параграфе, является необходимость проверки независимости возникающей теории от выбора определяющей цепи (и коцепи) системы покрытий, фактически — доказательства ее топологической инвариантности наподобие доказательства независимости классических групп полиэдров от выбора их конкретных триангуляций. Проявляется недостаток, в основном, при определении гомоморфизмов, индуцированных непрерывными отображениями пространств. Рассматриваемые цепи и коцепи, однако, удобны тем, что позволяют (где это возможно) подбором подходящей системы покрытий учитывать какую-то дополнительную информацию (соображения счетности — в метрическом случае в качестве $\omega$ можно использовать последовательности вписанных друг в друга измельчающихся покрытий, соображения размерности — подбором покрытий нужной кратности на всем пространстве или на некоторых подпространствах и т. п.). Эквивалентность подходов к описанию гомологий, рассмотренных в §§ 3 и 4, для постоянных коэффициентов установлена в § 6 обзора [65]. Эквивалентность известна и для локально постоянных коэффициентов (хотя доказательство не публиковалось).

Идея описания гомологий и когомологий с помощью цепей и коцепей, определяемых покрытиями с однозначной вписанностью, возникла еще в 30-е годы. Под влиянием теории характеров Л. С. Понтрягина, однако, гомологии стали традиционно трактоваться как группы характеров когомологий и обычно рассматриваться с коэффициентами в компактных группах $G$, при их же определении (а потому и при рассмотрении групп циклов и границ) стала учитываться топология обратного предела. По традиции это стали делать и для некомпактных $G$, а поскольку оперировать с незамкнутыми подгруппами, какими, в отличие от групп циклов, при переходе к обратным пределам обычно оказывались подгруппы границ, считалось мало естественным, такие группы как правило замыкались, что обычно и приводило к гомологиям типа Чеха. В случае некомпактных пространств не всегда учитывалась необходимость рассматривать бесконечные покрытия, а при их рассмотрении — фактор компактности (в соответствии с которым, см. введение и § 1 гл. 2, цепи общих пространств естественнее определять не как обратные пределы цепей покрытий, а как прямые пределы таких обратных пределов, сперва рассмотренных для компактных или локально компактных подпространств изучаемого пространства). Наличие большого числа логически возможных вариантов исходного определения гомологий и привело к тому, что легшие в основу современной теории гомологии Н. Стинрода (1940 г.) и К. А. Ситникова (1951 г.) были замечены не сразу, а их значение было окончательно понято лишь к началу 60-х годов. По поводу истории развития гомологий, влияния на это неточности функтора обратного предела и некоторых других факторов см. обзор [62], а также п. 2.1 гл. 2 и п. 2.4 гл. 5 обзора [69].

## § 5. Некоторые выводы из устройства цепей и коцепей

**5.1. О формулах универсальных коэффициентов.** Пусть $Y$ — замкнутое подмножество паракомпактного пространства $X$, $\varphi$ — паракомпактифицирующее семейство носителей. Для конечно порожденного модуля $G$ над кольцом $R$ главных идеалов или, более обще, для любого конечно представимого модуля над наследственным кольцом (которое может быть и ненетеровым) имеют место следующие точные последовательности (формулы универсальных коэффициентов)

$$0 \to H^n_\varphi(X, Y; R) \otimes_R G \to H^n_\varphi(X, Y; G) \to \\ \to \operatorname{Tor}_R\left(H^{n+1}_\varphi(X, Y; R), G\right) \to 0. \qquad (2)$$

Ограничение на $G$ объясняется тем, что группы коцепей покрытия $C^n(\alpha; \mathcal{G})$ изоморфны бесконечным произведениям $\Pi G$, для которых $\Pi G = (\Pi R) \otimes_R G$ в точности для конечно представимых модулей $G$ (лемма 7 в [62]). Таким образом, формулы (2) не имеют места, например, для нульмерных когомологий счетного дискретного пространства.

С учетом того, что группы $H^*$ совпадают с когомологиями Чеха $\check{H}^*$, в случае, когда $\varphi$ — семейство всех замкнутых множеств, соотношения (2) — следствие наличия таких формул для полиэдров и перестановочности функторов $\otimes$ и Tor с прямыми пределами (по открытым покрытиям $\alpha$ пространства $X$, с помощью которых определяются группы $\check{H}^*$).

Носителем коцепи $\xi \in C^*(\alpha; G)$ называется замыкание объединения всех тех (отвечающих симплексам нерва $\alpha$) пересечений множеств из $\alpha$, на которых $\xi$ отлична от нуля. Подкомплексы $C^*_\varphi(\alpha; G) \subset C^*(\alpha; G)$, составленные коцепями с носителями в $\varphi$, совместимы с отображениями, отвечающими вписанным покрытиям, а их когомологии при переходе к прямому пределу определяют $\check{H}^*_\varphi(X; G) = H^*_\varphi(X; G)$ (см. п. 2.2 гл. 4 в [69]). Кроме того, комплексы $C^*_\varphi(X; R)$ без кручения и $C^*_\varphi(X; G) = C^*_\varphi(X; R) \otimes_R G$, поэтому соотношения (2) верны и в общем случае.

Эти выводы можно сделать и исходя из комплекса коцепей Александера — Спаньера. При этом получается дополнительный факт: последовательность (2) расщепляется (расщепление — следствие общей конструкции (2) в гомологической алгебре, см. теорему 3.3 гл. 6 в [92], оно естественно по аргументу $G$, но не $(X, Y)$).

Из данного в п. 4.1 описания коцепей немедленно следует, что $C^*_{\omega c}(B; G) = C^*_{\omega c}(B; R) \otimes_R G$ для любых $G$, поэтому в случае когомологий $H^*_c$ локально компактных пространств формулы (2) (они расщепляются) имеют место для любых модулей $G$ над наследственными кольцами (см. теорему 1 в [62]). При использовании коцепей Масси § 3 этот вывод делается сложнее (см. § 4.11 в [126] для $R=Z$ и добавление редактора к главе 4 в [126] — для общего случая).

Из описания цепей локально компактных пространств (п.п. 3.2 и 4.2 выше) ясно, что в каждой отдельной размерности они изоморфны бесконечному произведению $\Pi G$, поэтому $C_*(B;\ G)=C_*(B;\ R)\otimes_R G$ только для конечно представимых $G$. Цепи произвольного (паракомпактного хаусдорфова) пространства $X$, как и любых подпространств в $X$ и пар, описываются как прямые пределы по замкнутым локально компактным подмножествам некоторого семейства $\varphi$ (не обязательно паракомпактифицирующего), и потому также удовлетворяют указанному соотношению. Таким образом, для любого конечно представимого модуля $G$ над наследственным кольцом и любого семейства носителей $\varphi$ (в частности, при $\varphi=c$ — для гомологий с компактными носителями) имеют место расщепляющиеся точные последовательности

$$
\begin{aligned}
0\to H_n^{\varphi}(X, Y;\ R)\otimes_R G\to H_n^{\varphi}(X, Y;\ G)\to \\
\to \mathrm{Tor}_R\left(H_{n-1}^{\varphi}(X, Y;\ R),\ G\right)\to 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

(формулы универсальных коэффициентов). Существенность ограничения на $G$ демонстрирует одноточечная компактификация счетного дискретного множества.

Соотношения (3) получены в теоремах 2 и 2′ в [62] (см. также формулы (2.2) и (2.3) в [65]). Они получаются и с помощью цепей Масси (см. добавление редактора к гл. 4 в [126]). Справедливость соотношений (2) и (3) (для модулей $G$ конечного типа и семейства $\varphi$ всех замкнутых множеств) в категории полиэдров (локально компактных для (3)) вытекает также из теоремы 10 § 5 гл. 10 в [141].

Поскольку для цепей локально компактного пространства $B$ справедливо тождество $C_*(B;\ G)=\mathrm{Hom}_R(C_c^*(B;\ R),\ G)$, для любого модуля $G$ над наследственным кольцом $R$ имеют место следующие формулы универсальных коэффициентов ($F$ замкнуто в $B$)

$$
\begin{aligned}
0\to \mathrm{Ext}_R\left(H_c^{n+1}(B, F;\ R),\ G\right)\to H_n(B, F;\ G)\to \\
\to \mathrm{Hom}_R\left(H_c^{n}(B, F;\ R),\ G\right)\to 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Эти точные последовательности расщепляются (см. общую конструкцию в § 3 гл. 6 в [92]), и расщепление естественно по аргументу $G$. Соотношения получены в теореме 3 в [62] (см. также формулу (2.1) в [65]). Для компактных пространств при $R=Z$ они ранее получены в [128] (а в терминах первоначального определения Н. Стинрода — в 1942 г. С. Маклейном и С. Эйленбергом, см. § 2 обзора [65]). Соотношения получаются и с помощью цепей Масси (§ 4.8 в [126] для абелевых групп и добавление редактора к гл. 4 в [126] — для модулей).

Для топологических пространств, наделенных какой-то дополнительной структурой (гомологически локально связных, с конечно порожденными гомологиями или когомологиями с коэффициентами в $R$ и др.), имеют место и некоторые другие соотношения (например, выражающие когомологии через гомологии), внешне не отличающиеся от формул универсальных коэффициентов, но имеющие место в ситуациях, когда стандартные связи между цепями и коцепями посредством функторов $\otimes$ и Hom отсутствуют, и доказываемые с помощью иных средств гомологической алгебры. Кроме того, в определенных ситуациях при отсутствии конкретных видов связи между функторами имеет место введенная Г. Бредоном так называемая функториальная зависимость, когда наличие изоморфизма одних функторов при конкретных непрерывных отображениях пространств влечет изоморфизм других (зависимых, тем самым, от первых). Обзор результатов такого рода см. в п.п. 4.2, 4.3 главы 8 в [69].

**5.2. Предельные переходы. Связь с гомологиями Чеха.** Для компактного $X$ (например, при замене локально компактного пространства его одноточечной компактификацией, имеющей, в сущности, те же гомологии) соотношения (1) из § 4 (игравшие там, в общем, вспомогательную роль при проверке определения) дают точные последовательности

$$0 \to \varprojlim_{\alpha}{}^1 H_{n+1}(\alpha; \mathcal{G}) \to H_n(X; \mathcal{G}) \to \check{H}_n(X; \mathcal{G}) \to 0, \qquad (5)$$

связывающие группы $H_n$ с гомологиями Чеха $\check{H}_*$.

В таком виде этот результат приведен в добавлении редактора к главе 4 в [126] (покрытия $\alpha$ здесь можно использовать как замкнутые, так и открытые, см., например, § 3 в [68]). Для постоянных коэффициентов $G$ результат получен раньше в [36] (утверждение 3 теоремы 2 и утверждение 1 теоремы 3, фигурирующая в них группа $\mathrm{Pext}^1$ совпадает с $\varprojlim^1$ в силу теоремы 6 в [32]) и передоказан затем в [40]. Для метрических компактов соотношения известны с начала 60-х годов (Милнор, Роос, Девель и др.).

Соотношения (5) использовались для выявления различных условий (на $X$ и $\mathcal{G}$), при которых $H_n = \check{H}_n$. Это так, например, при $n = \dim X$ [62], для гомологически локально связных $X$ [62] (для метризуемых локально компактных $X$ — $H_*^c(X; Z) = \check{H}_*^c(X; Z)$, [44], [76]), в случае метрического $X$ — для счетных $G$ и $H_n(X; G)$ (поскольку для счетных проективных систем, состоящих из счетных групп $A_i$, либо $\varprojlim_i{}^1 A_i = 0$, либо мощность $\varprojlim_i{}^1 A_i$ не меньше континуума, см. лемму 3 в [76] или более общий результат — лемму 1.6 в [66]), в случае, если $H^{n+1}(X; Z)$ — прямая сумма свободной группы и группы кручения [36] (и в др. случаях). См. также п. 1.3 гл. 8 в [69]. Изоморфизм $H_*(X; G) = \check{H}_*(X; G)$ имеет место для всех компактных $X$ в точности при условии, что группа $G$ алгебраически компактна [36] (в частности, конечна, просто компактна, делима, является группой поля). Для локально компактного пространства $X$ со 2-й аксиомой счетности (например, для локально конечного полиэдра) из (5) вытекает, что для конечно порожденного модуля $G$ над счетным кольцом $R$ модули $H_n(X; G)$ (аналогично, $H^n(X; G)$, если $X$ еще и гомологически локально связно) либо конечно порождены, либо имеют мощность континуума [68].

Для алгебраически компактных $G$, поскольку $H_* = \check{H}_*$, в категории компактных пространств теория $H_*$ непрерывна [36]: $H_n\left(\varprojlim_{\lambda} X_\lambda; G\right) = \varprojlim_{\lambda} H_n(X_\lambda; G)$. В общем случае имеется лишь преобразование $\sigma$: $H_n(X; G) \to \varprojlim_{\lambda} H_n(X_\lambda; G)$, где $X = \varprojlim_{\lambda} X_\lambda$. Поскольку цепные комплексы $C_*(X)$ и $C_*^\lambda = C_*(X_\lambda)$ имеют вид $\mathrm{Hom}_R(C_\lambda^*, G)$, где $C_\lambda^*$ — свободные комплексы коцепей, преобразование $\sigma$ включается в точные последовательности вида

$$0 \to \varprojlim_{\lambda}{}^1 \mathrm{Hom}\left(H^{n+1}(C_\lambda^*), G\right) \to H_n\left(\varprojlim_{\lambda} C_*^\lambda\right) \xrightarrow{\sigma} \varprojlim_{\lambda} H_n(C_*^\lambda) \to$$

$$\to \varprojlim_{\lambda}{}^2 \mathrm{Hom}\left(H^{n+1}(C_\lambda^*), G\right) \to 0. \tag{6}$$

Наличие точных последовательностей (6) (не только для комплексов цепей и коцепей компактных пространств $X_\lambda$, но и формально в несколько более общей ситуации) было установлено в [36] (лемма 1 и начало § 2, а также утверждение 1 теоремы 5). Авторами детально исследована структура преобразования $\sigma$, в частности, показана нетривиальность в общем случае четвертого члена в (6) (пример 2 в [36]). Для конечно порожденных групп $A_\lambda$ (в частности, для когомологий нервов конечных покрытий), а также для счетных проективных систем $\varprojlim_{\lambda}{}^p \mathrm{Hom}(A_\lambda, G) = 0$ при $p \geqslant 2$, и из формул универсальных коэффициентов $\varprojlim_{\lambda}{}^1 \mathrm{Hom}\left(H^{n+1}(C_\lambda^*), G\right) = \varprojlim_{\lambda}{}^1 H_{n+1}(C_*^\lambda)$, поэтому соотношения (6) превращаются в точные последовательности (5) (или их вариант в более общих ситуациях), см.

утверждение 2 теоремы 5 в [36]*). Позже соотношения (6) (применением спектральной последовательности Рооса к проективным системам, составленным формулами универсальных коэффициентов) были получены также в [127]. Для $p\geqslant 2$ было показано, кроме того, что

$$\varprojlim_{\lambda}{}^{p} H_n(C_*^\lambda) = \varprojlim_{\lambda}{}^{p} \operatorname{Hom}(H^n(C_\lambda^*), G) \oplus \varprojlim_{\lambda}{}^{p+2} \operatorname{Hom}(H^{n+1}(C_\lambda^*), G).$$

Это позволило автору продолжить (6) до бесконечной в обе стороны точной последовательности с группами $\varprojlim_{\lambda}{}^{2k} H_{n+k}(C_*^\lambda)$ вправо и $\varprojlim_{\lambda}{}^{2k-1} H_{n+k}(C_*^\lambda)$ — влево, в том числе и в терминах производных функторов от произвольного точного слева ковариантного аддитивного функтора $F$ (см. [41], [127]). (Такое продолжение, однако, не несет в себе дополнительной информации.) См. также п. п. 1.1 и 1.2 гл. 8 в [69].

Аналогичная техника вместе с существенной для этих целей интерпретацией цепей и коцепей как сечений вялых дифференциальных пучков применима для получения других предельных соотношений. Несмотря на кажущееся многообразие они разделены по типам: а) связь когомологий $Y$ с когомологиями подпространств $Y_\lambda \subset Y = \bigcup_\lambda Y_\lambda$, $Y_\lambda \subset \operatorname{Int} Y_\mu$ при $\lambda < \mu$; б) связь когомологий пары $(X, Y)$ для открытого $Y \subset X$ с когомологиями пар $(X, Y_\lambda)$ (для указанных $Y_\lambda$); в) связь гомологий 2-го рода локально компактного пространства $Y$ с гомологиями открытых $Y_\lambda \subset Y$ (указанного типа); г) для открытого подпространства $Y$ локально компактного пространства $X$ связь гомологий 2-го рода $B = X \setminus Y$ с гомологиями окружающих $B$ множеств $B_\lambda = X \setminus Y_\lambda$. В каждом случае возникают спектральные последовательности, связывающие посредством функторов $\varprojlim{}^{p}$ указанные группы для $Y$ с системами групп, отвечающих $Y_\lambda$, вырождающиеся при естественных дополнительных условиях (например, для счетных систем $Y_\lambda$) в точные последовательности вида (5) (с фигурирующим в них функтором $\varprojlim$ вместо $\check{H}_n$). Сведения об условиях обращения $\varprojlim{}^{1}$ в нуль, о мощности принимаемых этим функтором значений позволяют получить обширную информацию о структуре изучаемых гомологий и когомологий. Известные све-

*) В случае счетной проективной системы $\{X_i\}$ метрических компактов соотношения вида (5) для $X = \varprojlim_{i} X_i$ для любых экстраординарных гомологий $h_*$ типа Стинрода, § 8.5 в [103]. Известно [56], что до теории типа Стинрода (в категории любых компактов) продолжается любая экстраординарная теория гомологий, заданная в категории конечных полиэдров, причем такое продолжение $\Pi_c$-аддитивно (см. следующий пункт). Такое распространение на категорию метрических компактов см. в [103] (и в некоторых других работах).

дения на этот счет достаточно полно отражены в п.п. 1.4 и 1.5 гл. 8 в [69].

**5.3. Свойства аддитивности. Связи с вопросами аксиоматики.** Кроме основных свойств, сконцентрированно выраженных в аксиомах Стинрода — Эйленберга или непосредственно из них вытекающих, за пределами категории конечных полиэдров в теории гомологий и когомологий обязательно найдутся такие, которые из этих аксиом не вытекают. Некоторые из них оказываются очевидными, считающимися само собой разумеющимися, на них обычно обращают мало внимания. По этой причине, однако, их иногда забывают учитывать при развитии (в целом) каких-то новых конкретных теорий (см. также введение). К таким свойствам прежде всего относятся свойства аддитивности.

В случае, когда $X=\bigcup\limits_{\lambda} X_\lambda$ — дискретное объединение своих замкнутых подпространств $X_\lambda$, для гомологий $H_*^c$ с компактными носителями имеется, очевидно, естественный изоморфизм $H_n^c(X;\mathcal{G})=\bigoplus\limits_{\lambda} H_n^c(X_\lambda;\mathcal{G})$ (свойство $\Sigma$-аддитивности), в то время как для теории $H_*$ 2-го рода $-H_n(X;\mathcal{G})=\prod\limits_{\lambda} H_n(X_\lambda;\mathcal{G})$ (свойство П-аддитивности). Аналогичная картина (если сравнивать по носителям) имеет место и для когомологий (см. п. 2.7 гл. 1).

В компактной категории вместо дискретных объединений рассматриваются компактные букеты — объединения замкнутых подпространств $X_\lambda$, попарные пересечения $X_\lambda \cap X_\mu$, $\lambda \neq \mu$, которых состоят из единственной точки $x_0 \in X$, каждая окрестность которой содержит все $X_\lambda$, кроме конечного числа. Для любого такого букета систему $\omega$, определяющую цепи $C_*^\bullet(X;\mathcal{G})$ и коцепи $C_\bullet^*(X;\mathcal{G})$ (см. § 4) можно составить из покрытий $\alpha$, каждое из которых в качестве одного из элементов содержит все $X_\lambda$, кроме конечного числа. В этом случае цепи (соответственно, коцепи) пары $(X, x_0)$ естественно распадаются в прямое произведение (соответственно, в прямую сумму) цепей (коцепей) пар $(X_\lambda, x_0)$, откуда немедленно вытекают аналогичные распадения в прямое произведение и прямую сумму соответственно групп $H_n(X;\mathcal{G})$ и $H^n(X;\mathcal{G})$ — свойства $\Pi_c$-аддитивности гомологий и $\Sigma_c$-аддитивности когомологий.

Формулируемые в качестве аксиом, свойства аддитивности играют первостепенную роль в задачах аксиоматики гомологий и когомологий в подходящих категориях топологических пространств (в том числе полиэдров), охватывающих категорию конечных полиэдров. Значение таких аксиом в категориях бесконечных полиэдров и метрических компактов было впервые замечено в работах [128], [129].

В пользу однозначности теории гомологий и когомологий, собственно, говорят многочисленные чисто логические наблюдения, специально для этого проведенные в главах 1 и 2. В случае когомологий фиксированного пространства одним из подтверждений этому служит аксиоматическая характеристика пучковых когомологий в терминах производных функторов (п. 4.6 гл. 1). Теоремы единственности, основанные на аксиомах типа Стинрода—Эйленберга, характеризуют гомологии и когомологии в определенных категориях топологических пространств при фиксированных группах (модулях) коэффициентов $G$. Отметим, что сами аксиомы Стинрода—Эйленберга в таких теоремах, составляя основу общего списка, часто употребляются с уточненным (в зависимости от рассматриваемой категории) свойством вырезания: гомологии (и когомологии) пары $(X, Y)$ совпадают с приведенными гомологиями (когомологиями) факторпространства $X/Y$, если $Y$ компактно, или с группами дополнения $X\setminus Y$ для замкнутых $Y\subset X$ — в случае теорий 2-го рода. Убедительным свидетельством правильности рассматриваемых теорий является их полная и однозначная восстанавливаемость по указанным образом модифицированному списку аксиом Стинрода—Эйленберга, дополненному единственным новым требованием — соответствующим каждому случаю требованием аддитивности. Так обстоит дело в категориях бесконечных (в том числе отдельно — локально конечных) полиэдров, в категории метрических компактов, в категории метризуемых локально компактных пространств и их собственных отображений, в категории метризуемых локально компактных пространств с любыми отображениями (и в некоторых других).

В некоторых случаях требование аддитивности может быть заменено не менее естественным условием на локальное поведение гомологий или когомологий (см. ниже п. 3.1 гл. 4). В случае гомологий требование аддитивности тесно связано со свойством компактных носителей (и в некоторых случаях эквивалентно ему). Во всей полноте вопросы аксиоматики освещены в гл. 7 предыдущего обзора [69].

Отметим, что в отличие от аксиом Стинрода—Эйленберга, получивших безоговорочное признание и широкую известность, дополнительные требования, в частности, простые и ясные требования аддитивности должного впечатления не произвели, соответствующие работы об аксиоматике оставались долго незамеченными. В этом смысле развитию теории гомологий аксиомы Стинрода—Эйленберга даже нанесли определенный «вред»: под теорией гомологий (или когомологий) стали пониматься любые функторы (в том числе порой расходящиеся с обычными гомологиями при их ограничении на подкатегории полиэдров, см. по этому поводу обзор [65]), удовлетворяющие этим аксиомам. Представляя «новую теорию», авторы считают своим долгом проверить именно эти аксиомы (см., например, [122], рассматриваемые в этой статье гомологии оказались не аддитивными и не равны нулю в размерности $-1$ [124]; см. также п. 1.1 гл. 2).

Вспомним еще раз, что аксиомы Стинрода—Эйленберга полны только в категории конечных полиэдров, что уже, например, в категориях бесконечных полиэдров помимо двух независимых теорий гомологий $H_*^c$ и $H_*$ этим аксиомам, как отмечалось во введении, могут удовлетворять и весьма случайные функторы. Таким образом, за пределами категории конечных полиэдров аксиомы Стинрода—Эйленберга должны обязательно дополняться новыми требованиями. Наиболее прозрачными среди них, очевидно, являются требования аддитивности.

**5.4. Некоторые другие наблюдения.** В соответствии с п. 4.3 гл. 1 каждой короткой точной последовательности пучков коэффициентов на пространстве $X$ отвечает точная последовательность когомологий этого пространства (с коэффициентами в этих пучках). Этот факт для постоянных коэффициентов — следствие любого конкретного варианта описания коцепей (§§ 1—4). Наличие аналогичных точных последовательностей для гомологий с постоянными коэффициентами — следствие описания цепей посредством функтора $\mathrm{Hom}_R(\ldots, G)$ от свободных коцепей и перехода к прямым пределам по соответствующим семействам носителей, см. §§ 3 и 4. Точная последовательность гомологий отвечает и короткой точной последовательности $0\to\mathscr{G}'\to\mathscr{G}\to\mathscr{G}''\to 0$ локально постоянных систем коэффициентов, хотя устанавливается это несколько сложнее (см. п. 4.2 выше).

