РГАСНТИ 27.17.19; 27.19.19;
27.37.17
ISSN 0202—7445

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ

Том 28

Москва 1990

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ

Том 28

Научный редактор
член-корр. АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1964 г.

МОСКВА 1990

1—1077

УДК 512.556+515.12+515.164.174+517.974+517.977.5

Рецензенты:

доктор физико-математических наук А. А. Аграчев,
доктор физико-математических наук А. В. Архангельский,
доктор физико-математических наук А. В. Михалев

УДК 512.556

ВОПРОСЫ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. М. Вечтомов

Введение

Обзорная статья относится к тому направлению в алгебре, в котором изучаются взаимосвязи между топологическими пространствами и ассоциированными с ними алгебраическими (тополого-алгебраическими) системами. Это направление зародилось в 30-е годы нашего столетия на стыке развивающихся абстрактной алгебры, общей топологии и функционального анализа в работах Банаха [158], М. Стоуна [294]—[296], Чеха [170], Воллмэна [310], И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова [60]. На его становление оказали большое влияние теория двойственности Л. С. Понтрягина [115] и теория нормированных колец, созданная И. М. Гельфандом, М. А. Наймарком, Г. Е. Шиловым [61], [107].

Отметим книги на русском языке, содержание которых так или иначе связано с данной темой: по алгебре [23], [24], [26], [69], [71]; по топологической алгебре [10], [11], [18], [25], [115]; по общей топологии [19], [27], [80]—[82], [117], [140]; по функциональному анализу и алгебрам функций [58], [61], [67], [68], [79], [85], [107], [113], [122], [123]; по логике и теории пучков [67], [72], [83], [116].

Теория алгебраических систем непрерывных функций на топологических пространствах имеет дело с решением трех основных классов задач.

I. Вопросы определяемости исходных объектов — топологических пространств — производными алгебраическими объектами. Более широко, изучение двойственностей между ними.

II. Исследование связей между топологическими свойствами топологических пространств и алгебраическими свойствами порожденных ими алгебраических систем.

III. Описание алгебраических свойств, общих всем алгебраическим объектам, единообразно порожденным топологическими пространствами. В частности, выделение характеристических свойств этих алгебраических систем (без топологии или с согласованной топологией), их характеризация.

Мы будем достаточно строго придерживаться первого круга вопросов. Однако во введении уместно перечислить некоторые характерные работы последних 20—25 лет, касающиеся общих задач II и III. Вышли книги Файна, Гиллмана и Ламбека [186], Семадени [288], Сукиу [300], Бекенштейна, Нариси и Саффела [159], Берендса [160], Герца, Гофманна, Кемела, Лоусона, Мишлова и Скотта [188], Бинца [161], Маллиоса [243] и второе издание монографии Гиллмана и Джерисона [189] в 1976 г., опубликованы диссертация Реттинга [281], статьи Рудда [283], [284], де Марко и Рихтера [180], Гофманна [206], Скотта [287], А. В. Зарелуа [73], Брукшера [163], [164], Говарца [196], Малвея [263], де Марко [179], коллективные статьи [151] и [155], циклы работ Манделкера [244]—[246], М. Абеля [1]—[9], Е. М. Вечтомова [32], [36], [38]—[45], [47], [54], [56] и В. К. Захарова [74]—[77].

Обратимся непосредственно к теме обзора.

Обычно связь между пространствами X и определяемыми ими алгебраическими системами $A(X)$ функториальна, а сами объекты $A(X)$ являются алгебрами тех или иных непрерывных функций на X. Именно, наиболее распространен и интересен случай, когда

$$A(X)=C(X,\ E)$$

— алгебра (алгебраическая система) всех непрерывных отображений, определенных на топологическом пространстве X, со значениями в фиксированной топологической алгебре (тополого-алгебраической системе) E, с поточечно определенными операциями (и отношениями).

Эта ситуация будет рассмотрена в § 1, где излагается построенная Мрувкой общая теория E-компактных пространств и опирающиеся на нее результаты по определяемости E-компактных пространств X алгебрами $C(X,\ E)$. По форме §§ 2 и 3 являются конкретизацией материала § 1, но большинство результатов этих параграфов требуют своих методов доказательств, не вытекающих из § 1. В § 2 рассматриваются кольца непрерывных E-значных функций со значениями в топологическом теле E и связанные с ними структуры (полугруппы, частично упорядоченные множества идеалов, модули и т. д.), решающие задачу определяемости E-компактных и E-регулярных пространств. В § 3 обсуждается случай, когда $E=D_1=\{0,\ 1\}$ — топологическая решетка с топологией связного двоеточия с единственной изолированной точкой 1. В этом случае $C(X, E)$ — это фактически решетка всех открытых множеств топологического пространства X. С помощью решетки $C(X, D_1)$ и близких структур дается определяемость T_D-пространств, T_0-пространств и произвольных топологических пространств, что, конечно, невозможно получить с помощью колец непрерывных функций, рассмотренных в § 2. § 4 посвящен вопросам определяемости топологических пространств X полугруппами $S(X)$ всех непрерывных преобразований пространств X (отображений из X в X). Наряду с $S(X)$ здесь участвуют и другие полугруппы преобразований, например, полугруппа $S'(X)$ всех непрерывных частичных преобразований пространства X; они позволяют получить определяемость фактически для произвольных топологических пространств. В заключительном § 5 мы кратко коснемся C_p-теории, разрабатываемой А. В. Архангельским [18] и его школой.

Итак, мы приблизительно очертили, что и чем будет определяться. Уточним, что значит «такие-то топологические пространства определяются такими-то алгебрами» или «топологическое пространство X из класса K определяется алгебраической системой $A(X)$».

Пусть каждому топологическому пространству X каким-либо образом поставлен в соответствие алгебраический объект (алгебраическая система, дискретная или топологическая) $A(X)$. Это соответствие подразумевается инвариантным (в случае $A(X)=C(X, E)$ оно функториально), т. е. гомеоморфные пространства X и $Y (X\approx Y)$ имеют изоморфные производные объекты: $A(X)\cong A(Y)$. И пусть K и K' — произвольные (абстрактные) классы топологических пространств.

Определение. Говорят, что топологическое пространство $X\in K$ определяется (однозначно с точностью до гомеоморфизма) в классе K' алгебраической системой $A(X)$, если $A(Y)\cong A(X)$ влечет $Y\approx X$ для любого пространства $Y\in K'$. При этом, если $K'=K$, то будем говорить просто, что $X\in K$ определяется $A(X)$. Если же K' — класс всех топологических пространств, то будем говорить, что $X\in K$ абсолютно определяется $A(X)$.

Отметим естественные приемы, показывающие, как доказываются теоремы определяемости.

1. Непосредственно по данному изоморфизму алгебраических систем $A(X)$ и $A(Y)$ строится гомеоморфизм топологических пространств X и Y, зачастую индуцирующий исходный изоморфизм.

2. Топологическое пространство X из данного класса K восстанавливается посредством $A(X)$. Точнее, по алгебраическому объекту, изоморфному $A(X)$ с $X\in K$, конструируется пространство, гомеоморфное X.

3. Доказываемая определяемость некоторым образом выте-

кает из других более глубоких или общих теорем определяемости.

Проиллюстрируем сказанное на примере одной из первых теорем определяемости, доказанной И. М. Гельфандом и А. Н. Колмогоровым [60] в 1939 г.: произвольный компакт X определяется кольцом $C(X)=C(X, \mathbf{R})$ всех определенных на нем непрерывных действительнозначных функций. Эта замечательная теорема может быть сформулирована и так: для любых компактов X и Y $X \approx Y \Leftrightarrow C(X) \cong C(Y)$. Она доказывалась всеми тремя способами. Прием 1 легко реализуется с помощью метода нуль-множеств, изложенного в § 2. Сами авторы воспользовались приемом 2: было показано, что пространство $\operatorname{Max} C(X)$ всех максимальных идеалов кольца $C(X)$ в топологии Стоуна—Зарисского гомеоморфно компакту X. Здесь мы имеем дело с широко известной теоремой Гельфанда—Колмогорова о максимальных идеалах колец $C(X)$: для каждого тихоновского пространства X $\operatorname{Max} C(X) \approx \beta X$ — компактификации Стоуна—Чеха пространства X. Излагаемая работа И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова является основополагающей в теории колец непрерывных функций.

Теорема об определяемости компактов X кольцами $C(X)$ послужила источником и образцом для многочисленных обобщений и углублений как в сторону расширения класса определяемых пространств с класса компактов, так и в сторону ослабления структуры $C(X)$ и привлечения новых объектов $A(X)$. Отметим здесь теорему Хьюитта [202] об определяемости $\mathbf{R}$-компактных (хьюиттовских) пространств кольцами $C(X)$ и теоремы Стоуна [297], Капланского [211] и Милгрэма [249] об определяемости каждого компакта X соответственно упорядоченной аддитивной группой $C(X)$, решеткой $C(X)$ и мультипликативной полугруппой $C(X)$. Развитие перечисленных результатов излагается в § 2. Укажем лишь один результат автора обзора [49]: любое тихоновское пространство X определяется $C(X)$-множеством (полигоном) $\mathbf{R}^X$ всех действительнозначных функций на X ($C(X)$ рассматривается как мультипликативный моноид).

Несколько слов об обозначениях и общетопологических понятиях. Классические числовые системы обозначаются обычным образом: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$. E^X — множество всех отображений множества X в множество E. Будем пользоваться общетопологической терминологией известной книги Энгелькинга [140]. Подчеркнем только следующее. Компакт — это компактное хаусдорфово пространство. Вполне регулярные хаусдорфовы пространства будем называть тихоновскими, а $\mathbf{R}$-компактные — хьюиттовскими.

Параграфы обзорной статьи разбиты на пункты. Так, например, 2.3 обозначает пункт 3 § 2. Определения и теоремы именуются так же, как и содержащие их пункты.

§ 1. E-компактность и алгебраические системы непрерывных E-значных функций

1.1. Теория E-компактных пространств создана Мрувкой и его школой. Первая работа Мрувки в этом направлении «Об универсальных пространствах» [252] опубликована в 1956 году. Следует отметить, что фактически E-регулярные пространства рассматривал еще Н. А. Шанин в своей статье 1944 г. [128]. Впервые понятие E-компактного пространства введено Мрувкой в заметке [253]. Началом систематического развития теории послужила статья Мрувки и Энгелькинга [184] 1958 года. Теория E-компактных пространств и структур непрерывных функций на них интенсивно развивалась в 60-е и 70-е годы самим Мрувкой (см. [254]—[262]) и его последователями Блефко [162], Чевом [171], [172], Шором [292], [293], Брукером [166]. Среди учеников Мрувки особенно хочется выделить Говарца с циклом статей [192]—[197], в которых теория E-компактности напрямую нацелена на результаты по определяемости E-компактных пространств X различными структурами $C(X, E)$. E-компактным пространствам посвящен § 7 обзора В. И. Малыхина и В. И. Пономарева [84].

1.2. Определение. Пусть E — произвольное топологическое пространство. Топологическое пространство называется E-компактным (E-регулярным), если оно гомеоморфно замкнутому подпространству (произвольному подпространству) некоторой тихоновской степени пространства E.

Эти общепринятые теперь определения появились в качестве эквивалентных условий в работе Мрувки и Энгелькинга [184]. Продемонстрируем некоторые частные случаи. Если E — единичный числовой отрезок, то E-компактные пространства совпадают с компактами, а E-регулярные — с тихоновскими пространствами. Если E — дискретное двоеточие, то E-компактные пространства — это в точности нульмерные компакты, а E-регулярность равносильна нульмерности с хаусдорфовостью. Если же E — связное двоеточие, то E-регулярные пространства совпадают с T_0-пространствами. $\mathbf{R}$-компактные пространства введены Хьюиттом [202] в 1948 г. и называются в нашей работе хьюиттовскими. Другие определения хьюиттовских пространств предложены Нахбиным [264] в 1950 г., Катетовым [213] в 1951 г. и Широтой [290] в 1952 г. Хьюиттовским пространствам посвящены глава 8 книги Гиллмана и Джерисона [189] и § 3.11 книги Энгелькинга [140].

Приведем известные характеризации E-регулярных и E-компактных пространств. Все встречающиеся пространства, если не оговаривается противное, будем считать хаусдорфовыми.

1.3. Пусть E — фиксированное топологическое пространство. Для любого топологического пространства X, не обязательно хаусдорфова, существует E-регулярное пространство $\tau_E X$, являющееся непрерывным образом X при отображении τ, такое, что отображение

$$\bar{\tau}: C(\tau_E X, E) \to C(X, E), \quad \bar{\tau}(f) = f \circ \tau \text{ при } f \in C(\tau_E X, E),$$

является биекцией [252]. Пространство $\tau_E X$ строится следующим образом. Пусть

$$[C(X, E)] = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C(X, E^n).$$

Тогда $\tau_E X$ — фактор-множество множества X, элементами которого служат классы точек топологического пространства X, не различаемых отображениями из $[C(X, E)]$. И на полученном множестве вводится слабейшая топология, относительно которой непрерывны все функции из $[C(X, E)]$. Впервые подобная конструкция рассматривалась Чехом [170] для $E = \mathbf{R}$ (см. также [189]). Если E — тополого-алгебраическая система, то $\bar{\tau}$ — изоморфизм индуцированных алгебраических систем $C(\tau_E X, E)$ и $C(X, E)$ (см., например, [258]).

1.4. Теорема. Для топологического пространства X эквивалентны следующие условия:

1) X—E-регулярное пространство;

2) для любых замкнутого множества $A \subset X$ и точки $p \in X \setminus A$ существует такая функция $f \in [C(X, E)]$, что $f(p) \notin \overline{f(A)}$ — замыканию $f(A)$ в соответствующей конечной тихоновской степени E;

3) $X = \tau_E X$, т. е. топология пространства X — слабейшая, относительно которой непрерывны все функции из $[C(X, E)]$.

Вначале условие 2) выступало как определение E-регулярных пространств, называемых Мрувкой [252] E-вполне регулярными. Отметим, что если в условии 2) считать «$f \in C(X, E)$», то получим более узкий класс строго E-регулярных пространств [184], причем если E и E^2 строго E-регулярны, то классы E-регулярных пространств и строго E-регулярных пространств совпадают.

1.5. Важную роль в теории E-компактности играет отображение

$$\sigma: X \to E^{[C(X,E)]}, \quad \sigma(x)(f) = f(x)$$

для всех $x \in X$ и $f \in [C(X, E)]$ [184]. При этом обычно можно ограничиться функциями $f \in C(X, E)$. E-регулярность пространства X равносильна тому, что σ — гомеоморфизм X в тихоновскую степень $[C(X, E)]$ экземпляров пространства E. Для E-регулярного пространства X подпространство $\overline{\sigma(X)}$ в $E^{[C(X,E)]}$ E-компактно, плотно содержит $\sigma(X)$ и $\sigma(X)$ E-расширяемо в $E^{[C(X,E)]}$, т. е. любая непрерывная E-значная функция на $\sigma(X)$ непрерывно продолжается до E-значной функции на всем пространстве $E^{[C(X,E)]}$. При отождествлении $\sigma(X) \equiv X$ мы получаем E-компактное расширение $\nu_E X = \overline{\sigma(X)}$ E-регулярного пространства X, фактически имеющее те же непрерывные E-значные функции, что и X. В случае тополого-алгебраической системы E для всякого E-регулярного пространства X получаем изоморфизм $C(\nu_E X, E) \cong \cong C(X, E)$ [258]. Для E-регулярного пространства X расширение $\nu_E X$ определяется однозначно, с точностью до гомеоморфизма над X, условиями: $\nu_E X$ E-компактно, плотно содержит X и X E-расширяемо в нем. Отметим еще такое свойство E-компактных пространств: если даны E-регулярное пространство X и E-компактное пространство Y, то любая функция из $C(X, Y)$ расширяется до функции из $C(\nu_E X, Y)$. Соответствие типа σ давно известно в математике и широко применяется в ней.

1.6. Теорема. Следующие утверждения эквивалентны:

1) X—E-компактное пространство;

2) пространство X E-регулярно и не является собственным плотным E-расширяемым подпространством никакого E-регулярного пространства;

3) X гомеоморфно замкнутому Е-расширяемому подпространству некоторой тихоновской степени пространства E;

4) пространство X E-регулярно и $X = \nu_E X$;

5) для любой расходящейся направленности в X существует функция из $C(X, E)$, переводящая эту направленность в расходящуюся направленность в E.

Эквивалентность утверждений 1)—4) доказана в [184], [256], [257]. Условие 2) теоремы 1.6 фигурировало в [184], [253] в качестве определения E-компактных пространств. Условие 5) появилось в работе А. П. Шостака [136].

1.7. Определение [195]. Топологическое пространство E называется строго отделимым, если для произвольных $n \in \mathbf{N}$, замкнутого $A \subset E^n$ и точки $p \in E^n \setminus A$ существуют такие функции f и g из $C(E^n, E)$, что $f = g$ на A и $f(p) \neq g(p)$.

Отметим, что для строго отделимых пространств E понятие E-компактности эквивалентно так называемому понятию E-максимальности, введенному и изученному Говарцем [194].

1.8. Пусть E — топологическая алгебраическая система, т. е. алгебраическая система с согласованной топологией, относительно которой непрерывны все операции системы E и E-компактны графики всех ее отношений. Для произвольного топологического пространства X множество $C(X, E)$ всех непрерывных отображений $X \to E$ с поточечно определенными операциями и отношениями становится алгебраической системой, однотипной системе E. Изучение этой общей ситуации было начато Мрувкой [258]. Соответствие $C(\cdot, E) : X \to C(X, E)$ является контравариантным функтором из категории TOP всех топологических пространств и их непрерывных отображений в категорию алгебраических систем, однотипных E, и их гомоморфизмов. Гомоморфизм $\alpha : C(X, E) \to C(Y, E)$ называется индуцированным (отображением φ), если существует такое непрерывное отображение $\varphi : Y \to X$, что $\alpha(f) = f \circ \varphi$ для всех f из $C(X, E)$.

Гомоморфизм $H:C(X, E)\to E$ называется характером. Гомоморфизм $C(X, E)\to C(Y, E)$ называется E-гомоморфизмом, если он сохраняет соответствующие функции-константы. Характер, являющийся E-гомоморфизмом, называется E-характером. Наконец, индуцированные характеры называются вычислениями. Более подробно, для $x\in X$ пусть $H_x:C(X, E)\to E$ определяется формулой

$$H_x(f)=f(x) \text{ для всех } f\in C(X, E).$$

Полученный E-характер H_x и называется вычислением (в точке x).

1.9. Определение. Тополого-алгебраическую систему E назовем определяющей, если для нее справедлива теорема определяемости: для любых E-компактных пространств X и Y

$$X\approx Y\Leftrightarrow C(X, E)\cong C(Y, E),$$

и строго определяющей, если для произвольных E-компактных пространств X и Y каждый гомоморфизм $C(X, E)\to C(Y, E)$ индуцирован некоторым (однозначно определенным) непрерывным отображением $Y\to X$.

Ограничение E-компактными пространствами в данном определении мотивируется тем (см. пп. 1.3 и 1.5), что для любого топологического пространства X $C(X, E)\cong C(\tau_E X, E)\cong C(\nu_E\tau_E X, E)$. Тот факт, что E является строго определяющей системой, означает, что функтор $C(\cdot, E)$ осуществляет эквивалентность между категорией E-компактных пространств с непрерывными отображениями и категорией всех алгебраических систем вида $C(X, E)$ и их гомоморфизмов.

Говорят, что пространство X имеет свойство E-вычислений, если каждый характер $C(X, E)\to E$ — вычисление. Говарц [197] назвал систему E достаточно сложной, если всякое E-компактное пространство обладает свойством E-вычислений. Легко видеть, что для тополого-алгебраической системы E строгая определяемость равносильна достаточной сложности [197]. Отметим также следующие свойства произвольной строго определяющей системы E: она имеет единственный эндоморфизм (алгебраический) — тождественный; для E-регулярных пространств E-компактность эквивалентна свойству E-вычислений; система E определяющая, более того, если X, Y—E-компактные пространства, то любой изоморфизм между $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ индуцируется единственным гомеоморфизмом между Y и X.

1.10. Подмножество A топологического пространства X называется носителем характера $H:C(X, E)\to E$, если $f=g$ на A влечет $H(f)=H(g)$ для любых f, $g\in C(X, E)$. Роль этого понятия исследована Мрувкой в [258]. Имеет место такой результат: $\{p\}$ — носитель характера H тогда и только тогда, когда $H(f)=\alpha(f(p))$ для всех f из $C(X, E)$, где α — фиксированный эндоморфизм алгебраической системы E, зависящий от H и точки $p \in X$. Важность понятия носителя для определяемости топологических пространств видна также из следующего очевидного замечания. Для того чтобы отображение $H : C(X, E) \to E$ было вычислением, необходимо и достаточно, чтобы H было E-характером, имеющим одноточечный носитель.

1.11. Теорема. Для произвольной тополого-алгебраической системы E эквивалентны следующие утверждения:

1. E — строго определяющая система.
2. E — достаточно сложная система.
3. Любое замкнутое подмножество произвольной конечной тихоновской степени E имеет свойство E-вычислений.
4. Для любых E-компактного пространства X, характера H: $C(X, E) \to E$, конечных семейства функций $f_1, \ldots, f_n \in C(X, E)$ и семейства открытых в E множеств $A_1, \ldots, A_n$ таких, что $H(f_k) \in A_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$, существует точка $x \in X$, для которой $f_k(x) \in A_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$.
5. Условие 4, в котором в качестве X берутся произвольные замкнутые подмножества конечных тихоновских степеней E.

Сформулированная теорема принадлежит Говарцу [197].

В данной обзорной статье мы собираемся доказать несколько результатов с целью продемонстрировать типичные рассуждения теории.

1.12. Теорема ([195]). Если пространство тополого-алгебраической системы E строго отделимо, то строгая определяемость E эквивалентна тому, что все конечные тихоновские степени E имеют свойство E-вычислений.

Доказательство. В силу теоремы 1.11 достаточно доказать утверждение 4 этой теоремы в предположении, что пространство E строго отделимо и конечные степени E обладают свойством E-вычислений. Пусть выполнено условие утверждения 4 (с теми же обозначениями). Рассмотрим E-гомоморфизм $\alpha : C(E^n, E) \to C(X, E)$, определенный формулой

$$\alpha(f)(x) = f((f_1(x), \ldots, f_n(x)))$$

для любых $f \in C(E^n, E)$ и $x \in X$. По предположению $H \circ \alpha = H_e$ для некоторой точки $e = (\pi_1(e), \ldots, \pi_n(e)) \in E^n$, где $\pi_k(e)$ — k-я координата n-ки e $(k = 1, \ldots, n)$. Если функции $f, g \in C(E^n, E)$ равны на множестве $A = \{(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \mid x \in X\}$, т. е. $\alpha(f) = \alpha(g)$, то $f(e) = H_e(f) = H(\alpha(f)) = H(\alpha(g)) = H_e(g) = g(e)$. Следовательно, по определению 1.7, точка e принадлежит замыканию множества A. Поскольку $\pi_k(e) = H_e(\pi_k) = H(\alpha(\pi_k)) = H(f_k) \in A_k$ при $k = 1, \ldots, n$, то открытое множество $A_1 \times \ldots \times A_n$ в E^n содержит точку e. Поэтому множество $A \cap (A_1 \times \ldots \times A_n)$ не пусто, т. е. существует такая точка $x \in X$, что $f_k(x) \in A_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

1.13. Теорема. Пусть E — тополого-алгебраическая система, являющаяся строго отделимым пространством, X и Y — E-регулярные пространства. Пусть $\mathcal{F}$ — множество характеров

$C(X, E) \to E$ такое, что все вычисления H_x, $x \in X$, принадлежат $\mathscr{F}$ и каждый характер из $\mathscr{F}$ имеет одноточечный носитель, и $\mathscr{F}'$ — аналогичное множество характеров для Y. Тогда, если существует изоморфизм $\alpha : C(X, E) \to C(Y, E)$, для которого $H \in \mathscr{F}$ равносильно $H \circ \alpha^{-1} \in \mathscr{F}'$ при любом характере H: $C(X, E) \to E$, то $X \approx Y$.

Схема доказательства. Для произвольных $x \in X$ и $y \in Y$ полагаем $\varphi(x) = y$, если и только если $\{y\}$ — носитель характера $H_x \circ \alpha^{-1} \in \mathscr{F}'$. Доказывается, что $\varphi : X \to Y$ — биекция. В силу E-регулярности X и строгой отделимости E множества $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$, f, $g \in C(X, E)$, образуют базу замкнутых множеств пространства X; аналогичное верно и для Y. Отсюда вытекает, что φ — гомеоморфизм.

Полное доказательство этой теоремы имеется в [195].

1.14. В качестве следствия теоремы 1.13 получаем классический результат Банаха—Стоуна, доказанный Банахом [158] в 1932 г. для компактных метрических пространств и М. Стоуном [296] в 1937 г. для произвольных компактов. Это применение дано Говарцев [195].

Теорема Банаха — Стоуна. Если $E = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то произвольные компакты X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда банаховы пространства $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изометрически изоморфны.

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ — множество всех экстремальных точек единичного шара сопряженного к $C(X, E)$ банахова пространства всех ограниченных линейных функционалов $C(X, E) \to E$. Подчеркнем, что на $C(X, E)$ рассматривается обычная норма. Аналогично определяется $\mathscr{F}'$ для Y. Хорошо известно (см., например, [79]), что $\mathscr{F} = \{k \cdot H_x \mid |k| = 1$ и $x \in X\}$. Если между банаховыми пространствами $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ существует изометрический изоморфизм, то он индуцирует взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$. Тогда $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ удовлетворяют условиям теоремы 1.13, что влечет гомеоморфность X и Y.

1.15. В этом и следующих двух пунктах мы рассмотрим результаты Чева [171] о топологических кольцах E. Пусть E — произвольное топологическое кольцо, X — E-регулярное пространство. Множество всех E-характеров $C(X, E) \to E$ обозначается $H(X, E)$. Если $f \in C(X, E)$, то $Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ — E-нуль-множество на X. Множество характеров $H(X, E)$ замкнуто в $E^{C(X, E)}$, поскольку предел любой направленности E-характеров в тихоновской степени $E^{C(X, E)}$ снова является E-характером.

Лемма. Если для любого $H \in H(X, E)$ множество $\{Z(f) \mid f \in \operatorname{Ker} H\}$ имеет свойство конечных пересечений, то $\nu_E X = H(X, E)$.

Доказательство. Поскольку $\nu_E X$ — замыкание множества $\sigma(X) = \{H_x \mid x \in X\}$ в $E^{C(X, E)}$, то $\nu_E X \subseteq H(X, E)$. Поэтому достаточно показать, что любой характер $H \in H(X, E)$ лежит в замыкании $\{H_x \mid x \in X\}$. Для этого возьмем произвольную базисную окрестность A характера $H \in H(X, E)$. Это значит, что имеются конечное множество функций $f_1, \ldots, f_n$ из $C(X, E)$ и конечное множество открытых в E множеств $A_1, \ldots, A_n$, удовлетворяющих условиям:

$$A = \{\alpha : C(X, E) \to E \mid \alpha(f_k) \in A_k \text{ при } k = 1, \ldots, n\}$$

и $H(f_k) \in A_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Положим $a_k = H(f_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда $H(f_k - a_k) = 0$, т. е. $f_k - a_k \in \operatorname{Ker} H$ для наших k. По условию леммы $\bigcap_{k=1}^{n} Z(f_k - a_k) \neq \varnothing$, т. е. существует такая точка $x \in X$, что $f_k(x) = a_k$ для всех k. Значит, $H_x(f_k) = a_k = H(f_k)$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $H_x \in A$. Лемма доказана.

Непосредственным следствием леммы является следующая теорема.

1.16. Теорема. Пусть топологическое кольцо E удовлетворяет условию леммы для любого E-регулярного пространства X. Тогда:

1) произвольные E-компактные пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда E-изоморфны кольца $C(X, E)$ и $C(Y, E)$;

2) если любой ненулевой эндоморфизм кольца E тождественный, то система E определяющая.

В качестве приложения этой теоремы получается следующий результат и вытекающие из него ранее известные частные случаи.

1.17. Теорема. Пусть топологическое кольцо E удовлетворяет свойствам: а) для любых E-регулярного пространства X, характера $H \in H(X, E)$ и функции $f \in C(X, E)$ $H(f) = 0$ влечет $Z(f) \neq \varnothing$ и б) на E существует такая непрерывная функция $*$, что $x \cdot x^* + y \cdot y^* = 0$ влечет $x = y = 0$ для любых $x, y \in E$. Тогда E удовлетворяет условию леммы 1.15 и, следовательно, заключениям 1) и 2) теоремы 1.16.

Из теоремы 1.17 вытекает, что числовые топологические кольца $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ являются определяющими системами. Более того, если единицу кольца считать за его нульарную операцию, то перечисленные числовые кольца — строго определяющие системы. Для $\mathbf{R}$ этот результат впервые установлен Хьюиттом [202] в 1948 г., для $\mathbf{Z}$ — Мрувкой [255] в 1965 г. и для $\mathbf{Q}$ — Блефко [162] в 1968 г. Определяющими системами являются следующие топологические кольца [171]: топологические подполя в $\mathbf{R}$; дискретные тела; кольцо целых гауссовых чисел с дискретной топологией. Другие примеры определяющих и строго определяющих (достаточно сложных) систем можно найти в [197].

В качестве еще одной иллюстрации методов теории определяемости E-компактных пространств разберем следующий результат Говарца [193].

1.18. Теорема. Пусть $E = [0, 1]$ — единичный числовой отрезок с обычной топологией, обычным умножением и унарной операцией $x \mapsto 1-x$. Тогда E — строго определяющая система. В частности, произвольные компакты X и Y гомеоморфны в том и только том случае, когда алгебры $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны.

Эскиз доказательства. Легко показать, что топологическая алгебра E строго отделима, любой ее эндоморфизм тождественен и E-компактные пространства — это в точности компакты. В силу теоремы 1.12 достаточно доказать, что любая конечная степень E имеет свойство E-вычислений. Возьмем произвольный характер H: $C(E^n, E) \to E$ и рассмотрим точку $p = (H(\pi_1), \ldots, H(\pi_n)) \in E^n$, где π_k — k-я проекция $E^n \to E$ ($k = 1, \ldots, n$). Сравним характеры H и H_p. Пусть C — множество всех тех функций из $C(E^n, E)$, на которых H и H_p совпадают. Тогда C — равномерно замкнутая подалгебра алгебры $C(E^n, E)$, содержащая все функции-константы. Поскольку $H_p(\pi_k) = \pi_k(p) = H(\pi_k)$ при $k = 1, \ldots, n$, то C содержит и все проекции π_k. Как и в теореме Стоуна—Вейерштрасса (см., например, [140]), отсюда выводится, что $C = C(E^n, E)$. Значит, $H = H_p$ — вычисление.

Топологическая мультипликативная полугруппа $E = [0, 1]$ не является уже строго определяющей, хотя определяющей остается — это не следует из теоремы 1.18, но может быть доказано методом нуль-множеств, как в работе [33].

1.19. Пусть даны тополого-алгебраическая система E и топологическое пространство X. На алгебраической системе $C(X, E)$ можно различными способами задавать топологию, превращающую $C(X, E)$ в тополого-алгебраическую систему. В функциональном анализе, топологической алгебре и общей топологии наиболее употребительны следующие топологизации $C(X, E)$ — введение топологии поточечной сходимости, компактно-открытой топологии, топологии равномерной сходимости на компактах. Рассматривая $C(X, E)$ как подпространство тихоновской степени E^X, получаем тополого-алгебраическую систему $C_p(X, E)$ с топологией поточечной сходимости. С помощью топологических алгебраических систем $C_p(X, E)$ и $C(X, E)$ с другими топологиями можно получать определяемость уже E-регулярных пространств X. Так мы приходим к понятиям C_p-определяющей и строго C_p-определяющей систем (и другим типам топологически определяющих систем).

Определение. Тополого-алгебраическую систему E назовем C_p-определяющей, если для любых E-регулярных пространств X и Y их гомеоморфизм эквивалентен топологическому изоморфизму тополого-алгебраических систем $C_p(X, E)$ и $C_p(Y, E)$. Если в определении 1.9 строго определяющей системы E рассматривать объекты $C_p(X, E)$ для E-регулярных пространств X и непрерывные гомоморфизмы между ними, то получим определение строго C_p-определяющей системы E.

В 1949 г. Ю. Нагата [265] доказал, что топологическое кольцо (поле) $\mathbf{R}$ является C_p-определяющим. В этом направлении получили результаты Г. Е. Шилов [129], Капланский [210], Широта [291], В. В. Пашенков [110], [111], Н. И. Шакенко [127], Е. М. Вечтомов [31], [33], [48], [53], [56]. Мы коснемся еще этих вопросов в следующих параграфах.

Школа Мрувки изучала $C(X, E)$ как чисто алгебраическую структуру, без топологии, что не позволяет получить определяемость E-регулярных пространств. Конкретные определяющие системы этого параграфа являются и C_p-определяющими (см. [162], [189], [217], [298]). Топологические кольца $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ с выделенной единицей являются строго C_p-определяющими. Топологическая алгебра из теоремы 1.18 также является строго C_p-определяющий. Для топологической мультипликативной полугруппы $E=[0, 1]$ произвольные тихоновские пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда топологические полугруппы $C_p(X, E)$ и $C_p(Y, E)$ топологически изоморфны. В заключение естественно поставить вопрос: всякая ли определяющая (строго определяющая) система является C_p-определяющей (строго C_p-определяющей)? Верно ли обратное утверждение?

1.20. Перечислим еще несколько работ, касающихся теории E-компактности: [37], [137], [138], [155], [176], [215], [250], [251], [299], [307].

§ 2. Кольца непрерывных функций и связанные с ними алгебраические системы

2.1. Пусть E — произвольное (отделимое) топологическое кольцо. В этом пункте отметим работы по определяемости топологических пространств кольцами $C(X, E)$, а в следующем — структурами, связанными с кольцами $C(X, E)$. Как обычно, $C(X)=C(X, \mathbf{R})$. Пусть $\mathbf{Z}_2$ — дискретное двухэлементное поле. Импульсом к возникновению теории колец непрерывных функций послужил цикл классических статей Стоуна [294]—[296] по теории булевых алгебр и булевых колец. Было доказано, что булевы алгебры совпадают по объему с булевыми кольцами с единицей, а последние с точностью до изоморфизма — это в точности кольца $C(X, \mathbf{Z}_2)$, причем можно ограничиться нульмерными компактами X, являющимися пространствами максимальных идеалов (пространствами Стоуна) соответствующих булевых колец. Как показал Стоун ([295], [296]), любой нульмерный компакт X определяется кольцом $C(X, \mathbf{Z}_2)$. Лишь позднее в работе [181] было доказано, что система $\mathbf{Z}_2$ строго определяющая. Собственно теория колец непрерывных функций, основным объектом которой служит кольцо $C(X)$, начала развиваться в пионерской работе И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова [60], рассмотренной во введении. Следующими важными шагами в создании теории стали статьи Капланского [210] и Хьюитта

[202]. Капланский доказал определяемость нульмерных компактов X кольцами $C(X, E)$ для топологических колец E, близких к топологическим телам. Хьюитт развил теорию колец непрерывных функций и доказал определяемость хьюиттовских пространств X кольцами $C(X, E)$, где $E = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или топологическое тело кватернионов. В 50-е годы вышли статьи [150], [200], [266], [267], [277]—[279], [289]—[291] по определяемости пространств кольцами функций. Предыдущее развитие теории было подытожено в монографии Гиллмана и Джерисона [189], вышедшей в 1960 г. и остающейся до сих пор единственной книгой такого рода.

Начиная с 1958 г. вопросы определяемости около 20 лет изучались Мрувкой и его последователями в рамках теории E-компактности, что отражено в § 1 обзора. Отметим также статьи Рудда [283] и [284] о структурных пространствах колец $C(X)$. Бахман с соавторами [155] исследуют кольца непрерывных функций со значениями в полных топологических полях и их подкольца ограниченных функций. С интересующей нас точки зрения кольца функций рассматривались в работах Магилла [215] и [217] и автора обзора [30], [33], [35]—[37], [53].

2.2. Под алгебраическими системами, связанными с кольцами $C(X, E)$, мы понимаем мультипликативные полугруппы $C(X, E)$, решетки $C(X)$, определенные модули над $C(X, E)$, частично упорядоченные множества идеалов кольца $C(X, E)$, предупорядоченные множества делимости $C(X, E)$ и т. д. Сначала были получены теоремы определяемости для компактов. Именно, Стоун [297] доказал определяемость любого компакта X решеточно упорядоченной аддитивной группой $C(X)$, Капланский [211] — решеткой $C(X)$, а Милгрэм [249] — мультипликативной полугруппой $C(X)$.

Затем исследовалась определяемость хьюиттовских пространств. Так, Широта в двух статьях [290] и [291] последовательно доказал определяемость произвольного хьюиттовского пространства X векторной решеткой $C(X)$, решеточно упорядоченной группой $C(X)$, решеткой $C(X)$ и полугруппой $C(X)$ по умножению. Легко видеть, что компакты X не определяются аддитивными группами $C(X)$ или группами обратимых элементов колец $C(X)$. Хьюиттовские пространства X не обязаны также определяться кольцами $C^*(X)$ всех ограниченных непрерывных вещественных функций на X (см., например, [189]).

Перейдем к вопросам определяемости тихоновских пространств. И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров [60] показали, что каждое тихоновское пространство X с первой аксиомой счетности определяется как кольцом $C(X)$, так и кольцом $C^*(X)$ (см. также статью Чеха [170]). Пурсел доказал в [277] определяемость нормальных $\mathcal{G}_\delta$-пространств кольцами $C(X)$ и $C^*(X)$. Андерсон [150] показал, что тихоновские $\mathcal{G}_\delta$-пространства X определяются решетками $C(X)$, а значит и кольцами $C(X)$.

Е. М. Вечтомов в [53] для широкого класса топологических тел E доказал определяемость E-регулярных $\mathcal{G}_\delta$-пространств X мультипликативными полугруппами $C(X,E)$. В работе [278] Пурсел установил определяемость тихоновских пространств X парами колец $C(X)$ и $\mathbf{R}^X$. Этот же результат справедлив для решеток [31] и мультипликативных полугрупп [33].

Определяемость каждого тихоновского пространства X топологическим кольцом $C_p(X)$, как уже отмечалось, доказана в [265], а топологическим кольцом $C(X)$ в компактно-открытой топологии — в [307]. Эти же результаты, но для топологических решеток и полугрупп $C(X)$, получил Широта [291]. В [110] и [111] также рассматривались топологические кольцо и решетка $C_p(X)$, а в заметке [127] указан целый класс топологизаций кольца $C(X)$, определяющих тихоновские пространства X. Для широкого класса топологических тел E в [33], [53] доказана определяемость каждого E-регулярного пространства X топологической полугруппой $C_p(X,E)$ и топологической полугруппой $C(X,E)$ с компактно-открытой топологией.

Пусть $C_{00}(X,E)$ — идеал кольца $C(X,E)$, состоящий из всех функций f с компактными носителями $\overline{X\setminus Z(f)}$. Шанкс [289] установил определяемость локально компактных хаусдорфовых пространств X кольцами $C_{00}(X)$. Для ряда топологических тел E доказано, что любое локально компактное E-регулярное пространство X определяется мультипликативной полугруппой $C_{00}(X,E)$ [34] и $C(X,E)$-модулем $C_{00}(X,E)$ [40]. В [36] Е. М. Вечтомов привлек к определяемости пространств X $C(X,E)$-модуль E^X и показал, что любое E-регулярное пространство X определяется модулем E^X над кольцом $C(X,E)$, если E — топологическое простое кольцо с единицей. Более того (см. [49]), для целого ряда топологических тел E, включающего непрерывные (локально компактные недискретные) тела, в предыдущей теореме можно ограничиться множеством E^X над моноидом $C(X,E)$ ($C(X,E)$-полигоном E^X).

Определяемость E-компактных пространств X различными частично упорядоченными множествами идеалов (всех, конечнопорожденных, главных — двусторонних или правых) колец $C(X,E)$ рассматривалась автором этой статьи в [35], [37], [53]. Из этих результатов вытекают такие следствия. Гомеоморфность E-компактных пространств X и Y равносильна эквивалентности категорий всех модулей над кольцами $C(X,E)$ и $C(Y,E)$ соответственно. Любое E-компактное пространство X определяется предупорядоченным множеством (правой) делимости $C(X,E)$ с отношением «делит»: g делит f, если найдется такая функция h из кольца $C(X,E)$, что $f=gh$. Позднее этот результат был доказан Часаром (см. [175], [176]) для $C(X)$ и в несколько более общей ситуации. Он же в [177] и [178] развил последний результат в следующем направлении. Биекцию α

между полугруппами S и T Часар назвал u-изоморфизмом, если $a \cdot b = a \Leftrightarrow \alpha(a)\alpha(b) = \alpha(a)$ для любых a, $b \in S$. Было доказано, что полугруппы $C(X)$ и $C^*(X)$ u-изоморфны и гомеоморфизм компактов X и Y эквивалентен u-изоморфности полугрупп $C(X)$ и $C(Y)$. В [46] Е. М. Вечтомов ввел понятие 0-изоморфизма для колец (полугрупп с 0): биекция $\alpha: R \to S$ колец названа 0-изоморфизмом, если $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \alpha(a)\alpha(b) = 0$ для любых a, $b \in R$. Было доказано, что всякий 0-изоморфизм любого булева кольца на произвольное кольцо является изоморфизмом колец. Отсюда и из результата Стоуна [296], уже отмеченного нами, вытекает, что 0-изоморфизм булевых колец $C_{00}(X, \mathbf{Z}_2)$ и $C_{00}(Y, \mathbf{Z}_2)$ влечет гомеоморфизм произвольных булевых (нульмерных локально компактных хаусдорфовых) пространств X и Y. Отметим и примыкающую сюда работу [242].

Ряд результатов этого пункта будет более подробно изложен в последующих пунктах параграфа на основе метода нуль-множеств. Другие работы по определяемости топологических пространств кольцами функций и близкими структурами мы перечислим в завершающем пункте § 2.

2.3. Рассмотрим классический вариант развития теории колец $C(X, E)$, касающийся определяемости E-компактных пространств в терминах колец непрерывных функций. Этот вариант предложен Хьюиттом [202], развит и подробно изложен в книге Гиллмана и Джерисона [189] для колец $C(X)$; он является конкретизацией общей теории § 1.

Пусть, для определенности, E — непрерывное тело. Идеал в $C(X, E)$ называется E-идеалом, если он служит ядром некоторого E-характера. Пусть $Z(X) = \{Z(f) \mid f \in C(X, E)\}$ — решетка E-нуль-множеств топологического пространства X. Если $x \in X$, то положим $M_x = \{f \in C(X, E) \mid f(x) = 0\}$ и $\mathcal{F}_x = \{A \in Z(X) \mid x \in A\}$ — соответственно фиксированный максимальный идеал (E-идеал) кольца $C(X, E)$ и фиксированный z-ультрафильтр на X. В [189] доказано, что идеал M кольца $C(X, E)$ является E-идеалом тогда и только тогда, когда $Z(M) = \{Z(f) \mid f \in M\}$ — z-ультрафильтр на X, замкнутый относительно счетных пересечений (имеющий свойство счетных пересечений). Там же (частично) и в [33] показано, что для E-регулярного пространства X эквивалентны условия: X — E-компактное пространство; все E-идеалы кольца $C(X, E)$ фиксированные, т. е. совпадают с M_x для подходящих x из X; каждый z-ультрафильтр на X фиксированный, т. е. имеет вид $\mathcal{F}_x$ для некоторой (единственной) точки $x \in X$. Теперь становится ясно, что каждое E-компактное пространство X гомеоморфно пространству всех E-идеалов кольца $C(X, E)$ с топологией Стоуна—Зарисского и соответствующему пространству $H(X, E)$ E-характеров с топологией поточечной сходимости (см. пп. 1.5 и 1.15). Отсюда немедленно получается теорема определяемости для $\mathbf{R}$. Однако прямо таким путем невозможно доказать даже, что топологическое поле **C** является определяющим, так как **C** имеет бесконечно много алгебраических автоморфизмов. В этом случае можно воспользоваться методом нуль-множеств.

2.4. Метод нуль-множеств применяется для получения теорем определяемости в терминах колец $C(X, E)$ и состоит из двух шагов.

1. Исходя из изоморфизма алгебраических систем, порожденных непрерывными E-значными функциями на топологических пространствах X и Y соответственно, строится изоморфизм решеток $Z(X)$ и $Z(Y)$.

2. Доказывается, что изоморфизм решеток $Z(X)$ и $Z(Y)$ влечет гомеоморфизм пространств X и Y из того или иного класса пространств.

Этот метод используется, главным образом, для определяемости E-компактных пространств. В [33] методом нуль-множеств была доказана следующая теорема: для любых непрерывного тела E и E-компактных пространств X и Y из изоморфности мультипликативных полугрупп колец $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ следует гомеоморфность пространств X и Y. Более сильный и более общий результат доказан Е. М. Вечтомовым в [53] — мы его обсудим чуть позднее.

Пусть далее E принадлежит широкому классу топологических тел, включающему непрерывные тела, все их недискретные подтела, конечные поля и ряд других топологических тел [53].

2.5. Т е о р е м а. Произвольные E-компактные пространства X и Y гомеоморфны в том и только том случае, когда решетки $Z(X)$ и $Z(Y)$ изоморфны.

Разберем случай бесконечного тела E. Пусть $\alpha : Z(X) \to Z(Y)$ — решеточный изоморфизм для E-компактных пространств X и Y. z-ультрафильтры на X, замкнутые относительно счетных пересечений, — это в точности фиксированные z-ультрафильтры $\mathcal{F}_x$, $x \in X$. Аналогично для Y. Поэтому α сохраняет фиксированные z-ультрафильтры, что позволяет определить биекцию $\varphi : X \to Y$, полагая $\varphi(x) = y \Leftrightarrow \alpha(\mathcal{F}_x) = \mathcal{F}_y$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Поскольку $Z(X)$ служит базой замкнутых множеств E-регулярного пространства X, то φ — гомеоморфизм. Обратное утверждение очевидно.

В работе [53] указаны общие алгебраические и функционально-топологические ограничения на топологическое тело E, позволяющие получить теорему 2.5, т. е. реализующие шаг 2 рассматриваемого метода.

2.6. Переходим к реализации шага 1. Результаты пп. 2.6—2.11 принадлежат Е. М. Вечтомову (см. [35], [37], [53]).

Введем следующие обозначения. Пусть $O(X)$ ($O_r(X)$) — частично упорядоченное по включению множество всех главных (главных правых) идеалов кольца $C(X, E)$, $SL(X)$

$(SL_r(X))$ — верхняя полурешетка всех конечно-порожденных (конечно-порожденных правых) идеалов в $C(X, E)$ и $L(X)$ $(L_r(X))$ — решетка всех идеалов (правых идеалов) в $C(X, E)$.

Можно доказать, что любое топологическое тело из нашего класса обладает следующими двумя свойствами:

I. Для любого пространства X и произвольных функций $f, g \in C(X, E)$ существуют такие функции $f', g' \in C(X, E)$, что $Z(ff'+gg') = Z(f) \cap Z(g)$.

II. Для любого пространства X и любых функций $f, g \in C(X, E)$ найдется такая функция $h \in C(X, E)$, что h делит f и g и $Z(h) = Z(f) \cap Z(g)$.

2.7. Лемма. Для любых $A = f \cdot C(X, E)$ и $B = g \cdot C(X, E)$ из $O_r(X)$

$$Z(f) \cap Z(g) = \varnothing \Leftrightarrow \sup(A, B) = C(X, E).$$

Доказательство. Если $Z(f) \cap Z(g) = \varnothing$, то по свойству I из 2.6 $Z(ff'+gg') = \varnothing$ для некоторых $f', g' \in C(X, E)$. Всякий главный правый идеал C кольца $C(X, E)$, содержащий A и B, содержит и обратимый элемент $ff'+gg'$, т. е. $C = C(X, E)$. Значит, $\sup(A, B) = C(X, E)$. Обратно, пусть $\sup(A, B) = C(X, E)$. Если $Z(f) \cap Z(g) \neq \varnothing$, то по свойству II п. 2.6 существует такая $h \in C(X, E)$, что $Z(h) = Z(f) \cap Z(g)$ и h делит f и g. Но тогда $A \cup B \subseteq h \cdot C(X, E) \neq C(X, E)$. Следовательно, $Z(f) \cap Z(g) = \varnothing$.

2.8. Теорема. Для любых топологических пространств X и Y изоморфизм $O_r(X)$ и $O_r(Y)$ влечет изоморфизм $Z(X)$ и $Z(Y)$.

Доказательство. Пусть дан изоморфизм $\alpha: O_r(X) \to O_r(Y)$. Если $A = fC(X, E)$, то положим $\Delta A = Z(f)$. Определим соответствие

$$Z(\alpha) = \{(\Delta A, \Delta(\alpha A)) \mid A \in O_r(X)\}$$

между решетками $Z(X)$ и $Z(Y)$. Покажем, что $Z(\alpha)$ является решеточным изоморфизмом. Сначала докажем взаимную однозначность $Z(\alpha)$. Для этого достаточно убедиться, что для любых A, $B \in O_r(X)$ $\Delta A \neq \Delta B$ влечет $\Delta(\alpha A) \neq \Delta(\alpha B)$. Тогда соображение симметрии с участием α^{-1} завершит доказательство биективности $Z(\alpha)$. Итак, пусть A, $B \in O_r(X)$ порождаются функциями f и g соответственно. Если, скажем, $p \in \Delta A \setminus \Delta B$, то, взяв $C = (g - g(p))C(X, E)$, получаем $\Delta A \cap \Delta C \neq \varnothing$ и $\Delta B \cap \Delta C = \varnothing$. По лемме 2.7 $\Delta(\alpha A) \cap \Delta(\alpha C) \neq \varnothing$ и $\Delta(\alpha B) \cap \Delta(\alpha C) = \varnothing$, т. е. $\Delta(\alpha A) \neq \Delta(\alpha B)$.

Остается доказать, что $Z(\alpha)$ сохраняет отношение включения (тогда в силу симметрии обратная биекция $Z(\alpha^{-1})$ также изотонна, т. е. $Z(\alpha)$ — решеточный изоморфизм). Пусть $A = fC(X, E)$ и $B = gC(X, E)$, причем $\Delta A \subseteq \Delta B$. Тогда $Z(fg) = Z(g)$. Положив $C = fg \cdot C(X, E)$, имеем $C \subseteq A$ и $\Delta B = \Delta C$. Поэтому $\alpha C \subseteq \alpha A$ и $\Delta(\alpha B) = \Delta(\alpha C)$. Следовательно, $\Delta(\alpha A) \subseteq \Delta(\alpha B)$.

Ясно, что лемма 2.7 и теорема 2.8 справедливы и для алгебраической системы $O(X)$.

2.9. Теорема. Для любых E-компактных пространств X и Y эквивалентны следующие условия:

1) $X \approx Y$;

2) кольца $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны;

3) кольца $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ Морита-эквивалентны;

4) мультипликативные полугруппы $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны;

5) предупорядоченные множества делимости $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ изоморфны;

6) $O(X) \cong O(Y)$ (эквивалентно, $O_r(X) \cong O_r(Y)$);

7) $SL(X) \cong SL(Y)$ $(SL_r(X) \cong SL_r(Y))$;

8) $L(X) \cong L(Y)$ $(L_r(X) \cong L_r(Y))$;

9) $Z(X) \cong Z(Y)$.

Доказательство. Ясно, что 1) влечет остальные условия теоремы. Очевидно, что 2)$\Rightarrow$4)$\Rightarrow$5)$\Rightarrow$6). Импликация 3)$\Rightarrow$8) является частью общей теоремы 3.5 [23]. Легко видеть, что изоморфизм 8) индуцирует изоморфизм 7). Теорема 2.8 дает 6)$\Rightarrow$9). Аналогично доказывается импликация 7)$\Rightarrow$9). Наконец, 9)$\Rightarrow$1) — это теорема 2.5.

2.10. Выделим некоторые следствия основной теоремы 2.9.

Следствия: 1. Для произвольных топологических пространств X и Y эквивалентны условия 2—9.

2. Для бесконечного топологического тела E и произвольных E-регулярных $\mathcal{G}_\delta$-пространств X и Y равносильны все условия теоремы 2.9.

3. Всякий изоморфизм произвольных мультипликативных полугрупп $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ отображает E-идеалы на E-идеалы.

Существенно может быть использована теорема 2.9 и при доказательстве определяемости E-регулярных пространств.

2.11. Теорема. Для произвольных E-регулярных пространств X и Y равносильны следующие утверждения:

1) $X \approx Y$;

2) топологические полугруппы $C_p(X, E)$ и $C_p(Y, E)$ топологически изоморфны;

3) топологические полугруппы $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ с компактно-открытыми топологиями топологически изоморфны;

4) существует изоморфизм между мультипликативными полугруппами E^X и E^Y, отображающий $C(X, E)$ на $C(Y, E)$;

5) $C(X, E)$-модуль E^X полулинейно изоморфен $C(Y, E)$-модулю E^Y;

6) $C(X, E)$-множество E^X и $C(Y, E)$-множество E^Y (над соответствующими моноидами) изоморфны.

2.12. Приведем один глубокий отрицательный результат по определяемости пространств, который интересно сопоставить с теоремой Банаха—Стоуна (см. теорему 1.14). Это известная теорема А. А. Милютина [89].

Теорема. Если $E=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ и X, Y — произвольные метризуемые компакты несчетной мощности, то банаховы пространства $C(X, E)$ и $C(Y, E)$ топологически изоморфны как топологические векторные пространства над полем E.

Теория А. А. Милютина изложена в книге Пелчинского [113] (см. также обзорную работу А. В. Архангельского [17]). В [168] доказано следующее усиление теоремы Банаха—Стоуна. Пусть $C_0(X)$ — банахово пространство всех непрерывных комплексно-значных функций, равных 0 на бесконечности и определенных на локально компактном хаусдорфовом пространстве X. Тогда: если существует такой изоморфизм $\alpha: C_0(X)\to C_0(Y)$, что $\|\alpha\|<2$, то $X\approx Y$. Отметим также книгу [160] и статьи [124], [167], [169] и [173].

2.13. Вопросы определяемости топологических пространств тесно связаны с различными теориями двойственности тополого-алгебраических систем. В первую очередь следует назвать классические двойственности: Л. С. Понтрягина для локально компактных абелевых групп [115]; Гельфанда—Наймарка для компактов и C^*-алгебр [107]; Стоуна для булевых пространств и булевых колец [296] и Хьюитта для хьюиттовских пространств и колец непрерывных функций [189]. Укажем и работы Пристли [275], [276], А. Назиева [106], Е. Н. Михайлова [90], Хофманна и Лоусона [207], В. В. Пашенкова [112], тезисы Е. М. Вечтомова [55], [56].

2.14. Перечислим другие работы, относящиеся к тематике данного параграфа: [93], [139], [199] и [201] об элементарной эквивалентности колец непрерывных функций и решеток нуль-множеств; [31], [174], [212], [266]—[268], [292] и [293] о решетках непрерывных функций; [273] и [299] о кольцах $C(X, \mathbf{Z})$; [214] и [283] об изоморфизме между идеалами колец $C(X)$; [184] и [196] об изоморфизме максимальных колец частных колец $C(X)$; [78], [125], [271], [303] и [304] о полукольцах полунепрерывных функций; [191] об изоморфизме алгебр ростков непрерывных функций; [209] о пространствах векторно-значных непрерывных функций; [165] об изоморфизмах между решетками нуль-множеств; [274] об алгебрах дифференцируемых функций. Отметим также работы [16], [114], [182], [203], [208], [248] и [280]. В связи с заметкой В. Г. Пестова [114] поставим вопрос о существовании инъективного функтора из категории тихоновских пространств в категорию топологических абелевых групп или в категорию групп (колец) без топологии.

§ 3. Решетки и полурешетки непрерывных характеристических функций

3.1. Пусть $D=\{0, 1\}$ — решетка относительно обычных операций умножения и $\vee$, рассматриваемая с дискретной топологией. Если $k=0$ или 1, то D_k — топологическая решетка D, но с топологией связного двоеточия и с изолированной точкой k. Тогда $C(X, D)$ — решетка характеристических функций всех открыто-замкнутых множеств топологического пространства X, а $C(X, D_1)$ $(C(X, D_0))$ — решетка характеристических функций всех открытых (замкнутых) множеств пространства X относительно операций поточечного умножения и объединения функций. Основное внимание будет уделено решетке $C(X, D_1)$, допускающей три топологизации поточечной сходимости. Именно, $C_p(X, D_1)$ — топологическая решетка, являющаяся подпространством тихоновской степени $D_1{}^X$; через $C_D(X, D_1)$ обозначим топологическую решетку, рассматриваемую как подпространство тихоновской степени D^X; наконец, $C_0(X, D_1)$ — топологическая подрешетка топологической решетки $D_0{}^X$. Определим также (нижнюю) полурешетку $C'(X, D_1)$ всех непрерывных частичных D_1-значных функций, области определения которых являются подпространствами в топологическом пространстве X, с операцией умножения частичных функций на общей области определения (пересечении областей определения) функций. Тогда $C'(X, D_1) = \bigcup\limits_{Y \subseteq X} C(Y, D_1)$.

3.2. В дополнение к теории Стоуна отметим, что любое нульмерное хаусдорфово пространство X определяется топологической решеткой (мультипликативной полугруппой или $\vee$-полугруппой) $C_p(X, D)$ (см., например, теорему 2.11). Воллмэн [310] показал, что любое T_1-пространство X определяется решеткой $C(X, D_0)$ (см. также книгу [24]). Трон в работе [305] доказал определяемость T_D-пространств X решетками $C(X, D_1)$ (см. также [269], [270], [306]). Пространство X называется T_D-пространством, если нарост $\bar{x} \setminus \{x\}$ любой его точки является замкнутым множеством, где $\bar{x}$ — замыкание $\{x\}$ в X. Очевидно, что класс T_D-пространств строго содержится между классами T_1-пространств и T_0-пространств, а в классе конечных пространств T_D-пространства совпадают с T_0-пространствами. В [305] Трон доказал, что для каждого пространства X, не являющегося T_D-пространством, существует негомеоморфное ему T_0-пространство Y такое, что $C(X, D_1) \cong C(Y, D_1)$. Там же доказано, что если X — T_0-пространство, Y — хаусдорфово пространство и $C(X, D_1) \cong C(Y, D_1)$, то $X \approx Y$.

Результаты следующих четырех работ вытекают из теоремы Трона об определяемости T_D-пространств. В [271] доказана определяемость компактных T_1-пространств полукольцами неотрицательных полунепрерывных снизу функций на них, а Торнтон [304] указал, что в предыдущей статье компактность не нужна и можно ограничиться идемпотентными полугруппами соответствующих полуколец. В [303] установлена определяемость конечных T_0-пространств X полукольцами $C(X, \mathbf{Z}_0)$, где $\mathbf{Z}_0$ — топологическое полукольцо неотрицательных целых чисел с топологией, открытыми множествами которой служат отрезки $[0, k]$, $k \in \mathbf{Z}_0$. В [247] передоказана определяемость T_1-пространств X решетками и полугруппами $C(X, D_0)$.

Дрейк и Трон [183] показали, что произвольные T_0-пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда между решетками $C(X, D_0)$ и $C(Y, D_0)$ существует изоморфизм, отображающий замыкания точек этих пространств друг на друга. Отсюда получается, в частности, определяемость pc-пространств X решетками $C(X, D_0)$. Пространство X называется pc-пространством, если каждое неприводимое замкнутое множество в X является замыканием некоторой единственной точки из X. Определяемость pc-пространств доказана в работах [269], [270], [306]. Подчеркнем, что решетки $C(X, D_0)$ замкнутых множеств топологических пространств рассматривали уже Стоун [294], Воллмэн [310] и Нагата [265]. Стоун показал, что для произвольного топологического пространства X существует канонически определенное T_0-пространство Y такое, что решетки $C(X, D_0)$ и $C(Y, D_0)$ изоморфны. Воллмэн изучал компактификации пространств X, являющиеся пространствами простых идеалов решеток $C(X, D_0)$. С содержанием указанных работ Воллмэна и Нагаты тесно связаны статьи Л. И. Калмуцкого [78] и М. М. Чобана и Л. И. Калмуцкого [125], в которых обобщается теорема Нагаты об определяемости тихоновских пространств решетками полунепрерывных функций.

Каждое топологическое пространство X определяется как булевой алгеброй всех подмножеств в X с операцией замыкания (см. [309] и [116]), так и мультипликативной полугруппой (полурешеткой) $C'(X, D_1)$ (см. [48], [49]). Более того [56], можно показать, что контравариантный функтор $C'(\cdot, D_1)$ устанавливает эквивалентность между категорией TOP (с частичными непрерывными функциями в качестве морфизмов) и категорией определенных полурешеток с определенными гомоморфизмами, сохраняющими 1 (не обязательно сохраняющими 1). Вопросы определяемости пространств X решетками $C(X, D_0)$ рассматриваются и в главе IX книги [24]. В теореме 13 главы V этой же книги Биркгофа устанавливается взаимно однозначное соответствие между конечными T_0-пространствами и конечными частично упорядоченными множествами (на одних и тех же множествах), что дает определяемость конечных T_0-пространств соответствующими частично упорядоченными множествами; легко видеть, что непрерывные отображения при этом соответствии совпадают с изотонными — получаем эквивалентность между категорией всех конечных T_0-пространств с непрерывными отображениями и категорией всех конечных частично упорядоченных множеств с изотонными отображениями в качестве морфизмов. Близкие вопросы рассматриваются в [188] и [207]. Определяемость пространств X элементарными свойствами $C(X, D_0)$ исследовалась в [93], [139],

[199] и [201]. Так, в [199] показано, что даже нульмерные компакты со второй аксиомой счетности не обязаны определяться элементарными свойствами решеток всех своих замкнутых множеств.

Изложим результаты [48], [56] об определяемости T_0-пространств X топологическими решетками $C(X, D_1)$.

3.3. Лемма. Для любых топологического пространства X и собственного подмножества P в $C(X, D_1)$ эквивалентны следующие условия:

1) $P = M_x = \{f \in C(X, D_1) \mid f(x) = 0\}$ для некоторой точки $x \in X$, причем, если X—T_0-пространство, то точка x определяется однозначно;

2) P — открыто-замкнутый простой идеал топологической решетки $C_D(X, D_1)$;

3) P — открытый простой главный идеал топологической полугруппы (нижней полурешетки) $C_0(X, D_1)$;

4) P — открытый простой главный идеал топологической полугруппы $C_D(X, D_1)$.

Доказательство леммы можно провести по схеме: импликации 1)$\Rightarrow$2) и 1)$\Rightarrow$3)$\Rightarrow$4) очевидны, а 2)$\Rightarrow$4) и 4)$\Rightarrow$1) доказываются непосредственно.

3.4. Теорема. Для того чтобы произвольные T_0-пространства X и Y были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы топологические полугруппы $C_D(X, D_1)$ и $C_D(Y, D_1)$ (эквивалентно, $C_0(X, D_1)$ и $C_0(Y, D_1)$) были топологически изоморфны.

Действительно, если $\alpha : C_D(Y, D_1) \to C_D(X, D_1)$ — топологический изоморфизм топологических полугрупп для T_0-пространств X и Y, то, полагая $\varphi(x) = y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(M_x) = M_y$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$, по лемме 3.3 получаем биекцию $\varphi : X \to Y$, которая, очевидно, сохраняет замкнутые множества.

В качестве следствия приведенной теоремы можно получить теорему Трона [305], уже рассмотренную нами: каждое T_D-пространство X определяется своей решеткой $C(X, D_0)$.

Укажем пример, показывающий, что компактное T_0-пространство X не обязано определяться топологической решеткой $C_p(X, D_1)$.

3.5. Пример. Пусть $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел с топологией, замкнутыми множествами которой являются лишь $\mathbf{N}$, $\varnothing$ и $[1, k]$, $k \in \mathbf{N}$. Обозначим через $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \cup \{*\}$ одноточечную компактификацию Александрова пространства $\mathbf{N}$. В результате получаем негомеоморфные компактные T_0-пространства $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}^*$. Вложение $\mathbf{N}$ в $\mathbf{N}^*$ индуцирует топологический изоморфизм топологических решеток $C_p(\mathbf{N}, D_1)$ и $C_p(\mathbf{N}^*, D_1)$.

Теорема 3.4 показывает, что топологическая полугруппа (и решетка) D_1 является C_D-определяющей и C_0-определяющей. Но в силу примера 3.5 она не является C_p-определяющей. При некоторых соглашениях о гомоморфизмах решеток можно доказать, что решетка D_1 является даже строго C_D- и C_0-определяющей. Будем предполагать, что решеточные гомоморфизмы сохраняют 0 и 1 по определению.

3.6. Теорема. Контравариантный функтор $C_D(\cdot, D_1)$ $(C_0(\cdot, D_1))$ устанавливает эквивалентность между категорией всех T_0-пространств и их непрерывных отображений и категорией топологических решеток $C_D(X, D_1)$ $(C_0(X, D_1))$ с непрерывными sup-сохраняющими гомоморфизмами в качестве морфизмов.

