ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 69

РГНТИ 27.15.17+27.15.9+27.17+27.17.15+
27.17.17+27.17.19+27.17.27+27.17.31+
27.17.33+27.19+27.39+27.45

ISSN 0233 – 6723

РОССИЙСКАЯ
АКАДЕМИЯ НАУК

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ
ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 69

Научный редактор серии
член-корреспондент РАН Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1993 г.

МОСКВА 1999

УДК 511.217+511.334+512+512.538+512.544.42+512.552.4+512.554.32+
512.626+512.664.3+512.664.4+512.74+515.1+517.98+519.1

РФФИ Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 00–01–14031

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ, ПОСВЯЩЕННОЙ 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Л. С. ПОНТРЯГИНА

(Москва, 31 августа — 6 сентября 1998 г.)

Том 8

АЛГЕБРА

Редакторы-составители тома: *С. М. Асеев, С. А. Вахрамеев*

Редактор тома *В. П. Сахарова*

Авторы:

Г. В. Белый, В. Е. Воскресенский, В. В. Никулин, М. И. Кузнецов, Х. Ополка, М. Хазевинкель, Т. Г. Чеккерини-Зилберштейн, Ф. Скаработти

Л. С. Понтрягин и П. С. Александров. Фото 1946 года.

УДК 511.217 + 511.334 + 512.626

I. ЧИСЛА МАРКОВА И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Г. В. Белый

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Натуральные решения уравнения Маркова $x^2+y^2+z^2=3xyz$ $(x \geqslant y \geqslant z)$ называются *"числами Маркова"*. А. А. Марков исследовал это уравнение в [6], когда изучал приближения вещественных чисел рациональными. Существует гипотеза, которая утверждает, что любое решение уравнения Маркова определяется максимальным числом x. Эту гипотезу часто называют гипотезой единственности чисел Маркова. В последнее время интерес к этой теме возрос в связи с работами А. Л. Городенцева и А. Н. Рудакова [2], [4], где они доказали, что размерности исключительных расслоений на $\mathbb{P}^2$ являются числами Маркова.

В этой работе мы хотели бы объяснить некоторые свойства чисел Маркова очень простым и явным образом. Для этого даем другие доказательства результатов Гурвица и Фробениуса [3], [5], относящихся к числам Маркова, а также показываем, что конструкция этих доказательств позволяет изучать решения уравнения Маркова над кольцом целых гауссовых чисел. Кроме того, строим некоторую выпуклую кривую, аналогичную линии уровня, и обсуждаем рост марковских чисел. Наконец, получаем некоторые факты, относящиеся к гипотезе единственности.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Для всех натуральных чисел $S \geqslant 3$ выбираем единицу

$$\varepsilon = \frac{S + \sqrt{(S-2)(S+2)}}{2} = \frac{S + k\sqrt{D_0}}{2},$$

где D_0 — свободное от квадратов целое число. Индекс f_0 порядка $\mathfrak{O}_1 = \mathbb{Z}[\varepsilon]$ в максимальном порядке кольца $\mathfrak{O}$ всех целых чисел квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D_0})$ равен k, если $D_0 \equiv 1 \pmod 4$. В остальных случаях ($D_0 \equiv 2, 3 \pmod{4}$) этот индекс f_0 равен $k/2$. Для каждого делителя f индекса $f_0 = f f_1$ существует единственный промежуточный порядок $\mathfrak{O}_f$, для которого

$$[\mathfrak{O}_f : \mathfrak{O}_1] = f, \qquad [\mathfrak{O} : \mathfrak{O}_f] = f_1.$$

1.2. Для всех этих порядков рассматриваем соответствующие группы классов $\widehat{\mathrm{Cl}}$ ориентированных модулей M с точностью до строгой эквивалентности; это значит, что модули M и αM эквивалентны, если норма числа $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{D_0})$ положительна. Ориентация — это такой выбор базиса $\langle \lambda, \eta \rangle = M$ этого модуля, что определитель

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \eta \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\eta} \end{pmatrix} > 0,$$

где $\sim$ обозначает сопряжение. Можно выбрать второй элемент базиса с положительной нормой и разделить на него. Тогда без потери общности можно считать, что этот второй элемент есть 1. Отсылаем читателя к учебнику [1], где все это изложено более подробно. Для главного модуля $\mathfrak{O}_f$ выберем базис следующим образом: $\eta = 1$, $\lambda = (\varepsilon - d_o)/f$, где d_o является целым рациональным решением сравнения $2d_o \equiv S \pmod{f}$. Тогда матрица, задающая действие единицы ε на главном модуле $\mathfrak{O}_f$, имеет следующий вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{f a_o + d_o}{f} & f b_o c_o \\ f & d_o \end{pmatrix}$$

и $\lambda^2 = a_o \lambda + b_o c_o$. Если рассматривать действие этой единицы ε на произвольном модуле M с кольцом множителей $\mathfrak{O}_f$, то его матрица будет иметь вид

$$A \doteq \begin{pmatrix} fa+d & fb \\ fc & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$$

при $2d + fa = S$ и НОД$(a,b,c) = 1$. Соответствующий модуль $M = \langle \mu, 1 \rangle = \langle \lambda/c, 1 \rangle$ восстанавливается по матрице A : число μ является корнем квадратного уравнения $c\mu^2 - a\mu - b = 0$, или, иными словами, оно будет фиксированной точкой дробно-линейного преобразования, соответствующего матрице A. Действительно,

$$\varepsilon \cdot 1 = \frac{fa + 2d + \sqrt{f^2a^2 + (4fad + 4d^2 - 4)}}{2} =$$

$$= fc\frac{a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2c} + d = fc \cdot \mu + d \cdot 1.$$

Таким образом, получили соответствие между классами модулей и классами сопряженности матриц в группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

1.3. Необходимо найти матрицу $\tilde{A}$, соответствующую модулю $\tilde{M}$, обратному к M. В работе [1] доказано, что модуль $\tilde{M} = \langle -\tilde{\mu}, 1 \rangle$ является таким обратным модулем. Ясно, что он положительно ориентирован, тогда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & fb \\ fc & fa+d \end{pmatrix}.$$

Теперь мы найдем закон композиции модулей над одним и тем же порядком.

1.4. Лемма. *Предположим, что матрицы*

$$\begin{pmatrix} fa+d & fbc_2 \\ fc_1 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fa+d & fbc_1 \\ fc_2 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fa+d & fb \\ fc_1c_2 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$$

соответствуют трем модулям M_1, M_2 и M_3 над одним и тем же порядком, тогда третий модуль есть композиция первого и второго.

Доказательство. У нас есть $M_1 = \langle \lambda/c_1, 1 \rangle, M_2 = \langle \lambda/c_2, 1 \rangle, M_3 = \langle \lambda/c_1c_2, 1 \rangle$,

$$M_1 * M_2 = \langle 1, c_1\frac{\lambda}{c_1c_2}, c_2\frac{\lambda}{c_1c_2}, \frac{\lambda^2}{c_1c_2} \rangle =$$

$$= \langle 1, c_1\frac{\lambda}{c_1c_2}, c_2\frac{\lambda}{c_1c_2}, a\frac{\lambda}{c_1c_2} + b \rangle = M_3,$$

так как НОД$(a, c_1, c_2) = 1$. □

1.5. Определение. Матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ со следом $\mathrm{tr}\, A \geqslant \det A + 2$ называется *приведенной*, если $a \geqslant b$, $c \geqslant d$, $\geqslant 0$.

1.6. Лемма. i) *Каждый класс сопряженности матриц со следом* $\mathrm{tr}\, A \geqslant \det A + 2$ *содержит приведенную матрицу* $\bar{A}$.

ii) *Для модуля* $M = \langle \mu, 1 \rangle$, *который ассоциирован с приведенной матрицей* $\bar{A}$, $\mu > 1$ *и* $-1 < \tilde{\mu} < 0$.

Доказательство. Если абсолютное значение $|d| > |b|$, то полагаем $\bar{d}$ наименьшим положительным вычетом d по модулю $|b|$. Очевидно, что матрицы $A \sim \begin{pmatrix} a+d-\bar{d} & b \\ * & \bar{d} \end{pmatrix}$ сопряжены в группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Остальное также очевидно. □

1.7. С помощью алгоритма Евклида для каждой приведенной матрицы $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ получаем единственное разложение в произведение

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} a_{2m} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{N},$$

которое является ничем иным, как непрерывной дробью для рационального числа a/c, или, что то же самое, периодом непрерывной дроби иррационального числа μ. (Подчеркнем, что точка $\cdot$ обозначает обычное произведение матриц, в отличие от звездочки $*$, которой обозначена композиция модулей, ассоциированных с данными матрицами. Для краткости напишем $A = [a_1, a_2, \ldots, a_{2m}]$. В дальнейшем не будем различать матрицы и ассоциированные с ними модули.) Обозначим перестановку, состоящую из одного цикла $\sigma = (1, 2, \ldots, 2m)$. Она действует на периоде A очевидным образом. Каждая четная степень этого действия дает модуль, который эквивалентен модулю A. Более того, каждый приведенный модуль, эквивалентный данному, получается тем же способом. И, наконец, заметим, что для обратного модуля п. 1.3 дает $\tilde{A} \sim [a_1, a_{2m}, \ldots, a_3, a_2]$.

1.8. Рассмотрим естественный эпиморфизм на обычную группу классов идеалов порядка $\mathfrak{O}_f$, который забывает ориентацию и заменяет строгую эквивалентность обычной. Если порядок $\mathfrak{O}_f$ содержит единицу с нормой -1, то этот эпиморфизм ψ является изоморфизмом. В противном случае ядро эпиморфизма ψ есть группа второго порядка $\{\pm 1\}$. Обозначим через A_{-1} образующую этого ядра, т. е. $\ker(\psi) = \{A_1, A_{-1}\}$. Если берем модуль A как в п. 1.7, то $A * A_{-1} \sim [a_2, a_3, \ldots, a_{2m}, a_1]$. Это легко следует из п. 1.4.

1.9. Определение. Модуль A называется *амбиговым*, если $A * A \sim A_1$, т. е. если он является элементом второго порядка группы $\widehat{\mathrm{Cl}}$. Будем называть модуль A полуамбиговым, если $A * A \sim A_{-1}$ или, что то же самое, $\tilde{A} \sim A * A_{-1}$.

1.10. Лемма. *Каждый полуамбигов модуль эквивалентен симметрическому модулю* $[a_1, a_2, \dots, a_m, a_m, \dots, a_2, a_1]$ *и каждый амбигов модуль эквивалентен симметрическому модулю* $[a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, a_m \dots, a_2]$.

Доказательство. Принимая во внимание пп. 1.7, 1.8, получаем равенство

$$[a_{2m}, \dots, a_2, a_1]^{\tau} = [a_1, a_2, \dots, a_{2m}],$$

где τ — четная степень перестановки σ для полуамбиговых модулей и нечетная степень σ — для амбиговых. Так как произведение отражения и вращения снова является отражением, тем самым лемма доказана. □

Заметим, что если бы мы начали с единицы $\epsilon = \frac{T+\sqrt{T^2+4}}{2}$ с нормой -1, то определения амбиговых и полуамбиговых модулей совпадали бы. В этом случае каждый амбигов модуль эквивалентен приведенному симметрическому модулю $[a_1, \dots, a_m, \dots, a_1]$.

1.11. Ниже нам понадобится замечание: для матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m & * \\ n & * \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

имеем

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} * & * \\ t & * \end{pmatrix}, \text{ где } t = cm^2 - (a-d)mn - bn^2.$$

§ 2. Числа Маркова и полуамбиговы формы

2.1. Пусть четверка (x, y, z, p) является натуральным решением следующего уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 = pxyz$$

и пусть y, z взаимно просты. Тогда существует матрица $B = \begin{pmatrix} y & * \\ z & * \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, для которой $B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} px & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ -x^2 & d \end{pmatrix}$ (см. п. 1.11). Отметим, что матрица $\begin{pmatrix} px & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ сопряжена с матрицей A_1 из п. 1.2 и ассоциирована с главным модулем $\mathfrak{O}_1 = \mathbb{Z}[\varepsilon]$ со следом $S = px = a + d$.

2.2. В случаях, когда $x = 1$ или $x = 2$, уравнение п. 2.1 превращается в *"отрицательное уравнение Пелля"*. Это означает, что порядок $\mathfrak{O}_2$ содержит единицу с отрицательной нормой. Обозначим эту единицу через

$$\epsilon = \frac{T + \sqrt{T^2+4}}{2}.$$

Тогда

$$\epsilon^2 = \frac{T^2 + 2 + T\sqrt{T^2+4}}{2}.$$

Так как натуральное число T должно делить $f = 2$, то $T = 1$, $f = 1$, $S = 3$, $p = 3$ для $x = 1$ и $T = 2$, $f = 2$, $S = 6$, $p = 3$ для $x = 2$. В дальнейшем можно считать, что $x > 2$.

2.3. Лемма. *Матрица* $\begin{pmatrix} a & -xb \\ x & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *является полуамбиговой и, следовательно, сопряжена с приведенной симметрической матрицей* $A = L^T \cdot L$ *по лемме п.* 1.10.

Доказательство. Пусть $f =$ НОД$(x, a-d)$ обозначает соответствующий индекс. Если $f = 1$, то лемма следует из пп. 2.1, 1.4. Этот индекс f может быть самое большее 2, так как x делит след $S = a + d$. В этом случае числа y, z, a, d должны быть нечетными, ad $\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, $S \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$ и мы можем представить $x = 2x_0$, с нечетным x_0. Тогда матрица

$$A_2 = \begin{pmatrix} S-1 & (S-2)/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

соответствует главному модулю $\mathfrak{O}_2$. Положим

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что $C \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ и

$$C^{-1} \cdot A_2 \cdot C = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -2x_0^2 & d \end{pmatrix} \sim A * A * A_{-1}.$$

Обозначим через α ось симметрии для соответствующего разложения п. 1.10. □

2.4. Теперь покажем, что матрица A из п. 2.3 имеет другую ось β "почти" симметрии. Пусть $\bar{d}$ — наименьший положительный вычет d по модулю x, и мы можем считать без

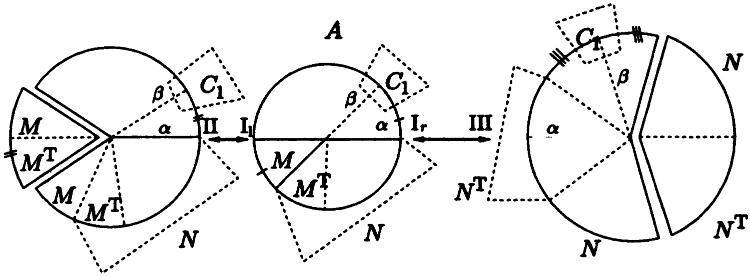

Рис. 1

потери общности, что $0 < \bar{d} < x/2$. В противном случае заменим A на $\tilde{A}$ (см. п. 1.3). Рассмотрим следующее произведение:

$$C = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} px - \bar{d} & * \\ x & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & \bar{d} \\ \bar{d} & * \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Оно является приведенной симметрической матрицей C. Принимая во внимание п. 1.7, получаем $C = [b, b_1, \dots, b_n, b_n, \dots, b_1, b]$. Из условия $\bar{d} < x/2$ следует, что $b \geqslant 2$. Видим, что матрица $\tilde{A}$ сопряжена с обычным произведением $C_1 \cdot C_2$, где C_2 равно или единичной матрице Id при $n = 0$, или матрице $C_2 = [b_1, \dots, b_n, b_n, \dots, b_1]$ и $C_1 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $C_1 = [b+1, b-1]$ для $p = 1$ и $C_1 = [b, p-1, 1, b-1]$ для $p > 1$. Из наличия второй оси "почти" симметрии β следует

2.5. Теорема (Марков, Гурвиц). *Уравнение из п.* 2.1 *имеет решения со взаимно простыми* y, z *тогда и только тогда, когда* $p = 3$. *В этом случае это уравнение становится обычным "уравнением Маркова" и* $3x = \operatorname{tr} A$ *для матрицы* A *из п.* 2.4.

Доказательство. Пусть у матрицы A есть такие две оси симметрии. Расположим ее множители (см. п. 1.7) равномерно вдоль окружности. Рассмотрим два преобразования II, III этой матрицы A, как на рис.1, где C_1, α, β такие, как в п. 2.4. Остальные обозначения очевидны. Ясно, что эти преобразования дают нам новые матрицы, у которых опять имеются такие же оси симметрии. Эти преобразования имеют обратные, которые обозначим через $\mathrm{I}_l, \mathrm{I}_r$. Запишем $L_x = M \cdot N$ и обозначим через m, n количества множителей в M, N соответственно. Если использовать только преобразования $\mathrm{I}_l, \mathrm{I}_r$, то из алгоритма Евклида следует, что наши оси α и β после некоторого конечного количества шагов станут ортогональными. Рассмотрим рис. 2,

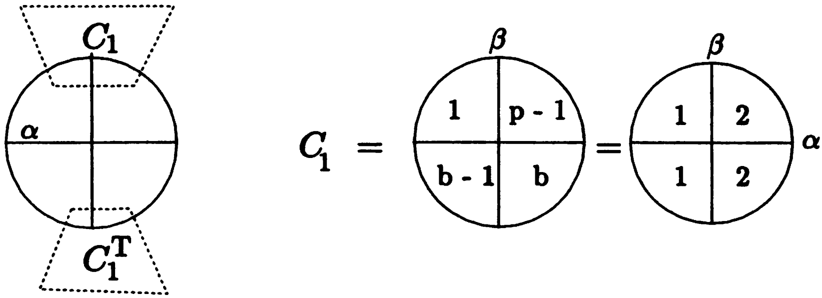

Рис. 2

где верхняя полуокружность не может вмещать матрицу C_1,так как C_1^T не является симметричной. Это означает, что $b = 2$, $p = 3$ и m, n являются взаимно простыми, причем марковское число 5 соответствует матрице $C_1 = [2, 2, 1, 1]$. □

2.6. Для решения (x, y, z) с $x > y > z$ преобразование II соответствует преобразованию $(x, y, z) \to (3xz - y, x, z)$, а преобразование III соответствует преобразованию $(x, y, z) \to (3xy - z, x, y)$. Преобразования I соответствуют преобразованиям $(x, y, z) \to (y, z, 3yz - x)$ или $(x, y, z) \to (y, 3yz - x, z)$. Более подробно:

$$L_z = M^T,\ L_y = MN,\ L_x = M^T MN,\ L_{\tilde{x}} = N \quad \text{для } \mathrm{I}_l$$

и

$$L_y = MN,\ L_z = N^T,\ L_x = MNN^T,\ L_{\tilde{x}} = M \quad \text{для } \mathrm{I}_r.$$

Здесь и далее через $\tilde{x} < x$ обозначим $3yz - x$.

2.7. Если применить преобразования I к матрице C_1, то получим главные модули $[1, 1]$ и $[2, 2]$, соответствующие особым числам Маркова 1 и 2. Обозначим их через

$$X = [1,1] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y = [2,2] = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непонятно, что для них является дополнительной осью "почти" симметрии β. Поэтому невозможно восстановить матрицу C_1 ни по X, ни по Y.

2.8. Мы видим, что для чисел Маркова все матричные множители — это единицы и двойки. Установим соотношения между количеством тех и других. Обозначим через k, k_m, k_n количество единиц, через l, l_m, l_n — количество двоек в разложении L, M, N соответственно, через m, n — количество всех множителей для M, N. Ясно, что $k+l=m+n$. Покажем, что

$$\det\begin{pmatrix} l_m & l_n \\ k_m & k_n \end{pmatrix} = 1.$$

Для $L=[1,2]$ имеем $\det \mathrm{Id}=1$. Преобразование II соответствует добавлению первого столбца этого определителя ко второму и, наоборот, преобразование III соответствует прибавлению второго столбца к первому. Следовательно,

$$km-1=(k_m+k_n)(k_m+l_m)-l_mk_n+l_nk_m=$$
$$=k_m(k_m+k_n+l_n+l_m)=k_m(m+n)$$

или

$$km \equiv ln \equiv 1 \ (\bmod\ (m+n)).$$

Теперь мы можем рассматривать пару (k,l) в качестве координат для марковского числа x.

2.9. Примеры:

$$\mathrm{tr}[1,1]=3\cdot 1(0,1),$$
$$\mathrm{tr}[2,2]=3\cdot 2(1,0),$$
$$\mathrm{tr}[2,1,1,2]=3\cdot 5(1,1),$$
$$\mathrm{tr}[2,1,1,1,1,2]=3\cdot 13(1,2),$$
$$\mathrm{tr}[1,2,2,2,2,1]=3\cdot 29(2,1),$$
$$\mathrm{tr}[2,1,1,1,1,1,1,2]=3\cdot 34(1,3),$$
$$\mathrm{tr}[2,1,1,1,1,1,1,1,1,2]=3\cdot 89(1,4),$$
$$\mathrm{tr}[1,2,2,2,2,2,2,1]=3\cdot 169(3,1),$$
$$\mathrm{tr}[1,2,2,1,1,1,1,2,2,1]=3\cdot 194(2,3),$$
$$\mathrm{tr}[2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2]=3\cdot 233(1,5),$$
$$\mathrm{tr}[2,1,1,2,2,2,2,1,1,2]=3\cdot 433(3,2).$$

Ср. с [3].

2.10. Очевидно, что или A, или $\tilde{A}$ эквивалентно произведению k штук матриц Y и l штук матриц X, несмотря на то, что наши оси могут разрезать некоторые множители. Представим себе каждый множитель состоящим из двух одинаковых частей наподобие молекулы кислорода O_2. Примем во внимание, что после каждой перестройки отдельные "атомы кислорода" опять соединяются в "молекулы".

Доказательство теоремы 2.5 заодно дает ответ на следующий вопрос: имеется kr штук матриц Y и lr штук матриц X, где k, l взаимно просты. Как перемешать их наиболее равномерным образом, чтобы их произведение имело наименьший след? Ответ следующий: A^r является таким произведением.

Кроме того, мы получили возможность вычислять числа Маркова $x(k,\, l)$ без вычисления промежуточных чисел Маркова. Делим окружность на $2(k+l)$ равных частей; решаем сравнение

$$km \equiv ln \equiv 1 \pmod{(k+l)}$$

с помощью алгоритма Евклида. Конечно, при этом получаем координаты промежуточных марковских чисел, но не сами числа. Далее строим оси α, β и размещаем двойки и единицы вдоль окружности. Пример: пусть $k=7$, $l=10$, тогда $m=5$, $n=12$, и $A = YXYXYXXYXYXXYXYXX$, $3x(k,\, l) = \operatorname{tr} A$.

2.11. Пусть матрицы M, N будут такими же, как в п. 2.5. Дополнительная ось "почти" симметрии β дает равенство $NN^TM^TM = K^TC_1K$ для некоторого $K \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Получаем

$$C_1 = [2,2,1,1] = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 3(\ 2 \quad 1\ )^T(\ 2 \quad 1\ ).$$

Запишем $(r \;\; s) = (2 \;\; 1)K$. Так как все элементы группы $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ являются конформно-симлектическими, то получаем

$$K^TC_1K = \begin{pmatrix} 3r^2 & 3rs \pm 1 \\ 3rs \mp 1 & 3s^2 \end{pmatrix}$$

и, кроме того, $x = r^2 + s^2$. Далее $NN^TM^TM = \pm W + S$, где $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, причем S является симметрической матрицей, ср. с [3]. Нетрудно показать, что $\text{НОД}(x,\, y+zi) = r \pm si$ и

$$Y \cdot K^T \cdot K \cdot X = \begin{pmatrix} 3x - \bar{d} & * \\ x & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

§ 3. Полиномиальные решения подкрученного уравнения Маркова

3.1. Прямые на марковском кубике определены над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$, за исключением трех прямых в бесконечности. Чтобы остаться над кольцом $\mathbb{Z}$, заменим уравнение п. 2.1 уравнением

$$x^2 - y^2 - z^2 = \pm pxyz.$$

Для натурального решения (x, y, z, p) со взаимно простыми x, y, z получаем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ x^2 & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} px & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ y^2 & d' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} py & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(см. п. 2.1). Повторяя доводы из пп. 2.3 и 2.4, снова получаем ось симметрии α и ось "почти" симметрии β для матриц

$$A \sim \begin{pmatrix} a & xb \\ x & d \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B \sim \begin{pmatrix} a' & yb' \\ y & d' \end{pmatrix}.$$

3.2. Есть небольшое отличие по сравнению с п. 2.5: матрицы A и B теперь являются амбиговыми, так что эти оси могут разрезать некоторые множители. Мы можем повторить аргументы из доказательства теоремы п. 2.5 , принимая также во внимание п. 2.10. Используя только первое преобразование, получим три типа наиболее простых форм для матрицы A с ортогональными осями α, β:

i) $A = [1, b-1, 1, 1, b, 1]$, $p = 2$,

ii) $A = [b-1, b+1]$, $p = 1$,

iii) $A = [1, p-1]$.

В случае i) можно взять

$$2x = \operatorname{tr} A = 2(2b^2 + 2b + 1), \quad 2y = \operatorname{tr}[1, b, 1] = 2(b+1),$$
$$2z = \operatorname{tr}[1, b-1, 1] = 2b.$$

Мы видим, что этот случай сводится ко второму, где

$$x = \operatorname{tr} A = b^2 + 1, \quad y = \operatorname{tr}[b+1] = b+1, \quad z = \operatorname{tr}[b-1] = b-1,$$

с помощью линейной замены переменных. Оба эти случая соответствуют прямой

$$y = t+1, \ z = t-1, \ x = 2 \quad \text{на кубике} \quad y^2 + z^2 - x^2 = xyz.$$

В случае iii) мы получаем особое решение, подобное п. 2.7.

Матрица $[1, p-1]$ может быть получена преобразованием I из двух различных матриц $[p, p-1, 1, p-1]$ или $[1, p-1, 1, 0] \sim [2, p-1]$, у которых оси образуют угол 45^o. Как и выше, второй случай сводится к первому с помощью линейной замены переменных. В первом случае имеем

$$px = \operatorname{tr}[p, p-1, 1, p-1] = p(p^2+1),$$
$$py = \operatorname{tr}[p-1, 1, p-1] = p^2, \quad pz = \operatorname{tr}[p] = p.$$

Таким образом, получили решение п. 3.1, соответствующее прямой

$$x = t, \ y = 0, \ z = t$$

на том же кубике

$$y^2 + z^2 - x^2 = xyz.$$

Легко проверить, что остальные прямые симметричны этим двум или лежат на бесконечности. Ср. с [7].

§ 4. Рост чисел Маркова

4.1. Пусть тройка (x, y, z) является вещественным решением уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz,$$

для которого $x \geqslant y \geqslant z > 2$. Тогда существуют положительные $\alpha > \beta > \gamma$, для которых

$$x = 2\operatorname{ch}\alpha, \quad y = 2\operatorname{ch}\beta, \ z = 2\operatorname{ch}\gamma$$

и

$$\operatorname{ch}^2\alpha + \operatorname{ch}^2\beta + \operatorname{ch}^2\gamma = 2\operatorname{ch}\alpha \ \operatorname{ch}\beta \ \operatorname{ch}\gamma.$$

Для перестройки $\tilde{x} = yz - x$ обозначим через $\tilde{\alpha}$ соответствующий логарифм, тогда

$$\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{ch}\tilde{\alpha} = 2\operatorname{ch}\beta \ \operatorname{ch}\gamma.$$

4.2. Пусть $\mathfrak{L}$ — решетка на плоскости с двумя образующими a, b и $a \wedge b = 1$. Обозначим начало этой решетки $\mathfrak{L}$ буквой O. Разместим логарифмы α, β, γ и все их перестройки в узлах решетки $\mathfrak{L}$ следующим образом: помещаем γ в вершинах $\pm a$, β — в вершинах $\pm b$ и α — в вершинах $\pm(a + b)$. Далее предположим, что фундаментальный параллелограмм нашей решетки $\mathfrak{L}$ уже заполнен в трех вершинах, например, a, b и $a + b$. Возьмем диагональ параллелограмма, содержащую начало O. Она делит параллелограмм на два треугольника. Отразим эти треугольники так, чтобы получить два новых параллелограмма с незаполненными вершинами. Помещаем в этих пустых вершинах перестройки нашего решения таким образом, чтобы в каждом новом параллелограмме образовались новые тройки логарифмов, соответствующих решениям уравнения п. 4.1. В нашем примере помещаем перестройку $\tilde{\beta}$ в вершину $2a + b$ и перестройку $\tilde{\gamma}$ — в вершину $2b + a$. Сделаем то же самое для всех остальных старых параллелограммов. Затем повторяем то же самое для всех новых и так далее. Каждая примитивная вершина решетки $\mathfrak{L}$, видимая из начала, будет заполнена некоторым логарифмом, причем так, что в вершинах каждого фундаментального параллелограмма будет находиться тройка логарифмов, соответствующих решениям уравнения п. 4.1. Затем заполняем все непримитивные вершины решетки (невидимые из начала) следующим образом: помещаем $n\eta$ в вершину nc, если n — натуральное число, c — примитивная вершина и логарифм η находится в вершине c.