В полной мере для гомологий $H_*^c$ и $H_*$ (как и для когомологий, ср. с п. 5.4 гл. 1) выполнено свойство вырезания: для замкнутого $Y\subset X$ и любого открытого в $X$ множества $U\subset Y$ вложение $(X\setminus U,\ Y\setminus U)\subset(X, Y)$ индуцирует изоморфизм гомологий. Для локально компактного $X$ такой изоморфизм — следствие равенства $H_n(X, Y; \mathscr{G})=H_n(X\setminus Y; \mathscr{G})$ (получаемого в результате описания цепей как сечений вялых пучков $\mathscr{C}^*(\mathscr{G})$, п. 2.4 гл. 2). Общий случай — следствие перехода к прямому пределу по отвечающему ситуации семейству носителей. В случае компактного $Y$ аналогичные аргументы подтверждают равенство гомологий пары $(X, Y)$ приведенным гомологиям факторпространства $X/Y$.

## § 6. Гомологии Бореля—Мура

Фундаментальную роль в становлении современной теории гомологий общих пространств, в выяснении связей гомологий с когомологиями сыграла появившаяся в начале 60-х годов теория Бореля—Мура [86]. К этому времени уже выяснилось основополагающее значение гомологий Стинрода—Ситникова [128], но средства, применявшиеся при их описании (ср. с п. 2.3 гл. 2), сколько-нибудь перспективных путей в применениях теории гомологий не открывали. В работе [86] были впервые созданы основы аппарата, позволившего впоследствии широко применять гомологии (наряду с когомологиями) в естественно возникавших задачах, используя эффективные средства гомологической алгебры и теории пучков.

С самого начала, однако, вместе с очевидными преимуществами проявлялись и многочисленные недостатки новой теории, подтверждавшие, в общем, ее натянутость и искусственность для общих систем коэффициентов. В настоящем параграфе анализируются наиболее типичные из них и вскрывается их общая причина.

**6.1. Основная конструкция.** Пусть $B$ — локально компактное пространство и $R$ — область главных идеалов, $I^*$ — каноническая инъективная резольвента $0 \to R \to I^0 \to I^1 \to 0$ кольца $R$ и $\mathcal{J}^*(B; R)$ — каноническая инъективная резольвента (состоящая из инъективных пучков) постоянного пучка $R$ на $B$ (см. гл. 5 в [87]). Ее сечения с компактными носителями $\Gamma_c(\mathcal{J}^*)$ образуют на $B$ (вялый) градуированный дифференциальный копучок. Через $D_*(\mathcal{J}^*(B; R))$ обозначается биградуированный дифференциальный пучок, для которого $D_n = \sum\limits_{p-q=n} \mathcal{H}om(\Gamma_c(\mathcal{J}^p), I^q)$ (для копучка $\Phi$ на $B$ и любого $R$-модуля $I$ через $\mathcal{H}om(\Phi, I)$ обозначается пучок, порожденный предпучком $U \to \mathrm{Hom}_R(\Phi(U), I)$, а дифференциал $d: D_n \to D_{n-1}$ определяется как $d = d' + (-1)^n d''$, где $d'$ индуцирован дифференциалом $I^q \to I^{q+1}$ из $I^*$, а $d''$ — отображением $\Gamma_c(\mathcal{J}^{p-1}) \to \Gamma_c(\mathcal{J}^p)$ из резольвенты $\mathcal{J}^*$. Оказывается, что $D_*(\mathcal{J}^*(B; R))$ — вялый пучок. По определению $H_n(\Gamma_\varphi(D_*(\mathcal{J}^*(B; R)))) = H_n^\Phi(B; R)$. Модуль $n$-мерных цепей (с любыми замкнутыми носителями) имеет вид $C_n(B; R) = \mathrm{Hom}_R(\Gamma_c(\mathcal{J}^n), I^0) \oplus \mathrm{Hom}_R(\Gamma_c(\mathcal{J}^{n+1}), I^1)$.

Использование в этом определении $I^*$ вместо самого кольца $R$ — вынужденная мера (см. конец введения к гл. 2), связанная с тем, что основной комплекс коцепей $\Gamma_c(\mathcal{J}^*)$ пространства $B$ у авторов не является свободным (ср. с §§ 3 и 4). Фактически рассматриваются гипергомологии (в смысле [92]) комплекса $\Gamma_c(\mathcal{J}^*)$ для функтора $\mathrm{Hom}_R(\ldots, R)$. Гипергомологии комплекса $C^*$ для этого функтора совпадают с гомологиями обычного комплекса гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_R(C^*, R)$ всякий раз, когда $C^*$ составлен свободными $R$-модулями, поэтому гомологии Бореля—Мура с коэффициентами в $R$ совпадают с рассмотренными в §§ 3 и 4. В частности, они равны нулю в размерности $n = -1$ (поскольку цепи в этой размерности отличны от нуля, при развитии обсуждаемой теории приходится следить за условиями, обеспечивающими обращение $H_{-1}$ в нуль, см., например, теоремы 5.10, 5.12 из гл. 5 в [87]).

Используя аналогичным образом в качестве $I^*$ двучленную инъективную резольвенту произвольного $R$-модуля $G$, можно было определить и гомологии $H_*^{\varphi}(B; G)$ (и они бы совпадали с группами, построенными в §§ 3 и 4). Вместо этого авторы, стремясь охватить непостоянные коэффициенты, определяют $H_n^{\varphi}(B; \mathcal{G})$ с коэффициентами в любом пучке $R$-модулей $\mathcal{G}$ как гомологии комплекса сечений с носителями в $\varphi$ пучка $D_*(\mathcal{J}^*(B; R)) \otimes_R \mathcal{G}$. Не располагая какими-то конкретными конструкциями цепей для локально компактных пространств (которые бы могли естественно складываться в пучки), авторы определяют формально пучки, сечения которых играют роль цепей. Искусственность такого подхода отмечается, например, во введении к гл. 5 в [87], где возникающая теория называется «своего рода теорией ко-когомологий, ассоциированной с пучковыми когомологиями». Противоречия не замедляют сказаться: конструкция в общем случае не согласуется со строением цепей, обсуждаемым в п. 5.1 выше, и для компактных пространств, например, формулы универсальных коэффициентов (3) оказываются справедливы в теории Бореля—Мура не только для конечно порожденных, но и для любых $R$-модулей $G$ (п. 3.10 гл. 5 в [87]), в то время как естественные для любых $G$ соотношения (4) из п. 5.1 устанавливаются только для $G=R$ (§ 3 гл. 5 в [87]). Этим объясняется, почему во всех наиболее типичных применениях гомологий Бореля—Мура (гл. 5 в [87]) пучки $\mathcal{G}$ предполагаются локально постоянными с конечно порожденными слоями (именно при этом условии гомологии совпадают с рассматриваемыми в настоящем обзоре группами Стинрода—Ситникова).

**6.2. Некоторые наблюдения.** Вследствие сказанного выше о формулах универсальных коэффициентов (3) гомологии Бореля—Мура с коэффициентами в поле рациональных чисел $Q$ зависят от того, рассматривается ли $Q$ как основное кольцо или только как абелева группа (неинвариантность гомологий при замене кольца, см. примеры в § 14 гл. 5 в [87] или § 1 в [62]). Определяемые комплексами сечений пучков, гомологии Бореля—Мура П-аддитивны, но в силу формул универсальных коэффициентов (3) не $\Pi_c$-аддитивны для бесконечно порожденных модулей $G$ уже в размерности 0 (см. § 5 в [63]), из-за чего (приведенные) гомологии одноточечной компактификации $B$ могут не совпадать с гомологиями $B$, а гомологии пар $(B, A)$ для замкнутых $A$ — с гомологиями $B \setminus A$ (ср. с п. 2.4 гл. 2), поэтому не являются лишними условия таких совпадений, найденные в следствии 5.9 гл. 5 в [87] для локально постоянных коэффициентов. Отсутствие свойства $\Pi_c$-аддитивности позволяет легко обнаружить простые примеры метрических компактов $X$ с точками $x_0 \in X$, для гомологий фундаментальных систем компактных окрестностей $A_i$ которых $\varprojlim\limits_i{}^1 H_0(A_i, x_0; G) \neq 0$, см. п. 2.3 гл. 7 в [69] (для гомологий $H_*^c$ Стинрода—Ситникова любых пространств с 1-й аксиомой счетности такого не бывает, см. п. 3.1 гл. 4 ниже).

Кроме того, что она не вполне корректна, основная конструкция из-за своей искусственности уступает конструкциям § 2 гл. 2 и качественно. Большое значение, в частности, имеет вялость пучков цепей локально компактных пространств (подтверждения тому уже были в настоящей главе, множество подтверждений см. в гл. 4). Для $\mathcal{G} \neq R$ (и паракомпактифицирующих семейств $\varphi$) пучки $D_* \otimes_R \mathcal{G}$ выше являются только $\varphi$-тонкими, следовательно, $\varphi$-мягкими (§ 3 гл. 5 в [87]). В связи с искусственностью гомологии подпространств $A \subset B$ и пар $(B, A)$ определены только для локально замкнутых $A$, причем факт, что цепи $A$ реализуются в качестве подкомплекса цепей всего пространства $B$, далеко не очевиден (см. § 5 гл. 5 в [87]). В отличие от рассматриваемых в настоящей статье (см. п. п. 2.4, 2.5 гл. 2), гомологии Бореля—Мура $H_n^{\varphi}(B; \mathcal{G})$ не всегда совпадают с прямым пределом по $K \in \varphi$ групп $H_n(K; \mathcal{G})$ (см. условия совпадения в теоремах 5.2 и 5.5 гл. 5 в [87]), не в любой ситуации и $H_n^{\varphi}(A; \mathcal{G}) = H_n^{\varphi|A}(X; \mathcal{G})$ (см. следствие 5.6 гл. 5 в [87]).

**6.3. Условия корректности.** Несмотря на многие недостатки, при некоторых естественных ограничениях гомологии Бореля—Мура совпадают с обычными для любых локально постоянных коэффициентов (не только с конечно порожденными слоями). Так, при ограничениях типа метризуемости и локальной компактности гомологии Бореля—Мура с компактными носителями гомологически локально связных пространств изоморфны гомологиям $H_*^c$ Стинрода—Ситникова (см. [49], [51]). В категории локально конечных полиэдров и их собственных отображений добавление к обычным аксиомам Стинрода—Эйленберга свойства П-аддитивности однозначно определяет гомологии $H_*$ [50], поэтому гомологии Бореля—Мура таких полиэдров совпадают с обычными (т. е. симплициальными) гомологиями 2-го рода. (Этого нельзя сказать, к сожалению, о некоторых предлагавшихся подражаниях, приспосабливаемых для более общих, не локально компактных, пространств — в категориях полиэдров они приводили к функторам, отличающимся как от $H_*^c$, так и от $H_*$, см. по этому поводу обзор [65]).

## § 7. Когомологии Чеха

**7.1. По поводу гомологий Чеха.** Устройство нервов достаточно мелких покрытий пространства $X$ отражает строение самого $X$, поэтому покрытия стали использоваться при изучении гомологий и когомологий очень давно. Неоднозначность проекции нервов вписанных друг в друга покрытий — основная причина, почему стало традицией осуществлять переходы к пределу не в цепях и коцепях покрытий, а в их группах гомологий и когомологий, приходя к группам Чеха. Традиция, в общем, сохранилась и после того, как были найдены системы покрытий с однозначными проекциями.

Что касается гомологий Чеха $\check{H}_*$, характерные моменты и основные препятствия их развития уже были фактически отмечены выше, см. п. 4.4 (использование под влиянием теории характеров преимущественно компактных коэффициентов, учет топологии обратного предела, выяснение роли бесконечных покрытий, игнорирование фактора компактности и др.). Если к этому еще добавить отсутствие точности у функтора обратного предела — недостаток, замеченный последним, но ставший считаться почему-то чуть ли не единственным препятствием на пути развития теории гомологий, станет ясным, почему группы $\check{H}_*$ в настоящее время рассматриваются только как вспомогательные, самостоятельного значения не имеющие (см. также § 1 гл. 5 в [69]).

Их роль вскрывается, например, соотношениями между $H_*$ и $\check{H}_*$ п. 5.2 гл. 3. Самостоятельный интерес в связи с этим представляет и связь гомологий $H_*$ пространства с гомологиями открытого покрытия $\alpha=\{U_i\}$. Как показано недавно в [75] в терминах сингулярных гомологий, в случае компактного пространства она такая же, как для когомологий: имеется сходящаяся к $H^s_*(X; G)$ спектральная последовательность покрытия со вторым членом $E^2_{pq}=H_p(\alpha; \mathcal{H}_q)$, где $\mathcal{H}_q$ — локальные коэффициенты на нерве $|\alpha|$, при которых симплексам $(i_0, \ldots, i_q)\in$ $\in|\alpha|$ сопоставляются группы $H^s_q\left(\bigcap\limits_j U_{i_j}; G\right)$. Следствием является изоморфизм $H^s_*(X; G)=H_*(\alpha; G)$ в случае, когда $\alpha$ составлено ацикличными множествами с ацикличными (конечными) пересечениями.

**7.2. Роль пучков.** Что касается когомологий Чеха $\check{H}^*$, они до сих пор относятся к числу наиболее употребительных. Несмотря на то, что группы $\check{H}^n$ лишь для очень специальных систем покрытий (или для узкого класса компактных пространств) могут быть реализованы как когомологии концепных комплексов, возникающих при переходе к прямому пределу по покрытиям и оказывающихся при этом сечениями ацикличных пучковых резольвент (см. § 5.10 гл. 2 в [107]), теория $\check{H}^*$ еще раз подтверждает естественность и действенность языка и средств теории пучков. В более типичных ситуациях для пучков, возникающих при рассмотрении конструкций типа Чеха (например, для конструкции п. 4.1 выше), сечения с произвольными замкнутыми носителями такие коцепные комплексы не составляют, но определяют когомологии $H^*$ в силу ацикличности входящих в резольвенты пучков. Определяемые первоначально с коэффициентами в предпучках (в классическом случае, например, — даже в постоянных), группы $\check{H}^*$ в естественных условиях оказываются зависящими лишь от порождаемых этими предпучками пучков, поэтому естественно считать их когомологиями с коэффициентами в пучках (используя при их первоначальном определении предпучки сечений этих пучков). Для любых топологических пространств группы $\check{H}^0(X; \mathcal{G})$ (даже группы $H^0(\alpha; \mathcal{G})$ любого открытого покрытия) изоморфны, очевидно, группам сечений $\Gamma(\mathcal{G})$.

Во всех известных ситуациях, где применяются группы $\check{H}^*$, они изоморфны пучковым когомологиям $H^*$. Аналогичные результаты справедливы (по крайней мере) для когомологий с паракомпактифицирующими семействами носителей. В общем случае имеется связывающая обе теории спектральная последовательность (в том числе для когомологий с носителями в таких семействах, которые вместе с каждым множеством содержат достаточно тесные замкнутые окрестности этого множества).

Теория Чеха $\check{H}^*$ традиционно не относится к простым. По этой причине она не освещена, например, в [87] (хотя автор книги и считает это заметным упущением). Изложение в [107] действительно довольно сложно (хотя кое-где и проскальзывают указания на альтернативные, более простые пути). В значительной степени простое и достаточно полное современное изложение теории $\check{H}^*$ дано в добавлении редактора перевода [87], а также в § 2 гл. 2 и в гл. 4 обзора [69] (где наряду с основными идеями кратко освещена и история развития этой теории).

**7.3. Значение бесконечных покрытий.** Необходимость при определении $\check{H}^*$ рассматривать бесконечные покрытия демонстрируется обычно на примере пространства, гомеоморфного прямой $R$: ее отображение в окружность $S^1$ (на комплексной плоскости), определяемое как $x \to e^{ix}$, продолжается до нестягиваемого отображения $\beta R \to S^1$ чеховской компактификации, а поскольку $S^1 = K(Z; 1)$ — комплекс Эйленберга—Маклейна, то $\check{H}^1_f(R; Z) = H^1(\beta R; Z) \neq 0 = H^1(R; Z)$. Здесь $\check{H}_f^*$ — «финитные» когомологии, определяемые конечными открытыми покрытиями пространства. Учитываем, что $n$-мерные когомологии $H^n(X; G)$ паракомпактного пространства совпадают с множеством гомотопических классов отображений $X \to K(G; n)$ [2].

При $n > 1$ поучительным примером служит $X = K(G; n)$. Поскольку $K(G; n)$ имеет нетривиальные когомологии в как угодно высоких размерностях, пространство $X$ не стягивается на свой конечный остов, следовательно, отображения, гомотопные тождественному, не продолжаются до отображений $\beta X \to K(G; n)$. Это означает неэпиморфность естественного преобразования $\beta: \check{H}^n_f \to H^n$ (отвечающего вложению $X \subset \beta X$), в частности, отличие $\check{H}^n_f(X; G)$ от $H^n(X; G)$.

Тем не менее для паракомпактного $X$ и замкнутого $Y \subset X$ при $\dim X < \infty$ и $n > 1$ равенство $\check{H}^n_f(X, Y; G) = H^n(X, Y; G)$ имеет место для любых конечно порожденных групп $G$ [79] (аналогичный результат в категории полиэдров был получен в [90]), а отображение $\check{H}^1_f(X, Y; G) \to H^1(X, Y; G)$ эпиморфно. В [90] показано, что в случае, когда она редуцирована, группа $H^1(X; Z)$ совпадает (при $\dim X < \infty$) с факторгруппой $\check{H}^1_f(X; Z)$ по максимальной делимой подгруппе. Для конечномерных $X$ преобразования $\beta$ изоморфны, когда $G$ — конечная группа (теорема 12 в [35]; в [79] изоморфизм установлен и для пар $(X, Y)$). Поскольку нульмерные когомологии — группы локально постоянных функций (на $X$ или $\beta X$), преобразование $\beta$ в размерности 0 всегда мономорфно, но не эпиморфно для бесконечных групп $G$ (поскольку в отличие от $\beta X$ на $X$ указанные функции могут принимать и бесконечное число значений) *).

Если $\varkappa$ — бесконечное кардинальное число, большее или равное мощности $G$, то когомологии $H^p(X, Y; G)$ паракомпактной пары $(X, Y)$ (с замкнутым $Y$) определяются открытыми покрытиями, мощность которых не превосходит $\varkappa$ [3]. В частности, для конечной или счетной $G$ можно рассматривать всегда только счетные покрытия.

# *Глава 4*

# НАИБОЛЕЕ ТИПИЧНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

## § 1. Гомологии и когомологии связи. Гомологии и когомологии окружения замкнутого множества

В этом параграфе в качестве самостоятельного объекта выделяются некоторые новые группы, встречавшиеся ранее в литературе лишь в частных случаях. При выяснении их природы и взаимосвязей существенна вялость пучков цепей (и коцепей). Конструкции способствуют формированию нового взгляда на задачи, касающиеся устройства локальных групп гомологий и когомологий. Содержание параграфа вновь подтверждает влияние фактора компактности в теории гомологий (возникающие в гомологическом варианте задачи трудности исчезают при переходе к когомологиям).

**1.1. Гомологии связи.** Пусть $A$ — произвольное подмножество паракомпактного пространства $X$ и $B = X \setminus A$, $\mathcal{G}$ — локально постоянные коэффициенты. При использовании цепей из § 3 или

*) О связях когомологий пространства и его компактификаций см. также п. 5.3 гл. 4.

§ 4 предыдущей главы возникает короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to C_*^\varphi(A; \mathcal{G}) \oplus C_*^\varphi(B; \mathcal{G}) \to C_*^\varphi(X; \mathcal{G}) \to K_*^\varphi \to 0 \qquad (1)$$

и отвечающая ей точная последовательность гомологий

$$\ldots \to H_n^\varphi(A; \mathcal{G}) \oplus H_n^\varphi(B; \mathcal{G}) \to H_n^\varphi(X; \mathcal{G}) \to H_n^\varphi(A \div B; \mathcal{G}) \to \ldots \qquad (2)$$

Гомологии $H_n^\varphi(A \div B; \mathcal{G})$ фарторкомплекса $K_n^\varphi$ комплекса цепей $X$ (с носителями в $\varphi$) по подкомплексу цепей, чьи носители попадают в $A$ и $B$, естествённо называть, очевидно, гомологиями связи между дополнительными множествами $A$ и $B$. Ясно, что $H_n^\varphi(A \div B; \mathcal{G}) = H_n^\varphi(B \div A; \mathcal{G})$. Здесь $\varphi$ — либо семейство любых замкнутых множеств (гомологии 2-го рода), либо семейство компактных множеств (гомологии $H_*^c$ с компактными носителями), либо произвольное.

Поскольку $C_*^\varphi(X, B; \mathcal{G}) = C_*^\varphi(X; \mathcal{G}) / C_*^\varphi(B; \mathcal{G})$, возникает также короткая точная последовательность цепей

$$0 \to C_*^\varphi(A; \mathcal{G}) \to C_*^\varphi(X, X \setminus A; \mathcal{G}) \to K_*^\varphi \to 0 \qquad (3)$$

и точная последовательность гомологий

$$\ldots \to H_n^\varphi(A; \mathcal{G}) \to H_n^\varphi(X, X \setminus A; \mathcal{G}) \to H_n^\varphi(A \div X \setminus A; \mathcal{G}) \to \ldots . \qquad (4)$$

Если $A$ ациклично (например, состоит из одной точки), то $H_n^\varphi(A \div X \setminus A; \mathcal{G}) = H_n^\varphi(X, X \setminus A; \mathcal{G})$. Легко заметить также наличие короткой точной последовательности цепных комплексов

$$0 \to C_*^\varphi(X; \mathcal{G}) \to C_*^\varphi(X, A; \mathcal{G}) \oplus C_*^\varphi(X, B; \mathcal{G}) \to K_*^\varphi \to 0 \qquad (5)$$

и, следовательно, точной последовательности гомологий

$$\ldots \to H_n^\varphi(X; \mathcal{G}) \to H_n^\varphi(X, A; \mathcal{G}) \oplus H_n^\varphi(X, B; \mathcal{G}) \to$$
$$\to H_n^\varphi(A \div B; \mathcal{G}) \to \ldots . \qquad (6)$$

В этих наблюдениях $A$ и $B = X \setminus A$ — произвольные подпространства $X$. Рассмотрим всевозможные пары $P$, $Q$ замкнутых в $X$ подпространств таких, что $P \subset A$, $Q \subset B$. Тогда точная последовательность (1) совпадает с прямым пределом (по таким $P$ и $Q$) коротких точных последовательностей

$$0 \to C_*^\varphi(P; \mathcal{G}) \oplus C_*^\varphi(Q; \mathcal{G}) \to C_*^\varphi(X; \mathcal{G}) \to C_*^\varphi(X, P \cup Q; \mathcal{G}) \to 0$$

в то время как (2) — с прямым пределом соответствующих гомологических последовательностей. В частности, $H_n^\varphi(A \div B; \mathcal{G}) = \varinjlim H_n^\varphi(X, P \cup Q; \mathcal{G})$ — прямой предел по указанным $P$, $Q$. Это дает интуитивно ясную интерпретацию гомологий связи.

Аналогичным образом в виде прямого предела по замкнутым в $X$ множествам $P \subset A$, $Q \subset B$ могут быть представлены, очевидно, и гомологические последовательности (4) и (6). В частности, если $A$ — подполиэдр полиэдра $X$ и $A'$ — его регулярная окрестность, то $H_n^\varphi(A \div X \setminus A; \mathcal{G}) = H_n^\varphi(X, A \cup (X \setminus \operatorname{Int} A'); \mathcal{G})$.

Для цепей комплекса $K_*^\varphi$ также «обозначены» носители, пересекающие одновременно $A$ и $B$ и определенные с точностью до носителей цепей в $A$ и $B$, поэтому для любого подпространства $Y \subset X$ определен подкомплекс в $K_*^\varphi$, порожденный цепями из $Y$. Этот подкомплекс определяет гомологии связи между $A$ и $B$ на $Y$ (совпадающие с гомологиями связи в пространстве $Y$ между $A \cap Y$ и $B \cap Y$). Соответствующий факторкомплекс определяет гомологии связи между $A$ и $B$ пары $(X, Y)$. Возникает точная последовательность гомологий связи между $A$ и $B$ пары $(X, Y)$ (и т. д.).

**1.2. Гомологии окружения.** Пусть $\{U_\lambda\}$ — система открытых в $X$ подмножеств таких, что $X \setminus U_\lambda = P_\lambda \cup Q_\lambda$, $P_\lambda$ и $Q_\lambda$ — замкнутые в $X$ подмножества множеств $A$ и $B$. Возникает проективная система цепных комплексов $\{C_*^\varphi(U_\lambda; \mathcal{G})\}$ с нулевым обратным пределом (пересечением). Представляют интерес гипергомологии (в смысле гл. 17 в [92]) этой системы для функтора $\varprojlim$, которую естественно трактовать как цепной комплекс в категории проективных систем абелевых групп (или модулей). Ясно, что эти гипергомологии также должны проливать свет на характер связи между $A$ и $B = X \setminus A$.