Доказательство. Пусть $\varphi: X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Тогда отображение $\bar{\varphi}$: $: C(Y, D_1) \to C(X, D_1)$, определенное формулой $\bar{\varphi}(f) = f \circ \varphi$, $f \in C(Y, D_1)$, является sup-сохраняющим решеточным гомоморфизмом. Поскольку для $x \in X$

$$(\bar{\varphi})^{-1}(M_x) = M_{\varphi(x)},$$

то гомоморфизм непрерывен в обеих топологиях. Обратно, пусть α — соответствующий непрерывный гомоморфизм решетки $C(Y, D_1)$ в решетку $C(X, D_1)$. Как и в п. 3.4, определяется отображение $\varphi: X \to Y$. Так как для любой $f \in C(Y, D_1)$

$$\varphi^{-1}(f^{-1}(0)) = \alpha(f)^{-1}(0),$$

то φ непрерывно. Легко видеть, что $\alpha = \bar{\varphi}$. Остальное очевидно.

Теорема 3.4 впервые появилась в [48], а теорема 3.6 — в [56].

3.7. Здесь мы коснемся вопросов определяемости обобщенных топологических пространств. В [185] рассматриваются условия, при которых изоморфизм между системами замкнутых множеств пространств с замыканием индуцируется гомеоморфизмом этих пространств.

Пару $X_\tau = \langle X, \tau \rangle$ назовем обобщенным топологическим пространством или просто пространством, если τ — произвольная система подмножеств непустого множества X. Множества из τ будем называть выделенными. Обычным образом определяется непрерывность отображений и гомеоморфизм. Сохраним обозначения п. 3.1 и для обобщенных пространств.

Предложения. а) Пусть $X = X_\tau$ и $Y = Y_\sigma$ — произвольные пространства, системы τ и σ выделенных множеств которых замкнуты относительно конечных пересечений, содержат $\varnothing$ и в объединениях дают сами пространства. Тогда пространства X и Y гомеоморфны в том и только том случае, когда полугруппы $C'(X, D_1)$ и $C'(Y, D_1)$ изоморфны.

б) Произвольные пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм полугруппы D^X на полугруппу D^Y, отображающий $C(X, D_1)$ на $C(Y, D_1)$.

в) Пусть пространство X_τ таково, что $\varnothing \in \tau$, $\bigcup \tau = X$ и τ разделяет точки X. И пусть пространство Y обладает аналогичными свойствами. Тогда $X \approx Y \Leftrightarrow C(X, D_1)$-множество D^X изоморфно $C(Y, D_1)$-множеству D^Y.

г) Пространства X_τ и Y_σ, для которых $\varnothing$, $X \in \tau$ и $\varnothing$, $Y \in \sigma$, гомеоморфны или антигомеоморфны тогда и только тогда, когда $S(X)$-множество $C(X, D_1)$ изоморфно $S(Y)$-множеству $C(Y, D_1)$.

Доказательства предложений а) — г) аналогичны доказательствам [49].

§ 4. Полугруппы непрерывных преобразований топологических пространств

4.1. Полугруппа преобразований математической системы — важный алгебраический объект, «много говорящий» о самой системе. Если X — топологическое пространство, то $S(X)$ — полугруппа всех непрерывных преобразований (отображений пространства X в себя) пространства X относительно композиции преобразований. Для дискретного (или антидискретного) пространства X полугруппа $S(X)$ состоит из всевозможных преобразований множества X; в статьях Шрейера [286] и А. И. Мальцева [88] показано, что все автоморфизмы таких полугрупп $S(X)$ являются внутренними, т. е. порождаются биекциями X. Из доказательства А. И. Мальцева этого результата в [88] видно, что и любой изоморфизм $\alpha: S(X) \to S(Y)$ для дискретных пространств X и Y индуцируется некоторой однозначно определенной биекцией φ между X и Y, т. е.

$$\alpha(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \quad \text{для всякого } f \in S(X).$$

Полугруппы частичных преобразований множеств рассматривались В. В. Вагнером (см. [28], [29]) еще в 1952 г.

С конца 50-х годов в работах [62], [63] Л. М. Глускин начал изучать вопросы определяемости топологических пространств полугруппами некоторых их гомеоморфизмов в себя. В 60-е и 70-е годы вопросами определяемости продолжают заниматься Л. М. Глускин [64]—[66] и его последователи Л. Б. Шнеперман [130]—[135], А. А. Мальцев [86], [87], Б. М. Шайн [126], [285], И. Ш. Ярокер [148], [149], А. З. Хамишон [119]—[121], Б. С. Нуртдинов [108]. С 1964 г. очень активно этими вопросами занимается Магилл (см. [216] и [218]—[241]). В 70-е и 80-е годы активно работают в этом направлении бакинские математики: Л. Г. Мустафаев [94]—[105], Р. Б. Фейзуллаев [104], [105], [118], В. Ш. Юсуфов [141]—[147], Э. А. Бабаев [21], [22], [103], А. М. Гасанов [59], [187], Ф. Х. Мурадов [91], [92].

В 1976 г. появился подробный обзор Магилла [235] по полугруппам $S(X)$, в котором нашли свое естественное место и вопросы определяемости топологических пространств (см. § 2 главы 1). А в 1977 г. вышло дополнение к этому обзору, написанное советскими алгебраистами Л. М. Глускиным, Б. М. Шайном, Л. Б. Шнеперманом и И. Ш. Ярокером [190]. После своей обзорной статьи Магилл в серии работ [236]—[240] продолжил исследование полугрупп непрерывных преобразований и определяемости ими топологических пространств. Отметим также работы С. Д. Орлова [109] и автора настоящего обзора [48]—[52], [55] и [56].

4.2. Поскольку в обзоре Магилла и его дополнении [190] достаточно полно изложены результаты предыдущих 20 лет по определяемости пространств полугруппами непрерывных преобразований, мы рассмотрим лишь наиболее принципиальные результаты до 1977 г. и работы последних лет. Далее будут последовательно изложены основные результаты по определяемости топологических пространств X:

подполугруппами гомеоморфизмов полугрупп $S(X)$;

полугруппами $S(X)$;

полугруппами замкнутых и открытых преобразований X;

полугруппами многозначных преобразований пространств X;

полугрудами непрерывных отображений пространств;

полугруппами непрерывных частичных преобразований пространств X.

4.3. Пусть $\mathrm{St}(X)$ — полугруппа всех гомеоморфизмов топологического пространства X в себя. Предположим, что X — компактное подпространство конечномерного евклидова пространства, имеющее непустую внутренность X^0. В полугруппе $\mathrm{St}(X)$ определяются две подполугруппы: $\mathrm{St}_1(X)=\{f\in\mathrm{St}(X)\mid f(X)\subseteq X^0\}$ и $\mathrm{St}_0(X)=\{f\in\mathrm{St}(X)\mid f(X)\subseteq B^0$ и $B\subseteq X^0$, где B гомеоморфно замкнутому шару конечномерного евклидова пространства$\}$.

Теорема ([66]). Пространство X определяется полугруппой $\mathrm{St}_0(X)$. Описаны все изоморфизмы таких полугрупп — с точностью до автоморфизмов они индуцируются гомеоморфизмами.

В качестве следствий получается определяемость каждого такого пространства X как полугруппой $\mathrm{St}(X)$, так и полугруппой $\mathrm{St}_1(X)$.

Пусть $K(K_1)$ — класс всех нульмерных компактных подмножеств числовой прямой, обладающих (не обладающих) плотными множествами изолированных точек. И. Ш. Ярокер [148] доказал, что каждое $X\in K(K_1)$ определяется полугруппой $\mathrm{St}(X)$ $(\mathrm{St}_1(X))$.

4.4. Статьи [302], [308], [312]—[314] посвящены вопросам определяемости топологических пространств группами всех их автогомеоморфизмов. Пусть $\Gamma(X)$ — группа всех гомеоморфизмов топологического пространства X на себя. Приведем несколько результатов из [313].

Теорема. Если X и Y — компактные локально евклидовы многообразия, то любой изоморфизм $\Gamma(X)\cong\Gamma(Y)$ индуцируется некоторым гомеоморфизмом пространств X и Y.

Однако $\Gamma([0, 1])\cong\Gamma(\mathbf{R})\cong\Gamma(\beta\mathbf{R})$. Кроме того, если X — не-компактное тихоновское пространство, нульмерное или содержащее дугу, то $\Gamma(X)\cong\Gamma(\beta X)$, но $S(X)\not\cong S(\beta X)$. В [302] указаны условия, при которых топологическое пространство X определяется топологической группой $\Gamma_p(X)$ в топологии поточечной сходимости ($\Gamma_p(X)$ рассматривается как подпространство тихоновской степени X^X).

4.5. T_1-пространство X называется регулярно отделимым [87], если прообразы точек отображений из $S(X)$ образуют предбазу замкнутых множеств пространства X.

Теорема ([87], [221]). Каждое регулярно отделимое пространство X определяется своей полугруппой $S(X)$.

Несколько расширяя определение Магилла [216], хаусдорфово пространство X назовем S-пространством, если семейство множеств $\{x\in X\,|\,f(x)=x\}$, $f\in S(X)$, образует предбазу замкнутых множеств в X.

4.6. Теорема ([216]). Любое S-пространство X определяется полугруппой $S(X)$.

Магилл в [221] показал, что к регулярно отделимым пространствам относятся нульмерные хаусдорфовы пространства и тихоновские пространства, содержащие дугу (линейно связное подпространство). Он же установил [216], что все локально евклидовы пространства и нульмерные хаусдорфовы пространства являются и S-пространствами. В [311] несколько обобщена теорема 4.6. Б. С. Нурутдинов [108] выделил механизмы доказательства подобных теорем, что позволяет получить определяемость пространств различными полугруппами их преобразований.

4.7. Теорема ([109]). Каждое недискретное топологическое пространство X, содержащее точку, каждая окрестность которой открыта в X, абсолютно определяется $S(X)$.

В этой же статье С. Д. Орлова доказаны и другие результаты о пространствах X, абсолютно определяемых полугруппами $S(X)$.

4.8. Топологическое пространство назовем D_1-пространством, если оно содержит подпространство, гомеоморфное связному двоеточию D_1.

Теорема ([49]). Каждое D_1-пространство X абсолютно, с точностью до антигомеоморфизма, определяется полугруппой $S(X)$.

В последние 10—15 лет Магилл изучает строение гомоморфизмов между полугруппами непрерывных преобразований различных топологических пространств, в основном так называемых локальных дендроидов (см. [237]—[240]). В частности, в работе [240] показано, что любой эпиморфизм $S(X)\to S(Y)$ для ряда пространств X и Y является изоморфизмом, индуцированным гомеоморфизмом этих пространств. Отметим еще статьи [204], [205], [282] и [285].

Одной из первых общих теорем определяемости пространств полугруппами преобразований является следующая теорема Гаврилова.

4.9. Теорема ([57]). Каждое T_1-пространство определяется полугруппой всех своих замкнутых преобразований.

Полугруппам замкнутых преобразований посвящена и статья [225].

4.10. Теорема ([147]). Каждое открытое подпространство произвольного тихоновского куба определяется полугруппой всех своих открытых преобразований.

Перечислим еще несколько работ по определяемости пространств полугруппами открытых преобразований: [21], [22], [143], [145].

4.11. В этом пункте мы затронем вопросы определяемости пространств полугруппами многозначных преобразований. Б. М. Шайн [285] доказал определяемость любого T_1-пространства полугруппой всех своих мультигомеоморфизмов. А. З. Хамишон [119] показал, что каждое T_1-пространство определяется каждой из следующих полугрупп своих полунепрерывных сверху многозначных преобразований: полугруппой всех конечнозначных преобразований; полугруппой всех замкнутых преобразований; полугруппой всех замкнутых конечнозначных преобразований; всякой полугруппой многозначных преобразований, содержащей все замкнутые конечнозначные преобразования. В другой работе [120] он же доказывает определяемость T_1-пространств некоторыми полугруппами своих многозначных непрерывных (т. е. полунепрерывных сверху и снизу) замкнутых преобразований и приводит пример, показывающий, что для однозначных преобразований эти результаты не верны. О'Рейли [272] доказал, что любое хаусдорфово пространство определяется полугруппой всех своих многозначных преобразований (отношений) с замкнутыми графиками и компактными образами. Определяемость пространств полугруппами отношений рассматривалась и Магиллом в [226], [227].

4.12. Определяемость топологических пространств полугрудами непрерывных отображений изучалась в работах Л. Г. Мустафаева (см. [94]—[97], [101]), Л. Г. Мустафаева и Р. Б. Фейзуллаева [104] и [105], Л. Г. Мустафаева и Э. А. Бабаева [103], В. Ш. Юсуфова [144]. Дадим определение полугруды $S(X, Y)$ непрерывных отображений топологических пространств X, Y. Именно, это множество $S(X, Y)=\{(f, g) \mid f: X \to Y,\ g: Y \to X$ — непрерывные$\}$ с тернарной операцией $[(f_1, g_1), (f_2, g_2), (f_3, g_3)]=(f_3 \circ g_2 \circ f_1, g_1 \circ f_2 \circ g_3)$. Исследуется определяемость пар пространств:

$$S(X, Y) \cong S(X', Y') \Rightarrow X \approx X' \text{ и } Y \approx Y'.$$

Получаются обобщения соответствующих результатов для $S(X)$. Сюда примыкает и работа А. М. Гасанова [59].

4.13. Первые результаты по определяемости топологических пространств полугруппами непрерывных частичных преобразований получены Ауллом и Троном [154], Магиллом [230] и Б. М. Шайном [285]. В последние годы эти вопросы исследовались Л. Г. Мустафаевым [99]—[102] и Е. М. Вечтомовым [49]—[51] (см. также [156], [157], [187]). Следующий результат для T_1-пространств сначала доказал Л. Г. Мустафаев в [102].

Теорема ([49]). Пусть X и Y — произвольные топологические пространства. Биекция α между полугруппами $S'(X)$ и $S'(Y)$ всех непрерывных частичных преобразований пространств X и Y соответственно является изоморфизмом тогда и только тогда, когда α индуцируется биекцией φ пространств X и Y, т. е. $\alpha(f)=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$ для всех $f\in S'(X)$, которая есть гомеоморфизм X на Y, или антигомеоморфизм X на Y (φ и φ^{-1} отображают открытые множества на замкнутые и наоборот), или произвольная биекция между дискретным (антидискретным) пространством X и антидискретным (дискретным) пространством Y.

Доказательство. Достаточность очевидна. Пусть $\alpha: S'(X)\to S'(Y)$ — полугрупповой изоморфизм. Для $x\in X$ обозначим через f_x постоянное отображение, переводящее X в точку x. Преобразования f_x легко определяются в терминах полугруппы $S'(X): f_x$, $x\in X$, — это в точности левые нули подполугруппы $S(X)$, а $S(X)$ — это множество всех неделителей нуля $\varnothing$ в $S'(X)$. Отсюда следует, что соответствие φ между X и Y, заданное формулой $\varphi(x)=y\Leftrightarrow\alpha(f_x)=f_y$ для $x\in X$ и $y\in Y$, является биекцией. Непосредственно доказывается равенство $\alpha(f)\circ\varphi=\varphi\circ f$ для каждого $f\in S'(X)$, что означает индуцируемость α биекцией φ. Возможны 3 случая: X тривиально (дискретно или антидискретно) — здесь все ясно; X—D_1-пространство — этот случай мы разбирать не будем (сравните с теоремой 4.8); X не тривиально и не является D_1-пространством — рассмотрим этот вариант. Пространство Y таково же в силу первых двух случаев. Поэтому остается восстановить указанное пространство X по полугруппе $S'(X)$. Положим $X'=\{f_x|x\in X\}$. Множество $\{f_a|a\in A\}$ будем считать замкнутым в X', если выполняется следующее условие: для любых $f_b\notin\{f_a|a\in A\}$, $f_x\neq f_y$ из $S'(X)$ существует $f\in S'(X)$ такое, что $f\circ\{f_a|a\in A\}=\{f_x\}$, $f\circ f_b=f_y$ и $f\circ f_c=\varnothing$ для других f_c. Тогда $X'\approx X$. В этом случае φ — гомеоморфизм.

4.14. Отметим два результата об определяемости обобщенных пространств (см. п. 3.7) полугруппами непрерывных преобразований — их аналоги для топологических пространств рассмотрены в [49].

Предложение. Произвольные обобщенные пространства X и Y, системы выделенных подмножеств которых замкнуты относительно произвольных объединений, гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны полутопологические полугруппы $S_p(X)$ и $S_p(Y)$ в топологии поточечной сходимости.

4.15. Предложение. Пусть X и Y — произвольные обобщенные пространства, системы выделенных подмножеств которых замкнуты относительно конечных пересечений, содержат $\varnothing$ и сами пространства X и Y соответственно. Тогда гомеоморфность пространств X и Y эквивалентна изоморфности полугрупп $\Pi(X)$ и $\Pi(Y)$, где $\Pi(X)$ — полугруппа всех непрерывных частичных преобразований X с выделенными областями определения.

§ 5. О C_p-теории

5.1. C_p-теория возникла и развивается в работах А. В. Архангельского (см. [12]—[16], [20], [152], [153]) и его учеников. Задачи теории четко сформулированы А. В. Архангельским в [15], [18]. Он дает следующую широкую формулировку общей задачи.

«Пусть $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ одинаковы в том или ином смысле как топологические пространства, как линейные топологические пространства или как алгебраические кольца. Какие свойства пространств X и Y будут общими?»

Частью этой задачи являются вопросы определяемости тихоновского пространства X или отдельных его свойств тополого-алгебраической системой $C_p(X)$ всех непрерывных вещественных функций на X в топологии поточечной сходимости и с некоторой алгебраической структурой.

5.2. Пространства X и Y называются t-эквивалентными, если топологические пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ гомеоморфны. Пространства X и Y называются l-эквивалентными, если $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ топологически изоморфны как линейные топологические пространства. По аналогии с уже отмеченной теоремой Милютина (п. 2.12) эти структуры оказываются бедными для получения полноценных теорем определяемости. Так, $[0, 1]$ и $\mathbf{R}$ t-эквивалентны [70]. В [15] приведен красивый пример Е. Г. Пыткеева двух l-эквивалентных пространств, одно из которых локально компактно, метризуемо и со счетной базой, а другое не обладает ни одним из перечисленных свойств. В [20] рассмотрена общая конструкция О. Г. Окунева построения l-эквивалентных пространств, показывающая, что существуют l-эквивалентные пространства, одно из которых наследственно нормально, а другое даже не нормально.

5.3. Напомним, что теорема Нагаты (см. [265], [15], [18]) утверждает определяемость любого тихоновского пространства X топологическим кольцом $C_p(X)$. Широтой была доказана определяемость тихоновских пространств X как топологическими мультипликативными полугруппами $C_p(X)$, так и топологическими решетками $C_p(X)$ [291] (см. также [33] и [53]).

5.4. Подробные обзоры по C_p-теории содержатся в работах [14]—[16], [152] и [153]. Развитие теории подытожено в монографии А. В. Архангельского [18] 1989 года.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абель М.* Об алгебре ограниченных непрерывных функций со значениями в коммутативной банаховой алгебре с единицей // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1971.— Вып. 277.— С. 52—77 (РЖМат, 1972, 5Б816)
2. — Некоторые свойства алгебр функций со значениями в банаховой алгебре // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1972.— Вып. 305.— С. 145—155 (РЖМат, 1973, 11Б692)
3. — Описание линейных мультипликативных функционалов в алгебрах непрерывных функций // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1977.— № 430.— С. 14—21 (РЖМат, 1978, 8Б719)
4. — Описание замкнутых идеалов в алгебрах непрерывных векторнозначных функций // Мат. заметки.— 1981.— *30*, № 5.— С. 775—785 (РЖМат, 1982, 2Б928)
5. — Описание идеалов одной топологической алгебры непрерывных функций // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1982.— № 596.— С. 105—119 (РЖМат, 1982, 5Б850)
6. —Об одной топологической алгебре матриц, сохраняющих сходимость // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1984.— № 661.— С. 3—14 (РЖМат, 1984, 6Б918)
7. — Фиксированные идеалы в топологических модуль-алгебрах // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат.— 1985.— *34*, № 3.— С. 237—247 (РЖМат, 1986, 1Б1067)
8. — Топологические модуль-алгебры без единицы // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат.— 1985.— *34*, № 4.— С. 345—359 (РЖМат, 1986, 7Б1454)
9. —, *Херингсон Э.* Некоторые свойства алгебры $C_0(X, A)$ // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1975.— Вып. 374.— С. 79—89 (РЖМат, 1976, 7Б821)
10. *Арнаутов В. И., Водинчар М. И., Михалев А. В.* Введение в теорию топологических колец и модулей.— Кишинев: Штиинца, 1981.— 175 с. (РЖМат, 1981, 11А303К)
11. —, —, *Главацкий С. Т., Михалев А. В.* Конструкции топологических колец и модулей.— Кишинев: Штиинца, 1988.— 170 с. (РЖМат, 1988, 6А258К)
12. *Архангельский А. В.* О некоторых топологических пространствах, встречающихся в функциональном анализе // Успехи мат. наук.— 1976.— *31*, № 5.— С. 17—32 (РЖМат, 1977, 4А503)
13. — О линейных гомеоморфизмах пространств функций // Докл. АН СССР.— 1982.— *264*, № 6.— С. 1289—1292 (РЖМат, 1982, 10А426)
14. — Пространства функций в топологии поточечной сходимости и компакты // Успехи мат. наук.— 1984.— *39*, № 5.— С. 11—50 (РЖМат, 1985, 2А539)
15. — Пространства функций в топологии поточечной сходимости. Часть I // Общ. топол.: пространства функций и размерность.— М.: МГУ, 1985.— С. 3—66 (РЖМат, 1986, 4А713)
16. — Алгебраические объекты, порожденные топологической структурой // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1987. — *25*.— С. 141—198 (РЖМат, 1988, 1А596)
17. — Компактность // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл.— 1989.— *50*.— С. 5—128 (РЖМат, 1989, 10А503)
18. — Топологические пространства функций.— М.: МГУ, 1989.— 222 с. (РЖМат, 1989, 11А477К)

19. —, *Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1974.— 423 с. (РЖМат, 1975, 3А557К)
20. —, *Ткачук В. В.* Пространства функций и топологические инварианты.— М.: МГУ, 1985.— 87 с.
21. *Бабаев Э. А.* Об определяемости топологических пространств полугруппами открытых преобразований / Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1987.— 14 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.01.87, № 363—В87 (РЖМат, 1987, 5А546 ДЕП)
22. — О полугруппах открытых преобразований // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1988.— *9*, № 1.— С. 10—13 (РЖМат, 1989, 6А145)
23. *Басс Х.* Алгебраическая *K*-теория.— М.: Мир, 1973.— 591 с. (РЖМат, 1974, 5А439К)
24. *Биркгоф Г.* Теория решеток.— М.: Наука, 1984.— 568 с. (РЖМат, 1984, 11А208К)
25. *Бурбаки Н.* Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними пространства.— М.: Наука, 1969.— 392 с.
26. — Элементы математики. Коммутативная алгебра.— М.: Мир, 1971.— 707 с. (РЖМат, 1973, 9А376К)
27. — Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.— М.: Наука, 1975.— 408 с.
28. *Вагнер В. В.* К теории частичных преобразований // Докл. АН СССР.— 1952.— *84*, № 4.— С. 653—656
29. — Обобщенные группы // Докл. АН СССР.— 1952.— *84*, № 6.— С. 1119—1122
30. *Вечтомов Е. М.* О кольцах непрерывных функций // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1977.— № 3.— С. 127
31. — Решетки непрерывных функций / Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина.— М., 1977.— 29 с.— Деп. в ВИНИТИ 19.08.77, № 3352—77 ДЕП (РЖМат, 1977, 12А545 ДЕП)
32. — Чистые идеалы колец непрерывных функций // Современная алгебра. — Л., 1978.— С. 29—37 (РЖМат, 1978, 11А342)
33. — Изоморфизм мультипликативных полугрупп колец непрерывных функций // Сиб. мат. ж.— 1978.— *19*, № 4.— С. 759—771 (РЖМат, 1978, 12Б1068)
34. — Изоморфизм мультипликативных полугрупп алгебр непрерывных функций с бикомпактными носителями // Успехи мат. наук.— 1978.— *33*, № 5.— С. 175—176 (РЖМат, 1979, 4А332)
35. — Еще о кольцах непрерывных функций // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1979. — № 4.— С. 96
36. — О модуле всех функций над кольцом непрерывных функций // Мат. заметки.— 1980.— *28*, № 4.— С. 481—490 (РЖМат, 1981, 2А279)
37. — О характеризации *E*-компактных пространств в терминах колец непрерывных функций на них // Мат. конф. мол. ученых Вильнюс. ун-та. Мат., физ.— Вильнюс: Вильнюс. ун-т, 1980.— С. 59—61
38. — О проективных и инъективных идеалах колец непрерывных функций // Абелевы группы и модули.— Томск, 1980.— С. 19—30 (РЖМат, 1980, 11А255)
39. — Об идеалах колец непрерывных функций // Изв. вузов. Мат.— 1981. — № 1.— С. 3—10
40. — О модуле функций с бикомпактными носителями над кольцом непрерывных функций // Успехи мат. наук.— 1982.— *37*, № 4.— С. 151—152 (РЖМат, 1983, 2Б835)
41. — Дистрибутивные кольца непрерывных функций и *F*-пространства // Мат. заметки.— 1983.— *34*, № 3.— С. 321—332 (РЖМат, 1984, 1Б938)
42. — К теории колец непрерывных функций. I / Тобол. гос. пед. ин-т.— Тобольск, 1985.— 8 с.— Деп. в ВИНИТИ 5.07.85, № 4868—85 Деп (РЖМат, 1985, 11Б1120 ДЕП)
43. — К теории колец непрерывных функций. II / Тобол. гос. пед. ин-т.—

Тобольск, 1985.— 27 с.— Деп. в ВИНИТИ 29.10.85, № 7551—В85 (РЖМат, 1986, 6Б1168 ДЕП)
44. — Универсально разложимые идеалы в кольцах непрерывных функций // V Тираспольский симп. по общей топол. и ее прил.— Кишинев: Штиинца, 1985.— С. 54—56
45. — Некоторые вопросы теории колец непрерывных функций // Теоретические и прикладные вопросы математики. I.— Тарту, 1985.— С. 40—42
46. — О булевых кольцах // Мат. заметки.— 1986.— *39*, № 2.— С. 182—185 (РЖМат, 1986, 6А413)
47. — О кольцах непрерывных функций со значениями в локально бикомпактных полях // Абел. группы и модули.— Томск, 1986.— № 4.— С. 20—35 (РЖМат, 1986, 10А239)
48. — T_0-пространства и топологические полугруппы непрерывных характеристических функций // Тез. докл. Междунар. топол. конф. Ч. 2.— Баку: Ин-т мат. и мех. АН АзССР, 1987.— С. 71
49. — Определяемость топологических пространств полугруппами непрерывных частичных функций / Кир. гос. пед. ин-т.— Киров, 1988.— 19 с.— Деп. в ВИНИТИ 14.01.88, № 256—В88 (РЖМат, 1988, 5А549 ДЕП)
50. — О полугруппах непрерывных частичных функций // Тез. сообщ. III Всес. симп. по теории полугрупп.— Свердловск, 1988.— С. 15
51. — Определяемость топологических пространств различными алгебрами непрерывных функций // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1988.— № 3.— С. 104
52. — Определяемость T_0-пространств топологическими полугруппами характеристических функций // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1988.— № 4.— С. 103
53. — Определяемость *E*-компактных пространств частично упорядоченными множествами идеалов колец непрерывных функций // Абел. группы и модули.— Томск, 1988.— № 7.— С. 20—30 (РЖМат, 1988, 8А292)
54. — О кольцах непрерывных функций со значениями в топологических телах // Мат. исслед. (Кишинев).— 1988.— № 105.— С. 45—52 (РЖМат, 1988, 12А268)
55. — К теории полугрупп непрерывных преобразований // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1989.— № 2.— С. 102
56. — Об алгебраических объектах, ассоциированных с топологическими пространствами // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре. Алгебраическая геометрия.— Новосибирск, 1989.— С. 17
57. *Гаврилов М.* Въерху две полугрупи от преобразования на топологически пространства // Годишн. Софийск. ун-т. Мат. фак.— 1962—1963 (1964). — *57*.— С. 377—380 (РЖМат, 1965, 8А290)
58. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры.— М.: Мир, 1973.— 334 с. (РЖМат, 1974, 2Б847К)
59. *Гасанов А. М.* Тернарные полугруппы топологических отображений ограниченных открытых подмножеств конечномерного евклидова пространства // Спец. вопр. алгебры и топол.— Баку, 1980.— С. 28—45 (РЖМат, 1981, 3А170)
60. *Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н.* О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Докл. АН СССР.— 1939.— *22*, № 1.— С. 11—15
61. —, *Райков Д. А. Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца.— М.: Физматгиз, 1960.— 316 с. (РЖМат, 1963, 9Б419К)
62. *Глускин Л. М.* Полугруппы непрерывных деформаций // Мат. 3-го Всес. мат. съезда. Т. 2.— М., 1956.— С. 111—112 (РЖМат, 1957, 172)
63. — Полугруппы топологических отображений // Докл. АН СССР.— 1959. — *125*, № 4.— С. 699—702 (РЖМат, 1960, 8633)
64. — Автоморфизмы полугрупп топологических отображений // Изв. вузов. Мат.— 1960.— № 6.— С. 62—73 (РЖМат, 1961, 8А233)
65. — Полугруппы преобразований // Успехи мат. наук.— 1962.— *17*, № 4. — С. 233—240 (РЖМат, 1963, 6А202)
66. — О полугруппах гомеоморфизмов // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1977.— № 12.— С. 1059—1061 (РЖМат, 1978, 9А131)

67. *Головин В. Д.* Гомологии аналитических пучков и теоремы двойственности.— М.: Наука, 1986.— 191 с. (РЖМат, 1986, 5А747К)
68. *Грауэрт Г., Реммерт Р.* Аналитические локальные алгебры.— М.: Наука, 1988.— 303 с. (РЖМат, 1988, 11А459К)
69. *Гретцер Г.* Общая теория решеток.— М.: Мир, 1982.— 452 с. (РЖМат, 1982, 11А201К)
70. *Гулько С. П., Хмылева Т. Е.* Компактность не сохраняется отношением t-эквивалентности // Мат. заметки.— 1986.— *39*, № 6.— С. 895—903 (РЖМат, 1986, 10А573)
71. *Джекобсон Н.* Строение колец.— М.: Изд-во ин. лит., 1961.— 392 с. (РЖМат, 1961, 11А249К)
72. *Джонстон П. Т.* Теория топосов.— М.: Наука, 1986.— 438 с. (РЖМат, 1987, 4А347К)
73. *Зарелуа А. В.* Построение сильно бесконечномерных компактов с помощью колец непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1974.— *214*, № 2.— С. 264—267 (РЖМат, 1974, 5А553)
74. *Захаров В. К.* Функциональное представление равномерного пополнения максимального и счетно-полного модулей частных модуля непрерывных функций // Успехи мат. наук.— 1980.— *35*, № 4.— С. 187—188 (РЖМат, 1980, 12А282)
75. — Функциональная характеризация абсолюта, векторные решетки функций со свойством Бэра и квазинормальных функций и модули частных непрерывных функций // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1982.— *45*.— С. 68—104 (РЖМат, 1983, 6Б665)
76. — Расширения векторных решеток непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1986.— *288*, № 6.— С. 1297—1301 (РЖМат, 1987, 5Б60)
77. — Cr-оболочки кольца непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1987.— *294*, № 3.— С. 531—534
78. *Калмуцкий Л. И.* Полукольца функций и характеристика T_1-пространств // Докл. АН БССР.— 1986.— *30*, № 11.— С. 972—974 (РЖМат, 1987, 5А559)
79. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1984.— 752 с. (РЖМат, 1985, 8Б763К)
80. *Келли Дж. Л.* Общая топология.— М.: Наука, 1981.— 431 с. (РЖМат, 1982, 3А543К)
81. *Куратовский К.* Топология. Т. 1.— М.: Мир, 1966.— 594 с. (РЖМат, 1967, 5А362К)
82. — Топология. Т. 2.— М.: Мир, 1969.— 624 с. (РЖМат, 1970, 3А474К)
83. *Любецкий В. А.* Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // Успехи мат. наук.— 1989.— *44*, № 4.— С. 99—153
84. *Малыхин В. И., Пономарев В. И.* Общая топология (теоретико-множественное направление) // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1975.— *13*.— С. 149—229 (РЖМат, 1976, 6А466)
85. *Мальгранж Б.* Идеалы дифференцируемых функций.— М.: Мир, 1968.— 132 с.
86. *Мальцев А. А.* Об одном классе топологических пространств // Тез. сообщ. на Междунар. конгрессе математиков. Секция 8.— М., 1966.— С. 23
87. — Замечание об одной теореме М. Гаврилова // Тр. Ташкентск. политехн ин-та.— 1966.— Вып. 37.— С. 30—32 (РЖМат, 1967, 6А267)
88. *Мальцев А. И.* Симметрические группоиды // Мат. сб.— 1952.— *31*, № 1. — С. 136—151
89. *Милютин А. А.* Изоморфность пространств непрерывных функций над компактами континуальной мощности // Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. научн. сб.— 1966.— Вып. 2.— С. 150—156 (РЖМат, 1968, 10Б582)
90. *Михайлов Е. Н.* О двойственности в категориях топологических групп // Докл. АН СССР.— 1980.— *251*, № 5.— С. 1059—1062 (РЖМат, 1980, 9А246)
91. *Мурадов Ф. Х.* Суперассоциативные алгебры частичных непрерывных

функций // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1987.— *8*, № 6. — С. 3—7 (РЖМат, 1989, 3А172)
92. — Алгебры Менгера сильно замкнутых многоместных функций / Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1988.— 18 с.— Деп. в ВИНИТИ 16.12.88, № 8804—В88 (РЖМат, 1989, 4А237 ДЕП)
93. *Мурзин Ф. А.* Об элементарной эквивалентности колец непрерывных функций // Теория моделей и ее применения.— Алма-Ата, 1980.— С. 73—74 (РЖМат, 1981, 4А87)
94. *Мустафаев Л. Г.* Полугруды непрерывных отображений // Докл. АН СССР.— 1974.— *215*, № 3.— С. 543—546 (РЖМат, 1974, 8А203)
95. — Полугруды непрерывных отображений топологических пространств // Докл. АН СССР.— 1974.— *218*, № 4.— С. 757—760 (РЖМат, 1975, 3А549)
96. — Полугруды топологических отображений // Докл. АН СССР.— 1976. — *230*, № 6.— С. 1279—1281 (РЖМат, 1977, 2А199)
97. — Об одной полугруде непрерывных открытых отображений // Докл. АН СССР.— 1977.— *233*, № 1.— С. 31—34 (РЖМат, 1977, 7А183)
98. — Полугруппы линейных непрерывных операторов // Сообщ. АН ГрузССР.— 1979.— *95*, № 3.— С. 533—536 (РЖМат, 1980, 6Б1098)
99. — Полугруппы частичных преобразований топологических пространств // Тез. сообщ. XIX Всес. алгебр. конф. Ч. 2.— Львов, 1987.— С. 192—193
100. — Полугруппы непрерывных частичных преобразований топологических пространств // Тез. докл. Междунар. топол. конф. Ч. 2.— Баку, 1987.— С. 211
101. — Полугруды непрерывных частичных отображений // Тез. сообщ. 3-го Всес. симп. по теории полугрупп.— Свердловск, 1988.— С. 61
102. — Полугруппы непрерывных частичных преобразований топологических пространств // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1987.— *8*, № 6.— С. 8—11 (РЖМат, 1989, 4А164)
103. —, *Бабаев Э. А.* Топологические пространства и полугруды непрерывных отображений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1984.— *5*, № 1.— С. 3—5 (РЖМат, 1985, 1А239)
104. —, *Фейзуллаев Р. Б.* Полугруды многозначных отображений топологических пространств // Докл. АН СССР.— 1977.— *232*, № 4.— С. 777—779 (РЖМат, 1977, 6А377)
105. —, — Об одной полугруде локально топологических отображений // Докл. АН СССР.— 1978.— *241*, № 1.— С. 26—29 (РЖМат, 1978, 11А172)
106. *Назиев А.* О реализации дуальных категорий // Докл. АН СССР.— 1973. — *212*, № 4.— С. 825—827 (РЖМат, 1974, 2Б901)
107. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М.: Наука, 1968.— 664 с. (РЖМат, 1969, 4Б520К)
108. *Нурутдинов Б. С.* Топологии пространств, описываемые полугруппами отображений // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1973.— № 4.— С. 24—29 (РЖМат, 1974, 1А469)
109. *Орлов С. Д.* К теории топологических обобщенных групп // В сб. «Теория полугрупп и ее прил.» (Саратов).— 1974.— Вып. 3.— С. 80—85 (РЖМат, 1975, 11А249)
110. *Пашенков В. В.* О двойственностях // Докл. АН СССР.— 1975.— *222*, № 6.— С. 1295—1298 (РЖМат, 1975, 12А313)
111. — О структуре непрерывных функций на вполне регулярных пространствах // Мат. заметки.— 1976.— *19*, № 6.— С. 863—869 (РЖМат, 1976, 10А287)
112. — Однородные и неоднородные двойственности // Успехи мат. наук.— 1987.— *42*, № 5.— С. 79—99 (РЖМат, 1988, 3А326)
113. *Пелчинский А.* Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций.— М.: Мир, 1970.— 144 с. (РЖМат, 1971, 1Б687К)
114. *Пестов В. Г.* Существует инъективный функтор из категории тихонов-

ских пространств в категорию отделимых топологических групп // Тез. сообщ. XVIII Всес. алгебр. конф. Ч. 2.— Кишинев: Штиинца, 1985.— С. 91
115. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы.— М.: Наука, 1984.— 520 с. (РЖМат, 1984, 11А141К)
116. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики.— М.: Наука, 1972.— 592 с. (РЖМат, 1972, 7А36К)
117. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология: Основные конструкции.— М.: МГУ, 1988.— 252 с. (РЖМат, 1989, 4А442К)
118. *Фейзуллаев Р. Б.* Об одной алгебре линейных непрерывных отображений // Докл. АН СССР.— 1980.— *253*, № 5.— С. 1059—1062 (РЖМат, 1981, 1Б1068)
119. *Хамишон А. З.* Полугруппы многозначных преобразований, определяющие топологические пространства // Укр. мат. ж.— 1972.— *24*, № 6.— С. 800—806 (РЖМат, 1973, 4А613)
120. — О полугруппах многозначных непрерывных преобразований, определяющих топологические пространства // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.— 1973.— № 5.— С. 10—16 (РЖМат, 1974, 2Б923)
121. — Непрерывные полугруппы многозначных преобразований // Укр. мат. ж.— 1974.— *26*, № 6.— С. 775—783 (РЖМат, 1975, 5А159)
122. *Хелемский А. Я.* Гомология в банаховых и топологических алгебрах.— М.: МГУ, 1986.— 288 с. (РЖМат, 1986, 9А362К)
123. — Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии.— М.: Наука, 1989.— 464 с.
124. *Хмылева Т. Е.* Об изоморфности пространств непрерывных ограниченных функций // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР.— 1981.— *113*.— С. 243—246 (РЖМат, 1982, 1Б998)
125. *Чобан М. М., Калмуцкий Л. И.* К одной теореме Нагаты о решетках полунепрерывных функций // Сиб. мат. ж.— 1989.— *30*, № 2.— С. 185—191 (РЖМат, 1989, 7А416)
126. *Шайн Б. М.* Дифференцируемое многообразие характеризуется псевдогруппой своих локальных диффеоморфизмов // Мат. II Прибалт. геом. конф.— Тарту, 1965.— С. 179—182
127. *Шакенко Н. И.* О топологических кольцах непрерывных действительных функций // Успехи мат. наук.— 1982.— *37*, № 5.— С. 207—208 (РЖМат, 1983, 3А269)
128. *Шанин Н. А.* О погружениях в степень топологического пространства // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1944.— *8*, № 5.— С. 233—242
129. *Шилов Г. Е.* Идеалы и подкольца кольца непрерывных функций // Докл. АН СССР.— 1939.— *22*, № 1.— С. 7—10
130. *Шнеперман Л. Б.* Полугруппы непрерывных преобразований // Докл. АН СССР.— 1962.— *144*, № 3.— С. 509—511 (РЖМат, 1963, 1А222)
131. — Полугруппы непрерывных преобразований и гомеоморфизмов простой дуги // Докл. АН СССР.— 1962.— *146*, № 6.— С. 1301—1304 (РЖМат, 1963, 5А229)
132. — Полугруппы непрерывных преобразований метрических пространств // Мат. сб.— 1963.— *61*, № 3.— С. 306—318 (РЖМат, 1963, 12А221)
133. — Полугруппы непрерывных преобразований замкнутых множеств числовой прямой // Изв. вузов. Мат.— 1965.— № 6.— С. 166—175 (РЖМат, 1966, 7А247)
134. — Полугруппы непрерывных преобразований топологических пространств // Сиб. мат. ж.— 1965.— *6*, № 1.— С. 221—229 (РЖМат, 1965, 7А199)
135. — О полугруппе непрерывных функций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.— 1976.— № 6.— С. 93—94 (РЖМат, 1977, 8А517)
136. *Шостак А. П.* О E-компактных пространствах // Докл. АН СССР.— 1972.— *205*, № 6.— С. 1310—1312 (РЖМат, 1973, 1А434)
137. — E-компактные расширения топологических пространств // Функц. анализ и его прил.— 1974.— *8*, № 1.— С. 62—68 (РЖМат, 1974, 6А587)
138. — Q-расширения топологических пространств и кольца непрерывных

функций // Докл. АН СССР.— 1976.— *226*, № 6.— С. 1291—1294 (РЖМат, 1976, 7А607)
139. *Штейнбук В. Б.* Элементарные свойства полугрупп непрерывных преобразований // Изв. вузов. Мат.— 1987.— № 5.— С. 74—79 (РЖМат, 1987, 10А91)
140. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 751 с. (РЖМат, 1986, 9А506К)
141. *Юсуфов В. Ш.* Полугруппы гомеоморфных преобразований / Ин-т мат. и мех. АН АзССР.— Баку, 1976.— 32 с.— Деп. в ВИНИТИ 14.12.76, № 4341—76 Деп (РЖМат, 1977, 4А522 ДЕП)
142. — О полугруппах топологических отображений // Докл. АН АзССР.— 1976.— *32*, № 11.— С. 6—7 (РЖМат, 1977, 9А214)
143. — Полугруппы открытых непрерывных отображений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1976.— № 5.— С. 3—8 (РЖМат, 1977, 10А326)
144. — О полугруде непрерывных отображений топологических пространств // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1977.— № 1.— С. 24—29 (РЖМат, 1978, 2А143)
145. — Полугруппы открытых непрерывных и гомеоморфных отображений n-мерных евклидовых пространств // Спец. вопр. алгебры и топол.— Баку, 1980.— С. 105—121 (РЖМат, 1981, 3А171)
146. — Полугруппы гомеоморфизмов на прямой // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1980.— № 5.— С. 21—23 (РЖМат, 1981, 8А181)
147. — Открытые отображения // Успехи мат. наук.— 1986.— *41*, № 6.— С. 185—186 (РЖМат, 1987, 9А616)
148. *Ярокер И. Ш.* О полугруппах гомеоморфных преобразований ограниченных замкнутых множеств размерности 0 // Изв. вузов. Мат.— 1971.— № 10.— С. 89—96 (РЖМат, 1972, 1А782)
149. — Автоморфизмы полугрупп гомеоморфизмов // Тр. Харьк. с.-х. ин-та.— Харьков, 1971.— *148*.— С. 93—97 (РЖМат, 1972, 7А156)
150. *Anderson F. W.* A lattice characterization of completely regular G_δ-spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1955.— *6*, № 5.— С. 757—765 (РЖМат, 1957, 2133)
151. *Antonovskij M. Y., Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V., Hewitt E.* Rings of real-valued continuous functions. II // Math. Z.— 1981.— *176*, № 2.— С. 151—186 (РЖМат, 1981, 8Б869)
152. *Arhangel'skii A. V.* On relationships between topological properties of X and C_p (X) // Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra. 5.— Berlin, 1983.— С. 24—36 (РЖМат, 1983, 10А482)
153. — A survey on C_p-theory // Questions and answers in general topology. — 1987.— *5*, № 1.— С. 1—109
154. *Aull C. E., Thron W. J.* Separation axioms between T_0 and T_1 // Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.— 1962.— *A65*, № 1.— С. 26—37; Indag. math. — 1962.— *24*, № 1.— С. 26—37 (РЖМат, 1966, 1А448)
155. *Bachman G., Beckenstein E., Narici L., Warner S.* Rings of continuous functions with valued in topological field // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— *204*, № 4.— С. 91—112 (РЖМат, 1975, 12Б813)
156. *Baird B. B.* Isomorphisms between inverse semigroups of injective transformations // J. Austral. Math. Soc.— 1977.— *23*, № 2.— С. 194—201 (РЖМат, 1978, 5А144)
157. — Epimorphisms of inverse semigroups of homeomorphisms between closed subsets // Semigr. Forum.— 1977.— *14*, № 2.— С. 161—166 (РЖМат, 1978, 6А205)
158. *Banach S.* Théorie des opérations lenéaires.— Warszawa, 1932
159. *Beckenstein E., Narici L., Suffel C.* Topological algebras.— Amsterdam: N.-Holl., 1977.— 370 с.
160. *Behrends E.* M-structure and the Banach—Stone theorem // Lect. Notes Math.— 1979.— *736*, X.— 217 с. (РЖМат, 1980, 6Б770К)
161. *Binz E.* Continuous convergence on $C(X)$ // Lect. Notes Math.— 1975.— *469*, IX.— 140 с. (РЖМат, 1975, 12Б768К)

162. *Blefko R. L.* Structures of continuous functions. VII // Proc. Koninkl. nederl. acad. wet.— 1968.— *A71*, № 4.— C. 438—441; Indag. math.— 1968.— *30*, № 4.— C. 438—441 (РЖМат, 1969, 7Б63)
163. *Brookshear J. G.* Projective ideals in rings of continuous functions // Pacif. J. Math.— 1977.— *71*, № 2.— C. 313—333 (РЖМат, 1978, 4Б553)
164. — On projective prime ideals in $C(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1978. — *69*, № 1.— C. 203—204 (РЖМат, 1979, 1А455)
165. *Broverman S.* Homomorphisms between lattices of zero-sets // Can. Math. Bull.— 1978.— *21*, № 1.— C. 1—5 (РЖМат, 1978, 11Б722)
166. *Brucker P.* Verbändl stetiger Funktionen und kettenwertige Homomorphismen // Math. Ann.— 1970.— *187*, № 1.— C. 77—84 (РЖМат, 1971, 1А386)
167. *Cambern M.* A generalized Banach-Stone theorem // Proc. Amer. Math. Soc.— 1966.— *17*, № 2.— C. 396—400 (РЖМат, 1968, 2Б589)
168. — On isomorphisms with small bound // Proc. Amer. Math. Soc.— 1967. — *18*, № 6.— C. 1062—1066 (РЖМат, 1968, 10Б583)
169. — Near isometries of spaces of weak* continuous functions with an application to Bochner spaces // Stud. math. (PRL).— 1987.— *85*, № 2.— C. 149—156 (РЖМат, 1987, 12Б791)
170. *Čech E.* On bicompact spaces // Ann. Math.— 1937.— *38*.— C. 823—844
171. *Chew Kim-Peu.* Structure of continuous functions. IX. Homomorphisms of some function rings // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1971.— *19*, № 6.— C. 485—489 (РЖМат, 1972, 1Б98)
172. —, *Mrówka S.* Structures of continuous functions. XI. Some type of homomorphisms of general structures of continuous functions // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1971.— *19*, № 11.— C. 1023—1026 (РЖМат, 1972, 4А570)
173. *Cohen H. B.* A bound-two isomorphisms between $C(X)$ Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— *50*.— C. 215—217 (РЖМат, 1976, 4Б699)
174. *Cohen M., Rubin M.* Lattices of continuous monotonic functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1982.— *86*, № 4.— C. 685—691 (РЖМат, 1983, 6А511)
175. *Császár A.* Semigroups of continuous functions // Acta sci. math.— 1983. — *45*, № 1—4.— C. 131—140 (РЖМат, 1984, 3А229)
176. — $C(X)$ determines νX // Lect. Notes Math.— 1984.— № 1060.— C. 211—216 (РЖМат, 1985, 4А545)
177. — u-isomorphic semigroups of continuous functions // Acta math. hung.— 1986.— *48*, № 1—2.— C. 213—222 (РЖМат, 1987, 5А556)
178. — u-isomorphic semigroups of continuous functions in locally compact spaces // Acta math. hung.— 1988.— *51*, № 3—4.— C. 337—340 (РЖМат, 1989, 3Б1072)
179. *De Marco G.* Projectivity of pure ideals // Rend. Semin. math. Univ. Padova.— 1983.— *69*.— C. 289—304 (РЖМат, 1984, 1А387)
180. —, *Richter M.* Rings of continuous functions with values in a non-archimedean ordered field // Rend. Semin. math. Univ. Padova.— 1971.— *45*.— C. 327—336 (РЖМат, 1972, 3А317)
181. *Doctor H. P.* The categories of Boolean lattices, Boolean rings and Boolean spaces // Can. Math. Bull.— 1964.— *7*, № 2.— C. 245—252 (РЖМат, 1965, 4А240)
182. *Domiaty R. Z.* Eine elementare Charakterisierung von Homomorphismen // Period. math. hung.— 1975.— *6*, № 4.— C. 353—355 (РЖМат, 1976, 12А606)
183. *Drake D., Thron W. J.* On the representations of an abstract lattice as the family of closed sets of a topological space // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— *120*, № 1.— C. 57—71 (РЖМат, 1967, 6А256)
184. *Engelking R., Mrówka S.* On E-compact spaces // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1958.— *6*, № 7.— C. 429—436 (РЖМат, 1959, 10917)
185. *Erné M.* Lattice representations for categories of closure spaces // Cate-

gor. Top. Proc. Conf., Toledo, Ohio, Aug. 1—5, 1983.— Berlin, 1984. — C. 197—222 (РЖМат, 1985, 12А554)
186. *Fine N., Gillman L., Lambec J.* Rings of quotients of rings of functions. — Montreal, 1965
187. *Gasanov A. M., Mustafaev L. G.* Semigroups of homeomorphic partial transformations on topological spaces // Int. Topol. Conf. Abstracts. Part II.— Баку, 1987.— C. 81
188. *Gierz G., Hofmann K. H., Keimel K., Lawson J. D., Mislove M., Scott D. S.* A compendium of continuous lattices. Berlin: Springer, 1980.— 371 c. (РЖМат, 1981, 7А286К)
189. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions.— Princeton: Van Nostrand, 1960.— 300 c. (РЖМат, 1963, 4Б366)
190. *Gluskin L. M., Schein B. M., Šneperman L. B., Yaroker I. S.* Addendum to «A survey of semigroups of continuous selfmaps» // Semigr. Forum.— 1977.— *14*, № 2.— C. 95—123 (РЖМат, 1978, 5А152)
191. *Goodearl K. R.* Local isomorphisms of algebras of continuous functions // J. London Math. Soc.— 1977.— *16*, № 2.— C. 348—356 (РЖМат, 1979, 3Б677)
192. *Govaerts W.* Structures of continuous functions representation of homomorphisms // Simon Stevin.— 1974—1975.— *48*, № 3—4.— C. 121—132 (РЖМат, 1976, 1А350)
193. — Representation and determination problems: a case study // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 1.— C. 57—59 (РЖМат, 1976, 9А437)
194. — A modified notion of *E*-compactness // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 1.— C. 61—64 (РЖМат, 1976, 11А550)
195. — A separation axiom for the study of function space structures // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 1.— C. 65—69 (РЖМат, 1976, 9А436)
196. — General spaces of continuous functions // Bull. Soc. math. Belg.— 1977.— *29*, № 1.— C. 45—55 (РЖМат, 1978, 10Б749)
197. — *E*-compactness and continuous function spaces // Acta math. Acad. sci. hung.— 1978.— *32*, № 3—4.— C. 235—242 (РЖМат, 1979, 7А529)
198. *Hager A. W.* On the maximal ring of quotients $C(X)$ // Bull. Amer. Math. Soc.— 1966.— *72*, № 5.— C. 850—852 (РЖМат, 1967, 6А265)
199. *Heindorf L.* Continuous functions on countable ordinals // Z. math. Log. und Grundl. Math.— 1984.— *30*, № 4.— C. 339—340 (РЖМат, 1985, 5А91)
200. *Henriksen M.* On the equivalence of the ring, lattice, and semigroup of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1956.— *7*, № 6.— C. 959—960 (РЖМат, 1960, 5512)
201. *Henson C. W., Jockusch C. G. (Jr), Rubel L. A., Takeuti G.* First order topology // Rozpr. mat.— 1977.— *143*.— 44 c. (РЖМат, 1978, 1А449)
202. *Hewitt E.* Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math. Soc.— 1948.— *64*, № 1.— C. 45—99
203. *Hirschfeld R. A.* Function rings on Tyhonov spaces // Bull. Soc. math. Belg.— 1973.— *25*, № 4.— C. 334—338 (РЖМат, 1975, 4А541)
204. *Hofer R. D.* Restrictive semigroups of continuous functions on 0-dimensional spaces // Can. J. Math.— 1972.— *24*, № 4.— C. 598—611 (РЖМат, 1973, 1Б614)
205. — Restrictive semigroups of continuous self-maps on arcwise connected spaces // Proc. London Math. Soc.— 1972.— *25*, № 2.— C. 358—384 (РЖМат, 1973, 1А452)
206. *Hofmann K. H.* Representations of algebras by continuous sections // Bull. Amer. Math. Soc.— 1972.— *78*, № 3.— C. 291—373 (РЖМат, 1973, 1А244)
207. —, *Lawson J. D.* On the order-theoretical foundation of a theory of quasicompactly generated spaces without separation axiom // J. Austral. Math. Soc.— 1984.— *A36*, № 2.— C. 194—212 (РЖМат, 1984, 12А554)

208. —, *Wright F. B.* The automorphism group of certain function rings // Arch. Math.— 1961.— *12*, № 6.— С. 420—424 (РЖМат, 1963, 1А267)
209. *Kalton N. J.* Isomorphisms between spaces of vector-valued continuous functions // Proc. Edinburgh Math. Soc.— 1983.— *26*, № 1.— С. 29—48 (РЖМат, 1983, 9Б728)
210. *Kaplansky I.* Topological rings // Amer. J. Math.— 1947.— *69*, № 1.— С. 153—183
211. — Lattices of continuous functions // Bull. Amer. Math. Soc.— 1947.— *53*, № 6.— С. 617—623
212. — Lattices of continuous functions. II // Amer. J. Math.— 1948.— *70*, № 3.— С. 626—634
213. *Katětov M.* Measures in fully normal spaces // Fund. math.— 1951.— *38*, № 1.— С. 73—84
214. *Keesling J., Nanzetta P.* On certain ideals of $C(X)$ // Duke Math. J.— 1971.— *38*, № 2.— С. 259—263 (РЖМат, 1972, 1А787)
215. *Magill K. D. (Jr).* On rings of continuous functions // Dissert. Abstrs.— 1963.— *24*, № 3.— С. 1188 (РЖМат, 1966, 4Б388Д)
216. — Semigroups of continuous functions // Amer. Math. Month.— 1964.— *71*, № 9.— С. 984—988 (РЖМат, 1965, 11Б419)
217. — Some embedding theorems // Proc. Amer. Math. Soc.— 1965.— *16*, № 1.— С. 126—130 (РЖМат, 1965, 9Б394)
218. — Some homomorphism theorems for a class of semigroups // Proc. London Math. Soc.— 1965.— *15*, № 3.— С. 517—526 (РЖМат, 1966, 7А360)
219. — Semigroups of functions on topological spaces // Proc. London Math. Soc.— 1966.— *16*, № 3.— С. 507—518 (РЖМат, 1968, 2А401)
220. — Semigroup structures for families of functions. II. Continuous functions // J. Austral. Math. Soc.— 1967.— *7*, № 1.— С. 95—107 (РЖМат, 1967, 9А130)
221. — Another S-admissible class of spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1967. — *18*, № 2.— С. 295—298 (РЖМат, 1968, 5А452)
222. — Topological spaces determined by left ideals of semigroups // Pacif. J. Math.— 1968.— *24*, № 2.— С. 319—330 (РЖМат, 1969, 3А400)
223. — The lattice of compactifications of a locally compact space // Proc. London Math. Soc.— 1968.— *18*, № 2.— С. 231—244 (РЖМат, 1969, 4А407)
224. — Semigroups of functions generated by idempotents // J. London Math. Soc.— 1968.— *44*, № 2.— С. 236—242 (РЖМат, 1969, 6А157)
225. — Restrictive semigroups of closed functions // Can. J. Math.— 1968.— *20*, № 5.— С. 1215—1229 (РЖМат, 1969, 8А345)
226. — Isomorphisms of triform semigroups // J. Austral. Math. Soc.— 1969.— *10*, № 1—2.— С. 185—193 (РЖМат, 1970, 2А148)
227. — Zero-free fortifying homomorphisms and semigroups of relations // Bull. Austral. Math. Soc.— 1969.— *1*, № 2.— С. 213—230 (РЖМат, 1970, 7А172)
228. — Isotopisms of semigroups of functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970.— *148*, № 1.— С. 121—128 (РЖМат, 1971, 1А145)
229. — Structure spaces of semigroups of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970.— *149*, № 2.— С. 595—600 (РЖМат, 1971, 4Б780)
230. — The semigroup of endomorphisms of a Boolean ring // J. Austral. Math. Soc.— 1970.— *11*, № 4.— С. 411—416 (РЖМат, 1971, 5А336)
231. — On the restrictive semigroups of continuous functions // Fund. math.— 1971.— *71*, № 2.— С. 131—137 (РЖМат, 1972, 3А463)
232. — I-subsemigroups and α-monomorphisms // J. Austral. Math. Soc.— 1973.— *16*, № 2.— С. 146—166 (РЖМат, 1974, 5А203)
233. — Semigroups which admit few embeddings // Fund. math.— 1974.— *85*, № 2.— С. 147—163 (РЖМат, 1975, 6А613)
234. — A servey of embedding theorems for semigroups of continuous functions // Stud. Topol.— New York, 1975.— С. 339—353 (РЖМат, 1976, 8А642)

235. — A servey of semigroups of continuous self-maps // Semigr. Forum.— 1975—1976.— *11*, № 3.— С. 189—282 (РЖМат, 1976, 12A204)
236. — An abstract characterization of the semigroup of all continuous self-maps // Math. jap.— 1976.— *21*, Suppl. № 5.— С. 465—469 (РЖМат, 1978, 3A321)
237. — Homomorphisms from $S(X)$ into $S(Y)$ // Can. J. Math.— 1977.— *29*, № 3.— С. 615—625 (РЖМат, 1978, 1A462)
238. — An embedding theorem for semigroups of continuous self-maps // Semigr. Forum.— 1983.— *27*, № 1—4.— С. 223—236 (РЖМат, 1984, 3A230)
239. — Monomorphisms of semigroups of local dendrites // Can. J. Math.— 1986.— *38*, № 4.— С. 769—780 (РЖМат, 1987, 3A557)
240. —, *Misra P. R.*, *Tewari U. B.* Epimorphisms from $S(X)$ onto $S(Y)$ // Can. J. Math.— 1986.— *38*, № 3.— С. 538—551 (РЖМат, 1987, 1A552)
241. —, *Subbiah S.* Embedding $S(X)$ into $S(Y)$ // Rozpr. mat.— 1974.— № 120.— 47 с. (РЖМат, 1975, 8A472)
242. *Maharam D.* Category, Boolean algebras and measure // Lect. Notes Math. — 1977.— *609*.— С. 124—135 (РЖМат, 1978, 9Б675)
243. *Mallios A.* Topological algebras. Selected topics.— Amsterdam: N.-Holl., 1986.— 533 с. (РЖМат, 1987, 5Б943К)
244. *Mandelker M.* Prime z-ideal structure of $C(\mathbf{R})$ // Fund. math.— 1968.— *63*, № 2.— С. 145—166 (РЖМат, 1969, 10A289)
245. — Prime ideal structure of rings of bounded continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1968.— *19*, № 6.— С. 1432—1438 (РЖМат, 1971, 8A355)
246. — Supports of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— *156*, № 5.— С. 73—83 (РЖМат, 1972, 2A627)
247. *Marin F., Ch'en I.-C. T.* Characterization of a topological space X by the lattice $C(X, D)$ // Bull. math. Soc. sci. math. RSR.— 1980.— *24*, № 4.— С. 383—385 (РЖМат, 1981, 8A495)
248. *Mattson D. A.* A note on equimorphisms of proximity spaces // Math. scand.— 1968.— *22*, № 1.— С. 143—144 (РЖМат, 1969, 10A297)
249. *Milgram A. N.* Multiplicative semigroups of continuous functions // Duke Math. J.— 1949.— *16*, № 2.— С. 377—383
250. *Misra P. R.* On isomorphism theorems for $C(X)$ // Acta math. Acad. sci. hung.— 1982.— *39*, № 4.— С. 379—380 (РЖМат, 1983, 1A518)
251. *Moore R. C.* Some multiplicative problems in $C(X)$ // Dissert. Abstrs.— 1966.— *26*, № 8.— С. 4695 (РЖМат, 1967, 8A302Д)
252. *Mrówka S.* On universal spaces // Bull. Acad. pol. sci. Cl. III.— 1956.— *4*, № 8.— С. 479—481 (РЖМат, 1957, 6211)
253. — A property of Hewitt extension νX of topological spaces // Bull. Acad. pol. sci. Sér. math., astron. et phys.— 1958.— *6*, № 2.— С. 95—96, VII (РЖМат, 1960, 7354)
254. — On the form of pointwise continuous positive functionals and isomorphisms of function spaces // Stud. math.— 1961.— *21*, № 1.— С. 1—14 (РЖМат, 1962, 10Б319)
255. — Structures of continuous functions. III. Rings and lattices of integer-valued continuous functions // Indag. math.— 1965.— *27*, № 1.— С. 74—82 (РЖМат, 1966, 12Б408)
256. — On E-compact spaces. II // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1966.— *14*, № 11.— С. 597—605 (РЖМат, 1968, 5A442)
257. — Futher results on E-compact spaces. I // Acta math.— 1968.— *120*, № 3—4.— С. 161—185 (РЖМат, 1969, 1A454)
258. — Structures of continuous functions. I // Acta math. Acad. sci. hung.— 1970.— *21*, № 3—4.— С. 239—259 (РЖМат, 1971, 8A356)
259. — Structures of continuous functions. VIII. Homomorphisms of group of integer-valued continuous functions // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1972.— *20*, № 7.— С. 563—566 (РЖМат, 1973, 2A414)
260. — Structures of continuous functions. VI. Lattices of continuous functions

// Rocz. Pol. tow. mat. Ser. 1.— 1974.— *17*, № 2.— С. 411—420 (РЖМат, 1975, 1Б892)
261. —, *Shore S. D.* Structures of continuous functions. IV. Representation of real homomorphisms of lattices of continuous functions // Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.— 1965.— *A68*, № 1.— С. 83—91; Indag. math.— 1965. — *27*, № 1.— С. 83—91 (РЖМат, 1966, 12Б409)
262. —, — Structures of continuous functions. V. On homomorphisms of structures of continuous functions with 0-dimensional compact domains // Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.— 1965.— *A68*, № 1.— С. 92—94; Indag. math.— 1965.— *27*, № 1.— С. 92—94 (РЖМат, 1966, 12Б410)
263. *Mulvey Ch. J.* Representations of rings and modules // Lect. Notes Math. — 1979.— *753*.— С. 542—585 (РЖМат, 1980, 5А257)
264. *Nachbin L.* On the continuity of positive linear transformations // Proc. Int. Congress of Math., Cambridge, Mass. 1950, Vol. 1.— Providence, 1952.— С. 464—465
265. *Nagata Jun-iti.* On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces // Osaka Math. J.— 1949.— *1*, № 2.— С. 166—181
266. — On uniform topology of functional spaces // J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ.— 1954.— *A5*, № 2.— С. 87—95 (РЖМат, 1957, 1233)
267. — On uniform topology of functional spaces. II // J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ.— 1955.— *A6*, № 2.— С. 71—77 (РЖМат, 1959, 189)
268. *Namioka Isaac, Saeki Sadahiro.* On lattice isomorphisms of $C(X)^+$ // Tokyo J. Math.— 1978.— *1*, № 2.— С. 345—368 (РЖМат, 1979, 8Б895)
269. *Nel L. D.* Lattices of lower semi-continuous functions and associated topological spaces // Pacif. J. Math.— 1972.— *40*, № 3.— С. 667—673 (РЖМат, 1972, 12Б601)
270. —, *Wilson R. G.* Epireflections in the category of T_0-spaces // Fund. math. — 1972.— *75*, № 1.— С. 69—74 (РЖМат, 1973, 2А401)
271. *Nielsen R., Sloyer C.* Ideals of semicontinuous functions and compactifications of T_1-spaces // Math. Ann.— 1970.— *187*, № 4.— С. 329—331 (РЖМат, 1971, 2А424)
272. *O'Reilly S. B.* The characteristic semigroup of a topological space // Gen. Topol. and Appl.— 1975.— *5*, № 2.— С. 95—106 (РЖМат, 1976, 1А574)
273. *Pierce R. S.* Rings of integer-valued continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1961.— *100*, № 3.— С. 371—394 (РЖМат, 1962, 9Б340)
274. *Prasad P. K.* Algebras of differentiable functions and algebras of Lipschitz functions // Indian J. Pure and Appl. Math.— 1985.— *16*, № 4.— С. 376—382 (РЖМат, 1985, 10Б1252)
275. *Priestley H. A.* Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces // Bull. London Math. Soc.— 1970.— *2*, № 2.— С. 186—190 (РЖМат, 1971, 4А280)
276. — Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices // Proc. London Math. Soc.— 1972.— *24*, № 3.— С. 507—530 (РЖМат, 1972, 10А319)
277. *Pursell L. E.* An algebraic characterization of fixed ideals in certain function rings // Pacif. J. Math.— 1955.— *5*, Suppl. № 2.— С. 963—969 (РЖМат, 1958, 4548)
278. — The ring $C(X, \mathbf{R})$ considered of a subring of the ring of all real-valued functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1957.— *8*, № 4.— С. 820—821 (РЖМат, 1959, 3950)
279. — A note on isomorphisms of $C(X, \mathbf{R})$ and $C^*(X, \mathbf{R})$ // Bull. Calcutta Math. Soc.— 1957.— *49*, № 1.— С. 47—48 (РЖМат, 1959, 3951)
280. — Rings of continuous functions on open convex subset of $\mathbf{R}^n$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1968.— *19*, № 3.— С. 581—585 (РЖМат, 1971, 8Б616)
281. *Retting W.* Über den Ring der stetigen Funktionen eines nulldimensionaler Raumes in einen topologischen ring.— Hannover: Fac. Math. und Naturwiss. Univ.—Hannover, 1981.—V. — 70 с. (РЖМат, 1982, 10А427Д)
282. *Rosický J.* Remarks on topologies uniquely determined by their continuous

self-maps // Czechosl. Math. J.— 1974.— *24*, № 3.— С. 373—377 (РЖМат, 1975, 3А529)
283. *Rudd D.* On isomorphisms between ideals in rings of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— *159*.— С. 335—353 (РЖМат, 1972, 6А467)
284. — On structure spaces of ideals in rings of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974.— *190*.— С. 393—403 (РЖМат, 1975, 2Б655)
285. *Schein B. M.* Order sets, semilattices, distributive lattices and Boolean algebras with homomorphic endomorphism semigroups // Fund. math.— 1970.— *68*, № 1.— С. 31—50
286. *Schreier J.* Über Abbildungen einer abstrakten Menge auf ihre Teilmengen // Fund. math.— 1937.— *28*.— С. 261—264
287. *Scott D.* Continuous lattices // Lect. Notes Math.— 1972.— *274*.— С. 97—136 (РЖМат, 1973, 1А444)
288. *Semadeni Z.* Banach spaces of continuous functions. Vol. I // Monogr. mat.— 1971.— *55*.— 584 с. (РЖМат, 1972, 3Б498)
289. *Shanks M. E.* Rings of functions on locally compact spaces // Bull. Amer. Math. Soc.— 1951.— *57*, № 4.— С. 295
290. *Shirota Taira.* Class of topological spaces // Osaka Math. J.— 1952.— *4*, № 1.— С. 23—40
291. — A generalization of a theorem of I. Kaplansky // Osaka Math. J.— 1952.— *5*, № 2.— С. 121—132
292. *Shore S.* Homomorphisms of lattices of integer-valued continuous functions // Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.— 1965.— *A68*, № 3.— С. 532—538; Indag. math.— 1965.— *27*, № 3.— С. 532—538 (РЖМат, 1966, 12Б411)
293. — On lattices of chain-valued continuous functions // Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.— 1968.— *A71*, № 4.— С. 421—427; Indag. math.— 1968.— *30*, № 4.— С. 421—427 (РЖМат, 1969, 4Б549)
294. *Stone M.* Applications of Boolean algebras to topology // Мат. сб.— 1936.— *1*.— С. 765—772
295. — The theory of representations for Boolean algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1936.— *40*.— С. 37—111
296. — Applications of theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc.— 1937.— *41*.— С. 375—481
297. — A general theory of spectra. II // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1941.— *27*.— С. 83—87
298. *Subramanian H.* Integer-valued continuous functions // Bull. Soc. math. France.— 1969 (1970).— *97*, № 3.— С. 275—283 (РЖМат, 1970, 9А230)
299. — Integer-valued continuous functions. II // Can. Math. Bull.— 1971.— *14*, № 2.— С. 235—237 (РЖМат, 1972, 1А390)
300. *Suciu I.* Function algebras.— Bucureşti, Acad. RSR, 1975.— 272 с. (РЖМат, 1976, 2Б745К)
301. *Sullivan R. P.* Continuous nilpotents on topological spaces // J. Austral. Math. Soc.— 1987.— *A43*, № 1.— С. 127—136 (РЖМат, 1988, 2А158)
302. *Thomas E. S.(Jr).* Spaces determined by their homeomorphism groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1967.— *126*, № 2.— С. 244—250 (РЖМат, 1967, 12А438)
303. *Thornton M. C.* Semirings of functions determine finite T_0 topologies // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— *34*, № 1.— С. 307—310 (РЖМат, 1973, 1А451)
304. — Characterizing topologies by functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— *36*, № 2.— С. 613—614 (РЖМат, 1973, 7А490)
305. *Thron W. J.* Lattice-equivalence of topological spaces // Duke Math. J.— 1962.— *29*, № 4.— С. 671—679 (РЖМат, 1964, 8А264)
306. — Proximity structures and grills // Math. Ann.— 1963.— *206*.— С. 35—62
307. *Vanght R. L.* The continuous real-valued functions on a completely regular space // Bull. Amer. Math. Soc.— 1949.— *55*, № 7.— С. 716
308. *Vobach A. R.* On subgroups of the homeomorphism group of the Cantor

set // Fund. math.— 1967.— *60*, № 1.— С. 47—52 (РЖМат, 1968, 6А472)
309. *Wallace A. D.* Some characterization of interior transformations // Amer. J. Math.— 1939.— *41*.— С. 757—763
310. *Wallman H.* Lattices and topological spaces // Ann. Math.— 1938.— *39*, № 1.— С. 112—126
311. *Warndof J. C.* Topologies uniquely determined by their continuous self-maps / Fund. math.— 1969.— *66*, № 1.— С. 25—43 (РЖМат, 1970, 6А386)
312. *Wechsler M. T.* Homeomorphism groups of certain topological spaces // Ann. Math.— 1955.— *62*, № 3.— С. 360—373 (РЖМат, 1957, 2134)
313. *Whittaker J. V.* On isomorphic groups and homeomorphic spaces // Ann. Math.— 1963.— *78*, № 1.— С. 74—91 (РЖМат, 1964, 2А389)
314. *Wiginton C. L., Shrader S.* Spaces determined by a group functions // Bull. Amer. Math. Soc.— 1968.— *74*, № 6.— С. 1110—1112 (РЖМат, 1970, 8А366)

УДК 515.12

КОВАРИАНТНЫЕ ФУНКТОРЫ В КАТЕГОРИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

М. М. Заричный, В. В. Федорчук

Проникновение категорных методов в общую топологию началось вскоре после появления основных понятий теории категорий. Оказалось, что многие классические топологические конструкции, прежде всего, тихоновские произведения и гиперпространства имеют функториальный характер. К настоящему времени можно выделить два пути, по которым пошло применение теории категорий в топологии. Первый состоит в систематическом исследовании аксиоматически определяемых категорий, более общих, чем категория Top топологических пространств и непрерывных отображений (так называемых топологических категорий). С обзором работ на эту тему можно познакомиться по большой статье Херрлиха [232].

