ВИНИТИ ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Том 14

Москва 1977

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ
СОВЕТА МИНИСТРОВ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ
СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

1—8400

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Том 14

ВЫПУСКИ И ТОМА СЕРИИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ:

Алгебра. Топология. 1962, М., 1964
Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964
Геометрия. 1963, М., 1965
Математический анализ. 1963, М., 1965
Теория вероятностей. 1963, М., 1965
Алгебра. 1964, М., 1966
Математический анализ. 1964, М., 1966
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1964, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967
Математический анализ. 1965, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968
Математический анализ. 1966, М., 1967
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1966, М., 1967
Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969
Математический анализ. 1967, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1967, М., 1969
Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970
Математический анализ. 1968, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1968, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1970
Математический анализ. 1969, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1969, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971
Математический анализ. 1970, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970, М., 1971
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 10, М., 1972
Математический анализ. Том 10, М., 1973
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 10, М., 1972
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 11, М., 1974
Математический анализ. Том 11, М., 1973
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 11, М., 1974
Современные проблемы математики. Том 1, М., 1973
Современные проблемы математики. Том 2, М., 1973
Современные проблемы математики. Том 3, М., 1974
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 12, М., 1974
Математический анализ. Том 12, М., 1974
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 12, М., 1975
Современные проблемы математики. Том 4, М., 1975
Современные проблемы математики. Том 5, М., 1975
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 13, М., 1975
Математический анализ. Том 13, М., 1975
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 13, М., 1976
Современные проблемы математики. Том 6, М., 1976
Современные проблемы математики. Том 7, М., 1975
Проблемы геометрии. Том 7, М., 1975

МОСКВА 1977

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Том 14

Научный редактор профессор *Р. В. Гамкрелидзе*

МОСКВА 1977

СЕРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Серия «Математический анализ. Том 14» содержит 4 обзора:

Обзор М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка, **«Спектральная асимптотика дифференциальных операторов»**, посвящен изложению результатов об асимптотике дискретного спектра самосопряженных дифференциальных операторов, в основном, с частными производными.

В обзоре Э. Р. Цекановского, Ю. Л. Шмульяна, **«Вопросы теории расширения неограниченных операторов в оснащенных гильбертовых пространствах»**, рассматриваются вопросы, связанные с применением методов теории оснащенных гильбертовых пространств к теории расширения эрмитовых операторов.

В обзоре Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановского, **«Вычислительные методы оптимального управления»**, классифицируются и анализируются приближенные методы решения задач оптимального управления, указываются их области применимости. Из специальных задач рассмотрена задача выбора оптимальных траекторий летательных аппаратов.

В обзоре М. Б. Прохорова, В. К. Саульева, **«Метод оптимальной фильтрации Калмана-Бьюси и его обобщения»**, рассматриваются вопросы, посвященные решению задачи оптимальной, в смысле минимума дисперсии ошибки, оценивания состояния динамических систем по методу Калмана-Бьюси.

ОТ РЕДАКЦИИ

Серия «Математический анализ. Том 14» охватывает в основном литературу, прореферированную в Реферативном журнале «Математика» за 1967—1976 гг. К каждой статье прилагается библиография вопроса со ссылкой на реферат.

Редакция обращается ко всем читателям с просьбой прислать свои отзывы и пожелания в отношении дальнейшей формы и содержания выпусков «Итоги науки и техники» по адресу: *Москва 125219, Балтийская ул., 14, ВИНИТИ, Отдел математики.*

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк

ВВЕДЕНИЕ

1. Обзор посвящен, в основном, изложению результатов об асимптотике по спектральному параметру дискретного спектра самосопряженных дифференциальных операторов, главным образом операторов в частных производных. Обсуждаются работы, прореферированные в РЖ «Математика» в 1967—1975 годах. Более ранние статьи упоминаются в тех случаях, когда это необходимо по ходу изложения. С состоянием вопроса на 1967 год можно ознакомиться по обзору Кларка [271]. Можно также рекомендовать обзоры Р. А. Александряна, Ю. М. Березанского, В. А. Ильина и А. Г. Костюченко [5] и Ю. М. Березанского [26] по спектральной теории краевых задач, где, в частности, описаны полученные к тому времени в СССР результаты об асимптотике спектра. См. также обзорную статью В. И. Горбачук и М. Л. Горбачука (РЖМат, 1976, 6Б747).

В обзоре не рассматриваются специфически несамосопряженные вопросы, а также квазисобственные числа (спектр на «нефизическом листе»).

Наше изложение сконцентрировано вокруг следующих вопросов:

1) Вид главного члена асимптотики для $N(\lambda)$ (функции распределения спектра) в различных задачах (§ 1). Выяснение пределов, до которых справедливы «стандартные» выражения для главного члена (§§ 2, 3, 4). Нахождение вида асимптотики в случаях, когда эти выражения непригодны (§§ 6, 7).

2) Оценка остатка в асимптотической формуле (§ 8).

3) Исследование следующих членов спектральной асимптотики для $N(\lambda)$ (§ 9). Сколько-нибудь полные результаты здесь получаются (и хорошо известны) лишь в одномерных задачах. В многомерном случае обсуждаются подходящим образом усредненные (сглаженные) асимптотические разложения.

4) Задачи об асимптотике $N(\lambda)$ по малому параметру, входящему в уравнение (§ 5).

Отдельные вопросы, слабо связанные с основным текстом обзора, отнесены в § 10.

Мы почти не касаемся некоторых вопросов самосопряженной теории, смежных с асимптотикой спектра. Среди них: разложения по собственным функциям*); формулы следов; задачи с нелинейным вхождением параметра (пучки); задачи с малым параметром в духе известных работ М. И. Вишика и Л. А. Люстерника; спектр уравнения Шредингера со случайным потенциалом**).

Асимптотика спектральной функции обсуждается лишь в тех случаях, когда она служит источником асимптотических формул для собственных чисел. Подробнее об асимптотике спектральной функции см. Хёрмандер [218], Б. М. Левитан [137, 138].

О применении асимптотических методов в одномерных задачах см. обзор [56]. Разработанный В. П. Масловым многомерный вариант метода ВКБ изложен в его книге [142] и в работе В. П. Маслова и М. В. Федорюка [144].

Наконец, укажем книги и лекционные курсы, в значительной мере посвященные изложению вопросов спектральной асимптотики: М. А. Наймарк [147], Б. М. Левитан и И. С. Саргсян [140], Агмон [230], А. Г. Костюченко [107], М. Ш. Бирман и М. З. Соломяк [38].

2. Методы исследования асимптотики спектра можно разделить на три группы. Собственно асимптотические методы основаны на полных разложениях решений соответствующих дифференциальных уравнений. Они применимы в одномерных задачах, а также в задачах с разделяющимися переменными. В многомерных задачах обычно применяется какой-либо вариант вариационного или тауберова метода. Вариационная методика восходит к классическим работам Г. Вейля [371, 372], а также Р. Куранта и др. Мы будем употреблять термин «вариационный метод» в расширительном смысле, подразумевая не только применение минимаксимального принципа, но также активное использование унитарной инвариантности спектра и средств теории возмущений абстрактной теории операторов. Вариационный метод непосредственно применим лишь в полуограниченных задачах. Среди его преимуществ — малая чувствительность к гладкости данных задачи, удобство применения к задачам с вырождением эллиптичности и т. п. Тауберова техника восходит к знаменитой работе Карлемана [265]. Эта техника основана на асимптотическом изучении ядра резольвенты (или иной подходящей функции рассматриваемого оператора) с последующим

---

*) См. обзорные работы В. А. Ильина [84—86].

**) См. обзор Л. А. Пастура [157].

использованием тауберовых теорем. Важное преимущество тауберовых методов — применимость к несамосопряженным задачам, а также к вычислению асимптотики спектральной функции (последняя не является унитарно инвариантным объектом).

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Здесь мы выпишем асимптотические формулы для функций распределения собственных чисел, часто встречающиеся в дальнейшем изложении. Начнем с полуограниченных снизу краевых задач для уравнения вида

$$A(x, D)\, u=\lambda u, \tag{1}$$

где $A(x, D)$ — эллиптический оператор. Через $N(\lambda)$ ниже обозначается количество собственных чисел задачи в промежутке $(-\infty, \lambda)$.

В рамках тауберовой техники асимптотические формулы для $N(\lambda)$, как правило, выводятся из асимптотических формул для спектральной функции $e(x, y;\ \lambda)$ — ядра интегрального оператора в L_2, проектирующего на спектральное подпространство оператора A, отвечающее промежутку $(-\infty, \lambda)$.

Достаточно общая (но несколько расплывчатая) «квазиклассическая» гипотеза*) о виде асимптотики $N(\lambda)$ состоит в следующем. Пусть вещественная функция $\hat{a}(x, \xi)$ является символом оператора A в области $\Omega\subset\mathbf{R}^m$. Тогда при $\lambda\to\infty$

$$N(\lambda)\sim(2\pi)^{-m}\operatorname{mes}\{(x, \xi)\in\Omega\times\mathbf{R}^m : \hat{a}(x, \xi)<\lambda\}. \tag{2}$$

Здесь mes означает меру Лебега.

Формула (2) действительно оказывается справедливой при определенных условиях регулярности (гладкие коэффициенты и граница области, «классические» краевые условия и т. п.). Во многих задачах эти предположения к настоящему времени сведены к минимуму. Их описание составляет одну из основных целей обзора. Не менее важно выделение случаев, когда асимптотика (2) несправедлива. Так обстоит дело, например, в задачах с «сильным вырождением» (см. § 6), когда правая часть в (2) оказывается бесконечной. Бывает, однако, что правая часть в (2) конечна, но не выражает асимптотики $N(\lambda)$. Это всякий раз связано (см. §§ 3, 6) с весьма нерегулярным поведением коэффициентов в окрестности особых точек задачи.

При применении формулы (2) в «сингулярных» ситуациях следует обсудить, что именно надо понимать под символом $\hat{a}$. Обычный «полный символ» не вполне пригоден уже потому, что он не всегда вещественный. Это затруднение не возникает, когда

---

*) Формула (2) соответствует квантовомеханическому представлению о числе «квазиклассических» состояний, приходящихся на единицу объема фазового пространства.

оператор записан в формально самосопряженной форме и в качестве $\hat{a}$ берется символ, отвечающий скорее билинейной форме, нежели оператору. Например, для $Au=(pu'')''$ обычно оказывается целесообразным принять $\hat{a}(x,\xi)=p\xi^4$, но не $\hat{a}=p\xi^4+2ip'\xi^3-p''\xi^2$ (полный символ) и не $\hat{a}=p\xi^4-p''\xi^2$ (его вещественная часть). Такая точка зрения особенно удобна, когда сама постановка задачи — вариационная. Далее, в большинстве задач в качестве $\hat{a}$ достаточно брать соответствующий «старший» символ. В сингулярных случаях (см. § 3), когда на асимптотику влияют «промежуточные» члены, каждый раз бывает ясно, какие именно члены следует включать в символ. Наконец, в теоремах, устанавливающих справедливость формул вида (2), всегда присутствуют дополнительные условия, делающие результат устойчивым относительно включения в символ слагаемых, отвечающих «подчиненным» членам.

Выпишем некоторые эквивалентные формы и частные случаи формулы (2).

Пусть $A(x, D)$ — формально самосопряженный эллиптический оператор порядка l. В «регулярных» случаях символ $\hat{a}$ можно заменить его главной частью $\hat{a}_0(x, \xi)$, которая является однородным полиномом по ξ порядка l. Положим

$$\omega(x)=\operatorname{mes}\{\xi\in\mathbf{R}^m : \hat{a}_0(x, \xi)<1\}. \tag{3}$$

Тогда в широких пределах справедливы формулы (при $\lambda\to\infty$)

$$e(x, x; \lambda)\sim(2\pi)^{-m}\lambda^{m/l}\omega(x); \tag{4}$$

$$N(\lambda)\sim(2\pi)^{-m}\lambda^{m/l}\int\limits_{\Omega}\omega(x)\,dx. \tag{5}$$

Они показывают, в частности, что асимптотика $N(\lambda)$ и «внутренняя» асимптотика $e(x, x; \lambda)$ не зависят от регулярных самосопряженных граничных условий.

Для $\omega(x)$ в литературе встречаются различные представления:

$$\begin{aligned}\omega(x)&=m^{-1}\int\limits_{|\xi|=1}[\hat{a}_0(x, \xi)]^{-m/l}dS(\xi)=\\&=[\Gamma(ml^{-1}+1)]^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}^m}\exp[-\hat{a}_0(x, \xi)]\,d\xi=\\&=\frac{(s-1)!}{\Gamma(ml^{-1}+1)\,\Gamma(s-ml^{-1})}\int\limits_{\mathbf{R}^m}[\hat{a}_0(x, \xi)+1]^{-s}d\xi\end{aligned} \tag{6}$$

(последнее представление справедливо при $ls>m$).

Приведем еще реализацию формулы (2) для оператора Шредингера в $\mathbf{R}^m$ с растущим потенциалом q:

$$-\Delta u+q(x)u=\lambda u. \tag{7}$$

Именно, при $\lambda \to \infty$

$$N(\lambda) \sim v_m (2\pi)^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} (\lambda - q)_+^{m/2} dx. \tag{8}$$

Здесь и в дальнейшем v_m — объем единичного шара в $\mathbf{R}^m$, $p_\pm = \max(\pm p, 0)$.

Отметим, что в этом примере роль символа играет выражение $|\xi|^2 + q(x)$, причем второе слагаемое нельзя опустить.

Для аналогичного оператора порядка $l = 2l_1$:

$$(-\Delta)^{l_1} u + qu = \lambda u \tag{9}$$

формула (2) принимает вид

$$N(\lambda) \sim v_m (2\pi)^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} (\lambda - q)_+^{m/l} dx. \tag{10}$$

Если оператор A неполуограничен, то для него естественно рассматривать две функции распределения $N_\pm(\lambda)$ положительных и отрицательных собственных чисел:

$$N_\pm(\lambda) = \sum_{k: 0 < \pm\lambda_k < \lambda} 1.$$

2. Ряд работ относится к уравнениям более общего, чем (1), вида

$$B(x, D) u = \mu A(x, D) u. \tag{11}$$

В уравнении (11) оператор A всегда будем считать «старшим». Оператор B не предполагается знакоопределенным. В соответствии с этим уравнение (11) имеет, вообще говоря, собственные числа обоих знаков. Через $\widetilde{N}_+(\mu)$, $(\widetilde{N}_-(\mu))$, $\mu > 0$, будем обозначать количество собственных чисел уравнения (11) в промежутке (μ, ∞) $((-\infty, -\mu))$.

Формулы из п. 1 обобщаются на случай задач вида (11). При этом следует иметь в виду замену $\lambda \mapsto \mu^{-1}$, что соответствует асимптотике при $\mu \to 0$. Так, общей формуле (2) отвечает формула

$$\widetilde{N}_\pm(\mu) \sim (2\pi)^{-m} \operatorname{mes} \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^m: \mu \hat{a}(x, \xi) < \\ < \pm \hat{b}(x, \xi)\} \quad (\mu \to +0) \tag{12}$$

($\hat{b}$ — символ оператора B). Если B — оператор порядка r, $r < l$ и $\hat{b}_0(x, \xi)$ — его главный символ, то в регулярных ситуациях

$$\widetilde{N}_\pm(\mu) \sim (2\pi)^{-m} \mu^{-m/(l-r)} \int\limits_\Omega \omega_\pm(x)\, dx, \tag{13}$$

$$\omega_\pm(x) = \operatorname{mes} \{\xi \in \mathbf{R}^m : \hat{a}_0(x, \xi) < \pm \hat{b}_0(x, \xi)\}. \tag{14}$$

В частности, для самосопряженного уравнения второго порядка

$$-\mu \sum_{1\leqslant i,\ j\leqslant m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=b(x)u(x),\ \overline{a_{ij}}=a_{ji}, \tag{15}$$

$$\tilde{N}_{\pm}(\mu)\sim v_m(2\pi)^{-m}\mu^{-m/2}\int\limits_{\Omega}\frac{b_{\pm}^{m/2}dx}{\sqrt{\det\{\operatorname{Re} a_{ij}\}}}. \tag{16}$$

Для полигармонического уравнения

$$\mu(-\Delta)^{l_1}u=bu,\ l_1=l/2, \tag{17}$$

будет

$$\tilde{N}_{\pm}(\mu)\sim v_m(2\pi)^{-m}\mu^{-m/l}\int\limits_{\Omega} b_{\pm}^{m/l}dx. \tag{18}$$

Наконец, если коэффициенты уравнения (11) постоянны ($\hat{a}(\xi)$, $\hat{b}(\xi)$ не зависят от $x\in\Omega$), то

$$\tilde{N}_{\pm}(\mu)\sim(2\pi)^{-m}\operatorname{mes}\Omega\cdot\operatorname{mes}\{\xi\in\mathbf{R}^m:\mu\hat{a}(\xi)<\pm\hat{b}(\xi)\}. \tag{19}$$

3. Пусть теперь речь идет о системе уравнений вида (11) (либо (1)). Тогда символы $\hat{a}$, $\hat{b}$ представляют собой эрмитовы $(k\times k)$-матрицы. «Квазиклассическая» формула (12) обобщается на рассматриваемый случай следующим образом. Пусть $\tilde{n}_{\pm}(x,\ \xi;\ \mu)$ — функции распределения положительных и отрицательных собственных чисел алгебраической задачи

$$\mu\hat{a}(x,\ \xi)f=\hat{b}(x,\ \xi)f,\ f\in\mathbf{C}^k.$$

Тогда при $\mu\to+0$

$$\tilde{N}_{\pm}(\mu)\sim(2\pi)^{-m}\int\limits_{\Omega\times\mathbf{R}^m}\tilde{n}_{\pm}(x,\ \xi;\ \mu)\,d\xi dx. \tag{20}$$

В регулярной эллиптической ситуации можно дать явные асимптотические выражения для функций $\tilde{N}_{\pm}$, аналогичные формулам (13)—(14). Именно, пусть $\hat{a}_0$, $\hat{b}_0$ — главные символы операторов A, B и пусть $\operatorname{ord}A=l$, $\operatorname{ord}B=r$, $l>r\geqslant 0$. Тогда

$$m(2\pi)^m\lim_{\mu\to 0}\mu^{\theta}\tilde{N}_{\pm}(\mu)=$$

$$=\int\limits_{\Omega}dx\int\limits_{|\xi|=1}\operatorname{Tr}\left\{\left[\hat{a}_0^{-1/2}\hat{b}_0\hat{a}_0^{-1/2}\right]_{\pm}^{\theta}\right\}dS(\xi)\quad(\theta^{-1}=(l-r)m^{-1}). \tag{21}$$

Здесь $g_{\pm}$ — положительная (отрицательная) часть эрмитовой матрицы g, Tr — след матрицы. Для систем вида (1) формула (21) переходит в

$$m(2\pi)^m\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-m/l}N_{\pm}(\lambda)=\int\limits_{\Omega}dx\int\limits_{|\xi|=1}\operatorname{Tr}(\hat{a}_0)_{\pm}^{-m/l}dS(\xi). \tag{22}$$

4. Отметим следующие обозначения, стандартно используемые в тексте обзора. $H^l(\Omega)$ — пространство Соболева в области $\Omega\subset\mathbf{R}^m$; $\overset{0}{H}{}^l(\Omega)$ — замыкание в $H^l(\Omega)$ класса $C_0^\infty(\Omega)$. $\mathscr{D}(A)$ — область определения оператора A.

Задача D — задача с нулевыми граничными условиями. Задача N, в случае вариационной постановки, — задача с естественными граничными условиями. Для эллиптических операторов второго порядка под задачей N понимается обычная задача Неймана. ∇ — оператор градиента; ∇_s — градиент порядка s; $\nabla_s{}^*$ — сопряженный ему оператор типа дивергенции; ПДО — псевдодифференциальный оператор.

§ 2. РЕГУЛЯРНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

1. К середине шестидесятых годов оправдание «квазиклассической» формулы (22) (формулы (5) в скалярном случае) для полуограниченных регулярных задач вида (1) было в основном закончено. Наиболее полные результаты здесь принадлежат Агмону [230, 231] и Браудеру [256]. В этих работах Ω — ограниченное открытое множество, $A(x, D)$ — формально самосопряжен, коэффициенты и $\partial\Omega$ — достаточно гладкие; A — оператор любого самосопряженного в $L_2(\Omega)$ расширения оператора $A(x, D)$, заданного вначале на $C_0{}^\infty(\Omega)$. Предполагается лишь, чтобы было $\mathscr{D}(A)\subset H^l(\Omega)$ и $l>m$; если $l\leqslant m$, то теория применяется к оператору A^s и ставится требование $(A^s)\subset H^{ls}(\Omega)$, $ls>m$. Такой подход допускает, помимо «обычных» краевых задач, удовлетворяющих условиям Шапиро—Лопатинского, также задачи с «нелокальными» краевыми условиями.

В [230, 231] рассмотрено одно уравнение, что в существенном приводит к полуограниченному случаю, хотя формально полуограниченности не требуется. В [256] рассматриваются системы, вообще говоря, — неполуограниченные, но для них найдена лишь асимптотика суммы $N_+(\lambda)+N_-(\lambda)$. Отметим еще работы Аримы и Мидзохаты [234], Мидзохаты [332, 333] и Буй Ан Тона [261], где близкие результаты получены для одного эллиптического уравнения при граничных условиях Шапиро—Лопатинского. В [332, 333, 261] допускается включение младших несамосопряженных членов (в этом случае по определению $N(\lambda)=\sum\limits_k 1\{k\colon \operatorname{Re}\lambda_k<\lambda\}$).

Во всех этих исследованиях применены какие-либо варианты тауберовой техники (в [256, 261] изучается поведение ядра резольвенты на отрицательной вещественной полуоси, в [231] — на мнимой оси; в [234, 332, 333] применен метод параболической функции Грина). Наряду с асимптотикой $N(\lambda)$ получена асимптотика спектральной функции, а в некоторых работах — и ее производных.

Эллиптическому случаю посвящены также работы В. Е. Шаталова и И. А. Шишмарева [221—223], где изучаются особенности ζ-функции оператора A ($\zeta_A(s) = \mathrm{Tr} A^{-s}$). В качестве следствия указана асимптотика $N(\lambda)$ для систем с краевыми условиями Шапиро—Лопатинского (в полуограниченном случае); формула в [223] нуждается в очевидном исправлении. Работы А. Н. Кожевникова [98—100] посвящены эллиптическим уравнениям на многообразии без края (также полуограниченный случай). В [98] рассмотрена асимптотика для скалярных задач, в [99, 100] — для систем, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу. Результаты применены к задачам со спектральным параметром в граничном условии (см. § 7).

2. Важное техническое продвижение, осуществленное в [230, 231, 256], — разработка методики оценок резольвенты без учета конкретного вида краевых условий. Используются лишь вложения типа $\mathscr{D}(A) \subset H^l(\Omega)$. Наиболее последовательно эта методика применена в [230, 231]. Позднее она получила дальнейшее развитие и в том числе была применена к оценкам остатка в асимптотических формулах (см. § 8).

Отметим, что до сих пор остался не исследованным в должной мере случай эллиптических систем с неполуограниченным $A(x, D)$, хотя, по-видимому, техника Агмона позволяет провести такое исследование.

Ниже приведена формулировка результата Агмона [230, 231] об асимптотике спектра и спектральной функции полуограниченных задач вида (1).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса, $\mathcal{A}$ — положительно определенный самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$ с областью определения

$$\mathscr{D}(\mathcal{A}) \subset H^l(\Omega), \quad l > m. \tag{23}$$

Пусть для $u \in \mathscr{D}(\mathcal{A})$ $\mathcal{A}u = A(x, D)u$, где $A(x, D)$ — формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка l с равномерно непрерывными коэффициентами. Тогда

1) для спектральной функции оператора $\mathcal{A}$ справедлива равномерная в Ω оценка

$$e(x, x; \lambda) \leqslant C\lambda^{m/l}; \tag{24}$$

2) в любой точке $x \in \Omega$ справедлива асимптотическая формула (4);

3) для $N(\lambda)$ справедлива асимптотическая формула (5).

Отметим, что формула (5) автоматически получается интегрированием асимптотики (4) на основании равномерной оценки (24). Априорное получение оценок вида (24) является существенным элементом техники Агмона.

Явные предположения о гладкости границы области и коэффициентов оператора в теореме Агмона невелики. Однако на деле предположения о формальной самосопряженности A и о включении (23) вносят дополнительные условия гладкости. Эти условия еще усиливаются при $l \leqslant m$, так как проводится редукция к случаю $l > m$ (с помощью замены A на A^s).

Такая редукция устранена в работах Билса [245, 246], что привело к определенному уменьшению условий гладкости. Некоторое ослабление «явных» требований гладкости достигнуто им и при $l > m$; однако всегда сохраняется предположение $\mathscr{D}(A) \subset H^l(\Omega)$. Результаты Билса основаны на технике теории возмущений и относятся лишь к $N(\lambda)$.

3. Для регулярных краевых задач главный член асимптотики $N(\lambda)$ зависит лишь от дифференциального выражения, но не от граничных условий. Для «неклассических» граничных условий (т. е. для произвольных полуограниченных самосопряженных расширений заданного минимального оператора) положение, вообще говоря, меняется. Для оператора Лапласа этот вопрос анализировался в работах М. М. Гехтмана [64, 65], В. А. Ильина и А. Ф. Филиппова [87], М. Л. Горбачука [67], А. Д. Гольдина [66] (см. также обзоры В. А. Ильина [85, 86]). В частности, в [87] указано, что для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ и для любой неотрицательной последовательности $\{\lambda_n\}$ существует такое самосопряженное расширение минимального оператора $-\Delta$, для которого $\{\lambda_n\}$ служит подпоследовательностью собственных чисел. Для любой функции $f(\lambda) > 0$, такой, что $\lambda^{m/2} = o(f(\lambda))$ при $\lambda \to \infty$, существует расширение, для которого $N(\lambda) = f(\lambda) + O(\lambda^{m/2})$. В [65] утверждается ($m=2$, Ω — круг), что расширение с заранее предписанной неклассической степенной асимптотикой можно получить, задавая граничное условие в терминах ПДО, действующего на $\partial\Omega$; по поводу многомерного случая см. [66].

4. В некоторых случаях задача сохраняет «регулярный» характер, хотя условия эллиптичности дифференциального оператора в каком-либо смысле ослабляются.

Еще в 1957 г. Ф. Браудер [255] тауберовым методом получил асимптотическую формулу вида (2) для так называемых полуэллиптических операторов (подкласс гипоэллиптических операторов) при граничных условиях «вариационного типа». В дальнейшем асимптотика для этого класса операторов изучалась в [316, 45, 365] (негладкие задачи; оценки остатка; см. §§ 4, 8).

В. Н. Туловский [209] вариационным методом оправдал асимптотику (2) в задаче D для гипоэллиптических операторов «постоянной силы». Близкие вопросы обсуждались в [363, 364]. В [206, 208] В. Н. Туловский рассмотрел задачу D для операторов с постоянными коэффициентами, несколько более общих, чем гипоэллиптические (подробнее об этом классе см. § 8).

5. Для задач вида (11) рассматривались уравнения, где порядок A выше порядка B, причем оператор A — положительный. Каких-либо ограничений на тип оператора B не накладывалось. Здесь прежде всего следует отметить пионерскую работу А. Плейеля [343], где тауберовым методом получена асимптотика вида (13) для задачи D в плоской области, при $A=\Delta^2$, $B=D_x^2-D_y^2$.

М. Ш. Бирман и М. З. Соломяк [34—36] получили для $\tilde{N}_{\pm}(\mu)$ асимптотику (21) для эллиптических систем «дивергентного вида». Постановка задачи и метод исследования — вариационные; граничные условия — Дирихле или естественные (в смысле вариационного исчисления). Подробнее об этих работах сказано в § 4, поскольку в основном они направлены на исследование «негладких» ситуаций.

В [210] В. Н. Туловский рассмотрел задачу D для скалярных уравнений (11) как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. В случае постоянных коэффициентов изучаются уравнения, более общие, чем эллиптические; результаты близки к результатам работы [208]. В случае переменных коэффициентов A — положительный эллиптический оператор. Получены формулы вида (12).

6. См. также работы: [4, 272, 276, 283, 284, 288] — одномерные задачи; [24, 290, 291, 313] — эллиптические операторы; [69, 252, 336, 337] — гипоэллиптические операторы; [295, 303, 304] — эллиптические системы.

§ 3. ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

1. Большое внимание в последние годы уделялось исследованию асимптотики спектра задач, сингулярных в том или ином смысле. Традиционным объектом изучения является оператор Шредингера (7) с растущим потенциалом, а также его обобщения. Формула (8) была получена Веттом и Мандлем [370] вариационным методом, при довольно жестких ограничениях на потенциал. Впоследствии Ч. Титчмарш [362] и Б. М. Левитан [134, 136] получили формулу (8) тауберовым методом для функций «квазистепенного» поведения. Предположения относительно q в теореме Левитана разделяются на тауберовы условия, условия регулярности поведения при $|x|\to\infty$, требования гладкости и ограничения роста. В последнее время в этой задаче ограничения на q тщательно анализировались и ослаблялись. Этому посвящены работы М. Отелбаева [151], М. Отелбаева и Я. Т. Султанаева [153], Г. В. Розенблюма [168], К. Х. Бойматова [41, 42]. В [151] ограничение на рост снято при $m=1$, в [168] — при $m\geqslant 1$; в [168] существенно ослаблены также условия гладкости. В [153, 6] (при $m=1$) и в [168] (при $m\geqslant 3$) показано, что нарушение условий регулярности роста может нарушить асимптотику (8) и даже понизить (но не повысить!) порядок роста $N(\lambda)$. В [42] показано, что формула (8) сохраняется для функций q медленного роста; в [41] то же получено для матричного потенциала, но лишь при $m=1$. Метод в [151] — тауберов, в [41, 42, 153, 168] — вариационный.

Оператор Шредингера в областях, отличных от $\mathbf{R}^m$, рассматривали Б. М. Левитан и А. Г. Рамм [139], А. Г. Рамм [162], Ш. К. Баимов [20, 21].

Важный эффект обнаружен Р. С. Исмагиловым [88]. Им рассмотрен оператор Шредингера на полуоси с матричным (2×2)-потенциалом q. Выделены случаи, когда асимптотика $N(\lambda)$ описывается двумя слагаемыми вида (8) для некоторых «эффективных» скалярных потенциалов $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$. При этом может оказаться, что эта асимптотика не будет соответствовать общей формуле (20): потенциалы $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$ определяются не только спектром q, но и вращением собственных векторов.

2. Асимптотические формулы для полуограниченных эллиптических операторов высших порядков. Здесь исходными явились работы А. Г. Костюченко [103—107]. Им разработан метод получения равномерных оценок для параболической функции Грина. Это позволило, в частности, рассмотреть самосопряженные уравнения вида (1) в $\mathbf{R}^m$, где

$$A(x, D)=L_0(x, D)+L_1(x, D)+q(x).$$

Здесь L_0 — однородный равномерно эллиптический оператор порядка l с ограниченными липшицевыми коэффициентами; функция $q(x)\to+\infty$ при $|x|\to\infty$ и удовлетворяет ряду требований, обычных для тауберовой техники. Оператор $L_1(x, D)$ порядка ниже l «подчинен» оператору L_0+q. Получена формула

$$(2\pi)^m\Gamma(ml^{-1}+1)N(\lambda)\sim\int\limits_{\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m}[\lambda-q(x)]_+^{m/l}\exp\left[-\hat{L}_0(x, \xi)\right]d\xi dx, \quad (25)$$

($\hat{L}_0$ — символ оператора L), которая соответствует общей формуле (2) (ср. также соотношение (6)). Допускаются также несамосопряженные операторы, но только за счет «подчиненного» оператора L_1, не оказывающего влияния на вид асимптотического выражения (25).

В [107] для скалярных одномерных уравнений рассматриваются ситуации, когда L_0 содержит четные производные всех порядков $\leqslant l$. При этом получаются формулы, где все члены оператора L_0+q оказывают влияние на асимптотику $N(\lambda)$. Эти формулы также можно считать реализацией общей формулы (2). Обобщению и развитию подхода А. Г. Костюченко посвящены работы Ю. Н. Сударева [197, 198], где рассмотрены операторы в частных производных. А. Г. Костюченко [107], Ю. Н. Сударев [199] рассматривали также системы уравнений. С. Д. Шмулевич [225] перенес результаты А. Г. Костюченко и Ю. Н. Сударева на области с бесконечной границей (при подходящих граничных условиях).

М. Г. Гасымов [63] для уравнения

$$\sum_{j=0}^{l}(-1)^j\frac{d^j}{dx^j}\left(q_j(x)\frac{d^jy}{dx^j}\right)=\lambda y \tag{26}$$

при $q_l=1$ подробно исследовал влияние коэффициентов на асимптотику $N(\lambda)$ и выделил случаи, когда асимптотика определяется каким-либо одним из растущих коэффициентов. При этом допускаются случаи, когда q_0 ограничено. К этому же кругу вопросов относятся исследования Г. В. Ждановой [82, 83].

Исследования А. Г. Костюченко и М. Г. Гасымова продолжались Ш. К. Баимовым [22] и Г. И. Аслановым, Ш. К. Баимовым [10].

Все описанные в настоящем пункте работы основаны на тауберовой технике. Чисто вариационным методом близкие вопросы исследовались в серии работ Б. Я. Скачека [179—186]. Им, в частности, рассмотрен случай, когда старший коэффициент q_l в (26) растет, и этим определяется как самый факт дискретности спектра, так и вид асимптотики для $N(\lambda)$. Рассмотрены некоторые задачи вида (11). Часть результатов перенесена на уравнения в частных производных.

С. А. Смагин [190] рассмотрел в $\mathbf{R}^m$ операторы с символом, представляющим собой гипоэллиптический по (x, ξ) полином. При таких условиях спектр уравнения (1) дискретен. Изучено поведение соответствующей ζ-функции и на этой основе получена для $N(\lambda)$ асимптотическая формула вида (2). В [191] этот результат распространен на системы уравнений.

3. Если для оператора Шредингера $-y''+q(x)y$ на полуоси (или на оси) $q(x)\to-\infty$ при $x\to\infty$, то оператор не полуограничен. Если $|q(x)|$ растет достаточно быстро и «регулярно», то спектр дискретен на всей оси. При некоторых ограничениях на поведение q для $N_\pm$ справедливы «квазиклассические» асимптотические формулы

$$\left.\begin{aligned}
N_+(\lambda)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[(\lambda+|q(x)|)^{1/2}-|q(x)|^{1/2}]\,dx+O(1),\\
N_-(\lambda)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{p(\lambda)}|q(x)|dx+\int_{p(\lambda)}^\infty[|q(x)|^{1/2}-(|q(x)|-\lambda)^{1/2}]dx+O(1).
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Здесь p — функция, обратная к (монотонно возрастающей) функции $|q|$. Формулы (27) можно рассматривать как естественную регуляризацию асимптотики вида (8). Они были получены еще Хейвудом [310], который основывался на асимптотических представлениях решений и осуществлял предельный переход от случая конечного промежутка. Близкие результаты получены в работе В. П. Белогрудь и А. Г. Костюченко [25], где использован тауберов метод. Я. Г. Султанаевым [200—203] даны обобщения на случай матричного потенциала и на случай скалярных уравнений высших порядков.

Наряду с оператором Шредингера интересным объектом является «система Дирака» — система второго порядка на оси

$$Ju'+q(x)u=\lambda u, \quad J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

При некоторых предположениях относительно q спектр уравнения (28) дискретен. Из них наиболее существенно требование, чтобы $\nu_1(x)\to+\infty$, $\nu_2(x)\to-\infty$ при $x\to\infty$. Здесь ν_1, ν_2 — собственные числа матрицы q. Для случая $\mathrm{Tr}\ q(x)=0$ А. Г. Костюченко [107] указал (при обычных требованиях тауберовой техники, наложенных на q) асимптотику для $N_+(\lambda)+N_-(\lambda)$. Эта асимптотика соответствует общей формуле (20). И. С. Саргсян [170] показал, что в этих условиях $N_+(\lambda)\sim N_-(\lambda)$. М. Отелбаев [152] рассмотрел систему (28) без предположения $\mathrm{Tr}\ q=0$. Его условия не исключают случаев, когда спектр дискретен лишь на одной из полуосей. Получены асимптотические формулы отдельно для N_+, N_-. Эти формулы также имеют «квазиклассический» характер. В [152] использован прямой метод, близкий к вариационному.

4. Естественным обобщением оператора Шредингера (7) является оператор

$$My=-y''+Q(x)y, \tag{29}$$

рассматриваемый в пространстве вектор-функций $L_2(\mathbf{R}^1;\ H)$ (или $L_2(\mathbf{R}_+;\ H)$), где H — сепарабельное гильбертово пространство. В (29) $Q(x)$ — оператор-функция, от поведения которой зависит характер спектра оператора (29). В частности, если при каждом x оператор $Q(x)$ самосопряжен и имеет дискретный спектр $\{\lambda_n(x)\}$, причем $\lambda_1(x)\to+\infty$ при $|x|\to\infty$, то спектр M также дискретен. Распределение спектра M было впервые изучено тауберовым методом в работе А. Г. Костюченко и Б. М. Левитана [108]. При определенных ограничениях на $Q(x)$ было показано, что

$$N(\lambda)\sim\pi^{-1}\sum_n\int[\lambda-\lambda_n(x)]_+^{1/2}dx. \tag{30}$$

Формулу (30) можно рассматривать как перенесение формулы (20) на обсуждаемый случай.

Подобным же образом Э. Абдукадыров [1—3] рассмотрел оператор — $(P(x)y')'+Q(x)y$; см. также П. А. Мишнаевский [145]. В работе М. Байрамоглы [23] аналогичная формула получена для уравнений высших порядков. К. Х. Бойматов [40] оправдал формулу вида (20) для некоторого класса эллиптических уравнений в частных производных с операторными коэффициентами.

В работе В. И. Горбачук и М. Л. Горбачука [68] рассмотрен оператор (29) на конечном промежутке $(0, l)$, при $Q(x)=A=\mathrm{const}$ (с возможным добавлением ограниченного слагаемого). Если спектр A имеет степенную асимптотику: $N(\lambda; A)\sim a\lambda^{\alpha}$, то при «стандартных» граничных условиях $N(\lambda; M)\sim C(\alpha)a^{\alpha+1/2}$. С другой стороны, указаны такие граничные условия, при которых асимптотика спектра иная (см. также п. 3 § 2).

В работах И. Л. Вулис и М. З. Соломяка [60, 62] в связи с исследованием спектра эллиптических задач с сильным вырождением (см. § 6) изучался спектр операторного уравнения $-[x^{\alpha}y']'+x^{\alpha}Ay=\lambda x^{\beta}y$, $x\in(0, l)$, $l\leqslant\infty$.

5. См. также [101, 102, 267, 268, 292, 296, 311, 331, 369, 373].

§ 4. НЕГЛАДКИЕ ЗАДАЧИ

1. Стандартная асимптотика вида (5), (21) справедлива, вообще говоря, лишь при определенных требованиях регулярности, наложенных на данные краевой задачи. В некоторых частных случаях, однако, такая асимптотика справедлива при условиях, близких к условиям конечности интегралов в правой части этих формул. Поясним это на примере задачи D для уравнения (17). Ее удобно заменить соответствующей вариационной задачей. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ — открытое множество, ограниченное, если $l\geqslant m$. Пусть $b\in L_r(\Omega)$, где $r=1$ при $l>m$, $r>1$ при $l=m$, $r=m/l$ при $l<m$. Тогда форма $\int\limits_{\Omega} b|u|^2dx$ порождает в $\overset{0}{H}{}^{l_1}(\Omega)$, $2l_1=l$, самосопряженный вполне непрерывный оператор, спектр которого по определению отождествляется со спектром задачи D для уравнения (17). При этом сохраняет силу асимптотическая формула (18).

Таким образом, при $l<m$ единственным условием справедливости асимптотики (18) является конечность интеграла в (18). При $l\geqslant m$ условие $b\in L_{1,\mathrm{loc}}$ нельзя устранить, если не считать функцию b обобщенной. На границу области никаких условий не накладывается.

Указанные результаты получены в работах М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [33] и Г. В. Розенблюма [165] (см. также [38]). В их основе лежит специальный метод кусочно-полиномиальных приближений [32, 38], (см. также [44, 165], который позволяет получить оценки вида

$$\tilde{N}_{\pm}(\mu)\leqslant C^{-m/e}\|b\|^{m/l}_{L_r(\Omega)}, \qquad (31)$$

где постоянная C при $l\geqslant m$ зависит только от диаметра Ω, а при $l<m$ вообще не зависит от Ω. Оценки вида (31) являются ре-

шающими при исследовании асимптотики в негладких ситуациях.

2. Работа [33] положила начало исследованиям по асимптотике спектра негладких задач. В работе М. Ш. Бирмана и В. В. Борзова [31] результаты [33] обобщались (при $l \geqslant m$) на неограниченные Ω. По поводу случая $l=2$, $m=1$ (струна) см. также И. С. Кац [92]. В. В. Борзов [46] при $l>m$ исследовал возможные особенности b вблизи $\partial\Omega$.

В [33], при некоторых ограничениях на $\partial\Omega$, рассматривалась также задача N. При $l>m$ допускались случаи, когда b — обобщенная функция типа производной от конечной меры. Было выяснено, что наличие у меры сингулярного слагаемого не нарушает формулы (18), в которой под b следует понимать производную (абсолютно непрерывной части) меры по отношению к мере Лебега в $\mathbf{R}^m$. Для струны это обстоятельство было выяснено еще в работе М. Г. Крейна [109]. Если мера сингулярна, то при $l>m$ (18) переходит в $\tilde{N}_{\pm}(\mu)=o(\mu^{-m/l})$. В. В. Борзов [44] получил уточнения этой оценки в случае, если имеются дополнительные сведения о характере сингулярности. В [45] В. В. Борзов перенес основные результаты из [33] на случай полуэллиптических операторов.

В задаче D для уравнения $(-\Delta)^{l_1}u=\lambda u$, $2l_1=l$, асимптотическая формула

$$N(\lambda) \sim v_m (2\pi)^{-m} \lambda^{m/l} \operatorname{mes} \Omega \tag{32}$$

справедлива при единственном ограничении $\operatorname{mes}\Omega<\infty$. Для $l<m$ это частный случай изложенных выше результатов. Г. В. Розенблюм [164, 166] показал, что и при $l \geqslant m$ условие $\operatorname{mes}\Omega<\infty$ достаточно (и необходимо) для справедливости (32).

Ранее при дополнительных ограничениях на Ω формула (32) для $l=2$ была получена Кларком [274] (см. также [275]).

Для областей Ω с $\operatorname{mes}\Omega=\infty$, для которых спектр обсуждаемой задачи дискретен, в [164, 166] найдены двусторонние оценки $N(\lambda)$ в терминах емкости. В областях, «правильно сужающихся» на бесконечности, Г. В. Розенблюм нашел [166, 167] асимптотику $N(\lambda)$ в задаче D для оператора Лапласа. Об оценках $N(\lambda)$ см. также [273, 307—309] ($l=2$), [235] ($l \geqslant 2$), где получены существенно менее полные результаты.

3. Опишем теперь результаты для случая, когда оператор A имеет переменные негладкие коэффициенты. Ниже, вообще говоря, речь идет о системе уравнений. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbf{R}^m$, $a(x)$ — измеримая «клеточная» матрица-функция в Ω, элементы которой суть $(k \times k)$-матрицы: $a(x)=\{a_{\sigma_1\sigma_2}(x), |\sigma_1|=|\sigma_2|=l_1(=l/2), \overline{a_{\sigma_1\sigma_2}}=a_{\sigma_2\sigma_1}\}$. (через $\bar{g}$ обозначается матрица, эрмитово сопряженная к g). Пусть $a(x)$ положительно определена при почти всех $x \in \Omega$,

$a \in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $a^{-1} \in L_\alpha(\Omega)$, $\alpha \geqslant 1$. Аналогичным образом определяется матрица $b(x) = \{b_{\tau_1\tau_2}(x),\ |\tau_1| = |\tau_2| = r/2 < l_1,\ b_{\tau_1\tau_2} = \overline{b_{\tau_2\tau_1}}\}$, $b \in L_\beta(\Omega)$. Положительность b не предполагается. Пусть

$$\alpha^{-1} + \beta^{-1} < (l - r)\, m^{-1} \overset{\mathrm{def}}{=} \theta. \tag{33}$$

На функциях $u : \Omega \to \mathbf{C}^k$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$, вводятся квадратичные формы

$$A[u] = \sum_{\sigma_1,\,\sigma_2} \int_\Omega a_{\sigma_1\sigma_2}(x)\, D^{\sigma_2} u \overline{D^{\sigma_1} u}\, dx, \tag{34}$$

$$B[u] = \sum_{\tau_1,\,\tau_2} \int_\Omega b_{\tau_1\tau_2}(x)\, D^{\tau_2} u \overline{D^{\tau_1} u}\, dx. \tag{35}$$

Пусть $\overset{\circ}{H}(a)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по метрике формы (34). При условии (33) форма (35) определяет в $\overset{\circ}{H}(a)$ вполне непрерывный оператор $T(a, b)$, спектр которого для достаточно гладких коэффициентов совпадает со спектром задачи D для системы вида (11). Определим символы $\hat{a}_0(x, \xi) = \sum_{\sigma_1,\,\sigma_2} a_{\sigma_1\sigma_2}(x)\, \xi^{\sigma_1+\sigma_2}$ и аналогично $\hat{b}_0(x, \xi)$. Тогда при условии (33) справедлива оценка

$$N_\pm(\mu) \leqslant C(\Omega)\, \mu^{-\theta}\, \|a^{-1}\|^\theta_{L_\alpha} \|b\|^\theta_{L_\beta} \tag{36}$$

и верна асимптотическая формула (21).

Условие (33) разрешает определенное (слабое) вырождение эллиптичности у A (см. § 6) и допускает особенности у B, которые, однако, не отражаются на виде формулы (21). Оценка (36) и асимптотика (21) получены М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяком [34—37] (см. также [38]). Там же рассмотрены формы B более общего вида, нежели (35), а также задачи с естественными краевыми условиями. Относительно других обобщений и уточнений (в частности — относительно перенесения на неограниченные области) см. [38, 165].

Асимптотическая формула вида (21) может сохранять силу для существенно неэллиптических задач. В работе [39] рассмотрен случай $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, $A = \partial^4/\partial x_1^4$, $B = -\partial^2/\partial x_1^2 + \partial/\partial x_2 [b(x)\, \partial/\partial x_2]$. Если $b \in L_{3/2}(\Omega)$, то в задаче D для уравнения (11) (точная постановка задачи — вариационная) отрицательный спектр дискретен и

$$\tilde{N}_-(\mu) \sim (3\pi^2\mu)^{-1} \int_\Omega b_+^{3/2}\, dx.$$

Это соответствует общей формуле (12). Вместе с тем положительный спектр в рассматриваемой задаче недискретен.

4. Описанные в настоящем параграфе результаты получены на основе вариационной техники и опираются на оценки вида (31), (36). Однако и тауберова техника позволяет в некоторых случаях освободиться от излишних требований на границу области. Цисельский [269] показал, что в задаче D для оператора Лапласа асимптотика (32) (при $l=2$) справедлива для любого ограниченного открытого множества. В [269] используются тонкие результаты параболической теории потенциала. Ф. А. Березин [28] показал, что построенная им теория ко- и контравариантных символов оператора применима, в частности, к исследованию спектральной асимптотики. В задаче D для уравнения (1), где A — положительно определенный эллиптический полином с постоянными коэффициентами, в [28] обоснована асимптотика вида (2) в случае, когда Ω — произвольное ограниченное открытое множество.

Относительно распространения стандартных асимптотических формул на нерегулярные области см. также Флекингер и Метивье [289].

§ 5. ЗАДАЧИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

1. В ряде случаев приходится исследовать асимптотику функций $N_{\pm}(\lambda)$ по отношению к какому-либо дополнительному параметру, входящему в задачу. При этом спектральный параметр λ считается фиксированным. Чаще всего роль дополнительного параметра играет малый параметр при старших членах оператора. Типичным примером является уравнение Шредингера в $\mathbf{R}^m$

$$-h\Delta u+p(x)u=\lambda u \qquad (h>0). \tag{37}$$

Пусть $N(\lambda;\ h)$ — число собственных значений уравнения (37), меньших λ. Определенный интерес представляет асимптотика функции N при $h\to 0$ и фиксированном λ. Этот вопрос тесно связан с вопросом об асимптотике по спектральному параметру в некоторой другой задаче. Именно, рассмотрим (при фиксированном λ) задачу о спектре отношения квадратичных форм

$$\int(\lambda-p)\,|u|^2dx\Big/\int|\nabla u|^2dx, \tag{38}$$

и пусть $\widetilde{N}_+(\mu)$ — функция распределения положительного спектра. Тогда

$$N(\lambda;\ h)=\widetilde{N}_+(h). \tag{39}$$

Задача (38) относится к классу задач, обсуждавшихся в §§ 2,4. Поэтому при условии, например, непрерывности функции $p(x)$ при всяком λ справедлива формула

$$\lim_{h\to 0} h^{m/2}N(\lambda;\ h)=(2\pi)^{-m}v_m\int(\lambda-p(x))_+^{m/2}dx \quad (m\geqslant 3), \tag{40}$$

коль скоро интеграл в правой части (40) конечен.

Формула (40) на эвристическом уровне была получена, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [132]. Соотношения вида (39) в абстрактной форме были обнаружены М. Ш. Бирманом [30]. После этого вопрос свелся к получению спектральной асимптотики для задачи (38) при возможно менее стеснительных ограничениях на потенциал. Конкретные результаты об уравнении (37) см. в работах М. Ш. Бирмана и В. В. Борзова [31], М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [38]. В [38] рассмотрена задача вида (37) с включением членов с первыми производными (электромагнитное взаимодействие). Прямым вариационным путем (без использования равенства (39)) уравнение (37) исследовал Б. Я. Скачек [179], но при довольно жестких ограничениях на потенциал. Случай сферической симметрии рассматривали Шадан [266] и Саймон [356].

Широкий класс задач о спектральной асимптотике по малому параметру для уравнений (систем) высших порядков рассмотрен М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяком [36, 37].

2. Специфическая задача об асимптотике по малому параметру возникает в теории оболочек. Соответствующее уравнение представляет собой систему (четвертого порядка) вида

$$hA_0(x, D)u+A_1(x, D)u=\lambda u \qquad (h>0)$$

на гладкой компактной поверхности (с краем или без края). Оператор в левой части — эллиптический по Дуглису—Ниренбергу, но ни один из операторов A_0, A_1 не является эллиптическим. Последнее обстоятельство затрудняет исследование задачи. Асимптотика функции $N(\lambda, h)$ для этой системы (край оболочки заделан, либо свободен) при $h \to 0$ изучалась в серии работ В. Б. Лидского с сотрудниками. В основном использовался прямой вариационный метод. Получена оценка остатка. Подробно исследованы случаи, допускающие разделение переменных. См. работы А. Г. Асланяна и В. Н. Туловского [13], А. Г. Асланяна, З. Н. Кузиной, В. Б. Лидского и В. Н. Туловского [11] и итоговую монографию А. Г. Асланяна и В. Б. Лидского [12], где приведена также полная библиография.

3. В некоторых задачах рассматривается асимптотическое поведение спектра одновременно по двум параметрам. Например, при $h \to 0$ и $\lambda \to \infty$ или при $h \to 0$ и $n \to \infty$, где n — номер собственного значения (при этом не обязательно $\lambda_n \to \infty$). Предполагается, что рост h^{-1} и n как-либо согласован. Для исследования одномерного уравнения Шредингера вида (37) в таких задачах обычно используют какой-либо вариант метода ВКБ. При этом для изучения квантового объекта привлекается информация о динамике классической частицы («квазиклассика»; см., например, [132]).

Если в (37) (при $m=1$) $p(\pm\infty)=\infty$ и p имеет один минимум, то можно написать полное асимптотическое разложение спектра, причем фактически дело сводится к одному параметру (например, $n \to \infty$). При этом первое приближение дается так называемым «условием квантования» Бора (см. [132]). Если минимумов (потенциальных ям) несколько, то каждой яме соответствует в спектре своя «серия» собственных значений, для которой пишется асимптотическое разложение (о «сериях» подробнее см. п. 3 § 9, а также п. 3 § 10, где обсуждаются многомерные задачи). Если p обладает симметрией, то возникает своеобразный резонанс между ямами, и вместо кратных серий появляются близкие серии. В таких случаях изучается асимптотика соответствующего (экспоненциального) расщепления в спектре. Если $p(\pm\infty) \neq \infty$, то не весь спектр задачи дискретен. Именно тогда возникают серии с $\lambda_n \not\to \infty$ или даже серии «квазиуровней», представляющих собой близкие к спектральной оси особенности аналитического продолжения ядра резольвенты. В некоторых случаях рассматривается влияние на асимптотику спектра особенностей (полюсов) потенциала.

Описанная проблематика имеет давнюю традицию. Из работ последнего времени отметим исследования В. П. Маслова [142, 143], М. В. Федорюка [213], Сибуя [355], С. Ю. Славянова [187, 188], Вейнберга [368], Хохштадта [312]. См. также [76, 264, 335].

§ 6. ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Эллиптическое дифференциальное выражение $A(x, D)$ порядка l в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ называется вырождающимся, если

$$\inf_{|\xi|=1,\ x \in \Omega} a_0(x, \xi) = 0.$$

Обычно рассматривают операторы, вырождающиеся на границе области. Типичный пример вырождающегося уравнения порядка $l = 2l_1$ со спектральным параметром:

$$-\mu \nabla_{l_1}^* (\rho^\alpha \nabla_{l_1} u) = \rho^\beta b(x) u. \tag{41}$$

В уравнении (41) $\rho = \rho(x)$ — «регуляризованное расстояние» от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$, т. е. достаточно гладкая положительная функция, в некоторой окрестности границы равная $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$; b — ограниченная вещественная функция. Уравнение (41) соответствует вариационной задаче на спектр для отношения квадратичных форм

$$\int_\Omega \rho^\beta b |u|^2 dx \Big/ \int_\Omega \rho^\alpha |\nabla_{l_1} u|^2 \, dx.$$

К настоящему времени бóльшая часть результатов об асимптотике спектра вырождающихся задач получена вариационным методом. Использование в этом круге вопросов тауберовой техники затруднено: для важного класса «задач с сильным вырождением» поведение спектра определяется сколь угодно узкой окрестностью границы $\partial\Omega$, и для применения тауберова метода требуется детальное исследование соответствующей функции Грина вблизи границы.

При $l=2$ рассмотрим более общее, чем (41), уравнение

$$-\mu \sum_{1\leq i,\, j\leq m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^{\alpha} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=\rho^{\beta} b(x) u, \tag{42}$$

где $a(x)=\{a_{ij}(x)\}$ — не вырождающаяся в $\bar{\Omega}$ эрмитова матрица. Соответствующее отношение квадратичных форм имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{\beta} b\, |u|^2\, dx \Big/ \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha} \sum_{i,\, j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial u}}{\partial x_i}\, dx. \tag{43}$$

В (41), (42) примем $-\infty<\alpha$, $\beta<\infty$. При $\alpha\leqslant 0$ уравнение не является в собственном смысле вырождающимся, однако при больших по модулю $\beta<0$ возникают те же эффекты, что и при наличии вырождения.

При некоторых условиях для задач с вырождением сохраняется формула (13), типичная для невырожденных задач. Для уравнения (41) интеграл в (13) конечен, коль скоро

$$\alpha-\beta<lm^{-1}. \tag{44}$$

Асимптотика спектра классических граничных задач для уравнения (41) при условии (44) всегда дается формулой (13), однако в полной общности это не покрыто публикациями. При некоторых дополнительных ограничениях на α, β нужный факт следует из общих теорем работы [36] (см. также [38]); в [36] допускаются существенно более общие вырождения, чем степенные. Справедливость формулы (13) для спектра задачи D для уравнения (42) при $m\geqslant 3$ и при любых α, β, таких, что $\alpha-\beta<2m^{-1}$, установлена Г. М. Тащияном [204].

Условие (44) естественно назвать условием слабого вырождения. Если

$$\alpha-\beta>lm^{-1},$$

то будем говорить о сильном вырождении. Особого рассмотрения требует пограничный случай

$$\alpha-\beta=lm^{-1}.$$

Наиболее интересны задачи с сильным вырождением, поскольку для них возникает ряд новых эффектов. Собственные числа имеют степенной порядок, отличный от классического, а асимптотический коэффициент зависит от вида граничных условий. Известно, что характер допустимых граничных условий определяется теоремами вложения для весовых пространств Соболева (см. обзор [29]). Для дискретности спектра необходимо выполнение неравенства

$$r \overset{\text{def}}{=} l-\alpha+\beta>0. \tag{45}$$

Сформулируем полный результат для уравнения (42) в случае сильного вырождения. Рассмотрим для этого уравнения задачи D и N. Обе задачи имеют смысл при $-1<\alpha<1$, $\beta>-1$. Если $\alpha\geqslant 1$, то задачи D, N сливаются (финитные функции плотны в соответствующем весовом классе Соболева). При $\alpha\leqslant -1$, а также при $\beta\leqslant -1$, имеет смысл говорить лишь о задаче D.

Формула спектральной асимптотики для уравнения (42) содержит собственные значения вспомогательной задачи Штурма-Лиувилля на полуоси

$$-(t^\alpha y')'+t^\alpha y=\mu^{-1}t^\beta y, \quad t>0, \tag{46}$$

при условии $y(0)=0$ в случае задачи D и при условии $\lim\limits_{t\to 0}(t^\alpha y'(t))=0$ в случае задачи N. Спектр уравнения (46) дискретен при $2-\alpha+\beta>0$ (т. е. при условии (45) для $l=2$). Обозначим соответствующие собственные значения через $\mu_k(\alpha, \beta, D)$, $\mu_k(\alpha, \beta, N)$. Положим $r=2-\alpha+\beta$, $\theta=(m-1)r^{-1}$,

$$w(\alpha, \beta, m;\ \cdot)=\sum_k [\mu_k(\alpha, \beta, \cdot)]^\theta,$$

где «·» заменяет любой из символов D, N. Предположим, что коэффициенты в (42) вещественны и непрерывны и $\partial\Omega\in C^2$. Тогда для функций распределения собственных чисел соответствующей краевой задачи для уравнения (42) справедлива формула

$$\lim_{\mu\to 0}\mu^\theta \tilde{N}_\pm(\mu)=\frac{v_{m-1}}{(2\pi)^{m-1}}\, w(\alpha, \beta, m;\ \cdot)\int\limits_{\partial\Omega}\frac{(a\nu, \nu)^{m/2-\theta}b_\pm^\theta}{\sqrt{\det a}}\,dS, \tag{47}$$

где $\nu=\nu(x)$ — единичный вектор нормали к $\partial\Omega$ в точке x. Отметим, что для комплексной эрмитовой матрицы a вид формулы должен измениться.

В пограничном случае ($\alpha-\beta=2m^{-1}$) справедлива формула

$$\lim_{\mu\to 0}\mu^{m/2}\,|\log\mu\,|^{-1}\tilde{N}_\pm(\mu)=\frac{m v_m}{(2m-2)(2\pi)^m}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{b_\pm^{m/2}}{\sqrt{\det a}}\,dS.$$

В отличие от случая сильного вырождения, асимптотический коэффициент здесь один и тот же для задач D и N.

2. Асимптотика спектра вырождающихся уравнений изучалась И. А. Соломещем, рассмотревшим в [192] уравнение (42), $0<\alpha<1$, $\beta=0$ и в [193] — случай произвольного l, $0<\alpha<l$, $\beta=$

$=0$. При указанных значениях параметров им была получена формула спектральной асимптотики для задач со слабым вырождением и в пограничном случае. Для сильного вырождения им найдены двусторонние оценки, дающие правильный порядок функции $\tilde{N}(\mu)$. Позднее аналогичные результаты получены И. А. Соломещем [194] для уравнений в цилиндре, с логарифмически-степенным вырождением.

В работах А. Ф. Горюнова [70, 71] результаты и техника И. А. Соломеща распространены на случай задач с вырождением на подмногообразиях размерности, меньшей чем $(m-1)$.

Результаты работ И. А. Соломеща не раз повторялись, причем подчас — в более слабой форме. Так, в [242, 243, 297, 298] рассмотрены уравнения вида (42) при $\alpha=1$, $\beta=0$, $b\equiv1$ (это соответствует пограничному случаю при $m=2$ и сильному вырождению при $m>2$). Однако авторам не удалось получить даже точных по порядку двусторонних оценок $\tilde{N}(\mu)$. В. Н. Туловский [207] нашел в этой задаче правильный порядок $\tilde{N}(\mu)$ при $m\geqslant4$. Наконец, в [253, 254] для этого случая оценки с правильным порядком $\tilde{N}(\mu)$ были вновь получены для всех размерностей m.

В работах Эль-Колли [285, 286] рассмотрена задача о поперечниках единичного шара пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}^l_p$ со степенным весом как компакта в L_p с другим степенным весом. При $p=2$ из результатов этих работ вытекают правильные по порядку двусторонние оценки $\tilde{N}(\mu)$ в задаче D для уравнения (41) при любых l, α, β, отвечающих слабому или сильному вырождению. В пограничном случае результаты менее полны.

Специальный класс вырождающихся уравнений, связанных с дифференциальными операторами Фурье—Бесселя, рассмотрел И. А. Киприянов [94]. В [94] l произвольно; $\beta=\alpha$, что относится к слабому вырождению. В $A(x, D)$ включены члены с младшими производными, не вполне непрерывные относительно «старших» членов. Тауберовым методом найдены асимптотические формулы для $e(x, y; \lambda)$ и $N(\lambda)$. В основных формулах (3.29), (3.30) работы [94] требуется исправление $(\lambda\mapsto\lambda^{1/2m}$ в аргументе функции j_ν; сообщено автором). Исследования И. А. Киприянова были продолжены В. В. Катраховым [90, 91], получившим внутренние оценки остатка в асимптотических формулах для $e(x, x; \lambda)$.

3. Основные результаты по спектральной асимптотике для уравнений (42) с сильным вырождением получены независимо Нординым [338] и И. Л. Вулис и М. З. Соломяком [60, 62]. Формула (47) получена в [60] для $0\leqslant\alpha<2$ и в [62] — для любых $\alpha\geqslant0$. В [338] рассматривался случай $\alpha=1$, $\beta=0$, $b<0$, причем асимптотический коэффициент найден в несколько иной

форме. До указанных работ был известен лишь один частный пример задачи с сильным вырождением, где с помощью разделения переменных в шаре найдена асимптотика $\tilde{N}(\mu)$ (Шимакура [352, 353]). Уже после работ [338, 60] Шимакура [354] исследовал ζ-функцию вырожденного оператора (случай Нордина). В работе [251] асимптотика подсчитана для некоторых специальных областей и уравнений.

Сильно вырождающиеся уравнения вида (41) при любых l, α, β рассмотрены И. Л. Вулис [59]; на них удалось распространить технику и основные результаты работ [60, 62].

Вырождающиеся уравнения высших порядков изучал также Фам Тхе Лай [340—342]. Рассмотрения в [340] соответствуют «пограничному» случаю. Работа [342] интересна тем, что в ней впервые удалось успешно применить тауберову технику к задачам с сильным вырождением (рассмотрены уравнения, близкие к (41), при $2\alpha=l$, $\beta=0$, $b\equiv 1$). Результаты [342] существенно опираются на вспомогательные оценки, полученные в [341].

Тамура [358] рассмотрел задачи вида (11) в $\mathbf{R}^m$, при $A=A(D)$ и $B=b(x)$, $b>0$. В зависимости от характера убывания $b(x)$ при $|x|\to\infty$ выделены случаи слабого, пограничного и сильного вырождения. Во всех случаях вычислена асимптотика $\tilde{N}(\mu)$. Ранее Ларссон [321] исследовал задачу D для уравнения $-\Delta u=\mu b u$ в ограниченных областях при наличии у функции b степенной особенности в точке. Порядок особенности соответствует слабому вырождению.

4. Ряд работ посвящен изучению спектра эллиптических уравнений с неравномерным вырождением. Пусть, например, квадратичная форма (по ξ) $\hat{a}_0(x, \xi)$ представляет собой главный символ эллиптического оператора второго порядка в области $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ и пусть $\lambda_1(x)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_m(x)$ — ее собственные числа. Неравномерное вырождение означает, что $\inf\limits_x \lambda_1(x)\lambda_m^{-1}(x)=0$.

В работах Гиймо-Тессье [305, 306] рассмотрены уравнения, которые в окрестности $\partial\Omega$ можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\rho^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)+\rho^{\beta}Bu=-\lambda u. \tag{48}$$

Здесь ν — нормаль к $\partial\Omega$, B — невырождающийся эллиптический оператор по касательным переменным. Выделен случай «сильного вырождения» и показано, что асимптотика спектра при этом дается формулами, аналогичными (47).

Ранее в [244] исследованы уравнения специального вида; вырождение в них соответствует случаю $\alpha=1$, $\beta=0$ в уравнении (48). Показано, что для спектра задачи D сохраняется формула вида (16).

В работах Г. М. Тащияна [204, 205] выясняются условия, при которых спектр задачи D для уравнения (15) с неравномерным вырождением эллиптичности подчиняется асимптотической формуле (16). В [205] построены примеры, показывающие, что одной лишь конечности интеграла в (16) для этого недостаточно. Это контрастирует со случаем уравнений вида (17) при $l<m$ (см. п. I § 4). В [204] рассмотрены некоторые задачи с неравномерным степенным вырождением. Пусть, например, $\Omega=\Omega'\times\times(0, a)$ — цилиндр в $\mathbf{R}^m$, $m\geqslant 3$. Ставится задача о спектре отношения квадратичных форм

$$\int_\Omega b|u|^2dx \Big/ \int_\Omega \sum_k x_m^{\alpha_k} \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^2 dx, \quad u|_{\partial\Omega}=0.$$

Установлено (при $\alpha_m\neq 1$), что условие конечности интеграла в (16) необходимо и достаточно для того, чтобы асимптотика (16) была справедлива. Аналогичные результаты получены в случае вырождения на подмногообразиях меньшей размерности.

§ 7. ЗАДАЧИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Типичный пример таких задач на спектр — «обобщенная задача Стеклова». Спектральный параметр входит в граничное условие, а однородное эллиптическое уравнение играет роль «связи»:

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=0, \quad \mu\frac{\partial u}{\partial\tilde{\nu}}-b(x)u|_{\partial\Omega}=0, \tag{49}$$

где $\partial/\partial\tilde{\nu}$ — соответствующее конормальное (внешнее) дифференцирование. Обычная задача Стеклова получается, если в (49) $a_{ij}=\delta_{ij}$. Задача (49) может быть с удобством заменена вариационной задачей о спектре отношения квадратичных форм

$$\int_{\partial\Omega} b|u|^2dS \Big/ \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\overline{\partial u}}{\partial x_j}dx; \quad u\in H^1(\Omega). \tag{50}$$

При этом эллиптическое уравнение (связь) играет роль естественного условия по отношению к задаче (50) и может не учитываться заранее.

Если коэффициенты $a_{ij}(x)$ вещественны, то асимптотика спектра задачи (50) определяется формулой (ν — вектор нормали)

$$\lim_{\mu\to 0}\mu^{m-1}\tilde{N}_\pm(\mu)=(2\pi)^{-(m-1)}v_{m-1}\int_{\partial\Omega}\frac{(a\nu,\nu)^{-(m/2+1)}b_\pm^{m-1}}{\sqrt{\det a}}dS.$$

Этот результат (в эквивалентных терминах) был установлен Сандгреном [344] вариационным методом. В работе Уднова [339] на рассматриваемые задачи была распространена тауберова техника.

Весьма общие результаты по задачам с параметром в граничных условиях получил А. Н. Кожевников [99, 100], рассмотревший однородное эллиптическое уравнение порядка l. Часть граничных условий содержит μ. Обобщая метод работы [339], автор получает эллиптический (по Дуглису—Ниренбергу) ПДО на $\partial\Omega$, спектр которого совпадает со спектром исходной задачи. Это дает процедуру для вычисления асимптотики.

Шамма [349—351] приводит задачу Стеклова (задачу (49) при $a_{ij}=\delta_{ij}$) при $m=2$ к эквивалентному интегральному уравнению на $\partial\Omega$. Используя специфику одномерного случая ($\dim \partial\Omega=1$), он получает для $\tilde{N}(\mu)$ второй член асимптотики. В той же задаче Куттлер и Сигиллито [320] дали оценки собственных чисел через геометрические характеристики области.

Задача (49) близка к вырождающейся спектральной задаче (42) при $\alpha=0$, $\beta=-1$. В самом деле, отношение (50) формально получится из (43), если в числителе заменить ρ^{-1} на функцию $\delta(\rho)$, также являющуюся однородной функцией (обобщенной) порядка -1. Эта аналогия была использована в работе И. Л. Вулис и М. З. Соломяка [61], где получена формула спектральной асимптотики задачи вида (50) для вырождающихся уравнений. Распространение на уравнения высших порядков дано И. Л. Вулис [59].

А. Ф. Горюнов [72] рассмотрел аналогичные задачи со степенным вырождением на подмногообразии Γ, $\dim \Gamma \leqslant m-1$. В зависимости от соотношения между степенью вырождения и $\dim \Gamma$ выделены случаи слабого, пограничного и сильного вырождения (ср. § 6). В первых двух случаях найдена асимптотика, в последнем — двусторонние оценки для $\tilde{N}(\mu)$.

Некоторые одномерные задачи со спектральным параметром в граничных условиях рассматривались в [110—113, 163].

§ 8. ОЦЕНКИ ОСТАТКА В ФОРМУЛАХ СПЕКТРАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ

1. Обсуждаемый в этом параграфе вопрос состоит в оценке разности

$$R(\lambda)=N(\lambda)-(2\pi)^{-m}\lambda^{m/l}\int_{\Omega}\omega(x)\,dx. \tag{51}$$

Здесь $N(\lambda)$ — функция распределения собственных чисел «регулярного» полуограниченного эллиптического оператора порядка l в области $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ (или на m-мерном многообразии). Функция $\omega(x)$ определяется формулами (3), (6).

Как правило, оценки для $R(\lambda)$ получают из аналогичных оценок остатка в асимптотических формулах для спектральной функции:

$$R(\lambda)=\int_{\Omega}r(x,\lambda)\,dx,$$

где

$$r(x, \lambda) = e(x, x; \lambda) - (2\pi)^{-m}\omega(x)\lambda^{m/l}.$$

В общем случае оценки для $r(x, \lambda)$, $R(\lambda)$ не могут быть лучше, нежели

$$|r(x, \lambda)| \leqslant C(x)\lambda^{(m-1)/l}; \tag{52}$$

$$|R(\lambda)| \leqslant C\lambda^{(m-1)/l}. \tag{53}$$

В самом деле, оценки (52), (53) неулучшаемы уже для оператора Бельтрами—Лапласа на сфере (см. [236, 218]).

Есть, однако, случаи, когда оценки (52), (53) заведомо не являются точными. В задаче D для оператора Лапласа на квадрате улучшенный порядок в (52) установлен Ф. Г. Булаевской-Масловой [47]. Дюйстермаат и Гийемен [281] для эллиптических уравнений на компактном многообразии без края указали условия, при которых в (53) справа можно поставить $o\left(\lambda^{\frac{m-1}{l}}\right)$. Эти условия выражены в терминах соответствующей гамильтоновой системы и исключают «вырожденные» случаи типа оператора Бельтрами—Лапласа на сфере.

Оценка (52) получена к настоящему времени для широкого класса эллиптических задач. Исходными здесь явились работы Б. М. Левитана [133, 135] и Авакумовича [236], где оценка (52) была установлена для уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Особенно перспективным оказался подход Б. М. Левитана, основанный на изучении задачи Коши для соответствующего гиперболического уравнения. Общий метод получения оценок вида (52) разработан Л. Хермандером [218], использовавшим технику ПДО и «интегральных операторов Фурье». Пусть P — самосопряженный полуограниченный ПДО первого порядка на компактном m-мерном C^∞-многообразии Ω и пусть $E(t) = \exp(-itP)$ — разрешающий оператор задачи Коши для уравнения $du/dt + iPu = 0$. В [218] для $E(t)$ найдено приближенное представление $Q(t)$ вида

$$[Q(t)f](x) = \int\int q(x, t, y, \xi)\exp(i\varphi(x, t, y, \xi))f(y)\,dy\,d\xi. \tag{54}$$

Это представление локально (т. е. оно справедливо для функций f, равных нулю вне фиксированной координатной окрестности в Ω). Разность $Q \setminus E$ является интегральным оператором с ядром из C^∞. Детальное исследование интеграла (54) и последующее применение утверждения тауберова типа приводит к оценке вида (52) (при $l=1$), равномерной на любом компакте $K \subset \Omega$. Оценка (52) для эллиптического дифференциального оператора $A(x, D)$ порядка l с C^∞-коэффициентами получается с помощью перехода к ПДО $P = A^{1/l}$. По поводу аналогичных результатов для эллиптических (неполуограниченных) систем первого порядка см. Б. М. Левитан [137]. В [137] существенно используется предположение о постоянстве кратностей собственных значений символа.

2. Разумеется, оценка (53) следует из (52) для многообразий без края. Иначе обстоит дело для краевых задач. Помимо двумерных задач с разделением переменных, где найден второй член асимптотики (см. § 9), оценка (53) получена*) лишь для уравнения $\Delta u+k^2u=0$ в многоугольнике или многограннике при условии Дирихле или Неймана (Бэйли и Браунелл [237] ($m=2$); Б. В. Федосов [215, 216] ($m\geqslant 2$). В сколько-нибудь общей ситуации вместо (53) удается получить менее точную оценку

$$|R(\lambda)|\leqslant C\lambda^{(m-1)/l}\log\lambda. \tag{55}$$

Для оператора Лапласа (задачи D и N) оценка (55) была получена еще Курантом [116] вариационным методом. Результаты для общего случая могут быть получены на основе техники Хермандера. В работе Брюнинга [260] результаты [218] переносятся на краевые задачи (случай одного уравнения). Предполагается, что Ω — ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса и $A(x, D)$ — полуограниченный эллиптический оператор с C^∞-коэффициентами. Дополнительные ограничения на Ω вносятся условием $D(A^s)\subset H^{sl}(\Omega)$, где s целое, $sl>m$. При этих предположениях в [260] установлена оценка (52) при $C(x)=C_1/\rho(x)$, $\rho(x)=\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Отсюда и из (24) получается (55).

Работы В. Громеса [301] и Брюбаха [259] посвящены системам с постоянными коэффициентами, при условии постоянства кратностей характеристик. В них получены оценки вида (52), (55), причем в [301] рассмотрены сильно эллиптические системы второго порядка в областях $\Omega\subset\mathbf{R}^3$, в [259] — системы порядка l в областях $\Omega\subset\mathbf{R}^m$, при условиях, близких к условию сильной эллиптичности. В работе В. Громеса [302] результаты [301] перенесены на некоторый класс систем на трехмерных многообразиях.

Другой подход к оценкам $r(x, \lambda)$ и $R(\lambda)$ ранее предложен Агмоном [232]. Он основан на связи между спектральной функцией и интегралом от ядра резольвенты по специальному контуру в плоскости спектрального параметра λ. Хорошие оценки для $r(x, \lambda)$ получаются, если контур достаточно близок к полуоси $\lambda>0$. Для получения нужных оценок в [232] использовано асимптотическое разложение резольвенты, найденное ранее Агмоном и Капнаи [233]. Систематически применяется метод оценок, развитый в [230, 231].

Основной результат о спектре, полученный в [232], заклю-

---

*) Примечание при корректуре. Класс случаев, для которых оправдана оценка (53), существенно расширен в работе В. М. Бабича и Б. М. Левитана (РЖМат, 1977, 2Б862).