В общем случае установить соотношения между этими гипергомологиями и группами связи $H_n^\varphi(A \div X \setminus A; \mathcal{G})$ не удается*), поэтому будем считать ниже, что множество $A$ замкнуто. Пусть $W_\lambda$ — всевозможные окрестности $A$ в $X$. В соответствии со сказанным выше в этом случае $H_n^\varphi(A \div X \setminus A; \mathcal{G}) = \varinjlim_{W_\lambda} H_n^\varphi(X, A \cup (X \setminus W_\lambda); \mathcal{G})$. Для каждого $U_\lambda = W_\lambda \setminus A$ («окружения» $A$ в $X$) возникает короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to C_*^\varphi(U_\lambda; \mathcal{G}) \to C_*^\varphi(W_\lambda; \mathcal{G}) \to C_*^\varphi(X, X \setminus A; \mathcal{G}) \to 0 \qquad (7)$$

(поскольку $C_*^\varphi(W_\lambda, U_\lambda; \mathcal{G}) = C_*^\varphi(X, X \setminus A; \mathcal{G})$). Гипергомологии системы $C_*^\varphi(U_\lambda; \mathcal{G})$ для функтора $\varprojlim$ в размерности $n$ будем обозначать через $H_n^\varphi(A < X; \mathcal{G})$ и называть гомологиями окружения замкнутого множества $A$ в $X$.

Свойства проективных систем последовательностей вида (7) тесно связаны со свойствами проективных систем коротких точных последовательностей

$$0 \to C_*^\varphi(W_\lambda; \mathcal{G}) \to C_*^\varphi(X; \mathcal{G}) \to C_*^\varphi(X, W_\lambda; \mathcal{G}) \to 0. \qquad (8)$$

Ясно, что $\varprojlim_\lambda C_*^\varphi(W_\lambda; \mathcal{G}) = \bigcap_\lambda C_*^\varphi(W_\lambda; \mathcal{G}) = C_*^\varphi(A; \mathcal{G})$. Для $\varphi = c$, пользуясь всеми свойствами пучков цепей из § 2 гл. 2, можно показать также, что $\varprojlim_\lambda C_*^c(X, W_\lambda; \mathcal{G}) = C_*^c(X, A; \mathcal{G})$. Отсюда и из

*) Кроме естественного преобразования в гипергомологии групп связи.

отвечающей (8) точной последовательности функторов $\varprojlim^p$ вытекает, что $\varprojlim_\lambda^1 C_*^c(W_\lambda;\ \mathcal{G})=0$, поэтому при переходе к пределам в (7) получается точная последовательность

$$0\to C_*^c(A;\ \mathcal{G})\to C_*^c(X,\ X\setminus A;\ \mathcal{G})\to \varprojlim_\lambda^1 C_*^c(U_\lambda;\mathcal{G})\to 0. \tag{9}$$

Поскольку она совпадает, очевидно, с последовательностью (3), имеем $K_*^c=\varprojlim_\lambda^1 C_*^c(U_\lambda;\ \mathcal{G})$.

Оказывается, преобразование гомологий двух первых членов в (9) в гипергомологии соответственно второго и третьего членов последовательности (7) (являющееся изоморфизмом для пары $(X,\ X\setminus A)$) дополняется до естественного преобразования $\tau: H_n^c(A\div X\setminus A;\ \mathcal{G})\to H^c_{n-1}(A<X;\ \mathcal{G})$ гомологий связи между $A$ и $X\setminus A$ в $(n-1)$-мерные гомологии окружения $A$ в $X$. Возникает преобразование гомологической последовательности (4) в точную последовательность гипергомологий, отвечающую короткой точной последовательности проективных систем (7). В общем случае, однако, преобразование $H_n^c(A;\ \mathcal{G})$ в гипергомологии для функтора $\varprojlim$ проективной системы $\{C_*^c(W_\lambda;\ \mathcal{G})\}$ изоморфизмом не является (например, для множества $A$ точек плоскости $X=R^2$, абсциссы которых суть все целые числа, а ординаты равны рациональным числам $1/n$, $n=1, 2, \ldots$, и нулю; множество $A$ совпадает с пространством $X^{(k)}$ из работы [124] при $k=0$). Тем самым, не является изоморфизмом в общем случае и преобразование $\tau$.

Преобразование $\tau$ изоморфно для компактного подпространства $A$ в локально компактном $X$. В этом случае комплексы $C_*^c(X,\ W_\lambda;\ \mathcal{G})$, будучи сечениями вялых пучков цепей над множествами $B_\lambda=X\setminus W_\lambda$, представляют собой слабо вялую в смысле [113] и потому $\varprojlim$-ацикличную проективную систему. В силу (8) $\varprojlim$-ацикличной является и система $\{C_*^c(W_\lambda;\ \mathcal{G})\}$, поэтому рассматриваемые выше преобразования гомологий $A$ в гипергомологии суть изоморфизмы, остается применить лемму о пяти изоморфизмах. Преобразование $\tau$ изоморфно также в случае, когда $A$ компактно и обладает в $X$ счетной фундаментальной системой окрестностей (например, в метрическом пространстве): $\varprojlim$-ацикличность системы $\{C_*^c(W_\lambda;\ \mathcal{G})\}$ в этом случае — следствие обращения в нуль $\varprojlim^p$ при $p\geqslant 2$ для счетных проективных систем.

Преобразование $\tau$ изоморфно и в том случае, когда множество $A$ обладает в $X$ фундаментальной системой окрестностей $W_\lambda$, для каждой из которых отображение гомологий $H_*^c(A;\ \mathcal{G})\to$

$\to H_*^c(W_\lambda; \mathcal{G})$ — изоморфизм: в этом случае можно показать, что гомологии $A$ совпадают с гипергомологиями для функтора $\varprojlim$ проективной системы $\{C_*^c(W_\lambda; \mathcal{G})\}$. Это условие выполнено, например, для подполиэдра $A$ любого клеточного полиэдра $X$ ($W_\lambda$ — регулярные окрестности $A$). В этом случае $H_{;p}^c(A<X; \mathcal{G}) = H_p^c(U_\lambda; \mathcal{G}) = H_p^c(\partial W_\lambda; \mathcal{G})$ ($\partial W_\lambda$ — граница $W_\lambda$).

Определяемые как гипергомологии, группы $H_n^\Phi(A<X; \mathcal{G})$ — это гомологии некоторого рассматриваемого в полной градуировке двойного комплекса, не исключена их нетривиальность при $n<0$. В категории компактов, в частности, $H_{-1}(A<X; \mathcal{G}) = H_0(A\div X\setminus A; \mathcal{G})$, а эта группа отлична от нуля, например, в случае, когда $X$ — последовательность точек, сходящаяся к точке $x_0 = A\subset X$ (в этом легко убедиться, используя представление $H_0(A\div X\setminus A; \mathcal{G})$ в виде прямого предела из п. 1.1).

**1.3. Когомология окружения и связи.** Пусть $\mathcal{C}^*$ — вялая резольвента Годемана пучка коэффициентов $\mathcal{G}$ на $X$ (п. 4.3 гл. 1). Без каких-либо ограничений на $X$ и $A$ коцепи пары $(X, A)$ определяются как некоторый подкомплекс в $\Gamma(\mathcal{C}^*)$, содержащий все сечения с носителями в $X\setminus A$ (п. 5.3 гл. 1). Он сводится к указанным сечениям по крайней мере в случаях, когда $A$ открыто, когда $X$ паракомпактно и $A$ замкнуто, для любого $A$ в наследственно паракомпактном $X$ (см. также п. 5.3 гл. 1). При таких условиях (поэтому будем считать ниже, что они выполнены) коцепи $(X, A)$ и $(X, B)$, где $B = X\setminus A$, составляют в $\Gamma(\mathcal{C}^*)$ прямую сумму, возникает короткая точная последовательность коцепных комплексов

$$0\to C_\Phi^*(X,\ A;\ \mathcal{G})\oplus C_\Phi^*(X,\ B;\ \mathcal{G})\to C_\Phi^*(X;\ \mathcal{G})\to K_\Phi^*\to 0$$

и отвечающая ей точная последовательность когомологий

$$\ldots\to H_\Phi^n(X,\ A;\ \mathcal{G})\oplus H_\Phi^n(X,\ B;\ \mathcal{G})\to H_\Phi^n(X;\ \mathcal{G})\to$$
$$\to H_\Phi^n(A\div B;\ \mathcal{G})\to\ldots \tag{10}$$

Группы $H_\Phi^n(A\div B;\ \mathcal{G})$ естественно называть когомологиями связи между $A$ и $B = X\setminus A$. Как и в п. 1.1, возникают также точные последовательности когомологий

$$\ldots\to H_\Phi^n(X,\ X\setminus A;\ \mathcal{G})\to H_\Phi^n(A;\ \mathcal{G})\to H_\Phi^n(A\div X\setminus A;\ \mathcal{G})\to\ldots \tag{11}$$

$$\ldots\to H_\Phi^n(X;\ \mathcal{G})\to H_\Phi^n(A;\ \mathcal{G})\oplus H_\Phi^n(B;\ \mathcal{G})\to H_\Phi^n(A\div B;\ \mathcal{G})\to\ldots \tag{12}$$

Пусть снова $P$ и $Q$ — замкнутые в $X$ подпространства, содержащиеся в $A$ и $B$. Тогда каждая из когомологических последовательностей выше представляется как прямой предел соответствующих точных последовательностей для $P$ и $Q$ (при этом, например, $H_\Phi^n(A;\ \mathcal{G}) = \varinjlim_Q H_\Phi^n(X\setminus Q;\ \mathcal{G})$, $H_\Phi^n(X,\ A;\ \mathcal{G}) = \varinjlim_Q H_\Phi^n(X,\ X\setminus Q;\ \mathcal{G})$ и т. д.). В частности, (10) является пределом последовательностей

$$\ldots \to H^n_\varphi(X,\ X\setminus Q;\ \mathcal{G})\oplus H^n_\varphi(X,\ X\setminus P;\ \mathcal{G})\to H^n_\varphi(X;\ \mathcal{G})\to$$
$$\to H^n_\varphi(U;\ \mathcal{G})\to\ldots,$$

где $U=X\setminus(P\cup Q)$. Таким образом, $H^n_\varphi(A\div B;\ \mathcal{G})=\varinjlim H^n_\varphi(X\setminus(P\cup Q);\ \mathcal{G})$.

Последнее дает очевидную интерпретацию когомологий связи. В случае, когда $A$ замкнуто, $U=W\setminus A$, где $W$ — всевозможные окрестности $A$ в $X$, и группы $H_\varphi^n(A\div B;\ \mathcal{G})$ одновременно интерпретируются как $n$-мерные когомологии $H_\varphi^n(A<X;\ \mathcal{G})$ окружения замкнутого множества $A$ в $X$. Для этого частного случая последовательность (11) была впервые получена в [137] (группы окружения в ней определялись как прямой предел $H^n(U;\mathcal{G})$, $U=W\setminus A$, и назывались локальными когомологиями на множестве $A$). Для частного случая, когда $U$ — дополнения к любым компактным подпространствам локально компактного пространства, еще раньше аналогичная конструкция рассматривалась в [93] (а использующие эту конструкцию локальные когомологии фигурировали в семинаре [85]).

Как и в конце п. 1.1, группы $H^n(A\div B;\mathcal{G})$ — это когомологии связи всего пространства $X$. Аналогичные группы связи между $A$ и $B=X\setminus A$ определены для подпространств $Y\subset X$ и пар $(X,Y)$, имеется точная последовательность когомологий связи пары $(X,Y)$ и т. п.

Альтернативный подход к когомологиям связи дает рассмотрение когомологий пар $(\bar{U},\ \mathrm{Fr}\,U)$, где $U=X\setminus(P\cup Q)$ (см. выше), $\bar{U}$ — замыкание $U$, $\mathrm{Fr}\,U$ — граница $U$. Поскольку $\varprojlim_U C^*_\varphi(\bar{U},\ \mathrm{Fr}\,U;\ \mathcal{G})=\bigcap C^*_\varphi(\bar{U},\ \mathrm{Fr}\,U;\ \mathcal{G})=0$, естественно рассматривать (как и в случае гомологий) гипергомологии для функтора $\varprojlim$ проективной системы коцепных комплексов. В общем случае, однако, установить связь новых групп с $H^n_\varphi(A\div B;\ \mathcal{G})$ трудно*).

Указанные гипергомологии совпадают с когомологиями связи (или окружения) для любого замкнутого множества $A$, когда $\varphi$ — семейство всех замкнутых множеств. Пусть $W$ — окрестности такого $A$ в $X$. В точной последовательности проективных систем

$$0\to C^*(X,\ X\setminus W;\ \mathcal{G})\to C^*(X;\ \mathcal{G})\to C^*(X\setminus W;\ \mathcal{G})\to 0$$

последняя (состоящая из сечений вялых пучков $C^*$ на $X\setminus W$) оказывается слабо вялой в смысле [113] и потому $\varprojlim$-ацикличной. Следовательно (поскольку $\varprojlim C^*(X\setminus W;\ \mathcal{G})=\overleftarrow{C}^*(X\setminus A;\ \mathcal{G})$), $\varprojlim$-ациклична также система $C^*(X,\ X\setminus W;\ \mathcal{G})=C^*(\bar{W},\ \mathrm{Fr}\,W;\ \mathcal{G})$, предел (пересечение) которой совпадает с $C^*(X,\ X\setminus A;\ \mathcal{G})$. После перехода к пределу в проективной системе точных последовательностей (здесь $U=W\setminus A$)

---

*) Хотя и имеется преобразование в эти группы.

$$0 \to C^*(\bar U, \operatorname{Fr} U; \mathscr{G}) \to C^*(\bar W, \operatorname{Fr} W; \mathscr{G}) \to C^*(A; \mathscr{G}) \to 0$$

получим точную последовательность

$$0 \to C^*(X, X\setminus A; \mathscr{G}) \to C^*(A; \mathscr{G}) \to \varprojlim_{W}{}^1 C^*(\bar U, \operatorname{Fr} U; \mathscr{G}) \to 0$$

(при этом $\varprojlim_{W}{}^p C^*(\bar U, \operatorname{Fr} U; \mathscr{G}) = 0$ для $p \neq 1$).

Тем самым $K^* = \varprojlim_{W}{}^1 C^*(\bar U, \operatorname{Fr} U; \mathscr{G})$. Поэтому, как и в п. 1.2, возникает возможность сравнить когомологии последней короткой точной последовательности с гипергомологиями предыдущей и построить естественное преобразование групп $H^n(A \div X\setminus A; \mathscr{G})$ в $(n+1)$-мерные гипергомологии для функтора $\varprojlim$ проективной системы коцепных комплексов $C^*(\bar U, \operatorname{Fr} U; \mathscr{G})$. Аргументы пункта 1.2 обеспечивают в этом случае изоморфизм.

## § 2. Пары подпространств. Последовательности Майера—Вьеториса

**2.1. Гомологии и когомологии пар подпространств.** Поскольку гомологии общих пространств (и пар) представляются в виде прямых пределов по компактным или замкнутым локально компактным носителям (п. 2.5 гл. 2), они ниже рассматриваются только для локально компактных пространств. Пусть $A_1 \subset A_2$ — подмножества локально компактного пространства $X$. Если $X$ не наследственно паракомпактно, предполагаем, что $A_1$ открыто или замкнуто. Гомологии пары $(A_2, A_1)$ с носителями в паракомпактифицирующем семействе $\varphi$ определяются цепями — сечениями пучков цепей $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})$ (п. 2.4 гл. 2) — с носителями в $\varphi|_{A_2}$, ограниченными на $X\setminus A_1$, эквивалентно, сечениями $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})$ на $X\setminus A_1$ с носителями в $(\varphi \cap (X\setminus A_1))|_{A_2}$. Очевидным образом строится точная последовательность гомологий пар подпространств, участвующих в тройке $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ (при таких же ограничениях на $A_1$ и $A_2$).

Двойственным образом получаются когомологии $H_\varphi^q(B_2, B_1; \mathscr{G})$ (с коэффициентами в пучке $\mathscr{G}$) пары подпространств паракомпактного хаусдорфова пространства $X$ (п. 5.3 гл. 1). В случае $n$-многообразия $X$ вялые пучки цепей оказываются обратно занумерованной резольвентой ориентирующего пучка многообразия (см. п. 6.1 ниже), поэтому $p$-мерные гомологии пары $(A_2, A_1)$ совпадают с $(n-p)$-мерными когомологиями (с теми же носителями, но с коэффициентами в указанном пучке) пары $(X\setminus A_1, X\setminus A_2)$ (двойственность Пуанкаре—Лефшеца), а точная последовательность гомологий тройки — с точной последовательностью когомологий дополнительной тройки $X\setminus A_3 \subset X\setminus A_2 \subset X\setminus A_1$.

**2.2 Гомологии триад.** Как и выше, ограничиваемся категорией локально компактных пространств. Усложненная форма свойства вырезания в сингулярной теории, как отмечалось в п. 1.2 гл. 3,— первопричина ограничений, фигурирующих в определении вырезаемых триад (обеспечивающих наличие отвечающих им точных последовательностей гомологий и когомологий). Эквивалентное (как легко убедиться) совпадению цепей пар $(X_1, X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, X_2)$ условие, что цепи $X_1 \cup X_2$ совпадают с суммой цепей $X_1$ и $X_2$, автоматически выполнено (с учетом вялости пучков цепей и описания цепей пар в п. 2.4 гл. 2), например, для замкнутых в $X_1 \cup X_2$ множеств $X_1$, $X_2$ или для открытых, когда $X_1 \cup X_2$ паракомпактно.

Пусть $A_i \subset X_i$, $i=1, 2$, где $X_i$ удовлетворяют сформулированным условиям, а $A_i$ — условиям, наложенным в п. 2.1 на $A_1$. Используя интерпретацию цепей как сечений вялых пучков $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})$, для любого паракомпактифицирующего семейства $\varphi$ получим короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \to C_*^{\varphi|(X_1 \cap X_2)}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2; \mathscr{G}) \xrightarrow{\mu}$$
$$\xrightarrow{\mu} C_*^{\varphi|X_1}(X_1, A_1; \mathscr{G}) \oplus C_*^{\varphi|X_2}(X_2, A_2; \mathscr{G}) \xrightarrow[j]{}$$
$$\xrightarrow[j]{} C_*^{\varphi|(X_1 \cup X_2)}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2; \mathscr{G}) \to 0.$$

В ней $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где $\mu_i$ индуцированы вложениями $(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \subset (X_i, A_i)$, а $j$ — вложениями $(X_i, A_i) \subset (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$. Точность в первых двух членах — следствие интерпретации цепей как сечений пучков (п. 2.1). Цепи из третьего члена — это сечения с носителями в $X_1 \cup X_2$, ограниченные на $X \setminus (A_1 \cup A_2)$, и вялость $\mathscr{C}_*(\mathscr{G})$ позволяет разложить такие сечения в сумму сечений с носителями в $X_1$ и $X_2$, что обеспечивает сюръективность $j$. Возникает точная последовательность гомологий

$$\ldots \to H_p^{\varphi|(X_1 \cap X_2)}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2; \mathscr{G}) \to$$
$$\to H_p^{\varphi|X_1}(X_1, A_1; \mathscr{G}) \oplus H_p^{\varphi|X_2}(X_2, A_2; \mathscr{G}) \to$$
$$\to H_p^{\varphi|(X_1 \cup X_2)}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2; \mathscr{G}) \to \ldots . \qquad (13)$$

Выделяются два стандартных случая. В первом $A_1 = A_2 = \varnothing$, получаем точную последовательность гомологий триады

$$\ldots \to H_p^{\varphi|(X_1 \cap X_2)}(X_1 \cap X_2; \mathscr{G}) \to H_p^{\varphi|X_1}(X_1; \mathscr{G}) \oplus H_p^{\varphi|X_2}(X_2; \mathscr{G}) \to$$
$$\to H_p^{\varphi|(X_1 \cup X_2)}(X_1 \cup X_2; \mathscr{G}) \to \ldots . \qquad (14)$$

Во втором $X_1 = X_2 = X$, возникает «аддиционная» последовательность гомологий триады $(X; A_1, A_2)$

$$\ldots \to H_p^{\varphi}(X, A_1 \cap A_2; \mathcal{G}) \to H_p^{\varphi}(X, A_1; \mathcal{G}) \oplus H_p^{\varphi}(X, A_2; \mathcal{G}) \to$$
$$\to H_p^{\varphi}(X, A_1 \cup A_2; \mathcal{G}) \to \ldots \qquad (15)$$

**2.3. Когомологии триад.** Рассмотрение плоской диаграммы, содержащей две короткие точные последовательности комплексов коцепей (с носителями в $\varphi$, см. п. 5.3 гл. 1) пар подпространств $i_1 : (Y_1, Y_1 \cap Y_2) \subset (Y_1 \cup Y_2, Y_2)$ (с отвечающими вложениям гомоморфизмами) и одновременно — аналогичные последовательности для пар $i_2 : (Y_2, Y_1 \cap Y_2) \subset (Y_1 \cup Y_2; Y_1)$, легко подтверждает, что отображение коцепей пар при вложении $i_1$ тогда и только тогда изоморфно, когда изоморфно аналогичное отображение для $i_2$. Обладающие таким свойством триады $(Y_1 \cup Y_2; Y_1, Y_2)$ будем называть $\varphi$-вырезаемыми.*) Для таких триад, как это легко следует из указанной диаграммы, возникают точные последовательности коцепных комплексов

$$0 \to C^*_{\varphi \cap (Y_1 \cup Y_2)}(Y_1 \cup Y_2; \mathcal{G}) \xrightarrow{\mu} C^*_{\varphi \cap Y_1}(Y_1; \mathcal{G}) \oplus C^*_{\varphi \cap Y_2}(Y_2; \mathcal{G}) \to$$
$$\to C^*_{\varphi \cap (Y_1 \cap Y_2)}(Y_1 \cap Y_2; \mathcal{G}) \to 0,$$

где $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\mu_i$ индуцированы гомоморфизмами ограничения. Из описания гомоморфизмов ограничения п. 5.1 гл. 1 вытекает $\varphi$-вырезаемость триад с открытыми $Y_1$, $Y_2$ в $Y_1 \cup Y_2$, для замкнутых $Y_1$, $Y_2$ при паракомпактифицирующем (в $Y_1 \cup Y_2$) семействе $\varphi$, для любых $Y_1$, $Y_2$ в наследственно паракомпактном $Y_1 \cup Y_2$ при паракомпактифицирующем $\varphi$ (вообще для $\varphi$-жестких $Y_1$, $Y_2$).

В отличие от рассмотренного выше в определении $\varphi$-вырезаемости, данном в § 13 гл. 2 в [87], фигурирует требование индуцированного $i_1$ изоморфизма когомологий (с носителями в $\varphi$) для любых пучков коэффициентов $\mathcal{G}$. При формулировании, однако, конкретных условий, обеспечивающих наличие такого свойства, фактически используется поведение коцепей и их носителей (при интерпретации коцепей как сечений вялых резольвент).

Учитывая точность короткой последовательности коцепей для $\varphi$-вырезаемой триады $(B_1 \cup B_2; B_1, B_2)$, где $B_i \subset Y_i$, получим короткую точную последовательность коцепных комплексов

$$0 \to C^*_{\varphi \cap (Y_1 \cup Y_2)}(Y_1 \cup Y_2, B_1 \cup B_2; \mathcal{G}) \to$$
$$\to C^*_{\varphi \cap Y_1}(Y_1, B_1; \mathcal{G}) \oplus C^*_{\varphi \cap Y_2}(Y_2, B_2; \mathcal{G}) \to$$
$$\to C^*_{\varphi \cap (Y_1 \cap Y_2)}(Y_1 \cap Y_2, B_1 \cap B_2; \mathcal{G}) \to 0$$

*) Одно из наиболее широких достаточных условий для этого [98]: $Y_1 \cup Y_2 = \mathrm{Int}\, Y_1 \cup \mathrm{Int}\, Y_2 \cup (Y_1 \cap Y_2)$ (операция Int в $Y_1 \cup Y_2$).