Второй путь связан с изучением свойств функторов, действующих в категории Top или ее различных подкатегориях. Важнейшей общей задачей при этом является задача о поведении различных свойств пространств и отображений при воздействии на них ковариантными функторами. Полученные результаты относятся не только к классическим функторам, но и к некоторым довольно общим классам функторов, прежде всего, к нормальным функторам в смысле Е. В. Щепина, действующим в категории компактов. В настоящее время именно нормальные функторы явились тем классом функторов, для которого удалось построить довольно содержательную общую теорию, найти разнообразные алгебраические и геометрические приложения.

В настоящем обзоре, написанном на материале статей, прорерированных в реферативном журнале «Математика» за 1953—1989 гг., отражены не только результаты о конкретных функторах (произведениях, гиперпространствах, суперрасширениях), но и о нормальных и близких к ним функторах.

§ 1. Произведения, симметрические произведения

1. Конструкция тихоновского произведения определяет два существенно различных типа функторов: степенной функтор $(—)^\alpha$, функтор умножения $(—)\times A$ на топологическое пространство A. Конечно, эти функторы можно рассматривать как эндофункторы в каждой подкатегории категории Top, замкнутой относительно произведений (при этом A берется из той же подкатегории). Важнейшими такими подкатегориями являются категории T_i-пространств Top_i, $i=0, 1, 2, 3$, а также категории Tych, Comp.

В выборе цитируемых ниже работ, посвященных произведениям, присутствует элемент случайности: охватить многочисленные работы по этой тематике не представляется возможным в рамках настоящего обзора.

Рассматривалось поведение при произведениях, в частности, при возведениях в степень, различных общетопологических свойств: нормальности [56], [157], [289], [336], [340], [341], псевдокомпактности [155], счетной компактности [56], [201], финальной компактности [56], [289], [340], [341], паракомпактности [289], [340], секвенциальности [373] и др. [22], [46], [69], [125], [128], [138], [156], [192], [225], [241], [374].

В ряде работ исследуется поведение при произведениях кардинальнозначных инвариантов [55], [56], [375], размерностных функций dim, ind, Ind и др. [3], [64], [108], [113], [335], [339].

Ван Милл [297] построил жесткое метризуемое пространство, квадрат которого топологически однороден. Континуум таких примеров привел Дийкстра [173]. В. В. Успенский [383] показал, что произвольное пространство X можно превратить в топологически однородное, умножив на подходящее пространство Y. О произведении топологически однородных пространств см. в [156].

Негомеоморфные счетные пространства с гомеоморфными квадратами построили Марьянович и Вучемилович [285]. В. Трнкова [380] показала, что если счетное метризуемое пространство X гомеоморфно X^n при $n>2$, то $X\cong X^2$. Ван Милл [297] привел пример пеановского континуума X, гомеоморфного X^2, но не гомеоморфного X^ω.

Хаджииванов [109] , [110] и Тодоров [376] рассматривали свойства типа связности в конечных и счетных произведениях континуумов. В [110] показано, что счетное произведение неодноточечных континуумов нельзя представить в виде объединения счетной последовательности замкнутых подмножеств, попарные пересечения которых слабо бесконечномерны.

Произведениям посвящены также работы [142], [194], [183], [329], [381].

2. С функторами произведения тесно связаны функторы

G-симметрической степени. Приведем их описание. Пусть G — подгруппа группы S_n подстановок множества $n=\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Группа G действует на n-й степени пространства X перестановками координат; пространство орбит этого действия обозначается $SP_G^n X$ и называется G-симметрической степенью пространства X.

Для каждой точки $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in X^n$ обозначим через $[x_0, \ldots, x_{n-1}]_G$ орбиту этой точки. Определяя для любого отображения $f: X \to Y$ отображение $SP_G^n f$, $SP_G^n f[x_0, \ldots, x_{n-1}]_G = [f(x_0), \ldots, f(x_{n-1})]_G$, получаем функтор G-симметрической степени SP_G^n, действующий в категории Top.

Некоторые общие свойства пространств $SP_G^n X$ установлены в [396]. В [332] доказано, что такие шэйповые свойства компактов как (равномерная) подвижность, пунктированная одинподвижность, свойство быть абсолютным шэйповым (окрестностным) ретрактом, сохраняются функторами G-симметрической степени.

Ряд работ посвящен гомологическим свойствам пространств $SP_G^n X$ [140], [176]—[178], [291], [322], [369], [370]. Так, Дольд доказал, что гомологии $H_i(SP_G^n X, \Lambda)$, $i \leqslant k$, G-симметрического произведения зависят только от гомологий $H_i(X, \Lambda)$, $i \leqslant k$, полиэдра X, если Λ — наследственная область [176].

В работах [286], [287], [342], [343], [393], [394] на отображения вида $X \to SP_G^n X$ перенесены некоторые понятия и результаты теории индекса неподвижных точек.

Работы [137], [179], [367] посвящены близкой конструкции бесконечного симметрического произведения.

§ 2. Гиперпространства

Конструкция гиперпространства восходит к Хаусдорфу, и к настоящему времени имеется обширная литература, посвященная гиперпространствам. Во многом это обусловлено важными приложениями, причем не только в топологии (теория многозначных отображений), но и в других областях математики. В частности, один из разделов книги [107] посвящен применениям гиперпространств в теории дифференциальных уравнений.

Настоящий обзор не претендует на полноту, однако, можно надеяться, что он в некоторой степени отразит все многообразие полученных к настоящему времени результатов.

Отметим, что специально гиперпространствам посвящена книга С. Б. Надлера [316].

1. Для каждого хаусдорфова пространства X через $\exp X$ обозначается множество всех непустых компактных подмножеств пространства X, наделенное топологией Вьеториса. Базу этой топологии образуют всевозможные множества вида $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle = \{A \in \exp X \mid A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k,\ A \cap U_i \neq \varnothing$ для всех $i \leqslant k\}$.

Определяя для непрерывного отображения хаусдорфовых пространств $f: X \to Y$ отображение $\exp f: \exp X - \exp Y$ формулой $\exp f(A) = fA$, $A \in \exp X$, получаем функтор гиперпространства (экспоненты) $\exp: \mathrm{Haus} \to \mathrm{Haus}$.

Через $\exp_n$ (соответственно, $\exp^c$) обозначаем такой подфунктор функтора exp, что элементами пространства $\exp_n X$ (соответственно, $\exp^c X$) являются все подмножества мощности $\leqslant n$ (соответственно, все непустые связные компакты) в X. Поскольку $\exp(\mathrm{Tych}) \subset \mathrm{Tych}$ и $\exp(\mathrm{Comp}) \subset \mathrm{Comp}$, то exp может также рассматриваться как эндофунктор в категориях Tych и Comp. Это же замечание относится и к функторам $\exp_n$ и $\exp^c$.

А. Г. Савченко рассматривал подфункторы $\exp_n^c$, $n \geqslant 1$, функтора exp, $\exp_n^c X = \{A \in \exp X \mid A$ имеет не более n компонент связности$\}$ [82], [83]. Функторы $\exp_n^c$ могут также рассматриваться как действующие в Tych или Comp.

Н. Л. Коваль [45] ввела подфунктор $\exp^P$ функтора exp, $\exp^P X = \{A \in \exp X \mid A$ — континуум Пеано$\}$. Конечно, этот функтор не сохраняет класс компактов.

Подфункторы Γ и Γ^c функтора $\exp^2$ ввели Эберхарт, Надлер и Новэлл [191]. Пространства ΓX (соответственно, $\Gamma^c X$) состоят из замкнутых порядковых дуг в $\exp X$ (соответственно, в $\exp^c X$). При этом замкнутое подмножество $\mathscr{A} \subset \exp X$ называется порядковой дугой, если оно линейно упорядочено отношением включения и связно.

М. Марьянович рассматривал счетные итерации функтора exp [58], [282]—[284].

2. Селекции. Многие результаты, относящиеся к гиперпространствам, находят применение в теории многозначных отображений. Наиболее важным в этой теории является вопрос о существовании селекций многозначных отображений. Напомним, что селекцией многозначного отображения $\Phi: X \to \exp Y$ называется отображение $f: X \to Y$ такое, что $f(x) \in \Phi(x)$ для каждого $x \in X$.

В работе Харатоника [144] найдены необходимые условия для существования селекций тождественного отображения из $\exp^c X$ в себя. Пример стягиваемого дендроида, для которого таких селекций не существует, дан в [273]. Близким вопросам посвящены работы [274], [398].

Кертис [163] доказывает теорему о селекции для полунепрерывных снизу многозначных отображений со слоями, являющимися выпуклыми в некотором обобщенном определяемом в работе смысле.

Новое доказательство классической теоремы Бляшке о селекции для компактных звездных подмножеств в $\mathbf{R}^n$ дается в [172].

О селекциях см. также [171].

3. Отображения и свойства Уитни. Непрерывное отображе-

ние ω пространства $\exp X$ (или $\exp^c X$) в отрезок $[0, \omega(X)]$ для метрического континуума X называется отображением Уитни, если удовлетворяются условия: (а) если $A \subset B$ и $A \neq B$, то $\omega(A) < \omega(B)$; (б) $\omega(\{x\}) = 0$ для каждого $x \in X$.

Экспонента любого пеановского континуума обладает открытым и монотонным отображением Уитни [237]; для произвольных континуумов это не так [148].

Топологическое свойство $\mathscr{P}$ называется свойством Уитни, если для любого метрического континуума X, обладающего свойством $\mathscr{P}$, всякий уровень Уитни $\omega^{-1}(t)$ произвольного отображения Уитни $\omega : \exp^c \to [0, 1]$ обладает свойством $\mathscr{P}$.

Свойствами Уитни являются: разложимость, гомеоморфность соленоиду [260], пунктированная 1-подвижность [245], (почти) 1-подвижность [250]. Для одномерных континуумов к этим свойствам прибавляются следующие свойства: быть абсолютным окрестностным ретрактом [271], фундаментальным абсолютным ретрактом [245], иметь тривиальный шэйп [271]. Для дендритов свойством Уитни является также стягиваемость [332]. Следующие свойства не являются свойствами Уитни: свойство неподвижной точки [260], стягиваемость, быть абсолютным (окрестностным) ретрактом, локальная связность [332], однородность [147].

Топологические свойства уровней отображений Уитни изучаются в [215], [216], [238], [272], [313], [347], [348].

Отображения Уитни специального вида строятся в [150], [247], [249].

Об отображениях Уитни см. также [146], [190], [244], [248], [349].

4. Исследуются вопросы о том, когда естественные вложения $X \hookrightarrow \exp^c X$, $X \hookrightarrow \exp X$, $\exp^c X \hookrightarrow \exp X$ являются коретракциями. Некоторые необходимые условия для того, чтобы $\exp^c X$ было ретрактом $\exp X$, приведены в [264]. В [211] дан пример континуума, для которого $\exp^c X$ не является ретрактом $\exp X$. Отметим, что $\exp^c X$ всегда является непрерывным образом $\exp X$ [312].

Гудикунц]207[построил не локально связный континуум X, являющийся ретрактом $\exp X$. Кроме того, для этого континуума пространство $\exp^c X$ является ретрактом $\exp X$.

Существует континуум X, являющийся ретрактом $\exp^c X$, но не $\exp X$ [239]. В [214] приведен пример дендрита X, для которого ни X, ни $\exp^c X$ не являются деформационными ретрактами $\exp X$.

Приведем также теорему Надлера [315] о существовании ретракций из $\exp X$ в $\exp^c X$, обладающих дополнительными свойствами.

Теорема ([315]. (1) Если X — локально связный континуум, то существует ретракция $r : \exp X \to \exp^c X$ такая, что $r(A) \supset A$ для любого $A \in \exp^c X$.

(2) Если существует ретракция $g : \exp X \to \exp^c X$ такая, что

$g(A)\supset A$ или $g(A)\subset A$ для любого $A\in\exp X$, то X локально связно.

5. Надлер показал в [314], что существует в точности 8 различных топологических типов континуумов, континуальные гиперпространства которых гомеоморфны конусам. По этому поводу см. также работу [363]. Надлер [317] описал континуумы X, для которых гиперпространство $\exp^c X$ разлагается в нетривиальное произведение.

Дуга является единственным континуумом, континуальное гиперпространство которого гомеоморфно надстройке [319].

В серии работ [276]—[280] Марьянович исследовал класс метризуемых компактов, гомеоморфных своему гиперпространству. В [281] исследованы связи между гиперпространством $\exp X$, гиперсимметрическим квадратом $\exp_2 X$ и квадратом X^2 метрического континуума. Доказано, в частности, что если $X\cong\exp X$, то $X\cong X^2$ для локально связных континуумов и нульмерных компактов X.

6. Роджерс [246] доказал, что для метризуемого континуума X $\dim(\exp^c X)=\infty$ при одном из условий: а) $\dim X\geqslant 3$; б) $X=A\times B$, где A и B — неодноточечные континуумы; в) $\dim X\geqslant 2$ и X — линейно связно. Пространство $\exp^c X$ бесконечномерно для всякого двумерного FANR-континуума [246]. Если X — наследственно неразложимый континуум, то $\exp^c X$ вкладывается в $\mathbf{R}^4$ и $\dim(\exp^c X)=2$ [259]. Пространство $\exp^c X$ двумерно для атриодического континуума X, одномерная группа когомологий Александрова—Чеха которого конечно порождена [222].

Пространство $\exp^c X$ вкладывается в $\mathbf{R}^3$ для любого змеевидного континуума X [231] и для любого наследственно неразложимого плоского континуума X ([383], см. также [379]).

В [312] приведены условия, обеспечивающие вложение пространства $\exp^c X$ в $\mathbf{R}^n$. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство $\exp^c X$ содержало клетку или гильбертов куб, даются в [240].

Для любого непустого подконтинуума X псевдоокружности пространство $\exp^c X$ является двумерным канторовым многообразием [344].

Через cd обозначается когомологическая размерность. В [262] доказано, что $cd(\exp^c X)\geqslant cd(\exp^c Y)$, если существует непрерывное монотонное отображение $f: X\to Y$ для континуумов X и Y.

В. Н. Басманов [4] доказал, что $\dim(\exp_n X)\leqslant n\dim X$ и получил аналогичные формулы для других размерностных функций.

При $n\geqslant 3$ пространства $\exp_n(I^2)$ и $\exp_2(I^n)$ не вкладываются в $\mathbf{R}^{2n}$ (Мольски [306]).

7. Харатоник [149] показал, что пространства $\exp X$ и $\exp^c X$ являются стягиваемыми для точечно-гладкого дендроида X.

Условия, влекущие стягиваемость $\exp^c X$, приведены также в [325], [326], [345].

В [263], [304] рассматривается вопрос о связности (связности дугами) пространства $\exp X$, $\exp^c X$. В [236] доказано, что пространства $\exp_n X$ являются уникогерентными для любого связного локально линейно связного X.

В [212], [213] исследуется свойство сохранения функторами exp и $\exp^c$ свойства дуго-гладкости. В частности, в [212] доказано, что если континуум X является дуго-гладким в точке p, то пространства $\exp X$ и $\exp^c X$ являются дуго-гладкими в точке p. Характеризация свойства абсолютной C^*-гладкости дана в [338]. См. также [219]—[221].

В работах [248], [250], [254] рассматриваются шэйповые свойства гиперпространств. В частности, в [254] доказано, что функторы $\exp_n$ сохраняют свойства быть ASR, быть $ASNR$, подвижность, строгую подвижность.

Работы [361], [318], [257], [264] посвящены свойству неподвижной точки в гиперпространствах.

В работах [10]—[15] А. Н. Выборнов исследовал гиперпространства нульмерных сепарабельных метрических пространств. В частности, в [13] он расклассифицировал все топологические типы пространства $\exp X$ для нульмерного локально компактного сепарабельного метризуемого пространства X.

8. Общетопологические свойства. В отличие от введенных в начале параграфа обозначений, в этом пункте через $\exp X$ будет обозначаться пространство всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X, наделенное топологией Вьеториса. Именно такой объект является наиболее популярным гиперпространством в общей топологии.

Важные результаты о топологических свойствах пространств $\exp X$ получены в серии работ В. В. Попова [70]—[79], [337]. В приведенных ниже теоремах все пространства предполагаются регулярными.

Теорема ([71], [73]). Пространство X является метризуемым компактом, если и только если каждое компактное подмножество в $\exp X$ имеет счетный псевдохарактер.

Теорема ([70]). Если $\exp X$ является k-пространством, то всякая дискретная система недискретных подмножеств в X конечна.

Теорема ([73]). Следующие условия эквивалентны: а) X — метризуемый компакт; б) топология $\exp X$ является пересечением счетного числа метризуемых топологий; в) $\exp X$ — симметризуемо.

Теснота пространства $\exp X$ исследовалась в работе [55]. Доказано, что если X нормально и $t(\exp X) \leqslant \omega$, то X совершенно нормально.

В. И. Пономарев [68] привел условия, обеспечивающие соабсолютность локально компактного пространства и его гиперпространства.

В [134] приведен пример двумерного σ-компактного стратифицируемого пространства с первой аксиомой счетности, гиперпространство которого не является нормальным и не является k-пространством.

Бэлл [133] показал, что если пространство $\exp Y$ имеет счетный спрэд, то $\exp Y$ и Y^n — наследственно сепарабельны.

Если X нормально и хаусдорфово, то оно финально компактно тогда и только тогда, когда $\exp X$ G_δ-замкнуто в $\exp \beta X$ [204].

Для регулярных пространств Кислинг [251] охарактеризовал свойство компактности пространства X посредством свойств гиперпространства $\exp X$. Доказано, что если во всякое открытое покрытие пространства $\exp X$ можно вписать точечно-счетное покрытие, то X — компакт.

Теорема ([251]). Если пространство $\exp^2 X$ нормально, то X — компакт.

В том же 1970 г. Кислинг доказал [409], что в предположении континуум-гипотезы компактность пространства X равносильна нормальности его гиперпространства. Затем В. И. Малыхин, Б. Э. Шапировский [408] ослабили в этом утверждении континуум-гипотезу до аксиомы Мартина. Наконец, окончательный результат в 1975 г. получил Н. В. Величко, доказавший, что компактность X равносильна нормальности $\exp X$ без всяких дополнительных теоретико-множественных предположений [407].

Условия, влекущие псевдокомпактность или счетную компактность $\exp X$, приведены в [303].

В [305] получены некоторые оценки кардинальнозначных инвариантов гиперпространств.

В [25] доказано, что функторы $\exp_n$ при $n \geqslant 3$ не сохраняют класс суперкомпактных пространств.

Свойства экспоненты в топологиях очановского типа исследованы в [74], [76], [78], [80].

См. также [154], [328], [330], [331].

9. Метрической и равномерной структуре на гиперпространствах, в частности, вопросам полноты, посвящены работы [126], [129], [151], [197], [199], [205], [226], [233], [234], [265], [266], [269], [308], [363].

§ 3. Суперрасширения

Конструкция суперрасширения возникла как аналог волмэновской компактификации, приводящий к суперкомпактным пространствам. Впоследствии была обнаружена тесная близость суперрасширений и гиперпространств, однако такая близость проявляется только на уровне пространств, поведение этих конструкций применительно к отображениям сильно отличаются.

В этом параграфе все пространства и отображения берутся, если не оговорено противное, из категории Comp.

1. Система замкнутых подмножеств пространства X называется сцепленной, если любые два элемента этой системы имеют непустое пересечение. Множество максимальных (по отношению включения) сцепленных систем в X обозначается через λX и называется суперрасширением пространства X. Суперрасширение λX наделяется волмэновской топологией; предбазу этой топологии образуют множества вида $U^+=\{\mathscr{M}\in\lambda X \mid$ существует $M\in\mathscr{M}$ такое, что $M\subset U\}$, где U открыто в X.

Для отображения $f: X\to Y$ отображение $\lambda f:\lambda X\to\lambda Y$ (суперрасширение отображения f) определяется формулой:

$$\lambda f(\mathscr{M})=\{A\in\exp Y \mid A\supset f(M),\ M\in\mathscr{M}\},\quad \mathscr{M}\in\lambda X.$$

Тем самым определен функтор суперрасширения λ в категории Comp.

Ян ван Милл и М. ван де Вэл [301] показали, что для компакта X волмэновская топология на λX совпадает с топологией, индуцированной естественным вложением $\lambda X\hookrightarrow\exp^2 X$. Следует отметить, однако, что, как вытекает из определения, функтор λ не является подфунктором функтора $\exp^2$.

2. В этом пункте приводится определение функторов, близких к суперрасширениям. Как оказалось, многие результаты, полученные для суперрасширений, можно перенести также и на эти функторы.

Система подмножеств $\mathscr{A}$ пространства X называется k-сцепленной, $k\geqslant 2$, если любая ее k-элементная подсистема имеет непустое пересечение. Полагаем $N_kX=\{\mathscr{A}\in\exp^2 X \mid \mathscr{A}$ — k-сцеплена и для каждого $B\in\exp X$, если $B\supset A\in\mathscr{A}$, то $B\in\mathscr{A}\}$. Для отображения $f: X\to Y$ полагаем $N_kf(\mathscr{A})=\{B\in\exp Y \mid B\supset f(A),\ A\in\mathscr{A}\}$. Функторы N_k, $k\geqslant 2$, определены А. В. Ивановым [44]. В [301] описана ретракция N_2X на λX; эта ретракция не является естественной по X.

Наконец, Е. В. Моисеев [61] определил функтор G замкнутых гиперпространств включения. По определению, $GX=\{\mathscr{A}\in\exp^2 X \mid$ для каждого $B\in\exp X$, если $B\supset A\in\mathscr{A}$, то $B\in\mathscr{A}\}$, $Gf(\mathscr{A})=\{B\in\exp Y \mid B\supset f(A),\ A\in\mathscr{A}\}$ (f — отображение из X в Y).

Функторы λ и N_k, $k\geqslant 2$, являются подфункторами функтора G.

Е. В. Моисеев [61] ввел также функтор замкнутых гиперпространств роста Gr, $\mathrm{Gr}\,X=\{\mathscr{A}\in\exp^2 X \mid$, если $A\in\mathscr{A}$ и $B\in\exp X$, $B\supset A$ и любая компонента связности множества B пересекает A, то $B\in\mathscr{A}\}$, $\mathrm{Gr}\,f(\mathscr{A})=\{B\in\exp Y \mid B\supset f(A)$ и любая компонента связности множества B пересекает $A\}$ ($f: X\to Y$ — морфизм в Comp).

А. В. Иванов [38] рассматривал подфункторы λ_n и $^*\lambda_n$ функтора суперрасширения λ. Пространство λ_nX состоит из тех $\mathscr{A}\in\lambda X$, для которых существует множество $C\subset X$ мощности $\leqslant n$, удовлетворяющее условию: $A_1 \cap A_2 \cap C \neq \varnothing$ для всех A_1, $A_2 \in \mathscr{A}$. Пространство $^*\lambda_n X$ состоит из систем $\mathscr{A} \in \lambda X$, у которых множество минимальных по включению элементов имеет мощность $\leqslant n$.

В [23], [24] показано, что $\lambda_3 S^1 \cong S^3$ и доказано, что функторы λ_n, $n \geqslant 3$, переводят связные ANR-компакты в односвязные пространства.

В [1], [31] рассматривалась счетная итерация функтора суперрасширения, в [59] — счетная итерация функтора G. Последняя определяется как обратный предел последовательности функторов и естественных преобразований:

$$G \xleftarrow{\mu} G^2 \xleftarrow{\mu G} G^3 \xleftarrow{\mu G^2} G^4 \leftarrow \ldots$$

(здесь через μ обозначено естественное преобразование из G^2 в G, $\mu X(\mathfrak{A}) = \bigcup\{\bigcap \mathscr{A} \mid \mathscr{A} \in \mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{A} \in G^2X$; естественное преобразование μ определено и исследовано Т. Н. Радулом).

3. Исследования свойств суперрасширений основаны на наличии в суперрасширениях дополнительных структур, носящих геометрический или алгебраический характер. Для примера рассмотрим выпуклую структуру и структуру миксера.

Замкнутое непустое подмножество пространства λX вида

$$\bigcap\{A^+ \mid A \in \mathscr{A}\} = \{\mathscr{M} \in \lambda X \mid \mathscr{M} \supset \mathscr{A}\}$$

называется выпуклым. Семейство всех выпуклых в λX множеств наделяется топологией из $\exp \lambda X$ и обозначается $K\lambda X$ [388]. Подфунктор $K\lambda$ функтора $\exp \lambda$ изоморфен рассмотренному выше функтору N; естественный гомеоморфизм пространств NX и $K\lambda X$ переводит $\mathscr{A} \in NX$ в $\bigcap\{A^+ \mid A \in \mathscr{A}\}$ [44].

Семейство всех выпуклых подмножеств суперрасширения обладает рядом свойств обычных выпуклых подмножеств. В частности, определено отображение «ближайшей точки» $\xi : \lambda X \times NX \to \lambda X$, $\xi(\mathscr{M}, \mathscr{A}) = \mathscr{A} \cup \{M \in \mathscr{M} \mid M \cup \{A\}$ — сцепленная система$\}$ [300].

Определение ([292]). Миксером на X называется непрерывное отображение $\mu : X^3 \to X$, удовлетворяющее требованию

$$\mu : (x, y, y) = \mu(y, x, y) = \mu(y, y, x) = y$$

Стандартный миксер на λX, NX и GX задается формулой (см. [18], [60], [292]): $\mu(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3) = \{A \in \exp X \mid$ существует $i \leqslant 3$ такое, что $A \in \mathscr{A}_j$ для всех $j \neq i\}$.

4. Конструкция суперрасширения допускает модификацию для пространств с выделенными на них предбазами специального вида [292], [391].

Предбаза $\mathscr{S}$ на T_1-пространстве X называется T_1-предбазой, если для всех $S \in \mathscr{S}$ и $x \in X$ таких, что $x \notin S$, существует $S' \in \mathscr{S}$ такое, что $x \in S'$ и $S' \cap S = \varnothing$. Суперрасширением $\lambda_{\mathscr{S}} X$ пространства X называется пространство максимальных сцепленных подсистем $\mathscr{M} \subset \mathscr{S}$, наделенное топологией, замкнутую предбазу которой образует семейство $\{\{\mathscr{M} \in \lambda_{\mathscr{S}} X \mid S \in \mathscr{M}\} \mid S \in \mathscr{S}\}$. Основополагающие результаты о суперрасширениях $\lambda_{\mathcal{G}} X$ приведены в монографии Фербеека [391]. Исследованиям пространства $\lambda_{\mathcal{G}} X$ посвящены также работы [127], [292], [293] и др., в частности, в [299], [28] рассматривается задача гомеоморфности суперрасширений $\lambda_{\varphi} X$ гильбертову кубу Q.

Свойства связности и локальной связности суперрасширений $\lambda(X, \mathcal{S})$ исследовались в [224].

Ван Милл и ван де Вэл [300] нашли условия, обеспечивающие стягиваемость, а также свойство LC^∞ суперрасширений $\lambda_{\varphi} X$. Ван де Вэл [388] доказал, что λX обладает свойством неподвижной точки для связного нормального пространства X.

Специальные вложения суперрасширений $\lambda_{\mathcal{G}} X$ в тихоновские кубы, связывающие выпуклые структуры в $\lambda_{\mathcal{G}} X$ и так называемые тройственно выпуклые структуры в тихоновских кубах, построены в [398].

В [327] найдено необходимое условие на предбазы, обеспечивающие коммутирование операций суперрасширения и произведения.

5. А. В. Иванов доказал теорему о почти неподвижных точках для $N_k X$ (ниже через $\Lambda_k X$ обозначено подмножество в $N_k X$, состоящее из максимальных k-сцепленных систем с конечным объединением семейства всех минимальных элементов).

Теорема ([43]). Пусть X — компакт без изолированных точек и $f: X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда для любого открытого покрытия ω пространства $N_k X$ найдется точка $\mathcal{A} \in \Lambda_k X$ такая, что $\mathcal{A}$ и $N_k f(\mathcal{A})$ лежат в одном элементе покрытия ω.

6. Белл, Гинсбург и Тодорчевич [133] рассматривали вопрос о существовании счетного спрэда в суперрасширениях. Доказано, что для нульмерного Y суперрасширение λY имеет счетный спрэд, если и только если Y — метризуемый компакт.

Воттел [399] построил пример наследственно сепарабельного упорядоченного компакта, суперрасширение которого не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

О суперрасширениях см. также [302], [388], [382].

§ 4. Элементарные свойства функторов в категории компактов. Нормальные и близкие к ним функторы

В фундаментальной работе [121] Е. В. Щепин выделил ряд элементарных свойств ковариантных функторов в категории Comp и ввел понятие нормального функтора. Для класса нормальных функторов удалось построить довольно содержательную общую теорию, являющуюся, по существу, самостоятельным разделом категорной топологии.

1. Определение ([121]). Функтор $F: \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ называется нормальным, если выполнены следующие условия:

1) F непрерывен;
2) F мономорфен;
3) F эпиморфен;
4) F сохраняет вес;
5) F сохраняет пересечения;
6) F сохраняет прообразы;
7) F сохраняет точку и пустое множество.

Выписанные свойства нуждаются в комментариях. Непрерывность означает, что F коммутирует с пределами обратных спектров над направленными множествами, $F(\varprojlim \mathscr{S}) = \varprojlim F(\mathscr{S})$. Мономорфность (соответственно, эпиморфность) означает сохранение класса вложений (соответственно, отображений на). Для мономорфного функтора и вложения компактов $i: A \to X$ в дальнейшем пространство FA отождествляется с подпространством в FX посредством отображения Fi.

Свойство сохранения пересечений состоит в том, что $F(\bigcap\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}) = \bigcap\{FX_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ для любого семейства замкнутых подмножеств $\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ компакта X. Для непрерывного отображения $f: X \to Y$ и замкнутого подмножества $A \subset Y$ требуется, чтобы $F(f^{-1}A) = (Ff)^{-1}(FA)$ (сохранение прообразов).

Нормальными являются функторы $(-)^\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$, $SP_G{}^n$, $\exp_n$, $\exp$, P (подробные доказательства приведены в [96], нормальной является композиция, а также произведение не более чем счетного семейства нормальных функторов).

Слабо нормальным (соответственно, почтинормальным) будем называть функтор, удовлетворяющий всем условиям из определения нормального функтора, кроме, быть может, сохранения прообразов (соответственно, эпиморфности). Непрерывный функтор, сохраняющий точку, пустое множество, мономорфизмы и пересечения, называется полунормальным [101].

Слабо нормальным является функтор суперрасширения λ и его подфункторы λ_n, $n \geqslant 3$, почти нормальным — функтор континуальной экспоненты $\exp^c$ [96]. Функторы проективной степени Pr_n при нечетных $n \geqslant 3$ не сохраняют пересечения.

Как отмечено в [30], естественное преобразование $\varphi: F \to G$ нормальных функторов полностью определено отображением φQ. Это дает возможность корректно определить категорию $\mathscr{NF}$ нормальных функторов и их естественных преобразований. В [30] доказано, что мощность скелета этой категории (т. е. максимального семейства попарно неизоморфных объектов) равна континууму.

Л. Б. Шапиро [118] охарактеризовал функторы $\exp$ и $\exp_n$, $n \geqslant 1$, как единственные простые объекты категории $\mathscr{NF}$. При этом функтор F называется простым, если для любого его естественного преобразования $\varphi: F \to G$ в нормальный функтор G все компоненты φX естественного преобразования φ являются вложениями.

Е. В. Щепин [121] доказал, что сформулированное выше условие непрерывности функтора эквивалентно непрерывности отображения F: $C(X, Y)\to C(FX, FY)$ для любых компактов X и Y (здесь пространства функций наделяются компактно-открытой топологией).

М. М. Заричный анонсировал следующее утверждение: свойства мономорфности и сохранения прообразов являются следствиями остальных свойств из определения нормального функтора (см. [94]).

2. Важнейшим понятием, определяемым для (слабо, почти) нормальных функторов, является понятие носителя [121]. Носителем точки $a\in FX$ называется множество $\operatorname{supp}_F(a)=\bigcap\{A\in \exp X \mid a\in FA\subset FX\}$. Конечно, для определения носителя достаточно свойств мономорфности и сохранения пересечений. Свойство сохранения прообразов оказывается эквивалентным сохранению носителей непрерывными отображениями.

Отображение $\operatorname{supp}_F: FX\to\exp X$ всегда полунепрерывно снизу; если оно непрерывно, то функтор F называется функтором с непрерывными носителями. К числу последних относятся функторы $\exp$, $\exp_n$, SP_G^n, $(-)^n$, $1\leqslant n<\omega$.

Если носитель точки $a\in FX$ состоит ровно из n точек, то точка a называется точкой степени n (пишется $\deg(a)=n$). Функтор F называется функтором степени n (пишется $\deg(F)=n$), если n является наибольшим значением $\deg(a)$, $a\in FX$. Функторы $\exp_n$, SP_G^n, $(-)^n$, λ_n, $n\geqslant 3$, Pr_n, $n\geqslant 3$, являются функторами степени n.

Приведем данное В. Н. Басмановым [5] описание строения функторов конечной степени. Пространство X^n естественным образом отождествляется с пространством непрерывных отображений $C(n, X)$ в компактно-открытой топологии. Через $\pi_{n,F,X}$ обозначим отображение из $Fn\times X^n$ в FX, действующее по формуле:

$$\pi_{n,F,X}(a, f)=Ff(a),\ a\in Fn,\ f\in C(n, X)=X^n.$$

Это отображение непрерывно. Оно сюръективно, если $\deg(F)=n$.

Таким образом, нормальные функторы конечной степени n являются факторфункторами композиции степенного функтора $(-)^n$ и функтора произведения $Fn\times(-)$.

3. Нормальный функтор F называется открытым, если он сохраняет класс открытых сюръективных отображений и называется бикоммутативным, если он переводит бикоммутативные квадратные диаграммы в бикоммутативные. (Напомним, что квадратная диаграмма называется бикоммутативной, если ес-

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

тественное отображение $X\to Y\times_T Z$ сюръективно.)

Е. В. Щепин, используя развитые им методы исследования несчетных обратных спектров [121], установил тесную связь свойств открытости и бикоммутативности функторов. В частности, он доказал [121], что открытый нормальный функтор является бикоммутативным, а также доказал эквивалентность условий открытости и бикоммутативности для финитных функторов (т. е. функторов, сохраняющих класс конечных множеств).

Нормальный функтор называется (финитно) мультипликативным, если он сохраняет (конечные) произведения. Е. В. Щепин [121] доказал, что нормальный финитный мультипликативный функтор является степенным. М. М. Заричный [33] распространил это утверждение на произвольные нормальные функторы. Отметим, что доказательство этого факта в [33] содержит легко устранимые неточности.

В [33] показана мультипликативность любого нормального функтора, допускающего поднятие на категорию $\mathcal{C}\mathrm{Gr}$ компактных топологических групп. Таким образом, среди нормальных функторов степенные функторы и только они допускают поднятие на категорию $\mathcal{C}\mathrm{Gr}$.

Другие критерии изоморфности функтора степенному можно найти в [84], [88].

4. Для исследования неметризуемых функтор-степеней (см. § 9) Е. В. Щепиным был в [120] разработан, а в [121] значительно усовершенствован метод характеристик.

Характеристическим числом квадратной диаграммы

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

называется число (конечное или ∞), являющееся числом точек в некотором слое естественного отображения $X \to Y \times_T Z$. Множество всех характеристических чисел называется характеристикой диаграммы $\mathcal{D}$ и обозначается $\chi(\mathcal{D})$. Очевидно, что $\chi(\mathcal{D}) = \{1\}$, если и только если $\mathcal{D}$ является декартовым квадратом; таким образом, множество $\chi(\mathcal{D})$ «измеряет» отличие диаграммы $\mathcal{D}$ от декартова квадрата.

Через $\pi^3 X$ обозначается диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "\pi_{13}"] \arrow[d, "\pi_{12}"'] & X \times X \arrow[d, "\pi_1"] \\ X \times X \arrow[r, "\pi_1"] & X \end{tikzcd}$$

(π_i, π_{ij}) — проекции; индексы указывают на номера сомножителей, куда производится проектирование). Характеристика диаграммы $F(\pi^3 X)$ называется X-характеристикой функтора F.

Таким образом, X-характеристика функтора F показывает, насколько функтор F отличается от мультипликативного (т. е. как отмечено выше, от степенного).

Е. В. Щепин [121] показал, что для нормального функтора конечной степени выполнено равенство

$$\max \chi_Q (SP^n F) = (\max \chi_Q (F))^n \cdot n!$$

5. Функторы, близкие к нормальным, служат источниками для построения новых функторов, действующих в категориях некомпактных пространств. А. Ч. Чигогидзе [112] определил продолжение F_β нормального функтора F на категорию Tych: $F_\beta X = \{a \in F\beta X \mid \mathrm{supp}(a) \subset X \subset \beta X\}$, $F_\beta f = Ff \mid F_\beta X : F_\beta X \to F_\beta Y$ ($f : X \to Y$ — морфизм категории Tych). В [112] определено понятие нормального в Tych функтора и доказано, что продолжение F_β нормального функтора F нормально. Отмечено также, что продолжение $((—)^\omega)_\beta$ степенного функтора $(—)^\omega$ на категорию Tych является мультипликативным нестепенным функтором.

Для слабо нормального функтора F, рассматриваемого как функтор из Comp в Tych, определен всюду плотный подфунктор F_ω, $F_\omega X = \{a \in FX \mid \deg(a) < \omega\}$. Для $F = \exp$ такой подфунктор рассмотрен в [165], [324].

Для любого компакта X множество $F_\omega X$ наделяется также более сильной топологией, а именно, топологией прямого предела $\underrightarrow{\lim}\{F_n X\}$. Тем самым определен функтор из Comp в Tych, который будем обозначать F_∞. Некоторые результаты о функторах вида F_∞ приведены в обзоре [100].

К функторам вида F_∞ близкими по строению являются функторы свободной (абелевой) топологической группы и бесконечной симметрической степени [179], [367]. Например, бесконечная симметрическая степень $SP(X, e)$ пунктированного компакта (X, e) определяется как прямой предел $\underrightarrow{\lim}\{SP^n X\}$, причем вложение $SP^n X \to SP^{n+1} X$ определяется формулой $[x_1, \ldots, x_n] \mapsto [x_1, \ldots, x_n, e]$.

Условия, входящие в определение нормального функтора, легли в основу определения квазинормального функтора, действующего в категории Metr метризуемых пространств.

6. В. В. Федорчук [103] показал, что для любого полунормального функтора F существует единственное естественное преобразование $\eta : \mathrm{Id} \to F$. Следуя [103], назовем функтор F полумонадичным, если существует естественное преобразование $\psi : F^2 \to F$, для которого $\psi \circ F\eta = \psi \circ \eta F = 1_F$.

Ниже дается определение введенного В. В. Федорчуком [101] понятия совершенно метризуемого функтора.

Функтор F называется метризуемым, если каждой метрике d_X на метрическом компакте X поставлена в соответствие метрика d_{FX} на FX так, что:

(а) F сохраняет изометричность вложений;

(б) $\eta X: X \to FX$ — изометрия.

Для метризуемого функтора F полагаем $F^+X = \varinjlim_{\mathfrak{M}} \{F^iX \eta_{F^{i-1}X}\}$ (прямой предел берется в категории $\mathfrak{M}$ метрических пространств и изометрических вложений), $F^+f = \varinjlim \{F^if\}$.

Функтор F называется равномерно метризуемым, если

(в) F^+f — равномерно непрерывное отображение для любого непрерывного отображения $f: X \to Y$.

В свою очередь, равномерно метризуемый функтор F называется совершенно метризуемым, если он полумонадичен и естественное преобразование ψ, входящее в определение полумонадичности, обладает следующим свойством:

(г) отображение $\psi X: F^2X \to FX$ является нерастягивающим.

Пусть F^{++} — пополнение функтора F^+, а $F^\omega = \varinjlim \{F^i, \psi F^{i-2}\}$ — счетная итерация функтора F. В. В. Федорчук показал, что существует естественное вложение функтора F^{++} в качестве всюду плотного подфунктора функтора F^ω.

Для $F = \exp$ такие построения проведены в работах [378] и [2], для функтора λ — в [31], а для функторов $\exp^c$ и P — в [106].

7. В. Н. Басманов [6], [7], обобщая результат М. М. Заричного, относящийся к функторам λ_n, $n \geqslant 3$ (см. § 3), доказал следующий общий результат, относящийся к функторам конечной степени.

Теорема ([7]). Пусть F — непрерывный, мономорфный, сохраняющий пересечения и пустое множество функтор конечной степени n, причем Fn является метризуемым ANR-компактом и $F1$ линейно связно. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) для всякого компакта X, имеющего гомотопический тип связного компактного полиэдра, пространство FX односвязно;

2) для всякого связного ANR-компакта X пространство FX односвязно;

3) FS^1 односвязно;

4) любое отображение $\alpha: S^1 \to FS^1$, образ которого принадлежит множеству F_2S^1, гомотопно постоянному отображению.

Условиям этой теоремы, наряду с функторами λ_n, удовлетворяют также функторы $\exp_n$, $n \geqslant 3$, и P_n, $n \geqslant 2$.

В. Н. Басманов [8] получил также результаты о сохранении функторами конечной степени класса k-связных пространств.

Ряд геометрических результатов о функторах конечной степени, в частности, о сохранении функторами размерностных свойств пространств, получен А. Г. Савченко [86].

Обозначим через PL категорию компактных полиэдров и кусочно-линейных отображений, а через $U: PL \to \mathrm{Comp}$ — стирающий функтор. Поднятием функтора $F: \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ на категорию PL называется такой функтор $F' : PL \to PL$, что $UF' = FU$. В работе [36] доказано, что любой финитный нормальный функтор конечной степени обладает поднятием на категорию PL и рассмотрен аналогичный вопрос для категории Δ-множеств. Полученные результаты применены в [66] для исследования гомологических свойств функторов конечной степени. В [66] также доказано сохранение финитными функторами конечной степени простого гомотопического типа полиэдров.

§ 5. Монады

Понятие монады (тройки, стандартной конструкции, функторалгебры, в других терминологиях) введено С. Эйленбергом и Дж. Муром в связи с теорией сопряженных функторов.

Определение [193]. Монадой на категории $\mathscr{C}$ называется тройка $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$, состоящая из эндофунктора $T: \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ и естественных преобразований $\eta : \mathrm{Id} \to T$ (единица), $\mu : T^2 \to T$ (умножение), для которых $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = 1_T$ (двусторонность единицы) и $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$ (ассоциативность).

Морфизмом монады $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ в монаду $\mathbf{T}' = (T', \eta', \mu')$ называется такое естественное преобразование $\alpha : T \to T'$, что $\alpha \circ \eta = \eta'$ и $\mu' \circ \alpha^2 = \alpha \circ \mu$ (здесь $\alpha^2 = T'\alpha \circ \alpha T = \alpha T' \circ T\alpha$). Если компоненты естественного преобразования α являются вложениями, то монада $\mathbf{T}$ называется подмонадой монады $\mathbf{T}'$.

Пара (X, ξ), где $\xi : TX \to X$ — $\mathscr{C}$-морфизм, называется $\mathbf{T}$-алгеброй, если $\xi \circ \eta X = 1_X$ и $\xi \circ T\xi = \xi \circ \mu X$. Морфизмом $\mathbf{T}$-алгебры (X, ξ) в $\mathbf{T}$-алгебру (X', ξ') называется $\mathscr{C}$-морфизм $f: X \to X'$, для которого $f \circ \xi = \xi' \circ Tf$. $\mathbf{T}$-алгебры и их морфизмы образуют категорию, обозначаемую $\mathscr{C}^{\mathbf{T}}$, через $U = U^{\mathbf{T}}$ обозначается стирающий функтор из $\mathscr{C}^{\mathbf{T}}$ в $\mathscr{C}$.

Категорией Клейсли монады $\mathbf{T}$ называется категория $\mathscr{C}_{\mathbf{T}}$, определяемая следующим образом: $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}_{\mathbf{T}}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{\mathbf{T}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, TY)$; композиция $g * f$ морфизмов $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{\mathbf{T}}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{\mathbf{T}}}(Y, Z)$ определяется формулой

$$g * f = \mu Z \circ Tg \circ f$$

(см. [130]).

Приведем примеры монад в категориях топологических пространств.

(1) Монада гиперпространства $\mathbf{H} = (\exp, s, u)$ в категории Comp. Здесь $s : \mathrm{Id} \to \exp$ — (единственное) естественное преобразование синглетона, $sX(x) = \{x\}$, $x \in X$, $u : \exp^2 \to \exp$ — естественное преобразование объединения, $uX(\mathscr{A}) = \bigcup \mathscr{A}$, $\mathscr{A} \in \exp^2 X$. В [103] отмечено, что $\mathbf{H}$ — единичная монада с функториальной частью exp. Описание категории $\mathbf{H}$-алгебр дано в [403].

Напомним, что компактная хаусдорфова $\bigvee$-полурешетка называется полурешеткой Лоусона, если она обладает базой, состоящей из полурешеток.

Категория $\mathbf{H}$-алгебр оказывается изоморфной категории $\bigvee$-полурешеток Лоусона и их непрерывных гомоморфизмов, при этом $\bigvee$-полурешетке X соответствует $\mathbf{H}$-алгебра (X, ξ), где $\xi = \sup : \exp X \to X$.

(2) Монада вероятностных мер $\mathbf{P} = (P, \eta, \psi)$. Чтобы определить естественное преобразование $\psi : P^2 \to P$, определим оператор $u_X : C(X) \to C(PX)$, полагая $u_X(\varphi)(m) = m(\varphi)$ для каждого $\varphi \in C(X)$ и $m \in PX$. Тогда, по определению, $\psi X(M)(\varphi) = M(u_X(\varphi))$, $M \in P^2X$, $\varphi \in C(X)$.

В [371] фактически доказано, что категория $\mathbf{P}$-алгебр изоморфна категории Conv выпуклых компактов (лежащих в ЛВП) и их непрерывных аффинных отображений. При этом $\mathbf{P}$-алгебре (X, ξ) соответствует структура выпуклого компакта на X, для которой $\xi : PX \to X$ — отображение «центра массы».

(3) Монада суперрасширения $\mathbf{L} = (\lambda, \eta, \mu)$ [34]. Естественное преобразование $\mu : \lambda^2 \to \lambda$ определяется формулой $\mu X(\mathfrak{M}) = \bigcup\{\bigcap \mathscr{A} \mid \mathscr{A} \in \mathfrak{M}\}$ (в [34] показано, что μ — единственное естественное преобразование из λ^2 в λ).

Для описания категории $\mathbf{L}$-алгебр приведем необходимые определения. Замкнутая предбаза $\mathscr{S}$ на компакте X называется бинарной [292], если любая ее сцепленная подсистема имеет непустое пересечение, называется T_2-предбазой [292], если дополнения к элементам предбазы $\mathscr{S}$ разделяют точки пространства X и называется почти нормальной [34], если для любого $S \in \mathscr{S}$ и любой окрестности $OS \supset S$ существует $S' \in \mathscr{S}$ такое, что $S \subset \operatorname{int} S' \subset S' \subset OS$.

Для бинарной почти нормальной T_2-предбазы $\mathscr{S}$ на X и множества $A \subset X$ полагаем $I_{\mathscr{S}}(A) = \bigcap\{S \in \mathscr{S} \mid A \subset S\}$.

В [34] доказано, что для любого $\mathscr{M} \in \lambda X$ множество

$$\bigcap\{I_{\mathscr{S}}(M) \mid M \in \mathscr{M}\}$$

одноточечно и что отображение $k_{\mathscr{S}} : \lambda X \to X$, $k_{\mathscr{S}}(\mathscr{M}) = \bigcap\{I_{\mathscr{S}}(M) \mid M \in \mathscr{M}\}$ непрерывно и превращает X в $\mathbf{L}$-алгебру. Верно и обратное, т. е. любая $\mathbf{L}$-алгебра (X, ξ) имеет вид $\xi = k_{\mathscr{S}}$ для некоторой бинарной почти нормальной T_2-предбазы $\mathscr{S}$ на X. Морфизмами $\mathbf{L}$-алгебр оказываются выпуклые отображения (т. е. такие непрерывные отображения $f : (X, \mathscr{S}) \to (X', \mathscr{S}')$, что для каждого $S' \in \mathscr{S}'$ множество $f^{-1}(S')$ является пересечением некоторого подсемейства предбазы $\mathscr{S}$).

(4) Степенная монада $((-)^\alpha, \eta, \mu)$. Естественные преобразования η и μ определяются формулами $\eta X(x) = (x, x, \dots)$, $x \in X$, $\mu X((x_{00}, x_{01}, \dots), (x_{10}, x_{11}, \dots), \dots) = (x_{00}, x_{11}, \dots)$, $x_{ij} \in X$.

Очевидно, что для любого X проектирование $\mathrm{pr}_k : X^\alpha \to X$ на k-й сомножитель задает на X структуру алгебры степенной монады.

При $\alpha=1$ получаем тождественную монаду $\mathbf{I}=(\mathrm{Id}, 1, 1)$. Очевидно, что $\mathbf{I}$ является подмонадой каждой монады $\mathbf{T}=(T, \eta, \mu)$ на категории Comp, для которой T — полунормальный функтор.

В [32] показано, что каждая монада $\mathbf{T}=(T, \eta, \mu)$, где T — нормальный функтор конечной степени $n\geqslant 1$, является степенной монадой.

Для монады $\mathbf{T}=(T, \eta, \mu)$ на категории Comp, порожденной нормальным функтором T, существует естественное вложение категории Comp в категорию $\mathrm{Comp}_\mathbf{T}$. Это вложение тождественно на объектах и переводит Comp-морфизм $f: X\to Y$ в $\mathrm{Comp}_\mathbf{T}$-морфизм $\eta Y \circ f$.

В обзоре [103] приведены результаты М. М. Заричного о продолжении функторов в категории Comp на категории Клейсли $\mathrm{Comp}_\mathbf{H}$ и $\mathrm{Comp}_\mathbf{P}$.

Теорема ([103]). Функторы $(-)^n$, SP^n, $n<\omega$, продолжаются на категорию $\mathrm{Comp}_\mathbf{P}$.

Теорема ([103]). Для нормального функтора F конечной степени следующие условия эквивалентны:

(а) F продолжается на категорию $\mathrm{Comp}_\mathbf{H}$;

(б) F открытый фактор-функтор степенного функтора.

Впоследствии, М. М. Заричный показал, что функторы SP_G^n и только они удовлетворяют условию (б).

В [226] определено продолжение функтора гиперпространства на категорию Unif равномерных пространств, показано, что это продолжение определяет монаду на категории Unif, дано описание категории алгебр этой монады и внутреннее описание свободных алгебр в терминах теории решеток.

По поводу монады гиперпространства см. также [361].

Отметим, что существование естественного преобразования $\mu: F^2\to F$ позволяет наряду с конечными итерациями F^i определить также счетную итерацию F^ω функтора F: $F^\omega = \varprojlim\{F^i, \mu F^{i-2}\}$. Для функторов exp, λ, G, P такие бесконечные итерации рассмотрены в [2], [1], [31], [58], [59], [106].

§ 6. Функторы и абсолютные экстензоры

К настоящему времени получено большое число результатов о сохранении ковариантными функторами тех или иных классов пространств и отображений, определяемых геометрически. В этом параграфе мы рассматриваем классы абсолютных ретрактов (экстензоров) и мягких отображений. Отметим, что введенное Е. В. Щепиным понятие мягкого отображения, являясь аналогом понятия абсолютного ретракта в категории отображений, играет важную роль в геометрической топологии и неметризуемой теории ретрактов.

Тематика этого параграфа в большой степени отражена в обзорах [96], [100], [103].

1. Приведем результаты о переводе различных классов метризуемых пространств в ANR-пространства ковариантными функторами:

(1) $X^k \in ANR(\mathfrak{M})$, если $X \in ANR(\mathfrak{M})$ и $k<\omega$; $X^k \in AR(\mathfrak{M})$, если $X \in AR(\mathfrak{M})$ и $k \leqslant \omega$ (Борсук, см., напирмер, [100]);

(2) $\exp X \in AR \Leftrightarrow \exp^c X \in AR \Leftrightarrow X$ — пеановский континуум (Войдыславский, см. [100]);

(3) $\Gamma X \in AR \Leftrightarrow \Gamma^c X \in AR \Leftrightarrow X$ — пеановский континуум (Эберхарт, Надлер и Новелл [191]);

(4) $\lambda X \in AR$, если и только если X — метризуемый континуум (ван Милл [292]);

(5) $PX \in AR$ для любого метризуемого компакта (вытекает из теоремы Кли [253]);

(6) $GX \in AR$, если и только если X — метризуемый континуум (Е. В. Моисеев [60]);

(7) $N_k X \in AR$ для любого метризуемого континуума X (А. В. Иванов [44]);

(8) $\mathrm{Gr}\, X \in AR$ для любого пеановского континуума (Е. В. Моисеев [60]);

(9) $\exp_n^c X \in AR$ для любого пеановского континуума X (А. Г. Савченко [82]);

(10) если $X \in ANR$, то $FX \in ANR$ для следующих функторов F конечной степени: $\exp_n$ (Ганя [202] для конечномерных X, Яворовский [242] для всех X), SP_G^n (Яворовский [243]), локально выпуклые подфункторы функтора P_n (В. В. Федорчук [95]), функторы λ_n и $^*\lambda_n$ (М. М. Заричный [23]).

Результаты, сформулированные в пункте (10), значительно обобщены В. Н. Басмановым.

Теорема ([5]). Пусть F — непрерывный, мономорфный, сохраняющий пересечения функтор конечной степени n, причем пространства F_n и $F\varnothing$ являются конечномерными метризуемыми ANR-компактами. Тогда функтор F сохраняет метризуемые ANR-компакты.

На класс полных метризуемых пространств теорема Войдыславского перенесена У. Ташметовым [92, 93]. Аналоги теоремы Ташметова для функторов $\Gamma(\Gamma^c)$ и $\exp_n{}^c$ получены В. И. Головым [16] и А. Г. Савченко [83].

В [26] М. М. Заричный сформулировал некоторые условия, обеспечивающие сохранение квазинормальными функторами, действующими в категории Metr, класса $ANR(\mathfrak{M})$-пространств.

Н. Л. Коваль [45] доказала, что $\exp^P X \in ANR(\mathfrak{M})$ для любого пеановского континуума X.

В [324] установлено, что функторы $\exp_n$ и $\exp_\omega$ сохраняют класс $ANR(\mathfrak{M})$-пространств.

2. А. Н. Дранишникову принадлежит элегантное доказательство теоремы о сохранении класса $AE(n)$-пространств.

Теорема ([19]). Если нормальный функтор с конечными носителями переводит гильбертов куб в гильбертов куб, то он сохраняет класс метризуемых $AE(n)$-компактов.

Условию этой теоремы удовлетворяют нормальные функторы конечной степени n, для которых $F_n \in ANR$, в частности, финитные нормальные функторы; это вытекает из результатов В. Н. Басманова [5].

3. Обобщением задачи о сохранении функторами свойств пространств является задача о сохранении функторами слоев отображений. Действительно, любое пространство X может рассматриваться как слой постоянного отображения $X \to \{*\}$ или, более общо, как слой проектирования $X \times Y \to Y$, $Y \neq \varnothing$.

Теорема (В. В. Федорчук [100]). Для отображения $f: X \to Y$ континуума X на Y все слои отображения $\exp^c f$ являются абсолютными ретрактами в том и только в том случае, если все слои отображения f являются пеановскими континуумами.

Теорема (В. В. Федорчук [100]). Если $f: X \to Y$ — эпиморфизм локально связных компактов (пеановских континуумов), то пространства $(\exp f)^{-1}\{Y\}$ и $(\exp^c f)^{-1}\{Y\}$ являются абсолютными окрестностными ретрактами (абсолютными ретрактами).

Аналоги этих результатов для функторов Γ и Γ^c получены В. И. Головым [17], для функторов $\exp_n^c$ — А. Г. Савченко [82].

Общий результат для функторов конечной степени получен В. Н. Басмановым.

Теорема ([5]). Пусть F — непрерывный, мономорфный, сохраняющий пересечения и прообразы функтор конечной степени n, причем для всякого множества $\mathfrak{A} \subset C(n, n)$ отображений из n в n и точки $a \in F_n$ множество

$$\bigcap \{ (F\alpha)^{-1}(a) \mid \alpha \in \mathfrak{A} \}$$

является конечномерным метризуемым ANR-компактом. Тогда функтор F послойно сохраняет метризуемые ANR-компакты.

Как отмечено в [100], условие сохранения функтором прообразов является существенным.

В некомпактном случае имеет место послойный вариант теоремы о сохранении полных сепарабельных $ANR(\mathfrak{M})$-пространств функторами $\exp_n^c$ [83].

4. Определение ([121]). Отображение $f: X \to Y$ называется n-мягким, если для любого паракомпакта Z, $\dim Z \leqslant n$ и его замкнутого подпространства A, любых непрерывных отображений $\Phi: Z \to Y$, $\varphi: A \to X$ таких, что $f \circ \varphi = \Phi | A$ существует отображение $\psi: Z \to X$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\Phi"] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Абсолютно мягким (мягким, в другой терминологии) называется n-мягкое отображение при $n=\infty$.

В [121] отмечено, что из теоремы Майкла о селекции вытекает мягкость отображения Pf для любого открытого отображения $f: X\to Y$ метризуемых компактов.

Следующий результат является параметрической версией теоремы Войдыславского.

Теорема ([100]). Для отображения $f: X\to Y$ пеановских континуумов следующие условия эквивалентны:

(i) f 1-мягко, а $\exp^c f$ открыто;

(ii) $\exp^c f$ 1-мягко;

(iii) $\exp^c f$ мягко.

Отметим, что открытость отображения метризуемых компактов эквивалентна его 0-мягкости.

Теорема ([100]). Пусть X и Y — пеановские континуумы и $p_1: X\times Y\to X$ — проектирование. Тогда отображение $\exp^c p_1$ открыто, если и только если контиуум X является дендроном.

Связывая общую и геометрическую теорию функторов, Е. В. Щепин доказал, что любой финитный нормальный функтор, переводящий проектирование $p_1: Q\times Q\to Q$ в мягкое отображение, является степенным функтором [121]. В дополнение к этому результату А. Г. Савченко доказал, что если отображение Fp_1 1-мягко для нормального функтора конечной степени $n\geqslant 1$, то $F\cong(-)^n$ [84], [88].