чается в оценке

$$|R(\lambda)| \leqslant C_\sigma \lambda^{(m-\sigma)/l} (\forall \sigma < \theta), \tag{56}$$

где $\theta = 1$, если старшие коэффициенты оператора постоянны, и $\theta = 1/2$ в противном случае. Оценка (56) установлена в предположении, что коэффициенты оператора принадлежат C^∞ и граница достаточно регулярна.

Другим методом оценку (56) для многообразий без края получил Хёрмандер в работе [217], предшествовавшей статье [218]. Нагасе [334] повторил результат [232] для краевых задач, опираясь на технику работы [217].

Оценка (56), очевидно, хуже оценки (55). Однако методика работ [232], [217] переносится на полуограниченные системы без предположения о постоянстве кратностей собственных значений символа (см. Каннан [316]). Значение работы [232] также в том, что развитый в ней метод допускает распространение на операторы с «не очень гладкими» коэффициентами. Такому распространению посвящены работы Билса [247—249], Маруо и Танабе [327, 328], Маруо [325, 326], Танабе [360, 361], Ватанабе [367].

В [247—249] рассмотрены операторы со старшими коэффициентами из $\mathrm{Lip}\, h$, $0 < h \leqslant 1$. Помимо этого наложены условия, содержащие значительные требования гладкости в неявной форме. В итоге Билс получает (56) при $\sigma = h(h+3)^{-1}$. Этот результат был несколько улучшен в [360, 361].

В [327, 328] осуществлен переход к операторам, заданным с помощью билинейной формы (фактически — к вариационной постановке задачи). Это привело к действительному снижению условий гладкости коэффициентов в вопросе об оценках $r(x, \lambda)$ и $R(\lambda)$.

Пусть a — квадратичная форма вида

$$a[u] = \int_\Omega \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leqslant l_1} a_{\alpha\beta} D^\alpha u \overline{D^\beta v}\, dx,$$

такая, что $a[u] \geqslant \delta \| u \|^2_{H^{l_1}(\Omega)}$, $\delta > 0$, для u из области определения V формы a. Относительно V предполагается лишь, что

$$\overset{\circ}{H}{}^{l_1}(\Omega) \subset V \subset H^{l_1}(\Omega) (l = 2l_1 > m).$$

Это условие значительно слабее, чем фигурировавшее в [232, 247—249] включение $D(A) \subset H^l(\Omega)$. Налагая какие-либо условия гладкости на коэффициенты формы при $|\alpha| = |\beta| = l_1$ (а иногда и на следующие по старшинству коэффициенты), авторы получают оценку вида (56) при соответствующем значении σ.

В [325] в форму a включены младшие несамосопряженные члены. В [326] техника и некоторые результаты работы [327] перенесены на случай уравнений со слабым вырождением, в [367] — на случай сильно эллиптических систем с несамосопряженной главной частью.

Для полуэллиптических операторов (с переменными коэффициентами) оценки вида (56) получены в работах Каннан [316], Цуцуми и Вонга [365].

В случае постоянных коэффициентов оценки, аналогичные (55), получены для более широкого класса неэллиптических уравнений. В. Н. Туловский [208] рассмотрел вариационным методом задачу D в ограниченной области $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ для уравнения (1). Полином $A(\xi)>0$ таков, что $A(\xi)\to\infty$ при $|\xi|\to\infty$, а объем $V(\lambda)$ и площадь поверхности $S(\lambda)$ тела $A(\xi)\leqslant\lambda$ удовлетворяют условию $S(\lambda)=o(V(\lambda))$. Тогда

$$N(\lambda)\sim(2\pi)^{-m}\operatorname{mes}\Omega\cdot V(\lambda).$$

Если же

$$S(\lambda)\log\lambda=o(V(\lambda)),$$

то

$$N(\lambda)=(2\pi)^{-m}\operatorname{mes}\Omega\cdot V(\lambda)+O(S(\lambda)\log\lambda).$$

В [210] близкие результаты получены для уравнений $\mu A(D)u=$ $=B(D)u$.

Оценка остатка в асимптотических формулах для $N(\lambda)$ обсуждается также в [224, 43].

§ 9. УТОЧНЕННАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Еще в 1912 г. Г. Вейль [372] высказал гипотезу о регулярном поведении остатка $R(\lambda)$ в (51). Именно он предположил, что для оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ (у Вейля $m=2$) справедлива асимптотическая формула

$$N(\lambda)=\frac{v_m}{(2\pi)^m}\operatorname{mes}_m\Omega\lambda^{m/2}\mp\frac{v_{m-1}}{4(2\pi)^{m-1}}\operatorname{mes}_{m-1}(\partial\Omega)\lambda^{(m-1)/2}+ +o(\lambda^{(m-1)/2}). \tag{57}$$

Здесь знаки $\mp$ соответствуют задачам Дирихле и Неймана. Имеются примеры двумерных областей, для которых формула (57) оправдана. Браунелл [257] установил (57) для квадрата. Н. В. Кузнецов и Б. В. Федосов [115] и Н. В. Кузнецов [114] оправдали (57) для всех областей ($m=2$), где задача допускает разделение переменных. Недавно В. А. Михайлец (РЖМат, 1976, 11Б828) показал, что если формула (57) верна для области $\Omega'\subset\mathbf{R}^m$, $m>1$, то она справедлива также для цилиндра $\Omega=\Omega'\times(a, b)\subset\mathbf{R}^{m+1}$. Равенство (57) известно также для треугольников с углами $(\pi/2, \pi/3, \pi/6)$, $(\pi/2, \pi/4, \pi/4)$ и равностороннего (Макаи [323, 324]). Хотя в этих случаях переменные не разделяются, собственные числа и собственные функции выписываются явно. В работах Кларка [270] и Бейлтса и Хилфа [241] сравниваются результаты, полученные по формуле (57) (круг, квадрат), с численными расчетами.

Формулы, аналогичные (57), можно предположить и для более общих задач, а также ввести в эти выражения дальнейшие члены асимптотики. Однако подобные формулы не могут быть справедливы в общей ситуации в буквальном смысле. Это показывает пример Авакумовича—Д. Громеса (см. [236, 300]), где рассмотрен оператор Лапласа ($m=2$) в двуугольнике с углом α на сфере при условии Дирихле. Если α/π рационально, то остаток $R(\lambda)$ в (51) осциллирует, причем размахи колебаний имеют порядок $O(\sqrt{\lambda})$, т. е. порядок второго члена в (57).

2. Выделение следующих членов в асимптотике для $N(\lambda)$ становится возможным, если саму функцию $N(\lambda)$ предварительно сгладить (усреднить). Чтобы получить такие усреднения, обычно рассматривают функции, используемые в различных вариантах тауберова метода (регуляризованный след резольвенты; θ-функция $\theta(t)=\mathrm{Tr}\exp(-At)$; ζ-функция $\zeta(z)=\mathrm{Tr}(A^{-z})$; средние по Риссу). Для этих функций удается получать дополнительную асимптотическую информацию, что и истолковывается как «усредненная» асимптотика для $N(\lambda)$. Такие приемы ничего не дают, однако, для выделения дальнейших асимптотических членов для несглаженной $N(\lambda)$.

В последнее время интенсивно изучается θ-функция, что соответствует суммированию разложения для $N(\lambda)$ методом Абеля. Связь с параболическими задачами ($\theta(t)$ — след параболической функции Грина) позволяет в регулярном случае получать полное асимптотическое разложение (разложение Минакшисундарама) $\theta(t)$ при $t\to+0$. Фудзивара [294] и Грейнер [299] рассмотрели этот вопрос в весьма большой общности: p-эллиптические положительно определенные системы порядка l на m-мерном многообразии без края или с краем. В последнем случае ставятся самосопряженные граничные условия Шапиро—Лопатинского. Получено разложение вида

$$\theta(t)\sim\sum_{k\geqslant 0} c_k t^{-(m-k)/l},\quad t\to+0, \tag{58}$$

причем для многообразий без края $c_k=0$ при нечетных k.

Много внимания уделяется явному вычислению коэффициентов разложения (58) в геометрических терминах для оператора Бельтрами—Лапласа на многообразиях (при наличии края — для задач D и N). Это соответствует общей программе изучения связей между спектром оператора Лапласа и геометрией многообразия. Интерес к этой тематике был в большой степени стимулирован статьями Каца [314] и Маккина и Зингера [330]. Новые результаты в этом направлении получил С. А. Молчанов, в содержательной статье которого [146] есть также обзор литературы и библиография. Из последних работ на эту тему укажем статьи [238—240, 287, 322, 329, 357, 366], а также курс лекций [250]. Особенного внимания заслуживают результаты Колен де Вердье [278—280]. Он рассматривал разложения вида (58) при комплексных t. В частности, в [279] показано, что для многообразий отрицательной кривизны возникают новые члены (экспоненциально малые для $\mathrm{Im}\, t=0$), содержащие информацию о спектре геодезических.

Разложения вида (58) в некоторых случаях удается написать и для сингулярных задач. По поводу одномерного оператора Шредингера с растущим потенциалом (разложение Вигнера) см. книгу Каца [93].

Оператор Шредингера с периодическим потенциалом рассмотрен в [315].

Отметим, что полные асимптотические разложения (в комплексной области) для регуляризованной θ-функции (или регуляризованного следа $\mathrm{Tr}(A-z)^{-l}$) изучались и для задач с непрерывным спектром. Для оператора Шредингера в $\mathbf{R}^m$ и во внешности области см. В. С. Буслаев [53—55] и А. А. Арсеньев [9].

С разложением функции θ тесно связано исследование полюсов функции ζ, мероморфно продолженной на всю комплексную плоскость. По этому поводу см. Сили [345—348], а также В. Е. Шаталов [219, 220]. Другие способы сглаживания $N(\lambda)$ (например, усреднения по Риссу) дают возможность выделять конечное число членов разложения. Здесь представляет интерес определение точного числа членов разложения (в зависимости от порядка усреднения) и оценка остатка. По этому поводу см. работы Г. А. Суворченковой [195, 196] (оператор $-\Delta+q$ на многообразии без края). Для оператора Лапласа в многограннике (задачи D и N) такое исследование ранее провел Б. В. Федосов [216].

С. И. Гринберг [73—75] исследовал асимптотику разности $\lambda_n'-\lambda_n''$ собственных чисел оператора $-\Delta+q$ в ограниченной области $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ при изменении краевых условий (и, возможно, q). Например,

$$\sum_{\lambda_n(D)<\lambda} [\lambda_n(D)-\lambda_n(N)] \sim (16\pi)^{-1}\lambda^2 \operatorname{mes}(\partial\Omega).$$

Эта формула соответствует выделению младших (зависящих от граничных условий) членов в асимптотике для «усредненной» $N(\lambda)$.

3. Анализ задач с разделением переменных показывает, что в определенном смысле естественно нумеровать собственные значения не одним значком, а несколькими целочисленными параметрами. Например, для оператора Лапласа в плоской области таких параметров два. При этом собственные функции и спектр разбиваются на подмножества («серии») с существенно различным асимптотическим поведением. Естественно попытаться перенести (хотя бы частично) такой подход на области более общего вида. В последние годы в указанном направлении велась интенсивная работа.

Выделение «серий» обычно связывается с инвариантными множествами фазового пространства соответствующей классической динамической системы. Для выпуклой области на плоскости в задачах D и N для уравнения Лапласа такие серии выделяются в связи с устойчивыми периодическими траекториями или в связи с каустиками (или с семейством каустик) соответствующей биллиардной задачи. В многомерном случае выделяются серии, сосредоточенные вблизи лежащих на $\partial\Omega$ «устойчивых» замкнутых геодезических и т. п. Первоначальные исследования были выполнены «на физическом уровне строгости», причем строился лишь главный член асимптотики. Было проведено разделение на серии в задачах, допускающих точное решение (круг, шар, эллипс): Келлер и Рубинов [318, 319], Л. А. Вайнштейн [58], В. П. Быков [57]. В плоских областях более общего вида собственные функции типа «шепчущей галереи» и «прыгающего мячика» исследовались В. С. Булдыревым [48, 49]. Им было высказано соображение о существовании «серий» собственных функций, связанных с одномерными циклами, устойчивыми по первому приближению. Роль устойчивых замкнутых геодезических для многомерных областей выяснена в работах В. М. Бабича [14, 15], В. М. Бабича и В. Ф. Лазуткина [19] (см. также В. М. Бабич [17]). Другой подход к выделению серий в зависимости от свойств соответствующей классической динамической системы разработан В. П. Масловым (см. п. 3 § 10).

В работе В. Ф. Лазуткина [117] (см. также В. С. Булдырев [50]) построены дальнейшие члены разложения для спектра и собственных функций «серии», сосредоточенной вблизи границы плоской области. На этой основе в [117] показано, что построенное приближение для спектра является асимптотическим для некоторой подпоследовательности точных собственных чисел задачи, а погрешность приближения стремится к нулю. Позднее в большом числе работ различными методами строились полные асимптотические разложения для тех или иных «серий». Значительная часть этих работ отражена в монографии В. М. Бабича и В. С. Булдырева [18]. Такие разложения имеют прикладное значение. Они оказались полезными и для выяснения некоторых принципиальных вопросов спектральной асимптотики. Наиболее продвинутые результаты здесь принадлежат В. Ф. Лазуткину [119—128, 131]. В [125] построена асимптотика серии, отвечающей некоторому «разрывному» однопараметрическому семейству каустик, близких к границе. Спектр задачи D нумеруется двумя параметрами, пробегающими часть целочисленной решетки; эта часть решетки имеет положительную плотность. В [128, 131] подобные построения проведены для более общих семейств инвариантных кривых. Для функции распределения $N^*(\lambda)$ соответствующей подпоследовательности (серии) собственных значений получена асимптотика $N^*(\lambda)=$ $=\beta\lambda+o(\lambda)$, $\beta>0$. Число β — меньше, чем коэффициент в асимптотике Вейля (32) ($l=2$) для полной функции $N(\lambda)$. В [127]

В. Ф. Лазуткин аналогичным образом рассмотрел периодическую задачу на квадрате для уравнения $-\Delta u+\lambda(1+\varepsilon h)u=0$, где h — гладкая функция, ε — малый параметр. Для выделенной серии собственных чисел получено полное асимптотическое разложение. Установлено, что для функции распределения $N^*(\lambda)$ этой серии

$$\liminf_{\lambda\to\infty} N^*(\lambda)/N(\lambda) \geqslant 1-c\sqrt{\varepsilon}.$$

Разложения для серий собственных чисел сопровождаются построением формальных рядов для собственных функций. В. И. Арнольд [7, 8] (см. также В. Н. Карпушкин [89]) показал, что эти ряды, вообще говоря, не являются асимптотическими выражениями для настоящих собственных функций (мод). Такие приближения (квазимоды) представляют собой линейные комбинации мод, отвечающих нескольким близким точкам спектра.

В ряде задач теории колебаний асимптотические разложения для некоторых серий квазимод строятся и изучаются в работах В. С. Булдырева [51], В. Г. Осмоловского [150], Т. Ф. Панкратовой [154, 155], М. Ф. Пышкиной [161], С. Ю. Славянова [189]. См. также [95—97, 317].

К обсуждаемому направлению примыкают исследования колебаний в открытых резонаторах. См. В. М. Бабич [16], В. С. Булдырев и М. М. Попов [52], В. Ф. Лазуткин [118], В. Ф. Лазуткин и Н. В. Сванидзе [130], Т. Ф. Панкратова [156], М. М. Попов [158, 159], Т. М. Попова [160], Н. В. Сванидзе [174], Б. Н. Семенов [175].

4. В работах Балиана и Блоха [238—240] рассматривались задачи D, N и третья краевая задача для оператора Лапласа в области $\Omega\subset\mathbf{R}^3$. Изучалась «плотность сглаженной функции распределения»

$$\rho_\gamma(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\frac{\gamma\,dN(\mu)}{(\mu-\lambda)^2+\gamma^2}.$$

Здесь $\gamma>0$ — параметр сглаживания. Если γ не слишком мало, то для ρ_γ строятся разложения, которые, в конечном счете, дают о $N(\lambda)$ ту же информацию, что и другие способы сглаживания (см. п. 2). Эти разложения строятся на основании «лучевых» соображений. Аналогичные построения проводятся для оператора Лапласа на m-мерном многообразии без края и для системы Максвелла в $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ (в последнем случае вычисления, по-видимому, содержат ошибку). При малых (фиксированных) γ исследуются осцилляции функции ρ_γ, которые связываются с существованием устойчивых циклов, порождающих «серии» в смысле п. 3. Работы выполнены на физическом уровне строгости.

§ 10. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Формулы вида (5), (22), которые содержат лишь символы дифференциальных операторов, остаются в силе и для широкого класса «регулярных» задач, связанных с ПДО.

Фудзивара [293] рассматривал положительные эллиптические системы ПДО четного порядка на многообразиях без края. Им получено полное степенное разложение θ-функции, из которого, в частности, следует асимптотическая формула (22+). Как уже отмечалось (см. п. 1 § 8), Хёрмандер [218] исследовал спектральную функцию эллиптических положительно определенных ПДО первого порядка и нашел для них точную оценку остатка в асимптотической формуле. Для полуограниченных систем ПДО, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу, асимптотику вида (20) исследовал А. Н. Кожевников [100].

Дальнейшие важные результаты о спектре скалярных ПДО на многообразиях без края получены Дюйстермаатом и Гийеменом [281]. Символу ПДО сопоставляется гамильтонова система на кокасательном расслоении. При некоторых предположениях об этой системе в [281] получен второй член асимптотики $N(\lambda)$ (без усреднения!), который имеет вид $c\lambda^{(m-1)/l}$. Для дифференциальных операторов всегда $c=0$, что приводит лишь к упоминавшемуся в § 8, п. 2, улучшению оценки (53).

Широкий класс ПДО на окружности (включая неполуограниченный случай) рассмотрел Г. В. Розенблюм [169]. На основании введенного им понятия «почти-подобия» операторов он получил полные асимптотические разложения для собственных чисел.

Краевые задачи (в смысле Вишика—Эскина) для полуограниченных эллиптических ПДО рассматривал Буй Ан Тон [262, 263]. Им оправдана для этого случая формула (5).

2. Если для положительного ПДО в $L_2(\mathbf{R}^m)$ символ неограниченно растет при $|x|\to\infty$, то спектр дискретен. Задача об асимптотике $N(\lambda)$ в этом случае близка к «сингулярным» задачам, рассмотренным в § 3. Точные формулировки результатов в большой мере зависят от того, с помощью какого символа задан ПДО.

Ф. А. Березин [27] изучил $N(\lambda)$ для ПДО, исходя из введенных им виковского и антивиковского символов. Само существование антивиковского символа накладывает ограничительные условия на оператор. При определенных предположениях получена асимптотика для $N(\lambda)$, аналогичная формуле (2). В асимптотическое выражение входит антивиковский символ. В определение ПДО в [27] введен также малый параметр (что соответствует замене $D\mapsto h^{-1}D$). Получена асимптотика для $N(\lambda)$ при фиксированном λ и $h\to 0$ (ср. § 5).

В. Н. Туловский и М. А. Шубин [211, 212] рассмотрели ПДО в $L_2(\mathbf{R}^m)$ с символом Вейля, «правильно» растущим при

$|x|\to\infty$. Для спектральной функции они нашли приближенное представление, также имеющее вид ПДО с символом Вейля. На этой основе в [211, 212] оправдана формула вида (2) (с символом Вейля) и получена оценка остатка. В [211, 212] использованы некоторые элементы техники Ф. А. Березина, но, в отличие от [27], не применяются утверждения тауберова типа.

3. В. П. Масловым разработан (см. [141, 142, 144]) многомерный аналог метода ВКБ, который, в частности, нашел применения в задаче об асимптотике спектра. Эти исследования В. П. Маслова соприкасаются с задачей о выделении спектральных серий, обсуждавшейся в п. 3 § 9. Рассматриваются эллиптические положительные ПДО, заданные посредством (x, ξ)-символов и содержащие малый параметр $(D\mapsto h^{-1}D)$. Найдены условия общего характера, позволяющие выделить некоторую серию собственных значений. Серия выделяется «условиями квантования» и для нее определяется квазиклассическая асимптотика. По поводу применения метода Маслова к дифференциальным уравнениям см. [95—97].

4. М. А. Шубин [227, 228] перенес понятие функции распределения $N(\lambda)$ на некоторые задачи с непрерывным спектром. Пусть $A(x, D)$ — самосопряженный эллиптический оператор с почти периодическими коэффициентами; его главный символ положителен. Пусть $G\subset\mathbf{R}^m$ — ограниченная гладкая область, N_G — функция распределения задачи D для уравнения $Au=\lambda u$ в области G. Существует предел

$$N(\lambda)=\lim(\operatorname{mes} G)^{-1}N_G(\lambda)$$

при неограниченном гомотетичном расширении G. Таким образом, $N(\lambda)$ — «среднее количество» собственных чисел, меньших λ, приходящихся на единицу объема. Функция $N(\lambda)$ может быть определена прямым образом как «настоящая» функция распределения в некотором факторе Неймана с помощью следа в этом факторе. Для $N(\lambda)$ получена при $\lambda\to\infty$ асимптотика вейлевского типа, которая соответствует усреднению при $G\to\infty$ вейлевской асимптотики для $N_G(\lambda)$. Получена оценка остатка. Вводится соответствующая ζ-функция, которая оказывается мероморфной, и изучаются ее полюса.

Усреднение N_G по объему встречается во многих вопросах математической физики. См., в частности, обзор Л. А. Пастура [157] о спектре оператора Шредингера со случайным потенциалом.

Для некоторых одномерных задач о колебаниях изучаются асимптотические разложения первых собственных значений по большому параметру — длине основного промежутка. По этому поводу см. А. А. Есипов [77], А. А. Есипов и В. И. Юдович [78—81].

5. Если в уравнении Шредингера (7) потенциал отрицателен, $q \to 0$ при $|x| \to \infty$ и, например, $|q| \geqslant c(1+|x|)^{-2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, то спектр левее нуля дискретен, бесконечен и скапливается к точке $\lambda = 0$. Для его асимптотики может быть предложена формула, аналогичная формуле (8):

$$N(\lambda) \sim (2\pi)^{-m} v_m \int (\lambda - q)_+^{m/2} dx, \quad \lambda \to -0. \tag{59}$$

Формула (59) (и ее обобщения) была ранее оправдана лишь при весьма стеснительных предположениях о потенциале (см., например, [258, 178]). Кон [277] доказал формулу (59) (при $m=1$) для уравнения на полуоси

$$-y'' + q(x) y + l(l+1) x^{-2} y = \lambda y, \qquad (l > -1/2) \tag{60}$$

лишь при естественных предположениях $q(x) \to 0$, $x^3 q'(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. В связи с формулами вида (59) см. также Тамура [359].

Если в (60) $q(x) = -\alpha x^{-1} + \tilde{q}(x)$, где $\alpha > 0$ и $\tilde{q}$ — «слабое возмущение», то асимптотика дискретного спектра при $\lambda \to -0$ связана с так называемой формулой Ритца. Близкие задачи возникают и для радиальной системы Дирака. Указанные вопросы исследовались в работах Л. А. Сахновича [171—173], Д. Р. Яфаева [229], В. В. Образцова [148, 149].

6. Для уравнения $-y'' + p(t) y = \lambda y$, $p(t+T) = p(t)$, исследовалась асимптотика расстояния между двумя собственными числами периодической и антипериодической задач на периоде. Это равносильно вопросу об асимптотике ширины лакун в непрерывном спектре задачи на оси. Для некоторых классов аналитических потенциалов для ширины лакун установлена экспоненциальная асимптотика (С. Г. Симонян [176, 177], М. В. Федорюк [214]). В. Ф. Лазуткин и Т. Ф. Панкратова [129] для потенциалов конечной гладкости s установили степенную асимптотику длин лакун в зависимости от s. См. также Истхем [282].

Пусть на двумерном торе задана гладкая риманова метрика, достаточно близкая к евклидовой. А. И. Шнирельман [226] показал, что спектр оператора Бельтрами—Лапласа асимптотически двукратный. Именно, расстояние от собственного числа λ_n до остального спектра убывает сверхстепенным образом при $n \to \infty$. Этим усилено одно следствие из результатов В. Ф. Лазуткина [127].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Абдукадыров Э.**, О функции Грина уравнения Штурма — Лиувилля с операторными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1970, **195**, № 3, 519—522 (РЖМат, 1971, 5Б811)
2. —, Асимптотическое распределение собственных чисел операторной задачи Штурма — Лиувилля. Докл. АН Узб. ССР, 1970, № 12, 3—5 (РЖМат, 1971, 8Б600)
3. —, Асимптотическое распределение собственных значений одного диф-

ференциального оператора. «Тр. Самарканд. ун-та», 1974, вып. 244, 11—15 (РЖМат, 1975, 5Б390)
4. **Александрийский Б. И.**, Асимптотика положительных собственных значений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 12, 3—9 (РЖМат, 1974, 6Б465)
5. **Александрян Р. А.**, Березанский Ю. М., Ильин В. А., Костюченко А. Г., Некоторые вопросы спектральной теории для уравнений с частными производными. В сб. «Дифференц. уравнения с частными производными». М., «Наука», 1970, 3—35 (РЖМат. 1970, 12Б772)
6. **Апышев О. Д.**, Отелбаев М., О классической формуле для распределения собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля. Каз. ССР Ғылым Акад. хабарлары, Изв. АН Каз. ССР, Сер. физ.-мат., 1975, № 3, 24—28 (РЖМат, 1975, 11Б820)
7. **Арнольд В. И.**, Моды и квазимоды. Функц. анализ и его приложения, 1972, **6**, № 2, 12—20 (РЖМат, 1972, 8Б682)
8. —, Математические методы классической механики, М., «Наука», 1974, 431 с. (РЖМат, 1975, 6Б433К)
9. **Арсеньев А. А.**, Асимптотика спектральной функции уравнения Шредингера. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, **7**, № 6, 1298—1319 (РЖМат, 1968, 5Б537)
10. **Асланов Г. И.**, Баимов Ш. К., Распределение собственных значений некоторых несамосопряженных операторов. Аз. ССР Елмләр Акад. хәбәрләри. Физ.-техн. вә ријазијјат елмләри сер., Изв. АН Аз ССР, Сер. физ.-техн. и мат. н., 1974, № 6, 59—62 (РЖМат, 1975, 7Б760)
11. **Асланян А. Г.**, Кузина З. Н., Лидский В. Б., Туловский В. Н., Распределение собственных частот тонкой упругой оболочки произвольного очертания. Прикл. мат. и мех., 1973, **37**, 604—617
12. —, Лидский В. Б., Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М., «Наука», 1974, 156 с. (РЖМех, 1975, 7В262К)
13. —, Туловский В. Н., Асимптотическое распределение собственных частот упругих оболочек. Докл. АН СССР, 1973, **208**, № 4, 801—804 (РЖМех, 1973, 7В174)
14. **Бабич В. М.**, К вопросу об асимптотике «квазисобственных» чисел внешних задач для оператора Лапласа. В сб. «Проблемы математической физики», вып. 2, изд-во ЛГУ, 1967, 7—14 (РЖМат, 1968, 5Б500)
15. —, Собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1968, **9**, 15—63 (РЖМат, 1969, 10Б340)
16. —, О собственных колебаниях многослойного резонатора. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1969, **15**, 9—46 (РЖМат, 1970, 6Б475)
17. —, Приложение методов математической теории дифракции к асимптотике собственных чисел и функций оператора Лапласа. В сб. «Дифференц. уравнения с частными производными». М., «Наука», 1970, 36—37 (РЖМат, 1971, 1Б535)
18. —, Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972, 456 с. (РЖМат, 1973, 2Б469К)
19. —, Лазуткин В. Ф., О собственных функциях, сосредоточенных вблизи замкнутой геодезической. В сб. «Проблемы математической физики», вып. 2, Изд-во ЛГУ, 1967, 15—25 (РЖМат, 1968, 5Б501)
20. **Баимов Ш. К.**, О распределении собственных значений оператора Шредингера в неограниченных областях. Ин-т мат. и мех. АН Аз ССР. Баку, 1971, 13 (№ 3655—71 Деп) (РЖМат, 1972, 9Б321 Деп)
21. —, Асимптотика числа собственных значений оператора Шредингера в областях с бесконечными границами. В сб. «Материалы Науч. конф. аспирантов АН Аз ССР, Физ.-Техн. и мат. н.» Баку, «Элм», 1973, 12—21 (РЖМат, 1974, 6Б812)
22. —, Распределение собственных значений некоторых эллиптических операторов в неограниченной области. Мәрузәләр Азәрб. ССР Елмләр Акад., Докл. АН Азерб ССР, 1974, **30**, № 9, 7—10 (РЖМат, 1975, 7Б759)

23. **Байрамоглы М.**, Асимптотика числа собственных значений обыкновенных дифференциальных операторов с операторными коэффициентами. В сб. «Функциональн. анализ и его применение», Баку, «Элм», 1971, 144—166 (РЖМат, 1972, 4Б901)
24. **Басс Г. И.**, Асимптотика спектральной функции эллиптических операторов в ограниченной области. Матем. заметки, 1969, **5**, № 2, 245—251 (РЖМат, 1969, 7Б519)
25. **Белогрудь В. П.**, Костюченко А. Г., О плотности спектра оператора Штурма — Лиувилля. Успехи матем. наук, 1973, **28**, № 2, 227—228 (РЖМат, 1973, 8Б728)
26. **Березанский Ю. М.**, Обзор по спектральной теории самосопряженных дифференциальных и разностных операторов. Тр. семинара по функц. анализу. Ин-т мат. АН УССР, 1970, вып. 2,3—135 (РЖМат, 1971, 11Б827)
27. **Березин Ф. А.**, Виковские и антивиковские символы операторов. Матем. сб., 1971, **86**, № 4, 578—610 (РЖМат, 1972, 4Б856)
28. —, Ковариантные и контравариантные символы операторов. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1972, **36**, № 5, 1134—1167 (РЖМат, 1973, 2Б720)
29. **Бесов О. В.**, Ильин В. П., Кудрявцев Л. Д., Лизоркин П. И., Никольский С. М., Теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных. В сб. «Дифференц. уравнения с частными производными», М., «Наука», 1970, 38—63 (РЖМат, 1970, 11Б69)
30. **Бирман М. Ш.**, О спектре сингулярных граничных задач. Матем. сб., 1961, **55**, № 2, 125—174 (РЖМат, 1962, 12Б398)
31. —, Борзов В. В., Об асимптотике дискретного спектра некоторых сингулярных дифференциальных операторов. В сб. «Пробл. мат. физ.», Вып. 5. Л., Ленингр. ун-т, 1971, 24—38 (РЖМат, 1971, 11Б840)
32. —, Соломяк М. З., Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α. Матем. сб., 1967, **73**, № 3, 331—355 (РЖМат, 1968, 6Б119).
33. —, —, О главном члене спектральной асимптотики для негладких эллиптических задач. Функц. анализ и его прил., 1970, **4**, № 4, 1—13 (РЖМат, 1971, 6Б709)
34. —, —, Об асимптотике спектра негладких эллиптических уравнений. Функц. анализ и его прил., 1971, **5**, № 1, 69—70 (РЖМат, 1971, 6Б710)
35. —, —, Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов. Докл. АН СССР, 1972, **205**, № 2, 267—270 (РЖМат, 1972, 11Б803)
36. —, —, Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов. I. Тр. Моск. Матем. о-ва, 1972, **27**, 3—52 (РЖМат, 1973, 3Б752)
37. —, —, Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов. II. Тр. Моск. Матем. о-ва, 1973, **28**, 3—34 (РЖМат, 1973, 8Б730)
38. —, —, Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории. В кн. «Десятая матем. школа», Киев, 1974, 5—189
39. —, —, Об одной «модельной» неэллиптической спектральной задаче. Вест. Ленингр. ун-та, 1975, № 1, 39—45 (РЖМат, 1975, 7Б352)
40. **Бойматов К. Х.**, Асимптотика спектра операторного дифференциального уравнения. Успехи мат. наук, 1973, **28**, вып. 5, 207—208 (РЖМат, 1973, 12Б822)
41. —, Оператор Штурма — Лиувилля с матричным потенциалом. Матем. заметки, 1974, **16**, № 6, 921—932 (РЖМат, 1975, 4Б850)
42. —, Асимптотика спектра оператора Шредингера. Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 11, 1939—1945 (РЖМат, 1975, 4Б851)
43. —, Распределение собственных значений эллиптических операторов. Докл. АН СССР, 1975, **221**, № 2, 265—268 (РЖМат, 1975, 7Б309)
44. **Борзов В. В.**, О количественных характеристиках сингулярных мер. В сб. «Пробл. матем. физ.», вып. 4, Л., Ленингр. ун-т, 1970, 42—47 (РЖМат, 1970, 10Б60)
45. —, О некоторых применениях кусочно-полиномиальных приближений

функции оператора Лапласа. Дифференц. уравнения, 1965, **1**, № 11, 499—501 (РЖМат, 1971, 11Б89)

46. —, Кусочно-полиномиальные приближения функций классов $\mathring{W}_p^r$ в L_q по бесконечной мере. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1973, № 8, 19—28 (РЖМат, 1974, 3Б649)
47. **Булаевская — Маслова Ф. Г.** Об асимптотических оценках спектральной функции оператора Лапласа. Дифференц. уравнения, 1965, 1, № 11, 1509—1524 (РЖМат, 1966, 5Б234)
48. **Булдырев В. С.** Коротковолновая асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца. Докл. АН СССР, 1965, **163**, № 4, 853—856 (РЖМат, 1966, 1Б280)
49. —, Асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца для плоских выпуклых областей. Вест. Ленингр. ун-та, сер. физ. и хим., 1965, **22**, вып. 4, 38—51 (РЖФиз, 1966, 4Ж130)
50. —, Распространение волн вблизи изогнутой поверхности неоднородного тела. В сб. «Пробл. мат. физ.», вып. 2, Л., Ленингр. ун-т, 1967, 61—84 (РЖМат, 1968, 3Б404)
51. —, Асимптотика решений волнового уравнения, сосредоточенных вблизи оси плоского волновода в неоднородной среде. В сб. «Пробл. мат. физ.», вып. 3, Л., Ленингр. ун-т, 1968, 5—30 (РЖМат, 1969, 6Б457)
52. —, Попов М. М., Применение лучевого метода для вычисления собственных частот многозеркальных резонаторов. Оптика и спектроскопия, 1966, 20, № 5, 905—908 (РЖФиз, 1966, 12Д642)
53. **Буслаев В. С.** Формулы следов и некоторые асимптотические оценки ядра резольвенты для оператора Шредингера в трехмерном пространстве. В сб. «Пробл. матем. физ.», Вып. 1, Л., Ленингр. ун-т, 1966, 82—101 (РЖМат, 1967, 12Б409)
54. —, Рассеянные плоские волны, спектральные асимптотики и формулы следа во внешних задачах. Докл. АН СССР, 1971, **197**, № 5, 999—1002 (РЖМат, 1971, 9Б245)
55. —. Локальные спектральные асимптотики функции Грина во внешних задачах для оператора Шредингера. Вест. Ленингр. ун-та, 1975, № 1, 55—60 (РЖМат, 1975, 7Б752)
56. **Бутузов В. Ф.**, Васильева А. Б., Федорюк М. В., Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Итоги науки, Мат. анализ, 1967 (В сб. Итоги науки ВИНИТИ АН СССР), М., 1969, 5—73 (РЖМат, 1969, 8Б279)
57. **Быков В. П.**, Геометрическая оптика трехмерных колебаний в открытых резонаторах. В сб. «Электроника больших мощностей», вып. 4, «Наука», 1965, 66—92 (РЖФиз, 1966, 2Ж23)
58. **Вайнштейн Л. А.**, Лучевые потоки в трехосном эллипсоиде. В сб. «Электроника больших мощностей», вып. 4, «Наука», 1965, 93—105 (РЖФиз, 1966, 2Ж24)
59. **Вулис И. Л.** Спектральная асимптотика вырождающихся полигармонических операторов. Докл. АН СССР, 1974, **219**, № 5, 1049—1052 (РЖМат, 1975, 4Б408)
60. —, Соломяк М. З., Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов. Докл. АН СССР, 1972, **207**, № 2, 262—265 (РЖМат, 1973, 3Б753)
61. —, —, Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова. Вест. Ленингр. ун-та, 1973, № 19, 148—150 (РЖМат, 1974, 6Б815)
62. —, —, Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, **38**, № 6, 1362—1392 (РЖМат, 1975, 3Б707)
63. **Гасымов М. Г.**, О распределении собственных значений самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора. Докл. АН СССР, 1969, **186**, № 4, 753—756 (РЖМат, 1970, 1Б620)
64. **Гехтман М. М.** К вопросу о спектре самосопряженных расширений симметрического полуограниченного оператора. Докл. АН СССР, 1969, **186**, № 6, 1250—1252 (РЖМат, 1969, 11Б565)

65. —, Изучение спектра некоторых неклассических самосопряженных расширений оператора Лапласа. Функц. анал. и его прилож. 1970, **4**, № 4, 72 (РЖМат, 1971, 6Б711)
66. **Гольдин А. Д.** Асимптотика собственных значений самосопряженных расширений оператора Шредингера в многомерной ограниченной области. Вестн. Моск. ун-та, Матем., Мех., 1972, № 6, 26—33 (РЖМат, 1973, 4Б844)
67. **Горбачук М. Л.**, Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом. Функц. анал. и его прилож. 1971, **5**, № 1, 10—21 (РЖМат, 1971, 7Б769)
68. —, Горбачук В. И., О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма — Лиувилля с операторным потенциалом. Укр. Матем. журнал, 1972, **24**, № 3, 291—305 (РЖМат, 1972, 10Б525)
69. **Горчаков В. Н.** Об асимптотических свойствах спектральной функции гипоэллиптических операторов. Докл. АН СССР, 1965, **160**, № 4, 746—749 (РЖМат, 1965, 6Б287)
70. **Горюнов А. Ф.**, К вопросу об асимптотическом распределении собственных значений вырождающихся эллиптических операторов второго порядка. Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 12, 2214—2223 (РЖМат, 1971, 6Б391)
71. —, Асимптотические формулы собственных значений эллиптических операторов второго порядка, вырождающихся на оси цилиндра. Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 11, 2041—2052 (РЖМат, 1971, 6Б392)
72. —, Оценка роста собственных значений одной задачи с параметром в граничном условии. Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 5, 879—889 (РЖМат, 1974, 9Б922)
73. **Гринберг С. И.**, Некоторые асимптотические формулы для спектров первой и третьей краевых задач. «Теория функций, функц. анализ и их прилож. Респ. научн. сб.», 1966, вып. 3, 117—134 (РЖМат, 1967,
74. —, Некоторые асимптотические формулы для спектров третьей краевой задачи, связанные с варьированием функции, входящей в краевое условие. Докл. АН СССР, 1967, **174**, № 4, 1253—1256 (РЖМат, 1967, 12Б308)
75. —, Формула следов для уравнения Шредингера в конечной области. Матем. заметки, 1967, **1**, № 4, 451—460 (РЖМат, 1968, 1Б480)
76. **Донков А. Д.**, Об асимптотике собственных значений одного уравнения, связанного с модифицированным уравнением Матье, Годишн. Софийск. ун-т. Физ. фак., 1970—1972 (1973), 64—65, 1—6 (РЖМат, 1974, 7Б216)
77. **Есипов А. А.** Об асимптотике одной задачи на собственные значения для длинного отрезка. «Сообщ. на третьей Конференции Ростовск. науч. матем. о-ва, 1969, т. I», Ростов-на-Дону, 1969, 1—9 (РЖМат, 1970, 6Б267)
78. —, Юдович В. И., Предельное поведение собственных значений краевых задач в неограниченно расширяющихся областях. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1973, **13**, № 2, 412—432 (РЖМат, 1973, 8Б414)
79. —, —, Принцип Релея и асимптотика собственных значений. «Тр. IV Всес. семинара по числен. методам мех. вязк. жидкости, Рига, 1972», Новосибирск, 1973, 101—104 (РЖМат, 1974, 5Б809)
80. —, —, Об асимптотике краевых задач на собственные значения в длинных цилиндрах. «Изв. Сев-Кавказ. науч. центра высшей школы. Сер. естеств. н.», 1973, № 4, 103—105 (РЖМат, 1974, 7Б776)
81. —, —, Асимптотика собственных значений первой краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений на длинном отрезке. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, **14**, № 2, 342—349 (РЖМат, 1974, 7Б775)
82. **Жданова Г. В.**, Асимптотика собственных значений самосопряженного сингулярного оператора $2n$-порядка. Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 5, 838—851 (РЖМат, 1970, 11Б267)

83. —, Асимптотические ряды для собственных значений и собственных функций самосопряженных операторов. Дифференц. уравнения, 1971, **7**, № 1, 603—614 (РЖМат, 1971, 9Б200)
84. **Ильин В. А.**, Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа. Успехи мат. наук, 1968, **23**, № 2, 60—120 (РЖМат, 1969, 6Б372)
85. —, О характере спектра самосопряженных неотрицательных расширений эллиптических операторов и о точных условиях сходимости и риссовской суммируемости рядов Фурье различных классов функций. Матем. заметки, 1970, **7**, № 4, 515—523 (РЖМат, 1970, 10Б304)
86. —, О разложении по собственным функциям произвольных неотрицательных самосопряженных расширений некоторых эллиптических операторов. В сб. «Междунар. конгресс математиков в Ницце, 1970», М., «Наука», 1972, 102—110 (РЖМат, 1973, 6Б355)
87. —, Филиппов А. Ф., О характере спектра самосопряженного расширения оператора Лапласа в ограниченной области (фундаментальные системы функций с произвольной наперед заданной последовательностью фундаментальных чисел). Докл. АН СССР, 1970, **191**, № 2, 267—269 (РЖМат, 1970, 8Б321)
88. **Исмагилов Р. С.**, Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор — функций. Матем. заметки, 1971, **9**, № 6, 667—675 (РЖМат, 1971, 11Б838)
89. **Карпушкин В. Н.**, Об асимптотике собственных чисел симметричных многообразий и о «наиболее вероятных» представлениях конечных групп. Вестн Моск. ун-та. Мат. мех., 1974, № 2, 9—13 (РЖМат, 1974, 9Б951)
90. **Катрахов В. В.** Об асимптотических свойствах спектральной функции сингулярных дифференциальных операторов. Докл. АН СССР, 1974, **214**, № 2, 272—275 (РЖМат, 1974, 5Б810)
91. —, Асимптотика спектральной функции некоторых сингулярных дифференциальных операторов «Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та», 1974, вып. 14, 32—40 (РЖМат, 1975, 6Б993)
92. **Кац И. С.**, Густота спектра струны. Докл. АН СССР, 1973, **211**, № 3, 520—523 (РЖМат, 1973, 11Б670)
93. **Кац М.**, Вероятность и смежные вопросы в физике, М., «Мир», 1965, 407 с (РЖФиз, 1965, 12Б79К)
94. **Киприянов И. А.**, Асимптотическое распределение собственных значений и собственных функций одного класса сингулярных эллиптических операторов. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1972, **117**, 159—179 (РЖМат, 1972, 7Б650)
95. **Коган В. Р.**, Асимптотика оператора Лапласа — Бельтрами на единичной сфере S^{n-1}. Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1969, **12**, № 11, 1675—1680 (РЖМат, 1970, 5Б444)
96. —, Асимптотика спектра оператора Лапласа — Бельтрами в n-мерном шаре E^n. Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1969, **12**, № 11, 1681—1683 (РЖМат, 1970, 5Б445)
97. —, Крахнов А. Д., Асимптотика собственных значений и функций оператора Лапласа на компактном римановом многообразии. Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1972, **15**, № 3, 448—453 (РЖМат, 1972, 10Б242)
98. **Кожевников А. Н.**, О распределении спектра дифференциального оператора. Вестн. Моск. ун-та, Матем. мех., 1971, № 2, 11—17 (РЖМат, 1971, 7Б761)
99. —, Об асимптотике собственных значений и полноте корневых векторов оператора, порожденного краевой задачей с параметром в краевом условии. Докл. АН СССР, 1971, **200**, № 6, 1273—1276 (РЖМат, 1972, 3Б585)
100. —, Спектральные задачи для псевдодифференциальных систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу, и их приложения. Матем. сб., 1973, **92**, № 1, 60—88 (РЖМат, 1973, 12Б431)

101. **Костенко Н. М.**, Асимптотика собственных чисел ангармонического осциллятора. Матем. сб., 1970, **81**, № 2, 163—175 (РЖМат, 1970, 6Б273)
102. —, О спектре системы дифференциальных уравнений. Укр. матем. ж., 1970, **22**, № 2, 163—173 (РЖМат, 1970, 8Б617)
103. **Костюченко А. Г.**, Асимптотическое распределение собственных значений эллиптических операторов. Докл. АН СССР, 1964, **158**, № 1, 41—44 (РЖМат, 1965, 1Б275)
104. —, Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов. Докл. АН СССР, 1966, **168**, № 1, 21—24 (РЖМат, 1966, 9Б528)
105. —, Асимптотика спектральной функции сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$. Докл. АН СССР, 1966, **168**, № 2, 276—279 (РЖМат, 1966, 10Б572)
106. —, О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов. Автореф. дисс. на соискание уч. степени докт. физ-мат. наук. Матем. заметки, 1967, **1**, № 3, 365—378 (РЖМат, 1967, 8Б497)
107. —, Асимптотическое поведение спектральной функции самосопряженных эллиптических операторов. В кн. «Четвертая матем. школа», Киев, 1968 42—117
108. —, Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении собственных значений операторной задачи Штурма — Лиувилля. Функц. анализ и его прилож., 1967, **1** № 1, 86—93 (РЖМат, 1967, 11Б563)
109. **Крейн М. Г.**, Определение плотности струны по спектру ее частот Докл. АН СССР, 1951, **76**, № 2, 345—348
110. **Крылая С. С.**, Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задачи типа Штурма — Лиувилля. Дифференц. уравнения, 1969, **5**, № 5, 967—970 (РЖМат, 1969, 10Б198)
111. —, Математическое рассмотрение задачи о поперечных колебаниях стержня со свободно опертыми концами с учетом инерции вращения. В сб. «Исслед. по современ. пробл. суммир. и приближ. функций и их прилож.». Днепропетровск, 1972, 139—142 (РЖМат, 1973, 3Б451)
112. —, Собственные значения и собственные функции линейной задачи четвертого порядка с параметром в краевых условиях. В сб. «Исслед. по соврем. пробл. суммир. и приближ. функций и их прил.», Вып. 5. Днепропетровск, 1974, 176—178 (РЖМат, 1975, 4Б854)
113. —, Рогач Д. И., Об одной линейной задаче о собственных значениях четвертого порядка. В сб. «Исслед. по совр. пробл. суммир. и приближ. функций и их прил.», вып. 4, Днепропетровск, 1973, 154—160 (РЖМат, 1974, 9Б926)
114. **Кузнецов Н. В.**, Асимптотическое распределение собственных частот плоской мембраны в случае разделяющихся переменных. Дифференц. уравнения, 1966, **2**, № 10, 1385—1402 (РЖМат, 1967, 3Б307)
115. —, Федосов Б. В., Асимптотическая формула для собственных значений круглой мембраны. Дифференц. уравнения, 1965, **1**, № 12, 1682—1685 (РЖМат, 1966, 5Б280)
116. **Курант Р.**, Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, 476с Гос. изд. техн-теорет. лит., 1951
117. **Лазуткин В. Ф.**, Асимптотика собственных функций оператора Лапласа, сосредоточенных вблизи границы области. Ж. выч. мат. и матем. физ., 1967, **7**, № 6, 1237—1249 (РЖМат, 1968, 5Б401)
118. —, Формула для собственных частот неконфокального резонатора с цилиндрическими зеркалами, учитывающая аберрацию зеркал. Оптика и спектроскопия, 1968, **24**, № 3, 453—454 (РЖФиз, 1968, 8Д922)
119. —, Построение асимптотического ряда для собственных функций типа прыгающего мячика. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1968, **95**, 106—118 (РЖМат, 1969, 5Б523)
120. —, Спектральное вырождение и «малые знаменатели» в асимптотике собственных функций типа «прыгающего мячика». Вест. Ленингр. ун-та, 1969, **7**, 23—24 (РЖМат, 1969, 12Б492)
121. —, Асимптотика серии собственных функций оператора Лапласа, отве-

чающей замкнутой инвариантной кривой «биллиардной задачи». В сб. «Пробл. мат. физ.» Вып. 5, Л., Ленингр. ун-т, 1971, 72—91 (РЖМат, 1971, 10Б314)
122. —, Коротковолновая асимптотика собственных частот мембраны. Серия собственных частот, построенная по гладкой замкнутой инвариантной кривой биллиардной задачи. Тр. V Всес. симп. по дифракции и распр. волн. Л., «Наука», 1971, 134—143 (РЖМат, 1972, 1Б560)
123. —, Об асимптотике собственных функций оператора Лапласа. Докл. АН СССР, 1971, **200**, № 6, 1277—1279 (РЖМат, 1972, 2Б338)
124. —, Построение асимптотики серии собственных функций оператора Лапласа, отвечающей эллиптической периодической траектории биллиардной задачи. В сб. «Пробл. мат. физ.» Вып. 6. Л., Ленингр. ун-т, 1973, 90—100 (РЖМат, 1973, 6Б481)
125. —, Асимптотика собственных чисел оператора Лапласа на плоскости и квазимоды. Серия квазимод, отвечающая системе каустик, близких к границе области. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37**, № 2, 437—465 (РЖМат, 1973, 8Б332)
126. —, Коротоволновая асимптотика собственных частот колеблющейся мембраны, построенная по семейству инвариантных кривых. VI Всес. симпозиум по дифракции и распространению волн. Цахкадзор, 1973, Краткие тезисы докладов, книга I, 40—45, отдел научных изданий ВНИИРИ, Ереван, 1973
127. —, Асимптотика собственных функций оператора Лапласа на торе. В сб «Вопр. динамич. теории распространения волн», вып. 14, Л., 1974, 94—108 (РЖМат, 1975, 1Б485)
128. —, Асимптотика серии собственных функций оператора Лапласа, отвечающей семейству инвариантных кривых. В сб. «Пробл. мат. физ.» Вып. 7, Л., Ленингр. ун-т, 1974, 39—64 (РЖМат, 1975, 8Б302)
129. —, Панкратова Т. Ф, Асимптотика ширины лакун в спектре оператора Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом. Докл. АН СССР, 1974, **215**, № 5, 1048—1051 (РЖМат, 1974, 8Б670)
130. —, Сванидзе Н. В., О том, как для двухзеркального резонатора свойство общей эллиптичности системы лучей связано со спектром. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1972, **25**, 111—115 (РЖМат, 1972, 10Б351)
131. —, Янушанец Ю. Б., Асимптотика серии собственных функций оператора Лапласа, отвечающей семейству инвариантных кривых. В сб. «Пробл. мат. физ.» Вып. 7, Л., Ленингр. ун-т, 1974, 65—79 (РЖМат, 1975, 8Б303)
132. **Ландау Л. Д.**, Лифшиц Е. М., Квантовая механика, I. М.-Л., Гостехиздат, 1948, 567 с.
133. **Левитан Б. М.**, О разложении по собственным функциям оператора Лапласа. Матем. сборник, 1954, **35**, № 2, 267—316 (РЖМат, 1956, 440)
134. —, О разложении по собственным функциям оператора Шредингера в случае неограниченно растущего потенциала. Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 2, 191—194 (РЖМат, 1956, 2225)
135. —, О разложении по собственным функциям самосопряженного уравнения в частных производных. Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, **5**, 269—298 (РЖМат, 1958, 4714)
136. —, Об асимптотическом поведении функции Грина и разложении по собственным функциям уравнения Шредингера. Матем. сборник, 1957, **41**, № 4, 439—458 (РЖМат, 1961, 4Б243)
137. —, Асимптотическое поведение спектральной функции эллиптического уравнения. Успехи мат. наук, 1971, **26**, № 6, 151—212 (РЖМат, 1972, 4Б882)
138. —, Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных операторов. В сб. «Междунар. конгресс математиков в Ницце. 1970». М., «Наука», 1972, 145—157 (РЖМат, 1973, 3Б749)
139. —, Рамм А. Г., Асимптотическое поведение собственных значений в

случае, когда потенциал зависит от параметра. Матем. заметки, 1967, 1, № 5, 595—604 (РЖМат, 1968, 4Б635)
140. —, Саргсян И. С., Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М., «Наука», 671 с. (РЖМат, 1971, 4Б722К)
141. **Маслов В. П.**, Метод ВКБ в многомерном случае (дополнение к кн. Хидинг Дж., Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)), М., «Мир», 1965, 177—237 (РЖМат, 1966, 6Б232)
142. —, Теория возмущений и асимптотические методы. М., Изд-во МГУ, 1965, 549 с.
143. —, Асимптотика собственных значений оператора Шредингера. Успехи мат. наук, 1965, **20**, № 6, 134—138 (РЖМат, 1967, 10Б235)
144. —, Федорюк М. В., Канонический оператор (Вещественный случай). В сб. «Соврем. пробл. мат. т. I (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)», М., 1973, 85—167 (РЖМат, 1973, 12Б766)
145. **Мишнаевский П. А.**, Функция Грина и асимптотическое поведение собственных значений операторной задачи Штурма — Лиувилля. Докл. АН СССР, 1972, **203**, № 4, 762—765 (РЖМат, 1972, 9Б225)
146. **Молчанов С. А.** Диффузионные процессы и риманова геометрия. Успехи мат. наук, 1975, **30**, № 1, 3—59
147. **Наймарк М. А.**, Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969, 526с. (РЖМат, 1970, 4Б696К)
148. **Образцов В. В.**, Про спектри радіальних рівнянь Дірака і Шредінгера. Доповіді АН УРСР, 1972, А, № 8, 710—713 (РЖМат, 1972, 12Б535)
149. —, Обобщенная формула Ритца (Редколлегия Сиб. мат. ж. Сиб. отд. АН СССР) Новосибирск, 1971, 24с. (№ 3785—71 Деп.) (РЖМат, 1972, 5Б556 Деп)
150. **Осмоловский В. Г.**, Об асимптотике собственных колебаний эллиптической мембраны. Ж. выч. мат. и матем. физ., 1974, **14**, № 2, 365—378 (РЖМат, 1974, 8Б290)
151. **Отелбаев М.**, К методу Титчмарша оценки резольвенты. Докл. АН СССР, 1973, **211**, № 4, 787—790 (РЖМат, 1973, 12Б820)
152. —, Распределение собственных чисел оператора Дирака. Матем. заметки, 1973, **14**, № 6, 843—852 (РЖМат, 1974, 4Б729)
153. —, Султанаев Я. Т., К формулам распределения собственных чисел сингулярных дифференциальных операторов. Матем. заметки, 1974, **14**, № 3, 361—368 (РЖМат, 1973, 12Б816)
154. **Панкратова Т. Ф.** О собственных функциях оператора Лапласа на поверхности трехосного эллипсоида и в области, внешней по отношению к нему. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1968, **9**, 192—211 (РЖМат, 1969, 7Б373)
155. —, О собственных колебаниях в кольцевом резонаторе. Векторная задача. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1969, **15**, 122—141 (РЖМат, 1970, 5Б436)
156. —, О собственных колебаниях трехмерного резонатора. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1970, **17**, 184—208 (РЖМат, 1971, 1Б540)
157. **Пастур Л. А.**, Спектры случайных самосопряженных операторов. Успехи мат. наук, 1973, **28**, № 1, 3—64 (РЖМат, 1973, 5В46)
158. **Попов М. М.**, Асимптотика некоторых последовательностей собственных значений краевых задач для уравнения Гельмгольца в многомерном случае. Докл. АН СССР, 1969, **184**, № 5, 1076—1079 (РЖМат, 1969, 6Б458)
159. —, Собственные колебания многозеркальных резонаторов. Вестн. Ленингр. ун-та, 1969, 22, 42—54 (РЖфиз, 1970, 6Ж38)
160. **Попова Т. М.**, Высшие приближения для собственных колебаний плоского многозеркального резонатора. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1969, **15**, 142—153 (РЖМат, 1970, 6Б476)
161. **Пышкина М. Ф.**, Асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца, сосредоточенных вблизи замкнутой геодезической. Зап. науч.

семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1969, **15**, 154—160 (РЖМат, 1970, 5Б437)
162. **Рамм А. Г.**, Асимптотическое распределение собственных значений оператора Шредингера с растущим потенциалом в областях с бесконечной границей. Докл. АН СССР, 1968, **183**, № 4, 780—783 (РЖМат, 1969, 8Б367)
163. **Рогач Д. И.**, Асимптотика собственных значений и собственных функций одной краевой задачи. В сб. «Исслед. по современ. пробл. суммирования и приближ. функций и их прилож.», Днепропетровск, 1972, 151—155 (РЖМат, 1973, 3Б452)
164. **Розенблюм Г. В.**, О распределении собственных чисел первой краевой задачи в неограниченных областях. Докл. АН СССР, 1971, **200**, № 5, 1034—1036 (РЖМат, 1972, 2Б339)
165. —, Распределение дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов. Докл. АН СССР, 1972, **202**, № 5, 1012—1015 (РЖМат, 1972, 6Б688)
166. —, О собственных числах первой краевой задачи в неограниченных областях. Мат. сб., 1972, **89**, № 2, 234—247 (РЖМат, 1973, 2Б362)
167. —, О вычислении спектральной асимптотики для оператора Лапласа в областях бесконечной меры. В сб. «Пробл. матем. анализа», вып. 4, 1973, 95—106 (РЖМат, 1974, 6Б810)
168. —, Асимптотика собственных чисел оператора Шредингера. Матем. сб., 1974, **93**, № 3, 346—367 (РЖМат, 1974, 6Б811)
169. —, Почти-подобие псевдодифференциальных систем на окружности. Докл. АН СССР, 1975, **223**, № 3, 569—571 (РЖМат, 1976, 1Б624)
170. **Саргсян И. С.**, Двухсторонняя асимптотика числа собственных значений неполуограниченного оператора Дирака. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, **36**, № 6, 1402—1436 (РЖМат, 1973, 5Б748)
171. **Сахнович Л. А.**, О спектре радиального уравнения Шредингера в окрестности нуля. Матем. сб., 1965, **67**, № 2, 221—243 (РЖМат, 1967, 2Б215)
172. —, О формуле Ритца и квантовых дефектах спектра радиального уравнения Шредингера. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1966, **30**, № 6, 1297—1310 (РЖМат, 1967, 11Б562)
173. —, О свойствах дискретного и непрерывного спектра радиального уравнения Дирака. Докл. АН СССР, 1969, **185**, № 1, 61—64 (РЖМат, 1969, 8Б476)
174. **Сванидзе Н. В.**, Поправочный член для собственных частот трехмерного резонатора с неразвернутыми зеркалами. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1969, **15**, 161—176 (РЖМат, 1970, 6Б477)
175. **Семенов Б. Н.**, Асимптотика собственных функций и собственных частот многозеркального резонатора. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1969, **15**, 176—186 (РЖМат, 1970, 5Б438)
176. **Симонян С. Г.**, Асимптотика ширины лакун в спектре оператора Штурма — Лиувилля с периодическим аналитическим потенциалом. Айканан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1969, **49**, № 2, 65—68 (РЖМат, 1970, 6Б233)
177. —, Асимптотика ширины лакун в спектре оператора Штурма — Лиувилля с периодическим аналитическим потенциалом. Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 7, 1265—1272 (РЖМат, 1970, 12Б769)
178. **Скачек Б. Я.**, Об асимптотике отрицательной части спектра многомерных дифференциальных операторов. Доповіді АН УРСР, 1964, № 1, 14—17 (РЖМат, 1964, 6Б275)
179. —, Об асимптотическом поведении собственных значений сингулярных дифференциальных операторов. Теория функций, функц. анализ и их прилож. Респ. научн. сб., 1966, вып. 3, 110—116 (РЖМат, 1967, 12Б578)
180. —, Об асимптотическом распределении числа собственных значений уравнений вида $Au=\lambda Bu$. Доповіді АН УРСР, 1967, **А**, № 5, 426—429.

Про асимптотичний розподіл числа власних значень рівнянь вигляду $Au=\lambda Bu$ (РЖМат, 1968, 1Б245)

181. —, Об асимптотическом распределении числа собственных значений обыкновенных дифференциальных уравнений. «Теория функций, функц. анализ и их прилож., Респ. научн. сб.», 1969, вып. 8, 63—73 (РЖМат, 1970, 1Б279)

182. —, Об асимптотическом распределении собственных значений обыкновенных дифференциальных уравнений. Доповіді АН УРСР, 1969, **А**, № 7, 600—602 (РЖМат, 1970, 1Б280)

183. —, Распределение собственных значений сингулярных дифференциальных уравнений. Доповіді АН УРСР, 1970, **А**, № 5, 416—419. Розподіл власних значень сингулярних диференціальних операторів (РЖМат, 1970, 10Б592)

184. —, Про асимптотичний розподіл числа власних значень рівнянь виду $Ay=\lambda By$ Доповіді АН УРСР, 1970, **А**, № 6, 498—501 (РЖМат, 1970, 12Б275)

185. —, Распределение собственных значений одномерных сингулярных дифференциальных операторов. «Теория функций, функц. анализ и их приложения». Респ. межвед. темат. науч. сб., 1972, 15, 153—161 (РЖМат. 1972, 7Б647)

186. —, Распределение собственных значений многомерных дифференциальных операторов. Функц. анализ и его прил., 1975, **9**, № 1, 83—84 (РЖМат, 1975, 8Б718)

187. **Славянов С. Ю.**, Асимптотика сингулярных задач Штурма — Лиувилля по большому параметру в случае близких точек перехода. Дифференц. уравнения, 1969, **5**, № 2, 313—325 (РЖМат, 1969, 6Б271)

188. —. Применение метода эталонных задач к возмущениям кулоновского поля. Дискретный спектр. В сб. «Пробл. матем. физ.», вып. 4. Л., Ленингр. ун-т, 1970, 125—134 (РЖМат, 1970, 10Б471)

189. —, Высокочастотные колебания типа «прыгающего мячика» в сплюснутом эллипсоиде вращения. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1974, **42**, 239—243 (РЖМат, 1974, 7Б359)

190. **Смагин С. А.**, Дробные степени гипоэллиптического оператора. Докл. АН СССР, 1973, **209**, № 5, 1033—1035 (РЖМат, 1973, 9Б697)

191. —, О мероморфности P^z, где P — матрица. Функц. анализ и его прил., 1975, **9**, № 1, 85—86 (РЖМат, 1975, 6Б288)

192. **Соломещ И. А.**, О собственных числах некоторых вырождающихся эллиптических уравнений. Матем. сб., 1961, **54**, № 3, 295—310 (РЖМат, 1963, 3Б275)

193. —, Об асимптотике собственных значений билинейных форм, связанных с некоторыми вырождающимися на границе эллиптическими уравнениями. Докл. АН СССР, 1962, **144**, № 4, 727—729 (РЖМат, 1963, 3Б275)

194. —, К асимптотике собственных значений билинейных форм, связанных с вырождающимися эллиптическими уравнениями. Вестн. Ленингр. ун-та, 1964, № 1, 163—166 (РЖМат, 1965, 3Б435)

195. **Суворченкова Г. А.**, Связь асимптотики спектральной функции эллиптического дифференциального оператора второго порядка с геометрией замкнутого многообразия. Докл. АН СССР, 1973, **213**, № 3, 538—541 (РЖМат, 1974, 3Б737)

196. —, Применение метода Соболева к изучению связи спектра эллиптического дифференциального оператора второго порядка с геометрией многообразия без края. Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 2, 358—365 (РЖМат, 1975, 6Б489)

197. **Сударев Ю. Н.**, Об асимптотическом распределении собственных значений эллиптических операторов в n-мерном пространстве. Дифференц. уравнения, 1967, **3**, № 8, 1364—1374 (РЖМат, 1968, 3Б326)

198. —, О некоторых спектральных асимптотических свойствах сингулярных операторов. Матем. заметки, 1968, **4**, № 2, 169—172 (РЖМат, 1968, 12Б631)

199. —, О распределении собственных значений сингулярного оператора. Дифференц. уравнения, 1968, **4**, № 9, 1676—1682 (РЖМат, 1969, 8Б617)
200. **Султанаев Я. Т.**, Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций. Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 9, 1673—1683 (РЖМат, 1975, 2Б642)
201. —, Асимптотика дискретного спектра одномерных сингулярных дифференциальных операторов. Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 11, 2010—2020 (РЖМат, 1975, 4Б857)
202. —, Асимптотика спектра сингулярных дифференциальных операторов в неопределенном случае. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1975, № 3, 21—30 (РЖМат, 1975, 12Б917)
203. —, Асимптотика дискретного спектра одномерных сингулярных операторов в неопределенном случае. Каз. ССР Ғылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. физ-мат., 1975, № 3, 86—88 (РЖМат, 1975, 12Б918)
204. **Тащиян Г. М.**, О распределении собственных чисел эллиптической задачи Дирихле. Тр. 6-й Зимн. школы по мат. программир. и смежн. вопр., Дрогобыч, 1973. Функц. анализ и его применения. М., 1975, 273—289
205. —, О спектральной асимптотике краевых задач со слабым вырождением. Вестн. Ленингр. ун-та, 1975, № 7, 58—68 (РЖМат, 1975, 10Б340)
206. **Туловский В. Н.**, Асимптотическое распределение собственных значений для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1970, **195**, № 3, 570—573 (РЖМат, 1971, 4Б725)
207. —, Об асимптотическом распределении собственных чисел вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. Мат. сб., 1971, **86**, № 1, 76—89 (РЖМат, 1971, 12Б462)
208. —, Распределение собственных чисел для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Функц. анализ и его прил., 1971, **5**, № 3, 85—100 (РЖМат, 1972, 1Б825)
209. —, Асимптотическое распределение собственных значений дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. Докл. АН СССР, 1972, **206**, № 4, 827—830 (РЖМат, 1973, 2Б733)
210. —, Асимптотическое распределение собственных значений дифференциальных уравнений. Мат. сб., 1972, **89**, № 2, 191—206 (РЖМат, 1973, 2Б734)
211. —, Шубин М. А., Об асимптотике собственных значений псевдодифференциальных операторов. Успехи мат. наук, 1973, 28, вып. 5, 242 (РЖМат, 1974, 2Б839)
212. —, —, Об асимптотическом распределении собственных значений псевдодифференциальных операторов в $\mathbf{R}^n$. Матем. сб., 1973, **92**, № 4, 571—588 (РЖМат, 1974, 4Б734)
213. **Федорюк М. В.**, Асимптотика дискретного спектра оператора $w''(x)-\lambda^2 p(x)w(x)$. Матем. сб., 1965, **68**, № 1, 81—110 (РЖМат, 1967, 9Б175)
214. —, Квазиклассическая асимптотика одномерного уравнения Шредингера. Успехи мат. наук, 1975, **30**, № 2, 268 (РЖМат, 1975, 9Б210)
215. **Федосов Б. В.**, Асимптотические формулы для собственных значений оператора Лапласа в случае многоугольной области. Докл. АН СССР, 1963, **151**, № 4, 786—789 (РЖМат, 1963, 11Б311
216. —, Асимптотические формулы для собственных значений оператора Лапласа в случае многогранника. Докл. АН СССР, 1964, **157**, № 3, 536—538 (РЖМат, 1964, 12Б268)
217. **Хёрмандер Л.**, О средних Рисса спектральных функций эллиптических дифференциальных операторов и соответствующих спектральных разложениях. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1968, **12**, № 5, 91—130 (РЖМат, 1969, 8Б589)
218. —, Спектральная функция эллиптического оператора. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1969, **13**, № 6, 114—137 (РЖМат, 1970, 3Б638)
219. **Шаталов В. Е.**, О рядах Дирихле, составленных из собственных значе-

4*

ний краевых задач для произвольного эллиптического дифференциального оператора второго порядка. Дифференц. уравнения, 1972, **8**, № 7, 1267—1282 (РЖМат, 1972, 11Б412)
220. —, ζ-функция в эллиптической проблеме Соболева. Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 1, 171—173 (РЖМат, 1974, 5Б375)
221. —, Шишмарев И. А., О рядах Дирихле для эллиптических операторов. Докл. АН СССР, 1968, **182**, № 6, 1280—1282 (РЖМат, 1969, 4Б276)
222. —, —, Аналитическое продолжение рядов Дирихле эллиптических краевых задач. I. Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 9, 1652—1672 (РЖМат, 1971, 2Б418)
223. —, —, Аналитическое продолжение рядов Дирихле эллиптических краевых задач. II. Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 10, 1844—1850 (РЖМат, 1971, 2Б418)
224. **Шишмарев И. А.**, О собственных функциях полигармонического оператора. Докл. АН СССР, 1969, **186**, № 4, 781—782 (РЖМат, 1969, 11Б368)
225. **Шмулевич С. Д.**, О распределении собственных значений оператора самосопряженной эллиптической задачи в неограниченной области. Докл. АН СССР, 1969, **189**, № 5, 959—962 (РЖМат, 1970, 6Б387)
226. **Шнирельман А. И.**, Об асимптотической кратности спектра оператора Лапласа. Успехи мат. наук, 1975, **30**, № 4, 265—266
227. **Шубин М. А.**, Эллиптические почти-периодические операторы и алгебры фон Неймана. Функц. анализ и его прил., 1975, **9**, № 1, 89—90 (РЖМат, 1975, 6Б1026)
228. —, Об асимптотике спектра эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами. Успехи мат. наук, 1975, **30**, вып. 2, 268—269 (РЖМат, 1975, 8Б716)
229. **Яфаев Д. Р.**, Формулы следов для заряженных частиц в нерелятивистской квантовой механике. Теор. и матем. физика, 1972, **11**, № 1, 78—92 (РЖМат, 1972, 8Б513)
230. **Agmon S.**, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Princeton, N. J., 1965, 291 p. p.
231. —, On kernels, eigenvalues, and eigenfunctions of operators related to elliptic problems. Communs Pure and Appl. Math., 1965, **18**, № 4, 627—663 (РЖМат, 1968, 1Б602)
232. —, Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1968, **28**, № 3, 165—183 (РЖМат, 1969, 5Б400)
233. —, Kannai Y., On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators. Israel J. Math., 1967, **5**, № 1, 1—30 (РЖМат, 1968, 8Б719)
234. **Arima R.**, Mizohata S., Propriétés asymptotiques des valeurs propres des opérateurs elliptiques auto — adjoints. J. Math. Kyoto Univ., 1964, **4**, № 1, 245—254 (РЖМат, 1966, 4Б242)
235. **Audrin J.-M.**, Pham The Lai., Comportement asymptotique des valeurs propres d'un probléme de Dirichlet elliptique autoadjoint sur un ouvert non borné. C. r. Acad. Sci., 1973, **276**, № 18, A1197—A1200 (РЖМат, 1973, 11Б248)
236. **Avakumovic V. G.**, Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Z., 1956, **65**, № 4, 327—344 (РЖМат, 1958, 347)
237. **Bailey P. B.**, Brownell F. H., Removal of the log factor in the asymptotic estimates of polygonal membrane eigenvalues. J. Math. Analysis and Applic., 1962, **4**, № 2, 212—239 (РЖМат, 1964, 4Б290)
238. **Balian R.**, Bloch C., Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain. I. Three — dimensional problem with smooth boundary surface. Ann. Phys. (USA), 1970, **60**, № 2, 401—447 (РЖФиз, 1971, 3Б15)
239. —, —, Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain. II. Electromagnetic field. Riemannian spaces. Ann. Phys. (USA),

1971, **64**, № 1, 271—307 (РЖФиз, 1972, 3Б13)
240. —, —, Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain. III. Ann. Phys. (USA), 1972, 69, № 1, 76—100 (РЖФиз, 1972, 5Б9)
241. **Baltes H. P.**, Hilf E. R., Progress in Weyl's problem achieved by computational methods. Comput. Phys. Communs, 1972, **4**, № 2, 208—213 (РЖМат, 1975, 4Б564)
242. **Baouendi M. S.**, Goulaouic C., Étude de la régularité et du spectre d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. C. r. Acad. sci., 1968, **266**, № 6, A336—338 (РЖМат, 1969, 2Б647)
243. —, —, Régularité et theorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1969, **34**, № 5, 361—379 (РЖМат, 1970, 4Б698)
244. —, —, Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptique dégénérés; applications. J. Funct. Anal., 1972, **9**, № 2, 208—248 (РЖМат, 1972, 7Б609)
245. Beals R., On eigenvalue distribution for elliptic operators without smooth coefficients. I. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, **72**, № 4, 701—705 (РЖМат, 1968, 2Б402)
246. —, Classes of compact operators and eigenvalue distributions for elliptic operators. Amer. J. Math., 1967, **89**, № 4, 1056—1072 (РЖМат, 1968, 10Б690)
247. —, Global asymptotic estimates for elliptic spectral functions and eigenvalues. Bull Amer. Math. Soc., 1968, **74**, № 2, 358—360 (РЖМат, 1971, 5Б814)
248. —, On eigenvalue distribution for elliptic operators without smooth coefficients. II. Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**, № 5, 1022—1024 (РЖМат, 1970, 10Б303)
249. —, Asymptotic behaviour of Green's function and spectral function of an elliptic operator. J. Funct. Anal., 1970, **5**, № 3, 484—503 (РЖМат, 1971, 1Б752)
250. **Berger M.**, Gauduchon P., Mazet E., Le spectre d'une variété riemannienne. Lect. Notes Math., 1971, **194**, VII, 251 p. (РЖМат, 1971, 10А469)
251. **Berthier A.-M.**, Théorie spectrale pour des opérateurs elliptiques dégénérés sur le bord de domaines de geometrie donnée. C. r. Acad. sci., 1974, **A279**, № 2, 61—64 (РЖМат, 1975, 4Б864)
252. **Böiers L.-C.**, Eigenfunction expansions for partially hypoelliptic operators. Ark. mat., 1972, **10**, № 1, 79—98 (РЖМат, 1972, 11Б825)
253. **Boutet de Monvel L.**, Grisvard P., Le comportement asymptotique des valuers propres d'un opérateur. C. r. Acad. sci., 1971, **272**, № 1, A23—A26 (РЖМат, 1971, 7Б762)
254. —, —, The asymptotic behaviour of the eigenvalues of an operator related to widths of balls. Symp. math. Inst. naz. alta mat., vol. 7, London — New — York, 1971, 559—576 (РЖМат, 1972, 6Б685)
255. **Browder F. E.**, The asymptotic distribution of eigenfunctions and eigenvalues for semi — elliptic differential operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 1957, **43**, № 3, 270—273 (РЖМат, 1958, 2940)
256. —, Asymptotic distribution on eigenvalues and eigenfunctions for non — local elliptic boundary value problems. I. Amer. J. Math., 1965, **87**, № 1, 175—195 (РЖМат, 1966, 1Б489)
257. **Brownell F. H.**, An extension of Weyl's asymptotic law for eigenvalues. Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 4, 483—499 (РЖМат, 1956, 8852)
258. —, Clark C. W., Asymptotic distribution of the eigenvalues of the lower part of the Schrödinger operator spectrum. J. Math. and Mech., 1961, **10**, № 1, 31—70 (РЖМат, 1961, 12Б388)
259. **Brübach R.** Über die Spectralmatrix elliptischer Systeme. Math. Z., 1974, **140**, № 3, 231—244 (РЖМат, 1975, 6Б553)
260. **Brüning J.**, Zur Abschätzung der Spektralfunktion elliptisher Operatoren. Math. Z., 1974, **137**, № 1, 75—85 (РЖМат, 1975, 2Б646)
261. **Bui An Ton**, Asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions

for general linear elliptic boundary value problems. Trans. Amer. Math. Soc., 1966, **122**, № 2, 516—546 (РЖМат, 1968, 2Б405)
262. —, On the asymptotic behaviour of the spectral function of elliptic pseudodifferential operators. Ill. J. Math., 1970, **14**, № 3, 452—463 (РЖМат, 1971, 4Б728)
263. —, Asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions of a general class of elliptic pseudo — differential operators. Ill. J. Math., 1971, **15**, № 2, 290—301 (РЖМат, 1972, 1Б827)
264. **Canosa J.**, Asymptotic behaviour of Sturm-Liouville systems, J. Math. Phys., 1972, **13**, № 5, 615—621 (РЖМат, 1972, 10Б157)
265. **Carleman T.**, Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes. C. R. 8-éme Congr. des Math. Scand. Stockholm 1934, Lund, 1935, 34—44
266. **Chadan K.**, The asymptotic behaviour of the number of bound states of a given potential in the limit of large coupling. Nuovo Cimento., 1968, **A58**, № 1, 191—204 (РЖФиз, 1969, 4Б72)
267. **Chaudhuri J.**, Everitt W. N. The spectrum of a fourth-order differential operator. Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1970, **A68**, № 3, 185—210 (РЖМат, 1970, 8Б250)
268. —, —, On the distribution of the eigenvalues and the order of the eigenfunctions of a fourth-order singular boundary value problém. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1972, **A71**, № 1, 61—75 (РЖМат, 1973, 12Б317)
269. **Ciesielski Z.**, On the spectrum of the Laplace operator. Rocz. Pol. tow. mat., 1970, Ser. 1, 14, 41—50 (РЖМат, 1971, 5Б404)
270. **Clark C.**, An asymptotic formula for the eigenvalues of the Laplacian operator in an unbounded domain. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, **72**, № 4, 709—712 (РЖМат, 1968, 2Б404)
271. —, The asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions for elliptic boundary value problems. SIAM Rev., 1967, **9**, № 4, 627—646 (РЖМат, 1968, 10Б347)
272. —, On relatively bounded perturbations of ordinary differential operators. Pacif. J. Math. 1968, **25**, 1, 59—70 (РЖМат, 1969, 5Б718)
273. —, On the growth of the eigenvalues of the Laplacian operator in a quasibounded domain. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1968, **31**, № 5, 352—356 (РЖМат, 1969, 9Б277)
274. —, On the asymptotic formula for the eigenvalues of membranes and plates. Boll. Unione mat. ital., 1970, **3**, № 2, 191—196 (РЖМат, 1970, 12Б491)
275. —, Hewgill D., One can hear whether a drum has finite area. Proc. Amer. Math. Soc., 1967, **18**, № 2, 236—237 (РЖМат, 1968, 5Б403)
276. **Cohn J. H. E.**, Large eigenvalues of a Sturm-Liouville problem. Proc. Cambridge Philoc. Soc., 1967, **63**, № 2, 473—475 (РЖМат, 1968, 2Б285)
277. —, On the negative eigenvalues of a singular boundary value problem. Quart. J. Math., 1969, **20**, № 78, 187—191 (РЖМат, 1970, 2Б311)
278. **Colin de Verdière Y.**, Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 23, A1517—A1519 (РЖМат, 1973, 12А643)
279. —, Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. I. Compos. math., 1973, **27**, № 1, 83—106 (РЖМат, 1974, 6А800)
280. —, Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. II. Compos. Math., 1973, **27**, № 2, 159—184 (РЖМат, 1974, 10А555)
281. **Duistermaat J. J.**, Guillemin V. W., The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. Invent. math., 1975, **29**, № 1, 39—79.
282. **Eastham M. S. P.**, Results and problems in the spectral theory of periodic differential equations. Lect. Notes Math., 1975, **448**, 126—135 (РЖМат, 1975, 11Б823)
283. **Eberhard W.**, Über Eigenwerte und Eigenfunktionen einer Klasse von nichtselbstadjungierten Randwertproblemen. Math. Z., 1971, **119**, № 2, 174—178 (РЖМат, 1971, 9Б191)