и отвечающую ей точную последовательность когомологий

$$\ldots \to H^q_{\Phi\cap(Y_1\cup Y_2)}(Y_1 \cup Y_2,\ B_1 \cup B_2;\ \mathcal{G}) \to$$

$$\to H^q_{\Phi\cap Y_1}(Y_1,\ B_1;\ \mathcal{G}) \oplus H^q_{\Phi\cap Y_2}(Y_2,\ B_2;\ \mathcal{G}) \to$$

$$\to H^q_{\Phi\cap(Y_1\cap Y_2)}(Y_1 \cap Y_2,\ B_1 \cap B_2;\ \mathcal{G}) \to \ldots . \tag{16}$$

В частности, при $Y_1 = Y_2 = X$ возникает аддиционная последовательность когомологий триады

$$\ldots \to H^q_\Phi(X,\ B_1 \cup B_2;\ \mathcal{G}) \to H^q_\Phi(X,\ B_1;\ \mathcal{G}) \oplus H^q_\Phi(X,\ B_2;\ \mathcal{G}) \to$$

$$\to H^q_\Phi(X,\ B_1 \cap B_2;\ \mathcal{G}) \to \ldots, \tag{17}$$

а при $B_1 = B_2 = \varnothing$ — точная последовательность когомологий триады

$$\ldots \to H^q_{\Phi\cap(Y_1\cup Y_2)}(Y_1 \cup Y_2;\ \mathcal{G}) \to H^q_{\Phi\cap Y_1}(Y_1;\ \mathcal{G}) \oplus H^q_{\Phi\cap Y_2}(Y_2;\ \mathcal{G}) \to$$

$$\to H^q_{\Phi\cap(Y_1\cap Y_2)}(Y_1 \cap Y_2;\ \mathcal{G}) \to \ldots . \tag{18}$$

В случае, когда $X$ — многообразие (ср. с концом п. 2.1), последовательности (13), (14) и (15) совпадают при $p+q=n$ с последовательностями (16), (17) и (18), в которых $Y_i = X \setminus X_i$, $B_i = X \setminus A_i$, а пучок коэффициентов зависит от коэффициентов для гомологий (следствие двойственности Пуанкаре, см. п. 6.1 ниже).

## § 3. Локальное поведение

**3.1. Обращение локально в нуль. Гомологическая локальная связность.** Как отмечалось в п. 2.3 гл. 1, когомологии локально исчезают: $\varinjlim\limits_{U} H^p(U, x; \mathcal{G}) = 0$ ($U$ — окрестности точки $x$). Содержание § 2 гл. 1 демонстрирует фундаментальное значение этого наблюдения при построении пучковых когомологий. Интерпретируемое как усиление аксиомы размерности (касающейся когомологий точки), это свойство успешно использовалось в [63] для аксиоматики когомологий в нескольких естественных категориях топологических пространств (ср. с п. 5.3 гл. 3). В случае когомологий 2-го рода (в том числе в категории полиэдров) это требование предполагалось выполненным и на бесконечности. Равнозначность полученной аксиоматики подходу, базированному на свойствах аддитивности, подтверждает эквивалентность этим свойствам условия локального обращения в нуль когомологий.

Для гомологий картина несколько сложнее: даже в категории метризуемых компактов для элемента $h \in H_n(X; Z)$, $n > 0$, могут существовать, вообще говоря, такие точки $x \in X$, что $h$ содержится в образе $H^c_n(U; Z) \to H_n(X; Z)$ для сколь угодно малых окрестностей $U$ точки $x$ (см. замечание после леммы 8 в [62]). Этого не может быть, если $X$ гомологически локально связно (до конца связь такого явления с томологической локальной связностью пока не выяснена). И все же гомологии $H^c_*$, по крайней мере для пространств $X$ с 1-й аксиомой счетности, локально исчезают: $\varprojlim H^c_n(U, x; \mathcal{G})=0$, $U$ — окрестности произвольной точки $x \in X$ (лемма 8 в [62]). Более того, в этом случае также и $\varprojlim\nolimits^1_U H^c_n(U; \mathcal{G})=0$, см. лемму 8 в [76] (напомню, что для счетных проективных систем $\varprojlim\nolimits^p=0$ при $p>1$).

Как усиление аксиомы размерности условие локального обращения в нуль использовалось в аксиоматике гомологий в нескольких естественных категориях топологических пространств [63] (в том числе на бесконечности — для симплициальных гомологий 2-го рода). В соответствии с результатами [50] для конечно порожденных групп (или модулей) коэффициентов $G$ это условие эквивалентно требованиям аддитивности, используемым при альтернативном подходе (ср. с п. 5.3 гл. 3). Для не конечно порожденных $G$ это не так — контрпример представляет не $\Pi_c$-аддитивная теория Бореля—Мура (§ 6 гл. 3 выше).

Естественными усилениями свойства локального обращения в нуль являются требования гомологической ($hlc_R$) и когомологической ($clc_R$) локальной связности пространства $X$ (над кольцом коэффициентов $R$): для любого натурального $n$ и всякой точки $x \in X$ должны существовать сколь угодно малые окрестности $V \subset U$ этой точки с тривиальными до размерности $n$ отображениями гомологий $H^c_*$ (соответственно, когомологий $H^*$) этих окрестностей. Требования $hlc_R$ и $clc_R$ эквивалентны (для локально компактных пространств). Аналогично определяется гомологическая и когомологическая локальная связность над произвольным $R$-модулем коэффициентов $G$. Имеется много следствий этих требований (в частности, гомологии и когомологии удовлетворяющих этим требованиям компактов в каждой размерности конечно порождены), а также ряд эквивалентных условий. Достаточно полно сведения по таким вопросам отражены в п. 2.1 главы 8 в [69] (см. также работу [66]).

Метризуемое локально компактное пространство $X$, гомологически локально связное вплоть до размерности $n$ (кратко $hlc^n$) в точках $X \setminus x_0$, обладает этим свойством и в точке $x_0$, если у этой точки найдется окрестность $U$, для которой образы $H^c_p(U; Z) \to H^c_p(X; Z)$ (в частности, сами группы $H^c_p(X; Z)$) конечно порождены при $p \leqslant n$ [101]. Одноточечная компактификация некомпактного $hlc^n$-пространства $X$ тогда и только тогда является $hlc^n$, когда конечно порождены при $p \leqslant n$ группы $H_p(X; Z)$ [101].

**3.2. Локальные группы.** В п. 2.6 гл. 2 мы уже сталкивались с локальными группами гомологий $H_p^x(G)=H_p^c(X, X\setminus x; G)=$ $=H_p(X, X\setminus x; G)$. Под локальными когомологиями $I_x^p(G)$ понимаются прямые пределы групп $H^p(U\setminus x; G)$ по окрестностям $U$ точек $x\in X$. Из рассмотрения точных последовательностей когомологий пар $(U, U\setminus x)$ легко вытекает равенство $I_x^p(G)=$ $=H^{p+1}(X, X\setminus x; G)$. В литературе широко употребительны также следующие локальные группы: $I_p^x(G)=\underset{\overleftarrow{U}}{\lim} H_p^c(U\setminus x; G)$ и $H_x^p(G)=\underset{\overleftarrow{U}}{\lim} H^p(X, X\setminus U; G)$. В [5] и [62] определены преобразования $\delta_x: H_p^x(G)\to I_{p-1}^x(G)$ и $\delta^x: I_x^p(G)\to H_x^{p+1}(G)$, которые для пространств с 1-й аксиомой счетности включаются в точные последовательности

$$0\to\underset{\overleftarrow{U}}{\lim}{}^1 H_p^c(U\setminus x; G)\to H_p^x(G)\to I_{p-1}^x(G)\to 0 \tag{19}$$

(см. [36] и [76]) и

$$0\to\underset{\overleftarrow{U}}{\lim}{}^1 H^p(X, X\setminus U; G)\to I_x^p(G)\to H_x^{p+1}(G)\to 0 \tag{20}$$

(см. [76]). При этом $\delta_x$ оказываются изоморфизмами для $hlc_G$-пространств [76], а $\delta^x$ — для периферически когомологически локально связных над $G$ [54] (см. термин ниже). В случае, когда $G=R$ — счетное кольцо главных идеалов, а $X$ — метризуемое локально компактное $hlc_R$-пространство, последовательность (20) расщепляется, ее крайние члены допускают некоторое описание соответственно в терминах $\mathrm{Ext}_R(A, R)$ и в терминах обратных пределов некоторых конкретных модулей, а группы $H_p^x(R)$ счетны [132]. Найдены также некоторые условия, обеспечивающие расщепляемость (19) [132].

Эти конструкции, история их создания и развития отражены в п. 2.2 главы 8 в [69]. Здесь мы изложим новую точку зрения на природу локальных групп и некоторые приложения. Из точной последовательности (4) п. 1.1 выше вытекает (по крайней мере при $p>0$), что $H_p^x(G)$ — это гомологии связи точки $x$ с ее дополнением, а из точной последовательности (11) п. 1.3 — что для любых $p$ группы $I_x^p(G)$ суть когомологии связи (окружения) точки $x$, поэтому следует их сравнивать не с $I_{p-1}^x(G)$ и $H_x^{p+1}(G)$ (как выше), а соответственно с $(p-1)$-мерными гипергомологиями для функтора $\underset{\leftarrow}{\lim}$ проективной системы цепных комплексов $C_*^c(U\setminus x; G)$ и $(p+1)$-мерными гиперкогомологиями проективной системы коцепных комплексов $C^*(X, X\setminus U; G)$. Сравнение всегда является изоморфизмом в случае когомологий, а в случае гомологий — для локально компактных пространств, для пространств с 1-й аксиомой счетности и для локально стягиваемых пространств (п. 1.2 выше). Преобразования $\delta_x$, $\delta^x$ пропускаются через стандартные для гипергомологий спектральные последовательности (в случае локальных когомологий, например, со вторым членом вида $E_2^{pq} = \underset{\overleftarrow{U}}{\lim}{}^p H^q(X, X \setminus U; G)$), условия изоморфизма $\delta_x$, $\delta^x$ совпадают с условиями их вырождения.

Таким образом, по отношению к «истинным» локальным группам $H_p^x(G)$ и $I_x^p(G)$ группы $I_{p-1}^x(G)$ и $H_x^{p+1}(G)$ занимают такое же положение, как гомологии Чеха — по отношению к гомологиям Стинрода — Ситникова. Тем не менее эти группы играют определенную самостоятельную роль, например, в гомологической теории размерности (см. ниже). Группы типа $\underset{\overleftarrow{U}}{\lim}{}^p H^q(X, X \setminus U; G)$ также иногда учитывались в литературе, но не как члены указанных выше спектральных последовательностей, а в качестве альтернативных вариантов локальных групп (типа $H_x^q(G)$), см. [119], [132].

Локальные группы нашли много применений в гомологической теории размерности (см. ниже). Удобным средством они оказались и при изучении различных локальных свойств пространств. Например, точка $x \in X$ называется периферической (по отношению к модулю коэффициентов $G$), если для любой ее окрестности $U$ найдется меньшая окрестность $V$ такая, что образы $H^p(X, X \setminus V; G) \to H^p(X, X \setminus U; G)$ равны нулю; точки, не являющиеся периферическими, называются внутренними [120]. Точка $x \in X$ называется гомологически нестабильной [135], если $H_x^p(G) = 0$ для всех $p$. Если $G = R$ — счетное кольцо главных идеалов или любое поле, а $X$ — конечномерное метризуемое пространство, то множества периферических и гомологически нестабильных точек совпадают, в то время как для произвольных $G$ они независимы [53]. Для счетных $G$ или счетно порожденных модулей $G$ над артиновыми кольцами периферические точки характеризуются тем, что для них все $I_x^p(G)$ равны нулю [52]. Если $C$ — компактное подпространство, состоящее из периферических точек (относительно указанного выше кольца), то вложение $X \setminus C \subset X$ индуцирует изоморфизм когомологий с коэффициентами в любом $R$-модуле $G$ [53]. При этом в частных ситуациях обнаруживается связь с теоремой Вьеториса для вложений (п. 5.2 ниже). Такой же результат получен в [29] для гомологий 2-го рода локально компактных метризуемых пространств ($C$ — замкнутое множество, в точках которого $H_p^x(G) = 0$), а также для гомологий $H_*^c$ произвольных метризуемых пространств. Связь между такими точками, определенными в терминах гомологий и когомологий, рассматривается в [52], для коммутативных колец $R$ они эквивалентны при дополнительных ограничениях типа обычной или периферической (см. ниже) гомологической локальной связности. В случае гомологий по самому определению внутренние точки — это такие, в которых $X$ для некоторых $r$ образует $r$-мерное препятствие в смысле П. С. Александрова [76]. Если $G=R$ — поле, они характеризуются условием $H_r^x(R)\neq 0$ (в частности, гомологически стабильны). В пространстве $X$ гомологической размерности $n$ (над $G$) множество точек, в которых $H^x{}_n(G)\neq 0$, имеет ту же гомологическую размерность, а размерность дополнительного множества меньше [76].

**3.3. Периферические локальные условия.** Всякая точка $x$ полиэдра $X$ обладает окрестностями $U$, для которых $X\setminus U$ — деформационные ретракты $X\setminus x$, в частности, гомологии и когомологии пары $(X\setminus x, X\setminus U)$ тривиальны. Для пространств $X$ с 1-й аксиомой счетности $\varinjlim_{U} H^p(X\setminus x, X\setminus U; G)=0$, см. [5].

Нетрудно убедиться, что и $\varprojlim_{U} H_p^c(X\setminus x, X\setminus U; G)=0$. Это оправдывает определения, данные в § 5 в [65]. Пространство $X$ называется периферически гомологически локально связным над $G$ (кратко, $phlc_G$), если для любого $n$ и любой окрестности $U$ произвольной точки $x$ найдется ее меньшая окрестность $V$ с тривиальными при $p\leqslant n$ гомоморфизмами $H_p^c(X\setminus x, X\setminus U; G)\to$ $\to H_p^c(X\setminus x, X\setminus V; G)$. Аналогичным образом в терминах $H^*$ определяется периферическая когомологическая локальная связность (кратко, $pclc_G$).

Как установлено в [54], эти новые условия не зависят от наличия $hlc_R$. В какой-то степени их роль вскрывается примером стягиваемого локально стягиваемого двумерного компакта $X$, являющегося компактификацией одной точкой $x$ бесконечного полиэдра, для которого $I_x^2(Z)=H^3(X, X\setminus x; Z)\neq 0$, в то время как, очевидно, $H_x^3(G)=0$ (пример 4.6 в [66]) — при наличии $phlc_G$ такие явления невозможны (поскольку $I_x^p(G)=H_x^{p+1}(G)$, см. предыд. п.). Для счетных $G$ требование $pclc_G$ эквивалентно счетности всех $I_x^p(G)$, $x\in X$ [54]. В классе локально компактных $hlc_R$-пространств требования $phlc_R$ и $pclc_R$ эквивалентны, а если $X$ имеет конечную гомологическую размерность и $R$ счетно, наличие $hlc_R$ и $phlc_R$ одновременно эквивалентно конечной порожденности всех модулей $H_p^x(R)$ (или $H_p^x(R)$ и $I_x^p(R)$ вместе), при этом для $H_p^x(G)=I_{p-1}^x(G)$ и $I_x^p(G)=H_x^{p+1}(G)$ справедливы все обычные формулы универсальных коэффициентов (т. е. с функторами $\otimes$ и Tor, а также с Hom и Ext) [54]. При наличии $hlc_R$ и $phlc_R$ одновременно вычисляются локальные группы произведения (соотношения Кюннета) [54].

Менее типичные условия, обеспечивающие изоморфизм $I_x^p(R)=H_x^{p+1}(R)$ и конечную порожденность модулей $I_x^p(R)$, обсуждаются в [132]. Интерес к условиям, обеспечивающим конечную порожденность локальных групп, подтверждается, например, тем, что предположения о конечной порожденности $H^x_p(Z)$ играют существенную роль при изучении локальных свойств окрестностных ретрактов и, в частности, условий, при которых такие пространства оказываются гомологическими многообразиями [89]. Требования *phlc* и *pclc*, по-видимому, должны быть полезны в гомологической теории размерности (см. ниже), особый интерес должен представлять класс пространств, являющихся $hlc_R$ и $phlc_R$ одновременно.

## § 4. Гомологическая размерность

**4.1. Применение гомологий.** По понятным причинам (обсуждавшимся в главах 1 и 2) при решении задач, связанных с теорией размерности, обычно используется язык когомологий. Впрочем, совпадая с группами характеров в смысле Л. С. Понтрягина соответствующих целочисленных когомологий, еще на ранней стадии развития гомологической теории размерности компактных пространств широко использовались эквивалентные чеховским гомологии с коэффициентами в группе $S^1$ приведенных по модулю 1 действительных чисел. Тем не менее на протяжении многих последних лет постоянно появлялся интерес к применению и других, не только компактных, коэффициентов. Особенный интерес представляет, прежде всего, группа $Z$ целых чисел. Доказательства многих из перечисленных ниже результатов существенно зависят от наличия вялых пучков цепей.

Многие стандартные факты гомологической теории размерности (свойства монотонности, различные теоремы суммы и др.) получены в работе [76]. Там же установлено, что в классе метризуемых локально компактных пространств гомологическая размерность $h\dim_G X$ по $R$-модулю коэффициентов $G$ не превосходит когомологическую $\dim_R X$, а если $R$ — поле, то $h\dim_R X = \dim_R X$. Размерность $h\dim_Z X$ над целыми числами может отличаться от $\dim_Z X$ не более, чем на 1, равенство влечет размерную полноценность $X$ и эквивалентно ей в классе $hlc_Z$-пространств [76]. Справедливы характеристики, дуальные известным в когомологическом варианте теории. Например, из $H_k(X, A; G)=0$ для всех замкнутых $A\subset X$ вытекает, что при $p>0$ и $H_{k+p}(X, A; G)=0$ [45] (см. также [42]). Условие $h\dim_G X\leqslant n$ эквивалентно мономорфности отображений $H_n(A; G)\to H_n(X; G)$ [45] (см. также [42]) и, аналогично, мономорфности отображений $H_n(X, A\cap A'; G)\to H_n(X, A; G)\oplus H_n(X, A'; G)$ в гомологических последовательностях Майера — Вьеториса [48] ($A$, $A'$ выше — любые замкнутые множества).

В некоторых случаях имеют место результаты, выгодно отличающие гомологический вариант теории от когомологического. Как замечено в § 5 работы [66], например, $h\dim_G X$ определяется гомологиями пар $(X, A)$ не только по замкнутым, но и по открытым множествам $A\subset X$ (для когомологий, см. ниже, это не так). Аналогично [64], если $h\dim_G X<\infty$, это число совпадает с максимальным $n$, для которого найдутся отличные от нуля локальные группы $H_n^x(G)$ (как отмечалось в п. 3.2 выше, множество таких $x\in X$ имеет полную размерность). Условие конечности $h\dim_G X$, как показывает пример счетного произведения окружностей, существенно. При $n=h\dim_G X$ предпучок $U\to H_n(U;\ G)$ на локально компактном пространстве является пучком (лемма 9 в [76]), и это наблюдение характеризует $h\dim_G X$ [45]. Это означает, что гомологии в старшей размерности совпадают с нульмерными когомологиями $X$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{H}_n(G)$ (проявление двойственности Пуанкаре, см. ниже).

**4.2. Когомологии. Общие сведения.** Для паракомпактного пространства $X$ условие, что его когомологическая размерность $\dim_{\mathcal{G}} X$ (над пучком коэффициентов $\mathcal{G}$) не превосходит $n$, эквивалентно наличию для пучка $\mathcal{G}$ мягких резольвент длины $\leqslant n$ (предложение 2.15.2 в [87]). В этом проявляется общность природы размерности в топологии и размерности объектов, употребляемой в гомологической алгебре, в частности, глобальной размерности кольца, инъективной и проективной размерностей модулей и др. [92].

В отличие от $h\dim_G X$, размерность $\dim_G X$ определяется только парами $(X,\ A)$ с замкнутыми множествами $A$, размерностный инвариант $\operatorname{Dim}_{\mathcal{G}} X$, определяемый так же, как $\dim_{\mathcal{G}} X$, но по парам $(X,\ U)$ с открытыми $U\subset X$, может отличаться (существуют метрические компакты $X$ размерности $n$, в некоторых точках которых $H^{n+1}(X, X\setminus x;\ G)\neq 0$, см. п. 3.3 выше для $n=2$, а также [44] для $n=0$ и [76] для $n=1$). Из упражнения 22 к гл. 2 в [87] и работы [37] следует, что в случае наследственно паракомпактного пространства $X$ с 1-й аксиомой счетности условие $\operatorname{Dim}_{\mathcal{G}} X\leqslant n$ эквивалентно наличию у пучка $\mathcal{G}$ вялых резольвент длины $\leqslant n$. Для любого наследственно паракомпактного пространства $\operatorname{Dim}_{\mathcal{G}} X\leqslant\dim_{\mathcal{G}} X+1$ (лемма 5.2 в [66]). Оба инварианта совпадают для любых локально постоянных коэффициентов $\mathcal{G}$, если $X$ — клеточный полиэдр, для локально постоянного пучка $\mathcal{G}$ с конечно порожденными слоями, если $X$ — обобщенное многообразие и для локально постоянного $\mathcal{G}$ с полем в качестве слоя, если $X$ гомологически локально связно над этим полем (§ 5 в [66]).

Для паракомпактных пространств условие $\dim_{\mathcal{G}} X\leqslant n$ эквивалентно эпиморфности отображений $H^n(X;\ \mathcal{G})\to H^n(A;\ \mathcal{G})$ для всех замкнутых $A\subset X$ (см. [60] или [33]), а при $n\geqslant 1$ — также эпиморфности отображений $H^n(X,\ X_1;\ \mathcal{G})\oplus H^n(X,\ X_2;\ \mathcal{G})\to H^n(X, X_1\cap X_2; \mathcal{G})$ в последовательностях Майера — Вьеториса для любых замкнутых множеств $X_1$, $X_2$ [48] (условие $n\geqslant 1$ существенно). Имеются и другие характеристики в терминах гомоморфизмов старших членов последовательностей Майера — Вьеториса [48]. В случае локально компактного пространства $\dim_{\mathcal{G}} X \leqslant n$, $n \geqslant 1$, в точности при условии, что предкопучок $U \to H_c^n(U; \mathcal{G})$ является копучком (В. Г. Мирюк, Б. Л. Окунь, см. [48]).

В отличие от $h\dim_G X$, когомологическая размерность $\dim_G X$ локальными группами $I_x^{p-1}(G)$ или $H_x^p(G)$ не определяется [76] даже в категории метрических компактов (непригодность $I_x^{p-1}(G)$ демонстрируется отмеченными выше примерами). В случае локально компактного пространства $X$ со 2-й аксиомой счетности при условии, что $\dim_G X < \infty$, этот инвариант совпадает с максимальным числом $n$, для которого $H_x^n(G) \oplus I_x^n(G) \neq 0$ в некоторых $x \in X$, причем множество таких точек имеет когомологическую размерность $n$ [76] (существенность предположения о конечномерности демонстрируется счетным произведением отрезков). Для $pclc$-пространств конечной (над $Z$) размерности $\dim_G X$ совпадает с максимальным $n$, для которого в некоторых точках $I_x^{n-1}(G) = H_x^n(G) \neq 0$ [55].

Поскольку при переходе к одноточечным компактификациям размерность не изменяется, в случае локально компактных пространств в исходных определениях и $h\dim_G X$, и $\dim_G X$ можно пользоваться как обычными гомологиями и когомологиями, так и теориями $H_*$ и $H_c^*$.

Интерпретация обычной лебеговой размерности $\dim$ как когомологической $\dim_Z$ позволяет применять к ней алгебраический аппарат теории когомологий. Довольно просто и естественно при этом получаются обобщения на паракомпактные пространства некоторых известных результатов. В частности, с помощью спектральной последовательности Лере непрерывного отображения легко получается теорема об отображениях, понижающих размерность [57]: при замкнутом сюръективном отображении $f: X \to Y$ паракомпактных хаусдорфовых пространств $\dim X \leqslant \max_k (d_k + k)$, где $d_k$ — относительная размерность (совпадающая в случае пространств со счетной базой с обычной) в $Y$ множества $M_k$ (т. е. максимальная размерность замкнутых в $Y$ множеств, содержащихся в $M_k$) всех тех $y \in Y$, для которых $\dim f^{-1} y \geqslant k$. Некоторые следствия, частные случаи и обобщения на незамкнутые отображения см. в [57], [59]. Одно из следствий состоит в том, что замкнутые нульмерные отображения не понижают размерность — для них всегда $\dim Y \geqslant \dim X$. Если для такого отображения $\dim Y \geqslant \dim X + m$, то для всякого $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ возникает оценка $\dim Y \leqslant d_k + k$, где $d_k$ — относительная размерность в $Y$ множества всех тех точек $y$, для которых $f^{-1} y$ содержит не менее $k+1$ прообразов. В частности, отображение $f$ по крайней мере $(m+1)$-кратно (найдутся точки $y \in Y$, имеющие не менее $m+1$ прообразов). Средствами алгебраической топологии и теории пучков такие результаты были получены в [22] и [71].