Функторы типа суперрасширения переводят открытые отображения метризуемых континуумов в мягкие, см. [42], [44], [61].

§ 7. F-инъективность

В случае, если существует единственное естественное преобразование $\eta: \mathrm{Id}\to F$, компоненты которого являются вложениями, будем предполагать, что тождественный функтор реализован как подфунктор в F посредством η.

Следующее важное понятие определено Е. В. Щепиным [121].

Определение. Компакт X называется инъективным по отношению к функтору $F: \mathrm{Comp}\to\mathrm{Comp}$ (F-инъективным), если в ситуации, когда заданы отображение $f: Y\to X$ и вложение $i: Y\to Z$, всегда найдется отображение $\bar f: FZ\to FX$, для которого $Ff=\bar f\circ Fi$.

Е. В. Щепин заметил, что класс пространств Дугунджи (т. е.

$AE(0)$-компактов) в точности совпадает с классом P-инъективных компактов.

Оказывается, что $AE(1)$-компакты допускают похожее описание.

Теорема (В. В. Федорчук [100]). Для компакта X следующие условия эквивалентны:

1) X является $\exp^c$-инъективным;

2) X является $\exp$-инъективным;

3) $X \in AE(1)$.

Е. В. Щепин доказал теорему, указывающую на исключительную роль функтора вероятностных мер в классе нормальных функторов.

Теорема ([121]). Компакт X, инъективный по отношению к какому-нибудь нормальному функтору F, будет также P-инъективным, т. е. будет пространством Дугунджи.

Понятие F-инъективности допускает модификации.

Определение ([100], [105]). Пусть $X \subset Y$, тогда непрерывное отображение $r: Y \to FX$ называется F-значной ретракцией, если $r|X = \mathrm{id}$. Пространство X называется абсолютным F-значным ретрактом, если для любого объемлющего $Y \supset X$ существует F-значная ретракция Y на X.

Каждый F-инъективный компакт является абсолютным F-значным ретрактом. Неизвестно, верно ли обратное. Как отмечено в [100], это так для функторов $F = \exp$, $\exp^c$, P.

Классы абсолютно F-значных ретрактов для $F = SP^n$, $\exp_n$, P_n исследовал А. Н. Дранишников [20]. Он, в частности, привел пример нестягиваемого компактного Q-многообразия, являющегося абсолютным $\exp_2$-ретрактом, а также метризуемого компакта, являющегося абсолютным $\exp_2$-значным ретрактом, но не ANR-пространством.

Пусть $P_\omega = \bigcup\limits_{n<\omega} P_n$ — подфунктор функтора P, выводящий пределы компактных пространств. А. Н. Дранишников [20] показал также, что абсолютные P_ω-значные ретракты — это в точности определенные им сильные пространства Дугунджи. При этом компакт X называется сильным пространством Дугунджи, если для любого вложения X в тихоновский куб I^τ существует регулярный линейный оператор продолжения $u: C_p(X) \to C_p(I^\tau)$ (здесь $C_p(X)$ — пространство непрерывных функций на X в топологии поточечной сходимости; регулярность оператора означает непрерывность, положительную определенность и $u(1_X) = 1_{I^\tau}$).

Следующая теорема Е. В. Щепина дает по сути отрицательный ответ на вопрос А. Пелчинского [65] о совпадении классов пространств Милютина и Дугунджи.

Теорема ([121]). Пространство $\exp_3 D^{\omega_3}$ не является ретрактом своего симметрического квадрата $\exp_2 \exp_3 D^{\omega_3}$, являясь его P-значным ретрактом.

А. Н. Дранишников расширил понятие многозначной (т. е. exp-значной) ретракции, выйдя за рамки непрерывных отображений. Напомним, что отображение $f: X \to \exp Y$ называется полунепрерывным сверху, если для любого открытого подмножества $U \subset Y$ множество $\{x \in X \mid f(x) \subset U\}$ открыто в X. Пространства, на которые существует многозначная (соответственно, континуумзначная, т. е. $\exp^c$-значная) полунепрерывная сверху ретракция с любого объемлющего компакта, называются многозначными (континуумзначными) полунепрерывными сверху абсолютными ретрактами. Класс многозначных (континуумзначных) абсолютных полунепрерывных сверху ретрактов обозначается $MAR\uparrow$ ($CAR\uparrow$).

Счетнозначными ретрактами называются F-значные ретракты для подфунктора F функтора exp, $FX = \{A \in \exp X \mid |A| \leqslant \omega\}$ (этот функтор выходит за пределы категории компактов).

Сформулируем теорему, суммирующую результаты М. Войдыславского и А. Шанковского [372].

Теорема. Для метризуемого компакта X следующие условия эквивалентны: 1) X является контиуумом Пеано; 2) X является многозначным ретрактом гильбертова куба Q при некотором вложении; 3) X является счетнозначным ретрактом Q при некотором вложении; 4) для некоторого вложения X в Q существует мультипликативный оператор продолжения из $C_+(X)$ в $C_+(Q)$. (Здесь через $C_+(Y)$ обозначен конус неотрицательных непрерывных функций на Y).

А. Н. Дранишников доказал, что при несчетном τ пространство S^τ (S — окружность) не является счетнозначным ретрактом тихоновского куба. В [121] также приведена теорема А. Н. Дранишникова о существовании разложений в обратные спектры специального вида P-инъективных компактов.

В. Вылов [385], [387] доказал аналоги некоторых результатов о $MAR\uparrow$-пространствах для класса вещественно-компактных пространств.

Н. Л. Коваль доказала [45], что любой пеановский континуум является $\exp^P$-значным (пеановскозначным) абсолютным ретрактом.

Понятие F-значного ретракта распространено на отображения В. В. Федорчуком [100], [105].

Определение [105]. Отображение $f: X \to Y$ называется F-значным ретрактом отображения $g: Z \to Y$, объемлющего отображение f, если существует такое непрерывное отображение $R: Z \to FX$, что

а) $R(x) = x$ для всякого $x \in X$;

б) $g(z) = Ff \circ R(z)$ для всякого $z \in Z$.

Если отображение f является F-значным ретрактом всякого объемлющего его отображения $g: Z \to Y$, то f называется абсолютным F-значным ретрактом (обозначается $f \in A(F)R$).

Если в этом определении $F \subset \exp$ и непрерывную ретракцию R заменить на полунепрерывную сверху ретракцию, то получаем понятия F-значного ретракта и абсолютного F-значного ретракта $(A(F\uparrow)R)$.

С использованием этих понятий в [105] даются характеризации 0-мягких и 1-мягких отображений.

Теорема ([105]). Отображение F нуль-мягко тогда и только тогда, когда $f \in A(\exp\uparrow)R$.

Теорема ([105]). Для отображения $f: X \to Y$ компактов следующие условия эквивалентны:

1) f один-мягко;
2) $f \in A(\exp^c)R$;
3) $f \in A(\exp)R$;
4) $f \in A(\exp^c\uparrow)R$.

Мягкие отображения — это инъективные объекты в надлежащим образом определенной категории отображений. Естественный вопрос — что такое F-инъективный объект в категории отображений? — допускает различные варианты ответа (см. [100], [102], [105]).

§ 8. Функторы и многообразия

Топологическое пространство X называется многообразием, моделированным на пространстве Y (Y-многообразием), если X локально гомеоморфно открытым подмножествам в Y. При этом Y обычно предполагается топологически однородным и локально самоподобным. На пространство X часто налагаются дополнительные требования типа связности, хаусдорфовости, сепарабельности, наличие счетного числа карт и т. п.

В этом параграфе дается обзор результатов, связанных со следующим вопросом: когда пространство FX является многообразием для данного функтора F и пространства X.

1. Для $Y = \mathbf{R}^m (I^m)$ получаем топологические m-мерные многообразия (с краем). В работе К. Вагнера [396] рассмотрена задача сохранения конечномерных многообразий функторами $\exp_n$, SP_G^n. Он доказал, что пространство SP^nM является $2n$-мерным многообразием для любого двумерного многообразия M и не является многообразием, если $\dim M \geqslant 3$. Кроме того, $\exp_n M$ не является многообразием, если M — m-мерное многообразие и $2 \leqslant n \leqslant 4 - m$.

К этому добавим ряд других конкретных фактов, относящихся к пространствам FM, где M — конечномерное многообразие:

1) $SP^{2k}S^1$ гомеоморфно пространству нетривиального расслоения со слоем I^{2k-1} над S^1 [310];
2) $SP^{2k-1}S^1 \cong S^1 \times I^{2k-2}$ [310];
3) $\exp_3 S^1 \cong S^3$ (Р. Ботт [139]);
4) $SP^3_{Z/3}S^1 \cong S^1 \times S^2$ [396];
5) $SP^nS^2 \cong \mathbf{C}P^n$ (Ляо [267]);

6) $Pr_n S^1 \cong \mathbf{R}P^n$ (Шанковский [372]);

7) $\lambda_3 S^1 \cong S^3$ (М. М. Заричный [27]);

8) $P_2 S^1 \cong S^3$ (А. Н. Дранишников, см. [7]).

Общие результаты, относящиеся к функторам конечной степени, получены Л. П. Плахтой.

Теорема ([67]). Финитный нормальный функтор F конечной степени $n \geqslant 1$ сохраняет класс многообразий, если и только если $F \cong (-)^n$.

В [343], [393] рассматривается теория «неподвижных точек» для отображений $f: M \to SP_G^n M$, где M — многообразие.

2. Многие результаты о сохранении Q-многообразий (изложению основ теории Q-многообразий посвящена книга Т. Чепмэна [111]) или о переводе различных классов пространств в Q-многообразия основаны на применении следующей характеризационной теоремы Х. Торуньчика.

Теорема ([377]). Локально компактное сепарабельное метрическое пространство M является Q-многообразием, если и только если выполнены условия:

1) M является $ANR(\mathfrak{M})$-пространством;

2) тождественное отображение 1_M аппроксимируется Z-отображениями.

Напомним, что отображение $f: X \to Y$ называется Z-отображением, если образ $f(X)$ является Z-множеством в Y, т. е. $f(X)$ замкнуто в Y и тождественное отображение 1_Y аппроксимируется отображениями в $Y \setminus f(X)$. При этом рассматривается топология в множестве отображений, порожденная открытыми покрытиями; в компактном случае эта топология совпадает с равномерной.

Приведем некоторые результаты о переводе функторами различных пространств в Q-многообразия, в частности, в гильбертов куб Q:

1) $\exp X \cong Q$, если и только если X — невырожденный континуум Пеано (Кертис, Шори [170]; частные случаи этой теоремы см. в [161], [167], [169]);

2) $\lambda X \cong Q$, если и только если X — невырожденный метризуемый континуум (ван Милл [296], Иванов [37]; см. также промежуточные результаты в [292], [293], [295]);

3) $\exp^c X \cong Q$, если и только если X — пеановский континуум без свободных дуг [158];

4) $X^\omega \cong Q$, если и только если X — невырожденный метризуемый абсолютный ретракт (Вэст [401]);

5) $PX \cong Q$, если и только если X — бесконечный метризуемый компакт (этот факт доказывается с использованием теоремы Кли [253]);

6) $GX \cong Q$, если и только если X — невырожденный метризуемый континуум (Е. В. Моисеев [23]);

7) $N_k X \cong Q$, $k \geqslant 2$, если и только если X — невырожденный метризуемый континуум (Иванов [21]);

8) $\exp_n^c X \cong Q$, если и только если X — невырожденный пеановский континуум без свободных дуг (Савченко [82]);

9) $\Gamma X \cong Q$, если и только если X — метризуемый континуум (Эберхарт, Надлер, Новелл [191]).

Для функторов конечной степени, опираясь на характеризационную теорему Торуньчика, В. Н. Басманов [5] доказал, что в условиях цитированной в § 7 доказанной им теоремы о сохранении ANR-ов функторы сохраняют свойство быть компактным Q-многообразием (гильбертовым кубом Q). В [5] приведен и послойный вариант этой теоремы.

Эти результаты Басманова являются обобщениями целого ряда результатов, в которых речь идет о конкретных функторах; см. [23], [95], [96].

Р. Хэйзи и Дж. Вэст [229] доказали эквивариантный аналог теоремы Кертиса—Шори для действия конечной группы на конечном невырожденном связном графе.

Близкими к упомянутым выше результатам являются утверждения, относящиеся к гиперпространствам выпуклых множеств [166], [320], [321], а также к гиперпространствам «малых» множеств [168].

Представление гильбертова куба Q как итерированного гиперпространства дано в [283].

3. Через l_2 обозначено сепарабельное гильбертово пространство. Ниже предполагается, что l_2-многообразия являются сепарабельными метризуемыми.

Приведем некоторые результаты о переводе функторами метризуемых пространств в l_2-многообразия.

Кертис [160] показал, что $\exp X \cong l_2$, если и только если X является связным локально связным нигде не локально компактным польским пространством. В этих же предположениях на X В. И. Голов [16] доказал, что $\Gamma X \cong l_2$. А. Г. Савченко получил аналогичные результаты (включая послойные варианты) для функторов $\exp_n^c$ [83]. В [324] доказано, что $SP_G^n l_2 \cong l_2$, откуда несложно вывести, что функторы SP_G^n сохраняют l_2-многообразия. Достаточно общий результат для функторов с конечными носителями получен в [26].

По поводу результатов, полученных в этом направлении, см. также [124], [173], [291].

4. Пусть $\mathbf{R}^\infty = \varinjlim \{\mathbf{R}^n\}$, $Q^\infty = \varinjlim \{Q^n\}$. Мы предполагаем сепарабельность и паракомпактность $\mathbf{R}^\infty(Q^\infty)$-многообразий.

Теорема (М. М. Заричный, см. обзорную статью [100]). Пусть X — метризуемый ANR-компакт, $0 < \dim X < \infty$, и e — неизолированная в X точка. Тогда пространства F_M, X, $A_M X$, $F(X, e)$, $A(X, e)$, $SP(X, e)$ являются $\mathbf{R}^\infty$-многообразиями.

Теорема (М. М. Заричный, см. [100].) Пусть метризуемый ANR-компакт X топологически содержит гильбертов куб и

$e \in Q \subset X$. Тогда пространства $F_M X$, $A_M X$, $F(X, e)$, $A(X, e)$ и $SP(X, e)$ являются Q^∞-многообразиями.

М. М. Заричный доказал также, что в предположениях только что сформулированных теорем указанные функторы переводят гомотопические эквивалентности пространств в отображения, гомотопные гомеоморфизмам.

Хендерсон доказал [230], что $X \times \mathbf{R}^\infty$ гомеоморфно открытому подмножеству в $\mathbf{R}^\infty$ для любого конечномерного метризуемого ANR-компакта.

В [29] показано, что если пространство $SP(X, e)$ является $\mathbf{R}^\infty$ (Q^∞)-многообразием, то $X \setminus \{e\} \in ANR(\mathfrak{M})$ и построен пример не локально стягиваемого компакта X, для которого $SP(X, e) \cong \cong \mathbf{R}^\infty$.

5. Приведем также геометрические приложения операций бесконечной итерации функторов. Напомним, что для гильбертова куба $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]_i$ через s обозначается псевдовнутренность Q, $s = \prod_{i=1}^{\infty} (0, 1)_i$, а через $\operatorname{rint} Q$ обозначается радиальная псевдовнутренность Q, т. е. множество

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right]_i \right) \subset s \subset Q.$$

Теорема (В .В. Федорчук [106]). Тройка $(P^\omega X, X^{++}, X^{+})$ гомеоморфна $(Q, s, \operatorname{rint} Q)$ для любого неодноточечного метризуемого компакта X.

Аналогичные утверждения имеют место и для других функторов: λ [31] (см. также [1]), G [58], [59], $\exp^c$ [106]. Для функтора $\exp$ имеет место более слабый результат.

Теорема (Торуньчик, Дж. Вэст [378]). Для невырожденного пеановского континуума X пара $(\exp^{++} X, \exp^{+} X)$ гомеоморфна паре $(s, \operatorname{rint} Q)$.

Т. О. Банах и М. М. Заричный показали [2], что не существует никакой компактификации F функтора $\exp^{++}$, обладающей тем свойством, что $(FX, \exp^{++} X) \cong (Q, s)$ для невырожденного пеановского континуума X.

6. Послойными вариантами изложенных выше результатов являются утверждения о том, когда слои отображений вида Ff являются многообразиями. Для случая Q-многообразий и l_2-многообразий такие результаты получены в работах [81]—[83], [97], [100], [101]. В качестве примера сформулируем следующее утверждение.

Теорема (А. Г. Савченко [83]). Если $f: X \to Y$ — такое отображение сепарабельного топологически полного (связного) локально связного метрического пространства X на метризуемый компакт Y, что прообраз хотя бы одной точки $y \in Y$ нигде не локально компактен, то $(\exp_n{}^c f)^{-1}\{Y\}$ является l_2-многообразием (гомеоморфно l_2).

Параметрическим вариантом свойства быть Y-многообразием является, по-видимому, свойство быть локально тривиальным расслоением со слоем Y-многообразие.

К настоящему времени удалось получить только такие параметрические теоремы, в которых речь идет о тривиальных расслоениях со слоем гильбертов куб (Q-расслоениях).

Теорема (В. В. Федорчук [101], [104]). Пусть $f: X \to Y$ открытое отображение метрического компакта X на конечномерный компакт Y, причем все слои отображения f являются бесконечными. Тогда отображение $Pf: PX \to PY$ является Q-расслоением.

А. Н. Дранишников [21] показал, что от условия конечномерности пространства Y в этой теореме нельзя отказаться.

Для функторов типа суперрасширения параметрические теоремы имеют место в достаточно широких предположениях.

Теорема ([61]). Для отображения $f: X \to Y$ метризуемого континуума X на Y следующие условия эквивалентны:

1) f открыто и не имеет точек однократности;

2) отображение $Gf: GX \to GX$ является Q-расслоением.

Аналогичные утверждения доказаны для функторов λ и N_k, $k \geqslant 2$. Важное отличие приведенной выше теоремы В. В. Федорчука для функтора вероятностных мер от упомянутых теорем для функторов типа суперрасширения состоит в том, что в последних не требуется бесконечность слоев рассматриваемых отображений.

Другие относящиеся сюда результаты можно найти в работах [17], [61], [81]—[83], [97], [100], [101], [104], [195].

7. Для других классов Y, в частности, для $Y = l_2{}^f = \{(x_1, x_2, \ldots) \in l_2 |$ не более конечного числа x_i отлично от нуля$\}$, а также $Y = \mathrm{Bd}(Q)$ (псевдограница гильбертова куба Q), аналогичные вопросы рассматривались в [9], [26], [100], [165], [261].

§ 9. Функторы и неметризуемые компакты

В этом параграфе собраны результаты, относящиеся к сохранению функторами различных классов неметризуемых компактов.

Методы доказательства преимущественно основаны на наличии разложений этих компактов в виде пределов обратных спектров из компактов меньшего веса. Важнейшую роль при этом играет спектральная теорема о гомеоморфизме Е. В. Щепина [120]—[122], утверждающая, что при выполнении некоторых естественно формулируемых условий два разложения данного компакта в обратные спектры содержат изоморфные подспектры.

Сформулируем некоторые относящиеся сюда результаты. Следует отметить, что доказательства приведенных ниже утверждений 1)—3), принадлежащих Л. Б. Шапиро, в частности, касающихся свойств недиадичности пространств, выходят за пределы упомянутой теоремы Е. В. Щепина и требуют более сложного анализа разложений пространств в обратные спектры:

1) $\exp X \in AE(0)$, если и только если $X \in AE(0)$ и $w(X) \leqslant \omega_1$. Если $w(X) > \omega_1$, то $\exp X$ не является диадическим компактом (Л. Б. Шапиро [114]);

2) для неметризуемого компакта X пространство $\exp X$ не является ни абсолютным ретрактом, ни даже непрерывным образом тихоновского куба (Л. Б. Шапиро [115]);

3) $PX \in AR$, если и только если $X \in AE(0)$ и $w(X) \leqslant \omega_1$. Если $w(X) > \omega_1$, то PX не является диадическим компактом (Л. Б. Шапиро [116]);

4) для финитного нормального функтора равносильны следующие условия:

(i) $FI^{\omega_1} \cong I^{\omega_1}$;

(ii) $FD^{\omega_2} \cong D^{\omega_2}$;

(iii) $F \cong (-)^n$ для некоторого $n < \omega$ (Е. В. Щепин [121]).

Следующие два утверждения являются соединениями результатов Е. В. Щепина [121] и теоремы о виде мультипликативных функторов [33] (см. § 4):

5) для нормального функтора F следующие условия эквивалентны:

(i) $FI^{\omega_2} \in AE(0)$;

(ii) $F \cong (-)^\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$;

6) если нормальный функтор F сохраняет класс абсолютных ретрактов, то $F \cong (-)^\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant \omega$.

А. Г. Савченко [84], [87] показал, что если F — функтор конечной степени и пространство FX является непрерывным образом D^τ (соответственно, I^τ), то и (связный) компакт X обладает тем же свойством.

М. Белл [132] показал, что пространство $\exp D^{\omega_2}$ не является непрерывным образом суперкомпактного пространства. А. Ч. Чигогидзе [152] в предположении континуум-гипотезы показал неизоморфность по Бэру пространств D^{ω_3} и $\exp D^{\omega_3}$.

В [323] и [20] получены результаты о существовании спектральных разложений специального вида неметризуемых абсолютных exp-значных ретрактов и сильных пространств Дугунджи (т. е. абсолютных P_ω-значных ретрактов), соответственно. В [20] доказано, что если K^τ — сильное пространство Дугунджи для метризуемого компакта K и $\tau > \omega_1$, то $K \in AR$.

Поведение функторов типа суперрасширения применительно к неметризуемым компактам значительно отличается от поведения нормальных функторов. Следующие результаты получены А. В. Ивановым:

7) $\lambda X \in AE(0)$, если и только если X является открыто порожденным [39];

8) $\lambda X \in AR$, если и только если X — открыто порожденный континуум [40].

Из утверждений 7), 8), а также характеризаций канторовского и тихоновского кубов, полученных Е. В. Щепиным [121], вытекает, что $\lambda D^\tau \cong D^\tau$, $\lambda I^\tau \cong I^\tau$ (А. В. Иванов [41]).

Утверждения 7), 8) перенесены А. В. Ивановым [44] и Е. В. Моисеевым [60], [61] на другие функторы типа суперрасширения.

М. В. Смуров [90], [91] рассмотрел задачу о топологической однородности пространств вида FX.

Теорема ([91]). Пусть h — автоморфизм пространства PK^τ, где K — метризуемый континуум, а $\tau > \omega_1$. Тогда $h(P_n K^\tau) = P_n K^\tau$.

В [90] доказан аналогичный результат для функтора exp. В доказательстве существенным образом использован метод характеристик Е. В. Щепина [121].

Для нормальных функторов конечной степени удалось полностью решить вопрос о сохранении свойства топологической однородности.

Теорема (Заричный М. М., см. [35]). Нормальный функтор конечной степени n сохраняет класс топологически однородных компактов, если и только если $F \cong (-)^n$.

В последнее время получены результаты о геометрии отображений неметризуемых компактов. Будем говорить, что отображение $f: X \to Y$ диадическое, если все его слои являются диадическими компактами. Отображение $f: X \to Y$ называется тихоновским расслоением (I^τ — расслоением), если оно гомеоморфно проектированию $\mathrm{pr}_1 : Y \times I^\tau \to Y$.

Теорема (В. В. Федорчук [101]). Если для открытого отображения $f: X \to Y$ компакта X на диадический компакт Y замыкание множества $\{y \in Y \mid |f^{-1}(y)| \geq 2\}$ неметризуемо, то отображение Pf не является диадическим.

Теорема (В. В. Федорчук [101]). Пусть $f: X \to Y$ — отображение неметризуемого компакта X на диадический компакт Y. Отображение Pf является тихоновским расслоением, если и только если одновременно выполняются три условия:

(а) Y — метризуемый компакт;

(б) $X \in AE(0)$ и X является однородным по характеру компактом веса ω_1;

(в) f открыто.

Как показывают следующие утверждения, функторы λ, N, G могут значительно улучшать свойства отображений неметризуемых компактов.

Теорема (А. В. Иванов, см. [94]). Для отображения $f: X \to$

$\to Y$ однородных по характеру открыто порожденных континуумов следующие условия эквивалентны:

(i) f открыто и не имеет точек однородности;

(ii) λf — I^τ-расслоение, $\tau = w(X)$;

(iii) Nf—D^τ-расслоение.

Теорема (А. В. Иванов, см. [94]). Для отображения $f: X \to Y$ однородных по характеру нульмерных открыто порожденных компактов следующие условия эквивалентны:

(i) f открыто и не имеет точек однократности;

(ii) λf—D^τ-расслоение, $\tau = w(X)$;

(iii) Nf—D^τ-расслоение.

Теорема (Е. В. Моисеев [61]). Пусть $f: X \to Y$ — отображение открыто порожденных континуумов. Следующие условия эквивалентны:

(i) f открыто;

(ii) Gf мягко.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атаманюк Б. В.* Функторы итерированного суперрасширения // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1989.— № 3.— С. 58 (РЖМат, 1989, 11А498).
2. *Банах Т. О., Заричный М. М.* О компактификациях функтора итерированного гиперпространства // Изв. вузов. Мат.— 1987.— № 10.— С. 3—6 (РЖМат, 1988, 3А644).
3. *Басманов В. Н.* Об индуктивных размерностях произведений пространств // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1981.— № 1.— С. 17—20 (РЖМат, 1981, 4А520)
4. — Некоторые функторы с конечными носителями и размерность // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1981.— № 6.— С. 48—50 (РЖМат, 1982, 3А584)
5. — Ковариантные функторы, ретракты и размерность // Докл. АН СССР. — 1983.— *271*, № 5.— С. 1033—1036 (РЖМат, 1984, 1А509)
6. — О функторах, переводящих связные *ANR*-бикомпакты в односвязные пространства // Деп. в ВИНИТИ, № 2781—83Деп (РЖМат, 1983, 9А490ДЕП)
7. — О функторах, переводящих связные *ANR*-бикомпакты в односвязные пространства // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1984.— № 6.— С. 40—42 (РЖМат, 1985, 3А524)
8. — Ковариантные функторы конечных степеней и связность // Докл. АН СССР.— 1984.— *279*, № 6.— С. 1289—1293 (РЖМат, 1985, 6А437)
9. *Богатый С. А., Федорчук В. В.* Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1986.— *24*.— С. 195—270 (РЖМат, 1987, 4А647)
10. *Выборнов А. Н.* Гиперпространства полных метрических сепарабельных нульмерных пространств // Деп. в ВИНИТИ, № 7912—84Деп (РЖМат, 1985, 3А516ДЕП)
11. — Пространства компактных подмножеств локально бикомпактных нульмерных сепарабельных метрических пространств.— В кн.: Отображения и функторы.— М.: МГУ, 1984.— С. 17—23 (РЖМат, 1984, 12А546)
12. — О продолжении гомеоморфизмов и экспонентах нульмерных локально компактных метризуемых пространств.— В кн.: Кардинал. инварианты и отображения топол. пространств.— Ижевск, 1984.— С. 80—81 (РЖМат, 1985, 7А590)

13. — Классификация экспонент локально компактных метрических нульмерных пространств // Деп. в ВИНИТИ, № 7911—84 Деп (РЖМат, 1985, 3А515)
14. — Пространства компактных подмножеств нульмерных польских пространств со всюду плотным множеством изолированных точек // Успехи мат. наук.— 1984.— *39*, вып. 4.— С. 153—154 (РЖМат, 1985, 1А666)
15. — . Экспоненты нульмерных польских пространств // Докл. АН СССР.— 1985.— *284*, № 5.— С. 1053—1057 (РЖМат, 1986, 3А685)
16. *Голов В. И.* Гильбертово пространство как гиперпространство упорядоченных дуг.— В кн.: Функ. анализ и его прил. в мех. и теории вероятностей.— М., 1984.— С. 13—18 (РЖМат, 1985, 6А431)
17. — Упорядоченные дуги пеановских континуумов. Послойный вариант // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1984.— № 3.— С. 77—79 (РЖМат, 1984, 9А498)
18. *Дранишников А. Н.* Миксеры. Обращение одной теоремы ван Милла — ван де Вела // Мат. заметки.— 1985.— *37*, № 4.— С. 587—593 (РЖМат, 1985, 9А403)
19. — Ковариантные функторы и экстензоры в размерности n // Успехи мат. наук.— 1985.— *40*, вып. 6.— С. 133—134 (РЖМат, 1986, 5А645)
20. — Абсолютные F-значные ретракты и пространства функций в топологии поточечной сходимости // Сиб. мат. ж.— 1986.— *27*, № 3.— С. 74—86 (РЖМат, 1986, 9А514)
21. — О Q-расслоениях без дизъюнктных сечений // Функ. анал. и его прил. — 1988.— *22*, № 2.— С. 79—80 (РЖМат, 1988, 9А644)
22. *Замбахидзе Л. Г.* О взаимоотношениях между локальными периферическими свойствами топологических пространств // Сообщ. АН ГрузССР.— 1979.— *94*, № 3.— С. 557—560 (РЖМат, 1980, 1А546)
23. *Заричный М. М.* Функтор λ_n и абсолютные ретракты // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1982.— № 4.— С. 15—19 (РЖМат, 1982, 11А430)
24. — О подфункторах функтора суперрасширения // Деп. в ВИНИТИ, № 316—82 Деп (РЖМат, 1982, 12А517ДЕП)
25. — . О гиперсимметрических степенях суперкомпактов // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1983.— № 1.— С. 18—21 (РЖМат, 1983, 5А437)
26. — Сохранение $ANR(\mathfrak{M})$-пространств и бесконечномерных многообразий некоторыми ковариантными функторами // Докл. АН СССР.— 1983.— *271*, № 3.— С. 524—528 (РЖМат, 1983, 12А642)
27. — О фундаментальной группе суперрасширения $\lambda_n X$.— В кн.: Отображения и функторы.— М.: МГУ, 1984.— С. 24—31 (РЖМат, 1984, 12А548)
28. — Об одном результате Я. ван Милла и Д. Шрийвера // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1985.— № 2.— С. 6—8 (РЖМат, 1985, 8А591)
29. — Симетричні добутки, що є нескінченновимірними многовидами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.— 1985.— вип. 24.— С. 65—69 (РЖМат, 1986, 1А672)
30. — Категорія нормальних функторів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1986.— вип. 25.— С. 52—56
31. — Итерированные суперрасширения.— В кн.: Общая топология. Отображения топологических пространств. М.: МГУ, 1986.— С. 45—59 (РЖМат, 1987, 4А637)
32. — О монадичных функторах конечной степени.— В кн.: Вопросы геометрии и топологии. Петрозаводск, 1986.— С. 24—30 (РЖМат, 1987, 6А592)
33. — Мультипликативный нормальный функтор — степенной // Мат. заметки.— 1987.— *41*, № 1.— С. 93—100 (РЖМат, 1987, 6А591)
34. — Монада суперрасширения и ее алгебры // Укр. мат. ж.— 1987.— *39*, № 3.— С. 303—309 (РЖМат, 1987, 10А446)
35. — Функтори в категорії компактів, що зберігають однорідність // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.— 1988.— вип. 30.— С. 30—32
36. —, *Плахта Л. П.* О поднятии нормальных функторов конечной степени на категорию PL // Докл. АН УССР.— 1988.— № 9.— С. 5—9 (РЖМат, 1989, 2А548)

37. *Иванов А. В.* Суперрасширения метризуемых континуумов и обобщенного канторовского дисконтинуума // Докл. АН СССР.— 1980.— *254*, № 2. — С. 279—281 (РЖМат, 1981, 1А510)
38. — О суперрасширениях λ_n // Успехи мат. наук.— 1981.— *36*, вып. 3.— С. 213—214 (РЖМат, 1981, 10А435)
39. — Суперрасширения открыто-порожденных бикомпактов // Докл. АН СССР.— 1981.— *259*, № 2.— С. 275—278 (РЖМат, 1981, 11А525)
40. —. Решение проблемы Ван Милла о характеризации бикомпактов, суперрасширения которых являются абсолютными ретрактами // Докл. АН СССР.— 1982.— *262*, № 3.— С. 526—528 (РЖМат, 1982, 6А447)
41. — Суперрасширение тихоновского куба I^τ гомеоморфно I^τ // Мат. заметки.— 1983.— *33*, № 5.— С. 763—772 (РЖМат, 1983, 9А472)
42. — Функторы типа суперрасширения и мягкие отображения // Мат. заметки.— 1984.— *36*, № 1 (РЖМат, 1984, 12А547)
43. — Теорема о почти неподвижной точке для отображений пространства максимальных *К*-сцепленных систем.— В кн.: Вопросы геометрии и топологии.— Петрозаводск, 1986.— С. 31—40 (РЖМат, 1987, 6А606)
44. — О пространствах полных сцепленных систем // Сиб. мат. ж.— 1986.— *27*, № 6.— С. 95—110 (РЖМат, 1987, 4А636)
45. *Коваль Н. Л.* О пеановскозначных абсолютных ретрактах // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1987.— № 1.— С. 3—5 (РЖМат, 1987, 5А551)
46. *Комбаров А. П.* Наследственная паракомпактность X^2 и метризуемость X // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1988.— № 2.— С. 79—81 (РЖМат, 1988, 8А523)
47. *Кузнецов В.* О пространстве замкнутых подмножеств // Докл. АН СССР. 1968.— *178*, № 6.— С. 1248—1251 (РЖМат, 1968, 9А329)
48. *Линичук Р. С.* О размерности гиперпространств // Укр. мат. ж.— 1978.— *30*, № 3.— С. 378—381 (РЖМат, 1978, 12А823)
49. — О диадических пространствах некоторых гиперпространств // Укр. мат. ж.— 1978.— *30*, № 2.— С. 232—234 (РЖМат, 1978, 12А822)
50. — О гиперпродолжениях многозначных отображений и спектральном представлении некоторых гиперпространств // Укр. мат. ж.— 1981.— *33*, № 2.— С. 248—252 (РЖМат, 1981, 12А487)
51. — О свойствах некоторых гиперпространств типа бесконечномерности // Укр. мат. ж.— 1982.— *34*, № 6.— С. 774—775 (РЖМат, 1983, 4А583)
52. —, *Сафонов В. М.* Об экспоненциальной топологии // Укр. мат. ж.— 1983.— *35*, № 2.— С. 164—168 (РЖМат, 1983, 9А469)
53. —, *Сирик В. И.* К размерности пространств подмножеств.— В кн.: Теория функций и топология.— Киев, 1983.— С. 68—76 (РЖМат, 1984, 4А554)
54. —, — К размерности гиперпространств.— В кн. Теория функций и топология.— Киев, 1983.— С. 76—83 (РЖМат, 1984, 4А555)
55. *Малыхин В. И.* О тесноте и числе Суслина в $exp\,X$ и в произведении пространства // Докл. АН СССР.— 1972.— *203*, № 5.— С. 1001—1003 (РЖМат, 1972, 8А531)
56. —. Несохранение свойств топологических групп при возведениях их в квадрат // Сиб. мат. ж.— 1987.— *28*, № 4.— С. 154—161 (РЖМат, 1987, 11А591)
57. *Марьянович М. М.* О гиперпространствах высших порядков // Докл. АН СССР.— 1984.— *278*, № 1.— С. 34—37 (РЖМат, 1985, 2А536)
58. *Мирзаханян Р. Э.* О бесконечной итерации функтора гиперпространства включения // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1988.— № 6.— С. 14—17 (РЖМат, 1989, 3А476)
59. —. О функторе пополненного гиперпространства включения // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1989.— № 2.— С. 75—77 (РЖМат, 1989, 8А617)
60. *Моисеев Е. В.* О пространствах замкнутых гиперпространств роста и включения // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1988.— № 3.— С. 54—57 (РЖМат, 1988, 11А618)
61. — О функторах замкнутых гиперпространств роста и включения // Деп. в ВИНИТИ, № 3516—В89

62. *Мршевич М.* **Некоторые свойства пространства 2^X топологического** R_0-пространства // Успехи мат. наук.— 1979.— *34*, вып. 6.— С. 166—170 (РЖМат, 1980, 4А520)
63. *Непомнящий Г. М.* О спектральном разложении многозначных абсолютных ретрактов // Успехи мат. наук.— 1981.— *36*, вып. 3.— С. 221—222 (РЖМат, 1981, 10А437)
64. *Пасынков Б. А.* О размерности топологических произведений и пределов обратных последовательностей // Докл. АН СССР.— 1980.— *254*, № 6. — С. 1332—1336 (РЖМат, 1981, 2А522)
65. *Пелчинский А.* Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций.— М.: Мир, 1970.— 144 с. (РЖМат, 1971, 1Б687К)
66. *Плахта Л. П.* О сохранении гомологий и простого гомотопического типа нормальными функторами // Препр. АН УССР. Ин-т мат.— 1988.— № 54.— С. 1—28 (РЖМат, 1989, 7А441)
67. —. О сохранении многообразий функторами конечной степени // Ин-т прикл. пробл. мех. и мат. АН СССР. Препр.,— 1988.— № 5, С. 1—16 (РЖМат, 1988, 11А651)
68. *Пономарев В. И.* О соабсолютности пространства и его экспоненты // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1987.— № 2.— С. 59—62 (РЖМат, 1987, 6А605)
69. —, *Ткачук В. В.* Счетный характер X в βX в сопоставлении со счетным характером диагонали в $X \times X$ // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1987.— № 5. — С. 16—19 (РЖМат, 1988, 1А584)
70. *Попов В. В.* О топологии пространства замкнутых подмножеств // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1975.— № 1.— С. 65—70 (РЖМат, 1975, 6А617)
71. — О пространстве замкнутых подмножеств // Докл. АН СССР.— 1976.— *229*, № 5.— С. 1051—1054 (РЖМат, 1976, 12А568)
72. — Экспонента, Σ-произведения и k-пространства.— В кн.: Топологические пространства и их отображения.— Рига, 1979.— № 4.— С. 107—118 (РЖМат, 1980, 5А477)
73. — Метризуемость и пространство замкнутых подмножеств // Успехи мат. наук.— 1980.— *35*, Вып. 3.— С. 209—213 (РЖМат, 1980, 11А523)
74. — О нормальности экспоненты в топологиях очановского типа // Мат. заметки.— 1982.— *32*, № 3.— С. 375—384 (РЖМат, 1983, 1А513)
75. — Об экспоненте Σ-произведения топологических пространств.— В кн.: Топология и теория множеств.— Ижевск, 1982.— С. 20—25 (РЖМат, 1983, 10А472)
76.. — О нормальности экспоненты в топологиях очановского типа. II // Лит. мат. сб.— 1983.— *23*, № 4.— С. 32—39 (РЖМат, 1984, 7А495)
77. — О строении экспоненты дискретного пространства // Мат. заметки.— 1984.— *35*, № 5.— С. 757—767 (РЖМат, 1984, 9А499)
78. — Экспонента в очановской топологии и k-пространства.— В кн.: Кардинал. инварианты и отображения топол. пространств.— Ижевск, 1984.— С. 19—22 (РЖМат, 1985, 7А591)
79. — Пространство бикомпактных подмножеств и k-пространства.— В кн.: Общая топология. Пространства функций и размерность.— М.: МГУ.— 1985.— С. 121—130 (РЖМат, 1986, 4А695)
80. *Пранинскас Г.* О счетной компактности и псевдокомпактности экспоненты в топологиях очановского типа // Лит. мат. сб.— 1987.— *27*, № 2.— С. 344—347 (РЖМат, 1988, 1А600)
81. *Прохорова И. Е.* О гиперотображениях континуумов // Мат. заметки.— 1987.— *42*, № 4.— С. 572—580 (РЖМат, 1988, 2А575)
82. *Савченко А. Г.* О свойствах отображения $\exp_n{}^c f$ // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1985, № 1.— С. 19—25 (РЖМат, 1985, 5А483)
83. — Функтор $\exp_n{}^c$, абсолютные ретракты и гильбертово пространство // Мат. заметки.— 1985.— *38*, № 6.— С. 875—887 (РЖМат, 1986, 4А709)
84. — **Функторы конечных степеней: критерий изоморфности функтора сте-**

пенному и бикомпакты вида $F(X)$, являющиеся непрерывными образами I^τ и D^τ // Деп. в ВИНИТИ, № 7888—В (РЖМат, 1987, 3А561ДЕП)
85. — Некоторые ковариантные функторы и размерность.— В кн.: Общая топология. Отображения топологических пространств.— М.: МГУ.— 1986. — С. 104—121 (РЖМат, 1987, 4А639)
86. — Ковариантные функторы конечных степеней и размерно полноценные компакты // Успехи мат. наук.— 1986.— *41*, вып. 4.— С. 221—222 (РЖМат, 1987, 1А553)
87. — О бикомпактах вида $F(X)$, являющихся непрерывными образами I^τ и D^τ // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1988.— № 3.— С. 3—5 (РЖМат, 1988, 9А595)
88. — Критерий изоморфности функтора конечной степени степенному функтору // Вестн. МГУ. Сер. 1.— 1989, № 3.— С. 18—21 (РЖМат, 1989, 9А418)
89. *Сирота С.* О спектральном представлении пространств замкнутых подмножеств бикомпактов // Докл. АН СССР.— 1968.— *181*, № 5.— С. 1169—1172 (РЖМат, 1969, 1А458)
90. *Смуров М. В.* О топологической неоднородности пространств типа exp K^τ // Докл. АН СССР.— 1980.— *255*, № 3.— С. 526—531 (РЖМат, 1981, 3А490)
91. — О гомеоморфизмах пространств вероятностных мер несчетных степеней компактов // Успехи мат. наук.— 1983.— *38*, № 3.— С. 187—188 (РЖМат, 1983, 11А637)
92. *Ташметов У.* О связности гиперпространств // Докл. АН СССР.— 1974. — *215*, № 2.— С. 286—288 (РЖМат, 1974, 8А413)
93. — О связности и локальной связности некоторых гиперпространств // Сиб. мат. ж.— 1974.— *15*, № 5.— С. 1115—1130 (РЖМат, 1975, 5А519)
94. У Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям.— Кишинев: Штиинца, 1985.— 278 с. (РЖМат, 1986, 1А649К)
95. *Федорчук В. В.* Вероятностные меры и абсолютные ретракты // Докл. АН СССР.— 1980.— *255*, № 6.— С. 1329—1333 (РЖМат, 1981, 5А443)
96. — Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия // Успехи мат. наук.— 1981.— *36*, вып. 3.— С. 177—190 (РЖМат, 1981, 10А447)
97. — Экспоненты пеановских континуумов — послойный вариант // Докл. АН СССР.— 1982.— *262*, № 1.— С. 41—44 (РЖМат, 1982, 4А553)
98. — Об открытых отображениях // Успехи мат. наук.— 1982.— *37*, вып. 4. — С. 187—188 (РЖМат, 1983, 1А529)
99. — Об открытых монотонных отображениях // Publ. Inst. Math.— 1983. — *34*.— С. 61—64 (РЖМат, 1985, 3А541)
100. — О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи мат. наук.— 1984.— *39*, № 5.— С. 169—208 (РЖМат, 1985, 2А535)
101. — Тривиальные расслоения пространств вероятностных мер// Мат. сб. — 1986.— *129*, № 4.— С. 473—493 (РЖМат, 1986, 8А627)
102. — О характеризации n-мягких отображений // Докл. АН СССР.— 1986. — *288*, № 2.— С. 313—316 (РЖМат, 1986, 11А630)
103. — Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // Успехи мат. наук.— 1986.— *41*, вып. 6.— С. 121—159 (РЖМат, 1987, 4А642)
104. — Факторизационная лемма для открытых отображений компактов // Мат. заметки.— 1987.— *42*, № 1.— С. 101—114 (РЖМат, 1987, 11А615)
105. — Многозначные ретракции и характеризации n-мягких отображений // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1988.— *51*.— С. 169—207 (РЖМат, 1989, 4А474)
106. — Расслоения пространств вероятностных мер и геометрия бесконечных итераций некоторых монадичных функторов // Докл. АН СССР.— 1988. — *301*, № 1.— С. 41—45 (РЖМат, 1988, 12А517)
107. —, *Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции.— М.: МГУ.— 1988.— 252 с. (РЖМат, 1989, 4А442К)
108. *Филиппов В. В.* О размерности произведений топологических пространств // Fund. math.— 1980.— *106*, № 3.— С. 181—212 (РЖМат, 1981, 3А522)

109. *Хаджииванов Н. Г.* О произведениях континуумов // Докл. Болг. АН.— 1978.— *31*, № 10.— С. 1241—1244 (РЖМат, 1979, 6А453)
110. — О степени связности произведений континуумов // Сердика. Бълг. мат. списание.— 1979.— *5*, № 4.— С. 380—383 (РЖМат, 1980, 9А467)
111. *Чепмэн Т.* Лекции о Q-многообразиях.— М.: Мир, 1981.— 156 с. (РЖМат, 1982, 5А534К)
112. *Чигогидзе А. Ч.* О продолжении нормальных функторов // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1984, № 6.— С. 23—26 (РЖМат, 1985, 3А523)
113. —, *Пасынков Б. А.* О размерности произведений вполне регулярных топологических пространств // Сообщ. АН ГрузССР.— 1978.— *90*, № 3. — С. 553—556 (РЖМат, 1979, 2А360)
114. *Шапиро Л. Б.* Пространство замкнутых подмножеств D^{α_2} не является диадическим бикомпактом // Докл. АН СССР.— 1976.— *228*, № 6.— С. 1302—1305 (РЖМат, 1976, 12А559)
115. — О пространствах замкнутых подмножеств бикомпактов // Докл. АН СССР.— 1976.— *231*, № 2.— С. 295—298 (РЖМат, 1977, 4А495)
116. — О пространствах вероятностных мер // Успехи мат. наук.— 1979.— *34*, вып. 2.— С. 219—220 (РЖМат, 1979, 10В2)
117. — О пространствах соабсолютных диадическим бикомпактам // Докл. АН СССР.— 1987.— *293*, № 5.— С. 1077—1081 (РЖМат, 1987, 10А457)
118. — Категорная характеристика гиперпространства // Успехи мат. наук.— 1988.— *43*, № 4.— С. 227—228 (РЖМат, 1989, 4А459)
119. *Щепин Е. В.* Вещественные функции и канонические множества в тихоновских произведениях и топологических группах // Успехи мат. наук.— 1976.— *31*, № 6.— С. 17—27 (РЖМат, 1977, 5А381)
120. — Топология предельных пространств несчетных обратных спектров // Успехи мат. наук.— 1976.— *31*, № 5.— С. 191—226 (РЖМат, 1977, 3А431)
121. — Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук.— 1981.— *36*, вып. 3.— С. 3—62 (РЖМат, 1981, 10А429)
122. — Метод обратных спектров в топологии бикомпактов // Мат. заметки. — 1982.— *31*, № 2.— С. 299—315 (РЖМат, 1982, 6А455)
123. *Albrecht F.* Asupra spatiului multimilor închise al unui spatiu compact // Comun. Acad. R. P. Române.— 1953.— *3*, № 1-2.— С. 13—17 (РЖМат, 1955, 1689)
124. *Anderson R. D., Bing R. H.* A complete elementary proof that Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines // Bull. Amer. Math. Soc.— 1968.— *74*, № 5.— С. 771—792 (РЖМат, 1970, 8А379)
125. *Aoki Y.* Orthocompactness of inverse limits and products // Tsukuba J. Math.— 1980.— *4*, № 2.— С. 241—255 (РЖМат, 1981, 7А477)
126. *Artico G., Moresco R.* Notes on topologies and uniformities of hyperspaces // Rend. Semin. Univ. Padova.— 1980.— *63*.— С. 51—60 (РЖМат, 1981, 9А373)
127. *Baayen P. C.* Maximal lynked systems in topology.— In: Gen. Topol. and Relat. Modern Anal. and Algebra IV. Proc. 4-th Prague Topol. Symp., 1976, Part B. Prague, 1977.— С. 28—36 (РЖМат, 1978, 6А512)
128. *Bagley R. W., Weddington D. D.* Product of k'-spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *22*, № 2.— С. 392—394 (РЖМат, 1970, 3А492)
129. *Bandt C.* On the metric structure of hyperspaces with Hausdorff metric // Math. Nachr.— 1986.— *129*.— С. 175—183 (РЖМат, 1987, 8А495)
130. *Barr M., Wells C.* Toposes, triples and theories.— New York e. a.: Springer, 1985.— *IX*.— 345 с. (РЖМат, 1985, 8А369К)
131. *Bell M.* Hyperspaces of finite subsets // Math. Centre Tracts. Amsterdam. 1979.— № 115.— С. 15—28 (РЖМат, 1980, 7А479)
Math. Soc.— 1984.— *281*, № 2.— С. 717—724 (РЖМат, 1984, 12А536)
132. — Supercompactness of compactifications and hyperspaces // Trans. Amer.
133. —, *Ginsburg J., Todorcĕvič S.* Countable epread of expY and λY // Topol. and Appl.— 1982.— *14*, № 1.— С. 1—12 (РЖМат, 1983, 1А514)

134. *Borges C. R.* Normality of hyperspaces // Math. jap.— 1980.— *25*, № 4.— С. 507—510 (РЖМат, 1981, 4А488)
135. — Retraction properties of hyperspaces // Math. jap.— 1985.— *30*, № 4.— С. 551—557 (РЖМат, 1986, 4А707)
136. — Hyperconnectivity of hyperspaces // Math. jap.— 1985.— *30*, № 5.— С. 757—761 (РЖМат, 1986, 5А622)
137. — LECs, local mixers, topological groups and special products // J. Austral. Math. Soc.— 1988.— *A44*, № 2.— С. 252—258 (РЖМат, 1988, 11А608)
138. *Borsík J., Doboš J.* On a product of metric spaces // Math. Slovaca (ČSSR).— 1981.— *31*, № 2.— С. 193—205 (РЖМат, 1981, 8А487)
139. *Bott R.* On the third symmetric potency of S^1 // Fundam. math.— 1952.— *39*, № 3.— С. 264—268 (РЖМат, 1954, 3642)
140. — On symmetric products and Steenrod squares // Ann. Math., Ser. 2.— 1953.— *57*, № 3.— С. 579—590
141. *Boxer L.* Hyperspaces where convergence to a calm limit implies eventual shape equivalence // Fundam. math.— 1983.— *115*, № 3.— С. 213—222 (РЖМат, 1984, 3А641)
142. *Brown M.* A note on cartesian products // Amer. J. Math.— 1969.— *91*, № 1.— С. 32—36 (РЖМат, 1970, 3А617)
143. *Cauty R.* Produits symétriques de rétractes absolus de voisinage // C. r. Acad. sci. Paris.— 1973.— *276*, № 5.— С. 359—361 (РЖМат, 1973, 7А503)
144. *Charatonik J. J.* Contractibility and continuous selections // Fundam. math.— 1980.— *108*, № 2.— С. 109—118 (РЖМат, 1981, 1А542)
145. Charatonik W. J. Hyperspaces and the property of Kelley // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math.— 1982.— *30*, № 9—10.— С. 457—459 (РЖМат, 1983, 10А473)
146. — On the property of Kelley in hyperspaces // Lect. Notes Math.— 1984.— *1060*.— С. 7—10 (РЖМат, 1985, 1А668)
147. — Homogeneity is not a Whitney property // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *92*, № 2.— С. 311—312 (РЖМат, 1985, 9А400)
148. — A continuum *X* which has no confluent Whitney map for 2^X // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *92*, № 2.— С. 313—314 (РЖМат, 1985, 9А401)
149. — Pointwise smooth dendroids have contractible hyperspaces // Bull. Pol. Acad. Sci. Math.— 1985.— *33*, N 7—8.— С. 409—412 (РЖМат, 1986, 5А643)
150. — A metric on hyperspaces defined by Whitney maps // Proc. Amer. Math. Soc.— 1985.— *94*, № 3.— С. 535—538 (РЖМат, 1986, 2А568)
151. *Čerin Z., Sostak A. P.* Fundamental and approximative uniformity on the hyperspace // Glas. math.— 1981.— *16*, № 2.— С. 339—359 (РЖМат, 1982, 8А531)
152. *Chigogidze A.* On Baire isomorphisms of non-metrizable compacta // Comment. math. Univ. carol.— 1985.— *26*, № 4.— С. 811—820 (РЖМат, 1986, 8А633)
153. —, *Valov V.* Set-valued maps and $AE(0)$-spaces // Докл. Болг. АН.— 1988.— *41*, № 4.— С. 13—14 (РЖМат, 1988, 11А633)
154. *Čoban M.* Note sur topologie exponentielle // Fundam. math.— 1971.— *71*, № 1.— С. 27—41 (РЖМат, 1972, 2А596)
155. *Comfort W. W.* A nonpseudocompact product space whose finite subproducts are pseudocompact // Mat. Ann.— 1967.— *170*, № 1.— С. 41—44 (РЖМат, 1967, 10А365)
156. —, *Mill J. van.* On the product of homogeneous spaces // Topol. and Appl. — 1985.— *21*, № 3.— С. 297—308 (РЖМат, 1986, 6А747)
157. *Csazar A.* Normality in productive.— In: Topology, 4-th Colloq., Budapest, 1978, Vol. 1. Amsterdam e. a., 1980.— С. 323—341 (РЖМат, 1981, 4А461)
158. *Curtis D. W.* The hyperspace of subcontinua of Peano continuum // Lect. Notes Moth.— 1974.— *378*.— С. 108—118 (РЖМат, 1975, 2А513)

159. — Growth hyperspaces of Peano continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1978.— *238*.— С. 271—283 (РЖМат, 1978, 12А853)
160. — Hyperspaces homeomorphic to Hilbert space // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— *75*, № 1.— С. 126—130 (РЖМат, 1980, 2А499)
161. — Hyperspaces of Peano continua // Math. Centre Tracts. Amsterdam, 1979.— № 115.— С. 51—65 (РЖМат, 1980, 6А533)
162. — Hyperspaces of noncompact metric spaces // Compos. math.— 1980.— *40*, № 2.— С. 139—152 (РЖМат, 1980, 8А468)
163. — Application of a selection theorem to hyperspaces contractibility // Can. J. Math.— 1985.— *37*, № 4.— С. 747—759 (РЖМат, 1986, 4А706)
164. —, *Michael M.* Boundary sets for growth hyperspaces // Top. and Appl.— 1987.— *25*, № 3.— С. 269—283 (РЖМат, 1987, 9А605)
165. —, *Nguyen To Nhu.* Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$-dimensional linear metric spaces // Top. and Appl.— 1985.— *19*, № 3.— С. 251—260 (РЖМат, 1986, 3А684)
166. —, *Quinn J., Schori R. M.* The hyperspace of compact convex subsets of a polyhedral 2-cell // Houston J. Math.— 1977.— *3*, № 1.— С. 7—15 (РЖМат, 1977, 10А338)
167. —, *Schori R. M.* 2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the Hilbert cube // Bull. Amer. Math. Soc.— 1974.— *80*, № 5.— С. 927—931 (РЖМат, 1975, 6А618)
168. —, — Hyperspaces which characterize symple homotopy type // Gen. Topol. and Appl.— 1976.— *6*, № 2.— С. 153—165 (РЖМат, 1976, 11А669)
169. —, — Hyperspaces of polyhedra are Hilbert cubes // Fundam. math.— 1978.— *99*, № 3.— С. 189—197 (РЖМат, 1978, 11А539)
170. —, — Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes // Fundam. math. — 1978.— *101*, № 1.— С. 19—38 (РЖМат, 1979, 6А448)
171. *Day J. M., Kuratowski K.* On the nonexistence of a continuous selector for arcs lying in the plane // Indag. math.— 1966.— *28*, № 2.— С. 131—132 (РЖМат, 1967, 4А379)
172. *Diamont P., Kloeden P.* A note on compact sets in spaces of subsets // Bull. Austral. Math. Soc.— 1988.— *38*, № 3.— С. 393—395 (РЖМат, 1989, 6А446)
173. *Dijkstra J. J.* A rigid space whose square is the Hilbert space // Proc. Amer. Math. Soc.— 1985.— *93*, № 1.— С. 118—120 (РЖМат, 1986, 1А658)
174. *Ditor S. Z., Eifler L. Q.* Some open mapping theorems for measures // Trans. Amer. Math. Soc.— 1972.— *164*.— С. 278—293 (РЖМат, 1972, 11Б707)
175. —, *Haydon R.* On absolute retracts, $P(S)$, and complemented subspaces of $C(D_{\omega}$ // Stud. Math.— 1976.— *56*, № 3.— С. 243—251 (РЖМат, 1977, 5Б347)
176. *Dold A.* Homology of symmetric products and other functors of complexes // Ann. Math.— 1958.— *68*, № 1.— С. 54—80 (РЖМат, 1961, 5А367)
177. — Decomposition theorem for $S(n)$-complexes // Ann. Math.— 1962.— *75*, № 1.— С. 8—16 (РЖМат, 1963, 8А263)
178. —, *Puppe D.* Homologie nicht-additiver Funktoren // Andwendungen. Ann. Inst. Fourier.— 1961.— *11*.— С. 201—312 (РЖМат, 1962, 1А332)
179. —, *Thom R.* Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkten // Ann. Math. Ser. 2.— 1958.— *67*, № 2.— С. 239—281 (РЖМат, 1959, 2481)
180. *Dorsett C.* Local connectedness, connectedness im kleinen, and other properties of hyperspaces of R_0 spaces // Мат. весн.— 1979.— *3*, № 2.— С. 113—123 (РЖМат, 1981, 3А491)
181. — Connectedness in hyperspaces // J. Natur. Sci. and Math.— 1982.— *22*, № 1.— С. 61—70 (РЖМат, 1982, 11А416)
182. — Local connectedness in hyperspaces // Rend. Circ. mat. Palermo.— 1982.— *31*, № 1.— С. 137—144 (РЖМат, 1982, 11А417)

183. — Product spaces and semi-separation axioms // Period. math. hung.— 1982.— *13*, № 1.— C. 39—45 (РЖМат, 1983, 1А503)
184. — Connectivity properties in hyperspaces and product spaces // Fundam. math.— 1984.— *121*, № 3.— C. 189—197 (РЖМат, 1985, 6А430)
185. *Douwen E. K. van, Goodykoontz J. T., Jr.* Aposyndesis in hyperspaces and Čech—Stone remainders.— In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif. May 28—31, 1980. New York e. a., 1981.— C. 43—52 (РЖМат, 1983, 5А460)
186. *Drešević M. M.* On inverse limit of function spaces // Publ. Inst. math.— 1973.— *15*.— C. 47—54 (РЖМат, 1974, 5А529)
187. *Eberhart C.* Continua with locally connected Whitney continua // Houston J. Math.— 1978.— *4*, № 2.— C. 165—173 (РЖМат, 1979, 3А448)
188. —, *Nadler S. B., Jr.* The dimension of certain hyperspaces // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1971.— *19*, № 11.— C. 1027—1034 (РЖМат, 1972, 4А553)
189. —, — Hyperspaces of cones and fans // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— *77*, N 2.— C. 279—288 (РЖМат, 1980, 5А476)
190. —, — Irreducible Whitney levels // Houston J. Math.— 1980.— *6*, № 3.— C. 355—363 (РЖМат, 1981, 7А505)
191. —, —, *Nowell W. O., Jr.* Spaces of order arcs in hyperspaces // Fundam. math.— 1981.— *112*, № 2.— C. 11—120 (РЖМат, 1981, 11А519)
192. *Eda Katsuya.* A note on the hereditary properties in the products space // Tsukuba J. Math.— 1980.— *4*, № 2.— C. 157—159 (РЖМат, 1981, 8А488)
193. *Eilenberg S., Moore J.* Adjoint functors and triples // Ill. J. Math.— 1965. — *9*, № 3.— C. 381—398 (РЖМат, 1966, 10А262)
194. *Engelen F. van.* Countable products of zero-dimensional absolute $F_{\sigma\delta}$-spaces // Proc. Kon. Ned. Acad. Wetensch.— 1984.— *A87*, № 4.— C. 391—399 (РЖМат, 1985, 5А503)
195. *Fedorchuk V. V.* On hypermaps which are trivial bundles // Lect. Notes Math.— 1984.— *1060*.— C. 26—36 (РЖМат, 1985, 1А667)
196. — Absolute retracts and some functors.— In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra 5. Berlin, 1983.— C. 174—182 (РЖМат, 1983, 11А673)
197. *Fisher B.* A reformulation of the Hausdorff metric // Rostock Math. Kolloq.— 1983.— № 24.— C. 71—76 (РЖМат, 1984, 4А553)
198. *Fort K., Jr., Segal J.* Minimal representations of the hyperspace of a continuum // Duke Math. J.— 1965.— *32*, № 1.— C. 129—137 (РЖМат, 1966, 8А328)
199. *Francaviglia S., Lechnicki A., Levi S.* Quasiuniformization of hyperspaces and convergence of nets of semicontinuous multifunctions // J. Math. Anal. and Appl.— 1985.— *112*, № 2.— C. 347—370 (РЖМат, 1986, 8А629)
200. *Friedler L. M., Dickman R. F., Jr. Krystock R. L.* Hyperspaces of H-closed spaces // Can. J. Math.— 1980.— *32*, № 5.— C. 1072—1079 (РЖМат, 1981, 8А490)
201. *Frolik Z.* Sums of ultrafilters // Bull. Amer. Math. Soc.— 1967.— *73*, № 1.— C. 87—91 (РЖМат, 1967, 10А364)
202. *Ganea T.* Contractibilitatea producelor simetrice // Stud. cerc. mat.— 1953.— *4*, № 1-2.— C. 23—28 (РЖМат, 1955, 3108)
203. — Symmetrische Potenzen topologischer Räume // Math. Nachr.— 1954.— *11*, № 4/5.— C. 305—316 (РЖМат, 1955, 3109)
204. — Produse semitrice di spatii topologice // Commun. Acad. R. P. Romîne.— 1954.— *4*, № 11—12.— C. 561—563 (РЖМат, 1955, 5667)
205. *Gazik R. J.* Uniform convergence for a hyperspace // Proc. Amer. Math. Soc.— 1974.— *42*, № 1.— C. 302—306 (РЖМат, 1975, 1А539)
206. *Ginsburg J.* A note on G_δ-closure and the realcompactness of 2^X // Gen. Top. and Appl.— 1976.— *6*, № 3.— C. 319—326 (РЖМат, 1977, 3А401)
207. *Goodykoontz J. T., Jr.* Nonlocally connected continuum X such that $C(X)$ is a retract of 2^X // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *91*, № 2.— C. 312—322 (РЖМат, 1985, 1А669)

208. — Aposyndetic properties of hyperspaces // Pacif. J. Math.— 1973.— *47*, № 1.— С. 91—98 (РЖМат, 1974, 3А368)
209. — Connectedness im kleinen and local connectedness in 2^X and $C(X)$ // Pacif. J. Math.— 1974.— *53*, № 2.— С. 387—398 (РЖМат, 1975, 6А619)
210. — Some functions on hyperspaces of hereditarily unicoherent continua // Fundam. Math.— 1977.— *95*, № 1.— С. 1—10 (РЖМат, 1977, 12А577)
211. — $C(X)$ is not necessarily a retract of 2^X // Proc. Amer. Math. Soc.— 1977.— *67*, № 1.— С. 177—178 (РЖМат, 1978, 9А476)
212. — Hyperspaces of arc-smooth continua // Houston J. Math.— 1981.— *7*, № 1.— С. 33—41 (РЖМат, 1982, 3А562)
213. — Arc-smoothness in hyperspaces // Topol. and Appl.— 1983.— *15*, № 2. — С. 131—150 (РЖМат, 1983, 6А524)
214. — Some retraction and deformation retraction on 2^X and $C(X)$ // Topol. and Appl.— 1985.— *21*, № 2.— С. 121—133 (РЖМат, 1986, 6А749)
215. — Geometric models of Whitney levels // Houston J. Math.— 1985.— *11*, № 1.— С. 75—89 (РЖМат, 1985, 10А527)
216. —, *Nadler S. B., Jr.* Whitney levels in hyperspaces of certain Peano continua // Trans. Amer. Math. Soc.— 1982.— *274*, № 2.— С. 671—694 (РЖМат, 1983, 8А535)
217. *Gray N. K.* Unstable points in the hyperspace of connected subsets // Pacif. J. Math.— 1967.— *23*, № 3.— С. 515—520 (РЖМат, 1968, 7А463)
218. — On the conjecture $2^X \approx I^\omega$ // Fundam. Math.— 1969.— 66, № 1.— С. 45—52 (РЖМат, 1970, 5А393)
219. *Grispolakis J., Nadler S. B., Jr., Tymchatyn E. D.* Some properties of hyperspaces with applications to continua theory // Can. J. Math.— 1979. — *31*, № 1.— С. 197—210 (РЖМат, 1979, 9А493)
220. —, *Tymchatyn E. D.* Embedding smooth dendroids in hyperspaces // Can. J. Math.— 1979.— *31*, № 1.— С. 130—138 (РЖМат, 1979, 9А492)
221. —, — Irreducible continua with degenerate end-tranches and arcwise accessibility in hyperspaces // Fundam. math.— 1980.— *110*, № 2.— С. 117—130 (РЖМат, 1981, 7А499)
222. —, — On a characterization of W-sets and the dimension of hyperspaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *100*, № 3.— С. 557—563 (РЖМат, 1988, 2А596)
223. *Groot J. de.* On some problems of Borsuk concerning a hyperspace of compact sets // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. wetensch.— 1956.— *A29*, И 1.— С. 95—103; Indag. math.— 1956.— *18*, № 1.— С. 95—103 (РЖМат, 1956, 7224)
224. —, *Jensen G. A., Verbeek A.* Superextension. In: Proc. Int. Symp. Topol. and its Appl. Herceg—Novi, 1968. Beograd.— 1969.— С. 176—178 (РЖМат, 1971, 6А528)
225. *Hagopian C. L.* Products of hereditarily indecomposable continua are λ-connected // Fundam. Math.— 1983.— *119*, № 3.— С. 217—226 (РЖМат, 1985, 1А678).
226. *Harvey J. M.* Categorical characterization of uniform hyperspaces // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1983.— № 2.— С. 229—233 (РЖМат, 1984, 6А489)
227. *Haydon R.* On problem of Pelczynski: Milutin spaces, Dugundji spaces and $AE(\dim 0)$ // Stud. Math.— 1974.— *52*, № 1.— С. 23—31 (РЖМат, 1975, 7А632)
228. *Hechler S. H.* Exponents of some N-compact spaces // Isr. J. Math.— 1973.— *15*, № 4.— С. 384—395 (РЖМат, 1974, 9А542)
229. *Heisey R. E., West J. E.* Orbit spaces of the hyperspace of a graph which are Hilbert cubes // Colloq. math.— 1988.— *56*, № 1.— С. 59—69 (РЖМат, 1989, 7А407)
230. *Henderson D. W.* A simplicial complex whose product with any ANR is a simplicial complex // Gen. Topol. and Appl.— 1973.— *3*, № 1.— С. 81—83 (РЖМат, 1973, 10А448)
231. — On the hypersapce of subcontinua of an arc-like continuum // Proc. Amer. Math. Soc.— 1971.— 27, № 2.— С. 416—417 (РЖМат, 1972, 3А461)