Сдвинем все узлы нашей решетки $\mathfrak{L}$ в направлении к началу O или от начала, за исключением самой начальной точки O, следующим образом: двигаем узел c в точку $m(c) = c/\eta$, если логарифм η находится в узле c.

4.3. Теорема. *Существует выпуклая кривая* Γ, *на которую попадают все точки* $m(c)$.

Доказательство. Кривая Γ получается как предел последовательности выпуклых $(6 \cdot 2^n)$-угольников. Сначала необходимо проверить, что исходный шестиугольник выпукл. Если бы $\alpha = \beta+\gamma$, то точка $m(a+b)$ находилась бы на отрезке $m(a)\,m(b)$. Но у нас

$$\operatorname{ch}\alpha = \operatorname{ch}\beta \cdot \operatorname{ch}\gamma + \sqrt{\operatorname{sh}^2\beta \cdot \operatorname{sh}^2\gamma - 1} < \operatorname{ch}(\beta+\gamma)$$

(см. п. 4.1). Это неравенство означает, что точка $m(a+b)$ находится за прямой $m(a)m(b)$ относительно начала O.

Рассмотрим параллелограмм O, $(n+1)a+nb$, $(2n+1)(a+b)$, $(n+1)b+na$ с площадью $2n+1$. Имеем

$$t = 2\operatorname{ch}(2n+1)\alpha = \operatorname{tr} C^{2n+1}, \quad \text{где} \quad C = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\tilde{\tilde{\beta}}$, $\tilde{\tilde{\gamma}}$ находятся в остальных вершинах этого параллелограмма. Необходимо проверить, что $\tilde{\tilde{\beta}} + \tilde{\tilde{\gamma}} > (2n+1)\alpha$. Легко показать, что

$$t_1 = 2\operatorname{ch}\tilde{\tilde{\beta}} = \operatorname{tr} C^n \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$t_2 = 2\operatorname{ch}\tilde{\tilde{\gamma}} = \operatorname{tr} C^n \cdot \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, достаточно получить неравенство

$$4 + t\,t_1\,t_2 > t^2 + t_1^2 + t_2^2,$$

из которого следует, что

$$\frac{t_1}{2}\frac{t_2}{2} + \sqrt{\frac{t_1^2}{4} - 1}\sqrt{\frac{t_2^2}{4} - 1} > \frac{t}{2} \text{ и } \tilde{\tilde{\beta}} + \tilde{\tilde{\gamma}} > (2n+1)\alpha.$$

Ясно, что $C^n = \mu \cdot \mathrm{Id} - \lambda \cdot C^{-1}$ с положительными μ, λ. Далее,

$$C^{2n+1} = \mu^2 C - 2\mu\lambda\,\mathrm{Id} + \lambda^2 C^{-1}, \quad t = x(\mu^2+\lambda^2) - 4\mu\lambda,$$
$$t_1 = \mu y - \lambda z, \quad t_2 = \mu z - \lambda y.$$

Так как $y^2+z^2 = x\tilde{x}$, $yz = x+\tilde{x}$, $\mu^2+\lambda^2 - x\mu\lambda = \det C^n = 1$, то

$$t_1 t_2 = (\mu^2+\lambda^2)yz - \mu\lambda(y^2+z^2) =$$
$$= (\mu^2+\lambda^2)(x+\tilde{x}) - \mu\lambda x\tilde{x} = \tilde{x} + (\mu^2+\lambda^2)x,$$

$$t_1^2 + t_2^2 = (\mu^2 + \lambda^2)(y^2 + z^2) - 4\mu\lambda yz =$$
$$= (\mu^2 + \lambda^2)x\tilde{x} - 4\mu\lambda(x + \tilde{x}) = \tilde{x}t - 4\mu\lambda x.$$

Подставив эти выражения в неравенство, видим, что оно эквивалентно неравенствам

$$4 > t[t - (\mu^2 + \lambda^2)x] - 4\mu\lambda x \quad \text{и} \quad 1 > -\mu\lambda(t + x).$$

□

4.4. Расположим числа Маркова в порядке возрастания. Теорема п. 4.3 означает, что выпуклую кривую $\alpha\Gamma$, построенную для натуральных решений уравнения п. 4.1, можно рассматривать как линию уровня. Она ограничивает область, содержащую узлы решетки $\mathfrak{L}$ с логарифмами, меньшими чем α; узлы решетки с логарифмами, большими чем α, находятся снаружи этой кривой, а узлы с логарифмами, равными α, должны лежать на этой кривой. Количество примитивных вершин решетки, содержащихся в области, которая ограничена кривой $\alpha\Gamma$, пропорционально площади этой области, т. е. пропорционально α^2, с точностью до $o(\alpha^{1+\varepsilon})$. Это значит, что количество чисел Маркова x с $3x \leqslant 2\,\mathrm{ch}\,\alpha$ равно

$$C\alpha^2 + o(\alpha^{1+\varepsilon}) \quad (\alpha \to \infty)$$

с некоторой постоянной C, $0.18061 < C < 0.18076$. Этот интервал для C легко найти, вычислив площади 24-угольника, вписанного в Γ, и 24-угольника, описанного вокруг Γ, а затем, умножив их на чебышевское $6/\pi^2$ и разделив на 12 (каждое неособое марковское число находится в 12-ти узлах нашей решетки). Отметим, что Загир [8] использовал схожие рассуждения и оценил константу C, не используя явно ни кривую Γ, ни ее выпуклость. В этой же статье дается оценка

$$\sim e^{c_1\sqrt{N}+c_2},$$

с некоторыми постоянными c_1, c_2 для числа Маркова с номером N в порядке роста.

§ 5. Замечания по поводу гипотезы единственности

5.1. Кажется очень странным, что, несмотря на очень быстрый экспоненциальный рост чисел Маркова, до сих пор нет верного доказательства этой гипотезы.

Ясно, что тройка $(x > y > z)$ восстанавливается единственным образом по паре (r, s), где $x = r^2 + s^2$ (см. п. 2.11). Оказывается, имеем схожую ситуацию для $3x - 2$, а также и для $3x + 2$. Каждый элемент $L \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ можно представить в виде

$$2L = (L + L^W) + (L - L^W) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix},$$

тогда

$$4\det L = a^2 - c^2 - d^2 + b^2, \qquad 2\operatorname{tr} LL^T = a^2 + c^2 + d^2 + b^2$$

и

$$a^2 + b^2 = \operatorname{tr} LL^T + 2\det L, \qquad c^2 + d^2 = \operatorname{tr} LL^T - 2\det L.$$

Вернемся к обозначениям из § 2. Возьмем L_x таким, как в п. 2.5, получим

$$a^2 + b^2 = 3x \pm 2, \qquad c^2 + d^2 = 3x \mp 2.$$

Обозначим через $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$ такие же целые числа, соответствующие перестройке $\tilde{x}$.

Используя пп. 2.6 и 2.11, получим

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ \tilde{a} & \tilde{b} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} c & d \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = \pm 2$$

для обоих преобразований: и для I_l, и для I_r.

5.2. Мы видим, что по каждой паре

$$(a,b) \ \text{с} \ a^2 + b^2 = 3x \pm 2, \qquad (c,d) \ \text{с} \ c^2 + d^2 = 3x \mp 2$$

или

$$(r,s) \ \text{с} \ r^2 + s^2 = x$$

единственным образом восстанавливается тройка $(x > y > z)$. Если бы существовала другая тройка $(x' > y' > z')$ с

$$x' = x,$$

то соответствующие полуамбиговы формы A и A' отличались бы на амбигову форму B. С другой стороны, различные разложения в сумму двух квадратов для x, $3x-2$, $3x+2$ определяют разложения в произведение двух взаимно простых множителей для

$$x = x_1x_2, \quad 3x - 2 = p_1p_2, \quad 3x + 2 = q_1q_2 \quad \text{для нечетных} \quad x$$

и

$$x = 2x_1x_2, \quad 3x - 2 = 4p_1p_2, \quad 3x + 2 = 8q_1q_2 \quad \text{для четных} \quad x,$$

где x_1, x_2, p_1, p_2, q_1, q_2 $\geqslant$ 5. Нетрудно проверить, что амбигова форма B, на которую отличаются две наши полуамбиговы формы, соответствует этому разложению для дискриминанта

$(3x-2)(3x+2)$ и представляет $\pm x_1^2$, а также $\mp x_2^2$. Следовательно, существование контрпримера к гипотезе эквивалентно разрешимости следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} r\,k^2 - s\,l^2 = 4\,x_1^2, \\ r\,m^2 - s\,n^2 = -4\,x_2^2, \\ r\,s = 9\,x_1^2\,x_2^2 - 4 \end{cases}$$

для нечетных x или системы

$$\begin{cases} r\,k^2 - 2\,s\,l^2 = x_1^2, \\ r\,m^2 - 2\,s\,n^2 = -x_2^2, \\ 8\,r\,s = 9\,x_1^2\,x_2^2 - 1 \end{cases}$$

для четных x. Более того, если $x_2 > x_1$, то легко показать, что они удовлетворяют неравенству $x_2 < x_1^3/9$.

Наконец, отметим, что соответствующая гипотеза для полиномиальных решений из § 3 верна.

§ 6. Формы Маркова над кольцом гауссовых чисел

6.1. Пусть $\mathbb{G} = \mathbb{Z}[i]$ — кольцо целых гауссовых чисел. Рассмотрим группу Cl_G классов модулей поля $\mathbb{Q}(i,\ \varepsilon)$ над порядком $\mathbb{G}[\varepsilon]$ (см. п. 1.1) или (что то же самое) группу классов сопряженности матриц со следом S из группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{G})$ относительно композиции, определенной в п. 1.4. Легко проверить, что естественный гомоморфизм из группы $\widehat{\mathrm{Cl}}$ в эту группу Cl_G имеет ядро такое же, как в п. 1.8, т. е. совпадает с группой $\{A_1, A_{-1}\}$.

6.2. В пп. 2.11 и 5.1 мы поставили в соответствие марковской тройке $(x > y > z)$ три пары натуральных чисел $(r,\ s)$, $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$, по каждой из которых, как отмечалось выше, тройка восстанавливается однозначно. Определим три гауссовых числа: $\lambda = r + si$, $\{\mu, \eta\} = \{a + bi,\ c + di\}$. Меняя, если нужно, местами числа μ и η, можно считать, что

$$\lambda\,\bar\lambda = x, \qquad \mu\,\bar\mu = 3x - 2, \qquad \eta\,\bar\eta = 3x + 2.$$

Чертой "-" будем обозначать комплексное сопряжение, а также, немного ниже, сопряжение кватернионов.

6.3. Для нечетного следа $S = 3x$ обозначим через $[i]$, $[3]$, $[\lambda]$ классы форм из Cl_G, которые соответствуют матрицам

$$\begin{pmatrix} S & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S-i & i\lambda\bar\lambda \\ 3 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S-i & 3i\bar\lambda \\ \lambda & i \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{G}).$$

Отметим, что $\overline{[\lambda]}*[\bar\lambda] = [i]*[i] = A_1$ — главный класс форм. Ясно, что для класса формы A, определенного в п. 2.3, $A * [\bar\lambda] = [\lambda]$. Далее будем рассматривать приведенную форму $B \in [\lambda] * [\lambda]$.

Оказывается, она обладает рядом свойств, аналогичных тем, которые рассмотрели в § 2 для формы A: так как $B * \bar{B} = A_1$, $B \sim L_G{}^T \cdot \bar{L}_G$, т. е. разложение п. 1.7 для матрицы B имеет ось симметрии α. Отражение относительно этой оси α дает комплексно сопряженную матрицу $\bar{B}$.

6.4. Для четного следа S необходимо учесть, что модуль A принадлежит порядку $\mathfrak{O}_2$. Определим, как и в нечетном случае,

$$B = \begin{pmatrix} S-\gamma & * \\ \lambda^2 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{где } \gamma \equiv i (\bmod \lambda).$$

В случае четного x обозначим через $\lambda' = \lambda/(1+i)$, а через $[i]$, $[3]$, $[\lambda]$ — классы сопряженности матриц

$$\begin{pmatrix} S-1 & 2* \\ 2i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S-3+2i & 2* \\ 6 & 3-2i \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} S-i+\lambda & 2* \\ 2\lambda' & i-\lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{G}).$$

Тогда $B = [\lambda] * [\lambda] * [i]$ и снова $B * \bar{B} = A_1$. Следовательно, и в этом случае разложение для B имеет такую же ось симметрии α. Так как

$$B = \begin{pmatrix} S-\gamma & * \\ \lambda^2 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^2 & i+w\lambda \\ w\lambda - i & w^2 \end{pmatrix},$$

разложение матрицы B имеет еще одну ось "почти" симметрии β. "Почти" означает, что эта симметрия не распространяется на фрагмент $[h-i-1 \,.\, 1 \,.\, h+i-1]$. Дополнение к этому фрагменту — симметрическая матрица из $\mathrm{GL}(2, \mathbb{G})$ с определителем -1, т. е. ось β — это ось симметрии без комплексного сопряжения в отличие от α-симметрий. Еще одно отличие от α-симметрии состоит в том, что ось β пересекает два диаметрально противоположных множителя из разложения п. 1.7, выстроенного вдоль окружности.

Введем обозначения:

$$u = 1 + 2i, \quad v = 2i,$$
$$[u] = \begin{pmatrix} u & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [v] = \begin{pmatrix} v & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [1] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.5. Теорема. *Если $x(k, l)$ — марковское число (см. п. 2.8), то разложение соответствующей ему матрицы B состоит только из множителей:*

а) *по $l/2$ штук матриц $[u]$ и $[\bar{u}]$ и по k штук матриц $[v]$ и $[\bar{v}]$, если l четно. Причем все множители $[v]$ и $[\bar{v}]$ группируются в пары $[v\ \bar{v}]$ или $[\bar{v}\ v]$;*

б) *по $k/2$ штук матриц $[u]$ и $[\bar u]$ и по $2l$ штук матриц $[1]$, если k четно;*

в) *по $(k+l)/2$ штук матриц $[u]$ и $[\bar u]$ и по $2k$ штук матриц $[1]$, если $k+l$ четно. Причем, в последних двух случаях матрицы $[1]$ также группируются парами $[1\,1]$. Наконец, во всех случаях матрицы с чертой чередуются с матрицами без черты.*

Доказательство. Доказательство почти в точности повторяет доказательство теоремы п. 2.5. Отличие состоит в том, что "кислородный" аргумент (см. п. 2.10) не работает и приходится использовать квадрат I^2 перестройки I, который соответствует преобразованию $x \to \tilde x = 3yz - x$. □

6.6. Приведем несколько примеров разложения половинок L_G (см. п. 6.3) : $L_G(x) =$

$[1.u.](5)$,	$[.u.\bar v](13)$,
$[11.u.1](29)$,	$[1\bar u.u.](34)$,
$[.u.\bar u v](89)$,	$[1.u.11\bar u](169)$,
$[111.u.11](194)$,	$[1u\bar u.u.](233)$,
$[\bar v.u.\bar v v](433)$,	$[.u.\bar u u\bar v](610)$,
$[11\bar u 11.u.1](985)$,	$[1111.u.111](1325)$.

Выделяем точками множитель, пересекаемый осью β. Для всех чисел Маркова это всегда множитель $[u]$.

6.7. Повторим рассуждения из п. 5.1 относительно половинки L для матрицы A, где получили пару гауссовых чисел (μ,η), но теперь для матриц $L_G(x)$. Имеем

$$2L_G = (L_G+\bar{L_G}^W)+(L_G-\bar{L_G}^W) = \begin{pmatrix} a_G & b_G \\ -\bar b_G & \bar a_G \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_G & d_G \\ \bar d_G & -\bar c_G \end{pmatrix}.$$

Получаем пару кватернионов $\{\mu_G,\ \eta_G\} = \{a_G + b_G\,j,\ c_G + d_G\,j\}$, где a_G, b_G, c_G, $d_G \in \mathbb{G}$. Их следует поменять местами, если $\det L_G = -1$. Так как $\det L_G = \pm 1$ и $a_G\,\bar a_G + b_G\,\bar b_G + c_G\,\bar c_G + d_G\,\bar d_G = 3x$, то

$$\mu_G\,\bar\mu_G = \mu\,\bar\mu = 3\,x - 2, \qquad \eta_G\,\bar\eta_G = \eta\,\bar\eta = 3\,x + 2.$$

Казалось бы, эти кватернионы должны нести какую-нибудь новую информацию о гауссовых числах μ и η. Однако это не так. Для числа $\mu = a + bi$ пусть $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$, $b = 3b'$. Определим следующий кватернион $\mu^G = a + b'(i + 2j + 2k)$, тогда $\mu^G\,\bar\mu^G = 3x - 2$. Для числа $\eta = c + di$ пусть $c \equiv d (\mathrm{mod}\ 3)$, $d = c + 3d'$. Определим следующий кватернион $\eta^G = c(1+i) + d'(1 + 2i + 2j)$, тогда $\eta^G\,\bar\eta^G = 3x + 2$. Эти кватернионы легко также выразить через μ,η и кватернион $\tau = 1 + i + j$, например, $\mu^G = \bar\tau\,\mu\,\tau\,/\,3$.

6.8. Теорема. *Кватернионы μ_G и η_G отличаются от кватернионов μ^G и η^G только порядком и знаками своих компонент.*

Доказательство. Доказательство снова основывается на использовании осей α и β и перестройке $x \to \tilde{x}$, но требует отдельного рассмотрения большого количества случаев в зависимости от остатка матрицы L по модулю 6. Поэтому его опускаем. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. — М.: Наука, 1964. — 566 с. (РЖМат, 1965, 4А116К)
2. *Рудаков А.Н.* Числа Маркова и исключительные расслоения на $\mathbb{P}^2$// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — *52*, № 1. — С. 100–112 (РЖМат, 1988, 6А408)
3. *Frobenius G.* Über die Markoffschen Zahlen// Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsberichte. — 1913. — С. 458–487
4. *Gorodentsev A.L., Rudakov A.N.* Exceptional vector bundles on projective spaces// Duke Math. J. — 1987. — *54*, № 1. — С. 115–130 (РЖМат, 1988, 1А485)
5. *Hurwitz A.* Über eine Aufgabe der unbestimmten Analisis// Arch. Math. und Phys. — 1907. — *3*, № 11. — С. 185–196
6. *Markoff A.A.* Sur les formes binaires indéfinies// Math. Ann. — 1879. — *15*. — С. 381–409; ibid 1880. — *17*. — С. 379–399
7. *Silverman J.H.* The Markov equation $X^2 + Y^2 + Z^2 = aXYZ$ over quadratic imaginary fields// J. Number Theory. — 1990. — *35*, № 1. — С. 72-104 (РЖМат, 1991, 4А141)
8. *Zagier D.* On the number of Markoff numbers below a given bound// Math. Comput. — 1982. — *39*, № 160. — С. 709–723 (РЖМат, 1983, 6А89)

Владимирский государственный университет
ул. Горького, 87, Владимир, 600024, Россия

УДК 512.74

II. РЕШЕТКИ ГАЛУА И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

В. Е. Воскресенский

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке центра фундаментального естествознания Минобразования РФ (проект СПБГУ).

Введение

Сначала дадим одно замечание общего характера. Большинство читателей знакомо с теорией алгебраических многообразий над замкнутым полем и имеет обыкновение отождествлять данное многообразие с множеством его геометрических точек, что дает лишь поверхностное представление о существе проблем в незамкнутом случае. Поэтому при исследовании алгебраических групп, определенных над незамкнутым полем или кольцом, имеется жесткая необходимость рассматривать их в качестве групповых объектов в категории схем. Конечно, имеется детальное изложение теории групповых схем в трудах семинара Гротендика и Демазюра [58], но существует и компромиссный путь.

Пусть k — произвольное поле, k_s — его сепарабельное замыкание, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ — группа Галуа расширения k_s/k, X — алгебраическое многообразие над полем k. Тогда имеем объект, содержащий в себе богатейшую информацию о многообразии X, это k_s-многообразие $\bar{X} = X \otimes_k k_s$ вместе с действием группы Галуа $\mathcal{G}$ на $\bar{X}$ через второй множитель. Тем самым получаем внушительный набор ассоциированных $\mathcal{G}$-множеств и $\mathcal{G}$-модулей Галуа: точки $X(k_s)$, дифференциальные формы, модули $\mathrm{Pic}\,\bar{X}$, $\mathrm{Br}\,\bar{X}$ и т.д. Таким образом, изучение многообразия X можно разбить на два этапа: геометрический, т.е. исследование многообразия $\bar{X}$ над замкнутым полем k_s, и алгебраический – изучение модулей Галуа, сопутствующих схеме $\bar{X}$, рассматриваемой над полем k. Никому еще не удавалось обстоятельно описать эти два этапа в одном месте, книга стала бы настолько объемной, что оказалась бы нечитабельной. В данной статье будет дан подробный обзор второго — алгебраического аспекта исследования многообразий, геометрическая же часть предполагается известной. Конечно, разбиение исследований на два этапа является слишком грубым делением. Даже с формальной точки зрения многообразие $\bar{X}$ является только одним слоем k-схемы X. В случае числовых полей имеются, например, p-адические многообразия $X \otimes_k k_p$ со своими наборами модулей Галуа. Далее,вопросы арифметики требуют введения целых структур на многообразии X, сразу же возникает вопрос об их классификации, о вычислении редукции целой модели и т.д. В качестве рабочих инструментов в этой области появились такие тончайшие приборы, как меры Тамагавы или формулы Зигеля.

Сделаем небольшой экскурс в недавнюю историю. В своем известном докладе на Международном Математическом Конгрессе в 1962 году А.Борель [3] обрисовал широкую панораму достижений и возникших новых проблем в достаточно новой для той поры области — арифметике линейных алгебраических групп. Он указал, в частности, на поистине драматическую ситуацию, сложившуюся при исследовании таких важных характеристик связной алгебраической k-группы G, как числа Тамагавы $\tau(G)$ или множества (G) — главных однородных пространств группы G, тривиальных во всех пополнениях числового поля k. Высказывавшиеся гипотезы о строении чисел $\tau(G)$ или $[(G)]$ почти тотчас опровергались контрпримерами. Бросая взгляд назад, видим, что арифметике алгебраических групп в то время недоставало более глубоких сведений о бирациональной природе многообразия группы G. Важнейшим источником дополнительной информации явились результаты Хиронаки [59] о разрешении особенностей. Еще раньше в своих исследованиях по теории поверхностей Ю.И.Манин и И.Р.Шафаревич обратили внимание на то, что группа $H^1(k, \operatorname{Pic} \bar{X})$ является бирациональным инвариантом в классе гладких проективных поверхностей X, определенных над полем k, и с успехом использовали это обстоятельство (см. [30], [31]). То, что строение модуля $\operatorname{Pic} \bar{X}$ позволяет судить об арифметике поверхности X, было отмечено еще в книге Б.Сегре [70]. Уже первое применение бирациональной техники к изучению свойств линейных групп дало нетривиальные результаты (см. [6]). Бирациональная геометрия позволила по новому взглянуть на причинно-следственные связи в огромном мире, называемым теорией линейных алгебраических групп и их однородных пространств. К настоящему времени бирациональная геометрия алгебраических групп приобрела свое лицо и имеет на своем счету ряд первоклассных результатов, к примеру, решение проблемы Э.Нётер о полях инвариантов групп перестановок, решение проблемы О.Зарисского о стабильно рациональных многообразиях, выявление бирациональной природы арифметических инвариантов. В данной статье, наряду с новыми результатами, изложены основные факты, полученные за последние 30 лет в этой области, не всегда с подробными доказательствами, но с достаточными пояснениями.

Львиную долю текста занимает теория алгебраических торов, которая рассматривается с точки зрения бирациональной геометрии. В общей теории комплексных линейных алгебраических групп алгебраические торы всегда играли хотя и важную, но вспомогательную роль. Это и понятно, поскольку над алгебраически замкнутым полем сам тор имеет весьма простую структуру — это произведение некоторого числа одномерных мультипликативных групп G_m. Положение в корне меняется при переходе к незамкнутому полю k. В этом случае категория алгебраических торов над полем k дуальна категории целочисленных представлений группы Галуа $\mathcal{G}$ и, следовательно, работы по изучению алгебраических торов хватит всем будущим поколениям математиков. Бирациональная геометрия алгебраических торов явилась образцом для выработки гипотез и их последующих доказательств в общем случае линейных алгебраических групп. Обратно, ряд гипотез общего характера (например, гипотеза Зарисского) прекрасно испытываются на полигоне алгебраических торов и полученная информация приносит нетривиальные результаты. Сейчас появилась целая наука — теория торических многообразий, которая позволяет ряд нелинейных задач алгебраической геометрии и топологии сводить к задачам о целых точках в некоторых многогранниках, именно: разрешение особенностей, оценка числа решений системы уравнений, бирациональная геометрия линейных алгебраических групп. Успешное развитие теории торических многообразий объясняется ее естественностью. Пусть M — свободная абелева группа ранга n, тогда можно рассматривать ее групповую структуру в аддитивной или мультипликативной записи. Изоморфизм $M \cong \mathbb{Z}^n$ позволяет рассматривать группу M как решетку в вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ и мы оказываемся в царстве кристаллографии; вложение же группы M в качестве мультипликативной подгруппы в поле рациональных функций $k_s(M) = k_s(x_1, ..., x_n)$, где $x_1, ..., x_n$ — базис мультипликативной группы M, приводит к бирациональной геометрии целочисленных представлений, т.е. к теории торических многообразий.

Для удобства читателей в начале статьи собран минимально необходимый материал из области групповых схем и когомологий, требуемый для дальнейшего. Достаточно подробно изложена теория форм алгебраических многообразий. Группа Пикара связной линейной алгебраической k-группы исследовалась автором [5] и В.Л.Поповым [34]. Группа Брауэра линейной группы и ее компактификации подробно описана в совместной работе Кольо-Телена и Сансюка [44], а также в более поздней статье Сансюка [67].

Исследование бирациональных характеристик алгебраических групп начинаем с изучения бирационального инварианта $[\operatorname{Pic}\bar{X}]$, где X — гладкая проективная модель связной линейной алгебраической группы G. Оказалось, что категория алгебраических торов является наиболее естественной областью применения инварианта $[\operatorname{Pic}\bar{X}(T)] = p_k(T)$. Итак, класс $p_k(T)$ определяет многообразие T с точностью до стабильной эквивалентности (см. [11], [12]). Далее, класс $p_k(T)$ допускает чисто алгебраическое определение. Выяснилось, что модуль Пикара $\operatorname{Pic}\bar{X}(T)$ обладает любопытным свойством: $H^{-1}(\pi, \operatorname{Pic}\bar{X}(T)) = 0$ для любой подгруппы π группы разложения П тора T ([11], [12]). Это позволило в категории модулей Галуа вскрыть существование вялой резольвенты для каждого модуля $\hat{T}$ конечного ранга и без кручения. Такая резольвента однозначно определяет класс $p_k(T)$. Теория вялых резольвент позволила значительно продвинуться в изучении полугруппы стабильной эквивалентности $Z(L/k)$ и ее максимальной подгруппы $Z^0(L/k)$ (см. В.Е.Воскресенский [11], [12], Эндо и Мията [49]–[54], Б.Э.Кунявский [25], А.Л.Чистов [37], [38]). Группа $Z^0(L/k)$ оказалась изоморфной группе, ранее по другому поводу изучавшаяся Дрессом (см. [48]). Она имеет конечный тип, но не всегда конечна. В работе А.Л.Чистова [38] показано, что полугруппа $Z(L/k)$ имеет, как правило, бесконечное количество образующих. Для торов T с циклическим полем разложения класс $p_k(T)$ обратим в полугруппе подобия модулей. Этот фундаментальный факт впервые установили Эндо и Мията [51]. Используя этот результат, А.Л.Чистов [37] получил классификацию торов с циклическим полем разложения с точностью до стабильной рациональности. Дополним картину доказательством рациональности стабильно рациональных торов с циклическим полем разложения.

Введение бирациональных характеристик в область линейных алгебраических групп позволило сдвинуть с места старую проблему рациональности полей инвариантов конечных групп преобразований, действующих линейно на конечномерном пространстве. Первый пример $(\mathbb{Q}, 47)$ поля инвариантов, не являющегося рациональным над $\mathbb{Q}$, получил Суон [72]. В то же время по другому поводу этот же пример привел автор [6], [8], заметив, что поля инвариантов конечных абелевых групп, линейно действующих на векторном пространстве V, естественно описываются как поля функций на некоторых торах, изогенных максимальным торам группы $\mathrm{GL}(V)$. Это позволило использовать теорию бирациональных инвариантов алгебраических торов и перевести задачу на язык модулей конечного ранга. Ленстра [63] и Эндо — Мията [51] завершили классификацию полей инвариантов абелевых линейных конечных групп.