В [22] была подмечена связь подобного рода результатов со спектральной последовательностью, отвечающей некоторой восстанавливаемой по отображению резольвенте постоянного пучка $R$ на $Y$ ($R$ — коммутативное кольцо). Построенные сперва только для конечнократных замкнутых отображений [22], такие резольвенты вместе с упрощениями были определены затем для любых замкнутых отображений [70], [72], а потом и для любых непрерывных [24] (вместе с отвечающими им спектральными последовательностями). Наибольший интерес такие резольвенты предоставляют для нульмерных отображений (когда вырождающаяся спектральная последовательность Лере фактически не несет в себе никакой информации), обеспечивая характеристики совершенных нульмерных отображений, в частности, открытых среди них, характеристики в классе открытых совершенных отображений подклассов нульмерных [151] и монотонных [25] отображений. Общий подход к описанию подобного рода резольвент излагается в [73], и в [74] — анализ возникающих спектральных последовательностей. Частными случаями оказываются спектральная последовательность Картана регулярного накрытия [23] и ее обобщение — спектральная последовательность Бореля полусвободного действия на топологическом пространстве конечной группы [74], спектральные последовательности покрытий в теории когомологий Чеха [24]. Получается также естественное описание спектральной последовательности Снаппера, освещающей связь между когомологиями конечной группы $G$ и любой ее подгруппы $H$, вскрывается ее общность со спектральной последовательностью Серра — Хохшильда, определенной в случае, когда $H$ — нормальный делитель $G$ [74].

В ситуации, когда $f: X \to X/G$ — каноническое отображение на факторпространство при свободном действии на $X$ конечной группы $G$, возникают спектральные последовательности нового типа, не укладывающиеся в предыдущие рамки [152]. Фигурирующие при этом резольвенты представляют интерес также с точки зрения формальной гомотопической теории локально гомотопически стягиваемых дифференциальных градуированных пучков.

**4.3. Неравенства Бокштейна. Реализация размерных функций.** Как известно (М. К. Бокштейн), существует счетная система $\sigma$ абелевых групп такая, что по когомологическим размерностям $\dim_H X$ для $H \in \sigma$ может быть определена когомологическая размерность метрического компакта $X$ над любой другой группой $G$. Система $\sigma$ составлена группами: группа рациональных чисел $Q$, циклические группы простых порядков $Z_p$, $p$-примарные квазициклические группы $Q_p$ и группы рациональных чисел $R_p$, знаменатели которых взаимно просты с простым числом $p$. Как показал М. Ф. Бокштейн, $\dim_G X = \sup\limits_{H \in \sigma(G)} \dim_H X$, где $\sigma(G)$ — некоторый зависящий от $G$ запас групп из $\sigma$ (§ 4 в [33]). Известны следующие неравенства М. Ф. Бокштейна (§ 4 в [33]):

$$\dim_{Q_p} X \leqslant \dim_{Z_p} X; \quad \dim_{Z_p} X \leqslant \dim_{Q_p} X + 1,$$
$$\dim_Q X \leqslant \dim_{R_p} X; \quad \dim_{Z_p} X \leqslant \dim_{R_p} X,$$
$$\dim_{Q_p} X \leqslant \sup\{\dim_Q X, \dim_{R_p} X - 1\},$$
$$\dim_{R_p} X \leqslant \sup\{\dim_Q X, \dim_{Q_p} X + 1\}.$$

Под размерной функцией $D$ понимается произвольное отображение $\sigma$ в множество всех натуральных чисел, удовлетворяющее этим неравенствам и такое, что если $D(H) = 0$ для некоторой $H \in \sigma$, то $D = 0$. Примерами являются $D(H) = \dim_H X$ (для любого фиксированного $X$). Очень долго стоял вопрос о том, каждая ли размерная функция реализуется таким образом (для некоторого метризуемого компакта $X$), т. е. являются ли приведенные выше неравенства единственным ограничением на набор когомологических размерностей компакта.

Положительный ответ на этот вопрос получен недавно А. Н. Дранишниковым [17], [18], [19]. Как установлено в [33], для решения проблемы достаточно построить для каждого простого $p$ и любого целого $n \geqslant 2$ так называемые основные компакты $FQ_n$, $FR_{pn}$, $FQ_{pn}$ и $FZ_{pn}$, когомологические размерности которых задавались бы таблицей, см. § 6 в [33] $(q \neq n)$:

| | $R_p$ | $Z_p$ | $Q_p$ | $R_q$ | $Z_q$ | $Q_q$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dim_H FQ_n$ | $n$ | 1 | 1 | $n$ | 1 | 1 | $n$ |
| $\dim_H FR_{pn}$ | $n$ | $n$ | $n$ | $n$ | 1 | 1 | $n$ |
| $\dim_H FZ_{pn}$ | $n$ | $n$ | $n-1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\dim_H FQ_{pn}$ | $n$ | $n-1$ | $n-1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

Соответствующий заданной размерной функции компакт $X$ получается из этих основных с помощью операции бесконечного компактного букета. При $n=2$ основные компакты были построены Л. С. Понтрягиным, В. Г. Болтянским и Кодамой, при $n=3$ — В. И. Кузьминовым [31]. А. Н. Дранишниковым основные компакты построены для любых $n$.

Следствиями основного результата являются следующие утверждения [17]: для любых натуральных чисел $m < n$ и $1 \leqslant k \leqslant m$

существуют компакты $X$, $Y$ такие, что $\dim X=m$, $\dim Y=n$ и $\dim(X\times Y)=n+k$; для конечно порожденных групп $G$ условие $\dim_G X\leqslant n$ эквивалентно существованию $G$-ацикличного отображения $f$ на $X$ некоторого $n$-мерного компакта ($\check{H}^*(f^{-1}(x);\ G)=0$ для всех $x\in X$). Для $G=Z$ это теорема Р. Эдвардса [145].

**4.4. Бесконечномерные пространства.** В случае, когда лебегова размерность $\dim$ конечна, она совпадает с когомологической $\dim_Z$ (одна из основных теорем гомологической теории размерности — теорема П. С. Александрова). Как обстоит дело при $\dim X=\infty$ — одна из основных проблем гомологической размерности (проблема П. С. Александрова), очень долго не поддававшаяся решению: существуют ли бесконечномерные компакты $X$, у которых для некоторых групп коэффициентов $\dim_G X<\infty$? Как известно, при $G=Z$ эта проблема эквивалентна не менее сложной: могут ли повышать размерность клеточноподобные отображения? ([104], [145]). История этой проблемы, а также задачи, связанные с поведением размерности при клеточноподобных отображениях, в том числе относящиеся к теории многообразий, рассматривались во многих работах, см. обзоры [138], [15]. Из теоремы Вьеториса — Бегла вытекает (см. ниже п. 5.3), что ацикличные (над $Z$) отображения не повышают размерность ($\dim_Z$), поэтому клеточноподобные отображения могут повышать размерность конечномерных пространств только до бесконечной, и в этом природа связи обеих проблем.

Вплоть до недавнего времени выделялись классы бесконечномерных компактов, чья когомологическая размерность также оказывается бесконечной. В [144], например, описываются подобные подпространства гильбертова куба, являющиеся пересечениями подмножеств, разделяющих его противоположные грани. Такого типа компакты содержатся в качестве подпространств в известных примерах компактов, все подпространства которых, отличные от нульмерных, бесконечномерны, поэтому когомологическая размерность компактов в этих примерах также бесконечна.

Установленное А. Н. Дранишниковым наличие бесконечномерных компактов конечных когомологических размерностей вытекает из содержания предыдущего пункта: достаточно взять счетный компактный букет основных компактов любого из четырех рассмотренных типов, отвечающих всем значениям $n$ (при фиксированном $p$). При этом для $G=Z_q$, $Q_q$, $R_q$ и $Q$ возникают бесконечномерные компакты с $\dim_G X=1$ (ответ на вопрос П. С. Александрова в связи с основной проблемой), в том числе даже такие, которых для $\dim_{Z_p} X=1$ при всех $p$. В первоначальных примерах (в том числе сильно бесконечномерных компактов $X$) было достигнуто только неравенство $\dim_{Z_p} X\leqslant 2$ [16]. Показано также, что для любого $m\geqslant 3$ существует компакт $X_m$ размерности $m$, у которого $\dim_{Z_n} X_m=2$ для всех $n$ [16]. Аналогичный компакт построен и для $m=\infty$, он сильно бесконечномерен и $\dim_Z X=\infty$ [16]. В частности, разность $\dim_Z X - \dim_{Z_p} X$ может принимать любые значения, в том числе бесконечное (также ответ на один из вопросов, ставившихся П. С. Александровым). Доказательство опирается на полученную автором характеристику $k$-мерных по $G=Z_p$ компактов в терминах их аппроксимации конечными полиэдрами, аналогичную известному результату Р. Эдвардса [145] для $G=Z$.

Особенный интерес основная проблема представляет для $G=Z$. Характеристики размерностей $\dim X$ и $\dim_Z X$ в терминах продолжения отображений с подмножеств $X$ в сферу $S^n$ и в полиэдр Эйленберга — Маклейна $K(Z;\ n)$, обеспечивая эквивалентность условий $\dim X \leqslant 1$ и $\dim_Z X \leqslant 1$, показывают, что решение проблемы для $n \geqslant 2$ зависит от весьма тонких различий между понятиями гомотопической и слабой гомотопической эквивалентностей. А. Н. Дранишникову удалось решить эту проблему для $n \geqslant 3$ (случай $n=2$ остается неясным): существует бесконечномерный компакт $X$, для которого $\dim_Z X=3$. Им установлено также существование клеточноподобных отображений на бесконечномерные компакты а) трехмерных компактов и б) стандартного куба размерности $n=7$. При $n=3$ таких отображений куба нет [117], для $n=4$, 5 и 6 вопрос остается открытым*).

В [20] установлено даже наличие бесконечномерных компактов, являющихся трехмерными когомологическими многообразиями над $Z_p$ (одновременно для всех простых $p$). Когомологические $n$-многообразия, лебегова размерность которых превосходит $n$, возникают в исследованиях, связанных с известной проблемой Гильберта — Смита. Доказательство опирается на следующий результат [20], представляющий самостоятельный интерес (ср. с концом п. 4.3): для любого множества $\mathscr{P}$ простых чисел произвольный компакт $X$, для которого $\dim_{Z_p} X \leqslant n$ при $p \in \mathscr{P}$, служит образом $n$-мерного компакта с $Z_p$-ацикличными для всех $p \in \mathscr{P}$ прообразами точек.

**4.5. Проблемы размерной полноценности.** Примеры размерно неполноценных компактов (т. е. с несовпадающими когомологическими размерностями по каким-то группам коэффициентов) были известны давно (Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, В. И. Кузьминов). Интерес к ним повысился в последние десятилетия в связи с тем, что подобного рода пространства стали встречаться в некоторых конкретных задачах теории $G$-пространств, в частности, в исследованиях по проблеме Гильберта — Смита.

Известные примеры размерно неполноценных компактов имели сложную локальную гомологическую структуру. После работы [100] долгое время предполагалось, что размерно полно-

*) Оправдывается характеристика пространств когомологической размерности $n$ (над $Z$) как клеточноподобных образов $n$-мерных [104], [145], [153], [154].

ценными должны быть любые $hlc$-пространства (проблема Дайера). Позже внимание было сосредоточено на более узком классе конечномерных локально стягиваемых компактов, совпадающем с классом конечномерных компактных $ANR$. Было известно, что в этом классе при некоторых $p$ (зависящих от $X$) $\dim X = \dim_{Z_p} X$. Отсюда вытекает, например, что $\dim X^n = n \dim X$ (для произвольных компактов, как показал В. Г. Болтянский, это не так). В соответствии с [148] всякий $ANR$-компакт имеет гомотопический тип полиэдра. Некоторые другие отличительные свойства компактных $ANR$ подтверждали мнение К. Борсука о том, что они должны служить гомологическим аналогом полиэдров. В 1978 г. им была поставлена проблема размерной полноценности компактных $ANR$.

Окончательное решение этой проблемы получено недавно А. Н. Дранишниковым [20]: существует семейство четырехмерных $AR$-компактов $M_p$, индексированных всеми простыми числами, такое, что $\dim(M_p \times M_q) = 7$ для любой пары индексов $p \neq q$ (как известно, размерная полноценность $X$ эквивалентна наличию соотношений $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых компактов $Y$). Таким образом, $AR$-компакты $M_p$ не только не размерно полноценны, но формула сложения размерностей может нарушаться даже в случае, когда оба множителя — $AR$-компакты.

Проблемы размерной полноценности и строения гомологических $n$-многообразий над различными полями коэффициентов, имеющих бесконечную обычную размерность, тесно связаны с известными редукциями гипотезы Гильберта — Смита (что всякая компактная группа, свободно действующая на многообразии, является группой Ли). Обсуждению ряда относящихся к этому новых глубоких идей много внимания уделено в [20] (см. также [21]).

Представление, будто компактные $ANR$ могут служить гомологическим аналогом конечных полиэдров, опровергается, в общем, и примером обсуждавшегося в п. 3.3 двумерного компакта: группа $H^3(X, X \setminus x; Z)$ в нем не только отлична от нуля, но и континуальна. При наличии условий $hlc_Z$ и $phlc_Z$, как отмечалось, все локальные группы над $Z$ конечно порождены. Такие локально компактные пространства называются в [66] обобщенными полиэдрами. Представляет интерес вопрос о их размерной полноценности.

## § 5. Непрерывные отображения

**5.1. Спектральная последовательность Лере.** Индуцированные непрерывными отображениями $f: X \to Y$ топологических пространств отображения гомологий и когомологий в равной степени зависят как от расположения образа $f(X)$ в $Y$, так и от локального устройства $f$, характеризующегося структурой полных прообразов точек $f^{-1}(y)$, $y \in Y$. В случае когомологий они описываются порождаемой $f$ и сходящейся к $H^*(X; \mathcal{F})$ спектральной последовательностью Лере, второй член которой имеет вид $E_2^{pq}=H^p(Y; \mathcal{H}^q(f))$, где пучки $\mathcal{H}^q(f)$ порождены предпучками $U \mapsto H^q(f^{-1}(U); \mathcal{F})$. В частности, $\mathcal{H}^0(f)=f\mathcal{F}$ — прямой образ пучка $\mathcal{F}$ при отображении $f$. Слои пучков $\mathcal{H}^q(f)$ в точках $y \in Y$ — это прямые пределы групп $H^q(f^{-1}(U); \mathcal{F})$ по окрестностям $U$ этих точек. Они совпадают с когомологиями $H^q(f^{-1}(y); \mathcal{F})$ в следующих случаях: а) для локально тривиальных расслоений $f: X \to Y$ над локально стягиваемыми $Y$ и постоянных $\mathcal{F}(H^q(f^{-1}(U); \mathcal{F})=H^q(f^{-1}(y); \mathcal{F})$ для достаточно малых $U$); б) для любых замкнутых отображений $f$ (свойство жесткости когомологий подпространств $f^{-1}(y)$), в частности, для любых отображений компактных пространств, для собственных отображений локально компактных пространств. В общем случае существуют только естественные преобразования $\mathcal{H}^q(f)_y \to H^q(f^{-1}(y); \mathcal{F})$.

Спектральная последовательность обеспечивает наличие индуцированных $f$ гомоморфизмов $\nu$: $E_2^{p\,0}=H^p(Y; f\mathcal{F}) \to H^p(X; \mathcal{F})$. В общем случае пучок $f\mathcal{F}$ достаточно специфичен. Чтобы «пропустить» через спектральную последовательность индуцированные $f$ отображения когомологий с данными заранее коэффициентами, в качестве $\mathcal{F}$ берут пучок $f^*\mathcal{G}$ — обратный образ при отображении $f$ пучка $\mathcal{G}$ на $Y$. Индуцированные $f$ гомоморфизмы $f^*: H^p(Y; \mathcal{G}) \to H^p(X; f^*\mathcal{G})$ представляются как композиции $H^p(Y; \mathcal{G}) \to H^p(Y; f f^*\mathcal{G}) \xrightarrow{\nu} H^p(X; f^*\mathcal{G})$, в которых первые отображения отвечают естественному преобразованию $\mathcal{G} \to ff^*\mathcal{G}$. Преобразование является изоморфизмом только для монотонных сюръективных $f$ (в этом случе $E_2^{p0}$ отождествляется с $H^p(Y; \mathcal{G})$). Аналогичные выводы справедливы для когомологий с носителями в паракомпактифицирующем семействе $\varphi$ для $Y$ и в семействе $f^{-1}(\varphi)$ — для $X$.

Для постоянных коэффициентов $f^*G=G$, поэтому в случае расслоений спектральная последовательность Лере превращается в обычную спектральную последовательность расслоения.

**5.2. Теоремы типа Вьеториса.** Очевидным следствием спектральной последовательности Лере является следующее утверждение (когомологическая версия теоремы Вьеториса — Бегла, см. п. 5.4 ниже): для замкнутого отображения $f$ паракомпактного пространства $X$ на паракомпактное пространство $Y$, ацикличного вплоть до размерности $N-1$ (т. е. с тривиальными приведенными когомологиями полных прообразов точек), индуцированные отображения $f^*: H^p(Y; G) \to H^p(X; G)$ изоморфны при $p \leqslant N-1$, а отображение в размерности $N$ мономорфно. (Этот и следующие ниже результаты могут быть получены и без спектральной последовательности, но с использованием в конечном итоге эквивалентного языка точных пар Масси.) Имеется много обобщений и частичные обращения.

Пусть $M_0$ — множество всех тех $y \in Y$, для которых $H^0(f^{-1}(y); f^*\mathcal{G}) \neq \mathcal{G}_y$, $M_k$, $k \geqslant 1$,— множество всех $y \in Y$, для которых $H^k(f^{-1}(y); f^*\mathcal{G}) \neq 0$, $d_k$ — относительная размерность $M_k$ в $Y$ (п. 4.2). Для замкнутого сюръективного отображения $f: X \to Y$ и некоторого натурального числа $N$ пусть $n = 1 + \max\limits_{0<k<N}(d_k + k)$ (в качестве $N$ может фигурировать и $\infty$)*). Оказывается [59], если $n < N$ (некоторые $M_k$ могут быть пусты), гомоморфизмы $f^*: H^i(Y; \mathcal{G}) \to H^i(X; f^*\mathcal{G})$ эпиморфны при $n \leqslant i < N$ и мономорфны при $n < i \leqslant N$. В качестве следствия аналогичный результат получается (§ 2 в [59]) и для отображений пар $f: (X, f^{-1}A) \to (Y, A)$ (множество $A$ замкнуто).

Имеет место [59] обращение этого результата в следующей форме. Пусть $m$ — число, равное нулю, если $d_k \leqslant 0$ при $k \leqslant N-1$, или $1 + \max\limits_{\substack{d_k>0\\ k<N}} (d_k + k)$, если есть $M_k$ с положительными $d_k$. При условии, что $m \leqslant n < N$, из эпиморфности отображений $f^*$ в размерностях $n \leqslant i < N$ и мономорфности их при $n < i \leqslant N$ для всех $y \in Y$ вытекает, что $H^p(f^{-1}y; f^*\mathcal{G}) = 0$ для $n \leqslant p < N$, $p > 0$, а если $n = 0$, то также что $H^0(f^{-1}y; f^*\mathcal{G}) = \mathcal{G}_y$.

Иного плана обобщение предложено в [82]. Изучаемое отображение $f: X \to Y$ рассматривается над некоторым пространством $T$ в том смысле, что сравниваются между собой прообразы точек при отображениях $g: Y \to T$ и $h = gf: X \to T$. Показывается, что аналог теоремы Вьеториса — Бегла остается справедливым, если условие ацикличности прообразов точек при отображении $f$ заменить на требование изоморфизма при $p \leqslant N-1$ всех отображений $H^p(g^{-1}t) \to H^p(h^{-1}t)$, $t \in T$, и мономорфизма в размерности $N$. В этой же работе дано обращение результата. Показано, что если множества $M_k$ точек $t \in T$, для которых отображения $H^k(g^{-1}t) \to H^k(h^{-1}t)$ не изоморфны, содержатся в некотором $M \subset T$ относительной размерности 0 (случай $n = 0$) и $H^p(g^{-1}t) = H^p(h^{-1}t) = 0$ для точек $t \in T \setminus M$ при $0 < p < N$, то из изоморфизма $H^p(Y) \to H^p(X)$ при $p < N$ и мономорфизма в размерности $N$ вытекает, что указанные множества $M_k$ вообще пусты.

Оба эти результата справедливы в указанной выше более общей форме [59]. Вместо условий нарушения ацикличности $f$, фигурировавших в описании множеств $M_k \subset Y$, используется отсутствие изоморфизма $H^k(g^{-1}(t); \mathcal{G}) \to H^k(h^{-1}(t), f^*\mathcal{G})$ ($M_k$ — подпространства в $T$). Для мономорфности отображения $f^*$ в крайней размерности $N$ дополнительно требуется мономорфность всех $H^N(g^{-1}(t); \mathcal{G}) \to H^N(h^{-1}(t); f^*\mathcal{G})$. В обращении теоремы в отличие от [82] не требуется, чтобы объединение $M_k$ имело относительную размерность 0, отброшено также требование ацикличности множеств $g^{-1}(t)$ и $h^{-1}(t)$ в точках $t \in T \setminus M_k$ (числа $m$,

*) Чтобы не учитывать $k$ для $M_k = \varnothing$, полагаем для них $d_k = -\infty$.

$n$ и $N$ сохраняют прежний смысл). Из эпиморфизма $H^p(Y; \mathcal{G})\to H^p(X; f^*\mathcal{G})$ при $n\leqslant p<N$ и мономорфизма при $n<p\leqslant N$ вытекает, что для всех $t\in T$ отображения $H^p(g^{-1}(t); \mathcal{G})\to H^p(h^{-1}(t); f^*\mathcal{G})$ эпиморфны при $n\leqslant p<N$ и мономорфны при $n<p\leqslant N$. Если в указанных условиях относительная размерность множества всех тех $t\in T$, в которых отображение $H^N(g^{-1}t; \mathcal{G})\to H^N(h^{-1}t; f^*\mathcal{G})$ не мономорфно, не больше нуля, то это множество вообще пусто.

Аналогичные результаты справедливы для вложений $i: X\subset Y$ в качестве плотных подмножеств, $X$ и $Y$ — паракомпактные пространства [59]. Рассмотрим множества

$$M_0=\{y\in Y \mid \varinjlim_{y\in U} H^0(U\cap X; \mathcal{G})\neq \mathcal{G}_y\},$$

$$M_k=\{y\in Y \mid \varinjlim_{y\in U} H^k(U\cap X; \mathcal{G})\neq 0\},\ k\geqslant 1,$$

где $\mathcal{G}$ — пучок на $Y$, $U$ — окрестности $y$ в $Y$. Эти множества лежат, очевидно, в $Y\setminus X$. Пусть, как и выше, $1+\max\limits_{0<k<N}(d_k+k)=n$, где $N$ — некоторое натуральное число или $\infty$. При $n<N$ отображения $i^*: H^p(Y; \mathcal{G})\to H^p(X; \mathcal{G})$ эпиморфны при $n\leqslant p<N$ и мономорфны при $n<p\leqslant N$ (теорема типа Вьеториса для вложений).

Аналогично, пусть $m=0$, если $d_k\leqslant 0$ при $k<N$, или $m=1+\max\limits_{\substack{d_k>0\\0<k<N}}(d_k+k)$, если имеются положительные $d_k$. Пусть $m\leqslant n<N$. Если отображения $i^*$ эпиморфны при $n\leqslant k<N$ и мономорфны при $n<k\leqslant N$, то $\varinjlim_{y\in U} H^p(U\cap X; \mathcal{G})=0$ для всех $y\in Y$ при $0<n\leqslant p<N$, а если $n=0$, то также $\varinjlim_{y\in U} H^0(U\cap X; \mathcal{G})=\mathcal{G}_y$.

**5.3. Некоторые применения.** Поведение когомологий при непрерывных отображениях как с позиций спектральной последовательности Лере, так и вообще, играет главную роль при изучении отображений, понижающих или повышающих размерность (п. 4.2 выше). В качестве простых следствий конструкций начала п. 5.2 фигурируют [59]: теорема Гуревича о нульмерных отображениях (при $\dim Y>\dim X$ относительная размерность множества всех $y\in Y$, имеющих несвязные $f^{-1}(y)$, не менее $\dim Y-1$); теорема Дайера об ацикличных отображениях $X\to Y$ (при $\dim Y<\infty$ всегда $\dim Y<\dim X$). В каждом случае классический результат распространяется на более широкую категорию замкнутых отображений паракомпактных пространств и получаются обобщения (на не нульмерные в малом или не ацикличные в малом отображения).