232. *Herrlich H.* Categorical topology 1971—1981. In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra. 5. Berlin, 1983.— С. 279—383 (РЖМат, 1983, 10А487)
233. *Hitchcock A. G.* Uniform hyperspaces and Hausdorff completions // J. London Math. Soc.— 1976.— *12*, № 4.— С. 505—512 (РЖМат, 1976, 11А573)
234. *Hohti A.* On supercomplete spaces. III // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986. — *97*, № 2.— С. 339—342 (РЖМат, 1987, 3А563)
235. *Husek M., Pelant J.* Extensions and restrictions in products of metric spaces // Top. and Appl.— 1987.— *25*, № 3.— С. 245—252 (РЖМат, 1987, 10А444)
236. *Illanes A. M.* Multicoherence of symmetric products // An. Inst. Math. UNAM.— 1985.— *22*.— С. 11—24 (РЖМат, 1986, 12А654)
237. — Monotone and open Whitney maps // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *98*, № 3.— С. 516—518 (РЖМат, 1987, 6А585)
238. — Irreducible Whitney levels with respect to finite and countable subsets // An. Inst. mat. UNAM.— 1986.— *26*. С. 59—64 (РЖМат, 1988, 2А597)
239. — A continuum X which is a retract of $C(X)$ but not of 2^X // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *100*, № 1.— С. 199—200 (РЖМат, 1987, 12А510)
240. — Cells and cubes in hyperspaces // Fundam. math.— 1988.— *130*, № 1. — С. 57—65 (РЖМат, 1989, 3А489)
241. *Ishii T.* A product formula for the Tychonoff functor.— In: Topology. 4-th Colloq. Budapest, 1978. Vol. 24. Amsterdam e. a. 1980.— С. 659—661 (РЖМат, 1981, 2А495)
242. *Jaworowski J. W.* Symmetric products of ANRs // Math. Ann.— 1971.— *192*, № 3.— С. 173—176 (РЖМат, 1971, 11А444)
243. — Symmetric product of ANR's associated with a permutation group // Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math.— 1972.— *20*, № 8.— С. 649—651 (РЖМат, 1973, 4А624)
244. *Kato H.* Concerning hyperspaces of certain Peano continua and strong regularity of Whitney maps // Pacif. J. Math.— 1985.— *119*, № 1.— С. 159—167 (РЖМат, 1986, 2А567)
245. — Shape properties of Whitney maps for hyperspaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1986.— *297*, № 2.— С. 529—546 (РЖМат, 1987, 5А576)
246. — The dimension of hyperspaces of certain 2-dimensional continua // Topol. and Appl.— 1988.— *28*, № 1.— С. 83—87 (РЖМат, 1988, 8А536)
247. — On admissible Whitney maps // Colloq. math.— 1988.— *56*, N 2.— С. 299—309 (РЖМат, 1989, 9А428)
248. — Shape equivalences of Whitney continua of curves // Can. J. Math.— 1988.— *40*, № 1.— С. 217—227 (РЖМат, 1988, 12А527)
249. — Whitney continua of graphs admit all homotopy types of compact connected ANRs // Fundam. math.— 1988.— *129*, № 3.— С. 161—166 (РЖМат, 1989, 3А490)
250. — Movability and strong Whitney-reversible properties // Topol. and Appl.— 1989.— *31*, № 2.— С. 125—132 (РЖМат, 1989, 9А431)
251. *Keesling J.* Normality and properties related to compactness in hyperspaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1970.— *24*, № 4.— С. 760—766 (РЖМат, 1971, 8А351)
252. *Kennedy J.* Compactifying the space of homeomorphisms // Colloq. math.— 1988.— *56*, № 1.— С. 41—58 (РЖМат, 1989, 8А619)
253. *Klee V.* Some topological properties of convex sets // Trans. Amer. Math. Soc.— 1955.— *78*, № 1.— С. 30—45 (РЖМат, 1956, 7448)
254. *Kodama Y., Spież S., Watanabe T.* On shape of hyperspaces // Fundam. Math.— 1978.— *100*, № 1.— С. 59—67 (РЖМат, 1978, 12А825)
255. *Koo Shu-Chung.* Recursive properties of transformation groups in hyperspaces // Math. Syst. Theory.— 1975.— *9*, № 1.— С. 75—82 (РЖМат, 1976, 3А503)
256. *Krasinkiewicz J.* Certain properties of hyperspaces // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math. astron. et phys.— 1973.— *21*, № 8.— С. 705—710 (РЖМат, 1974, 3А372)

257. — On hyperspaces of snake-like and circle-like continua // Fund. Math.— 1973.— *83*, № 2.— C. 155—164 (РЖМат, 1974, 6A608)
258. — On the hyperspaces of hereditarily indecomposable continua // Fundam. Math.— 1974.— *84*, № 3.— C. 175—186 (РЖМат, 1974, 10A396)
259. — On the hyperspaces of certain plane continua // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math. astron. et phys.— 1975.— *23*, № 9.— C. 981—983 (РЖМат, 1976, 6A504)
260. —, *Nadler S. B., Jr.* Whitney properties // Fund. math. 1978. *98*, № 2.— 165—180 (РЖМат, 1978, 9A447)
261. *Kroonenberg N.* Pseudointeriors of hyperspaces // Compos. math.— 1976. — *32*, № 2.— C. 113—131 (РЖМат, 1977, 5A429)
262. *Lau A. Y. W.* A note on monotone maps and hyperspaces // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math. astron. et phys.— 1976.— *24*, № 2.— C. 121—123 (РЖМат, 1976, 10A309)
263. —, *Voas C. H.* Connectiones of the hyperspaces of closed connected subsets // Rocz. Pol. tow. mat.— 1978.— Ser. 1.— *20*, № 2.— C. 393—396 (РЖМат, 1979, 8A476)
264. *Lawson J. D.* Applications of topological algebra to hypersopce problems // Topology. New York—Basel, 1976.— C. 201—206 (РЖМат, 1977, 9A589)
265. *Lechnicki A., Levi S.* Wijsman convergence in the hyperspaces of metric space // Rend. Circ. Math. Palermo.— 1986.— *34*, Suppl., № 8.— C. 297—299 (РЖМат, 1987, 6A584)
266. —, — Wijsman convergence in the hyperspace of a metric space // Boll. Unione mat. ital.— 1987.— *B 1*, № 2.— C. 439—451 (РЖМат, 1987, 11A596)
267. *Liao S. D.* On the topology of cyclic products of spheres // Trans. Amer. Math. Soc.— 1954.— *77*.— C. 520—551 (РЖМат, 1956, 5162)
268. *Lončar I.* Relative continuity of the functor β // Czechosl. Math. J.— 1987. — *37*, № 4.— C. 517—521 (РЖМат, 1988, 6A571)
269. *Lowen-Colebunders E.* On the uniformization of the hyperspace of closed convergence // Math. Nachr.— 1982.— *105*.— C. 35—44 (РЖМат, 1983, 2A406)
270. — On the convergence of closed and compact sets // Pacif. J. Math.— 1983.— *108*, № 1.— C. 133—140 (РЖМат, 1984, 3A639)
271. *Lynch M.* Whitney properties for 1-dimensional continua // Acad. Bull. pol. sci. Sér. sci. math.— 1987.— *35*, № 7—8.— C. 473—478 (РЖМат, 1988, 7A579)
272. —, Whitney levels in $C_p(X)$ are ARs // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *97*, № 4.— C. 748—750 (РЖМат, 1987, 1A557)
273. *Mackowiak T.* Contractible and nonselectible dendroids // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math.— 1985.— *33*, № 5-6.— 321—324 (РЖМат, 1986, 3A698)
274. —, Continuous selections for $C(X)$ // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1978.— *26*, № 6.— C. 547—551 (РЖМат, 1979, 4A541)
275. *Mc Allister B. L.* Hyperspaces and multi-functions. The first half century (1900—1950) // Nieuw. arch. wisk.— 1978.— *26*, № 2.— C. 309—329 (РЖМат, 1979, 1A592)
276. *Marjanović M. M.* Exponentially complete spaces I. // Glass. math.— 1971. — *6*, № 1.— C. 143—147 (РЖМат, 1972, 2A629)
277. — Exponentially complete spaces // Publ. Inst. Math.— 1972.— № 13.— C. 77—79 (РЖМат, 1973, 5A501)
278. — Exponentially complete spaces III // Publ. Inst. Math.— 1972.— № 14. — C. 97—109 (РЖМат, 1974, 1A474)
279. — Spaces homeomorphic to their hyperspaces — In: Proc. Intern. Symp. Topol. and Appl., Budva, 1972. Beograd, 1973.— C. 167—169 (РЖМат, 1974, 9A552)
280. —. Exponentially complete spaces IV // Publ. Inst. Math.— 1973.— № 16. — C. 101—109 (РЖМат, 1974, 9A551)

281. — Some questions, related to hyperspaces.— In: Gen. Topol. and Relat. Modern Anal. and Algebra IV. Proc. 4-th Prague Topol. Symp., 1976. Part B. Prague, 1977.— C. 276—278 (РЖМат, 1978, 6A513)
282. — Spaces X^{ω} for zero-dimensional X // Bull. Cl. sci. math. et natur. Sci. math. / Acad. Serbe sci. et arts.— 1988.— *47*, № 16.— C. 23—26 (РЖМат, 1989, 7A409)
283. —, *Vrečica S. T.* Another hyperspaces representation of the Hilbert cube // Bull. Acad. Serbe. sci. et arts.— 1985.— *88*, № 14.— C. 11—19 (РЖМат, 1985, 12A549)
284. —, —, *Živaljević R. T.* Some properties of hyperspaces of higher rank // Bull. Acad. Serbe sci. et arts.— 1984.— *84*, № 13.— C. 103—117 (РЖМат, 1985, 3A517)
285. —, *Cucemilović A. R.* Two non-homeomorphic countable spaces having homeomorphic squares // Comment. Math. Univ. carol.— 1985.— *26*, № 3.— C. 579—588 (РЖМат, 1986, 6A746)
286. *Masih S.* Fixed points of symmetric product mappings of polyhedra and metric absolute neighborhood retracts // Fund. Math.— 1973.— *80*.— C. 149—156 (РЖМат, 1974, 4A404)
287. *Maxwell C. N.* Fixed points of symmetric products mappings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1957.— *8*, № 4.— C. 808—815 (РЖМат, 1959, 2477)
288. *Michael E.* On a map from a function space to a hyperspace // Math. Ann. — 1965.— *162*, № 1.— C. 87—88 (РЖМат, 1966, 5A308)
289. — Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable cartesian products // Compos. math.— 1971.— *23*, № 2.— C. 199—214 (РЖМат, 1971, 12A557)
290. *Michael M.* Some hyperspaces homeomorphic to separable Hilbert space.— In: Gen. Topol. and Mod. Anal. Proc. Conf., Riverside, Calif., May 28—31, 1980. New York e. a., 1981.— C. 291—294 (РЖМат, 1983, 5A436)
291. *Milgram R.* The homology of symmetric products // Trans Amer. Math. Soc.— 1969.— *138*.— C. 251—265 (РЖМат, 1970, 3A600)
292. *Mill J. van.* Superextensions and Wallman spaces // Math. Centre Tracts, № 85. Amsterdam, 1977
293. — Recent results on superextensions.— In: Gen. Topol. and Relat. Modern Anal. and Algebra IV. Proc. 4-th Prague Topol. Symp., 1976, Part B. Prague, 1977.— C. 279—283 (РЖМат, 1978, 6A511)
294. — A pseudo-interior of λ. I // Compos. math.— 1978.— *36*, № 1.— C. 75—82 (РЖМат, 1978, 10A385)
295. — The superextension of the closed unit interval is homeomorphic to the Hilbert cube // Fund. math.— 1979.— *103*, № 3.— C. 151—175 (РЖМат, 1979, 12A560)
296. — Superextensions of metrizable continua are Hilbert cubes // Fund. math.— 1980.— *107*, № 3.— C. 201—224 (РЖМат, 1981, 3A500)
297. — A Peano continuum homeomorphic to its own square but not to its countable infinite product // Proc. Amer. Math. Soc.— 1980.— *80*, № 4.— C. 703—705 (РЖМат, 1981, 7A504)
298. — A rigid space X for which $X \times X$ is homogeneous, an application of infinite-dimensional topology // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— *83*, № 3. — C. 597—600 (РЖМат, 1982, 4A558)
299. —, *Schrijver A.* Superextensions which are Hilbert cubes // Period. Math. hung.— 1979.— *10*, № 1.— C. 15—24 (РЖМат, 1979, 7A527)
300. —, *Vel M. van de.* Path connectedness, contractibility, and LC-properties of superextensions // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys. — 1978.— *26*, № 3.— C. 261—269 (РЖМат, 1978, 12A826)
301. —, On superextensions and hyperspaces // Math. Centre Tracts. Amsterdam, 1979.— № 115.— C. 169—180 (РЖМат, 1980, 7A481)
302. —, — Subbases, convex sets, and hyperspaces // Pacif. J. Math.— 1981. — *92*, № 2.— C. 389—402 (РЖМат, 1981, 12A488)
303. *Milovančević D.* Some relations between hyperspaces of nearly compact

spaces // Zb. rad. fil. fak. Nišu. Ser. mat.— 1987.— *1*.— C. 55—59 (РЖМат, 1988, 6А570)

304. *Misra A. K.* A note on arcs in hyperspaces // Acta Math. hung.— 1985.— *45*, № 3-4.— C. 285—288 (РЖМат, 1986, 2А569)

305. *Mizokami T.* Cardinal functions on hyperspaces // Colloq. math.— 1979.— *41*, № 2.— C. 201—205 (РЖМат, 1981, 4А490)

306. *Molski R.* On symmetric products // Fundam. math.— 1957.— *44*.— C. 165—170 (РЖМат, 1958, 5605)

307. *Morales P.* A note on the topology of C-convergence in hyperspaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— *52*.— C. 469—470 (РЖМат, 1976, 8А639)

308. *Morita K.* Completion of hyperspaces of compact subsets and topological completion of open-closed maps // Gen. Topol. and Appl.— 1974.— *4*, № 3.— C. 217—233 (РЖМат, 1975, 6А614)

309. — On the dimension of the product of topological spaces // Tsukuba J. Math.— 1977.— *1*.— C. 1—6 (РЖМат, 1978, 12А884)

310. *Morton H. N.* Symmetric products of the circle // Proc. Camb. Philos. Soc.— 1967.— *63*, № 2.— C. 349—352 (РЖМат, 1968, 3А480)

311. *Mršević M.* On connectivity properties of hyperspaces of R_0-spaces // Мат. весн.— 1979.— *3*, № 4.— C. 451—458 (РЖМат, 1981, 7А494)

312. *Nadler S. B., Jr.* Some problems concerning hyperspaces // Lect. Notes Math.— 1974.— *375*.— C. 190—197 (РЖМат, 1974, 9А553)

313. — Some basic connectivity properties of Whitney map inverses in $C(X)$ // Stud. Topol. New York e. a. 1975.— C. 393—410 (РЖМат, 1976, 8А663)

314. — Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic // Trans. Amer. Math. Soc.— 1977.— *320*.— C. 321—345 (РЖМат, 1978, 2А496)

315. — A characterization of locally connected continua by hyperspace retractions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1977.— *67*, № 1.— C. 167—176 (РЖМат, 1978, 9А478)

316. — Hyperspaces of sets. A text with research questions. New York—Basel: Marsel Dekker, 1978.— XIV.— 708 с. (РЖМат, 1979, 2А340К)

317. — Continua whose hyperspace is a product // Fundam. math.— 1980.— *108*, № 1.— C. 49—66 (РЖМат, 1981, 3А492)

318. — Induced universal maps and some hyperspaces with the fixed point property // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *100*, № 4.— C. 749—754 (РЖМат, 1988, 3А643)

319. —, *Quinn J.* Continua whose hyperspace and suspension are homeomorphic // Gen. Topol. and Appl.— 1978.— *8*, № 2.— C. 119—126 (РЖМат, 1978, 11А538)

320. —, —, *Stavrakas N. M.* Hyperspaces of compact convex sets. II // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math., astron. et phys.— 1977.— *25*, № 4.— C. 381—385 (РЖМат, 1978, 3А326)

321. —, —, — Hyperspaces of compact convex sets // Pacif. J. Math.— 1979.— *83*, № 2.— C. 441—462 (РЖМат, 1980, 7А478)

322. *Nakaoka M.* Cohomology of the three-fold symmetric products of spheres // Pacif. J. Math.— 1955.— *31*, № 10.— C. 670—672 (РЖМат, 1958, 1915)

323. *Nepomnjaščii G.* A spectral characterization of absolute multivalued retracts.— In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra. 5. Berlin, 1983.— C. 507—510 (РЖМат, 1983, 10А502)

324. *Nguyen To Nhu.* Investigating the *ANR*-property of metric spaces // Fundam. math.— 1984.— *124*, № 3.— C. 243—254 (РЖМат, 1985, 7А621)

325. *Nishiura T., Rhee Choon-Jai.* Cut points of X and the hyperspace of subcontinua $C(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— *82*, № 1.— C. 143—154 (РЖМат, 1981, 12А502)

326. —, — Contractibility of the hyperspaces of subcontinua // Houston J. Math. 1982.— *8*, № 1.— C. 119—127 (РЖМат, 1983, 2А405)

327. *Nitta Shin-ichi.* A note on superextensions of product spaces // Math. jap. — 1987.— *32*, № 1.— C. 75—79 (РЖМат, 1987, 8А497)

328. *Ohta H.* Realcompactness of hyperspaces and extensions of openclosed

maps // Topol. and Appl.— 1984.— *17*, № 3.— С. 215—274 (РЖМат, 1985, 3А513)

329. *Oka S.* Tychonoff functor and product spaces // Proc. Jap. Acad.— 1978. — *A54*, № 4.— С. 97—100 (РЖМат, 1978, 12А829)
330. *Okuyama A.* Note on hyperspaces consisting of compact sets // Math. jap. — 1979.— *24*, № 3.— С. 301—305 (РЖМат, 1980, 4А519)
331. — Some relationships between function spaces and hyperspaces.— In: Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra. 5. Berlin, 1983.— С. 507—535 (РЖМат, 1983, 10А474)
332. *Olędski J.* On symmetric products // Fundam. math. 1988.— *131*, № 3.— С. 185—190 (РЖМат, 1989, 7А406)
333. *Pełczynski A.* A remark on space 2^X for zero-dimensional X // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1965.— *13*, № 2.— С. 85—89 (РЖМат, 1967, 4А341)
334. *Petrus A.* Contractibility of Whitney continua in $C(X)$ // Gen. Topol. and Appl.— 1978.— *9*, № 3.— С. 275—288 (РЖМат, 1979, 4А540)
335. *Pol E.* On the dimension of the product of metrizable spaces // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1978.— *26*, № 6.— С. 525—534 (РЖМат, 1979, 5А457)
336. *Polkowski L.* On N. Noble's theorems concerning powers of spaces and mappings // Colloq. math.— 1979.— *41*, № 2.— С. 215—217 (РЖМат, 1981, 3А489)
337. *Popov V.* On the subspaces of exp$X$.— In: Topology. 4th Colloq., Budapest, 1978, Vol. 2. Amsterdam e. a., 1980.— С. 977—984 (РЖМат, 1981, 4А489)
338. *Proctor C. W.* A characterization of absolutely C^*-smooth continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *92*, № 2.— С. 293—296 (РЖМат, 1985, 9А399)
339. *Przymusinski T. C.* On the dimension of product spaces and an example of M. Wage // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— *76*, № 2.— С. 315—321 (РЖМат, 1980, 4А544)
340. — Normality and paracompactness in finite and countable Cartesian products // Fundam. math.— 1980.— *105*, № 2.— С. 87—104 (РЖМат, 1980, 8А470)
341. — Products of perfectly normal spaces // Fundam. math.— 1980.— *108*, № 2.— С. 129—136 (РЖМат, 1981, 1А511)
342. *Rallis N.* Periodic points of symmetric product mappings // Fundam. math. — 1983.— *117*, № 1.— С. 61—66 (РЖМат, 1984, 1А519)
343. — A fixed point index theory for symmetric product mappings // Manuscr. math.— 1983.— *44*, № 1.— С. 279—308 (РЖМат, 1984, 1А532)
344. *Rhee C. J.* On dimension of the hyperspace of pseudo-circle // Bull. Soc. roy. sci. Liege.— 1974.— *43*, № 1-2.— С. 5—8 (РЖМат, 1974, 10А381)
345. — M-set and the contractibility of $C(X)$ // Bull. Soc. roy. sci. Liege.— 1987.— *56*, № 7.— С. 55—70 (РЖМат, 1987, 9А604)
346. *Rogers J. T., Jr.* Dimension of hyperspaces // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1972.— *20*. № 2.— С. 177—179 (РЖМат, 1972, 8А569)
347. — The cone-hyperspace property // Can. J. Math.— 1972.— *24*, № 2.— С. 279—285 (РЖМат, 1972, 10А334)
348. — Whitney continua in the hyperspace $C(X)$ // Pacif. J. Math.— 1975.— *58*, № 2.— С. 569—584 (РЖМат, 1976, 7А613)
349. — The Whitney subcontinua of $C(X)$ // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.— 1976.— *24*, № 2.— С. 125—127 (РЖМат, 1976, 11А583)
350. — Dimension and the Whitney subcontinua of $C(X)$ // Gen. Topol. and Appl.— 1976.— *6*, № 1.— С. 91—100 (РЖМат, 1976, 7А614)
351. — Applications of Vietoris—Begle theorem for multivalued maps to the cohomology of hyperspoces // Mich. Math. J.— 1976.— *22*, № 4.— С. 315—319 (РЖМат, 1977, 2А581)

352. *Schmidt H.-J.* Hyperspaces topologies induced by extensions.— In: Proc. Conf. Topol. and Meas. III Vitte / Hiddensee, Oct. 19—25. 1980, Part 2. Greifswald, 1982.— С. 251—257 (РЖМат, 1983, 4А581)
353. — Hyperspaces of quotient and subspaces. I. Hausdorff topological spaces // Math. Nachr.— 1981.— *104*.— С. 271—280 (РЖМат, 1982, 11А418)
354. — Hyperspaces of quotient and subspaces. II. Metrizable spaces // Math. Nachr.— 1981.— *104*.— С. 281—288 (РЖМат, 1982, 11А419)
355. — Topologies of the hyperspaces which are induced by extension spaces // Math. Nachr.— 1984.— *118*.— С. 105—113 (РЖМат, 1985, 4А542)
356. *Schori R. M.* Hyperspaces and symmetric products of topological spaces // Fundam. math. 1968.— *63*, № 1.— С. 77—88 (РЖМат, 1969, 3А399)
357. — Inverse limits and near-homeomorphism techniques in hyperspace problems // Lect. Notes Math.— 1974.— *378*.— С. 421—428 (РЖМат, 1975, 2А502)
358. —, *West J. E.* 2^I is homeomorphic to the Hilbert cube // Bull. Amer. Math. Soc.— 1972.— *78*, № 3.— С. 402—406 (РЖМат, 1972, 12А389)
359. —, — The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert cube // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— *213*.— С. 217—235 (РЖМат, 1976, 7А615)
360. *Segal J.* Hyperspaces of the inverse limit space // Proc. Amer. Math. Soc. — 1959.— *10*, № 5.— С. 706—709 (РЖМат, 1961, 5А328)
361. — A fixed point theorem for the hyperspace of a snakelike continuum // Fundam. math.— 1962.— *50*, № 3.— С. 237—248 (РЖМат, 1962, 10А212)
362. *Sekanina M.* Hyperspaces and algebras.— In: Proc. Conf. Topol. and Meas. 2. Rostock—Warnemünde, Oct. 24 — Nov. 2. 1977, Part I (Sect. A), Greifswald, 1980.— С. 139—145 (РЖМат, 1982, 8А530)
363. *Sherling D. D.* Concerning the cone-hyperspace property // Can. J. Math. — 1983.— *35*, № 6.— С. 1030—1048 (РЖМат, 1984, 11А445)
364. *Smith D. H.* A note on complete hyperspaces // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1956.— *52*, № 3.— С. 602—604 (РЖМат, 1957, 2955)
365. — The Borel structure of a hyperspace // Proc. Cambridge Philos. Soc.— 1967.— *63*, № 4.— С. 947—948 (РЖМат, 1968, 11А382)
366. *Smith M.* Concerning the homeomorphisms of the pseudo-arc X as a subspace of $C(X\times X)$ // Houston J. Math.— 1986.— *12*, № 3.— С. 431—440 (РЖМат, 1987, 10А456)
367. *Spanier E.* Infinite symmetric products, function spaces and duality // Ann. Math.— 1959.— *69*, № 1.— С. 142—192 (РЖМат, 1962, 1А331)
368. *Stanojević M.* On hyperspace of compact subsets of k-spaces // Zb. rad. fil. fak. Nišu. Ser. mat. Univ. Nišu.— 1988.— *2*.— С. 55—60 (РЖМат, 1989, 5А388)
369. *Stein S. K.* The homology of the two-fold symmetric product // Ann. Math. — 1954.— *59*, № 3.— С. 570—583 (РЖМат, 1955, 3124)
370. *Swan R.* The homology of cyclic products // Trans. Amer. Math. Soc.— 1960.— *95*.— С. 27—68 (РЖМат, 1961, 2А211)
371. *Świrszcz T.* Monadic functors and convexity // Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. sci. mat., astron. et phys.— 1974.— *22*, № 1.— С. 39—42
372. *Szankowski A.* Projective potencies and multiplicative extension operators // Fundam. Math.— 1970.— *67*, № 1.— С. 97—113 (РЖМат, 1971, 1А399)
373. *Tanaka Y.* Products of sequential spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976. — *54*.— С. 371—375 (РЖМат, 1977, 1А458)
374. —, *Shou Hao-Xuan.* Products of closed images of *CW*-complexes and *k*-spaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1984.— *92*, № 3.— С. 465—469 (РЖМат, 1985, 10А500)
375. *Todorcěvić S.* Remarks on cellularity in products // Comp. Math.— 1986. — *57*, № 57.— С. 357—372 (РЖМат, 1986, 10А566)
376. *Todorov V. T.* On the connectedness of products of spaces // Докл. Болг. АН.— 1986.— *39*, № 5.— С. 5—8 (РЖМат, 1987, 2А501)
377. *Toruńczyk H.* On CE-images of the Hilbert cube and characterization of

Q-manifolds // Fundam. math.— 1980.— *106*, № 1.— С. 39—40 (РЖМат, 1980, 12А533)
378. —, *West J.* A Hlbert space limit for the iterated hyperspace functor // Proc. Amer. Math. Soc. 1983.— *89*, № 2.— С. 329—335 (РЖМат, 1984, 6А494)
379. *Transue W. R. R.* On the hyperspace of subcontinua of the pseudoarc // Proc. Amer. Math. Soc.— 1967.— *18*, № 6.— С. 1074—1075 (РЖМат, 1968, 7А449)
380. *Trnkova V.* Homeomorphisms of powers of metric spaces // Comment. math. Univ. carol.— 1980.— *21*, № 1.— С. 41—53 (РЖМат, 1980, 9А454)
381. *Tsuda K.* Some examples concerning the dimension of product spaces // Mat. jap.— 1982.— *27*, № 2.— С. 177—195 (РЖМат, 1982, 10А443)
382. *Turzański M.* Remarks on superextensions // Colloq. math.— 1980 (1981). — *43*, № 2.— С. 243—249 (РЖМат, 1982, 1А622)
383. *Tymchatyn E. D.* Hyperspaces of hereditarily indecomposable plane continua // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— *56*.— С. 300—302 (РЖМат, 1977, 3А455)
384. *Uspenskii V.* For any X, the product $X \times Y$ is homogeneous for some Y // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *87*, № 1.— С. 187—188 (РЖМат, 1983, 7А491)
385. *Valov V. M.* Another characterization of AE(0)-spaces // Pacif J. Math.— 1987.— *127*, № 1.— С. 199—208 (РЖМат, 1987, 9А621)
386. — Milutin mappings and AE(0)-spaces // Докл. Болг. АН.— 1987.— *40*, № 11.— С. 9—12 (РЖМат, 1988, 4А476)
387. — Yet another characterization of $AE(0)$-spaces // Мат. и мат. образ.: Докл. 17 пролет. конф. Съюза мат. България, Слънчев бряг, 6—9 апр. 1988.— София, 1988.— С. 147—150 (РЖМат, 1989, 5А406)
388. *Vel M. van de.* The fixed point property of supereztensions.— In: Gen. Topol. and Relat. Modern. Anal. and Algebra IV. Proc. 4-th Prague Topol. Symp., 1976. Part B. Prague, 1977.— С. 477—480 (РЖМат, 1978, 6А532)
389. — Dimension of convex hyperspaces: nonmetric case // Compos. math.— 1983.— *50*, № 1.— С. 95—108 (РЖМат, 1984, 4А548)
390. — Dimension of convex hyperspaces // Fundam. Math.— 1984.— *122*, № 2.— С. 100—127 (РЖМат, 1985, 1А709)
391. *Verbeek A.* Superextensions of topological spaces // Math. Centre Tracts, № 41. Amsterdam, 1972.— 155 с. (РЖМат, 1973, 6А518)
392. *Vora C. S.* Symmetric G-products of A—ANR // Publ. Ist. math. Univ. Genova.— 1972.— *30*.— 13 с. (РЖМат, 1973, 3А501)
393. — Fixed points of symmetric product mappings of a metric manifolds // Fundam. Math.— 1974.— *85*.— № 1.— С. 19—24 (РЖМат, 1975, 1А575)
394. — Fixed points of certain symmetric product mappings of a compact A—ANR // Math. Stud. 1974 (1975).— *42*, № 1-4.— С. 379—396 (РЖМат, 1977, 2А585)
395. *Wage M. L.* The dimension of product spaces // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1978.— *75*, № 10.— С. 4671—4672 (РЖМат, 1979, 6А452)
396. *Wagner C.* Symmetric, cyclic, and permutation products on manifolds.— Dissert. Math. Rozprawy matematyszne.— 1980.— *182*.— С. 3—48
397. *Ward L. E. Jr.* Extending Whitney maps // Pacif. J. Math.— 1981.— *93*, № 2.— С. 465—469 (РЖМат, 1982, 1А615)
398. — Local selections and local dendrites // Topol. and Appl.— 1985.— *20*, № 1.— С. 47—58 (РЖМат, 1986, 3А696)
399. *Wattel E.* Superextensions, embedded in cubes // Math. Centre Tracts. Amsterdam, 1979.— № 116.— С. 305—317 (РЖМат, 1980, 7А480)
400. — A hereditarily separable compact ordered space X for which λX is not first countable // Math. Centre Tracts. Amsterdam, 1979.— № 116.— С. 319—321 (РЖМат, 1980, 6А510)
401. *West J. E.* Infinite products which are Hilbert cubes // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— *81*, № 1.— С. 163—165 (РЖМат, 1975, 11А555)
402. *Wójcicka M.* Note on the Baide category in spaces probability measures on nonseparable metrizable spaces // Bull. Pol. Acad. Sci. Math.— 1985.— *33*, № 5-6.— С. 305—311 (РЖМат, 1986, 3А708)

403. *Wong R. Y. T.* Some remarks on hyperspaces // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— *21*, № 3.— С. 600—602 (РЖМат, 1969, 11А418)
404. *Wyler O.* Algebraic theory of continuous lattices // Lect. Notes Math.— 1981.— *871*.— С. 390—413 (РЖМат, 1982, 3А351)
405. *Xie Lin.* Some results on the local compactness of hyperspaces // Шусюэ сюэбао = Acta math. sin.— 1983.— *26*, № 6.— С. 650—656 (РЖМат, 1984, 6А490)
406. *Zenor P.* Hereditary $\mathfrak{M}$-separability and hereditary m-Lindelöf property in product spaces and function spaces // Fundam. Math.— 1980.— *106*, № 3.— С. 175—180 (РЖМат, 1981, 1А514)

Дополнительная литература

407. *Величко Н. В.* О пространстве замкнутых подмножеств // Сиб. мат. ж.— 1975.— *16*, № 3.— С. 627—629 (РЖМат, 1975, 12А474)
408. *Малыхин В. И., Шапировский Б. Э.* Аксиома Мартина и свойства топологических пространств // Докл. АН СССР.— 1973.— *213*, № 3.— С. 532—535 (РЖМат, 1974, 3А349)
409. *Keesling J.* On equivalence of normality and compactness in hyperspaces // Pasif. J. Math.— 1970.— *33*, № 3.— С. 657—667 (РЖМат, 1971, 2А421)

УДК 517.974+517.977.5+515.164.174

ГИЛЬБЕРТОВЫ МНОГООБРАЗИЯ С УГЛАМИ КОНЕЧНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ И ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

С. А. Вахрамеев

Статья содержит полное изложение результатов, частично анонсированных в работах автора [12], автора и А. А. Аграчёва [6], [49]; ее основное содержание составляет один из возможных вариантов теории Пале—Смейла [62], [65], приспособленный для изучения задач оптимального управления. Необходимость модификации указанной теории вытекает из специфики задач оптимального управления: в отличие от задач классического вариационного исчисления для них характерны ограничения типа неравенств, например, ограничения на управления, ограничения на фазовые координаты, ограничения на правый конец допустимых траекторий и т. п. Неравенства нарушают гладкую структуру задачи и поэтому необходимость изучать пространства с особенностями заложена уже в самой постановке задач оптимального управления.

В § 1 этой статьи рассматриваются классические теории Морса и Пале — Смейла, в связи с задачами оптимального управления. Здесь же описывается класс управляемых систем (системы постоянного ранга), который в известной мере ограничивает рамки применимости этих теорий в оптимальном управлении. Ниже, впрочем, будет показано, что этот класс является также естественным и для предлагаемой в § 2 их модификации. Системы постоянного ранга были введены А. А. Аграчёвым и автором в [4], [5] (см. также [11], [13]), в связи с исследованием условий релейности экстремальных управлений; они образуют достаточно широкий класс управляемых систем, содержащий интересные для приложений управляемые системы, возникающие в классической механике.

Далее, в § 1 доказывается, что для функционала

$$\int_0^T f^0(x, u)\,dt,$$

определенного на траекториях линейной по управлению системы постоянного ранга

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m}u^i g_i(x), \quad x \in M,$$

выполнено условие (C) Пале—Смейла, если гладкий интегрант $f^0(x, u)$ удовлетворяет некоторым условиям роста и основному условию эллиптичности (усиленному условию Лежандра)

$$(f^0_{uu}(x, u)\xi, \xi) \geqslant \mu(x)|\xi|^2$$

с функцией $\mu \geqslant 0$, отделенной от нуля на компактных подмножествах фазового пространства. Следует отметить, что для весьма частного случая систем постоянного ранга в работе [16] было доказано условие (C) Пале—Смейла для квадратичного функционала

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt.$$

В определенной мере указанная работа стимулировала исследования автора. Наконец, в этом параграфе рассматриваются простейшие примеры применения теории, в частности, указывается необходимое условие глобальной управляемости систем постоянного ранга и двойственный результат о кратности критических точек для соответствующих задач оптимизации.

В § 2 излагаются основные результаты статьи. Сначала рассматривается конечномерный случай. Здесь приводятся лишь формулировки и основные идеи доказательств — полному изложению конечномерной теории будет посвящена отдельная публикация. Далее вводится понятие гильбертова подмногообразия с углами (конечной коразмерности) и для него строится аналог теории Пале—Смейла: доказывается общая теорема существования (при выполнении обобщенного условия (C)) и выводятся неравенства Морса. Наконец, указывается класс задач оптимального управления, попадающий под действие абстрактной теории.

Автор выражает искреннюю благодарность А. А. Аграчёву и Р. В. Гамкрелидзе за внимание к этой работе.

Некоторые обозначения

Основные обозначения (в том числе и не совсем традиционные) вводятся в основном тексте статьи. Здесь мы ограничимся лишь некоторыми из них.

Как обычно, через $\mathbb{R}^n$ обозначается n-мерное евклидово пространство со стандартным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$; его элементы $x, y, \ldots$ обозначаются, как правило, латинскими буквами и трактуются как вектор-столбцы

$$x=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y^1\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix},\ \ldots .$$

Двойственное (сопряженное) пространство $\mathbf{R}_n$ вектор-строк $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_n)$ конечно, можно отождествить с $\mathbf{R}^n$, однако мы этого не делаем, поскольку используем также и матричное умножение вектор-строки на вектор-столбец одинаковых размерностей,

$$\psi\cdot x=(\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n)\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}=\sum_{=1}^{n}\psi_i x^i$$

(совпадающее, разумеется, со скалярным произведением (ψ, x), если все-таки отождествить $\mathbf{R}^n$ с $\mathbf{R}_n$).

Через $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_x$ мы обозначаем *риманову структуру* на (не обязательно конечномерном) многообразии M, то есть гладкое сечение расслоения (над M) невырожденных симметричных билинейных форм. Угольными скобками $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ без индексов обозначается также как действие ковектора $\omega_x \in T_x^*M$ на касательный вектор $X_x \in T_xM$, так и действие гладкой 1-формы ω на векторное поле X. Эти обозначения согласованы в том смысле, что при трактовке точки $x \in M$ как мультипликативного функционала $x: C^\infty(M)\to\mathbf{R}$ на алгебре $C^\infty(M)$ всех гладких на M функций (гладкость ниже всегда означает бесконечную дифференцируемость) — см. п. 1.2, имеет место соотношение

$$x\langle\omega, X\rangle=\langle\omega_x,\ X_x\rangle,\ X\in\mathrm{Der}\, M,\ \omega\in\mathrm{Der}^*M.$$

Символ $f_{*,x}$ мы закрепляем за *дифференциалом* (*касательным отображением*) отображения $f: M\to N$, где M, N — гладкие многообразия. Если $N=\mathbf{R}$, то *дифференциалом* d_xf в точке x называется также гладкое сечение кокасательного расслоения (расслоения 1-форм над M). Здесь не возникает терминологической путаницы, если учесть связь

$$f_{*,x}X_x=\langle d_xf, X_x\rangle\left.\frac{d}{dt}\right|_x,$$

где $\frac{d}{dt}$ — стандартное векторное поле на числовой прямой $\mathbf{R}$.

Далее, символ d_xf используется также и для обозначения дифференциала в точке x гладкого отображения f из банахова пространства $\mathscr{X}$ в банахово пространство $\mathscr{Y}$; высшие дифференциалы $d_x^m f$ этого отображения определяются обычным образом, например, $d_x^2 f$ — это симметричное билинейное отображение $\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ и т. д.

В случае, когда M регулярно вложено в банахово пространство $\mathscr{X}$ (или в $\mathbf{R}^d$, когда $\dim M<\infty$), касательное пространство T_xM отождествляется с аффинной плоскостью $x+L_x$, где $L_x\subset$

$\subset\mathscr{X}$ — подпространство в $\mathscr{X}$. Соответственно, векторные поля X, Y, ... на M отождествляются с гладкими (d-мерными при $\dim M<\infty$) функциями, касающимися многообразия M в каждой его точке. При этом (в случае конечномерного M) 1-формы ω отождествляются с гладкими вектор-строками и имеет место соотношение

$$\langle\omega_x,\ X_x\rangle = x\langle\omega,\ X\rangle = \omega_x\cdot X_x,$$

где справа стоит произведение строки $\omega_x=(\omega_{x,1},\ldots,\omega_{x,d})$ на столбец

$$X_x=\begin{pmatrix} X_x^1 \\ \vdots \\ X_x^d \end{pmatrix}.$$

Стандартные обозначения типа $L_2^m[0,T]$ (множество m-мерных интегрируемых с квадратом функций на $[0,T]$) мы используем в дальнейшем без каких-либо пояснений.

Если M — риманово многообразие (возможно, бесконечномерное), то через $\nabla f(x)$ обозначается *градиент* (гладкой) функции $f: M\to\mathbf{R}$ в точке x:

$$\langle\nabla f(x), X_x\rangle_x \overset{\text{def}}{=} \langle d_x f,\ X_x\rangle.$$

Градиент определяет гладкое векторное поле ∇f, называемое ниже *градиентным*; решения задачи Коши

$$\dot\varphi_t(x)=\nabla f(\varphi_t(x)),\quad \varphi_0(x)=x,$$

называются в дальнейшем *градиентными траекториями*.

§ 1. Теория Морса и задачи оптимального управления

1.1. Классические теории. В классической *теории Морса* основным объектом исследования являются *множества уровня*

$$f_a=\{x\in M\,|\,f(x)\leqslant a\}$$

гладкой функции f на (конечномерном) римановом многообразии M. Ядро этой теории составляют *неравенства Морса*, связывающие топологические характеристики многообразия M (числа Бетти и эйлерову характеристику) с количеством критических точек определенного индекса.

Именно, пусть $f: M\to\mathbf{R}$ — *собственная функция Морса* на M, то есть функция обладающая только невырожденными критическими точками и такая, что $f^{-1}(K)$ компактно для любого компакта $K\subset\mathbf{R}$. Обозначим через $\tilde c_i(f)$ количество критических точек f индекса i, а через $b_i(M)$ — i-тое число Бетти многообразия M. Напомним, что $b_i(M)=\operatorname{rank} H_i(M)$, где $H_i(M)$ — i-тая группа сингулярных гомологий многообразия M с коэффициентами в некотором поле. Наконец, пусть $\chi(M)$ — (гомологическая) эйлерова характеристика M. Тогда для любого $m=0, 1, \ldots, n$, $n=\dim M$, имеют место

Неравенства Морса: если f ограничена снизу на M и имеет конечное число критических точек, то

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}b_i(M)\leqslant\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\tilde{c}_i(f),$$
$$b_i(M)\leqslant\tilde{c}_i(f),\quad i=0, 1, \ldots, m, \tag{1.1}$$
$$\chi(M)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\tilde{c}_i(f).$$

Заменяя f на $-f$ и полагая $c_i(f)=\tilde{c}_i(-f)$, мы приходим к аналогичным неравенствам

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}b_i(M)\leqslant\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}c_i(f),$$
$$b_i(M)\leqslant c_i(f),\quad i=0, \ldots, m, \tag{1.2}$$
$$\chi(M)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i(f),$$

где $c_i(f)$ обозначает количество критических точек f *коиндекса* (или *положительного индекса*) i.

В начале 60-х годов Пале и Смейл (см. [62], [65]) распространили этот результат на случай гильбертовых многообразий. Основная (и решающая в этом обобщении) трудность состояла в формулировке адекватного аналога требования компактности — хорошо известно, что в бесконечномерном случае не существует собственных функций (локально компактное линейное топологическое пространство конечномерно [35]). Этими авторами было сформулировано условие (C), которое оказалось вполне достаточным для почти автоматического перенесения результатов конечномерной теории на гильбертов случай. Приведем основные результаты теории Пале—Смейла, предварительно напомнив некоторые понятия и факты теории бесконечномерных многообразий, что даст нам также возможность ввести обозначения, используемые в последующем изложении.

Пусть $\mathscr{M}$ — некоторое множество. *Атласом* на $\mathscr{M}$ называется совокупность пар $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha);\ \alpha\in A\}$, где $\{U_\alpha\}$ — покрытие $\mathscr{M}$ а $\varphi_\alpha : U_\alpha\to V_\alpha$ — биекции U_α на открытые подмножества V_α банаховых пространств E_α, такая, что сквозные отображения $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$: $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$, $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$: $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ являются гладкими отображениями; класс их гладкости определяет *класс гладкости атласа*. Пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ называется *картой* на $\mathcal{M}$. Любой атлас задает на $\mathcal{M}$ топологию, относительно которой φ_α^{-1} становятся гомеоморфизмами открытых подмножеств V_α на U_α. Далее, в случае, когда $\mathcal{M}$ связно, можно считать, что E_α совпадают с одним и тем же банаховым пространством E — это пространство называется *моделирующим*. Естественным образом вводится отношение эквивалентности атласов. Именно, говорят, что карта (U, φ) на $\mathcal{M}$ *совместима с атласом* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$, если отображения $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$, $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ — гладкие (с тем же классом гладкости) для любой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Два атласа *эквивалентны*, если они составлены из совместимых карт. Класс эквивалентных атласов на $\mathcal{M}$ называется *дифференцируемой структурой*, а само множество $\mathcal{M}$ с этой структурой — *банаховым многообразием*.

Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ — банаховы многообразия. Отображение $f: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *гладким*, если для любых карт (U, φ) и (V, ψ) на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно, гладким является *сквозное отображение*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(V).$$

В основном, рассматриваемые ниже многообразия будут возникать как подмногообразия заданного банахова (или гильбертова) пространства. Определим поэтому понятие подмногообразия. Пусть $\mathcal{M}$ — банахово многообразие, $\mathcal{N}$ — его подмножество и пусть для любого $y \in \mathcal{N}$ существует карта (U, φ) такая, что φ изоморфно отображает U на $V_1 \times V_2$ и $\varphi(\mathcal{N} \cap U) = V_1 \times \{a\}$ для некоторого $a \in V_2$. Тогда, очевидно, φ индуцирует отображение $\varphi_1: \mathcal{N} \cap U \to V_1$ и на $\mathcal{N}$ естественным образом возникает атлас. Заметим, что тогда $\mathcal{N}$ оказывается *локально замкнутым* в $\mathcal{M}$ (то есть представляется в виде пересечения открытого и замкнутого в $\mathcal{M}$ множества). Подмножество $\mathcal{N}$ с так определенной дифференциальной структурой называется (*вложенным*) *подмногообразием* в $\mathcal{M}$. Если еще $\mathcal{N}$ замкнуто в $\mathcal{M}$, то $\mathcal{N}$ называется *замкнутым подмногообразием*.

Пусть $\mathcal{M}$ — банахово многообразие, $x \in \mathcal{M}$. Рассмотрим тройку (U, φ, v), где (U, φ) — карта на $\mathcal{M}$, а v принадлежит банахову пространству, содержащему $\varphi(U)$. Говорят, что тройка (U, φ, v) *эквивалентна* тройке (V, ψ, w) если дифференциал $d_{\varphi(x)}\psi \circ \varphi^{-1}$ отображения $\psi \circ \varphi^{-1}$ переводит v в w:

$$d_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})(v) = w.$$

Класс эквивалентных троек называется *касательным вектором*, а множество касательных векторов образует *касательное пространство* $T_x\mathcal{M}$ к $\mathcal{M}$ в точке x. Эквивалентным образом касательный вектор к $\mathcal{M}$ в точке x можно определить как класс эквивалентности касающихся кривых: две кривые c', $c'': [0, 1] \to \mathcal{M}$ *эквивалентны*, если $c'(0) = c''(0) = x$ и для любой карты (U, φ) на $\mathcal{M}$ с центром в точке x

$$\frac{d}{dt}\varphi(c'(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi(c''(t))|_{t=0}.$$

Можно также (в случае бесконечно гладкого многообразия) дать определения касательного вектора как линейного функционала, удовлетворяющего правилу дифференцирования произведения и заданного на алгебре гладких функций на $\mathcal{M}$ (см. [9], [15], [18]). На касательном пространстве $T_x\mathcal{M}$, таким образом, возникает естественная структура банахова пространства, определяемая биективным отображением, сопоставляющим классу эквивалентности тройки (U, φ, v) вектор v.

Произвольное гладкое отображение $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ банаховых многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ определяет *дифференциал* $f_{*,x}$ (или *касательное отображение*) $f_{*,x}: T_x\mathcal{M}\to T_{f(x)}\mathcal{N}$. Оно задается с помощью локальных карт φ, ψ как дифференциал соответствующего сквозного отображения $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ и может быть описано так: если $c:[0, 1]\to\mathcal{M}$ гладкая кривая на $\mathcal{M}$, $c(0)=x$, то $f\circ c:[0, 1]\to\mathcal{N}$ — кривая на $\mathcal{N}$, $f\circ c(0)=f(x)$ и $f_{*,x}$ переводит класс эквивалентности кривой c в класс эквивалентности кривой $f\circ c$.

Остановимся теперь на некоторых способах задания банаховых многообразий, позволяющих смотреть на них как на «поверхности» в банаховых пространствах.

Пусть $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ — гладкое отображение банаховых многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ такое, что его дифференциал $f_{*,x}$ сюръективен и его ядро $\ker f_{*,x}$ *разлагает* при любом $x\in\mathcal{M}$ пространство $T_x\mathcal{M}$, то есть $T_x\mathcal{M}$ изоморфно прямой сумме $\operatorname{Ker} f_{*,x}\oplus L_x$, $L_x\subset T_x\mathcal{M}$ замкнуто. Тогда для $\forall y\in\mathcal{N}$, $f^{-1}(y)$ — подмногообразие в $\mathcal{M}$, а отображение $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ называется *субмерсией*.

Обобщением этой конструкции являются подмногообразия, возникающие как прообразы подмногообразий при трансверсальных отображениях.

Именно, пусть $\mathcal{W}\subset\mathcal{N}$ — подмногообразие в $\mathcal{N}$, $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ — гладкое отображение, такое, что композиция

$$T_x\mathcal{M}\xrightarrow{f_{*,x}}T_{f(x)}\mathcal{N}\xrightarrow{\pi}T_{f(x)}\mathcal{N}/T_{f(x)}\mathcal{W}$$

сюръективна при любом $x: f(x)\in\mathcal{W}$ и ее ядро разлагает $T_x\mathcal{M}$. В этом случае говорят, что отображение f *трансверсально* $\mathcal{W}$ и пишут $f\pitchfork\mathcal{W}$. Как и в конечномерном случае, если $f\pitchfork W$, то $f^{-1}(\mathcal{W})$ — подмногообразие в $\mathcal{M}$ той же коразмерности, что и $\mathcal{W}$ в $\mathcal{N}$. В конечномерном случае, как известно, условие трансверсальности эквивалентно условию

$$f_{*,x}T_x\mathcal{M}+T_{f(x)}\mathcal{W}=T_{f(x)}\mathcal{N}\quad \forall x: f(x)\in\mathcal{W}$$

(в § 2 понятие трансверсальности будет введено для гладких отображений многообразий с особенностями).

Пусть теперь $\mathcal{M}$ — *гильбертово многообразие*, то есть его моделирующим пространством является гильбертово пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Пусть (U, φ) — карта на $\mathcal{M}$. Тогда для скалярного произведения $\langle\cdot, \cdot\rangle_x$ на $T_x\mathcal{M}$

имеем

$$\langle u, v \rangle_x = (G_x^{\varphi}\varphi_{*,x}u, \varphi_{*,x}v) \ \forall u, v \in T_x\mathcal{M}.$$

Если $x \to G_x^{\varphi}$ — гладкое отображение из $\mathcal{M}$ в многообразие симметричных невырожденных отображений $\mathcal{H}$ для любой карты (U, φ), то говорят, что $\mathcal{M}$ — *риманово многообразие.*

Пусть $c:[0, 1] \to \mathcal{M}$ — гладкая кривая на $\mathcal{M}$. Ей можно сопоставить ее *длину*

$$l(c) = \int_0^1 \| \dot{c}(t) \|_{c(t)} dt, \quad \| \dot{c}(t) \|_{c(t)}^2 = \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle_{c(t)},$$

и на $\mathcal{M}$ возникает метрика

$$\rho(x, y) = \inf l(c),$$

где инфинум берется по всем гладким кривым c, соединяющим точки x и y, которая индуцирует на $\mathcal{M}$ топологию, совместимую с топологией $\mathcal{M}$ как (гильбертова) многообразия. Если $\mathcal{M}$ является полным как метрическое пространство с этой метрикой, то $\mathcal{M}$ называется *полным римановым многообразием.*

Пусть $\mathcal{M}$ — банахово многообразие, $f:\mathcal{M} \to \mathbf{R}$ — гладкая функция на $\mathcal{M}$. Говорят, что точка $x \in \mathcal{M}$ — *регулярная*, если

$$0 \neq f_{*,x} \Leftrightarrow d_x f \neq 0,$$

и критическая — в противном случае. Значение a функции f называется *регулярным*, если $f^{-1}(a)$ либо пусто, либо не содержит критических точек. Остальные значения называются *критическими.* Если a — регулярное значение, то $f^{-1}(a)$ является гладким многообразием, ибо его ядро тривиально, и, следовательно, разлагает $T_x\mathcal{M}$. В этом случае *множество уровня*

$$f_a = \{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \leqslant a\}$$

является гладким многообразием с краем $f^{-1}(a)$.

Пусть x — критическая точка f. Тогда в этой точке можно определить *гессиан* этой функции — симметричную билинейную форму $H_x(f)$ на касательном пространстве $T_x\mathcal{M}$ к $\mathcal{M}$ в точке x. Именно, если φ — карта на $\mathcal{M}$, то для $\forall u, v \in T_x\mathcal{M}$

$$H_x(f)(u, v) \overset{\text{def}}{=} d^2_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi_{*,x}u, \varphi_{*,x}v).$$

Каждому касательному вектору $u \in T_x\mathcal{M}$ форма $H_x(f)$ сопоставляет отображение

$$T_x(u) : v \mapsto H_x(f)(u, v) : T_x\mathcal{M} \to \mathbf{R}.$$

Если соответствие $u \mapsto T_x(u)$ — линейный изоморфизм $T_x\mathcal{M}$ на $T_x^*\mathcal{M}$, то говорят, что x — *невырожденная критическая точка.*

Это понятие определено, разумеется, когда класс гладкости многообразия и функции f достаточно велик. Однако в дальнейшем под термином «гладкость» мы всегда подразумеваем бесконечную дифференцируемость.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ — гильбертово многообразие, снабженное *римановой структурой* $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$. В этом случае существует симметричный оператор $A_x: T_x\mathcal{M}\to T_x\mathcal{M}$ такой, что

$$H_x(f)(u, v)=\langle A_x u, v\rangle_x \qquad \forall u, v\in T_x\mathcal{M}.$$

Условие невырожденности критической точки x состоит в том, что оператор A_x имеет ограниченный обратный.

Индексом критической точки x называется максимальная размерность подпространства, на котором форма $H_x(f)$ отрицательно определена

$$\operatorname{ind}_x f\overset{\text{def}}{=}\max_{L_x\subset T_x\mathcal{M}}\{\dim L_x \mid \langle A_x u, u\rangle_x<0 \quad \forall u\in L_x\setminus\{0\}\},$$

а *коиндексом* (или *положительным индексом*) — индекс формы $H_x(-f)$.

Лемма Морса. Если f — гладкая функция на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, 0 — ее невырожденное критическое значение и 0 — невырожденная критическая точка, то существует окрестность U нуля в $\mathcal{H}$ и сохраняющий начало координат диффеоморфизм $\varphi:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ такой, что

$$f(\varphi(u))=\|Pu\|^2-\|(I-P)u\|^2 \qquad \forall u\in U,$$

где $P:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ — *ортогональный проектор* (то есть симметричный оператор, удовлетворяющий условию $P^2=P$).

Эта лемма была установлена в [62] и обобщалась в различных направлениях, например, в работах [36], [55], [57], [64].

Основное *условие* (C) — «суррогат» условия собственности для гладкой функции $f:\mathcal{M}\to\mathbf{R}$ на римановом многообразии $\mathcal{M}$ формулируется следующим образом.

Обозначим через ∇f *градиент* этой функции: он определяется соотношением

$$\langle\nabla f(x), u\rangle_x=\langle d_x f, u\rangle \qquad \forall u\in T_x\mathcal{M}.$$

Условие C. Пусть S — подмножество $\mathcal{M}$, на котором функция f ограничена, а градиент ∇f этой функции *не отделен от нуля*, т. е.

$$\inf_{x\in S}\|\nabla f(x)\|_x=0.$$

Тогда существует критическая точка p функции f, принадлежащая замыканию $\bar{S}$ множества S.

Пусть $\varphi_t(x)$, $a<t<b$, — максимальная интегральная кривая векторного поля ∇f, исходящая из точки x в момент $t=0$ (вообще говоря, a, b могут быть как конечными, так и бесконечными). Пале и Смейл [62], [65] доказали, что справедлива

Теорема существования. Пусть $\mathcal{M}$ — полное риманово многообразие, $f:\mathcal{M}\to\mathbf{R}$ — гладкая функция на $\mathcal{M}$, для которой выполнено условие (C). Пусть $\mathscr{M}$ связно. Тогда, если f ограничена снизу (сверху) на $\mathscr{M}$, то f достигает своего минимального (максимального) значения на $\mathscr{M}$. При этом траектория $\varphi_t(x)$ градиентного поля ∇f для любого $x \in \mathscr{M}$ определена при всех $t \leqslant 0$ (при всех $t \geqslant 0$) и существует критическая точка p функции f, принадлежащая замыканию множества $\{\varphi_t(x);\ t \leqslant 0\}$ (множества $\{\varphi_t(x);\ t \geqslant 0\}$). Если все критические точки изолированы (в частности, если они невырождены), то существует предел

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x) \quad (\lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x))$$

и является критической точкой f.

Если теперь f — *функция Морса* на $\mathscr{M}$ (то есть функция, все критические точки которой невырождены и для которой выполнено условие (C)), то в условиях теоремы существования справедливы

Неравенства Морса. Пусть f — ограниченная снизу функция Морса на полном римановом многообразии $\mathscr{M}$. Тогда для любых $a \in \mathbf{R}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, справедливы неравенства

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} b_i(f_a) \leqslant \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \tilde{c}_i^a(f),$$

$$\sum_i (-1)^i \tilde{c}_i^a(f) = \chi(f_a),$$

где $\tilde{c}_i^a(f)$ — количество критических точек функции f индекса i на $f_a = \{x \in \mathscr{M} \mid f(x) \leqslant a\}$. В частности,

$$b_i(f_a) \leqslant \tilde{c}_i^a(f), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем последнее соотношение справедливо даже тогда, когда f не ограничена снизу — в этом случае $\tilde{c}_i^a(f)$ и $b_i(f_a)$ могут принимать бесконечные значения. В этих неравенствах учитываются количества $\tilde{c}_i^a(f)$ критических точек лишь конечного индекса — факт, связанный со стягиваемостью бесконечномерной сферы (см. [27]).

Этим неравенством можно придать и коиндексную форму — в этом случае нужно требовать, чтобы функция f была ограничена сверху и неравенства записываются для *множеств уровня* $f^a = \{x \in \mathscr{M} \mid f(x) \geqslant a\}$. Именно в такой форме они будут доказаны для случая гильбертовых многообразий с углами в § 2 этой статьи.

1.2. Приложения классических теорий к управляемым системам постоянного ранга. В этом пункте мы будем рассматривать *гладкие управляемые системы*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u^i g_i(x), \quad x \in M, \quad u \in \mathbf{R}^m, \quad x(0) = x_0, \tag{1.3}$$

на гладком конечномерном римановом многообразии M. Для удобства в дальнейшем мы будем считать, что M замкнуто вложено в евклидово пространство $\mathbf{R}^d$ (что всегда можно считать ввиду теоремы Уитни). В этом случае гладкие векторные поля f, g_i, $i=1, \ldots, m$, определяющие управляемую систему (1.3), могут быть отождествлены с гладкими d-мерными функциями на $\mathbf{R}^d$, касающимися M в каждой точке $x \in M$. Учитывая это обстоятельство, потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли следующим *условиям роста*:

$$(x, f(x)) \leqslant k_1(1+|x|^2), \quad (x, g_i(x)) \leqslant k_2(1+|x|^2),$$
$$i=1, \ldots m, \tag{1.4}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$, $|\cdot|$ — соответствующая евклидова норма, k_1, $k_2=\mathrm{const}>0$.

Условие (1.4) обеспечивает продолжимость на всю числовую ось траектории $x(t)=x(t;\, x_0,\, u(\cdot))$ системы (1.3), соответствующей управлению $u(\cdot) \in L_2^m(\mathbf{R})$ и начальному состоянию x_0. В самом деле, для любого $T>0$ существует такая ограниченная на ограниченных подмножествах $\mathbf{R}_+$ функция $\eta_{T,x_0}: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, что

$$\| x(\cdot) \|_{C^d[0,T]} \leqslant \eta_{T,x_0}(\| u(\cdot) \|_{L_2^m[0,T]}). \tag{1.5}$$

Для доказательства, заметим, во-первых, что

$$(x, f(x)) + \sum_{i=1}^{m} u^i(x, g_i(x)) \leqslant k_1(1+|x|^2) +$$
$$+ k_2(1+|x|^2) \sum_{i=1}^{m} |u^i| \leqslant (k_1 + \sqrt{m}\, k_2 |\hat{u}|)(1+|x|^2),$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbf{R}^m$. Поэтому для

$$R(t) = (1+|x(t)|^2) e^{\int_0^t (k_1+\sqrt{m}\, k_2 |u(\tau)|) d\tau}$$

имеем:

$$\frac{dR(t)}{dt} = 2(x(t), \dot{x}(t)) e^{\int_0^t (k_1+\sqrt{m}\, k_2 |u(\tau)|) d\tau} +$$
$$+ (|x(t)|^2+1)(k_1+\sqrt{m}\, k_2 |u(t)|) e^{\int_0^t (k_1+\sqrt{m}\, k_2 |u(\tau)|) d\tau} \leqslant$$
$$\leqslant 2(k_1 + \sqrt{m}\, k_2 |u(t)|)(1+|x(t)|^2) e^{\int_0^t (k_1+\sqrt{m}\, k_2 |u(\tau)|) d\tau} +$$
$$+ (k_1+\sqrt{m}\, k_2 |u(t)|)(1+|x(t)|^2) e^{\int_0^t (k_1+\sqrt{m}\, k_2 |u(\tau)|) d\tau} =$$
$$= 3(k_1 + \sqrt{m} k_2 |u(t)|) R(t).$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$R(t) \leqslant R(0) e^{3\int\limits_0^t (k_1+\sqrt{m}k_2 \,|\, u(\tau) \,|\,)\, d\tau},$$

откуда

$$|x(t)|^2 \leqslant 1 + |x(t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\int\limits_0^t (k_1+\sqrt{m}k_2 \,|\, u(\tau) \,|)\, d\tau} R(0) e^{3\int\limits_0^t (k_1+\sqrt{m}\, k_2 \,|\, u(\tau) \,|\, d\tau} =$$

$$= (1+|x_0|^2) e^{2\int\limits_0^t (k_1+\sqrt{m}\, k_2 \,|\, u(\tau) \,|)\, d\tau}.$$

Следовательно,

$$\|x(\cdot)\|_{C^d[0,T]} \leqslant \sqrt{(1+|x_0|^2)}\, e^{k_1 T} e^{\sqrt{m}\, k_2 \sqrt{T}\, \|u(.)\|_{L_2^m[0,T]}} \overset{\text{def}}{=\!=}$$

$$\overset{\text{def}}{=\!=} \eta_{T,x_0}(\|u(\cdot)\|_{L_2^m[0,T]}).$$

Нам потребуется ниже также и инвариантная запись системы (1.3) в рамках формализма хронологического исчисления (см. [9], [13], [15]).

Именно, точка x многообразия M может быть отождествлена с мультипликативным функционалом $x : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$; векторные поля f, g_i, $i=1, \ldots, m$, в этом контексте рассматриваются как *дифференцирования* алгебры $C^\infty(M)$ гладких функций на многообразии M. Если X — векторное поле на M, то композиция

$$x \circ X = X_x : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$$

является $\mathbf{R}$-линейным отображением, удовлетворяющим *правилу дифференцирования произведения*

$$X_x(ab) = X_x a \cdot (xb) + (xa) \cdot X_x b \qquad \forall a,\ b \in C^\infty(M),$$

и, следовательно, может быть рассмотрена как касательный вектор к M в точке x. Обозначим через $\operatorname{Der} M$ $C^\infty(M)$-*модуль всех* (*гладких*) *векторных полей* на M, через $T_x M$ и TM соответственно *касательное пространство* к M в точке x и *касательное расслоение* M; через $\operatorname{Der}^* M$, $T_x^* M$, $T^* M$ обозначаем *сопряжённый модуль* к $\operatorname{Der} M$ (то есть $C^\infty(M)$-модуль всех гладких 1-форм на M), *кокасательное пространство к* M в точке x и *кокасательное расслоение*.