Первый пример нерационального поля инвариантов конечной группы G, действующей в линейном пространстве над замкнутым полем k, построил Солтман [71]. Он нашел способ вычислять неразветвленную группу Брауэра поля инвариантов $k(V)^G$ для некоторых групп G и в ряде случаев она оказалась нетривиальной. Ф.А.Богомолов [2] предложил свою элегантную конструкцию. Классическая задача о приведении пары матриц к простейшему виду также сводится к изучению поля рациональных функций на явно описываемом алгебраическом торе. Этому разделу уделено довольно много места. Статья завершается изложением результатов А.Клячко, Б.Кунявского и автора по исследованию строения максимальных торов в полупростых группах.

К сожалению, за рамками этой статьи остался без рассмотрения накопленный огромный материал по арифметике линейных алгебраических групп, включая теорию меры Тамагавы на адельных группах. Мы не коснулись также теории R-эквивалентности на линейных группах и конструкции целых моделей. За пределами статьи остались и результаты, объясняющие бирациональную природу известных арифметических характеристик группы G.

Что касается терминологии и обозначений, то они достаточно стандартные. В частности, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных, $\mathbb{R}$ — поле вещественных, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Все кольца имеют единицу, A^* — группа обратимых элементов кольца A. Символ $[X]$ означает мощность множества X, $(L : F)$ — степень расширения L/F, $(G : H)$ — индекс подгруппы H в группе G. Под алгебраическим многообразием над полем k понимается, как правило, геометрически неприводимая приведенная отделимая схема X конечного типа над полем k, $k[X]$ — кольцо регулярных функций, $k(X)$ — поле рациональных функций на X.

§ 1. Групповые схемы и их когомологии

Пусть k — произвольное поле, X — алгебраическое многообразие, определенное над этим полем. Во многих случаях строение k_s-многообразия $\overline{X}$ хорошо известно, что позволяет достаточно эффективно изучать структуру возникающих $\mathcal{G}$-модулей, ассоциированных с $\mathcal{G}$-пространством $\overline{X}$. А это, в конечном итоге, дает возможность получать иногда существенную информацию о самом многообразии X. В данном параграфе достаточно полно описаны важнейшие $\mathcal{G}$-структуры, определяемые многообразием $\overline{X}$. От читателя требуется знания основ теории схем, необходимые напоминания будут приведены, обстоятельное изложение теории схем и категорий можно найти в работах Демазюра и Гротендика [58], Мамфорда [29], И.Р.Шафаревича [39], С.И.Гельфанда и Ю.И.Манина [17].

1.1. Групповые объекты в категории. Одним из простейших и в то же время важнейших алгебраических понятий является понятие группы. Структура группы на множестве G задается отображением

$$f : G \times G \to G,$$

которое удовлетворяет известным условиям. Если на множестве G задана дополнительная структура, например топологическая, то также просто формулируется определение топологической группы — необходимо только потребовать, чтобы отображения f и $x \to x^{-1}$ были непрерывными. Аналогично определяется аналитическая группа. Казалось бы, таким же образом следует определять и групповые структуры на алгебраических многообразиях. В самом деле, в случае алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль данный путь оправдан и приводит к теории, во многом подобной теории групп Ли. Однако сразу же было замечено, что распространение этой теории на случай положительной характеристики возможно только с досадными ограничениями. Возникли также технические затруднения при рассмотрении групповых структур на алгебраических многообразиях над незамкнутыми полями или кольцами. Правильное определение, позволяющее охватить несравненно более широкий класс объектов, дала теория схем Гротендика. Используя понятие представимого функтора, можно формально дать определение групповой структуры на схеме (и даже на объекте в любой категории) почти такое же простое, как и определение группы в алгебре. Возникшая таким образом теория групповых объектов весьма богата по содержанию и уже имеет на своем счету ряд первоклассных результатов.

Рассмотрим сначала несколько примеров, указывающих путь к определению групповой структуры на объектах произвольной категории.

Пример 1.1.1. Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая категория и $\mathcal{F}$ — контравариантный функтор на $\mathcal{C}$ со значениями в категории множеств. Будем называть $\mathcal{F}$ *предпучком групп* на $\mathcal{C}$, если для всех Y из $\mathcal{C}$ множества $\mathcal{F}(Y)$ снабжены групповой структурой так, что для всякого морфизма $f : X \to Y$ индуцированное отображение $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ является групповым гомоморфизмом.

Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — два предпучка групп на $\mathcal{C}$, то назовем гомоморфизмом предпучка $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$ всякий морфизм $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ такой, что для каждого Y из $\mathcal{C}$ отображение множеств $u(Y) : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{G}(Y)$ является гомоморфизмом групп.

Данное определение позволяет ввести понятие *группового объекта* в самой категории $\mathcal{C}$. Пусть X — объект категории $\mathcal{C}$. Определим контравариантный функтор h_X на категории $\mathcal{C}$ со значениями в категории множеств, полагая $h_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, и каждому морфизму $g : Y \to Z$ ставим в соответствие отображение множеств:

$$h_X(g) : h_X(Z) \to h_X(Y), \qquad h_X(g)(f) = f \circ g, \qquad f : Z \to X.$$

Функтор h_X играет весьма важную роль благодаря следующему обстоятельству. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный контравариантный функтор (предпучок) на категории $\mathcal{C}$ со значениями в категории множеств. Он называется *представимым*, если он изоморфен функтору вида h_X для некоторого объекта X категории $\mathcal{C}$. В теории категорий показывается, что если функтор $\mathcal{F}$ представим, то представляющий его объект определен однозначно с точностью до изоморфизма. Более точно, соответствие $X \to h_X$ определяет эквивалентность категории $\mathcal{C}$ с полной подкатегорией предпучков на $\mathcal{C}$ со значениями в категории множеств. Отсюда ряд важных конструкций. Во-первых, замена X на h_X позволяет переносить на произвольную категорию определения обычных теоретико-множественных конструкций, например, понятия группы. Во-вторых, среди предпучков на $\mathcal{C}$ могут существовать естественные функторы, которые в конце концов представимы некоторым объектом. Это обычно дает весьма нетривиальную информацию. Все это несколько напоминает применение теории производящих функций к исследованию последовательностей, получаемых с помощью какого-либо естественного процесса. В третьих, объект X определяет бесконечное семейство множеств $h_X(Y)$, что позволяет получать различную информацию об объекте X, используя теоретико-множественные конструкции, например, вычисляя когомологии или изучая вещественные, комплексные или иные структуры.

Определение. Объект X категории $\mathcal{C}$ называется *групповым объектом* или просто группой в $\mathcal{C}$, если функтор h_X есть предпучок групп на $\mathcal{C}$.

Если X_1 и X_2 являются группами в $\mathcal{C}$, то морфизм $X_1 \to X_2$ называется *гомоморфизмом групп*, если индуцированное отображение пучков $h_{X_1} \to h_{X_2}$ является гомоморфизмом.

Пример 1.1.2. Пусть теперь категория C обладает конечным объектом E и наряду с объектами X и Y категория C содержит и произведение $X \times Y$. В этом случае определение групповой структуры на объекте X, данное в примере 1.1.1, можно записать только в терминах самого объекта X, игнорируя остальные объекты категории. Пусть p_1 и p_2 — первая и вторая проекции $X \times X \to X$. Тогда p_1 и p_2 лежат в группе $h_X(X \times X)$, следовательно, определен морфизм $m = p_1 p_2 : X \times X \to X$.

Далее, в группе $X(X)$ есть тождественный морфизм 1. Обратный к нему в смысле группового закона обозначим через i . В группе $X(E)$ есть единичный элемент, обозначим его $e : E \to X$. Пусть $q : X \to E$ — так называемый структурный морфизм на конечный объект категории и $(m, 1)$, $(1, m)$ — два морфизма $X \times X \times X \to X \times X$. Морфизмы m, i, e удовлетворяют следующим условиям:

а) $m \circ (m, 1) = m \circ (1, m)$ — ассоциативность;

б) $m \circ (e \circ q, 1) = m \circ (1, e \circ q) = 1$ — свойство единицы;

в) $m \circ (i, 1) = m \circ (1, i) = e \circ q$ — свойство обратного элемента.

Оказывается, что и обратно, морфизмы m, i, e со свойствами а), б), в) вполне определяют пучок групп h_X .

1.2. Групповые схемы. Пусть теперь Sch/S — категория S-схем Гротендика. В этой категории имеется конечный объект — это схема S. Для любой схемы X над S имеется структурный морфизм $q : X \to S$. Далее, для любых двух S-схем и Y имеется произведение $X \times_S Y$.Поэтому групповая структура на S-схеме G состоит в задании трех морфизмов:

$$m : G \times_S G \to G, \quad i : G \to G, \quad e : S \to G,$$

удовлетворяющих аксиомам а), б), в). Эти морфизмы определяют групповое строение на каждом множестве $G(X)$, где X есть S-схема. Заметим, что морфизмы m, i, e не определяют структуру группы на самом топологическом пространстве G, ибо топология произведения $G \times_S G$ не совпадает с произведением топологий сомножителей.

Напомним теперь некоторые факты из области схем. Говоря о схеме X, не нужно забывать, что это сокращенное обозначение пары (X, O_X), где X — топологическое пространство, а O_X — пучок колец на X специального вида, а именно, любая точка $x \in X$ имеет такую окрестность U,что пара (U, O_U) изоморфна аффинной схеме $\mathrm{Spec}\, A$. Здесь O_U — ограничение пучка O_X на U, $A = \Gamma(U, O_U)$ — кольцо сечений пучка O_X над U, $\mathrm{Spec}\, A$

— пространство простых идеалов кольца A. Термин "X есть S-схема" означает, что задан морфизм схем $X \to S$. Пусть G — групповая схема над S и T — некоторая S-схема. Рассмотрим $G_T = G \times_S T$ как T-схему. Для любой T-схемы Y имеем тождество

$$G_T(Y) = \mathrm{Hom}_T(Y, G \times_S T) = \mathrm{Hom}_S(Y, G) = G(Y),$$

которое показывает, что G_T обладает групповой структурой в категории T-схем. Группа G_T представляет тот же функтор, что и S-группа G, но ограниченный на категорию T-схем. Схема G_T называется схемой, полученной из G *заменой базы*.

Пример 1.2.1. Пусть $q : G \to S$ — структурный морфизм, $x \in S$. Тогда каждый слой

$$G_x = G \times_S \mathrm{Spec}\, k(x)$$

является группой над полем вычетов $k(x)$ точки x.

1.3. Аффинные группы, алгебры Хопфа. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, $S = \mathrm{Spec}\, R$. Групповая S-схема G называется *аффинной* S-группой или R-группой, если $G = \mathrm{Spec}\, A$, где A — R-алгебра. Аффинную R-группу G можно также определить как групповой объект в категории аффинных R-схем. Категория аффинных R-схем дуальна категории коммутативных R-алгебр. Поэтому групповая структура аффинной R-группы $G = \mathrm{Spec}\, A$ полностью описывается в терминах ее кольца A. Таким образом, групповая структура на G состоит из трех морфизмов m, e, i, удовлетворяющих условиям а), б), в). Этим морфизмам соответствуют следующие гомоморфизмы R-алгебр:

$$\begin{array}{llll} m^* : A & \to A & \otimes_R A & \text{(коумножение)}, \\ e^* : A & \to & R & \text{(коединица)}, \\ i^* : A & \to & A & \text{(кообращение)}, \end{array}$$

которые удовлетворяют соответствующим условиям, полученным из а), б), в) по двойственности. Алгебра A с операциями m^*, e^*, i^* , удовлетворяющими этим трем условиям, называется *алгеброй Хопфа* . Вопросы классификации аффиных R-групп и R-алгебр Хопфа равносильны.

Пример 1.3.1 (аддитивная группа G_a). Пусть G_a — ковариантный функтор на категории коммутативных колец с 1, определяемый условиями $G_a(B) = B$, где B (справа) рассматривается как аддитивная группа. Этот функтор представим схемой $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[T]$, где $\mathbb{Z}[T]$ — кольцо многочленов от одной переменной T, ибо $\operatorname{Hom}_{\text{ring}}(\mathbb{Z}[T], B) = B$ для любого B. Итак, $G_a = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[T]$. Групповая операция m^* определяется сложением в группе $G_a(\mathbb{Z}[T] \otimes \mathbb{Z}[T]) = \mathbb{Z}[T] \otimes \mathbb{Z}[T]$. Тогда $m^*(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$, $e^*(T) = -T$, $i^*(T) = 0$.

Пример 1.3.2 (мультипликативная группа G_m). Пусть $G_m(B) = B^*$,где B^* — мультипликативная группа обратимых элементов кольца B. Функтор G_m представим аффинной схемой $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$, ибо $\operatorname{Hom}_{\text{ring}}(\mathbb{Z}[T, T^{-1}], B) = B^*$. Когрупповые операции : $m^*(T) = T \otimes T$, $e^*(T) = T^{-1}$, $i^*(T) = 1$. Аффинная группа G_m называется *мультипликативной группой.*

Пример 1.3.3 (полная линейная группа GL_n). Рассмотрим предпучок групп $\mathrm{GL}_n(X) = \mathrm{GL}(n, \Gamma(X, O_X))$, где справа — группа обратимых матриц порядка n. Этот функтор представим аффинной схемой

$$\mathrm{GL}_n = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[T_{11}, ..., T_{nn}, D^{-1}], \ D = \det(T_{ij}),$$

$$m^*(T_{ij}) = \sum T_{ik} \otimes T_{kj}, \ e^*(T_{ij}) =$$

$$= \delta_{ij}, i^*(T_{ij}) = (-1)^{i+j} D^{-1} \det(T_{rs}), \ r \neq i, \ s \neq j.$$

Пусть G есть S-группа, H — подсхема схемы G, H называется групповой подсхемой или подгруппой группы G, если для любой S-схемы T множество $H(T)$ является подгруппой группы $G(T)$. Если $H(T)$ — нормальный делитель группы $G(T)$ для всех T, то H называется нормальным делителем S-группы G.

Пример 1.3.4 (постоянные группы). Напомним, что для произвольного семейства схем X_i определена их сумма $\coprod X_i$. Это снова схема, топологическое пространство которой есть несвязное объединение пространств X_i, а структурный пучок является прямой суммой соответствующих пучков. Для любой схемы Y имеется функторная биекция

$$\operatorname{Hom}(\coprod X_i, Y) \simeq \prod \operatorname{Hom}(X_i, Y). \qquad (1.3.1)$$

По другому, сумма $\coprod X_i$ представляет ковариантный функтор $Y \to \prod \operatorname{Hom}(X_i, Y)$. Если все схемы X_i являются S-схемами, то сумма этих схем также снабжается строением S-схемы. В случае аффинных схем $X_i = \operatorname{Spec} A_i$ и *конечной* суммы имеем явное представление

$$X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_n = \operatorname{Spec}(A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n).$$

1.4. Групповые схемы над полем, алгебраические группы. В дальнейшем нас будут интересовать в основном группы в категории k-схем, где k — поле. Наиболее изученными в этой категории являются так называемые *алгебраические* группы, т.е. групповые k-схемы, гладкие и конечного типа над полем k. Отбрасывая условие гладкости, получаем более широкую категорию групповых схем конечного типа над полем k. Эта категория даже предпочтительнее категории алгебраических групп, так как всякая подгруппа алгебраической группы хотя и имеет конечный тип, но не всегда является гладкой.

Пример 1.4.1. Пусть $G_{m,k} = \operatorname{Spec} k[T, T^{-1}]$ — мультипликативная k-группа. Отображение $g \to g^n$ определяет групповой гомоморфизм $f : G_{m,k} \to G_{m,k}$. Ядро этого гомоморфизма представляет функтор $A \to \mu_n(A)$, где $\mu_n(A) = \{a \in A \mid a^n = 1\}$, а A есть k-алгебра. Поэтому $\mu_{n,k} = \operatorname{Spec} k[T]/(T^n - 1)$.

Группа $\mu_{n,k}$ является конечной групповой схемой. Если характеристика p поля k не делит n, то $\mu_{n,k}$ — гладкая k-группа и, следовательно, алгебраическая; если же p делит n, то группа $\mu_{n,k}$ не является приведенной. Заметим еще, что в случае когда поле k содержит все корни n-й степени из единицы и $(p, n) = 1$, то группа $\mu_{n,k}$ постоянна над k.

Имеет место следующий замечательный факт.

Теорема Картье. *Любая групповая схема конечного типа над полем характеристики нуль является гладкой, т.е. является алгебраической.*

Остановимся вкратце на вопросах классификации k-групп.

Пусть $\mathrm{GL}_{n,k} = \mathrm{GL}_n \otimes_{\mathbb{Z}} k$ — полная линейная группа над полем k. Подгруппа G группы $\mathrm{GL}_{n,k}$ называется *линейной группой*, определенной над полем k. Оказывается, что линейными группами исчерпываются любые аффинные групповые схемы конечного типа над полем k. Это установлено в работах Розенлихта и Шевалле. Заметим, что при таком определении линейной группы в ее кольце вполне могут быть нильпотентные элементы. По теореме Картье это может случиться только в случае поля k характеристики $p > 0$. Очень важный класс алгебраических групп составляют связные k-группы, многообразия которых проективны над полем k. Оказывается, закон умножения в таких группах всегда коммутативен. Проективные k-группы носят название абелевых многообразий. В данном обзоре не будем касаться абелевых многообразий, они не допускают нетривиальных гомоморфизмов в группу $\mathrm{GL}_{n,k}$, для их изучения требуется совершенно другая техника. Детальное изучение строения абелевых многообразий проведено в книге Мамфорда [29].

1.5. Диагональные группы. Пусть M — коммутативная абстрактная группа с мультипликативным умножением, $\mathbb{Z}[M]$ — групповое кольцо, $D(M) = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[M]$. По определению группового кольца для любого коммутативного кольца R с единицей имеем

$$D(M)(R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(\mathbb{Z}[M], R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(M, R^*).$$

Тогда множество $D(M)(R)$ обладает строением коммутативной группы и групповая структура функториальна по R. Таким образом, схема $D(M)$ является коммутативной групповой схемой. Группа $D(M)$ называется *диагональной* группой.

Замечание. В конструкции группового кольца $\mathbb{Z}[M]$ существенно, что операция в M записывается мультипликативно. С другой стороны, аддитивная запись для коммутативных групп чрезвычайно удобна и привычна. Поэтому в некоторых безвыходных ситуациях типа $Z[Z]$ будем употреблять изоморфизм $e : M \to e(M)$ перехода от аддитивной записи к мультипликативной. Элемент $e(m)$, $m \in M$, обычно записывается в показательной форме:

$$e(m) = e^m, \quad e^{m+m'} = e^m e^{m'}, \quad e^0 = 1.$$

Если $\sigma \in \mathrm{Aut}(M)$, то определим действие оператора σ на $e(M)$ по правилу $\sigma(e^m) = e^{\sigma m}$. Тогда σ будет и операторным изоморфизмом.

Пусть $f : M \to N$ — гомоморфизм абелевых групп, он продолжается до гомоморфизма групповых колец $f : \mathbb{Z}[M] \to \mathbb{Z}[M]$ и, следовательно, гомоморфизм f определяет морфизм схем $D(f) : D(N) \to D(M)$, который, как легко видеть, является групповым гомоморфизмом. Таким образом, соответствие $M \to D(M)$ есть контравариантный функтор из категории абелевых групп в категорию групповых аффинных схем. Очевидно, что $D(M \times N) = D(M) \times D(N)$.

Пример 1.5.1. Мультипликативная группа G_m примера 1.3.2 есть частный случай диагональной группы, $G_m = D(\mathbb{Z})$, где группу $\mathbb{Z}$ следует рассматривать в мультипликативной записи с образующим элементом t. Если $M \cong \mathbb{Z}^n$, то $D(M) = D(\mathbb{Z}^n) = G_m^n$.

1.6. Характеры групповых схем. Пусть G — произвольная групповая схема, рассмотрим коммутативную группу $\widehat{G}(S) = \mathrm{Hom}_{S-\mathrm{gr}}(G_S, G_{m,S})$, которую будем называть *группой S-характеров группы G*. Для всякого морфизма $u : T \to S$ имеем гомоморфизм групп $\widehat{G}(u) : \widehat{G}(S) \to \widehat{G}(T)$. Получаем контравариантный функтор $\widehat{G}$ из категории групповых схем в категорию коммутативных абстрактных групп — пучок характеров группы G. Ограничение функтора $\widehat{G}$ на категорию S-групп обозначим через $\widehat{G}_S$. Пусть $f : G_1 \to G_2$ — гомоморфизм групповых схем. Ясно, что имеется однозначно определенный гомоморфизм коммутативных абстрактных групп $\hat{f} : \widehat{G_2}(S) \to \widehat{G_1}(S)$, т.е. $\hat{f}$ — гомоморфизм пучков характеров $\widehat{G_2} \to \widehat{G_1}$. Заметим также, что $(\widehat{G_1 \times G_2})(S) = \widehat{G_1}(S) \times \widehat{G_2}(S)$. В работе Гротендика и Демазюра [58] получены следующие результаты:

1. Пучок характеров $\widehat{D_S(M)}$ диагональной S-группы представим постоянной групповой схемой M_S, $\widehat{D_S(M)} \cong M_S$.

2. Пучок характеров постоянной групповой S-схемы M_S представим диагональной групповой схемой $D_S(M)$: $\widehat{M_S} \cong D_S(M)$.

Теорема. *Пусть S — связная схема и N — коммутативная группа конечного типа, тогда имеем групповой изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{S-\mathrm{gr}}(D_S(M), D_S(N)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(N, M).$$

В частности, $\mathrm{Aut}_{S-\mathrm{gr}}(D_S(N)) \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(N)$.

Следствие. *Если S — связная схема, то*

$$\mathrm{Aut}_{S-\mathrm{gr}}(D_S(N)) \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}\, D_S(\mathbb{Z}^n) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}),$$

$$\mathrm{Hom}_{S-\mathrm{gr}}(G^n_{m,S}, G_{m,S}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^n) \cong \mathbb{Z}^n.$$

1.7. Точность функтора D. Пусть B является A-алгеброй и $\varphi : A \to B$ — канонический гомоморфизм, кольца A и B коммутативны с единицами. Напомним, что A-модуль M называется *плоским*, если функтор $\mathcal{F}_M : N \to N \otimes_A M$ является точным на категории A-модулей. Далее, B называется *строго плоской* A-алгеброй, если выполняется одно из двух эквивалентных условий:

а) $\varphi : A \to B$ есть вложение и A-модуль $B/\varphi(A)$ является плоским;

б) B есть плоский A-модуль и отображение $\varphi^* : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ сюръективно.

Морфизм $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ называется строго плоским, если B является строго плоской A-алгеброй. Строго плоские морфизмы обладают рядом приятных свойств, которые будем подчеркивать в нужных местах.

Определение. Последовательность S-групп

$$1 \to G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \to 1 \tag{1.7.1}$$

назовем *точной*, если гомоморфизм α — замкнутое вложение, отождествляющее G' с ядром гомоморфизма β, а гомоморфизм β является строго плоским.

Для диагональных групп из точной последовательности абелевых групп

$$0 \to M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \to 0$$

следует точность последовательности соответствующих диагональных групп

$$1 \to D_R(M'') \longrightarrow D_R(M) \longrightarrow D_R(M') \to 1.$$

Если базисная схема $S = \operatorname{Spec} R$ связна, а M, M', M'' — абелевы группы конечного типа, то точная последовательность R-групп

$$1 \to D_R(M'') \longrightarrow D_R(M) \longrightarrow D_R(M') \to 1$$

определяет точную последовательность групп

$$0 \to M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \to 0.$$

Таким образом, категория диагонализируемых R-групп конечного типа над связной схемой $S = \operatorname{Spec} R$ дуальна категории абелевых групп с конечным числом образующих. Двойственность устанавливается соответствием $M \to D_R(M)$ или обратным для него

$$D_R(M) \to \widehat{D_R(M)}(R) = M.$$

1.8. Когомологии Галуа. Пусть Π — конечная группа, A — некоторый Π-модуль, тогда определены группы гомологий $H_n(\Pi, A)$ и когомологий $H^n(\Pi, A)$ (см. [20]). Для любой точной последовательности Π-модулей

$$0 \to A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \to 0$$

возникают точные последовательности гомологий и когомологий

$$\ldots \to H_{n+1}(\Pi, A'') \to H_n(\Pi, A') \to H_n(\Pi, A) \to H_n(\Pi, A'') \to \ldots$$

$$\ldots \to H^{n-1}(\Pi, A'') \to H^n(\Pi, A') \to H^n(\Pi, A) \to H^n(\Pi, A'') \to \ldots .$$

Символ A^Π означает подмножество элементов в A, инвариантных относительно действия группы П. В групповом кольце $Z[\Pi]$ пусть $N = \sum \sigma$, $\sigma \in \Pi$, а I — ядро пополняющего гомоморфизма $\varepsilon : Z[\Pi] \to Z$, переводящего каждый элемент $\sigma \in \Pi$ в 1. Ядро ε порождается элементами вида $\sigma - 1$, $\sigma \in \Pi$. Модуль $A/IA = Z \otimes_\Pi A$ обозначим через A_Π, пусть NA и A_N — образ и ядро норменного отображения $N : A \to A$. Если Г является подгруппой группы П, то имеется естественный гомоморфизм ограничения

$$\mathrm{res} : H^q(\Pi, A) \to H^q(\Gamma, A),$$

если же Г нормальная подгруппа, то существует гомоморфизм

$$\inf : H^q(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \to H^q(\Pi, A),$$

называемый инфляцией. В этом случае точна последовательность Хохшильда — Серра

$$0 \to H^1(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \to H^1(\Pi, A) \to$$
$$\to H^1(\Gamma, A)^{\Pi/\Gamma} \to H^2(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \to H^2(\Pi, A).$$

Ее обобщение. Если $H^q(\Gamma, A) = 0$ при $1 \leqslant q \leqslant n-1$, то последовательность

$$0 \to H^n(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \to H^n(\Pi, A) \to$$
$$\to H^n(\Gamma, A)^{\Pi/\Gamma} \to H^{n+1}(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \to H^{n+1}(\Pi, A)$$

точна. Дж.Тейт предложил срастить точные последовательности гомологий и когомологий в одну когомологическую последовательность следующим образом. Он вводит следующие обозначения:

$$\hat{H}^n(\Pi, A) = H^n(\Pi, A), \ n \geqslant 1, \ \hat{H}^0(\Pi, A) = A^\Pi/NA,$$
$$\hat{H}^{-1}(\Pi, A) = A_\Pi/A_N, \ \hat{H}^{-n}(\Pi, A) = H_{n-1}(\Pi, A), \ n \geqslant 2.$$

Тогда имеем точную последовательность, бесконечную в обе стороны:

$$\ldots \to \hat{H}^{n-1}(\Pi, A'') \to \hat{H}^n(\Pi, A') \to \hat{H}^n(\Pi, A) \to \hat{H}^n(\Pi, A'') \to \ldots .$$

Естественным источником и образцом для построения теории когомологий групп явились, не в последнюю очередь, так называемые когомологии Галуа. Пусть L/k — конечное расширение

Галуа с группой $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, A — Π-модуль, его называют модулем Галуа. Огромное количество модулей Галуа доставляет нам теория алгебраических чисел и диофантова геометрия, к примеру, группа идеалов, группа классов идеалов, группа единиц поля L, группа Пикара алгебраического многообразия и т.д. Группы $\hat{H}^q(\Pi, A)$ также обозначаются через $\hat{H}^q(L/k, A)$. Простейшими Π-модулями являются аддитивная группа поля L и его мультипликативная группа L^* .

Пример 1.8.1. Когомологии группы L тривиальны: $\hat{H}^q(L/k, A) = 0$ для всех q. Это отражение того факта, что расширение L/k обладает нормальным базисом.

Однако когомологические характеристики группы L^* весьма нетривиальны и их изучение проливает дополнительный свет на конструкцию самого поля. Известно, что $H^1(L/k, L^*) = 1$ (теорема Гильберта 90). Группа $H^2(L/k, L^*)$ играет особую роль в алгебраических конструкциях, причем она описывает объекты существенно некоммутативной природы. Пусть k_s — сепарабельное замыкание поля k, $\{L_i\}$ — множество всевозможных конечных расширений Галуа поля k, $L_i \subset k_s$, тогда определен индуктивный предел групп $H^2(L/k, L^*)$, он обозначается $H^2(k, k_s^*)$ и называется когомологической группой Брауэра $\mathrm{Br}\, k$ поля k. Поскольку $H^1(L/k, L^*) = 1$, то вложение $L \subset k_s$ определяет точную последовательность

$$0 \to H^2(L/k, L^*) \to H^2(k, k_s^*) \to H^2(L, k_s^*)$$

или, в других обозначениях,

$$0 \to \mathrm{Br}(L/k) \to \mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, L,$$

где $\mathrm{Br}(L/k)$ есть $H^2(L/k, L^*)$. Группа $H^2(L/k, L^*)$ подробно рассмотрена в книге Ван дер Вардена [4] в терминах скрещенных произведений. Из этой трактовки следует, что группа $\mathrm{Br}\, k$ изоморфна группе классов центральных простых алгебр над полем k, этим объясняется и название. Элементы из $H^2(L/k, L^*)$ соответствуют тем классам алгебр, которые распадаются над полем L.