Спектральная последовательность Лере и результаты п. 5.2 применяются во многих других задачах. Пусть ниже $f: X\to Y$ — замкнутое сюръективное отображение (в категории паракомпактных пространств). Если для некоторого $A \subset Y$ пространства $X \setminus f^{-1}(A)$, $Y \setminus A$ паракомпактны и плотны в $X$ и $Y$, а для любой точки $y \in A$ имеем $\lim\limits_{\overrightarrow{y \in U}} H^p(U \cap (Y \setminus A);\ G) = H^p(y;\ G)$, то при выполнении аналогичного условия в точках $x \in f^{-1}(A)$ ацикличность отображения $f$ на множестве $Y \setminus A$ влечет ацикличность $f$ на всем $Y$ (теорема 2 в [61]). Такие условия возникают в случае, когда множества $A$ и $f^{-1}(A)$ — края обобщенных многообразий или имеют окрестности, гомеоморфные их произведениям на полуинтервал, откуда немедленно вытекают теоремы 1 и 2 из [118]. Если $d_k \leqslant 0$ при всех $k \geqslant 0$ для $f: X \to Y$ (см. начало п. 5.2) и для одного из $X$, $Y$ модули когомологий с коэффициентами в $R$-модуле конечного типа $G$ ($R$ — кольцо главных идеалов) в каждой размерности конечно порождены, то когомологии второго пространства обладают этим свойством в точности при условии, что все множества $M_k$ конечны, а модули $H^p(f^{-1}(y);\ G)$ конечно порождены; если при этом все гомоморфизмы $H^p(X;\ G) \to H^p(f^{-1}(y);\ G)$ тривиальны (например, достаточно мелки прообразы $f^{-1}(y)$), то когомологии $X$ и $Y$ тогда и только тогда изоморфны, когда $f$ ациклично на всем $Y$ (теорема 1 в [61]). В частности, если $f$ не ациклично, $X$ и $Y$ не гомеоморфны. Аналог первой части сформулированного результата имеет место также для подходящих плотных вложений $X \subset Y$ (лемма 4.4 в [136] и более полно — теорема 1′ в [61]).

Язык одномерных когомологий оказывается незаменимым в вопросах классификации некоторых видов компактификаций топологических пространств [58], [59]. Как известно, периферически компактные пространства $X$ (в частности, любые локально компактные) обладают компактификациями (компактными расширениями) $Y$ с нульмерным наростом $Y \setminus X$. Такие компактификации — частный случай расширений с пунктиформными наростами (имеющими относительную размерность 0 в $Y$). Если пространство $X$ обладает хотя бы одной компактификацией с пунктиформным наростом, то в множестве таких расширений имеется единственное максимальное, обозначаемое через $\mu X$ (совпадающее в случае периферически компактного $X$ с известной компактификацией Фройденталя с нульмерным наростом) и характеризующееся тем, что среди них оно является единственным совершенным (нарост $Y \setminus X$ локально не разделяет $X$ ни в одной своей точке).

Если $Y_1$, $Y_2$ — компактификации $X$ с пунктиформными наростами и $Y_1 < Y_2$, то естественное отображение $Y_2 \to Y_1$ (тождественное на $X$) нульмерно, поэтому $d_k = -\infty$ при $k > 0$, $d_0 = 0$, $n = 1$ и $N = \infty$. Таким образом, отображение $f^*: H^p(Y_1;\ G) \to H^p(Y_2;\ G)$ — изоморфизм при $k \geqslant 2$ и эпиморфизм при $k = 1$. Для локально компактных $X$ эпиморфизм в размерности 1 был установлен в [105]. Если пространство квазикомпонент $X$ компактно (в частности, если $X$ связно), то из обращения теоремы Вьеториса п. 5.2 вытекает, что изоморфизм $f^*$ в размерности 1 влечет равенство $Y_1=Y_2$. Для связного локально компактного $X$ результат был получен в [105].

Для фиксированной компактификации $Y_0$ с пунктиформным наростом пусть $H$ — ядро эпиморфизма $H^1(Y_0;\ Z)\to H^1(\mu X;\ Z)$, а $H_Y$ — ядро аналогичного гомоморфизма для компактификации $Y$, следующей за $Y_0$. Оказывается, $H_Y$ — сервантная подгруппа в группе без кручения $H$, и для связного $X$ сопоставление $Y\to H_Y$ является изоморфизмом частично упорядоченного множества всех следующих за $Y_0$ компактификаций с пунктиформными наростами на некоторое множество таких подгрупп в $H$, упорядоченных по включению. Результат представляет интерес и для локально компактных пространств. В этом случае в качестве $Y_0$ можно взять одноточечную компактификацию $X$, и множество всех компактификаций $X$ с нульмерными наростами изоморфно некоторому множеству упорядоченных по включению сервантных подгрупп в $H$. Если $Y_1$, $Y_2$ — следующие за $Y_0$ компактификации $X$ с пунктиформными наростами и $\pi_i: Y_i\to Y_0$ — естественные проекции, то $Y_1\leqslant Y_2$ в точности тогда, когда найдется гомоморфизм $\alpha: H^1(Y_1;\ Z)\to H^1(Y_2;\ Z)$, для которого $\alpha\pi_1^*=\pi_2^*$. Аналогичные конструкции применимы для выявления условий, при которых совершенное сюръективное отображение $f: X_2\to X_1$ связных пространств продолжается до отображения $Y_2\to Y_1$ некоторых компактификаций этих пространств при условии, что $Y_1$ — компактификация $X_1$ с пунктиформным наростом, следующая за аналогичной компактификацией $Y_0$, для которой такое продолжение уже существует (в категории локально компактных пространств обсуждаемые отображения совпадают с собственными, в качестве $Y_0$ всегда годится одноточечная компактификация $X_1$, поэтому вопрос о продолжении $f$ можно ставить для любой компактификации $Y_1$ с нульмерным наростом).

Поскольку естественное отображение компактификации Стоуна — Чеха $\beta X$ на $\mu X$ монотонно, отображение $H^1(\mu X;\ Z)\to H^1(\beta X;\ Z)$ мономорфно. В качестве $Y_2$ выше можно брать расширения, для которых $H^1(Y_2;\ Z)\to H^1(\beta X_2;\ Z)$ — мономорфизм (в частности, ацикличные в размерности 1). В этом случае из существования продолжения отображения $f$ до отображения $Y_2\to Y_0$ на некоторое расширение $Y_0$ (пространства $X_1$) с пунктиформным наростом (а это условие всегда выполнено в категории локально компактных пространств) вытекает наличие распространения $f$ до отображения $Y_2\to Y_1$ с любым расширением $Y_1$ пространства $X_1$, имеющим пунктиформный нарост. При $X_1=X_2=X$ и тождественном $f$, в частности, если компактификация $Y$ связного пространства $X$, для которой мономорфно $H^1(Y;\ Z)\to H^1(\beta X;\ Z)$, следует хотя бы за одним расширением $X$ с пунктиформным наростом, то $Y$ следует за $\mu X$. В случае, когда $X$ локально компактно, а $Y$ ациклично, это утверждение — теорема 4 в [105]. Этим расширение $\mu X$ связного локально компактного пространства $X$ характеризуется как минимальное среди всех компактификаций $Y$, для которых $H^1(Y; Z) \to H^1(\beta X; Z)$ — мономорфизм. Требование связности рассматриваемых пространств во всех этих конструкциях может быть заменено на более слабые [58].

В некоторых ситуациях возникают прозрачные связи между когомологиями $X$ и когомологиями компактификаций $X$. Если группа коэффициентов $G$ конечна или если псевдокомпактно пространство квазикомпонент $X$, для любого совершенного расширения $Y$ отображение $H^0(Y; G) \to H^0(X; G)$ — изоморфизм (теорема 5 в [59]). Ясно, что для произвольных компактификаций $Y$ несвязного пространства $X$ это не так (на $X$ найдутся локально постоянные функции со значениями в $G$, не продолжающиеся на $Y$). Пусть $Y$ — компактификация с 1-й аксиомой счетности в точках $Y \setminus X$. Чтобы расширение $Y$ было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы для постоянного пучка $G$ на $X$ его прямой образ $iG$ (при вложении $i: X \subset Y$) совпадал с постоянным пучком $G$ на $Y$ (теорема 6 в [59]). Если $Y$ — совершенное расширение $X$ с 1-й аксиомой счетности в точках нароста (например, расширение Фройденталя $\mu X$ периферически компактного пространства $X$ счетного веса с компактным пространством квазикомпонент), то отображение $i^*: H^1(Y; Z) \to H^1(X; Z)$ мономорфно (ср. с когомологиями $H^1(\beta X; Z)$ в п. 7.3 гл. 3), и если у пространства $X$ имеются компактификации с пунктиформными наростами, то для любой из них, отличной от $\mu X$ (а если $X$ локально компактно, то и для любой, предшествующей $\mu X$), указанное выше $i^*$ имеет ненулевое ядро (теорема 7 в [59]). У любого конечномерного паракомпактного пространства $X$ существуют компактификации $Y$ той же размерности, для которых отображения $H^p(Y; G) \to H^p(X; G)$ эпиморфны при $p > 0$ (теорема 11 в [59]).

**5.4. Гомологии.** Пусть $f: X \to Y$ — сюръективное отображение метрических компактов и $G$ — счетная группа. Если гомологии $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, с коэффициентами в $G$ тривиальны вплоть до размерности $N-1$, то индуцированное отображение $H_p(X; G) \to H_p(Y; G)$ изоморфно при $p \leqslant N-1$ и эпиморфно при $p = N$. Этот результат доказан недавно в [47]. Аналогичные утверждения соответственно для $p \leqslant N-2$ и $p = N-1$ были получены ранее в [28]. Для $G = Z$ и $N = \infty$ (без ограничения метризуемости) утверждение доказано в [87]. Для компактных групп и полей коэффициентов результаты известны давно, см. [80] и [81] (теорема Вьеториса—Бегла).

Такого сорта результатов нет пока для несчетных групп $G$, а также за пределами компактной категории (для гомологий с компактными носителями). В отношении применений, связанных с непрерывными отображениями, содержание первых трех пунктов настоящего параграфа демонстрирует преимущества когомологий по сравнению с гомологиями.

**5.5. Обобщенное свойство гомотопии.** Пусть $f, g : X \to Y$ — непрерывные отображения паракомпактных хаусдорфовых пространств, для которых существует связный компакт $T$ с фиксированными точками $s, t$ и такое отображение $F : X \times T \to Y$, что ограничения $F_s$, $F_t$ отображения $F$ на $X \times s$ и $X \times t$ совпадают с $f$ и $g$, и пусть $i_s$, $i_t$ — отвечающие точкам $s$, $t$ вложения $X$ в $X \times T$. При каких условиях совпадают индуцированные $f$ и $g$ отображения когомологий $f^*$, $g^*$ (равносильно, $i_s^*$, $i_t^*$) и отображения гомологий $f_*$, $g_*$ (равносильно, $i_{s*}$, $i_{t*}$)?

Если $X$ компактно, то $f^* = g^*$ для любого связного (возможно, и некомпактного) $T$ и любой группы коэффициентов $G$ [140], [97]. Если $G$ — компактная группа или поле, $f^* = g^*$ для компактных $T$ и любых $X$ [140]. Условия равенств $i_s^* = i_t^*$ и $i_{s*} = i_{t*}$ изучались в [46]. Пусть $S$ — компактное пространство, полученное приклеиванием к $T$ в точках $s$ и $t$ концов отрезка [0, 1]. Основную роль играет точная последовательность (когомологий пары $(S, T)$)

$$0 \to G \to H^1(S; G) \to H^1(T; G) \to 0. \tag{21}$$

Оказывается, равенство $i_s^* = i_t^*$ для любых паракомпактных $X$ имеет место тогда и только тогда, когда эта последовательность расщепляется. При $G = Z$ это так в случае, если $H^1(T; Z)$ имеет конечное число образующих (поскольку, не имея кручения, оказывается свободной). Если последовательность расщепляется для $G = Z$, то $i_s^* = i_t^*$ для любой другой группы $G$. Если $T$ — соленоид, $i_s^* \neq i_t^*$ для некоторых точек $s$, $t$ и группы $G = Z$.

Для гомологий с компактными носителями картина следующая [46]. При $G = Z$ эквивалентны утверждения: а) $i_{s*} = i_{t*}$: б) последовательность (21) расщепляется; в) $i_{s*} = i_{t*}$ в случае, когда $X$ состоит из одной точки. Если последовательность (21) расщепляется для $G = Z$, то $i_{s*} = i_{t*}$ для любой группы $G$.

С иных позиций для случая $G = Z$ задача рассматривалась в [4]. В частности, $i_s^* = i_t^*$ в размерности $p$ тогда и только тогда, когда равен нулю отвечающий (21) связывающий гомоморфизм $H^{p-1}(X; H^1(T; Z)) \to H^p(X; Z)$ (ср. с материалом в конце п.). В случае, когда $X$ локально компактно и гомологически локально связно в смысле сингулярной теории $H_s^*$, аналогичный критерий получен и в терминах связывающего гомоморфизма $\mathrm{Hom}(H_{p-1}^s(X; Z), H^1(T; Z)) \to \mathrm{Ext}(H_{p-1}^s(X; Z), Z)$. Сходные условия (с фигурирующими в них вместо $H_*^s$ группами $H^*$) найдены для совпадения в размерности $p$ отображений $i_{s*}$ и $i_{t*}$. В качестве следствий получены новые доказательства (для $G = Z$) основных результатов [46].

Условия равенства $i_s^*=i_t^*$ рассматривались позже Нгуен Ле Анем для произвольного гомотопического функтора от $X$ вида $[X, A]$, где $A$ — некоторое $H$-пространство, имеющее гомотопический тип клеточного комплекса (результаты публикуются). Следствиями полученных общих критериев являются утверждения: а) $i_s^*=i_t^*$ всегда для одномерных когомологий (с любыми коэффициентами); б) для фиксированной размерности $n>1$ равенство $i_s^*=i_t^*$ для данной группы $G$ эквивалентно расщепляемости (21); в) для $k$-теории (рассматриваемой как гомотопический функтор $[X, A]$ на категории паракомпактных пространств, $A=BU\times Z$ — классифицирующее пространство) равенство $i_s^*=i_t^*$ для всех паракомпактных $X$ равносильно расщепляемости точной последовательности $0\to Z\to k^1(S)\to k^1(T)\to 0$.

## § 6. Двойственность Пуанкаре. Обобщенные многообразия

**6.1. $(G—n)$-пространства. Двойственность.** Пусть $\mathcal{G}$ — локально постоянная система коэффициентов со слоем $G$ на локально компактном пространстве $X$, $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})$ — градуированный дифференциальный пучок цепей пространства $X$ с коэффициентами в $\mathcal{G}$ (п. 2.3 гл. 2), $n=h\dim_G X$ — гомологическая размерность. Предполагаем, что $n<\infty$. Существенность этого ограничения в следующих ниже рассмотрениях (как и в п. 2.7 гл. 2 или п. 4.1 выше) демонстрируется на примере счетного произведения окружностей. Как обычно, пусть $\mathcal{Z}_p\subset\mathcal{C}_p(\mathcal{G})$ — ядро $d$ и $\mathcal{B}_p\subset\mathcal{Z}_p$ — образ $d$, так что $\mathcal{Z}_p/\mathcal{B}_p=\mathcal{H}_p(\mathcal{G})$ (см. п. 2.6 гл. 2). В силу п. 4.1 выше в размерностях $p>n$ любые гомологии отсутствуют, и все $\mathcal{Z}_p=\mathcal{B}_p$ поэтому являются вялыми ($n$ — максимальное число, для которого $\mathcal{H}_p(\mathcal{G})\neq 0$). Следовательно, любые гомологии в $X$ (с любыми носителями $\varphi$) определяется пучком $\tilde{\mathcal{C}}_*(\mathcal{G})$, получающимся из $\mathcal{C}_*(\mathcal{G})$ отбрасыванием всех $\mathcal{C}_p(\mathcal{G})$ при $p>n$ и факторизацией $\mathcal{C}_n(\mathcal{G})$ по вялому подпучку $\mathcal{B}_n=\mathcal{C}_{n+1}(\mathcal{G})/\mathcal{Z}_{n+1}$.

В случае, когда $\mathcal{H}_p(\mathcal{G})=0$ и при $p<n$, $X$ будем называть $(G—n)$-пространством (такими оказываются не только многообразия, но и, например, пространства типа сферы с диаметральной плоскостью). Но для $(G—n)$-пространства $\tilde{\mathcal{C}}_*(\mathcal{G})$ — занумерованная в обратном порядке вялая резольвента «ориентирующего» пучка $\mathcal{H}_n(\mathcal{G})$, поэтому для любых семейств $\varphi$ имеем $H_k^{\varphi}(X; \mathcal{G})=H_{\varphi}^{n-k}(X; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$. Это и есть двойственность Пуанкаре.

Следствием этой основной конструкции и описания средствами теории пучков цепей и коцепей подпространств, пар, пар подпространств, триад и т. п. (п. п. 5.1 и 5.3 гл. 1, п. 2.4 гл. 2, § 2 выше) являются любые другие соотношения двойственности в многообразиях. Некоторые из таких соотношений, в частности, отмечены в п. п. 2.1 и 2.3 выше. Отметим также, что, например, гомологии связи $H_n^{\varphi}(A \div B; \mathcal{G})$ между дополнительными множествами $A$ и $B = X \setminus A$ в $(G-n)$-пространстве $X$ совпадают с когомологиями связи $H_{\Phi}^{n-p}(A \div B; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$. Аналогичные соотношения справедливы для гомологий и когомологий окружения замкнутого множества и соотношения двойственности для дополнительных подмно- (см. § 1). Из основной конструкции автоматически вытекают жеств ацикличного многообразия — «законы» двойственности Александера, Понтрягина, Стинрода и, наконец, для «незамкнутых» множеств — К. А. Ситникова. Достаточно полное описание всевозможных проявлений двойственности (в том числе в терминах $\cap$-умножения) вместе с историей их возникновения и развития дано в § 5 гл. 8 обзора [69]. Простым следствием приводимых там конструкций является и следующий результат (довольно сложно доказанный недавно в [146] для случая $\mathcal{G} = G$): для пары $(X, \partial X)$, в которой $\partial X$ — край $n$-многообразия $X$, точная последовательность гомологий с коэффициентами в $\mathcal{G}$ и с носителями в паракомпактифицирующем семействе $\varphi$ (группы $H_p^{\varphi}(\partial X; \mathcal{G})$, $H_p^{\varphi}(X; \mathcal{G})$, $H_p^{\varphi}(X, \partial X, \mathcal{G})$) совпадает с последовательностью когомологий

$$\ldots \to H_{\Phi}^{n-p-1}(\partial X; \mathcal{H}_{n-1}(\mathcal{G})) \to H_{\Phi}^{n-p}(X, \partial X; \tilde{\mathcal{H}}_n(\mathcal{G})) \to$$
$$\to H_{\Phi}^{n-p}(X; \tilde{\mathcal{H}}_n(\mathcal{G})) \to \ldots,$$

в которой $\tilde{\mathcal{H}}_n(\mathcal{G})$ — естественное продолжение $\mathcal{H}_n(\mathcal{G})$ с $\operatorname{Int} X$ на все $X$, а $\mathcal{H}_{n-1}(\mathcal{G})$ — ограничение $\tilde{\mathcal{H}}_n(\mathcal{G})$ на край $\partial X$.

Столь простой подход к доказательству двойственности, описанный в [64], стал возможным благодаря наличию вялых пучков цепей. С позиций спектральной последовательности дифференциального пучка цепей двойственность описывается в [87]. Там же введено понятие $(R-n)$-пространства ($R$ — основное кольцо). Для гомологий и когомологий пар результаты несколько менее общие, поскольку пучки цепей вялые только в случае $\mathcal{G} = R$. Идея и первые попытки доказательства двойственности Пуанкаре средствами теории пучков принадлежат Картану (см. п. 2.7 гл. 2). Похоже, однако, что эта чрезвычайно прозрачная и плодотворная идея стала забываться! Так, предлагаемый в недавней книге по теории пучков [110] новый подход неоправданно сложен, занимающие две главы (5-ю и 6-ю) доказательства очень громоздки, а достигаемые при этом результаты далеко не полны.

**6.2. О категорной природе двойственности.** Открытая «визуально», геометрически при изучении особого глобального (как казалось) устройства комбинаторных многообразий двойственность Пуанкаре, как видно из содержания предыдущего пункта, зависит лишь от локальных условий и имеет более глубокую природу, зависящую от конструкций гомологической алгебры. При нарушении локальной структуры, т. е. без требования $\mathscr{H}_p(\mathscr{G})=0$ при $p<n$, как уже отмечалось, возникает спектральная последовательность (Картана, п. 2.7 гл. 2), из которой следует наличие преобразований

$$H^p_\varphi(X, A; \mathscr{H}_n(\mathscr{G})) \to H^\varphi_{n-p}(X \setminus A; \mathscr{G}),\ H^p_\varphi(A; \mathscr{H}_n(\mathscr{G})) \to$$

$$\to H^\varphi_{n-p}(X, X \setminus A; \mathscr{G}),$$

каждое из которых изоморфно при $p=0$ и мономорфно при $p=1$. Поскольку в качестве $A$ можно брать любые точки $x \in X$, указанные преобразования являются изоморфизмами (убедиться в этом можно, рассмотрев второе из них для семейства $\varphi$ всех замкнутых множеств) в точности для $(G-n)$-пространств.

Аналогичные соотношения встречаются в гомологической алгебре. Например, если $G$ — левый $R$-модуль проективной размерности $n$, обладающий проективной резольвентой длины $n$ из модулей конечного типа (в частности, когда кольцо $R$ когерентно, а $G$ конечно представим), для любого правого $R$-модуля $A$ возникают естественные преобразования $\gamma: \mathrm{Ext}^p_R(\mathrm{Ext}^n_R(G, R), A) \to \mathrm{Tor}^R_{n-p}(A, G)$ (см. [67]), пропускаемые через сходящуюся к $\mathrm{Tor}^R_{n-p-q}(A, G)$ спектральную последовательность (аналог спектральной последовательности Картана) со вторым членом $E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p_R(\mathrm{Ext}^{n-q}_R(G, R), A)$. В частности, $\mathrm{Tor}^R_n(A, G) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^n_R(G, R), A)$, и преобразование $\gamma$ мономорфно при $p=1$. При фиксированном $G$ функторы $\mathrm{Ext}^p_R(\mathrm{Ext}^n_R(G, R), A)$ являются правыми производными точного слева по аргументу $A$ функтора $\mathrm{Tor}^R_n(A, G)$. Преобразования $\gamma$ являются изоморфизмами в точности при условии, что $\mathrm{Ext}^q_R(G, R) = 0$ при $q \neq n$. В рассматриваемых соотношениях такие $G$, очевидно, играют роль $(G-n)$-пространств. Модули такого типа изучались в [111], [142], где подобные результаты рассматриваются с иных позиций (показано, тем не менее, см. [142], что к изоморфизму $\gamma$ сводится двойственность Пуанкаре в случае групп [83]).

Обращение в нуль $\mathrm{Ext}^q_R(G, R)$ при $q \neq n$ в рассматриваемом случае эквивалентно требованию $\mathrm{Tor}^R_q(J, G)=0$ при $q \neq n$ для любых инъективных правых модулей $J$, поэтому обсуждаемые результаты укладываются в следующую схему [67]. Пусть $F$ — точный справа ковариантный аддитивный функтор (например, тензорное произведение), для которого левый производный $F_{n+1}$ равен нулю. Тогда функтор $F_n$ точен слева, и можно рассматривать его правые производные $(F_n)^p$. Пусть $J^*$ — инъективная резольвента объекта $G$. Тогда имеется сходящаяся к $F_{n-p-q}(G)$ спектральная последовательность со вторым членом $E_2^{pq}=H^p(F_{n-q}(J^*))$, в которой $E_2^{p0}=(F_n)^p(G)$. Следовательно, имеются и преобразования $(F_n)^p \to F_{n-p}$, оказывающиеся изоморфизмом в размерности 0 и мономорфизмом при $p=1$. Они тогда и только тогда изоморфны при всех $p$, когда функторы $F_k$ обращаются в нуль при $k<n$ на инъективных объектах.

В цитированных работах рассматриваются и другие варианты двойственности типа Пуанкаре (отвечающие другим известным вариантам производных функторов).

**6.3. Гомологические многообразия.** Первоначальное определение гомологического многообразия, принадлежащее Уайлдеру, было довольно громоздким, включало в себя много различных требований. Оказалось, что многие из них зависимы и поэтому некоторые могут быть выведены из других. Не являются окончательными и конструкции, содержащиеся, например, в [87]. В настоящее время под гомологическим $n$-многообразием над $R$-модулем $G$ понимается $(G-n)$-пространство, у которого слои пучка $\mathcal{H}_n(G)$ изоморфны $G$. Обычно рассматриваются гомологические многообразия над основным кольцом $R$. Не менее употребителен термин «обобщенное многообразие» (см., например, [85], [86], [89] и др.). Под гомологическим многообразием $X$ с краем $K$ понимается $(R-n)$-пространство, у которого слои пучка $\mathcal{H}_n(R)$ изоморфны $R$ в точках $X\setminus K$ и равны нулю в точках $K$.