В этих обозначениях система (1.3) записывается в инвариантном виде

$$\dot{x} = x \circ f + \sum_{i=1}^m u^i x \circ g^i. \qquad \mathbf{(1.6)}$$

Произвольное управление $u(\cdot)\in L_2^m(\mathbf{R})$ порождает *поток*

$$p_t=\overrightarrow{\exp}\int_0^t\left(f+\sum_{i=1}^m u^i(\tau)g_i\right)d\tau,\quad t\in\mathbf{R},\tag{1.7}$$

— абсолютно непрерывное семейство автоморфизмов $C^\infty(M)$. Применение с мультипликативного функционала x_0 (то есть точки многообразия M) к (1.7) даёт траекторию

$$x(t)=x(t;\,x_0,\,u(\cdot))=x_0\circ p_t,\ t\in\mathbf{R},$$

рассматриваемой системы, соответствующую управлению $u(\cdot)$ и начальному состоянию x_0.

Пусть p — автоморфизм алгебры $C^\infty(M)$. Тогда он определяет оператор $\mathrm{Ad}\,p:\mathrm{Der}\,M\to\mathrm{Der}\,M$ по формуле

$$\mathrm{Ad}\,p: X\mapsto p\circ X\circ p^{-1}\qquad \forall X\in\mathrm{Der}\,M.$$

С использованием этого оператора дифференциал (касательное отображение) соответствующего p диффеоморфизма $p:M\to M$ многообразия M (мы его обозначаем той же буквой) может быть записан в виде

$$p_{*,x}X_x=x\circ p\circ\mathrm{Ad}\,p^{-1}X=p(x)\circ\mathrm{Ad}\,p^{-1}X$$
$$\forall X\in\mathrm{Der}\,M,\ x\in M,\tag{1.8}$$

а для *сопряжённого оператора* $\mathrm{Ad}^*p:\mathrm{Der}^*M\to\mathrm{Der}^*M$ имеем соотношение

$$\langle\omega,\ \mathrm{Ad}\,pX\rangle=p^{-1}\langle\mathrm{Ad}^*p\omega,\ X\rangle$$
$$\forall\omega\in\mathrm{Der}^*M,\ X\in\mathrm{Der}\,M.\tag{1.9}$$

В частности, для потока

$$p_t=\overrightarrow{\exp}\int_0^t\left(f+\sum_{i=1}^m u^i(\tau)g_i\right)d\tau,\quad t\in\mathbf{R},$$

определяемого системой (1.6), сопряжённый оператор к $\mathrm{Ad}\,p_t$ выражается по формуле

$$\mathrm{Ad}^*p_t=\overleftarrow{\exp}\int_0^t -L_{\left(f+\sum\limits_{i=1}^m u^i(\tau)g_i\right)}d\tau,\tag{1.10}$$

где L_X — *производная Ли* по направлению векторного поля X:

$$L_X\omega=X\circ\omega-\omega\circ\mathrm{ad}\,X\ \ \forall\omega\in\mathrm{Der}^*M,$$

$\mathrm{ad}\,XY=[X,\,Y]$, $[X,\,Y]$ — *скобка Ли* (*коммутатор*) векторных полей $X,\,Y\in\mathrm{Der}\,M$: $[X,\,Y]=X\circ Y-Y\circ X$.

Конструкция сопряжённого оператора Ad^*p нам здесь необходима для того, чтобы дать инвариантную запись *сопряжен-*

ной системы

$$\dot{\psi} = -\psi\left(f_x(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u^i(t)\, g_{ix}(x(t))\right) \tag{1.11}$$

для системы (1.3) вдоль решения $(x(t), u(t))$. А именно, в интегральной форме (см. [13]) она записывается в виде

$$\langle \psi(0), X_{x_0} \rangle = \langle \psi(t), x(t)\circ \mathrm{Ad}^{-1} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(f + \sum_{i=1}^{m} u^i(\tau) g_i\right) d\tau X \rangle$$

$$\forall X \in \mathrm{Der}\, M; \quad \psi(t) \in T^*_{x(t)} M, \tag{1.12}$$

где через $\langle \omega_x, X_x \rangle$ обозначено действие ковектора $\omega_x \in T_x{}^* M$ на касательный вектор X_x. Угольными скобками мы также обозначаем и действие 1-формы $\omega \in \mathrm{Der}^* M$ на $X \in \mathrm{Der}\, M$; в этих обозначениях

$$x\langle \omega, X \rangle = \langle \omega_x, X_x \rangle \ \forall \omega \in \mathrm{Der}^* M,\ X \in \mathrm{Der}\, M,\ x \in M,$$

где x рассматривается как мультипликативный функционал.

Из представления (1.12) получаем, полагая $\psi(t) = \omega_{t, x(t)}$,

$$\langle \psi(0), X_{x_0} \rangle = \langle \psi(t), x(t)\circ \mathrm{Ad}^{-1} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(f + \sum_{i=1}^{m} u^i(\tau) g_i\right) d\tau X \rangle =$$

$$= \langle \omega_{0,x_0}, X_{x_0} \rangle = x(t) \langle \omega_t, \mathrm{Ad}^{-1} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(f + \sum_{i=1}^{m} u^i(\tau) g_i\right) d\tau X \rangle =$$

$$= x_0 \langle \mathrm{Ad}^{-1} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(f + \sum_{i=1}^{m} u^i(\tau) g_i\right)^* d\tau \omega_t, X \rangle;$$

откуда,

$$\omega_0 = \left(\mathrm{Ad}^{-1} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(f + \sum_{i=1}^{m} u^i(\tau) g_i\right) d\tau\right)^* \omega_t,$$

или, в силу (1.10),

$$\omega_t = \left(\mathrm{Ad}\, \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(f + \sum_{i=1}^{m} u^i(\tau) g_i\right) d\tau\right)^* \omega_0 =$$

$$= \overleftarrow{\exp} \int_0^t - L_{\left(f + \sum_{i=1}^{m} u^i(\tau) g_i\right)} d\tau \omega_0.$$

Таким образом, абсолютно непрерывное семейство 1-форм ω_t, $t \in \mathrm{R}$, $\omega_{t, x(t)} = \psi(t)$, удовлетворяет уравнению

$$\dot{\omega}_t = - L_{\left(f + \sum_{i=1}^{m} u^i(\tau) g_i\right)} \omega_t, \quad \omega_t|_{t=0} = \omega_0, \tag{1.13}$$

представляющему собой инвариантную запись сопряжённого уравнения (1.11).

После этих предварительных замечания опишем класс гладких управляемых систем, для которых может быть применена классическая теория, изложенная в п. 1.1.

С системой (1.3) (или, эквивалентно, с системой (1.6)) связано *отображение вход—выход*

$$F_{x_0,T}: u(\cdot) \mapsto x(T; x_0, u(\cdot)): L_2^m[0, T] \to M, \tag{1.14}$$

сопоставляющее произвольному допустимому управлению $u(\cdot) \in L_2^m[0, T]$ правый конец $x(T) = x(T; x_0, u(\cdot))$ траектории этой системы, соответствующий этому управлению и начальному состоянию x_0. Отображение $F_{x_0,T}$ является гладким отображением из $L_2^m[0, T]$ в M. Если это отображение имеет *постоянный ранг* для всех $u(\cdot) \in L_2^m[0, T]$ и $x_0 \in M$, $T > 0$ (то есть если не зависит от $u(\cdot) \in L_2^m[0, T]$ размерность образа $\mathrm{Im}(F_{x_0,T})_{*,u(\cdot)}$ дифференциала $(F_{x_0,T})_{*,u(\cdot)}$ этого отображения при всех $x_0 \in M$, $T > 0$), то система (1.6) называется *гладкой управляемой системой постоянного ранга* (см. [4], [5], [11] и [13]). *Множество достижимости*

$$\mathfrak{A}_{x_0}(T) = \{x(T; x_0\, u(\cdot));\ u(\cdot) \in L_2^m[0, T]\}$$

системы (1.6) постоянного ранга из начального состояния x_0 за время $T > 0$, как показано в [11], является гладким многообразием. Оказывается, что имеет место

Предложение 1.1. Пусть (1.6) — гладкая управляемая конечно определенная система постоянного ранга и $x_0 \in M$, $T > 0$ заданы. Тогда для любого гладкого подмногообразия $N \subset M$, трансверсального множеству достижимости $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ рассматриваемой системы, подмножество

$$\mathcal{N} = F_{x_0,T}^{-1}(N) \subset L_2^m[0, T]$$

является гильбертовым подмногообразием в $L_2^m[0, T]$. Если при этом N — замкнутое подмногообразие $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$, то $\mathcal{N}$ может быть наделено структурой полного риманова многообразия.

Доказательство. Отображение вход—выход $F_{x_0,T}$ может быть рассмотрено как гладкое отображение $L_2^m[0, T] \to \mathfrak{A}_{x_0}(T)$ и это отображение является сюръективной субмерсией. Если N трансверсально $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$, то пересечение $\mathfrak{A}_{x_0}(T) \cap N$ является гладким подмногообразием в $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ (см. [38]) и, следовательно, ввиду того, что оно имеет конечную коразмерность,

$$\mathcal{N} = F_{x_0,T}^{-1}(N \cap \mathfrak{A}_{x_0}(T)) = F_{x_0,T}^{-1}(N)$$

является гладким подмногообразием в $L_2^m[0, T]$, согласно результатам, приведенным в начале п. 1.1. Если N замкнуто в $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ то $\mathcal{N} = F_{x_0,T}^{-1}(N)$ замкнуто и поэтому $\mathcal{N}$ полно, если на нем рассмотреть риманову метрику, полученную сужением на $\mathcal{N}$ римановой метрики на $L_2^m[0, T]$. Предложение доказано.

В работах [4], [5], [11] были найдены условия на коммутаторы векторых полей, определяющих систему (1.6), при которых она имеет постоянный ранг. Напомним, что эти условия таковы: в окрестности произвольной точки $x \in M$ должно быть выполнено *условие конечной определённости* — для некоторого целого $s \geqslant 0$

$$\operatorname{ad}^{s+1} f g_i = \sum_{\alpha=0}^{s} \sum_{\beta=1}^{m} a_{\alpha\beta}^{si} \operatorname{ad}^{\alpha} f g_{\beta}, \quad i=1, \ldots, m, \tag{1.15}$$

и *условия релейности*

$$[g_j, \operatorname{ad}^k f g_i] = \sum_{\alpha=0}^{k} \sum_{\beta=0}^{m} a_{\alpha\beta}^{ijk} \operatorname{ad}^{\alpha} f g_{\beta}, \quad i, j=1, \ldots, m,$$
$$k=0, 1, \ldots, \tag{1.16}$$

с гладкими в этой окрестности функциями $a_{\alpha\beta}^{si}$, $a_{\alpha\beta}^{ijk}$. Условие конечной определённости может быть заменено на требование, чтобы векторные поля $f, g_i, i=1, \ldots, m$, были вещественно аналитическими на (вещественно аналитическом) многообразии M.

Общее необходимое и достаточное условие постоянства ранга системы (1.6) может быть сформулировано следующим образом [4], [11]. Пусть

$$\Pi_{x,T}(u(\cdot)) = \operatorname{span}\left\{x \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad}\left(f + \sum_{i=1}^{m} u^i(\tau) g_i\right) d\tau\, g_j,\right.$$
$$\left. 0 \leqslant t \leqslant T, \; j=1, \ldots, m\right\}.$$

Тогда система (1.6) является системой постоянного ранга в том и только том случае, если плоскость $\Pi_{x,T}(u(\cdot))$ не зависит от управления $u(\cdot) \in L_2^m[0, T]$ при любых $x \in M$, $T > 0$: $\Pi_{x,T}(u(\cdot)) = \Pi_{x,T}$. При этом, если выполнено условие конечной определённости (1.15), то плоскость $\Pi_{x,T}$ ещё и не зависит от $T: \Pi_{x,T} = \Pi_x \forall T > 0$, и определяет вполне интегрируемое распределение Π_x, $x \in M$, на M. Образующими этого распределения являются векторные поля

$$\operatorname{ad}^{\alpha}\left(f + \sum_{i=1}^{m} u^i g_i\right) g_j, \quad \alpha=0, 1, \ldots, \quad j=1, \ldots, m,$$

(при любом $u \in \mathbb{R}^m$), а множестве достижимости $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ является открытым подмножеством интегрального многообразия этого распределения, проходящего через точку

$$x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(f + \sum_{i=1}^{m} u^i(\tau)\, g_i \right) d\tau$$

для любого управления $u(\cdot) \in L_2^m[0, T]$.

Опишем теперь класс функционалов

$$J(u) = \int_0^T f^0(x, u)\, dt,$$

которые могут быть рассмотрены как гладкие функции на множестве траекторий системы (1.6), соединяющих точку x_0 с подмногообразием $N \subset M$, либо содержащемся в $\mathfrak{R}_{x_0}(T)$, либо трансверсальном ему, и которые удовлетворяют условию (C) Пале—Смейла.

Пусть $f^0: \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ (напомним, что M вложено в $\mathbf{R}^d$) — гладкая функция, удовлетворяющая *условию роста*

$$f^0(x, u) \geqslant k |u|^2, \quad k = \mathrm{const} > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^d,\ u \in \mathbf{R}^m, \tag{1.17}$$

такая, что для неё выполнено *условие Липшица*

$$|f_x^0(x, u) - f_x^0(y, u)| + |f_u^0(x, u) - f_u^0(y, u)| \leqslant L |x - y|, \quad L = \mathrm{const} > 0, \tag{1.18}$$

и частные производные f_x, f_u которой удовлетворяют *условиям роста*

$$|f_x^0(x, u)| + |f_u^0(x, u)| \leqslant b(x) + a|u|, \tag{1.19}$$

где $a = \mathrm{const} \geqslant 0$, $0 \leqslant b(x)$ — функция, ограниченная на ограниченных подмножествах $\mathbf{R}^d$.

Наконец, пусть интегрант f^0 удовлетворяет основному *условию эллиптичности*

$$(f^0_{uu}(x, u)\xi, \xi) \geqslant \mu(x) |\xi|^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}^d, \quad u \in \mathbf{R}^m, \quad \xi \in \mathbf{R}^m \tag{1.20}$$

с функцией $0 \leqslant \mu(x)$, отделённой от нуля на компактных подмножествах $\mathbf{R}^d$. Справедливо

Предложение 1.2. Пусть выполнены условия (1.4), (1.17)—(1.20). Тогда функционал

$$J(u) = \int_0^T f^0(x, u)\, dt,$$

определённый на множестве траекторий конечно определённой системы постоянного ранга (1.6), соединяющих x_0 с произвольным подмногообразием $N \subset M$, либо лежащим в $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$, либо трансверсальном $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$, является гладким отображением, удовлетворяющим условию (C).

Доказательство. В силу предложения 1.1, $\mathcal{N}=F_{x_0;T}^{-1}(N)$ — гильбертово подмногообразие в $L_2^m[0, T]$. То, что J — гладкая функция на $\mathcal{N}$, очевидно. Покажем, что для неё выполнено условие (C): если $S\subset\mathcal{N}$ — такое подмножество $\mathcal{N}$, что на S функционал J ограничен и на котором

$$\inf_{u\in S}\|\nabla J(u)\|_u=0,$$

то существует критическая точка J, принадлежащая $\bar{S}$.

Обозначим через P_u и Q_u ортогональные проекторы пространства $L_2^m[0, T]$ соответственно на смещённые в нуль касательное пространство $T_u\mathcal{N}$ и его ортогональное дополнение $(T_u\mathcal{N})^\perp$; поскольку $\mathcal{N}$ вложено в $L_2^m[0, T]$, то $T_u\mathcal{N}$ может быть отождествлено с аффинной плоскостью $u+\Pi_u$, где $\Pi_u\subset\subset L_2^m[0, T]$ — подпространство в $L_2^m[0, T]$. Таким образом P_u — это ортогональный проектор $L_2^m[0, T]$ на Π_u. Аналогично определяется проектор Q_u. Условие

$$\inf_{u\in S}\|\nabla J(u)\|_u=0$$

может быть записано в виде

$$\inf_{u\in S}\|P_uF(u)\|_{L_2^m[0,T]}=0,$$

где $F:L_2^m[0, T]\to L_2^m[0, T]$ — нелинейный оператор (*оператор Немыцкого*), определенный формулой

$$F(u)(t)=f_u^0(x(t), u(t)),\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

$x(\cdot)$ — траектория системы (1.6), соответствующая управлению $u(\cdot)\in L_2^m[0, T]$.

Заметим далее, что

$$Q_uF(u)(t)=(\varphi(t)g_1(x(t)), \ldots, \varphi(t)g_m(x(t)),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.21}$$

где $\varphi(t)\equiv\varphi(t; u(\cdot))\not\equiv 0$ — решение сопряженной неоднородной системы

$$\dot{\varphi}=f_x^0(x(t), u(t))-\varphi(f_x(x(t))+\sum_{i=1}^m u^i(t)\,g_{ix}(x(t)),$$

$$\varphi(t)\in T^*_{x(t)}\mathfrak{D}(t), \tag{1.22}$$

с краевым условием $\varphi(T)\in T^\perp_{x(T)}N$. Здесь $\mathfrak{D}(t)$ — приведенная орбита системы (1.6) — см. [13], [15], [68], [69], проходящая через точку $x(t)$, $T^\perp_{x(T)}N$ — ортогональное дополнение к $T_{x(T)}N$. $T^\perp_{x(T)}N= =\{\psi\in T^*_{x(T)}\mathfrak{D}(T)\mid\langle\psi, X_{x(T)}\rangle=0\ \forall X_{x(T)}\in T_{x(T)}N\}$.

В самом деле, для систем постоянного ранга принцип максимума Л. С. Понтрягина (см. [23], [31], [69]) для задачи минимизации функционала

$$J(u)=\int_0^T f^0(x, u)\,dt$$

с терминальным множеством N справедлив в следующей усиленной формулировке: $(x(\cdot), u(\cdot))$ — оптимальный процесс, то существует нетривиальное решение сопряжённой системы (1.22) такое, что $\varphi(T)\perp T_{x(T)}N$ и выполнено условие максимума, которое, ввиду отсутствия ограничений на управления, имеет вид

$$-f_u^0(x(t), u(t))+(\varphi(t)g_1(x(t)), \ldots, \varphi(t)g_m(x(t)))\equiv 0.$$

Усиление, таким образом, состоит в том, что соответствующая задача оптимального управления является *нормальной* в общепринятой терминологии — множитель Лагранжа при интегранте $\varphi_0=\mathrm{const}\leqslant 0$ можно считать равным — 1.

Действительно, в противном случае, если $\varphi_0=0$, получили бы, что существует нетривиальное решение $\psi(t), t\in\mathbf{R}$, сопряжённой однородной системы

$$\dot\psi=-\psi\Big(f_x(x(t))+\sum_{i=1}^m u^i(t)g_{ix}(x(t))\Big),$$

$$\psi(t)\in T^*_{x(t)}\mathfrak{D}(t),\quad \psi(T)\perp T_{x(T)}N,$$

такое, что

$$(\psi(t)g_1(x(t)),\ldots,\psi(t)g_m(x(t)))\equiv 0.$$

Следовательно, для абсолютно непрерывного семейства гладких 1-форм $\omega(t), t\in\mathbf{R}: \omega_{x(t)}(t)=\psi(t)$, согласно инвариантной записи сопряжённой системы (1.12), (1.13), получаем:

$$0\equiv\psi(t)g_j(x(t))=\langle\, \omega_{x(t)}(t), g_j(x(t))\,\rangle = x(t)\langle\, \omega(t), g_j\,\rangle =$$

$$=x(t)\langle\, \omega(t), \left(\overrightarrow{\exp}\int_0^t \mathrm{ad}\Big(f+\sum_{i=1}^m u^i(\tau)g_i\Big)d\tau\right)^{-1}\circ$$

$$\circ\overrightarrow{\exp}\int_0^t \mathrm{ad}\Big(f+\sum_{i=1}^m u^i(\tau)g_i\Big)d\tau g_j\,\rangle = x_0\circ\overrightarrow{\exp}\int_0^t\Big(f+\sum_{i=1}^m u^i(\tau)g_i(\tau)\Big)d\tau$$

$$\circ\left(\overrightarrow{\exp}\int_0^t\Big(f+\sum_{i=1}^m u^i(\tau)g_i\Big)d\tau\right)^{-1}\langle\,\omega(0),$$

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^t \mathrm{ad}\Big(f+\sum_{i=1}^m u^i(\tau)g_i\Big)d\tau g_j\,\rangle =$$

$$= x_0 \circ \langle \omega(0), \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad}\left(f + \sum_{i=1}^m u^i(\tau)\, g_i\right) d\tau g_j \rangle,$$

$$j = 1, \ldots, m.$$

Это означает, что ковектор $\psi(0) = \omega_{x_0}(0) = x_0 \circ \omega(0) \in T^*_{x_0}\mathfrak{D}(0)$ аннулирует касательную плоскость

$$T_{x_0}\mathfrak{D}(0) = \Pi_{x_0, T}(u(\cdot)) \equiv \Pi_{x_0}$$

к приведенной орбите, т. е. $\omega_{x_0}(0) = 0$ а, значит, $\psi(t) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Итак, задача оптимального управления с интегральным функционалом и подвижным правым концом для систем постоянного ранга всегда является нормальной. Этим доказано и представление (1.21).

Продолжим доказательство предложения 1.2.

Выберем последовательность $\{u_n(\cdot)\} \subset S$ управлений, для которой

$$\| P_{u_n} F(u_n) \|_{L_2^m[0,T]} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Из условий роста и из ограниченности J на S (см. (1.17)), вытекает, что существует $C = \text{const}$ такая, что

$$\| u_n(\cdot) \|_{L_2^m[0,T]} \leqslant C.$$

Поэтому можно считать, в силу слабой компактности сферы в гильбертовом пространстве, что последовательность $\{u_n(\cdot)\}$ слабо сходится в $L_2^m[0, T]$ к некоторому управлению $u_0(\cdot) \in L_2^m[0, T]$. Мы покажем, что это управление $u_0(\cdot)$ и является критической точкой функционала J, принадлежащей (сильному) замыканию множества S. Для этого мы докажем, что некоторая подпоследовательность этой последовательности $u_n(\cdot)$ сильно сходится к управлению $u_0(\cdot)$. Если это так, то переходя к пределу, получим, что

$$0 = \lim_{n \to \infty} \| P_{u_n} F(u_n) \|_{L_2^m[0,T]} = \lim_{n \to \infty} \| \nabla J(u_n) \|_{u_n} = \| \nabla J(u_0) \|_{u_0}$$

ввиду непрерывности $\nabla J(u)$, то есть u_0 — искомая критическая точка, принадлежащая сильному замыканию $\bar{S}$ множества S.

Итак, будем доказывать что некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_n(\cdot)\}$ сильно сходится к $u_0(\cdot)$.

Заметим, во-первых, что из оценки (1.5) следует, что соответствующая $\{u_n(\cdot)\}$ последовательность $\{x_n(\cdot)\}$ траекторий системы (1.6) равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Действительно,

$$\| x_n(\cdot) \|_{C^d[0,T]} \leqslant \eta_{x_0, T}(\| u_n(\cdot) \|_{L_2^m[0,T]}) \leqslant C_1 = \text{const}$$

и

$$|\dot{x}_n(t)|\leqslant|f(x_n(t))|+\sqrt{m}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|g_i(x_n(t))||u(t)|\leqslant$$
$$\leqslant C_2+C_3|u(t)|,\quad C_2,\ C_3=\mathrm{const}>0,$$

откуда для любых t', $t''\in[0,T]$

$$|x_n(t')-x_n(t'')|\leqslant\int_{t'}^{t''}|\dot{x}_n(t)|\,dt\leqslant C_2|t'-t''|+C_3\int_{t'}^{t''}|u(\tau)|\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant C_2|t'-t''|+C_3\sqrt{|t'-t''|}\left(\int_{t'}^{t''}|u(t)|^2\,dt\right)^{1/2}=$$
$$=C_2|t'-t''|+C\cdot C_3\sqrt{|t'-t''|}.$$

Поэтому можно считать, что на отрезке $[0,T]$

$$x_n(t)\rightrightarrows x_0(t),\ n\to\infty,$$

при этом, $x_0(t),0\leqslant t\leqslant T$, является траекторией системы (1.6), ибо, в силу слабой сходимости $u_n(\cdot)$ к $u_0(\cdot)$ и равномерной сходимости $f(x_n(t))\rightrightarrows f(x_0(t))$, $g_i(x_n(t))\rightrightarrows g_i(x_0(t))$, $0\leqslant t\leqslant T$, $i=1,\ldots,m$, имеем:

$$x_n(t)=x_0+\int_0^t f(x_n(\tau))\,d\tau+\int_0^t\sum_{i=1}^m u_n^i(\tau)g_i(x_n(\tau))\,d\tau\to$$
$$\to x_0+\int_0^t f(x_0(\tau))\,d\tau+\int_0^t\sum_{i=1}^m u_0^i(\tau)g_i(x_0(\tau))\,d\tau=x_0(t).$$

Из представления

$$f_u^0(x_n(t),u_n(t))=(P_{u_n}+Q_{u_n})f_u^0(x_n(t),u_n(t))=$$
$$=P_{u_n}F(u_n)(t)+Q_{u_n}F(u_n)(t)$$

и сходимостей $\|P_{u_n}F(u_n)\|_{L_2^m[0,T]}\to0$, $x_n(t)\rightrightarrows x_0(t)$, $u_n(\cdot)\to u_0(\cdot)$ слабо, получаем, вследствие условий роста (1.19), что последовательность $\{v_n(\cdot)\}$,

$$v_n(t)=Q_{u_n}F(u_n)(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

равномерно ограничена в $L_2^m[0,T]$:

$$\|v_n(\cdot)\|_{L_2^m[0,T]}\leqslant K=\mathrm{const}. \tag{1.23}$$

Мы докажем ниже, что на самом деле некоторая её подпоследовательность сходится в $L_2^m[0,T]$ к некоторому $v_0(\cdot)$ (более того, мы докажем её равномерную сходимость). Если это так, то, в силу представления

$$f_u^0(x_0(t), u_n(t)) = f_u^0(x_0(t), u_n(t)) - f_u^0(x_n(t), u_n(t)) + $$
$$+ f_u(x_n(t), u_n(t)) = f_u^0(x_0(t), u_n(t)) - f_u^0(x_n(t), u_n(t)) +$$
$$+ P_{u_n} F(u_n)(t) + v_n(t),$$

получаем, что в $L_2^m[0, T]$ сходится последовательность $\{f_u^0(x_0(\cdot), u_n(\cdot))\}$. В самом деле, в правой части стоит сходящаяся последовательность, ибо $P_{u_n}F(u_n) \to 0$ в $L_2^m[0, T]$, $v_n(\cdot)$ сходится в $L_2^m[0, T]$ по сделанному предположению, а $f_u^0(x_0(t), u_n(t)) - f_u^0(x_u(t), u_n(t)) \rightrightarrows 0$, ибо, в силу условия Липшица,

$$|f_u^0(x_0(t), u_n(t)) - f_u^0(x_n(t), u_n(t))| \leqslant L|x_0(t) - x_n(t)|,$$

а $\|x_0(\cdot) - x_n(\cdot)\|_{C^d[0,T]} \to 0$.

Таким образом, мы получили, что в $L_2^m[0, T]$ сходится последовательность $\{f_u^0(x_0(\cdot), u_n(\cdot))\}$. Воспользуемся теперь условием эллиптичности (1.20). Заметим, что $\mu(x_0(t)) \geqslant \mu_0 > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Поэтому, используя соотношение

$$f_u^0(x_0(t), u_n(t)) - f_u^0(x_0(t), u_0(t)) =$$
$$= \int_0^1 f_{uu}^0(x_0(t), u_0(t) + s(u_n(t) - u_0(t)))(u_n(t) - u_0(t))\,ds$$

и слабую сходимость $\{u_n(\cdot)\}$ к $u_0(\cdot)$, имеем:

$$0 \leftarrow \int_0^T (f_u^0(x_0(t), u_n(t)) - f_u^0(x_0(t), u_0(t)), u_n(t) - u_0(t))\,dt =$$
$$= \int_0^T \int_0^1 (f_{uu}^0(x_0(t), u_0(t) + s(u_n(t) - u_0(t))) \times$$
$$\times (u_n(t) - u_0(t)), u_n(t) - u_0(t))\,ds\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \mu_0 \int_0^T |u_0(t) - u_n(t)|^2\,dt = \mu_0 \|u_0(\cdot) - u_n(\cdot)\|^2_{L_2^m[0,T]},$$

откуда вытекает, что $u_n(\cdot) \to u_0(\cdot)$ в $L_2^m[0, T]$.

Таким образом, для завершения доказательства предложения 1.2 нам осталось проверить, что в $L_2^m[0, T]$ сходится некоторая подпоследовательность последовательности $\{v_n(\cdot)\}$. Сделаем это. Напомним, что

$$v_n(t) = Q_{u_n} F(u_n)(t) = (\varphi_n(t) g_1(x_n(t)), \ldots, \varphi_n(t) g_m(x_n(t))),$$

где $\varphi_n(t)$, $t \in R$, —решение сопряженной системы

$$\dot{\varphi}_n = f_x^0(x_n(t), u_n(t)) - \varphi_n(f_x(x_n(t)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} u_n^i(t) g_{ix}(x_n(t))),$$

$$\varphi_n(0) = \varphi_n^0.$$

Пусть $\Gamma_n(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы

$$\dot{\psi}_n = -\psi_n(f_x(x_n(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_n^i(t) g_{ix}(x_n(t))), \tag{1.24}$$

нормированная при $t=0: \Gamma_n(0) = I$, I — единичная матрица. По формуле Коши,

$$\varphi_n(t) = \varphi_n(0)\Gamma_n(t) + \int_0^t f_x^0(x_n(\tau), u_n(\tau))\Gamma_n^{-1}(\tau)\Gamma_n(t)\,d\tau.$$

Докажем сначала, что имеет место равномерная сходимость

$$\int_0^t f_x^0(x_n(\tau), u_n(\tau))\Gamma_n^{-1}(\tau)\Gamma_n(t)\,d\tau \rightrightarrows$$

$$\rightrightarrows \int_0^t f_x^0(x_0(\tau), u_0(\tau))\Gamma_0^{-1}(\tau)\Gamma_0(t)\,d\tau. \tag{1.25}$$

В самом деле $\Gamma_n(t) \rightrightarrows \Gamma_0(t)$, $\Gamma_n^{-1}(t) \rightrightarrows \Gamma_0^{-1}(t)$ на $[0, T]$. Действительно, докажем, например, что $\Gamma_n(t) \rightrightarrows \Gamma_0(t)$. Поскольку $\Gamma_n(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\Gamma}_n(t) = -\Gamma_n(t)(f_x(x_n(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_n^i(t) g_{ix}(x_n(t))),$$

то имеет место оценка [14]:

$$|\Gamma_n(t)| \leqslant e^{\int_0^T \left| f_x(x_n(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_n^i(t) g_{ix}(x_n(t)) \right| dt}$$

и, следовательно, $|\Gamma_n(t)| \leqslant C_4 = \mathrm{const}$ в силу ограниченности в $L_2^m[0, T]$ слабо сходящейся к $u_0(\cdot)$ последовательности $\{u_n(\cdot)\}$. Далее, по аналогичным, что и выше, соображениям семейство $\{\Gamma_n(\cdot)\}$ равностепенно непрерывно, ибо для любых t', t'' $(t' \leqslant t'')$

$$\left| \int_{t'}^{t''} \dot{\Gamma}_n(t)\,dt \right| = |\Gamma(t'') - \Gamma(t')| \leqslant \int_{t'}^{t''} |\Gamma_n(t)|\,|f_x(x_n(t)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} u_n^i(t) g_{ix}(x_n(t))|\,dt \leqslant C_5|t'' - t'| + C_6|t'' - t'|^{1/2},$$

$$C_5, C_6 = \mathrm{const} > 0$$

Значит последовательность $\{\Gamma_n\}$ содержит сходящуюся (в равномерной метрике) подпоследовательность к Γ_0, удовлетворяющей уравнению

$$\dot{\Gamma}_0(t) = -\Gamma_0(t)\Big(f_x(x_0(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_0^i(t)\, g_{ix}(x_0(t))\Big).$$

Поэтому, используя условие Липшица (1.18) и условие роста (1.19), получаем:

$$\Big|\int_0^t f_x^0(x_n(\tau), u_n(\tau))\Gamma_n^{-1}(\tau)\,\Gamma_n(t)\,d\tau -$$

$$-\int_0^t f_x^0(x_0(\tau), u_0(\tau))\,\Gamma_0^{-1}(\tau)\Gamma_0(t)\,d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\int_0^t [f_x^0(x_n(\tau), u_n(\tau)) - f_x^0(x_0(\tau), u_n(\tau))]\,\Gamma_n^{-1}(\tau)\,\Gamma_n(t)\,d\tau\Big| +$$

$$+\Big|\int_0^t f_x^0(x_0(\tau), u_n(\tau))\,[\Gamma_n^{-1}(\tau)\,\Gamma_n(t) - \Gamma_0^{-1}(\tau)\,\Gamma_0(t)]\,d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_7\,\|x_n(\cdot) - x_0(\cdot)\|_{C^d[0,T]} + C_8\,\|\Gamma_n(\cdot) -$$

$$-\Gamma_0(\cdot)\|_{C^{d\times d}[0,T]} \int_0^T [b(x_0(t)) + a\,|u_n(t)|]\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_9\,[\|x_n(\cdot) - x_0(\cdot)\|_{C^d[0,T]} + \|\Gamma_n(\cdot) - \Gamma_0(\cdot)\|_{C^{d\times d}[0,T]}],$$

$$C_7,\ C_8,\ C_9 = \mathrm{const},$$

откуда вытекает равномерная сходимость (1.25).

Докажем теперь, что последовательность $\psi_n(t)g_i(x_n(t))$, $i = 1, \ldots, m$, равномерно сходится на отрезке $[0, T]$ для $\psi_n(t) = \varphi_n(0)\Gamma_n(t)$.

Заметим сначала, что из условия ограниченности (1.23) и сходимости (1.25) вытекает, что последовательность

$$\{\psi_n(t)\,g_i(x_n(t))\}$$

равномерно ограничена в $L_1^m[0, T]$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m$. Далее, $\psi_n(\cdot)$ является решением сопряженной системы (1.24), значит, используя инвариантную запись сопряженной системы (см. (1.12)—(1.13)), получаем, что существуют такое абсолютно непрерывное семейство $\omega^{(n)}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 1-форм на M, что

$$\omega^{(n)}_{x(t)}(t) = \psi_n(t),\quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\psi_n(t)\,g_i(x_n(t)) = x_n(t)\,\langle\, \omega^{(n)}(t),\ g_i\,\rangle =$$

$$= x_n(t)\,\langle\, \omega^{(n)}(t),\quad \left(\overrightarrow{\exp}\int_0^t \mathrm{ad}\Big(f + \sum_{j=1}^m u_n^j(\tau)\,g_j\Big)d\tau\right)^{-1} \overrightarrow{\exp}\int_0^t \mathrm{ad}\Big(f +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} u_n^j(\tau) g_j\Bigg) d\tau g_i \rangle =$$

$$= x_0 \langle \omega^{(n)}(0), \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad}\Bigg(f+\sum_{j=1}^{m} u_n^j(\tau) g_j\Bigg) d\tau g_i \rangle,$$

$$i=1, \ldots, m.$$

Пусть ω—произвольная 1-форма на M. Тогда $\forall t$ $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$x_0 \langle \omega, \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad}\Bigg(f+\sum_{j=1}^{m} u_n^j(\tau) g_j\Bigg) d\tau g_i \rangle = x_n(t) \langle \omega(t), g_i \rangle =$$

$$= \bar{\psi}_n(t) g_i(x_n(t)), \quad i=1, \ldots, m,$$

где $\bar{\psi}_n(\cdot)$—решение сопряженной системы

$$\dot{\bar{\psi}}_n(t) = -\bar{\psi}_n(t)\Big(f_x(x_n(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_n^i(t) g_{ix}(x_n(t))\Big),$$

$$\bar{\psi}_n(0) = \omega_{x_0}.$$

Следовательно, для любой 1-формы $\omega \in \operatorname{Der}^* M$

$$x_0 \langle \omega, \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad}\Bigg(f+\sum_{j=1}^{m} u_n^j(\tau) g_j\Bigg) d\tau g_i \rangle \rightrightarrows$$

$$\rightrightarrows x_0 \langle \omega, \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad}\Bigg(f+\sum_{j=1}^{m} u_0^j(\tau) g_j\Bigg) d\tau g_i \rangle, \quad i=1, \ldots, m,$$

откуда вытекает, что

$$x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad}\Bigg(f+\sum_{j=1}^{m} u_n^j(\tau) g_j\Bigg) d\tau g_i \rightrightarrows$$

$$\rightrightarrows x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad}\Bigg(f+\sum_{j=1}^{m} u_0^j(\tau) g_j\Bigg) d\tau g_i, \qquad (1.26)$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad i=1, \ldots, m.$$

Воспользуемся теперь тем, что система (1.6) является системой постоянного ранга. Это значит, что мы можем указать такие индексы $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ и моменты $t_1, \ldots, t_k \in [0, T]$, что векторы

$$x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_l} \operatorname{ad}\Bigg(f+\sum_{j=1}^{m} u_0^j(\tau) g_j\Bigg) d\tau, \quad l=1, \ldots, k,$$

линейно независимы и порождают плоскость $\Pi_{x_0,T}=\Pi_{x_0,T}(u_0(\cdot))$ (мы считаем, что размерность этой плоскости равна k). Эквивалентно, существуют такие измеримые m-мерные функции $v_1(\cdot), \ldots, v_k(\cdot)$, $|v_k(t)|\leqslant 1$ на $[0, T]$, что векторы

$$X_l^{(0)}=x_0\circ\int\limits_0^T \overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t \operatorname{ad}\left(f+\sum_{j=1}^m u_0^j(\tau)g_j\right)d\tau \sum_{i=1}^m v_l^i(t)g_i dt,\quad l=1,\ldots,k,$$

порождают плоскость $\Pi_{x_0,T}$.

В силу сходимости (1.26), эти же функции $v_1(\cdot), \ldots$ $\ldots, v_k(\cdot)$ дают базис

$$X_l^{(n)}=x_0\circ\int\limits_0^T \overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t \operatorname{ad}\left(f+\sum_{j=1}^m u^j(\tau)g_j\right)d\tau \sum_{i=1}^m v_l^i(t)g_i dt,\quad l=1,\ldots,k,$$

плоскости $\Pi_{x_0,T}=\Pi_{x_0,T}(u_n(\cdot))$, при этом, $X_l^{(n)}\to X_l^{(0)}$, $l=1,\ldots,k$, опять-таки в силу сходимости (1.26). Применяя, если нужно процесс ортогонализации, мы можем считать, что базисы $\{X_l^{(n)}\}_{l=1}^k$, $n=1, 2, \ldots$ ортонормированы [1]. Важно отметить при этом, что из условия ограниченности в $L_2^m[0, T]$ функций $\psi_n(t)g_i(x_n(t))$, $0\leqslant t\leqslant T$, $i=1, \ldots, m$, и условия $|v_l(t)|\leqslant 1$, в силу оценки (1.23),

$$\left|\sum_{i=1}^m\int\limits_0^T \psi_n(t)g_i(x_n(t))v_l^i(t)dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^T\sum_{i=1}^m|\psi_n(t)g_i(x_n(t))|\,dt\leqslant C=\text{const}.$$

Следовательно, величины

$$\langle \omega_{x_0}^{(n)}, X_l^{(n)}\rangle=\int\limits_0^T\sum_{i=1}^m \psi_n(t)g_i(x_n(t))v_l^i(t)dt$$

останутся равномерно ограниченными и после применения к базисам процесса ортогонализации,

Поэтому мы можем считать, что последовательность $\{\langle\omega_{x_0}^{(n)}, X_l^{(n)}\rangle\}$ сходится. Отсюда, в силу сходимости $X_l^{(n)}\to X_l^{(0)}$, $l=1, \ldots, k$, получаем нужную нам сходимость $\omega_{x_0}^{(n)}\to\omega_{x_0}^{(0)}$.

В самом деле, поскольку M — риманово многообразие, то риманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ дает существование таких векторов $Y^{(n)}\in T_{x_0}M$, что

$$\langle \omega_{x_0}^{(n)}, X_l^{(n)}\rangle=\langle Y^{(n)}, X_l^{(n)}\rangle_{x_0}.$$

[1] Относительно римановой структуры на M.

Далее, базис $X_l^{(n)}$, $l=1,\ldots,k$, — ортонормированный (относительно этой метрики). Значит вектор $Y^{(n)}$ представим в виде

$$Y^{(n)}=\sum_{\alpha=1}^{k} a_\alpha^{(n)} X_\alpha^{(n)},$$

где $a_\alpha^{(n)}=\langle \omega_{x_0}^{(n)}, X_\alpha^{(n)} \rangle = \langle Y^{(n)}, X_\alpha^{(n)} \rangle_{x_0}$ сходятся по доказанному к некоторым $a_\alpha^{(0)}$, $\alpha=1,\ldots,k$. Но тогда, в силу сходимости $X_l^{(n)} \to X_l^{(0)}$, $l=1,\ldots,k$, получаем сходимость

$$Y^{(n)}=\sum_{\alpha=1}^{k} a_\alpha^{(n)} X_\alpha^{(n)} \to \sum_{\alpha=1}^{k} a_\alpha^{(0)} X_\alpha^{(0)} = Y^{(0)}$$

и вектор $Y^{(0)}$ определяет форму $\omega^{(0)}$ по формуле

$$\langle Y^{(0)}, X_l^{(0)} \rangle_{x_0} = \langle \omega_{x_0}^{(0)}, X_l^{(0)} \rangle, \quad l=1,\ldots,k.$$

Таким образом, $\omega_{x_0}^{(n)} \to \omega_{x_0}^{(0)}$, а значит и

$$\psi_n(t)=\varphi_n(0)\Gamma_n(t) \rightrightarrows \varphi_0(0)\Gamma_0(t)=\psi_0(t).$$

Всё это означает равномерную сходимость последовательности $\{v_n(t)\}$ к $v_0(t)$,

$$v_0(t)=(\varphi_0(t)g_1(x_0(t)), \ldots, \varphi_0(t)g_m(x_0(t))), \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Предложение 1.2 доказано.

В заключение этого пункта обсудим условия предложения 1.2. Отметим, во-первых, что условие роста $f^0(x, u)\geqslant k|u|^2$, $k=\mathrm{const}\geqslant 0$, является достаточным условием *коэрцитивности* функционала J, т. е. условием того, что $J(u)\to+\infty$ при $\|u\|_{L_2^m[0,T]}\to\infty$. Предложение 1.2 справедливо в предположении одной только коэрцитивности J. Более того, в работе [51] установлено, что условие коэрцитивности по-сути необходимо для выполнения условия (C) Пале-Смейла. Именно, в цитированной работе было показано, что если $\varphi:\mathscr{X}\to\mathbf{R}$ — ограниченный снизу функционал класса C^1 на гильбертовом пространстве $\mathscr{X}$, то тогда

1) если φ не коэрцитивен, то φ не может удовлетворять условию $(C)_d$ Пале-Смейла на уровне

$$d=\sup\{c\,|\,\varphi_c \text{ ограничено}\};$$

2) если φ удовлетворяет условию $(C)_d$ Пале-Смейла на любом уровне $d\in\mathbf{R}$, то φ — коэрцитивный функционал.

Здесь, как и выше $\varphi_c=\{x\in\mathscr{X}\,|\,\varphi(x)\leqslant c\}$.

Далее ясно, что условие роста (1.4) на правую часть системы (1.6) может быть заменено на требование справедливости оценки (1.5) — с этой ситуацией мы встретимся в примерах 1.2, 1.3 в следующем пункте.

Условие роста $|f_u^0(x, u)| \leqslant a|u| + b(x)$, $a = \mathrm{const} \geqslant 0$, есть, как известно условие того, что оператор Немыцкого F, связанный с $f_u^0(x, u)$, отображает $L_2^m[0, T]$ в $L_2^m[0, T]$, и поэтому является также необходимым условием в рамках рассматриваемой L^2-теории. Это же относится к условию Липшица (1.18).

Наконец, автору неизвестно, насколько необходимым является условие эллиптичности (1.20).

1.3. Некоторые примеры. В этом пункте мы рассмотрим несколько модельных примеров, иллюстрирующих теорию пп. 1.1—1.2. Сначала отметим что справедливо

Предложение 1.3. Пусть N — топологическое подпространство гладкого многообразия M и пусть для любого $y \in N$ пространство путей

$$\mathscr{P}_y = \{u(\cdot) \in L_2^m[0, T] \mid x(T; x_0, u(\cdot)) = y\},$$

связанное с системой (1.6) постоянного ранга, стягиваемо. Тогда для любого $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$H_i(N) = H_i(\mathscr{N}),$$

где

$$\mathscr{N} = \{u(\cdot) \in L_2^m[0, T] \mid x(T; x_0, u(\cdot)) \in N\} = F_{x_0, T}^{-1}(N).$$

Предложение 1.3 даёт способ вычисления групп гомологий гильбертова подмногообразия $\mathscr{N}$ из предложения 1.1 в простейшем случае. В общем случае, когда гомологии $\mathscr{P}_y$ нетривиальны, нужно использовать спектральную последовательность расслоения — см. [40], [44]; гомологии $\mathscr{N}$ вычисляются тогда с помощью гомологий $\mathscr{P}_y$ и гомологий N. В данной статье мы не будем рассматривать этот общий случай, чтобы не нарушать элементарный характер изложения, тем более, что это потребовало бы еще привлечения теории индекса второй вариации управляемой системы, развитой в работах [2], [3], [37].

Пример 1.1. Этот пример носит общий характер и относится к линейным управляемым системам в $\mathbf{R}^n$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^m. \tag{1.27}$$

Пусть $N \subset \mathbf{R}^n$ — замкнутое подмногообразие $\mathbf{R}^n$,

$$J(u) = \int_0^T f^0(x, u)\,dt$$

— функционал, определенный на траекториях системы (1.27), удовлетворяющий условиям, сформулированным в предложении 1.2 (см. (1.17)—(1.20)).

В этом случае пространство путей $\mathscr{P}_y$ выпукло для любого $y \in \mathfrak{A}_{x_0}(T)$ и, следовательно, стягиваемо. Поэтому, в силу предложения 1.3, группы гомологий пространства

$$\mathcal{N} = F^{-1}_{x_0,T}(N)$$

совпадают с группами гомологий многообразия N. Следовательно, если последние нетривиальны, то неравенства Морса позволяют утверждать, что для задачи

$$J(\cancel{u}) \to \inf,$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \in N,$$

$$u(\cdot) \in L_2^m [0, T],$$

существуют критические точки, отличные от точек минимума, а также позволяют найти оценку для их числа.

Более общо, это замечание относится к гладким управляемым системам вида (1.6), допускающих *глобальную линеаризацию с помощью замен фазовых координат* (см. [11], [13]).

В самом деле, пусть $p: M \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, $p(x_0) = \xi_0 = 0$, осуществляющий эту замену, то есть векторное поле $p_* f$ линейно, а векторные поля $p_* g_i$, $i = 1, \ldots, m$, — постоянные. Тогда отображение вход — выход $\tilde{F}_{x_0,T}$ линеаризованной системы

$$\tilde{F}_{\xi_0,T}: u(\cdot) \mapsto \xi_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^T \left(p_* f + \sum_{i=1}^m u^i(\tau) p_* g_i \right) d\tau$$

является линейным отображением, и, значит, $\tilde{\mathcal{P}}_z = \tilde{F}^{-1}_{\xi_0,T}(z)$ выпукло для любого $z \in \tilde{\mathfrak{A}}_{\xi_0}(T)$, где $\tilde{\mathfrak{A}}_{\xi_0}(T)$ — множество достижимости линеаризованной системы.

Поскольку

$$\hat{F}_{\xi_0,T}(u(\cdot)) = \xi_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^T \left(p_* f + \sum_{i=1}^m u^i(\tau)\, p_* g_i \right) d\tau =$$

$$= \xi_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^T \operatorname{Ad} p^{-1} \left(f + \sum_{i=1}^m u^i(\tau)\, g_i \right) d\tau =$$

$$= \xi_0 \circ \operatorname{Ad} p^{-1}\, \overrightarrow{\exp} \int_0^T \left(f + \sum_{i=1}^m u^i(\tau)\, g_i \right) d\tau =$$

$$= \xi_0 \circ p^{-1} \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^T \left(f + \sum_{i=1}^m u^i(\tau)\, g_i \right) d\tau \circ p =$$

$$= x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^T \left(f + \sum_{i=1}^m u^i(\tau)\, g_i \right) d\tau \circ p = p \circ F_{x_0,T}(u(\cdot)),$$

то $\mathcal{P}_y = F^{-1}_{x_0,T}(y) = \tilde{F}^{-1}_{\xi_0,T} \circ p(y) = \tilde{F}^{-1}_{\xi_0,T}(z) = \tilde{\mathcal{P}}_z$ выпукло $(z = p(y))$

Условия такой линеаризации хорошо известны: локально эта замена существует, если система (1.6) *квазикоммутативна*, то есть

$$[g_i, ad^k f g_j]=0, \ i, j=1, \ldots, m, \ k=0, 1, 2, \ldots,$$

и выполнено *ранговое условие* (*«общности положения»*)

$$\operatorname{rank}[g_i, \operatorname{ad} f g_i, \ldots, \operatorname{ad}^{n-1} f g_i; \ i=1, \ldots, m]=\dim M=n$$

(см. [11], [13]) в каждой точке многообразия M.

Глобально такая замена существует, если многообразие M *односвязно*, то есть линейно связно и имеет тривиальную фундаментальную группу ($\pi_1(M)=0$).

Простейший пример такой системы — это следующая система в $\mathbf{R}^2$:

$$\dot{x}=y/h'(x), \quad \dot{y}=h(x)+u,$$

где $h: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ — диффеоморфизм, $h(0)=0$. Например, можно взять $h(x)=x^3/3+x$.

Таким же свойством обладают системы вида (1.6), для которых существуют диффеоморфизмы $P: L_2^m[0, T]\to L_2^m[0, T]$, $p: M\to\mathbf{R}^n$, такие, что отображение

$$u(x)\mapsto p\circ F_{x_0,T}\circ P^{-1}: L_2^m[0, T]\to\mathbf{R}^n$$

линейно. Именно таковы системы, допускающие глобальную *линеаризацию с помощью обратной связи.* Однако, стоит отметить, что сколь-нибудь удовлетворительных необходимых и достаточных условий, кроме локальных, выделяющих указанный класс систем до сих пор не найдено. Одно необходимое условие будет сформулировано нами ниже.

Мы опишем сейчас *метод расширения*, позволяющий, по крайней мере, в принципе изучать топологию множеств достижимости систем постоянного ранга, обладающих свойством, указанным в формулировке предложения 1.3.

Общая схема метода такова. Пусть из каких-либо дополнительных соображений известно, что $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ — замкнутое подмногообразие и $\forall y\in\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ пространство путей $\mathcal{P}_y$ стягиваемо. Последнее, например, можно проверить с помощью неравенств Морса: для этого достаточно доказать (в случае, когда $\mathcal{P}_y$ имеет коммутативную фундаментальную группу, например, когда $\mathcal{P}_y$ односвязно), что для функционала J с интегрантом, удовлетворяющим условиям предложения 1.2, экстремальная задача

$$J(u)=\int_0^T f^0(x, u)\,dt\to\inf,$$

$$x(0)=x_0, \quad y(T)=y_T, \tag{1.28}$$

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^m u^i g_i(x), \quad x\in M, \quad u(\cdot)\in L_2^m[0, T],$$

имеет единственное решение для $\forall y_T\in\mathfrak{A}_{x_0}(T)$

Тогда, в силу предложения 1.3, группы гомологий множества

$$\mathcal{A}=F^{-1}_{x_0,T}(\mathfrak{A}_{x_0}(T))$$

совпадают с группами гомологий множества достижимости $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$. Экстремальная задача со свободным правым концом

$$J(u)\to\inf,$$

$$x(0)=x_0,\quad u(\cdot)\in L_2^m[0,T], \tag{1.29}$$

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m}u^i g_i(x),\quad x\in M,$$

может оказаться простой для исследования и информация о ее критических точках даст соответствующую информацию о гомологиях $\mathcal{A}$, а значит и о гомологиях $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$. В этом смысле метод расширения является разновидностью метода обратной задачи.

Конечно, общая философия этого метода может быть несколько модифицирована. Именно, вместо системы

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m}u^i g_i(x),\quad x\in M,$$

можно рассмотреть расширенную систему

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m}u^i g_i(x)+\sum_{j=1}^{l}v^j h_j(x),\quad x\in M,$$

так подбирая гладкие векторные поля h_j, $j=1,\ldots,l$, что полученная система оказалась бы системой постоянного ранга, причем такой, что для любого y из множества достижимости исходной системы пространство путей $\tilde{F}^{-1}_{x_0,T}(y)$ оказалось бы стягиваемым многообразием (здесь $\tilde{F}_{x_0,T}$ — отображение вход — выход расширенной системы). Вместо (1.29) теперь нужно рассмотреть задачу

$$\tilde{J}(u,v)\to\inf,$$

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m}u^i g_i(x)+\sum_{j=1}^{l}v^j h_j(x),\quad x\in M,$$

$$x(0)=x_0,\quad x(T)\in\mathfrak{A}_{x_0}(T),$$

$$u(\cdot)\in L_2^m[0,T],$$

с новым функционалом

$$\tilde{J}(u,v)=\int_0^T \tilde{f}^0(x,u,v)\,dt,$$

удовлетворяющим условиям предложения 1.2. Информация о критических точках для этой задачи даст информацию о топологии пространства $\tilde{F}^{-1}_{x_0,T}(\mathfrak{A}_{x_0}(T))$, а, значит, и о топологии $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$.

Приведём простейший пример применения указанного метода.

Пример 1.2. Рассмотрим следующую систему в $\mathbf{R}^2$:

$$\dot{x}=xy, \quad \dot{y}=u.$$

Это система вида (1.6) с $f=xy\frac{\partial}{\partial x}$, $g=\frac{\partial}{\partial y}$. Простые вычисления показывают, что $\operatorname{ad} fg=-gf=-x\frac{\partial}{\partial x}$, $[g, \operatorname{ad} fg]=0$, то есть это — квазикоммутативная система. Заметим, однако, что она не линеаризуется с помощью замены фазовых координат — в точке (x, y) с $x=0$ нарушено ранговое условие

$$\operatorname{rank}[g, \operatorname{ad} fg]=2.$$

Тем не менее, пространство путей $\mathscr{P}_{\xi_T}$, $\xi_T=(x_T, y_T)$, этой системы оказывается стягиваемым для любого $\xi_T=(x_T, y_T)\in\mathfrak{A}_{\xi_0}(T)$; $\xi_0=(x_0, y_0)$.

Для доказательства рассмотрим экстремальную задачу

$$\frac{1}{2}\int_0^T u^2dt\to\inf,$$

$$\dot{x}=xy, \quad \dot{y}=u, \quad u(\cdot)\in L_2[0, T],$$

$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0, \quad x(T)=x_T, \quad y(T)=y_T.$$

Принцип максимума Л. С. Понтрягина приводит к выводу, что оптимальным управлением является управление $u(t)\equiv\psi_2(t)$, где (ψ_1, ψ_2) — решение сопряжённой системы

$$\dot{\psi}_1=-\psi_1 y, \quad \dot{\psi}_2=-\psi_1 x.$$

Легко видеть, что $x\psi_1=-a$ $(a=\text{const})$ — 1-й интеграл замкнутой системы

$$\dot{x}=xy, \quad \dot{y}=\psi_2, \quad \dot{\psi}_1=-\psi_1 y, \quad \dot{\psi}_2=-\psi_1 x,$$

ибо $\frac{d}{dt}x\psi_1=\dot{x}\psi_1+x\dot{\psi}_1=xy\psi_1-xy\psi_1=0.$

Поэтому $\dot{\psi}_2=a=\text{const}$ и, следовательно, $\psi_2(t)=at+b$, $b=\text{const}$. Управление $u(t)=\psi_2(t)$ будет единственной критической точкой, если мы докажем, что параметры a, b однозначно определяются краевыми условиями $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $x(T)=x_T$, $y(T)=y_T$. Ясно, что решениями, соответствующими $u(t)=\psi_2(t)$, являются

$$x(t)=x_0\exp(at^3/6+bt^2/2+ct), \quad y(t)=at^2/2+bt+c, \quad c=\text{const},$$

и отсюда видно, что условия $x(T)=x_T$, $y(T)=y_T$, $x(0)=x(0)$, $y(0)=y_0$ однозначно определяют a, b и c.

То же заключение верно и для задачи со свободным правым концом:

$$\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt \to \inf,$$

$$\dot{x}=xy,\quad \dot{y}=u,\quad u(\cdot)\in L_2[0,T],$$

$$x(0)=x_0,\quad y(0)=y_0.$$

В этом случае $u(t)\equiv 0$ — единственное оптимальное управление. Таким образом, здесь получается, что множество достижимости этой системы не может быть нестягиваемым замкнутым многообразием.

Пусть теперь N — замкнутое подмногообразие с нетривиальными гомологиями (например, окружность), лежащее в множестве достижимости рассматриваемой системы. Тогда, на основании неравенств Морса и предложения 1.3, мы можем утверждать, что гомологии $\mathcal{N}=F^{-1}_{x_0,T}(N)$ нетривиальны, и, значит, принцип максимума Л. С. Понтрягина для задачи

$$J(u)\to\inf,$$

$$\dot{x}=xy,\quad \dot{y}=u,\quad u(\cdot)\in L_2[0,T],$$

$$x(0)=y_0,\quad y(0)=y_0,\quad (x(T),\ y(T))\in N,$$

с каким-либо функционалом J, удовлетворяющим условиям предложения 1.2, например, с J, для которого $f^0(x,u)=x^2+e^{-u}+u^2$, выделяет управления, которые не являются точками минимума.

Рассмотрим еще два модельных примера.

Пример 1.3. Рассмотрим следующую систему в $\mathbf{R}^3$:

$$\dot{x}=zy,\quad \dot{y}=-zx,\quad \dot{z}=u$$

Это система вида (1.6) с

$$f=zy\frac{\partial}{\partial x}-zx\frac{\partial}{\partial y},\quad g=\frac{\partial}{\partial y}.$$

Простые вычисления дают, что

$$\operatorname{ad} fg=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y},\quad [g,\operatorname{ad} fg]=0.$$

Таким образом — это квазикоммутативная система. Приведенная орбита этой системы является цилиндром в $\mathbf{R}^3$. Заметим, что эта система, как и в примере 1.2, не линеаризуется с помощью (глобальной) замены фазовых координат. Она, в отличие от примера 1.2, такова, что пространство путей $\mathcal{P}_{\xi_T}$, $\xi_T=(x_T,y_T,z_T)$, не является стягиваемым. Приведем доказательство этого утверждения. Для этого рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt$$

с краевыми условиями $x(T)=x_T$, $y(T)=y_T$, $z(T)=z_T$, на траекториях этой системы. Принцип максимума Л. С. Понтрягина показывает, что экстремальным управлением является управление $u(t)\equiv\psi_3(t)$, где ψ_1, ψ_2, ψ_3 — решения сопряженной системы

$$\dot\psi_1=-\psi_2 z,\ \dot\psi_2=-\psi_1 z,\ \dot\psi_3=-\psi_1 y+\psi_2 x.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\frac{d}{dt}\dot\psi_3(t)\equiv 0,$$

и, следовательно, $\psi_3(t)\equiv at+b$, $a, b=\mathrm{const}$. Легко находятся соответствующие управлению $u(t)=\psi_3(t)$ траектории:

$$x(t)=R\sin\omega(t),\ y(t)=R\cos\omega(t),\ z(t)=at^2/_2+bt+c,$$
$$\omega(t)=at^3/_6+bt^2/_2+ct+d.$$

Параметры R, a, b, c, d определяются из условий

$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ z(0)=z_0;\ x(T)=x_T,\ y(T)=y_T,\ z(T)=z_T.$$

Начальные условия дают: $x_0=R\sin d$, $y_0=R\cos d$, $z_0=c$. Отсюда $d_k=d_0+2\pi k$, $d_0: R\sin d_0=x_0$, $R\cos d_0=y_0$, $z_0=c$, $k=0, \pm 1, \ldots$ обеспечивают их выполнение. Для определения a_k, b_k имеем, следовательно, систему

$$\frac{aT^3}{6}+\frac{bT^2}{2}+cT+d_x=\omega_T,\qquad \frac{aT^2}{2}+bT+c=z_T,$$

где ω_T таково, что $R\sin\omega_T=x_T$, $R\cos\omega_T=y_T$. Определитель этой системы равен $T^4/_6-T^4/^4\neq 0$ и потому она всегда разрешима. Следовательно, существует счетное число пар (a_k, b_k), $k=0, \pm 1, \ldots$, для которых удовлетворяются краевые условия и, соответственно, счетное число критических управлений $u_k(t)=a_k t+b_k$, $k=0, \pm 1, \ldots$, $0\leqslant t\leqslant T$, каждое из которых является точкой локального минимума функционала

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt.$$

Значит $\mathcal{P}_{\xi_T}$, $\xi_T=(x_T, y_T, z_T)$, имеет счетное число компонент связности. Отсюда, в силу неравенств Морса, получаем, что этот же вывод справедлив и для любого функционала, удовлетворяющего условиям предложения 1.2, например задача

$$\int_0^T (x^2+u^2+e^{-u})\,dt\to\inf,$$

$$\dot{x}=yz,\quad \dot{y}=-xz,\quad \dot{z}=u,$$
$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ z(0)=z_0;\ x(T)=x_T,\ y(T)=y_T,\quad z(T)=z_T,$$
$$u(\cdot)\in L_2[0,T],$$

также имеет счетное число точек локального минимума.

Пример 1.4. Рассмотрим систему в $\mathbf{R}^2$:
$$\dot{x}=x-yu,\quad \dot{y}=y+xu.$$

Это система вида (1.6) с
$$g=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y},\quad f=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Непосредственно проверяется, что она квазикоммутативна: $\operatorname{ad} fg=0$. Приведенная орбита этой системы — окружность, она порождается векторным полем g. На траекториях этой системы рассмотрим квадратичный функционал
$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt.$$

Принцип максимума Л. С. Понтрягина дает, что экстремальными управлениями являются управления $u(t)\equiv-\psi_1(t)y(t)+\psi_2(t)x(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, где $(\psi_1,\ \psi_2)$ — решение сопряженной системы
$$\dot{\psi}_1=-\psi_1+\psi_2u,\quad \dot{\psi}_2=-\psi_2+\psi_1u.$$

Простая проверка показывает, что
$$\frac{du(t)}{dt}\equiv 0.$$

Следовательно, $u(t)\equiv a=\text{const}$ — экстремальное управление. Этому управлению соответствуют траектории исходной и сопряженной системы:
$$x(t)=Re^t\cos(at+b),\ y(t)=Re^t\sin(at+b),$$
$$\psi_1(t)=\bar{R}e^{-t}\cos(at+d),\ \psi_2(t)=\bar{R}e^{-t}\sin(at+d),$$
$$R,\bar{R},\ a,\ b,\ d=\text{const}.$$

Отсюда видно, что, как и в примере 1.3, пространство путей $\mathcal{P}_{\xi_T}$, $\xi_T=(x_T,\ y_T)$, не стягиваемо, ибо двухточечная задача
$$\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt\to\inf,$$
$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ x(T)=x_T,\ y(T)=y_T,$$
$$\dot{x}=x-yu,\quad \dot{y}=y+xu,$$
$$u(\cdot)\in L_2[0,T],$$

имеет бесконечное число точек экстремума — это те управления $u_k(t)$, для которых $u_k(t)\equiv a_k$, где $x_0=R\cos b$, $y_0=R\sin b$, a_0T+ $+b=a_kT+b+2\pi k$, $x_T=Re^T\cos(a_0T+b)$, $y_T=Re^T(a_0T+b)$, то есть

$$u_k(t)+\frac{1}{T}(a_0T-2\pi k),\quad k=0,\ \pm 1,\ldots,$$

— точки локального минимума. Пространство путей $\mathscr{P}_{\xi_T}$ имеет счетное число компонент связности. Отсюда, в силу неравенств Морса, получаем, что и функционал

$$J(u)=\int_0^T(u^2+e^{-u}+u^2)\,dt$$

на траекториях рассматриваемой системы имеет бесконечное число точек локального экстремума.

Ситуация, возникающая в примерах 1.3—1.4 является **общей** для гладких управляемых систем постоянного ранга; именно, если приведенная орбита системы замкнута и имеет нетривиальные гомологии, то пространство путей $\mathscr{P}_y=F^{-1}_{x_0,T}(y)$ этой системы нестягиваемо, если эта система глобально управляема. Приведем доказательство этого необходимого условия глобальной управляемости, воспользовавшись для этого изложенным выше методом расширения.

Итак, пусть

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^m u^i g_i(x),\quad x\in M,\quad x(0)=x_0.$$

— гладкая управляемая система постоянного ранга. Заметим, во-первых, что задача минимизации *функционала энергии*

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^T(u(t),u(t))\,dt$$

на траекториях этой системы без ограничений на правый конец траектории всегда имеет единственное решение $u(t)\equiv 0$ — это легко следует из принципа максимума Л. С. Понтрягина. Поэтому, в силу неравенств Морса, получаем, что гомологии пространства $\mathscr{A}=F^{-1}_{x_0,T}(\mathfrak{A}_{x_0}(T))$ в случае замкнутого $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ необходимо являются нулевыми во всех размерностях $i\geqslant 1$; поскольку $\mathscr{A}$ односвязно, то отсюда следует, что $\mathscr{A}$ стягиваемо. Таким образом имеет место следующая альтернатива:

Предложение 1.4. Пусть (1.6)—гладкая управляемая система постоянного ранга, такая, что пространство путей $\mathscr{P}_y=$ $=F^{-1}_{x_0,T}(y)$ стягиваемо для $\forall y\in\mathfrak{A}_{x_0}(T)$. Тогда либо

i) $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ замкнуто и стягиваемо;

ii) $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ не замкнуто в M.