Если A — группа, не обязательно коммутативная, на которой действует группа Π, то определены группа $H^0(\Pi, A) = A^{\Pi}$ и множество $H^1(\Pi, A)$ с отмеченной точкой, и для точной последовательности таких Π-групп

$$1 \to A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \to 1$$

возникает точная последовательность когомологий

$$1 \to H^0(\Pi, A') \to H^0(\Pi, A) \to$$
$$\to H^0(\Pi, A'') \to H^1(\Pi, A') \to H^1(\Pi, A).$$

Если A' — нормальный делитель в A, то эта последовательность продолжается на одну стрелку вправо, если же A' — нормальный делитель, лежащий в центре группы A, то вышеуказанная последовательность продолжается до $H^2(\Pi, A')$.

1.9. Пучки и когомологии в этальной топологии. Очень широким обобщением теории когомологий Галуа явились введенные Гротендиком этальные когомологии схем. На схеме X рассматривается так называемая этальная топология и для любого пучка коммутативных групп $\mathcal{F}$ на X определены группы когомологий $H^q_{\text{et}}(X, \mathcal{F})$, несущие в себе значительно большую информацию, чем когомологии в топологии Зарисского. Этальные когомологии имеют преимущество даже перед комплексными когомологиями, так как первые реагируют на действие группы Галуа $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, если комплексное алгебраическое многообразие X определено над подполем k поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. Подробности см. в книге Милна [32].

1.10. Дивизоры Картье и Вейля. Пусть X — целая квазикомпактная схема, R_X — пучок колец рациональных функций на X_{et}, $R_X(X) = K$ — поле рациональных функций на X. Рассмотрим вложение $\varphi : \operatorname{Spec} K \to X$ и прямой образ $\varphi_* G_{m,K}$ пучка $G_{m,K}$. Для любого этального морфизма $U \to X$ имеем $\Gamma(U, \varphi_* G_{m,K}) = R_X(U)^*$, где $R_X(U)^*$ — мультипликативная группа кольца $R_X(U)$. Таким образом, $\varphi_* G_{m,K} = R_X^*$ есть пучок обратимых рациональных функций на X_{et}. Вложение $\Gamma(U, O_U^*) \to R_X(U)^*$ определяет мономорфизм пучков $G_{m,X} \to R_X^*$. Факторпучок $R_X^*/G_{m,X}$ носит название *пучка дивизоров Картье* схемы X, обозначим его $\widetilde{\mathrm{Div}}(X)$. Таким образом, имеем точную последовательность пучков абелевых групп в этальной топологии:

$$1 \to G_{m,X} \to R_X^* \to \widetilde{\mathrm{Div}}(X) \to 0,$$

тогда точная последовательность когомологий

$$
\begin{aligned}
1 \ &\to G_m(X) \to K^* \to H^0(X, \widetilde{\mathrm{Div}}(X)) \to H^1(X, G_m) \to \\
&\to H^1(X, R_X^*) \to H^1(X, \widetilde{\mathrm{Div}}(X)) \to \\
&\to H^2(X, G_m) \to H^2(X, R_X^*) \to \dots \ .
\end{aligned} \tag{1.10.1}
$$

Все когомологии этальные, для краткости иногда будем опускать нижний индекс. Группа сечений $H^0(X, \widetilde{\mathrm{Div}}(X))$ называется *группой дивизоров Картье* схемы X и обозначается кратко $\mathrm{Div}(X)$. Группа $H^1_{\mathrm{et}}(X, G_m)$ совпадает с группой $H^1_{\mathrm{Zar}}(X, G_m)$, она называется *группой Пикара* схемы X и обозначается символом $\mathrm{Pic}\, X$. Группа $H^2_{\mathrm{et}}(X, G_m)$ называется когомологической группой Брауэра, она обозначается символом $\mathrm{Br}\, X$. Для вычисления группы $H^q_{\mathrm{et}}(X, R_X^*)$ используется спектральная последовательность Лере включения $\varphi : \mathrm{Spec}\, K \to X$

$$
H^p_{\mathrm{et}}(X, R^q\varphi_* G_{m,K}) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}\, K, G_m) = H^{p+q}(K, K_s^*).
$$

Спектральная последовательность всегда позволяет написать восьмичленную точную последовательность, ставшую уже классической. В нашем случае имеем

$$
\begin{aligned}
0 \ &\to H^1(X, R_X^*) \to H^1(K, K_s^*) \to \\
&\to H^0(X, R^1\varphi_* G_{m,K}) \to H^2(X, R_X^*) \to \\
&\to \mathrm{Ker}[H^2(K, K_s^*) \to H^0(X, R^2\varphi_* G_{m,K})] \to \\
&\to H^1(X, R^1\varphi_* G_{m,K}) \to H^3(X, G_m).
\end{aligned} \tag{1.10.2}
$$

Поскольку $H^1(K, K_s^*) = 0$, то и $H^1(X, R_X^*) = 0$. Пусть теперь схема X является гладкой. Тогда пучок дивизоров Картье можно отождествить с пучком дивизоров Вейля, сечениями последнего являются элементы свободной абелевой группы, порожденной неприводимыми замкнутыми подмножествами коразмерности один. В этом случае

$$
H^1(X, \widetilde{\mathrm{Div}}(X)) = \oplus_{x \in X^1} H^1(k(x), Z) = 0,
$$

где X^1 обозначает множество точек схемы X, имеющих коразмерность 1. Далее,

$$
(R^2\varphi_* G_{m,K})_{\bar{x}} = H^2(\mathrm{Spec}(K \otimes O_{X,\bar{x}}), G_m) = H^2(K_s, G_m) = 0,
$$

тогда $R^2\varphi_* G_{m,K} = 0$. Из (1.10.1) и (1.10.2) следует

Теорема. *Пусть X — целая гладкая нётерова схема. Тогда точны последовательности*

$$1 \to G_m(X) \to K^* \to \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}\, X \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, K \to H^2(X, \widetilde{\mathrm{Div}}(X)) \to H^3(X, G_m).$$

При этом

$$H^2(X, \widetilde{\mathrm{Div}}(X)) = \oplus_{x \in X^1} H^2(k(x), Z) =$$
$$= \oplus_{x \in X^1} H^1(k(x), Q/Z) = \oplus_{x \in X^1} \mathrm{Hom}(\Pi_x, Q/Z),$$

где $\Pi_x = \mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x))$.

1.11. Неразветвленная группа Брауэра функционального поля. Пусть X — геометрически неприводимое алгебраическое многообразие над полем k характеристики нуль, $F = k(X)$ — поле рациональных функций на X, A_v — кольцо дискретного нормирования ранга 1 поля F, $k \in A_v$. Вложение $i_v : \mathrm{Spec}\, F \to \mathrm{Spec}\, A_v$ определяет точную последовательность когомологий:

$$0 \to \mathrm{Br}\, A_v \to \mathrm{Br}\, F \to H^2(A_v/m_v, Z),$$

где m_v — максимальный идеал кольца A_v. В группе $\mathrm{Br}\, F$ можно рассмотреть пересечение $\bigcap_v \mathrm{Br}\, A_v$,которое называется неразветвленной группой Брауэра поля F и обозначается символом $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(F)$. Используя теорию Хиронаки разрешения особенностей, можно построить гладкую проективную модель X поля F. Оказывается, группа $\mathrm{Br}\, X$ совпадает с $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(F)$ и,следовательно, группа $\mathrm{Br}\, X$ — бирациональный инвариант многообразия X, т.е. если X и Y — две гладкие проективные модели поля F, то группы $\mathrm{Br}\, X$ и $\mathrm{Br}\, Y$ изоморфны. Поскольку $H^2(A_v/m_v, Z) = H^1(A_v/m_v, Q/Z)$, то

$$\mathrm{Br}\, X = \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(F) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}\, F \to \oplus_v H^1(A_v/m_v, Q/Z)].$$

Заметим также, если $U = X - Z$, $\mathrm{codim}\, Z \geqslant 2$, то ограничение $\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, U$ есть изоморфизм. Подробности см. в работе Гротендика [57].

§ 2. Теория k-форм

В данном параграфе будут рассмотрены результаты, справедливые для полей общего типа. Иногда будут накладываться ограничения, связанные с характеристикой поля. Факты, верные в случаях полей специального вида, будут представлены в следующих параграфах.

2.1. Формы и одномерные когомологии. Пусть k — поле, L — его нормальное сепарабельное расширение с группой Галуа Π. Для всякой k-схемы X символ X_L или $X \otimes_k L$ будет означать схему $X \times_k \operatorname{Spec} L$. Группа Π действует на схеме X_L через второй множитель: $\sigma \to 1 \otimes \sigma$. Оператор $1 \otimes \sigma$ является k-автоморфизмом схемы X_L. Имея оператор $1 \otimes \sigma$, можно определить действие группы Π и на L-морфизмах $X_L \to Y_L$, где X и Y — k-схемы. Пусть $f \in \operatorname{Mor}_L(X_L, Y_L)$. Положим $\sigma f = (1 \otimes \sigma) f (1 \otimes \sigma)^{-1}$. Ясно, что $\sigma f \in \operatorname{Mor}_L(X_L, Y_L)$. Среди морфизмов $f : X_L \to Y_L$ имеются морфизмы, полученные поднятием из k-морфизмов $h : X \to Y$. Такие поднятые морфизмы $f = h \otimes 1$ будем часто обозначать одним символом h и называть морфизмами, определенными над полем k. Если A — произвольная k-алгебра, то символ $X(A)$ означает $X(\operatorname{Spec} A)$. Следующие свойства легко проверяются на языке L-алгебр, учитывая, что L есть сепарабельное расширение поля k:

а) пусть $f \in \operatorname{Mor}_L(X_L, Y_L)$. Условие $\sigma f = f$ для всех $\sigma \in \Pi$ эквивалентно равенству $f = h \otimes 1, h : X \to Y$;

б) если $f \in \operatorname{Mor}_L(X_L, Y_L)$, то $\sigma f \in \operatorname{Mor}_L(X_L, Y_L)$;

в) если $f \in \operatorname{Mor}_L(X_L, Y_L), g \in \operatorname{Mor}_L(X_L, Y_L)$, то $\sigma(gf) = (\sigma g)(\sigma f)$;

г) для k-алгебры A справедливо равенство $X(L \otimes A)^{\Pi} = X(A)$.

Определение. Пусть F — расширение поля k, X — k-схема. Схема Y над полем k называется F/k-формой схемы X, если существует изоморфизм F-схем $X \otimes_k F \cong Y \otimes_k F$. Если $F = \bar{k}$, то Y называют просто k-формой.

Пример 2.1.1. Все вещественные невырожденные кривые второго порядка в $\mathbb{R}^2$ являются $\mathbb{C}/\mathbb{R}$-формами одной из них, например, $x^2 + y^2 = 1$ или $xy = 1$.

Пример 2.1.2. Если X — аффинная k-схема, то ее F/k-форма Y также аффинна над k. В самом деле, пусть $k[Y]$ — кольцо регулярных функций на Y, тогда имеется естественный k-морфизм $f : Y \to \operatorname{Spec} k[Y]$, который продолжается до

F-морфизма $f \otimes 1 : Y_F \to \operatorname{Spec} F[Y]$. Поскольку Y_F — аффинная F-схема, то $f \otimes 1$ изоморфизм, а так как F — строго плоская k-алгебра, то и f изоморфизм.

Пусть L/k — конечное расширение Галуа, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$ — группа Галуа, $\mathcal{F}(L/k, X)$ — множество всех L/k-форм данной k-схемы X, взятых с точностью до изоморфизма. Поскольку σf — также изоморфизм этих схем, то $a_\sigma = f^{-1}(\sigma f)$ — автоморфизм схемы X_L. Функция $\sigma \to a_\sigma$ на группе Π со значениями в группе $\mathrm{Aut}_L(X)$ удовлетворяет условиям $a_{\sigma\tau} = a_\sigma(\sigma a_\tau)$ для всех $\sigma, \tau \in \Pi$. Такие функции называются 1-коциклами и множество всех 1-коциклов обозначим через $Z^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X))$. Два коцикла a_σ и a'_σ называют когомологичными, если существует элемент $b \in \mathrm{Aut}_L(X)$ такой, что $a'_\sigma = b^{-1}a_\sigma(\sigma b)$. Когомологичность является отношением эквивалентности на множестве Z^1 и множество классов эквивалентности называют множеством одномерных когомологий группы Π со значениями в $\mathrm{Aut}_L(X)$ и обозначают $H^1(\Pi, \mathrm{Aut}_L(X))$ или $H^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X))$.

Если группа $\mathrm{Aut}_L(X)$ коммутативная, то $H^1(\Pi, \mathrm{Aut}_L(X))$ также коммутативная группа, в общем же случае $H^1(\Pi, \mathrm{Aut}_L(X))$ представляет собой лишь множество с отмеченной точкой — классом коцикла $b^{-1}(\sigma b)$. Пусть Y и Z — две L/k-формы схемы X, a_σ и a'_σ — соответствующие коциклы. Непосредственно проверяется, что изоморфность Y и Z равносильна когомологичности коциклов a_σ и a'_σ. Таким образом, имеем каноническое инъективное отображение

$$\varphi : \mathcal{F}(L/k, X) \to H^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X)). \qquad (2.1.1)$$

Вопрос о сюръективности отображения φ уже не может быть решен так просто, поскольку для произвольных k-схем X это не так.

Теорема. *Пусть X — квазипроективное многообразие над полем k. Тогда классы изоморфных L/k-форм многообразия X находятся в биективном соответствии с элементами множества $H^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X))$.*

2.2. Поле разложения k-формы. Пусть Y является k-формой k-схемы X. Поле $L \supset k$ называется полем разложения формы Y, если L-схемы $Y \otimes_k L$ и $X \otimes_k L$ изоморфны. Достаточно очевидно, что всякая k-форма аффинной k-схемы конечного типа разлагается над конечным расширением поля k. Это же верно и для квазипроективных многообразий. Вопрос о существовании сепарабельного поля разложения более деликатный. Наличие сепарабельного поля разложения для квазипроективного многообразия Y позволяет описать все k-формы многообразия X с помощью когомологий. Символ $H^1(k, \mathrm{Aut}_{k_s}(X))$ или $H^1(k, \mathrm{Aut}(X))$ обозначает индуктивный предел системы $H^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X))$ относительно расширений Галуа поля k конечной степени, лежащих в k_s. Таким образом, множество $H^1(k, \mathrm{Aut}(X))$ описывает все k_s/k-формы квазипроективного многообразия X.

2.3. Формы групповых схем. В случае когда X является групповой схемой, естественно рассмотреть среди L/k-форм схемы X те формы Y, которые являются k-группами, а соответствующие изоморфизмы $f : X_L \to Y_L$ — групповыми L-изоморфизмами. В этой ситуации коцикл $a_\sigma = f^{-1}(\sigma f)$ является групповым автоморфизмом L-группы X_L. Рутинная проверка показывает, что обратное утверждение также верно: если a_σ лежит в $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(X_L)$ и a_σ определяет L/k-форму Y схемы X, то на Y можно ввести групповую структуру таким образом, чтобы группы X_L и Y_L стали изоморфными.Итак, множество $H^1(L/k, \mathrm{Aut}_L(X))$ описывает все L/k-формы группы X с точностью до изоморфизма, по крайней мере, для квазипроективных групп.

2.4. Группы мультипликативного типа. Назовем групповую k-схему G группой *мультипликативного типа* (МТ), если группа $G \otimes_k \bar{k}$ диагонализируема и имеет конечный тип, т.е. существует абелева группа M с конечным числом образующих такая, что

$$G \otimes_k \bar{k} \cong D_{\bar{k}}(M) = \mathrm{Spec}(\bar{k}[M]).$$

В этом случае, как мы видели в § 1, группа M есть группа рациональных характеров схемы $D_{\bar{k}}(M)$, т.е.

$$M \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(D_{\bar{k}}(M), G_{m,\bar{k}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(G_{\bar{k}}, G_{m,\bar{k}}).$$

Для любой групповой схемы G имеем пучок характеров $\hat{G}$. Если G — аффинная алгебраическая группа над полем k, то группу $\hat{G}(\bar{k})$ можно отождествить с подгруппой мультипликативной группы кольца регулярных функций $\bar{k}[G]$. Тогда понадобится

Теорема Розенлихта. *Если X — геометрически неприводимое алгебраическое многообразие над полем k, то группа $U(X) = \bar{k}[X]^*/\bar{k}^*$ является свободной абелевой группой конечного ранга. Далее, для двух таких многообразий имеем изоморфизм*

$$U(X \times_k Y) \cong U(X) \times U(Y),$$

где справа — прямое произведение групп.

Теорема Розенлихта показывает, что для любой алгебраической группы G над полем k группа $\hat{G}(\bar{k})$ имеет конечное число образующих, $\hat{G}(\bar{k})$ свободна, если G связна. Поскольку группа $\hat{G}(\bar{k})$ имеет конечный тип, то существует конечное расширение L поля k, над которым определены все элементы группы $\hat{G}(\bar{k})$, т.е. $\hat{G}(\bar{k}) = \hat{G}(L)$. В дальнейшем при рассмотрении алгебраических k-групп G будем часто сокращать обозначение $\hat{G}(\bar{k})$ до $\hat{G}$, это не приведет к недоразумениям.

Вернемся к группе (MT) G. Если $\hat{G}(\bar{L}) = \hat{G}(\bar{k}) = \hat{G}$, то $G_L = D_L(\hat{G})$. В этом случае поле L называется *полем разложения* k-группы G. Оказывается, группа (MT) всегда имеет сепарабельное поле разложения (см. [58]).

Зафиксируем коммутативную группу M с конечным числом образующих. Поскольку все k-формы группы $D_k(M)$ расщепляются уже над сепарабельными расширениями поля k, то все они с точностью до изоморфизма описываются множеством $H^1(k, \mathrm{Aut}_{k_s}(D(M)))$. Но группа $\mathrm{Aut}_L(D(M))$ совпадает с группой $\mathrm{Aut}\, D(M) \cong \mathrm{Aut}(M)$ для любого расширения L поля k, поэтому

$$H^1(k, \mathrm{Aut}_{k_s}(D(M))) = H^1(k, \mathrm{Aut}(M)) = H^1(\mathcal{G}, \mathrm{Aut}(M)),$$

где $\mathcal{G}$ — группа Галуа расширения k_s/k и $\mathcal{G}$ действует тривиально на $\mathrm{Aut}(M)$. В таком случае $H^1(\mathcal{G}, \mathrm{Aut}(M))$ совпадает с множеством эквивалентных непрерывных представлений топологической компактной группы $\mathcal{G}$ в дискретную группу $\mathrm{Aut}(M)$. Каждое такое представление определяет строение непрерывного $\mathcal{G}$-модуля на группе M, и обратно, строение непрерывного $\mathcal{G}$-модуля на M определяет представление группы $\mathcal{G}$ в $\mathrm{Aut}(M)$ с точностью до эквивалентности. Если отождествить группу M с группой рациональных характеров $\hat{G}$ k-группы G, определяемой представлением $h : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(M)$, то модуль (M, h) в точности изоморфен $\mathcal{G}$-модулю $\hat{G}$ с естественным действием группы

Галуа $\mathcal{G}$.

Теорема. *Пусть G является k-группой. Тогда соответствие $G \to \hat{G}$ определяет двойственность категории k-групп мультипликативного типа с категорией непрерывных $\mathcal{G}$-модулей конечного типа, где $\mathcal{G}$ — группа Галуа сепарабельного замыкания поля k.*

Сверх того, чтобы последовательность гомоморфизмов k-групп (MT)

$$1 \to G' \to G \to G'' \to 1$$

была точной, необходимо и достаточно, чтобы двойственная последовательность $\mathcal{G}$-модулей рациональных характеров

$$0 \to \hat{G}'' \to \hat{G} \to \hat{G}' \to 0$$

была точной.

Для k-группы G (MT), определяемой представлением $h : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(\hat{G})$, конечную группу $h(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Aut}(\hat{G})$ назовем *группой разложения* схемы G. Пусть $L = k_s^{\mathcal{H}}$ — поле инвариантов, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k) \cong \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Нетрудно видеть, что L — пересечение всех полей разложения k-группы G, содержащихся в k_s. Таким образом, L — минимальное поле разложения группы G, степень расширения L/k равна порядку группы разложения.

Алгебраический тор. Групповая схема T над полем k называется *алгебраическим тором*, если $T \otimes_k \bar{k} \cong D_{\bar{k}}(Z^n) = G^n_{m,\bar{k}}$.

Категория алгебраических k-торов дуальна категории $\mathcal{G}$-модулей конечного типа без кручения. Пусть L/k — конечное расширение Галуа, над которым тор T распадается, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$. Тогда для всякой k-алгебры A имеем

$$T(A) = T(A_L)^{\Pi} = \mathrm{Hom}(\hat{T}, A_L^*)^{\Pi} = \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, A_L^*) = (\hat{T}^0 \otimes A_L^*)^{\Pi},$$

$$\hat{T}^0 = \mathrm{Hom}(\hat{T}, Z), \ \ A_L = L \otimes_k A.$$

2.5. Главные однородные пространства. Пусть G — S-группа, а X — схема над S. Говорят, что G действует слева на схеме X, если задан S-морфизм $G \times_S X \to X$ такой, что для всякой S-схемы Y, для которой $X(Y) \neq \varnothing$, отображение $G(Y) \times X(Y) \to X(Y)$ определяет обычное действие группы $G(Y)$ на множестве $X(Y)$, функторное по Y.

Рассмотрим очень частный случай, когда G — алгебраическая k-группа, действующая на k-многообразии X просто транзитивно, т.е. для каждой точки $x \in X(k_s)$ отображение $g \to gx$

является биекцией множества $G(k_s)$ на $X(k_s)$. Многообразие X называется *главным однородным пространством* (ГОП) k-группы G. В случае, когда $X(k) \neq \varnothing$, многообразия G и X изоморфны над полем k и X называется тривиальным ГОП. Два ГОП называются изоморфными, если существует k-изоморфизм $h : X \to X'$ такой, что $h(gx) = gh(x)$, $g \in G(k_s)$, $x \in X(k_s)$. Пусть $\mathcal{P}(k, G)$ — множество классов ГОП относительно этого отношения эквивалентности.

Теорема. *Пусть G — алгебраическая группа над полем k. Тогда множество главных однородных пространств $\mathcal{P}(k, G)$ биективно множеству $H^1(k, G(k_s))$.*

Данная теорема допускает весьма существенное обобщение в этальной топологии Гротендика, а именно, для схемы X и групповой схемы G элемент множества $H^1_{\text{et}}(X, G)$ определяет схему главных однородных пространств над X (торсор), каждый слой которого есть ГОП над полем $k(x)$, $x \in X$. Некоторые примеры торсоров встретятся в дальнейшем.

2.6. Функтор Вейля ограничения основного поля. Полезная операция овеществления комплексного линейного пространства приводит к более общей конструкции в теории схем. Пусть F — конечное сепарабельное расширение поля k степени n, $F = k(\alpha)$, α — корень минимального многочлена $f(x)$ с коэффициентами из поля k степени n. В расширении k_s многочлен $f(x)$ имеет n различных корней $\alpha_1, .., \alpha_n$ и сопоставление $\alpha \to \alpha_i$ определяет вложение $f_i : F \to F_i \subset k_s$, $F_i = k(\alpha_i)$. Группа Галуа $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ переставляет поля F_i местами: $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$, $\sigma : F_i \to F_j$. Алгебра $k_s \otimes_k F$ есть прямая сумма полей

$$k_s \otimes_k F \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_n. \tag{2.6.1}$$

Этот изоморфизм следует из представления

$$k_s \otimes_k F = k_s[x]/(f) \cong \oplus_{i=1}^n k_s[x]/(x - \alpha_i), \; L_i = k_s[x]/(x - \alpha_i) \cong k_s.$$

Разложение (2.6.1) эквивалентно разложению единицы

$$1 = e_1 + \cdots + e_n, \; e_i \in L_i, \; e_i^2 = e_i, \; e_i e_j = 0.$$

Группа $\mathcal{G}$ транзитивно действует на множестве $\{e_1, ..., e_n\}$. Это позволяет описать действие группы $\mathcal{G}$ на $k_s \otimes_k F$:

$$\begin{aligned} a &= a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \\ \sigma(a) &= \sigma(a_1)\sigma(e_1) + \cdots + \sigma(a_n)\sigma(e_n). \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Пусть $\mathcal{G}_1$ — подгруппа в $\mathcal{G}$, оставляющая неподвижной точку α_1. Соотношение (2.6.2) показывает, что $\mathcal{G}$-модуль $k_s \otimes_k F$ изоморфен индуцированному модулю $k_s \otimes_{\mathcal{G}_1} k[\mathcal{G}]$.

Пусть теперь X — алгебраическое многообразие над полем F, тогда k-схема $X \otimes_k k_s$ несвязна:

$$X \otimes_k k_s = X \otimes_F (F \otimes_k k_s) = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n,$$

объединение определяется разложением (2.6.1), X_i — схемы над k_s. Группа $\mathcal{G}$ действует на объединении по правилу (2.6.2), это же действие переносится и на произведение $Y = X_1 \times \cdots \times X_n$. Имеем представление $h : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}_k(Y)$. Фактор $Y/h(\mathcal{G})$, если он существует, обозначим через $R_{F/k}(X)$, говорят, что это многообразие над полем k получено из X ограничением основного поля. Операция $R_{F/k}$ была введена А.Вейлем в работе [74]. Заметим, что $R_{F/k}(X) \otimes_k k_s = X_1 \times \cdots \times X_n$. Рассмотрим этот изоморфизм более тщательно. Многообразие X_i определено над F_i, т.е. $X_i = Y_i \otimes_{F_i} k_s$, где Y_i — F_i-схема. Пусть L — композит полей F_i в поле k_s, L — конечное расширение Галуа поля k. Тогда

$$R_{F/k}(X) \otimes_k L \cong (Y_1 \otimes_{F_1} L) \times \cdots \times (Y_n \otimes_{F_n} L),$$

L — минимальное поле разложения многообразия $R_{F/k}(X)$. Многообразие $R_{F/k}(X)$ всегда существует, если F-схема X — квазипроективна. В дальнейшем рассматриваются только те F-схемы X, для которых существует схема $R_{F/k}(X)$. Пусть A — коммутативная k-алгебра, тогда

$$\begin{aligned} R_{F/k}(X)(A) &= [R_{F/k}(X)(k_s \otimes_k A)]^{\mathcal{G}} = [Y(k_s \otimes_k A)]^{\mathcal{G}} = \\ &= [X_1(k_s \otimes A)]^{\mathcal{G}_1} = Y_1(F_1 \otimes_k A) = X(F \otimes_k A). \end{aligned}$$

Таким образом, схема $R_{F/k}(X)$ представляет ковариантный функтор $A \to X(F \otimes_k A)$ на категории коммутативных k-алгебр или контравариантный функтор $Z \to X(Z \otimes_k F)$ на категории k-схем. Перечислим основные свойства функтора Вейля $R_{F/k}$.

1) Имеем биекцию, функториальную по Y:

$$\mathrm{Hom}_k(Y, R_{F/k}(X)) \cong \mathrm{Hom}_F(Y \otimes_k F, X). \qquad (2.6.3)$$

2) Для любых квазипроективных F-многообразий X_1 и X_2 имеем

$$R_{F/k}(X_1 \times_F X_2) = R_{F/k}(X_1) \times_k R_{F/k}(X_2).$$

3) Если $u : X \to Y$ — морфизм F-схем, то имеем естественный k-морфизм

$$R_{F/k}(u) : R_{F/k}(X) \to R_{F/k}(Y).$$

4) Если $k \subset E \subset F$, то $R_{F/k}(X) = R_{E/k}(R_{F/E}(X))$.

5) Полагая в (2.6.3) $Y = R_{F/k}(X)$, получаем F-морфизм $p : R_{F/k}(X) \otimes F \to X$, однозначно определяемый по формуле (2.6.3) тождественным отображением схемы $R_{F/k}(X)$ в себя, p называется канонической проекцией.