284. **Eisenfeld J.**, Quadratic eigenvalue problems. J. Math. Anal. and Applic., 1968, **23**, № 1, 58—70 (РЖМат, 1970, 3Б300)
285. **El Kolli A.**, n^{leme} épaisseur dans les espaces de Sobolev avec poids. C. r. Acad. sci., 1971, **272**, № 8, A537—539 (РЖМат, 1971, 10Б499)
286. —, n-iéme épaisseur dans les espaces de Sobolev avec poids. J. Approxim. Theory, 1974, **10**, № 3, 268—294 (РЖМат, 1974, 8Б602)
287. **Fisher M. E.**, On hearing the shape of a drum. J. Combin. Theory, 1966, **1**, 105—125 (РЖМат, 1967, 12Б401)
288. **Fix G.**, Asymptotic eigenvaluer of Sturm-Lioville systems. J. Math. Analysis and applic., 1967, **19**, № 3, 519—525 (РЖМат, 1968, 5Б284)
289. **Fleckinger J.**, Metivier G., Théorie spectrale des opérateurs uniformément elliptiques sur quelques ouverts irréguliers. C. r. Acad. sci., 1973, **276**, № 3, A913—A916 (РЖМат, 1973, 9Б696)
290. **Freeman R. S.**, On the spectrum and resolvent of homogeneous elliptic differential operators with constant coefficients. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, **72**, № 3, 538—541 (РЖМат, 1968, 4Б364)
291. —, On the spectrum and resolvent of homogeneous elliptic differential operators with constant coefficients. Erratum. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, **73**, № 3, 496 (РЖМат, 1968, 5Б390)
292. **Froese J.** Asymptotic estimates for class 2 singular problems. J. Different. Equat., 1970, **7**, № 3, 435—447 (РЖМат, 1971, 1Б749)
293. **Fujiwara D.**, On the asymptotic formula for the Green operators for elliptic operators on compact manifolds. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 1967, **14**, № 2, 251—283 (РЖМат, 1969, 2Б598)
294. —, On the asymptotic behaviour of the Green operators for elliptic boundary problems and the pure imaginary powers of some second order operators. J. Math. Soc. Japan, 1969, **21**, № 4, 481—522 (РЖМат, 1970, 7Б356)
295. **Geymonat G.**, Grubb G., Spectral theory for boundary value problems for elliptic systems of mixed order. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, **80**, № 6, 1255—1259 (РЖМат, 1975, 6Б996)
296. **Giertz M.**, On lösningarna i L_2 $(-\infty, \infty)$ till ekvationen $-y''+(\lambda-q(x))y=0$ när gär snabbt växande. KTH — Avhandl., 1969, 251, 3 (РЖМат, 1970, 5Б269)
297. **Goulaouic Ch.**, Sur la théorie spectrale des opérateurs elliptiques (éventuellement dégénérés). Lect. Notes Math., 1971, **179**, 231—244 (РЖМат, 1971, 9Б571)
298. —, Degenerate elliptic boundary value problems and applications. Lect. Notes Math., 1974, **419**, 137—142 (РЖМат, 1975, 7Б347)
299. **Greiner P.**, An asymptotic expansion for the heat equation. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1971, **41**, № 3, 163—218 (РЖМат, 1972, 2Б365)
300. **Gromes D.**, Über die asymptotishe Verteilung der Eigenverte des Laplace — Operators für Gebiete auf der Kugeloberfläche. Math. Z., 1966, **94**, № 2, 110—121 (РЖМат, 1967, 6Б309)
301. **Gromes W.**, Über das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion elliptischer Systeme. Math. Z., 1970, **118**, № 4, 254—270 (РЖМат, 1971, 5Б779)
302. —, Über die Spektralfunction elliptischer Systeme auf Riemanschen Mannigfaltigkeiten. Math. Z., 1971, **123**, № 4, 340—350 (РЖМат, 1972, 4Б485)
303. **Grubb G.**, Le spectre négatif des problèmes aux limites autoadjoints fortement elliptiques. C. r. Acad. sci., 1972, **274**, № 5, A409—A412 (РЖМат, 1972, 7Б291)
304. —, Inequalities for boundary value problems for systems of partial differential operators. Colloq. Int. CNRS, 1973, **213**, 171—187 (РЖМат, 1974, 3Б315)
305. **Guillemot-Teissier M.**, Applications des méthodes variationneles a l'étude spectrale d'opérateurs dégénérés. C. r. Acad. sci., 1973, **277**, № 15, A739—A742 (РЖМат, 1974, 4Б728)
306. —, Propriétés spectrales de certains opérateur elliptique dégénérés. C. r. Acad. sci., 1974, **278**, № 3, A137—A140 (РЖМат, 1974, 7Б788)

307. **Hewgill D.**, On the eigenvalues of Laplacian in an unbounded domain. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1967, **27**, № 2, 153—164 (РЖМат, 1968, 7Б344)
308. —, On the eigenvalues of a second order elliptic operator in an unbounded domain. Pacif. J. Math., 1974, **51**, № 2, 467—476 (РЖМат, 1975, 3Б325)
309. —, On the growth of the eigenvalues of an elliptic operator in a quasi-bounded domain. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1974, **56**, № 4, 367—371 (РЖМат, 1975, 9Б283)
310. **Heywood P.** On the asymptotic distribution of eigenvalues. Proc. London Math. Soc., 1954, **4**, № 16, 456—470 (РЖМат, 1956, 2209)
311. **Hochstadt H.**, The distribution of eigenvalues of ordinary differential operators. Proc. Roy. Soc. London, 1969, **A310**, № 1503, 565—577 (РЖМат, 1970, 1Б619)
312. —, A second order differential operator with eigenvalue degeneracy. Stud. Appl. Math., 1972, **51**, № 1, 99—105 (РЖМат, 1972, 12Б277)
313. **Jerome J. W.**, Asymptotic estimate of the L_2 n-width. J. Math. Analysis and Applic., 1968, **22**, № 3, 449—464 (РЖМат, 1969, 1Б374)
314. **Kac M.**, Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly, 1966, **73**, № 4, 1—23 (РЖМат, 1967, 2Б357)
315. —, Moerbke P. van., On some isospectral second order differential operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1974, **71**, № 6, 2350—2351 (РЖМат, 1975, 1Б963)
316. **Kannai Y.**, On the asymptotic behaviour of resolvent kernels, spectral functions and eigenvalues of semi-elliptic systems. Ann Scuola Norm. Super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1969, **23**, № 4, 563—634 (РЖМат, 1970, 7Б408)
317. **Keller J.**, Ahluwalia D., Uniform asymptotic solution of eigenvalue problems for convex plane domain. SIAM J. Appl. Math., 1973, **25**, № 4, 583—591 (РЖМат, 1974, 8Б442)
318. —, Rubinow S., Asymptotic solution of eigenvalue problems. Annals of Physics, 1960, **9**, № 1, 24—75 (РЖМат, 1962, 1Б225)
319. —, —, Asymptotic solution of eigenvalue problems. Annals of Physics, 1960, **10**, № 2, 303—305 (РЖМат, 1961, 9Б193)
320. **Kuttler J. R.**, Sigillito V. G., Lower bounds for Stekloff and free membrane eigenvalues. SIAM Rev., 1968, **10**, № 3, 368—370 (РЖМат, 1969, 10Б266)
321. **Larsson E.**, On the asymptotic distribution of eigenvalues. Arkiv mat., 1966, **6**, № 6, 563—573 (РЖМат, 1968, 5Б402)
322. **Louchard G.**, Mouvement Brownien et valeurs propres du laplacien. Ann. Inst. H. Poincare, 1968(1969), **4**, № 4, 331—342 (РЖМат, 1969, 12В92)
323. **Makai E.**, Complete orthogonal systems of eigenfunctions of three triangular membranes. Stud. Sci. math. hung., 1970, **5**, № 1—2, 51—62 (РЖМат, 1971, 4Б474)
324. —, Vollstände orthogonale Systeme von Eigenfunktionen zweier dreieckiger Membranen. Schriften Inst. Math. Dtsch. Acad. Wiss. Berlin, 1970, **A**, № 7, 77—81 (РЖМат, 1971, 8Б277)
325. **Maruo K.**, Asymptotic distribution of eigenvalues of non-symmetric operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms. Osaka J. Math., 1972, **9**, № 3, 547—560 (РЖМат, 1973, 8Б731)
326. —, The asymptotic formulas for eigenvalues of elliptic operators which degenerate at the boundary. Proc. Jap. Acad., 1972, **48**, № 7, 454—457 (РЖМат, 1973, 11Б246)
327. —, Tanabe H., On the asymptotic distribution of eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms. Osaka J. Math., 1971, 8, № 3, 323—345 (РЖМат, 1973, 1Б548)
328. —, —, On the asymptotic distribution of eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms. Proc. Jap. Acad., 1971, **47**, № 3, 268—270 (РЖМат, 1972, 1Б826)
329. **Mc Kean H. P.**, Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann

surface. Comm. pure Appl. Math., 1972, **25**, № 3, 225—246 (РЖМат, 1973, 1А591)

330. —, Singer J. M., Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. J. Different Geom., 1967, **1**, № 1, 43—69 (РЖМат, 1968, 10А521)
331. **Mc Leod J. B.**, On the distribution of eigenvalues for an n-th order equation. Quart. J. Math., 1966, **17**, № 66, 112—131 (РЖМат, 1967, 11Б276)
332. **Mizohata S.**, Sur les propriétés asymptotiques des valeurs propres pour les opérateurs elliptiques. Proc. Japan Acad., 1965, **41**, № 2, 104—108 (РЖМат, 1967, 6Б310)
333. —, Sur les propriétés asymptotiques des valeurs propres pour les opérateurs elliptiques. J. Math. Kyoto Univ., 1965, **4**, № 3, 399—428 (РЖМат, 1967, 10Б346)
334. **Nagase M.**, On the asymptotic behavior of resolvent kernels for elliptic operators. J. Math. Soc. Jap., 1973, **25**, № 3, 464—474 (РЖМат, 1974, 4Б729)
335. **Nayfeh A. H.**, Asymptotic solutions of second — order linear equations with three transition points. J. Math. Phys., 1974, **15**, № 12, 2063—2066 (РЖМат, 1975, 6Б365)
336. **Nilsson N.**, Asymptotic estimates for spectral function connected with hypoelliptic differential operators. Arkiv mat., 1965, **5**, № 6, 527—540 (РЖМат, 1966, 6Б413)
337. —, Some estimates for spectral functions connected with formally hypoelliptic differential operators. Ark. Mat., 1972, **10**, № 2, 251—275 (РЖМат, 1973, 6Б728)
338. **Nordin C.** Asymptotic distribution of the eigenvalues of a degenerate elliptic operator. Ark. mat., 1972, **10**, № 1, 9—21 (РЖМат, 1972, 11Б408)
339. **Odhnoff J.**, Operators generated by differential problems with eigenvalue parameter in equation and boundary condition. Medd. Lunds univ. mat. semin., 1959, **14**, 88 p. (РЖМат, 1961, 4Б246)
340. **Pham The Lai**, Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés en dimension 2. C. r. Acad. Sci., 1974, **A278**, № 26, 1619—1622 (РЖМат, 1975, 1Б486)
341. —, Classe de compacité d'opérateurs intervenant dans une classe de problèmes elliptiques dégénérés, Isr. J. Math., 1974, **17**, № 4, 364—379 (РЖМат, 1975, 2Б648)
342. —, Opérateurs elliptiques dégénérés: comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres. C. r. Acad. sci., 1975, **280**, № 16, A1067—A1070 (РЖМат, 1975, 11Б396)
343. **Pleyel Å.**, Certain indefinite differential eigenvalue problems—the asymptotic distribution of their eigenfunctions. «Partial Differential Equations and Continuum Mech.», Madison, Wisconsin Press, 1961, 19—37 (РЖМат, 1962, 11Б218)
344. **Sandgren L.**, A vibration problem. Medd. Lunds univ. mat. semin., 1955, 13,84 pp (РЖМат, 1958, 2048)
345. **Seeley R.**, Complex powers of an elliptic operator. Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 1968, **10**, 288—307.
346. —. The resolvent of an elliptic boundary problem. Amer. J. Math., 1969, **91**, № 4, 889—920 (РЖМат, 1971, 1Б387)
347. —, Analytic extension of the trace associated with elliptic boundary problems. Amer. J. Math., 1969, **91**, № 4, 963-983 (РЖМат, 1971, 2Б450)
348. —, Fractional powers of boundary problems. «Actes Congr. int. mathematiciens, 1970. t. 2» Paris, 1971, 795—801 (РЖМат, 1972, 6Б355)
349. **Shamma S. E.**, Asymptotic behaviour of Stekloff eigenvalues and eigenfunctions. SIAM J. Appl. Math., 1971, **20**, № 3, 482—490 (РЖМат, 1971, 12Б459)
350. —, Asymptotic eigenfunctions of mixed problems of Stekloff's type. Z. angew. Math. und Phys., 1972, **23**, № 1, 1—12 (РЖМат, 1972, 12Б369)
351. —, On the asymptotic solutions of a generalized eigenvalue problem. Z. angew. Math. und Phys., 1973, **24**, № 1, 131—134 (РЖМат, 1973, 12Б817)

352. **Shimakura N.**, Quelques exemples des ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre. Proc. Jap. Acad., 1969, **45**, № 10, 866—871 (РЖМат, 1971, 5Б402)
353. —, Quelques exemples des ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre. II. Proc. Jap. Acad., 1970, **46**, № 10, Suppl., 1065—1069 (РЖМат, 1972, 1Б436)
354. —, Sur les ζ-fonction d'Epstein pour des operateurs elliptiques degeneres. Tohoku Math. J., 1974, **26**, № 1, 95—131 (РЖМат, 1974, 9Б421)
355. **Sibuya Y.**, Subdominant solutions of the differential equation $y''-\lambda^2(x-a_1)\ldots(x-a_m)y=0$. Acta math., 1967, **119**, № 3—4, 235—272 (РЖМат, 1968, 8Б189)
356. **Simon B.**, On the growth of the number of bound states with increasein potential strength. J. Math. Phys., 1969, **10**, № 7, 1123—1126 (РЖФиз, 1970, 1Б38)
357. **Stewartson K.**, Waechter R. T., On hearing the shape of a drum: further results. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1971, **69**, № 2, 353—363 (РЖМат, 1971, 9Б363)
358. **Tamura H.**, The asymptotic eigenvalue distribution for non-smoth elliptic operators. Proc. Jap. Acad., 1974, **50**, № 1, 19—22 (РЖМат, 1975, 7Б761)
359. —, The asymptotic distribution of the lower part eigenvalues for elliptic operators. Proc. Jap. Acad., 1974, **50**, № 3, 185—187 (РЖМат, 1975, 11Б399)
360. **Tanabe H.**, On Green's function of elliptic and parabolic boundary value problems. Proc. Jap. Acad., 1972, **48**, № 10, 709—711 (РЖМат, 1974, 1Б243)
361. —, On remainder estimates in the asymptotic formulae of the distribution of eigenvalues of elliptic operators. Proc. Jap. Acad., 1972, **48**, № 6, 377—380 (РЖМат, 1973, 9Б695)
362. **Titchmarsh E. C.**, On the asymptotic distribution of eigenvalues. Quart. J. Math.. 1954, **5**, № 19, 228—240 (РЖМат, 1956, 6566)
363. **Tsutsumi A.**, On the asymptotic behaviour of resolvent kernels and spectral functions for some class of hypoelliptic operators. Proc. Jap. Acad., 1974. **50**, № 1, 63—66 (РЖМат, 1975, 7Б763)
364. —, On the asymptotic behaviour of resolvent kernels and spectral functions for some class of hypoelliptic operators. J. Diff. eq., 1975, **18**, 366—385.
365. —, Wang Chung—Lie, On the asymptotic distribution of eigenvalues for semi-elliptic operators. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **199**, 295—315 (РЖМат, 1975, 7Б762)
366. **Waechter R. T.**, On hearing the shape of a drum: an extension to higher dimensions. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1972, **72**, № 3, 439—447 (РЖМат, 1973, 3Б456)
367. **Watanabe M.**, On the asymptotic distribution of eigenvalues of non — symmetric operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms. Sci. Repts Niigata Univ., 1974, **A**, № 11, 69—84 (РЖМат, 1974, 11Б894)
368. **Weinberg L.**, The asymptotic distribution of eigenvalues for the boundary value problem $y''(x)-\lambda^2 p(x)y(x)=0$, $y\in L^2(-\infty, +\infty)$. SIAM J. Math. Anal., 1971, 2, № 4, 546—566 (РЖМат, 1972, 7Б243)
369. **Weston V. H.**, The spectral distribution for a differential equation, associated with infrasing waves. J. Math. Anal. and Appl., 1970, **30**, № 3, 596—604 (РЖМат, 1971, 1Б287)
370. **Wett J. S.**, Mandl F. On the asymptotic distribution of eigenvalues. Proc. Roy. Soc., 1950, **A200**, 572—580
371. **Weyl H.**, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen. Math. Ann., 1912, **71**, 441—479
372. —, Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von der Begrenzung. J. Reine Angew. Math., 1912, 141, 1—11
373. **Wilkins J.**, Ernest J., The eigenvalues of the Bethe differential system. SIAM J. Math. Anal., 1973, **4**, № 1, 62—77 (РЖМат, 1973, 9Б249)

УДК 513.88

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РАСШИРЕНИЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОСНАЩЕННЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Э. Р. Цекановский, Ю. Л. Шмульян

Классическая теория эрмитовых и самосопряженных расширений плотно заданных эрмитовых операторов была построена Дж. Нейманом и в настоящее время излагается во многих руководствах по теории операторов (см., например, [5]).

Эта теория обобщалась в различных направлениях. М. А. Наймарк [33, 34] разработал теорию расширений эрмитовых операторов с выходом в расширенное пространство. М. А. Красносельский [17] распространил теорию Дж. Неймана на неплотно заданные эрмитовы операторы. В ряде работ М. С. Лившица [28, 29], А. В. Штрауса [64, 65], А. В. Кужеля [26, 27] и др. авторов были рассмотрены уже не эрмитовы, а более общие, квазиэрмитовы расширения эрмитовых операторов.

Методы теории оснащенных гильбертовых пространств, основанные на пополнении исходного гильбертова пространства несобственными (обобщенными) элементами, широко используются в различных вопросах функционального анализа. Эти методы сыграли существенную роль в спектральном анализе неограниченных самосопряженных операторов. Введение несобственных элементов оказалось весьма важным и в так называемой теории представления эрмитовых операторов (см. ниже гл. VI).

Исследования М. С. Лившица по теории открытых систем привели к понятию операторного узла. Теория ограниченных операторных узлов и ее приложения достаточно полно изложены в монографиях М. С. Бродского [11] и М. С. Лившица — А. А. Янцевича [31]. Естественно, что спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов и, в частности, теория неограниченных операторных узлов, должны быть построены в рамках теории оснащенных пространств.

Настоящая статья является обзором результатов, связанных с применением методов теории оснащенных гильбертовых пространств в теории расширения эрмитовых операторов.

Ниже мы придерживаемся следующих обозначений: если C — линейный оператор, то через $\mathfrak{D}(C)$ обозначается область его задания, через $\mathfrak{R}(C)$ — область его значений, через $\mathfrak{N}(C)$ — множество аннулируемых им векторов (ядро).

Если $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — два гильбертовых пространства, то через $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$ будем обозначать пространство всех линейных непрерывных операторов C, действующих из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ ($\mathfrak{D}(C)=\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{R}(C)\subset\mathfrak{H}_2$). Сужение оператора C на линеал L будем обозначать через $C \mid L$.

Подпространством будем называть замкнутый линеал.

Открытую верхнюю (нижнюю) полуплоскость комплексной плоскости будем обозначать через $\Pi+$ $(\Pi-)$.

Глава I

ОПЕРАТОРЫ В ОСНАЩЕННЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. ГЕОМЕТРИЯ ОСНАЩЕННЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Определяя оснащенное гильбертово пространство, мы следуем, в основном, Ю. М. Березанскому [6, 7].

Пусть $\mathfrak{H}$ — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\|$, $\mathfrak{H}_+$ — плотный в $\mathfrak{H}$ линеал, являющийся гильбертовым пространством относительно некоторого другого скалярного произведения $(x, y)_+$ и нормы $\|x\|_+$. Будем считать, что $\|x\|\leqslant\|x\|_+$ $(\forall x\in\mathfrak{H}_+)$, т. е. что норма $\|x\|_+$ порождает в $\mathfrak{H}_+$ более сильную топологию, чем норма $\|x\|$. Пространство $\mathfrak{H}_+$ называется пространством с позитивной нормой.

Пусть $\mathfrak{H}_-$ — пространство, сопряженное к $\mathfrak{H}_+$, т. е. пространство линейных функционалов, заданных на $\mathfrak{H}_+$ и непрерывных относительно нормы $\|x\|_+$. Норму в $\mathfrak{H}_-$ будем обозначать через $\|f\|_-$, а значение функционала $f\in\mathfrak{H}_-$ на векторе $x\in\mathfrak{H}_+$ — через (x, f). Заметим, что значение функционала $\lambda f\in\mathfrak{H}_-$ на векторе $x\in\mathfrak{H}_+$ равно $\bar{\lambda}(x, f)$.

Пространство $\mathfrak{H}_-$ называется пространством с негативной нормой. Пространство $\mathfrak{H}$ вкладывается в $\mathfrak{H}_-$, причем $\|f\|\geqslant\|f\|_-$.

Тройку пространств $\mathfrak{H}_+\subset\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}_-$ с определенными выше свойствами называют оснащенным гильбертовым пространством или, короче, — оснащением.

Согласно известной теореме Ф. Рисса, существует биективное отображение $\mathbf{R}$ пространства $\mathfrak{H}_+$ на $\mathfrak{H}_-$, так что

$(x, \mathbf{R}y)=(x, y)_+$ $(\forall x \in \mathfrak{H}_+)$, причем $\|y\|_+=\|\mathbf{R}y\|_-$. Оператор $\mathbf{R}$ будем называть оператором Рисса, отвечающим данному оснащению. Введя в $\mathfrak{H}_-$ скалярное произведение формулой $(f, g)_-=(\mathbf{R}^{-1}f, \mathbf{R}^{-1}g)_+$, мы превратим $\mathfrak{H}_-$ в гильбертово пространство.

В дальнейшем мы будем сопровождать геометрические и топологические понятия в пространствах $\mathfrak{H}_+$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_-$ указанием на нормы $(\|x\|_+, \|x\|, \|x\|_-)$, относительно которых эти понятия рассматриваются, сопоставляя с этими нормами символы $(+)$, $(\cdot)$, $(-)$ соответственно. Символ $(\cdot)$ будет иногда опускаться. Говоря о непрерывности либо о замкнутости операторов, будем указывать сначала топологию в его области определения, а затем в его области значений. Так, например, оператор B будем называть $(-, \cdot)$-непрерывным, если $\mathfrak{D}(B)\subset\mathfrak{H}_-$, $\mathfrak{R}(B)\subset\mathfrak{H}$ и

$$\sup_{x\in\mathfrak{D}(B)} \frac{\|Bx\|}{\|x\|_-} < \infty.$$

Замыкание множества L по норме $\|x\|_+$, $\|x\|$ и $\|x\|_-$ будем обозначать соответственно через $\overline{L}^{(+)}$, $\overline{L}$, $\overline{L}^{(-)}$.

Если L — подмножество из $\mathfrak{H}_+$, то его ортогональным дополнением $L^\perp$ называют множество тех функционалов $f\in\mathfrak{H}_-$, которые аннулируют L. Таким образом, $L^\perp\subset\mathfrak{H}_-$. Аналогично, если $L\subset\mathfrak{H}_-$, то его ортогональное дополнение $L^\perp(\subset\mathfrak{H}_+)$ есть множество тех $x\in\mathfrak{H}_+$, на которых аннулируются все функционалы из L.

Если же $L\subset\mathfrak{H}$, то $L^\perp(\subset\mathfrak{H})$ — множество векторов из $\mathfrak{H}$, $(\cdot)$-ортогональных L. Если L — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $L^\perp=\mathfrak{H}\ominus L$.

Нижеследующая теорема, установленная А. А. Володиным и Ю. Л. Шмульяном [13], выражает своеобразную двойственность операций замыкания и пересечения при переходе к ортогональным дополнениям.

Теорема 1.1.

а) если L — подпространство в $\mathfrak{H}$, то

$$(\overline{L}^{(-)})^\perp=L^\perp\cap\mathfrak{H}_+,\quad (L\cap\mathfrak{H}_+)^\perp=\overline{L^\perp}^{(-)}. \tag{1.1}$$

б) Если L — подпространство в $\mathfrak{H}_+$, то

$$(\overline{L})^\perp=L^\perp\cap\mathfrak{H}.$$

в) Если L — подпространство из $\mathfrak{H}_-$, то

$$(L\cap\mathfrak{H})^\perp=\overline{L^\perp}.$$

2. Каждый из классов $[\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-]$ и $[\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}_+]$ инвариантен относительно перехода к сопряженному оператору. Поэтому в этих классах определено понятие самосопряженного опера-

тора. Эти операторы T характеризуются вещественностью квадратичного функционала (Tf, f). Если $(Tf, f) \geq 0$ при всех f, то оператор T назовем неотрицательным.

В [50, 54] Ю. Л. Шмульяном был введен в рассмотрение класс $\mathfrak{Q}$ бинепрерывных операторов.

Оператор T называется бинепрерывным, если $T \in [\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}]$, а $(T \mid \mathfrak{H}) \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_+]$.

В классе $\mathfrak{Q}$ можно ввести понятие сопряжения $T \leftrightarrow T^0$, если в качестве T^0 взять оператор из $[\mathfrak{H}_-, \mathfrak{K}]$, сопряженный в обычном смысле к оператору $T \mid \mathfrak{H}$.

Оператор T^0 будем называть $\mathfrak{Q}$-сопряженным по отношению к T. Оператор $T \in \mathfrak{Q}$, для которого $T = T^0$, будем называть $\mathfrak{Q}$-самосопряженным. $\mathfrak{Q}$-самосопряженность бинепрерывного оператора T характеризуется вещественностью функционала (Tf, f) на $\mathfrak{H}$.

Если $T \in [\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}_+]$, то $T^0 = T^*$, т. е. соответствие $T \leftrightarrow T^0$ является продолжением соответствия $T \leftrightarrow T^*$ в $[\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}_+]$

3. Часто оснащение гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ строится по некоторому заданному оператору (Ю. Л. Шмульян [54], Э. Р. Цекановский [40]).

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ задан замкнутый оператор A, область задания $\mathfrak{D}(A)$ которого не предполагается плотной в $\mathfrak{H}$. Положив $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}_0$, рассмотрим A как плотно заданный из $\mathfrak{H}_0$ в $\mathfrak{H}$. Построим сопряженный к нему оператор A^*, область задания которого $\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{H}_+$ плотна в $\mathfrak{H}$ $(\mathfrak{R}(A^*) \subset \mathfrak{H}_0)$.

Введем в $\mathfrak{H}_+$ скалярное произведение $(x, y)_+ = (x, y) + (A^*x, A^*y)$ и построим соответствующее оснащение $\mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_-$.

Теорема 1.2 [54]. а) Оператор A является $(\cdot, -)$-непрерывным;

б) Если $\hat{A}$ — расширение A по $(\cdot, -)$-непрерывности на $\mathfrak{H}_0$ $(\hat{A} \in [\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_-])$, то оператор Рисса задается формулой $\mathbf{R} = I + \hat{A}A^*$.

§ 2. АНАЛОГ ФОРМУЛЫ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕПЛОТНО ЗАДАННОГО ЭРМИТОВА ОПЕРАТОРА. РЕГУЛЯРНЫЕ И СИНГУЛЯРНЫЕ ЭРМИТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

1. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что A — замкнутый эрмитов (з. э.) оператор, т. е.

$$(Ax, y) = (x, Ay) \, (\forall x, y \in \mathfrak{D}(A)).$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(A^*) (= \mathfrak{H}_+)$ и $A^*y = PAy$ $(\forall y \in \mathfrak{D}(A))$, где P — ортопроектор $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_0 = \overline{\mathfrak{D}(A)}$.

Для любого комплексного λ полагаем $\mathfrak{M}_\lambda = (A - \lambda I)\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{M}_{\bar\lambda}^{\perp}$. Подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ называется дефектным подпространством оператора A, а кардинальное число $\dim \mathfrak{N}_\lambda$ — дефектным числом этого оператора. Это число одинаково для всех $\lambda \in \Pi_+$, а также для всех $\lambda \in \Pi_-$.

Подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$ принадлежит $\mathfrak{H}_+$ и совпадает с множеством решений уравнения $A^* g = \lambda P g$.

Пусть $A_0 = PA$. Оператор A_0 действует в $\mathfrak{H}_0$, является эрмитовым и имеет $(\cdot)$-плотную в $\mathfrak{H}_0$ область определения $\mathfrak{D}(A_0) = \mathfrak{D}(A)$. Этот оператор, вообще говоря, не замкнут (подробнее об этом речь пойдет в п. 3). Его замыкание $\overline{A_0}$ является з. э. оператором с областью задания $\overline{\mathfrak{D}(A)}^{(+)}$, а область задания оператора $(\overline{A_0})^* = A_0^*$ совпадает с $\mathfrak{H}_+ \cap \mathfrak{H}_0$.

Пусть P_λ — $(\cdot)$-ортопроектор на $\mathfrak{N}_\lambda$, $L_0 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{P}_\lambda = P_\lambda L_0$, $\mathfrak{N}'_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda \ominus \overline{\mathfrak{P}}_\lambda$. Легко видеть, что $\mathfrak{N}'_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda \cap \mathfrak{H}_0$ и, следовательно, $\mathfrak{N}'_\lambda$ совпадает с множеством решений уравнения $A^* g = \lambda g$. Подпространство $\mathfrak{N}'_\lambda$ является дефектным для плотно заданного з. э. оператора $\overline{A_0}$ в пространстве $\mathfrak{H}_0$. Отсюда следует, что кардинальное число $\dim \mathfrak{N}'_\lambda$ сохраняет постоянное значение как в Π_+, так и в Π_-. $\mathfrak{N}'_\lambda$ называется полудефектным подпространством оператора A, а $\dim \mathfrak{N}'_\lambda$ — полудефектным числом. Таким образом, з. э. оператору отвечает пара полудефектных чисел $\dim \mathfrak{N}'_i$ и $\dim \mathfrak{N}'_{-i}$.

Оператор $P_{\pm i} | L_0$ является $(-, \cdot)$-изометрией L_0 на $\mathfrak{P}_{\pm i}$, т. е. $\| P_{\pm i} x \| = \| x \|_-$ $(\forall x \in L_0)$. Поэтому оператор $V : \mathfrak{P}_i \to \mathfrak{P}_{-i}$, действующий по формуле $V P_i x = P_{-i} x$ $(\forall x \in L_0)$, является $(\cdot, \cdot)$-изометрией. Этот оператор, играющий важную роль в теории расширения, будем называть оператором запрета. Впервые он был введен в [17].

2. В случае плотно заданного з. э. оператора A хорошо известна формула Неймана $\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, причем при $\lambda = \pm i$ последнее разложение является $(+)$-ортогональным. В случае неплотно заданного з. э. оператора A имеет место непрямое разложение $\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, установленное в [17].

Нам, однако, понадобится другое обобщение формулы Неймана, полученное независимо Ю. Л. Шмульяном [59] и Ю. М. Арлинским — Э. Р. Цекановским [3, 4] (см. ниже равенство (1.2)).

Обозначим $\mathfrak{D}(\overline{A_0}) = \overline{\mathfrak{D}(A)}^{(+)}$ через $\mathfrak{D}$ и положим $L_0 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$. В силу теоремы 1.1, $\overline{L}_0^{(-)}$ является ортогональным дополнением подпространства $\mathfrak{H}_+ \cap \mathfrak{H}_0 := \mathfrak{D}_*$, а следовательно, $\mathfrak{N} := \mathbf{R}^{-1}(\overline{L}_0^{(-)})$ является $(+)$-ортогональным дополнением $\mathfrak{D}_*$ (в $\mathfrak{H}_+$).

При любом невещественном λ справедливо равенство

$$\mathfrak{H}_+ = (\mathfrak{D} + \mathfrak{N}'_\lambda + \mathfrak{N}'_{\bar\lambda}) \oplus \mathfrak{N}, \tag{1.2}$$

являющееся обобщением формулы Неймана.

При $\lambda = \pm i$ получаем $(+)$-ортогональное разложение

$$\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{N}'_i \oplus \mathfrak{N}'_{-i} \oplus \mathfrak{N}. \tag{1.3}$$

Из (1.3) видно, что $(+)$-ортогональное дополнение подпространства $\mathfrak{D}$ имеет вид $\mathfrak{M} := \mathfrak{N}'_i \oplus \mathfrak{N}'_{-i} \oplus \mathfrak{N}$.

Если $\mathfrak{F} (\subset \mathfrak{H}_-)$ — ортогональное дополнение линеала $\mathfrak{D}(A) (\subset \mathfrak{H}_+)$, то

$$\mathfrak{F} = \mathbf{R}\mathfrak{M} = \mathbf{R}\mathfrak{N}'_i \oplus \mathbf{R}\mathfrak{N}'_{-i} \oplus \bar{L}_0^{(-)},$$

причем последнее разложение $(-)$-ортогонально.

Для произвольного подпространства $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}_+$ будем через $P^+_{\mathfrak{G}}$ обозначать $(+)$-ортопроектор на $\mathfrak{G}$.

Теорема 1.3. Оператор $P^+_{\mathfrak{M}}$ отображает биективно и гомеоморфно подпространства $\mathfrak{N}_{\pm i}$ с $(\cdot)$-метрикой на $\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{N}'_{\pm i}$ с $(+)$-метрикой.

Введем в $\mathfrak{M}$ новую норму

$$\| x \|_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\| x \|_+^2 + \| P^+_{\mathfrak{N}} x \|^2)}$$

и соответствующее скалярное произведение $(x, y)_1$.

Из очевидного неравенства $\frac{1}{\sqrt{2}} \| x \|_+ \leqslant \| x \|_1 \leqslant \| x \|_+$ вытекает топологическая эквивалентность норм $\| x \|_+$ и $\| x \|_1$.

Гильбертово пространство $\mathfrak{M}$ со скалярным произведением $(x, y)_1$ будем обозначать через $\mathfrak{M}_1$, а геометрические и топологические понятия, связанные с нормой $\| x \|_1$, будем сопровождать символом (1)-. При этих обозначениях отображения $P^+_{\mathfrak{M}} | \mathfrak{N}_{\pm i}$, упоминаемые в теореме 1.3, являются $(\cdot, 1)$-изометричными.

3. М. А. Красносельский показал [17], что при всех λ, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, либо все линеалы $\mathfrak{P}_\lambda$ замкнуты, либо все они незамкнуты. В первом случае оператор A называется регулярным, во втором — сингулярным.

Ю. Л. Шмульян [49, 59] применил методы теории оснащенных пространств к исследованию классов регулярных и сингулярных операторов. Им было доказано предложение:

Теорема 1.4. Для з. э. A следующие утверждения эквивалентны:

1) Оператор A регулярен.
2) Линеал $\mathfrak{D}(A)$ $(+)$-замкнут.
3) Оператор $A_0 = PA$ замкнут.

4) Оператор $A(+, \cdot)$-ограничен.

5) Линеал $L_0(-)$-замкнут.

6) Линеал $L_0 + \mathfrak{M}_\lambda(\cdot)$-замкнут.

7) $\mathfrak{H}_0 + \mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{H}$ при всех невещественных λ.

8) $\mathfrak{H}_0 + \mathfrak{P}_\lambda = \mathfrak{H}$ при всех невещественных λ.

Из этой теоремы вытекают следующие достаточные условия регулярности з. э. оператора A: а) конечность коразмерности $\mathfrak{H}_0$ в $\mathfrak{H}$; б) включение $L_0 \subset \mathfrak{H}_+$ [49].

Для регулярного оператора A формула Неймана (1.2) примет вид

$$\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{D}(A) + \mathfrak{N}'_\lambda + \mathfrak{N}'_{\bar\lambda} \oplus \mathfrak{N},$$

где $\mathfrak{N} = \mathrm{R}^{-1} L_0$.

Глава II

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ БИРАСШИРЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. ЗАМКНУТЫЕ ЭРМИТОВЫ РАСШИРЕНИЯ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Пусть A — з. э. оператор, вообще говоря, с неплотной областью определения. М. А. Красносельским [17] была построена теория эрмитовых (в частности — самосопряженных) расширений таких операторов. Напомним некоторые положения этой теории.

Через V будем обозначать оператор запрета. Изометрический оператор Φ $(\mathfrak{D}(\Phi) = \overline{\mathfrak{D}(\Phi)} \subset \mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{R}(\Phi) \subset \mathfrak{N}_{-i})$ назовем допустимым, если равенство $\Phi x = V x$ выполняется лишь при $x = 0$. Для такого оператора Φ будем обозначать через $\mathfrak{D}_\Phi$ линеал

$$\{g - \Phi g;\ g \in \mathfrak{D}(\Phi)\}\ (\subset \mathfrak{N}_i + \mathfrak{N}_{-i}).$$

1) Общий вид з. э. расширений $\tilde{A}$ оператора A дается формулой

$$\tilde{A}(g + \varphi - \Phi\varphi) = Ag + i(\varphi + \Phi\varphi) \quad (g \in \mathfrak{D}(A),\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Phi)), \tag{2.1}$$

где $\Phi = \Phi_{\tilde{A}}$ — допустимый оператор. Таким образом $v(\tilde{A}) = \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}_\Phi$.

2) Для того чтобы оператор $\tilde{A}$ был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathfrak{D}(\Phi) = \mathfrak{N}_i,\ \mathfrak{R}(\Phi) = \mathfrak{N}_{-i}.$$

В случае регулярного A, Ю. М. Арлинским, Э. Р. Цекановским и Ю. Л. Шмульяном [3, 48, 59] был введен и исследован класс так называемых регулярных расширений оператора A.

Пусть $\tilde{A}$ — замкнутое эрмитово расширение оператора A. Тогда

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) \subset \mathfrak{H}_+ \text{ и } P\tilde{A}x = A^*x \quad (\forall x \in \mathfrak{D}(\tilde{A})).$$

Теорема 2.1. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Линеал $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ $(+)$-замкнут.

2) Оператор $\tilde{A}$ $(+, \cdot)$-ограничен.

3) Оператор $A^* | \mathfrak{D}(\tilde{A})$ $(\cdot, \cdot)$-замкнут.

Определение. З. э. расширение $\tilde{A}$ регулярного з. э. оператора A, удовлетворяющее условиям 1)—3) теоремы 2.1 будем называть регулярным.

В случае регулярного з. э. оператора A можно дать описание его эрмитовых (в частности — самосопряженных) расширений в иных терминах, чем в [17]. При этом легко могут быть охарактеризованы регулярные расширения.

Теорема 2.2. I. Каждому з. э. расширению $\tilde{A}$ регулярного оператора A отвечает (1)-изометрический оператор $K = K(\tilde{A})$ в $\mathfrak{M}_1$ со свойствами:

а) $\mathfrak{D}(K)$ $(+)$-замкнуто и $\subset \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{N}'_i$, $\mathfrak{R}(K) \subset \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{N}'_{-i}$,

б) $Kh = h$ лишь при $h = 0$,

такой, что $\tilde{\mathfrak{D}}(A) = \mathfrak{D}(A) \oplus \{h - Kh;\ h \in \mathfrak{D}(K)\}$.

Наоборот, каждый (1)-изометрический оператор K со свойствами а) и б) отвечает некоторому з. э. расширению $\tilde{A}$ в вышеуказанном смысле.

II. Расширение $\tilde{A}$ регулярно тогда и только тогда, когда линеал $\mathfrak{R}(I - K)$ (1)-замкнут.

III. Оператор $\tilde{A}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}(K) = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{N}'_i$, $\mathfrak{R}(K) = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{N}'_{-i}$.

IV. Для того чтобы регулярный з. э. оператор A обладал регулярными самосопряженными расширениями, необходимо и достаточно, чтобы его полудефектные числа были равны между собой.

2. В теории расширения з. э. операторов «крайнее место» занимают операторы с плотной областью определения. Другим «крайним случаем» являются так называемые R-операторы, введенные в рассмотрение независимо Ю. Л. Шмульяном [59] и Ю. М. Арлинским—Э. Р. Цекановским [4].

З. э. оператор A назовем R-оператором, если его оба полудефектных числа равны нулю, т. е. $\bar{A}_0$-самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_0$. Для такого оператора $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$.

Теорема 2.3 [59]. Следующие утверждения эквивалентны: 1) A—R-оператор, 2) $\mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{H}_+ = \overline{\mathfrak{D}(A)}^{(+)}$, 3) $\mathfrak{F} = \overline{L}_0^{(-)}$.

Пусть $\tilde{A}$—самосопряженное расширение з. э. оператора A. Хотя линеал $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ $(\cdot)$-плотен в $\mathfrak{H}$ и принадлежит $\mathfrak{H}_+$, он не является, вообще говоря, $(+)$-плотным в $\mathfrak{H}_+$. С этой точки зрения, особое место занимают R-операторы (Ю. Л. Шмульян [59]).

Теорема 2.4. Пусть A—R-оператор, $\tilde{A}$—его самосопряженное расширение, определяемое допустимым оператором Φ. Для того чтобы линеал $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ был $(+)$-плотным в $\mathfrak{H}_+$, необходимо и достаточно, чтобы равенство $\Phi x = \overline{V} x$ выполнялось лишь при $x=0$. (Здесь $\overline{V}$—расширение по непрерывности оператора запрета V).

Следствие 1. Если A—регулярный R-оператор, то все его самосопряженные расширения имеют $(+)$-плотные в $\mathfrak{H}_+$ области определения.

Следствие 2. Если A—сингулярный R-оператор, то он имеет самосопряженные расширения как с $(+)$-плотными в $\mathfrak{H}_+$ областями задания, так и с $(+)$-неплотными.

Теорема 2.5. Для того чтобы A был регулярным R-оператором, необходимо и достаточно, чтобы он обладал самосопряженным расширением $\tilde{A}$ со свойством $\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \mathfrak{H}_+$. Все такие расширения, и только они, получаются по формуле (2.1), где допустимый оператор Φ таков, что 1—регулярная точка унитарного в $\mathfrak{N}_i$ оператора $\Phi^{-1}V$.

§ 2. БИРАСШИРЕНИЯ З. Э. ОПЕРАТОРОВ. ОПИСАНИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ БИРАСШИРЕНИЙ

Понятие бирасширения з. э. оператора A было введено Э. Р. Цекановским [42, 44] для случая конечных дефектных чисел. Э. Р. Цекановский дал описание класса бирасширений, ввел их классификацию. В дальнейшем эти результаты были обобщены на общий случай з. э. оператора (Ю. М. Арлинский—Э. Р. Цекановский [3, 4, 48]). Заметим, что в работе [9] Ф. А. Березин и Л. Д. Фадеев изучали оператор Шрёдингера с сингулярным потенциалом. Такой оператор является самосопряженным бирасширением некоторого эрмитова оператора.

1. Определение. Оператор $\mathbf{A} \in [\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-]$ называется бирасширением з. э. оператора A, если $\mathbf{A} \supset A$, $\mathbf{A}^* \supset A$.

Класс всех бирасширений оператора A обозначим через $\mathfrak{S}(A)$. Этот класс является линейным многообразием в $[\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}^-]$ (т. е. вместе с каждыми двумя операторами A_1, A_2 класс $\mathfrak{S}(A)$ содержит все операторы вида $\lambda A_1 + (1-\lambda) A_2$, где λ—любое комплексное число), замкнутым в слабой топологии и инвариантным относительно сопряжения. Если $\mathbf{A} \in \mathfrak{S}(A)$, то

5*

вещественная часть $\mathbf{A}_R=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)$ оператора $\mathbf{A}$ принадлежит $\mathfrak{S}(A)$, а его мнимая часть $\mathbf{A}_I=\frac{1}{2i}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*)$ удовлетворяет условиям $\mathfrak{D}(A)\subset\mathfrak{N}(\mathbf{A}_I)$, $\mathfrak{F}\supset\mathfrak{R}(\mathbf{A}_I)$.

Описание класса $\mathfrak{S}(A)$ дается следующей теоремой:

Теорема 2.6. Если $\mathbf{A}'$ — некоторый фиксированный оператор класса $\mathfrak{S}(A)$, то общий вид операторов этого класса дается формулой

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}'+\mathbf{R}SP^+_{\mathfrak{M}},$$

где S пробегает класс $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$.

Для описания класса $\mathfrak{S}(A)$ достаточно построить хотя бы один оператор этого класса. Ниже строятся два «особых» оператора класса $\mathfrak{S}(A)$.

Пусть

$\mathfrak{D}=\overline{\mathfrak{D}(A)}^{(+)}$, $\mathfrak{D}_*=\mathfrak{H}_+\cap\mathfrak{H}_0$, $\hat{A}$ — расширение оператора A по $(\cdot, -)$-непрерывности на $\mathfrak{H}_0$ (см. теорему 1.2). Положим

$$\mathbf{A}_0=\hat{A}P^+_{\mathfrak{D}}+A^*P^+_{\mathfrak{M}},\quad \mathbf{A}_1=\hat{A}P^+_{\mathfrak{D}_*}+A^*P^+_{\mathfrak{N}}.$$

Тогда $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1\in\mathfrak{S}(A)$, причем $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_0^*$.

С помощью оператора $\mathbf{A}_0$ в теореме 2.7 получено описание класса $\mathfrak{S}(A)$:

Теорема 2.7. Формулы

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathbf{R}S_{\mathbf{A}}P^+_{\mathfrak{M}},\quad S_{\mathbf{A}}=\mathbf{R}^{-1}(A-A_0)\mid\mathfrak{M}$$

задают биективное соответствие $A\leftrightarrow S_{\mathbf{A}}$ между классами $\mathfrak{S}(A)$ и $[\mathfrak{M},\mathfrak{M}]$.

Обозначим через J_0 оператор $\left(P^+_{\mathfrak{N}'_i}-P^+_{\mathfrak{N}'_{-i}}\right)\mid\mathfrak{M}$, самосопряженный относительно $(+)$-метрики.

Теорема 2.8.

а) $(S_{\mathbf{A}^*})^*-S_{\mathbf{A}}=iJ_0$.

б) Для того чтобы оператор $\mathbf{A}\in\mathfrak{S}(A)$ был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы мнимая часть оператора $S_{\mathbf{A}}$ равнялась $-\frac{1}{2}J_0$. Поэтому общий вид самосопряженных операторов $\in\mathfrak{S}(A)$ таков:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathbf{R}\left(S-\frac{i}{2}J_0\right)P^+_{\mathfrak{M}},$$

где S — произвольный самосопряженный относительно $(+)$-метрики оператор $\in[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$.

в) Всякий з. э. оператор A допускает самосопряженные бирасширения. Общий вид таких бирасширений дается формулой

$$\mathbf{A}=\hat{A}P^+_{\mathfrak{D}}+(A^*+\mathbf{R}S)P^+_{\mathfrak{M}}-\frac{i}{2}\mathbf{R}P^+_{\mathfrak{N}'_i}+\frac{i}{2}\mathbf{R}P^+_{\mathfrak{N}'_{-i}},\tag{2.2}$$

где S — самосопряженный оператор из $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$, причем формула (2.2) устанавливает биективное соответствие между множествами самосопряженных операторов из классов $\mathfrak{S}(A)$ и $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$.

Заметим, что в случае регулярного A будем иметь $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}(A)$, так что в формуле (2.2) можно заменить $\hat{A}$ на A.

Определение. Пусть

$$C\in[\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-],\quad \mathfrak{D}_0=\{x;\ x\in\mathfrak{H}_+,\ Cx\in\mathfrak{H}\},\quad C_0=C\mid\mathfrak{D}_0.$$

Оператор C_0 будем называть квазиядром оператора C. Нетрудно показать, что квазиядро C_0 оператора $C\in[\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-]$ есть $(+, \cdot)$-замкнутый оператор.

Теорема 2.9. Если $\mathbf{A}\in\mathfrak{S}(A)$, то квазиядро B оператора $\mathbf{A}$ $(\cdot, \cdot)$-замкнуто.

Теорема 2.10. Пусть A — регулярный з. э. оператор, $\mathbf{A}\in\mathfrak{S}(A)$, B — квазиядро оператора $\mathbf{A}$. Тогда оператор B $(+, \cdot)$-непрерывен, а его область определения $\mathfrak{D}(B)$ $(+)$-замкнута. Если, кроме того, оператор A — самосопряжен, то B является регулярным расширением A.

2. В настоящем п. рассматриваются бирасширения R-операторов.

Теорема 2.11. а) Если A — регулярный R-оператор, то все его бирасширения $(+, \cdot)$-непрерывны и $(\cdot, +)$-непрерывны.

б) Если з. э. оператор A имеет хотя бы одно самосопряженное $(+, \cdot)$-непрерывное либо хотя бы одно $(\cdot, -)$-непрерывное бирасширение, то A — регулярный R-оператор.

Теорема 2.12. а) Если A — регулярный R-оператор, то любое его самосопряженное бирасширение $\mathbf{A}$ допускает $(-, -)$-замыкание; б) Если некоторое самосопряженное бирасширение $\mathbf{A}$ з. э. оператора A допускает $(-, -)$-замыкание, то A — R-оператор.

§ 3. КЛАССИФИКАЦИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ БИРАСШИРЕНИЙ З. Э. ОПЕРАТОРА

Классификация самосопряженных расширений з. э. оператора была дана Э. Р. Цекановским [44], Ю. М. Арлинским — Э. Р. Цекановским [3, 4].

1. Пусть B — квазиядро самосопряженного бирасширения $\mathbf{A}$ з. э. оператора A.

Оператор $\mathbf{A}$ будем называть слабым, средним и соответственно сильным самосопряженным бирасширением оператора A, если

1) $A=B$; 2) $A\neq B\neq B^*$; 3) $A\neq B=B^*$.

Теорема 2.13. Пусть A — регулярный з. э. оператор. Для того чтобы выражение (2.2) определяло слабое самосопряженное бирасширение оператора A, необходимо и достаточно, чтобы оператор

$$B_0=\left(P^+_{\mathfrak{N}'_i}+P^+_{\mathfrak{N}'_{-i}}\right)SP^+_{\mathfrak{M}}-\frac{i}{2}P^+_{\mathfrak{N}'_i}+\frac{i}{2}P^+_{\mathfrak{N}'_{-i}}$$

был обратим в $\mathfrak{M}$.

Теорема 2.14. а) Если полудефектные числа регулярного з. э. оператора A с неплотной областью определения бесконечны и равны, то оператор A допускает слабые самосопряженные бирасширения. б) Если одно из полудефектных чисел регулярного з. э. оператора A с неплотной областью определения конечно, то оператор A не допускает слабых самосопряженных бирасширений.

Теорема 2.15. Пусть $\tilde{A}$ — регулярное самосопряженное расширение регулярного з. э. оператора A. Тогда существует самосопряженное бирасширение $\mathbf{A}$ оператора A, квазиядром которого является оператор $\tilde{A}$.

Теорема остается справедливой, если $\tilde{A}$ — максимальное регулярное расширение A.

Теорема 2.16. Пусть A — регулярный з. э. оператор с неплотной областью определения. Для того чтобы оператор A допускал сильное самосопряженное бирасширение, необходимо и достаточно, чтобы полудефектные числа оператора A были равны между собой.

2. Пусть A — замкнутый эрмитов оператор с плотной областью определения. В этом случае $\mathfrak{N}'_{\pm i}=\mathfrak{N}_{\pm i}$, $\mathfrak{N}=\{0\}$, $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_i\oplus\mathfrak{N}_{-i}$. Нетрудно показать, что для замкнутого эрмитова оператора A теорема 2.8 имеет следующий вид:

Всякий з. э. оператор A допускает самосопряженное бирасширение $\mathbf{A}$, которое задается в виде

$$\mathbf{A}=A^*+\mathbf{R}QP^+_{\mathfrak{M}} \tag{2.3}$$

где

$$Q=S-\frac{i}{2}P^+_{\mathfrak{N}_i}+\frac{i}{2}P^+_{\mathfrak{N}_{-i}} \tag{2.4}$$

и $S=S^*\in[\mathfrak{M},\mathfrak{M}]$, причем формулы (2.3) и (2.4) устанавливают биективное соответствие $\mathbf{A}\leftrightarrow S$ между множеством самосопряженных бирасширений $\mathbf{A}$ оператора A и множеством самосопряженных операторов S из класса $[\mathfrak{M},\mathfrak{M}]$.

Из теоремы 2.13 для плотно заданного з. э. оператора вытекает критерий существования у оператора A слабых самосопряженных бирасширений, состоящий в обратимости оператора Q вида (2.4).

Теорема 2.17. Пусть $\tilde{A}$ — произвольный замкнутый плотно заданный эрмитов оператор, являющийся расширением оператора A. Существует самосопряженное бирасширение $\mathbf{A}$ оператора A, для которого $\tilde{A}$ является квазиядром.

Эта теорема показывает, что в случае плотной области определения у замкнутого эрмитова оператора существуют самосопряженные бирасширения всех трех типов (слабые, средние, сильные) и что любое замкнутое эрмитово расширение $\tilde{A}$ оператора A может служить квазиядром для некоторого самосопряженного бирасширения $\mathbf{A}$ оператора A. Отметим, что в случае неплотной области определения, указанные факты, вообще говоря, места не имеют (не всегда существуют слабые самосопряженные бирасширения, не всякое замкнутое эрмитово расширение $\tilde{A}$ оператора A может служить квазиядром для некоторого самосопряженного бирасширения $\mathbf{A}$ оператора A).

Глава III

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ БИРАСШИРЕНИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть A — замкнутый полуограниченный оператор в $\mathfrak{X}$ с нижней гранью m, т. е.

$$(Ax, x) \geqslant m(x, x) \quad (\forall x \in \mathfrak{D}(A)).$$

Фридрихс [69] доказал, что оператор A имеет самосопряженные расширения с той же нижней гранью, а М. Г. Крейн [20] дал описание всех расширений A с сохранением нижней грани. М. Д. Окунский и Э. Р. Цекановский [36, 48] исследовали вопрос о существовании самосопряженных бирасширений $\mathbf{A}$ оператора A с той же нижней гранью:

$$(\mathbf{A}x, x) \geqslant m(x, x) \quad (\forall x \in \mathfrak{H}_+).$$

§ 1. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ БИРАСШИРЕНИЙ СО СКОЛЬ УГОДНО БЛИЗКОЙ НИЖНЕЙ ГРАНЬЮ

Теорема 3.1. Пусть A — полуограниченный оператор с нижней гранью m и $\tilde{A}$ — симметрическое (обычное) расширение с той же гранью. Для того чтобы оператор A допускал самосопряженное бирасширение $\mathbf{A}$, содержащее $\tilde{A}$ $(\mathbf{A} \supset \tilde{A})$ с сохранением нижней грани, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа $k > 0$, что

$$|((\tilde{A} - mI)x, y)|^2 \leqslant k((\tilde{A} - mI)x, x) \cdot \|y\|_+^2$$
$$(\forall x \in \mathfrak{D}(\tilde{A}), \ \forall y \in \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{D}_{\Phi \tilde{A}}). \tag{3.1}$$

Из доказательства этой теоремы следует, что если A имеет хотя бы одно самосопряженное бирасширение $\mathbf{A}$ с той же самой нижней гранью, содержащее $\tilde{A}$, то он имеет и бесчисленное множество таких расширений.

Следствие 1. Для того чтобы имела место теорема 3.1, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа $k>0$, что

$$|((\tilde{A}-mI)\,x,\ y)|^2 \leqslant k\,((\tilde{A}-mI)\,x,\ x)\cdot \|y\|_+$$

сразу для всех $x \in \mathfrak{D}(\tilde{A})$ и всех $y \in \mathfrak{H}_+$.

Следствие 2. Для того чтобы имела место теорема 3.1, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа $k>0$, что

$$|((\tilde{A}-mI)\,x,\ x_a)|^2 \leqslant k\,((\tilde{A}-mI)\,x,\ x)\cdot \|x_a\|^2$$

сразу для всех $x \in \mathfrak{D}(\tilde{A})$ и всех x_a, удовлетворяющих уравнению

$$(A^*-(m-a)\,I)\,x_a=0,$$

где a — произвольное положительное число.

Из теоремы 3.1 и следствий из нее вытекает

Теорема 3.2. Пусть ε — произвольное сколь угодно малое положительное число и A — полуограниченный оператор с нижней гранью m. Существует бесчисленное множество полуограниченных самосопряженных бирасширений с нижней гранью $m-\varepsilon$.

§ 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ БИРАСШИРЕНИЙ С СОХРАНЕНИЕМ НИЖНЕЙ ГРАНИ

Пусть B — положительный ($B \geqslant 0$) оператор в $\mathfrak{H}$ с плотной областью определения. Рассмотрим оператор $S=(I-B)\times \times (I+B)^{-1}$. Оператор S является ограниченным эрмитовым оператором. Обозначим через $L(S)$ множество всех самосопряженных расширений оператора S на $\mathfrak{H}$ с сохранением нормы. Согласно теореме М. Г. Крейна [20], оно имеет минимальный $\tilde{S}_\mu$ и максимальный $\tilde{S}_M$ элементы, такие что всякое самосопряженное расширение $\tilde{S}$ оператора S с сохранением нормы удовлетворяет неравенству

$$\tilde{S}_\mu \leqslant \tilde{S} \leqslant \tilde{S}_M.$$

Как известно, жесткое и мягкое расширения $\tilde{B}_\mu$ и $\tilde{B}_M$ оператора B, которые впервые ввел М. Г. Крейн [20], выражаются через $\tilde{S}_\mu$ и $\tilde{S}_M$ равенством

$$\tilde{B}_\mu=(I-\tilde{S}_\mu)\,(I+\tilde{S}_\mu)^{-1}, \quad \tilde{B}_M=(I-\tilde{S}_M)\,(I+\tilde{S}_M)^{-1}.$$

Теорема 3.3. Для того чтобы полуограниченный оператор A с нижней гранью m допускал самосопряженное бирасширение $\mathbf{A}$ с той же самой нижней гранью, необходимо, чтобы у оператора $A-mI$ жесткое и мягкое расширения, по М. Г. Крейну, не совпадали между собой, т. е. чтобы A имел неединственное обычное самосопряженное расширение с сохранением нижней грани.

Теорема 3.4. Для того чтобы полуограниченный оператор A с нижней гранью m допускал самосопряженное бирасширение с сохранением нижней грани, необходимо и достаточно, чтобы при любом $z \in \mathfrak{N}_{m-a}$ (a — произвольное положительное число) выполнялось неравенство

$$\int_0^\infty \lambda d(E(\lambda) z, z) \leqslant k \|z\|^2,$$

где $E(\lambda)$ — спектральная функция мягкого расширения оператора $A-mI$.

Достаточность этой теоремы доказывается с помощью теоремы 3.1 и следствий из нее, необходимость с помощью теоремы 3.3 и некоторых рассуждений М. Г. Крейна из [20].

Определение. Расширение $\widetilde{A}_{\text{М}}^{(m)}$ оператора A, порождаемое мягким, по М. Г. Крейну, расширением $\widetilde{B}_{\text{М}}$ оператора $B=A-mI$ по формуле

$$\widetilde{B}_{\text{М}}=\widetilde{A}_{\text{М}}^{(m)}-mI$$

будем называть индуцированным мягким расширением оператора A.

Следствие 1. Если полуограниченный оператор A с нижней гранью m допускает самосопряженное бирасширение с сохранением нижней грани, то он имеет также самосопряженное бирасширение $\mathbf{A}$, содержащее в качестве квазиядра индуцированное мягкое расширение-$\widetilde{A}_{\text{М}}^{(m)}$ оператора A.

Следствие 2. Пусть A — полуограниченный оператор с нижней гранью m и ε — произвольное сколь угодно малое положительное число. Существует самосопряженное бирасширение $\mathbf{A}$ оператора A с нижней гранью $m-\varepsilon$, содержащее в качестве квазиядра индуцированное мягкое расширение $\widetilde{A}_{\text{М}}^{(m-\varepsilon)}$ оператора A.

Таким образом, если ε — произвольное сколь угодно малое положительное число и A — полуограниченный оператор с нижней гранью m, то существует бесчисленное множество слабых, средних и сильных самосопряженных бирасширений оператора A с нижней гранью $m-\varepsilon$.

Определение. Самосопряженные расширения $\widetilde{B}_1$ и $\widetilde{B}_2$ эрмитова оператора $\overline{B\,(\mathfrak{D}(B)=\mathfrak{H},\ B\neq B^*)}$ называются взаимно простыми ,если $\mathfrak{D}(\widetilde{B}_1)\cap\mathfrak{D}(\widetilde{B}_2)=\mathfrak{D}(B)$.

Опираясь на теорему 3.4, уточним теперь теорему 3.3.

Теорема 3.5. Для того чтобы полуограниченный оператор A с нижней гранью m допускал самосопряженное бирасширение $\mathbf{A}$ с сохранением нижней грани, необходимо, а в случае конечных дефектных чисел оператора A, и достаточно, чтобы жесткое и мягкое расширение оператора $B=A-mI$ были взаимно простыми.

Отметим, что вопрос о справедливости достаточных условий этой теоремы в том случае, когда A имеет бесконечные дефектные числа, остается открытым.

Глава IV

КВАЗИЭРМИТОВЫ БИРАСШИРЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

В гл. IV исследуются квазиэрмитовы бирасширения з. э. операторов. Для таких расширений также установлен аналог формул Дж. Неймана, с помощью которых даны их описание и классификация. В терминах реальных и мнимых частей квазиэрмитовых бирасширений устанавливаются критерии их единственности.

§ 1. КВАЗИЭРМИТОВЫ РАСШИРЕНИЯ З. Э. ОПЕРАТОРОВ

1. Как отмечалось во введении, квазиэрмитовы расширения з. э. оператора рассматривались в ряде работ М. С. Лившица [28, 29], А. В. Штрауса [64, 65], А. В. Кужеля [26, 27] и др. Методы теории оснащенных гильбертовых пространств применили к этому кругу вопросов Ю. М. Арлинский, Э. Р. Цекановский и Ю. Л. Шмульян [48].

Определение. Замкнутый, плотнозаданный линейный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, будем называть квазиэрмитовым расширением з. э. оператора A, если

$$T\supset A,\quad T^*\supset A. \tag{4.1}$$

Для таких операторов

$\mathfrak{D}(T)\subset\mathfrak{H}_+$, $\mathfrak{D}(T^*)\subset\mathfrak{H}_+$ и $A^*\supset PT$, $A^*\supset PT^*$ (где P-ортопроектор $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_0=\overline{\mathfrak{D}(A)}$).

Класс всех квазиэрмитовых расширений A будем обозначать через $\mathfrak{M}(A)$.

На квазиэрмитовы расширения переносится ряд положений, установленных в гл. II для эрмитовых расширений.

Определение. Квазиэрмитово расширение T з. э. оператора будем называть регулярным, если операторы PT и PT^* — замкнутые линейные операторы в $\mathfrak{H}$.

Теорема 4.1 Следующие утверждения относительно квазиэрмитового расширения T з. э. оператора A эквивалентны:

1) Линеалы $\mathfrak{D}(T)$ и $\mathfrak{D}(T^*)$ $(+)$-замкнуты.

2) Операторы T и T^* $(+, \cdot)$-ограничены.

3) Оператор T — регулярное квазиэрмитово расширение оператора A.

Отсюда вытекает, что необходимым условием существования регулярных квазиэрмитовых расширений оператора A является его $(+, \cdot)$-ограниченность, т. е. регулярность. Очевидно, в случае $\overline{\mathfrak{D}(A)}=\mathfrak{H}$ всякое квазиэрмитово расширение T оператора A регулярно, поскольку тогда

$$A^*x=Tx,\quad \|Tx\|=\|A^*x\|\leqslant\|x\|_+ \quad (\forall x\in\mathfrak{D}(T))$$

и аналогично $\|T^*x\|\leqslant\|x\|_+ (\forall x\in\mathfrak{D}(T^*))$.

Более общим утверждением является следующая

Теорема 4.2. Если $\operatorname{codim}\overline{\mathfrak{D}(A)}<\infty$, то любое квазиэрмитово расширение T оператора A регулярно.

2. Определение. Квазиэрмитово расширение T з. э. оператора A будем относить к классу Ω_A, если точка $(-i)$ — регулярная точка* оператора T.

Пусть V — оператор запрета.

Определение. Операторы $\Phi\in[\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_i]$ $(\Psi\in[\mathfrak{N}_{-i}, \mathfrak{N}_{-i}])$ будем называть допустимыми, если из $\Phi x=Vx$, $x\in\mathfrak{P}_i$ $(\Psi x=V^{-1}x$, $x\in\mathfrak{P}_{-i})$ следует, что $x=0$.

Следующая теорема устанавливает аналог формул Неймана для квазиэрмитовых расширений з. э. оператора A.

Теорема 4.3. Если T — квазиэрмитово расширение з. э. оператора A, принадлежащее классу Ω_A, то

$$\begin{gathered}\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}(A)+(I-\Phi)\mathfrak{N}_i,\\ \mathfrak{D}(T^*)=\mathfrak{D}(A)+(\Phi^*-I)\mathfrak{N}_{-i},\end{gathered}\tag{4.2}$$

где $\Phi(\Phi^*)$ — допустимые операторы из класса $[\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_i]$ $([\mathfrak{N}_{-i}, \mathfrak{N}_{-i}])$. При этом если $f\in\mathfrak{D}(T)$ $(\in\mathfrak{D}(T^*))$, то

$$f=g+\varphi-\Phi\varphi,\quad Tg=Ag+i\varphi+i\Phi\varphi\quad (g\in\mathfrak{D}(A),\quad \varphi\in\mathfrak{N}_i)\tag{4.3}$$

$$\left(\begin{gathered}f=g+\Phi^*\varphi-\varphi,\quad T^*f=Ag+i\Phi^*\varphi+i\varphi\\ g\in\mathfrak{D}(A),\quad \varphi\in\mathfrak{N}_{-i}\end{gathered}\right).$$

Формулы (4.2) и (4.3) устанавливают биективное соответствие

---

* Можно было бы потребовать для дальнейшего лишь наличия одной регулярной точки в какой-нибудь полуплоскости.

между множеством всех квазиэрмитовых расширений класса Ω_A з. э. оператора A и множеством всех допустимых линейных операторов Φ из класса $[\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_i]$ (Φ^* из класса $[\mathfrak{N}_{-i}, \mathfrak{N}_{-i}]$).

Обозначим $\mathfrak{D}_\Phi = (I - \Phi)\,\mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{D}_{\Phi^*} = (\Phi^* - I)\,\mathfrak{N}_{-i}$. Тогда, в силу (4.2),

$$\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(A) \dotplus \mathfrak{D}_\Phi, \quad \mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(A) \dotplus \mathfrak{D}_{\Phi^*}.$$

Теорема 4.4. Следующие утверждения относительно квазиэрмитова расширения T класса Ω_A эквивалентны:

1) T — регулярное расширение A,

2) $\mathfrak{D}_\Phi$, $\mathfrak{D}_{\Phi^*}(+)$ — замкнуты и минимальные углы между $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{D}_\Phi$ и между $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{D}_{\Phi^*}$ относительно $(+)$-метрики положительны,

3) $P^+_{\mathfrak{M}}\mathfrak{D}_\Phi$, $P^+_{\mathfrak{M}}\mathfrak{D}_{\Phi^*}$ — $(+)$-замкнутые линеалы,

4) $\mathfrak{D}_\Phi$, $\mathfrak{D}_{\Phi^*}\cdot(+)$-замкнуты и $P^+_{\mathfrak{M}}\big|\mathfrak{D}_\Phi$, $P^+_{\mathfrak{M}}\big|\mathfrak{D}_{\Phi^*}$ — гомеоморфизмы.

Следствие. Операторы $I - \Phi$, $I - \Phi^*$ — гомеоморфизмы $\mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{N}_{-i}$ на $\mathfrak{D}_\Phi$, $\mathfrak{D}_{\Phi^*}$ соответственно.

Теорема 4.3 допускает следующую модификацию:

Теорема 4.5. I. Каждому квазиэрмитовому расширению T класса Ω_A отвечает оператор M в пространстве $\mathfrak{M}_1$ со свойствами:

1) $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{N}'_i \oplus \mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}(M) \subset \mathfrak{N}'_{-i} \oplus \mathfrak{N}$,

2) $Mx + x = 0$ лишь при $x = 0$, $M^*x + x = 0$ лишь при $x = 0$, такой, что

$$\begin{aligned} &\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(A) \oplus (M + I)(\mathfrak{N}'_i \oplus \mathfrak{N}), \\ &\mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(A) \oplus (M^* + I)(\mathfrak{N}'_{-i} \oplus \mathfrak{N}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

II. Наоборот, всякая пара (1)-сопряженных друг по отношению к другу операторов M и M^* из $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1]$ со свойствами 1) и 2) отвечает некоторому квазиэрмитовому расширению T класса Ω_A з. э. оператора A по формулам (4.4).

III. Оператор T является регулярным расширением оператора A тогда и только тогда, когда, $\mathfrak{R}(M + I)$, $\mathfrak{R}(M^* + I)$ $(+)$-замкнуты.

Отметим, что теоремы 4.3 и 4.5 для случая, когда $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}$ и A имеет конечные и равные дефектные числа, были установлены в несколько иной форме М. С. Лившицем [29].

Теорема 4.6. Пусть T — квазиэрмитово расширение класса Ω_A регулярного з. э. оператора A. Если A не является R-оператором, то либо $\mathfrak{D}(T)$, либо $\mathfrak{D}(T^*)$ не совпадают с $\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{H}_+$. Если же A — R-оператор, то $\mathfrak{D}(T)$ и $\mathfrak{D}(T^*)$ $(+)$ плотны в $\mathfrak{H}_+$. Для того чтобы T был регулярным расширением R-оператора, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{H}_+$.

§ 2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ОПИСАНИЕ КВАЗИЭРМИТОВЫХ БИРАСШИРЕНИЙ

Квазиэрмитовы бирасширения з. э. оператора A с конечными дефектными числами изучались Э. Р. Цекановским [47], в общем случае — в книге [48].

Определение. Оператор $\mathbf{A}\in[\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-]$ будем называть квазиэрмитовым бирасширением з. э. оператора A, если существует квазиэрмитово расширение T оператора A такое, что

$$\mathbf{A}\supset T\supset A, \quad \mathbf{A}^*\supset T^*\supset A.$$

Оператор $\mathbf{A}$ при этом будем называть также $(*)$-расширением T.

Легко показать, что если $\mathbf{A}$ — $(*)$-расширение T, то T и T^* являются квазиядрами для $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ соответственно. Из теоремы 2.7 следует, что всякое бирасширение $\mathbf{A}$ регулярного з. э. оператора A представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= AP^+_{\mathfrak{D}(A)} + (A^* + \mathbf{R}S_{\mathbf{A}})\,P^+_{\mathfrak{M}}, \\ \mathbf{A}^* &= AP^+_{\mathfrak{D}(A)} + (A^* + \mathbf{R}S_{\mathbf{A}^*})\,P^+_{\mathfrak{M}}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где операторы $S_{\mathbf{A}}$, $S_{\mathbf{A}^*}\in[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$, причем

$$(S_{\mathbf{A}^*})^* = S_{\mathbf{A}} + iP^+_{\mathfrak{N}'_i} - iP^+_{\mathfrak{N}'_{-i}}. \tag{4.7}$$

Теорема 4.7. Пусть T — квазиэрмитово расширение класса Ω_A регулярного з. э. оператора A. Для того чтобы оператор $\mathbf{A}$ вида (4.6) с условием (4.7) был квазиэрмитовым бирасширением оператора T, необходимо и достаточно, чтобы

$$S_{\mathbf{A}}(M+I) = iP^+_{\mathfrak{N}}(I-M),$$

$$S_{\mathbf{A}^*}(M^*+I) = iP^+_{\mathfrak{N}}(M^*-I),$$

где $M\in[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1]$, для которого $\mathfrak{D}(M)=\mathfrak{N}'_i\oplus\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{R}(M)\subset\mathfrak{N}'_{-i}\oplus\mathfrak{N}$ и который по формулам (4.4) определяется с помощью T, (M^* — (1)-сопряженный по отношению к M оператор).