Доказательство. Предположим противное, то есть что $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ замкнуто и нестягиваемо. Тогда, в силу метода расширения (см. предложение 1.3), группы гомологий множества достижимости $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ совпадают с гомологиями пространства $\mathcal{A}=F^{-1}_{x_0,T}(\mathfrak{A}_{x_0}(T))$, которые тривиальны ввиду сделанного выше замечания. Но по предположению, $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ имеет нетривиальные гомологии. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Из предложения 1.4 получаются следующие следствия.

Теорема 1.1. Пусть (1.6) — гладкая управляемая система постоянного ранга, такая, что ее приведенная орбита $\mathfrak{O}(T)$, проходящая через точку $x(T)$ суть замкнутое нестягиваемое многообразие. Тогда, если эта система *глобально управляема* из x_0 за время $T>0$, то есть

$$\mathfrak{A}_{x_0}(T)=\mathfrak{O}(T),$$

то существует $y_T\in\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ такое, что пространство путей $\mathcal{P}_{y_T}=F^{-1}_{x_0,T}(y_T)$ имеет нетривиальные гомологии.

Имеет место следующее утверждение, относящееся к задаче линеаризации гладких управляемых систем с помощью замен фазовых координат.

Предложение 1.5. Пусть (1.6) — гладкая управляемая система, допускающая локальную линеаризацию с помощью замен фазовых координат в каждой точке многообразия M. Тогда эта система глобально линеаризуется с помощью замены фазовых координат в том и только том случае, если при любых $x_0\in M$, $T>0$ пространство путей $\mathcal{P}_y=F^{-1}_{x_0,T}(y)$ стягиваемо $\forall y\in\mathfrak{A}_{x_0}(T)$.

Доказательство. Необходимость уже доказана — см. пример 1.1. Достаточность также очевидна: из условий локальной линеаризуемости в каждой точке M следует, во-первых, что рассматриваемая система глобально управляема (за любое время). Поэтому $\mathfrak{A}_{x_0}(T)=M$ замкнуто. В силу условия стягиваемости $\mathcal{P}_y$ $\forall y\in\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ получаем, что M стягиваемо, в частности, $\pi_1(M)=0$. Следовательно, ввиду того что система локально линеаризуется в каждой точке M, мы получаем, что она и глобально линеаризуется. Предложение доказано.

Сама формулировка предложения 1.5 наводит на мысль, что справедлива следующая

Гипотеза 1.1. Пусть (1.6) — глобально управляемая система, допускающая локальную линеаризацию с помощью гладкой обратной связи в каждой точке многообразия M. Тогда, для того, чтобы эта система допускала глобальную линеаризацию с помощью гладкой обратной связи необходимо и достаточно, чтобы пространство путей $\mathcal{P}_y=F^{-1}_{x_0,T}(y)$ было бы стягиваемым для любых $y\in\mathfrak{A}_{x_0}(T)$, $x_0\in M$, $T>0$.

Необходимость сформулированного выше условия уже доказана — в этом случае должны существовать диффеоморфизмы $P:L_2^m[0, T]\to L_2^m[0, T]$, $p:\mathbf{R}^n\to M$ такие, что отображение

$$u(\cdot)\mapsto p^{-1}\circ F_{x_0,T}\circ P:L_2^m[0, T]\to\mathbf{R}^n$$

линейно (см. пример 1.1).

В заключение этого параграфа отметим, что теорема 1.1 допускает двойственную формулировку: если (1.6) — глобально управляемая гладкая управляемая система постоянного ранга на нестягиваемом замкнутом многообразии M, то существует $y_T\in M$, такое, что задача (1.28) с функционалом J, интегрант которого удовлетворяет условиям предложения 1.2, имеет неединственную экстремаль.

Более того, можно показать, что это верно и для $\forall y_T\in M$, однако полное доказательство этого факта выходит за рамки данной статьи. (Оно основано на том, что $(L_2^m[0, T], \mathfrak{A}_{x_0}(T), F_{x_0,T})$ — расслоение в смысле Серра (см. [44]). Идею доказательства того утверждения сообщил автору А. В. Сарычев.)

§ 2. Теории Морса и Пале — Смейла для многообразия с углами

В этом параграфе будут построены аналоги теорий Морса и Пале—Смейла для пространств с особенностями — объектов, названных *многообразиями с углами*.

2.1. Конечномерные многообразия с углами. Результаты этого и следующего пунктов получены в соавторстве с А. А. Аграчёвым и частично анонсированы в работах [6], [49].

Пусть M — конечномерное гладкое многообразие (без края).

Замкнутое подмножество $V\subset M$ называется *подмногообразием с углами*, если для любой точки $x\in V$ существуют карта (O_x, φ) многообразия M и выпуклый многогранный конус $K_x\subset\mathbf{R}^n$, $n=\dim M$, с вершиной в нуле, такие, что $\varphi(x)=0$ и

$$K_x=\varphi(O_x\cap V).$$

В этом определении не предполагается телесность конуса K_x. В случае, когда K_x — полупространство или подпространство в $\mathbf{R}^n$ мы получаем, соответственно, определения (замкнутого) подмногообразия V с краем и без края [46].

Пара (O_x, φ) называется *картой* многообразия V с углами.

Как известно [34], [47], всякий выпуклый многогранный конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле задается конечной системой линейных однородных неравенств

$$\xi^{(i)}y\leqslant 0,\quad i=1, \dots, m\quad (\xi^{(i)}\in\mathbf{R}_n),$$

и, следовательно, локально, в окрестности точки x_0 подмногообразие V с углами задается системой гладких неравенств

$$g^{(i)}(x)\equiv\xi^{(i)}\varphi(x)\leqslant 0, \quad x\in O_{x_0},$$

Далее, поскольку выпуклый замкнутый конус в $\mathbf{R}^n$ гомеоморфен полупространству в $\mathbf{R}^k$, где k — размерность несущей плоскости этого конуса, то подмногообразие с углами является топологическим многообразием с краем (край негладкий!).

Пусть V — подмногообразие с углами в M. Касательный вектор $X_x\in T_xM$ называется *касательным к* V в точке $x\in V$ если существует гладкая кривая $\gamma:[0, \varepsilon_0]\to M$, $\gamma(0)=x$, $\gamma(\varepsilon)\in V$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, такая, что

$$\left.\frac{d\gamma(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=X_x.$$

Множество всех касательных векторов к $V\subset M$ в точке x обозначается через T_xV и называется *касательным конусом* к V в точке x. Непосредственно проверяется

Предложение 2.1. Касательный конус T_xV к подмногообразию V с углами является выпуклым многогранным конусом в T_xM с вершиной в нуле. При этом, если (O_x, φ) — карта V в точке x, то конусы T_xV и K_x изоморфны:

$$\varphi_{*,x}T_xV=K_x.$$

Соответствие $x\mapsto T_xV$ можно рассматривать как многозначное отображение из $V\subset M$ в TM. Оказывается, что если V — подмногообразие с углами, то это отображение является полунепрерывным снизу.

Напомним, что многозначное отображение F из M в TM является *полунепрерывным снизу*, если для любой карты (O_{x_0}, φ) на M отображение

$$\varphi(x)\mapsto\varphi_{*,x}F(x):\mathbf{R}^n\to 2^{\mathbf{R}^n}$$

полунепрерывно снизу как многозначное отображение из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$ (напомним, что $T_{\varphi(x)}\mathbf{R}^n=\varphi(x)+\mathbf{R}^n\subset\mathbf{R}^n$). Справедливо

Предложение 2.2. Пусть V — подмногообразие с углами в M. Тогда существует такое вполне интегрируемое распределение $\Delta(x)$, $x\in M$, на M постоянной размерности, что $\Delta(x)=$ $=T_xV-T_xV$ при $x\in V$. При этом, отображение $x\mapsto T_xV$ полунепрерывно снизу на V.

Доказательство этого утверждения по-существу использует следующую лемму, которая, вероятно, имеет и самостоятельное значение.

Лемма 2.1. Пусть K — выпуклый многогранный конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле. Тогда для любого $x\in K$

$$T_xK=x+K+\hat{L}_x,$$

где $\hat{L}_x$ — несущая плоскость грани L_x конуса K максимальной размерности, содержащая точку x в своей относительной внутренности, $\hat{L}_x = L_x - L_x$.

Из предложения 2.2 вытекает, в частности, что всякая связная компонента подмногообразия V с углами содержится в некотором связном подмногообразии $N \subset M$, а именно, интегральном многообразии распределения $\Delta(x)$, $x \in M$. Таким образом, по крайней мере, для связного подмногообразия V, с углами всегда можно указать наименьшее (в смысле размерности) содержащее его многообразие. Те многообразия V с углами в M для которых $\dim T_x V = \dim M$ $\forall x \in V$ мы будем называть *телесными*.

Продолжим изучение элементарной геометрии подмногообразий с углами, введя очень важное понятие открытой грани этого подмногообразия.

Связное гладкое подмногообразие $\Gamma \subset M$ называется *открытой гранью* подмногообразия V с углами, если $\Gamma \subset V$ и не существует гладкого подмногообразия $\Gamma' \subset M$, строго содержащего Γ и обладающего этим же свойством (другими словами, Γ максимально по включению).

Замкнутой гранью подмногообразия V с углами называется замыкание открытой грани.

Предложение 2.3. Каждая точка подмногообразия V с углами содержится в единственной открытой грани максимальной размерности. Всякая замкнутая грань многообразия V с углами сама является подмногообразием с углами и существует взаимное однозначное соответствие между замкнутыми гранями конуса $T_x V$ и гранями V. Более того, семейство $\{\Gamma\}$ открытых граней многообразия V с углами задает на V структуру стратифицированного по Уитни пространства.

Напомним, что замкнутое подмножество $\mathscr{X} \subset M$ гладкого многообразия M *стратифицировано по Уитни* (см. [54], [56]), если оно допускает представление

$$\mathscr{X} = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$$

в виде попарно непересекающихся гладких подмногообразий S_α, $\alpha \in A$ (где A — частично упорядоченное множество индексов), таких, что из условия $S_\alpha \cap \bar{S}_\beta \neq \varnothing$ следует, что $S_\alpha \subset \bar{S}_\beta$ $(\alpha < \beta)$, причем выполнены следующие *условия* A и B *Уитни*:

A. Если $x_i \in S_\alpha$, $y_i \in S_\beta$, где $S_\alpha \subset S_\beta$, таковы, что $x_i \to y$, $y_i \to y$, $y \in S_\alpha$, то при $T_{x_i} S_\beta \to \Pi$, $\Pi \supset T_y S_\alpha$.

B. Пусть отрезки секущей $\overline{x_i y_i}$ сходятся к предельной прямой l. Тогда $l \subset \Pi$.

Поясним основную идею доказательства предложения 2.3. Для этого рассмотрим распределение в $\mathbf{R}^n$, заданное формулой

$$x \mapsto T_x\check{K} \overset{\text{def}}{=} T_x K \cap (-T_x K)$$

для конуса K в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле. Если K — многогранный конус, то это распределение (вообще говоря, с особенностями) *вполне интегрируемо*: его интегральными многообразиями являются открытые грани конуса K (см. [68]). Поскольку оно интегрируемо, то оно *инволютивно*, но тогда инволютивным является и распределение

$$x \mapsto \check{T}_x V = T_x V \cap (-T_x V), \quad x \in V,$$

ибо, в силу того, что $\varphi: O_x \to \mathbf{R}^n$ — диффеоморфизм, имеем соотношение $\check{T}_{\varphi(x)} K_x = \varphi_{*,x} T_x V \cap (-\varphi_{*,x} T_x V)$. Но тогда, по теореме Фробениуса (см. [26], [41], [68]),

$$\Gamma^{(k)} = \{x \in V \mid \dim \check{T}_x V = k\}$$

является гладким многообразием — а именно, интегральным многообразием распределения $x \mapsto \check{T}_x V$. Оно то и является искомой открытой гранью подмногообразия V с углами, проходящей через точку x, в которой $\dim \check{T}_x V = k$.

Центральным понятием теории многообразий с углами является понятие *трансверсальности* гладкого отображения подмногообразию с углами и соответствующая теорема трансверсальности. Кстати, понятие трансверсальности приводит также и к другому определению подмногообразий с углами. Об этом будет сказано несколько позднее.

Пусть $V \subset M$ и $W \subset N$ — подмногообразия с углами в гладких многообразиях M и N соответственно, $f: V \to N$ — *гладкое отображение* (то есть сужение на V некоторого гладкого отображения $\tilde{f}: M \to N$).

Говорят, что это отображение *трансверсально* подмногообразию $W \subset N$ с углами, и пишут $f \pitchfork W$, если либо $f(x) \notin W$, либо $f(x) \in W$ и

$$-f_{*,x} T_x V + T_{f(x)} W = T_{f(x)} N. \qquad (2.1)$$

Пусть $V \subset M$, $W \subset N$ — замкнутые подмножества гладких многообразий M и N соответственно. Отображение $f: V \to N$, как и выше, называется *гладким*, если оно является ограничением на V некоторого гладкого отображения $\tilde{f}: M \to N$. Будем говорить, что замкнутые подмножества V и W *диффеоморфны*, если существуют гладкие отображения $f: V \to W$, $g: W \to V$ такие, что

1) f и g являются ограничениями на V и W диффеоморфизмов $F: M \to N$ и $G: N \to M$ соответственно;

2) отображения $G \circ F: M \to M$ и $F \circ G: N \to N$ *гладко изотопны* тождественным отображениям id_M и id_N. Напомним, что отображение $h: M \to M$ *гладко изотопно тождественному отображению*, если существует гладкое отображение $H: [0, 1] \times M \to M$, такое, что $H_t(\cdot) = H(t, \cdot)$ — диффеоморфизм M и $H_1 = h$, $H_0 = \mathrm{id}_M$ (см. [46], [48]).

Теорема 2.1 (*теорема трансверсальности*). Пусть M — компактное многообразие, $V \subset M$ — подмногообразие с углами в

M, $W \subset N$ — подмногообразие с углами в (необязательно компактном) многообразии N и f_t, $t \in \mathbf{R}$,— семейство гладких отображений $f_t : V \to N$, трансверсальных при каждом t подмногообразию W с углами, и гладко зависящее от параметра $t \in \mathbf{R}$. Тогда для любых $t', t'' \in \mathbf{R}$ множества $f_{t'}^{-1}(W)$ и $f_{t''}^{-1}(W)$ диффеоморфны.

Остановимся кратко на основных идеях доказательства этого утверждения. Отметим сначала, что имеет место следующее предложение, имеющее и самостоятельный интерес.

Предложение 2.4. Пусть F_i, $i=1, 2$,— полунепрерывные снизу многозначные отображения из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$ такие, что

1) $F_i(x)$ $(i=1, 2)$ — выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$ $\forall x \in \mathbf{R}^m$;

2) несущие плоскости $\widehat{F_i(x)}$, $i=1, 2$, конусов $F_i(x)$, $i=1, 2$, имеют постоянную размерность;

3) конусы $F_1(x)$ и $F_2(x)$ не отделимы:

$$F_1(x) - F_2(x) = \mathbf{R}^n \forall x \in \mathbf{R}^m.$$

Тогда для любой гладкой функции $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ и любой точки $x_0 \in \mathbf{R}^m$ существует окрестность U_x этой точки и гладкие сечения f_i, $i=1, 2$, отображений F_i, $i=1, 2$, такие, что

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \ \forall x \in U_{x_0}.$$

При этом, если f непрерывно (гладко) зависит от параметра $\sigma \in \Sigma$ (Σ — топологическое пространство или гладкое многообразие), то эти сечения можно выбрать также непрерывно (гладко) зависящими от этого параметра.

Имея этот основной технический результат, теперь нетрудно доказать теорему. Не нарушая общности, мы можем считать, что $t'=0$, $t''=1$.

Пусть p_t, $t \in \mathbf{R}$,— произвольный поток на многообразии M, X_t, $t \in \mathbf{R}$,— порождающее его нестационарное векторное поле. Тогда

$$\frac{d}{dt} f_t(p_t(x)) = \frac{\partial}{\partial t} f_t(p_t(x)) + f_{*, p_t(x)} X_{t, p_t(x)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial t} f_t(p_t(x)) \in T_{f_t(p_t(x))}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то, используя условие трансверсальности и предложение 2.4, мы можем указать такое гладкое нестационарное векторное поле X_t, $t \in \mathbf{R}$, что

$$\frac{d}{dt} f_t(p_t(x)) \in T_{f_t(p_t(x))} W, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Следовательно, если $f_0(x) \in W$, то

$$f_t(p_t(x)) = f_0(x) + \int_0^t \frac{d}{d\theta} f_\theta(p_\theta(x))\, d\theta \in W, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

то есть

$$p_t f_0^{-1}(W) \subset f_t^{-1}(W), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Заменяя семейство f_t, $t \in \mathbf{R}$, на семейство f_{1-t}, $t \in \mathbf{R}$, и повторяя проведённые рассуждения, получаем, что существует поток q_t, $t \in \mathbf{R}$, на многообразии M, для которого

$$q_t f_1^{-1}(W) \subset f_{1-t}^{-1}(W), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Следовательно, полагая, $F = p_1$, $G = q_1$ мы получаем диффеоморфизмы многообразия M такие, что

$$F(f_0^{-1}(W)) \subset f_1^{-1}(W), \ G(f_1^{-1}(W)) \subset f_0^{-1}(W).$$

При этом, так как p_t, q_t, $t \in \mathbf{R}$, — потоки, то $F \circ G$ и $G \circ F$ изотопны тождественным отображениям; эта изотопия

$$(F \circ G)_t = p_t \circ q_t, \ (G \circ F)_t = q_t \circ p_t, \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

и, следовательно, множества $f_0^{-1}(W)$ и $f_1^{-1}(W)$ диффеоморфны в казанном выше смысле.

Важно отметить, что утверждение теоремы 2.1 остается в силе, если требовать от V и W только следующих свойств: 1) V, W замкнуты; 2) касательные конусы $T_x V$, $T_y W$ к этим множествам полунепрерывны снизу и имеют несущие плоскости постоянной размерности. Эти свойства автоматически выполнены для прообраза $f^{-1}(W)$ при трансверсальном к W отображения $f: M \to N$ гладкого многообразия M в гладкое многообразие N (W — многообразие с углами в N). Всё это наводит на мысль принять следующее общее определение многообразия с углами.

Замкнутое подмножество $V \subset M$ гладкого многообразия M называется *подмногообразием с углами*, если для любой точки $x \in V$ существуют: такие карта (O_x, φ) многообразия M, выпуклый многогранный конус $K_x \subset \mathbf{R}^m$ с вершиной в нуле и гладкое отображение $F_x : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $n = \dim M$, сохраняющее начало координат, $F_x(0) = 0$, и трансверсальное K_x, что $\varphi(x) = 0$

$$\varphi(U_x \cap V) = F_x^{-1}(K_x).$$

При таком определении класс многообразий с углами оказывается замкнутым относительно операции трансверсального пересечения. Однако в рамках этой статьи мы будем придерживаться определения, которое было дано в начале п. 2.1. Теория «общих» многообразий с углами — в том числе рассмотрение гладких управляемых систем на этих многообразиях, теории Морса и Пале—Смейла для них составят предмет отдельной публикации. Здесь мы отметим только, что многие результаты геометрической теории управления остаются в силе и для систем на этих гладких многообразиях с углами (по поводу геометрической теории управления см. обзоры [7], [13], [69]).

2.2. Теория Морса для многообразий с углами. Всюду далее M — компактное риманово многообразие. Развиваемая в этом пункте теория справедлива и для некомпактных многообразий (при соответствующих требованиях собственности рассматриваемых ниже функций Морса), однако для простоты изложения мы ограничимся в этой статье только этим случаем.

Пусть V — подмногообразие с углами в M, не нарушая общности, мы можем считать его телесным (см. п. 2.1). Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ — риманова структура на M. Тогда для гладкой функции $f: V\to\mathbf{R}$ определён её *градиент* $\nabla f(x)$ — гладкое векторное поле ∇f такое, что

$$\langle d_x f, X_x\rangle = \langle\nabla f(x), X_x\rangle = Xf(x) \quad \forall X\in \operatorname{Der} M.$$

Точка $x_0\in V$ называется *критической точкой* функции $f: V\to\mathbf{R}$ если градиент $\nabla f(x_0)$ принадлежит *сопряжённому конусу*[1]

$$T^*_{x_0}V = \{\omega_{x_0}\in T^*_{x_0}M \mid \langle \omega_{x_0}, X_{x_0}\rangle \leqslant 0 \ \forall X_{x_0}\in T_{x_0}V\}$$

к касательному конусу $T_{x_0}V$ к V в точке x_0: $\nabla f(x_0)\in T^*_{x_0}V$.

Заметим, что если x_0 — внутренняя точка V, то она является *критической* в обычном смысле точкой — точкой в которой $\nabla f(x_0)=0$. В самом деле, ввиду телесности, $\widehat{T_{x_0}V} = T_{x_0}V - - T_{x_0}V = T_{x_0}M$. Поэтому $T^*_{x_0}V=\{0\}$ и условие $\nabla f(x_0)\in T^*_{x_0}V$ дает $\nabla f(x_0)=0$.

В данном выше определении критической точки гладкой функции f на подмногообразии V с углами неявно присутствует риманова структура (относительно которой определяется градиент ∇f), позволяющая отождествлять $T_x{}^*M$ с T_xM. На самом деле определение критичности точки $x_0\in V$ не зависит ни от какой римановой структуры. Более аккуратное определение критической точки таково:

Точка $x_0\in V$ называется *критической точкой* гладкой функции f на подмногообразии V с углами, если дифференциал $d_{x_0}f$ этой функции в точке x_0 принадлежит $T^*_{x_0}V$:

$$d_{x_0}f\in T^*_{x_0}V = \{\omega_{x_0}\in T^*_{x_0}M \mid \langle \omega_{x_0}, X_{x_0}\rangle \leqslant 0 \ \forall X_{x_0}\in T_{x_0}V.$$

Совершенно очевидна эквивалентность данных определений.

Пусть x_0 — критическая точка функции f на многообразии V с углами. Рассмотрим открытую грань Γ, содержащую x_0 в своей (относительной) внутренности. Тогда x_0 является критической точкой (в общепринятом смысле) для сужения $f\restriction\Gamma$ этой функции на эту грань и, следовательно, корректно определён *гессиан* $H_{x_0}(f\restriction\Gamma)$, который мы и будем называть *гессианом функции* f в критической точке x_0.

[1] Конус $T^*_{x_0}V$ называют также *отрицательным полярным конусом* к конусу $T_{x_0}V$ — см. [34].

Критическая точка $x_0 \in V$ называется *невырожденной* критической точкой, если

1) $\nabla f(x_0) \in \operatorname{rel\,int} T^*_{x_0} V$;

2) x_0 — невырожденная критическая точка для сужения $f \restriction \Gamma$ функции f на грань Γ максимальной размерности, содержащую x_0 внутри себя (то есть определённый выше гессиан $\check{f} \restriction \Gamma$ является невырожденной формой на $T_{x_0} V$).

Как и в классической ситуации справедливо

Предложение 2.5. Невырожденные критические точки гладкой функции f на подмногообразии V с углами изолированы.

Индексом (*коиндексом*) критической точки x_0 функции f на многообразии V с углами назовём индекс (коиндекс) x_0 для $f \restriction \Gamma$.

Критическим значением c функции $f: V \to \mathbf{R}$ на многообразии V с углами называется такое c, для которого множество уровня

$$f^{-1}(c) = \{x \in V \mid f(x) = c\}$$

содержит хотя бы одну критическую точку. Все остальные значения называются *регулярными*.

Гладкая функция $f: V \to \mathbf{R}$ на многообразии V с углами называется *функцией Морса*, если все её критические точки невырождены. В некомпактной ситуации нужно ещё требовать, чтобы f была собственной.

Теперь мы займёмся исследованием изменения гомотопического типа *множества уровня*

$$f^a = \{x \in V \mid f(x) \geqslant a\}$$

гладкой функции f на подмногообразии V с углами при изменении параметра $a \in \mathbf{R}$ [1].

Как и в классической теории, гомотопический тип f^a может изменяться только тогда, когда параметр a «проходит» через критическое значение функции f. Более точно, справедливо

Предложение 2.6. Пусть f — функция Морса на подмногообразии V с углами и отрезок $[a, b]$ не содержит критических значений этой функции f. Тогда множество f^a имеет гомотопический тип множества f^b. Более того, f^a диффеоморфно f^b в указанном выше смысле и f^b — деформационный ретракт f^a.

Приведём доказательство второго утверждения. Для этого определим семейство отображений $f_t = f - t: V \to \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$, и подмногообразие $W = \mathbf{R}_+ = \{s \in \mathbf{R} \mid s \geqslant 0\}$ с углами в вещественной прямой $\mathbf{R}$. Поскольку на отрезке $[a, b]$ нет критических значений функции f, то для любого $t \in [a, b]$ $f_t \pitchfork W$, следовательно, при-

[1] Мы исследуем множества больших значений f^a, а не множества меньших значений f_a (см. § 1), как в классической теории, по ряду соображений, одним из которых является принятое нами определение критической точки функции $f: V \to \mathbf{R}$.

меняя теорему 2.1, мы получаем, что множества $f^a = f_a^{-1}(\mathbf{R}_+)$ и $f^b = f_b^{-1}(\mathbf{R}_+)$ диффеоморфны.

Из предложения 2.6 следует, в частности, что в рассматриваемой ситуации

$$H_i(f^a, f^b) = 0 \Leftrightarrow H_i(f^a) = H_i(f^b)$$

(напомним, что H_i — i-тая группа сингулярных гомологий с коэффициентами в некотором поле).

Рассмотрим теперь случай, когда отрезок $[a, b]$ содержит критическое значение c, $a < c < b$, функции $f: V \to \mathbf{R}$.

Справедлива следующая

Теорема 2.2 *(о приклеивании клеток)*. Пусть $f: V \to \mathbf{R}$ — функция Морса на подмногообразии V с углами и c — единственное критическое значение этой функции на $[a, b]$, $a < c < b$, которому соответствуют невырожденные критические точки $x_1, \ldots, x_k \in V$, соответственно коиндексов $r_1, \ldots, r_k$. Тогда множество f^a имеет гомотопический тип множества f^b с приклеенными клетками $D^{r_1}, \ldots, D^{r_k}$ размерностей $r_1, \ldots, r_k$. В частности, V имеет структуру клеточного комплекса.

Из теоремы 2.2 стандартным образом (см. [29], [33]) выводятся *неравенства Морса*:

Теорема 2.3. Если f — функция Морса на подмногообразии $V \subset M$ с углами, то для любого $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, $n = \dim M$, справедливы неравенства

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} b_i(V) \leqslant \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} c_i(f),$$

$$b_i(V) \leqslant c_i(f), \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i(f) = \chi(V),$$

где $c_i(f)$ — количество критических точек функции f на V коиндекса i, $b_i(V) = \operatorname{rank} H_i(V)$ — i-тое число Бетти пространства V, $\chi(V)$ — его эйлерова характеристика.

Теорема 2.2 может быть доказана с помощью стратифицированной теории Морса [54] — в данном случае нормальные данные Морса вычисляются просто потому что они тривиальны[1]. Доказательство этой теоремы, основанное на совершенно иных принципах (с помощью конструкции псевдоградиентного потока из предложения 2.11, см. ниже) будет опубликовано в статье, посвященной полному изложению конечномерной теории для случая «общих» многообразий с углами.

Следует отметить, что для вывода неравенств Морса совсем не обязательно пользоваться теоремой о приклеивании кле-

[1] По поводу вычисления нормальных данных Морса для стратифицированной теории и обсуждение соответствующего круга вопросов см. [52].

ток — в п. 2.4 мы покажем, что существует более простой и естественный путь, работающий и в бесконечномерной ситуации. Этот подход (восходящий, по-видимому, к самому Морсу) требует лишь какого-либо варианта леммы Морса. Мы завершим изложение конечномерной теории формулировкой и наброском доказательства *«гомотопического»* варианта этой леммы.

Пусть f — гладкая функция на выпуклом многогранном конусе $K\subset\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле, $f(0)=0$ и 0 — невырожденная критическая точка этой функции. Пусть $P=K\cap(-K)$, Q — ортогональное дополнение к $P: P\oplus Q=\mathbf{R}^n$. Представим точку $x\in\mathbf{R}^n$ в виде $x=(p, q)$, $p\in P$, $q\in Q$, и определим функцию $\hat{f}: K\to\mathbf{R}$ по формуле

$$\hat{f}(p, q)=\frac{\partial f(0, 0)}{\partial q}q+\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial p\partial p}(p, p).$$

Теорема 2.4. Существует окрестность нуля U в пространстве $\mathbf{R}^n$ такая что пары $(\{(p, q)\in K\cap\bar{U}\,|\,f(p, q)\geqslant 0\}, \{(p, q)\in K\cap\bar{U}\,|\,f(p, q)>0\})$ и $(\{(p, q)\in K\cap\bar{U}\,|\,\hat{f}(p, q)\geqslant 0\}, \{(p, q)\in K\cap U\,|\,f(p, q)>0\})$ гомотопически эквивалентны.

Остановимся кратко на основных идеях доказательства этой теоремы. Определим для $\forall\varepsilon>0$ *дилатацию* $\Delta_\varepsilon: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ пространства $\mathbf{R}^n$ по формуле $\Delta_\varepsilon(p, q)=(\varepsilon p, \varepsilon^2 q)$; это отображение взаимно однозначно и непрерывно в обе стороны переводит $(n-1)$-мерную сферу $S^{n-1}=\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,|x|=1\}$ в эллипсоид $\Omega_\varepsilon=\{x=(p, q)\in\mathbf{R}^n\,|\,p^2/\varepsilon^2+q^2/\varepsilon^4=1\}$. Пусть $\varepsilon_0>0$ таково, что

$$\bar{U}_\varepsilon=\bigcup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}\Omega_\varepsilon$$

не содержит критических точек функции f, отличных от нуля. Рассмотрим семейство отображений $f_\varepsilon=f\circ\Delta_\varepsilon$, $\varepsilon>0$, из $V=S^{n-1}\cap K$ в $\mathbf{R}$. В силу условия $\langle\nabla f(0), x\rangle=0$ при $x=(p, 0)\in P$, имеем для $\forall(p, q)\in V$, $\varepsilon>0$:

$$f_\varepsilon(p, q)=f(\varepsilon p, \varepsilon^2 q)=\varepsilon^2\frac{\partial f(0, 0)}{\partial q}q+$$
$$+\varepsilon^2\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial p\partial p}(p, p)+\varepsilon^3 R_\varepsilon(p, q),$$
$$|R_\varepsilon(p, q)|\leqslant\mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$f_\varepsilon=f\circ\Delta_\varepsilon=\hat{f}\circ\Delta_\varepsilon+\varepsilon R\circ\Delta_\varepsilon;\quad R\circ\Delta_\varepsilon=\varepsilon^2 R_\varepsilon.$$

Положим

$$f_{\varepsilon,t}=\hat{f}\circ\Delta_\varepsilon+t\varepsilon R\circ\Delta_\varepsilon,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Заметим, что $V=K\cap S^{n-1}$ — подмногообразие с углами в «общем» смысле, так что касательный конус T_xV полунепрерывен снизу и имеет несущие плоскости постоянной размерности — это легко следует также из результатов М. Ш. Фарбера [42]. Оказывается, что семейство $f_{\varepsilon,t}: V \to \mathbf{R}$ при достаточно малом ε $(0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0)$ трансверсально $\mathbf{R}_+=\{s\in\mathbf{R}\,|\,s\geqslant 0\}$ при $0\leqslant t\leqslant 1: f_{\varepsilon,t}\pitchfork \mathbf{R}_+$. Следовательно, используя конструкции, построенные при доказательстве теоремы трансверсальности 2.1, мы получаем, что существуют потоки $p_{t,\varepsilon}$, $q_{t,\varepsilon}$, $t\in\mathbf{R}$, на сфере S^{n-1} такие, что $\forall t$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$,

$$p_{t,\varepsilon}f_{\varepsilon,0}^{-1}(\mathbf{R}_+)\subset f_{\varepsilon,1-t}^{-1}(\mathbf{R}_+),\quad q_{t,\varepsilon}f_{\varepsilon,1}^{-1}(\mathbf{R}_+)\subset f_{\varepsilon,1-t}^{-1}(\mathbf{R}_+).$$

Определим отображения $F_t:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $G_t:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $0\leqslant t\leqslant 1$, по формулам

$$F_t\restriction\Omega_\varepsilon=\Delta_\varepsilon\circ p_{t,\varepsilon}\circ\Delta_\varepsilon^{-1},\quad G_t\restriction\Omega_\varepsilon=\Delta_\varepsilon\circ q_{t,\varepsilon}\circ\Delta_\varepsilon^{-1},\quad \varepsilon>0,$$
$$F_t(0)=G_t(0)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Тогда F_t, G_t — сохраняющие начало координат гомеоморфизмы $\mathbf{R}^n$ и при $t=0$, $F_t\circ G_t=\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$, $G_t\circ F_t=\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$. Положим $F=F_1$, $G=G_1$.

Тогда $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ переводит множество $\{(p,q)\in K\cap\bar U_{\varepsilon_1}\,|\,\hat f(p,q)\geqslant 0\}$ в множество $\{(p,q)\in K\cap\bar U_{\varepsilon_1}\,|\,f(p,q)\geqslant 0\}$, а G — множество $\{(p,q)\in K\cap\bar U_{\varepsilon_1}\,|\,f(p,q)\geqslant 0\}$ в множество $\{(p,q)\in K\cap\bar U_{\varepsilon_1}\,|\,\hat f(p,q)\geqslant 0\}$, так, что эти множества имеют один и тот же гомотопический тип.

В самом деле, например, для F имеем, в силу соотношений $f_{1,\varepsilon}=f_\varepsilon=f\circ\Delta_\varepsilon$, $\hat f_{0,\varepsilon}=\hat f_\varepsilon=\hat f\circ\Delta_\varepsilon$, $\varepsilon>0$, следующую цепочку равенств:

$$F\{(p,q)\in K\cap\bar U_{\varepsilon_1}\,|\,\hat f(p,q)\geqslant 0\}=$$
$$=\bigcup_{0<\varepsilon<\varepsilon_1}\{(p,q)\in K\cap\Omega_\varepsilon\,|\,\hat f(p,q)\geqslant 0\}=$$
$$=\bigcup_{0<\varepsilon<\varepsilon_1}\{(p,q)\in K\cap\Omega_\varepsilon\,|\,\hat f\circ\Delta_\varepsilon\circ p_{1,\varepsilon}\circ\Delta_\varepsilon^{-1}(p,q)\geqslant 0\}=$$
$$=\bigcup_{0<\varepsilon<\varepsilon_1}\{(p,q)\in K\cap S^{n-1}\,|\,\hat f_{0,\varepsilon}(p_{1,\varepsilon}(p,q))\geqslant 0\}\subset$$
$$\subset\bigcup_{0<\varepsilon<\varepsilon_1}\{(p,q)\in K\cap S^{n-1}\,|\,f_{1,\varepsilon}(p,q)\geqslant 0\}=$$
$$=\bigcup_{0<\varepsilon<\varepsilon_1}\{(p,q)\in K\cap S^{n-1}\,|\,f\circ\Delta_\varepsilon(p,q)\geqslant 0\}\doteq$$
$$=\bigcup_{0<\varepsilon<\varepsilon_1}\{(p,q)\in K\cap\Omega_\varepsilon\,|\,f(p,q)\geqslant 0\}=$$
$$=\{(p,q)\in K\cap\bar U_{\varepsilon_1}\,|\,f(p,q)\geqslant 0\}.$$

Теорема доказана.

2.3. Гильбертовы подмногообразия с углами: определение и простейшие свойства. Пусть $\mathcal{M}$ — гильбертово многообразие, $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, моделирующее $\mathcal{M}$, V — подмногообразие с углами в конечномерном римановом многообразии M и задана суръективная субмерсия

$$F:\mathscr{M}\to\mathscr{N}.$$

Гильбертовым подмногообразием с углами назовём прообраз V при отображении F:

$$\mathscr{V}=F^{-1}(V)$$

Само конечномерное подмногообразие V с углами называется *моделирующим* или просто, *моделью* $\mathscr{V}$.

При таком определении гильбертово подмногообразие с углами задаётся «в целом», глобально. Наша первая цель — выяснить его локальную структуру. Поскольку моделирующее $\mathscr{V}$ подмногообразие V с углами локально является выпуклым многогранным конусом, то естественно ожидать, что $\mathscr{V}$ имеет примерно такую же локальную структуру.

Пусть $x\in\mathscr{V}$ — произвольная точка $\mathscr{V}$. Рассмотрим карту $(\mathscr{O}_x^1, \psi_1)$ многообразия $\mathscr{M}$ в точке x, такую, что $\psi_1(x)=0$. Тогда отображение $F_1=F\circ\psi_1^{-1}:\mathscr{H}\to M$ является субмерсией $\mathscr{H}$ на $F(\mathscr{O}_x^1)=O_{F(x)}\subset M$. Выберем карту

$$(O^1_{F(x)}, \varphi_1),\ O^1_{F(x)}\subset O_{F(x)}:\varphi_1(O^1_{F(x)}\cap V)=K_{F(x)},\ \varphi_1(F(x))=0,$$

конечномерного подмногообразия V с углами. Тогда имеем отображение

$$\tilde{F}=\varphi_1\circ F\circ\psi_1^{-1}=\varphi_1\circ F_1:\mathscr{H}\xrightarrow{\text{на}}\mathrm{R}^n\supset K_{F(x)},$$

которое является субмерсией и таково, что $\tilde{F}(0)=0$. Это отображение, по теореме о неявной функции [25], можно «выпрямить» путём замены «координат» в прообразе, то есть существует сохраняющий начало координат диффеоморфизм P окрестности $\mathscr{U}$ нуля $\mathscr{H}$ в $\mathscr{U}$ такой, что

$$\tilde{F}\circ P=d_0\tilde{F}\ \text{или}\ \tilde{F}=d_0\tilde{F}\circ P^{-1}.$$

Следовательно,

$$\tilde{F}^{-1}(K_{F(x)})=P(d_0\tilde{F}^{-1}(K_{F(x)})).$$

Поскольку $d_0\tilde{F}^{-1}(K_{F(x)})$ — выпуклый многогранный конус, изоморфный $\operatorname{Ker} d_0\tilde{F}\oplus\mathscr{K}_x$, где $\mathscr{K}_x$ — некоторый (конечномерный) выпуклый многогранный конус, коразмерность несущей плоскости которого $\hat{\mathscr{K}}_x=\mathscr{K}_x-\mathscr{K}_x\subset\mathscr{H}$ равна коразмерности $\hat{K}_{F(x)}$ в R^n, $n=\dim M$, то мы получаем, что для любой точки $x\in\mathscr{V}$ существуют: карта $(\mathscr{O}_x, \psi)$ гильбертова многообразия $\mathscr{M}$, подпространство $\mathscr{H}_x\subset\mathscr{H}$ и многогранный (конечномерный) выпуклый конус $\mathscr{K}_x$ с вершиной в нуле пространства $\mathscr{H}$, такие, что

$$\psi(\mathscr{V}\cap\mathscr{O}_x)=\mathscr{K}_x\oplus\mathscr{H}_x,\ \psi(x)=0.$$

Для этого достаточно положить $\mathscr{H}_x = \operatorname{Ker} d_0\tilde{F}$, $\psi = P \circ \psi_1$, ибо

$$F|_{\mathcal{O}_x} = \varphi^{-1} d_0 F \circ P \circ \psi_1|_{\mathcal{O}_x};\ F^{-1}(\mathscr{V} \cap \mathcal{O}_x) =$$

$$= \psi_1^{-1} \circ P^{-1} \circ d_0 F^{-1} \circ \varphi_1 (O^1_{F(x)} \cap V) = \psi_1^{-1} \circ P^{-1\prime} d_0 F^{-1}(K_{F(x)}) =$$

$$= \psi_1^{-1} \circ P^{-1}(\mathscr{K}_x \oplus \mathscr{H}_x).$$

Таким образом, доказано

Предложение 2.7. Для любой точки $x \in \mathscr{V}$ гильбертова подмногообразия $\mathscr{V}$ с углами, лежащем в гильбертовом многообразии $\mathscr{M}$, существуют такие карта $(\mathcal{O}_x, \psi)$ многообразия $\mathscr{M}$, подпространство $\mathscr{H}_x \subset \mathscr{H}$ и выпуклый многогранный (конечномерный) конус $\mathscr{K}_x \subset \mathscr{H}$ с вершиной в нуле, что

$$\psi(\mathcal{O}_x \cap \mathscr{V}) = \mathscr{K}_x \oplus \mathscr{H}_x.$$

Здесь $\mathscr{H}$ — моделирующее $\mathscr{M}$ гильбертово пространство.

Предложение 2.7 даёт основания утверждать, что элементарная геометрия гильбертова подмногообразия $\mathscr{V}$ с углами похожа на геометрию его модели — конечномерного подмногообразия V с углами.

Во-первых, из локального представления гильбертова подмногообразия $\mathscr{V}$ с углами, указанного в предложении 2.7, немедленно получаем, что касательный конус $T_x\mathscr{V}$ к $\mathscr{V}$ в точке x допускает представление

$$T_x\mathscr{V} = \mathscr{H}_x \oplus \mathscr{K}_x,$$

где $\mathscr{H}_x \subset T_x\mathscr{V}$ — (вообще говоря, бесконечномерное) подпространство $T_x\mathscr{M}$, $\mathscr{K}_x$ — (не обязательно острый) конечномерный выпуклый многогранный конус в $T_x\mathscr{M}$ с вершиной в нуле, такой, что его несущие плоскости $\hat{\mathscr{K}}_x = \mathscr{K}_x - \mathscr{K}_x$ имеют постоянную (не зависящую от x) размерность.

Во-вторых, из предложения 2.7 вытекает, что многозначное отображение

$$x \mapsto T_x\mathscr{V} : \mathscr{M} \to 2^{T\mathscr{M}}$$

полунепрерывно снизу — для доказательства достаточно воспользоваться очевидным аналогом леммы 2.1:

Лемма 2.2. Если $\mathscr{K}$ — выпуклый многогранный конечномерный конус с вершиной в нуле, H — замкнутое подпространство гильбертона пространства $\mathscr{H}$ и $K = \mathscr{K} \oplus H$, то $\forall x \in K$

$$T_x K = x + H \oplus (\mathscr{K} + \hat{\mathscr{L}}_x),$$

где $\hat{\mathscr{L}}_x$ — несущая плоскость грани $\mathscr{L}_x$ конуса $\mathscr{K}$ максимальной размерности, содержащая x в своей (относительной) внутренности.

Таким образом, мы получаем, что справедливо следующее

Предложение 2.8. Пусть $\mathscr{V}$ — гильбертово подмногообразие с углами. Тогда касательный конус $T_x\mathscr{V}$ к $\mathscr{V}$ в точке x обладает следующими свойствами:

1) несущие подпространства $\widehat{T_x\mathscr{V}}=T_x\mathscr{V}-T_x\mathscr{V}$ имеют постоянную (не зависящую от x) коразмерность в $T_x\mathscr{M}$;

2) многозначное отображение $x\mapsto T_x\mathscr{V}:\mathscr{M}\to 2^{T\mathscr{M}}$ полунепрерывно снизу и для любого $x\in\mathscr{V}$

$$T_x\mathscr{V}=\mathscr{K}_x\oplus\mathscr{H}_x,$$

где $\mathscr{K}_x$ — выпуклый многогранный конус в $T_x\mathscr{M}$, несущие подпространства $\hat{\mathscr{K}}_x=\mathscr{K}_x-\mathscr{K}_x$ которого имеют постоянную размерность, $\mathscr{H}_x$ — подпространство $T_x\mathscr{M}$ постоянной коразмерности.

Как и в конечномерном случае, *открытой гранью* $\mathscr{G}$ гильбертова подмногообразия $\mathscr{V}$ с углами называется максимальное по включению гладкое подмногообразие $\mathscr{G}\subset\mathscr{M}$, целиком лежащее в $\mathscr{V}$.

Открытые грани гильбертова подмногообразия $\mathscr{V}$ с углами легко описываются в терминах открытых граней моделирующего $\mathscr{V}$ конечномерного подмногообразия V с углами. Именно, если Γ — открытая грань V, то (см. § 1, п. 1.1,) $\mathscr{G}=F^{-1}(\Gamma)$ является гладким подмногообразием в $\mathscr{M}$ той же коразмерности, что и Γ в M, при этом, $\mathscr{G}\subset\mathscr{V}$, то есть $\mathscr{G}$ — открытая грань $\mathscr{V}$.

Поскольку семейство $\{\Gamma\}$ открытых граней конечномерного подмногообразия V с углами задаёт на V структуру стратифицированного по Уитни пространства, то и семейство $\{\mathscr{G}\}$ открытых граней $\mathscr{V}$ задаёт на $\mathscr{V}$ стратификацию Уитни. Следовательно, установлено

Предложение 2.9. Каждая точка $x\in\mathscr{V}$ гильбертова подмногообразия $\mathscr{V}$ с углами содержится в единственной открытой грани $\mathscr{G}$, имеющей минимальную коразмерность в $\mathscr{M}$. Семейство $\{\mathscr{G}\}$ открытых граней определяет на $\mathscr{V}$ структуру стратифицированного по Уитни пространства.

Для гладкой функции $f:\mathscr{V}\to\mathbf{R}$ (под *гладкой функцией* f на $\mathscr{V}$ подразумевается сужение на $\mathscr{V}$ некоторой гладкой функции $\tilde{f}:\mathscr{M}\to\mathbf{R}$), аналогично конечномерному случаю, определяются понятия *критических точек, невырожденных критических точек,* их *индексов, коиндексов, критических значений* и т. д. Приведём всё же эти определения.

Критической точкой x_0 гладкой функции $f:\mathscr{V}\to\mathbf{R}$ на гильбертовом подмногообразии $\mathscr{V}$ с углами называется такая точка $x_0\in\mathscr{V}$, что дифференциал $d_{x_0}f$ функции f в этой точке принадлежит *сопряженному конусу* $T^*_{x_0}\mathscr{V}$ к $T_{x_0}\mathscr{V}$ в точке x_0:

$$d_{x_0}f\in T^*_{x_0}\mathscr{V}\overset{\mathrm{def}}{=}\{\omega_{x_0}\in T^*_{x_0}\mathscr{M} \mid \langle \omega_{x_0}, X_{x_0}\rangle \leqslant 0 \ \forall X_{x_0}\in T_{x_0}\mathscr{V}\}^{1)}.$$

Критическая точка $x_0\in\mathscr{V}$ называется *невырожденной*, если

1) $d_{x_0}f\in \mathrm{rel\,int}\, T^*_{x_0}\mathscr{V}$;

2) x_0 — невырожденная критическая точка (в обычном смысле — см. § 1) сужения $f\restriction\mathscr{G}$ функции f на грань $\mathscr{G}$ подмногообразия $\mathscr{V}$ с углами, имеющую минимальную коразмерность в $\mathscr{M}$ и содержащую x_0 в своей относительной внутренности.

Индексом (коиндексом) критической точки x_0 называется индекс (коиндекс) этой точки для сужения $f\restriction\mathscr{G}$ функции f на соответствующую открытую грань $\mathscr{G}$ гильбертова подмногообразия $\mathscr{V}$ с углами.

Точки, не являющиеся критическими, называются *регулярными*.

Критическим значением $c\in\mathbf{R}$ функции f на гильбертовом подмногообразии $\mathscr{V}$ с углами называется такое число c, что множество

$$f^{-1}(c)=\{x\in\mathscr{V}\mid f(x)=c\}$$

содержит, по крайней мере, одну критическую точку. Критическое значение c функции f *невырожденно*, если $f^{-1}(c)$ содержит только невырожденные критические точки. Все остальные значения называются *регулярными*.

Сформулируем теперь аналог условия (C), обобщающий на рассматриваемый случай классическое понятие, введенное Пале и Смейлом [62], [65]. Для этого определим на $\mathscr{V}$ функцию $m_f:\mathscr{V}\to\mathbf{R}$ по формуле

$$m_f(x)=\sup_{\substack{\|X_x\|_x<1\\ X_x\in T_x\mathscr{V}}}\langle \nabla f(x), X_x\rangle_x,$$

где $\|X_x\|_x=\langle X_x, X_x\rangle_x^{1/2}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ — риманова структура на $\mathscr{M}$, $f:\mathscr{V}\to\mathbf{R}$ — гладкая функция.

Непосредственно проверяется, что функция $m_f\geqslant 0$ *полунепрерывна снизу* в топологии $\mathscr{V}$, наследуемой из $\mathscr{M}$: $\forall x_0\in\mathscr{V}$

$$\liminf_{x\to x_0} m_f(x)\geqslant m_f(x_0).$$

В самом деле, многозначное отображение

$$x\mapsto\{X_x\in T_x\mathscr{V} \mid \|X_x\|_x\leqslant 1\}:\mathscr{M}\to 2^{T\mathscr{M}}$$

---

1) Конус $T^*_{x_0}\mathscr{V}$ также называют *отрицательным полярным конусом*. Риманова структура $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ на $\mathscr{M}$ позволяет придать данному определению и такую форму: точка x_0 — критическая, если градиент $\nabla f(x_0)$ функции f в этой точке принадлежит $T^*_{x_0}\mathscr{V}$: $\nabla f(x_0)\in T^*_{x_0}\mathscr{V}$.

полунепрерывно снизу, ввиду полунепрерывности снизу отображения $x \mapsto T_x \mathscr{V}$. Для доказательства рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset \mathscr{M}$, $x_n \to x_0$ и произвольный элемент $X_{x_0} \in T_{x_0}\mathscr{V}$. Из полунепрерывности снизу отображения $x \mapsto T_x \mathscr{V}$ следует, что существует последовательность $\{X_{x_n}^{(n)}\} \subset T_{x_n}\mathscr{V}$, $X_{x_n}^{(n)} \to X_{x_0}$. Докажем, что можно указать последовательность $\{Y_{x_n}^{(n)}\} \subset T_{x_n}\mathscr{V}$, сходящуюся к X_{x_0}, такую, что $\|Y_{x_n}^{(n)}\|_{x_n} \leqslant 1$. Если $\|X_{x_0}\|_{x_0} = 1$, то возьмем вектор $Y_{x_0}^{(0)} \in T_{x_0}\mathscr{V}$ для которого $\|Y_{x_0}^{(0)}\|_{x_0} < 1$ и выберем последовательность $\{\tilde{Y}_{x_n}^{(n)}\} \subset T_{x_n}\mathscr{V}$, $\tilde{Y}_{x_n}^{(n)} \to Y_{x_0}^{(0)}$. Так как $\|Y_{x_0}^{(0)}\|_{x_0} < 1$, то можно считать, что $\|\tilde{Y}_{x_n}^{(n)}\|_{x_n} < 1$ для всех n, — в противном случае, то есть если $\left\|\tilde{Y}_{x_{n_k}}^{(n_k)}\right\|_{x_{n_k}} \geqslant 1$ для $\{n_k\} \subset \mathbf{Z}$, $n_k \to \infty$, то $\lim\limits_{k \to \infty} \left\|\tilde{Y}_{x_{n_k}}^{(n_k)}\right\|_{x_{n_k}} \geqslant 1$, вопреки выбору $Y_{x_0}^{(0)} \in T_{x_0}\mathscr{V}$, $\|Y_{x_0}^{(0)}\|_{x_0} \leqslant 1$. Пусть теперь $\{\alpha_n\}$ — последовательность вещественных чисел, сходящаяся к нулю, такая, что $0 < \alpha_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим $Y_{x_n}^{(n)} = \alpha_n \tilde{Y}_{x_n}^{(n)} + (1 - \alpha_n) X_{x_n}^{(n)} / \|X_{x_n}^{(n)}\|_{x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $Y_{x_n}^{(n)} \in T_{x_n}\mathscr{V}$ в силу выпуклости $T_{x_n}\mathscr{V}$, и

$$\|Y_{x_n}^{(n)}\|_{x_n} \leqslant \alpha_n \|\tilde{Y}_{x_n}^{(n)}\|_{x_n} + (1 - \alpha_n) < \alpha_n + 1 - \alpha_n = 1.$$

При этом, $Y_{x_n}^{(n)} \to X_{x_0}$, ибо $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$,

$$X_{x_n}^{(n)} / \|X_{x_n}^{(n)}\|_{x_n} \to X_{x_0} / \|X_{x_0}\|_{x_0} = X_{x_0},$$

в силу условия $\|X_{x_0}\|_{x_0} = 1$. Если $\|X_{x_0}\| < 1$, то при достаточно большом n $\|X_{x_n}^{(n)}\|_{x_n} < 1$ и утверждение доказано.

Таким образом, отображение $x \mapsto \{X_x \in T_x\mathscr{V} \mid \|X_x\|_x \leqslant 1\}$ полунепрерывно снизу. По предложению 19 книги [30], функция $m_f : \mathscr{V} \to \mathbf{R}$ полунепрерывна снизу.

Заметим, что если бы замыкание некоторого подмножества $S \subset \mathscr{V}$ было бы компактным, то функция m_f, как и любая полунепрерывная снизу и ограниченная снизу на $\bar{S}$ функция, достигала бы на $\bar{S}$ своей точной нижней грани. Обобщенное условие (C) формулируемое ниже требует, чтобы на множестве $\bar{S}$, где ограничена функция f, точной нижней грани достигала бы, по крайней мере, одна, индивидуальная функция $\tilde{m}_f$ — это суррогат условия собственности функции $f : \mathscr{V} \to \mathbf{R}$ в бесконечномерном случае. Точная формулировка обобщенного условия (C) такова:

Будем говорить что функция $f : \mathscr{V} \to \mathbf{R}$ на подмногообразии $\mathscr{V}$ с углами удовлетворяет *обобщенному условию* (C), если для любого подмножества $S \subset \mathscr{V}$, на котором f ограничена и на котором

$$\inf_{x\in S} m_f(x)=0,$$

существует критическая точка x_0 функции f, принадлежащая замыканию $\bar{S}$ множества S.

Заметим, что в случае, когда $\mathscr{V}=\mathscr{M}$, обобщенное условие (C) равносильно классическому условию (C) Пале—Смейла — в этом случае

$$m_f(x)=\|\nabla f(x)\|_x \quad \forall x\in\mathscr{V}=\mathscr{M}.$$

Приведем простой пример ситуации, когда выполнено обобщенное условие (C); более содержательные примеры, относящиеся к задачам оптимального управления, будут даны ниже.

Пусть $\mathscr{V}=\mathscr{K}\oplus H\subset\mathscr{H}$, где $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, H — его (вообще говоря, бесконечномерное) подпространство, $\mathscr{K}\subset\mathscr{H}$ — выпуклый многогранный конус конечной размерности в $\mathscr{H}$ с вершиной в нуле. Рассмотрим гладкую функцию

$$f:\mathscr{V}\to\mathbf{R},\ f(0)=0,$$

градиент ∇f который растет быстрее, чем линейная функция:

$$(\nabla f(x),\ h)\geqslant(x,h)\quad \forall h\in\mathscr{H},$$

где $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathscr{H}$. Тогда для этой функции выполнено обобщенное условие (C).

В самом деле, для

$$m_f(x)=\sup_{X_x\in T_x\mathscr{V},\|X_x\|_x\leqslant 1}\langle \Delta f(x),\ X_x\rangle_x,$$

имеем в данном случае в силу соотношения

$$T_x\mathscr{V}=x+H\oplus(\mathscr{K}+\hat{\mathscr{L}}_x)$$

где $\hat{\mathscr{L}}_x$ — несущая плоскость грани $\mathscr{L}_x$ конуса $\mathscr{K}$ максимальной размерности, содержащей x в своей относительной внутренности:

$$m_f(x)=\sup_{\substack{X_x\in T_x\mathscr{V}\\ \|X_x\|\leqslant 1}}\langle \nabla f(x),\ X_x\rangle_x=\sup_{\substack{h\in H\oplus(\mathscr{K}+\hat{\mathscr{L}}_x)\\ \|h\|\leqslant 1}}(\nabla f(x),\ h)\geqslant\|x\|.$$

ибо $x\in(\hat{\mathscr{L}}_x+\mathscr{K})\oplus H$. Поэтому, если $S\subset\mathscr{H}$, $\inf\limits_{x\in S} m_f(x)=0$, то $0=\inf\limits_{x\in S} m_f(x)=\inf\limits_{x\in S}\|x\|$, откуда получаем, что существует последовательность $x_n\to 0$ в $\mathscr{H}$. Точка нуль — критическая для функции f, ибо, в силу полунепрерывности снизу функции $m_f(x)$,

$$0\leqslant m_f(0)\leqslant\liminf_{x_n\to 0} m_f(x_n)=0,$$

то есть $m(0)=0$, значит для $\forall X_0 \in T_0\mathscr{V}$, $\|X_0\|_0 \leqslant 1$,

$$\langle \nabla f(0), X_0 \rangle_0 \leqslant \sup_{\substack{X_0 \in T_0\mathscr{V} \\ \|X_0\|_0 \leqslant 1}} \langle \nabla f(0), X_0 \rangle_0 = m_f(0) = 0,$$

а это и означает, что 0 — критическая точка f (если $\langle \nabla f(0), X_0 \rangle_0 \leqslant 0$ для $\forall X_0 \in T_0\mathscr{V}$, $\|X_0\| \leqslant 1$, то $\langle \nabla f(0), X_0 \rangle \leqslant 0$ и для всех $X_0 \in T_0\mathscr{V}$, т. е. $\nabla f(0) \in T_0^*\mathscr{V}$).

Всюду далее *функцией Морса* f на гильбертовом подмногоразии $\mathscr{V}$ с углами мы будем называть гладкую функцию, все критические точки которой невырождены, и которая удовлетворяет обобщенному условию (C).

Как и в классической ситуации справедливо

Предложение 2.10. Функция Морса $f:\mathscr{V} \to \mathbf{R}$ на гильбертовом подмногообразии $\mathscr{V}$ с углами имеет только изолированные критические точки. При этом, на любом уровне

$$f^{a,b} = \{x \in \mathscr{V} \mid a \leqslant f(x) \leqslant b\} \quad (a < b).$$

может лежать не более конечного числа критических точек.

Доказательство изолированности невырожденных критических точек не требует, чтобы f удовлетворяла обобщенному условию (C). Ясно, что все рассмотрения достаточно провести в случае, когда $\mathscr{V} = \mathscr{K} \oplus H$, где $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$ — конечномерный выпуклый многогранный конус в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ с вершиной в нуле, H — подпространство $\mathscr{H}$ и $f:\mathscr{V} \to \mathbf{R}$ — гладкая функция, $f(0)=0$, для которой нуль является невырожденной критической точкой. Мы покажем, что существует окрестность нуля $\mathscr{U}$ в $\mathscr{H}$, которая не содержит критических точек f, отличных от нуля.

Положим $K = \mathscr{K} \oplus H$, $K = \tilde{K} \oplus \check{K}$, где $\tilde{K}$ — острая часть конуса K (лежащая в ортогональном дополнении к $\check{K} = K \cap (-K)$), мы считаем, что K — *телесный конус*: $\hat{K} = K - K = \mathscr{H}$. Т. к. нуль — невырожденная критическая точка f, то

$$(\nabla f(0), y) < 0 \quad \forall y \in \tilde{K}, \quad y \neq 0,$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathscr{H}$.

Пусть x — внутренняя точка K. Тогда $T_x K = \hat{K}$ и $T_x^* K = x + \{0\}$. В этом случае $\nabla f(x) \notin T_x^* K$ при всех x, достаточно близких к нулю, ибо, из соображений непрерывности,

$$(\nabla f(x), y) < 0 \quad \forall y \in \tilde{K}, \quad y \neq 0,$$

а $\nabla f(x) \in T_x^* K$ в том и только том случае, если $\nabla f(x) = 0$.

Пусть L_x — грань конуса K минимальной коразмерности, содержащая x в своей относительной внутренности. Тогда

$$T_x K = x + \hat{L}_x + K,$$

где $\hat{L}_x$ — несущее подпространство грани L_x, и

$$T_x^*K = x + \hat{L}_x^* \cap K^*.$$

Если $L_x = K \cap (-K) = \check{K}$, то $T_xK = x + \check{K}$ и значит, если x — критическая точка, то вектор $\nabla f(x)$ ортогонален $\check{K}$. Но при x достаточно близком к нулю этого быть не может, ибо нуль — невырожденная критическая точка функции $f \restriction \check{K}$, а, значит, изолирована в силу леммы Морса в гильбертовом случае — см. § 1.

Допустим, что $L_x \neq \check{K}$. Тогда $0 \neq \tilde{L}_x \subset \tilde{K}$ и в этом случае $\nabla f(x) \in \tilde{L}^* = \hat{\tilde{L}}^{\perp}$, то есть

$$(\nabla f(x), y) = 0 \quad \forall y \in \tilde{L}_x \subset \tilde{K},$$

что при x, достаточно близком к нулю, противоречит неравенству

$$(\nabla f(x), y) < 0 \quad \forall y \in \tilde{K}, \quad y \neq 0.$$

Таким образом, мы доказали, что невырожденные критические точки изолированы.

Пусть теперь выполнено обобщенное условие (C). Докажем, что для любых a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$, на $f^{a,b} = \{x \in V \mid a \leqslant f(x) \leqslant b\}$ лежит не более, чем конечное, число критических точек. В самом деле, выберем, допуская противное, последовательность $\{x_n\}$ критических точек на $f^{a,b}$ и последовательность $\{y_n\}$ регулярных точек, $y_n \in f^{a,b}$, такие, что $\rho(x_n, y_n) < 1/n$, $a \leqslant f(y_n) \leqslant b$, $m_f(y_n) < \frac{1}{n}$, где ρ — риманова метрика на $\mathcal{M}$.

Из обобщенного условия (C) получаем, что последовательность $\{y_n\}$ сходится к некоторой критической точке y_0, ибо, в силу полунепрерывности снизу функции m_f,

$$0 = \liminf_{n\to\infty} m_f(y_n) \geqslant m_f(y_0) \geqslant 0,$$

т. е. $m_f(y_0) = 0$, а это значит, что y_0 — критическая точка f.

С другой стороны, по выбору $\{y_n\}$, к этой же точке y_0 сходится и последовательность $\{x_n\}$ критических точек функции f. Но этого не может быть, ибо y_0 — изолированная критическая точка, согласно сделанным предположениям о невырожденности критических точек функции f.

Предложение доказано

2.3. Теория Пале—Смейла для многообразий с углами. В этом пункте будут изложены основные результаты данной статьи: общая теорема существования для функции Морса $f: \mathcal{V} \to \mathbf{R}$ на гильбертовом подмногообразии $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ с углами и неравенства Морса, связывающие топологические характеристики множеств уровня

$$f^a = \{x \in \mathcal{V} \mid f(x) \geqslant a\}$$

с количеством критических точек $c_i^a(f)$ функции f коиндекса i, лежащих на этом уровне.

Всюду ниже, если явно не оговорено противное, мы будем предполагать, что $\mathscr{M}$ — полное риманово многообразие (см. § 1), $\mathscr{V}$ — гильбертово подмногообразие с углами в $\mathscr{M}$, f — функция Морса на $\mathscr{V}$.

Справедлива следующая *теорема существования* для $f:\mathscr{V}\to\to\mathbf{R}$, аналогичная соответствующей теореме, установленной Пале и Смейлом [62], [65] (см. § 1):

Теорема 2.5. Пусть $\mathscr{V}$ — связное гильбертово подмногообразие с углами в $\mathscr{M}$, f — ограниченная сверху функция Морса на $\mathscr{V}$. Тогда f достигает на $\mathscr{V}$ своей точной верхней грани: существует $x_0\in\mathscr{V}$ такая, что

$$f(x_0)=\sup_{x\in\mathscr{V}} f(x).$$

Доказательство теоремы 2.5 следует, в основных своих чертах, доказательству теоремы существования [62] и складывается из серии вспомогательных утверждений, часть из которых имеет и самостоятельное значение.

Предложение 2.11. Пусть f — ограниченная сверху функция Морса на гильбертовом подмногообразии с углами $\mathscr{V}$. Тогда существует такое гладкое векторное поле $X\in T\mathscr{M}$, $X_x\in T_x\mathscr{V}$, $x\in\mathscr{V}$, называемое *псевдоградиентным*, что $\|X_x\|_x\leqslant 1$ $\forall x\in\mathscr{V}$ и для любого $x\in\mathscr{V}$ траектория $\varphi_t(x)$, $t\in\mathbf{R}$, этого поля такова, что функция $t\mapsto f(\varphi_t(x))$ монотонна и существует предел $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_t(x)$, являющийся критической точкой функции f.

Доказательство. Пусть $m_f(x)$, $x\in\mathscr{V}$, — функция, введенная в п. 2.2, в связи с формулировкой обобщенного условия (C) для функции $f:\mathscr{V}\to\mathbf{R}$. Как было отмечено выше, эта функция полунепрерывна снизу и, следовательно, для любого $\delta>0$ множество

$$G^{(\delta)}=\{x\in\mathscr{V}\mid m_f(x)>\delta\}$$

открыто в $\mathscr{V}$.