6) Пусть X будет k-многообразием, тогда имеем биекцию

$$\mathrm{Hom}_k(X, R_{F/k}(X \otimes_k F)) \cong \mathrm{Hom}_F(X \otimes_k F, X \otimes_k F).$$

Беря в правой части тождественное отображение, получаем каноническое вложение

$$i : X \to R_{F/k}(X \otimes_k F).$$

7) Пусть A — произвольное расширение поля k, тогда $A \otimes_k F = \oplus_{i=1}^{s} M_i$ — прямая сумма полей, $(F : k) = \sum_{i=1}^{s}(M_i : A)$. Имеется канонический изоморфизм A-многообразий

$$R_{F/k}(X) \otimes_k A \cong \prod_{i=1}^{s} R_{M_i/A}(X \otimes_F M_i).$$

8)$\dim R_{F/k}(X) = (F : k) \dim X$.

9) Если X — аффинное многообразие, то $R_{F/k}(X)$ также аффинно, если X гладкое, то и $R_{F/k}(X)$ гладкое.

10) Если U — открытое многообразие в X, то $R_{F/k}(U)$ открыто в $R_{F/k}(X)$.

11) Если G является F-группой, то $R_{F/k}(G)$ k-группа; G связна тогда и только тогда, когда $R_{F/k}(G)$ связна; если G коммутативна, то и $R_{F/k}(G)$ коммутативна.

12) Если

$$1 \to G' \to G \to G'' \to 1$$

— точная последовательность алгебраических групп над полем F, то соответствующая последовательность k-групп

$$1 \to R_{F/k}(G') \to R_{F/k}(G) \to R_{F/k}(G'') \to 1$$

также точна.

13) Пусть G — алгебраическая группа над полем F, тогда $H^1(k, R_{F/k}(G)) = H^1(F, G)$. Если же группа G коммутативна, то $H^q(k, R_{F/k}(G)) = H^q(F, G)$ для всех $q \geqslant 0$.

Пример 2.6.1. Рассмотрим k-многообразие $R_{F/k}(\mathbb{A}_F^m) = Y$. Пусть $Y(k) = \mathbb{A}^m(F)$ — пространство размерности m над F, рассматриваемое как пространство над полем k. Нетрудно показать, что $R_{F/k}(\mathbb{A}_F^m) \cong \mathbb{A}_k^{mn}$, $n = (F : k)$.

Пример 2.6.2. Пусть G — связная односвязная полупростая k-группа, не имеющая собственных нормальных делителей, определенных над полем k. Тогда имеем разложение

$$G \otimes_k k_s = \prod_{i=1}^{n} H^i,$$

где H^i — абсолютно почти простые группы, переставляемые группой $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$. Пусть $\mathcal{G}_1$ — подгруппа в $\mathcal{G}$, оставляющая группу H^1 на месте, тогда индекс подгруппы $\mathcal{G}_1$ в $\mathcal{G}$ равен n, если F_1 — поле инвариантов и F_1 — поле определения группы H^1. Тогда $G = R_{F/k}(H)$, где $F \cong F_1$, H — группа над F такая, что $H \otimes_F k_s \cong H^1$.

Пример 2.6.3. Пусть T — алгебраический тор, определенный над полем F, $(F : k) = n$, тогда $R_{F/k}(T)$ снова алгебраический тор, но уже над полем k. Поскольку тор T однозначно определяется своим модулем рациональных характеров $\hat{T}$, то попытаемся найти модуль характеров тора $R_{F/k}(T)$. Имеем $R_{F/k}(T) \otimes_k k_s \cong T_1 \times \cdots \times T_n$. Действие группы Галуа $\mathcal{G}$ является индуцированным с подгруппы $\mathcal{G}_1$, сохраняющей T_1, поэтому $\mathcal{G}$-модуль $\widehat{R_{F/k}(T)}$ имеет вид $\hat{T} \otimes_{\mathcal{G}_1} \mathbb{Z}[\mathcal{G}]$.

Пример 2.6.4. Особое значение в дальнейшем будут играть торы вида $T = R_{F/k}(G_m)$ с модулями рациональных характеров $\mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{G}_1] = \mathbb{Z} \otimes_{\mathcal{G}_1} \mathbb{Z}[\mathcal{G}]$. Имеем изоморфизм групп $T(k) = F^*$, нетрудно увидеть, что тор T может быть построен в виде матричной группы, исходя из регулярного представления группы F^* в каком-либо базисе расширения F/k, $T \subset \mathrm{GL}_k(n)$, $n = (F : k)$. Торы, представимые в виде прямого произведения групп вида $R_{F/k}(G_m)$, называются *квазиразложимыми*. Они характеризуются тем, что модуль их рациональных характеров обладает $\mathbb{Z}$-базисом, на котором группа $\mathcal{G}$ действует перестановками; это так называемые *пермутационные* модули.

Пример 2.6.5. Всякий тор унирационален над своим полем определения. Действительно, пусть $\hat{T}$ — П-модуль рациональных характеров тора T, П — конечная группа Галуа поля разложения тора T. Дуальный П-модуль $\hat{T}^0$ является фактором некоторого свободного П-модуля $\hat{S}^0$ конечного ранга. Имеем вложение $\hat{T} \to \hat{S}$, откуда следует эпиморфизм $S \to T$ торов. Осталось заметить, что S является квазиразложимым, а поэтому и k-рациональным тором.

§ 3. Бирациональные инварианты линейных алгебраических групп

3.1. Группа Пикара и группа Брауэра линейной алгебраической группы. В данном параграфе, если не будет оговорено, поле k имеет характеристику нуль. Пусть X — алгебраическое многообразие над полем k, $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Имеется спектральная последовательность Хохшильда — Серра $H^p(\mathcal{G}, H^q(\bar{X}, G_m)) \Rightarrow H^n(X, G_m)$ в этальных когомологиях. Она определяет точную восьмичленную последовательность, которая в явном виде выглядит так:

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(k, \bar{k}[X]^*) \to \mathrm{Pic}\, X \to (\mathrm{Pic}\, \bar{X})^{\mathcal{G}} \to \\ &\to H^2(k, \bar{k}[X]^*) \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, \bar{X}) \to \\ &\to H^1(k, \mathrm{Pic}\, \bar{X}) \to H^3(k, \bar{k}[X]^*). \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Все это применимо к случаю, когда X — многообразие связной линейной алгебраической группы G. В этом случае $\bar{k}[G]^* = \bar{k}^* \times \hat{G}$, множество $G(k)$ непусто и последовательность (3.1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(k, \hat{G}) \to \mathrm{Pic}\, G \to (\mathrm{Pic}\, \bar{G})^{\mathcal{G}} \to H^2(k, \hat{G}) \to \\ &\to \mathrm{Br}\, G / \mathrm{Br}\, k \to H^1(k, \mathrm{Pic}\, \bar{G}) \to H^3(k, \hat{G}). \end{aligned}$$

Нетрудные вычисления приводят к следующей теореме.

Теорема. 1) *Для любой связной линейной группы G, определенной над полем k, группа $\mathrm{Pic}\, G$ является конечной.*

2) *Если T — алгебраический тор, то* $\mathrm{Pic}\, T = H^1(k, \hat{T})$, $\mathrm{Br}\, T = \mathrm{Br}\, k \oplus H^2(k, \hat{T})$.

3) *Если $\widetilde{G}$ — связная односвязная полупростая группа, то* $\mathrm{Pic}\, \widetilde{G} = 0$, $\mathrm{Br}\, \widetilde{G} = \mathrm{Br}\, k$.

4) *Если G — связная полупростая группа с фундаментальной группой W, то*

$$\operatorname{Pic}\bar{G} = \operatorname{Hom}(W(\bar{k}), \bar{k}^*) = \widehat{W(\bar{k})}, \ \operatorname{Pic} G = \widehat{W(\bar{k})}^{\mathcal{G}},$$
$$\operatorname{Br} G = \operatorname{Br} k \oplus H^1(k, \operatorname{Pic}\bar{G}).$$

Вычислению группы $\operatorname{Pic} G$ были посвящены работы автора [5] и В.Л.Попова [34].

3.2. Признаки бирациональной эквивалентности алгебраических многообразий. Вопрос о классификации алгебраических многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности является чрезвычайно трудным. Характеристики удается получить, рассматривая в классе многообразий, бирационально эквивалентных между собой, неособые проективные представители (модели). К сожалению, существование таких моделей в общем случае еще не доказано. Теорема Хиронаки [59] утверждает, что в каждом классе бирационально эквивалентных алгебраических многообразий содержится неособая проективная модель, если поле определения этих многообразий имеет характеристику нуль. Рассмотрим этот случай более подробно. Пусть Y и Z — два неособых неприводимых проективных многообразия над полем k характеристики нуль и $\varphi : Z \to Y$ — бирациональный морфизм. Обозначим символом W замкнутое подмножество в Y, состоящее из точек, в которых рациональное отображение φ^{-1} не определено, и пусть $F = \varphi^{-1}(W) \subset Z$. В этой ситуации имеем гомоморфизмы $\varphi^* : \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} Z$ (обратный образ) и $\varphi_* : \operatorname{Pic} Z \to \operatorname{Pic} Y$ (прямой образ), причем $\varphi_*\varphi^* = \mathrm{Id}$. Поэтому группа $\operatorname{Pic} Z$ изоморфна прямой сумме $\operatorname{Pic} Y \oplus S$, где S — решетка, порожденная всеми простыми дивизорами, носители которых лежат в F. Она имеет конечный ранг. Пусть $\mathcal{G} = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$. Морфизм φ определяет бирациональный $\bar{k}$-морфизм $\varphi \otimes 1 : \bar{Z} \to \bar{Y}$ и тогда получаем $\mathcal{G}$-изоморфизм модулей $\operatorname{Pic}\bar{Z} \cong \operatorname{Pic}\bar{Y} \oplus \bar{S}$. Модуль $\bar{S}$ является пермутационным $\mathcal{G}$-модулем с базой, состоящей из простых компонент многообразия $\bar{F}$. Имеем серьезный повод для введения следующего определения.

Определение. Пусть Π — некоторая группа, A и B — произвольные Π-модули. Модули A и B назовем *подобными*, если существуют пермутационные Π-модули S_1 и S_2 такие, что прямые суммы $A \oplus S_1$ и $B \oplus S_2$ изоморфны. Класс подобия Π-модуля A обозначим символом $[A]$.

Теорема (необходимый признак бирациональной эквивалентности алгебраических k-многообразий). *Пусть X и Y — неособые проективные алгебраические многообразия над полем k характеристики нуль, L/k — расширение Галуа с группой* Π. *Если X и Y бирационально эквивалентны над полем k, то* Π-*модули* $\mathrm{Pic}(X_L)$ *и* $\mathrm{Pic}(Y_L)$ *подобны.*

Доказательство. В условиях теоремы существуют неособое проективное многообразие Z над полем k и бирациональные морфизмы $Z \to X$ и $Z \to Y$. Но тогда $\mathrm{Pic}\, Z_L \cong \mathrm{Pic}\, X_L \oplus S_1 \cong \mathrm{Pic}\, Y_L \oplus S_2$. □

Если X и Y бирационально эквивалентны над полем k, то они остаются бирационально эквивалентными и при любом расширении поля k. Учитывая, что для любой подгруппы π группы Π имеем равенство $H^1(\pi, S) = 0$, если S — пермутационный Π-модуль, тогда для любого промежуточного поля F, $k \subset F \subset L$, справедливо соотношение

$$H^1(L/F, \mathrm{Pic}\, X_L) = H^1(L/F, \mathrm{Pic}\, Y_L),$$

т.е. группы $H^1(L/F, \mathrm{Pic}\, X_L)$ являются бирациональными инвариантами многообразия X. Далее мы увидим, что класс $[\mathrm{Pic}\, X_L]$ является более тонким бирациональным инвариантом многообразия X, чем когомологические инварианты $H^1(L/F, \mathrm{Pic}\, X_L)$. Если L/k — конечное расширение Галуа, то бирациональными инвариантами будут и группы $H^{-1}(L/F, \mathrm{Pic}\, X_L)$.

Пусть теперь многообразие X рационально над $\bar{k}$, т.е. $X \otimes_k \bar{k}$ бирационально эквивалентно проективному пространству $\mathbb{P}^n \otimes_k \bar{k}$. Поскольку $\mathrm{Pic}\, \mathbb{P}^n = \mathbb{Z}$, то $\mathrm{Pic}\, \bar{X}_L \oplus S \cong \mathbb{Z} \oplus S_1$.

Предложение. *Пусть X — гладкое проективное многообразие, определенное над полем k характеристики нуль. Если $\bar{X}$ рационально над $\bar{k}$, то $\mathcal{G}$-модуль $\mathrm{Pic}\, \bar{X}$ имеет конечный $\mathbb{Z}$-ранг и не имеет кручения. Если многообразие X рационально над k, то $[\mathrm{Pic}\, X_L] = [0]$ и $H^{\pm}(L/F, \mathrm{Pic}\, X_L) = 0$ для любого нормального расширения L/k, $k \subset F \subset L \subset \bar{k}$.*

3.3. Проективные модели линейных алгебраических групп. Пусть G — связная алгебраическая линейная группа, определенная над полем k характеристики нуль. Рассмотрим какое-нибудь неособое проективное многообразие X над полем k, содержащее G в качестве открытого подмножества. Многообразие X назовем проективной моделью группы G. Многообразия $\bar{G}$ и $\bar{X}$ являются рациональными над полем $\bar{k}$. Это следует из тривиальности максимального тора группы $\bar{G}$ и разложения Брюа. Таким образом, $\mathcal{G}$-модуль $\operatorname{Pic}\bar{X}$ имеет конечный $\mathbb{Z}$-ранг без кручения. Хотя модель X определяется неоднозначно, если $\dim G \geqslant 1$, но класс подобия $\mathcal{G}$-модуля $\operatorname{Pic}\bar{X}$ определен однозначно, обозначим его символом $p_k(G)$ или просто $p(G)$ и назовем классом Пикара группы G. Из вложения $G \to X$ следует точная последовательность модулей

$$0 \to \hat{G} \to \bar{S} \to \operatorname{Pic}\bar{X} \to \operatorname{Pic}\bar{G} \to 0, \tag{3.3.1}$$

где $\bar{S}$ — $\mathcal{G}$-модуль, порожденный компонентами замкнутого подмножества $\bar{F} = \bar{X} \setminus \bar{G}$; в силу нормальности G F является несмешанным подмногообразием коразмерности один. Рассмотрим два крайних случая:

а) $G = T$ — алгебраический k-тор, $\operatorname{Pic}\bar{T} = 0$, тогда имеем точную последовательность модулей без кручения

$$0 \to \hat{T} \to \bar{S} \to \operatorname{Pic}\bar{X} \to 0, \tag{3.3.2}$$

б) G — полупростая, $\hat{G} = 0$, тогда имеем точную последовательность

$$0 \to \bar{S} \to \operatorname{Pic}\bar{X} \to \operatorname{Pic}\bar{G} \to 0.$$

Если G — односвязна, то $\operatorname{Pic}\bar{G} = 0$, в этом случае $\operatorname{Pic}\bar{X}$ является пермутационным $\mathcal{G}$-модулем.

3.4. Вялые резольвенты модуля. Рассмотрим ситуацию а) более подробно на конечном уровне. Пусть L/k — конечное расширение Галуа с группой П, обозначим через $C(L/k)$ категорию торов, определенных над k и разложимых над L, через $C(\Pi)$ — двойственную категорию П-модулей конечного ранга без кручения. Имеется вложение категории $C(L/k)$ в категорию $C(k)$ всех k-торов и $C(k)$ есть объединение всех подкатегорий $C(L/k)$; категория $C(k)$ дуальна категории $\mathcal{G}$-модулей $C(\mathcal{G})$. Пусть $T \in C(L/k)$ и X — проективная модель тора T над k. Вложение T_L в X_L определяет точную последовательность, аналогичную последовательности (3.3.2) на конечном уровне, т.е. последовательность П-модулей

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to \operatorname{Pic}X_L \to 0. \tag{3.4.1}$$

Как видели ранее, группы $H^1(\pi, \operatorname{Pic}X_L)$ и $H^{-1}(\pi, \operatorname{Pic}X_L)$ являются бирациональными инвариантами многообразия T. Следующий неожиданный факт оказался одним из важнейших в бирациональной классификации алгебраических k-торов (см. [11]–[13]).

Теорема. *Для любого L/k-тора T имеем равенство $H^{-1}(L/F, p_{L/k}(T)) = 0$, где $k \subset F \subset L$.*

Пусть $\hat{N}$ — любой П-модуль из класса $[\operatorname{Pic} X_L]$. Он имеет конечный ранг и прямые суммы $\hat{N} \oplus \hat{S}_1$ и $\operatorname{Pic} X_L \oplus \hat{S}_2$ изоморфны. Если N — k-тор, дуальный модулю $\hat{N}$, то ясно, что группа $H^1(L/F, N(L))$ также является бирациональным инвариантом многообразия T. Геометрическую интерпретацию этого инварианта указали Колье-Телен и Сансюк [44], изучавшие проблему R-эквивалентности на алгебраических группах. Они же заметили, что гомоморфизм ограничения $H^1(X, N) \to H^1(U, N)$ является сюръективным для открытого подмножества U гладкого k-многообразия X. Иначе говоря, всякий торсор над U со структурной группой N продолжается до торсора на всем X. Торсоры с таким свойством называются ***вялыми***. Поэтому естественно назвать тор $N \in C(L/k)$ и его модуль рациональных характеров $\hat{N} \in C(\Pi)$ ***вялыми***, если $H^{-1}(\pi, \hat{N}) = 0$ для всех подгрупп π группы П.

Определение. Точная последовательность П-модулей конечного ранга

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to \hat{N} \to 0, \tag{3.4.2}$$

в которой $\hat{S}$ — пермутационный, а $\hat{N}$ — вялый, называется ***вялой резольвентой*** модуля $\hat{T}$.

Хотя мы пришли к этому понятию исходя из геометрических соображений, но доказанная выше теорема позволяет построить резольвенту (3.4.2) чисто алгебраическим путем. Поскольку алгебраическое определение класса $p(T)$ совершенно не зависит от характеристики поля определения, то хотелось бы распространить эти понятия и на случай характеристики $p > 0$. Это делается следующим образом. Пусть X — гладкое многообразие над полем k произвольной характеристики и L — расширение Галуа поля k с группой П. Предположим, что $\operatorname{Pic} X_L$ имеет конечный тип. Тогда существует открытое подмножество U в X такое, что $\operatorname{Pic}(U_L) = 0$. Модуль $L[U]^*/L^*$ имеет конечный тип и не имеет кручения, пусть $p(L[U]^*/L^*)$ — его класс Пикара в $C(\Pi)$. Этот класс не зависит от выбора специальной окрестности U в

X, и он является бирациональным инвариантом k-многообразия X. Обозначим его $pt_{L/k}(X)$ или просто $pt(X)$. Пусть теперь X — гладкое проективное многообразие над полем k характеристики нуль. Тогда имеем два бирациональных инварианта $p(X) = [\operatorname{Pic} \bar{X}]$ и $pt(X)$ и их L/k — аналоги. Если $\operatorname{Pic} \bar{X} \in C(\mathcal{G})$ и, сверх того, модуль $\operatorname{Pic} \bar{X}$ является вялым, то $p(X)$ совпадает с $pt(X)$. Для алгебраических торов T имеем

$$p(T) = p(\hat{T}) = pt(T).$$

3.5. Полугруппа стабильной эквивалентности. Назовем два k-многообразия X_1 и X_2 *стабильно эквивалентными*, если существует бирациональный изоморфизм $X_1 \times_k \mathbb{A}^m \cong X_2 \times_k \mathbb{A}^n$ для некоторых m и n. В случае, если $X \times_k \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^n$, назовем многообразие X *стабильно рациональным*. Ясно, что для стабильно эквивалентных многообразий X_1 и X_2 $p(X_1) = p(X_2)$, $pt(X_1) = pt(X_2)$. Для стабильно рационального многообразия X инварианты $p(X)$ и $pt(X)$ равны нулю.

Пусть $\{T\}$ — класс стабильной эквивалентности тора T в категории $C(L/k)$. На множестве $\{T\}$ определим структуру коммутативной полугруппы, полагая $\{T_1\} \cdot \{T_2\} = \{T_1 \times_k T_2\}$. Класс торов, стабильно рациональных над полем k, играет роль единичного элемента. Обозначим эту полугруппу символом $Z(L/k)$. Если рассматривать категорию $C(k)$, то получим полугруппу $Z(k)$.

Введем ряд обозначений. Пусть $S(\Pi)$ — класс всех пермутационных Π-модулей конечного типа,

$$H^q(\Pi) = \{M \in C(\Pi) \mid H^q(\pi, M) = 0 \ \forall \pi \subset \Pi\},$$

H^q — когомологии Тейта. Ясно, что $S(\Pi) \subset H^{-1} \cap H^1 = \tilde{H}$. Пусть, далее,

$$D(\Pi) = \{M \in C(\Pi) \mid M \oplus M' \in S(\Pi)\}.$$

На множестве классов подобия $C(\Pi)/S(\Pi)$ операция прямой суммы модулей определяет строение коммутативной полугруппы, нулевым элементом которой служит класс $S(\Pi)$. Классы $D(\Pi)/S(\Pi)$ образуют максимальную подгруппу в полугруппе $(\Pi)/S(\Pi)$. Из результатов Якобинского [61] по теории решеток следует, что эта группа имеет конечное число образующих. Предположение $\tilde{H}(\Pi) = D(\Pi)$ оказалось неверным, пример будет приведен ниже.

Имеем отображение $p_{L/k} : Z(L/k) \to H^{-1}(\Pi)/S(\Pi)$. Следующие две теоремы доказаны автором [5].

Теорема 3.5.1. *Отображение* $p_{L/k} : Z(L/k) \to H^{-1}(\Pi)/S(\Pi)$ *является изоморфизмом полугрупп.*

Особый интерес представляют торы, попадающие в ядро отображения p.

Теорема 3.5.2. *Следующие условия эквивалентны* :

а) *тор T стабильно рационален над полем k,*

б) *класс Пикара $p(T)$ равен нулю,*

в) *модуль рациональных характеров $\hat{T}$ тора T вкладывается в точную последовательность вида*

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to \hat{S}_1 \to 0,$$

где $\hat{S}, \hat{S}_1 \in S(\Pi)$.

Вопрос о том, не является ли любой стабильно рациональный тор в действительности k-рациональным, к сожалению, до сих пор остается открытым. К этой задаче вернемся в следующих параграфах.

3.6. Модули Шевалле. Приведем несколько важных примеров, показывающих эффективность критериев, приведенных в предыдущих пунктах. Пусть Π — конечная группа, π — ее подгруппа, $\mathbb{Z}[\Pi]$ — групповое кольцо, $\mathbb{Z}[\Pi/\pi]$ — модуль, натянутый на смежные классы $e_1, \ldots, e_n$, на которых группа Π действует перестановкой. Рассмотрим отображение $\varepsilon : \mathbb{Z}[\Pi/\pi] \to \mathbb{Z}$, определяемое равенством $\varepsilon({}_1e_n + \ldots + a_ne_n) = a_i + \ldots + a_n$. Ясно, что ε является Π-эпиморфизмом, его называют еще пополняющим гомоморфизмом. Пусть $I_{\Pi/\pi} = \operatorname{Ker}\varepsilon$. Имеем факторизацию

$$0 \to I_{\Pi/\pi} \to \mathbb{Z}[\Pi/\pi] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0, \tag{3.6.1}$$

группа Π действует тривиально на $\mathbb{Z}$. Переходя к дуальным модулям, получаем двойственную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^0} \mathbb{Z}[\Pi/\pi] \to J_{\Pi/\pi} \to 0, \tag{3.6.2}$$

где $J_{\Pi/\pi} = I^0_{\Pi/\pi}$, $\varepsilon^0(1) = e_1 + \ldots + e_n$.

Пусть L/k — расширение Галуа с группой Π, F — промежуточное поле и $\operatorname{Gal}(L/F) = \pi$. Последовательности (3.6.1) и (3.6.2) определяют точные последовательности k-торов.

$$1 \to G_{m,k} \to R_{F/k}(G_m) \to T_1 \to 1,$$

$$1 \to T_2 \to R_{F/k}(G_m) \to G_m \to 1.$$

Поскольку $R_{F/k}(G_m)$ можно отождествить с открытым подмножеством в $R_{F/k}(\mathbb{A}^1) = \mathbb{A}_k^n$, то тор T_1 допускает открытое погружение в проективное пространство $\mathbb{P}_k^{n-1}$, следовательно, T_1 — рационален над k, $p(T_1) = 0$. Тор T_2 с этой точки зрения значительно интереснее. Многообразие T_2 представимо в виде норменной гиперповерхности $N(x_1, ..., x_n) = 1$ в пространстве $\mathbb{A}_k^n$, $x_1, ..., x_n$ — координаты элемента поля F в каком-нибудь базисе. Тор T_2 имеет стандартное обозначение $R^{(1)}_{F/k}(G_m)$, модуль рациональных характеров которого $J_{\Pi/\pi} = I^0_{\Pi/\pi}$ называется *модулем Шевалле*. Шевалле [43] первый обнаружил нерациональность торов вида $R^{(1)}_{F/k}(G_m)$ для некоторых расширений F/k.

Рассмотрим частный случай, когда $\pi = (1)$. Последовательность (3.6.1) принимает вид

$$0 \to I_\Pi \to \mathbb{Z}[\Pi] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0. \tag{3.6.3}$$

Всякий модуль есть фактор свободного модуля, поэтому имеется также точная последовательность

$$0 \to \hat{N}^0 \to \hat{P}^0 \to I_\Pi \to 0, \tag{3.6.4}$$

где $\hat{P}$ — свободный Π-модуль. Из этих двух последовательностей сразу следует

$$H^1(\pi, \hat{N}^0) = \hat{H}^0(\pi, I_\Pi) = H^{-1}(\pi, \mathbb{Z}) = 0$$

для всех подгрупп π группы Π. Таким образом, Π-модуль $\hat{N} = \mathrm{Hom}(\hat{N}^0, \mathbb{Z}) \in H^{-1}(\Pi)$. Переходя в (3.6.4) к сопряженным модулям, получаем вялую резольвенту

$$0 \to J_\Pi \to \hat{P} \to \hat{N} \to 0.$$

Из (3.6.3) и (3.6.4) следует $H^1(\pi, \hat{N}) = H^3(\pi, \mathbb{Z})$.

Теорема 3.6.1. *Пусть $T = R^{(1)}_{L/k}(G_m)$, L/k — расширение Галуа. Тогда для любого промежуточного поля F, $k \subset F \subset L$, справедливо равенство $H^1(L/F, p(T)) = H^3(L/F, \mathbb{Z})$.*

Эта теорема позволяет находить нерациональные торы. Например, если группа Π содержит подгруппу π вида $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p — простое число, то тор T не является рациональным над полем L^{π} и, тем более, над полем k, ибо $H^3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\neq 0$.

Пример 3.6.1. Пусть $L = \mathbb{Q}(\sqrt{a},\sqrt{b})$ — биквадратичное расширение поля рациональных чисел. Рассмотрим торы $T(a,b) = R^{(1)}_{L/\mathbb{Q}}(G_m)$. По теореме 3.6.1 $H^1(L/\mathbb{Q},p(T(a,b))) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ для любого поля L данного вида. Поэтому торы $T(a,b)$ не являются рациональными над полем $\mathbb{Q}$. Пусть $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{a_1},\sqrt{b_1})$ и $L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{a_2},\sqrt{b_2})$ — два биквадратичных расширения, $L_1 \neq L_2$. Покажем, что торы $T(a_1,b_1)$ и $T(a_2,b_2)$ бирационально неэквивалентны над полем $\mathbb{Q}$. Пусть M — поле, порожденное полями L_1 и L_2 в $\bar{\mathbb{Q}}$, $L_0 = L_1\cap L_2$. Пусть $\Pi = \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$, $\pi_1 = \mathrm{Gal}(M/L_1)$, $\pi_2 = \mathrm{Gal}(M/L_2)$. Выберем в классе $p(T(a_1,b_1))$ π_1-тривиальный Π-модуль $\hat{N}_1$, в классе $p(T(a_2,b_2))$ — π_2-тривиальный Π-модуль $\hat{N}_2$. Так как $L_1\neq L_2$, то степень $(L_0:\mathbb{Q})$ равна 1 или 2. В первом случае $\Pi = \pi_1\times\pi_2$. Имеем $H^1(\pi_1,\hat{N}_1) = 0$, поэтому $H^1(\Pi,\hat{N}_1) = H^1(\Pi/\pi_1,\hat{N}_1) = H^1(\pi_2,\hat{N}_1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ибо $\pi_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Но $H^1(\pi_2,\hat{N}_2) = 0$, следовательно, $p(T(a_1,b_1)) \neq p(T(a_2,b_2))$. Торы $(T(a_1,b_1))$ и $(T(a_2,b_2))$ даже не являются стабильно эквивалентными над полем $\mathbb{Q}$. Во втором случае Π есть прямое произведение групп π_1, π_2 и некоторой третьей группы π_3, все эти подгруппы имеют порядок 2. Как и в первом случае, $H^1(\pi_1\times\pi_2,\hat{N}_1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H^1(\pi_2\times\pi_3,\hat{N}_2) = H^1(\pi_3,\hat{N}_2) = H^{-1}(\pi_3,\hat{N}_2) = 0$. Получаем тот же результат, что и в первом случае.