Следствие. Если T — произвольное квазиэрмитово расширение класса Ω_A з. э. оператора A, то существует бирасширение $\mathbf{A}$ оператора A, являющееся $(*)$-расширением оператора T.

§ 3. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ КВАЗИЭРМИТОВЫХ БИРАСШИРЕНИЙ

Определение. Квазиэрмитово расширение T з. э. оператора A будем относить к классу $\overline{\Omega_A}$, если $T\in\Omega_A$, $\overline{\mathfrak{D}(A)}=\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(T)\cap\mathfrak{D}(T^*)$.

Оператор $T\in\overline{\Omega}_A$ будем относить к классу Ω^r_A, если оператор A имеет конечные дефектные числа (r, r) $(r<\infty)$.

Рассмотрим множество $\tilde{\mathfrak{H}}_+=\mathfrak{D}(T)+\mathfrak{D}(T^*)$.

Если $T \in \overline{\Omega}_A$, то однозначно определяется оператор

$$\tilde{T}x = Tx_1 + T^*x_2 \, (x = x_1 + x_2, \ x_1 \in \mathfrak{D}(T), \ x_2 \in \mathfrak{D}(T^*)),$$

который является аддитивным и однородным.

Определение. Мы будем говорить, что оператор $T \in \overline{\Omega}_A$ обладает ω-свойством, если оператор $\tilde{T}$ замкнут в $\mathfrak{H}$.

Легко устанавливается методом графика, что если $T \in \overline{\Omega}_A$ обладает ω-свойством, то $\tilde{\tilde{\mathfrak{H}}}_+ = \mathfrak{H}_+ = \mathfrak{D}(A^*)$ и $\tilde{T} = A^*$. Кроме того, можно показать, что если $T \in \Omega_A^r$, то он обладает ω-свойством.

Теорема 4.8. Пусть $T \in \Omega_A^r$ обладает ω-свойством. Для того чтобы $(*)$-расширения A_1 и A_2 оператора T совпадали, необходимо и достаточно, чтобы их реальные (мнимые) компоненты были равны между собой.

Определение. Пусть $T \in \overline{\Omega}_A$. Мы будем говорить, что самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A обладает свойством Г, если $\Phi M^* - I$ — гомеоморфизм (здесь Φ (изометрия) и M определяют по формулам Неймана $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ и $\mathfrak{D}(T)$).

Следующая теорема является усилением теоремы единственности 4.8.

Теорема 4.9. Пусть $T \in \overline{\Omega}_A$ и обладает ω-свойством и пусть $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — $(*)$-расширения T, реальные части которых — сильные самосопряженные бирасширения з. э. оператора A, причем квазиядра их реальных частей обладают свойством Г. Для того чтобы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ совпадали между собой, необходимо и достаточно, чтобы квазиядра их реальных частей были равны.

Отметим, что если $T \in \Omega_A^r$, то существует самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A, обладающее свойством Г.

Оператор $T \in \Omega_A$ мы будем называть простым по модулю $\mathfrak{D}(A)$, если $\mathfrak{D}(A)$ — максимальная эрмитова часть, на которой $Tx = T^*x$. Несложными выкладками показывается, что если $T \in \Omega_A^r$ и является простым по модулю $\mathfrak{D}(A)$, то всякое самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A обладает свойством Г.

Теорема 4.10. Пусть $T \in \Omega_A^r$ и пусть $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение A, обладающее свойством Г. Тогда оператор T имеет единственное $(*)$-расширение $\mathbf{A}$, реальная часть $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ которого обладает квазиядром $\tilde{A}$.

Теорема 4.10 допускает следующее усиление

Теорема 4.11. Пусть

$$T \in \overline{\Omega}_A, \ \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(A) + (M + I)\,\mathfrak{N}_i.$$

Для того чтобы оператор T допускал $(*)$-расширение $\mathbf{A}$, реальная часть которого $\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{A}^*)$ обладает самосопряженным квазиядром, необходимо и достаточно, чтобы оператор M представлялся в виде $M=U+R$, где U — изометрия из $\mathfrak{N}_i$ на $\mathfrak{N}_{-i}$, R — гомеоморфизм из $\mathfrak{N}_i$ на $\mathfrak{N}_{-i}$.

Глава V

РАСШИРЕННЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ И РАСШИРЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ЭРМИТОВЫХ И КВАЗИЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Независимо друг от друга и одновременно М. Г. Крейном [18] и М. А. Наймарком [35] была установлена формула, описывающая все обобщенные резольвенты з. э. плотно заданного оператора с дефектными числами (1,1). Впоследствии М. Г. Крейн [19] обобщил свою формулу на случай дефектных чисел (m, m) при $m<\infty$. Ш. Н. Саакян [39] распространил эту формулу на случай любых (в том числе и бесконечных) равных дефектных чисел. Теория обобщенных резольвент с несколько иной точки зрения была развита А. В. Штраусом [63, 65, 66], причем этот автор охватил случай неравных дефектных чисел и случай неплотно заданных операторов.

Ниже пойдет речь о применении в теории обобщенных резольвент методов оснащенных гильбертовых пространств.

§ 1. РАСШИРЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТ НА ПРОСТРАНСТВО С НЕГАТИВНОЙ НОРМОЙ

1. Для каждого линейного оператора C в $\mathfrak{H}$ будем обозначать через $\rho(C)$ множество всех его регулярных точек. При каждом $\lambda\in\rho(C)$ оператор $R_\lambda(C):=(C-\lambda I)^{-1}$ (резольвента оператора C) определен всюду в $\mathfrak{H}$ и $(\cdot,\ \cdot)$-непрерывен.

Вопросами расширения резольвент на пространство с негативной нормой занимались Ю. Л. Шмульян [50, 54], Ю. М. Арлинский [2], Э. Р. Цекановский [41, 42] (см. также Ф. А. Березин [8]).

Пусть A — з. э. оператор, $\mathfrak{M}(A)$ — класс его квазиэрмитовых расширений.

Теорема 5.1. Пусть $T\in\mathfrak{M}(A)$, $\lambda\in\rho(T)$. Тогда

а) оператор $R_\lambda(T)$ $(\cdot,\ +)$-непрерывен и голоморфно зависит от λ как функция со значениями из $[\mathfrak{H},\ \mathfrak{H}_+]$;

б) этот оператор может быть расширен по $(-,\ \cdot)$-непрерывности на $\mathfrak{H}_-$;

в) расширенный оператор $\hat{R}_\lambda(T)$ бинепрерывен и является голоморфной в $\rho(T)$ функцией от λ со значениями из $[\mathfrak{H}_-,\ \mathfrak{H}]$;

г) $\hat{R}_\lambda(T)(\hat{A}-\lambda I)x = x \quad (\forall x \in \mathfrak{H}_0)$ (6.1)

($\hat{A}$ — расширение A по $(\cdot, \text{—})$-непрерывности на $\mathfrak{H}_0 = \overline{\mathfrak{D}(A)}$; см. теорему 1.2).

Заметим, что из определения инволюции^0 в классе бинепрерывных операторов (см. гл. I, § 1) вытекает равенство

$$\hat{R}_\lambda(T)^0 = \hat{R}_{\bar{\lambda}}(T^*). \tag{5.2}$$

Для краткости будем обозначать класс $[\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}_+]$ через $\mathfrak{Q}_0$.

Теорема 5.2. Пусть $T_1, T_2 \in \mathfrak{M}(A)$, $\lambda \in \rho(T_1)$, $\mu \in \rho(T_2)$. Тогда $\hat{R}_\lambda(T_1) - \hat{R}_\mu(T_2) \in \mathfrak{Q}_0$; $\mathfrak{Q}_0$-значная функция $\hat{R}_\lambda(T_1) - \hat{R}_\mu(T_2)$ голоморфна по λ и μ в $\rho(T_1) \times \rho(T_2)$.

Отсюда на основании (5.2) вытекает, что

$$[\hat{R}_\lambda(T_1) - \hat{R}_\mu(T_2)]^* = \hat{R}_{\bar{\lambda}}(T_1^*) - \hat{R}_{\bar{\mu}}(T_2^*) \tag{5.3}$$

в классе $\mathfrak{Q}_0$.

Таким образом, разность резольвент обладает более «хорошими» свойствами непрерывности, чем сами резольвенты.

В случае, когда $\lambda = \mu$, теорему 5.2 можно уточнить:

Теорема 5.3. Если $T_1, T_2 \in \mathfrak{M}(A)$, $\lambda \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$, то

$$[\hat{R}_\lambda(T_1) - \hat{R}_\lambda(T_2)]\, \mathfrak{H}_- \subset \mathfrak{N}_\lambda.$$

Напомним, что ортогональное дополнение линеала $\mathfrak{D}(A) (\subset \mathfrak{H}_+)$ обозначалось через $\mathfrak{F} (\subset \mathfrak{H}_-)$, линеал $\mathfrak{H} + \mathfrak{F} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{F}$ — через $\mathfrak{B}$.

Теорема 5.4. Пусть $T \in \mathfrak{M}(A)$, $\lambda \in \rho(T)$. а) Вектор $g \in \mathfrak{H}_-$ принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $\hat{R}_\lambda(T) g \in \mathfrak{N}_\lambda$. б) Вектор $\hat{R}_\lambda(T) g$ принадлежит $\mathfrak{H}_+$ тогда и только тогда, когда $g \in \mathfrak{B}$.

Следствие. а) $\hat{R}_\lambda(T)\mathfrak{F} \subset \mathfrak{N}_\lambda$; б) Если $\mathfrak{R}(\hat{R}_\lambda(T)) = \mathfrak{H}$ (например, если $\operatorname{codim} \mathfrak{H}_0 < \infty$), то $\hat{R}_\lambda(T)\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\lambda$.

Замечание. Утверждение а) теоремы 5.4 содержится в неявном виде в работе Ф. А. Березина [8].

2. Если $T \in \mathfrak{M}(A)$, то $(R_\lambda(T) f, g) = (f, R_{\bar{\lambda}}(T^*) g) \ (\forall f, g \in \mathfrak{H})$.

Левая и правая части этого равенства сохраняют смысл для расширенных резольвент, если $f, g \in \mathfrak{B}$.

Ю. Л. Шмульян обнаружил, что эти числа не обязательно равны между собой, и исследовал этот феномен [54, 59].

Пусть $T_1, T_2 \in \mathfrak{M}(A)$, $\lambda_k \in \rho(T_k)$ $(k = 1, 2)$. Из (5.3) вытекает, что при произвольных $f, g \in \mathfrak{H}_-$

$$([\hat{R}_{\lambda_1}(T_1) - \hat{R}_{\lambda_2}(T_2)] f, g) = (f, [\hat{R}_{\bar{\lambda}_1}(T_1^*) - \hat{R}_{\bar{\lambda}_2}(T_2^*)] g).$$

Если $f, g \in \mathfrak{B}$, то

$$(\hat{R}_{\lambda_1}(T_1) f, g) - (f, \hat{R}_{\bar{\lambda}_1}(T_1^*) g) = (\hat{R}_{\lambda_2}(T_2) f, g) - (f, \hat{R}_{\bar{\lambda}_2}(T_2^*) g).$$

откуда видно, что полуторалинейный функционал

$$\Omega(f, g)=\frac{1}{2i}\left[(\hat{R}_\lambda(T) f, g)-(f, \hat{R}_{\bar{\lambda}}(T^*) g)\right], \tag{5.4}$$

заданный на $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$, не зависит от выбора $T\in\mathfrak{M}(A)$, $\lambda\in\rho(T)$. Этот функционал эрмитов. Из определения $\hat{R}_\lambda(T)$ вытекает, что $\Omega(f, g)=0$, если либо f, либо g принадлежит $\mathfrak{H}$. Поэтому достаточно рассмотреть функционал $\Omega(f, g)$ лишь при f, $g\in\mathfrak{F}$. Функционал $\Omega(f, g)\,|\,\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$ $(-)$-непрерывен по совокупности своих аргументов.

Приведем явную формулу для $\Omega(f, g)\,|\,\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$. Напомним, что имеет место $(-)$-ортогональное разложение $\mathfrak{F}=\bar{L}_0^{(-)}\oplus\mathbf{R}\mathfrak{N}'_i\oplus\oplus\mathbf{R}\mathfrak{N}'_{-i}$.

Теорема 5.6.

$\Omega(f, g)=0$, если $f\in\bar{L}_0^{(-)}$ или $g\in\bar{L}_0^{(-)}$;

$$\Omega(\mathbf{R}x, \mathbf{R}y)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x, y)_+, & \text{если } x, y\in\mathfrak{N}'_i;\\ -\frac{1}{2}(x, y)_+, & \text{если } x, y\in\mathfrak{N}'_{-i};\\ 0, & \text{если } x\in\mathfrak{N}'_{\pm i},\ y\in\mathfrak{N}'_{\mp i}.\end{cases}$$

Из теоремы 5.6 вытекает, что линеал $\mathbf{R}\mathfrak{N}'_i\oplus\mathbf{R}\mathfrak{N}'_{-i}$ с $(-)$-метрикой и формой Ω является J-пространством, в котором $\mathbf{R}\mathfrak{N}'_i$ и $\mathbf{R}\mathfrak{N}'_{-i}$ — максимальное Ω-положительное и Ω-отрицательное подпространства соответственно. Изотропный линеал формы Ω совпадает с $\mathfrak{H}+\bar{L}_0^{(-)}=\mathfrak{X}y+\bar{L}_0^{(-)}$, а $\mathbf{R}\mathfrak{N}'_i\oplus\mathbf{R}\mathfrak{N}'_{-i}$ — максимальное невырожденное подпространство.

Функционал Ω тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда A является R-оператором.

Теорема 5.7. Если $\lambda\in\rho(T)$, $\mathbf{A}$ — $(*)$-расширение T, то оператор $(\mathbf{A}-\lambda I)^{-1}$ существует и может быть расширен по $(-)$-непрерывности на $\mathfrak{H}_-$. Расширенный оператор совпадает с $\hat{R}_\lambda(T)$. Если, кроме того, A регулярен, то $\hat{R}_\lambda(T)\,\mathfrak{H}_-=\mathfrak{H}$.

Следствие. $\hat{R}_\lambda(T)(\mathbf{A}-\lambda I)\,x=x$ $(\forall x\in\mathfrak{H}_+)$.

§ 2. РАСШИРЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ И РАСШИРЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ З. Э. ОПЕРАТОРА

1. Пусть A — з. э. оператор в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ — некоторое гильбертово пространство, содержащее $\mathfrak{H}$ как подпространство, $\tilde{A}$ — самосопряженный оператор в $\mathfrak{K}$, являющийся расширением A, $\tilde{E}(t)$ — спектральная функция $\tilde{A}$. Операторная функция $R_\lambda=P_{\mathfrak{H}}(\tilde{A}-\lambda I)^{-1}\,|\,\mathfrak{H}$ называется обобщенной резольвентой

оператора A, а $E(t)=P_{\mathfrak{H}}\tilde{E}(t)\,|\,\mathfrak{H}$ — соответствующей обобщенной спектральной функцией. При этом

$$R_\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE(t)}{t-\lambda}\quad(\lambda\in\Pi_\pm). \tag{5.5}$$

Если $\mathfrak{K}=\mathfrak{H}$, то соответствующая резольвента R_λ и спектральная функция $E(t)$ называются ортогональными.

В [54] Ю. Л. Шмульян установил, что R_λ обладает свойствами, аналогичными свойствам резольвент $R_\lambda(T)$, $T\in\mathfrak{M}(A)$. В частности, R_λ может быть расширена по $(-,\cdot)$-непрерывности на $\mathfrak{H}_-$. Соответствующее расширение $\hat{R}_\lambda$ — так называемая расширенная обобщенная резольвента — (р. о. резольвента) обладает свойствами, аналогичными свойствам резольвент $\hat{R}_\lambda(T)$ из § 1. В дальнейшем к R_λ и $\hat{R}_\lambda$ будут применяться предложения, установленные в § 1 для $R_\lambda(T)$ и $\hat{R}_\lambda(T)$ ($T\in\mathfrak{M}(A)$). В частности, отметим следующий аналог равенства (5.2): $(\hat{R}_\lambda)^0=\hat{R}_{\bar{\lambda}}$.

2. Комплексную скалярную функцию $\sigma(t)$, заданную на оси $-\infty<t<\infty$, будем относить к классу $\mathfrak{S}^{(k)}$ ($k=0, 1, 2$), если она имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\,d\sigma(t)\,|}{1+|\,t\,|^k}<\infty.$$

В частности, $\mathfrak{S}^{(0)}$ — класс комплексных функций, имеющих ограниченную вариацию на всей оси.

Каждой функции $\sigma(t)$ будем сопоставлять обычным образом функцию интервала $\sigma(\Delta)$.

Скалярную функцию $\varphi(\lambda)$, голоморфную в полуплоскостях $\Pi_\pm$, называют R-функцией и относят к классу (R), если а) $\operatorname{Im}\varphi(\lambda)\geqslant 0$ ($\lambda\in\Pi_+$), б) $\varphi(\bar{\lambda})=\overline{\varphi(\lambda)}$ (и, следовательно, $\operatorname{Im}\varphi(\lambda)\leqslant 0$ ($\lambda\in\Pi_-$).

Функция $\varphi(\lambda)$ принадлежит классу (R) тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\varphi(\lambda)=a+b\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-\lambda}-\frac{t}{1+t^2}\right)d\sigma(t), \tag{5.6}$$

где a вещественно, $b\geqslant 0$, $\sigma(t)$ — неубывающая функция класса $\mathfrak{S}^{(2)}$. Если в представлении (5.6) $b=0$, то $\varphi(\lambda)$ отнесем к классу (R_1). R-функцию $\varphi(\lambda)$ отнесем к классу (R_0) и будем называть R_0-функцией, если она допускает представление

$$\varphi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}, \tag{5.7}$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая функция класса $\mathfrak{S}^{(0)}$. Функции вида $c+\varphi(\lambda)$, где c — вещественная константа, а $\varphi(\lambda)\in(R_0)$ будем относить к классу (R_{01}).

Пусть $\mathfrak{G}$ — гильбертово пространство, $F(\lambda)$ — функция со значениями из $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ $(\lambda\in\Pi_\pm)$. Будем эту функцию относить к классу $(R)_\mathfrak{G}$, $(R_1)_\mathfrak{G}$, $(R_{01})_\mathfrak{G}$ или $(R_0)_\mathfrak{G}$, если при любом $g\in\mathfrak{G}$ функция $(F(\lambda)g, g)$ принадлежит соответствующему скалярному классу. Аналогичную терминологию будем применять к операторным функциям со значениями из $[\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}_+]$.

Функции класса $(R)_\mathfrak{G}$ будем называть операторными $R_\mathfrak{G}$-функциями, опуская символ $_\mathfrak{G}$, если это не может привести к недоразумениям.

Для операторных R-функций имеют место аналоги интегральных представлений (5.6) и (5.7). Так, например, обобщенная резольвента R_λ з. э. оператора принадлежит классу $(R_0)_\mathfrak{H}$, и аналогом ее представления в виде (5.7) служит равенство (5.5).

3. В настоящем п. рассматривается продолжение обобщенной спектральной функции $E(\Delta)$ з. э. оператора A на пространство $\mathfrak{H}_-$. Семейство всех конечных интервалов числовой оси будем обозначать через $\mathfrak{T}$.

Теорема 5.8. Если $\Delta\in\mathfrak{T}$, то $E(\Delta)\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}_+$ и оператор $E(\Delta)$ является $(\cdot, +)$-непрерывным.

Обозначим через $\hat{E}(\Delta)$ $(-, \cdot)$-непрерывный оператор из $\mathfrak{H}_-$ в $\mathfrak{H}$, сопряженный с $E(\Delta)$ $(\in[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_+])$. Легко видеть, что $\hat{E}(\Delta)f=E(\Delta)f\,(\forall f\in\mathfrak{H})$, так что $\hat{E}(\Delta)$ является расширением $E(\Delta)$ по непрерывности.

Будем называть $\hat{E}(\Delta)$ как функцию от $\Delta\,(\in\mathfrak{T})$ расширенной обобщенной спектральной функцией (р. о. с. функцией) оператора A, отвечающей его самосопряженному расширению $\tilde{A}$ или же исходной спектральной функции $E(\Delta)$.

Теорема 5.9. $\hat{E}(\Delta)\in[\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}_+]\,(\forall\Delta\in\mathfrak{T})$, причем $(\hat{E}(\Delta)f, f)\geqslant 0$ при всех $f\in\mathfrak{H}_-$.

Как известно, комплексная скалярная мера $(E(\Delta)f, g)$ принадлежит классу $\mathfrak{S}^{(0)}$ при всех $f, g\in\mathfrak{H}$. В то же время функция $(\hat{E}(\Delta)f, g)$ может быть неограниченной при $f, g\in\mathfrak{H}_-$.

Теорема 5.10. Если $f\in\mathfrak{H}_-$, $g\in\mathfrak{H}$, то $(\hat{E}(\Delta)f, g)\in\mathfrak{S}^{(1)}$. Если $f, g\in\mathfrak{H}_-$, то $(\hat{E}(\Delta)f, g)\in\mathfrak{S}^{(2)}$.

4. Пусть R_λ — обобщенная резольвента з. э. оператора, $\hat{R}_\lambda$ — соответствующая р. о. резольвента. Известно, что $(R_\lambda f, f)$ является R_0-функцией при всех $f \in \mathfrak{H}$. В то же время $(\hat{R}_\lambda f, f)$ имеет смысл не при всех $f \in \mathfrak{H}_-$. Если же $f \in \mathfrak{B}$, то $(\hat{R}_\lambda f, f)$ хотя и имеет смысл, но может не быть R-функцией. Ниже следующая теорема выявляет роль введенного в § 1 п. 2 функционала Ω.

Теорема 5.11. При любом $f \in \mathfrak{B}$ функция $(\hat{R}_\lambda f, f) - i\Omega(f, f))$ является R-функцией.

Таким образом, число $i\Omega(f, f)$ характеризует «меру отклонения» функции $(\hat{R}_\lambda f, f)$ от класса R-функций. Эта мера отклонения не зависит от выбора р. о. р. $\hat{R}_\lambda$ и определяется только вектором $f \in \mathfrak{B}$.

Следствие. Для того чтобы $(\hat{R}_\lambda f, f)$ была R-функцией при любом $f \in \mathfrak{B}$ и при любом выборе р. о. резольвенты, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был R-оператором.

5. Интегральное представление резольвенты (5.5) играет фундаментальную роль в теории операторов и ее приложениях. В связи с этим возник вопрос о распространении этой формулы на р. о. резольвенты и р. о. с. функции. Если f, $g \in \mathfrak{H}_-$, то выражение $(\hat{R}_\lambda, f, g)$ может не иметь смысла, а интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,(\hat{E}\,(t)\,f, g)}{t-\lambda}$$

может расходиться Ю. Л. Шмульян показал [54], что некоторая регуляризация как р. о. резольвенты, так и соответствующего интеграла позволяет построить аналог формулы (5.5).

Теорема 5.12. а) Существует такой бинепрерывный самосопряженный оператор H, что для любой р. о. резольвенты $\hat{R}_\lambda$ оператор $\hat{R}_{\lambda,H} := \hat{R}_\lambda - H$ принадлежит классу $[\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}_+]$.

б) Функция $\hat{R}_{\lambda,H}$ принадлежит классу (R_1) и

$$\hat{R}_{\lambda,H} = Q_H + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{t^2+1} \right) d\hat{E}\,(t),$$

где Q_H — некоторый самосопряженный оператор из $[\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}_+]$, (зависящий от выбора H).

Следствие. При всех невещественных λ и μ

$$\hat{R}_\lambda - \hat{R}_\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{1}{t-\mu} \right) d\hat{E}\,(t).$$

Оператор H из теоремы 5.12 будем называть регуляризующим. В качестве регуляризующего оператора можно взять

$\frac{1}{2}(\hat{R}_{\lambda_0}^{(0)}+\hat{R}_{\bar{\lambda}_0}^{(0)})$, где λ_0 — произвольное невещественное число, а $\hat{R}_\lambda^{(0)}$ — некоторая р. о. резольвента. Если λ_0 — вещественная точка регулярности некоторой р. о. резольвенты $R_\lambda^{(0)}$, то можно положить $H=R_{\lambda_0}^{(0)}$.

§ 3. ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА РАСШИРЕННЫХ ОБОБЩЕННЫХ РЕЗОЛЬВЕНТ

1. Как отмечалось выше Ш. Н. Саакян [39] распространил формулу М. Г. Крейна, описывающую множество обобщенных резольвент з. э. оператора, на случай любых равных дефектных чисел. А. В. Штраус [63, 65, 66] получил описание этого множества в иной форме, освободившись при этом от предположения о плотности области задания. Это описание в дальнейшем было приведено Е. Л. Александровым [1] и Ю. Л. Шмульяном [58] к той же форме, что и у М. Г. Крейна—Ш. Н. Саакяна. Ю. Л. Шмульян [58] показал, что формула остается справедливой для расширенных резольвент. (Формулу М. Г. Крейна для расширенных резольвент рассматривал Ф. А. Березин [8]).

Для того, чтобы сформулировать последний результат, удобно воспользоваться понятием «несобственной» операторной R-функции (Ш. Н. Саакян [39], М. Г. Крейн — Г. Лангер [23]).

Пусть $\mathfrak{G}$ — гильбертово пространство, $V(\lambda)$ — голоморфная в полуплоскости Π_+ функция, значения которой — операторы в $\mathfrak{G}$, $\|V(\lambda)\|\leqslant 1$. Легко показать, что множество $\mathfrak{G}_1$ векторов, неподвижных относительно $V(\lambda)$, не зависит от λ, а подпространство $\mathfrak{G}_2=\mathfrak{G}\ominus\mathfrak{G}_1$ инвариантно относительно $V(\lambda)$.

Преобразование Кэли $i\frac{I+V(\lambda)}{I-V(\lambda)}$ функции $V(\lambda)$, вообще говоря, лишено смысла на $\mathfrak{G}_1$. Условимся относить функции $V(\lambda)$ в качестве преобразования Кэли символ $\tau(\lambda)=\infty\cdot P_1+$ $+\tau_2(\lambda)P_2$, где P_1 и P_2 — ортопроекторы на $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ соответственно, $\tau_2(\lambda)=i\,[I+V_2(\lambda)]\,[I-V_2(\lambda)]^{-1}$ — преобразование Кэли оператора $V_2(\lambda)=V(\lambda)\,|\,\mathfrak{G}_2$. При каждом $\lambda\in\Pi_+$ оператор $\tau_2(\lambda)$ является максимальным диссипативным оператором, вообще говоря, неограниченным. Его область определения (плотная в $\mathfrak{G}_2$) может меняться с изменением λ.

Будем называть $\tau(\lambda)$ несобственной R-функцией. Класс всевозможных R-функций в $\mathfrak{G}$ как обычных, так и несобственных, будем обозначать через $(\tilde{R})_{\mathfrak{G}}$.

Заметим, что каждую функцию класса $(\tilde{R})_{\mathfrak{G}}$ можно в известном смысле аппроксимировать обычными $R_{\mathfrak{G}}$-функциями, что позволяет в некоторых случаях вводить алгебраические операции в этом классе. Не останавливаясь на этом вопросе детально, отметим лишь следующее предложение:

Если $\tau(\lambda)\in(\tilde{R})_{\mathfrak{G}}$, $F(\lambda)$—$R_{\mathfrak{G}}$-функция, мнимая часть которой имеет положительную нижнюю грань, то $-[\tau(\lambda)+F(\lambda)]^{-1}$ имеет смысл и является обычной $R_{\mathfrak{G}}$-функцией.

Пусть з. э. оператор A имеет равные дефектные числа, $\tilde{A}$—некоторое его самосопряженное расширение в $\mathfrak{H}$, R_λ^0—соответствующая ортогональная резольвента.

Рассмотрим функцию

$$Q(\lambda)=P_{\mathfrak{N}_i}\frac{I+\tilde{A}\lambda}{\tilde{A}-\lambda I}\bigg|\mathfrak{N}_i,$$

являющуюся функцией класса $(R_1)_{\mathfrak{N}_i}$, мнимая часть которой имеет положительную нижнюю грань ($Q(i)_I=I_{\mathfrak{N}_i}$).

Функцию $\tau(\lambda)\in(\tilde{R})_{\mathfrak{N}_i}$ назовем Q-допустимой, если R-функция—$[\tau(\lambda)-Q(\lambda)]^{-1}$ принадлежит классу $(R_1)_{\mathfrak{N}_i}$. Ряд критериев Q-допустимости имеется в [67]. Класс всех Q-допустимых функций обозначим через $(\tilde{R})_{\mathfrak{N}_i}^{[Q]}$. Заметим, что $(\tilde{R})_{\mathfrak{N}_i}^{[Q]}=(\tilde{R})_{\mathfrak{N}_i}$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{D}(A)$ плотно в $\mathfrak{H}$.

Рассмотрим $(\cdot, +)$-непрерывный оператор

$$K(\lambda)=\frac{\tilde{A}-iI}{\tilde{A}-\lambda I}\bigg|\mathfrak{N}_i\in[\mathfrak{N}_i, \mathfrak{H}_+].$$

Сопряженный к нему оператор $K(\lambda)^*$ $(-, \cdot)$-непрерывен. Обозначая через $\hat{R}_\lambda$ и $\hat{R}_\lambda^0$ расширение соответственно резольвент R_λ и R_λ^0 на $\mathfrak{H}_-$, получим следующее предложение:

Теорема 5.13. Общий вид р. о. резольвент оператора A дается формулой

$$\hat{R}_\lambda=\hat{R}_\lambda^0-K(\lambda)[\tau(\lambda)+Q(\lambda)]^{-1}K(\bar{\lambda})^*, \tag{5.8}$$

где $\tau(\lambda)$ пробегает класс $(\tilde{R})_{\mathfrak{N}_i}^{[Q]}$.

Замечание 1. Если H—некоторый регуляризующий оператор, то

$$\hat{R}_{\lambda,H}=\hat{R}_{\lambda,H}^0-K(\lambda)[\tau(\lambda)+Q(\lambda)]^{-1}K(\bar{\lambda})^*, \tag{5.9}$$

причем обе части—$(-, +)$-непрерывные операторы.

Замечание 2. Если записать формулу (5.8) в виде

$$\hat{R}_\lambda-\hat{R}_\lambda=-K(\lambda)[\tau(\lambda)+Q(\lambda)]^{-1}K(\bar{\lambda})^*,$$

то обе ее части будут $(-, +)$-непрерывными операторами.

Глава VI

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕСОБСТВЕННЫМ МАСШТАБНЫМ ПОДПРОСТРАНСТВОМ. РЕЗОЛЬВЕНТНАЯ МАТРИЦА

1. В работе [21] М. Г. Крейном была построена общая теория представления плотно заданных з. э. операторов с конечными равными дефектными числами (m, m). Исходным пунктом этой теории является прямое разложение

$$\mathfrak{H} = M \dotplus \mathfrak{M}_\lambda, \tag{6.1}$$

где M — некоторое m-мерное подпространство из $\mathfrak{H}$, называемое масштабным. Если $P(\lambda)$ — проектор на M, отвечающий разложению (6.1), т. е. с ядром $\mathfrak{M}_\lambda$, то соответствие $f \to P(\lambda) f$ есть отображение пространства $\mathfrak{H}$ в пространство M-значных аналитических вектор-функций. Сам оператор A при этом отображении переходит в оператор умножения на λ.

Теория представления в сочетании с формулой обобщенных резольвент привела ее автора к понятию резольвентной матрицы — матрицы дробно-линейного преобразования (д. л. п.), дающего описание спектральных функций заданного оператора, действующих в масштабном подпространстве. Выяснилось, что на этом пути можно получить, с единой точки зрения, описание множества решений рода классических задач — проблемы моментов, проблемы Неванлинны—Пика и др.

С другой стороны, теория спектральных функций дифференциальных операторов приводила к своеобразному варианту теории представления, в котором, однако, масштабное подпространство могло содержать несобственные элементы. При рассмотрении операторов в частных разностях и частных производных, в теории положительно определенных функций и ядер возникали эрмитовы операторы с бесконечными дефектными числами.

Задача построения общей теории представления и теории резольвентных матриц з. э. операторов была сформулирована М. Г. Крейном [22] и решена Ю. Л. Шмульяном [51—58]. В основе теории, построенной Ю. Л. Шмульяном, лежит понятие операторного узла, синтезирующего в себе з. э. оператор A, масштабное подпространство M, содержащее, вообще говоря, элементы из $\mathfrak{X}$, и некоторое фиксированное самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A.

Пусть $\mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_-$ — оснащение, построенное по оператору A, как в гл. I п. 1, $\hat{A}$ — естественное расширение оператора A (см. гл. I § 1). Для каждого невещественного λ линеал $\hat{\mathfrak{M}}_\lambda := (\hat{A} - \lambda I) \mathfrak{H}_0$ $(-)$-замкнут и совпадает с $(-)$-замыканием $\mathfrak{M}_\lambda$.

В качестве масштабного подпространства выбирается $(-)$-замкнутый линеал M.

Определение. Точку λ будем называть M-регулярной для оператора A, если она является точкой регулярного типа для A, и имеет место прямое разложение

$$\mathfrak{H}_{-}=\hat{\mathfrak{M}}_{\lambda}+M. \tag{6.2}$$

Множество $\rho_M(A)$ всех M-регулярных точек открыто. На этом множестве определена голоморфная оператор-функция $P(\lambda)$, значения которой — проекторы на M, отвечающие разложению (6.2). Имеет место равенство $P(\lambda)\hat{A}f=\lambda P(\lambda)f$ $(\forall f \in \mathfrak{H}_{-})$. Таким образом, поставив каждому $f \in \mathfrak{H}_{-}$ вектор-функцию $P(\lambda)f$, получим отображение пространства $\mathfrak{H}_{-}$ в пространство голоморфных в $\rho_M(A)$ M-значных функций, при котором $\hat{A}$ переходит в оператор умножения на λ. Оператор-функцию $P(\lambda)$ назовем функцией первого рода.

Кроме функции $P(\lambda)$, важную роль в теории представления играет функция второго рода $T(\lambda)=(\hat{A}-\lambda I)^{-1}(I-P(\lambda))$, значения которой — $(-,\ \cdot)$-непрерывные операторы. Если $\hat{R}_\lambda$ — какая-либо р. о. резольвента оператора A, то $T(\lambda)=\hat{R}_\lambda(I-P(\lambda))$.

Теорема 6.1. Функции $P(\lambda)$ и $T(\lambda)$ голоморфны на множестве $\rho_M(A)$.

2. Для дальнейшего нам будет удобно ввести понятие операторного узла, синтезирующее в себе з. э. оператор A, его фиксированное самосопряженное расширение $\tilde{A}$ в пространстве $\mathfrak{H}$ и масштабное подпространство M. При этом оказалось целесообразным ввести некоторое вспомогательное гильбертово пространство $\mathfrak{G}$ и реализовать M как образ $\mathfrak{G}$, при некотором отображении $S:\mathfrak{G}\to\mathfrak{H}_{-}$. Кроме того, мы зафиксируем некоторое изоморфное отображение $S_1:\mathfrak{G}\to\mathfrak{N}_i$. В итоге получим следующее

Определение. Будем называть узлом набор $\alpha=\{\mathfrak{H}, A, \tilde{A}; \mathfrak{N}, S_1, S\}$, где $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, A — з. э. оператор в $\mathfrak{H}$, $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение A в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ — вспомогательное гильбертово пространство, S_1 и S — непрерывные (в соответствующих топологиях) мономорфизмы из $\mathfrak{G}$ соответственно на $\mathfrak{N}_i$ и в $\mathfrak{H}_{-}$. (Здесь $\mathfrak{H}_{+}\subset\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}_{-}$ — оснащение, построенное по оператору A, как в гл. I). При этом будем предполагать, что оператор S^{-1} (с областью определения $S\mathfrak{G}\subset\mathfrak{H}_{-}$) является непрерывным. С узлом α будем сопоставлять $(-)$-замкнутый линеал $M=S\mathfrak{G}$ как масштабное подпространство.

Множество M-регулярных точек узла α (в дальнейшем — α-регулярных точек) будем обозначать через $\rho(\alpha)$, множество невещественных точек из $\rho(\alpha)$ — через $\rho_i(\alpha)$.

Зафиксируем некоторый регуляризующий оператор H. Каждой регуляризованной р. о. резольвенте $\hat{R}_{\lambda,H}$ оператора A поставим в соответствие $R_{\mathfrak{G}}$-функцию $S(\lambda)=S^*\hat{R}_{\lambda,H}S$.

Если $\hat{R}_{\lambda,H}$ пробегает класс всех регуляризованных р. о. резольвент, то $S(\lambda)$ пробегает некоторое множество $R_{\mathfrak{G}}$-функций, которое мы обозначим через $\mathfrak{R}(\alpha)$. Описание этого класса лежит в основе многочисленных приложений теории представления (спектральная теория дифференциальных операторов как обыкновенных, так и в частных производных, проблема продолжения эрмитово положительных функций и др.). В настоящем п. дается описание класса $\mathfrak{R}(\alpha)$ в двух формах (формулы (6.4) и (6.5)).

Из формулы (5.9) вытекает, что

$$S(\lambda)=S^*\hat{R}_{\lambda}^{0}S-S^*K(\lambda)[\tau(\lambda)+Q(\lambda)]^{-1}[S^*K(\bar{\lambda})]^*. \tag{6.3}$$

Положим

$$v_{11}(\lambda)=S_1^*Q(\lambda)S_1,\quad v_{21}(\lambda)=S^*K(\lambda)S_1,$$

$$v_{12}(\lambda)=v_{21}(\bar{\lambda})^*,\quad v_{22}(\lambda)=S^*\hat{R}_{\lambda,H}^{0}S.$$

Теорема 6.4. *Матрица-функция*

$$v(\lambda)=\begin{pmatrix} v_{11}(\lambda) & v_{12}(\lambda)\\ v_{21}(\lambda) & v_{22}(\lambda)\end{pmatrix}$$

является функцией класса $(R_1)_{\mathfrak{G}\oplus\mathfrak{G}}$.

Описание (6.3) класса $\mathfrak{R}(\alpha)$ может быть приведено к виду

$$S(\lambda)=v_{22}(\lambda)-v_{21}(\lambda)[v_{11}(\lambda)+\theta(\lambda)]^{-1}v_{12}(\lambda), \tag{6.4}$$

где $\theta(\lambda)$ пробегает класс $(\tilde{R})_{\mathfrak{G}}^{[v_{11}]}$ v_{11}-допустимых функций. Напомним (см. гл. V), что этот класс состоит из функций $\theta(\lambda)\in(\tilde{R})_{\mathfrak{G}}$, для которых

$$-[v_{11}(\lambda)+\theta(\lambda)]^{-1}\in(R_1).$$

Матрицу-функцию $v(\lambda)$ будем называть N-матрицей узла α. Узел α называется простым или вполне несамосопряженным, если $(\cdot)$-замкнутая линейная оболочка множества

$$\{\hat{R}_{\lambda}^{0}Sg,\ \hat{R}_{\mu}^{0}S_1g_1;\ g,g_1\in\mathfrak{G},\ \operatorname{Im}\lambda\neq0,\ \operatorname{Im}\mu\neq0\}$$

совпадает с $\mathfrak{H}$. Простота узла α равносильна выполнению следующего условия: В $\mathfrak{H}$ не существует такого подпространства $L\neq\{0\}$, что а) $L\cap\mathfrak{D}(A)$ $(\cdot)$-плотно в L и $A\,|\,L\cap\mathfrak{D}(A)$ — самосопряженный оператор; б) $L\cap\mathfrak{D}(A)$ ортогонально $S\mathfrak{G}=M$. Достаточным условием простоты узла является простота самого оператора A.

Дадим описание аналитических свойств N-матрицы.

Пусть

$$v(\lambda)=\begin{pmatrix} v_{11}(\lambda) & v_{12}(\lambda) \\ v_{21}(\lambda) & v_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$ — функция класса $(R_1)_{\mathfrak{G}\oplus\mathfrak{G}}$. Обозначим через $\mathfrak{G}_0$ линеал тех $g\in\mathfrak{G}$, для которых

$$(v_{11}(\lambda)\,g,\ g)\in(R_{01}).$$

Для любого $g\in\mathfrak{G}_0$ вектор-функция $v_{21}(i\eta)\,g$ имеет сильный предел при $\eta\to+\infty$.

Справедлива

Теорема 6.5 N-матрица узла α удовлетворяет следующим условиям:

а) оператор $v_{11}(\lambda)_I$ непрерывно обратим при некотором $\lambda\in\Pi_+$ (тогда и при всех $\lambda\in\Pi_+$)

б) $\lim\limits_{\eta\to+\infty} v_{21}(i\eta)\,g=0$ для всех $g\in\mathfrak{G}_0$.

Наоборот, пусть функция

$$v(\lambda)=\begin{pmatrix} v_{11}(\lambda) & v_{12}(\lambda) \\ v_{21}(\lambda) & v_{22}(\lambda) \end{pmatrix}\in(R_1)_{\mathfrak{G}\oplus\mathfrak{G}}$$

удовлетворяет условиям а) и б). Тогда существует такой узел α, N-матрица которого равна $v(\lambda)$.

Вторая часть теоремы 6.5 представляет собою решение обратной задачи.

N-матрица определяет простой узел с точностью до изоморфизма.

Теорема 6.6. $\mathfrak{G}_0=\{0\}$ тогда и только тогда, когда оператор A имеет плотную область задания. В этом и только в этом случае все функции $\theta(\lambda)\in(\acute{R})_{\mathfrak{G}}$ (см. формулу (6.4)) являются v_{11}-допустимыми.

3. Поскольку N-матрица $v(\lambda)$ определяет простой узел с точностью до изоморфизма, в терминах $v(\lambda)$ можно характеризовать различные свойства узла. В частности, теорема 6.7 характеризует узел, масштабное подпространство $S\mathfrak{G}$ которого не содержит несобственных элементов, т. е. $S\mathfrak{G}\subset\mathfrak{H}$. Такой узел будем называть K-узлом.

Теорема 6.7. Для того чтобы узел с N-матрицей $v(\lambda)$ был K-узлом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: 1) $v_{22}(\lambda)\in(R_{01})_{\mathfrak{G}}$; 2) при любом $g\in\mathfrak{G}$ $v_{12}(i\eta)\,g$ и $v_{21}(i\eta)\,g$ сильно стремятся к 0 при $\eta\to+\infty$.

4. В настоящем п. вводится понятие резольвентной матрицы узла α, и с ее помощью дается иное, чем в п. 3, описание класса $\mathfrak{K}(\alpha)$. Условимся называть оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{G}$ аффинитетом, если он отображает $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Теорема 6.8. Для того чтобы число λ, $\operatorname{Im}\lambda\neq0$ принадлежало $\rho(\alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы $v_{12}(\lambda)$ был аффинитетом.

Пусть $v(\lambda)=(v_{ij}(\lambda))_{i,j=1,2}$ — N-матрица узла α. При каждом $\lambda\in\rho_I(\alpha)$ положим

$$w(\lambda)=\begin{bmatrix} v_{12}(\lambda)^{-1}v_{11}(\lambda) & v_{12}(\lambda)^{-1} \\ v_{22}(\lambda)v_{12}(\lambda)^{-1}v_{11}(\lambda)-v_{21}(\lambda) & v_{22}(\lambda)v_{12}(\lambda)^{-1}\end{bmatrix}.$$

Матрицу-функцию $w(\lambda)$ будем называть резольвентной матрицей узла α.

Теорема 6.9. Класс $\mathfrak{R}(\alpha)$ описывается формулой

$$S(\lambda)=[w_{21}(\lambda)+w_{22}(\lambda)\theta(\lambda)][w_{11}(\lambda)+w_{12}(\lambda)\theta(\lambda)]^{-1}, \tag{6.5}$$

где $\theta(\lambda)$ пробегает класс $(\tilde{R})_{\mathfrak{G}}^{[w_{21}^{-1}w_{11}]}$.

Таким образом, резольвентная матрица является матрицей дробно-линейного преобразования, дающего описание класса $\mathfrak{R}(\alpha)$.

Описание аналитических свойств резольвентной матрицы дается теоремой 6.10.

Пусть $J=\begin{pmatrix} 0 & -iI_{\mathfrak{G}} \\ iI_{\mathfrak{G}} & 0\end{pmatrix}$ — оператор в $\mathfrak{G}\oplus\mathfrak{G}$, $(J=J^*,\ J^2=I)$.

Введя в $\mathfrak{G}\oplus\mathfrak{G}$ индефинитное скалярное произведение $[f,g]=(Jf,g)$, получим так называемое J-пространство.

Теорема 6.10. Резольвентная матрица $w(\lambda)=\begin{pmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda)\end{pmatrix}$ обладает свойствами:

1) $\operatorname{Im}\lambda\cdot[w(\lambda)^*Jw(\lambda)-J]\geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\lambda\cdot[w(\lambda)Jw(\lambda)^*-J]\geqslant 0$ $(\forall\lambda\in\rho_I(\alpha))$;

2) $w_{12}(\lambda)$ — аффинитет, а матрица-функция

$$v(\lambda)=\begin{bmatrix} w_{12}(\lambda)^{-1}w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda)^{-1} \\ w_{22}(\lambda)w_{12}(\lambda)^{-1}w_{11}(\lambda)-w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda)w_{12}(\lambda)^{-1}\end{bmatrix}$$

аналитически продолжается на полуплоскости $\Pi_\pm$ и является функцией класса $(R_1)_{\mathfrak{G}\oplus\mathfrak{G}}$, удовлетворяющей условиям а) и б) теоремы 6.5.

3) Если $\lambda,\ \bar{\lambda}\in\rho_I(\alpha)$, то $w(\lambda)$ — аффинитет и $w(\lambda)^{-1}=Jw(\bar{\lambda})^*J$.

Резольвентная матрица $w(\lambda)$ определена a priori на множестве $\rho_I(\alpha)$. Важным ее достоинством является тесная связь между α-регулярностью вещественных точек и аналитической продолжимостью резольвентной матрицы на эти точки.

Теорема 6. 11. Если λ_0 — вещественная α-регулярная точка, то $w(\lambda)$ аналитически продолжима на некоторую окрестность точки λ_0.

В случае простого узла справедливо и обратное предложение.

Теорема 6. 12. Если резольвентная матрица $w(\lambda)$ простого узла α аналитически продолжима на некоторый отрезок вещественной оси, то этот отрезок состоит из α-регулярных точек, и $w(\lambda)$ J-унитарна в точках этого отрезка.

М. Г. Крейном в работе [18] для случая дефектных чисел (1,1) было установлено тождество для резольвентной матрицы, являющееся обобщением тождеств Кристоффеля теории ортогональных многочленов. В [24] это тождество было распространено М. Г. Крейном и Ш. Н. Саакяном на общий случай плотно заданного оператора.

В настоящем пункте тождество М. Г. Крейна—Ш. Н. Саакяна обобщается на случай узлов (Ю. Л. Шмульян [58]). Пусть H — некоторый регуляризующий оператор. Введем в рассмотрение функцию $T_H(\lambda)=T(\lambda)+HP(\lambda)$ — регуляризованную функцию второго рода. Оператор $T_H(\lambda)$ бинепрерывен при $\lambda\in\rho(\alpha)$, а при любых λ, $\mu\in\rho(\alpha)$ оператор $T_H(\lambda)-T_H(\mu)$ $(-,+)$-непрерывен. Поскольку $P(\lambda)\mathfrak{H}_-=M=S\mathfrak{G}$, то оператор $S^{-1}P(\lambda):\mathfrak{H}_-\to\mathfrak{G}$ имеет смысл и $(-,\cdot)$-непрерывен.

Теорема 6.13. Для любых λ, $\mu\in\rho_I(\alpha)$ имеет место формула

$$\frac{w(\lambda)Jw(\mu)^*-J}{\lambda-\bar{\mu}}=iG(\lambda)G(\mu)^*, \tag{6.6}$$

где

$G(\lambda)=\begin{bmatrix}S^{-1}P(\lambda)|\mathfrak{H}\\ S^*T_H(\lambda)|\mathfrak{H}\end{bmatrix}$ — голоморфная в $\rho_I(\alpha)$ функция, значения которой — операторы $\in[\mathfrak{H},\ \mathfrak{G}\oplus\mathfrak{G}]$.

Функция $G(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$G(\lambda)=G(\mu)[I+(\lambda-\mu)T(\lambda)|\mathfrak{H}]\quad(\lambda,\ \mu\in\rho(\alpha)). \tag{6.7}$$

В случае K-узла (см. п. 3) в формуле для $G(\lambda)$ можно взять $T(\lambda)$ вместо $T_H(\lambda)$.

В частности, взяв в качестве $\mathfrak{G}$ некоторое подпространство M из $\mathfrak{H}$, и в качестве S — оператор вложения M в $\mathfrak{H}$, (тогда S^* есть ортопроектор $\mathfrak{H}$ на M), получим для $G(\lambda)$ форму, которую эта функция имеет в [24].

5. М. Г. Крейн и Ш. Н. Саакян [25] установили связь между теорией резольвентной матриц и теорией характеристических функций. Не останавливаясь на различных вариантах последней теории, приведем два результата.

1) Если исходный узел имеет хотя бы одну вещественную регулярную точку, то его резольвентная матрица совпадает с точностью до постоянного J-унитарного множителя и до дробно-линейной замены независимого переменного с характеристической функцией некоторого $\mathscr{W}$-узла [11, 12].

2) Резольвентная матрица K-узла (не имеющего, вообще говоря, вещественных регулярных точек) совпадает с характеристической функцией некоторого $\mathscr{S}$-узла [10] с точностью до постоянного J-унитарного множителя и дробно-линейной замены независимого переменного.

Глава VII

ОТДЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РАСШИРЕНИЯ

§ 1. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО С ИНВОЛЮЦИЕЙ

1. Гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ называют пространством с инволюцией, если в нем задан оператор сопряжения J, называемый инволюцией, обладающий свойствами: 1) $(Jf, Jg)=(g,f)$ $(\forall f, g\in\mathfrak{H})$; 2) $J^2=I$.

Линейный оператор A в $\mathfrak{H}$ называется J-эрмитовым, если

$$(Af, Jg)=(f, JAg)\ (\forall f, g\in\mathfrak{D}(A)).$$

Будем предполагать, что $\overline{\mathfrak{D}(A)}=\mathfrak{H}$. Тогда условие J-эрмитовости может быть записано в виде $JAJ\subset A^*$. Если $JAJ=A^*$, то оператор A называется J-самосопряженным.

Вопросам теории J-эрмитовых операторов и их J-самосопряженных расширений посвящен ряд работ, из которых отметим работу Галиндо [69], в которой доказано существование J-самосопряженных расширений любого (плотно заданного) J-эрмитового оператора.

Методы теории оснащенных пространств были применены Л. М. Райхом [37] и Л. М. Райхом—Э. Р. Цекановским [38] к исследованию J-эрмитовых операторов. Этими авторами был установлен аналог формул Неймана и дано описание биинволютивно-самосопряженных бирасширений.

2. Пусть $\mathfrak{H}_+\subset\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}_-$ — оснащенное гильбертово пространство и пусть J — инволюция в $\mathfrak{H}$. Положим $J_+=J\mid\mathfrak{H}_+$, $\mathfrak{H}^+=J_+\mathfrak{H}_+$. Линеал $\mathfrak{H}^+$ $(\cdot)$-плотен в $\mathfrak{H}$. Введем в $\mathfrak{H}^+$ позитивное скалярное произведение: $(u, v)^+=\overline{(x, y)_+}$, если $u=J_+x$, $v=J_+y$ $(x, y\in\mathfrak{H}_+)$ — и соответствующую норму: $\|u\|^+=\|x\|_+$, если $u=J_+x$. Оператор $J^+=J\mid\mathfrak{H}^+$ отображает $\mathfrak{H}^+$ на $\mathfrak{H}_+$ и является обратным для оператора J_+.

Рассмотрим оснащение $\mathfrak{H}^+\subset\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}^-$.

Теорема 7.1. а) Инволюция J может быть расширена по непрерывности до оператора J_-, отображающего $\mathfrak{H}_-$ на $\mathfrak{H}^-$. При этом

$$(J_-x, J_+y)=\overline{(x, y)}\ (\forall x\in\mathfrak{H}_-, y\in\mathfrak{H}_+).$$

б) Операторы Рисса $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$, отвечающие оснащениям $\mathfrak{H}_+\subset\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}_-$ и $\mathfrak{H}^+\subset\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}^-$ соответственно, связаны соотношением $R'J_+=J_-\mathbf{R}$

в) $(J_-x, J_-g)^-=(g, x)_-$ $(\forall x, g\in\mathfrak{H}_-)$.

Пару оснащений $\mathfrak{H}_+\subset\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}_-$ и $\mathfrak{H}^+\subset\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}^-$ с описанными выше свойствами будем называть биинволютивным оснащением. В случае биинволютивных оснащений мы будем употреблять термины «$\mathfrak{H}_+$-ортогональность», «$\mathfrak{H}^-$-замкнутость» и т. п. для указания на скалярное произведение, относительно которого рассматривается соответствующее геометрическое или топологическое понятие.

3. Пусть A — замкнутый линейный оператор в пространстве с инволюцией, A^* — сопряженный с ним оператор, $\mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_-$ — соответствующее оснащение ($\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{D}(A^*)$, $\| x \|_+^2 = \| x \|^2 + \| A^* x \|^2$). Тогда $\mathfrak{H}^+ = J\mathfrak{H}_+$ является областью определения линейного оператора $A_* = JA^*J$, а соответствующая позитивная норма $\| u \| \overset{+}{=} \| J^+ u \|_+$ удовлетворяет условию $(\| u \|^+)^2 = \| u \|^2 + \| A_* u \|^2$.

Таким образом, замкнутый оператор A в пространстве с инволюцией порождает биинволютивное оснащение.

Заметим, что $A_* = (JAJ)^*$, так что если исходить из линейного оператора JAJ вместо A, то оснащения $\mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}^-$ и $\mathfrak{H}^+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}^-$ меняются ролями.

Будем в дальнейшем предполагать, что A — плотно заданный J-эрмитов оператор.

Теорема 7.2. Имеют место $\mathfrak{H}_+$- и соответственно $\mathfrak{H}^+$-ортогональные разложения

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_+ &= \mathfrak{D}(A) \oplus \mathfrak{N}_+, \\ \mathfrak{H}^+ &= J_+ \mathfrak{D}(A) \oplus \mathfrak{N}^+, \end{aligned} \tag{7.1}$$

причем $\mathfrak{N}_+ = J^+ \mathfrak{N}_+$ и подпространство $\mathfrak{N}_+$ состоит из тех и только тех векторов $x \in \mathfrak{H}$, для которых $(A^*J)^2 x = -x$.

Определение. Оператор $B \in [\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}^+]$ будем называть J_+-самосопряженным, если $B = J_+ B^* J_+$.

Определение. Линейный оператор $\mathbf{A} \in [\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}^-]$ будем называть биинволютивным бирасширением J-эрмитова оператора A, если справедливо включение

$$\mathbf{A} \supset A, \quad J_- \mathbf{A}^* J_+ \supset A.$$

Биинволютивное бирасширение $\mathbf{A}$ J-эрмитова оператора A будем называть самосопряженным, если $\mathbf{A} = J_- \mathbf{A}^* J_+$. Класс всех биинволютивных бирасширений J-эрмитова оператора A обозначим через $\Omega_J(A)$.

Пусть A — J-эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$. Тогда операторы

$$\mathbf{A}_0 = JA^*J, \quad \mathbf{A}_1 = \hat{A} \,|\mathfrak{H}_+$$

принадлежат классу $\Omega_J(A)$, причем $\mathbf{A}_0 = J_- \mathbf{A}_1^* J_+$, $\mathbf{A}_1 = J_- \mathbf{A}_0^* J_+$.

Описание класса $\Omega_J(A)$ дается следующей теоремой:

Теорема 7.3. Формулы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{R}' \mathrm{S}_{\mathbf{A}} P_{\mathfrak{N}^+}, \quad S_{\mathbf{A}} = \mathbf{R}'^{-1} [\mathbf{A} - \mathbf{A}_0] \,|_{\mathfrak{N}_+} \tag{7.2}$$

задают биективное соответствие между классами $\Omega_J(A)$ и $[\mathfrak{N}_+, \mathfrak{N}^+]$.

Следствие. Для того чтобы выражение (7.2) определяло биинволютивно самосопряженное бирасширение J-эрмитова оператора A, необходимо и достаточно, чтобы

$$J_+S_A^*J_+ - S_A = J_+A^*J_+ \mid \mathfrak{N}_+.$$

Теорема 7.4. Формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{R}'S_A P_{\mathfrak{N}_+}, \\ S_A &= S - \frac{1}{2} J_+A^*J_+ \mid \mathfrak{N}_+ \end{aligned} \tag{7.3}$$

устанавливают биективное соответствие между множеством биинволютивно самосопряженных бирасширений оператора A и множеством J_+-самосопряженных операторов S из класса $[\mathfrak{N}_+, \mathfrak{N}^+]$.

Л. М. Райхом—Э. Р. Цекановским [38] была проведена классификация биинволютивно самосопряженных бирасширений, аналогичная классификации, приведенной в гл. II. Ряд положений гл. V перенесен на резольвенты биинволютивно самосопряженных бирасширений.

§ 2. ПРОСТРАНСТВА С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, P_1 и P_2 — ортогональные проекторы в $\mathfrak{H}$, $P_1 + P_2 = I$. Задав в $\mathfrak{H}$ индефинитное скалярное произведение формулой $[x, y] = (Jx, y)$, где $J = P_1 - P_2$, получим так называемое J-пространство.

Если A — плотно заданный замкнутый оператор в $\mathfrak{H}$, то оператор $A^+ = JA^*J$ называют π-сопряженным с A. Он определяется равенством $[Ax, y] = [x, A^+y]$ на множестве $\mathfrak{D}(A^+)$ тех y, для которых $[Ax, y]$ — непрерывный функционал от x. Оператор A называется π-эрмитовым, если $A \subset A^+$, т. е. если

$$[Ax, y] = [x, Ay] \quad (\forall x,\ y \in \mathfrak{D}(A)).$$

Будем считать, что $\mathfrak{H}$ является пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$, т. е. что его ранг индефинитности $\varkappa := \min\{\dim P_1\mathfrak{H}, \dim P_2\mathfrak{H}\}$ конечен. Для определенности будем полагать, что $\varkappa = \dim P_2\mathfrak{H}$.

Независимо В. А. Деркач [14, 15] и Сорьёнен [71, 72] применили теорию оснащенных гильбертовых пространств к пространствам Понтрягина. В основе конструкции лежит следующий факт, установленный М. Г. Крейном — Г. К. Лангером [23]: Для всякого π-эрмитова оператора A существует такое число $h_A > 0$, что для всех λ, $|\operatorname{Im}\lambda| > h_A$, подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ положительны относительно скалярного произведения $[\ ,\ ]$ (т. е. $[x, x] > 0$ для всех $x \in \mathfrak{N}_\lambda$, $x \neq 0$).

Теорема 7.5. (Деркач [14, 15], Сорьёнен [71]). Пространство $\mathfrak{H}_+ = \mathfrak{D}(A^+)$ с гильбертовым скалярным произведением

$$(x, y)_+ = (x, y) + (A^+x, A^+y)$$

и индефинитным скалярным произведением

$$[x, y]_+ = \alpha [x, y] + [A^+x, A^+y] \quad (\alpha > h_A)$$

является J-пространством с тем же рангом индефинитности, что $\mathfrak{H}$, т. е. пространством $\Pi_\varkappa$.

Сорьёнен [71] перенес на π-эрмитовы операторы в пространстве $\Pi_\varkappa$ результаты Ю. Л. Шмульяна из [54] (см. гл. V, § 1, 2) об обобщенных резольвентах эрмитовых операторов.

В работе [74] Сорьёнен установил критерии того, что заданная оператор-функция $R(\lambda)$, значения которой — операторы класса $[\mathfrak{H}_-, \mathfrak{H}]$, является р. о. резольвентой π-эрмитова оператора.

В. А. Деркач [14, 15] распространил на π-эрмитовы операторы в $\Pi_\varkappa$ теорию бирасширений (см. гл. II). В частности, им получены следующие результаты: а) установлен аналог формул Неймана, б) дано описание всех бирасширений π-эрмитова оператора A, в) проведена классификация бирасширений, г) показано, что резольвенты оператора A могут быть расширены на пространства с негативной нормой, исследованы свойства расширенных обобщенных резольвент.

§ 3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ЧЕРЕЗ НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

В теории краевых задач для дифференциальных уравнений важным вопросом является исследование аналитических свойств ядра резольвенты дифференциального оператора по спектральному параметру λ. В ряде работ на конкретных примерах было показано, что ядро резольвенты допускает аналитическое продолжение через непрерывный спектр. В абстрактной форме этот вопрос был впервые исследован Л. И. Дюженковой и Л. П. Нижником (РЖМат, 1969, 8Б608, 8Б609, 12Б644; 1971, 11Б839) с использованием техники оснащенных гильбертовых пространств.

Резольвента оператора неограниченно возрастает по норме при приближении λ к спектру этого оператора. Но если рассматривать резольвенту как оператор класса $[\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-]$ при подходяще подобранном оснащении $\mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_-$ исходного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, то может оказаться, что резольвента будет допускать продолжение через непрерывный спектр.

Например, пусть $\mathfrak{H} = L_2(-\infty, \infty)$, A — самосопряженный оператор $i\dfrac{d}{dx}$. Спектр оператора A чисто непрерывен и заполняет всю ось. Резольвента R_λ этого оператора является интегральным оператором, ядро которого $G_\lambda(x, y)$ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ имеет вид

$$G_\lambda(x, y) = \begin{cases} ie^{-i\lambda(x-y)} & \text{при } y > x, \\ 0 & \text{при } y < x. \end{cases}$$

т. е. является целой функцией параметра λ. Нетрудно подобрать такой быстро растущий вес $p(x)$, что если положить $\mathfrak{H}_+ = L_2(p(x))$, то R_λ как оператор из $\mathfrak{H}_+$ в $\mathfrak{H}_- = L_2(p(x)^{-1})$ допускает аналитическое продолжение по λ в нижнюю полуплоскость.

В упомянутых работах возможность аналитического продолжения резольвенты рассматривается в рамках теории возмущения: если резольвента некоторого самосопряженного оператора A_1 допускает аналитическое продолжение по λ через спектр, то при некоторых условиях резольвента оператора, «близкого» к A_1 также допускает аналитическое продолжение.

Теорема. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ заданы самосопряженные операторы A_1 и A_2, $R_\lambda^{(1)}$ и $R_\lambda^{(2)}$ — соответствующие резольвенты. Предположим, что существует такое оснащение $\mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_-$, что $R_\lambda^{(1)}$ как оператор класса $[\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-]$ допускает аналитическое продолжение по λ на некоторую риманову поверхность M. Тогда $R_\lambda^{(2)}$ как оператор класса $[\mathfrak{H}_+, \mathfrak{H}_-]$ также допускает аналитическое продолжение на M, где является мероморфной функцией, если выполняется одно из следующих условий:

1) При некотором $\lambda_0 \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$ оператор $R_{\lambda_0}^{(2)} - R_{\lambda_0}^{(1)}$ допускает распространение на $\mathfrak{H}_-$, являющееся вполне непрерывным оператором из $\mathfrak{H}_-$ в $\mathfrak{H}_+$.

2) A_1 и A_2 — различные самосопряженные расширения эрмитова оператора A с конечными дефектными числами (m, m), дефектные подпространства $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ и $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$ принадлежат $\mathfrak{H}_+$ при некотором невещественном λ_0.

3) $A_2 = A_1 + C$ и оператор $R_{\lambda_0}^{(1)} C$ вполне непрерывен из $\mathfrak{H}_-$ в $\mathfrak{H}_+$ при некотором $\lambda_0 \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$.

4) $A_2 = A_1 + C$, где C — конечномерный оператор, и $\mathfrak{R}(C) \subset \mathfrak{H}_+$.

Замечание. Расположение полюсов $R_\lambda^{(2)}$ на M не зависит от выбора точки λ_0 и от выбора оснащения.

Полученные результаты применены авторами к аналитическому продолжению через спектр резольвенты обыкновенного дифференциального оператора и оператора, порожденного дифференциальным выражением Лапласа и некоторыми условиями сопряжения на замкнутой поверхности в трехмерном пространстве. При этом в качестве $\mathfrak{H}_\pm$ выбираются пространства функций, квадратично суммируемых с весами $p(x)^{\pm 1}$.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Александров Е. Л.,** О резольвентах симметрического неплотно заданного оператора. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1970, № 7, 3—12 (РЖМат, 1970, 12Б759).
2. **Арлінський Ю. М.,** Про резольвенту узагальнених самоспряжених розширень ермітового оператора з нещільною областю означення. Доповіді АН УРСР, 1974, А., № 1, 1—3 (РЖМат, 1974, 5Б822)
3. —, Цекановський Е. Р., До теорії узагальнених самоспряжених розширень ермітового оператора з нещільною областю означення. Доповіді АН УРСР, 1973, А., № 9, 771—773, 859 (РЖМат, 1974, 1Б573)
4. —, —, Метод оснащенных пространств в теории расширений операторов с неплотной областью определения. Сиб. мат. ж., 1974, **15**, № 2, 243—261 (РЖМат, 1974, 9Б935)
5. **Ахиезер Н. И.,** Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966, 543 с. (РЖМат, 1968, 10Б673К)
6. **Березанский Ю. М.,** Пространство с негативной нормой, Успехи мат. наук, 1963, 18, № 1, 63—96 (РЖМат, 1963, 12Б474).
7. —, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, «Наукова думка», 1965, 798 с. (РЖМат, 1966, 12Б424К)
8. **Березин Ф. А.,** О модели Ли. Мат. сб., 1963, **60**, № 4, 425—446 (РЖМат, 1963, 9Б439)
9. —, Фаддеев Л. Д., Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом. Докл. АН СССР, 1961, **137**, № 5, 1011—1014 (РЖМат, 1963, 4Б408)
10. **Бродский В. М.,** Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., О характеристических функциях обратимого оператора. Acta Sci, 1971, **32**, 1—2, 141—164 (РЖМат, 1972, 1Б780)
11. **Бродский М. С.,** Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969, 287 с. (РЖМат, 1970, 1Б590К)
12. —, Шмульян Ю. Л., Инвариантные подпространства линейного оператора и делители его характеристической функции. Успехи мат. наук, 1964, **19**, № 1, 143—149 (РЖМат, 1965, 1Б441)
13. **Володин А. А.,** Шмульян Ю. Л., Некоторые вопросы геометрии в оснащенных гильбертовых пространствах. Мат. заметки, 1973, **13**, № 3, 395—402 (РЖМат, 1973, 7Б536)
14. **Деркач В. А.,** О π-самосопряженных бирасширениях π-эрмитовых операторов. В сб. «Метрические вопросы теории функций и отображений». Киев, 1975, вып. 6, 54—68 (РЖМат, 1975, 8Б728)
15. —, Про π-самоспряжені бірозширення π-ермітових операторів. Доповіді АН УРСР, 1975, А, № 4, 304—306 (РЖМат, 1975, 9Б724)
16. **Жихарь Н. А.,** К теории расширений J-симметрических операторов. Укр. мат. ж., 1959, **11**, № 4, 352—364 (РЖМат, 1960, 10569)
17. **Красносельский М. А.,** О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов. Укр. мат. ж., 1949, **1**, 21—38
18. **Крейн М. Г.** Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице. Докл. АН СССР, 1944, **43**, № 8, 339—342
19. —, О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m). Докл. АН СССР, 1946, **52**, № 8, 657—660
20. —, Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I. Мат. сб. 1947, **20**, 431—498; II. Мат. сб., 1947, **21**, 365—404
21. —, Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m). Укр. мат. ж., 1949, **1**, № 2, 3—66
22. —, Аналитические проблемы и результаты в теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Тр. Междунар. конгр. математиков, М., 1966. М., «Мир», 1968 (РЖМат, 1969, 6Б585)
23. —, Лангер Г. К. О дефектных подпространствах и обобщенных резоль-

ментах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_\varkappa$. Функц. анализ и его прилож., 1971, 5, № 2, 59—71 (РЖМат, 1971, 11Б831)
24. —, Саакян Ш. Н. О некоторых новых результатах в теории резольвент эрмитовых операторов. Докл. АН СССР, 1966, **169**, № 6, 1269—1272 (РЖМат, 1967, 1Б385)
25. —, —, Резольвентная матрица эрмитова оператора и связанные с нею характеристические функции. Функц. анализ и его прилож., 1970, **4**, № 3, 103—104 (РЖМат, 1971, 1Б746)
26. **Кужель А. В.** О приведении неограниченных несамосопряженных операторов к треугольному виду. Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 868—871 (РЖМат, 1959, 2887)
27. —, Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов. Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 1, 35—37 (РЖМат, 1960, 1854).
28. **Лившиц М. С.** Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве. Мат. сб., 1946, **19**, № 2, 239—262
29. —, О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов. Мат. сб., 1954, **34**, № 1, 145—19 (РЖМат, 1954, 5660)
30. —, Операторы, колебания, волны. Открытые системы. М., «Наука», 1966, 298 с., (РЖМат, 1967, 4Б327К)
31. —, Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Харьков, Изд-во ХГУ, 1971, 160 с., (РЖМат, 1972, 4Б863К)
32. **Макарова А. Д.** О J-симметрических операторах с неплотной областью определения. Волжск. мат. сб., сер. «Функц. анализ и теория функций». Ульяновск, 1969, № 10, 77—83 (РЖМат, 1970, 8Б620)
33. **Наймарк М. А.** О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, **4**, № 1, 53—104
34. —, Спектральные функции симметрического оператора. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, **4**, № 3, 277—318
35. —, О спектральных функциях симметрического оператора. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1943, 7, 285—290
36. **Окунский М. Д.**, Цекановский Э. Р. К теории обобщенных самосопряженных расширений полуограниченных операторов. Функц. анализ и его прилож., 1973, 7, № 3, 92—93 (РЖМат, 1973, 12Б823)
37. **Райх Л. М.** О расширении j-эрмитова оператора с неплотной областью определения. Мат. заметки, 1975, **17**, № 5, 737—743 (РЖМат, 1975, 9Б722)
38. —, Цекановский Э. Р. Биинволютивно самосопряженные биорасширения J-эрмитовых операторов. «Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб.», 1975, **23**, 79—93 (РЖМат, 1975, 9Б723)
39. **Саакян Ш. Н.** К теории резольвент симметрического оператора с бесконечными дефектными числами. Докл. АН АрмССР, 1965, **41**, № 4, 193—198 (РЖМат, 1966, 9Б533)
40. **Цекановский Э. Р.** Реальная и мнимая части неограниченного оператора, Докл. АН СССР, 1961, **139**, № 1, 48—51 (РЖМат, 1962, 4Б352)
41. —, Обобщенные расширения неограниченных операторов. Докл. АН СССР, 1965, **165**, 1 (РЖМат, 1966, 3Б503)
42. —, Обобщенные расширения несимметрических операторов. Мат. сб., 1965, 68, № 4, 527—548 (РЖМат, 1967, 2Б536)
43. —, Об описании обобщенных расширений с одномерной мнимой компонентой оператора дифференцирования без спектра. Докл. АН СССР, 1967, **176**, № 6, 1266—1269 (РЖМат, 1968, 5Б684)
44. —, Обобщенные самосопряженные расширения симметрических операторов. Докл. АН СССР, 1968, **178**, № 6, 1267—1270 (РЖМат, 1968, 9Б624)
45. —, О некоторых свойствах обобщенных самосопряженных расширений симметрических операторов. «Мат. физика. Респ. межвед. сб.», 1968, **5**, 203—205 (РЖМат, 1969, 10Б501)
46. —, О резольвенте обобщенных самосопряженных расширений симметрических операторов. Докл. АН СССР, 1968, **180**, № 3, 550—553 (РЖМат, 1968, 10Б701)
47. —, Об описании и единственности обобщенных расширений квазиэрмито-

вых операторов. Функц. анализ и его прилож., 1969, 3, № 1, 95—96 (РЖМат, 1969, 11Б564)
48. —, Шмульян Ю. Л. Метод обобщенных функций в теории расширений неограниченных линейных операторов. Донецк, Изд-во ДонГУ, 1973, (РЖМат, 1974, 10Б678К)
49. **Шмульян Ю. Л.** Регулярные и сингулярные эрмитовы операторы. Мат. заметки, 1970, **8**, № 2, 197—203 (РЖМат, 1970, 12Б745)
50. —, Розширена резольвента та розширена спектральна функція ермітового оператора. Доповіді АН УРСР, 1970, **А**, № 3, 230—234 (РЖМат, 1970, 7Б675)
51. —, Зображення ермітового оператора з узагальненим модулем. Доповіді АН УРСР, сер. А., 1970, 5, 432—435 (РЖМат, 1970, 10Б578)
52. —, Пряма та обернена задачі теорії резольвентних матриць. Доповіді АН УРСР, 1970, **А**, № 6, 514—517 (РЖМат, 1970, 11Б610)
53. —, Об операторных R-функциях. Сиб. мат. ж., 1971, **12**, № 2, 442—451 (РЖМат, 1971, 7Б733)
54. —, Расширенные резольвенты и расширенные спектральные функции эрмитова оператора. Мат. сб., 1971, **84**, № 3, 440—455 (РЖМат, 1971, 6Б702)
55. —, Представление эрмитовых операторов с несобственным масштабным подпространством. Мат. сб., 1971, **85**, № 4, 553—562 (РЖМат, 1972, 1Б815)
56. —, Операторные узлы. Мат. исследования, 1973, 8, № 2, 147—160 (РЖМат, 1973, 11Б642)
57. —, Обратная задача теории операторных узлов. Мат. исследования, 1973, 8, № 3, 122—135 (РЖМат, 1974, 2Б812)
58. —, О резольвентной матрице операторного узла. Мат. исследования, 1973, 8, № 4, 157—174 (РЖМат, 1974, 4Б714)
59. —, О замкнутых эрмитовых операторах и их самосопряженных расширениях. Мат. сб., 1974, **93**, № 2, 155—169 (РЖМат, 174, 6Б823)
60. **Штраус А. В.** К теории эрмитовых операторов, Докл. АН СССР, 1949, **67**, № 4, 611—614
61. —, Об обобщенных резольвентах симметрического оператора. Докл. АН СССР, 1950, **71**, № 2, 241—244
62. —, Спектральные функции симметрического оператора с конечными индексами дефекта. Уч. зап. Куйбышевск. гос. пед. ин-т, 1951, **11**, 17—66
63. —, Обобщенные резольвенты симметрических операторов. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, **18**, № 1, 51—86 (РЖМат, 1954, 5661)
64. —, О характеристических функциях линейных операторов. Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 3, 514—516 (РЖМат, 1960, 4254)
65. —, Характеристические функции линейных операторов. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, **24**, № 1, 43—74 (РЖМат, 1961, 5Б437)
66. —, О расширениях, характеристических функциях и обобщенных резольвентах симметрических операторов. Докл. АН СССР, 1968, **178**, № 4, 790—792 (РЖМат, 1968, 9Б626)
67. —, О расширениях и характеристической функции симметрического оператора. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, **32**, № 1, 186—207 (РЖМат, 1968, 9Б627)
68. —, Расширения и обобщенные резольвенты неплотно заданного симметрического оператора. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 1, 175—202 (РЖМат, 1970, 8Б619)
69. **Friedrichs K.**, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren. Math. Ann., 1934, **109**, 465—487, 685—713; 1935, 110, 777—779
70. **Galindo A.**, On the existence of j-selfadjoint extensions of j-symmetric operators with adjoint. Communs Pure and Appl. Math., 1962, **15**, 423—425 (РЖМат, 1964, 2Б515)
71. **Sorjonen P.**, Über gewisse Tripel von Pontrjaginräumen. Math. Nachr., 1974, **63**, 213—221 (РЖМат, 1975, 8Б712)
72. —, Pontrjaginräume mit einem reproduzierenden Kern. Ann. Acad. Sci Fenn., **A**, **1**, 1975, **594**, 1—30 (РЖМат, 1975, 12Б774)

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Теория оптимального управления представляет собой быстро развивающийся раздел современной науки, что объясняется обилием ее приложений в различных областях, в особенности в технике и экономике. Зародившись около 30 лет назад в недрах технических дисциплин, эта теория, в разработке которой принимают участие многие исследователи, к настоящему времени достигла значительной степени развития.