Гомологическое многообразие $X$ со 2-й аксиомой счетности над кольцом главных идеалов локально связно, $\dim_R X = h\dim_R X$, а если $R$ счетно или является полем, то $X$ всегда $hlc_R$ [76] (последнее утверждение есть также в [131]). Если $R$ — область главных идеалов, то $X\setminus K$ также всегда локально ориентируемо [88] (т. е. пучок $\mathcal{H}_n(R)$ локально постоянен). Если $R$ — счетное кольцо главных идеалов и $\dim_R X<\infty$, то каждое из следующих условий эквивалентно тому, что $X$ — гомологическое многообразие над $R$ с краем $K$ [76]: 1) локальные числа Бетти $p^i(x; R)$, определяемые группами $H^i(X, X\setminus U; R)$ ($U$ — окрестности точки $x$), равны нулю при $i\neq n$, $p^n(x; R)=0$ при $x\in K$, но $p^n(x; R)=1$ для всех $x\in X\setminus K$; 2) локальные числа Бетти $p_i(x; R)$, определяемые группами $H_i^c(U\setminus x; R)$ (приведенными в размерности нуль) равны нулю при $i\neq n-1$, $p_{n-1}(x; R)=0$ при $x\in K$, но $p_{n-1}(x; R)=1$ для $x\in X\setminus K$; 3) локальные когомологии $I_x^i(R)$ (п. 3.2 выше) обращаются в нуль при $i\neq n-1$, $I_x^{n-1}(R)=0$ для $x\in K$, но $I_x^{n-1}(R)=R$ для $x\in X\setminus K$. Таким образом, имеются равносильные определения гомологического многообразия в терминах любого из четырех вариантов локальных групп, причем гомологический и когомологический подходы эквивалентны. В [76] установлено, что множество $K$ всегда замкнуто и нигде не плотно, для счетных колец $\dim_R K\leqslant n-1$ ($\dim_Z K=n-1$) и $I_x^{p-1}(R)=H_x^p(R)$, при $R=Z$

край $K$ — гомологическое $(n-1)$-многообразие над $Z_2$. Всякое (локально компактное) $hlc_R$-пространство, для которого $\dim_R X = n < \infty$, а все $\mathscr{H}_p(R)$ — локально постоянные пучки с конечно порожденными слоями, является гомологическим $n$-многообразием [87]. В терминах сингулярных гомологий аналогичный результат справедлив без требования локальной постоянности пучков $\mathscr{H}_p(R)$ в предположении, что при каждом $p \leqslant n$ слои $\mathscr{H}_p(R)$ изоморфны друг другу [102].

Иногда под обобщенными понимаются гомологические многообразия, удовлетворяющие некоторым дополнительным требованиям (формулируемым обычно в терминах сингулярной теории, например, требованию разъединения образов двумерных дисков). В некоторых случаях обобщенными называют гомологические многообразия, являющиеся $ANR$. Они совпадают с образами при клеточных отображениях обычных топологических $n$-многообразий. В [96] развивается техника разбиений многообразий на $Z$-ацикличные множества (не обязательно клеточные) с целью получить в терминах таких разбиений аналогичную характеристику гомологических многообразий. Строятся примеры таких разбиений, факторпространства которых являются или не являются $ANR$. Влияние структуры гомологического многообразия на свойство быть $ANR$ (или $ANR$-дивизором) изучается также в [26]. Там же показывается, что надстройка над компактным связным гомологическим над $Z$ многообразием имеет пунктированный шейп полиэдра. Если $f: M \to X$ — сюръективное отображение компактного гомологического $n$-многообразия над алгебраически компактной группой $G$, то при $\dim X < \infty$ компакт $X$ есть гомологическое $n$-многообразие над $G$ при выполнении любого из условий [26]: а) $f$ — шейповое расслоение, являющееся сильной шейповой эквивалентностью; б) $f$ — наследственная шейповая эквивалентность; в) $f$ клеточноподобно. (См. также п. 7.2 ниже.)

Средства теории гомологий применяются и для изучения бесконечномерных многообразий, в частности, $Q$-многообразий (моделируемых на гильбертовом кубе $Q$). Так, для локально компактного $ANR$-пространства $X$, обладающего свойством разъединения образов двумерных дисков, требование быть $Q$-многообразием эквивалентно любому из условий [95]: а) для любых двух подпространств в $X$ и двух элементов групп гомологий этих подпространств (возможно, разных размерностей) найдутся непересекающиеся компактные носители этих элементов; б) для любого элемента гомологий найдется компактный носитель бесконечной коразмерности; в) точки в $X$ имеют бесконечную коразмерность и элементы групп гомологий любых подпространств в $X$ имеют конечномерные (компактные) носители (без свойства разъединения дисков каждое из этих условий эквивалентно тому, что $Q$-многообразием является произведение $X$ на квадрат). Подобные результаты находят много применений [95] (склеивание $Q$-многообразий, собственные отображения $Q$-многообразий, в том числе их клеточные отображения на пространства, не оказывающиеся $Q$-многообразиями, свойство быть $Q$-многообразием произведения двух $ANR$).

## § 7. Другие примеры

**7.1. Теоремы о совпадениях для отображений многообразий.** Пусть $M, N$ — связные топологические $n$-мерные многообразия (с краями $\partial M, \partial N$), $f, g: M \to N$ — непрерывные отображения, первое из которых компактно (замыкание $f(M)$ компактно), а второе собственно и $g(\partial M) \subset \partial N$. Числом Лефшеца $\Lambda_{f,g}$ этой пары назовем число Лефшеца композиций (по всем $q$) гомоморфизмов

$$H^q(N) \xrightarrow[f^*]{} H^q(M) = H_{n-q}(M, \partial M) \xrightarrow[g_*]{} H_{n-q}(N, \partial N) = H^q(N).$$

Коэффициентами для гомологий и когомологий служит любое поле, совпадающее, однако, с полем вычетов по модулю 2, если хотя бы одно из многообразий не ориентируемо. В [13] и [14] установлено, что при $\Lambda_{f,g} \neq 0$ в $M$ найдутся точки $x$, для которых $f(x) = g(x)$.

Частные случаи этого результата (в основном для замкнутых многообразий, нередко наделенных комбинаторной или гладкой структурой) доказывались многими авторами. Во всей полноте компактный случай рассмотрен в [134]. Для случая $M = N$ и тождественного $g$ сформулированная теорема — основной результат в [133].

Незаменимыми средства теории гомологий и когомологий оказались при решении задач, связанных с далеко идущими обобщениями теорем типа Борсука—Улама, Бургина—Янга, Коннера—Флойда и многих других о склеивании антиподов и, более широко, — орбит в свободных (связных паракомпактных) $Z_p$-пространствах ($p$ — простое число) при отображениях таких пространств в евклидовы пространства, сферы и просто многообразия, об оценке размерности множеств склеивающихся орбит, о размерности множеств конечных наборов точек, переходящих в орбиты при отображениях объемлющего пространства в $Z_p$-пространства, о размерности специальных множеств совпадений для пар отображений $Z_p$-пространства и т. п. Далеко продвинутые результаты по этой тематике представлены в недавних работах [9]—[12] и [115]. Существенно (и в полной общности) используется двойственность Пуанкаре—Лефшеца.

**7.2. Зацепление циклов. Ацикличные покрытия многообразий.** Пусть $A_1, \ldots, A_k$ и $B_1, \ldots, B_l$ — два набора, каждый из которых состоит из попарно не пересекающихся дисков в трехмерном евклидовом пространстве $R^3$. Если точки $x \neq y$ в $R^3$ разделены их объединением, то для некоторой пары индексов $p, q$ эти точки разделяет множество $A_p \cup B_q$ [84]. Аналогичные наборы в сфере $S^n$, $n > 2$, состоящие из $(n-r-2)$-ацикличных замкнутых множеств, $0 \leqslant r < n-2$, обладают свойством: если множество $A = (\bigcup_i A_i) \cup (\bigcup_j B_j)$ зацеплено элементом $h \in H_r{}^c(S^n \setminus A)$ (т. е. попросту $h \neq 0$), то для некоторых $p, q$ элемент $i_*(h)$ зацепляет $A_p \cup B_q$, где $i$ — вложение $S^n \setminus A \subset S^n \setminus (A_p \cup B_q)$ [149]. Отсюда нетрудно получить утверждение: если указанные две системы, состоящие из $(n-1)$-ацикличных множеств, покрывают ориентируемое $n$-мерное топологическое многообразие $M^n$, то $M^n$ покрывают уже какие-то два множества $A_p$ и $B_q$. Такого рода результаты (и связанные с ними задачи) встречаются и в некоторых других работах (см., например, [150]).

В то время как условия ацикличности, фигурирующие в подобных утверждениях, существенны, наличие в них двух наборов попарно не пересекающихся множеств — явление случайное, важно лишь, что кратность их объединения не превосходит 2. Далеко идущие обобщения и усиления таких результатов получены в [6]. Не всегда существенна и конечность системы множеств.

Для этого пусть $m \geqslant l \geqslant 1$ — целые числа, $\{A_\lambda\}$ — локально конечная система замкнутых подпространств локально компактного пространства $X$ кратности $\leqslant l$ и такая, что для любых ее $s$ различных множеств, $s < l$, имеем $H_c^{m-s}(\bigcap_{j=1}^{s} A_{\lambda_j}; \mathcal{G}) = 0$. Тогда для любого ненулевого $h \in H_c^m(A; \mathcal{G})$ найдутся индексы $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_q$, $q \leqslant l$, такие, что ограничение $h$ на $\bigcap_{i=1}^{q} A_{\lambda_i}$ отлично от нуля. Здесь $A = \bigcup_\lambda A_\lambda$, $\mathcal{G}$ — произвольный пучок на $X$. В случае конечных систем $\{A_\lambda\}$ аналогичный результат справедлив для обычных когомологий $H^*$ и любого паракомпактного (хаусдорфова) пространства $X$.

В частности, если $A$ — связное ориентируемое обобщенное $m$-многообразие над кольцом $R$ главных идеалов, то в системе $\{A_\lambda\}$ найдется $l$ (или меньше) множеств, покрывающих $A$. Если $\alpha = \{A_\lambda\}$ — локально конечное покрытие связного ориентируемого обобщенного $m$-многообразия, состоящее по меньшей мере из трех замкнутых множеств, причем ни одно из множеств $\alpha$ нельзя отбросить, то при $H_c^{m-1}(A_\lambda; \mathcal{G}) = 0$ кратность покрытия не меньше трех (усиление результатов, доказанных в [150] для конечных покрытий компактных многообразий). Если $X$ выше — связное ориентируемое обобщенное $(m+1)$-многообразие и $H_c^m(X; \mathcal{G}) = 0$, а $\{A_\lambda\}$ — указанная выше система подпространств $X$ такая, что $A = \bigcup A_\lambda$ разделяет $X$, то уже объединение некоторых $l$ множеств из системы $\{A_\lambda\}$ разделяет $X$.

Сформулированный выше общий результат в случае $(G-n)$-пространства $X$ при условии, что $H^c_{r+1}(X; G)=0$, дает следующее утверждение о зацеплении циклов. Пусть $n>l\geqslant 1$ — целые числа, $n-l>r\geqslant 0$, и пусть $\{A_\lambda\}$ — локально конечная система замкнутых подпространств $X$ кратности $\leqslant l$ такая, что для любых ее $s$ различных множеств, $s<l$, имеем

$$H_c^{n-r-s-1}(\bigcap_{i=1}^{s} A_{\lambda_i}; \mathscr{H}_n(G))=0.$$

Если множество $A=\bigcup_\lambda A_\lambda$ зацеплено некоторым (ненулевым) элементом $h\in H^c_r(X\setminus A; G)$ (это означает, что образ $h$ в $X$ равен нулю), то для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, $q\leqslant l$, образ $h$ в $X\setminus\bigcup_{i=1}^{q} A_{\lambda_i}$ зацепляет $\bigcup_{i=1}^{q} A_{\lambda_i}$. В доказательствах некоторых результатов, касающихся (обобщенных) многообразий и $(G-n)$-пространств, существенна двойственность (см. [6]).

**7.3. Гомологические и когомологические сферы.** Пусть $\{p_k\}$ — занумерованные в порядке возрастания простые числа, $Z_p$ — соответствующие поля вычетов и $Q$ — поле рациональных чисел. Следующие утверждения эквивалентны для метризуемого компакта $X$ [7]: а) $X$ — когомологическая сфера над всеми $Z_{p_k}$ и $Q$; б) $X$ — когомологическая сфера над всеми полями коэффициентов; в) $X$ — гомологическая сфера над всеми $Z_{p_k}$ и $Q$; г) $X$ — гомологическая сфера над всеми полями коэффициентов. Дается эквивалентное этому описание возможных значений целочисленных когомологий $X$ в размерностях $n$ и $n+1$ (остальные тривиальны): $H^n(X; Z)$ — любая группа без кручения ранга 1, $H^{n+1}(X; Z)$ — прямая сумма квазициклических групп $Z(p_k^\infty)$ по всем $k$, для которых $\alpha_k=\infty$, где $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots)$ — характеристика отличного от нуля элемента из $H^n(X; Z)$. В частности, когомологии над $Z$ таких компактов находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с абелевыми группами без кручения ранга 1 (которых, очевидно, континуум).

Аналогичные (но существенно более сложные) описания даются и для когомологических сфер над полями коэффициентов, размерность каждой из которых зависит от определяющего ее поля [8]. Эти размерности совпадают, если компакт $X$ гомологически локально связен над $Z$; в этом случае $X$ — когомологическая сфера и над $Z$ (той же размерности). В [8] получено и описание гомологических сфер над всеми $Z_{p_k}$ и $Q$. По отвечающим им гомологиям все такие «$n$-сферы», не являющиеся гомологической $n$-сферой над $Z$, находятся во взаимно однозначном соответствии с бесконечными правильными двоичными дробями. Попутно получен (и существенно использован в классификации) также следующий результат: для группы $H$ без кручения ранга 1 группа $\mathrm{Ext}(H; Z)$ есть прямая сумма всех $Z(p_k^\infty)$, для которых $\alpha_k \neq \infty$ ($(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots)$ — характеристика нетривильного $h \in H$), и континуума экземпляров группы $Q$. Показано, что по сравнению с гомологическим вариантом классификации (гомологических сфер) когомологический более тонок и что оба варианта совпадают в классе гомологически локально связных компактов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Александров П. С.* Топологические теоремы двойственности. Ч. 2. Незамкнутые множества // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1959.— *54*.— 136 с. (РЖМат, 1961, 1А327).
2. *Бартик В.* Когомологии Александрова—Чеха и отображения в полиэдры Эйленберга—Маклейна // Мат. сб.— 1968.— *76*, № 2.— С. 231—238 (РЖМат, 1968, 12А404).
3. — Общая теорема о замещениях непрерывных отображений // Comment. math. Univ. carol.— 1975.— *16*, № 4.— С. 693—698 (РЖМат, 1976, 7А665).
4. *Батанин М. А.* Отображения спектральных последовательностей и обобщенная аксиома гомотопии // Сиб. мат. ж.— 1987.— *28*, № 5.— С. 22—31 (РЖМат, 1988, 1А633).
5. *Бениаминов Е. М., Скляренко Е. Г.* О локальных группах когомологий // Докл. АН СССР.— 1967.— *176*, № 5.— С. 987—990 (РЖМат, 1968, 4А440).
6. *Быков В. М.* О замкнутых покрытиях многообразий и зацеплении циклов // Докл. АН СССР.— 1973.— *211*, № 5.— С. 1027—1030 (РЖМат, 1973, 12А480).
7. — О гомологических и когомологических сферах // Успехи мат. наук.— 1973.— *28*, № 6.— С. 197—198 (РЖМат, 1974, 5А563).
8. — О некоторых свойствах обобщенных многообразий и когомологических сфер // Автореферат дисс. на соискание ученой степ. канд. физ.-мат. наук.— Москва, Изд-во МГУ, 1973.— 8 с.
9. *Воловиков А. Ю.* Обобщение теоремы Борсука—Улама // Мат. сб.— 1979.— *108*, № 2.— С. 212—218 (РЖМат, 1979, 6А464)
10. — Две теоремы из теории периодических преобразований // Мат. сб.— 1979.— *110*, № 1.— С. 128—134 (РЖМат, 1979, 12А615).
11. — О теореме Бургина—Янга // Успехи мат. наук.— 1980.— *35*, № 3.— С. 159—161 (РЖМат, 1980, 11А588).
12. — Отображения свободных $Z_p$-пространств в многообразия // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1982.— *46*, № 1.— С. 36—55 (РЖМат, 1982, 6А500).
13. *Давидян В. Р.* О точках совпадения двух отображений // Мат. сб.— 1980.— *112*, № 2.— С. 220—225 (РЖМат, 1980, 11А578).
14. — О точках совпадения двух отображений для многообразий с краями // Успехи мат. наук.— 1983.— *38*, № 1.— С. 149—150 (РЖМат, 1983, 8А543).
15. *Дранишников А. Н., Щепин Е. В.* Клеточноподобные отображения. Проблемы повышения размерности // Успехи мат. наук.— 1986.— *41*, № 6.— С. 49—90 (РЖМат, 1987, 5А631).
16. — О гомологической размерности по модулю *p* // Мат. сб.— 1987.— *132*, № 3.— С. 420—433 (РЖМат, 1987, 7А550).

17. — Неравенства Бокштейна в гомологической теории размерности // Докл. АН СССР.— 1988.— *299*, № 5.— С. 1045—1048 (РЖМат, 1988, 9А614).
18. — О реализации размерных функций, 1 // Сиб. мат. ж.— 1988.— *29*, № 1.— С. 32—38 (РЖМат, 1988, 6А601).
19. — О реализации размерных функций, 2 // Сиб. мат. ж.— 1989.— *30*, № 1.— С. 96—102
20. — Гомологическая теория размерности // Успехи мат. наук.— 1988.— *43*, № 4.— С. 11—55 (РЖМат, 1988, 12А544).
21. — О свободных действиях нульмерных компактных групп // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1988.— *52*, № 1.— С. 212—228 (РЖМат, 1988, 7А613).
22. *Зарелуа А. В.* Конечнократные отображения топологических пространств и когомологических многообразий // Сиб. мат. ж.— 1969.— *10*, № 1.— С. 64—92 (РЖМат, 1969, 6А341).
23. — Когомологическая структура конечнократных отображений // Тр. Тбилис. мат. ин-та.— 1972.— *41*.— С. 100—127 (РЖМат, 1973, 9А477).
24. — О резольвенте непрерывного отображения и связанной с ней спектральной последовательности // Тр. Тбилис. мат. ин-та.— 1977.— *56*.— С. 99—117 (РЖМат, 1978, 8А539).
25. — Пределы локальных систем пучков и нульмерные отображения // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1983.— *54*.— С. 98—112 (РЖМат, 1984, 2А524).
26. *Зеркалов Л. Г.* О некоторых свойствах обобщенных многообразий // Успехи мат. наук.— 1984.— *39*, № 2.— С. 155—156 (РЖМат, 1984, 10А567).
27. *Иванадзе Г. Б.* Гомологии с локально компактными носителями // Тр. Тбилис. мат. ин-та.— 1989.— *94*.— Сборник работ по топологии.— 5
28. *Кинтишев Я. Ц.* О теореме Вьеториса—Бегла для точных гомологий // Докл. Болг. АН.— 1977.— *30*, № 1.— С. 7—8 (РЖМат, 1977, 12А601).
29. — Гомологически нестабильные точки // Вестн. Моск. ун-та.— 1977.— № 3.— С. 63—69 (РЖМат, 1978, 1А513).
30. *Коробов А. А.* О когомологиях алгебр с единицей // Докл. АН СССР.— 1969.— *184*, № 1.— С. 24—27 (РЖМат, 1969, 6А340).
31. *Кузьминов В. И.* О гомологической размерности компактов // Сиб. мат. ж.— 1964.— *5*, № 5.— С. 1282—1304 (РЖМат, 1965, 10А314).
32. — О производных функторах функтора обратного предела // Сиб. мат. ж.— 1967.— *8*, № 2.— С. 333—345 (РЖМат, 1967, 10А236).
33. — Гомологическая теория размерности // Успехи мат. наук.— 1968.— *23*, № 5.— С. 3—49 (РЖМат, 1969, 3А415).
34. —, *Лисейкин В. Д.* О мягкости индуктивного предела мягких пучков // Сиб. мат. ж.— 1971.— *12*, № 5.— С. 1137—1141 (РЖМат, 1972, 1А818).
35. —, *Шведов И. А.* Группы когомологий равномерных пространств // Сиб. мат. ж.— 1964.— *5*, № 3.— С. 565—595 (РЖМат, 1965, 3А393).
36. —, — Гипергомологии предела прямого спектра комплексов и группы гомологий топологических пространств // Сиб. мат. ж.— 1975.— *16*, № 1.— С. 62—74 (РЖМат, 1975, 7А669).
37. —, — О когомологической размерности Бредона наследственно паракомпактных пространств // Докл. АН СССР.— 1976.— *231*, № 1.— С. 24—27 (РЖМат, 1977, 4А546).
38. *Куренкова Т. Л.* Счетные группы как обратные пределы групп конечного ранга // Избр. вопр. алгебры, геом. и дискрет. мат.— М., 1988.— С. 47—57 (РЖМат, 1989, 2А128).
39. *Мдзинаришвили Л. Д.* Функциональные гомологии // Тр. Тбилис. мат. ин-та.— 1978.— *59*.— С. 98—118 (РЖМат, 1978, 11А573).
40. — О соотношении Кюннета и функторе $\lim\limits_{\leftarrow}$ // Сообщ. АН ГрССР.— 1980.— *99*, № 3.— С. 561—564 (РЖМат, 1981, 4А525).
41. — Обобщение соотношения Кюннета // Сообщ. АН ГрССР.— 1982.— *106*, № 2.— С. 257—260 (РЖМат, 1983, 2А524).

42. — On homological dimensionality // Бакинская Междунар. тополог. конференция. Тезисы. Ч. 2.— Баку, 1987.— С. 187.
43. *Миминошвили З. Р.* О последовательности точных и полуточных гомологий произвольных пространств // Сообщ. АН ГрССР.— 1984.— *113*, № 1.— С. 41—44 (РЖМат, 1984, 12А591).
44. *Мирюк В. Г.* Гомологии и когомологии множеств и их окрестностей // Мат. сб.— 1973.— *92*, № 3.— С. 306—318 (РЖМат, 1974, 3А391).
45. *Нгуен Ле Ань* О гомологической размерности компактов // Вестн. Моск. ун-та.— 1981.— № 2.— С. 29—31 (РЖМат, 1981, 7А521).
46. — Обобщенная аксиома геомотопии // Мат. заметки.— 1983.— *33*, № 1.— С. 117—130 (РЖМат, 1983, 4А626).
47. — О теореме Вьеториса—Бегла // Мат. заметки.— 1984.— *35*, № 6.— С. 847—854 (РЖМат, 1984, 10А482).
48. *Окунь Б. Л.* Гомологическая размерность и последовательности Майера—Вьеториса // Мат. заметки.— 1988.— *43*, № 1.— С. 125—132 (РЖМат, 1988, 6А600).
49. *Петкова С. В.* Об аксиомах теории гомологий // Докл. АН СССР.— 1972.— *204*, № 3.— С. 557—560 (РЖМат, 1972, 9А396).
50. — Об аксиомах теории гомологий // Мат. сб.— 1973.— *90*, № 4.— С. 607—624 (РЖМат, 1973, 8А418).
51. — О совпадении гомологий на гомологически локально связных пространствах // Докл. Болг. АН.— 1982.— *35*, № 4.— С. 427—430 (РЖМат, 1983, 1А541).
52. *Роте Д.* Периферические и гомологически нестабильные точки // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math.— 1980.— *28*, № 7— 8.— С. 377—383 (РЖМат, 1981, 12А519).
53. — О периферических точках // Math. Nachr.— 1983.— *114*.— С. 255—261 (РЖМат, 1984, 5А568).
54. — Периферическая когомологическая локальная связность // Fund. Math.— 1983.— *116*, № 1.— С. 53—66 (РЖМат, 1984, 1А528).
55. — О характеристике гомологической размерности локальными гомологиями и когомологиями // Math. Nachr.— 1983.— *113*.— С. 53—57 (РЖМат, 1984, 5А569).
56. *Санеблидзе С. А.* Экстраординарные теории гомологии на компактных пространствах // Тр. Тбилис. мат. ин-та— 1986.— *83*.— С. 19—25 (РЖМат, 1987, 6А641).
57. *Скляренко Е. Г.* Теорема об отображениях, понижающих размерность // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1962.— *10*, № 8.— С. 430—432 (РЖМат, 1964, 6А296).
58. — Бикомпактные расширения с пунктиформными наростами и группы когомологий // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1963.— *27*, № 5.— С. 1165—1180 (РЖМат, 1965, 10А303).
59. — О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии // Успехи мат. наук.— 1964.— *19*, № 6.— С. 47—70 (РЖМат, 1964, 3А253).
60. — Об определении когомологической размерности // Докл. АН СССР.— 1965.— *161*, № 3.— С. 538—539 (РЖМат, 1965, 8А318).
61. — Почти ацикличные отображения // Мат. сб.— 1968.— *75*, № 2.— С. 296—302 (РЖМат, 1969, 2А509).
62. — Теория гомологий и аксиома точности // Успехи мат. наук.— 1969.— *24*, № 5.— С. 87—140 (РЖМат, 1970, 6А403).
63. — Теоремы единственности в теории гомологий // Мат. сб.— 1971.— *85*, № 2.— С. 201—223 (РЖМат, 1971, 11А474).
64. — К теории обобщенных многообразий // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1971.— *35*, № 4.— С. 831—843 (РЖМат, 1972, 2А677).
65. — К теории гомологий, ассоциированной с когомологиями Александрова—Чеха // Успехи мат. наук.— 1979.— *34*, № 6.— С. 90—118 (РЖМат, 1980, 5А508).
66. — О гомологически локально связных пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1980.— *44*, № 6.— С. 1417—1433 (РЖМат, 1981, 4А530).