Для циклической группы Π модули I_Π и J_Π изоморфны, поэтому класс $p(J_\Pi)$ равен нулю. Как показали исследования, проведенные, в основном, Эндо и Миятой [49]–[54], требование обратимости элемента $p(J_\Pi)$ в полугруппе $H^{-1}(\Pi)/S(\Pi)$ налагает весьма серьезные ограничения на строение группы Π. Изложим полученные результаты в порядке усиления требований. Следующее утверждение позволяет проводить индуктивные доказательства.

Предложение. *Пусть* Π *— конечная группа. Для модуля* $M\in C(\Pi)$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $M\in D(\Pi)$,

2) $M\in D(\Pi_p)$ *для всякой силовской подгруппы* Π_p *группы* Π,

3) $\operatorname{Ext}^1_{\Pi}(M,P)=0$ *для всякого модуля* $P\in H^1(\Pi)$,

4) $\operatorname{Ext}^1_{\Pi}(N,M)=0$ *для всякого модуля* $N\in H^{-1}(\Pi)$.

Доказательство. Если S — пермутационный П-модуль, то S является пермутационным π-модулем для всякой подгруппы $\pi\subset\Pi$. Поэтому из 1) следует 2). Далее, $\operatorname{Ext}^1_{\Pi}(M,P)=H^1(\Pi,\operatorname{Hom}(M,P))$. Если $M\in D(\Pi_p)$, $P\in H^1(\Pi)$, то $H^1(\Pi_p,\operatorname{Hom}(M,P))=0$. Поэтому из 2) следует 3). Равенство $\operatorname{Ext}^1_{\Pi}(N,M)=\operatorname{Ext}^1_{\Pi}(M,N^0)$ для модулей из $C(\Pi)$ показывает, что условия 3) и 4) равносильны. Рассмотрим вялую резольвенту модуля M

$$0\to M\to S\to N\to 0.$$

Из 4) следует, что она расщепляется: $S=M\oplus N$, поэтому $M\in D(\Pi)$. □

Теорема 3.6.2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *каждая силовская подгруппа группы* П *либо циклическая, либо является обобщенной группой кватернионов,*
2) *все абелевы подгруппы группы* П *являются циклическими,*
3) $H^3(\pi,\mathbb{Z})=0$ *для всех подгрупп* $\pi\subset\Pi$,
4) $p(J_\Pi)\in H^1(\Pi)/S(\Pi)$.

Доказательство. Теорема 3.6.1 показывает равносильность условий 3) и 4). В книге Картана и Эйленберга [20] показано, что справедливы следующие импликации: 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 3). Поскольку $H^3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, то из 3) следует 2). □

Определение. Конечная группа называется *метациклической*, если все ее силовские подгруппы цикличны.

Метациклическая группа представима в виде полупрямого произведения $H\cdot\Gamma$ нормальной циклической подгруппы H порядка m и циклической подгруппы Γ порядка n, $(m,n)=1$.

Теорема 3.6.3. *Пусть* П *— конечная группа. Следующие условия эквивалентны:*

1) *класс* $p(J_\Pi)$ *обратим,*
2) *группа* П *является метациклической,*
3) $H^1(\Pi)=H^{-1}(\Pi)=D(\Pi)$.

Пример 3.6.2. Пусть П — кватернионная группа порядка 8. Тогда по теореме 3.6.2 $p(J_\Pi)\in H^1(\Pi)/S(\Pi)$, но $p(J_\Pi)$ не является обратимым по теореме 3.6.3. Следовательно, $H^{-1}(\Pi)\cap H^1(\Pi)\neq D(\Pi)$, что опровергает одно поспешное утверждение автора.

Следующая деликатная теорема полностью описывает стабильно рациональные торы вида $R^1_{L/k}(\mathrm{G}_m)$ в случае, когда L/k — расширение Галуа (см. [51]).

Теорема 3.6.4. *Пусть* Π *— конечная группа. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\Pi = < s, t >$, $t^m = s^{2^n} = 1$, $sts^{-1} = t^r$, m *нечетно*, $r^2 \equiv 1 (\bmod m)$;
2) $p(J_\Pi) = 0$;
3) $p(J_\Pi)$ *имеет конечный порядок*;
4) *группа* Π *метациклична и* $H^4(\Pi, \mathbb{Z}) = \hat{H}^0(\Pi, \mathbb{Z})$.

   В работе [44] *рассмотрен случай* 1) *теоремы* 3.6.4 *при* $m = p^a$, $p > 2$, *простое. Пусть* $\Gamma = < s >$. *Они показали, что условия* 1) — 4) *эквивалентны следующим:*

5) $p(J_{\Pi/\Gamma}) = 0$,
6) $p(J_{\Pi/\Gamma})$ *имеет конечный порядок.*

Пример 3.6.3. Пусть Π — группа порядка 20, порожденная элементами t, s с условиями $t^5 = s^4 = 1$, $sts^{-1} = t^2$. Тогда класс $p(J_{\Pi/\Gamma})$ обратим, но имеет бесконечный порядок в группе $D(\Pi)/S(\Pi)$.

Ранг группы $D(\Pi)/S(\Pi)$ вычислил Дресс [48], кручение в ряде случаев исследовали Эндо и Мията.

Между теоремами 3.6.2 и 3.6.4 имеется небольшой зазор. Пусть $\widetilde{H}(\Pi) = H^{-1}(\Pi) \cap H^1(\Pi)$, $\widetilde{H}(\Pi) \supset D(\Pi)$. Эндо и Мията [54] дали полный ответ на вопрос, для каких конечных групп Π имеется совпадение $\widetilde{H}(\Pi) = D(\Pi)$.

Теорема 3.6.5. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $p(J_\Pi \otimes_Z J_\Pi) = p(p(J_\Pi)) \in D(\Pi)$;
2) $\widetilde{H}(\Pi) = D(\Pi)$;
3) *каждая силовская подгруппа* Π_p *группы* Π *является циклической для нечетного* p, *группа* Π_2 *— циклическая или группа диэдра* D_n, $n = 2^m$.

Пример 3.6.4. Пусть F/k — сепарабельное расширение простой степени p. Оказывается, хотя тор $T = R^1_{F/k}(G_m)$ не всегда рационален, но существует k-тор T' такой, что $T \times_k T'$ является k-рациональным многообразием, по другому, класс $p(T)$ является обратимым. В случае, когда F/k нормально, модули I_Π и J_Π изоморфны в силу цикличности расширения F/k, поэтому тор T рационален над k. Итак, пусть расширение F/k не нормально, L — нормальная оболочка поля F в k_s, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, $(F : k) = p$, $(L : F) = m$, $(m, p) = 1$. Группа Π

есть подгруппа симметрической группы степени p, она действует на корнях неприводимого многочлена степени p. Выберем П-модуль $\hat{N} \in p(T)$. Силовская подгруппа Π_p группы Π циклична порядка p, поэтому Π_p-модуль $\hat{N}$ лежит в $D(\Pi_p)$; П-модуль $\hat{T}$ есть $J_{\Pi/\pi} = \mathbb{Z}[\Pi/\pi]/\mathbb{Z}$, подгруппа π имеет неподвижную точку при действии перестановками на Π/π, поэтому π-модуль $\mathbb{Z}[\Pi/\pi]$ изоморфен прямой сумме π-модулей $\hat{T} \oplus \mathbb{Z}$. Тогда π-модуль $\hat{N}$ лежит в $D(\pi)$. Любая силовская подгруппа Π_q, $q \neq p$, сопряжена с подгруппой из π, поэтому Π_q-модуль $\hat{N}$ принадлежит $D(\Pi_q)$. Но тогда и $\hat{N} \in D(\Pi)$. Данный результат имеет важные применения в арифметике алгебраических групп и в арифметике числовых полей. Впервые его получили Колье-Телен и Б.Кунявский независимо друг от друга. Класс $[\hat{N}]$ не всегда равен нулю. Пусть $k = \mathbb{Q}$, F — поле, порожденное корнем неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена $x^5 - a$, $a \in \mathbb{Q}$, $(F : \mathbb{Q}) = 5$. Группа Галуа Π этого многочлена описана в примере 3.6.3, она является полупрямым произведением $\Gamma \cdot \pi$ инвариантной подгруппы $\Gamma = < t >$ порядка 5 и циклической подгруппы $\pi = < s >$ порядка 4. Имеем $H^q(\Pi, \mathbb{Z}) = H^q(\pi, \mathbb{Z}) \oplus H^q(\Gamma, \mathbb{Z})^\pi$ для $q \geqslant 0$ по формуле Линдона. Модуль $\hat{N}$ из класса $p(J_{\Pi/\pi})$ можно вычислить из точной последовательности

$$0 \to \hat{N}^0 \to \mathbb{Z}[\Pi] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}[\Pi/\pi] \to \mathbb{Z} \to 0,$$

где $\varphi(1) = 1 - t$, $\mathrm{Im}(\varphi) = I_{\Pi/\pi}$. Нетрудно увидеть, что $\hat{N}^0 \in H^1(\Pi)$, поэтому имеем вялую резольвенту П-модуля

$$0 \to J_{\Pi/\pi} \to \mathbb{Z}[\Pi] \to \hat{N} \to 0.$$

Если $[\hat{N}] = [0]$, то существуют пермутационные П-модули $\hat{S}_1$ и $\hat{S}_2$ такие, что $\hat{N} \oplus \hat{S}_1 = \hat{S}_2$. Поскольку $\hat{S}_i^0 \cong \hat{S}_i$, то $\hat{N} \oplus \hat{S}_1 \cong \hat{N}^0 \oplus \hat{S}_1$, тогда $H^q(\Pi, \hat{N}) \cong H^q(\Pi, \hat{N}^0)$, $q \in \mathbb{Z}$. Двумерные когомологии легко вычисляются:

$$H^2(\Pi, \hat{N}^0) = H^1(\Pi, I_{\Pi/\pi}) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},$$

$$H^2(\Pi, \hat{N}) = H^3(\Pi, J_{\Pi/\pi}) = H^4(\Gamma, \mathbb{Z})^\pi.$$

Равенство $H^4(\Gamma, \mathbb{Z})^\pi = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ означает, что π действует тривиально на $H^4(\Gamma, \mathbb{Z})$, а это не так, поэтому $p(J_{\Pi/\pi}) \neq 0$.

3.7. Торы малой размерности. Наряду с бирациональной классификацией алгебраических торов, исходя из строения их полей разложения, совершенно естественно изучать торы по возрастанию их размерности. Пусть T — алгебраический тор размерности n, определенный над полем k, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$. Тор T однозначно определяется $\mathcal{G}$-модулем рациональных характеров $\hat{T}$ или, по другому, целочисленным представлением $h : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}(\mathrm{G}_m^n)$, которое рассматривается с точностью до эквивалентности. Группа $h(\mathcal{G})$ есть конечная подгруппа в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, названная группой разложения тора T. Чтобы описать все k-торы данной размерности n, следует сначала найти все неизоморфные $h(\mathcal{G})$-модули ранга n. Задача сводится, в первую очередь, к нахождению в группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ всех конечных подгрупп с точностью до сопряженности. По теореме Жордана для каждого n таких подгрупп только конечное число. Как видно, класс стабильной эквивалентности тора T зависит только от группы разложения $h(\mathcal{G}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, но не от его поля разложения L/k.

Пример 3.7.1 (торы размерности 1). Группа $\mathrm{GL}(1, \mathbb{Z}) = \{1, -1\}$. Единичной подгруппе соответствует тривиальный модуль $\mathbb{Z}$ и тривиальный тор G_m. Группе $\mathrm{GL}(1, \mathbb{Z})$ соответствует одномерный П-модуль I_Π, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, $(L : k) = 2$, $I_\Pi = J_\Pi$. Соответствующий тор имеет вид $R^{(1)}_{L/k}(G_m) \cong R_{L/k}(G_m)/G_m$.

Пример 3.7.2 (торы размерности 2). В группе $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ с точностью до сопряженности имеются две максимальные конечные подгруппы W_1, W_2 порядков 8 и 12 соответственно. Группа W_1 порядка 8 является группой всех самосовмещений квадрата, она бирегулярно действует на $G_m \times G_m$ и при вложении $G_m \times G_m \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ее действие продолжается до бирегулярного действия на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Пусть T — двумерный k-тор и группа разложения $h(\mathcal{G})$ лежит в W_1. Тогда T — фактор $(G_m^2 \otimes k_s)/\mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ действует на первом множителе посредством представления h, а на k_s как группа Галуа. Из эквивариантности вложения $G_m^2 \to (\mathbb{P}^1)^2$ следует, что T — открытая часть k-многообразия $((\mathbb{P}^1)^2 \otimes_k k_s)/\mathcal{G}$, которое является k-формой многообразия $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Но все такие k-формы рациональны, если имеют рациональную k-точку.

Пусть теперь $h(\mathcal{G})$ лежит в W_2. Группа W_2 есть группа всех самосовмещений правильного шестиугольника. Группа W_2 регулярно действует на G_m^2 и бирационально на $\mathbb{A}^2$ или $\mathbb{P}^2$. В однородных координатах $(x : y : z)$ плоскости $\mathbb{P}^2$ действие группы $W_2 =< \sigma, \tau, \omega >$ может быть задано следующим образом: σ циклически переставляет координаты $(x : y : z)$, $\tau(a, b) = (a^{-1}, b^{-1})$, где $a = xz^{-1}$, $b = yz^{-1}$; ω является транспозицией $(x : y : z) \to$

$(x:z:y)$. Выберем следующие рациональные функции на $\mathbb{P}^2$:

$$u=\frac{y-z}{x-y},\quad v=au=\frac{x(y-z)}{z(x-y)}.$$

Поля $k(u,v)$ и $k(a,b)$ изоморфны и прямой подсчет показывает, что в базисе (u,v) группа W_2 действует по правилу:

$$\begin{array}{rcl}\sigma(u,v) & = & \left(-\frac{u+1}{u},-\frac{v+1}{v}\right),\\ \tau(u,v) & = & (v,u),\\ \omega(u,v) & = & \left(-\frac{u}{u+1},-\frac{v}{v+1}\right).\end{array}$$

Таким образом, группа W_2 сопряжена в группе бирациональных k-преобразований плоскости подгруппе группы $\mathrm{Aut}_k(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$. Поэтому, как и в предыдущем случае, соответствующий тор бирационально эквивалентен над полем k форме многообразия $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ и, следовательно, рационален над k. Итак, все торы размерности 2 рациональны над полем определения.

3.8. Торы с биквадратичным полем разложения. В случае, когда все силовские подгруппы группы $\Pi=\mathrm{Gal}(L/k)$ являются циклическими (см. п. 1.8), полугруппа классов $Z(L/k)$ есть группа. Простейшим примером, когда это не так, служит группа $\Pi=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, т.е. это торы с биквадратичным полем разложения. Этот случай исследовал Б.Кунявский [25], им получены весьма точные результаты. Оказалось, что полугруппа $Z(L/k)$ имеет одну образующую и изоморфна полугруппе $\mathbb{Z}_+$ целых неотрицательных чисел по сложению. Образующим элементом служит класс трехмерного тора $R^1_{L/k}(G_m)$. Сверх того, Б.Кунявский получает полную классификацию торов категории (L/k) с точностью до бирациональной эквивалентности. Оказывается, всякий тор $T\in C(L/k)$ бирационально эквивалентен прямому произведению $T\cong R^1_{L/k}(G_m)^n\times_k G^d_{m,k}$. Торы $R^1_{L/k}(G_m)^n\times_k G^d_{m,k}$ и $R^1_{L/k}(G_m)^m\times_k G^r_{m,k}$ бирационально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n=m$, $d=r$. Далее, всякий стабильно рациональный тор $T\in C(L/k)$ является рациональным и для всякого тора $T\in C(L/k)$ существует пермутационная резольвента

$$0\to\hat{T}\to S\to S_1\to S_2\to 0,$$

где $S,S_1,S_2\in S(\Pi)$.

Доказательство всех этих фактов опирается на одно счастливое обстоятельство. Хотя все неразложимые целочисленные представления четверной группы Π и описаны Л.Назаровой [33], но их бесконечное множество и отыскать путеводитель удалось, выбирая, во-первых, в классе стабильной эквивалентности анизотропный тор T, а затем рассматривая Π-модуль как Λ-модуль, где $\Lambda = \mathbb{Z}[\Pi]/(s), s = \sum g, g \in \Pi$. Кольцо Λ является так называемым кубическим $\mathbb{Z}$-кольцом, оно имеет только конечное число неразложимых представлений, их оказалось 8, два из них имеют степень 3, остальные меньшую степень. Среди трехмерных естественно I_Π и J_Π, $p(J_\Pi) \neq 0$, $p(I_\Pi) = 0$. Это показывает цикличность полугруппы $Z(L/k)$. Остальные факты следуют из однозначности разложения Λ-модулей в сумму неразложимых. Отметим, что приведенные результаты не распространяются на случай групп $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $p > 2$.

3.9. Полугруппа $Z(L/k)$ в общем случае. Вопрос о числе образующих полугруппы $Z(L/k) \cong H^{-1}(\Pi)/S(\Pi)$ с качественной точки зрения решил А.Л.Чистов [38]. Им доказаны следующие теоремы, позволяющие проводить эффективные вычисления.

Теорема 3.9.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *полугруппа $Z(L/k)$ имеет конечное число образующих,*
2) *полугруппа $H^q(\Pi)$ имеет конечное число образующих для фиксированного q,*
3) *существует лишь конечное число классов неразложимых Π-модулей, принадлежащих $H^q(\Pi)$.*

Теорема 3.9.2. *Полугруппа $H^q(\Pi)$ имеет конечное число образующих в том и только том случае, если для любой силовской подгруппы Π_p полугруппа $H^q(\Pi_p)$ имеет конечное число образующих.*

Далее, показывается, если Π_1, Π_2, — две подгруппы в Π и Π_2 — нормальный делитель группы Π_1, то если $H^q(\Pi_1/\Pi_2)$ не имеет конечного числа образующих, то и $H^q(\Pi)$ не имеет конечного числа образующих. Для группы $\Pi = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $p > 2$, А.Чистов строит бесконечное семейство попарно неизоморфных неразложимых модулей, лежащих в $\hat{H}^0(\Pi)$, что приводит к следующему результату.

Теорема 3.9.3. *Пусть Π — группа порядка p, $p > 2$, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$. Тогда $Z(L/k)$ имеет конечное число образующих только в случае, когда Π — циклическая группа.*

Для 2-групп Π показывается, что $Z(L/k)$ не является конечно порожденной, если минимальное число образующих группы

П больше двух. Для $\Pi = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $Z(L/k)$ также не имеет конечного числа образующих. Далее, если порядок группы П равен 2^n, $n \geqslant 4$, и П не изоморфна циклической группе, группе диэдра D_n порядка 2^n, обобщенной группе кватернионов H_n порядка 2^n, или группе Q_n с образующими σ, τ, связанными соотношениями

$$\sigma^{2^{n-1}} = \tau^2 = 1, \ \tau\sigma = \sigma^m \tau, \ m = 2^{n-2} - 1,$$

то полугруппа $Z(L/k)$ не является конечно порожденной.

Для 2-групп не разобранными остались случаи, когда П есть одна из групп D_n, H_n или Q_n, где $n \geqslant 4$. Для $n = 3$, $Q_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ этот случай рассмотрен выше. Если $\Pi = D_3$, то $Z(L/k) = \mathbb{Z}_+^{11}$, если $\Pi = H_3$, то $Z(L/k) = \mathbb{Z}_+^6$.

Эндо и Мията дали полный ответ на вопрос, в каких случаях полугруппа $Z(L/k)$ является группой.

Теорема 3.9.4. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $Z(L/k)$ *— конечная группа,*

2) П *есть либо:* а) *циклическая группа,* б) *диэдральная группа порядка* $2m$, m *нечетно,* в) *прямое произведение циклической группы порядка* q^f, *где* q *— нечетное простое,* $f \geqslant 1$, *и группы диэдра порядка* $2m$, m *нечетно, где всякий простой делитель числа* m *— примитивный* $q^{f-1}(q-1)$*-й корень из единицы по модулю* q^f, г) *обобщенная группа кватернионов порядка* $4m$, m *нечетно, и всякий простой делитель числа* m *сравним с* 3 *по модулю* 4.

§ 4. Торы с циклическим полем разложения

4.1. Торы вида $R(f)$. Пусть П — циклическая группа порядка n с образующим элементом σ, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$. Групповое кольцо $\Lambda = Z[\Pi]$ изоморфно факторкольцу $Z[x]/(x^n - 1)$. Пусть f и g — два нормированных многочлена из кольца $Z[x]$, удовлетворяющих условию $f(x)g(x) = x^n - 1$. Если A — любой П-модуль, то, исходя из данного разложения, можно построить два П-модуля

$$A_f = A/f(\sigma)A, \ A^f = \{a \in A \mid f(\sigma)a = 0\}.$$

В частности, П-модуль $\Lambda_f = Z[\Pi] = Z[\sigma]/(f(\sigma))$ является кольцом и A_f и A^f можно рассматривать как Λ_f-модули, причем $A_f \cong \Lambda_f \otimes_\Pi A$, $A^f \cong \mathrm{Hom}_\Pi(\Lambda_f, A)$.

Для каждого нормированного многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$, делящего $x^n - 1$, пусть $R(f)$ обозначает тор из $C(L/k)$ с П-модулем рациональных характеров $\mathbb{Z}[\sigma]/(f(\sigma))$. Ясно, что $R(x^n-1) = R_{L/k}(G_m)$. Пусть Φ_d — круговой полином, $d|n$, тогда разложение

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x). \tag{4.1.1}$$

Кольцо $\mathbb{Z}[\sigma]/(\Phi_d(\sigma))$ изоморфно кольцу целых элементов $\mathbb{Z}[\zeta_d]$ кругового поля $\mathbb{Q}(\zeta_d), \zeta_d$ — примитивный корень степени d из единицы, $\widehat{R(\Phi_d)} = \mathbb{Z}[\zeta_d]$.

Теорема. *Тор $R(\Phi_n)$ стабильно рационален над k для любого n.*

Таким образом, над полем алгебраических чисел k имеется бесконечное множество стабильно рациональных торов достаточно простой конструкции. Вопрос о рациональности этих торов является весьма принципиальным и его рассмотрим ниже. Задачу можно немного упростить. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа n, $n_0 = p_1 \cdots p_s$ — свободная от квадратов часть числа n, Π_0 — подгруппа порядка n_0 группы Π, L_0 — подполе Π_0-инвариантов поля L. Формула $\Phi_n(x) = \Phi_{n_0}(y)$, $y = x^{n/n_0}$, показывает, что $R(\Phi_n) = R_{L_0/k}(R(\Phi_{n_0}))$. Следовательно, рациональность торов вида $R(\Phi_n)$ будет доказана, если это будет сделано для чисел n, свободных от квадратов.

4.2. Обратимость класса Пикара. Фундаментальным фактом для торов с циклическим полем разложения является обратимость класса $p(\hat{T})$. По другому, полугруппа $H^1(\Pi)$ для циклической группы Π является группой. Впервые этот факт установили Эндо и Мията [51].

4.3. Умножение Чистова. Группа Π — циклическая с образующим элементом σ, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$. Поскольку группа Π коммутативна, то всякий левый Π-модуль A можно считать и правым, полагая по определению $\sigma a = a\sigma$, $a \in A$. Тогда определено тензорное произведение $A \otimes_\Pi B$ для любых Π-модулей A и B. Снабдим произведение $A \otimes_\Pi B$ строением Π-модуля по правилу

$$\sigma(a \otimes b) = \sigma a \otimes b = a\sigma \otimes b = a \otimes \sigma b.$$

А.Л.Чистов [37] определяет на категории $C(\Pi)$ новое умножение следующим образом:

а) если один из модулей $\hat{T}_1$ или $\hat{T}_2$ лежит в $D(\Pi)$, то полагаем

$$\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2 = (\hat{T}_1 \otimes_\Pi \hat{T}_2)/t(\hat{T}_1 \otimes_\Pi \hat{T}_2),$$

где $t(A)$ — подмодуль кручения модуля A.

б) пусть $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$ — произвольные модули из $C(\Pi)$ и

$$0 \to \hat{T}_1 \to \hat{S}_1 \xrightarrow{p_1} \hat{N}_1 \to 0, \quad 0 \to \hat{T}_2 \to \hat{S}_2 \xrightarrow{p_2} \hat{N}_2 \to 0$$

— их вялые резольвенты, $N_i \in D(\Pi)$. Имеем эпиморфизм $\widetilde{p}_2(\hat{T}_1) : \hat{T}_1 \cdot \hat{S}_2 \to \hat{T}_1 \cdot \hat{N}_2$, индуцированный проекцией p_2. Положим $\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2 = \mathrm{Ker}(\widetilde{p}_2(\hat{T}_1))$. Диаграммным поиском проверяется, что произведение $\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2$ не зависит от выбора вялых резольвент, а в случае, когда $\hat{T}_1 \in D(\Pi)$, определение пункта б) совпадает с данным в а). Имеются канонические изоморфизмы: $\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2 = \hat{T}_2 \cdot \hat{T}_1$, $\hat{T}_1 \cdot (\hat{T}_2 \cdot \hat{T}_3) = (\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2) \cdot \hat{T}_3$. Заметим также, что $\hat{T} \cdot \mathbb{Z}[\Pi] = \hat{T}$. Пусть T_1 и T_2 — алгебраические торы категории $C(L/k)$, дуальные модулям $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$. Определим $T_1 \cdot T_2 \in C(L/k)$ как тор, двойственный Π-модулю $\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2$. Для произвольного тора $T \in C(L/k)$ и нормированного многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x)|x^n - 1$, положим $T(f) = T \cdot R(f)$. Заметим, что Π-модуль $\widehat{T(\Phi_d)}$ можно рассматривать и как $\mathbb{Z}[\zeta_d]$-модуль и поскольку он не имеет кручения, то $\widehat{T(\Phi_d)}$ является проективным $\mathbb{Z}[\zeta_d]$-модулем, $d|n$. Следующая замечательная теорема принадлежит А.Чистову [37].

Теорема 4.3.1. *Пусть L/k — циклическое расширение степени n. Всякий тор $T \in C(L/k)$ бирационально эквивалентен над полем k произведению торов*

$$T \cong \prod_{d|n} T(\Phi_d).$$

Для каждого $d|n$ модуль характеров $\widehat{T(\Phi_d)}$ является проективным $\mathbb{Z}[\zeta_d]$-модулем. Тор T стабильно рационален над k тогда и только тогда, когда для любого $d|n$ модуль $\widehat{T(\Phi_d)}$ является $\mathbb{Z}[\zeta_d]$-свободным.

В случае, когда Π — циклическая p-группа, то в качестве следствия получаем рациональность всякого стабильно рационального тора. В этом случае теорема сводит проверку к торам $T(\Phi_d)$, для которых $\widehat{T(\Phi_d)} = \mathbb{Z}[\zeta_d]$, дальнейшая редукция сводит задачу к модулю $\mathbb{Z}[\zeta_p]$, для которого тор $R(\Phi_p)$ рационален. Еще два следствия.

Теорема 4.3.2. *Пусть L/k — циклическое расширение. Тогда группа $Z(L/k)$ является конечной группой, изоморфной прямому произведению по всем $d|n$ групп классов идеалов колец $\mathbb{Z}[\zeta_d]$.*

Теорема 4.3.3. *Пусть в условиях теоремы* 4.3.1 Π-*модуль* $\hat{T}$ *проективен. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $p(\hat{T}) = 0$,

2) $\widehat{T(\Phi_d)}$ — *свободный* $\mathbb{Z}[\zeta_d]$-*модуль для всякого* $d|n$,

3) *тор* T *рационален над полем* k.

Почему из проективности модуля $\hat{T}$ *и стабильной рациональности тора* T *следует* k-*рациональность? Ответ таков. Всякий проективный* Π-*модуль есть прямая сумма свободного* Π-*модуля* $\hat{T}_1$ *и проективного идеала* $\hat{T}_2 \subset \mathbb{Z}[\Pi]$. *Тор* T_1 *является* k-*рациональным, а* $\mathbb{Z}$-*ранг модуля* T_2 *равен* n. *Поэтому*

$$T_2 \cong \prod_{d|n} T_2(\Phi_d) \cong \prod_{d|n} R(\Phi_d) \cong R_{L/k}(G_m).$$

В заключение укажем еще два случая, в которых умеем сосчитать все до конца.

Теорема 4.3.4. *Пусть* T — k-*тор, разложимый над циклическим расширением* L *степени* p *поля* k, *причем поле деления круга на* p *частей одноклассно. Тогда* T *рационален над* k.