Одной из первых работ с постановкой задачи, присущей теории оптимального управления, была статья Д. Е. Охоцимского [211], инициировавшая теоретические исследования в различных направлениях и, в частности, в области вычислительных и приближенных методов.

За прошедший период были установлены фундаментальные принципы теории оптимального управления. Это разработанный в 1956—1960 годах принцип максимума Л. С. Понтрягина, изложенный в монографии Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко [229], и развитый Р. Беллманом метод динамического программирования [32—37]. Указанные методы являются, в сущности, дальнейшим развитием классического вариационного исчисления для исследования ситуаций, когда имеются различные сложные ограничения на управляющую функцию. Существо этих методов состоит в следующем.

Пусть управляемый процесс описывается на отрезке $[t_0, T]$ (T — заданная постоянная) системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\dot{x}=f(t,x,u),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x(t_0)=x^0,\ x=(x_1,\ \ldots,\ x_n). \qquad (1.1)$$

Здесь x—n-мерный вектор фазовых координат, t — время, u—m-мерный вектор управляющих функций $u=(u_1,\ldots,u_m)$, на которые наложены ограничения

$$u(t) \in U, \tag{1.2}$$

где U — заданное множество, $f=(f_1, \ldots, f_n)$ — заданная вектор-функция своих аргументов. Выбором управления u требуется минимизировать функционал

$$J = F(x(T)) \tag{1.3}$$

и удовлетворить краевым условиям в конце процесса управления (при $t=T$)

$$g_j(x(T))=0, \quad j=1, \ldots, r, \quad 0 \leqslant r < n. \tag{1.4}$$

Здесь F, g_j — заданные функции фазового вектора $x(T)$ в конце процесса.

Если поставленная задача оптимального управления имеет решение, то при определенных условиях оно удовлетворяет принципу максимума [229], который формулируется следующим образом.

Определим гамильтониан H и сопряженные переменные ψ_i соотношениями

$$H(\psi, x, u, t) = \psi' f = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i, \quad \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n),$$

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \psi_i(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{\partial g_j(x(T))}{\partial x_i},$$

$$i=1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Здесь λ_j — неопределенные постоянные множители Лагранжа. Тогда, если $u(t)$ — оптимальное управление, а $x(t)$, $\psi(t)$ — соответствующие оптимальная траектория и сопряженные переменные, удовлетворяющие соотношениям (1.1), (1.5), то

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, t). \tag{1.6}$$

Отсюда в принципе можно выразить $u(t)$ через x, ψ, t, т. е. получить зависимость

$$u(t) = u^*(x(t), \psi(t), t). \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.1) и (1.5), получаем краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющую оптимальную траекторию, а следовательно, и программное оптимальное управление.

Таким образом, принцип максимума сводит задачу оптимального управления к решению двухточечной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений (1.1), (1.5), (1.7) с краевыми условиями (1.1), (1.4), (1.5). Этот принцип применим к задачам с уравнениями общего вида.

В случае линейных систем общая теория задач оптимального управления, основанная на проблеме моментов, предложена и обоснована Н. Н. Красовским [140].

В основе метода динамического программирования для решения задачи (1.1)—(1.3) лежит идея рассмотрения всего поля оптимальных траекторий, аналогичная классическому подходу Гамильтона—Якоби.

Рассмотрим случай задачи со свободным правым концом, когда $r=0$, т. е. краевые условия (1.4) отсутствуют. Введем функцию $V(t, x)$, равную оптимальному значению функционала (1.3) на траекториях системы (1.1) при начальном условии $x(t)=x$. Эта функция при некоторых условиях удовлетворяет нелинейному уравнению в частных производных первого порядка, называемому уравнением Беллмана (штрих—знак транспонирования)

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\min_{u\in U} f'\frac{\partial V}{\partial x}=0, \quad V(T, x)=F(x). \tag{1.8}$$

После того, как решение задачи (1.8) получено, оптимальное управление определяется в результате вычисления минимума в левой части (1.8).

Таким образом, результатом применения динамического программирования является синтез оптимального управления $u=$ $=u(t, x)$. Это свойство метода динамического программирования особенно существенно в стохастических и игровых задачах, ибо в этих задачах именно синтез оптимального управления позволяет учесть реализовавшееся текущее значение фазового вектора, неизвестное заранее.

В задачах управления стохастическими системами предполагается, что вектор состояния $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t)=f(t, x, u)+\sigma(t, x, u)\,\dot{\xi}, \quad x(0)=x_0, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{1.9}$$

Здесь $\dot{\xi}$ — некоторый случайный процесс; далее для простоты предполагается, что $\dot{\xi}$ — гауссовский белый шум, т. е. ξ — винеровский случайный процесс. Выбором управления u при ограничениях (1.2) требуется минимизировать функционал

$$MF(x(T)). \tag{1.10}$$

В соотношениях (1.9), (1.10) функции f, σ, F заданы, через M обозначено математическое ожидание. Принцип динамического программирования для функции Беллмана $V(t, x)$ задачи (1.9), (1.10) приводит при некоторых условиях к краевой задаче (Tr — след матрицы)

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\min_{u\in U}\left[f'\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\sigma\sigma'\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\right]=0, \quad V(T, x)=F(x). \tag{1.11}$$

Уравнение (1.11) — нелинейное уравнение в частных производных, которое, в отличие от уравнения (1.8) для детерминированной задачи, является уравнением второго порядка.

Методы последовательного анализа вариантов, идейно близкие методу динамического программирования, разрабатывались В. С. Михалевичем и его сотрудниками [186—189].

Вычислительные методы перебора в пространстве фазовых координат, связанные с идеями динамического программирования, разрабатывались Н. Н. Моисеевым [191—194].

Характерным для задач оптимального управления является то, что точные аналитические решения задачи удается получить лишь в редких случаях. В связи с этим большую роль играют вычислительные и приближенные методы построения оптимального управления, которым и посвящен настоящий обзор.

Потребности практики, с одной стороны, и бурный прогресс вычислительной техники, с другой стороны, стимулировали разработку вычислительных методов оптимального управления. Работы по этой проблематике интенсивно ведутся с конца 50-х— начала 60-х годов.

Различные аспекты вычислительных и приближенных методов решения задач оптимального управления рассматривались в книгах советских ученых В. Г. Болтянского [41], Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой [73], Л. С. Гноенского, Г. А. Каменского, Л. Э. Эльсгольца [76], Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [80], В. И. Зубова [97, 98], Н. Е. Кирина [117], А. А. Красовского [132—133], Н. Н. Красовского [140], В. Ф. Кротова, В. З. Букреева, В. И. Гурмана [146], В. Ф. Кротова, В. И. Гурмана [147], В. Н. Лебедева [160], А. М. Летова [169], Н. Н. Моисеева [194—197], Ю. П. Петрова [217], В. М. Пономарева [227], Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко [229], В. С. Пугачева [232], Б. Н. Пшеничного, Ю. М. Данилина [238], Л. П. Смольникова [247], Р. И. Трухаева, В. В. Хоменюка [259], А. А. Фельдбаума [263], А. А. Фельдбаума, А. Г. Бутковского [264], Ф. Л. Черноусько, Н. В. Баничука [275] и других; в книгах зарубежных авторов Аоки [14], Атанса, Фалба [15], Балакришнана [295], Беллмана с соавторами [32—37], Брайсона, Хо Ю-ши [45], Дайера, Мак-Рейнольдса [338], Мерриэма [183], Кэнона, Каллама, Полака [320], Полака [220], Фалб, Йонга [343], Лионса [423], Планта [451] и других, в сборниках работ [166, 163, 296, 292].

Методам приближенного и численного решения задач оптимального управления посвящены обзоры и лекции: Б. М. Будак, Ф. П. Васильев [57], Р. Габасов, Ф. М. Кириллова [74], В. К. Исаев, В. В. Сонин [376], В. Б. Колмановский, Ф. Л. Черноусько [127], Н. Н. Красовский [139], Н. Н. Красовский, М. А. Гаврилов, А. М. Летов, В. С. Пугачев [141], Н. Н. Красовский, Н. Н. Моисеев [144], А. М. Летов [168], И. А. Литовченко [175], В. С. Михалевич, Ю. М. Ермольев, В. В. Шкурба, Н. З. Шор [188], Н. Н. Моисеев [192—193], Н. Н. Моисеев, В. Н. Лебедев [441], Б. Т. Поляк [226], Ф. Л. Черноусько [274], Белл [302], Флеминг [348], Келли [393], Копп [403], Ларсон [410], [411], Мангасарян [428], Миеле [439], Пайевонский [449], Полак [452], Табак [477], Тэплей, Льюэллен [480] и других.

Данный обзор охватывает литературу по численным и приближенным методам оптимального управления, начиная с 1960-х годов. Разумеется, ввиду большого числа публикаций в данной области, библиография обзора не является исчерпывающей.

Параграфы 2—8 обзора посвящены численным методам, § 9 — приближенным методам оптимального управления детерминированными системами, § 10 — численным и приближенным методам управления системами конкретного вида, § 11 — численным и приближенным методам в задачах оптимального управления стохастическими системами.

Отметим, что в данном обзоре не рассматриваются работы по вопросам минимизации функций многих переменных. Кроме того, вне рамок данного обзора остаются также исследования по оптимальному управлению системами с дискретным временем (многошаговые процессы). Литературу по указанным вопросам можно найти, например, в работах [42, 238, 226]. По вопросам, связанным с приложением вычислительных и приближенных методов для решения конкретных задач оптимального управления, дополнительную библиографию можно найти, например, в [80, 449].

§ 2. О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Возникающие при непосредственном решении задач оптимального управления трудности многочисленны и связаны с необходимостью решать краевую задачу, с большой размерностью систем, с их существенной нелинейностью, с наличием ограничений как на управление, так и на фазовые координаты, с возможностью многих экстремумов. Преодоление отмеченных трудностей привело к разработке разнообразных вычислительных методов решения задач оптимального управления, ориентированных на те или иные классы задач.

Поэтому, прежде чем переходить к обзору опубликованных работ, приведем их классификацию (весьма условную) по общности идей и подходов, заложенных в основе вычислительных методов решения задач оптимального управления.

Первая группа методов основывается на сведении задачи оптимального управления к краевой задаче. Указанное сведение осуществляется посредством использования необходимых условий оптимальности: либо при помощи принципа максимума Л. С. Понтрягина [229], либо с помощью классического вариационного исчисления.

Полученная краевая задача решается при помощи того или иного алгоритма подбора недостающих начальных условий. Этой группе методов посвящен § 3.

Ко второй группе относятся методы, в которых непосредственно определяется оптимальное управление. В основе этих методов лежат итерационные процессы в пространстве управляющих функций, базирующиеся на формулах для приращения функционала. Если используются формулы классического вариационного исчисления для вариации функционала, то получаются методы градиентного типа в пространстве управлений. Они изложены в § 4.

Применение соотношений, связанных с принципом максимума, приводит к методам последовательных приближений, изложенным в § 5.

В методах этой группы часто используются идеи введения штрафных функций, проектирования градиентов и другие подходы, присущие математическому программированию.

В третью группу входят методы, основанные на методе динамического программирования, на варьировании и переборе в пространстве фазовых координат. Сюда относятся способы, основанные на непосредственном решении уравнения в частных производных (1.8), методы последовательного анализа вариантов, методы полного и частичного перебора в пространстве фазовых координат, метод локальных вариаций и др. Этим вопросам посвящен § 6.

Большую группу составляют методы решения задач оптимального управления для линейных систем. Использование факта линейности исходной управляемой системы часто позволяет построить более эффективные вычислительные алгоритмы, чем для общей нелинейной системы, а также строго исследовать их сходимость. В частности, разработаны специальные методы для линейных задач оптимального быстродействия, для задач аналитического конструирования регуляторов. Указанные методы освещены в § 7.

Наряду с указанными вычислительными методами решения задач оптимального управления, имеется ряд способов, основанных на достаточных условиях оптимальности, способов, подобных методам Ритца и Галеркина, способов, использующих дискретизацию исходной задачи и ее сведение к задачам линейного или нелинейного программирования. Некоторые работы, относящиеся к этим методам, будут охарактеризованы ниже в § 8.

Необходимо также отметить, что при решении конкретных задач оптимального управления широко применяются различные модификации численных методов, связанные со спецификой решаемых задач, а также сочетание различных подходов. Отметим, что часто успех решения сложных задач оптимального управления обусловлен именно глубоким проникновением в существо задачи. Особенно большую группу работ в этом направлении составляют исследования по численному решению задач оптимального управления движением летательных аппаратов, по оптимизации траекторий. Именно в связи с решением этих конкретных задач были впервые предложены и разработаны многие численные методы оптимального управления. Некоторые из работ этого направления отмечены в § 9.

§ 3. МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу оптимального управления (1.1)—(1.4) и предположим, что она имеет решение. Тогда, подставляя (1.7) в (1.1), (1.5), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений для переменных x, ψ.

Равенство (1.4) дает r краевых условий при $t=T$, а условия трансверсальности (1.5) образуют совокупность еще n условий при $t=T$, содержащих r параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Параметры λ_j можно исключить, используя какие-либо r из условий трансверсальности (1.5), в предположении о линейной независимости градиентов $\partial g_j/\partial x_i$, $j=1, \ldots, r$. Тогда оставшиеся $n—r$ условий трансверсальности вместе с краевыми условиями (1.4) составят совокупность n краевых условий, наложенных на функции $x(T)$, $\psi(T)$. Запишем эти условия в виде

$$\varphi_i(x(T), \psi(T)) = 0, \quad i=1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Если теперь задать вектор

$$\psi(t_0) = z, \tag{3.2}$$

то вместе с начальными условиями $x(t_0)=x^0$ из (1.1) получим полный набор начальных условий для системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.5), (1.7). Решив полученную задачу Коши при некотором z, определим функции $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$ на всем отрезке $[t_0, T]$ и можем вычислить значения функций φ_i, входящих в условия (3.1). Таким образом, заключаем, что исходная краевая задача свелась к системе трансцендентных уравнений

$$\Phi(z) = 0, \quad \Phi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}, \tag{3.3}$$

где через $\Phi_i(z)$ обозначены значения функций

$$\Phi_i(z) = \varphi_i(x(T), \psi(T)), \tag{3.4}$$

выраженные как функции от z.

Особенностью системы (3.3) является то, что функция Φ задается не явно, а при помощи алгоритма: для вычисления значения функции Φ в точке z необходимо решить задачу Коши (1.1), (1.5), (1.7) с начальными условиями $x(t_0)=x^0$, $\psi(t_0)=z$

и затем найти $\Phi(z)$ согласно (3.4). Таким образом, вычисление $\Phi(z)$ в каждой точке z требует интегрирования нелинейной системы дифференциальных уравнений, что может быть осуществлено численно известными методами (например, методом Рунге — Кутта, Адамса и др.).

При решении системы (3.3) можно использовать различные численные методы решения систем трансцендентных уравнений. Наиболее простым и употребительным из них и к тому же одним из наиболее старых является метод Ньютона, называемый иногда методом касательных. Этот метод состоит в том, что задается начальное приближение z^0 для вектора z и строятся последующие приближения z^k с помощью итерационного процесса

$$z^k = z^{k-1} - [\Phi_1(z^{k-1})]^{-1}\Phi(z^{k-1}). \qquad (3.5)$$

Здесь $\Phi_1(z)$ — матрица производных функции Φ. Для ее подсчета можно либо составить и проинтегрировать систему в вариациях для исходной задачи (1.1), (1.5), (1.7), либо вычислить производные по приближенным формулам

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial z_j} \simeq \frac{1}{\delta_j}[\Phi_i(z_1, \ldots, z_j+\delta_j, \ldots, z_n) - \Phi_i(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_n)].$$

Второй способ, основанный на последнем соотношении, проще. При его реализации необходимо на каждом шаге решить $n+1$ задачу Коши для системы (1.1), (1.5), (1.7), придавая приращения δ_j поочередно компонентам вектора z. Числа δ_j должны быть достаточно малыми, чтобы точность аппроксимации производной была высокой, но не должны быть меньше, чем порядок величины погрешности численного интегрирования системы (1.1), (1.5), (1.7). Основанный на формуле (3.5) алгоритм далеко не всегда сходится. Поэтому широкое применение в вычислительной практике нашли различные модификации метода Ньютона, существенно расширяющие сферу его приложений и ускоряющие сходимость.

Одна из простейших модификаций состоит в том, что вместо формулы (3.5) используется соотношение

$$z^k = z^{k-1} - \alpha_k[\Phi_1(z^{k-1})]^{-1}\Phi(z^{k-1}) \qquad (3.6)$$

с числовым параметром α_k, выбираемым на каждой интерации в пределах $0 < \alpha_k \leqslant 1$. Число α_k подбирается, например, из условия, чтобы суммарная невязка в удовлетворении системы (3.3) не возрастала, т. е.

$$\chi(z^k) < \chi(z^{k-1}), \qquad (3.7)$$

где

$$\chi(z) = \sum_{i=1}^{n} b_i\Phi_i^2(z). \qquad (3.8)$$

Здесь b_i — некоторые положительные весовые коэффициенты.

При $\alpha_k=1$ алгоритм (3.6) совпадает с методом Ньютона (3.5). Если условие (3.7) при $\alpha_k=1$ не удовлетворяется, то α_k уменьшается, например, путем деления пополам, до тех пор, пока условие (3.7) не будет выполнено. После этого можно переходить к следующей итерации. Процесс решения заканчивается, когда невязка χ из (3.8) станет меньше задаваемой заранее погрешности.

После того, как краевая задача решена с заданной точностью, получается оптимальная траектория $x(t)$ и сопряженные переменные $\psi(t)$; оптимальное управление $u(t)$ восстанавливается при помощи соотношения (1.7).

Описанный прием является простейшим и, конечно, не гарантирует сходимости, но расширяет сферу применения метода Ньютона. Существуют и более сложные алгоритмы, являющиеся модификациями метода Ньютона. Подобные модификации разрабатывались и широко применялись для численного решения задач оптимального управления в работах В. К. Исаева и В. В. Сонина [105, 106, 376]. Эти алгоритмы использовались для расчетов оптимальных траекторий в работах В. Н. Лебедева [160], Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева, Ю. В. Шалаева [80], [101, 102] и в статьях [402, 403, 284, 431, 432, 465, 440, 418] и др.

Помимо метода Ньютона, для решения системы (3.3) можно использовать и другие численные методы решения систем трансцендентных уравнений, такие как метод секущих, градиентный метод для минимизации суммарной невязки χ, определяемой соотношением (3.8), и многие другие. Методы, основанные на минимизации невязки в удовлетворении краевых условий, применялись в работах [319, 314, 399, 340, 341, 475] и др. Различным методам подбора недостающих начальных условий для вектора сопряженных переменных (3.2), в частности, в связи с решением задач оптимизации траекторий летательных аппаратов, посвящены работы [2, 419, 469—471, 285] и др.

Большое значение для повышения эффективности рассматриваемых алгоритмов имеют работы по развитию общих численных методов решения систем алгебраических уравнений и по минимизации функций многих переменных. В связи с этим отметим работы Л. В. Канторовича [111—113]. Обзор методов минимизации функций многих переменных можно найти, например, в книге Б. Н. Пшеничного и Ю. М. Данилина [238], в статье Б. Т. Поляка [226].

Выше шла речь о задаче оптимального управления с фиксированным временем T окончания процесса. Если T не фиксировано (например, это имеет место в важном классе задач оптимального быстродействия), то к условиям трансверсальности (1.5) нужно добавить условие $H=0$ в момент $t=T$. Из краевых условий (1.4) при этом обычно выделяют одно условие, которое служит для определения момента окончания интегрирования на каждой итерации. В остальном процесс численного решения остается тем же.

Разработка и изложение численных методов решения задач оптимального управления, основанных на сведении их к краевым задачам, содержится в монографиях: Г. Л. Гродзовский, Ю. Н. Иванов, В. В. Токарев [80], Н. Н. Моисеев [192—197], Брайсон, Хо Ю-ши [45] и сборниках работ [166, 163].

Рассмотренные методы обладают рядом важных достоинств. Эти методы алгоритмически весьма просты и удобны для стандартизации. Потребности в памяти ЭВМ здесь невелики, так как в процессе решения не нужно хранить больших объемов информации (например, таблиц функций, как это требуется во многих других методах). Так как эти методы основаны на принципе максимума, то они сравнительно легко позволяют учесть различные краевые условия и ограничения на управляющие функции. Некоторые трудности возникают тогда, когда операция нахождения максимума гамильтониана H по u в (1.6) не реализуется в явном виде; в этом случае для максимизации H требуется использовать какой-либо из численных методов нелинейного программирования. Далее, при удачном выборе начального приближения для вектора z получается быстрая сходимость итераций и высокая точность решения задачи.

Отметим, что методы рассматриваемого типа значительно усложняются в случае ограничений на фазовые координаты, т. е. ограничений вида $x(t) \in G(t)$, где $G(t)$ — заданное множество в n-мерном фазовом пространстве. Принцип максимума может быть сформулирован и для таких задач, однако при этом возникают многоточечные, а не двухточечные краевые задачи. Число участков, на которых имеют место различные уравнения, соответствует числу выходов и сходов с фазового ограничения; заранее это число неизвестно, что сильно усложняет алгоритм численного решения.

К недостаткам рассматриваемых методов следует отнести то, что они плохо сходятся при отсутствии хорошего начального приближения. В сложной задаче с большим числом фазовых переменных часто весьма трудно подобрать вектор z так, чтобы добиться сходимости, даже при использовании различных приемов, о которых шла речь выше.

Необходимо подчеркнуть, что даже если решение краевой задачи получено, то нельзя быть уверенным в том, что полученное управление и траектория — оптимальные, так как принцип максимума есть лишь необходимое условие оптимальности. Часто в задаче есть несколько экстремалей, и численный метод находит ту из них, которая в некотором смысле ближе к начальному приближению. Большую роль при построении решения здесь играют физические и иные соображения, помогающие выбрать хорошее исходное приближение.

§ 4. ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ В ПРОСТРАНСТВЕ УПРАВЛЕНИЙ

Эффективным способом численного решения задач оптимального управления являются градиентные методы в пространстве управляющих функций, основанные на использовании формулы для первой вариации функционала (1.3). Эти методы впервые были предложены в работах Л. И. Шатровского [277, 278], Т. М. Энеева [280], Келли [392, 393, 395], Брайсона, Денхэма [317].

Изложим существо градиентных методов в пространстве управлений для задачи оптимального управления со свободным правым концом в форме (1.1), (1.3). Предположим для простоты, что управляющая функция $u(t)$ — скалярная, то есть $m=1$. Кроме того, будем сначала считать, что ограничения на управление отсутствуют и множество из (1.2) есть вся числовая прямая.

Пусть $u(t)$ и $u(t)+\delta u(t)$ — две управляющие функции. Запишем приращение δJ функционала (1.3) в виде

$$\delta J = -\int_{t_0}^{T} R(t)\,\delta u(t)\,dt + \eta = \delta_1 J + \eta. \tag{4.1}$$

Здесь $\delta_1 J$ есть первая вариация функционала, а остаточный член η есть величина порядка ε^2, если $\delta u(t)$ имеет порядок ε на всем отрезке $[t_0, T]$. Функция $R(t)$ равняется

$$R(t) = \frac{\partial H}{\partial u} = \psi'(t)\,\frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial u}. \tag{4.2}$$

Формулы (4.1), (4.2) позволяют построить следующий итерационный процесс. Выбирается из априорных соображений некоторое начальное приближение для управления $u^{(0)}(t)$. Последовательные приближения $u^{(k)}(t)$ к управлению определяются в виде

$$u^{(k+1)}(t) = u^{(k)}(t) + \mu_k R_k(t), \quad k \geqslant 0. \tag{4.3}$$

Здесь $R_k(t)$ подсчитывается с помощью (4.2) на k-м шаге. При любом $\mu_k > 0$ процесс (4.3) обеспечивает выполнение неравенства $\delta_1 J < 0$, т. е. отрицательность первой вариации функционала. Коэффициент $\mu_k > 0$ выбирается так, чтобы значение функционала J на каждом шаге убывало, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$J^{k+1} - J^k = -\mu_k \int_{t_0}^{T} R^2(t)\,dt + \eta < 0$$

для полного приращения функционала. При этом на каждой итерации существует некоторое оптимальное значение μ_k, которое можно подобрать путем проб.

Отметим, что вычисление $R_k(t)$ на каждой итерации согласно (4.2) требует определения двух вектор-функций $x^{(k)}(t)$ и $\psi^{(k)}(t)$, соответствующих управлению $u=u^{(k)}(t)$. Для этого вначале решается задача Коши (1.1) при $u=u^{(k)}(t)$, а затем интегрируются сопряженные уравнения (1.5) при $u=u^{(k)}(t)$, $x=x^{(k)}(t)$ слева направо: от $t=T$ до t_0. В рассматриваемом случае задачи со свободным правым концом ($r=0$) условия трансверсальности (1.5) дают возможность определить $\psi(T)$, т. е. получить данные Коши для сопряженной системы (1.5).

Реальное применение градиентных методов осложняется возможным наличием ограничений на управление и фазовые координаты. Преодоление этих трудностей служит предметом ряда работ, посвященных данному методу, и приводит к различным модификациям метода градиентов. Так, например, если управление $u^{(k+1)}(t)$, задаваемое формулой (4.3), не удовлетворяет ограничению (1.2), то коэффициент μ_k можно выбирать зависящим от времени ($\mu_k=\mu_k(t)>0$) так, чтобы в каждый момент t это ограничение оказалось выполненным. При этом по-прежнему имеем $\delta_1 J<0$.

Другие модификации метода градиентов связаны с необходимостью учета краевых условий в конце процесса управления вида (1.4). Здесь есть два пути: один из них основан на проектировании градиента, а другой — на методе штрафных функций.

Первый способ состоит в следующем. Запишем для приращений функционалов δg_j, соответствующих краевым условиям (1.4), формулы, подобные (4.1) и выражающие эти приращения через вариацию δu.

Далее итерационный процесс строим согласно следующей формуле:

$$u^{(k+1)}=u^{(k)}+\mu_k R_k(t)+\sum_{j=1}^{r}\nu_{kj}R_{kj}(t). \qquad (4.4)$$

Здесь μ_k, $R_k(t)$ имеют тот же смысл, что и в формуле (4.3), а ν_{kj} и $R_{kj}(t)$ аналогичны этим величинам, но соответствуют функционалам g_j. Для вычисления функций $R_{kj}(t)$ в (4.4) требуется проинтегрировать сопряженную систему с условиями трансверсальности, отвечающими функционалу g_j. Коэффициенты ν_{kj} подбираются на каждой итерации так, чтобы либо не нарушить в первом приближении краевых условий (1.4) (если они уже удовлетворены с нужной точностью), либо добиться их удовлетворения. Данный способ требует на каждом шаге для вычисления $R_k(t)$, $R_{kj}(t)$ решения одной задачи Коши для исходной системы (1.1) и решения $r+1$ задачи Коши для сопряженной системы с различными начальными условиями для ψ при $t=T$.

Описанный подход был разработан в работах Т. М. Энеева [280] и Брайсона [45].

Другим способом учета краевых условий (1.4) является метод штрафных функций. Этот метод восходит к работе Куранта [326], который применил его в 1943 году для решения одной вариационной задачи. В сочетании с методом градиентов в пространстве управления метод штрафов для численного решения задачи управления (1.1)—(1.4) был предложен Л. И. Шатровским [277, 278]. Метод штрафов позволяет освободиться от ограничений с помощью дополнительных членов в оптимизируемом функционале, именуемых штрафами.

Остановимся несколько подробнее на применении указанного метода к задаче управления (1.1)—(1.3) с краевыми условиями (1.4).

Для решения этой задачи методом штрафов строится оптимальное управление в системе (1.1), (1.2), минимизирующее функционал

$$J' = F(x(T)) + \sum_{j=1}^{r} a_j g_j^2(x(T)), \quad a_j > 0. \tag{4.5}$$

Ясно, что при достаточно больших значениях чисел a_j минимум функционала (4.5) достигается там, где g_j близки к нулю.

Таким образом, при решении задачи (1.1)—(1.4) возможен такой путь. Сначала решается задача оптимального управления со свободным правым концом (1.1)—(1.2), (4.5) градиентным (или каким-либо иным) методом. Далее проверяются условия (1.4). Если точность равенств (1.4) неудовлетворительная, то необходимо увеличить коэффициенты a_j и снова решить задачу (1.1)—(1.2), (4.5) и так до тех пор, пока не будет достигнута нужная степень точности удовлетворения краевого условия (1.4).

Метод штрафных функций широко распространен, что объясняется простотой схемы решения задач на относительный экстремум с помощью этого метода, позволяющего снять ограничения на управления, фазовые ограничения, дифференциальные связи. Кроме того, метод штрафов сейчас широко используется для получения первых приближений с последующим расчетом по более точным, но зато и более трудоемким методам.

Обзор применений метода штрафов имеется в работах Н. Н. Моисеева [197], Балакришнана [293—295].

Разработке и применению метода штрафных функций в сочетании с градиентным методом в пространстве управлений для решения задач оптимального управления посвящены работы [59, 80, 194, 196, 197, 204, 205, 208, 225, 226, 240, 316, 328, 389, 429, 447, 448, 459, 494].

Изложенный выше метод использует движение по градиенту в пространстве управлений. Идейно близкий ему градиентный метод в фазовом пространстве предложен Ю. Н. Ивановым [80, 102]. Этот метод основан на формуле для вариации оптимизируемого функционала, выраженной через вариацию фазовых координат, и применим тогда, когда такое представление возможно. Иногда этот метод называют методом функционального наискорейшего спуска.

Численным методам градиентного типа для решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями посвящены работы Денхэма [333], Хо Ю-ши [367, 368], Язвински [381].

Обобщению градиентных методов на управляемые системы с разрывными правыми частями посвящены работы В. В. Величенко [67, 68].

Решение задач оптимального управления градиентными методами получено в работах [24—26, 183, 207, 230, 251, 319, 332. 355, 359, 361, 365, 367, 368, 371, 382, 383, 396, 402, 403, 405, 414, 415, 434, 439, 455, 466, 472, 483, 488, 492, 493].

Градиентные методы, основанные на первой вариации функционала, называют градиентными методами первого порядка. Характеризуя градиентные методы первого порядка в целом, можно отметить, что они позволяют решать широкий класс задач оптимального управления с различными ограничениями и дают, как правило, существенное улучшение управления уже на первых итерациях. Кроме того, градиентные методы не столь чувствительны к выбору начального приближения по сравнению с методами, основанными на решении краевой задачи, поэтому с их помощью зачастую можно получать решение даже при неудачном выборе начального приближения.

К числу недостатков градиентных методов по сравнению с методами, основанными на решении краевой задачи, можно отнести некоторую сложность алгоритмов, более высокие требования к памяти машины, так как в процессе счета в памяти ЭВМ необходимо обычно хранить таблицы некоторых функций, а также не всегда удовлетворительные характеристики сходимости при приближении к оптимальному решению. В последнем случае используется сочетание градиентных методов с другими методами решения задач оптимального управления. Эти вопросы рассмотрены в работах: Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк [258, 259], В. В. Хоменюк [266], статьи [200, 201, 253, 279].

Ряд работ посвящен градиентным методам второго порядка, основанным на формуле для второй вариации функционала. Эти методы требуют значительно больших вычислений на каждой итерации, но позволяют получить в результате лучшее приближение к минимуму.

Этим методам посвящены работы: Брайсон, Хо Ю-ши [45], Келли, Копп, Мойер [395], а также работы [91, 290, 374, 377, 400, 430, 433, 482].

Изложение градиентных методов и их модификаций имеется в книгах и обзорных статьях Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [80], В. Ф. Демьянова, А. М. Рубинова [86], Н. Н. Моисеева [194, 196, 197], Б. Т. Поляка [226], Брайсона, Хо Ю-ши [45], Келли [393], в сборнике [166].

§ 5. МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА

Метод последовательных приближений для решения задач оптимального управления, основанный на принципе максимума Л. С. Понтрягина, был предложен в работах: Келли, Копп, Мойер [394], И. А. Крылов, Ф. Л. Черноусько [149]. Вопросам дальнейшей разработки метода, его стандартизации и улучшения скорости сходимости посвящена работа И. А. Крылова, Ф. Л. Черноусько [151]. Подробное изложение указанных вопросов содержится в книге Ф. Л. Черноусько, Н. В. Баничука [275].

В применении к задаче оптимального управления (1.1)—(1.3) со свободным правым концом ($r=0$) простейший вариант метода состоит в следующем. Зададим в качестве начального приближения $u^{(1)}(t)$ к оптимальному управлению произвольное допустимое управление. Решим далее задачу Коши (1.1) с этим управлением и найдем соответствующую траекторию $x^{(1)}(t)$. Используя $u^{(1)}(t)$ и $x^{(1)}(t)$, найдем $\psi^{(1)}(t)$, решая задачу Коши для сопряженной системы (1.5). Вычислим теперь следующее управление $u^{(2)}(t)$ из условия максимума гамильтониана $H(\psi^{(1)}(t), x^{(1)}(t), u, t)$ по $u \in U$ при каждом $t \in [t_0, T]$. Если процесс последовательных приближений сходится, то продолжать его следует до тех пор, пока последующие приближения не будут отличаться друг от друга в пределах заданной точности. Полученное в результате решение будет по построению удовлетворять принципу максимума Л. С. Понтрягина.

Описанный простейший вариант метода далеко не всегда сходится. Однако сходимость к точному оптимальному управлению будет иметь место за две итерации, если функция $F(x)$ из (1.3) линейна по x, а правая часть $f(t, x, u)$ также линейна по x и равна

$$f(t, x, u) = A(t)x + b(t, u).$$

Сходимость изложенного метода для линейных систем с квадратичным функционалом установлена В. В. Александровым [8].

Существует ряд практических способов улучшения сходимости метода последовательных приближений. Опишем некоторые из них [151]. Первый способ состоит в том, что управление $u^{(k+1)}(t)$ определяется из условия максимума по $u \in U$ гамильтониана

$H(\psi^{(k)}(t), x^{(k)}(t), u, t)$ не на всем отрезке $[t_0, T]$, а лишь на его части $[t_k^*, T]$, где $t_0 \leqslant t_k^* < T$. На отрезке же $[t_0, t_k^*]$ сохраняется прежнее управление, т. е.

$$u^{(k+1)}(t) = u^{(k)}(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_k^*.$$

Подбором параметра t_k^* на каждой итерации можно, как правило, добиться уменьшения значения функционала. Роль параметра t_k^* здесь такая же, как параметра α_k в формуле (3.6) или параметра μ_k в (4.3): он служит для регулирования сходимости алгоритма. При t_k^*, близком к T, интервал, на котором варьируется управление, мал; при этом сходимость, как правило, имеет место.

Другой способ улучшения сходимости состоит в том, что в систему (1.1) вводится некоторый малый параметр ε так, чтобы при $\varepsilon = 1$ получалась исходная система, а при $\varepsilon \to 0$ — итерационный процесс

$$u^{(k+1)}(t) = \Phi(u^{(k)}(t)), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.1}$$

быстро сходился. В формуле (5.1) через Φ обозначен оператор, который ставит в соответствие каждому допустимому управлению новое приближение по изложенной выше схеме простейшего метода последовательных приближений.

Ввести параметр ε в систему (1.1) можно, например, следующим образом:

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, u), \ \dot{x} = f(t, x, \varepsilon u), \ 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{5.2}$$

Если $\varepsilon \to 0$, то системы (5.2) становятся слабо управляемыми, и поэтому итерационный процесс (5.1) будет быстро сходиться. Получив сходимость при некотором ε, будем затем постепенно ε увеличивать, беря каждый раз в качестве начального приближения для итерационного процесса оптимальное управление для предыдущего значения ε. Дойдя таким образом шагами по ε до значения $\varepsilon = 1$, получим решение исходной задачи. Отметим, что при достаточно малых ε в уравнениях (5.2) приближенное решение задачи оптимального управления можно получить и не прибегая к процессу итераций, а пользуясь приближенными методами, описанными ниже, в § 9.

Еще один способ улучшения сходимости состоит в том, что новое приближение для управления в каждый момент времени выражается через две или более предыдущие итерации. Простейшим вариантом этого является следующая схема итераций:

$$\begin{gathered} u^{(k+1)}(t) = (1-\alpha) u^{(k)}(t) + \alpha \Phi(u^{(k)}(t)), \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \ t_0 \leqslant t \leqslant T, \ k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{5.3}$$

которая применяется в случае выпуклого множества U из (1.2). Постоянную α в (5.3) можно выбирать из условия минимума функционала по α на данной итерации, подобно методу скорейшего спуска, или можно ограничиться требованием монотонности убывания функционала на каждой итерации. При подборе α требуется пересчитывать лишь систему (1.1) для вычисления функционала. Отметим, что при применении способа (5.3) приближение к релейному оптимальному управлению уже не будет идти в классе релейных управлений. Дополнительные возможности появляются, если считать в формуле (5.3) величину α функцией времени

$$0 \leqslant \alpha(t) \leqslant 1.$$

Заметим, что если функция $\alpha(t)$ выбрана следующим образом:

$$\alpha(t) = 0, \ t_0 \leqslant t \leqslant t_k^*; \ \alpha(t) = 1, \ t_k^* \leqslant t \leqslant T,$$

то приходим снова к первому из описанных способов улучшения сходимости. Каждый из этих способов содержит параметр (α, ε или $t_k{}^*$) для регулирования процесса итераций. При расчете конкретных задач оптимального управления возможно сочетание изложенных приемов.

Выше описан метод последовательных приближений для задач оптимального управления со свободным правым концом. При наличии краевых условий вида (1.4) наиболее простой путь состоит в применении метода штрафных функций, описанного в предыдущем параграфе. Другая возможность, аналогичная методу проектирования градиента, изложена в [151, 275]. В случае, когда момент окончания процесса не задан, процесс итераций строится аналогично, но с использованием дополнительного условия $H = 0$ в момент T, вытекающего из принципа максимума. Имеющиеся фазовые ограничения также можно учесть при помощи метода штрафных функций.

В работе И. А. Крылова и Ф. Л. Черноусько [151] (см. также книгу [275]) разработана и приведена стандартная программа метода последовательных приближений на языке АЛГОЛ-60. Программа предусматривает применение описанных выше способов улучшения сходимости и пригодна для решения широкого класса задач оптимального управления.

Отметим, что изложенный метод последовательных приближений с небольшим видоизменением применим и в том случае, когда минимизируемый функционал J представляет собой экстремум (по времени) некоторой заданной функции $F_1(t, x)$ от фазовых координат и времени, т. е.

$$J = \min_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} F_1(t, x),$$

где t_1, t_2 — заданные моменты времени. Этот вопрос рассмотрен в работе А. Г. Кузнецова и Ф. Л. Черноусько [154].

Метод последовательных приближений прост для программирования, менее чувствителен, по сравнению с методами § 3, к выбору начального приближения. В процессе счета необходимо хранить таблицу значений управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ для текущего приближения. Значения сопряженных переменных $\psi(t)$ хранить не нужно, ибо они используются только при вычислении следующего приближения. Можно обойтись и без хранения таблицы $x(t)$, восстанавливая траекторию при интегрировании сопряженной системы.

Отметим (см. [149]), что в рассматриваемом методе последовательных приближений на каждой итерации главная часть приращения функционала отрицательна и максимальна по абсолютной величине среди главных частей приращения функционала при всевозможных допустимых вариациях управления. Это следует из формулы Л. И. Розоноэра [243] для приращения δJ функционала (1.3)

$$\delta J = -\int_{t_0}^{T} [H(\psi(t), x(t), u_1(t), t) - H(\psi(t), x(t), u(t), t)]dt + \eta, \quad (5.4)$$

$$|\eta| \leqslant c \int_{t_0}^{T} |u(t) - u_1(t)|^2 dt.$$

Здесь $u(t)$, $u_1(t)$ — два допустимых управления, c — некоторая постоянная.

Таким образом, в отличие от изложенных в § 4 градиентных методов, основанных на формулах классического вариационного исчисления, метод последовательных приближений основан на принципе максимума Л. С. Понтрягина и формуле для вариации (5.4). Поэтому этот метод легче учитывает ограничения на управление, позволяет делать игольчатые вариации в процессе итераций. При применении метода последовательных приближений аппроксимация оптимального управления происходит в классе разрывных функций, что представляется удобным, так как оптимальное управление часто бывает разрывным (релейным). При использовании же градиентных методов оптимальное управление аппроксимируется, вообще говоря, непрерывными управлениями.

Итерационные методы, близкие по идеям к изложенному выше методу, предложены в работах В. Ф. Демьянова [81, 83]. Разработке методов последовательных приближений, использующих принцип максимума Л. С. Понтрягина, посвящены работы И. В. Бейко и М. Ф. Бейко (М. Ф. Карпенко) [28—31, 114]. В работах Р. П. Федоренко [260, 262] разработан итерационный метод решения задач оптимального управления, включающий на каждом шаге решение задачи линейного программирования. Метод решения задач оптимального управления, основанный на минимизации гамильтониана, рассматривался в [358, 454].

В [214, 227, 235] рассмотрены иные алгоритмы последовательных приближений.

Метод последовательных приближений, предложенный в работе [149], применялся для решения ряда конкретных задач в работах [1, 149, 154]. В работе Язински и Вагнера этот метод использован для расчета оптимального режима работы химических реакторов [379].

§ 6. МЕТОДЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВАРЬИРОВАНИЕМ И ПЕРЕБОРОМ ТРАЕКТОРИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ

Метод динамического программирования, как отмечалось в § 1, теоретически позволяет решить проблему синтеза оптимального управления. Она сводится к задаче Коши для нелинейного уравнения в частных производных (1.8). Основная трудность численного решения этой задачи — большая потребность в памяти ЭВМ для хранения таблиц функции $V(t, x)$ и большой объем вычислений даже при сравнительно небольшом числе фазовых координат. Эта трудность, называемая иногда «проклятьем размерности», является главным препятствием для применения метода динамического программирования. Широкое обсуждение этих вопросов, анализ различных вычислительных схем метода динамического программирования содержится в книгах Беллмана с соавторами [32—37].

Метод динамического программирования можно использовать по-разному: либо произвести дискретизацию исходных дифференциальных уравнений управляемой системы (1.1) и затем рассматривать многошаговый процесс с дискретным временем, либо осуществить конечно разностную аппроксимацию уравнения в частных производных (1.8). Оба подхода в сущности очень близки.

Метод последовательного анализа вариантов для решения дискретных многошаговых задач управления был предложен в работе В. С. Михалевича и Н. З. Шора [189]. Впоследствии этот метод был разработан В. С. Михалевичем [186] для решения широкого класса многовариантных задач.

Данный метод указывает алгоритм перебора траекторий на дискретной сетке, приводящий к выбору оптимальной траектории.

В работах Н. Н. Моисеева [191—193] были разработаны методы перебора траекторий применительно к задачам оптимального управления системами с непрерывным временем вида (1.1). Поясним кратко сущность подходов, связанных с варьированием в пространстве фазовых траекторий, на примере управляемой системы (1.1) с краевыми условиями (1.4) и с ограничениями вида

$$x(t) \subset G(t), \quad u(t) \subset U(t, x), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{6.1}$$

Здесь $G(t)$ и $U(t, x)$ — заданные множества. Требуется найти управление, минимизирующее интегральный функционал

$$J = \int_{t_0}^{T} f_0(t, x(t), u(t))\, dt, \tag{6.2}$$

где $f_0(t, x, u)$ — некоторая заданная функция.

Существенным для реализации излагаемых ниже методов является понятие элементарной операции, предложенное Н. Н. Моисеевым в [191].

Возьмем две достаточно близкие точки

(t_1, x_1), (t_2, x_2), $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$.

Поставим вспомогательную задачу оптимального управления: найти управляющую функцию $u(t)$, переводящую систему (1.1) при ограниченных на управление (6.1) из точки (t_1, x_1) в точку (t_2, x_2) и доставляющую минимум интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x(t), u(t))\, dt.$$

Под элементарной операцией понимается приближенное решение этой вспомогательной задачи «в малом». Таким образом, элементарная операция должна отвечать на вопрос о том, существует ли вообще управление, переводящее систему (1.1) из точки (t_1, x_1) в точку (t_2, x_2), и, в случае утвердительного ответа, давать приближенное оптимальное управление, разрешающее эту вспомогательную задачу, а также приближенное оптимальное значение функционала.

В работах Н. Н. Моисеева [191—193, 196, 197] изложен ряд способов построения элементарной операции. При этом построении можно использовать тот факт, что вспомогательная задача существенно проще исходной. Близость точек (t_1, x_1) и (t_2, x_2) дает возможность различных упрощений уравнений (1.1), их линеаризации, построения приближенных аналитических решений. Кроме того, при построении элементарной операции можно не учитывать фазовое ограничение (6.1), которое будет учтено при переборе траекторий.

Отметим один важный частный случай, когда построение элементарной операции осуществляется очень просто. Это задачи, в которых уравнения движения (1.1) могут быть разрешены относительно управляющих функций.

Предположим, что элементарная операция построена и реализована в виде некоторой подпрограммы. Зададим начальное приближение $x(t_k)$ для траектории задачи (1.1), (1.4), (6.1), (6.2) в некотором конечном числе точек t_k на отрезке $[t_0, T]$.

После этого начинает работать алгоритм перебора траекторий в пространстве фазовых координат. Перебор производится на некоторой дискретной сетке, задаваемой заранее. Для каждого элемента варьируемой траектории соответствующее управление и вклад в функционал подсчитываются при помощи обращения к элементарной операции. Вариации, для которых элементарная операция невыполнима или нарушено фазовое ограничение (6.1), отбрасываются.

Что касается самого алгоритма перебора, то можно применять различные подходы. Полный перебор на принятой дискретной сетке в фазовом пространстве проводится по методу последовательного анализа вариантов или по методу динамического программирования [186, 188, 189, 32—37].

Эти методы позволяют найти абсолютный минимум функционала на данной сетке. Однако они, как уже отмечалось выше, требуют большой памяти ЭВМ и большого объема вычислений в случае достаточно большого числа узлов сетки.

Н. Н. Моисеев предложил [191] применять частичный перебор, или перебор в заданной трубке, окружающей некоторую фазовую траекторию. При этом количество перебираемых вариантов можно существенно снизить, взяв достаточно узкую трубку. После нахождения экстремали внутри данной трубки строится новая трубка, окружающая полученную на предыдущем шаге экстремаль, и процесс продолжается. Таким образом, процесс вычислений здесь требует значительно меньшей памяти и может быть реализован практически, хотя он уже, строго говоря, приводит к определению лишь локального, а не абсолютного минимума функционала.

В работе Ф. Л. Черноусько [271] был предложен метод локальных вариаций для решения вариационных задач, который заключает в себе иную схему перебора.

Варьирование траектории в методе локальных вариаций производится последовательно в каждой точке t_k и по каждой из компонент вектора x, причем при варьировании k-ой точки все остальные точки считаются фиксированными. Если в результате вариации значение функционала уменьшается, то фазовый вектор в данной точке полагается равным новому значению, полученному в результате вариации; в противном случае траектория изменяется. Описанный алгоритм обеспечивает сходимость последовательных приближений лишь к локальному минимуму функционала, однако он оказывается экономичной схемой перебора в смысле потребности памяти и времени счета. Отметим, что метод локальных вариаций можно рассматривать также как сочетание дискретизации задачи с методом покоординатного спуска.

Специфической трудностью описанных методов является построение элементарной операции, зато они обладают важным достоинством легко учитывать всевозможные ограничения, в частности, ограничения на фазовые координаты (6.1), которые особенно трудны для других методов. При применении же изложенных методов учет фазовых ограничений сводится просто к их проверке и к отбрасыванию в процессе перебора тех траекторий, которые им не удовлетворяют.

Разработке и исследованию методов перебора в пространстве фазовых координат посвящены работы и книги Н. Н. Моисеева [191—194, 196, 197], работа Н. Я. Багаевой и Н. Н. Моисеева [18], работы В. И. Коробова [131], Л. Д. Подвального [219], Р. П. Федоренко [261].

Разработке метода локальных вариаций для задач оптимального управления посвящена работа И. А. Крылова и Ф. Л. Черноусько [150]. В ней имеется программа метода на языке АЛГОЛ-60, приводится численное решение конкретных задач оптимального управления (см. также [148]). В [20] дана усовершенствованная программа метода локальных вариаций для задач оптимального управления довольно общего вида. Работы [271, 21—23] посвящены разработке метода локальных вариаций для численного решения вариационных задач с частными производными. Работа И. А. Вателя и А. Ф. Кононенко [66] содержит одну модификацию метода локальных вариаций. Подробное изложение метода локальных вариаций, исследование его сходимости и точности, описание алгоритмов и программ, а также конкретные приложения метода можно найти в монографии Ф. Л. Черноусько и Н. В. Баничука [275].

В указанных выше работах, посвященных методам перебора и методу локальных вариаций, уделяется, в частности, внимание важным вопросам о выборе шага сетки по времени и шагов варьирования по фазовым координатам (Δt и Δx). Для сходимости методов к локальному экстремуму необходимо, чтобы $\Delta t \longrightarrow 0$ и, кроме того, чтобы $\Delta x(\Delta t)^{-p} \longrightarrow 0$, где число p зависит от типа решаемой задачи и от нормы, в которой производится оценка близости. При практической реализации метода локальных вариаций решение обычно строится сначала на грубой сетке (при больших Δt, Δx). Затем шаг Δx уменьшается, например, делением пополам, причем каждый раз в качестве начального приближения используется оптимальная траектория, полученная при предыдущем значении Δx. Когда Δx станет достаточно малым, уменьшается шаг Δt, и процесс варьирования идет снова при постепенно уменьшающемся Δx до тех пор, пока процесс не сойдется при заданных окончательных значениях Δt, Δx.

Отметим, что изложенные выше методы решения задач оптимального управления, связанные с частичным перебором и варьированием в пространстве фазовых траекторий, решают по существу задачу программного управления.

Как отмечалось выше, непосредственное применение метода динамического программирования для численного решения задач оптимального управления требует большой памяти ЭВМ. Поэтому практические результаты можно получить либо при сравнительно небольшой размерности системы, либо при очень грубой сетке в фазовом пространстве, когда число варьируемых траекторий невелико. Большой интерес представляют работы, в которых делается попытка преодолеть эти трудности. В связи с этим отметим работы Ларсона [410—412], где были предложены некоторые усовершенствованные и экономичные вычислительные процедуры метода динамического программирования. В этих процедурах используется разбиение фазового пространства на блоки, применяются переменные шаги по времени с целью уменьшения необходимой памяти ЭВМ и ускорения расчетов. Подобным методам посвящена также [467].

Для приближенного решения задачи синтеза оптимального управления Беллманом [32] был предложен метод последовательных приближений для решения краевой задачи (1.8). Этот метод состоит в следующем. Зададим произвольное управление $u_1(t, x)$, удовлетворяющее ограничению (1.2), и определим функцию $V_1(t, x)$ соотношениями

$$\frac{\partial V_1'}{\partial x} f(t, x, u_1) + \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0, \quad V_1(T, x) = F(x).$$

Вычислим далее управление $u_2(t, x)$ из условия

$$\frac{\partial V_1'}{\partial x} f(t, x, u_2) = \min_{u \subset U} \frac{\partial V_1'}{\partial x} f(t, x, u).$$

В результате применения описанного итерационного процесса будет построена последовательность функций $V_i(t, x)$, которая при некоторых условиях сходится к решению исходной краевой задачи (1.8).

Отметим, что описанный метод не снимает трудностей, связанных с размерностью задачи, но сводит решение нелинейного уравнения в частных производных (1.8) к решению последовательности линейных уравнений. Метод эффективен, если эти линейные задачи оказываются достаточно простыми.

Вопросы применимости метода последовательных приближений Беллмана для построения синтеза оптимального управления рассмотрены в [14, 17, 32—37, 63, 303—305, 307, 337].

Применению метода возмущений для приближенного решения уравнения Беллмана посвящена работа [297].

§ 7. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Численные методы решения задач оптимального управления линейными системами занимают особое место. Именно для линейных задач численные методы, как правило, удается обосновать, т. е. доказать их сходимость и установить оценки погрешности. Использование линейности управляемой системы дает возможность построить эффективные алгоритмы.

Кроме того, может оказаться полезной интерпретация линейных задач управления в форме проблемы моментов в функциональном пространстве, предложенная Н. Н. Красовским [140]. Эта интерпретация позволяет выяснить основные закономерности, характерные для линейных задач оптимального управления. Поскольку для линейных систем можно выразить фазовые координаты в виде линейных интегральных функционалов от управляющих функций, то это дает возможность эффективно применить методы численного решения, основанные на способах математического программирования.

Необходимо также отметить, что схема решения линейных задач оптимального управления, основанная на проблеме моментов, позволяет с помощью теоремы отделимости выпуклых множеств в функциональных пространствах учесть ограничения на фазовый вектор и управление (см., например, [156]). Решение некоторых линейных задач оптимального управления сведением их с помощью проблемы моментов к эквивалентной задаче линейного программирования получено в статье В. И. Бондаренко, Ю. М. Филимонова [43].

Разработке численных методов для задач оптимального управления линейными системами посвящен целый ряд работ. Б. Н. Пшеничным [236, 237] рассмотрена линейная управляемая система с линейными краевыми условиями типа равенств и неравенств и с минимизируемым линейным функционалом на фиксированном интервале времени. Предложен итерационный метод решения, основанный на сведении поставленной задачи к задаче минимизации функции конечного числа переменных.

В. Ф. Демьяновым [81, 82] предложен метод последовательных приближений для отыскания оптимального управления в линейной системе и доказана сходимость этого метода.

Метод последовательного проектирования для линейных задач оптимального управления с линейным функционалом и с линейными ограничениями типа неравенств на управляющие функции и фазовые координаты рассмотрен в работе Э. М. Вайсборда [64].

Итерационные вычислительные методы для задач минимизации выпуклого функционала в линейных управляемых системах разрабатывались в работах А. Ю. Баранова, Ю. Ф. Казаринова, В. В. Хоменюка [24], В. Ф. Демьянова [82], Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой [72], В. Б. Гиндеса [75], Н. Е. Кирина [116], Б. Н. Пшеничного [233] и других.

Важным для приложений классом задач оптимального управления являются задачи линейного оптимального быстродействия. Для этих задач доказана теорема существования и установлена структура оптимального управления [229], предложен ряд численных методов решения. Изложим кратко один из них, связанный с именами Итона [339], Нейштадта [444] для линейной управляемой системы (1.1) вида

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax + b(t)u, \quad t \geqslant 0, \\ &x(0) = x^0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

в предположении, что для системы (7.1) справедливо условие общности положения. Здесь постоянная матрица A, вектор-функция $b(t)$ и вектор x^0 заданы. Выбором скалярного управления u требуется систему (7.1) перевести за наименьшее возможное время в начало координат. Уравнение для сопряженных переменных ψ в данном случае имеет вид $\dot{\psi} = -A'\psi$, т. е. оно интегрируется независимо от уравнения (7.1). Оптимальное управление определяется формулой

$$u(t) = \operatorname{sgn}[\psi'(t)\, b(t)]. \tag{7.2}$$

Обозначим через $\omega(t)$ фундаментальную матрицу системы $\dot{\psi} = -A'\psi$, удовлетворяющую начальному условию $\omega(0) = E$, где E — единичная матрица. Через $\psi(t, a)$ обозначим решение этой же системы с начальным условием $\psi(0, a) = a$. Суть алгоритма работ [339, 444] состоит в следующем: берем произвольный вектор a_0; строим

$$\psi(t, a_0) = \omega(t)\, a_0;$$

по формуле (7.2), в которой $\psi(t)$ заменено на $\psi(t, a_0)$, определяем управление $u(t, a_0)$.

Вычисляем далее функции

$$z(t, a_0) = \int_0^t \omega'(s)\, b(s)\, u(s, a_0)\, ds,$$

$$h(t, a_0) = a_0'[z(t, a_0) + x^0];$$

определяем точку t_0, в которой функция $h(t, a_0)$ обращается в нуль; задаем следующее приближение a_1 равенством

$$a_1 - a_0 = \lambda_1[z(t, a_0) + x^0]. \tag{7.3}$$

Здесь λ_1 — положительное число, выбором которого регулируется скорость сходимости алгоритма. Продолжим указанный итеративный процесс. Если после k-го шага итераций будет $|z(t_k, a_k) + x^0| \leqslant \varepsilon$, то это означает, что управление $u(t, a_k)$ переводит систему (7.1) за наименьшее время в ε — окрестность начала координат. Выбором последовательности чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и т. д., входящих в соотношение (7.3), можно при определенных условиях добиться сходимости алгоритма к управлению, оптимальному по быстродействию.

Вопросу ускорения сходимости метода Нейштадта решения задачи оптимального быстродействия в линейных системах посвящены статьи: Фадден, Гилберт [342], Коббе [401]. Итерационный процесс нахождения недостающих начальных условий для сопряженных переменных в линейной задаче оптимального быстродействия предложен Итоном [339]. Численный метод решения задач быстродействия в линейных системах, применимый также и для нелинейных систем, разработан Б. Н. Пшеничным [233].

В работе Ларсона [413] предложен способ отыскания оптимального по быстродействию управления, основанный на рекуррентной процедуре уточнения моментов переключения оптимального управления. В статье А. Я. Дубовицкого, В. А. Рубцова [88] дан вариационный анализ разностного приближения задачи оптимального быстродействия в линейных системах.

Обоснование и разработка некоторых численных методов решения задач оптимального быстродействия в линейных системах проведено в книге Планта [451]. В статье [77] рассмотрено применение методов математического программирования к задаче линейного быстродействия.

В работе [239] дается изложение методов решения задач быстродействия, сводящих их к задачам максимизации линейной формы от конечного фазового вектора.

Приближенный метод синтеза оптимального по быстродействию управления в линейной системе, зависящей от малого параметра, рассмотрен в [110].

Другой изученной весьма полно задачей оптимального управления линейными системами является случай задачи с интегральным квадратичным функционалом. В этой задаче при определенных условиях удается построить синтез оптимального управления, сведя её решение к исследованию некоторого матричного дифференциального уравнения типа Риккати. Результаты в этом направлении имеются в книгах В. И. Зубова [98], А. А. Красовского [132], Н. Н. Красовского [138], А. М. Летова [169], Н. Н. Моисеева [196, 197] и др.

Если время работы системы бесконечно, то задачу оптимального управления линейной системой с квадратичным функционалом называют задачей об аналитическом конструировании регулятора. Эта задача тесно связана с вопросом о выборе управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость невозмущенного программного движения. А. М. Летов поставил и решил указанную задачу, используя классический вариационный метод Эйлера — Лагранжа. В работе Н. Н. Красовского [138] развит подход к этой задаче, основанный на применении второго метода Ляпунова в теории устойчивости и метода динамического программирования. Численные алгоритмы решения задачи об аналитическом конструировании регулятора рассмотрены в работе Ю. М. Репина, В. Е. Третьякова [242].

Задача оптимального управления линейными системами при квадратичном функционале послужила источником многих работ, в которых, в частности, разрабатывались численные способы построения оптимального управления (см., например, [14, 199, 344, 463, 466, 474] и др.).

§ 8. ДРУГИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Наряду с изложенными выше, разработан целый ряд других вычислительных методов решения задач оптимального управления, часть из которых рассматривается в этом параграфе.

К разработке вычислительных методов, основанных на решении краевой задачи, можно подойти с иных, тличных от § 3, позиций, а именно, отыскивать решение среди функций, удовлетворяющих граничным условиям. Такие решения можно находить методами переноса граничных условий, часто называемыми методами прогонки, что соответствует характеру процедуры: переносу граничных условий с одного конца траектории на другой. Идея применения методов прогонки к линейным и нелинейным задачам оптимального управления обсуждается в книгах Н. Н. Моисеева [196, 197]. В случае нелинейных краевых задач строятся итерационные процедуры, на каждом шаге которых надо решать краевую задачу для линейных уравнений.

Другая группа применяемых вычислительных методов решения задач оптимального управления подобна методам Ритца и Галеркина, когда управление задается в виде разложения по известной системе функций с неизвестными коэффициентами, подбираемыми из условий оптимальности. Подбор коэффициентов может быть осуществлен при помощи численных методов нелинейного программирования. Метод Ритца применялся в работе Ю. Н. Иванова, Ю. В. Шалаева [102] для расчета оптимальной траектории полета между компланарными круговыми орбитами в центральном гравитационном поле.

В работе Ю. Н. Иванова [100] рассмотрен вопрос об аппроксимации оптимального управления кусочно-постоянной функцией с заданным числом уровней. Методу Ритца в задачах оптимального управления посвящены работы М. А. Гонейма, Б. Бернхольца [78], А. М. Казбана [109], Зальцера, Федерова [462], Уильямсона [491] и другие.

Широкое распространение получили вычислительные методы, основанные на сведении исходной задачи оптимального управления к некоторой конечномерной задаче с последующим использованием методов нелинейного программирования. В работе Ю. М. Ермольева, В. П. Гуленко [95] указанное сведение осуществлено с помощью замены дифференциального оператора конечно разностным.

Для решения возникающих задач нелинейного программирования используются различные вычислительные методы такие, как, например, градиентные методы, методы штрафных функций, метод случайного поиска [77, 78, 95, 96, 182, 260, 316].

Исследованию вопросов аппроксимации и сходимости дискретных задач оптимального управления к непрерывным посвящены работы Б. М. Будака, Е. М. Берковича [50—53], Б. М. Будака, Е. М. Берковича, Е. Н. Соловьевой [54—56], Ю. М. Ермольева, В. П. Гуленко [94, 95], Каллама [329], Даниэля [330], Розена [457] и др.

Применению методов математического программирования к задачам оптимального управления посвящены статьи Бруша, Шаппелле [316] и др.

Таким образом, основными этапами численного решения задачи при таком подходе являются: выбор подходящей конечно разностной аппроксимации исходной управляемой системы дифференциальных уравнений, выбор численного метода минимизации в полученной задаче нелинейного программирования, исследование сходимости и оценка погрешности в зависимости от выбранных шагов дискретизации.

В работе В. Ф. Демьянова, С. К. Мышкова [84] предложен метод последовательных приближений решения некоторых задач оптимального управления, использующий необходимые условия оптимальности, отличные от принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Некоторые подходы к решению задач оптимального управления основаны на достаточных условиях оптимальности В. Ф. Кротова [146, 147]. Особенностью этих методов является то, что они допускают произвол, который устраняется с учетом специфики конкретной задачи. В некоторых случаях условия оптимальности В. Ф. Кротова смыкаются с методом динамического программирования. Эффективность этих условий проявляется при исследовании нерегулярных случаев, например, оптимальных скользящих режимов [146, 147].

Важной особенностью задач оптимального управления является их возможная некорректность. Примером задач такого рода могут служить управляемые системы, в которых большое изменение управления приводит к малому изменению оптимизируемого функционала.

Для исследования и решения некорректных задач А. Н. Тихонов разработал метод регуляризации [255]. В этом методе для решения отмеченного класса задач предлагается исходную задачу заменить регуляризованной с новым оптимизируемым функционалом. При некоторых предположениях оказывается, что оптимальное управление регуляризованной задачи сходится к оптимальному управлению исходной задачи. Использование метода регуляризации вместе с другими численными методами для решения задач оптимального управления содержится в работах А. Н. Тихонова, В. Я. Галкина, П. Н. Заикина [256], Б. М. Будака, Ю. Л. Гапоненко [58].

При решении задач оптимального управления нелинейными системами возможно применение различных методов линеаризации задачи с последующим применением известных способов решения линейных задач (см., например, Л. А. Соболенко [248]).

В работе Ю. З. Алешкова [10] для решения вариационных задач механики полета предлагается метод, основанный на последовательной линеаризации задачи.

Необходимо также отметить, что при решении конкретных задач возможны как различные сочетания изложенных методов, так и способы, учитывающие специфику задачи.

В ряде работ для решения задач оптимального управления предлагались подходы с позиций функционального анализа. Сюда относится развитый Н. Н. Красовским [140] подход к решению линейных задач оптимального управления, основанный на классической проблеме моментов. К этому же направлению можно отнести работы Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой [73], Е. С. Левитина, Б. Т. Поляка [162], Полака [220], а также статьи [156, 177, 298, 360, 428] и др.

Сравнению между собой нескольких различных численных методов решения задач оптимального управления посвящены [473—474, 480].

Различные методы применяются при решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами, описываемыми уравнениями в частных производных. Возникающие здесь задачи разнообразны: они отличаются типом дифференциальных уравнений, ограничениями и краевыми условиями, способом управления: управление может входить как в сами дифференциальные уравнения, так и в граничные или начальные условия и т. д. При численном решении задач оптимального управления такими системами можно применять многие из методов, развитых для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. При этом можно пользоваться необходимыми условиями оптимальности и сводить задачу оптимального управления к краевой задаче для системы уравнений в частных производных, которая затем может решаться численно, например, методами конечных разностей. Другой путь состоит в том, что исходная управляемая система с распределенными параметрами сразу сводится к управляемой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, например, методом прямых. Отметим ряд работ, посвященных численным методам для оптимизации управляемых систем с распределенными параметрами.

А. Г. Бутковский предложил использовать метод моментов и методы сведения к системам обыкновенных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений для приближенного расчета оптимального управления в некоторых системах с распределенными параметрами [62]. В работах Г. М. Островского, Ю. М. Волина развивались методы оптимизации управляемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями в обыкновенных и в частных производных, и решались задачи оптимального управления химическими процессами [70, 71, 208—210].

Модификация метода наискорейшего спуска для систем с распределенными параметрами имеется в работах Т. К. Сиразетдинова [246] и Чанга [321]. Некоторые задачи оптимального по быстродействию управления в системе с распределенными параметрами рассмотрены Е. А. Клестовым, Т. К. Сиразетдиновым [118].

Ю. Н. Андреев, В. М. Оркин рассмотрели задачу об оптимальном разогреве печи при помощи метода последовательных приближений с использованием принципа максимума [13].

Ряд вариационных задач для систем с распределенными параметрами может быть решен с помощью метода локальных вариаций [271, 275], рассмотренного в § 6 настоящего обзора.

Различным вопросам оптимального управления системами с распределенными параметрами посвящены работы [241, 279, 291, 309, 313, 373, 397, 398, 426, 461, 468, 446, 489] и др. Дополнительная библиография по вопросам управления системами с распределенными параметрами содержится в книге А. Г. Бутковского [62]. Обзор советских работ по системам управления с распределенными параметрами имеется в статье А. Г. Бутковского, А. И. Егорова, К. А. Лурье [318].

§ 9. ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ

Возможности изложенных выше вычислительных методов определения оптимального управления существенно лимитируются возможностями ЭВМ, вследствие чего большое значение имеют также и аналитические методы приближенного решения задач управления. Особое значение приближенные методы имеют при построении синтеза оптимального управления.

Приближенные аналитические методы построения решения задач управления связаны, в основном, с наличием в уравнениях движения малых параметров и применением методов теории возмущений. При этом обычно считается, что при отсутствии членов с малыми параметрами решение задачи оптимального управления известно. Используя это решение, можно построить алгоритмы последовательных приближений к оптимальному управлению и к траектории для исходной задачи.

9.1. Приближенные методы управления квазилинейными объектами. Задача оптимального управления линейными системами наиболее хорошо исследована как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения разработки приближенных и численных методов ее решения. Поэтому при переходе к рассмотрению более общих ситуаций полезно выяснить их связь с задачами оптимального управления линейными системами. Особую роль при этом играют квазилинейные системы, отличающиеся от линейных уравнений лишь малыми нелинейными добавками. Если при этом в отсутствии нелинейности задача оптимального управления разрешима, то это решение можно использовать в качестве нулевого приближения к оптимальным значениям функционала, управления и траектории в исходной задаче.

Указанный подход к приближенному решению задач оптимального управления квазилинейными системами на конечном интервале времени, основанный на использовании проблемы моментов, рассматривался Н. Н. Красовским в его книге [140]. Вопросам управления квазилинейными объектами на конечном временном интервале посвящены также статьи Э. Г. Альбрехта [12], В. И. Зубова [98], В. Б. Колмановского [122, 123], Т. Л. Майзенберг [178] и др. Задача управления системой с малым параметром при производных рассмотрена в работе Явнути, Кокотович [380]. Приближенные способы решения задач оптимальной стабилизации квазилинейных управляемых систем, основанные на использовании второго метода Ляпунова в теории устойчивости и метода динамического программирования, освещены в работе Н. Н. Красовского [138], содержащей также и обзор соответствующих результатов. Использование функций Ляпунова для приближенного оптимального управления нелинейными системами рассмотрено в статье Хейслера, Реказиуса [364]. Приближенный метод синтеза управления, оптимального по быстродействию, для линейных объектов с малым параметром изложен в работе В. Н. Калинина [110].

Изложим некоторые относящиеся сюда результаты на примере управляемой системы

$$\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)+\varepsilon f(t,\,x(t))+B(t)\,u(t), \qquad (9.1)$$
$$0\leqslant t\leqslant T, \quad x(0)=a_0.$$

Здесь по-прежнему $x(t)$ — вектор фазовых координат, $u(t)$ — управление. Матрицы A и B, малый параметр $\varepsilon\geqslant 0$, вектор a_0, постоянная $T>0$ и функция $f(t, x)$ заданы.

Пусть дан вектор a_1. Требуется определить управление $u(t)$, доставляющее минимум интегралу

$$J(u)=\int_0^T |u(t)|^2\,dt \qquad (9.2)$$

и такое, что $x(T)=a_1$.

Известно, что при $\varepsilon=0$ задача допускает явное аналитическое решение.

Вначале [122] устанавливаются существование оптимального управления и траектории, разрешающих задачу, а также оценивается область фазового пространства, которой принадлежит оптимальная траектория. Отсюда и из налагаемых дополнительно требований на коэффициенты системы (9.1) следует, что существует решение краевой задачи принципа максимума Л. С. Понтрягина. Затем обоснована схема последовательных приближений метода возмущений для решения этой краевой задачи, а также доказана единственность решения краевой задачи. Используя отмеченные факты, построена последовательность управлений и траекторий, аппроксимирующих оптимальные с любой степенью точности. Реализация каждого последующего приближения по степеням малого параметра ε сводится к вычислению некоторых квадратур.

Описанным образом нетрудно оценить в терминах коэффициентов системы (9.1) верхнюю границу значений параметра ε, для которых справедлив предлагаемый алгоритм. В конкретных ситуациях значения параметра ε, для которых можно применять эту схему решения, могут быть и не малыми.

Изложенный способ приближенного решения задачи оптимального управления для квадратичной системы (9.1) использовал малость нелинейных членов.

В работе Н. Н. Моисеева, А. Г. Шмидта [442] асимптотическим методом строится оптимальное управление для линейных систем с медленно меняющимися коэффициентами.

Другой итеративный процесс построения оптимального управления нелинейными системами, предложенный в работе Э. Г. Альбрехта [11], основан на малости возмущений начального положения системы. При определении синтеза оптимального управления в нелинейных системах возможно применение метода возмущений для приближенного решения уравнения Беллмана (Болдуин, Вильямс [297]).

Изложенные методы приближенного построения оптимального управления существенно используют конечность временного интервала $[0, T]$. Однако в ряде случаев временной интервал является либо бесконечным, либо конечным, но большим. В этом случае для построения оптимального управления можно использовать метод осреднения, изложенный далее. Рассмотрение некоторых задач оптимального управления на бесконечном интервале проведено в книге Н. Н. Моисеева [197].

9.2. Слабо управляемые системы. Рассмотрим некоторые результаты, связанные со слабо управляемыми системами. Наличие малого параметра в таких системах характеризует здесь малость отношения управляющих воздействий, например, силы тяги аппарата, к неуправляемым, например, к силе веса. Слабо управляемые системы исследовались в целом ряде работ в связи с управлением движением летательных аппаратов (см., например, книги Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева

[80], В. Н. Лебедева [161], Н. Н. Моисеева [195—197], работу Ф. Л. Черноусько [272)].

Изложим, следуя работе [272], существо приближенных методов для построения оптимального управления системами вида (1.1)—(1.3) со свободным правым концом. Дополнительно предположим, что справедливы разложения

$$f=f^{(0)}(x, t)+\varepsilon f^{(1)}(x, t, u)+\ldots,$$
$$F=F^{(0)}(x, t)+\varepsilon F^{(1)}(x, t, u)+\ldots. \tag{9.3}$$

Здесь $f^{(i)}$ и $F^{(i)}$ — некоторые заданные функции. Из разложения (9.3) видно, что система (1.1) при $\varepsilon=0$ неуправляема. Если бы функция $f^{(0)}$ зависела от управления, то, вообще говоря, существовало бы оптимальное управление нулевого приближения, и разложение по малому параметру позволило бы лишь уточнить это управление.

Рассматриваемый случай (1.1)—(1.3), (9.3) интересен тем, что в нулевом приближении управление вообще невозможно определить. Приближенное решение задачи (1.1)—(1.3), основанное на принципе максимума, ищется в виде разложений

$$x(t)=x^{(0)}(t)+\varepsilon x^{(1)}(t)+\ldots,$$
$$\psi(t)=\psi^{(0)}(t)+\varepsilon\psi^{(1)}(t)+\ldots, \tag{9.4}$$
$$J=J^{(0)}+\varepsilon J^{(1)}+\ldots.$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (1.1)—(1.3), (1.5), разлагая полученные выражения в ряды по ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим соотношения для определения коэффициентов в разложениях (9.4). В частности, в нулевом приближении имеем

$$\frac{dx^{(0)}}{\partial t}=f^{(0)}(x^{(0)}, t),\quad x^{(0)}(t_0)=x^0,$$
$$J^{(0)}=F^{(0)}(x^{(0)}(T)),$$
$$\frac{d\psi^{(0)}}{dt}=-\psi^{(0)\prime}\frac{\partial f^{(0)}(x^{(0)}, t)}{\partial x},\quad \psi^{(0)}(T)=-\frac{\partial F^{(0)}(x^{(0)}(T))}{\partial x}.$$

Для траектории $x^{(0)}(t)$ в нулевом приближении получена задача Коши. Определяя $x^{(0)}(t)$, затем легко вычислить и $\psi^{(0)}(t)$, также решая задачу Коши. Уравнение первого приближения определяется из условия максимума по u выражения, входящего в функцию Гамильтона

$$\psi^{(0)\prime}(t)f^{(1)}(x^{(0)}(t), t, u). \tag{9.5}$$

Управление $u(t)$, определяемое из условия максимума соотношения (9.5), может быть и не близко к оптимальному в смысле метрики пространства непрерывных функций. Однако оно будет приближенно оптимальным в смысле оптимизируемого функционала. Точнее говоря, разность между приближенным значением функционала и его точным оптимальным значением будет при определенных условиях величиной порядка отброшенных членов, т. е. порядка ε^2. Оказывается, что полученное в первом приближении управление локально оптимально, т. е. оно обеспечивает в каждый момент времени наибольшую скорость изменения минимизируемого функционала.

Наряду с использованием описанного метода для построения приближенного аналитического решения, с его помощью можно получать исходное начальное приближение для последующего численного решения задачи на ЭВМ. При этом значение параметра ε может быть фактически не очень малым.