67. — Двойственность Пуанкаре и соотношения между функторами Ext и Tor // Мат. заметки.— 1980.— *28*, № 5.— С. 769—776 (РЖМат, 1981, 2А582).
68. — Некоторые применения функтора $\overleftarrow{\lim}^1$ // Мат. сб.— 1984.— *123*, № 3. — С. 369—390 (РЖМат, 1984, 8А540).
69. — Гомологии и когомологии общих пространств // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления.— 1989.— *50*.— С. 129—266.
70. *Скордев Г. С.* О резольвентах непрерывного отображения // Мат. сб. — 1970.— *82*, № 4.— С. 532—550 (РЖМат, 1971, 2А446).
71. — Об отображениях, повышающих размерность // Мат. заметки.— 1970.— *7*, № 6.— С. 697—705 (РЖМат, 1970, 11А364).
72. — О резольвентах, отвечающих замкнутому отображению // Мат. сб.— 1971.— *86*, № 2.— С. 234—247 (РЖМат, 1972, 1А820).
73. — Резольвенты замкнутого отображения // Годищн. Софийск. ун-т. Фак. мат. и мех.— 1976—1977 (1982).— *71*, № 1.— С. 87—118 (РЖМат, 1983, 12А669).
74. — Спектральная последовательность Зарелуа // Плиска. Бълг. мат. студ.— 1983.— *6*.— С. 121—149 (РЖМат, 1984, 12А596).
75. *Тевдорадзе З. А.* Теоремы стабилизации для обобщенной теории гомологий // Избр. вопр. алгебры, геом. и дискрет. мат.— М., 1988.— С. 111—116 (РЖМат, 1989, 2А572).
76. *Харлап А. Э.* Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщенные многообразия // Мат. сб.— 1975.— *96*, № 3.— С. 347—373 (РЖМат, 1975, 7А667).
77. *Barrat M. G.* Note on anomalous singular torsion groups // Quart. J. Math.— 1962.— *13*, № 49.— С. 75—79 (РЖМат, 1963, 2А297).
78. —, *Milnor J.* An example of anomalous singular homology // Proc. Amer. Math. Soc.— 1962.— *13*, № 2.— С. 293—297 (РЖМат, 1963, 2А296).
79. *Bartik V.* On the bijectivity of the canonical transformation $[\beta X, Y] \to [X, Y]$ // Quart. J. Math.— 1978.— *29*, № 113.— С. 77—91 (РЖМат, 1979, 2А356).
80. *Begle E. G.* The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces // Ann. Math.— 1950.— *51*, № 3.— С. 534—543.
81. — The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces II // Mich. Math. J.— 1956.— *3*, № 2.— С. 179—180 (РЖМат, 1958, 3616).
82. *Bialynicki-Birula A.* On Vietoris mapping theorem and its inverse // Fund. math.— 1964.— *53*, № 2.— С. 135—145 (РЖМат, 1964, 10А288).
83. *Bieri R., Eckman B.* Groups with homological duality generalizing Poincaré duality // Invent. math.— 1973.— *20*, № 2.— С. 103—124 (РЖМат, 1974, 1А395).
84. *Bing R. H.* Approximating surfaces from the side // Ann. Math.— 1963.— *77*, № 1.— С. 145—192.
85. *Borel A.* Seminar on transformation groups // Ann. Math. Studies.— 1960.— *46*.— Princeton, New Jersey; Princ. Univ. Press.— 245 с. (РЖМат, 1962, 9А244 К).
86. —, *Moore J. C.* Homology theory for locally compact spaces // Mich. Math. J.— 1960.— *7*.— С. 137—160 (РЖМат, 1961, 10А321).
87. *Bredon G. E.* Sheaf theory // McGraw-Hill, New York, 1967.— 272 с. (РЖМат, 1968, 8А382).
88. — Wilder manifolds are locally orientable // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1969.— *63*, № 4.— С. 1079—1081 (РЖМат, 1970, 9А356).
89. *Bryant J. L.* Homogeneous ENR's // Topol. and Appl.— 1987.— *27*, № 3. — С. 301—306 (РЖМат, 1988, 4А504).
90. *Calder A.* Cohomology of finite covers // Trans. Amer. Math. Soc.— 1976.— *218*.— С. 349—352 (РЖМат, 1977, 2А580).
91. *Cartan H.* Séminaire de topologie algébrique // Paris: Ecole Norm. Supér. — 1948—1949 (РЖМат, 1957, 1256).

92. —, *Eilenberg S.* Homological algebra // Princeton Math. Series.— № 19. — Princeton, New Jersey.— Princeton Univ. Press, 1956 (РЖМат, 1956, 6427).
93. *Conner P.* On the impossibility of fibering certain manifolds by a compact fiber // Mich. Math. J.— 1957.— *4*.— С. 249—256 (РЖМат, 1959, 3646).
94. *Cordier J. M.* Homologie de Steenrod—Sitnikov et limite homotopique algebrique // Manuscr. Math.— 1987.— *59*, № 1.— С. 35—52 (РЖМат, 1988, 3А679).
95. *Daverman R. J., Walsh J. J.* Čech homology characterizations of infinite dimensional manifolds // Amer. J. Math.— 1981.— *103*, № 4.— С. 411—435 (РЖМат, 1982, 2А652).
96. —, — Acyclic decompositions of manifolds // Pacif. J. Math.— 1983.— *109*, № 2.— С. 291—303 (РЖМат, 1984, 7А512).
97. *Deo S.* On the tautness property of Alexander—Spanier cohomology // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— *52*.— С. 441—444 (РЖМат, 1976, 6А531).
98. —, *Jamwal D. S., Krishan R.* Cohomology with exotic supports and the generalized exision // J. Austral Math. Soc.— 1988.— *45*, № 3.— С. 326—340 (РЖМат, 1989, 6А461).
99. *Dold A.* Lectures on algebraic topology // Springer-Verlag, 1972.— 377 с. (РЖМат, 1973, 1А518).
100. *Dyer E.* On the dimension of products // Fund. Math.— 1959.— *47*, № 2. — С. 141—160 (РЖМат, 1961, 7А349).
101. *Dydak J.* Steenrod homology and local connectedness // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *98*, № 1.— С. 153—157 (РЖМат, 1987, 4А660).
102. —, *Walsh J.* Sheaves with finitely generated isomorphic stalks and homology manifolds // Proc. Amer. Math. Soc.— 1988.— *103*, № 2.— С. 655—660 (РЖМат, 1989, 4А494).
103. *Edwards D. A., Hastings H. M.* Čech and Steenrod homotopy theories with applications to geometric topology // Lect. Notes Math.— 1976.— *542*.— Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag.— 296 с. (РЖМат, 1977, 10А365).
104. *Edwards R. D.* A theorem and a question related to cohomological dimension and cell-like maps // Not. Amer. Math. Soc.— 1978.— *25*.— С. A279
105. *Eilenberg S., Kuratowski K.* A remark on duality // Fund. Math.— 1962. — *50*, № 5.— С. 515—517 (РЖМат, 1962, 11А245).
106. —, *Steenrod N.* Foundations of algebraic topology // Princeton Univ. Press, Princeton, 1952.— 328 с. (РЖМат, 1953, 1130).
107. *Godement R.* Topologie algébrique et théorie des faisceaux // Paris: Hermann, 1958.— 283 с. (РЖМат, 1960, 6318 К).
108. *Grothendieck A.* Sur quelques points d'algèbre homologique // Tohoku Math. J.— 1957.— *9*, № 2.— С. 119—221 (РЖМат, 1959, 9867).
109. *Hörmander L.* An introduction to complex analysis in several variables // Amsterdam, London: North Holland Publ. Company, 1966
110. *Iversen B.* Cohomology of sheaves // Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer-Verlag, 1986.— 464 с. (РЖМат, 1986, 12А694).
111. *Ischebeck E.* Eine Dualität zwischen den Funktoren Ext und Tor // J. Algebra.— 1969.— *11*, № 4.— С. 510—531 (РЖМат, 1969, 12А480).
112. *James I. M., Whitehead J. H. C.* Homology with zero coefficients // Quart. J. Math.— 1958.— *9*, № 36.— С. 317—320 (РЖМат, 1959, 9865).
113. *Jensen C. U.* Les foncteurs dérivés de $\overleftarrow{\lim}$ et leurs applications en théorie des modules // Lect. Notes Math.— 1972.— *254*.— Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag.— 103 с. (РЖМат, 1972, 9А308).
114. *Kaup L., Keane M. S.* Induktive Limiten endlich erzeugter freier Moduln // Manuscr. Math.— 1969.— *1*, № 1.— С. 9—21 (РЖМат, 1969, 10А322).
115. *Kobayashi T.* The Borsuk-Ulam theorem for a $Z_q$-map from a $Z_q$-space to $S^{2n+1}$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *97*, № 4.— С. 714—716 (РЖМат, 1987, 1А624).

116. *Koyama A.* Coherent singular complexes in strong shape theory // Tsukuba J. Math.— 1984.— *8,* № 2.— С. 261—295 (РЖМат, 1985, 5А505).
117. *Kozlowski G., Walsh J. J.* Cell-like mappings on 3-manifolds // Topology.— 1983.— *22,* № 2.— С. 147—153 (РЖМат, 1983, 6А559).
118. *Kwun K. W., Raymond F.* Almost acyclic maps of manifolds // Amer. J. Math.— 1964.— *86,* № 3.— С. 638—650 (РЖМат, 1966, 2А417).
119. *Laudal L. A.* Cohomologie locale, Application // Math. Scand.— 1963.— *12,* № 2.— С. 147—162 (РЖМат, 1965, 8А316).
120. *Lawson J., Madison B.* Peripheral and inner points // Fund. Math.— 1970.— *69,* № 3.— С. 253—266 (РЖМат, 1971, 6А550).
121. *Lisica Ju. T., Mardešić S.* Steenrod-Sitnikov homology for arbitrary spaces // Bull. Amer. Math. Soc.— 1983.— *19,* № 2.— С. 207—210 (РЖМат, 1984, 3А650).
122. —, — Steenrod homology // Banach Cent. Publ. Vol. 18. Geom. and Algebr. Topol.: Topol. Semester Int. Stefan Banach Math. Cent., spring, 1984.— Warszawa, 1987.— С. 329—343 (РЖМат, 1988, 6А597).
123. *Mardešić S.* Partial continuity of strong homology // Rad. Jugosl. Akad. znan. i umjetn., Mat. Znan.— 1987.— *6.*— С. 51—58 (РЖМат, 1988, 12А540).
124. —, *Prasolov A. V.* Strong homology is not additive // Trans. Amer. Math. Soc.— 1988.— *307,* № 2.— С. 725—744 (РЖМат, 1989, 4А491).
125. *Massey W. S.* How to give an exposition of the Čech-Alexander-Spanier type homology theory // Amer. Math. Mon.— 1978.— *85,* № 2.— С. 75—83 (РЖМат, 1978, 12А895).
126. — Homology and cohomology theory // Marcel Dekker. Inc., New York and Basel, 1978.— 412 с. (РЖМат, 1979, 3А465К).
127. *Mdzinarishvili L.* Universelle Koeffizienten folgen für den $\varprojlim$-Funktor und Anwendungen // Manuscr. Math.— 1984.— *48.*— С. 255—273 (РЖМат, 1985, 3А549).
128. *Milnor J.* On the Steenrod homology theory // Berkeley, 1960.— 26 с.
129. — On axiomatic homology theory // Pacif. J. Math.— 1962.— *12.*— С. 337—341 (РЖМат, 1963, 12А337).
130. *Miminoshvili Z.* On axiomatic strong homology theory // Forschungsschwerpunkt Geometrie, Universität Heidelberg, Math. Inst.— 1988.— № 39.— 18 с.
131. *Mitchell W. J. R.* A problem of Bredon concerning homology manifolds // London Math. Soc. Lect. Note Ser.— 1977.— № 26.— С. 305—306 (РЖМат, 1978, 3А352).
132. — Local homology and cohomology // Math. Proc. Camb. Phil. Soc.— 1981.— *89,* № 2.— С. 309—324 (РЖМат, 1981, 8А541).
133. *Nakaoka M.* Note on the Lefschetz fixed point theorem // Osaka J. Math.— 1969.— *6.*— С. 135—142 (РЖМат, 1970, 5А410).
134. — Coincidence Lefschetz numbers for a pair of fibre preserving maps // J. Math. Soc. Jap.— 1980.— *32,* № 4.— С. 751—779 (РЖМат, 1981, 6А517).
135. *Namioka I.* Complements of sets of unstable points // Fund. Math.— 1973.— *80,* № 1.— С. 81—89 (РЖМат, 1974, 4А406).
136. *Raymond F.* The end point compactification of manifolds // Pacif. J. Math.— 1960.— *10.*— С. 941—963 (РЖМат, 1961, 9А374).
137. — Local cohomology groups with closed supports // Math. Z.— 1961.— *76,* № 1.— С. 31—41 (РЖМат, 1962, 12А203).
138. *Rubin L. R.* Cell-like maps, dimension and cohomological dimension: a survey // Banach Cent. Publ., Vol. 18. Geom. and Algebr. Topol.: Topol. Semester Int. Stefan Banach Math. Cent., spring, 1984.— Warszawa, 1987.— С. 371—376. (РЖМат, 1988, 4А502).
139. *Schapira P.* Théorie des hiperfonctions // Lect. Notes Math.— 1970.— *126.*— 157 с. (РЖМат, 1971, 1А501К).

140. *Sigmon K.* A strong homotopy axiom for Alexander cohomology // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— *31,* № 1.— C. 271—275 (РЖМат, 1972, 10A355).
141. *Spanier E.* Algebraic topology // McGraw-Hill, 1966
142. *Strebel R.* On homological duality // J. Pure and Appl. Algebra.— 1976.— *8,* № 1.— C. 75—96 (РЖМат, 1976, 12A470).
143. *Swan R. G.* The theory of sheaves // Math. Inst., Univ. of Oxford, 1964.— 150 c. (РЖМат, 1966, 8A353K).
144. *Walsh J. J.* A class of spaces with infinite cohomological dimension // Mich. Math. J.— 1980.— *27,* № 2.— C. 215—222 (РЖМат, 1981, 2A528).
145. — Dimension, cohomological dimension and cell-like mappings // Lect. Notes Math.— 1981.— *870.*— C. 105—118 (РЖМат, 1982, 2A605).
146. *Wanderley M.* Théorème de dualite Poincare-Lefschetz à coefficients variables // Notas e commun. mat.— 1987.— № 151, I—II.— C. 1—26 (РЖМат, 1988, 11A643).
147. *Wells R. O.* Differential analysis on complex manifolds // Prentice-Hall, Inc.; Englewood Cliffs, N. J., 1973.— 252 c. (РЖМат, 1974, 5A614K).
148. *West J. E.* Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's. A solution of conjecture of Borsuk // Ann. Math.— 1977.— *106,* № 1.— C. 1—18 (РЖМат, 1978, 3A404).
149. *Wilder R. L.* A problem of Bing // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1965.— *54,* № 3.— C. 683—687 (РЖМат, 1966, 8A354).
150. — An elementary property of closed coverings of manifolds // Mich. Math. J.— 1966.— *13,* № 1.— C. 49—55 (РЖМат, 1967, 2A320).
151. *Zarelua A.* Sheaf theory and zero-dimensional mappings // Lect. Notes Math.— 1979.— *753.*— C. 768—779 (РЖМат, 1980, 7A503).
152. — Homotopical properties of sheaves resolutions // Rend. Circ. mat. Palermo.— 1988.— [*37*], Suppl. № 18.— C. 141—193 (РЖМат, 1988, 12A541).

Добавление при корректуре

153. *Mardešič S., Rubin L. R.* Cell-like mapping and nonmetrizable compacta of finite cohomological dimension // Trans. Amer. Math. Soc.— 1989.— *313*, № 1.— C. 53—79.
154. *Rubun L. R., Schapiro P. J.* Cell-like maps onto noncompact spaces of finite cohomological dimension // Topol. Appl.— 1987.— *27.*— C. 221—244.

## СОДЕРЖАНИЕ

## ВЫПУСКИ И ТОМА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ

Алгебра. Топология. «1962» (1964*)

Геометрия. «1963» (1965).

Алгебра. «1964» (1966).

Алгебра. Топология. Геометрия. «1965» (1967), «1966» (1968), «1967» (1969), «1968», (1970), «1969», (1970), «1970» (1972), тома 10 (1971), 11 (1974), 12 (1974), 13 (1975), 14 (1977), 15 (1977), 16 (1978), 17 (1979), 18 (1981), 19 (1981), 20 (1982), 21 (1983), 22 (1984), 23 (1985), 24 (1986), 25 (1987), 26 (1988)

Проблемы геометрии. Тома 7 (1976), 8 (1977), 9 (1979), 10 (1978), 11 (1981), 12 (1981), 13 (1982), 14 (1983), 15 (1984), 16 (1984), 17 (1985), 18 (1987), 19 (1987), 20 (1988), 21 (1989)

Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. «1962» (1964).

Математический анализ. «1963» (1965), «1964» (1966), «1965» (1966), «1966», (1967), «1967» (1969), «1968» (1969), «1969» (1971), «1970» (1971), тома 10 (1973), 11 (1973), 12 (1974), 13 (1975), 14 (1977), 15 (1977), 16 (1978), 17 (1979), 18 (1980), 19 (1981), 20 (1982), 21 (1983), 22 (1984), 23 (1985), 24 (1986), 25 (1987), 26 (1988), 27 (1989)

Теория вероятностей. «1963» (1965).

Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. «1964», (1966), «1966» (1967), «1967» (1969), «1968» (1970), «1969» (1970), «1970» (1971), тома 10 (1972), 11 (1974), 12 (1975), 13 (1976), 14 (1977), 15 (1978), 16 (1978), 17 (1978), 18 (1981), 19 (1982), 20 (1983), 21 (1983), 22 (1984), 23 (1985), 24 (1986), 25 (1987), 26 (1988), 27 (1989)

Современные проблемы математики. Тома 1 (1973), 2 (1973), 3 (1974), 4 (1975), 5 (1975), 6 (1976), 7 (1976), 8 (1977), 9 (1977), 10 (1978), 11 (1978), 12 (1978), 13 (1979), 14 (1979), 15 (1980), 16 (1980), 17 (1981), 18 (1981), 19 (1982), 20 (1982), 21 (1982), 22 (1983), 23 (1983).

Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Тома 24 (1984), 25 (1984), 26 (1985), 27 (1985), 28 (1986), 29 (1986), 30 (1987), 31 (1987), 32 (1988), 33 (1988), 34 (1989), 35 (1989)

Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Тома 1 (1985), 2 (1985), 3 (1985), 4 (1985), 5 (1985), 6 (1988), 7 (1985), 8 (1985), 9 (1986), 10 (1986), 11 (1986), 12 (1986), 13 (1986), 14 (1987), 15 (1987), 16 (1987), 17 (1988), 18 (1988), 19 (1988), 20 (1988), 21 (1988), 22 (1988), 23 (1988), 24 (1988), 25 (1988), 26 (1988), 27 (1988), 28 (1988), 29 (1988), 30 (1988), 31 (1988), 32 (1988), 33 (1988), 34 (1988), 35 (1989), 37 (1989), 38 (1989), 39 (1989), 42 (1989), 43 (1983), 50 (1989)

---

* Число в кавычках — название, в скобках — год издания.

УДК 512.552.7

В. А. Артамонов, А. А. Бовди, **Целочисленные групповые кольца: группы обратимых элементов и классическая К-теория** // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. ВИНИТИ, 1989. — 27. — С. 3—43

В обзор включены результаты, полученные в этой области со второй половины 60-х годов по настоящее время В группе обратимых элементов группового кольца рассматриваются нормальные периодические подгруппы, элементы конечного порядка, свободные подгруппы, конгруэнц — подгруппы, вопросы сопряженности конечных подгрупп, матричные представления. Кроме того, излагаются вопросы, связанные с вычислением групп $K_0$, $K_1$ для групповых колец, с описанием строения проективных модулей, групп обратимых матриц и т. д. Библ. 189.

УДК 512.57

В. А. Артамонов, **Универсальные алгебры** // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. ВИНИТИ, 1989. — 27. — С. 45—124

Обзор развития теории универсальных алгебр за 1976—1988 годы. В нем нашли отражение такие основные направления развития этой теории как классы универсальных алгебр (многообразия, квазимногообразия и др.), мальцевские условия, конгруэнции, пучки, гомоморфизмы, подалгебры, произведения алгебр, клоны операций, полнота, системы уравнений в алгебрах, связь с компьютерной математикой. Значительное внимание уделено конкретным классам алгебр ($p$-алгебры, ВСК-алгебры, унарные алгебры и др.). Библ. 609.

УДК 515.142.21

Е. Г. Скляренко, **Общие теории гомологий и когомологий. Современное состояние и типичные применения** // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. — ВИНИТИ, 1989. — 27. — С. 125—228

Излагается современный подход к построению теории гомологий и когомологий и с этих позиций — наиболее употребительные конкретные теории. Отражены типичные применения теории в ее развитии по настоящее время. Библ. 152.

Технический редактор *Л. В. Кутакова* Корректор *Н. Ф. Высоцкая*

Сдано в набор 28.09.89 Подписано в печать 11.12.89
Формат бумаги 60×90[1]/16 Бум. тип. № 2 Литературная гарнитура.
Высокая печать. Усл. печ. л. 14,5 Усл. кр.-отт. 14,5 Уч.-изд. л. 16,66
Тираж 650 экз. Заказ 7527 Цена 2 р. 20 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-42-29

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ,
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

**Индекс 5686**

ISSN 0202—7445. ИНТ. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 27, 1989, 1—232.

## ОПЕЧАТКИ

**ИНТ. Алгебра. Топология. Геометрия № 27, 1989 г.**

| Страница | Строка | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|
| 20 | 21 сверху | $(a^{\alpha}_{g,a})^{g^k}$ | $(a^{\alpha_{g,a}})^{g^k}$ |
| 139 | 9 сверху | $H_{\gamma}{}^{n}$ | $H_{\varphi}{}^{n}$ |
| 143 | 6 снизу | $\ldots \to H_{\varphi}(X, Y; \mathcal{G}) \to$ | $\ldots \to H_{\varphi}{}^{n}(X, Y; \mathcal{G}) \to$ |
| 154 | 1 сверху | $H^{c}(Y; \mathcal{G})$ | $H_{*}{}^{c}(Y; \mathcal{G})$ |
| 155 | 1 сверху | $\mathcal{C}_{*}(\mathcal{G}) \setminus_{U}$ | $\mathcal{C}_{*}(\mathcal{G})\,|_{U}$ |
| 156 | 18 сверху | $\varinjlim\, \mathbf{B}$ | $\varinjlim_{\mathbf{B}}$ |
| 164 | 19 сверху | $= C_{c}{}^{*}(B; G)/$ $/C^{*}_{B/U}(B; G).$ | $= C_{c}{}^{*}(B; G)/C^{*}_{B \setminus U}(B; G).$ |
| 166 | 3 снизу | $C^{*}_{\omega_{c}}(B; G) = \ldots$ | $C^{*}_{\omega c}(B; G) = \ldots$ |
| 191 | 16 снизу | $(\varphi \cap (X \setminus A_1))\,|_{A^{2}}.$ | $(\varphi \cap (X \setminus A_1))\,|_{A_{2}}.$ |
| 192 | 18 сверху | $0 \to C^{\varphi \mid X_1 \cap X_2}_{*C} \ldots$ | $0 \to C^{\varphi \mid (X_1 \cap X_2)}_{*} \ldots$ |
| 213 | 7 снизу | $H_{s}{}^{*}$ | $H_{*}{}^{s}$ |
| 215 | 13 сверху | $\cap$-умножения | $\frown$-умножения |

Зак. 7527