Доказательство. Пусть $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$ — циклическая группа порядка p. В условиях теоремы существует только три неразложимых Π-модуля $\hat{T}$:

$$\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}[\Pi],\ I = \mathrm{Ker}[\mathbb{Z}[\Pi] \to \mathbb{Z}].$$

Соответствующие торы T k-рациональны. □

Теорема 4.3.5. *Все торы, расщепляющиеся над циклическим расширением степени* 4, *являются рациональными над полем определения.*

Доказательство. Пусть Π — циклическая группа порядка 4. Известны (см. [35]) все неразложимые целочисленные представляния группы Π, их девять. В этом списке торы имеют размерность не выше четырех. Легкая редукция сводит задачу к торам размерности 1 или 2, которые рациональны. □

4.4. Рациональность торов типа $R(\Phi_n)$. Пусть L/k — циклическое расширение степени n, $\Pi_n = \mathrm{Gal}(L/k)$. Для краткости обозначим тор $R(\Phi_n)$ через T_n, $\hat{T}_n = \mathbb{Z}[\zeta_n]$. Как мы видели, проблема рациональности стабильно рациональных торов с циклическим полем разложения сводится к вопросу о рациональности торов вида T_n. В п.4.1 было показано, что достаточно проверить рациональность в случаях, когда n свободно от квадратов. Если $n = p$, то пример предыдущего пункта показывает, что тор T_p рационален над k. Пусть теперь $n = pq$, где p и q — различные простые числа. В этом случае

$$\mathbb{Z}[\zeta_{pq}] = \mathbb{Z}[\zeta_p] \otimes \mathbb{Z}[\zeta_q], \quad \mathbb{Z}[\Pi_{pq}] = \mathbb{Z}[\Pi_{pq}/\Pi_p] \otimes \mathbb{Z}[\Pi_{pq}/\Pi_q],$$

и тогда имеем резольвенту

$$0 \to \mathbb{Z}[\zeta_p] \to \mathbb{Z}[\Pi_p] \to \mathbb{Z} \to 0,$$

аналогично для q. Получаем длинную точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}[\zeta_{pq}] \to \mathbb{Z}[\Pi_{pq}] \to \mathbb{Z}[\Pi_{pq}/\Pi_p] \otimes \mathbb{Z}[\Pi_{pq}/\Pi_q] \to \mathbb{Z} \to 0$$

П-модулей, откуда точная последовательность k-торов

$$1 \to \mathrm{G}_{m,k} \to S_p \times_k S_q \xrightarrow{\alpha} S_{pq} \to T_{pq} \to 1.$$

Пусть $L_p = L^{\Pi_q}$, $L_q = L^{\Pi_p}$, тогда $S_p = R_{L_p/k}(G_m)$, $S_q = R_{L_q/k}(G_m)$, $S_{pq} = R_{L/k}(G_m)$.

Далее, $L = L_p \otimes_k L_q$, отображение α есть тензорное представление группы $S_p \times_k S_q$ в пространстве $L_p \otimes_k L_q$. Итак, $k(T_{pq}) = k(L_p \otimes_k L_q)^{S_p \times S_q}$. Рассмотрим несколько более общую задачу. Пусть V_i — линейное пространство над полем k, $\dim V_i = i$ и $V = V_m \otimes_k V_n$. Имеем тензорное представление прямого произведения $\mathrm{GL}(V_m) \times \mathrm{GL}(V_n)$ в пространстве $V_m \otimes_k V_n$. Пусть S_i — максимальный k-тор в группе $\mathrm{GL}(V_i)$, S — максимальный тор в $\mathrm{GL}(V)$. Имеем гомоморфизм $S_m \times_k S_n \xrightarrow{\alpha} S$ с ядром $G_{m,k}$ и поле инвариантов $k(V)^{S_m \times S_n}$ изоморфно полю рациональных функций на торе $T_{mn} = S/\alpha(S_m \times S_n)$, $\dim T_{mn} = (m-1)(n-1)$. Поскольку m и n не обязательно простые, то необходимо уточнение. Б.Кунявский показал [28], что среди торов типа T_{mn} встречаются не рациональные над полем k. Пусть N — образ гомоморфизма α. Имеем две точные последовательности алгебраических торов

$$1 \to G_{m,k} \to S_m \times S_n \to N \to 1, \tag{4.4.1}$$

$$1 \to N \to S \to T \to 1. \qquad (4.4.2)$$

Нас интересует рациональность k-тора T. Группы S_m и S_n — квазиразложимы, их модули характеров пермутационны. Выпишем точные последовательности П-модулей рациональных характеров, дуальные последовательностям (4.4.1),(4.4.2):

$$0 \to \hat{N} \to \hat{S}_m \oplus \hat{S}_n \to \mathbb{Z} \to 0, \qquad (4.4.3)$$

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to \hat{N} \to 0. \qquad (4.4.4)$$

Ограничимся случаем взаимно простых чисел m и n. Из последовательности (4.4.3) следует точность последовательности

$$(\hat{S}_m \oplus \hat{S}_n)^{\Pi} \xrightarrow{e} \mathbb{Z} \to H^1(\Pi, \hat{N}) \to 0.$$

Множество $\mathrm{Im}(e)$ содержит целые числа вида $am + bn$, поэтому отображение e является эпиморфизмом. Тогда $H^1(\Pi, \hat{N}) = 0$, а это показывает, что последовательность (4.4.3) расщепляется: $\hat{N} \oplus \mathbb{Z} \cong \hat{S}_m \oplus \hat{S}_n$. Таким образом, последовательность (4.4.4) является вялой резольвентой тора T и $p(T) = [\hat{N}] = [0]$. Тор T стабильно рационален над полем k. Заметим, что из расщепления последовательности (4.4.3) следует $H^1(k, N) = 0$, т.е. всякое главное однородное пространство группы N является тривиальным. Пусть R — множество разложимых тензоров в пространстве $V = V_m \otimes_k V_n$. Группа $S_m \times S_n$ действует на V и R содержит орбиту группы $S_m \times S_n$, открытую в R, $\dim R = m + n - 1$. Пусть D_m и D_n — максимальные диагонализируемые подгруппы в $\mathrm{GL}(V_m)$ и $\mathrm{GL}(V_n)$ соответственно. Множество R стабильно относительно действия группы $D_m \times D_n$ и R содержит также орбиту группы $D_m \times D_n$, открытую в R. Пусть D — максимальный k-разложимый тор в $\mathrm{GL}(V)$, содержащий тор $\mathrm{Im}(D_m \times D_n) = D_m D_n$. Факторгруппа $D/D_m D_n = D_0$ является разложимым k-тором, следовательно, k-рациональным. Имеем разложение $D = D_m D_n \times_k D_0$ в прямое произведение. Рассматривая многообразие D как открытую орбиту в V и учитывая, что орбита группы $D_m D_n$ открыта в R, получаем бирациональное разложение $V \cong R \times_k D_0$. Поскольку группа $S_m \times_k S_n$ сохраняет R, то многообразие $T = T_{mn} = S/S_m S_n$ бирационально эквивалентно многообразию D_0, которое k-рационально. Таким образом, получили следующую теорему, которая другим способом ранее была доказана А.Клячко [23].

Теорема 4.4.1. *При взаимно простых m и n тор T_{mn} рационален над полем определения.*

Пусть теперь L_n — циклическое расширение поля k степени n, $n = p_1 \cdots p_t$ — бесквадратно, p_i — простые числа. Пусть F_i — подполе поля $L = L_n$, $(F_i : k) = n_i = n/p_i$, L_p — подполе в L, $(L_p : k) = p$. Тогда $L_n = L_{p_1} \otimes ... \otimes_k L_{p_t}$, $F_i \otimes_k L_{p_i} = L_n$. На языке k-точек имеем представление $T_n(k) = L_n^*/F_1^*...F_t^*$. Рассмотрим поля F_i и L_n как векторные k-пространства, тогда группа F_i^* есть максимальный k-тор в $\mathrm{GL}(F_i)$. Пусть D_i — максимальный k-расщепимый тор в $\mathrm{GL}(F_i)$. Выберем точку общего положения $v = v_1 \otimes ... \otimes v_t$, $v_i \in L_{p_i}$ таким образом, чтобы орбиты точки v относительно действия группы D_i и $S_i = R_{F_i/k}(G_m)$ были открыты в $F_i \otimes v_i$ для всякого i. Тогда замыкание орбиты точки v относительно действия группы $D_1 \times ... \times D_t$ совпадает с замыканием орбиты точки v относительно действия группы $S_1 \times ... \times S_t$. Пусть D — максимальный k-разложимый тор в группе $\mathrm{GL}(L_n)$, содержащий $\mathrm{Im}(D_1 \times ... \times D_t) = D_1 \cdots D_t$. Группа D — прямое произведение $D_1 \cdots D_t \times D_0$, $\dim D_0 = (p_1 - 1) \cdots (p_t - 1)$. Как и в теореме 4.4.1, имеем бирациональную эквивалентность $S/S_1 \cdots S_t = T_n \cong D_0$, где $S = R_{L/k}(G_m)$ — максимальный тор группы $\mathrm{GL}(L_n)$, содержащий тор $S_1 \cdots S_t$.

Теорема 4.4.2. *Всякий стабильно рациональный тор с циклическим полем разложения является рациональным над основным полем.*

4.5. Контрпримеры к гипотезе Зарисского. В 1984 году в совместной работе Бовиля, Кольо-Телена, Сансюка и сэра Свиннертон-Дайера [40] были построены не рациональные, но стабильно рациональные многообразия. Над незамкнутым полем такие примеры встречаются уже среди поверхностей, для замкнутых в размерности $n > 2$. Этим был дан отрицательный ответ на один из вопросов О.Зарисского (см. [69]). Мир оказался устроенным сложнее, чем ожидалось. Авторы рассматривают поверхность Шатле $y^2 - ax^2 = P(x)$, где $P(x)$ — неприводимый многочлен над k третьей степени, $a \in k$, a не является квадратом в k и a есть дискриминант многочлена $P(x)$. Пусть α — корень $P(x)$ в $\bar{k}$, $F = k(\alpha)$, $M = k(\sqrt{a})$, $L = k(\alpha, \sqrt{a})$ — расширение Галуа с симметрической группой G_3. Пусть X — гладкая проективная модель уравнения Шатле над полем k. Поскольку многообразие X_F рационально над F, а X_M — рационально над M, то $\mathrm{Pic}\,\bar{X} = \mathrm{Pic}\,X_L$ и $H^1(L/M, \mathrm{Pic}\,X_L) = H^1(L/F, \mathrm{Pic}\,X_L) = 0$.

Таким образом, G_3-модуль $\operatorname{Pic} X_L$ является вялым и поскольку группа G_3 метациклична, то $\operatorname{Pic} X_L$ лежит в $D(G_3)$. Но группа $D(G_3)/S(G_3)$ тривиальна по теореме Эндо — Мията [50], тогда изоморфизм

$$\operatorname{Pic} X_L \oplus \hat{S}_1 \cong \hat{S}_2, \tag{4.5.1}$$

где S_1 и S_2 — пермутационные модули. Итак, поверхность X может претендовать на роль стабильно рационального многообразия. Проективную модель X можно выбрать в виде расслоения на коники $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ с четырьмя вырожденными слоями (корни $P(x)$ и ∞), в слое над ∞ есть k-рациональная точка. По теореме Исковских [19] поверхность X не является k-рациональной. Пусть $p : Y \to X$ — универсальный торсор с группой N, $\hat{N} = \operatorname{Pic} \bar{X}$. Из соотношения (4.5.1) следует существование k-рационального сечения проекции p. Имеем бирациональный k-изоморфизм $Y \cong X \times_k N$. На Y есть k-точка, поэтому многообразие Y является k-рациональным. Поскольку многообразие N стабильно рационально, что следует из (4.5.1), то X также стабильно рационально. Искомый пример над незамкнутым полем построен. Несложные вычисления показывают, что $\dim N = 6$, $\dim S_1 = 3$ для данной модели X. Имеем $X \times_k \mathbb{A}^9 \cong \mathbb{A}_k^{11}$. Более тонкие расчеты в статье [40] показывают, что $X \times_k \mathbb{A}^3 \cong \mathbb{A}_k^5$.

Если поле k замкнуто, то все стабильно рациональные поверхности являются рациональными. Для построения аналогичного примера над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ рассмотрим поле $k = \mathbb{C}(t)$. Над полем k рассмотрим поверхность

$$y^2 - a(t)z^2 = P(x,t), \tag{4.5.2}$$

где $a(t)$ — многочлен без кратных корней, $P(x,t)$ — многочлен от двух переменных, неприводимый над k как многочлен от x и имеет третью степень по x, $a(t)$ — дискриминант x-многочлена P. Обозначим через X гладкую проективную модель трехмерного многообразия над $\mathbb{C}$, заданного уравнением (4.5.2). Многообразие X стабильно рационально над $\mathbb{C}$, поскольку стабильно рациональна поверхность (4.5.2) над $k = \mathbb{C}(t)$. В работе [40] на подходящей моделе X вводится структура расслоения на коники и вычисляется промежуточный якобиан. В результате, если род кривой $P(x,t) = 0$ больше двух и ее проекция на ось t не имеет точек с индексом ветвления 3, то промежуточный якобиан многообразия X не изоморфен произведению якобианов кривых. Приведем простейшие примеры: поверхность $y^2 + 3z^2 = x^3 - 2$ стабильно рациональна над $\mathbb{Q}$, но не является $\mathbb{Q}$-рациональной; трехмерное многообразие

$$y^2 + (t^4 + 1)(t^6 + t^2 + 1)z^2 = 2x^3 + 3t^2x^2 + t^4 + 1$$

стабильно рационально над $\mathbb{C}$, но не является рациональным.

Эти примеры дают ответ на вопрос, поставленный Демазюром в статье [47] о максимальных торах в группе Кремоны $\mathrm{Cr}_k(n)$ от n переменных. Существует максимальный тор размерности 3 в группе $\mathrm{Cr}_k(6)$, если поле k — алгебраически замкнуто. Если поле k обладает расширением Галуа с группой G_3, то трехмерный разложимый максимальный тор имеется уже в группе $\mathrm{Cr}_k(5)$.

§ 5. Инварианты конечных групп преобразований

Результаты, изложенные в предыдущих параграфах, позволили сдвинуть с места старую проблему рациональности полей инвариантов конечных групп преобразований, действующих линейно на конечномерном пространстве. Первые примеры нерациональных полей инвариантов над незамкнутым полем были получены автором [6], [8] и Суоном [72], над замкнутым полем — Солтманом [71]. Их изложение представляет собой прекрасную иллюстрацию, показывающую достоинства современных алгебраических методов в бирациональной геометрии многообразий. В этом параграфе, если не будет оговорено, поле k имеет характеристику нуль.

5.1. Поля инвариантов и их модели. Пусть G — конечная группа, линейно и точно действующая на k-пространстве V. Она действует тогда на кольце полиномов $k[V]$ и поле рациональных функций $k(V)$. Ясно, что поле инвариантов $k(V)^G$ является унирациональным, вопрос о рациональности поля $k(V)^G$ долгое время оставался открытым. Наиболее известной является задача Э.Нётер. Пусть $k[V] = k[x_1, .., x_n]$ и группа G действует тривиально на k и перестановками на переменных x_i. Когда поле инвариантов $k(V)^G$ рационально над k ? Это так, если G — полная симметрическая группа S_n, то поле $k(V)^G$ и даже кольцо инвариантов $k[V]^G$ порождено независимыми основными симметрическими полиномами. Но для произвольных подгрупп симметрической группы ответ оказался не всегда положительным.

Переведем задачу на геометрический язык. Поле $k(V)^G$ есть поле частных кольца инвариантов $k[V]^G$. Пусть $Y = \operatorname{Spec} k[V]^G$ — аффинное многообразие над полем k. Ясно, что $k(V)^G = k(Y)$, Y назовем аффинной моделью поля инвариантов и обозначим через $Y = V/G$; по Мамфорду это категорный фактор. Разрешая особенности многообразия Y, перейдем к гладкой проективной k-модели X поля $k(V)^G$. Тогда имеем бирациональные инварианты $\operatorname{Br} X$, $p(X)$, которые в ряде случаев удается вычислить и иногда они оказываются нетривиальными. Рассмотрим ряд важных редукций, которые позволяют проводить индуктивные доказательства. Пусть $k[G]$ — групповое кольцо, являющееся линейным пространством над k размерности $[G]$.

I. Предположим, что $V = V_0 \oplus V_1$ — разложение пространства V в прямую сумму $k[G]$-модулей и действие группы G на V_0 является точным. Тогда

$$k(V)^G = k(V_0)^G(V_1),$$

т.е. поля $k(V)^G$ и $k(V_0)^G$ стабильно эквивалентны. Действительно, пусть $L = k(V_0)$, $F = L^G$. Тогда G есть группа Галуа расширения L/F и $k(V)^G = L(V_1)^G$. Поскольку группа G действует на V_1 линейно, то $L(V_1)^G$ — поле функций на форме аффинного F-пространства $F \otimes_k V_1$, которая тривиальна. На языке категорных факторов это можно записать в виде

$$V/G \cong V_0/G \times_k V_1. \tag{5.1.1}$$

II. Рассмотрим групповое кольцо $\Lambda = k[G]$ как модуль регулярного представления группы G. Модуль $k[G]$ разлагается в прямую сумму $k \oplus I(G)$, где $I(G)$ — идеал кольца Λ, являющийся точным G-модулем. По формуле (5.1.1)

$$k[G]/G \cong I[G]/G \times_k \mathbb{A}^1. \tag{5.1.2}$$

Пусть $G = G_1 \times G_2$ — прямое произведение, тогда

$$k[G] \cong k[G_1] \otimes_k k[G_2] \cong k \oplus I(G_1) \oplus I(G_2) \oplus (I(G_1) \otimes_k I(G_2)).$$

Модуль $I(G_1) \oplus I(G_2)$ — точный подмодуль модуля $k[G]$, тогда по формуле (5.1.1)

$$k[G]/G \cong I[G_1]/G_1 \times_k I(G_2)/G_2 \times_k \mathbb{A}^{d+1},$$

где $d = n_1n_2 - n_1 - n_2$, $n_1 = |G_1|$, $n_2 = |G_2|$. Учитывая (5.1.2), получаем бирациональную эквивалентность

$$k[G]/G \cong k[G_1]/G_1 \times_k k[G_2]/G_2 \times_k \mathbb{A}^d. \qquad (5.1.3)$$

5.2. Инварианты конечных абелевых групп. Пусть G — конечная абелева группа, линейно и точно действующая на k-пространстве V. Разложим $k[G]$-модуль V на неприводимые части

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_t \qquad (5.2.1)$$

и пусть φ_i — ограничение действия группы G на подпространстве V_i. Пусть

$$\varphi_i(G) = G_i \subset \mathrm{GL}(V_i), \ \dim V_i = n_i, \ \sum_{i=1}^{t} n_i = n = \dim V.$$

Обозначим через A_i обертывающую алгебру группы G_i в алгебре всех квадратных матриц $M(n_i, k)$. Так как представление φ_i неприводимо, то A_i — поле и $(A_i : k) = n_i$. Прямая сумма $A = A_1 \oplus ... \oplus A_t$ всех этих полей есть максимальная коммутативная подалгебра алгебры $M(n,k) = \mathrm{End}(V)$, а ее группа обратимых элементов A^* есть группа рациональных k-точек максимального алгебраического тора $S \subset \mathrm{GL}_k(n)$, определенного над k

$$S(k) = A_1^* \times ... \times A_t^*.$$

Сам тор S записывается с помощью символов Вейля

$$S = R_{A/k}(G_m) = \prod\nolimits_{i=1}^{t} R_{A_i/k}(G_m), \ \dim S = n. \qquad (5.2.2)$$

Наша конечная группа G есть подгруппа в S, G — постоянная группа: $G(L) = G(k)$ для любого $L \supset k$. Уточним строение полей A_i. Обозначим через e показатель группы G, т.е. наименьшее натуральное число с условием $g^e = 1$ для всех $g \in G$. Пусть ζ_m — первообразный корень из единицы степени m. Так как группа G диагонализируема над круговым расширением $k(\zeta_e)$, то все поля A_i имеют вид $k(\zeta_d)$, $d|e$. Тор S расщепляется над полем $k(\zeta_e)$ и это его минимальное поле разложения.

Теорема 5.2.1. *Пусть G — конечная абелева группа линейных преобразований пространства V размерности n над полем k. Тогда поле инвариантов $k(V)^G$ есть поле рациональных* *функций на алгебраическом торе $T = S/G$, где S — максимальный тор группы $\mathrm{GL}_{n,k}$, определенный над k и содержащий группу G. Один из таких торов однозначно определяется равенством* (5.2.2), *исходя из разложения* (5.2.1).

Следствие 1. *Поля инвариантов $\mathbb{R}(V)^G$ рациональны над $\mathbb{R}$ для любых конечных абелевых групп.*

Это следует из того, что все торы над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ являются произведениями торов, размерности $\leqslant 2$, а такие торы рациональны.

Следствие 2. *Если поле k содержит число ζ_e, где $e =$ $\exp(G)$, то поле $k(V)^G$ рационально над k.*

Действительно, в данном случае тор S разложим над k, а образ разложимого тора снова разложим, следовательно, рационален.

Всякая конечная абелева группа G разлагается в прямое произведение циклических групп

$$G = G_1 \times \ldots \times G_t.$$

Формула (5.1.3) показывает, что имеется бирациональный k-изоморфизм

$$k[G]/G \cong k[G_1]/G_1 \times \ldots \times k[G_t]/G_t \times \mathbb{A}^d, \tag{5.2.3}$$

$$d = n_1 \cdot \cdot n_t - n_1 \ldots - n_t, \ n_t = |G_i|.$$

Изучим бирациональные свойства многообразия $k[G]/G$ для циклической группы G порядка n. Поскольку поле функций на $k[G]/G$ однозначно определяется полем k и числом n, то обозначим его через (k, G) или просто (k, n). Разложение модуля $k[G]$ на неприводимые части происходит параллельно разложению многочлена $x^n - 1$ на неприводимые множители над полем k. Особенно просто это происходит для $k = \mathbb{Q}$ или $\mathbb{C}$. Но во всех случаях поле $L_n = k(\zeta_n)$, рассматриваемое как $k[G]$-модуль, является точным неприводимым подмодулем модуля $k[G]$. Пусть T_n — тор, определяемый модулем L_n из факторизации

$$1 \to G \to R_{L_n/k}(G_m) \to T_n \to 1. \tag{5.2.4}$$

Из формулы (5.1.1) получаем редукцию

$$k[G]/G \cong T_n \times_k \mathbb{A}^r, \ r = n - [L_n : k]. \tag{5.2.5}$$

Выясним строение П-модуля рациональных характеров $\hat{T}_n$ тора T_n, где П есть группа Галуа расширения L_n/k. Последовательность, дуальная (5.2.4), имеет вид

$$0 \to \hat{T}_n \to \mathbb{Z}[\Pi] \xrightarrow{\varphi} \mu_n \to 1, \tag{5.2.6}$$

где $\varphi(1) = \zeta_n$, $\varphi(\sigma) = \sigma\varphi(1) = \zeta_n^a$, $\sigma \in \Pi$, $a = a(\sigma)$ есть элемент в мультипликативной группе $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Модуль $\hat{T}_n = \operatorname{Ker}\varphi$ является идеалом кольца $\mathbb{Z}[\Pi]$ индекса n, и поскольку он содержит n и $\sigma - a(\sigma)$ для всех $\sigma \in \Pi$, то

$$\hat{T}_n = (n,\ \sigma_1 - a_1,\ \ldots,\ \sigma_s - a_s),$$

где σ_i — система образующих группы П. Заметим, что в конструкции $\hat{T}_n$ группа G уже не участвует. Необходимым условием рациональности поля (k,n) является равенство $p(\hat{T}_n) = 0$. Рассмотрим возникающие здесь ситуации сначала для примарных чисел: $n = p^\alpha$, p — простое число.

5.3. Поля $(k,\ p^\alpha)$, $p > 2$. В этом случае группа П циклична с образующим элементом σ, пусть m — порядок группы П, $m|p^{\alpha-1}(p-1)$. Идеал $\hat{T}_q$ принимает вид

$$\hat{T}_q = (q,\ \sigma - a),\ q = p^\alpha,$$

где $a^m \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$ и a принадлежит показателю m по модулю q. Покажем, что П-модуль $\hat{T}_q$ является проективным. Можно выбрать a так, чтобы $a^m - 1$ не делилось на $p^{\alpha+1}$, тогда $a^m - 1 = qt$, $(t,\ q) = 1$. Рассмотрим идеал $M = (\sigma - a,\ t)$ кольца $\mathbb{Z}[\Pi]$. Тогда ясно, что $\hat{T}_q + M = \mathbb{Z}[\Pi]$, откуда $\hat{T}_q \cap M = \hat{T}_q M$. Поэтому имеем точную последовательность П-модулей

$$0 \to \hat{T}_q M \to \hat{T}_q \oplus M \xrightarrow{u} \mathbb{Z}[\Pi] \to 0, \tag{5.3.1}$$

где $u(f,g) = f - g$. Далее, нетрудный подсчет показывает, что $\hat{T}_q M$ — главный идеал с образующим элементом $\sigma - a$ и, очевидно, он свободен. Последовательность (5.3.1) расщепляется, что и доказывает проективность П-модуля $\hat{T}_q M$. Принимая во внимание соотношение (5.2.6), видим, что П-модуль μ_q когомологически тривиален для $q = p^\alpha$, $p > 2$. Теорема 4.3.3 и изоморфизм (5.2.5) показывают, что рациональность многообразия $(k,\ p)$ равносильна условию $p(T_q) = 0$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что для каждого $d|m$ идеал $(\hat{T}_q)_{\Phi_d} = (p^\alpha,\ \zeta_d - a)$

кольца $\mathbb{Z}[\zeta_d]$ является главным. Бирациональные характеристики торов с циклическим полем разложения и арифметика круговых полей дают следующие соотношения. Выделим отдельно случай $k = \mathbb{Q}$.

Теорема 5.3.1. *Пусть $p > 2$ — простое число. Следующие условия эквивалентны:*

1) *поле $(\mathbb{Q},\ p^\alpha)$ рационально над $\mathbb{Q}$;*
2) *поле $(\mathbb{Q},\ p^\alpha)$ стабильно рационально над $\mathbb{Q}$;*
3) *идеал $(\zeta_{\varphi(q)} - a,\ p)$, где a — первообразный корень по модулю q, является главным в кольце $\mathbb{Z}[\zeta_{\varphi(q)}]$;*
4) *существует элемент $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta_{\varphi(q)}]$ такой, что $|N_{F/Q}(\alpha)| = p$.*

Известно, что для $m < 23$ поле $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ одноклассно, тогда теорема 5.3.1 показывает, что поля $(\mathbb{Q}, n)$ рациональны над $\mathbb{Q}$ при $n = 5,7,11,13,17,19,23,25,31,43,49$. Конечно, необходимо приписать еще 2 и 4.

Пример 5.3.1. Поле $(k, 3^n)$ рационально над k при любом $n \geqslant 1$. Действительно, простое число p есть норма главного идеала в круговом поле $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ для любого $n \geqslant 1$. Так как $\varphi(3^n) = 2 \cdot 3^{n-1}$, то $\mathbb{Q}(\zeta_{\varphi(3^n)}) = \mathbb{Q}(\zeta_{3^{n-1}})$. Поэтому выполняется условие 4) теоремы 5.3.1 для $p = 3$, следовательно, поле $(\mathbb{Q}, 3^n)$ рационально над $\mathbb{Q}$, а тогда и подавно $(k, 3^n)$ рационально над k.

Последнее утверждение теоремы 5.3.1 показывает, что из рациональности поля $(\mathbb{Q}, p^n)$ следует рациональность полей $(\mathbb{Q}, p^m)$ для $m < n$. Однако все поля $(\mathbb{Q}, p^2)$ не рациональны над $\mathbb{Q}$, за исключением случаев $p = 2,3,5,7$ (см. [64]).

Пример 5.3.2. Пусть $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ — мнимое квадратичное поле, $d = -\,4 \cdot 23$ — его дискриминант, элементы 1, $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-23})$ составляют целый базис расширения $F/\mathbb{Q}$; норма элемента, записанного в этом базисе, является положительно определенной квадратичной формой $N(x + y\omega) = x^2 - xy + 6y^2$. Рассмотрим поле $(\mathbb{Q}, 47)$. Поскольку $23 \equiv 3 (\mod 4)$, то поле F содержится в круговом поле $\mathbb{Q}(\zeta_{23}) = \mathbb{Q}(\zeta_{46}) = L$. Число 47 не является нормой главного идеала в $\mathbb{Q}(\zeta_{46})$, иначе уравнение $47 = x^2 - xy + 6y^2$ имело бы решение в целых числах.