Возможны обобщения рассмотренной задачи в различных направлениях, в частности, изложенным способом можно исследовать управление системы (1.1) с заданными краевыми условиями, с интегральными функционалами, с нефиксированным моментом окончания процесса.

9.3. Методы осреднения для приближенного решения задач оптимального управления. На возможность использования метода осреднения при решении задач оптимального управления на асимптотически большом промежутке времени обратил внимание Н. Н. Моисеев [194—197]. В указанных работах рассмотрен ряд подходов к подобным задачам, исследованы, в частности, системы с медленно меняющимся управлением. Ряд сложных задач, связанных с расчетом движений космического аппарата с малой тягой, был решен приближенными и численными методами В. Н. Лебедевым [161]. В работе У. А. Акилова [3] с помощью метода осреднения решение задач оптимального управления неавтономными системами сведено к исследованию управляемых автономных систем. В работе Ю. Г. Евтушенко [89] было дано применение метода осреднения для решения задач оптимального управления системами с малым параметром, приводимыми к стандартному по Н. Н. Боголюбову виду. В этой работе скорость изменения скалярной быстро вращающейся переменной фазы предполагается в нулевом приближении постоянной. В работе Л. Д. Акуленко и Ф. Л. Черноусько [7] исследована управляемая система с быстровращающейся фазой в случае, когда скорость изменения фазы не постоянна, а зависит от медленных переменных. Построена процедура осреднения для приближенного нахождения оптимального управления.

Ряд применений метода осреднения для оптимального управления судовыми двигателями имеется в книге В. И. Небеснова, В. А. Плотникова, А. Я. Кузюшина [202].

Отметим, что возможны различные пути применения методов осреднения Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского для построения оптимального управления колебательными системами. Можно вначале провести осреднение правых частей уравнений движения по быстрым переменным, считая управление медленно меняющейся функцией. Другой подход состоит в применении осреднения к краевой задаче принципа максимума. При этом управление не предполагается медленной переменной. Остановимся несколько подробнее на втором подходе.

Рассмотрим управляемую систему, приводимую к виду управляемых систем с быстро вращающейся фазой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, u, \varepsilon), \quad x(t_0) = x^0, \\ \dot{y} &= \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, u, \varepsilon), \quad y(t_0) = y^0, \end{aligned} \tag{9.6}$$

где x — вектор медленных переменных, y — скалярная быстрая переменная фаза, u — вектор управляющих функций, подчиненный некоторым ограничениям, ε — малый параметр, $\omega(x)$ — скалярная функция (частота). Отметим, что система (9.6) относится к числу слабо управляемых. Для нее ставится задача минимизации функционала вида

$$I = g(x(t), \varepsilon), \tag{9.7}$$

зависящего лишь от медленных переменных. Интервал движения $T—t_0$ может быть большим — порядка ε^{-1}, так что за это время медленные переменные могут измениться существенно. Процедура асимптотического решения поставленной задачи построена в работах [89] для случая $\omega(x) = \mathrm{const}$ и [7] для общего случая.

Установлено, что при некоторых общих предположениях решение краевой задачи принципа максимума Л. С. Понтрягина сводится в первом приближении по ε к решению более простой краевой задачи, не содержащей в правой части быстрой переменной. В результате порядок системы понижается на два. Так как в силу автономности и конечности при этом сохраняется еще и гамильтониан, то для систем с одной степенью свободы задача интегрируется в квадратурах. Преимущество осредненной краевой задачи заключается в том, что ее решение может проводиться на коротком интервале «медленного времени» $\tau = \varepsilon t \in [\varepsilon t_0, \varepsilon T]$, быстро периодические члены исключаются за счет осреднения. Случай, когда $\omega = \omega(\varepsilon t)$, рассмотрен в статье [4].

Если для системы (9.6) с функционалом типа (9.7) момент окончания процесса управления не задан, а определяется из условия достижения траекторией некоторого многообразия, зависящего от медленного вектора x, то в этом случае также получена более простая осредненная краевая задача, обладающая указанными выше преимуществами.

При помощи развитой методики найдено решение задач оптимального управления некоторыми линейными и нелинейными колебательными системами. Примеры применения метода осреднения к подобным задачам имеются в работах [4, 5, 7, 89, 161, 194—197, 202].

9.4. Выше освещены некоторые приближенные методы решения задач оптимального управления, основанные на явном использовании малого параметра. Однако существуют и другие подходы к построению управлений, в том или ином смысле близких к оптимальным. Такие управления иногда именуются квазиоптимальными или субоптимальными. На их выбор часто влияют соображения, связанные с простотой их практической реализации. Один из эффективных способов синтеза управления основан на теории систем с переменной структурой, которому посвящена большая литература (см., например, книгу [92] под редакцией С. В. Емельянова). Рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящего обзора.

§10. ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ

Исследование и решение конкретных задач оптимального управления часто приводит к разработке или усовершенствованию вычислительных и приближенных методов, при этом успех решения нередко бывает связан с учетом специфики задачи. Значительное место в приложениях оптимального управления занимают задачи оптимизации движения летательных аппаратов. Рассмотрим кратко некоторые из них.

Вариационным задачам, связанным с запуском искусственного спутника Земли, посвящена статья Д. Е. Охоцимского, Т. М. Энеева [213].

Для исследования управляемого движения аппаратов с малой тягой в гравитационном поле Т. М. Энеев предложил метод транспортирующих траекторий. Суть метода заключается во введении системы координат, движущейся вдоль кеплеровской траектории, соединяющей начальную и конечную точки. С помощью этого подхода было получено решение ряда задач об оптимальных перелетах (см., например, [80]).

Численным методам решения задач механики полета посвящена статья Н. Н. Моисеева, В. Н. Лебедева [441]. Вариационная задача об оптимальном подъеме космической ракеты рассмотрена в работе В. А. Егорова [90]. Применению методов оптимального управления к задаче о выборе состава измерений посвящена статья М. Л. Лидова [172]. Вычислительные аспекты задачи об оптимальных перелетах рассмотрены в статьях В. К. Исаева, В. В. Сонина [106], В. К. Исаева, А. И. Курьянова, В. В. Сонина [375]. В работе Г. Е. Кузмака, В. К. Исаева, Б. Х. Давидсона [153] изучены оптимальные режимы движения точки переменной массы в однородном центральном поле. Различные задачи оптимизации полета в атмосфере изучены В. Ф. Кротовым и В. И. Гурманом [147] при помощи достаточных условий оптимальности. Некоторые способы приближенного решения вариационных задач и их приложения к исследованию движения точки переменной массы предложены В. С. Новоселовым [206]. В работах И. И. Нарожного [200, 201] применено сочетание двух методов для оптимизации траекторий летательных аппаратов. Различным задачам оптимального управления летательных аппаратов, в частности численным и приближенным методам решения посвящены работы [103, 119, 251, 301, 302, 315, 351, 363, 382, 385, 387, 404, 443].

Вопросы управления движением космических аппаратов изложены в книгах К. Б. Алексеева, Г. Г. Бебенина [9], Г. Л. Гродзовского, Ю. Н. Иванова, В. В. Токарева [80], В. Н. Лебедева [160], В. М. Пономарева [228], Е. В. Тарасова [254] и др. В этих книгах, а также в обзоре [449] можно найти более полную библиографию по затронутым вопросам.

§ 11. ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Постановка задачи оптимального управления стохастическими системами определяется соотношениями (1.9), (1.10), (1.2), а ее решение сводится к исследованию нелинейного уравнения в частных производных — уравнению Беллмана (1.11). Если решение задачи (1.11) получено, то оно дает оптимальное значение функционала (1.10). Соответствующий синтез оптимального управления $u(t, x)$ определяется в результате вычисления минимума в (1.11). Точные решения уравнения (1.11) известны лишь в отдельных случаях, например, для линейных систем и квадратичного функционала. Поэтому важны численные и приближенные методы решения уравнения (1.11). В настоящее время разработаны эффективные конечно разностные методы численного решения подобных уравнений, которые, однако, позволяют практически решать их только для небольших размерностей вектора фазовых координат. При больших же размерностях численное решение задачи вызывает трудности в связи с недостатком памяти и быстродействия ЭВМ.

В целом ряде случаев могут быть использованы приближенные методы решения задач оптимального управления стохастическими системами. Рассмотрим некоторые из них подробнее.

11.1. Метод последовательных приближений Беллмана [32]. Рассмотрим задачу оптимального управления (1.9), (1.10), (1.2). Пусть $u_1(t, x)$ — произвольное управление в форме синтеза. Найдем функцию $V_1(t, x)$, решая линейное уравнение

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}+f'(t, x, u_1)\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\sigma\sigma'\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}\right)=0,$$

$$V_1(T, x)=F(x).$$

После того, как функция $V_1(t, x)$ найдена, определим управление $u_2(t, x)$ из формулы

$$f'(t, x, u_2)\frac{\partial V_1}{\partial x}=\min_{u\in U}\left[f'(t, x, u)\frac{\partial V_1}{\partial x}\right].$$

Продолжим указанный итеративный процесс. В результате получим последовательность функций $V_i(t, x)$. При некоторых предположениях эта последовательность оказывается монотонно убывающей и сходится к решению исходного уравнения Беллмана (1.11), например, в случае невырожденной матрицы диффузии $\sigma(t, x)$. Оптимальное управление в этом случае определяется из уравнения (1.11).

Изложенный метод последовательных приближений применяется в различных задачах оптимального управления стохастическими системами как для обоснования различных теорем существования, так и для построения алгоритмов приближенного решения задачи.

Этим вопросам посвящены работы Флеминга [347], В. Б. Колмановского, Т. Л. Майзенберг [126], Р. З. Хасьминского [265], Робинсон, Мур [456] и др.

11.2. Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах. Как и в детерминированных задачах оптимального управления, в стохастическом случае особое место занимают линейные системы с квадратичным функционалом. Для этих управляемых систем как на конечном, так и на бесконечном интервале времени построение синтеза оптимального управления сводится к исследованию некоторого матричного дифференциального уравнения, в простейшем случае — к уравнению типа Риккати.

Общий подход к решению задачи об аналитическом конструировании регуляторов, основанный на использовании идей второго метода Ляпунова в теории устойчивости движения и метода динамического программирования, предложен Н. Н. Красовским [138].

В работе Н. Н. Красовского, Э. А. Лидского [142] разработан приближенный метод решения задачи аналитического конструирования регуляторов в стохастических системах с ограничением на скорость изменения управления. Приближенный способ решения этой же задачи в случае, когда шум умножается на управление, предложен Р. З. Хасьминским [265]. В книге В. Б. Ларина, К. И. Науменко, В. Н. Сунцева [157] разработан приближенный способ решения задач стабилизации линейных стохастических систем, основанный на методах оптимальной фильтрации Н. Винера — А. Н. Колмогорова. Распространению отмеченных выше подходов на управляемые стохастические системы с запаздыванием посвящены работы [121, 126]. Некоторые вопросы приближенного решения задачи оптимального управления линейными стохастическими системами с квадратичным функционалом рассмотрены в работах [142, 143, 155, 174, 406].

11.3. Приближенное решение задач оптимального управления стохастическими системами. В ряде работ развивались приближенные подходы для построения синтеза оптимального управления стохастическими системами. Приближенные методы решения задачи стохастического быстродействия рассматривались в работе Н. Н. Красовского [134].

Одним из возможных методов построения систем управления является метод, основанный на использовании принципа переменной структуры, упомянутого ранее в п. 9.4 в связи с детерминированными системами. Некоторые способы построения уравнения заданного вида применительно к стохастическим системам изложены в книге [45]. Ниденные таким образом управления являются простыми по структуре и легко реализуемыми на практике.

Иным, часто применяемым способом решения задач оптимального управления стохастическими системами является дискретизация по времени и решение задачи управления в дискретном времени (см., например, работы [267, 407, 416, 417, 421, 425]).

В некоторых работах для приближенного синтеза оптимального управления используется подход, связанный с построением разложений функции Беллмана по фазовым координатам и времени в окрестности некоторых точек или линий. При этом существенно используются граничные условия (1.11). Этот подход развивался в работах [44, 49, 128, 245, 273, 299, 300].

Вопрос о приближенном выборе параметров в некоторых стохастических системах изучен М. Б. Невельсоном, Р. З. Хасьминским [203].

В последние годы применяются методы статистической линеаризации [108], на основе которых рассмотрение нелинейных управляемых стохастических систем сводится к анализу более простых объектов, для которых упрощается построение синтеза. На основе методов статистической линеаризации решен ряд инженерных задач, показывающих, в частности, что точность этих методов вполне приемлема в практических расчетах.

Изложенные выше методы относятся к задачам управления стохастическими системами, в которых помеха моделируется гауссовским белым шумом. Однако при исследовании реальных систем возникают шумы и более сложной природы. Вопросы приближенного оптимального управления системами с указанными помехами начинают разрабатываться (см., например, работу [126]).

11.4. Метод малого параметра. Ряд работ в области оптимального управления стохастическими системами посвящен исследованию управляемых систем, содержащих некоторые малые члены. Первой работой в этом направлении была статья Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягина [190]. Эта работа посвящена приближенному построению оптимального управления в детерминированной системе, которое доставляет максимум вероятности достижения малой окрестности случайно перемещающейся точки.

Исследование задач оптимального управления стохастическими системами с малым параметром в уравнениях движения содержится в работах А. С. Братуся [47, 48], В. Б. Колмановского, Ф. Л. Черноусько [127], А. И. Соляника, Ф. Л. Черноусько [249], Флеминга [349], Холланда [369] и др.

Малые члены в уравнениях движения могут быть следствием малости случайных возмущений, малости нелинейных членов и т. д. В любом из этих случаев уравнение Беллмана содержит малый параметр, что может быть использовано при построении его решения. Если мала интенсивность внешних случайных возмущений, то уравнения движения приводятся к виду

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b(t)\,u(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma(t)\,\dot{\xi}(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

где A, b, σ — заданные матрицы, ε — малый параметр. Уравнение Беллмана (1.11) для этой системы имеет вид:

$$\min_{u \subset U}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)'(Ax+bu)\right] + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2}\operatorname{Tr}\left(\sigma\sigma'\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$V(T, x) = F(x). \tag{11.1}$$

Уравнение 11.1 содержит малый параметр при старшей производной. Его решение можно в некоторых случаях искать в виде

$$V(t, x) = V^0(t, x) + \varepsilon V^1(t, x) + \ldots \tag{11.2}$$

Обозначим еще через $H(V_x, x, t)$ выражение

$$H(V_x, x, t) = \min_{u \in U}\,[V_x'(Ax+bu)] \tag{11.3}$$

и представим H в виде

$$H(V_x, x, t) = H(V_x^0, x, t) +$$
$$+ \varepsilon\,[\nabla H(V_x^0, x, t)]'\,V_x^1(t, x) + \ldots \tag{11.4}$$

Здесь ∇H — градиент H по первому аргументу. Поставляя (11.2), (11.4) в (11.1), получим уравнения и начальные условия для членов разложения $V^i(t, x)$. Так, V^0 определяется соотношениями

$$\frac{\partial V^0}{\partial t} + H(V_x^0, x, t) = 0, \quad V^0(T, x) = F(x),$$

а V^1 определяется через V^0 в виде квадратуры. При некоторых условиях разность $V - V^0$ имеет порядок ε, а разность

$V - V^0 - \varepsilon V^1$ — порядок ε^2.

Нулевое приближение u_0 к оптимальному управлению определяется из условия минимума в формуле (11.3) при $V = V^0$, а следующее приближение u_1 — из того же условия при $V = V^0 + \varepsilon V^1$. Отметим, что V^0, u_0 образуют решение детерминированной задачи.

Если исходной системой управлять с помощью u_0, то отличие по функционалу от оптимального решения составит величину порядка ε, а при управлении u_1 — порядка ε^2.

Изложенная методика предложена в статьях [127, 249, 349]. В работе Флеминга [349] проведено обоснование метода также и для высших приближений.

Отметим, что регулярное разложение вида (11.2) становится неприменимым, если функция $V^0(t, x)$ детерминированной задачи или ее производные имеют разрывы. В этом случае можно применить методику пограничного слоя для построения асимптотического решения. Этому посвящены работы [47, 48].

Необходимо отметить, что изложенные в этом пункте задачи оптимального управления с малым шумом часто оказываются некорректными в том смысле, что решение детерминированной задачи, получающейся из исходной при $\varepsilon=0$, может быть не единственным. В этом случае возможно использование метода регуляризации А. Н. Тихонова [255].

11.5. Квазилинейные управляемые стохастические системы. Рассмотрим теперь, следуя работе В. Б. Колмановского [124], другой случай наличия малого параметра в уравнениях управляемого движения. Пусть система (1.8) имеет вид:

$$\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u(t)+\varepsilon f(t,\ x(t))+\sigma(t)\,\dot{\xi}(t), \tag{11.5}$$
$$x(0)=a, \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Здесь $x(t)$ — вектор фазовых координат; матрицы A, B, σ, функция f, вектор a и малый параметр ε заданы.

Управление $u(t)$ требуется выбрать так, чтобы минимизировать квадратичный функционал

$$J(u)=M\left\{x'(T)\,L_1x(T)+\int_0^T[x'(s)\,L_2(s)\,x(s)+\right.$$
$$\left.+u'(s)\,L_3(s)\,u(s)]\,ds\right\}, \tag{11.6}$$

где L_i — заданные матрицы. При $\varepsilon=0$ оптимальное управление $u_0(t)$ равняется

$$u_0(t,\ x)=-L_3^{-1}B'P(t)\,x, \tag{11.7}$$

где квадратная неотрицательно определенная матрица $P(t)$ размером $n\times n$ есть решение матричного уравнения типа Риккати.

Алгоритм построения приближений к оптимальному управлению в задаче (11.5), (11.6) аналогичен изложенному в п. (11.4) для систем с малым шумом. Он состоит в разложении функции Беллмана в ряд (11.2) и в последующем построении i-го приближения u_i к оптимальному управлению с помощью формулы (11.3), в правую часть которой вместо V подставлена сумма первых i членов ряда (11.2). При этом погрешность по функционалу при использовании управления u_i оказывается величиной порядка ε^{i+1}. Нулевое приближение к оптимальному управлению задается формулой (11.7), а все последующие приближения выражаются через нулевое в виде квадратур.

11.6. Вычислительные методы решения задач оптимального управления стохастическими системами. Перейдем к рассмотрению работ, в которых для решения задач оптимального управления стохастическими системами предлагается использовать вычислительные алгоритмы.

В работе Д. Е. Охоцимского, В. А. Рясина, Н. Н. Ченцова [212] предложена рекуррентная процедура для задач синтеза импульсной коррекции при случайных погрешностях измерений. Развитию этого подхода посвящены работы В. А. Рясина (см. [245]), в которых построено численное решение задач импульсной коррекции при заданном числе импульсов и при случайных ошибках измерений. Возникающая при этом краевая задача с неизвестной границей решалась конечно-разностными методами с привлечением асимптотических разложений.

В работе В. А. Ярошевского, С. В. Петухова [283] задача оптимальной коррекции решена численно путем замены непрерывного управляемого случайного процесса многошаговым.

В работе Ю. М. Ермольева [93] методом проектирования стохастических квазиградиентов численно решена задача о программном управлении, минимизирующем максимальное отклонение линейной стохастической системы от заданного положения.

Численное решение задачи синтеза статистически оптимального управления при несимметричных ограничениях на управление получено в статье И. А. Богуславского, А. В. Егоровой [40].

Решение задачи оптимального управления с критерием «максимум вероятности» численным способом приведено в работе В. С. Медведева, А. С. Ющенко [180].

В работах Лионса [424], Лионса и Бенсуссана [310—312] для решения задач оптимального управления стохастическими системами применялся метод квазивариационных неравенств. В работах [312, 424] приведены численные решения задач оптимального управления некоторыми стохастическими процессами, моделирующими управление запасами при случайном спросе.

Численное решение задачи управления, моделирующей движение в случайной среде, было получено в работе А. С. Братуся [46].

В ряде случаев численное построение синтеза оптимального управления стохастическими системами может быть упрощено за счет понижения размерности задачи. Это достигается путем выделения классов инвариантно-групповых (автомодельных) решений (см. работы [299, 300, 273]). Численное решение задач оптимального управления, использующее эти соображения, было построено в работах М. Ю. Бородовского, А. С. Братуся, Ф. Л. Черноусько [44], [49]. В этих работах получен синтез оптимальной коррекции случайных возмущений при интегральных ограничениях на управление и при заданном числе импульсов в случае одного или более корректируемых параметров.

Численное решение задачи оптимального быстродействия в стохастических системах проведено в статьях [336, 391, 422].

Некоторые задачи оптимального управления стохастическими системами решены численно в статьях [346, 407, 408, 458, 478, 487].

Авторы обзора выражают благодарность Н. Н. Болотнику, М. Ю. Бородовскому, Г. Г. Егияну, В. А. Корнееву, В. М. Мамалыге, А. А. Миронову, Ю. Р. Рощину, А. П. Сейраняну за большую помощь при составлении библиографии и Р. П. Солдатовой, И. С. Хейкер за помощь при оформлении.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Аббасов Т. М.**, Построение синтеза оптимального управления в задаче наблюдения, I, II. Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. н., 1972, № 4, 32—37, 38—42 (РЖМат, 1973, 7Б855, 7Б856)
2. **Айзекс Д.**, Леондес С. Т., Ниман Р. А., О методе последовательной оптимизации в нелинейном управлении. Механика. Период. сб. перев. ин. статей, 1968, № 3, 23—36 (РЖМех, 1969, 2А188)
3. **Акилов У. А.**, О принципе усреднения в математической теории оптимальных процессов. УзССР Фанлар Акад. Докл., Докл. АН УзССР, 1968, № 9, 7—9 (РЖМат, 1969, 6Б491)
4. **Акуленко Л. Д.**, Исследование некоторых оптимальных систем методом усреднения. Прикл. мат. и мех., 1974, **38**, вып. 3, 422—432
5. —, Оптимальное управление движением квазилинейной колебательной системой при помощи малых сил. Прикл. мат. и мех., 1975, **39**, вып. 6, 995—1005.
6. —, Колмановский В. Б., Об одной модельной задаче управления движением твердого тела в атмосфере при случайных возмущениях. Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, 1975, № 2, 15—23
7. —, Черноусько Ф. Л., Метод осреднения в задачах оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1975, **15**, № 4, 869—882
8. **Александров В. В.**, О накоплении возмущений в линейных системах по двум координатам. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1968, № 3, 67—76 (РЖМат, 1969, 3Б378)
9. **Алексеев К. Б.**, Бебенин Г. Г., Управление космическим летательным аппаратом. М., «Машиностроение», 1964, 402 с.
10. **Алёшков Ю. З.**, Метод последовательных приближений для решения вариационных задач механики полета. Автоматика и телемеханика, 1965, **26**, № 10, 1657—1663 (РЖМат, 1966, 8Б380)
11. **Альбрехт Э. Г.**, Об управлении движением нелинейных систем. Дифференц. уравнения, 1966, **2**, № 3, 324—334 (РЖМат, 1966, 8Б358)
12. —, Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем. Дифференц. уравнения, 1969, **5**, № 3, 430—442 (РЖМат, 1969, 9Б391)
13. **Андреев Ю. Н.**, Оркин В. М., О приближенном решении задачи оптимального управления распределенной системой. Автоматика и телемеханика, 1969, № 5, 30—40 (РЖМат, 1970, 1Б501)
14. **Аоки М.**, Оптимизация стохастических систем. Перев. с англ. М., «Наука», 1971, 424 с.
15. **Атанс М.**, Фалб П., Оптимальное управление. Перев. с англ. М., «Машиностроение», 1968, 764 с.

16. **Афанасьев Н. Н.**, О методах последовательных приближений решения задач оптимального управления. Матем. физика. Респ. межвед. сб., Киев, 1968, вып. 5, 7—10 (РЖМат, 1969, 9Б387)
17. **Афанасьев А. Ю.**, Об одном численном методе синтеза оптимального управления нелинейным объектом. В сб. «Материалы I-й Поволжской конференции по автом. упр. Кн. I». Казань, 1971, 209—211 (РЖМат, 1971, 11Б1062)
18. **Багаева Н. Я.**, Моисеев Н. Н., Об одном способе численного решения задач оптимального управления. Докл. АН СССР, 1963, **153**, № 4, 747—750 (РЖМат, 1964, 6В341)
19. **Багирова Н. Х.**, О зависимости решений задач вариационного исчисления от малого параметра. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1966, № 1, 33—42 (РЖМат, 1966, 9Б385)
20. **Баничук Н. В.**, Крылов И. А., Петров В. М., Черноусько Ф. Л., Алгоритм метода локальных вариаций для решения вариационных задач с одной независимой переменной. В сб. «Алгоритмы и алгоритмич. языки», вып. 4. М., ВЦ АН СССР, 1969, 64—75 (РЖМат, 1969, 9В418)
21. —, Петров В. М., Черноусько Ф. Л., Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, **6**, № 6, 947—961 (РЖМат, 1967, 4Б338)
22. —, —, —, Метод локальных вариаций для вариационных задач с неаддитивными функционалами. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1969, **9**, № 3, 548—557 (РЖМат, 1969, 11Б741)
23. —, —, —, Алгоритм и вопросы сходимости метода локальных вариаций для задач с частными производными. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1973, **13**, № 1, 47—58 (РЖМат, 1973, 6Б1002)
24. **Баранов А. Ю.**, Казаринов Ю. Ф., Хоменюк В. В., Градиентные методы решения задач терминального управления в линейных системах автоматического регулирования. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, **5**, № 5, 894—902 (РЖМат, 1966, 3Б434)
25. —, —, —, Градиентные методы оптимизации нелинейных систем автоматического регулирования. В сб. «Прикл. задачи техн. кибернетики». М., 1966, 307—316
26. —, —, —, Градиентные методы решения задач терминального управления в линейных системах автоматического регулирования. В сб. «Оптимальные системы. Статист. методы». М., 1967, 129—138
27. **Бедров Я. А.**, Канарев Л. Е., Метод последовательного синтеза оптимального по быстродействию управления. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1965, № 4, 163—168 (РЖМат, 1966, 3Б431)
28. **Бейко И. В.**, Численные методы отыскания оптимальных управлений. В сб. «Оптимальные системы. Статист. методы». М., «Наука», 1967, 176—183 (РЖМат, 1968, 5Б562)
29. —, Бейко М. Ф., Об одном новом подходе к решению нелинейных краевых задач. Укр. мат. ж., 1968, **20**, № 6, 723—731 (РЖМат, 1969, 4Б612)
30. —, —, Модифицированный метод решения задачи оптимального управления, пригодный для управляемых систем, сильно неустойчивых к счету. В сб. «Некоторые вопр. прикл. мат.», вып. 4. Киев, 1969, 254—256 (РЖМат, 1970, 10Б521)
31. —, Карпенко М. Ф., Розв'язування нелінійних оптимальних задач методом послідовних наближень. Доповіді АН УРСР, 1964, № 12, 1563—1568 (РЖМат, 1966, 1Б395)
32. **Беллман Р.**, Динамическое программирование. Перев. с англ., Изд-во ин. лит., 1960, 400 с. (РЖМат, 1961, 6В133К)
33. —, Процессы регулирования с адаптацией. Перев. с англ., М., «Наука», 1964, 359 с. (РЖМат, 1965, 5Б416К)
34. —, Гликсберг И., Гросс О., Некоторые вопросы математической теории процессов управления. Перев. с англ., Изд-во ин. лит. 1962, 336 с. (РЖМат, 1963, 7В313К)

35. —, Дрейфус С., Прикладные задачи динамического программирования. М., «Наука», 1965, 458 с. (РЖМат, 1967, 3В304К)
36. —, Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. Перев. с англ. М., «Мир», 1968, 183 с. (РЖМат, 1969, 2Б787К)
37. —, —, Динамическое программирование и современная теория управления. Перев. с англ. М., «Наука», 1969, 118 с. (РЖМат, 1970, 2В510К)
38. Богуславский И. А., О синтезе стохастического оптимального управления. В кн. «Современные методы проектирования систем автоматического управления». М., «Машиностроение», 1967, 129—175
39. —, Методы навигации и управления по неполной статистической информации. В кн. «Основы проектирования систем управления летательными аппаратами». М., «Машиностроение», 1970, 256 с.
40. —, Егорова А. В. Стохастическое оптимальное управление движением при несимметричном ограничении. Автоматика и телемеханика, 1972, № 8, 23—34 (РЖМат, 1973, 1В396)
41. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1966, 307 с. (РЖМат, 1967, 7Б352К)
42. —, Оптимальное управление дискретными системами. М., «Наука», 1973, 446 с.
43. Бондаренко В. И., Филимонов Ю. М., О применении линейного программирования к экстремальным задачам теории управления. Прикл. мат. и мех., 1968, 32, № 1, 147—153 (РЖМех, 1968, 10А181)
44. Бородовский М. Ю., Братусь А. С., Черноусько Ф. Л., Оптимальная и импульсная коррекция при случайных возмущениях. Прикл. мат. и мех., 1975, 39, вып. 5, 797—805
45. Брайсон Д., Хо Ю-ши, Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972, 544 с. (РЖМат, 1972, 9Б529К)
46. Братусь А. С., О численном решении одной модельной задачи управления движением в случайной среде. Космические исследования, 1971, 9, № 4, 527—530
47. —, Приближенное решение уравнения Беллмана для одного класса задач оптимального управления конечным состоянием. Прикл. мат. и мех., 1973, 36, вып. 3, 414—425
48. —, Метод приближенного решения уравнения Беллмана для задач оптимального управления системой, подверженной случайным возмущениям. Прикл. мат. и мех., 1975, 39, вып. 2, 235—245 (РЖМех, 1975, 8А169)
49. —, Черноусько Ф. Л., Численное решение задач оптимальной коррекции при случайных возмущениях. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1974, 14, № 1, 68—78 (РЖМат, 1974, 6Б1196)
50. Будак Б. М., Беркович Е. М., Разностные аппроксимации для задач оптимального управления с подвижными концами при наличии фазовых ограничений. I. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1969, № 6, 59—68 (РЖМат, 1970, 3Б805)
51. —, —, Разностные аппроксимации для задач оптимального управления с подвижными концами при наличии фазовых ограничений. II. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1970, № 1, 39—47 (РЖМат, 1970, 6Б582)
52. —, —, Разностные аппроксимации для задач оптимального управления с подвижными концами при наличии фазовых ограничений. III. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1970, № 3, 23—32 (РЖМат, 1970, 10Б523)
53. —, —, Об аппроксимации экстремальных задач. I, II. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1971, 11, № 3, 580—596, № 4, 870—884 (РЖМат, 1971, 11Б695, 12Б739)
54. —, —, Соловьева Е. Н., О разностных аппроксимациях в задачах оптимального управления. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1968, № 2, 41—55 (РЖМат, 1968, 11Б442)
55. —, —, —, О разностных аппроксимациях в задачах оптимального управ-

ления. В сб. «Вычисл. методы и программир.», вып. 12. М., Моск. ун-т, 1969, 115—134 (РЖМат, 1970, 1Б524
56. —, —, —, О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления. В сб. «Вычисл. методы и программир.», вып. 12. М., Моск. ун-т, 1969, 135—142 (РЖМат, 1970, 1Б525)
57. —, Васильев Ф. П., Приближенные методы решения задач оптимального управления (тексты лекций), I, II. М., Моск. ун-т, 1969, 304 с., 299 с.
58. —, —, Гапоненко Ю. Л., О построении сильно сходящейся минимизирующей последовательности для непрерывного выпуклого функционала. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1969, **9**, № 2, 286—299 (РЖМат, 1969, 9Б364)
59. —, Голубцов Е. Е., О методе штрафных функций для решения задач оптимального управления. В сб. «Вычисл. методы и программир.», вып. 12. Изд-во Моск. ун-та, 1969, 143—150 (РЖМат, 1970, 1Б523)
60. **Букреев В. З.**, Об одном методе приближенного синтеза оптимального управления. Автоматика и телемеханика, 1968, № 11, 5—13
61. **Бутковский А. Г.**, Некоторые приближенные методы решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1961, **22**, № 12, 1565—1575 (РЖМех, 1962, 6А129)
62. —, Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965, 474 с.
63. **Вайсборд Э. М.**, Об одном приближенном методе синтеза оптимального управления. Автоматика и телемеханика, 1963, **24**, № 12, 1626—1632 (РЖМат, 1964, 6В351)
64. —, Метод последовательного проектирования для приближенного решения одной задачи оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, **6**, № 6, 971—980 (РЖМат, 1967, 4Б341)
65. **Васильев В. В.**, Наближений метод розв'язання деяких варіаційних задач з «локальними» функціоналами. Вісник АН УРСР, 1974, № 11, 15—18 (РЖМат, 1975, 5Б1192)
66. **Ватель И. А.**, Кононенко А. Ф., Об одной численной схеме решения задач оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1970, **10**, № 1, 67—73 (РЖМат, 1970, 6Б583)
67. **Величенко В. В.**, Численный метод решения задач оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, **6**, № 4, 635—647 (РЖМат, 1966, 12Б452)
68. —, О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями. Автоматика и телемеханика, 1966, № 7, 20—30 (РЖМат, 1967, 1Б251)
69. **Власова З. А.**, Метод сеток для нелинейной одномерной вариационной задачи. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1962, **66**, 196—204 (РЖМат, 1963, 4Б324)
70. **Волин Ю. М.**, Островский Г. М., Об одной оптимальной задаче. Автоматика и телемеханика, 1964, **25**, № 10, 1414—1420 (РЖМех, 1965, 6А103)
71. —, —, О методе последовательных приближений расчета оптимальных режимов некоторых систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1965, **26**, № 7, 1197—1204 (РЖМат, 1966, 1Б384)
72. **Габасов Р.**, Кириллова Ф. М., Построение последовательных приближений для некоторых задач оптимального управления. Автоматика и телемеханика, 1966, № 2, 5—17 (РЖМат, 1966, 9Б393)
73. —, —, Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1971, 507 с.
74. —, —, Современное состояние теории оптимальных процессов. Автоматика и телемеханика, 1972, № 9, 31—62
75. **Гиндес В. Б.**, Один метод последовательных приближений для решения линейных задач оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1970, **10**, № 1, 216—223 (РЖМат, 1970, 6Б579)

76. **Гноенский Л. С.,** Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э., Математические основы теории управляемых систем. М., «Наука», 1969, 512 с. (РЖМат, 1970, 4Б342К)
77. —, Мовшович С. М., О применении методов математического программирования к задаче оптимального регулирования. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1964, № 5, 16—29 (РЖМех, 1965, 6А100)
78. **Гонейм М. А.,** Бернхольц Б., Прямой метод оптимизации нелинейных управляемых систем. Тр. III Межд. конгресса Межд. Федерации по автомат. управлению, 1966, Оптимальн. системы. Стат. методы. М., «Наука», 1971, 89—100 (РЖМат, 1971, 7Б593)
79. **Гончарова Н. Ф.,** Савицкий Я. З., Непараметрический метод штрафа в задачах оптимального управления. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1971, № 5, 14—19 (РЖМат, 1972, 2Б546)
80. **Гродзовский Г. Л.,** Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Механика космического полета с малой тягой. М., «Наука», 1966, 679 с.
81. **Демьянов В. Ф.,** Построение программного управления в линейной системе, оптимального в интегральном смысле. Прикл. мат. и мех., 1963, **27**, № 3, 554—558 (РЖМех, 1963, 11А136)
82. —, К построению оптимальной программы в линейной системе. Автоматика и телемеханика. 1964, **25**, № 1, 3—11 (РЖМат, 1964, 10В196)
83. —, Решение некоторых экстремальных задач. Автоматика и телемеханика, 1965, **26**, № 7, 1153—1160 (РЖМат, 1966, 1Б373)
84. —, Мышков С. К., К решению некоторых оптимальных задач в нелинейных системах автоматического регулирования. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1966, № 2, 149—155 (РЖМат, 1966, 9Б394)
85. —, К минимизации максимального уклонения. Вестн. Ленингр. ун-та, 1966, № 7, 21—28 (РЖМат, 1966, 9Б391)
86. —, Рубинов А. М., Приближенные методы решения экстремальных задач. Изд-во Ленингр. ун-та, 1968, 180 с. (РЖМат, 1969, 5Б592К)
87. **Дерендяев И. М.,** Приближенное построение допустимых управлений. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1966, № 1, 56—63 (РЖМат, 1966, 7Б214)
88. **Дубовицкий А. Я.,** Рубцов В. А., Линейные быстродействия. Ж. вычисл. мат и мат. физ., 1968, **8**, № 5, 937—949 (РЖМат, 1969, 3Б608)
89. **Евтушенко Ю. Г.,** Приближенный расчет задач оптимального управления. Прикл. мат. и мех., 1970, **34**, № 1, 95—104 (РЖМат, 1970, 7Б582)
90. **Егоров В. А.,** О решении одной вырожденной вариационной задачи и оптимальном подъеме космической ракеты. Прикл. мат. и мех., 1958, **22**, вып. 1, 3—15
91. **Единович А. А.,** Применение метода второго порядка к решению задач оптимального уравнения. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1970, **10**, № 5, 1141—1149 (РЖМат, 1971, 2Б638)
92. **Емельянов С. В.** (ред.), Теория систем с переменной структурой. М., «Наука», 1970, 592 с.
93. **Ермольев Ю. М.,** Об одной задаче программного управления случайным процессом. Кибернетика, 1972, № 1, 79—81 (РЖМат, 1972, 6В59)
94. —, Гуленко В. П., О численных методах решения задач оптимального управления. Кибернетика, 1966, № 1, 72—78 (РЖМат, 1966, 8В190)
95. —, —, Конечно разностный метод в задачах оптимального управления. Кибернетика, 1967, № 3, 1—20 (РЖМат, 1968, 5Б561)
96. **Завьялов Ю. С.,** О решении задач оптимизации динамических систем методами нелинейного программирования. В сб. «Вычисл. системы», вып. 27. Новосибирск, «Наука», 1967, 3—13 (РЖМат, 1968, 10Б505)
97. **Зубов В. И.,** Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л., «Судостроение», 1966, 352 с.
98. —. Лекции по теории управления. М., «Наука», 1975, 495 с.
99. **Иванов К. Б.,** Почти оптимальное управление одним классом нелинейных динамических систем. Космические исследования, 1967, **5**, № 4, 508—616 (РЖМех, 1968, 2А142)

100. **Иванов Ю. Н.**, Ступенчатая аппроксимация оптимальных управлений. Прикл. мат. и мех., 1964, **28**, № 3, 528—533 (РЖМат, 1965, 1Б397)
101. —, Токарев В. В., Шалаев Ю. В., Оптимальные траектории и оптимальные параметры космических аппаратов с двигателями ограниченной мощности. Космические исследования, 1964, **2**, № 3, 414—432 (РЖМех, 1965, 1А50)
102. —, Шалаев Ю. В., Метод скорейшего спуска в применении к расчету межорбитальных траекторий с двигателями ограниченной мощности. Космические исследования, 1964, **2**, № 3, 433—440 (РЖМех, 1965, 1А51)
103. **Ильин В. А.**, Переход космического аппарата, тормозящегося в атмосфере планеты, на орбиту искусственного спутника. Инж. журнал, 1963, 3, № 2, 203—206
104. **Иманалиев М. И.**, Какишов К. Б., К теории оптимальных систем с последействием. Прикл. мат. и мех., 1964, **28**, № 3, 534—536 (РЖМех, 1965, 1А164)
105. **Исаев В. К.**, Сонин В. В., Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, 3, № 6, 1114—1116 (РЖМат, 1964, 9Б508)
106. —, —, Вычислительные аспекты задачи об оптимальном перелете как краевой задачи. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, **5**, № 2, 252—261 (РЖМат, 1965, 9Б439)
107. **Кадиев О. П.**, О применении градиентного метода в задачах оптимального управления при наличии параметров. Тр. НИИ прикл. мат. и мех. при Томск. ун-те, 1974, **5**, 92—97 (РЖМех, 1975, 6А232)
108. **Казаков И. Е.**, Обобщение метода статистической линеаризации на многомерные системы. Автоматика и телемеханика, 1965, **26**, № 7, 1210—1215 (РЖМат, 1966, 3В151)
109. **Казбан А. М.**, Прямой метод в пространстве состояний в задачах оптимального управления. Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та, 1971, **4**, 84—91, (РЖМат, 1972, 5Б633)
110. **Калинин В. Н.**, К теории приближенного синтеза оптимальных управлений. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1964, № 5, 39—44 (РЖМех, 1965, 6А101)
111. **Канторович Л. В.**, Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала. Докл. АН СССР, 1945, **48**, № 7, 483—487
112. —, О методе наискорейшего спуска. Докл. АН СССР, 1947, **56**, № 3, 233—236
113. —, О методе Ньютона. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, **28**, 104—144
114. **Карпенко М. Ф.**, Итерационный метод отыскания оптимальных управлений. В сб. «Кибернетика и техн. вычисл.». Киев, «Наук. думка», 1964, 148—157 (РЖМат, 1966, 1Б394)
115. **Кирин Н. Е.**, Об одном численном методе в задаче о линейных быстродействиях. В сб. «Методы вычислений». Вып. 2. Л., Ленингр. ун-т, 1963, 67—74 (РЖМат, 1964, 6В352)
116. —, К решению общей задачи линейного быстродействия. Автоматика и телемеханика, 1964, **25**, № 1, 16—22 (РЖМат, 1964, 10В195)
117. —, Вычислительные методы теории оптимального управления. Л., Ленингр. ун-т. 1968, 143 с.
118. **Клестов Е. А.**, Сиразетдинов Т. К., Метод распределенных моментов в задачах оптимального быстродействия. Тр. Казан. авиац. ин-та, 1971, вып. 130, 33—41 (РЖМат, 1971, 11Б680)
119. **Кожевников Ю. В.**, Решение одной оптимальной задачи динамики точки переменной массы методом скорейшего спуска. Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1964, № 1, 11—17 (РЖМех, 1965, 1А106)
120. —, К оптимизации управляемых систем со случайными параметрами. Прикл. мат. и мех., 1964, **28**, № 3, 537—541 (РЖМат, 1965, 2Б457)
121. **Колмановский В. Б.**, Об аппроксимации линейных управляемых систем с последействием. Проблемы управл. и передачи информации, 1974, 3, № 1, 63—76

122. —, Оптимальное управление некоторыми нелинейными системами с малым параметром. Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 9, 1584—1595
123. —, Применение метода возмущений к некоторым задачам оптимального управления. Прикл. мат. и мех., 1975, **39**, вып. 5, 788—797
124. —, О приближенном синтезе некоторых стохастических квазилинейных систем. Автоматика и телемеханика, 1975, № 1, 51—58
125. —, Об оптимальном управлении некоторыми квазилинейными стохастическими системами. Прикл. мат. и мех., 1975, **39**, вып. 4, 724—727
126. —, Майзенберг Т. Л., Оптимальное управление стохастическими системами с последействием. Автоматика и телемеханика, 1973, № 1, 47—61
127. —, Черноусько Ф. Л., Задачи оптимального управления при неполной информации. Тр. IV зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам в г. Дрогобыче. М., «Наука», 1971, 5—120
128. **Колосов Г. Е.**, Стратонович Р. Л., Об одном асимптотическом методе решения задач синтеза оптимальных регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1964, **25**, № 12, 1641—1655 (РЖМат, 1965, 5Б418)
129. —, —, Об оптимальном управлении квазигармоническими системами. Автоматика и телемеханика, 1965, **26**, № 4, 601—614 (РЖМат, 1965, 11Б334)
130. —, —, Асимптотический метод решения статистических задач оптимального управления квазигармоническими системами. Автоматика и телемеханика, 1967, № 2, 45—58 (РЖМех, 1967, 10А144)
131. **Коробов В. И.**, О сходимости одного варианта метода динамического программирования для задачи оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1968, **8**, № 2, 429—435 (РЖМат, 1968, 11Б419)
132. **Красовский А. А.**, Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М., «Наука», 1968, 240 с.
133. —, Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М., «Наука», 1974, 232 с.
134. **Красовский Н. Н.**, Приближенные методы построения оптимального управления в задаче об оптимальном быстродействии для систем, подверженных случайным возмущениям. Прикл. мат. и мех., 1960, **24**, вып. 1, 64—79
135. —, О приближенном вычислении оптимального управления прямым методом. Прикл. мат. и мех., 1960, **24**, № 2, 271—276 (РЖМех, 1962, 9А134)
136. —, Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием времени. Прикл. мат. и мех., 1964. **28**, № 4, 319—326 (РЖМат, 1965, 1Б391)
137. —, Оптимальное управление в обыкновенных динамических системах. Успехи мат. наук, 1965, **20**, № 3, 153—174 (РЖМат, 1966, 2Б459)
138. —, Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение к кн. И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения». М., «Наука», 1966, 475—514
139. —, Теория оптимальных управляемых систем. В сб. «Механика в СССР за 50 лет». М., 1968, **1**, 179—244 (РЖМат, 1969, 8Б315)
140. —, Теория управления движением. М., «Наука», 1968, 475 с.
141. —, Гаврилов М. А., Летов А. М., Пугачев В. С., Общие проблемы управления. Вестн. АН СССР, 1970, № 8, 10—25
142. —, Лидский Э. А., Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах при ограничениях на скорость изменения управляющего воздействия. Прикл. мат. и мех., 1961, **25**, вып. 3, 420—432 (РЖМат, 1962, 1В254)
143. —, —, Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. Автоматика и телемеханика, 1961, **22**, № 9—11, 1145—1150, 1273—1278, 1425—1431
144. —, Моисеев Н. Н., Теория оптимальных управляемых систем. Техн. кибернетика, 1967, № 5, 14—27 (РЖМат, 1968, 7Б465)

145. **Кротов В. Ф.**, Приближенный синтез оптимального управления. Автоматика и телемеханика, 1964, **25**, № 11, 1521—1527 (РЖМат, 1965, 5Б436)
146. —, Букреев В. З., Гурман В. И., Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М., «Машиностроение», 1969, 288 с.
147. —, Гурман В. И., Методы и задачи оптимального управления. М., «Наука», 1973, 446 с.
148. **Крылов И. А.**, Численное решение задачи об оптимальной стабилизации спутника. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1968, 8, № 1, 203—208 (РЖМат, 1968, 7Б650)
149. —, Черноусько Ф. Л., О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, **2**, № 6, 1132—1139 (РЖМат, 1963, 6В275)
150. —, —, Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, **6**, № 2, 203—217 (РЖМат, 1966, 8Б344)
151. —, —, Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1972, **12**, № 1, 14—34 (РЖМат, 1972, 5Б630)
152. **Кузин В. А.**, Численные методы решения одномерных задач оптимизации. В сб. «Мат. пробл. химии». Новосибирск, 1970, 33—47 (РЖМат, 1971, 5Б1031)
153. **Кузмак Г. Е.**, Исаев В. К., Давидсон Б. Х., Оптимальные режимы движения точки переменной массы в однородном центральном поле. Докл. АН СССР, 1963, **149**, № 1, 58—61 (РЖМат, 1963, 9В271)
154. **Кузнецов А. Г.**, Черноусько Ф. Л., Об оптимальном управлении, минимизирующем экстремум функции фазовых координат. Кибернетика, 1968, № 3, 50—55 (РЖМат, 1969, 4Б443)
155. **Куржанский А. Б.**, О вычислении оптимального управления в системе с неполной информацией. Дифференц. уравнения, 1965, **1**, № 3, 360—373 (РЖМат, 1965, 8В282)
156. —, Осипов Ю. С., К задачам об управлении при стесненных координатах. Прикл. мат. и мех., 1969, **33**, № 4, 705—719 (РЖМат, 1970, 4Б542)
157. **Ларин В. Б.**, Науменко К. И., Сунцев В. Н., Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью. Киев, «Наук. думка», 1973
158. **Ларичев О. И.**, Субоптимальное по быстродействию управление одной системой со связью по ограничению. Автоматика и телемеханика, 1968, № 2, 41—51 (РЖМат, 1968, 10Б506)
159. —, Перельман И. И., О субоптимальном управлении многосвязными системами со связью по управляющим воздействиям. Автоматика и телемеханика, 1964, **25**, № 1, 41—53 (РЖМат, 1965, 5Б421)
160. **Лебедев В. Н.**, Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1967, 108 с.
161. —, Румянцев Б. Н., Вариационная задача о перелете между двумя точками в центральном поле. В сб. «Искусственные спутники Земли», Изд-во АН СССР, 1963, № 16
162. **Левитин Е. С.**, Поляк Б. Т., О сходимости минимизирующих последовательностей в задачах на условный экстремум. Докл. АН СССР, 1966, **168**, № 5, 997—1000 (РЖМат, 1966, 11Б355)
163. **Леондес С. Т.** (ред), Современная теория управления. М., «Наука», 1970, 512 с.
164. **Леонов В. В.**, О численном решении с помощью метода Л. С. Понтрягина одного класса задач на оптимум. Кибернетика, 1965, № 6, 75—80 (РЖМат, 1966, 10Б451)
165. **Леончук М. П.**, О численном решении задач оптимальных процессов с распределенными параметрами. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, **4**, № 6, 1112—1117 (РЖМат, 1965, 5Б434)
166. **Лейтман Дж. (ред.)**, Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. М., «Наука», 1965, 538 с. (РЖМат, 1965, 8Б378К)

167. —, Введение в теорию оптимального управления. М., «Наука», 1968, 190 с. (РЖМат, 1968, 11Б444К)
168. **Летов А. М.**, Проблематика научных исследований в области автоматического управления. Автоматика и телемеханика, 1966, № 8, 167 с.
169. —, Динамика полета и управление. М., «Наука», 1969, 359 с.
170. —, Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления. Синтез асимптотически устойчивых систем. Ч. I. Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 4, 592—615 (РЖМат, 1970, 9Б397)
171. **Лидов М. А.**, К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов. Космические исследования, 1964, **2**, № 5, 713—715
172. —, Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траекторий и выбора состава измерений и алгоритмы их решения. Космические исследования, 1971, **9**, № 5, 688—706
173. —, Лукьянов С. С., Задача о времени движения точки в области при случайных ошибках управления. Космические исследования, 1971, **9**, № 5, 707—722
174. **Лидский Э. А.**, Об аналитическом конструировании регуляторов в системах со случайными свойствами. Прикл. мат. и мех., 1962, **26**, № 2, 259—266 (РЖМат, 1963, 9В264)
175. **Литовченко И. А.**, Теория оптимальных систем. В сб. «Мат. анализ. Теория вероятностей. Регулирование 1962. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1964, 155—196 (РЖМат, 1964, 11Б350)
176. **Лурье А. И.**, Минимальный квадратичный критерий качества регулируемой системы. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1963, № 4, 140—146
177. **Людвиченко В. А.**, К применению прямых вариационных методов для решения задач оптимального управления. «Вычисл. и прикл. мат. Межвед. науч. сб.», 1971, вып. 13, 99—107 (РЖМат, 1971, 8Б444)
178. **Майзенберг Т. Л.**, Метод возмущений в задачах оптимального управления нелинейными системами. Автоматика и телемеханика, 1975, № 10, 26—35
179. **Масько Э. С.**, Островский Г. М., О расчете оптимальных систем. Автоматика и телемеханика, 1965, **26**, № 12, 2131—2136 (РЖМат, 1966, 6Б380)
180. **Медведев В. С.**, Ющенко А. С., Численный метод оптимизации систем автоматического управления по критерию максимума вероятности достижения заданного состояния. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1975, № 1, 149—153 (РЖМат, 1975, 6Б1185)
181. **Мельц И. О.**, Применение методов нелинейного программирования для оптимизации динамических систем в функциональном пространстве. Автоматика и телемеханика, 1968, № 1, 79—85 (РЖМат, 1968, 11Б462)
182. —, Учет ограничений в задаче оптимизации динамических систем в функциональном пространстве на основе методов нелинейного программирования. Автоматика и телемеханика, 1968, № 3, 30—36 (РЖМат, 1968, 11Б463)
183. **Мерриэм К. У.**, Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. М., «Мир», 1967, 549 с.
184. **Миками Т.**, Итерационный метод решения задач оптимального по времени управления. Тр. III Межд. конгресса Межд. федерации по автомат. управлению, 1966. Оптимальн. системы. Стат. методы. М., «Наука», 1971, 123—128 (РЖМат, 1971, 6Б876)
185. **Мильштейн Г. Н.**, Применение последовательных приближений для решения одной оптимальной задачи. Автоматика и телемеханика, 1964, **25**, № 3, 321—329 (РЖМат, 1964, 11Б355)
186. **Михалевич В. С.**, Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. I. Последовательные правила для опытов с детерминированными исходами. II. Кибернетика, 1965, № 1, 45—56; № 2, 85—89 (РЖМат, 1966, 1В96, 5В68)

187. — (ред.), Теория оптимальных решений. Сб. статей. Киев, 1972
188. —, Ермольев Ю. М., Шкурба В. В., Шор Н. З., Сложные системы и решение оптимальных задач. Кибернетика, 1967, № 5, 29—39 (РЖМат, 1968, 4В404)
189. —, Шор Н. З., О численных методах решения многовариантных плановых и технико-экономических задач. Научно-методические материалы экономико-математического семинара. Киев, ВЦ АН УССР, 1962
190. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Об одной статистической задаче оптимального управления. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, 25, № 4, 477—498 (РЖМат, 1962, 12Б215)
191. Моисеев Н. Н., Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений. I. Системы, допускающие использование шкалы управлений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, 4, № 3, 485—494; II. Общий случай аддитивных функционалов. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, 5, № 1, 44—56 (РЖМат, 1964, 12Б373; 1965, 9Б328)
192. —, Численные методы теории оптимальных управлений, использующие вариации в пространстве состояний. Кибернетика, 1966, № 3, 1—29 (РЖМат, 1967, 1Б501)
193. —, Численные методы, использующие вариацию в пространстве состояний. Тр. Межд. конгресса математиков, 1966. М., «Мир», 1968, 602—626 (РЖМат, 1969, 2Б517)
194. —, Численные методы теории оптимального управления. Изд-во ВЦ АН СССР, 1968, 161 с.
195. —, Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969, 379 с. (РЖМат, 1970, 2Б321К)
196. —, Численные методы в теории оптимальных систем. М., «Наука», 1971, 424 с. (РЖМат, 1972, 5Б645К)
197. —, Элементы теории оптимальных систем. М., «Наука», 1975, 528 с. (РЖМат, 1975, 8Б627К)
198. Мороз А. И., К задаче синтеза оптимального по времени управления для дискретных объектов. Автоматика и телемеханика, 1966, № 11, 52—63 (РЖМех, 1967, 6А124)
199. Мышков С. К., Оптимальная стабилизация программных движений Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., 1967, 19, № 4, 104—113 (РЖМат, 1968, 9Б417)
200. Нарожный И. И., Сочетание градиентного метода и уравнений Эйлера для оптимизации траекторий летательных аппаратов. Вестн. Ленингр ун-та, 1971, № 13, 118—125 (РЖМех, 1972, 1А72)
201. —, Применение комбинации градиентного метода и уравнений Эйлера для оптимизации траекторий аппаратов малой тяги. Вестн. Ленингр. ун-та, 1972, № 1, 116—123 (РЖМех, 1972, 6А77)
202. Небеснов В. И., Плотников В. А., Кузюшин А. Я., Оптимальное управление ВРШ на волнении. М., «Пищевая промышленность». 1974
203. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М., «Наука», 1972
204. Непомящий П. А., Применение метода штрафных функций к решению задач оптимального управления. В сб. «Вопр. точности и эффективн. вычисл. алгоритмов». Тр. симпозиума. Киев, 1969, 4, 76—93 (РЖМат, 1970, 5Б491)
205. —, Об одном из способов решения задачи на быстродействие. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1971, 11, № 1, 79—95 (РЖМат, 1971, 6Б556)
206. Новоселов В. С., Теория приближенного решения вариационных задач и ее приложения к исследованию движения точки переменной массы Вестн. Ленингр. ун-та, 1965, № 1, 110—120 (РЖМат, 1965, 10Б260)
207. Орлов В. С., Поляк Б. Т., Ребрий В. А., Третьяков Н. В., Опыт решения задач оптимального управления. В сб. «Вычисл. методы и программир.», вып. 9. М., Моск. ун-т, 1967, 179—192 (РЖМат, 1968, 8Б544)

208. **Островский Г. М.**, Об одном методе решения вариационных задач Автоматика и телемеханика, 1962, 23, № 10, 1284—1289 (РЖМат, 1963, 6Б326)
209. —, Об одном методе расчета оптимальных систем. Автоматика и телемеханика, 1965, **26**, № 3, 435—442 (РЖМат, 1965, 10Б247)
210. —, Волин Ю. М., Малкин И. И., Об одном методе решения оптимальных задач с краевыми условиями. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1965, № 6, 146—151 (РЖМат, 1966, 8Б360)
211. **Охоцимский Д. Е.**, К теории движения ракет. Прикл. мат. и мех., 1946, **10**, вып. 2, 251—272
212. —, Рясин В. А., Ченцов Н. Н., Оптимальная стратегия при корректировании. Докл. АН СССР, 1967, **175**, № 1, 47—50 (РЖМат, 1967, 11В107)
213. —, Энеев Т. М., Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. Успехи физ. наук, 1957, **13**, № 1а, 5—32 (РЖМат, 1958, 6832)
214. **Пашинцев В. Т.**, Об одном методе последовательных приближений оптимизации управления. Ученые записи ЦАГИ, 1970, **1**, № 6, 142—150 (РЖМат, 1971, 12Б746)
215. **Первозванский А. А.**, Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М., Физматгиз, 1962, 351 с. (РЖМат, 1963, 7В328К)
216. —, О минимуме максимального отклонения управляемой линейной системы. Изв. АН СССР. Мех., 1965, № 2, 51—57 (РЖМех, 1965, 9А137)
217. **Петров Ю. П.**, Вариационные методы теории оптимального управления. М.—Л., «Энергия», 1965, 220 с. (РЖМат, 1966, 11Б380К)
218. **Плант Дж. Б.**, Этанс М., Итерационный метод нахождения оптимального по времени управления. Тр. III Межд. конгресса Межд. федерации по автомат. управлению, 1966. Оптимальн. системы. Стат. методы. М., «Наука», 1971, 129—141 (РЖМат, 1971, 6Б877)
219. **Подвальный Л. Д.**, Об одном численном методе решения задачи оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1969, **9**, № 2 300—314 (РЖМат, 1969, 7Б622)
220. **Полак Э.**, Численные методы оптимизации. Единый подход. М., «Мир», 1974, 376 с. (РЖМат, 1975, 4Б1238К)
221. **Поляк Б. Т.**, Градиентные методы минимизации функционалов. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, **3**, № 4, 643—653 (РЖМат, 1964, 2Б462)
222. —, Один общий метод решения экстремальных задач. Докл. АН СССР, 1967, **174**, № 1, 33—36 (РЖМат, 1967, 9Б371)
223. —, К теории нелинейных задач оптимального управления. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1968, № 2, 30—40 (РЖМат, 1968, 11Б435)
224. —, Метод сопряженных градиентов. Тр. II зимней школы по мат. программир. и смежным вопросам. М., вып. 1, 1969, 152—201 (РЖМат. 1970, 9Б379)
225. —, О скорости сходимости метода штрафных функций. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1971, **11**, № 1, 3—11 (РЖМат, 1971, 7Б857)
226. —, Методы минимизации при наличии ограничений. В сб. «Мат. анализ (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1974, **12**, 147—197
227. **Пономарев В. М.**, Метод последовательной оптимизации в задачах управления. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1967, № 2, 3—8 (РЖМат, 1967, 10Б499)
228. —, Теория управления движением космических аппаратов. М., «Наука», 1965, 455 с.
229. **Понтрягин Л. С.**, Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969, 384 с. (РЖМат, 1970, 1Б529К)
230. Потапова А. Ф., Об ускорении сходимости метода скорейшего спуска. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1971, **11**, № 3, 749—752 (РЖМат, 1971, 10Б728)

231. **Пропой А. И.**, Методы возможных направлений в задачах оптимального дискретного управления. Автоматика и телемеханика, 1967, № 2, 69—79 (РЖМат, 1967, 8Б420)
232. **Пугачев В. С.**, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962, 883 с. (РЖМат, 1963, 7В233К)
233. **Пшеничный Б. Н.**, Численный метод расчета оптимального по быстродействию управления для линейных систем. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, **4**, № 1, 52—60 (РЖМат, 1964, 10В201)
234. —, Численный метод решения некоторых задач оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, **4**, № 2, 292—305 (РЖМат, 1964, 11В221)
235. —, Об одном алгоритме для решения нелинейной задачи оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, **5**, № 2, 236—241 (РЖМат, 1966, 1Б392)
236. —, Численные методы в линейных задачах оптимального управления. В сб. «Сложные системы управления». Киев, «Наук. думка», 1966, 52—60 (РЖМат, 1967, 4Б355)
237. —, Численные методы в линейных задачах оптимального управления. В сб. «Оптимальные системы. Статист. методы». М., «Наука», 1967, 50—56 (РЖМат, 1968, 5Б560)
238. —, Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах. М., «Наука», 1975, 320 с. (РЖМат, 1975, 6Б1343К)
239. **Рабинович А. В.**, Об одном классе методов итерационного решения задач быстродействия. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, **6**, № 3, 433—445 (РЖМат, 1966, 11Б375)
240. **Райк Э. В.**, О корректности применения метода штрафных функций. В сб. «Поиск экстремума». Томск, Томск. ун-т, 1969, 253—260 (РЖМат, 1970, 6Б575)
241. **Распопов Б. М.**, Приближенный метод решения некоторых задач оптимального управления процессами тепло- и массопереноса. В сб. «Материалы I конференции молодых ученых АН Кирг. ССР, 1965». Фрунзе, «Илим», 1970, 190—193 (РЖМех, 1971, 7А194)
242. **Репин Ю. М.**, Третьяков В. Е., Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах. Автоматика и телемеханика, 1963, **24**, № 6, 738—744 (РЖМат, 1964, 2В185)
243. **Розоноэр Л. И.**, Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I—III. Автоматика и телемеханика, 1959, **20**, № 10, 1320—1334; № 11, 1441—1458; № 12, 1561—1578
244. **Ройтенберг Я. Н.**, Некоторые задачи управления движением. М., Физматгиз, 1963, 140 с. (РЖМат, 1964, 10В180К)
245. **Рясин В. А.**, Оптимальный выбор моментов времени и величин импульсов корректирующих маневров в зависимости от результатов траекторий изменений. Теория вероятностей и ее применения, 1975, **20**, № 3, 515—526
246. **Сиразетдинов Т. К.**, Метод последовательного спуска для оптимизации систем с распределенными параметрами. В сб. «Материалы I Поволж. конференции по автомат. управлению. Кн. I». Казань, 1971, 5—19 (РЖМат, 1971, № 11, 11Б675)
247. **Смольников Л. П.**, Синтез квазиоптимальных систем автоматического управления. Л., «Энергия», 1967, 168 с.
248. **Соболенко Л. А.**, Метод линеаризации в применении к решению задачи оптимального управления. В сб. «Научн. конф. Вычисл. мат. в современном научно-техн. прогрессе, 1974», вып. 2. Канев, 1974, 193—200 (РЖМат, 1975, 6Б746)
249. **Соляник А. И.**, Черноусько Ф. Л., Приближенный метод синтеза оптимального управления системой, подверженной случайным возмущениям. Прикл. мат. и мех., 1972, **36**, № 5, 829—839 (РЖМат, 1973, 3Б587)

250. **Срочко В. А.**, Градиентный метод решения одного класса задач быстродействия. Тр. Иркутского ун-та, 1969, **64**, 101—108 (РЖМат, 1970, 6Б577)
251. **Стансил Р.**, Модификация метода наискорейшего спуска для оптимизации траекторий летательных аппаратов. Ракетная техн. и космонавтика, 1964, **2**, № 8, 7—14
252. **Стратонович Р. Л.**, К теории оптимального управления. Асимптотический метод решения диффузионного альтернативного уравнения. Автоматика и телемеханика, 1962, **23**, № 11, 1439—1447 (РЖМех, 1963, 5А124)
253. **Талызин В. А.**, Градиентный метод со сверхпамятью в пространстве управлений. Тр. Казан. авиац. ин-та, 1971, № 135, 34—42 (РЖМат, 1972, 4Б736)
254. **Тарасов Е. В.**, Оптимальные режимы полета летательных аппаратов. М., Оборонгиз, 1963, 248 с.
255. **Тихонов А. Н.**, О методах регуляризации задач оптимального управления. Докл. АН СССР, 1965, **162**, № 4, 763—765 (РЖМат, 1965, 12Б416)
256. —, Галкин В. Я., Заикин П. Н., О прямых методах решения задач оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, **7**, № 2, 416—423 (РЖМат, 1967, 9Б381)
257. **Троицкий В. А.**, О вариационных задачах оптимизации процессов управления. Прикл. мат. и мех., 1962, **26**, № 1, 29—38 (РЖМат, 1962, 8Б328)
258. **Трухаев Р. И.**, Хоменюк В. В., Методы учета ограничений в вариационных задачах. Уч. зап. Ленингр. ун-та, 1969, № 68, 29—46 (РЖМат, 1969, 12Б530)
259. —, —, Теория неклассических вариационных задач. Л., Ленингр. ун-т, 1971, 167 с. (РЖМат, 1971, 7Б634К)
260. **Федоренко Р. П.**, Приближенное решение некоторых задач оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, **4**, № 6, 1045—1064 (РЖМат, 1965, 5Б435)
261. —, К обоснованию метода вариаций в фазовом пространстве для численного решения задач оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1969, **9**, № 6, 1396—1402 (РЖМат, 1970, 4Б553)
262. —, Приближенное решение вариационных задач с недифференцируемыми функционалами. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1971, **11**, № 2, 348—364 (РЖМат, 1971, 8Б454)
263. **Фельдбаум А. А.**, Основы теории оптимальных автоматических систем. М., «Наука», 1966, 623 с. (РЖМат, 1967, 1Б250К)
264. —, Бутковский А. Г., Методы теории автоматического управления. М., «Наука», 1971, 743 с.
265. **Хасьминский Р. З.**, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969, 367 с. (РЖМат, 1970, 6В94К)
266. **Хоменюк В. В.**, Градиентные методы оптимизации нелинейных систем автоматического регулирования. В сб. «Прикл. задачи техн. кибернетики», М., «Сов. радио», 1966, 307—316 (РЖМат, 1967, 6Б510)
267. **Царенко Т. И.**, Решение разностного аналога стохастической задачи Гурса методом проектирования стохастических градиентов. В сб. «Мат. методы исслед. и оптимиз. систем», Киев, 1971, 200—214 (РЖМат, 1972, 8В86)
268. **Цыпкин Я. З.**, Теория линейных импульсных систем. М., Физматгиз, 1963, 968 с. (РЖМат, 1964, 3В272К)
269. —, Адаптация и обучение в автоматических системах. М., «Наука», 1968, 399 с.
270. **Черенков А. П.**, Одна задача параметрического управления при малых случайных возмущениях. Теория вероятн. и ее применение, 1964, **9**, № 3, 539—541 (РЖМат, 1965, 4Б379)

271. **Черноусько Ф. Л.**, Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, **5**, № 4, 749—754 (РЖМат, 1966, 4Б326)
272. —, Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. Прикл. мат. и мех., 1968, **32**, № 1, 15—26 (РЖМат, 1968, 12Б534)
273. —, Автомодельные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции случайных возмущений. Прикл. мат. и мех., 1971, **35**, № 2, 333—342 (РЖМат, 1971, 11Б669)
274. —, Вычислительные методы оптимального управления. В сб. «Мат. на службе инженера. Основы теории оптимального управления». М., «Знание», 1973, 56—73
275. —, Баничук Н. В., Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М., «Наука», 1973, 238 с. (РЖМат, 1973, 10Б809К)
276. **Чупрун Б. Е.**, К решению оптимальных задач с использованием принципа максимума. Автоматика и телемеханика, 1967, № 9, 21—29 (РЖМат, 1968, 4Б551)
277. **Шатровский Л. И.**, Об одном численном методе решения задач оптимального управления. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, **2**, № 3, 488—491 (РЖМат, 1963, 6В273)
278. —, Метод постепенного улучшения управляющих функций и параметров в задачах оптимизации управления. В сб. «Прикл. задачи техн. кибернетики», М., «Сов. радио», 1966, 265—306 (РЖМат, 1967, 6В520)
279. **Шумунов Л. Н.**, О методе градиентов для одной оптимальной системы с распределенными параметрами. В сб. «Регулирование многосвязных систем», М., «Наука», 1967, 97—103 (РЖМат, 1968, 6Б613)
280. **Энеев Т. М.**, О применении градиентного метода в задачах оптимального управления. Космические исследования, 1966, **4**, № 5, 651—669 (РЖМех, 1967, 4А148)
281. **Юдин Д. Б.**, Математические методы управления в условиях неполной информации. (Задачи и методы стохастического программирования). М., «Сов. радио», 400 с. (РЖМат, 1975, 3В328К)
282. **Язвински А.**, Оптимальные траектории и линейное управление нелинейными системами. Ракетная техн. и космонавтика, 1964, **2**, № 8, 15—26
283. **Ярошевский В. А.**, Петухов С. В., Оптимальная однопараметрическая коррекция траекторий космических аппаратов. Космические исследования, 1970, **8**, № 4, 515—526
284. **Alford M. W.**, Lear C. W.,, A computational method for the optimization of multistage ballistic systems. AIAA Journal, 1966, **4**, № 9, 1668—1675 (РЖМех, 1967, 6А27)
285. **Anderson G. M.**, An indirect numerical method for the solution of a class optimal control problems with singular arcs. IEEE Trans. Automat. Control, 1972, **17**, № 3, 363—365 (РЖМат, 1972, 11Б680)
286. **Aoki Masanao**, On a successive approximation technique in solving some control system optimization problems. 1962 Joint Automat. Control Conf., New York. New York, 1962, **12/2** (РЖМат, 1963, 11В330)
287. —, On a successive approximation technique in solving some control system optimization problems. J. Math. Analys. and Applic., 1962, **5**, № 3, 418—434 (РЖМат, 1964, 6Б443)
288. —, On successive approximations to Lyapunov functions in control optimization problems. California Univ., Los Angeles, 1962, 23 pp. (РЖМат, 1965, 8Б379К)
289. **Athans M.**, The status of optimal control theory and applications for deterministic systems. IEEE Trans. Autom. Control, 1966, **11**, № 3, 580—596 (РЖМат, 1967, 6Б521)
290. **Auslender**, Méthodes du second ordre dans les problèmes d'optimisation avec contraintes. Rev. franç inform. et rech. operat., 1969, **3**, № R—2, 27—42 (РЖМат, 1970, 7Б579)
291. **Axelband E.**, An approximation technique for the optimal control of linear distributed parameter systems with bounded inputs. IEEE Trans. Automat. Control, 1966, **11**, № 1, 42—45 (РЖМат, 1966, 12Б333)

292. **Balakrishnan A. V.**, On a new computing technique in optimal control theory and the maximum principle. Proc. Nat. Acad. sci. USA, 1968, **59**, № 2, 373—375 (РЖМат, 1969, 2Б521)
293. —, On a new computing technique in optimal control. SIAM J. Control, 1968, **6**, № 2, 149—173 (РЖМат, 1969, 5Б871)
294. —, On a new computing technique in optimal control and its application to minimal-time flight profil optimization. J. Optimizat. Theory and Applicat., 1969, **4**, № 1, 1—21 (РЖМат, 1970, 5Б498)
295. — (ed), Computing Methods in Optimization Problems, New York, 1969, 327 pp.
296. —, Neustadt L. W. (eds), Computing Methods in Optimization Problems, Proc. Conf. Los Angeles, Jan. 30—31, 1964. New York—London, Acad. Press, 1964, X, 327 pp. (РЖМат, 1965, 2Б453К)
297. **Baldwin J. F.**, Williams J.H. Sims, The use of a method of perturbations in the synthesis of closed-loop optimal control laws for non-linear systems. Automatica, 1969, **5**, № 3, 1357—1367 (РЖМат, 1970, 3Б509)
298. **Barr R. O.**, Gilbert E. G., Some efficient algorithms for a class of abstract optimization problems arising in optimal control. IEEE Trans. Automat. Control, 1969, **14**, № 6, 640—652 (РЖМат, 1970, 11Б518)
299. **Bather J.**, Chernoff H., Sequential decisions in the control of a space-ship. Proceedings of the V Berkley Symposium on Mathematical Stat. and Probabil., 1967, **3**, 181—207
300. —, —, Sequential decisions in the control of a space ship (finite fuel). J. Appl. Probabil., 1967, **4**, № 3, 584—604 (РЖМат, 1968, 11В161)
301. **Bauman E. J.**, Leondes C. T., Niemann R. A., Paine G., Some recent results in aerospace vehicle trajectory optimization techniques. 18-th Internat. Astronaut. Congr., Belgrade, 1967. Proc. Vol. 1, Astrodynam. Guidance and Control, Miscellancea. Oxford et al., 1968, 199—231 (РЖМех, 1969, 10А20)
302. **Bell D. J.**, Optimal space trajectories — a review of published work. Aeronaut. J., 1968, **72**, № 686, 141—146 (РЖМех, 1968, 10А11)
303. **Bellman R.**, On the determination of optimal trajectories via dynamic programming. Optim. techn. applic. aerospace syst. New York—London, Acad. Press, 1962, 281—290 (РЖМат, 1963, 9Б356)
304. —(ed), Mathematical Optimization Techniques. University of California Press, Berkely and Los Angeles, 1963, xii, 346 pp. (РЖМат, 1964, 12Б367К)
305. —, Introduction to the mathematical theory of control processes, I, Linear equations and quadratic criteria. New York, Acad. Press, 1967, **XVI**, 245 pp. (РЖМат, 1969, 10Б419К)
306. —, A note on asymptotic control theory. J. Math. Anal. and Applic., 1969, **26**, № 2, 407—410 (РЖМат, 1969, 11Б464)
307. —, Bucy R., Asymptotic control theory. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1964, **A2**, № 1, 11—18 (РЖМат, 1965, 5Б420)
308. —, Kagiwada H., Kalaba R., A computational procedure for optimal system design and utilization. Proc. Nat. Acad. sci. USA, 1962, **48**, № 9, 1524—1528 (РЖМат, 1963, 7Б314)
309. **Benker H.**, Erfurth H., Numerische optimaler Systeme mit verteilten Parametern. Wiss. Z. Techn. Hochschule Chem. Lenna—Merseburg, 1969, **11**, № 3, 285—289 (РЖМат, 1970, 6Б564)
310. **Bensoussan A.**, Lions J. L., Control impulsionnel et inequations quasi-variationnel stationnaires. C. r. Acad. sci., 1973, **A276**, 1279
311. —, —, Controle impulsionnel et inequations quasi-variationnelles d'evolution. C. r. Acad. sci., 1973, **A276**, 1333
312. —, —, Sur l'approximation numerique d'inequations quasi-variationelles stationnaires. Lect. Not. Computer Sci., 1974, **11/2**, 325—338
313. **Betts J. T.**, Citron S. J., Approximate optimal control of distributed parameter systems. AIAA Journal, 1972, **10**, № 1, 19—23 (РЖМех, 1972, 9А125)