Пусть $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — (пока произвольная) последовательность положительных вещественных чисел, монотонно сходящаяся к нулю:

$$\delta_k\to+0,\quad k\to\infty,\quad \delta_k\geqslant\delta_{k+1},\quad k=1,2,\ldots.$$

Тогда мы получаем семейство $\{G^{(\delta_k)}\}$ областей такое, что

$$\bar{G}^{(\delta_k)}\subset G^{(\delta_{k+1})},\quad k=1,2,\ldots;\quad \bigcup_{k=1}^{\infty}G^{(\delta_k)}=G,$$

где $G=\{x\in\mathscr{V}\mid m_f(x)>0\}$ — открытая область в $\mathscr{V}$, свободная от критических точек функции f.

В каждой из областей $G^{(\delta_k)}$ построим гладкие векторные поля $X^{(k)}\in T\mathcal{M}$, $k=1, 2, \ldots$, такие, что

$$\|X_x^{(k)}\|_x \leqslant 1, \quad \langle \nabla f(x), X_x^{(k)} \rangle_x \geqslant \delta_k$$

для $\forall x\in G^{(\delta_k)}$. Возможность такого построения гарантирует

Лемма 2.3. Пусть $x\mapsto\mathcal{F}(x)=\{y\in K(x) \mid (g(x), y)\geqslant a\}$, $a>0$, — многозначное отображение, действующее из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, где $x\mapsto K(x)$: $H_1\to 2^{H_2}$ — выпуклозначное многозначное отображение из H_1 в H_2, полунепрерывное снизу, $g: H_1\to H_2$ — непрерывная функция. Тогда отображение $x\mapsto\mathcal{F}(x)$ полунепрерывно снизу на множестве $\{x\in H_1 \mid m(x)>a\}$, где $m(x)=\sup\limits_{y\in K(x)}(g(x), y)$, и, следовательно, по теореме Майкла, существует гладкий селектор (однозначная ветвь) этого отображения. Здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H_2.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, $x_n\to x_0\in H_1$, и выберем произвольный элемент $y_0\in\mathcal{F}(x_0)$; тогда $(g(x_0), y_0)\geqslant a$. Найдем точку $\tilde{y}_0\in K(x_0)$ такую, что $(g(x_0), \tilde{y}_0)>a$, — этот выбор возможен в силу условия $x_0\in\{x\in H_1 \mid m(x)>a\}$. Так как отображение $x\mapsto K(x)$ полунепрерывно снизу, то существует последовательность $\{\tilde{y}_n\}$, $\tilde{y}_n\in K(x_n)$, такая, что $\tilde{y}_n\to\tilde{y}_0$ при $n\to\infty$, причем, в силу условия $(g(x_0), \tilde{y}_0)>a$, можно считать, ввиду непрерывности g, что

$$(g(x_n), \tilde{y}_n)>a, \quad n=1, 2, \ldots,$$

Пусть $\{\bar{y}_n\}$, $\bar{y}_n\in K(x_n)$, — последовательность точек, сходящихся к y_0 при $n\to\infty$; $\{\alpha_n\}$ — последовательность вещественных чисел, такая, что $0<\alpha_n<1$, $n=1, 2, \ldots, \alpha_n\to 0$, $n\to\infty$. Положим

$$y_n=(1-\alpha_n)\bar{y}_n+\alpha_n\tilde{y}_n.$$

Тогда, в силу выпуклости $K(x_n)$, $y_n\in K(x_n)$ и для любого $n=1, 2, \ldots$,

$$(g(x_n), y_n)=(1-\alpha_n)(g(x_n), \bar{y}_n)+\alpha_n(g(x_n), \tilde{y}_n)>$$
$$>(1-\alpha_n)(g(x_n), \bar{y}_n)+\alpha_n a=(1-\alpha_n)[(g(x_n), \bar{y}_n)-$$
$$-(g(x_0), y_0)]+(1-\alpha_n)(g(x_0), y_0)+\alpha_n a\geqslant\alpha_n a+$$
$$+(1-\alpha_n)a+\varepsilon_n=a+\varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n=(1-\alpha_n)[g(x_n), \bar{y}_n)-g(x_0), y_0)]\to 0$, $n\to\infty$.

Отсюда следует, что при достаточно большом n, $y_n\in\mathcal{F}(x_n)$ и при этом, $y_n\to y_0$, ибо

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)\bar{y}_n+\lim_{n\to\infty}\alpha_n\tilde{y}_n=\lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)\bar{y}_n=y_0.$$

С помощью леммы 2.3 гладкое векторное поле $X^{(k)}$, для которого

$$\| X_x^{(k)} \|_x \leqslant 1, \quad \langle \nabla f(x), X_x^{(k)} \rangle_x \geqslant \delta_k, \quad x \in G^{(\delta_k)},$$

строится локально, в окрестности каждой точки области $G^{(\delta_k)}$; глобально это поле можно построить с помощью разбиения единицы (для случая гильбертова многообразия всегда существует гладкое разбиение единицы — см. [28]).

Итак, для каждой из областей $G^{(\delta_k)}$ построено гладкое векторное поле $X^{(k)}$, обладающее указанными выше свойствами. Из набора $\{X^{(k)}\}$ этих полей построим одно векторное поле $X \in T\mathcal{M}$ в области

$$G = \{x \in \mathcal{Y} \mid m_f(x) > 0\}$$

специальным образом выбирая монотонно сходящуюся к нулю последовательность $\{\delta_k\}$ вещественных чисел.

Согласно [28] для любых замкнутого $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{G}$ и открытого $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ можно указать такую гладкую функцию $\alpha \in C^\infty(\mathcal{M})$, $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1$, что $\alpha(x) = 1$ на $\mathcal{A}$, $\operatorname{supp} \alpha \subset \mathcal{G}$. Используя такие функции, будем строить поле X по индукции, продолжая его из области $G^{(\delta_k)}$ в большую область $G^{(\delta_{k+1})}$, $G^{(\delta_{k+1})} \supset \bar{G}^{(\delta_k)}$.

Итак, пусть поле $Y^{(k)}$ уже построено в области $G^{(\delta_k)}$ и для этого поля $Y_x^{(k)} = X_x^{(k)}$ в $\bar{V}^{(k)} \setminus G^{(\delta_{k-1})}$, где $\bar{V}^{(k)} \subset G^{(\delta_k)}$, $\bar{V}^{(k)} \supset G^{(\delta_{k-1})}$ и

$$\| Y_x^{(k)} \|_x \leqslant 1, \quad \langle \nabla f(x), Y_x^{(k)} \rangle_x \geqslant \delta_k, \quad x \in G^{(\delta_k)}$$

$$(Y^{(1)} = X^{(1)} \text{ и } \varnothing \neq V^{(1)}, \ \bar{V}^{(1)} \subset G^{(\delta_1)}).$$

Рассмотрим окрестность $V^{(k+1)}$ области $\bar{G}^{(\delta_k)}$ такую, что $\bar{V}^{(k+1)} \subset G^{(\delta_{k+1})}$ — возможность выбора такой окрестности можно обеспечить выбором соответствующей последовательности $\{\delta_k\}$. Обозначим через α_k гладкую функцию, $0 \leqslant \alpha_k(x) \leqslant 1$, такую, что $\alpha_k(x) = 1$ на $\bar{V}^{(k)}$, $\operatorname{supp} \alpha_k \subset G^{(\delta_k)}$. Положим

$$Y_x^{(k+1)} = \alpha_k(x) Y_x^{(k)} + (1 - \alpha_k(x)) X_x^{(k+1)} \quad \forall x \in G^{(\delta_{k+1})}.$$

Тогда $Y^{(k+1)}$ — корректно определенное гладкое векторное поле в области $G^{(\delta_{k+1})}$ и для этого поля

$$\| Y_x^{(k+1)} \|_x \leqslant \alpha_k(x) \| Y_x^{(k)} \|_x + (1 - \alpha_k(x)) \| X_x^{(k+1)} \|_x \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_k(x) + 1 - \alpha_k(x) = 1$$

и

$$\langle \nabla f(x), Y_x^{(k+1)} \rangle_x = \alpha_k(x) \langle \nabla f(x), Y_x^{(k)} \rangle_x + (1 - \alpha_k(x)) \langle \nabla f(x),$$

$$X_x^{(k+1)} >_x \geqslant \alpha_k(x)\,\delta_k + (1-\alpha_k(x))\,\delta_{k+1} = \delta_{k+1} + \alpha_k(x)(\delta_k - \delta_{k-1}) \geqslant$$
$$\geqslant \delta_{k+1},$$

ибо $\delta_{k+1} \leqslant \delta_k$, а $0 \leqslant \alpha_k(x) \leqslant 1$.

Заметим, что $Y^{(k+1)} = Y^{(k)}$ в $V^{(k)}$ по построению, а так как $V^{(1)} \subset V^{(2)} \subset \ldots$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{V}^{(k)} = G$, то этим определено гладкое векторное поле X в области $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G^{(\delta_k)}$ ($X_x = Y_x^{(k)}$, если k достаточно велико), такое, что $\|X_x\|_x \leqslant 1$, $\langle \nabla f(x), X_x \rangle \geqslant \delta_{k+1}$, $x \in G^{(\delta_k)}$; $0 \leqslant \delta_{k+1} \leqslant \delta_k$, $k = 1, 2, \ldots$; $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$.

Покажем, что траектория $\varphi_t(x)$, $t \in \mathbf{R}$, этого поля (определенная при всех $t \in \mathbf{R}$, в силу его ограниченности), исходящая из любой точки $x \in G$, «упирается» в критическую точку, то есть существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t(x)$$

являющийся критической точкой функции f.

Пусть

$$S = \{\varphi_t(x);\ t > 0\}$$

— «положительная» часть траектории φ_t; она целиком лежит в области $G = \{x \in \mathscr{V} \mid m_f(x) > 0\}$, свободной от критических точек. Заметим, во-первых, что на множестве S функция f ограничена. Далее, для

$$g(t) = f(\varphi_t(x)),\ t > 0,$$

имеем:

$$\frac{d}{dt} g(t) = \langle \nabla f(\varphi_t(x)),\ X_{\varphi_t(x)} \rangle_{\varphi_t(x)} \rangle \geqslant 0,$$

ибо $\varphi_t(x) \in G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G^{(\delta_k)}$, а $\langle \nabla f(y),\ X_y \rangle_y \geqslant \delta_k$ при $y \in G^{(\delta_k)}$.

Следовательно, g — монотонная функция и существует (в силу ограниченности сверху функции f) конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = B.$$

В частности, $|f(y)| \leqslant B$ на $S = \{\varphi_t(x);\ t > 0\}$.

Во-вторых, заметим, что

$$\inf_{y \in S} m_f(y) = 0.$$

В самом деле, траектория $\varphi_t(x)$, $t > 0$, исходящая из точки $x \in G^{(\delta_i)}$ для некоторого $i \in \mathrm{N}$, за **конечное** время $T^{(i)}$ выходит на границу $\partial G^{(\delta_i)}$ области $G^{(\delta_i)}$ — это вытекает из того, что для $x \in G^{(\delta_i)}$ и тех t, при которых $\varphi_t(x) \in G^{(\delta_i)}$,

$$g(t)=f(\varphi_t(x))=f(x)+\int_0^t \langle \nabla f(\varphi_\tau(x)),\ X_{\varphi_\tau(x)} \rangle_{\varphi_\tau(x)} d\tau \geqslant$$
$$\geqslant f(x)+t\delta_{i+1}$$

(это типичное рассуждение теории дифференциальных уравнений — см. [45]). Если бы $\varphi_t(x) \in G^{(\delta_i)}$ при всех $t>0$, то тогда $g(t)\to\infty$ при $t\to+\infty$, что противоречит ограниченности сверху функции f.

Итак, траектория $\varphi_t(x)$, $t>0$, исходящая из $x\in G^{(\delta_i)}$ за конечное время $T^{(i)}$ выходит на границу области $G^{(\delta_i)}$. Поэтому

$$\inf_{0<t<T^{(i)}} m_f(\varphi_t(x))= \inf_{x\in G^{(\delta_i)}} m_f(x)=\delta_i.$$

Так как $\bar{G}^{(\delta_i)}\subset G^{(\delta_{i+1})}$, то повторяя эти рассуждения, получаем, что для любого $k\geqslant i$

$$\inf_{T^{(k)}<t<T^{(k)}+T^{(k+1)}} m_f(\varphi_t(x))= \inf_{x\in G^{(\delta_{k+1})}} m_f(x)=\delta_{k+1}.$$

Следовательно,

$$\inf_{t>0} m_f(\varphi_t(x))\leqslant \inf_{T^{(k)}<t<T^{(k+1)}+T^{(k)}} m_f(\varphi_t(x))=\delta_{k+1}$$

для любого $k\geqslant i$, то есть мы получаем, что

$$\inf_{t>0} m_f(\varphi_t(x))= \inf_{y\in S} m_f(y)=0.$$

Отсюда, в силу обобщенного условия (C), вытекает, что замыкание $\bar{S}$ множества $S=\{\varphi_t(x)\,|\,t>0\}$ содержит критическую точку x_0 функции f.

Теперь нетрудно доказать существование предела

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_t(x).$$

В самом деле, f — функция Морса, значит, $x_0\in\bar{S}$ — изолированная критическая точка: существует окрестность U этой точки, свободная от других критических точек. Эта окрестность U пересекается при достаточно большом k_0 с областями $G^{(\delta_k)}$:

$$H^{(k)}=G^{(\delta_k)}\cap U\neq\varnothing,\ k\geqslant k_0.$$

Соответствующая траектория $\varphi_t(x)$, $t>0$, все время лежит в области $H=\bigcup_{k\geqslant k_0} H^{(k)}$, в замыкании которой имеется только одна критическая точка x_0. Так как замыкание траектории $\{\varphi_t(x);\ t>0\}$ содержит эту точку, то это и означает существование предела

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_t(x)=x_0$$

Предложение доказано.

Заметим, что если f — функция Морса, то все ее критические точки невырождены, изолированы и на любом уровне

$f^{a,b}=\{x\in\mathscr{V} \mid a\leqslant f(x)\leqslant b\}$ их не более, чем конечное число (предложение 2.10).

Пусть $f^*=\sup\limits_{x\in\mathscr{V}} f(x)$. Тогда для $\forall\varepsilon>0$ существует точка $x_\varepsilon\in\mathscr{V}$, такая, что $f^*\geqslant f(x_\varepsilon)>f^*-\varepsilon$. Пусть X — псевдоградиентное поле из предложения 2.11. Тогда, если $\varphi_t(x_\varepsilon)$, $t>0$, — соответствующая этому полю траектория, исходящая в момент $t=0$ из точки x_ε, то существует предел

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_t(x_\varepsilon)=\bar{x}_\varepsilon$$

являющийся критической точкой функции f. При этом, в силу монотонности функции $g_\varepsilon(t)=f(\varphi_t(x_\varepsilon))$, имеет место неравенство

$$f^*-\varepsilon\leqslant f(\bar{x}_\varepsilon)\leqslant f^*.$$

Уровень $\{x\in\mathscr{V} \mid f^*-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant f^*\}$ содержит не более чем конечное число критических точек. Поэтому если $\varepsilon_n=\frac{1}{n}\to 0$, то существует стабилизирующаяся с некоторого номера n_0 последовательность $\{\bar{x}_{\varepsilon_n}\}$ критических точек f, $\bar{x}_{\varepsilon_n}=x_0$, $n\geqslant n_0$, такая, что

$$f^*-\varepsilon_n\leqslant f(x_{\varepsilon_n})\leqslant f^*.$$

Но это значит, что x_0 — критическая точка f, для которой

$$f(x_0)=f^*=\sup_{x\in\mathscr{V}} f(x):$$

Теорема доказана.

Теперь, после того, как установлена теорема существования, мы вполне подготовлены для вывода неравенств Морса.

Пусть f — функция Морса на гильбертовом подмногообразии $\mathscr{V}$ с углами, a, $b\in\mathbf{R}$, $a>b$. Справедливо

Предложение 2.12. Если множество

$$f^{a,b}=\{x\in\mathscr{V} \mid a\leqslant f(x)\leqslant b\}$$

не содержит критических точек функции f, то f^b является деформационным ретрактом f^a; в частности, f^a и f^b имеют один и тот же гомотопический тип.

Доказательство. Если на $f^{a,b}$ нет критических точек функции f, то для функции m_f, введенной выше при формулировке обобщенного условия (C), справедливо неравенство

$$m_f(x)\geqslant\alpha \quad \forall x\in f^{a,b},$$

для некоторого $\alpha>0$.

В самом деле, в противном случае, если

$$\inf_{x\in f^{a,b}} m_f(x)=0,$$

то, в силу обобщенного условия (C), существовала бы критическая точка $x_0\in\overline{f^{a,b}}=f^{a,b}$ функции f, вопреки предположению об их отсутствие на уровне $f^{a,b}$.

Следовательно, взяв какое-нибудь γ, $0<\gamma<\alpha$, мы можем, согласно лемме 2.3, построить такое гладкое векторное поле $Y \in T\mathscr{M}$, что

$$\|Y_x\|_x \leqslant 1 \text{ на } \mathscr{M}, \text{ и } \langle \nabla f(x), Y_x \rangle \geqslant \gamma \text{ на } f^{a,b}.$$

Положим

$$X_x = \frac{Y_x}{\langle \Delta f(x), Y_x \rangle_x}, \quad x \in f^{a,b},$$

и продолжим это поле гладким и ограниченным образом на $\mathscr{M}$ (согласно [28], это продолжение можно осуществить за счет выбора, например, гладкой функции с компактным носителем, равной единице на $f^{a,b}$).

Тогда $X \in T\mathscr{M}$ — корректно определенное гладкое векторное поле, для которого справедливо неравенство

$$\| X_x \|_x = \frac{\| Y_x \|_x}{\langle \nabla f(x), Y_x \rangle_x} \leqslant \frac{1}{\gamma} < \infty \ \forall x \in f^{a,b}.$$

Следовательно, поле X ограничено в окрестности множества $f^{a,b}$ и, значит, его интегральная кривая $\psi_t(x)$, $t \in \mathbf{R}$, исходящая из произвольной точки $x \in f^{a,b}$ при $t=0$, определена уж во всяком случае для тех $t>0$, при которых $\psi_t(x) \in f^{a,b}$.

Положим $\forall t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$r_t(x) = \begin{cases} x, & x \in f^b, \\ \psi_{t(b-f(x))}, & x \in f^{a,b}. \end{cases}$$

Тогда r_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — корректно определенное семейство непрерывных отображений из f^a в f^a, такое, что

$$r_t(x) \equiv x, \ x \in f^b, \ 0 \leqslant t \leqslant 1; \ r_1(x) \in f^b \ \forall x \in f^a,$$

ибо, если $b \geqslant f(x) \geqslant a$, то

$$f(r_1(x)) = f(r_0(x)) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(r_t(x))\, dt = f(x) + b - f(x) = b,$$

по выбору поля X.

Таким образом r_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, осуществляет деформационную ретракцию f^a на f^b. Предложение доказано

Пусть, как и выше, $H_i(\mathscr{X})$ — i-тая группа сингулярных гомологий пространства $\mathscr{X}$ с коэффициентами в некотором поле, $b_i(\mathscr{X}) = \operatorname{rank} H_i(\mathscr{X})$ — i-тое число Бетти.

Из предложения 2.12 немедленно следует, что для любых $a, b, a<b$, в случае, когда отрезок $[a, b]$ не содержит критических значений функции $f: \mathscr{V} \to \mathbf{R}$, справедливо соотношение

$$H_i(f^a, f^b) = 0 \Leftrightarrow H_i(f^a) = H_i(f^b)$$

для любого $i \geqslant 0$.

Мы покажем сейчас, что это равенство справедливо и в том случае, когда на полуинтервале $[a, b)$ нет критических значений функции Морса $f:\mathscr{V}\to\mathbf{R}$ (здесь b — вообще говоря, уже может быть критическим значением этой функции).

Для этого воспользуемся конструкцией, использованной выше при доказательстве предложения 2.11, согласно которой, в силу обобщенного условия (C) и невырожденности критических точек функции f, существует псевдоградиентное векторное поле $X\in T\mathscr{M}$ на $\mathscr{M}$ такое, что предел траектории $\varphi_t(x)$, $t\in\mathbf{R}$, исходящей из любого $x\in\{x\in\mathscr{V}\,|\,a\leqslant f(x)<b\}$ существует и является критической точкой функции f. Используя траектории этого поля и строится нужная деформация. При этом, если из x за конечное время T «достигается» значение b, т. е. $f(\varphi_T(x))=b$, то она очевидна. Если же из x значение b не достигается за конечное время, то построение деформации требует дополнительных пояснений. Приведем их. Итак, для этого случая построим деформацию s_t: $f^a\to f^a$, $0\leqslant t\leqslant 1$, для которой $s_t(x)\equiv x$, $x\in f^b$; $s_t(x)\in f^b$, $x\in f^a$, $t=1$. Именно, положим $\forall t$, $0\leqslant t<1$,

$$s_t(x)=\begin{cases} x, & x\in f^b,\\ \varphi_{\frac{1}{1-t}(b-f(x))}(x), & x\in f_{a,b}.\end{cases}$$

Тогда при $x\in f^b$, $s_t(x)=x$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

При $t\to 1$ существует, в силу сказанного выше, предел

$$\lim_{t\to 1-}\varphi_{\frac{1}{1-t}(b-f(x))}(x)=\lim_{\tau\to+\infty}\varphi_\tau(x)=x_0,$$

являющийся критической точкой f, причем $f(x_0)=b$, так что при $a\leqslant f(x)\leqslant b$,

$$b=f(x_0)=f(s_1(x))=\lim_{t\to 1}f(s_t(x)).$$

Осталось доказать, что отображение $x\mapsto s_t(x):f^a\to f^a$ непрерывно при любом t, $0\leqslant t\leqslant 1$. Если $x\in f^b$, то это очевидно. Пусть $x\in f^{a,b}$. В этом случае мы можем воспользоваться теоремой о непрерывной зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от начальных условий [25] и изолированностью критических точек.

Более подробно, нам достаточно установить, что из близких точек $x,y\in\{v\in V\,|\,a\leqslant f(x)<b\}$ мы приходим по соответствующим псевдоградиентным траекториям $\varphi_t(x)$, $t>0$, и $\varphi_t(y)$, $t>0$, в одну и ту же критическую точку x_0, соответствующую критическому значению b функции f.

Для этого вспомним, что псевдоградиентная траектория $\varphi_t(x)$, $t\in\mathbf{R}$, за конечное время $T>0$ попадает в окрестность некоторой критической точки x_0, свободную от других критических точек.

Значит, если x и y достаточно близки, то, по теореме о непрерывной зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от начальных данных, соответствующие псевдоградиентные траектории $\varphi_t(x)$, $t>0$, и $\varphi_t(y)$, $t>0$, попадут за конечное время $T>0$ в одну и ту же окрестность критической точки x_0, не содержащую других критических точек. Это, в силу существования пределов

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi_t(x),\quad \lim_{t\to+\infty}\varphi_t(y),$$

и означает, что построенное нами семейство отображений s_t, $0\leqslant t\leqslant 1$, непрерывно на $f^{a,b}$ при любом t, $0\leqslant t\leqslant 1$. Таким образом, доказано весьма важное

Предложение 2.13. Если на полуинтервале $[a, b)$ нет критических значений функции Морса $f:\mathscr{V}\to\mathbf{R}$, то

$$H_i(f^a, f^b)=0\ \ \forall i\geqslant 0.$$

По-существу, в предложении 2.13 установлена «непрерывность слева» функтора H_i:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} H_i(f^a, f^{b-\varepsilon})=0,$$

если $H_i(f^a, f^{b-\varepsilon})=0\ \ \forall\varepsilon>0,\ \ a<b-\varepsilon.$

Заметим, что предложение 2.13 справедливо и в конечномерном случае для (собственной) функции Морса, так как условие собственности и обобщенное условие (C) в конечномерной ситуации эквивалентны.

На основе предложения 2.13 теперь нетрудно вывести неравенства Морса для функции $f:\mathscr{V}\to\mathbf{R}$. Необходимо отметить, что указанный вывод был, в своих основных чертах, указан А. А. Аграчёвым для классической конечномерной ситуации на одном из семинаров в МИАН СССР.

Итак, пусть f — ограниченная сверху функция Морса на гильбертовом подмногообразии $\mathscr{V}$ с углами, $a\in\mathbf{R}$, $c_i{}^a(f)$ — количество критических точек коиндекса i, лежащих на множестве уровня

$$f^a=\{x\in V\mid f(x)\geqslant a\},$$

$\chi(f^a)$ — эйлерова характеристика f^a, $b_i(f^a)$ — i-тое число Бетти пространства f^a.

Теорема 2.6 (*неравенства Морса*). Для любого $m=$

$=0, 1, 2, \ldots$, справедливы неравенства

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}b_i(f^a)\leqslant\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}c_i^a(f),$$

$$\chi(f^a)=\sum_i(-1)^i c_i^a(f).$$

В частности, для любого $i=0, 1, 2, \ldots$,

$$b_i(f^a)\leqslant c_i^a(f),$$

причем последние неравенства справедливы даже тогда, когда f не ограничена сверху: в этом случае $b_i(f^a)$ и $c_i{}^a(f)$ могут принимать бесконечные значения.

Доказательство. Обозначим через C_a *критический уровень* функции Морса f:

$$C_a=\{x\in\mathscr{V}\mid f(x)=a,\ \nabla f(x)\in T_x^*\mathscr{V}\}.$$

Тогда, в силу предложения 2.13, для любого $i=0, 1, 2, \ldots$,

$$H_i(f^a\setminus C_a, f^b)=0,$$

где a, b — *соседние* критические значения функции f — т. е. $a<b$ и на (a, b) нет критических значений.

Воспользуемся точной последовательностью тройки [19], [40]:

$$\ldots\to H_i(Y, Z)\to H_i(X, Z)\to H_i(X, Y)\xrightarrow{\delta_*}H_{i-1}(Y, Z)\to\ldots.$$

где Z, $Y\subset X$, $X\subset Y$ — подпространства, δ_* — связывающий гомоморфизм, для вычисления группы $H_i(f^a, f^b)$, полагая

$$X=f^a,\ Y=f^a\setminus C_a,\ Z=f^b.$$

Имеем, в силу установленного равенства $H_i(f^a\setminus C_a, f^b)=0$,

$$\ldots\to 0\to H_i(f^a, f^a\setminus C_a)\to H_i(f^a, f^b)\to 0\to\ldots,$$

то есть, что $\forall i=0, 1, \ldots$,

$$H_i(f^a, f^b)=H_i(f^a, f^a\setminus C_a).$$

Пусть $\mathcal{O}_\alpha$ — достаточно малые окрестности критических точек x_α функции f, отвечающие критическому значению a, т. е. такие, что $\bar{\mathcal{O}}_\alpha\cap\mathcal{O}_\beta=\varnothing$ при $\alpha\neq\beta$.

Тогда, из аксиомы вырезания [19], [40],

$$H_i(f^a, f^a\setminus C_a)=H_i(\bigcup_\alpha(\mathcal{O}_\alpha\cap f^a), \bigcup_\alpha(\mathcal{O}_\alpha\cap f^a\setminus C_a))=$$

$$=\bigoplus_\alpha H_i(\mathcal{O}_\alpha\cap f^a, \mathcal{O}_\alpha\cap(f\setminus C_a)).$$

Таким образом, вычисление $H^i(f^a, f^b)$, где a, b — соседние критические значения функции f, свелось к вычислению

$$H_i(f^a\cap\mathcal{O}, f^a\cap\mathcal{O}\setminus\{x_0\}),$$

где $\mathcal{O}$ — малая окрестность критической точки x_0, не содержащая отличных от x_0 критических точек.

Не нарушая общности мы теперь можем считать, что f — гладкая функция на конусе $K=\mathscr{K}\oplus H\subset\mathscr{H}$ с вершиной в нуле гильбертова пространства $\mathscr{H}$ ($\mathscr{K}$ — конечномерный выпуклый многогранный конус, $\mathscr{H}$ — подпространство $\mathscr{H}$), $f(0)=0$, $\mathcal{O}$ — достаточно малая окрестность нуля в $\mathscr{H}$ и 0 — критическая (невырожденная) точка f.

Как обычно, представим конус K в виде $K=\check{K}\oplus\tilde{K}$, где $\check{K}=$ $=K\cap(-K)$, $\tilde{K}$ — острая часть конуса K. Точку $x\in K\subset\mathscr{H}$ будем записывать в виде $x=(p, q)$, $p\in\check{K}$, $q\in\tilde{K}$.

Построим деформацию

$$q_t: f^0_{\mathcal{O}} \quad f^0_{\mathcal{O}}, \quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

где

$$f^0_{\mathcal{O}}=\{x\in K\cap\mathcal{O}\mid f(x)\geqslant 0\},$$

такую, что при достаточно малой окрестности $\mathcal{O}\subset\mathscr{H}$ выполнены условия:

1) $q_t(p, 0)=(p, 0)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $p\in\check{K}$;
2) $q_t: f^0_{\mathcal{O}}\to f^0_{\mathcal{O}}$, $0\leqslant t\leqslant$;
3) $q_1(x)\in\{(p, 0)\mid p\in\mathcal{O}\cap\check{K}, f(p, 0)\geqslant 0\}$, $x\in f^0_{\mathcal{O}}$.

Определим её по формуле

$$q_t:(p, q)\mapsto(p, tq), \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Тогда 1), 3) очевидны.

Далее, в силу того, что нуль — невырожденная критическая точка, имеем неравенство

$$\langle \nabla f(0, 0), q\rangle<0, \quad q\in\tilde{K}, \quad q\neq 0.$$

Следовательно, если $(p, q)\in\mathcal{O}\subset K$, то, в силу соотношения

$$\langle \nabla f(p, tq), q\rangle<0, \quad (p, q)\in\mathcal{O}\cap K\Rightarrow\frac{d}{dt}f(p, tq)<0, \quad q\neq 0,$$

получаем, что функция $h(t)=f(p, tq)$ не возрастает на $[0, 1]$ и, следовательно, $\forall(p, q)\in f^0_{\mathcal{O}}$

$$0\leqslant f(p, q)=h(1)\leqslant f(p, tq)=h(t), \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Это значит, что q_t, $0\leqslant t\leqslant 1$, переводит $f^0_{\mathcal{O}}$ в $f^0_{\mathcal{O}}$.

Таким образом, мы получаем, что множество

$$\mathscr{V}_{\mathcal{O}}=\{x\in\mathcal{O}\cap K\mid f(x)=f(p, q)\geqslant 0\}$$

стягивается на множество

$$\mathscr{V}^0_{\mathcal{O}}=\{(p, 0)\in\mathcal{O}\cap K\mid f(p, 0)\geqslant 0\}.$$

Следовательно, для любого $i=0, 1, \ldots$,

$$H_i(\mathscr{V}_{\mathcal{O}})=H_i(\mathscr{V}^0_{\mathcal{O}}).$$

Положим $g(p)=f(p, 0)$, $p\in\mathcal{O}\cap K$. По лемме Морса в гильбертовом пространстве (см. § 1), мы можем утверждать, уменьшая, если это необходимо, окрестность $\mathcal{O}$, что для любого $i\geqslant 0$

$$\tilde{H}_i(\mathscr{V}^0_{\mathcal{O}})=H_i(\{(u, v)\ \mathcal{O}\cap\check{K}\mid \|u\|^2-\|v\|^2\geqslant 0\},$$ [1]

где $u\in U$, $v\in V$; U, V — подпространства $\check{K}$, а $\tilde{H}_i$ — приведенные гомологии (см. [19], [40]), в силу того, что пространство

$$\{(u, v)\in\mathcal{O}\cap\check{K}\mid \|u\|^2-\|v\|^2\geqslant 0\}$$

стягиваемо: гомотопически — это конус.

Далее, $\forall i=0, 1, 2, \ldots$,

$$\tilde{H}_i(\mathscr{V}^0_{\mathcal{O}}\setminus\{0\})=\tilde{H}_i(\{(u, v)\in\mathcal{O}\cap\hat{K}\mid \|u\|^2-\|v\|^2>0\},$$

где число положительных квадратов, то есть размерность пространства U равна коиндексу критической точки нуль. Если коиндекс r точки 0 нуль бесконечен, то используя стягиваемость бесконечномерной сферы (см. [27]), получаем, что

$$\tilde{H}_i(\mathscr{V}^0_{\mathcal{O}}\setminus\{0\})=0 \quad \forall i\geqslant 0.$$

Пусть теперь этот коиндекс r конечен. Тогда деформация

$$v_t:(u, v)\mapsto(u, tv),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

дает, что $\forall i=0, 1, \ldots$,

$$\tilde{H}_i(\mathscr{V}^0_{\mathcal{O}}\setminus\{0\})=\tilde{H}_i(S^r)=\begin{cases}\mathbf{k}, & i=r;\ \mathbf{k}\text{ — поле коэффициентов},\\ 0, & i\neq r.\end{cases}$$

Следовательно, вклад могут дать только те критические точки, коиндекс которых r совпадает с номером i сответствующей группы гомологий. Таким образом, из представления

$$H_i(f^a, f^a\setminus C_a)=\bigoplus_{\alpha} H_i(f^a\cap\mathcal{O}_\alpha, (f^a\cap\mathscr{V}_\alpha)\setminus C_a),$$

мы получаем, что для соседних критических значений a, b функции f

$$b_i(f^a, f^b)=\operatorname{rank} H_i(f^a, f^b)=c_i^{a,b},\quad i=0, 1, 2, \ldots$$

где $c_i^{a,b}$ — количество критических точек f коиндекса i на $f^{a,b}$ Пусть теперь $a_0=a<a_1<\ldots<a_N=\sup\limits_{\mathscr{V}} f(x)$ — критические значения функции f, занумерованные в порядке возрастания. Тогда, отсюда, следуя Милнору (см. [29]), имеем:

$$\sum_i b_k(f^{a_i}, f^{a_{i+1}})=\sum_i c_k^{a_i, a_{i+1}}=c_i^a(f);$$

---

[1] Здесь $\|\cdot\|$ — норма в $\mathscr{H}$.

$$\sum_{i}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}b_k(f^{a_i}, f^{a_{i+1}})\leqslant\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}c_k^a(f).$$

$$\parallel$$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}b_k(f^a).$$

Теорема доказана

2.5. Теория Пале—Смейла для гильбертовых многообразий с углами и некоторые задачи оптимального управления. В этом пункте абстрактная теория, развитая в пп. 2.3—2.4, будет применяться к исследованию задач оптимального управления с ограничениями типа неравенств на правый конец траектории. Пусть

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m}u^i g_i(x),\quad x\in M,\quad u\in\mathbb{R}^m,$$

$$x(0)=x_0, \tag{2.2}$$

— гладкая управляемая система постоянного ранга (см. § 1) на гладком конечномерном римановом многообразии M, изометрично вложенным в евклидово пространство $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая сформулированным в п. 1.2 этой статьи условия — см. (1.4). Для этой системы мы также будем использовать её инвариантную запись (1.6).

Предположим, что задано конечномерное подмногообразие $V\subset M$ с углами. Пусть, как и выше (см. § 1) $F_{x_0,T}$ $(T>0)$ — отображение вход — выход рассматриваемой системы, сопоставляющее допустимому управлению $u(\cdot)\in L_2^m[0, T]$ правый конец $x(T)=x(T;\ x_0,\ u(\cdot))$ траектории $x(\cdot)$ этой системы, соответствующей этому управлению и начальному состоянию x_0.

Тогда отображение $F_{x_0,T}$ можно рассматривать как сюръективную субмерсию пространства $L_2^m[0, T]$ на множество достижимости

$$\mathfrak{A}_{x_0}(T)=\{x(T;\ x_0,\ u(\cdot));\ u(\cdot)\in L_2^m[0, T]\}$$

системы (2.2), являющееся (см. § 1) гладким подмногообразием M. Поэтому справедливо

Предложение 2.14. Если V — конечномерное подмногообразие с углами, лежащее в множестве достижимости $\mathfrak{A}_{x_0}(T)$ конечно определенной системы (2.2) постоянного ранга, то

$$\mathscr{V}=F_{x_0,T}^{-1}(V)\subset L_2^m[0, T]$$

является гильбертовым подмногообразием с углами в пространстве $L_2^m[0, T]$.

Весьма замечательным обстоятельством оказывается то, что класс функционалов

$$J(u)=\int_0^T f^0(x,u)dt, \tag{2.3}$$

определенных на траекториях системы (2.2), которые могут быть рассмотрены как гладкие функции на $\mathscr{V}=F^{-1}_{x_0,T}(V)$, удовлетворяющие обобщённому условию (C), по-сути тот же, что и класс функционалов, введённый выше в § 1 — см. предложение 1.2. Именно, имеет место

Предложение 2.15. Пусть $f^0: \mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ — гладкий интегрант, удовлетворяющий *условию роста*

$$f_0(x,u)\leqslant -k|u|^2, \quad k=\mathrm{const}<0,$$
$$\forall x\in\mathbf{R}^d, \ u\in\mathbf{R}^m, \tag{2.4}$$

частные производные f^0_x и f^0_u которого удовлетворяют *условию Липшица*

$$|f^0_x(x,u)-f^0_x(y,u)|+|f^0_u(x,u)-f^0_u(y,u)|\leqslant L|x-y|,$$
$$L=\mathrm{const}>0, \quad x,y\in\mathbf{R}^m, \tag{2.5}$$

и *условию роста*

$$|f^0_x(x,u)|+|f^0_u(x,u)|\leqslant a|u|+b(x) \ \forall x\in\mathbf{R}^d \quad u\in\mathbf{R}^m, \tag{2.6}$$

где $a=\mathrm{const}>0$, b — неотрицательная функция, ограниченная на ограниченных подмножествах $\mathbf{R}^d$. Тогда, если выполнено *условие эллиптичности*

$$(f^0_{uu}(x,u)\xi,\xi)\leqslant -\mu(x)|\xi|^2 \quad \forall u, \ \xi\in\mathbf{R}^m, \ x\in\mathbf{R}^d, \tag{2.7}$$

с неотрицательной функцией μ, отделённой от нуля на компактных подмножествах $\mathbf{R}^d$, то функционал (2.3) является гладкой функцией на гильбертовом подмногообразии

$$\mathscr{V}=F^{-1}_{x_0,T}(V)\subset L_2^m[0,T]$$

с углами, удовлетворяющей обобщённому условию (C).

Прежде чем провести доказательство этого утверждения, поясним, почему в условиях (2.4) и (2.7) в отличие от условий (1.17) и (1.20) предложения 1.2 из § 1, фигурирует знак «—».

Дело в том, что, в отличие от классической, «симметричной» ситуации, в которой замена знака «—» на знак «+» и обратно не меняет критических точек, изучаемый случай существенно является односторонним: при замене знака критические точки пропадают, вообще говоря, и могут возникать новые критические точки — это обусловлено наличием неравенств. Поскольку абстрактная теория п. 2.3—2.4, развита для задач на максимум, то и приходится требовать, чтобы в (2.4) и (2.7) стоял знак

«—», ибо даже для простейшей задачи

$$\int_0^T u^2 dt \to \max, \quad \dot{x}=u, \quad x(T)\geqslant 0, \quad x(0)=x_0 \in \mathbf{R},$$

в которой выполнены условия (1.17), (1.20), теория теряет смысл: функционал

$$\int_0^T u^2 dt$$

не ограничен сверху, и описанная ситуация — общая для всех задач подобного рода.

Доказательство предложения 2.15 мы начнем со следующего простого замечания.

Лемма 2.4. Для гладкой функции g на гильбертовом многообразии условие (C) Пале-Смейла выполнено в том и только том случае, если оно выполнено для функции $-g$.

Из этой леммы и предложения 1.2 немедленно вытекает

Лемма 2.5. Если выполнены условия предложения 2.15, то функционал

$$J(u)=\int_0^T f^0(x, u)dt$$

удовлетворяет условию (C) Пале—Смейла на любой открытой грани $\mathcal{G}$ гильбертова подмногообразия $\mathcal{V}=F_{x_0,T}^{-1}(V)$ с углами.

Утверждение предложения 2.15 теперь следует из леммы 2.5, полной непрерывности отображения вход — выход $F_{x_0,T}: L_2^m[0,T]\to$ $\to M$ и следующего утверждения, которое имеет и самостоятельный интерес.

Лемма 2.6. Если g — гладкая коэрцитивная[1] функция на гильбертовом подмногообразии $\mathcal{V}$ с углами, такая, что на любой открытой грани $\mathcal{G}\subset\mathcal{V}$ выполнено условие (C) Пале-Смейла, то эта функция g удовлетворяет и обобщенному условию (C), если только отображение $F:\mathcal{M}\to M$ (где $V\subset M$ — моделирующее $\mathcal{V}$ конечномерное подмногообразие с углами, $\mathcal{M}$ — полное риманово многообразие) *вполне непрерывно*, то есть переводит ограниченное множество в $\mathcal{M}$ в предкомпактное.

Доказательство. Пусть

$$m_g(x)= \sup_{\substack{\|X_x\|_x\leqslant 1\\ X_x\in T_x\mathcal{V}}} \langle \nabla g(x), X_x \rangle_x$$

---

[1] В случае, когда $\mathcal{M}$ вложено в гильбертово пространство $\mathcal{H}$ это означает, что $g(x_n)\to+\infty$ при $\|x_n\|\to\infty$; это свойство не зависит от вложения и фактически является необходимым условием для справедливости как обычного, так и обобщенного условия (C).

и S — подмножество $\mathscr{V}$, на котором функция g ограничена и на котором

$$\inf_{x \in S} m_g(x) = 0.$$

Покажем, что замыкание $\bar{S}$ этого множества содержит критическую точку функции g.

Выберем произвольную последовательность $\{x_n\} \subset S$ такую, что

$$m_g(x_n) \to 0, \ n \to \infty.$$

Пусть $\{y_n\}$ — такие точки моделирующего $\mathscr{V}$ конечномерного подмногообразия V с углами, что $F(x_n) = y_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Из этой последовательности $\{y_n\}$, в силу предположения о полной непрерывности отображения F и условия коэрцитивности g, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность; можно считать, что $\{y_n\}$ и есть эта подпоследовательность. В силу замкнутости V, предел $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ этой последовательности принадлежит V.

Рассмотрим карту (O_{y_0}, φ) с центром в y_0 подмногообразия V с углами. Тогда

$$\varphi(O_{y_0} \cap V) = K_{y_0} \subset \mathbf{R}^n, \quad n = \dim M,$$

— выпуклый многогранный конус с вершиной в нуле и последовательность

$$z_n = \varphi(y_n) \to 0, \ n \to \infty.$$

Поскольку число граней K_{y_0} конечно, то существует открытая грань L этого конуса содержащая бесконечное число членов последовательности $\{z_n\}$. Не нарушая общности мы можем считать, что вся последовательность $\{z_n\}$ принадлежит этой грани. Тогда $\Gamma = \varphi^{-1}(L)$ — соответствующая грань подмногообразия V с углами содержит всю последовательность $\{y_n\}$ и вся последовательность $\{x_n\} : y_n = F(x_n)$ содержится в соответствующей открытой грани $\mathscr{G} = F^{-1}(\Gamma)$ гильбертова подмногообразия $\mathscr{V}$ с углами. Поскольку тогда

$$T_{x_n}\mathscr{V} = T_{x_n}\mathscr{G} = T_{x_n}\mathscr{V} \cap (-T_{x_n}\mathscr{V}),$$

то условие

$$\lim_{n\to\infty} m_g(x_n) = 0$$

дает:

$$0 = \lim_{n\to\infty} m_g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{\|X_{x_n}\|_{x_n} \leq 1 \\ X_{x_n} \in T_{x_n}\mathscr{V}}} \langle \nabla g(x_n), X_{x_n} \rangle_{x_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{X_{x_n} \in T_{x_n}\mathscr{G} \\ \|X_{x_n}\|_{x_n} \leq 1}} \langle \nabla g(x_n), X_{x_n} \rangle_{x_n} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{X_{x_n}\in T_{x_n}\mathscr{M}\\ \|X_{x_n}\|_{x_n}<1}}\langle P_{x_n}\nabla g(x_n),\ X_{x_n}\rangle_{x_n}=\lim_{n\to\infty}\|P_{x_n}\nabla g(x_n)\|_{x_n},$$

где P_{x_n} — ортогональный проектор $T_{x_n}\mathscr{M}$ на $T_{x_n}\mathscr{G}$.

Таким образом, мы получаем, что для сужения функции g на открытую грань $\mathscr{G}$ выполнено условие (C) Пале—Смейла. Это значит, что тогда замыкание множества

$$\{x_n\}\subset S\cap\mathscr{G}\subset S$$

содержит критическую точку x_0 функции $g\restriction\mathscr{G}$ и к этой точке сходится некоторая подпоследовательность $\{x_n\}$. Это же точка — критическая и для g ибо, в силу полунепрерывности снизу функции m_g,

$$0=\lim_{n\to\infty} m_g(x_n)\geqslant\liminf_{n\to\infty} m_g(x_n)\geqslant m_g(x_0)=0.$$

Этим доказана лемма, а значит и предложение 2.15.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграчёв А. А.* Необходимые условия оптимальности второго порядка в общем, нелинейном случае // Мат. сб.— 1977.— *102*, № 4.— С. 551—568 (РЖМат, 1977, 10Б541).
2. — Квадратичные отображения в геометрической теории управления // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1988.— *20*.— С. 111—205 (РЖМат, 1989, 1Б938).
3. — Топология квадратичных отображений и гессиан гладких отображений // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия.— 1988.— *26*.— С. 85—124 (РЖМат, 1989, 2А550).
4. —, *Вахрамеев С. А.* Нелинейные управляемые системы постоянного ранга и условия релейности экстремальных управлений // Докл. АН СССР.— 1984.— *279*, № 2.— С. 265—269 (РЖМат, 1985, 4Б859).
5. —, — Линейные по управлению системы постоянного ранга и условия релейности экстремальных управлений // Успехи мат. наук.— 1986.— *41*, № 6.— С. 163—164 (РЖМат, 1987, 4Б852).
6. —, — Теория Морса в задачах оптимального управления и математического программирования // Тезисы докл. Международный советско-польский семинар «Математические методы оптимального управления и их прил.» / Минск, 16—19 мая 1989.— Минск, 1989.— С. 7—8 (РЖМат, 1989, 9Б761К).
7. —, — *Гамкрелидзе Р. В.* Дифференциально-геометрические и теоретико-групповые методы в теории оптимального управления // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1983.— *14*.— С. 3—56 (РЖМат, 1983, 5Б609).
8. —, *Гамкрелидзе Р. В.* Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстродействия // Мат. сб.— 1976.— *100*, № 4.— С. 610—643 (РЖМат, 1977, 10Б540).
9. —, — Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление // Мат. сб.— 1978.— *107*, № 4.— С. 467—532 (РЖМат, 1979, 4Б583).
10. —, — Квазиэкстремальность для управляемых систем // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Новейш. достижения.— 1989.— *35*.— С. 109—134 (РЖМат, 1989, 12Б893).

11. *Вахрамеев С. А.* Гладкие управляемые системы постоянного ранга и линеаризуемые системы // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Новейш. достижения.— 1989.— *35.*— С. 135—177 (РЖМат, 1989, 12Б876).
12. — Теория Пале—Смейла для многообразий с углами. I. Случай конечной коразмерности // Успехи мат. наук (в печати).
13. —, *Сарычев А. В.* Геометрическая теория управления // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топол. Геометрия.— 1985.— *23.*— С. 197—280 (РЖМат, 1986, 4Б735).
14. *Гамкрелидзе Р. В.* Основы оптимального управления.— Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1977.— 245 с.
15. —, *Аграчёв А. А., Вахрамеев С. А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологическое исчисление // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Новейш. достижения.— 1989.— *35.*— С. 5—107 (РЖМат, 1989, 12Б703).
16. *Голубев Ю. Ф., Демидов В. Н.* Качественный анализ динамики управляемых систем с помощью теории бесконечномерных многообразий // Вопр. качеств. теории дифференц. уравнений.— Новосибирск, 1988.— С. 273—277 (РЖМат, 1989, 4Б948).
17. *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности.— М.: Мир, 1977.— 290 с. (РЖМат, 1977, 10А406К).
18. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом.— М.: Мир, 1971.— 343 с. (РЖМат, 1971, 7А734К).
19. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии.— М.: Мир, 1976.— 463 с. (РЖМат, 1977, 7А490К).
20. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения.— М.: Наука, 1979.— 759 с. (РЖМат, 1980, 5А623К).
21. —, —, — Современная геометрия. Методы теории гомологий.— М.: Наука, 1984.— 343 с. (РЖМат, 1985, 9А417К).
22. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Вариационное исчисление в целом.— М.: ГИИЛ, 1947.— 146 с.
23. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач.— М.: Наука, 1974.— 479 с. (РЖМат, 1974, 11Б707К).
24. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: ГИФМЛ, 1961.— 703 с. (РЖМат, 1962, 1Б200К).
25. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.— М.: Мир, 1971.— 392 с. (РЖМат, 1971, 12Б30К).
26. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. I, II.— М.: Наука, 1981.— 344 с.;— 414 с. (РЖМат, 1981, 11А686К; 1982, 3А758К).
27. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа.— М.: Наука, 1975.— 510 с. (РЖМат, 1976, 7Б945К).
28. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий.— М.: Мир, 1967.— 203 с. (РЖМат, 1967, 8А355К).
29. *Милнор Дж.* Теория Морса.— М.: Мир, 1965.— 184 с. (РЖМат, 1965, 12А456К).
30. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ.— М.: Мир, 1988. — 510 с.
31. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. С.* Математическая теория оптимальных процессов. 3 изд.— М.: Наука, 1976. — 392 с. (РЖМат, 1970, 1Б529К).
32. *Постников М. М.* Вариационная теория геодезических.— М.: Наука, 1965. — 248 с. (РЖМат, 1966, 8А543К).
33. — Введение в теорию Морса.— М.: Наука, 1971.— 567 с.
34. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.— 469 с. (РЖМат, 1973, 6В515К).
36. *Рудин У.* Функциональный анализ.— М.: Мир, 1975.— 443 с. (РЖМат, 1976, 4Б630К).
36. *Сарычев А. В.* Устойчивость отображений гильбертова пространства и эк-

вивалентность управляемых систем // Мат. сб.— 1980.— *113*, № 1.— С. 146—160 (РЖМат, 1981, 1Б680).
37. — Индекс второй вариации управляемой системы // Мат. сб.— 1980.— *113*, № 3.— С. 464—486 (РЖМат, 1981, 2Б553).
38. *Серр Ж.-П.* Алгебры Ли и группы Ли.— М.: Мир, 1969.— 375 с. (РЖМат, 1969, 12А528К).
39. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. — Киев: Наукова думка, 1973.— 217 с. (РЖМат, 1974, 5Б406К).
40. *Спеньер Э. С.* Алгебраическая топология.— М.: Мир, 1971.— 677 с. (РЖМат, 1972, 1А814К).
41. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли.— М.: Мир, 1987.— 302 с. (РЖМат, 1987, 6А682К).
42. *Фарбер М. Ш.* О гладких сечениях пересечения многозначных отображений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н.— 1979.— № 6.— С. 23—28 (РЖМат, 1981, 3Б521).
43. *Фоменко А. Т.* Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы.— М.: Изд-во МГУ, 1983.— 214 с. (РЖМат, 1983, 12А741К).
44. —, *Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии.— М.: Наука, 1989.— 494 с.
45. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с. (РЖМат, 1971, 3Б141К).
46. *Хирш М.* Дифференциальная топология.— М.: Мир, 1979.— 280 с. (РЖМат, 1980, 4А601К).
47. *Чарин В. С.* Линейные преобразования и выпуклые множества.— Киев: Наукова думка, 1978.— 188 с.
48. *Abraham R., Robin J.* Transversal mappings and flows.— New York: Benjamin, 1967.
49. *Agrachev A. A., Vakhrameev S. A.*, Morse theory and optimal control problems // Proc. Int. Conf. IIASA, Sopron, June 5—9, 1989 (в печати).
50. *Bott R.* Lectures on Morse theory, old and new. // Bull. Amer. Math. Soc.— 1982.— *7*, № 2.— С. 331—358 (РЖМат, 1983, 3Б802).
51. *Costa D. G., Alves de B. e Silva E.* The Palais-Smale versus coereivity // Notas e commun. mat.— 1989.— № 166.— С. 1—15 (РЖМат, 1990, 2Б701).
52. *Hamm H. A.* Morse theory on singular spaces and Leftshetz theorems // Banach. Centre Publ.— 1988.— *20*.— С. 223—237 (РЖМат, 1989, 11Б587).
53. *Hestenes M. R.* Application of the theory of quadratic forms in Hilbert spaces to the calculus of variations // Pacif. J. Math.— 1951.— *1*, № 4.— С. 525—582.
54. *Goresky M., MacPherson R.* Stratified Morse theory.— New York etc.: Springer, 1988.— 272 с. (РЖМат, 1989, 2А606К).
55. *Kim Soon-Kyn., Wang Tixiang.* The generalized Morse lemma and Euler characteristic of Banach manifolds // Topol. and Appl.— 1989.— *32*, № 1. — С. 13—23 (РЖМат, 1989, 12Б860).
56. *Lu Yung-Chen.* Singularity theory and introduction to catastrophe theory.— New York etc.: Springer, 1976, xii.— 199 с. (РЖМат, 1977, 9А683К).
57. *Mercuri F., Palmieri G.* Morse theory with low differentiability // Boll. Unione mat. ital. B.— 1987.— *1*, № 7.— С. 621—631 (РЖМат, 1988, 4Б867).
58. *Morse M.* The critical points of a function of n variables // Trans. Amer. Math. Soc.— 1931.— *33*.— С. 71—91.
59. — Functional topology and abstract variational theory // Mem. sci. math. — Paris, 1938.
60. — The calculus of variations in the large.— New York: Amer. Math. Soc., 1964.
61. *Nash J.* The imbedding problem for Riemannian manifolds // Ann. Math.— 1956.— *63*.— С. 20—63 (РЖМат, 1958, 10262).
62. *Palais R.* Morse theory on Hilbert manifold // Topology.— 1963.— *2*, № 4. — С 299—341 (РЖМат, 1966, 8А386).

63. — Ljusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds // Topology.— 1966. — *5*, № 2.— С. 115—132 (РЖМат, 1967, 10А424).
64. — The Morse lemma for Banach spaces // Bull. Amer. Math. Soc.— 1969.— *75*, № 5.— С. 968—971 (РЖМат, 1970, 5Б672).
65. —, *Smale S.* A generalized Morse theory // Bull. Amer. Math. Soc.— 1964. — *70*.— С. 165—171 (РЖМат, 1965, 4Б362).
66. *Smale S.* Morse theory and nonlinear generalization of Dirichlet problem // Ann. Math.— 1964.— *80*.— С. 382—396 (РЖМат, 1966, 6Б370).
67. — On Morse index theorem // J. Math. and Mech.— 1965.— *14*, № 6.— С. 1049—1056 (РЖМат, 1967, 9А355).
68. *Sussmann H. J.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— *79*.— С. 171—188 (РЖМат, 1974, 5А596).
69. — Lie brackets, real analycity and geometric control // Differ. Geom. Contr. Theory. / Proc. Conf. Mich. Technol. Univ., June 28 — July 2, 1982.— Boston e. a., 1983.— С. 1—116 (РЖМат, 1985, 2Б776)
70. *Willem M.* Aspects of Morse theory // Rend. Ist. mat. Univ. Trieste.— 1987.— *19*, № 2.— С. 155—164 (РЖМат, 1989, 7Б702).

ВЫПУСКИ И ТОМА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ

Алгебра. Топология. «1962» (1964)*
Геометрия. «1963» (1965).
Алгебра. «1964» (1966)
Алгебра. Топология. Геометрия. «1965» (1967), «1966» (1968), «1967» (1969), «1968», (1970), «1969» (1970), «1970» (1972), тома 10 (1971), 11 (1974), 12 (1974), 13 (1975), 14 (1977), 15 (1977), 16 (1978), 17 (1979), 18 (1981), 19 (1981), 20 (1982), 21 (1983), 22 (1984), 23 (1985), 24 (1986), 25 (1987), 26 (1988), 27 (1989)
Проблемы геометрии. Тома 7 (1976), 8 (1977), 9 (1979), 10 (1978), 11 (1981), 12 (1981), 13 (1982), 14 (1983), 15 (1984), 16 (1984), 17 (1985), 18 (1987), 19 (1987), 20 (1988), 21 (1989).
Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. «1962» (1964).
Математический анализ. «1963» (1965), «1964» (1966), «1965» (1966), «1966», (1967), «1967» (1969), «1968» (1969), «1969» (1971), «1970» (1971), тома 10 (1973), 11 (1973), 12 (1974), 13 (1975), 14 (1977), 15 (1977), 16 (1978), 17 (1979), 18 (1980), 19 (1981), 20 (1982), 21 (1983), 22 (1984), 23 (1985), 24 (1986), 25 (1987), 26 (1988), 27 (1989)
Теория вероятностей. «1963» (1965).
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. «1964», (1966), «1966» (1967), «1967» (1969), «1968» (1970), «1969» (1970), «1970» (1971), тома 10 (1972), 11 (1974), 12 (1975), 13 (1976), 14 (1977), 15 (1978), 16 (1978), 17 (1979), 18 (1981), 19 (1982), 20 (1983), 21 (1983), 22 (1984), 23 (1985), 24 (1986), 25 (1987), 26 (1988), 27 (1989)
Современные проблемы математики. Тома 1 (1973), 2 (1973), 3 (1974), 4 (1975), 5 (1975), 6 (1976), 7 (1976), 8 (1977), 9 (1977), 10 (1978), 11 (1978), 12 (1978), 13 (1979), 14 (1979), 15 (1980), 16 (1980), 17 (1981), 18 (1981), 19 (1982), 20 (1982), 21 (1982), 22 (1983), 23 (1983).
Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Тома 24 (1984), 25 (1984), 26 (1985), 27 (1985), 28 (1986), 29 (1986), 30 (1987), 31 (1987), 32 (1988), 33 (1988), 34 (1989), 35 (1989), 36 (1989), 37 (1990)
Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Тома 1 (1985), 2 (1985), 3 (1985), 4 (1985), 5 (1985), 6 (1988), 7 (1985), 8 (1985), 9 (1986), 10 (1986). 11 (1986), 12 (1986), 13 (1986), 14 (1987), 15 (1987), 16 (1987), 17 (1988), 18 (1988), 19 (1988), 20 (1988), 21 (1988), 22 (1988), 23 (1988), 24 (1988), 25 (1988), 26 (1988), 27 (1988), 28 (1988), 29 (1988), 30 (1988), 31 (1988), 32 (1988), 33 (1988), 34 (1988), 35 (1989), 36 (1989), 37 (1989), 38 (1989), 39 (1989), 42 (1989), 43 (1989), 45 (1989), 46 (1989), 48 (1989), 51 (1989), 54 (1989), 55 (1989), 63 (1989), 64 (1989), 70 (1989)

* Число в кавычках — название, в скобках — год издания.

СОДЕРЖАНИЕ

Технический редактор *Л. А. Белова* Корректор *З. С. Гуськова*

Сдано в набор 02.02.90 Подписано в печать 26 04.90
Формат бумаги 60×90 1/16 Бум. кн.-журн. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Усл. печ. л. 10,75+1 вкл. Усл. кр.-отт. 10,94 Уч.-изд. л. 11,39
Тираж 650 экз. Заказ 1077 Цена 1 р. 50 к.

Адрес редакции: 125210, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-42-29

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ,
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

ОПЕЧАТКИ

ИНТ, Алгебра. Топология. Геометрия № 28, 1990 г.

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
102	11 снизу	$f \pitchfork W$	$f \pitchfork \mathscr{W}$
103	3 сверху	$x \to G_x^\varphi$	$x \mapsto G_x^\varphi$
107	1 снизу	g^i	g_i
108	19 сверху	$p^{-1}\langle \mathrm{Ad}^* p\omega, X\rangle$	$p\langle \mathrm{Ad}\, p\omega, X\rangle$
111	2 снизу	множестве	множество
112	2 снизу, 9 сверху	трансверсальном	трансверсальным
112	17 сверху	$f_x,\ f_u$	$f_x^0,\ f_u^0$
112	8 сверху	$\mathfrak{R}_{x0}(T)$	$\mathfrak{A}_{x_0}(T)$
117	3 сверху	$f_u(x_n(t), u_n(t))$	$f_u^0(x_n(t), u_n(t))$
120	1 снизу	$\ldots\int\limits_0^{t_l} \mathrm{ad}\Big(f + \sum\limits_{j=1}^{m} u_0^j(\tau)\, g_j\Big)\, d\tau.$	$\ldots\int\limits_0^{t_l} \mathrm{ad}\Big(f + \sum\limits_{j=1}^{m} u_0^j(\tau)\, g_j\Big)\, d\tau g_{i_l}.$
124	6 снизу	$\hat{F}_{\xi_0, T}$	$\tilde{F}_{\xi_0, T}$
125	19 сверху	$\ldots \mapsto p \circ F_{x_0} \circ P^{-1}: \ldots$	$p \circ F_{x_0} \circ P^{-1}: \ldots$
129	14 снизу	d_x	d_k
131	4 сверху	$w_k(t) + \ldots$	$w_k(t) =$
133	4 сверху	$u(\cdot) \mapsto p^{-1} \circ F_{x_0, T} \circ P$	$p^{-1} \circ F_{x_0, T} \circ P$
133	17 сверху	того	последнего
137	17 сверху	U_x	U_{x_0}
138	2 снизу	гладких многообразиях	подмногообразиях
139	9 снизу	X_{X_0}	X_{x_0}
142	17 сверху	$\{(p, q) \mathrm{E} K \cap U \mid f(p, q) \rangle$	$\{(p, q) \in K \cap U \mid \hat{f}(p, q) \rangle$
148	12 сверху	$\Vert Y_{x_0}^{(0)} \Vert x_0 \leqslant 1$	$\Vert Y_{x_0}^{(0)} \Vert_{x_0} < 1$
149	12 снизу	$\Delta f(x)$	$\nabla f(x)$
154	14 сверху	$\mathscr{I} \subset \mathscr{M}$	$\mathscr{I} \supset \mathscr{A}$
154	15 сверху	$\mathrm{supp}\, \alpha \subset \mathscr{G}$	$\mathrm{supp}\, \alpha \subset \mathscr{I}$
155	11 снизу	$\langle \nabla f(y), X_y \rangle_y > \delta_k$	$\langle \nabla f(y), X_y \rangle_y > \delta_{k+1}$
155	12 снизу	$> \varphi_t(x) > \geqslant 0$	$> \varphi_t(x) > 0$
157	1 снизу	отсутствие	отсутствии
158	6 сверху	$\Delta f(x)$	$\nabla f(x)$
159	15, 18 снизу	$\varphi_{\frac{1}{1-t}}(b - f(x))$	$\varphi_{\frac{t}{1-t^2}}(b - f(x))$
162	6 сверху	$\mathscr{H}$ — подпространство	H — подпространство
162	19 сверху	$0 \leqslant t \leqslant;$	$0 \leqslant t \leqslant 1;$
163	6 сверху	$H_i(\{u, v) \mathcal{O} \bar{K} \mid \Vert u \Vert^2 - \Vert v \Vert^2 \geqslant \geqslant 0\}$ 1)	$\hat{H}_i(\{u, v) \in \mathcal{O} \cap \bar{K} \mid \Vert u \Vert^2 - \Vert v \Vert^2 \geqslant 0\}) = 0$ 1)
164	13 сверху	изометрично	замкнутым образом
165	11 сверху	$f_0(x, u)$	$f^0(x, u)$
168	7 сверху	гессиан	гессианы
169	3 снизу	36. Рудин У.	35. Рудин У.
170	28 снизу	coereivity	coercivity

Зак. 1077

УДК 512.556

Е. М. Вечтомов. **Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций** // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. — 1990. — *28* — С. 3—46

В пяти параграфах обзорной статьи рассмотрены результаты по определяемости топологических пространств различными алгебраическими системами непрерывных функций на них. Дан обзор работ по определяемости E-компактных пространств общими структурами непрерывных функций, по определяемости пространств кольцами непрерывных функций и связанными с ними системами, по определяемости пространств решетками открытых множеств и полугруппами непрерывных преобразований. Проиллюстрированы основные методы теории. Библ. 314.

УДК 515.12

М. М. Заричный, В. В. Федорчук. **Ковариантные функторы в категориях топологических пространств** // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. — 1990. — *28*. — С. 47—95

Обзор посвящен свойствам некоторых конкретных ковариантных функторов, нормальным и близким к ним функторам в категории компактов, алгебраической теории ковариантных функторов, связи теории функторов с абсолютными экстензорами и многообразиями. Библ. 409.

УДК 517.974+517.977.5+515.164.174

С. А. Вахрамеев. **Гильбертовы многообразия с углами конечной коразмерности и теория оптимального управления** // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. — 1990. — *28*. — С. 96—171

Предлагается вариант теории Пале-Смейла для гильбертовых многообразий с особенностями, пригодный для исследования задач оптимального управления, связанных с гладкими управляемыми системами постоянного ранга. Излагаются также результаты, полученные совместно с А. А. Аграчевым, касающиеся конечномерного случая — аналога теории Морса для (конечномерных) многообразий с углами. Рассмотрены простейшие приложения развитой теории: получено необходимое условие глобальной управляемости систем постоянного ранга и двойственной результат о кратности решений соответствующих задач оптимизации. Библ. 70.

Заказ 1077

1 р. 50 к.

Индекс 56846

ISSN 0202—7445. ИНТ. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 28. 1990. 1—172