314. **Birta L. G.**, T r u s h e l J., The TEF Davidon—Fletcher—Powell method in the computation of optimal controls. 10-th Joint Automat. Control Conf. Amer. Automat. Control Council, Boulder, Colo, 1969, Prepr. techn. papers. New York, 1969, 259—269 (РЖМат, 1970, 9Б424)
315. **Braudaway G. W.**, OP-EX-an optimal explicit guidance algorithm for powered flight outside the atmosphere. AIAA Paper, 1968, № 869, 12 pp. (РЖМех, 1969, 5А24)
316. **Brusch R. G.**, S c h a p p e l l e R. H., Solution of highly constrained optimal control problems using nonlinear programming. AIAA Paper, 1970, № 964, 14 pp. (РЖМех, 1971, 3А204)
317. **Bryson A. E.**, D e n h a m W. F., A steepest-ashent method for solving optimum programming problems. Trans. ASME, 1962, **E29**, № 2, 247—257 (РЖМат, 1965, 7Б369)
318. **Butkovsky A. G.**, E g o r o v A. I., L u r i e K. A., Optimal control of distributed systems (A survey of Soviet Publications). SIAM J. Control, 1968, **6**, № 3, 437—476 (РЖМат, 1969, 5Б573)
319. **Campbell J. H.**, M o o r e W. E., W o l f H., A general method for selection and optimization of trajectories. Methods astrodynam. and celestial Mech., New York—London, Acad. Press, 1966, 355—375 pp. (РЖМех, 1967, 5А20)
320. **Canon M. D.**, C u l l u m C. D., P o l a k E., Theory of optimal control and mathematical programming. New York, McGrow Hill, 1970, **XII**, 285 pp.
321. **Chang K. S.**, On the numerical computation of a class of distributed-parameter systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1970, **15**, № 4, 514—516 (РЖМат, 1971, 3Б351)
322. —, D e R u s s o P. M., An approximate method for solving optimal control problems. IEEE Trans. Automat. Control, 1964, **9**, № 4, 554—556 (РЖМат, 1965, 10Б252)
323. **Chernoff H.**, Optimal stochastic control. Sankhya, Indian Statistics, 1968, **30**, ser. A, part 3
324. **Clark G. M. Jr**, R o w l a n d J. R., A moment-derived stochastic estimation and control algorithm for bounded-noise systems. Int. J. Control, 1973, **17**, № 6, 1159—1168 (РЖМат, 1973, 12В288)
325. **Collatz L.**, W e t t e r l i n g W. (Hrsg.), Numerische Methoden bei Optimierungsaufgaben. Bd. 2. Vortragsauszüge Tag. Numer. Meth. Optimierungsaufg., Basel—Stuttgart, Birkhäuser Verl., 1974, 165 S. (РЖМат, 1975, 5Б1211К)
326. **Courant R.**, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc., 1943, **49**, № 1, 1—23
327. **Cruchry A. J.**, P i t k i n E. T., Regularization in optimal trajectory problems. AIAA Journal, 1968, **6**, № 6, 1209—1210 (РЖМат, 1969, 3Б411)
328. **Cullum J.**, Penalty functions and continuous optimal control problems. Bul. Inst. polit. Iasi, 1969, **15**, № 1, 2, 1/93—1/98 (РЖМат, 1970, 10Б494)
329. —, Discrete approximations to continuous optimal problems. SIAM J. Control, 1969, **7**, № 1, 32—49 (РЖМат, 1970, 1Б519)
330. **Daniel J. W.**, On the convergence of a numerical method for optimal control problems. J. Optimizat. Theory and Appl., 1969, **4**, № 5, 330—342 (РЖМат, 1970, 7Б580)
331. **Davison B. J.**, M o n r o D. M., A computational technique for finding time optimal controls of nonlinear time—varying systems. 10-th Joint Automat. Control Conf. Amer. Automat. Control Council Boulder, Colo, 1969, Prepr. techn. papers, New York, 1969, 270—280 (РЖМат, 1970, 9Б422)
332. **De Does D. H.**, S c h a e f e r J. F., M o r g a n B. S., J r., C o o k G., Procedures to check the adjoint equations when using the method of steepest ascent. IEEE Trans. Automat. Control, 1969, **14**, № 3, 301—303 (РЖМат, 1970, 2Б884)
333. **Denham W. F.**, On numerical optimization with state variable inequality constraints. AIAA Journal, 1966, **4**, № 3, 550—552 (РЖМех, 1967, 1А121)
334. **Dietze S.**, Zur Lösung gewisser linear optimaler Prozesse mit dem Maximumprinzip. Z. angew. Math. und Mech., 1968, **48**, № 1, 57—64 (РЖМат, 1969, 1Б509)

335. **Dixon L. C. W.**, B i g g s M. C., The advantages of adjoint-control transformations when determining optimal trajectories by Pontryagin's maximum principle. Aeronaut. J., 1972, **76**, № 735, 169—174 (РЖМех, 1972. 8А95)
336. **Dorato P.**, H s i e h C. M., R o b i n s o n P. N., Optimal bang-bang control of linear stochastic systems with a small noise parameter. IEEE Trans. Automat. Control, 1967, **AC—12**, 682—690
337. **Dreyfus S.**, The numerical solution of variational problems. J. Math. Analys. and Applic., 1962, **5**, № 1, 30—45 (РЖМат, 1963, 8В99)
338. **Dyer P.**, M c R e y n o l d s S. R., The computation and theory of optimal control. New York—London, Acad. Press, 1970, 242 pp.
339. **Eaton J. H.**, An iterative solution to time-optimal control. J. Math. Anal. Appl., 1962, **5**, № 2, 329—344 (РЖМат, 1964, 6В349)
340. **Efthymiatos D.**, An iterative algorithm for optimum control problems with inequality constraints. IEEE Trans. Automat. Control, 1969, **14**, № 6, 719—722 (РЖМат, 1970, 11Б510)
341. —, B o n n e m a y A., Sur la calcul approché des trajectories optimales avec contraintes sur la variables d'etat. C. r. Acad. sci., 1968, **267**, № 7, A287—289 (РЖМат, 1969, 5Б591)
342. **Fadden E. J.**, G i l b e r t E. G., Computational aspects of the time-optimal control problem. Comput. Methods Optimizat. Problems, New York—London, Acad. Press, 1964, 167—192 (РЖМат, 1965, 8Б395)
343. **Falb P. L.**, J o n g J. L., Some successive approximation methods on control and oscillation theory. New York—London, Acad. Press, 1969, 240 pp.
344. **Fancher P. S.**, Iterative computation procedures for an optimum control problem. IEEE Trans. Automat. Control, 1965, **10**, № 3, 346—348 (РЖМат, 1966, 10Б463)
345. **Faulkner S. D.**, Direct methods. Optim. techn. applic., aerospace syst., New York—London, Acad. Press, 1962, 33—67 (РЖМат, 1963, 7Б317)
346. **Feder P. I.**, S t r o u d T., Sequential decisions in the control of a spaceship (terminal cost proportional to magnitude of miss distance). J. Appl. Probab., 1971, 8, № 2, 285—297 (РЖМат, 1972, 1В364)
347. **Fleming W. H.**, Some Markovian optimization problems. J. Math. and Mech., 1963, **12**, № 1, 131—140
348. —, Optimal continuous parameter stochastic control. SIAM Rev., 1969, **11**, № 4, 470—509
349. —, Stochastic control for small noise intensities. SIAM J. Control, 1971, 9, № 3, 473—517 (РЖМат, 1972, 4В58)
350. **Fletcher R.**, Methods for the solution of optimization problems. Comput. Phys. Communs, 1972, **3**, № 3, 159—172 (РЖМат, 1972, 12Б585)
351. **Fogarty L. E.**, H o w e R. M., Trajectory optimization by a direct descent process. 18-th Internat. Astronaut. Congr., Belgrade, 1967, Proc. v. 1, Astrodynam., Guidance and Control, Miscellanea, Oxford et al., 1968, 233—254 (РЖМат, 1969, 12Б534)
352. **Friedland B.**, A technique of quasi-optimum control. Trans. ASME, 1966, D88, № 2, 437—443 (РЖМех, 1967, 3А141)
353. **Fu K. S.**, Learning Control Systems. Review and Outlook. IEEE Trans. Automat. Control, 1970, **AC—15**, № 2
354. **Fuller A. T.**, Sub-optimal nonlinear controllers for relay and saturating control systems. Int. J. Control, 1971, **13**, № 3, 401—428 (РЖМат, 1971, 10Б459)
355. **Gera J.**, Branched trajectory optimization by the projected gradient technique. AIAA Paper, 1969, № 917, 10 pp. (РЖМех, 1970, 5А145)
356. **Gershwin S. B.**, J a c o b s o n D. H., A discrete-time differential dynamic programming algorithm with application to optimal orbit transfer. AIAA Journal, 1970, **8**, № 9, 1616—1626 (РЖМех, 1971, 4А301)
357. **Goldstein A. A.**, Convex programming and optimal control. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, **A3**, № 1, 142—146 (РЖМат, 1966, 5Б346)

358. **Gottlieb R. G.**, Rapid convergence to optimum solutions using a min-H strategy. AIAA Journal, 1967, 5, № 2, 322—329 (РЖМат, 1967, 8Б407)

359. **Graham R. G.**, A steepest-ascent solution of multiplears optimization problems. AIAA Journal, 1965, 3, № 1, 154—155 (РЖМех, 1965, 8А33)

360. **Guignabodet J.**, Méthodes variationnelles pour la résolution numérique des problémes de commande optimale soumis a des contraintes sous forme d'inégalites. Rev., franc., traitem. inform. Chiffres, 1964, 7, № 2, 149—167 (РЖМат, 1965, 4Б380)

361. **Hales K. A.**, Flugge-Lotz I., Lange B. D., Minimum-fuel attitude control of a spacecraft by an extended method of steepest-descend. Internat. J. Non--Linear Mech., 1968, 3, № 4, 413—438 (РЖМех, 1969, 6А37)

362. **Hamilton W. E., Jr.**, Koivo A. J., On computational solutions of state constrained optimization problems. 10th Joint Automat. Control. Conf. Amer. Automat. Control Council, Boulder, Colo, 1969, Prepr. techn. papers, New York, 1969, 384—393 (РЖМат, 1970, 10Б520)

363. **Hanson J. N.**, A simple method for approximating the optimal trajectory. AIAA Journal, 1963, 1, № 8, 1936—1938 (РЖМех, 1964, 3А55)

364. **Häussler R. L.**, Rekasius Z. V., Über die suboptimale Regelung von nichtlinearen Systemen. Regelungstechnik, 1964, **12**, № 7, 290—296 (РЖМат, 1965, 4Б381)

365. **Hillsley R. H.**, Robbins H. M., A steepest-ascent trajectory optimization method which reduces memory requirements. Comput. Methods Optimizat. Problems, New York — London, Acad. Press, 1964, 107—133 (РЖМат, 1965, 5Б437)

366. **Ho Yu-Chi**, A successive approximation technique for optimal control systems sybject to input saturation. Trans. ASME, 1962, **D84**, № 1, 33—37, Discuss., 37—40 (РЖМат, 1962, 10В246)

367. —, A computational technique for optimal control problems with state variable constraint. J. Math. Aanlys. and Applic., 1962, 5, № 2, 216—224 (РЖМат, 1963, 6В274)

368. —, Brentani P. B., On computing optimal control with inequality constraints. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Control, 1963, **A1**, № 3, 319—348 (РЖМат, 1965, 1Б385)

369. **Holland C. J.**, A numerical technique for small-noise stochastic control problems. J. of Optimizat. Theory and Applicat., 1974, **13**, № 1, 74—94

370. **Horwitz L. B.**, Sarachik P. E., A survey of two recent iterative techniques for computing optimal control signals. 10th Joint Automat. Control Conf. Amer. Automat. Control Council, Boulder, Colo, 1969. Prepr. techn. papers, New York, 1969, 50—51 (РЖМат, 1970, 9Б423)

371. **Hussu A.**, The conjugate-gradient method for optimal control problems with undetermined final time. Internat. J. Control, 1972, **15**, № 1, 79—82 (РЖМат, 1972, 5Б640)

372. **Hymas C. E.**, Cavin R. K., Colunga D., Neighboring extremals for optimal control problems. AIAA Joural, 1973, **11**, № 8, 1101—1109

373. **Ichikawa Kunihiko**, Kanai Kimio, Optimal control synthesis of distributed parameter system. Bull. JSME, 1970, **13**, № 66, 1426—1437, Discuss., 1437—1439 (РЖМат, 1971, 7Б607)

374. **Isaacs D.**, Leondes C. T., Niemann R. A., On a sequential optimization approach in nonlinear control. Joint Automat. Control Conf., Seattle, Wash., 1966, 158—166 (РЖМат, 1968, 1Б512)

375. **Isayev V. K.**, Kurianov A. I., Sonin V. V., On the application of the maximum principle to rocket flight problems. Proc. Int. Astronaut. Congr., 14-th, Paris, 1963. Paris—Warszawa, PWN, Gauthier-Villars, 1965, **4**, 517—537

376. —, Sonin V. V., Survey of methods for the numerical solutions of variational problems of flight dynamics. Post Apollo Space Explorat. Part 2,

Washington, D. C. Amer. Astronaut. Soc., 1966, 1147—1171 (РЖМех, 1967, 6А20)

377. **Jacobson D. H.**, Second-order and second-variation methods for determining optimal control: A comparative study using differential dynamic programming. Internat. J. Control, 1968, **7**, № 2, 175—196 (РЖМат, 1969, 2Б511)

378. —, Gerschwin S. B., Lele M. M., Computation of optimal singular controls. IEEE Trans. Automat. Control, 1970, **AC-15**, № 1, 67—73 (РЖМат, 1971, 2Б594)

379. **Jasinski H.**, Wagner P. Über ein numerisches Verfahren zur Optimierung von Systemen mit Konzentrierten Parametern. Wiss. Z. Techn. Hochschule Chem., 1973, **15**, № 2, 148—158 S.

380. **Jawnuti P.**, Kokotović P., Singular perturbation method for near optimum design of high-order non-linear systems. Automatica. 1969, **5**, № 6, 773—779 (РЖМат, 1970, 7Б574)

381. **Jazwinski A. H.**, Inequality constrants in steepest-descent trajectory optimization. J. Aerospace sci., 1962, **29**, № 10, 1268 (РЖМех, 1963, 12А49)

382. —, Optimum plana circular orbits transfer. AIAA Journal, 1963, **1**, № 11, 2674—2675 (РЖМех, 1965, 2А24)

383. —, Optimal trajectories and linear control of nonlinear systems. AIAA Journal, 1964, **2**, № 8, 1371—1379 (РЖМех, 1965, 4А67)

384. **Jezewski D. J.**, A method for determining optimal fixed-time, N-impulse trajectories between arbitrarily inclined orbits. IAF Paper, 1968, № AD30, 11 pp. (РЖМех, 1969, 7А18)

385. —, Rozendaal H. L., An efficient method for calculating optimal free-space N-impulse trajectories. AIAA Journal, 1968, **6**, № 11, 2160—2165 (РЖМех, 1969, 7А19)

386. **Johnson I. L.**, Impulsive orbit transfer optimization by an accelerated gradient method. J. Spacecraft and Rockets, 1969, **6**, № 5, 630—632 (РЖМех, 1970, 5А29)

387. **Jurovics S. A.**, McIntyre J. E., The adjoint method and its application to trajectory optimization. ARS Journal, 1962, **32**, № 9, 1354—1358 (РЖМех, 1964, 2А64)

388. **Kacprzynski B.**, Algorytm adaptacyjnej optymalizacji dzialania ukladów dynamicznych z relaksacyjna procedura iteracyjna. Arch. automat. i telemech., 1965, **10**, № 3, 319—340 (РЖМех, 1966, 6А80)

389. **Kameyama Yoshimasa**, Sayama Hayatoshi, Penalty method for optimal control problems with state constraints. Trans. Soc. Instrum. and Contr. Eng., 1974, **10**, № 3, 272—277 (РЖМат, 1975, 2Б464)

390. **Karnopp D. C.**, Ein direktes Rechenverfahren für implizite Variationsprobleme bei optimalen Prozessen. Regelungstechnik, 1966, **14**, № 8, 366—368 (РЖМат, 1967, 6Б551)

391. **Katayama T.**, Stochastic bang-bang controls that maximize the expectation of first passage time. Internat. J. Control 14, 1971, **1**, 83—96

392. **Kelley H. J.**, Gradient theory of optimal flight paths. ARS Journal, 1960, **30**, № 10, 947—954 (РЖМех, 1962, 8А67)

393. —, Method of gradients. Optimiz. techn. applic. aerospace syst., New York—London, Acad. Press, 1962, 205—254 (РЖМат, 1963, 8Б343)

394. —, Kopp R. E., Moyer H. G., Successive approximation techniques for trajectory optimization. Proc. of the Symp. on Vehicle System Optimization, N. Y., 1961

395. —, —, —, A trajectory optimization technique based upon the theory of the second variation. AIAA [Preprints], 1963, № 415, 10 pp. (РЖМех, 1964, 10А64)

396. **Kessler F. M.**, Puri N. N., Sannuti P. A., A modified C. G. algorithm not requiring the adjoint vector for optimal control computation. 12th Joint Automat. Contr. Conf. Amer. Automat. Contr. Council, St. Louis, Mo., 1971. Prepr. techn. pap., New York, 1971, 167—170 (РЖМат, 1972, 5Б636)

397. **Khatri H. C.**, Goodson R. E., Optimal feedback solutions for a class of distributed systems. Trans. ASME, 1966, **D88**, № 2, 337—342 (РЖМат, 1967, 3В179)
398. **Kim M.**, Successive approximation method in optimum distributed-parameter systems. J. Optimizat. Theory and Appl., 1969, **4**, № 1, 40—43 (РЖМат, 1970, 6Б566)
399. **Knapp C. H.**, Frost P. A., Determination of optimum control and trajectories using the maximum principle in association with a gradient technique, IEEE Trans. Automat. Control, 1965, **10**, № 2, 189—193 (РЖМат, 1966, 1Б381)
400. **Koivuniemi A. J.**, Hamilton W. F., Jr., An algorithm for the solution to an optimal singualr control problem. Proc. Nat. Electron. Conf., Chicago, Ill, 1967, **23**, 90—94 (РЖМат, 1969, 8Б512)
401. **Kolbe O.**, Zur iterativen Bestimmung zeitoptimaler Steuerungen. Z. angew. Math. und Mech., 1970, **50**, Sonderh. 1—4, 17—18 (РЖМат, 1971, 4Б614)
402. **Kopp R. E.**, McGill R., Several trajectory optimization techniques. Part I. Discussion. Comput. Methods Optimizat. Problems, New York—London, Acad. Press, 1964, 65—89 (РЖМат, 1965, 4Б367)
403. —, Computational algorithms in optimal control. IEEE Internat. Convent. Res., 1967, **15**, № 3, 5—14 (РЖМат, 1968, 5Б558)
404. **Kornhauser A. L.**, Lion P. M., Hazelrigg G. A., An analytic solution for constant-thrust, optimal coast, minimum-propellant space trajectories. AIAA Journal, 1971, **9**, № 7, 1234—1239 (РЖМех, 1972, 2А64)
405. **Kubicek M.**, Bubnik A., Numerical solution of one optimal problem. Ж. вычисл. мат., и мат. физ., 1970, **10**, № 6, 1541—1547 (РЖМат, 1971, 6Б875)
406. **Kučera V.**, A review of the matrix Riccati equation. Kybernetika, 1973, **9**, № 1
407. **Kushner H. J.**, Kleinman A. J., Numerical methods for the solution of the degenerate nonlinear elliptic equations arising in optimal stochastic control theory. IEEE Trans. Automat. Control, 1968, **13**, № 4, 344—353 (РЖМат, 1969, 8Б513)
408. —, Yu Chen-Fu, Approximations, existence and numerical procedures of optimal stochastic controls. J. Math. Analys. and Applic., 1974, **45**, № 3, 563—587 (РЖМат, 1974, 9В60)
409. **Larson R. E.**, An approach to reducing the highspeed memory requirement of dynamic programming. J. Math. Analys. and Applic., 1965, **11**, № 1—3, 519—537 (РЖМат, 1966, 9Б414)
410. —, A survey of Dynamic Programming Computational Procedures. IEEE Trans. Automat. Control, 1967, **12**, № 6, 767—774 (РЖМат, 1968, 12Б538)
411. —, Computational aspects of dynamic programming IEEE Internat. Convent. Res., 1967, **15**, № 3, 15—26 (РЖМат, 1968, 5Б559)
412. —, State increment dynamic programming. New York—London—Amsterdam, Elsevier, 1968 (РЖМат, 1970, 7Б592К)
413. **Larson V. H.**, Minimum time control by time interval optimization. Internat. J. Control, 1968, **7**, № 4, 381—394 (РЖМат, 1968, 11Б453)
414. **Lasdon L. S.**, Waren A. D., Rice R. K., An interior penalty method for inequality constrained optimal control problems. IEEE Trans. Automat. Control. 1967, **12**, № 4, 388—395 (РЖМат, 1968, 6Б571)
415. —, Conjugate direction methods for optimal control. IEEE Trans. Automat. Control, 1970, **15**, № 2, 267—268 (РЖМат, 1971, 2Б628)
416. **Lee E. B.**, A computational technique for systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1965, **10**, № 3, 368—369 (РЖМат, 1966, 3Б438)
417. **Lee W.-K.**, Luecke R. H., A direct search for time-optimal control in stochastic systems. Internat. J. Control, 1974, **19**, № 1, 129—141 (РЖМат, 1974, 7В117)

418. **Levine M. D.**, Trajectory optimization using the Newton—Raphson method. Automatica, 1966, 3, № 3—4, 203—217 (РЖМат, 1966, 10Б446)
419. **Lewallen J. M.**, A modified quasi-linearization method for solving trajectory optimization problems. AIAA Journal, 1967, 5, № 5, 962—965 (РЖМех, 1968, 1А29)
420. —, Tapley B. D., Williams S. D., Iteration procedures for indirect trajectory optimization methods. J. Spacecraft and Rockets, 1968, 5, № 3, 321—327 (РЖМех, 1968, 11А32)
421. **Lim R. S.**, Asymptotic solutions of an optimal servo problem. IEEE Trans. Automat. Control, 1968, **AC—13**, 45—50
422. **Lim Y. S.**, Linearization and optimization technique for stochastic saturating systems. Int. J. Control, 1974, **20**, № 1, 91—99 (РЖМат, 1975, 11В377)
423. **Lions J. L.**, Perturbations singulières dans les problemes aux limites et en controle optimale. Lect. Notes Math., 1973, 323, 645 pp.
424. —, On the numerical approximation of problems of inpulse control. Lect. Notes Computer Sci., 1975, **27**, 232—251
425. **Longmuir A. G.**, Bohn E. V., The synthesis of suboptimal Feedback control laws. IEEE Trans. Automat. Control, 1967, **12**, № 6, 755—758 (РЖМат, 1968, 12Б543)
426. **Lorchirachoonkul V.**, Pierre D. A., Optimal control of multi-variable distributed—parameter systems through linear programming. Joint Automat. Control Conf., 1967, Preprints papers, New York, Lewis Winner, 1967, 702—710 (РЖМат, 1968, 12Б555)
427. **Luxat J. C.**, Less L. H., Suboptimal adaptive control of a class of non-linear systems. Internat. J. Control, 1973, **17**, № 5, 965—975 (РЖМат, 1973, 10В211)
428. **Managasarian O. L.**, Techniques of optimization. Pap. ASME, 1971, № Vibr—118, 12 pp. (РЖМат, 1972, 6Б531)
429. **Manring J. E.**, Bullock T. E., Computational difficulties in the use of penalty functions for constrained minimization problems. Proc. 2nd Biennial Cornell Electr. Engng Conf. v. 2, Computeriz. Electron., Ithaca, New York, 1969, 142—153 (РЖМат, 1970, 11Б529)
430. **Mayne D.**, A second-order gradient method for determining optimal trajectories of non-linear discrete-time systems. Internat. J. Control, 1966, 3, № 1, 85—95 (РЖМат, 1966, 12Б337)
431. **McGill R.**, Optimal control, inequality state constraints and the generalized Newton-Raphson algorithm. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, **A3**, № 2, 291—298 (РЖМат, 1966, 7Б390)
432. —, Kenneth P., Solution of variational problems by means of a generalized Newton-Raphson operator. AIAA Journal, 1964, **2**, № 10, 1761—1766 (РЖМат, 1965, 6Б410)
433. **McReynolds S. R.**, The successive sweep method and dynamic programming. J. Math. Analys. and Applic., 1967, **19**, № 3, 565—598 (РЖМат, 1968, 5Б563)
434. **Mehra R. K.**, Davis R. E., A generalized gradient method for optimal control problems with inequality constraints and singular arcs. 12th Joint Automat. Contr. Conf. Amer. Automat. Contr. Counc., St. Louis, Mo., Prepr. techn. pap., New York, 1971, 144—152 (РЖМат, 1972, 5Б641)
435. **Merriam C. W. III**, An algorithm for the iterative solution of a class of twopoint boundary value problems. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1964, **A2**, № 1, 1—10 (РЖМат, 1965, 5Б429)
436. —, A computational method for feedback control optimization. Inform. and Control, 1965, **8**, № 2. 215—232 (РЖМат, 1965. 12Б435)
437. —, Jordan D., A computational method for parameter optimization problems arising in control. Internat. J. Control, 1971, **14**, № 2, 385—397 (РЖМат, 1971, 12Б742)
438. Methodes numeriques d'analyse de systemes. tome 1, Algorithmes de resolution de problemes de controle optimale. IRIA, Cahier № 9, 1972, 224 pp.

439. **Miele A.**, Recent advances on gradient methods in control theory. SWIEEECO Rec. Techn. Pap. 22nd Annu. Southwest. IEEE Conf. and Exhibit., Dallas, Tex., New York, 1970, 186—187 (РЖМат, 1971, 1Б641)
440. **Mitter S. K.**, Successive approximation methods for the solution of optimal control problems. Automatica, 1966, **3**, № 3—4, 135—149 (РЖМат, 1966, 12Б328)
441. **Moiseev N. N.**, Lebedev V. N., Review paper on the research completed at the Computing Center of the Academy of Sciences of the USSR on the theory of optimal control functions of spacecraft. Peaceful Uses Automat. Outer Space, New York, Plenum Press, 1966, 529—540 (РЖМех, 1967, 6А18)
442. —, Shmidt A. G., Asymptotic methods in the theory of optimum correction for systems with slowly varying parameters. J. Optimizat. Theory and Applic., 1969, **3**, № 3, 141—152 (РЖМат, 1969, 11Б468)
443. **Moskowitz S. E.**, Approximate non complanar orbital transfers with minimum expenditure of fuel. Lect. Notes Math., 1970, **132**, 281—291 (РЖМат, 1971, 2А32)
444. **Neustadt L. W.**, Synthesizing time optimal control systems. J. Math. Analys. and Applic., 1960, **1**, № 3—4, 484—493 (РЖМат, 1963, 1Б201)
445. **Notley M. G.**, A heuristic approach to optimal control. Internat. J. Control, 1971, **13**, № 3, 429—447 (РЖМат, 1971, 10Б458)
446. **Ohmatsu Shigeru**, Kawakami Hakuhei, Shibata Hiroshi, Hata Shiro, Numerical analysis of the optimal control for a stochastic distributed parameter systems. Bull. Univ. Osaka Prefect, 1973, **22**, № 1, 49—56 (РЖМат, 1974, 6Б1082)
447. **Okamura Kiyohisa**, Some mathematical theory of the penalty method for solving optimum control problems. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, **A2**, № 3, 317—331 (РЖМат, 1966, 2Б461)
448. **Okamura K.**, A simplified steepestassent method. Trans. ASME, 1966, **E33**, № 2, 452—454 (РЖМех, 1967, 4А149)
449. **Paiewonsky B.**, Optimal control: a review of theory and practice. AIAA Journal, 1965, **3**, № 11, 1985—2006 (РЖМат, 1966, 5Б318)
450. **Perret R.**, Rouxel R., Study of an algorithm for dynamic optimization. Comput. Methods Optimizat. Problems, New York—London, Acad. Press, 1964, 241—259 (РЖМат, 1965, 4Б395)
451. **Plant J. B.**, Some iterative solutions in optimal control. Cambridge (Mass.), The M. I. T. Press, 1968, 218 pp.
452. **Polak E.**, An historical survey of computational methods in optimal control. SIAM Rev., 1973, **15**, № 2, 553—584 (РЖМат, 1973, 12Б678)
453. **Powers W. F.**, Techniques for improved convergence in neighboring optimum guidance. AIAA Paper, 1969, № 888, 9 pp. (РЖМех, 1970, 6А185)
454. **Puri N. N.**, Gruver W. A., Optimal control design via successive approximations. Joint Automat. Control Conf., 1967, Preprints papers, New York, Lewis Winner, 1967, 335—344 (РЖМат, 1969, 3Б393)
455. **Quintana V. H.**, Davison E. J., A time-weighted gradient method for computing. 11th Joint Automat. Contr. Conf. Amer. Automat. Contr. Counc., Atlanta, Ga, 1970, Prepr. techn. pap., New York, 1970, 43—50 (РЖМат, 1971, 6Б582)
456. **Robinson P.**, Moore J., Solution of the stochastic control problem in unbounded domains. J. Franklin Inst., 1973, **295**, № 3, 185—192 (РЖМат, 1973, 7В86)
457. **Rosen J. B.**, Iterative solution of nonlinear optimal control problems. SIAM J. Control, 1966, **4**, № 1, 223—244 (РЖМат, 1966, 12Б327)
458. **Rosenbloom A.**, Final value systems with total effort constraints. Proc. First Internat. Congr. IFAC Butterworth, London, 1961, 535—544
459. **Russell D. L.**, Penalty functions and bounded phase coordinate control. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, **A2**, № 3, 409—422 (РЖМат, 1966, 4Б331)
460. **Sackett G. G.**, Numerical solution of a parabolic free boundary problem arising in statistical decision theory. Math. Computat., 1971, **25**, № 115, 425—434

461. **Sage A. P.**, Chaudhuri S. P., Gradient and quasi-linearization computational techniques for distributed parameter systems. Internat. J. Control. 1967, **6**, № 1, 81—98 (РЖМат, 1968, 5Б580)
462. **Saltzer C.**, Fetheroff C. W., A direct variational method for the calculation of optimum thrust programs for power-limited interplanetary flight. Astronaut. acta, 1961, **7**, № 1, 8—20 (РЖМех, 1962, 4А55)
463. **Saridis G. N.**, A computational method for the optimal control problem with bounded state variables. Proc. Nat. Electron. Conf., Chicago, 1966, **22**, III 631—636 (РЖМат, 1969, 2Б510)
464. **Sauer G. J.**, Melsa J. L., Stochastic control with continuously variable observation costs for a class of discrete nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1974, **19**, № 3, 234—239 (РЖМат, 1975, 1В379)
465. **Schley C. H.**, Lee I., Optimal control computation by the Newton—Raphson method and the Riccati transformation. Joint Automat. Control Conf., Seattle, Wash., Preprints Conf. papers, 1966, S. 1., s. a., 186—192 (РЖМат, 1967, 10Б494)
466. **Schmitendorf W. E.**, Citron S. J., On the applicability of the sweep method to optimal control problems. IEEE Trans. Automat. Control, 1969, **14**, № 1, 69—72 (РЖМат, 1970, 4Б554)
467. **Schulze H. K.**, Methode des adaptiven Suchschlauches zur Lösung von Variationsproblemen mit Dynamic-Programming-Verfahren. Elektron. Datenverarb, 1966, 8, № 3, 119—130 (РЖМат, 1967, 6Б550)
468. **Sibony M.**, Contrôle des systèmes gouvernés par des équation aus dérivées partielles. Sémin, Lions. Anal. numér. Fac. sci., Paris, 1969, 3/01—3/40 (РЖМат, 1970, 10Б503)
469. **Sidar M.**, Une mèthode itérative pour la détermination des trajectoires optimales. C. r. Acad. sci., 1966, **263**, № 6, A260—A263 (РЖМат, 1967, 4Б352)
470. —, Sur la calcul et la détermination des trajectoires optimales. C. r. Acad. sci., 1966, **AB262**, № 21, A1223—A1226 (РЖМех, 1966, 12А122)
471. —, An iterative algorithm for optimum control problems. Internat. J. Non-Linear Mech., 1968, **3**, № 1, 1—16 (РЖМех, 1969, 6А163)
472. **Sinnott J. F., Jr.**, Luenberger D. G., Solution of optimal control problems by the method of conjugate gradients. Joint Automat. Control Conf.1967. Preprints papers, New York, Lewis Winner, 1967, 566—574 (РЖМат, 1969, 3Б410)
473. **Spingarn K.**, Some numerical aspects of optimal control. J. Franklin Inst., 1970, **289**, № 5, 351—359 (РЖМат, 1971, 1Б635)
474. —, A comparison of numerical methods for solving optimal control problems. IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst., 1971, **7**, № 1, 73—78 (РЖМат, 1971, 7Б933)
475. **Sutherland J. W.**, Bohn E. V., A numerical trajectory optimization method, suitable for a computer of limited memory. IEEE Trans. Automat. Control, 1966, **11**, № 3, 440—447 (РЖМат, 1967, 5Б491)
476. **Szelezsán J.**, Optimális vesérlési feladat numerikus mogeldása. Közl. Magyar tud. akad. Számitástechn Közp., 1968, **4**, 54—82 (РЖМат, 1969, 8Б510)
477. **Tabak D.**, Applications of mathematical programming techniques in optimal control: a survey. IEEE Trans. Automat. Control, 1970, **15**, № 6, 688—690 (РЖМат, 1971, 11Б693)
478. **Tacker E. C.**, Sanders C. W., Jr., Linton T. D., A computational algorithm for the optimal control of continuous-time stochastic systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1973, **18**, № 3, 310—311 (РЖМат, 1974, 1Б730)
479. —, Linton T. D., Sanders C. W., Open-loop optimal control of a class of continuous-time stochastic systems—A simultation study. Internat. J. Control, 1974, **19**, № 6, 1165—1175 (РЖМат, 1975, 2В282)
480. **Tapley B. D.**, Lewallen J. M., Comparison of several numerical optimization methods. J. Optimizat. Theory and Applic., 1967, **1**, № 1, 1—32 (РЖМат, 1969, 3Б394)

481. **Taylor L. W., Jr.**, Smith H. J., Iliff K. W., Experience using Balakrishnan's epsilon technique to compute optimum flight profiles. AIAA Paper, 1969, № 75, 7 pp. (РЖМех, 1969, 9А29)
482. **Tracz G. S.**, Optimal control problems: a second order computational scheme. CORS Journal, 1967, 5, № 3, 175—184 (РЖМат, 1968, 9Б394)
483. **Tripathi S. S.**, Narendra K. S., Optimization using conjugate gradient methods. IEEE Trans. Automat. Control, 1970, **15**, № 2, 268—270 (РЖМат, 1971, 1Б630)
484. **Tse E.**, Bar-Shalom Y., An actively adaptive control for linear systems with random parameters via the dual control approach. IEEE Trans. Automat. Control, 1973, **18**, № 2, 109—117 (РЖМат, 1973, 11В352)
485. —, —, Meier L. III., Wide-sense adaptive dual control for nonlinear stochastic systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1973, **18**, № 2, 98—102 (РЖМат, 1973, 11В353)
486. **Tuel W. G., Jr.**, An improved algorithm for the solution of discrete regulation problems. IEEE Trans. Automat. Control, 1967, **12**, № 5, 522—528 (РЖМат, 1968, 10Б514)
487. **Tung F.**, Striebel C. T., A stochastic optimal control problem and its applications. J. Math. Analys. and Applic., 1965, **12**, 350—359
488. **Vachino R. F.**, Steepest descent with inequality constraints on the control variables. SIAM J. Control, 1964, **4**, № 1, 245—261 (РЖМат, 1966, 12Б324)
489. **Vavin Y.**, Sivan R., The bounded energy optimal control for a class of distributed parameter systems. Internat. J. Control, 1968, 8, № 5, 525—536 (РЖМат, 1969, 5Б577)
490. **Westcott J. H.**, Florentin J. J., Pearson J. D., Approximation methods in optimal and adaptive control. Automat. and Remote Control Theory. London, Butterworths, Munich, Oldenbourg, 1964, 263—271 (РЖМат, 1967, 1Б282)
491. **Williamson W. E.**, Use of polynomial approximations to calculate suboptimal controls. AIAA Journal, 1971, **9**, № 11, 2271—2273 (РЖМех, 1972, 6А207)
492. —, Fowler W. T., A segmented weighting scheme for steepest ascent optimization. AIAA Journal, 1968, **6**, № 5, 967—977 (РЖМех, 1969, 1А162)
493. **Willoughby J. K.**, Pierson B. L., A constraint-space conjugate gradient method for function minimization and optimal control problems. Internat. J. Control, 1971, **14**, № 6, 1121—1135 (РЖМат, 1972, 5Б637)
494. **Wong P. J.**, Dressler R. M., Luenberger D. G., A combined parallel-tangents/penalty-function approach to solving trajectory optimization problems. AIAA Journal, 1971, **9**, № 12, 2443—2448 (РЖМех, 1972, 7А61)

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ КАЛМАНА — БЬЮСИ И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

М. Б. Прохоров, В. К. Саульев

ВВЕДЕНИЕ

В 60-х годах, наряду с традиционными методами обработки информации и результатов измерений, такими, например, как дисперсионный и регрессионный анализ, метод наименьших квадратов и др., нашел широкое применение новый метод оценки состояния динамических систем при наличии случайных помех, предложенный Калманом [91] для дискретных систем, затем Калманом и Бьюси [93] для непрерывных систем и независимо Бэттиным [4, 46]. Новизна подхода Калмана заключалась в комбинации двух известных идей: 1) динамическая система рассматривается как перемещение в пространстве состояний; 2) линейная фильтрация рассматривается как ортогональная проекция в гильбертовом пространстве.

Такой подход к задаче оптимальной оценки состояния динамической системы по результатам измерений привел к принципу двойственности [15, 91], связывающему стохастическую теорию фильтрации с детерминированной теорией оптимального управления, который позволяет переносить результаты одной теории на другую, причем поскольку теория оптимального управления развивалась до сих пор более быстрыми темпами, то целый ряд результатов в оптимальной фильтрации в настоящее время получен именно на основании принципа двойственности. В отличие от ранее предложенного фильтра Винера—Колмогорова, в котором обрабатывались результаты измерений, представляющие собой полезный сигнал плюс случайная помеха, метод Калмана—Бьюси учитывает также свойства исследуемой системы путем введения в уравнения фильтра уравнения динамики системы. Вычислительная ценность алгоритма фильтрации Калмана—Бьюси обусловлена его рекуррентной формой, что позволило существенно снизить объем потребной памяти ЭВМ, поскольку поступающие вновь результаты измерений сразу же обрабатываются и не нуждаются в дальнейшем хранении. Помимо этого, данный алгоритм дает очень простое соотношение для предсказания будущих состояний системы, а также может быть использован при решении различных задач сглаживания.

Как отмечается в книге [27] метод Калмана—Бьюси дает возможность: 1) получать наилучшие в смысле минимума дисперсии линейные оценки на основании известных статистических характеристик входных переменных и помех измерений; 2) обрабатывать измерения по мере их поступления, что позволяет, в принципе, использовать метод в реальном масштабе времени; 3) получать практически реализуемую структуру оптимального фильтра (в отличие, например, от фильтра Винера—Колмогорова), решать задачи синтеза многомерных динамических систем; 4) строить фильтры с конечной, растущей и бесконечной памятью для различных сигналов (стационарных или нестационарных, непрерывных или дискретных) при произвольном распределении датчиков измерений и времени их включения и работы; 5) сохранять структуру алгоритма при совместном решении задач оптимальной фильтрации и оптимального управления.

К недостаткам метода следует отнести то, что он применим в основном к линейным системам, требует априорного знания статистических характеристик помех, которые, в свою очередь, должны быть независимыми гауссовскими белыми шумами. Правда, как будет показано дальше, в значительной мере эти ограничения удается ослабить. С вычислительной точки зрения к недостаткам метода следует отнести его тенденцию к расходимости и все-таки значительный объем необходимых арифметических операций.

§ 1. АЛГОРИТМ ФИЛЬТРАЦИИ КАЛМАНА—БЬЮСИ

Метод оптимальной фильтрации Калмана—Бьюси основан на ряде общих теорем теории вероятностей и случайных процессов. Рассмотрим, например, следуя [25], постановку задачи получения оптимальной оценки в дискретном случае. Пусть состояние динамической системы представляет собой n-мерный случайный процесс с дискретным временем $\{x(k),\ k \in I\}$, причем I — некоторое конечное или счетное множество. Непосредственному наблюдению доступен m-мерный случайный процесс $\{y(i),\ i=1, 2, \ldots, j\}$, получаемый при помощи некоторой измерительной системы. На основании измерений $y(1), y(2), \ldots$ $\ldots, y(j)$ требуется получить оценку состояния системы в момент k, которую обозначают $\hat{x}(k/j)$ и которая является некоторой функцией от всех доступных измерений:

$$\hat{x}(k/j) = f[y(i),\ i=1, \ldots, j].$$

При $k=j$ имеем задачу фильтрации, при $k>j$ — задачу прогноза, при $k<j$ — задачу сглаживания.

За критерий качества оценивания обычно принимается величина среднеквадратичной ошибки оценки. Тогда для такого критерия, как доказано в [12], оптимальной оценкой является условное математическое ожидание

$$M\{x(k)/Y(j)\},$$

где $Y^*(j)=\{y^*(1),\ y^*(2),\dots,y^*(j)\}$, $*$ означает транспонирование. Если же известны первые и вторые моменты случайных процессов x, y, то, как показано в [92], для рассматриваемого критерия качества (как впрочем и для гораздо более общего его вида) оптимальная оценка является линейной функцией от измерений.

В 1960 г. Калман в [91] построил рекуррентный алгоритм получения оптимальной оценки в случае, когда $x(k)$ является выходом линейной динамической системы вида

$$x(k+1)=A(k+1,\ k)x(k)+B(k+1,\ k)w(k), \tag{1.1}$$

где $x(k)$ — неизвестный n-вектор состояния, $w(k)$ — p-вектор возмущений типа белого шума, переходные матрицы $A(k+1,\ k)$ и $B(k+1,\ k)$ имеют размерности $(n\times n)$ и $(n\times p)$ соответственно. Кроме того, имеется уравнение измерений

$$y(k+1)=H(k+1)x(k+1)+v(k+1),\quad k=0,\ 1,\ \dots, \tag{1.2}$$

где $y(k)$ — известный m-вектор измерений, $v(k)$ — m-вектор ошибок, также представляющий собой случайную последовательность типа белого шума, $H(k)$ — матрица измерений размера $m\times n$. Случайные последовательности $\{w(k)\}$ и $\{v(k)\}$ обладают следующими свойствами:

$$Mw(k)=0, \tag{1.3}$$

$$Mv(k)=0, \tag{1.4}$$

$$M[w(k)w^*(j)]=Q(k)\delta_{kj}, \tag{1.5}$$

$$M[v(k)v^*(j)]=R(k)\delta_{kj}, \tag{1.6}$$

$$M[w(k)v^*(j)]=0,\ k,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \dots, \tag{1.7}$$

здесь $Q(k)$ — известная неотрицательно определенная $(p\times p)$-матрица, $R(k)$ — известная положительно определенная $(m\times m)$-матрица, δ_{kj} — символ Кронекера — Капелли. Известна также оценка начального состояния $\hat{x}(0)=Mx(0)=\bar{x}_0$ и ее корреляционная матрица

$$P_0=M\{[x(0)-\bar{x}_0][x(0)-\bar{x}_0]^*\}. \tag{1.8}$$

Положительная определенность матрицы R соответствует тому, что все измерения производятся с ошибками, что является вполне естественным предположением. В этих условиях решение задачи оптимальной фильтрации дается формулами

$$\hat{x}(k+1 \mid k)=A(k+1, k)\,\hat{x}(k \mid k), \quad \hat{x}(0/0)=\bar{x}_0, \tag{1.9}$$

$$P(k+1/k)=A(k+1, k)\,P(k)\,A^*(k+1, k)+$$
$$+B(k+1, k)\,Q(k)\,B^*(k+1, k), \quad P(0)=P_0, \tag{1.10}$$

$$K(k+1)=P(k+1/k)\,H^*(k+1)\times$$
$$\times[H(k+1)\,P(k+1/k)\,H^*(k+1)+R(k+1)]^{-1}, \tag{1.11}$$

$$\hat{x}(k+1/k+1)=\hat{x}(k+1/k)+K(k+1)\times$$
$$\times[y(k+1)-H(k+1)\,\hat{x}(k+1/k)], \tag{1.12}$$

$$P(k+1)=[E-K(k+1)\,H(k+1)]\,P(k+1/k), \tag{1.13}$$

Здесь $\hat{x}(k+1/k)$ — априорная (экстраполированная на один шаг оценка вектора $x(k+1)$, для нахождения которой не используется результат $y(k+1)$ последнего измерения, $\hat{x}(k+1/k+1)$ — апостериорная оценка вектора $x(k+1)$, для нахождения которой используется результат последнего измерения, $P(k+1/k)$ — корреляционная матрица ошибки априорной оценки $\tilde{x}(k+1/k)=$ $=x(k+1)-\hat{x}(k+1/k)$, т. е.

$$P(k+1/k)=M\,[\tilde{x}(k+1/k)\cdot\tilde{x}^*(k+1/k)], \tag{1.14}$$

$P(k+1)$ — корреляционная матрица ошибки апостериорной оценки $\tilde{x}(k+1/k+1)=x(k+1)-\hat{x}(k+1/k+1)$, т. е.

$$P(k+1)=M\,[\tilde{x}(k+1/k+1)\,\tilde{x}^*(k+1/k+1)], \tag{1.15}$$

E — единичная матрица соответствующей размерности. В первоначальной работе Калмана [91] алгоритм фильтрации был получен для случая, когда $v(k)\equiv 0$, $B(k+1, k)\equiv E$. Обобщение на рассмотренный случай можно найти в книгах [3, 19]. Наиболее привлекательная черта дискретного фильтра Калмана — это его рекуррентная форма, что делает его очень удобным для использования на ЭВМ.

В 1961 г. Калман и Бьюси [93] построили алгоритм оптимальной фильтрации для непрерывных систем. Основные предположения были такие же, как и в дискретном случае, а именно: 1) Достаточно точная модéль формирования выходного сигнала определяется линейной, возможно нестационарной, динамической системой, возбуждаемой белым шумом. 2) Измерения содержат аддитивную помеху типа белого шума. Таким образом, модель рассматриваемой системы имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\,x(t)+B(t)\,w(t), \tag{1.16}$$

$$y(t)=H(t)\,x(t)+v(t). \tag{1.17}$$

Здесь аналогично дискретному случаю $x(t)$ — неизвестный n-вектор состояния, $y(t)$ — известный m-вектор измерений, размерность матриц $A(t)$, $B(t)$ и $H(t)$ и векторных случайных процессов $w(t)$ и $v(t)$ такая же, как и ранее. $w(t)$ и $v(t)$ являются некоррелированными между собой белыми шумами, то есть

$$Mw(t)=0, \tag{1.18}$$

$$Mv(t)=0, \tag{1.19}$$

$$Mw(t)v^*(\tau)=0, \tag{1.20}$$

$$Mw(t)w^*(\tau)=Q(t)\delta(t-\tau), \tag{1.21}$$

$$Mv(t)v^*(\tau)=R(t)\delta(t-\tau), \tag{1.22}$$

где опять $Q(t)$ — неотрицательно определенная матрица, $R(t)$ — положительно определенная матрица, обе соответствующих размерностей, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Ищется линейная оценка вида

$$\hat{x}(t/t)=\int_{t_0}^{t} G(t,\tau)y(\tau)d\tau, \quad t_0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.23}$$

обеспечивающая минимум среднеквадратичной ошибки. В работе [93], используя лемму об ортогональной проекции в гильбертовом пространстве, а также показав, что функция $G(t, \tau)$ удовлетворяет уравнению Винера—Хопфа, авторы получили следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая позволяет определить оптимальную оценку и корреляционную матрицу ее ошибки:

$$\frac{d\hat{x}(t/t)}{dt}=A(t)\hat{x}(t/t)+K(t)[y(t)-H(t)\hat{x}(t/t)], \tag{1.24}$$

$$\hat{x}(t_0/t_0)=\bar{x}_0. \tag{1.25}$$

Видно, что, как и в дискретном случае, оценка текущего состояния складывается из предсказанного значения этой оценки и поправки на ошибку предсказания измерения, взятой с некоторой весовой матрицей $K(t)$, называемой также матрицей передачи фильтра или просто матрицей Калмана, которая определяется соотношением

$$K(t)=P(t)H^*(t)R^{-1}(t), \tag{1.26}$$

где $P(t)$ — корреляционная матрица ошибки оценки размера $n\times n$, т. е.

$$P(t)=M[(x(t)-\hat{x}(t/t))(x(t)-\hat{x}(t/t))^*], \tag{1.27}$$

которая удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$\frac{dP(t)}{dt}=A(t)P(t)+P(t)A^*(t)-P(t)H^*(t)R^{-1}(t)H(t)P(t)+ \\ +B(t)Q(t)B^*(t) \tag{1.28}$$

с начальным условием $P(t_0)=P_0$.

Таким образом, чтобы определить оптимальную оценку состояния $\hat{x}(t/t)$ для модели системы (1.16), (1.17) нужно, помимо приведенных выше статистических характеристик шумов, знать еще оценку начального состояния $\hat{x}(t_0/t_0)$ и корреляционную матрицу ошибки этой оценки $P(t_0)$.

В случае, когда $Mw(t)=\bar{w}\neq 0$, уравнение (1.24), как показано в [3], приобретает вид

$$\frac{d\hat{x}(t/t)}{dt}=A(t)\hat{x}(t/t)+B(t)\bar{w}(t)+K(t)[y(t)-H(t)\hat{x}(t/t)]. \quad (1.29)$$

Решение задачи оптимальной оценки, как показано в [91, 93] путем доказательства принципа двойственности, эквивалентно решению задачи оптимального управления для линейной системы, которая является сопряженной к (1.16) (1.17), причем время в ней обращено, а помехи заменены неслучайными функциями. В [91] доказательство этого принципа проводилось при помощи результатов решений обеих задач.

В [124] эта теорема доказывается в несколько иной трактовке при помощи метода максимального правдоподобия. Принцип двойственности позволяет переносить результаты решения задачи управления с квадратичным критерием качества в теорию оценивания состояния. Так, например, в [8] на основании этого принципа решена интересная обратная задача фильтрации, заключающаяся в отыскании таких статистических характеристик сигнала и помехи, для которых заданный фильтр является оптимальным в смысле минимума среднеквадратичной ошибки фильтрации.

Алгоритм фильтрации Калмана для дискретных систем и алгоритм фильтрации Калмана—Бьюси для непрерывных систем изложены в [1, 3, 4, 14, 19, 21, 24—29, 33].

§ 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Как видно из уравнений оптимального фильтра (1.24—1.28), первым этапом на пути численной реализации алгоритма является решение уравнения Риккати, причем поскольку матрица $P(t)$ является симметрической, то матричное уравнение (1.28) эквивалентно $\frac{n(n+1)}{2}$ скалярным обыкновенным дифференциальным уравнениям, для решения которых вполне естественно использовать метод Рунге—Кутта, как, например, в [94], однако малая величина шага интегрирования, необходимая для обеспечения необходимой точности, зачастую приводит к недопустимым затратам машинного времени. Можно в принципе применять и другие методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, такие как метод Милна или Адамса и др. Но эти методы страдают аналогичными недостатками, имеют тенденцию к расходимости и также не могут, как правило, быть использованы при необходимости решать задачу фильтрации в реальном масштабе времени.

В случае, соответствующем стационарному режиму, т. е. когда $\left.\frac{dP(t)}{dt}\right|_{t=\infty}=0$, дифференциальное уравнение (1.28) переходит в матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$AP+PA^*-PSP+D=0, \tag{2.1}$$

где $S=H^*R^{-1}H$, $D=BQB^*$.

Для решения этого уравнения весьма эффективными оказываются итерационные методы, в частности метод Ньютона и различные его модификации в зависимости от конкретных условий задачи. При использовании метода Ньютона для приближенного решения уравнения (2.1) существуют две опасности: во-первых, метод может расходиться и, во-вторых, он может сходиться не к нужному решению (которое должно быть неотрицательно определенным). Как показано в [96], эти опасности не возникают, если выбрано устойчивое начальное приближение при условии, что исследуемая динамическая система вполне наблюдаема. В [133] это требование ослаблено до требования асимптотической наблюдаемости. В случае, когда начальное приближение выбрано достаточно удачно, в работах [94—97] было предложено использовать схему Ньютона—Рафсона, обеспечивающую квадратичную сходимость к искомому решению. При этом на матрицу A накладывалось ограничение, требующее ее устойчивости. В работе [105] это ограничение удалось снять путем применения модифицированного алгоритма Ньютона—Рафсона, использующего метод Давидона минимизации функций. В [104] дается сравнение с вычислительной точки зрения обоих подходов, отмечается, что в случае устойчивой матрицы A стандартный метод Ньютона—Рафсона оказывается более эффективным, зато модифицированный алгоритм работает и в противном случае. Там же получены необходимые и достаточные условия сходимости метода Ньютона—Рафсона, описывается алгоритм выбора устойчивого начального приближения для систем высокого порядка, заимствованный из работы [146]. Вопросу построения начального приближения в дискретных линейных стационарных системах посвящена работа [97]. Доказана конструктивная теорема, позволяющая строить такое приближение в случае, когда динамическая система является вполне наблюдаемой. В работе [96] также доказывается теорема, позволяющая строить последовательность, которая сходится сверху к решению уравнения (2.1). Отмечено, что этот алгоритм есть не что иное, как метод Ньютона в несколько иной записи, обладающий квадратичной сходимостью, причем условием возможности выбора устойчивого начального приближения также является вполне наблюдаемость пары (A, H).

В [113] для решения (2.1) используется релаксационный метод, который, по мнению автора, оказывается весьма эффективным для систем высокого порядка. В работах [2, 82] для решения уравнения Риккати используется метод квазилинеаризации.

Существует и другой подход к решению уравнения (1.28), указанный еще в [93] и основанный на канонических уравнениях Гамильтона, который иногда называют методом факторизации. Известно, что решение уравнения Риккати (1.28) может быть получено из решения связанной с ним сопряженной системы линейных векторных обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [29])

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -A^*(t)\,\xi + H^*(t)\,R^{-1}(t)\,H(t)\,\rho, & (2.2)\\ \dfrac{d\rho}{dt} = B(t)\,Q(t)\,B^*(t)\,\xi + A(t)\,\rho, & (2.3)\end{cases}$$

причем

$$\rho(t) = P(t)\,\xi(t). \tag{2.4}$$

Тогда, обозначая через $\psi(t, t_0)$ переходную $(2n \times 2n)$-матрицу этой системы, которая связана с ее фундаментальным решением соотношением

$$\Psi(t, t_0) = \theta(t)\theta^{-1}(t_0), \tag{2.5}$$

получим

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \rho(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11}(t, t_0) & \psi_{12}(t, t_0) \\ \psi_{21}(t, t_0) & \psi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t_0) \\ \rho(t_0) \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

здесь $\psi_{ij}(t, t_0)$ — $(n \times n)$-блоки матрицы $\Psi(t, t_0)$. Поскольку в силу (2.4)

$$\rho(t_0) = P(t_0)\,\xi(t_0) = P_0\xi(t_0),$$

то

$$P(t) = [\psi_{21}(t, t_0) + \psi_{22}(t, t_0)\cdot P_0]\,[\psi_{11}(t, t_0) + \psi_{12}(t, t_0)\cdot P_0]^{-1}. \tag{2.7}$$

Такой подход к решению уравнения Риккати использовался также в [106], [125], а в [47] он применялся для исследования асимптотического поведения решения $P(t)$ при $t \to \infty$. Существенным недостатком этого метода является тот факт, что для нестационарных систем получить переходную матрицу $\Psi(t, t_0)$ в явном виде практически никогда не удается. Другая трудность возникает в системах большой размерности из-за необходимости обращать матрицу

$$[\Psi_{11}(t, t_0) + \psi_{12}(t, t_0)\,P_0].$$

В случае стационарных систем, когда матрицы A, B не зависят от времени, переходная матрица $\Psi(t, t_0)$ выражается очень просто, а именно

$$\Psi(t, t_0)=\exp[A\cdot(t-t_0)], \tag{2.8}$$

где

$$A=\begin{bmatrix} -A^* & S \\ D & A \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Для ее вычисления на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$ обычно используется модифицированная аппроксимация матричной экспоненты Кранка — Николсона

$$\exp(Ah)=C+o(h^5), \tag{2.10}$$

где

$$C=\left\{E-\frac{h}{2}A+\frac{h^2}{12}A^2\right\}^{-1}\left\{E+\frac{h}{2}A+\frac{h^2}{12}A^2\right\}. \tag{2.11}$$

В работе [70] дается оценка времени, которое требуется для численного решения таким способом. Оно оказывается приблизительно равным $(25+12k)\mu n^3$, где μ — время, затрачиваемое ЭВМ на одну операцию умножения, n — порядок системы, k обычно лежит в пределах $5\div 20$. Примерно $\frac{9+k}{25+12k}$ 100% этого времени уходит на обращение матриц. На примере системы 9-го порядка в [70] показано, что при $h=10^{-5}$, $(T-t_0)=21$ время счета данным способом на IBM-370 составило около 0,01 мин., тогда как интегрирование методом Рунге—Кутта с шагом $h=4.10^{-3}$ на таком же временном интервале потребовало около 5 мин. машинного времени. При этом совпадали по крайней мере семь знаков в обоих результатах. Такой же метод интегрирования уравнения Риккати использовался в [142].

В [138] получен целый ряд частных решений уравнения (2.1) в случае, когда матрица D может быть представлена в виде суммы трех матриц, удовлетворяющих некоторым условиям. К сожалению, конструктивного метода такого разложения авторам получить не удалось.

При решении уравнения (2.1) важное значение имеет вопрос о стабилизации последовательности корреляционных матриц, получаемых итерационными методами, поскольку положительный ответ на него позволяет использовать фильтр с постоянными коэффициентами. В [17] получены достаточные условия такого ответа.

В [103] путем соответствующего преобразования наблюдаемой пары (A, H) при помощи канонических представлений Луенбергера доказано, что минимальное число разностных уравнений, которые необходимо разрешить для определения элементов корреляционной матрицы ошибки оценки в линейной системе с n-мерным вектором состояния и m-мерным вектором измерений, равно $n\cdot m-m(m-1)/2$, а не $n(n+1)/2$, как обычно.

§ 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

При практическом использовании метода Калмана—Бьюси очень часто приходится сталкиваться с тем фактом, что рассматриваемая динамическая система или система измерений, либо они обе нелинейны, то есть нарушено первое из двух основных предположений теории фильтрации Калмана—Бьюси. Тем не менее, алгоритмы, приведенные в §1, можно весьма успешно применять и в этом случае. Вообще говоря, попытки непосредственно распространить методы линейной рекуррентной фильтрации на нелинейные системы наталкиваются на отмеченную в работе [99] принципиальную трудность. Дело в том, что оптимальный нелинейный фильтр, обеспечивающий минимальную среднеквадратическую ошибку, оказывается бесконечномерным и вследствие этого физически нереализуемым. Поэтому все реализуемые фильтры суть конечномерные аппроксимации оптимального фильтра, из-за чего их обычно называют субоптимальными.

Стандартный подход к решению задачи оптимальной оценки состояния для нелинейных систем основан на линеаризации уравнений относительно некоторой номинальной траектории в предположении, что реальная траектория не слишком сильно уклоняется от нее, либо относительно текущих оценок, начиная с априорной. Если при этом в разложениях нелинейных функций сохраняются лишь члены первого порядка, то к полученным уравнениям можно применять алгоритм фильтрации Калмана—Бьюси без каких-либо изменений (это так называемые фильтры первого порядка для нелинейных систем). Иногда для улучшения характеристик оценок имеет смысл сохранять в разложении и члены второго порядка. В этом случае также удается получить рекуррентные соотношения для оптимальной оценки, а соответствующий фильтр называют фильтром второго порядка.

Рассмотрим вначале фильтр первого порядка [3, 14] на примере дискретной нелинейной системы

$$x(i+1)=f[x(i), i]+B(i+1, i)w(i), \quad n\geqslant 1, \tag{3.1}$$

с нелинейным уравнением измерений

$$y(i)=h[x(i), i]+v(i), \quad m\geqslant 1, \tag{3.2}$$

при обычных предположениях относительно помех. Тогда фильтр первого порядка описывается формулами [3]:

$$\hat{x}(i+1/i)=f[\hat{x}(i/i), i], \tag{3.3}$$

$$P(i+1/i)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i P(i)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^* + B(i+1, i)Q(i)B^*(i+1, i), \tag{3.4}$$

$$P(i+1)=\Big\{E-P(i+1/i)\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i^* \times$$

$$\times\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i P(i+1/i)\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i^* + R(i)\right]^{-1}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i\Big\} P(i+1/i), \tag{3.5}$$

$$K(i+1) = P(i+1)\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{i+1}^* R^{-1}(i+1), \tag{3.6}$$

$$\hat{x}(i+1/i+1) = \hat{x}(i+1/i) + K(i+1)\times$$
$$\times\{y(i+1) - h[\hat{x}(i+1/i), i+1]\}. \tag{3.7}$$

В этих уравнениях $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i$ означает $\frac{\partial h[\hat{x}, i]}{\partial x}$, причем вычисляются эти частные производные либо в точках номинальной траектории, либо относительно текущей оценки: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i$ относительно $\hat{x}(i/i)$, а $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{i+1}$ относительно $x(i+1/i)$. Аналогичные фильтры получены в работах [42, 88, 136].

В качестве простейшего примера построения фильтра второго порядка можно привести работу [38], в которой получен алгоритм фильтрации для линейной динамической системы при нелинейном скалярном измерении:

$$x(i+1) = A(i+1, i)\, x(i) + B(i+1, i)\, w(i), \tag{3.8}$$

$$y(i+1) = h[x(i+1)] + v(i), \quad m = 1. \tag{3.9}$$

Квадратичный фильтр описывается формулами

$$\hat{x}(i+1/i) = A(i+1, i)\,\hat{x}(i, i); \quad \hat{x}(0/0) = \bar{x}_0, \tag{3.10}$$

$$P(i+1/i) = A(i+1, i)\, P(i)\, A^*(i+1, i) +$$
$$+ B(i+1, i)\, Q(i)\, B^*(i+1, i); \quad P(0) = P_0, \tag{3.11}$$

$$K(i+1) = P(i+1/i) H^*(i+1)\{H(i+1) P(i+1/i) H^*(i+1) +$$
$$+ R(i+1) + \frac{1}{2} Sp[G(i+1) P(i+1/i)]\}_{-1}, \tag{3.12}$$

$$\hat{x}(i+1/i+1) = \hat{x}(i+1/i) + K(i+1)\{y(i+1) -$$
$$- h[\hat{x}(i+1/i)] - \frac{1}{2} Sp[G(i+1) P(i+1/i)]\} \tag{3.13}$$

$$P(i+1) = [E - K(i+1) H(i+1)]\, P(i+1 \mid i). \tag{3.14}$$

Здесь

$$H(i+1) = \frac{\partial h}{\partial x^*}\bigg|_{x=\hat{x}(i+1|i)},$$

$$G(i+1) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x^*}\bigg|_{x=\hat{x}(i+1|i)},$$

а ошибка экстраполяции $x(i+1) - \hat{x}(i+1 \mid i)$ предполагается гауссовской.

Указанные алгоритмы дают подход к задаче оценки состояния в нелинейном случае. При их реализации могут возникнуть некоторые осложнения [11, 37]. Так, например, если нелинейность сравнима с ошибками измерений, то линеаризованный фильтр дает неудовлетворительные результаты. Может возникнуть расходимость такая, что ошибки оценки состояния на несколько порядков превысят вычисленные фильтром среднеквадратические ошибки. В [11] отмечается также, что нелинейность в измерениях приводит к тому, что оценка, экстраполированная на один шаг, будет смещенной. Характеристики фильтра в этом случае можно улучшить, если на каждом шаге вычитать ожидаемое значение этого смещения из измерений. Другой способ улучшения фильтра заключается в искусственном увеличении априорной дисперсии измерений. Необходимое значение этого изменения рекомендуется определять путем численного эксперимента. Третий способ уменьшения смещения оценки заключается в использовании итерированного фильтра Калмана [111], т. е. полученная оценка состояния применяется в разложении нелинейных функций, а для вновь линеаризованных уравнений системы опять используется фильтр Калмана.

Следующая сложность в нелинейном случае состоит в выборе начальных данных для линеаризованного фильтра. Поскольку сама идея такого фильтра основана на предположении о малости отклонения действительного состояния от некоторой номинальной траектории или текущей оценки, то в самом начале обработки, когда информации еще немного, неточное задание начальных данных может привести либо к недостаточно быстрой сходимости, либо даже к расходимости фильтра.

Задача уточнения начальных оценок состояния решалась в работе [128], в которой построены итерационные алгоритмы получения таких оценок на основе численных методов теории оптимального управления.

В работе [140] предлагается аналитический метод оценки ошибки фильтрации. Апостериорная условная плотность распределения ошибки оценки состояния с учетом данных измерений $P(\tilde{x}/y)$ разлагается в ряд по ортогональным функциям Эрмита. После того, как найдена эта плотность вероятности, определяется математическое ожидание ошибки оценки и вносится поправка к оценке субоптимального фильтра. Такой подход применяется, когда хотят сохранить калмановскую структуру фильтра для существенно нелинейных систем. При этом вектор состояния $x(t)$ аппроксимируется гауссовским вектором $z(t)$, для которого решается система уравнений оптимальной фильтрации, а поправка к $z(t)$ вычисляется вышеописанным способом.

В работе [102] сравниваются с точки зрения их вычислительной эффективности различные варианты фильтров и выделяются области их предпочтительного применения.

§ 4. АЛГОРИТМ СГЛАЖИВАНИЯ

Задача сглаживания возникает, например, при обработке результатов эксперимента после его окончания, когда желательно уточнить изменения параметров исследуемой системы в ходе эксперимента. Очевидно, что оценка, получаемая в результате решения этой задачи, должна быть не хуже оценки фильтрации, поскольку используется большее количество данных измерений. Желательно, чтобы алгоритм решения задачи сглаживания также имел рекуррентную форму, что упростило бы его реализацию на ЭВМ.

В настоящее время рассматриваются в основном задачи сглаживания следующих трех типов [25]:

I. Сглаживание на закрепленном интервале, т. е. когда по данным измерений, полученных за время $t_0 \leqslant t \leqslant t_k$, нужно получить оценку

$$\hat{x}(\tau/t_k), \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t_k.$$

II. Сглаживание в закрепленной точке, т. е. оценка $\hat{x}(t_1/t)$, $t_1 \leqslant t$, постоянно уточняется по мере поступления новых данных $y(t)$.

III. Сглаживание с постоянным запаздыванием, т. е. получается оценка

$$\hat{x}(t-\delta/t) \quad (\delta > 0, \ t \geqslant \delta, \ \delta = \text{const}).$$

Уравнения объекта и измерений, как и ранее, могут быть двух типов — дискретные или непрерывные:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,w(t), \\ y(t) = C(t)\,x(t) + v(t), \end{cases} \tag{4.1}$$

или

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{k+1/k}x_k + B_k w_k, \\ y_{k+1} = H_{k+1}x_{k+1} + V_{k+1}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Как и ранее, известны оценка начального состояния и корреляционная матрица этой оценки, шумы w, v являются белыми гауссовскими. Тогда решение задачи I дается формулами:

$$\dot{\hat{x}}(\tau/t_1) = A(\tau)\hat{x}(\tau/t_1) + K(\tau)\,[\hat{x}(\tau/t_1) - \hat{x}(\tau/\tau)] \tag{4.3}$$

для $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1$, где $K(t)$ — матрица передачи оптимального сглаживающего фильтра, имеет вид

$$K(\tau) = B(\tau)\,Q(\tau)\,B'(\tau)\,P^{-1}(\tau/\tau), \tag{4.4}$$

где $P(\tau/\tau)$ — корреляционная матрица ошибки оценки, получаемой при оптимальной фильтрации $\hat{x}(\tau/\tau)$.

Корреляционная матрица ошибки оценки $\tilde{x}(\tau/t_1)$ оптимального сглаживания удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{P}(\tau/t_1)=[A(\tau)+K(\tau)]\,P(\tau/t_1)+P(\tau/t_1)\,[A(\tau)+K(\tau)]^*-$$
$$-G(t)\,Q(\tau)\,G'(\tau) \tag{4.5}$$

с граничным условием $P(t_1/t_1)$, полученным из задачи оптимальной фильтрации.

Решение дискретной задачи I имеет вид:

$$\hat{x}(k/N)=\hat{x}(k/k)+K(k)\,[\hat{x}(k+1/N)-\hat{x}(k+1/k)], \tag{4.6}$$

$k=N-1,\ N-2,\ldots,0$; $x(N/N)$ — граничное условие при $k=N-1$,

$$K(k)=P(k/k)\,A^*(k+1/k)\,P^{-1}(k+1/k), \tag{4.7}$$

$$P(k/N)=P(k/k)+K(k)\,[P(k+1/N)-P(k+1/k)]\,K^*(k). \tag{4.8}$$

Этот алгоритм получен в [109].

Таким образом, как видно из уравнений (4.3)—(4.8), задача сглаживания на закрепленном интервале не может быть решена без предварительного решения задачи оптимальной фильтрации.

Задача сглаживания в закрепленной точке (II) решается при помощи следующего алгоритма:

а) **Непрерывный случай** [110]:

$$\dot{\hat{x}}(t_1/t)=L(t)\,K(t)\,[y(t)-C(t)\,\hat{x}(t/t)],\quad t\geqslant t_1. \tag{4.9}$$

Здесь $K(t)$ — матрица передачи оптимального фильтра, определяемая по формуле (1.26), $L(t)$ — матрица передачи сглаживающего фильтра размера $(n\times n)$, $\hat{x}(t_1/t_1)$ — начальное условие.

Матрица $L(t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{L}(t)=-L(t)\,[A(t)+B(t)\,Q(t)\,B^*(t)\,P^{-1}(t/t)]. \tag{4.10}$$

Корреляционная матрица ошибки сглаживания $x(t_1/t)=x(t_1)-\hat{x}(t_1/t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{P}(t_1/t)=-L(t)\,K(t)\,R(t)\,K^*(t)\,L^*(t). \tag{4.11}$$

б) **Дискретный случай** [72]:

$$\hat{x}(k/j)=\hat{x}(k/j-1)+W(j)\,C^*(j)\,R^{-1}(j)\,[y(j)-$$
$$-C(j)\cdot A(j,j^{-1})\cdot\hat{x}(j-1/j-1)], \tag{4.12}$$

где $j=k+1,\ k+2,\ldots,\ \hat{x}(k/k)$ — начальное условие, $W(j)$ — $n\times n$-матрица передачи сглаживающего фильтра, определяемая из уравнения

$$W(j)=W(j-1)\,A^*(j,j-1)\,[I-C^*(j)\,R^{-1}(j)\,C(j)\,P(j/j)] \tag{4.13}$$

с начальным условием $W(k)=P(k/k)$. Корреляционная матрица ошибки сглаживания $\tilde{x}(k/j)=x(k)-\hat{x}(k/j)$ удовлетворяет уравнению

$$P(k/j)=P(k/j-1)-W(j)\cdot[C^*(j)R^{-1}(j)C(j)P(j/j-1)\times$$
$$\times C^*(j)R^{-1}(j)C(j)+C^*(j)R^{-1}(j)C(j)]W^*(j), \qquad (4.14)$$

$j=k+1,\ k+2, \ldots,\ P(k/k)$ — начальное условие.

Ранее Медич предложил несколько иной алгоритм решения, в котором уравнение (4.12) имело вид аналогичный (4.6), а при вычислении матрицы передачи необходимо было на каждом шаге обращать корреляционную матрицу ошибки оценки одношагового предсказания $P(k+1/k)$. В описанном алгоритме Фразера обращение $P(k+1/k)$ заменено обращением корреляционной матрицы помехи измерений $R(k)$, размерность которой, как правило, намного меньше.

При описанных алгоритмах сглаживания в закрепленной точке задача II может решаться еще до окончания эксперимента. Вообще же говоря, задача II может быть решена с помощью алгоритма решения задачи I.

Задача сглаживания с постоянным запаздыванием (задача III) для непрерывных систем была решена в [124].

$$\dot{\hat{x}}(t/t+T)=A(t)\hat{x}(t/t+T)+Z(t+T)K(t+T)[y(t+T)-$$
$$-C(t+T)\hat{x}(t+T/t+T)]+B(t)Q(t)B^*(t)P^{-1}(t)[\hat{x}(t/t+T)-$$
$$-\hat{x}(t/t)] \text{ при } t\geqslant t_0, \qquad (4.15)$$
$$K(t)=P(t)C^*(t)R^{-1}(t), \qquad (4.16)$$

$Z(t+T)$ — матрица передачи сглаживающего фильтра размера $(n\times n)$. Начальное условие — это результат сглаживания в закрепленной точке $\hat{x}(t_0/t_0+T)$. $Z(t+T)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{Z}(t+T)=[A(t)+B(t)Q(t)B^*(t)P^{-1}(t)]Z(t+T)-$$
$$-Z(t+T)[A(t+T)+$$
$$+B(t+T)Q(t+T)B^*(t+T)P^{-1}(t+T)] \qquad (4.17)$$

с начальным условием $Z(t_0+T)=L(t_0+T)$, где $L(t)$ — матрица передачи из алгоритма решения задачи II.

Корреляционная матрица ошибки оценки сглаживания с постоянным запаздыванием $\tilde{x}(t/t+T)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{P}(t/t+T)=[A(t)+B(t)Q(t)B^*(t)P^{-1}(t)]P(t/t+T)+$$
$$+P(t/t+T)[A(t)+B(t)Q(t)B^*(t)P^{-1}(t)]^*-Z(t+T)K(t+T)\times$$
$$\times R(t+T)K^*(t+T)Z^*(t+T)-B(t)Q(t)B^*(t) \qquad (4.18)$$

с начальным условием в виде корреляционной матрицы ошибки сглаживания в закрепленной точке $P(t_0/t_0+T)$.

И, наконец, дискретный алгоритм решения задачи III определяется соотношением [25]:

$$\hat{x}(k+1/k+1+N)=A(k+1,\ k)\,\hat{x}(k/k+N)+Z(k+1+N)\times$$
$$\times K(k+1+N)\,\tilde{y}(k+1+N/k+N)+U(k+1)\,[\hat{x}(k/k+N)-$$
$$-\hat{x}(k/k)], \qquad (4.19)$$

$\hat{x}(0/N)$ — начальное условие. Матрицы передачи Z и U определяются выражениями

$$Z(k+1+N)=\prod_{i=k+1}^{k+N} P(i/i)\,A^*(i+1,\ i)\,P^{-1}(i+1/i) \qquad (4.20)$$

$$U(k+1)=B(k+1,\ k)\,Q(k)\,B^*(k+1,\ k)\times$$
$$\times A^*(k+1,\ k)\,P^{-1}(k/k). \qquad (4.21)$$

Корреляционная матрица ошибки сглаживания удовлетворяет уравнению

$$P(k+1/k+1+N)=P(k+1/k)-Z(k+1+N)K(k+1+N)\times$$
$$\times C(k+1+N)P(k+1+N/k+N)\,Z^*(k+1+N)-$$
$$-[P(k/k)\,A^*(k+1,\ k)\,P^{-1}(k+1/k)]^{-1}\,[P(k/k)-P(k/k+N)]\times$$
$$\times\{[P(k/k)\,A^*(k+1,\ k)\,P^{-1}(k+1/k)]^*\}^{-1} \qquad (4.22)$$

с начальным условием $P(0/N)$.

Как отмечается в [25], алгоритмы решения всех трех задач сглаживания могут быть получены один из другого путем матричных преобразований. Первоначально эти алгоритмы были получены с помощью леммы об ортогональной проекции [109], аналогично тому, как и алгоритм фильтрации Калмана—Бьюси.

После выхода работы Медича [109] появилось много работ, посвященных задачам сглаживания [51—57, 115, 130, 137].

Необходимость решения задачи сглаживания может возникнуть при оценке состояния системы с запаздыванием, которая моделируется уравнениями

$$\begin{cases} x(k+1)=\sum\limits_{i=0}^{L} A_i(k+1)\,x(k-i)+w(k), \\ y(k)=H(k)\,x(k)+r(k), \end{cases} \qquad (4.23)$$

причем шум $w(k)$ — белый гауссовский, а шум $r(k)$ может быть результатом пропускания белого шума $v(k)$ через формирующий фильтр

$$r(k+1)=S(k+1)\,r(k)+v(k). \qquad (4.24)$$

Для решения задачи сглаживания с фиксированным запаздыванием N нужно получить несмещенные оценки

$$\hat{x}(k-N-j\,|\,k),\ j=0,\ \ldots,\ L,$$

обладающие минимальной дисперсией. В [55] эта задача решается при помощи расширения пространства состояний, которое заключается в следующем.

Вводится новый вектор состояния

$$X^*(k)=\{x^*(k) \vdots x^*(k-1) \vdots \ldots \vdots x^*(k-L) \vdots \ldots$$
$$\ldots \vdots x^*(k-L-N)\}, \qquad (4.25)$$

имеющий размерность $n(L+N+1)$ и удовлетворяющий уравнению

$$X(k+1)=C(k+1)X(k)+D(k+1)w(k), \qquad (4.26)$$

где $C(k)$ и $D(k)$ — блочные матрицы, легко определяемые из (4.23) и (4.25). Уравнение измерений сводится к

$$y(k)=G(k)X(k)+r(k). \qquad (4.27)$$

Тем самым модель системы свелась к ранее рассмотренным, а задача сглаживания — к задаче фильтрации.

Аналогичным образом решается задача для непрерывных систем с запаздыванием вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=\sum\limits_{i=0}^{L} A_i(t)\, x(t-\alpha_i)+w(t), \\ y(t)=\sum\limits_{i=0}^{M} H_i(t)\, x(t-\alpha_i)+v(t), \end{cases} \qquad (4.28)$$

которая после дискретизации и расширения состояния также сводится к ранее исследовавшимся.

В [137] получены уравнения для оценки сглаживания с постоянным запаздыванием для дискретного аналога системы [4.28] способом, аналогичным тому, как это делалось в [25] для системы (4.2).

В [51] для получения эффективных алгоритмов сглаживания с постоянным запаздыванием используется модифицированный алгоритм Брайсона—Фразира, предложенный в работе [50] для сглаживания на закрепленном интервале.

В работе [54] обсуждаются вычислительные аспекты решения задачи сглаживания в закрепленной точке из [52] и с постоянным запаздыванием из [55]. Показано, что алгоритмы, основанные на расширении пространства состояния, включают в себя меньшее число арифметических операций, нежели алгоритмы (4.9—4.14) и (4.1.—4.22).

В [57] дается метод расширения пространства состояний на нелинейные дискретные системы

$$\left.\begin{aligned} x(k+1)&=A[x(k), k]+B[x(k), k]\, w(k) \\ y(k)&=H[x(k), k]+v(k), \end{aligned}\right\} \qquad (4.29)$$

а также на аналогичные непрерывные системы с обычными предположениями относительно шумов. После сведения методом расширения пространства состояний задачи сглаживания к задаче фильтрации построены фильтры второго порядка. В результате получен устойчивый алгоритм решения задачи сглаживания с постоянным запаздыванием.

В [115 для получения оценок $\hat{x}(k+1-i/k+1)$, $i=1, 2, \ldots, N$, используется nN-мерный фильтр Калмана в модификации Кайлата [89] для расширенного вектора состояния, а в работе [114], также используя метод обновления измерений из [89], авторы построили алгоритм фильтрации калмановского типа для нелинейных дискретных систем с запаздыванием и окрашенным шумом в измерениях. Этот алгоритм очень легко можно приспособить к решению всех трех классов задач сглаживания.

В работе [144] получен алгоритм сглаживания на закрепленном интервале для системы с распределенными параметрами, описанной в § 5, формулы (5.14—5.15). Ввиду громоздкости этот алгоритм здесь не приводится. В [130] рассматривается задача фильтрации и сглаживания с постоянным запаздыванием для систем вида (4.28). При этом алгоритм фильтрации описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а алгоритм сглаживания — системой уравнений в частных производных, для решения которой используется метод разделения переменных. Доказана асимптотическая устойчивость обоих фильтров.

Вопрос устойчивости алгоритмов сглаживания с постоянным запаздыванием обсуждается также в работе [53]. Неустойчивость алгоритма из [25] вызвана наличием в нем неуправляемого члена. Доказываются достаточные условия асимптотической устойчивости сглаживающего фильтра и построен такой фильтр.

§ 5. СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В случае, когда уравнение динамики системы представляет собой дифференциальное уравнение с частными производными, возможны различные подходы к задаче оптимальной фильтрации. Один из них, непрямой, заключается в том, что уравнение с частными производными каким-либо образом сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой можно построить обычный фильтр Калмана-Бьюси. В [98], например, рассматриваются системы вида

$$L_t x(z, t) - b(t) L_z x(z, t) = g(t)\, \xi_{10}(z, t), \tag{5.1}$$

где $L_t = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{\partial^i}{\partial t^i}$, $L_z = \sum_{j=0}^{m} C_j(z) \frac{\partial^j}{\partial z^j}$, $\xi_{10}(z, t)$—случайный процесс типа белого шума, $M\xi_{10}(z, t) = 0$,

$$M\{\xi_{10}(z, t)\, \xi_{10}(y, \tau)\} = q_{10}(z, t) \cdot \delta(z-y) \cdot \delta(t-\tau). \tag{5.2}$$

Заданы также необходимые начальные $x^j(z,0)$ и граничные условия

$$L_{zi}x(z,t)=\xi_{zi}.$$

Исходное уравнение обычным образом сводится к системе уравнений, содержащих лишь первую частную производную по времени вида

$$\frac{\partial\vec{x}(z,t)}{\partial t}=F_1(t)\vec{x}(z,t)+F_2(t)L_z\vec{x}(z,t)+G_1(t)\vec{\xi}_1(z,t). \tag{5.3}$$

Уравнение измерений имеет обычный вид

$$\vec{W}(z,t)=H(t)\vec{x}(z,t)+\vec{\eta}(z,t), \tag{5.4}$$

где $\eta(t)$ — помеха типа белого шума.

Дальнейший переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется при помощи собственных функций сопряженного дифференциального оператора L_z^*, которые определяются из уравнения

$$L_z^*\psi_n(z)-\lambda_n\psi_n(z)=0 \tag{5.5}$$

при однородных сопряженных граничных условиях $L_{zi}^*\psi_n(z)=0$; здесь L_{zi}^* — сопряженный оператор для дифференциального оператора граничных условий. Излагаемый метод ограничен случаем, когда можно вычислить и собственные функции $\varphi_n(z)$ оператора L_z и собственные функции $\psi_n(z)$ сопряженного оператора.

При этих предположениях, умножая, как обычно, на $\psi_n(z)$ обе части уравнения (5.3) и интегрируя, получаем

$$\frac{d\vec{y}_n(t)}{dt}=F_1(t)\vec{y}_n(t)+F_2(t)\int_a^b\psi_n(z)L_z\vec{x}(z,t)\,dz+G_1\vec{\xi}_{1n}(z,t), \tag{5.6}$$

$$\vec{v}_n(t)=H_n(t)y_n+\vec{Q}_n(t),$$

где $y_n(t)=\int_a^b\psi_n(z)\vec{x}(z,t)\,dz$; $\frac{d\vec{y}_n(t)}{dt}=\int_a^b\psi_n(z)\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}\cdot dz$; $v_n(t)=$ $=\int_a\psi_n(z)w(z,t)\cdot dz$. Аналогичным образом выражаются θ_n через $\eta(z,t)$, а $\xi_{1n}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\\xi_{1n}(t)\end{pmatrix}$ — через $\xi_{10}(z,t)$.

Затем, используя теорему Грина и уравнение (5.5), можно легко получить следующую систему:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\vec{y}_n(t)}{dt} &= F_n(t)\cdot y_n(t) + G_n(t)\,\xi_n(t),\\
v_n(t) &= H_n(t) + \theta_n(t)
\end{aligned}\right\} \tag{5.7}
$$

с начальным условием

$$
\vec{y}_{n0} = \int_a^b \psi_n(z)\,\vec{x}_0(z)\,dz;\quad F_n(t) = F_1(t) + \lambda_n F_2(t);\quad G_n(t) = G_1(t),
$$

$$
H_n(t) = H(t),
$$

$$
\xi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \xi_{1n}^*(t) + \dfrac{1}{g(t)}\,\xi_{2n}^*(t) \end{pmatrix}.\quad \xi_{2n}^*(t)
$$

определяется из граничных условий исходного уравнения. Система (5.7) уже полностью готова для применения алгоритма Калмана — Бьюси. Теперь остается выяснить вопрос о том, как связана оценка $\hat{x}(z, t)$ исходного уравнения с оценкой $\hat{y}_n(t)$ для системы (5.7). Как показано в [98], эта связь такая же, как и для решений уравнения исходного и системы (5.7), а именно

$$
\hat{x}_n(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{y}_n(t)\,\varphi_n(z). \tag{5.8}
$$

При доказательстве используется лишь то, что оценка $\hat{x}(z, t)$ есть условное математическое ожидание по имеющимся измерениям.

Рассмотренный подход касается случая, когда мы имеем непрерывные измерения $w(z, t)$ и по пространству и во времени. В этой же работе рассматривается более реальный случай, когда мы имеем последовательные во времени измерения $w_k(z)$, отстоящие друг от друга на Δt. После дискретизации уравнения (5.3) и аналогичных рассуждений получена система уравнений, к которой может быть применен дискретный фильтр Калмана, а искомая оценка выражается формулой

$$
\hat{x}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{y}_{n,k}\,\varphi_n(z). \tag{5.9}
$$

Далее, в предположении, что случайные процессы $y_n(t)$ и $y_m(t)$ или $y_{n,k}$ и $y_{m,k}$ не коррелированы друг с другом при различных n, m непосредственно из определения корреляционной матрицы получаем

$$P(z, t)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(t)\cdot\varphi_n^2(z), \qquad (5.10)$$

$$P_k(z)=\sum_{1}^{\infty} P_{n,k}\varphi_n^2(z). \qquad (5.11)$$

Затем в [98] получены оценки качества фильтрации при замене бесконечных сумм конечными, что имеет место при практическом счете, а также рассмотрен случай, когда измерения поступают из дискретных точек пространства в дискретные моменты времени. Подход к решению в этом случае остается прежним.

В [13] обсуждается система, состояние которой описывается гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial^2\xi(x, t)}{\partial t^2}=a^2(x, t)\frac{\partial^2\xi(x, t)}{\partial x^2}+\eta(x, t) \qquad (5.12)$$

с начальными и граничными условиями $\xi(t, 0)=\xi_0(t)$, $\xi(t,X)=\xi_X(t)$, $\eta(t, x)$ — белый шум, а уравнения измерений имеет простой вид

$$\zeta(t)=\xi(t)+\chi(t),$$

где $\chi(t)$ — гауссовская помеха. Для перехода к системе уравнений калмановского вида производится конечно-разностная аппроксимация производной $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

В работе [71] решается задача оценки загрязненности воздуха. При этом модель рассматриваемой системы имеет вид

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t}=-V_\nabla C(x, y, z, t)+\nabla(D\nabla C(x, y, z, t))+$$
$$+Q_C(x, y, z, t),$$

здесь C — концентрация примесей. Первый член в правой части это конвективный перенос, второй — перенос за счет диффузии, а третий — характеризует источники примесей. Заданы необходимые граничные условия. Для дискретизации этого уравнения использовалась явная схема Кранка—Николсона, которая позволила привести его к виду

$$Ax(t+1)=(2E-A)x(t)+D, \qquad (5.13)$$

где $x(t)$ — вектор концентраций, A — очень большая ($n\times n$, где n — число узлов сетки), но разреженная матрица, D — вектор, связанный с граничными условиями. Уравнение (5.13) уже весьма близко к требуемому.

Другой непрямой подход к системам с распределенными параметрами основан на принципе двойственности. В [34] для решения задачи фильтрации случайного поля, описываемого уравнением параболического типа с однородными граничными условиями, доказывается теорема двойственности, позволяющая для построения оптимальной оценки использовать решения детерминированной задачи оптимального управления. Отмечено, что аналогичным образом можно рассмотреть и случай гиперболических уравнений. Более подробно такой подход описан в [35]. Непрямой подход к распределенным системам применялся также в [48, 84, 123].

В отличие от изложенного выше в работе [143] предложен прямой подход, обобщающий метод Калмана—Бьюси. Принципиальная трудность прямого подхода состоит в том, что для произвольного уравнения в частных производных нельзя выписать решение в явном виде. В [143] рассматривается линейная распределенная система

$$\frac{\partial X(x, t)}{\partial t} = L_x X(x, t) + B(x, t) W(x, t), \tag{5.14}$$

определенная при $t \geqslant t_0$ в пространственной области $D \in R^r$, $X(x, t)$ — N-вектор переменных состояния объекта, $B(x, t)$ — известная матрица размерности $N \times p$; L_x — линейный дифференциальный матричный оператор размерности $N \times N$. Уравнение измерений имеет вид

$$Y(x, t) = Z(x, t) + V(x, t) = H(x, t) X(x, t) + V(x, t), \tag{5.15}$$

где $Y(x, t)$ — известный m-вектор измерений, $V(x, t)$ — m-мерный векторный случайный процесс, $H(x, t)$ — $m \times N$ матрица измерений или, более общо, матричный интегро-дифференциальный оператор по отношению к X. Обычно в качестве (5.14) рассматривают уравнение диффузии или волновое уравнение.

Построение алгоритма фильтрации производится при следующих предположениях: 1) граничные условия являются однородными, т. е. детерминированными; 2) $W(x, t)$, $V(x, t)$ суть некоррелированные случайные процессы с математическими ожиданиями, равными нулю, и корреляционными матрицами

$$M[W(x, t) W^*(x, \tau)] = Q(x, x_1, t) \delta(t - \tau),$$
$$M[W(x, t) W^{-1}(x, \tau)] = R(x, t) \delta(x - x_1) \delta(t - \tau),$$

$Q(x, x_1, t)$ — неотрицательно определенная матрица, $R(x, t)$ положительно определена, причем обе матрицы непрерывно дифференцируемы по x, t; 3) задача (1), (2) вместе с граничными условиями корректна по Адамару.

Кроме того, считается заданной оценка $X(\hat{x}, t_0/t_0)$, $x \in D$, начального состояния $X(x, t_0)$ вместе с корреляционной матрицей ошибки этой оценки.

На основании имеющихся данных и сделанных предположений нужно найти оценку $\hat{X}(x, t/t)$ состояния $X(x, t)$, имеющую минимальную среднеквадратическую ошибку, при помощи линейного преобразования данных измерений

$$\hat{X}(x, t/t)=\int_{t_0}^{t}\int_D G(x, t; \xi, \tau) Y(\xi, \tau)\, dD_\xi d\tau. \tag{5.16}$$

Далее в [143] показано, что оптимальное ядро, обеспечивающее минимум среднеквадратической ошибки оценки $\hat{X}(x, t/t)$, удовлетворяет обобщенному интегральному уравнению Винера — Хопфа, а затем, пользуясь тем, что в рассматриваемом случае можно в явном виде выписать решение для $X(x, t)$ при помощи матричной функции Грина, таким же образом, как в [93] для обыкновенных дифференциальных уравнений, можно получить уравнения оптимального фильтра:

$$\frac{\partial \hat{X}(x, t/t)}{\partial t}=h_x\hat{X}(x, t/t)+\int_D P(x, s, t) H^*(s, t) R^{-1}(s, t)\times$$

$$\times[Y(s, t)-H(s, t)\hat{X}(s, t/t)]\, dD_s \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial P(x, x_1, t)}{\partial t}=h_x P(x, x_1, t)+P(x, x_1, t) h_x^*+B(x, t) Q(x, x_1, t)\times$$

$$\times B^*(x_1, t)-\int_D P(x, s, t) H^*(s, t) R^{-1}(s, t) H(s, t)\times$$

$$\times P(s, x_1, t)\, dD_s. \tag{5.18}$$

Граничные условия получаются из условий для исходных уравнений и помех. Обычный фильтр Калмана-Бьюси получается как частный случай, когда область D сводится к точке.

Прямой подход к задаче фильтрации в распределенных системах типа (5.14), (5.15) применялся и в [43], отличие от [143] заключается в ненулевых граничных условиях. Для определения матрицы передачи фильтра $G(x, t; s, \tau)$ использовался метод, описанный в [29] для обыкновенных дифференциальных уравнений, который использует принцип максимума Понтрягина. При этом естественным образом через условия трансверсальности учитываются граничные условия, в том числе и неоднородные. Корреляционная матрица ошибки оценки удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Риккати, которое получено аналогичным путем, как и для более простых систем в [29].

В [144] алгоритм фильтрации (5.17), (5.18) обобщен на случай, когда уравнение измерений имеет вид

$$Y(x, t)=H(x, t) X(x, t)+N(x, t)\, \Omega(x, t), \tag{5.19}$$

где $\Omega(x, t)$ получен в результате прохождения гауссовского белого шума через систему с распределенными параметрами

$$\frac{\partial \Omega(x, t)}{\partial t}=S_x\Omega(x, t)+V(x, t) \tag{5.20}$$

с начальным условием $\Omega(x, t_0)=\Omega_0(x)$, $x \in D$, и граничным условием $s_x\Omega(x, t)=0$, $x \in \partial D$ — граница области D. $S_x[\cdot]$,

$S_x[\cdot]$ — хорошо обусловленные пространственные дифференциальные операторы.

В [148] рассматривается задача фильтрации для систем, описываемых смешанной системой уравнений

$$\dot{x}(t) = f[x(t), z(t_1, t), \ldots, z(r_\beta, t)] + \\ + \int_0^1 K[z(r, t), r, t]\, dr + \xi(t), \tag{5.21}$$

$$z_t(r, t) = -M(r, t) z_r(r, t) + g[z(r, t), r, t] + \zeta(r, t), \tag{5.22}$$

которые определены при $t \geqslant 0$ на нормированной пространственной области $r \in [0, 1]$, $x(t)$ и $z(r, t)$ суть n_1- и n_2-мерные векторы состояния, $\xi(t)$ и $\zeta(r, t)$ — случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и произвольными другими моментами, $z_t = \frac{\partial z}{\partial t}$; $z_r = \frac{\partial z}{\partial r}$. Измерения $y(t)$, представляющие n_3-мерный вектор, подчиняются уравнению

$$y(t) = h\left[x(t), z(r_1', t), \ldots, z(r_\gamma', t), t\right] + \\ + \int_0^1 H[z(r, t), r, t] \cdot dr + \eta(t), \tag{5.23}$$

$\eta(t)$ — случайный процесс с нулевым средним значением $0 < r_1 < \ldots < r_\beta \leqslant 1$, $0 < r_1' < \ldots < r_\gamma' \leqslant 1$.

Таким образом, измерения, вообще говоря, зависят от сосредоточенных параметров состояния $x(t)$ в β точках и распределенных параметров $z(t)$ в γ точках измерений и проинтегрированных $z(r, t)$ по пространственной области. Начальные условия для (5.21), (5.22) имеют вид

$$x(0) = x_0, \quad z(\tau, 0) = z_0(\tau), \quad z(0, t) = b(x(t)).$$

Поскольку очень общая постановка задачи выходит за рамки возможностей строгих математических методов решения, авторы использовали чисто формальное обобщение метода Калмана—Бьюси. Удалось получить формулы для оценки состояния и корреляционной матрицы ошибки оценки, которые здесь не приводятся ввиду их чрезвычайной громоздкости. В [148] получены также соотношения для оценок сглаживания. Приводится обширная библиография, в том числе и по фильтрации систем с распределенными параметрами.

§ 6. АЛГОРИТМЫ ФИЛЬТРАЦИИ В СИСТЕМАХ С ОКРАШЕННЫМИ ШУМАМИ И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ОБОБЩЕНИЯ

Предложенный Калманом алгоритм фильтрации, помимо линейности динамической системы, требует еще одного весьма жесткого ограничения, а именно, помехи должны представлять собой случайные процессы типа белого шума, что в практических задачах зачастую не выполнено.

Первым ослаблением этого ограничения явилось введение дополнительного формирующего фильтра. Пусть, например, аддитивная помеха измерений есть случайный процесс, полученный в результате наложения белого шума на некоторую динамическую систему, то есть к уравнениям (1.16—1.17) добавляется еще одно

$$\frac{dv(t)}{dt}=S(t)v(t)+\xi(t), \tag{6.1}$$

где $\xi(t)$ — помеха типа белого шума. В этом случае можно применять изложенный в § 1 алгоритм оптимальной фильтрации, если использовать предложенный в [92] метод расширения состояния, который сводит марковский процесс высшего порядка к простому марковскому процессу. Вводится расширенный вектор состояния

$$z(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

который является решением уравнения

$$\frac{dz(t)}{dt}=F(t)z(t)+G(t)u(t), \tag{6.3}$$

где

$$F=[A \vdots S], \quad G=[B \vdots E], \quad u=\begin{bmatrix} w \\ \xi \end{bmatrix}, \tag{6.4}$$

а уравнение измерений имеет вид

$$y(t)=D(t)z(t), \tag{6.5}$$

где $D=[C \vdots I]$. После этого можно применять алгоритм фильтрации Калмана — Бьюси. Аналогичный подход использовался в работах [9, 10, 20]. В работах [9, 10] рассматривается формирующий фильтр вида $L_t v(t)=N_t\xi(t)$, где $\xi(t)$ — порождающий помеху в измерениях белый шум; а L_t, N_t — линейные дифференциальные операторы

$$L_t=\sum_{j=0}^{l} a_j(t)\frac{d^j}{dt^j}; \quad N_t=\sum_{j=0}^{m} b_j(t)\frac{d^j}{dt^j}.$$

При этом в [9] исследован случай $m=0$, а в [10] сделано обобщение на $0\leqslant m\leqslant l$.

В работе [117] рассмотрена задача фильтрации в случае, когда корреляционная матрица помехи измерения равна нулю

$$Mv(t)v^*(T)=R(t)\delta(t-\tau), \; R=0.$$

Отмечается, что в этом случае следует соблюдать определенную осторожность. Дело заключается в следующем. Возможны два подхода при $R=0$.

1. Можно положить $R = \varepsilon R_0$, где R_0 — положительно определенная матрица, ε — положительный скаляр. Тогда можно расписать обычные уравнения Калмана-Бьюси, получить решение, зависящее от ε, и перейти к пределу при $\varepsilon = 0$. Такой подход использовался в [100].

2. Если $\varepsilon = 0$, то продифференцировав выходной сигнал $y(t)$, можно получить, по крайней мере в случае, когда $CBQB^*C^*$ невырождена, новый вектор измерений $\dot{y}(t)$, содержащий невырожденный белый шум с корреляционной матрицей Q, после чего можно опять применять алгоритм Калмана-Бьюси. Такой подход использован в [60].

Как показано на конкретных примерах в [117], эти методы могут давать различные результаты, что является естественным следствием различия в начальных условиях, поэтому необходимо внимательно следить за их выбором.

Метод расширения состояния работает и в том случае, когда обе помехи $w(k)$ и $v(k)$ получаются в результате пропускания белых шумов $\eta_1(k)$ и $\eta_2(k)$ через формирующие фильтры, причем не исключается возможность взаимной корреляции шумов. В таких предположениях Калманом [92] получен алгоритм для оптимальной оценки (см. также [25], стр. 222—225).

В работе [59] для фильтрации сигналов с коррелированными помехами предлагается метод разностных измерений, который позволяет обойтись без расширения вектора состояния. Суть его заключается в следующем. Пусть дана дискретная система

$$x(k+1) = A(k+1, k)\,x(k) + B(k+1, k)\,w(k),$$

$$z(k+1) = C(k+1)\,x(k+1) + v(k+1),$$

где все члены, за исключением $v(k)$, описаны в § 1. $v(k)$ представляет собой коррелированный процесс, полученный из белого шума $\xi(k)$ при помощи формирующего фильтра

$$v(k+1) = S(k+1, k)\,v(k) + \xi(k),$$

причем статистические характеристики $v(k)$ в начальный момент известны. В работе [59] предлагается следующая схема измерений: каждое новое измерение есть линейная комбинация двух последовательных измерений

$$\zeta(k) = z(k+1) - S(k+1, k)\,z(k).$$

В этом случае уравнение измерений приобретает вид

$$\zeta(k) = [C(k+1)\,A(k+1, k) - S(k+1, k)\,C(k)]\cdot x(k) + {}$$
$$+ [C(k+1)\,B(k+1, k)\,w(k) + \xi_k(k),$$

т. е. получены измерения с аддитивной помехой типа белого шума.

Аналогичный прием можно использовать и в непрерывном случае $\dot{x}(t) = A(t)\,x + B(t)\,w(t)$, $y(t) = C(t)\,x + v(t)$, $\dot{v}(t) = S(t)\,v + \xi(t)$, $w(t)$, $\xi(t)$ — белые шумы.

Можно определить новое измерение вида

$$y_H(t)=\dot{y}(t)-S(t)\,y(t).$$

Тогда новое измерение можно представить в виде

$$y_H(t)=C_H(t)\,x(t)+\zeta(t),$$

где $C_H=\dot{C}(t)+CA-SC$, $\zeta(t)=CBw+\xi$. Корреляционная матрица для ζ определяется очень просто через корреляционные матрицы w, ξ, а также через B и C.

Обобщение на случай, когда помехи в системе и в измерениях коррелируют между собой, причем матрица корреляций имеет вид

$$M\{w_k v_j^*\}=R_{wv}(k,\ j)\,\delta_{kj},$$

сделано в работе [86]. Там же построен фильтр для случая, когда $w(k)$ — белый шум, а $v(k)$ имеет корреляционную матрицу вида $M\{v(k)\,v^*(j)\}=R_{vv}(k,\ j)$ и является марковским в широком смысле, то есть $R_{vv}(k,\ j)\,R_{vv}^{-1}(j,\ j)\,R_{vv}(j,\ i)=R_{vv}(k,\ i)$. В другом случае, когда $v(k)$ — белый шум, а $w(k)$ имеет корреляционную матрицу $M\{w(k)\,w^*\}=R_{wv}(k,\ j)$ и является марковской в широком смысле, уравнения фильтра получены в [132], где при помощи формирующего фильтра задача сведена к классической постановке.

В работе [107] получен алгоритм фильтрации для линейной дискретной системы в случае, когда шум в измерениях гауссовский, а в объекте нет, при условии, что матрица $C_k{}^*R_k{}^{-1}C_k$ является невырожденной при всех k. При этом оптимальная оценка представляет собой оценку метода наименьших квадратов, полученную на основании прошлых измерений и скорректированную на предсказываемое измерение.

Стандартная постановка задачи линейной оптимальной фильтрации страдает еще одним недостатком. Требуются достаточно точные начальные значения для статистических характеристик рассматриваемых случайных процессов. В практических же задачах это известно далеко не всегда, кроме того, обычно нельзя построить точную модель рассматриваемого процесса. Обзору методов решения задачи дискретной фильтрации при неточной модели процесса, а также при неизвестных ковариациях шумов посвящена работа [5]. Как отмечается в ней, при решении указанной задачи построению оптимального фильтра должен предшествовать предварительный анализ, состоящий обычно из двух этапов: 1) проверка обоснованности модели путем анализа остаточных ошибок фильтра, проявляющихся в расхождении оценок с фактическими измерениями; 2) оценка влияния неточного моделирования на характеристики фильтра.

Синтез оптимального фильтра также обычно делят на два этапа: 1) построение фильтра, ограничивающего в допустимых пределах ошибки оценок, вызванные отсутствием информации о структуре исследуемой системы; 2) построение фильтра, одновременно оценивающего ковариации неизвестных шумов и состояние системы.

Если корреляционные матрицы неизвестных шумов принимают конечное множество значений, то обычный метод заключается в применении многократных фильтров Калмана, в противном случае, при отсутствии априорной информации о статистических характеристиках шумов, используется метод, обеспечивающий максимальное правдоподобие оценок состояния системы и корреляционных матриц шумов.

Применяются также и субоптимальные фильтры. Анализ влияния неполной априорной информации, необходимый для применения алгоритма Калмана—Бьюси, проводился в целом ряде работ.

Например, в [81] рассматривались ошибки, вносимые неточным знанием статистических характеристик начального состояния, а также шумов системы и измерений в дискретном фильтре Калмана—Бьюси. Получено рекуррентное соотношение для определения фактической корреляционной матрицы ошибки оценки. Аналогичные вопросы для дискретного случая исследовались в [118, 120], а для непрерывного в [119]. В [79] получены соотношения для действительных значений корреляционной матрицы ошибок оценки в случае, когда неизвестны точные значения матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ в модели системы в задачах фильтрации и сглаживания. Влияние неверного выбора параметров фильтра оценивалось также в [74].

В работе [41] предложен метод одновременной оценки состояния системы и корреляционных матриц шумов, когда эти матрицы имеют диагональный вид с неизвестными элементами.

В [18] строится адаптивный фильтр калмановского типа для решения задачи одновременного оценивания состояния динамической системы и параметров модели. При этом для определения параметров фильтра используется градиентный метод максимизации отношения правдоподобия.

В [141] метод фильтра Калмана используется для оценки состояния при непредельных параметрах объекта, для которых, однако, считается известной их функция распределения. Такая система аппроксимируется новой линейной системой с дополнительными уравнениями, так что порядок ее оказывается вдвое больший, чем у исходной системы. Далее применяется обычным образом алгоритм Калмана.

Работа [83] посвящена построению субоптимального фильтра на основе модели меньшей размерности, чем реальная система, и определению характеристик этого фильтра.

При отсутствии достаточной априорной информации о характеристиках системы может возникнуть задача построения фильтра, ограничивающего в некоторых пределах ошибку оценки состояния. В работах [119, 120] определились условия, при которых корреляционная ошибка будет ограничена; для дискретного и непрерывного случаев соответственно при неточно известном начальном состоянии.

Не менее важно, чтобы синтезируемый фильтр не оказался расходящимся из-за неполной информации о системе. Методы, позволяющие построить такие фильтры, используют либо произвольное увеличение корреляционной матрицы ошибок [40], либо ограничение памяти фильтра [85], либо использование многократных фильтров Калмана [63]. Устранение расходимости фильтра путем аппроксимации ошибок моделирования гауссовским белым шумом на входе системы и последующей адаптивной оценкой корреляционных матриц шумов предложено в [87]. Вопрос об устранении расходимости обсуждался также в [64, 134, 135].

Иногда встает задача об извлечении максимального объема информации из полученных измерений. Обычно это необходимо при невозможности повторения эксперимента, например, вследствие его высокой стоимости. Требование одновременной оценки как состояния системы, так и неизвестных корреляционных матриц шумов при этом, как правило, необязательно.

В [112] предложен так называемый бутстрап-метод, который заключается в том, что на основании заданного объема данных проводится оценка ошибок между фактическим измерением и предсказанием фильтра на i-й итерации. По этим остаточным ошибкам вычисляются новые корреляционные матрицы помех $\hat{R}_i$, $\hat{Q}_i$, которые затем используются на $(i+1)$-й итерации.

В [78] алгоритм оптимальной фильтрации используется в дискретной задаче оценки при неизвестных средних значениях и корреляционных матриц гауссовских помех. Показано, что в этом случае возможно расщепление задачи на две независимых, то есть корреляционные матрицы можно идентифицировать, не зная средних значений. В [78] определяются корреляционные матрицы. Кроме того, предложено обобщение бутстрап-метода на случай коррелированных между собой помех в системе и измерениях. Другая часть задачи — определение неизвестных средних значений шумов — рассмотрена в [77].

Аналогичные задачи обсуждаются в работах [76, 73, 131]. Неполная информация об объекте или ошибках измерения приводит к тому, что оценка, даваемая фильтром, оказывается смещенной. В [16] выведено уравнение эволюции смещения оценки для дискретных систем при неучтенной систематической ошибке в уравнениях объекта и канала измерений.

В случае, когда имеется большая неопределенность в значениях корреляционных матриц шумов объекта и шумов измерений, возможен иной подход к задаче фильтрации, основанный на построении минимаксных фильтров. В работе [39] предложен метод, в результате применения которого получается единственный фиксированный фильтр, критерий качества которого не превосходит некоторую наименьшую верхнюю границу при принятом диапазоне изменения неопределенных параметров. Полученный фильтр идентичен по форме фильтру Калмана—Бьюси и не зависит от фактических статистических характеристик шумов, то есть удается обойти одно из наиболее существенных ограничений теории линейной оптимальной фильтрации — необходимость точно знать статистические характеристики шумов. Такой же метод использован в работах [67—69].

В [39] получен алгоритм решения для непрерывных и дискретных систем. Приведем его в случае непрерывных систем.

Имеется линейный объект, динамика которого описывается уравнением

$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+w(t)$, а уравнение измерений имеет вид

$y(t)=C(t)x(t)+v(t)$. Решается задача оптимальной фильтрации на конечном временном интервале $t_0\leqslant t\leqslant T$. Все предположения о статистических характеристиках случайных величин

$x(t_0)$, $w(t)$ и $v(t)$, сделанные в § 1, остаются в силе, за одним исключением. Точного знания интенсивностей корреляционных матриц помех $R(t)$ и $Q(t)$ не требуется, а предполагается, что они лежат в компактных выпуклых множествах U_Q и U_R. Для удобства вводится множество $U=U_Q\times U_R$ с элементами u. Для оценки вектора $x(t)$ берется фильтр, идентичный по форме фильтру Калмана, матрица передачи которого выбирается из условия удовлетворения некоторому критерию качества. Таким образом, фильтр принимает вид

$$\dot{\hat{x}}(t)=A(t)\hat{x}(t)+K(t)[y(t)-C(t)\hat{x}(t)]. \tag{6.6}$$

Матрица $K(t)$ должна принадлежать компактному выпуклому множеству V_k, достаточно обширному, чтобы можно было реализовать фильтр Калмана для любого $u\in U$. Корреляционная матрица ошибки оценки

$$N(t)=M\{[x(t)-\hat{x}(t)][x(t)-\hat{x}(t)]^*\}$$

удовлетворяет при заданных R, Q матричному дифференциальному уравнению:

$$\dot{N}(t)=(A-KC)N+N(A-KC)^*+Q+KRK^*,$$
$$N(t_0)=P_0.$$

Среднеквадратичная ошибка фильтра (6.6) равна $spN(t)$, которая и берется за критерий его качества $J_N(T)=spN(T)$. При заданных значениях Q и R минимальное значение критерия дает оптимальный фильтр [93], $\min J_N(T)=J_0[P(T)]$, где $P(t)$—корреляционная матрица ошибки оценки оптимального фильтра, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$\dot{P}(t)=A(t)P(t)+P(t)A^*(T)+Q(t)-$$

$$-P(t)\,C^*(t)\,R^{-1}(t)\,C(t)\,P(t),$$
$$P(t_0)=P_0,$$

а матрица передачи оптимального фильтра, как обычно, равна
$$K(t)=P(t)\,C(t)\,R^{-1}(t).$$

Таким образом критерий качества J_N зависит от неизвестных матриц Q, R и матрицы передачи $K(t)$. По определению J_0 имеем
$$J_N(K,\,u,\,P_0,\,t_0,\,T)\geqslant J_0(u,\,P_0,\,t_0,\,T)\geqslant 0,\quad u\in U,\quad K\in U_K.$$

Возможны и другие критерии качества. В [39] качество фильтра (6.6) оценивается также по абсолютному и относительному отклонению от оптимального значения
$$S^A(T)=J_N(K,\,u,\,P_0,\,t_0,\,T)-J_0(u,\,P_0,\,t_0,\,T),$$
$$S^R(T)=[J_N/K,\,u,\,P_0,\,t_0,\,T)-J_0(u,\,P_0,\,t_0,\,T)]/J_0(u,\,P_0,\,t_0,\,T).$$

Поскольку u не определено, то в соответствии с минимаксным подходом значение K выбирается таким, чтобы удовлетворялся один из следующих критериев:
$$S_1(P_0,\,t_0,\,T)=\min_{K\in U_k}\max_{u\in U} J_N(K,\,u,\,P_0,\,t_0,\,T),$$
$$S_2(P_0,\,t_0,\,T)=\min_{K\in U_k}\max_{u\in U} S^A(K,\,u,\,P_0,\,t_0,\,T),$$
$$S_3(P_0,\,t_0,\,T)=\min_{K\in U_k}\max_{u\in U} S^R(K,\,u,\,P_0,\,t_0,\,T).$$

Аналогично можно построить минимаксный фильтр и в дискретном случае [39]. Задача фильтрации в такой же постановке решалась в [145], где в некоторых пределах изменялись неизвестные параметры объекта (матрицы $A(t)$ и $B(t)$).

Алгоритм Калмана-Бьюси иногда удается использовать в задаче оценки состояния очень сложных систем. В [62] такая система представляется в виде совокупности связных между собой подсистем. Затем при помощи метода ε-расщепления из нее можно получить последовательность независимых уравнений, на каждом шаге которой можно с успехом использовать фильтр Калмана.

В работе [75] рассматривается объект, динамика которого описывается стохастическим дифференциальным уравнением
$$dx(t)=A(t)\,x(t)\,dt+B(t)\,dw(t), \tag{6.7}$$

где $w(t)$ — винеровский процесс, а измерения описываются уравнением
$$y(t_k)=\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} H(t)\,x(t)\,dt+v(t_k), \tag{6.8}$$

$0=t_0<t_1<t_2<\ldots, v(t_k)$ — белый шум. Оптимальная оценка для таких объектов определяется соотношениями

$$\frac{d\hat{x}(t/t_k)}{dt}=A(t)\hat{x}(t/t_k) \tag{6.9}$$

$$\hat{x}(t_k/t_k)=\hat{x}(t_k/t_{k-1})+K(t_k)\left[y(t_k)-\int_{t_{k-1}}^{t_k}H(s)\hat{x}(s/t_k)\,ds\right], \tag{6.10}$$

где

$$K(t_k)=\int_{t_{k-1}}^{t_k}P(t_k, s/t_{k-1})H^*(s)\,ds\times$$

$$\times\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}H(t)P(t, s/t_{k-1})H^*(s)\,ds\,dt+R(t_k)\right\}^{-1}. \tag{6.11}$$

Корреляционная матрица удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial P(t, s/t_{k-1})}{\partial t}=A(t)P(t, s/t_{k-1}) \tag{6.12}$$

при $t_{k-1}\leqslant s\leqslant t\leqslant t_k$

$$\frac{dP(t, t/t_{k-1})}{dt}=A(t)P(t, t/t_{k-1})+P(t, t/t_{k-1})A^*(t)+$$

$$+B(t)B^*(t) \tag{6.13}$$

при $t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$,

$$P(t, s/t_{k-1})=P^*(s, t/t_{k-1}) \tag{6.14}$$

при $t_{k-1}\leqslant t\leqslant s\leqslant t_k$,

$$P(t_k, t_k/t_k)=P(t_k, t_k/t_{k-1})-K(t_k)\int_{t_{k-1}}^{t_k}H(s)P(s, t_k/t_{k-1})\,ds \tag{6.15}$$

$$P(t, s/t_{k-1})=M\{\tilde{x}(t/t_{k-1})\hat{x}^*(s/t_{k-1})\}. \tag{6.16}$$

Алгоритм фильтрации для систем с распределенными измерениями получен также в [139].

В [65] получено прямое обобщение теории Калмана—Бьюси на линейные объекты с запаздыванием, описываемые системой аффинно-подобных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt}=A_0(t)x(t)+\sum_{i=1}^{N}A_i\begin{Bmatrix}x(t+\theta_i), & t+\theta_i\geqslant 0\\ h(t+\theta_i), & t+\theta_i\leqslant 0\end{Bmatrix}+$$

$$+\int_{-b}^{0}A_{01}(t, \theta)\begin{Bmatrix}x(t+\theta_i), & t+\theta_i\geqslant 0\\ h(t+\theta_i), & t+\theta_i\leqslant 0\end{Bmatrix}d\theta+B(t)u(t)+f(t), \tag{6.17}$$

где h — некоторая заданная функция, причем $h(0)=x(0)$.

В [66] стандартная постановка задачи фильтрации обобщена на бесконечномерный случай. При этом уравнения динамики объекта и его измерений имеют вид

$$dx(t, \omega)=A(t)\,x(t, \omega)\,dt+B(t)\,dw(t, \omega), \tag{6.18}$$

$$dy(t, \omega)=H(t)\,x(t, \omega)\,dt+D(t)\,dv(t, \omega), \tag{6.19}$$

здесь $w(t, \omega)$, $v(t, \omega)$ — винеровские процессы, $B(t)$, $H(t)$, $D(t)$ — ограниченные операторы. В работе установлено существование оптимального фильтра для такой системы. Как и в конечномерном случае, получены рекуррентные соотношения для фильтра, включающие в себя бесконечномерное уравнение Риккати.

В книге [24] дано обобщение алгоритма Калмана—Бьюси на системы, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями вида

$$d\theta_t=[a_0(t)+a_1(t)\,\theta_t+a_2(t)\,\xi_t]\,dt+\sum_{i=1}^{2} b_i(t)\,dW_i(t), \tag{6.20}$$

$$d\xi_t=[A_0(t)+A_1(t)\,\theta_t+A_2(t)\,\xi_t]\,dt+\sum_{i=1}^{2} B_i(t)\,dW_i(t), \tag{6.21}$$

здесь (θ_t, ξ_t) — $(k+l)$-мерный гауссовский случайный процесс, W_1, W_2 соответственно k-, l-мерные винеровские процессы, $0\leqslant t\leqslant T$, a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, A_0, A_1, A_2, B_1, B_2 — матрицы соответствующих размерностей, ξ_t — наблюдаемая компонента. На матрицы системы накладываются некоторые предположения, обеспечивающие конечность величин различных комбинаций их элементов. Тогда в случае невырожденности матрицы $(B\circ B)(t)=B_1(t)\,B_1^*(t)+B_2(t)\,B_2^*(t)$ линейная оптимальная оценка фильтрации m_t и корреляционная матрица ее ошибки γ_t удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} dm_t={}&[a_0(t)+a_1(t)\,m_t+a_2(t)\,\xi_t]\,dt+[(b\circ B)(t)+\gamma_t A_1^*(t)]\times\\ &\times[(B\circ B)(t)]^{-1}\,[d\xi_t-(A_0(t)+A_1(t)\,m_t+A_2(t)\,\xi_t)\,dt], \end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned} \dot\gamma(t)={}&a_1\gamma_t+\gamma_t a_1^*(t)-[(b\circ B)(t)+\gamma_t A_1^*(t)]\,[(B\circ B)(t)]^{-1}\times\\ &\times[(b\circ B)(t)+\gamma_t A_1^*(t)]^*+(b\circ b)(t) \end{aligned} \tag{6.23}$$

с начальными условиями m_0 и γ_0. Здесь использованы обозначения

$$(b\circ b)(t)=b_1(t)\,b_1^*(t)+b_2(t)\,b_2^*(t),$$

$$(b\circ B)(t)=b_1(t)\,B_1^*(t)+b_2(t)\,B_2^*(t).$$

Система (6.22), (6.23) имеет единственное, как доказано в [24], решение. В случае вырождения матрицы $(B\circ B)$ в [6, 7] получена несколько иная система уравнений, в которой приходится определять матрицу, псевдообратную к $\{(B\circ B)+$ некоторая матрица}. Такую операцию также не всегда удается выполнить. В [22], [24] для непрерывного случая и в [32] для дискретного случая построены регуляризованные алгоритмы фильтрации при вырождении матрицы $(B \circ B)$, причем термин «регуляризация» здесь заимствован из теории некорректных задач.

В рассмотренных ранее алгоритмах важную роль играло предложение о гауссовости случайных процессов, поскольку именно оно обеспечивает замкнутую форму уравнений фильтрации Калмана—Бьюси. В [24] получены уравнения, позволяющие определять оптимальную оценку и корреляционную матрицу ее ошибки для условногауссовских процессов, то есть таких случайных процессов (θ_t, ξ_t) $0 \leqslant t \leqslant T$, которые хотя и не являются гауссовскими, но обладают тем свойством, что с вероятностью 1 условное распределение $P(\theta_t \leqslant x | F_t^\xi)$ является гауссовским, где $F_t^\xi = \sigma\{\omega : \xi_s, s \leqslant t\}$ есть σ-алгебра, порождаемая измерениями $\xi_0^t = \{\xi_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$. Для таких процессов также удается построить фильтр в замкнутой форме.

Достаточные условия того, что некоторый случайный процесс является условно-гауссовским, получены в [23]. Там же приведены уравнения оптимального фильтра.

В книге [24] изложение теории фильтрации существенно опирается на теорию мартингалов.

Идея мартингального подхода заключается в более простой задаче оценивания одного мартингала через другой. Этот подход в основе своей содержит возможность перехода от стандартного уравнения измерений

$$y(t) = z(t) + v(t), \quad z(t) = H(t)\,x(t),$$

где $z(t)$ — не обязательно гауссовский, но ограниченный случайный процесс, у которого $\int\limits_0^T M\{z^2(t)\}\,dt < \infty$, а $v(t)$ — гауссовский белый шум, к уравнению

$$\nu(t) = y(t) - \hat{z}(t/t) \quad \text{или} \quad \nu(t) = \tilde{z}(t/t) + v(t),$$

как это было сделано в [89], где $\hat{z}(t/t)$ — оценка, даваемая методом наименьших квадратов по предыдущим измерениям $\{y(s), 0 \leqslant s < t\}$. В том случае, когда имеется динамическая система, описываемая уравнением $\dot{x} = Ax + Bu$, $\hat{z} = H\hat{x}$, где $\hat{x}$ — оценка, даваемая фильтром Калмана — Бьюси.

$$\tilde{z}(t/t) = z(t) - \hat{z}(t/t).$$

Можно отметить, что: 1) $\tilde{z}(t/t)$ — это та часть $z(t)$, которую невозможно предсказать по предыдущим измерениям; 2) $v(t)$ не зависит от прошедших значений $z(\cdot)$ как белый гауссовский шум, посему его нельзя предсказать на основе прошлых измерений $y(\cdot)$. Таким образом, случайный процесс $\nu(t)=\tilde{z}(t/t)+$ $+v(t)$ несет в себе новую информацию, выделяемую из последнего измерения. (Кайлат [89] назвал его обновляющим процессом).

В силу того, что $\nu(t)$ является винеровским процессом, задача фильтрации сводится к задаче оценки одного мартингала $\hat{x}(t|t)$ при помощи другого $\nu(t)$. Мартингальный вывод уравнений фильтрации существенно компактнее ранее предложенных. Такой же подход использовался в работах [44], [95], [101].

В [126] изложена инженерная адаптация мартингального подхода к задачам фильтрации, обсуждается возможность перехода к нелинейным системам.

В [116] предложен новый алгоритм определения матрицы передачи Калмана в стационарных линейных системах, в котором решение уравнения Риккати заменено решением системы нелинейных уравнений типа Чандрасекара. При этом существенно уменьшается число арифметических операций для определения матрицы передачи.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Аоки М.**, Оптимизация стохастических систем. М. «Наука», 1971
2. **Беллман Р.**, Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., «Мир», 1968, 183 с. (РЖМат, 1969, 2Б787К)
3. **Брайсон А.**, Хо Ю-ши, Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972, 544 с. (РЖМат, 1972, 9Б529К)
4. **Бэттин Р.**, Наведение в космосе. М., «Машиностроение», 1966
5. **Вейс И.**, Дискретная фильтрация Калмана—Бьюси при неизвестных ковариациях шумов. Вопросы ракетной техники, 1971, № 1,
6. **Глонти О. А.**, Последовательная фильтрация и интерполяция компонент марковской цепи. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, **9**, № 2, 263—279 (РЖМат, 1970, 6В89)
7. —, Последовательная фильтрация компонент марковской цепи при вырожденности матрицы диффузии. Теория вероятностей и ее применения, 1970, **15**, № 4, 736—740 (РЖМат, 1971, 5В118)
8. **Гулько Ф. Б.**, Новосельцева Ж. А., Обратная задача оптимального управления и свойство неоптимальных систем. Автоматика и телемеханика, 1975, № 6, 42—49 (РЖМат, 1975, 11Б651)
9. —, —, Решение нестационарных задач фильтрации и упреждения методами моделирования. Автоматика и телемеханика, 1966, № 4, 122—141 (РЖМат, 1966, 10В316)
10. —, —, Решение нестационарных задач фильтрации и упреждения при произвольной помехе методами моделирования. Автоматика и телемеханика, 1966, № 10, 153—168
11. **Денхем**, Пайнз, Методы вычисления последовательной оценки, когда нелинейность функции сравнима по величине с ошибкой измерения. Ракетная техника и космонавтика, 1966, **4**, № 6, 142—150
12. **Дуб Д. Л.**, Вероятностные процессы. М., Изд-во ин. лит., 1956, 605 с. (РЖМат, 1957, 5755К)
13. **Дубенко Т. И.**, Фильтр Калмана для случайных полей. Автоматика и телемеханика, 1972, № 12, 37—40 (РЖМат, 1973, 4В245)
14. **Казаков И. Е.**, Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. М., «Наука», 1975, 432 с. (РЖМат, 1975, 11В199)

15. **Калман Р.**, Об общей теории систем управления. «Тр. I конгресса ИФАК. Теория дискретных, оптим. и самонастраив. систем», Изд-во АН СССР, 1961
16. **Киселев В. Г.**, Фильтрация измерений при неполной информации об объекте и каналах измерений. Изв. АН СССР, Техн, кибернетика, 1974, № 3, 188—190 (РЖМат, 1974, 11В288)
17. **Клейбанов С. Б.**, Привальский В. Б., Тиме И. В., Стабилизация коэффициентов в дискретном фильтре Калмана. Автоматика и телемеханика, 1974, № 3, 76—82 (РЖМат, 1974, 8Б917)
18. **Кузнецов Н. А.**, Лубков А. В., Адаптивная фильтрация компонентов марковских процессов. Автоматика и телемеханика, 1975, № 4, 49—55 (РЖМат, 1975, 9В207)
19. **Ли Р.**, Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М., «Наука», 1966
20. **Лившиц Н. А.**, Виноградов В. Н., Голубев Г. А., Линейная фильтрация при особенной матрице интенсивностей помех. «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 3, 127—135 (РЖМат, 1970, 1В225)
21. —, —, —, Корреляционная теория оптимального управления многомерными процессами. М., «Сов. радио», 1974
22. **Липцер Р. Ш.**, Уравнения почти оптимального фильтра Калмана при особенной матрице ковариаций шума в наблюдениях. Автоматика и телемеханика, 1974, № 1, 35—41 (РЖМат, 1974, 5Б1098)
23. —, Условно-гауссовские случайные процессы. Пробл. передачи информ., 1974, **10**, № 2, 75—94 (РЖМат, 1974, 10В66)
24. —, Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М., «Наука», 1974, 696 с. (РЖМат, 1974, 7В292 К)
25. **Медич Дж.**, Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М., «Энергия», 1973, 440 с. (РЖМат, 1974, 2В328 К)
26. **Острем К. Ю.**, Введение в стохастическую теорию управления. М., «Мир», 1973, 32 с. (РЖМат, 1974, 3В54К)
27. **Ривкин С. С.**, Метод оптимальной фильтрации Калмана и его применение в инерциальных навигационных системах. Ч. I. Л., «Судостроение», 1973
28. —, Метод оптимальной фильтрации Калмана и его применение в инерциальных навигационных системах. Ч. 2. Л., «Судостроение», 1974, 156 с.
29. **Ройтенберг Я. Н.**, Автоматическое управление. М., «Наука», 1971, 395 с. (РЖМат, 1971, 8Б469К)
30. **Рябова-Орешкова А. П.**, Исследование рекуррентных фильтров с ограниченной памятью. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1974, № 5, 173—186 (РЖМат, 1975, 4В265)
31. —, Об устойчивости фильтров Калмана. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 5, 203—212 (РЖМат, 1971, 4В287)
32. **Серебровский А. П.**, О регуляризации дискретного фильтра Калмана. Автоматика и телемеханика, 1975, № 3, 70—74 (РЖМат, 1975, 7Б1101)
33. Современная теория систем управления. Под ред. Леондеса К. Т. М., «Наука», 1970
34. **Соколовский В. З.**, О фильтрации стохастических полей. Автоматика и телемеханика, 1975, № 1, 28—32
35. —, Фильтры Калмана для распределенных систем. (АН УССР. Ин-т кибернет. Харьков. фил. науч. совета по пробл. кибернет. АН УССР. Препринт 74—60). Киев, 1974, 27 с. (РЖМат, 1975, 6Б1238)
36. **Тарасов В. Г.**, Иванов Т. И., Субоптимальные фильтры для оценивания состояния динамических объектов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 4, 210—217 (РЖМат, 1973, 12Б1148)
37. **Тода**, Шли, Обшарский, Область сходимости фильтра Калмана для некоторых методов автономной навигации. Ракетная техника и космонавтика, 1969, 7, № 4, 58—66

38. **Уиднолл В.**, Расширение области сходимости фильтров Калмана, использующих измерение дальности. Ракетная техника и космонавтика, 1973, **11**, № 3, 34—40
39. **Хачинсон**, Д'Апполито, Бонджиовани, Минимаксное проектирование фильтров калмановского типа при наличии неопределенностей параметров системы. Ракетная техника и космонавтика, 1973, 11, № 5, 150—157
40. **Шли,** Стэндиш, Тода, Расходимость фильтрации по методу Калмана. Ракетная техника и космонавтика, 1973, 11, № 6
41. **Abramson P. D.**, Simultaneous estimation of the state and noise statistics in linear dynamic systems. MIT—TE 25, 1968
42. **Athans M.**, Wishner R. P., Bertolini A., Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear systems form discrete noisy measurements. IEEE Trans. Automat. Contr., 1968, **13**, № 5, 504—514 (РЖМат, 1969, 11В246)
43. **Atre S. R.**, Lamba S. S., Derivation of an optimal estimator for distributed parameter systems via maximum principle. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, **17**, № 3, 388—390 (РЖМат, 1972, 11В210)
44. **Balakrishnan A. V.**, A martingale approach to linear recursive state estimation. SIAM J. Contr., 1972, **10**, № 4, 754—756 (РЖМат, 1973, 6В189)
45. **Baldwin J. F.**, Sims-Williams J. H., An on-line control scheme using a successive approximations in policy space approach. J. Math. Analysis and Applic., 1968, **22**, № 3, 523—536 (РЖМат, 1969, 5Б550)
46. **Battin R.**, Optimizing a statistical navigation procedure for space flight. Amer. Rocket Soc., 1962, **32**, 1681—1696
47. **Beavers A. N., Jr.**, Denman E. D., Asymptotic solution to the matrix Riccati equation. Math. Bisci., 1974, **20**, № 3—4, 339—344 (РЖМат, 1975, 2Б881)
48. **Bensoussan A.**, Sur l'identification et le filtrage de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Thése. Doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Paris, 1969, 233 p. (РЖМат, 1971, 2В165Д)
49. **Bierman G. J.**, A comparison of discrete linear filtering algorithms. IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst., 1973, **9**, № 1, 28—37 (РЖМат, 1973, 12Б1151)
50. —, Fixed interval smoothing with discrete measurements. Int. J. Contr., 1973, **18**, № 1, 65—75 (РЖМат, 1974, 1В265)
51. —, An efficient fixed-lag smoothing algorithm for discrete linear systems. Automatica, 1974, **10**, № 5, 559—563 (РЖМат, 1975, 5Б1133)
52. **Biswas K. K.**, Mahalanabis A. K., An approach to fixed-point smoothing problems. IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst., 1972, 8, № 5, 676—682 (РЖМат, 1973, 6Б1017)
53. —, —, A stable fixed-lag smoothing algorithm. Automatica, 1973, **9**, № 3, 393—397 (РЖМат, 1973, 10Б917)
54. —, —, On the computational aspects of two recent smoothing algorithms. IEEE Trans. Automat. Contr., 1973, **18**, № 4, 395—396 (РЖМат, 1974, 1Б835)
55. —, —, Optimal fixed-lag smoothing for time delayed system with colored noise. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, **17**, № 3, 387—388 (РЖМат, 1972, 11В214)
56. —, —, Optimal smoothing for continuous — time system with multiple time delays. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, **17**, № 4, 572—574 (РЖМат, 1972, 12В150)
57. —, —, Suboptimal algorithms for nonlinear smoothing. IEEE Trans Aerospace and Electron Syst., 1973, **9**, № 4, 529—534 (РЖМат, 1974, 4Б1060)
58. **Blackburn T. R.**, Solution of the algebraic matrix Riccati equation via Newton—Raphson iteration. AIAA J., 1968, **6**, № 5, 951—953 (РЖМат, 1968, 11Б727)
59. **Bryson A. E., Jr.**, Henrikson L. J., Estimation using sampled data containing sequentially correlated noise. J. Spacecraft and Rockets, 1968, **5**, № 6, 662—665 (РЖМат, 1969, 2В148)

60. —, Johansen D. E., Linear filtering for time-varying systems using measurements containing colored noise. IEEE Trans. Automat. Contr., 1965, **10**, № 1, 4—10
61. **Bucy R. S.**, Optimal filtering for correlated noise. J. Math. Anal. and Appl., 1967, **20**, № 1, 1—8
62. **Cline T.**, Near-optimal state estimation for interconnected systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1975, **20**, № 3, 348—351 (РЖМат, 1971, 3В407)
63. **Cosaert R.**, Gottzein E. A., Decoupled shifting memory filter method for radio tracking of space vehicles. XVIII Int. Austronautical Congress. 1967
64. —, —, Sensitivity analysis of modern optimum filtering methods using unknown model parameters. IFAC Symp. Automat. Control in space. 1967
65. **Curtain R. F.**, A Kalman—Bucy filtering theory for affine hereditary differential equations. Lect. Notes Econ. and Math. Syst., 1975, **107**, 22—43 (РЖМат, 1975, 8Б850)
66. —, Infinite-dimensional filtering. SIAM J. Contr., 1975, **13**, № 1, 89—104 (РЖМат, 1975, 10Б1048)
67. **D'Appolito J. A.**, Minimax design of low sensitivity filters for state estimation. Proc. of the 3rd Asilomar conf. Circuits and Syst., 1969
68. —, Hutchinson C. E., Low sensitivity filters for state estimation in the presense of large parameter uncertainties. IEEE Trans. Automat. Contr., 1969, **14**, № 3, 310—311
69. —, —, A minimax approach to the design of low sensitivity state estimators. Automatica, 1972, 8, № 5, 599—608 (РЖМат, 1973, 2В194)
70. **Davison E. J.**, Maki M. C., The numerical solution of the matrix Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1973, **18**, № 1, 71—73
71. **Desalu A. A.**, Gould L. A., Schweppe F. C., Dynamic estimation of air pollution. IEEE Trans. Automat. Contr., 1974, **19**, № 6, 904—910 (РЖМат, 1975, 7Б1127)
72. **Fraser D.**, Discussion of optimal fixed—point linear smoothing. Proc. of 1967 Joint Automat. Contr. Conf., 1967
73. **Friedland B.**, Treatment of bias in recursive filtering. IEEE Trans. Automat. Contr., 1969, **14**, № 4, 359—367 (РЖМат, 1970, 6В252)
74. —, On the effect of incorrect gain in Kalman filter. IEEE Trans. Automat. Contr., 1967, **12**, № 5, 610 (РЖМат, 1968, 8В167)
75. **Fujishige S.**, Minimum—variance estimation for a linear continuous—discrete system with noisy state—integral observation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1975, **20**, № 1, 139—140 (РЖМат, 1975, 12В353)
76. **Godbole S. S.**, Application of Kalman filtering technique to nuclear reactors. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1973, **20**, 661—667
77. —, Kalman filtering with no a-priory information about noise white noise case. Proc. IEEE Conf. Decis. and Contr. incl. 12 th Symp. Adapt. Process., San Diego, Calif., 1973, New York N. Y., 1973, 6—12 (РЖМат. 1974, 10В206)
78. —, Kalman filtering with no a-priory information about noisewhite noise case: identification of covariances. IEEE Trans. Automat. Contr., 1974, **19**, № 5, 561—563 (РЖМат, 1975, 5Б1151)
79. **Griffin R. E.**, Sage A. P., Large and small sensitivity analysis of optimum estimation algorithms. IEEE Trans. Automat. Contr., 1968, **13**, № 4, 320—339 (РЖМат, 1969, 6В168)
80. **Gura I. A.**, Bierman A. B., On computational efficiency of linear filtering algorithms. Automatica, 1971, **7**, № 3, 299—314 (РЖМат, 1971, 12В516)
81. **Heffes H.**, The effect of erroneous models on the Kalman filter response. IEEE Trans. Automat. Control, 1966, **11**, № 3, 541—543 (РЖМат, 1968, 4В168)
82. **Hewer G A.**, Analysis of a discrete matrix Riccati equation of linear control and Kalman filtering. J. Math. Anal. and Appl., 1973, **42**, № 1. 226—236 (РЖМат, 1973, 8Б933)

83. **Huddle J. R.,** Wismer D. A., Degradation of linear filter performance due to modelling errors. IEEE Trans. Automat. Control, 1968, **13**, № 4, 421—423
84. **Hwang M.,** Seinfeld J. H., Gavelas G. R., Optimal least—square filtering and interpolation in distributed parameter systems. J. Math. Anal. and Appl., 1972, **39**, № 1, 49—74 (РЖМат, 1973, 1В131)
85. **Jazwinski** A. H., Limited memory optimal filtering. 9 th Joint Automat. Control Conf., Ann Arbor, Mich., 1968. Preprints techn. papers. New York, N. Y., 1968, 383—393
86. —, Stochastic problems and filtering theory. New York, «Academic», 1970
87. —, Suboptimal filtering. Part I: Adaptive filtering. IFAC Simp. Mult. Control Systems, 1968
88. **Joglekar A. N.,** A technique to improve the performance of a nonlinear filter with an application to satellite—aided aircraft navigation. Proc. 1974, IEEE Conf. Decis. and Contr. 13 th Symp. Adaptive Processes, Phoenix, Ariz., 1974. New York, N. Y., 1974, 159—164 (РЖМат, 1976, 1Б974)
89. **Kailath T.,** An innovations approach to least—squares estimation. Part I. IEEE Trans. Automat. Control, 1968(1969), **13**, № 6, 646—655 (РЖМат, 1970, 2В219)
90. —, Some new algorithms for recursive estimation in constant linear systems. IEEE Trans. Inform. Theory, 1973, **19**, № 6, 750—760 (РЖМат, 1974, 8В214)
91. **Kalman R. E.,** A new approach to linear filtering and prediction problems. Trans. ASME, 1960, **D82**, 35—45
92. —, New methods and results in linear prediction and filtering theory. Techn. Rept. 61—1, RIAS, 1961
93. —, Bucy R. S., New results in linear filtering and prediction theory. Trans ASME, **D83**, 1961, 95—107
94. —, Englar T. S., A user's manual for the automatic synthesis programm. NASA Rept. CR-475, 1966
95. **Kara H.,** Mandrekar V., Park G., Wide-sense martingale approach to linear optimal estimation. Proc. 2nd Symp. Nonlinear Estim. Theory and Appl., San Diego, Calif., 1971. North Hollywood. Calif., 1972, 169—173 (РЖМат, 1972, 10В230)
96. **Kleinman D. L.,** On an iterative technique for Riccati equation computations. IEEE Trans. Automat. Control, 1968, **13**, № 1, 114—115 (РЖМат, 1969, 3Б408)
97. —, Stabilizing a discrete constant linear system with application to iterative methods for solving Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Control, 1974, **19**, № 3, 252—254 (РЖМат, 1975, 1Б1214)
98. **Kuhr D.,** Optimale Filter für lineare System mit verteilten Parametern. «Regelungstechn. und Prozess Daten verarb», 1970, **18**, № 11, 506—507
99. **Kushner H. J.,** On the differential equations satisfied by conditional probability densities of Markov processes, with applications. J. SIAM Industr. and appl. Math., 1964, **A2**, № 1, 106—119 (РЖМат, 1965, 6В36)
100. **Kwakernaak H.,** Sivan R., The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, **17**, № 1, 79—86 (РЖМат, 1972, 5Б547)
101. —, —, The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal fielters. «12th Joint Automat. Contr. Conf. Amer. Automat. Contr. Counc., St. Louis, Mo., 1971. Prepr. techn. pap.» New York, N. Y., 1971, 477—485 (РЖМат, 1972, 5Б601)
102. **Leung V. P.,** Padmanabhan L., On the simulation of continuous non-linear filters a comparative study of second- and third-order approximations. Int. J. Syst. Sci., 1973, **4**, № 6, 889—898 (РЖМат, 1974, 5Б999)
103. **Luo Z.,** Bullock T. E., Discrete Kalman filtering using a generalized companion form. IEEE Trans. Automat. Contr., 1975, **20**, № 2, 227—230 (РЖМат, 1976, 2Б1124)

104. **Man F. T.**, Numerical solution of the algebraic matrix Riccati equation. Proc. IEEE Conf. Decis. and Contr. incl. 12th Symp. Adapt. Process., San Diego, Calif., 1973, New York, N. Y., 1973, 549—553 (РЖМат, 1974, 10Б934)
105. The Davidon method of solution of the algebraic matrix Riccati equation. Int. J. Contr., 1969, **10**, № 6, 713—719 (РЖМат, 1970, 4Б842)
106. **Martensson K.**, On the matrix Riccati equation. Inform. Sci., 1971, **3**, № 1, 17—49 (РЖМат, 1971, 8Б424)
107. **Masreliez C. J.**, Approximate non-gaussian filtering with linear state and observation relations. IEEE Trans. Automat. Contr., 1975, **20**, № 1, 107—110 (РЖМат, 1975, 9Б1090)
108. **Meditch J. S.**, On optimal linear smoothing theory. Inform. and Control, 1967, **10**, № 6, 598—615 (РЖМат, 1968, 9В66)
109. —, Orthogonal projection and discrete optimal linear smoothing. J. SIAM Contr. (USA), 1967, **5**, № 1, 74—89 (РЖМат, 1974, 7Б1204)
110. —, Optimal fixed-point continuous linear smoothing. «Joint Automat. Control Conf., 1967. Preprints paper». New York, N. Y., Lewis Winner, 1967, 249—257 (РЖМат, 1969, 6В170)
111. **Mehra R. K.**, A comparison of several nonlinear filters for re-entry vehicle tracking. «Proc. IEEE Symp. Adapt. Processes (9th) Decis. and Austin, Tex., 1970». New York, N. Y., 1970, XIX. 4/1—XIX.4/13 (РЖМат, 1972, 2В230)
112. —, On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. «Joint Automat. Control Conf., 1969». 1969, 494—505
113. **Meyer G. G. L.**, Payne H. J., An iterative method of solution of the algebraic Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, **17**, № 4, 550—551 (РЖМат, 1972, 12Б854)
114. **Mishra J.**, Rajamani V. S., Least-squares state estimation in time-delay system with colored observation noise: an innovations approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1975, **20**, № 1, 140—142 (РЖМат, 1976, 1Б975)
115. **Moore J. B.**, Discrete-time fixed-lag smoothing algorithms. Automatics, 1973, **9**, № 2, 163—173 (РЖМат, 1973, 8Б1097)
116. **Morf M.**, Sidhu G. S., Kailath T., Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear, discrete-time systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1974, **19**, № 4, 315—323 (РЖМат, 1975, 12Б1031)
117. **Moylan P. J.**, A note on Kalman—Bucy filters with zero measurement noise. IEEE Trans. Automat. Contr., 1974, **19**, № 3, 263—264 (РЖМат, 1975, 1Б1256)
118. **Nishimura T.**, Correlation to the extension of «On the a priory information in sequential estimation problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1967, **12**, № 1, 123
119. —, Error bounds of continuous Kalman filters and the applications to orbit determination problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1967, **12**, № 3, 268—275 (РЖМат, 1968, 6В187)
120. —, On the a priory information in sequential estomation problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1966, **11**, № 2, 197—204 (РЖМат, 1967, 6В132)
121. —, Worst error analysis of batch filter and sequential filter in the approach phase of spacecraft navigation problems. Proc. 4th Symp. on Nonlinear estimation Theory and its Applications. San Diego, Calif., 1972, Sept. 11—13
122. —, Worst error performance of continuous Kalman filters. IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst., 1975, **11**, № 2, 190—194 (РЖМат, 1976, 1Б826)
123. **Ohmatsu Sh.**, Shibata H., Hata Sh., Digital simulation of the optimal filter for a stochastic distributed parameter system. Bull. Univ. Osaka Prefect., 1973, **A22**, № 2, 131—138 (РЖМат, 1975, 3Б951)
124. **Pearson I. D.**, On the duality between estimation and control. SIAM J. Control, 1966, **4**, № 4, 493—600 (РЖМат, 1967, 9Б390)

125. **Potter J. E.**, Matrix quadratic solutions. SIAM J. Appl. Math. 1966, **14**, № 3, 496—501 (РЖМат, 1967, 3Б657)
126. **Prasad T.**, Sinha N. K., Martingales and their application to optimal state estimation. Int. J. Syst. Sci., 1974, **5**, № 11, 1039—1054 (РЖМат, 1975, 5Б1199)
127. **Puri N. N.** Gruver W. A., Optimal control design via successive approximation. Preprints JACC, Philadelphia, Pa., 1967, 335—344 (РЖМат, 1969, 3Б393)
128. **Pyle R. H.**, Initial value estimation via iterative algorithms. «6th Asilomar Conf. Circuits and Syst., Pacific Grove, Calif., 1972.» North Hollywood, Calif., 1973, 498—502 (РЖМат, 1975, 4Б1083)
129. **Quegley A. L.**, An approach to the control of the divergence in Kalman filter algorithms. Int. J. Contr., 1973, **17**, № 4, 741—746
130. **Repperger D. W.** Koivo A. J., On stable forward filtering and fixed—lag smoothing in a class of systems with time delays. IEEE Trans Automat Contr., 1974, **19**, № 3, 266—268 (РЖМат, 1975, 1Б1258)
131. **Sage A. P.**, Husa G. W., Adaptive filtering with unknown prior statistics. Proc. JACC, 1969, 760—769
132. **Samant V.**, Sorenson H. W., On reducing computational burden in the Kalman filter. Automatica, 1974, **10**, № 1, 61—68
133. **Sandell N. R.**, On Newton's method for Riccati equation solution. IEEE Trans. Automat. Contr., 1974, **19**, № 3, 254—255 (РЖМат, 1975, 1Б1215)
134. **Schmidt S. F.**, Estimation of State with acceptable accuracy constraints. Analitical Mechanics Associates, Inc., Inter. Report, 1967, 6T-4
135. —, Application of state—space methods to navigation problems. Advance in Control Syst., New York, 1966, 3
136. **Shinohara J.**, Oguma R., Estimation of time—varying reactivity using a method of nonlinear filtering. Nucl. Sci. and Eng., 1973, **52**, № 1, 76—83 (РЖМат, 1974, 1Б734)
137. **Shukla V.**, Srinath M. D., Sequential estimation in linear systems with multiple time delays. Inform. and Contr., 1973, **22**, № 5, 471—486 (РЖМат, 1973, 11Б894)
138. **Shurbet G. L.**, Lewis T. O., Boullion T. L., Quadratic matrix equations. The Ohio J. Sci., 1974, **74**, № 5, 273—277 (РЖМат, 1975, 9Б886)
139. **Sims G. S.**, Park J. W., Ordered sequential filtering for finite dimensional systems with distributed observations. IEEE Trans. Automat. Contr., 1975, **20**, № 3, 531—534 (РЖМат, 1976, 5Б1090)
140. **Soeda T.**, Joshimura T., Fukunaga S., An analitical method for the filtering error evaluation of sub-optimal filters in a noisy non—linear dinamic system. Int. J. Contr., 1973, **17**, № 2, 305—313 (РЖМат, 1973, 7Б930)
141. **Speqer J. L.**, Gustafson D. E., An approximation method for estimation in linear systems with parameter unceirtainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 1975, **20**, № 3, 354—359 (РЖМат, 1976, 3Б382)
142. **Taylor F. J.**, On the computation of Kalman gains. Comput and Elec. Eng., 1975, **2**, 105—115 (РЖМат, 1975, 5Б1007)
143. **Tzafestas S. G.**, Nichigale J. M., Optimal filtering, smoothing and prediction in linear distributed parameter systems. Proc. Inst. Electr. Engrs., 1968, **115**, № 8, 1207—1212
144. —, On optimum distributed—parameter filtering and fixed—interval smoothing for colored noise. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, **17**, № 4, 448—458 (РЖМат, 1973, 1В414)
145. **Wonham W. M.**, Cashman W. F., A computationa. approach to optimal control of stochastic saturating systems. Preprints JACC, Ann Arbor, Michigan, 1968, 13—33 (РЖМат, 1970, 7В212)
146. **Joshikawa T.**, Minimal order optimal filters for discretetime linear stochastic systems. Int. J. Control., 1975, **21**, № 1, 1—19
147. **Yu T. K.**, Seinfeld J. H., Ray W. H., Filtering in nonlinear time delay systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1974, **19**, № 4, 324—333

СОДЕРЖАНИЕ

Технический редактор *Н. А. Проценко*

Сдано в набор 23/IX-1976 г. Подписано в печать 28/II-1977 г. Формат 60Х90$^1/_{16}$
Печ. л. 13.25 Уч.-изд. л. 16,62 Тираж 1000 экз. Цена 2 р. 49 к. Заказ 8400

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, Люберцы, Октябрьский проспект, 403

УДК 517.948+513.83

***М. Ш. Бирман**, М. З. Соломяк,* **Асимптотика спектра дифференциальных уравнений.** «Математический анализ». (Итоги науки и техники) 1976, 14, 5—58, библ. 373

Обзор посвящен изложению результатов об асимптотике дискретного спектра самосопряженных дифференциальных операторов, в основном, с частными производными.

УДК 517.948+513.88:513.83

Э. Р. Цекановский, Ю. Л. Шмульян, **Вопросы теории расширения неограниченных операторов в оснащенных гильбертовых пространствах.** «Математический анализ». (Итоги науки и техники) 1976, **14**, 59—100, библ. 72

Рассматриваются вопросы, связанные с применением методов теории оснащенных гильбертовых пространств к теории расширения эрмитовых операторов.

УДК 519.3:518

Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский, **Вычислительные и приближенные методы оптимального управления.** «Математический анализ». (Итоги науки и техники) 1976, **14**, 101—166, библ. 494

Классифицируются и анализируются приближенные методы решения задач оптимального управления, указываются их области применимости. Из специальных задач рассмотрена задача выбора оптимальных траекторий летательных аппаратов.

УДК 518

М. Б. Прохоров, В. К. Саульев, **Метод оптимальной фильтрации Калмана—Бьюси и его обобщения.** «Математический анализ». (Итоги науки и техники) 1976, **14**, 167—207, библ. 147

Рассматриваются вопросы, посвященные решению задачи оптимальной, в смысле минимума дисперсии ошибки, оценивания состояния динамических систем по методу Калмана—Бьюси, а также обобщение этого метода на линейные системы и системы с распределенными параметрами, на случай небелых шумов в системе и канале измерений, и применение его к решению трех типов задач сглаживания

ОПЕЧАТКИ

Математический анализ. Т. 14

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
18	3 снизу	$C^{-m/e}$	$\boldsymbol{C^{-m/l}}$
81	16 снизу	$\boldsymbol{X}y$	$\mathfrak{H}y$
87	8 снизу	$\boldsymbol{X}$	$\mathfrak{H}_{-}$
90	20 снизу	$(R)_{\mathfrak{S}}$	$(\tilde{R})_{\mathfrak{S}}$
92	3 снизу	$\mathscr{P}$	$\mathscr{Y}$
95	6 снизу	$R'J_{+}$	$\mathbf{R}'J_{+}$
209	11 снизу	*М. Б. Прохоров,*	*М. Б. Прохоров, В. К. Саульев*

Цена 2 р. 49 к. Индекс 018410