Среди полей $(\mathbb{Q}, p)$, где p — простое нечетное, поле $(\mathbb{Q}, 47)$ — первое, не являющееся рациональным над $\mathbb{Q}$. Ленстра [63] показал, что множество P_k простых чисел p, для которых поле

(k,p) является рациональным над k, имеет нулевую плотность Дирихле во множестве всех простых чисел. Здесь k — поле конечного типа над простым полем. Возможно, что множество P_k конечно, во всяком случае, все найденные простые из $P_{\mathbb{Q}}$ не превосходят 71.

5.4. Поля $(k,\ 2^{\alpha})$. Известно, что группа $(\mathbb{Z}/2^{\alpha}\mathbb{Z})^*$ является циклической для $\alpha = 1,2$ и имеет две образующие: $-1, 5$ для $\alpha \geqslant 3$. Пусть $q = 2^{\alpha}$, $L = k(\zeta_q)$, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$. Как и выше, имеем бирациональное разложение $k[G]/G \cong T_q \times \mathbb{A}_k^r$.

Пример 5.4.1. Поле инвариантов $(\mathbb{Q},8)$ не является стабильно рациональным над $\mathbb{Q}$. Это первое не рациональное поле инвариантов в последовательности $(\mathbb{Q},n)$.

Более подробно теория инвариантов абелевых групп изложена в работах Ленстра [63], Эндо — Мията [49] и автора [9]. Отметим только следующие важные факты.

Теорема 5.4.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *поле $(k,\ G)$ рационально над полем k;*
2) *поле $(k,\ G)$ стабильно рационально над k;*
3) $p(k[G]/G) = 0$.

Пример 5.4.2. Поле $(\mathbb{Q},\ n)$ рационально над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) число n не делится на 8;
2) для всякого $q|n$, $q = p^m$, $p > 2$, кольцо $\mathbb{Z}[\zeta_{\varphi(q)}]$ содержит главный идеал индекса p.

5.5. Инварианты конечных групп над замкнутым полем. В данном случае предыдущая теория инвариантов конечных абелевых групп, действующих на линейном пространстве, становится тривиальной: поле $k(V)^G$ чисто трансцендентно над k для любой конечной абелевой группы $G \subset \mathrm{GL}(V)$ и замкнутого поля k. Ограничимся алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль. Сначала дадим несколько соображений общего характера. Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие над полем k, $F = k(X)$ — поле рациональных функций на X. Если X — гладкое проективное, то группа $\mathrm{Br}\, X = H^2_{\mathrm{et}}(X, G_m)$ является бирациональным инвариантом и она допускает чисто алгебраическое описание в качестве подгруппы $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(F)$ группы $\mathrm{Br}\, F$ (см. п.1.11). Имеем

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(F) = \cap_v \mathrm{Br}\, A_v = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}\, F \to \oplus_v H^1(A_v/m_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})],$$

где A_v — кольцо дискретного нормирования v ранга 1 поля F, m_v — максимальный идеал в A_v. В работах Ф.А.Богомолова [2] и Солтмана [71] разработаны методы, позволившие в ряде случаев вычислить группы $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(F)$, что дало примеры нерациональных полей инвариантов линейных групп над полем k. В обзоре [46] Кольо-Телен и Сансюк изложили свое видение проблемы, кстати, весьма четкое и прозрачное. Проследим за ходом рассуждений первопроходцев: если $L = k(Y)$ и F подполе в L, то естественное отображение $\mathrm{Br}\, F \to \mathrm{Br}\, L$ индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(F) \to \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(L)$, пусть G — конечная группа k-автоморфизмов поля L, H — ее подгруппа, тогда имеем вложение $L^G \subset L^H$. Следующее утверждение является ключевым.

Теорема. *Пусть $L = k(Y)$ — функциональное поле, тогда*

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(L^G) = \{\alpha \in \mathrm{Br}(L^G) \mid \alpha_B \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(L^B)\ \forall B \in BI\}, \tag{5.5.1}$$

где BI — множество всех абелевых бициклических подгрупп группы G, т.е. абелевых подгрупп, имеющих не более чем две образующие, α_B — образ элемента α при отображении $\mathrm{Br}\, L^G \to \mathrm{Br}\, L^B$.

5.6. Инварианты конечных линейных групп. Пусть $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — конечная группа линейных преобразований векторного пространства V конечной размерности. В этом случае поле L^A чисто трансцендентно над k для любой абелевой подгруппы $A \subset G$, $L = k(V)$. Формула (5.5.1) принимает вид

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)^G) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(k(V)^G) \to \prod_B \mathrm{Br}(k(V)^B)], \tag{5.6.1}$$

где B пробегает BI. Преобразуем ее к виду, удобному для вычислений. Пусть H — произвольная подгруппа в G, тогда имеем цепочку вложений $L^H \subset L \subset \bar{L}$, причем расширение L/L^H нормально. Используя когомологическое представление группы Брауэра и формулы Хохшильда — Серра, получаем удобное описание соотношения (5.6.1)

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)^G) = \mathrm{Ker}[H^3(G, \mathbb{Z}) \to \prod_B H^3(B, \mathbb{Z})]. \tag{5.6.2}$$

Сверх того, $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(V)^G) = H^3(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$, где X — гладкая проективная модель поля $\mathbb{C}(V)^G$. Как и следовало ожидать, формула (5.6.2) показывает, что инвариант $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)^G)$ зависит только от группы G, но не от выбора точного представления V этой группы. Для краткости обозначим группу $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)^G)$ через B_G. Ф.А.Богомолов предложил следующую элегантную конструкцию, позволяющую строить примеры нерациональных полей инвариантов. Он рассматривает центральное расширение

$$1 \to C \to G \xrightarrow{\varphi} A \to 1$$

конечной абелевой группы A, причем C — коммутант $[G,G]$ группы G. Заметим, что $H_2(A,\mathbb{Z}) = \Lambda^2(A)$, где $\Lambda^2(A)$ — вторая внешняя степень группы A. Имеем эпиморфизм $\lambda : \Lambda^2(A) \to C$, определяемый по правилу: $\lambda(a_1 \wedge a_2) = [g_1, g_2]$, где g_i — элементы из группы G такие, что $\varphi(g_i) = a_i$. Пусть B — абелева бициклическая подгруппа группы G, g_1, g_2 — образующие группы B, S_B — подгруппа в группе $S = \mathrm{Ker}(\lambda)$, порожденная элементом $a_1 \wedge a_2$; $a_i = \varphi(g_i)$. Обозначим символом S_b подгруппу в S, порожденную всеми подгруппами S_B, $B \in BI$. Элементы группы B_G аннулируют подгруппу S_b, сверх того,

$$B_G = \mathrm{Ker}[S^* \to S_b^*] = (S/S_b)^*.$$

Группы G с условием $B_G \neq 0$ можно строить следующим образом. Рассмотрим конечную абелеву группу A и подгруппу S в $\Lambda^2(A)$ такие, чтобы $S_b \neq S$. Пусть $\lambda : \Lambda^2(A) \to \Lambda^2(A)/S$ — естественная проекция, которая определяет центральное расширение

$$1 \to C \to G \to A \to 1$$

с ядром $C = \Lambda^2(A)/S = [G,G]$ и группой $B_G = S/S_b$.

Пример. Наиболее естественно изучить эту ситуацию сначала для векторных групп A над конечным полем $\mathbb{F}_p$. Простейший нетривиальный пример доставляет группа $A = \mathbb{F}_p^4$. Имеем $\Lambda^2(A) \cong \mathbb{F}_p^6$. Разложимые 2-векторы в $\Lambda^2(A)$ образуют конус V над четырехмерной квадрикой Плюккера Q в $P(\Lambda^2(A)) = \mathbb{P}^5(\mathbb{F}_p)$, задаваемой уравнением

$$q = z^{12}z^{34} - z^{13}z^{24} + z^{14}z^{23} = 0, \ u = \\ = \sum_{i<j} z^{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2(A), \ 1 \leqslant i,j \leqslant 4.$$

Необходимо выбрать собственное линейное подпространство S в $\Lambda^2(A)$ таким образом, чтобы $S \neq S_b$, где S_b порождено пересечением $S \cap V$. Условие $S \neq S_b$ эквивалентно тому, что проективизация $P(S)$ не порождается своим пересечением $P(S) \cap Q$. Решая эту алгебро-геометрическую задачу над конечным полем, Ф.А.Богомолов перечисляет все возможные случаи. Их пять:

1) $P(S)$ — точка, не лежащая на Q. В этом случае $\dim S = 1$, $S_b = 0$, $B_G = \mathbb{F}_p$, $|G| = p^9$;

2) $P(S)$ — прямая, касательная к Q в точке пересечения $P(S) \cap Q$, $\dim S = 2$, $\dim S_b = 1$, $B_G = \mathbb{F}_p$, $|G| = p^8$;

3) $P(S)$ — плоскость, пересекающая Q по двойной прямой, $B_G = \mathbb{F}_p$, $|G| = p^7$;

4) $P(S)$ — прямая, не пересекающая Q, $B_G = \mathbb{F}_p^2$, $|G| = p^8$;

5) $P(S)$ — плоскость, пересекающая Q в одной точке, в которой она касается Q, $B_G = \mathbb{F}_p^2$, $|G| = p^7$.

Ф.А.Богомолов показывает также, что минимальный возможный порядок p-группы G с условием $B_G \neq 0$ равен p^6.

Более подробно рассмотрим классическую задачу о приведении пары матриц к простейшему виду, к решению которой весьма успешно была привлечена техника алгебраических торов.

Пусть $M(n) = M(n, \mathbb{C})$ — кольцо квадратных матриц порядка n с комплексными коэффициентами, $V_{m,n} = M(n) \oplus ... \oplus M(n)$ — прямая сумма m копий пространств $M(n)$, на которой покомпонентно действует группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ сопряжениями

$$(X_1, ..., X_m) \to (gX_1g^{-1}, ..., gX_mg^{-1}),$$

$X_i \in M(n)$, $g \in \mathrm{GL}_n$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$. Обозначим через $V_{m,n}/\,\mathrm{GL}_n$ категорный фактор относительно этого действия, а через $K_{m,n}$ — поле рациональных функций на многообразии $V_{m,n}/\,\mathrm{GL}_n$, т.е. поле инвариантов $\mathbb{C}(V_{m,n})^{\mathrm{GL}_n}$. Ядром эффективности действия группы GL_n служит подгруппа G_m, поэтому действие группы $\mathrm{PGL}_n = \mathrm{GL}_n/G_m$ на $V_{m,n}$ является точным. Сверх того, действие группы PGL_n на $V_{2,n}$ почти свободно, поэтому многообразие $V_{m,n}/\,\mathrm{GL}_n$ бирационально эквивалентно прямому произведению $V_{2,n}/\,\mathrm{GL}_n \times M(n)^{m-2}$. Таким образом, поле $K_{m,n}$ есть чисто трансцендентное расширение поля $K_{2,n}$. Если поле $K_{m,n}$ чисто трансцендентно, то это позволяет найти нормальную форму для набора m матриц порядка n общего положения относительно одновременного сопряжения. Вопрос о рациональности поля $K_{2,n}$ поставлен давно. Ответ на него интересует математиков по разному поводу. Во-первых, это вопрос о подобии пары матриц. Поле $K_{2,n}$ порождено всеми матричными инвариантами вида $\operatorname{tr}(X^aY^b)$, a, $b \geqslant 0$, где X и Y — матрицы порядка n общего вида. Еще Сильвестр показал, что $K_{2,2} = \mathbb{C}(\operatorname{tr} X, \operatorname{tr} Y, \operatorname{tr}(X^2), \operatorname{tr}(Y^2), \operatorname{tr}(XY))$. Рациональность полей $K_{2,3}$ и $K_{2,4}$ (а, следовательно, $K_{m,3}$ и $K_{m,4}$) доказал Форманек [55], [56]. Других рациональных полей вида $K_{2,n}$ пока не найдено, хотя, как увидим дальше, стабильная рациональность полей $K_{2,n}$ установлена сейчас для всех n, делящих 420.

Во-вторых, в работе Халека [60] показано, что поле $K_{2,n}$ изоморфно полю рациональных функций пространства модулей стабильных векторных расслоений $\mathbb{P}^2$ ранга n с классами Чженя $c_1 = 0$, $c_2 = n$. В-третьих, в работе Ван дер Берга [73] установлено, что поле $K_{2,n}$ есть поле функций общего якобиевого многообразия гладких плоских кривых степени n.

Развивая идею Прочези [65], Форманек показал, что поле $K_{2,n}$ можно реализовать как поле рациональных функций на явно описываемом алгебраическом торе. Для этого берется чисто трансцендентное расширение $L_n = \mathbb{C}(x_{ij}, y_{ij})$ поля $\mathbb{C}$, порождаемое независимыми элементами x_{ij}, y_{ij} матриц X, Y, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. В матричной алгебре $M(n, L_n)$ рассматривается подалгебра, порожденная над $\mathbb{C}$ общими матрицами X и Y. Эта подалгебра является некоммутативной областью целостности, пусть D_n — ее кольцо частных; известно, что D_n — алгебра с делением размерности n^2 над своим центром Z_n. В работе Форманека [55] показано, что Z_n в точности совпадает с $K_{2,n}$. Далее, поле Z_n допускает следующее описание. Пусть S_n — симметрическая группа, действующая перестановками на базисе $e_1, ..., e_n$, $U_n = \mathbb{Z}e_1 + ... + \mathbb{Z}e_n$ — соответствующий пермутационный S_n-модуль. Тогда имеем точную последовательность S_n-модулей

$$0 \to V_n \to U_n \otimes U_n \xrightarrow{\varphi} U_n \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0, \tag{5.6.3}$$

где $\varepsilon(u_i) = 1$, $\varphi(u_i \otimes u_j) = u_i - u_j$. С подобными последовательностями встречались в п.3.6. Пусть $\mathbb{C}[M]$ — групповое кольцо свободной абелевой группы M, $\mathbb{C}(M)$ — его поле частных. Поле $K_{2,n}$ изоморфно полю инвариантов $\mathbb{C}(U_n \oplus V_n)^{S_n}$. Заметим, что в V_n есть подмодуль $\mathbb{C}u_1 \otimes u_1 + ... + \mathbb{C}u_n \otimes u_n$, изоморфный U_n, причем $V_n \cong U_n \oplus W_n$. Таким образом,

$$K_{2,n} = \mathbb{C}(U_n \oplus U_n \oplus W_n)^{S_n},$$
$$W_n = \operatorname{Ker}\Big[\bigoplus_{i\neq j} \mathbb{C}u_i \otimes u_j \to U_n\Big].$$

Пусть $F_n = \mathbb{C}(U_n)$, $K_{2,n} = F_n(U_n \oplus W_n)^{S_n}$, причем S_n действует точно автоморфизмами на поле F_n. Мы видим, что $K_{2,n}$ есть поле рациональных функций на P_n-торе T_n, где $P_n = F_n^{S_n}$, а модуль характеров $\hat{T}_n$ изоморфен модулю $U_n \oplus W_n$. Более того, $T_n \cong R_{A_n/P_n}(G_m) \times_{P_n} T_{n,n}$, где $T_{n,n}$ — P_n-тор с модулем характеров W_n, $A_n = F_n^{S_{n-1}}$. Поле P_n — поле симметрических функций от переменных $x_1, .., x_n$, $x_i = e^{u_i}$. Следовательно, P_n является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{C}$ размерности n. Таким образом, рациональность поля $K_{2,n}$ следует из рациональности тора $T_{n,n}$ над P_n. Если $n = 2$, то $\dim T_{2,2} = 1$ и, следовательно, $K_{2,2}$ — чисто трансцендентно над $\mathbb{C}$. Точная последовательность (5.6.3) позволяет вычислить бирациональный инвариант $H^1(S_{n,p}(T_{n,n}))$. Он оказался нулевым. Из этого факта, как показали Колье-Телен и Сансюк [45], следует $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K_{2,n}) = 0$. Сейчас мы получаем этот результат из теоремы Богомолова. Если $n = 3$, то можно воспользоваться теоремой Кунявского [27], который показал, что все торы с группой разложения S_3 являются рациональными над полем определения. Итак, поле $K_{2,3}$ чисто трансцендентно над $\mathbb{C}$. Однако нетрудно проверить, что тор $T_{4,4}$ не рационален над P_4, тем не менее поле $K_{2,4}$ чисто трансцендентно над $\mathbb{C}$. Это удалось доказать следующим приемом. Поле F_n — поле разложения P_n-тора $T_{n,n}$. Предположим, что нам удалось найти в категории P_n-торов, разложимых над F_n, тор H_n, стабильно эквивалентный тору $T_{n,n}$, со свойствами:

1) S_n-модуль характеров $\hat{H}_n$ является точным модулем;

2) поле инвариантов $\mathbb{C}(\hat{H}_n)^{S_n}$ является стабильно рациональным над $\mathbb{C}$.

Тогда поле $K_{2,n} = \mathbb{C}(U_n \oplus U_n \oplus W_n)^{S_n}$ стабильно эквивалентно полю

$$\mathbb{C}(\hat{H}_n)(U_n \oplus U_n)^{S_n} = k(R_{B/k}(G_m) \times R_{B/k}(G_m)) = k(\mathbb{A}^{2n}),$$
$$k = L^{S_n},\ L = \mathbb{C}(\hat{H}_n),\ B = L^{S_{n-1}}.$$

Поскольку поле k стабильно рационально по условию, то при таком подборе тора H_n поле $K_{2,n}$ является стабильно рациональным. Рассмотрим часть последовательности (5.6.3)

$$0 \to I_n \to U_n \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

Группу I_1 можно снабдить строением S_n-модуля, полагая $\sigma e = \mathrm{sgn}(\sigma)e$. Имеем точную последовательность S_n-модулей

$$0 \to I_n \otimes I_n \to U_n \otimes I_1 \to I_1 \to 0.$$

Форманек показывает, что в качестве $\hat{H}_4$ можно взять модуль $(I_4 \otimes I_1)^*$, и доказывает рациональность поля $K_{2,4}$. Этот путь доказательства обстоятельно исследован в недавней работе Бессенрод и Ле Брюна [41]. Они показывают, что для S_n-модуля I_n^* поле инвариантов $\mathbb{C}(I_n^*)^{S_n}$ рационально над $\mathbb{C}$ и $p(I_n^*) = p(W_n)$ для $n = 5, 7$. Следовательно, поля $K_{2,5}$ и $K_{2,7}$ стабильно рациональны над $\mathbb{C}$. В работе показано также, что для простых чисел $n > 7$ $p(I_n^*) \neq p(W_n)$, тогда необходимо искать другие объекты. В работе Шофильда [68] доказана следующая редукция: если поля $K_{2,a}$ и $K_{2,b}$ стабильно рациональны и $(a, b) = 1$, то поле $K_{2,ab}$ также стабильно рационально. Учитывая этот факт и результаты Форманека, Бессенрод и Ле Брюн доказывают стабильную рациональность полей $K_{2,n}$ для всех n, делящих 420. Заметим также, что в работе Кольо-Телена и Сансюка [45] доказано, что тор $T_{p,p}$ является прямым сомножителем рационального многообразия над полем P_p, p простое.

§ 6. Инвариантные проективные модели Демазюра

Как мы видели, вопросы бирациональной классификации многообразий линейных алгебраических групп приводят к необходимости рассматривать гладкие проективные многообразия, содержащие данную группу в качестве открытого подмножества. Существование таких проективных моделей в характеристике нуль следует из теоремы Хиронаки о разрешении особенностей. Во многих случаях удается получить ценную информацию из самого факта существования такой гладкой модели, но более деликатные вопросы требуют если не явной конструкции модели, то хотя бы знания модуля Пикара ее. Для алгебраических торов имеется достаточно простая, можно сказать каноническая, конструкция полных моделей, предложенная Демазюром [47]. Несколько позже появилось обстоятельное исследование Кемпфа и др. [62], обобщающее результаты Демазюра. Поскольку нас интересуют более всего модели, определенные над незамкнутым полем, то основное внимание будет уделено торическим многообразиям с максимальными группами симметрий.

6.1. Конусы и вееры. Пусть T — алгебраический k-тор, $\hat{T}$ — его группа рациональных характеров. Рассмотрим абсолютный случай алгебраически замкнутого поля k. Группа $\hat{T}$ — свободная абелева ранга $n = \dim T$, пусть $\hat{T}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes \hat{T}$ — соответствующее линейное пространство с естественным вложением $\hat{T} \subset \hat{T}_{\mathbb{Q}}$. Конусом σ в $\hat{T}_{\mathbb{Q}}$ назовем полиэдральный конус, порожденный конечной системой элементов $m_1, ..., m_N$ из $\hat{T}$

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i | \lambda_i \geqslant 0 \right\}.$$

Если конус σ не содержит никаких подпространств из $\hat{T}_{\mathbb{Q}}$, кроме (0), то будем говорить, что конус σ имеет вершину. В данной теории есть жесткая необходимость иметь две реализации группы $\hat{T}$: аддитивную и мультипликативную. Мультипликативная запись необходима при построении подколец группового кольца $k[\hat{T}]$, аддитивная структура удобна в геометрических конструкциях. Группу $\hat{T}$ с аддитивной структурой будем часто называть решеткой. Пусть $m_1, ..., m_n$ — базис решетки $\hat{T}$, $x_i = e^{m_i}$ — символы, порождающие мультипликативную группу $\hat{T}$. В этой записи мультипликативная группа $\hat{T}$ состоит из элементов x^m, причем $x^{m+m'} = x^m x^{m'}$. Обозначим через A_σ полугрупповую k-алгебру $k[\sigma \cap \hat{T}]$, которая состоит из многочленов Лорана $\sum a_m x^m$, где $a_m \in k$, $m \in \sigma \cap \hat{T}$ и почти все коэффициэнты a_m равны нулю. Заметим, что полугруппа $\sigma \cap \hat{T}$ имеет конечное число образующих (см. [18], [62]). Аффинным торическим многообразием называется схема $X_\sigma = \operatorname{Spec} A_\sigma$. Диагональное вложение $A_\sigma \to A_\sigma \otimes_k k[\hat{T}]$ определяет действие тора T на схеме X_σ. Удобно использовать и двойственные объекты. Пусть $\hat{T}^0 = \operatorname{Hom}(\hat{T}, \mathbb{Z})$ — двойственная решетка, а $\sigma^0 = \{r \in \hat{T}^0_{\mathbb{Q}} \mid r(m) \geqslant 0 \ \forall m \in \sigma\}$ — двойственный конус в пространстве $\hat{T}^0_{\mathbb{Q}}$. Схема X_σ гладкая тогда и только тогда, когда двойственный конус σ^0 порождается частью базиса решетки $\hat{T}^0$. Построение торического многообразия осуществляется склеиванием аффинных торических многообразий, порядок склеивания определяется некоторым набором конусов, называемых веером. В дальнейшем удобнее работать с веерами в пространстве $\hat{T}^0_{\mathbb{Q}}$.

Определение. *Веером* в пространстве $\hat{T}^0_{\mathbb{Q}}$ называется конечный набор Σ конусов, удовлетворяющих условиям:

а) все конусы из Σ обладают вершиной;

б) если τ — грань конуса $\sigma \in \Sigma$, то $\tau \in \Sigma$;

в) для σ, $\sigma' \in \Sigma$ пересечение $\sigma \cap \sigma'$ является гранью как в σ, так и в σ'.

Пусть $\sigma \in \Sigma$, σ^0 — двойственный конус в пространстве $\hat{T}_{\mathbb{Q}}$. Символ X_σ теперь означает $\operatorname{Spec} k[\sigma^0 \cap \hat{T}]$. Заметим, что каждое X_σ содержит открытое подмножество, на котором тор T действует регулярно, $\dim X_\sigma = n$. Если τ — грань конуса $\sigma \in \Sigma$, то имеем канонический морфизм $X_\tau \to X_\sigma$, являющийся открытым вложением. Склеивая аффинные куски X_σ относительно открытых вложений

$$X_{\sigma\cap\sigma'} \to X_\sigma, \;\; X_{\sigma\cap\sigma'} \to X_{\sigma'},$$

получаем нормальное алгебраическое многообразие X_Σ, определеное над k с квазирегулярным действием тора T на X_Σ. Веер называется полным, если $\cup\sigma = \hat{T}^0_{\mathbb{Q}}$, $\sigma \in \Sigma$. Это необходимое и достаточное условие полноты многообразия X_Σ. Гладкость многообразия X_Σ означает, что все конусы $\sigma \in \Sigma$ симплициальны и натянуты на части базиса решетки $\hat{T}^0$. Именно такие вееры и рассматривал Демазюр. В размерностях, больших двух, полные торические многообразия могут и не быть проективными. Критерий проективности состоит в том, что веер Σ должен состоять из конусов, порожденных гранями выпуклого многогранника $D \subset \hat{T}^0_{\mathbb{Q}}$, содержащего O своей внутренней точкой. Веер Σ допускает еще одну интерпретацию на языке орбит тора T, действующего на X_Σ. Для открытого аффинного T-инвариантного подмножества $U \subset X_\Sigma$ обозначим через $\hat{T}(U)$ множество характеров, которые можно продолжить до регулярных функций на U, пусть $\sigma(U) = \{r \in \hat{T}^0_{\mathbb{Q}} \mid r(m) \geqslant 0 \ \forall m \in \hat{T}(U)\}$. Тогда $\sigma(U) \in \Sigma$. С другой стороны, каждое такое U содержит единственную замкнутую в U орбиту (орбиту наименьшей размерности). Это устанавливает взаимно однозначное соответствие $\sigma \to O_\sigma$ между конусами из Σ и орбитами O_σ тора T на X_Σ. При этом $\sigma \subset \tau \Leftrightarrow O_\tau \subset O_\sigma$ и $\dim\sigma = \operatorname{codim} O_\sigma$. Например, орбиты коразмерности один взаимно однозначно соответствуют одномерным конусам (лучам) из Σ. Каждый такой луч $\sigma \in \Sigma$ порожден единственным примитивным вектором $r \in \hat{T}^0$, пусть $|\Sigma|$ — совокупность этих примитивных векторов, O_r, $r \in |\Sigma|$, — соответствующая орбита коразмерности один, $D_r = \bar{O}_r$ — ее замыкание в X_Σ. Пусть $X = X_\Sigma$ — гладкое полное торическое многообразие. Вложение $T \subset X$ определяет точную последовательность решеток:

$$0 \to \hat{T} \xrightarrow{\alpha} \hat{S} \to \operatorname{Pic} X_\Sigma \to 0, \tag{6.1.1}$$

где $\hat{S}$ — свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный простыми дивизорами из дополнения $X \setminus T$. Оказывается, дивизоры D_r, $r \in |\Sigma|$, образуют базис группы $\hat{S}$, тогда ранг $\hat{S}$ равен порядку множества $|\Sigma|$. Отображение α определяется по правилу

$$\alpha(m) = \sum_r r(m) D_r, \quad r \in |\Sigma|, \quad m \in \hat{T}.$$

На этом языке критерий проективности полного гладкого торического многообразия X_Σ состоит в следующем. Дивизор $D = \sum n_r D_r$, $r \in |\Sigma|$, обилен тогда и только тогда, когда функция $f_D : \hat{T}^0_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$, линейная на всех конусах $\sigma \in \Sigma$ и принимающая на $r \in |\Sigma|$ значения $f_D(r) = -n_r$, является выпуклой: $f_D(x+y) \geqslant f_D(x) + f_D(y)$, причем равенство достигается лишь в случае, когда x и y лежат в одном конусе $\sigma \in \Sigma$. Для гладких торических многообразий обильность эквивалентна очень обильности. Если X_Σ — полное неособое торическое многообразие, то его антиканонический дивизор имеет вид $-K = \sum D_r$, $r \in |\Sigma|$.

Пример 6.1.1 (торические многообразия Фано). Это гладкие проективные многообразия, у которых антиканонический класс обилен. Приведенное выше условие обильности означает в этом случае для X_Σ, что веер Σ состоит из конусов, порожденных гранями выпуклой оболочки $\operatorname{conv}|\Sigma|$ множества $|\Sigma|$. В этом случае многогранник $P = \operatorname{conv}|\Sigma|$ назовем многогранником Фано. Из гладкости X следует, что вершины каждой грани $\Delta \subset P$ коразмерности 1 образуют базис решетки $\hat{T}^0$. В частности, P — симплициальный многогранник. Оказывается, существует лишь конечное число попарно неизоморфных полных неособых торических многообразий Фано данной размерности n. Это задача на перечисление различных возможных многогранников Фано: в работе В.Е.Воскресенского и А.А.Клячко [16] показано, что веер Фано Σ содержит не более n^2+1 лучей, если $n \geqslant 3$, в работе В.В.Батырева [1] перечислены все торические многообразия Фано в размерности три.

Говорят, что веер Σ' вписан в Σ, если для любого $\sigma' \in \Sigma'$ найдется $\sigma \in \Sigma$ такой, что $\sigma' \subset \sigma$. Имеем естественный морфизм $X'_\Sigma \to X_\Sigma$, являющийся бирациональным. Если Σ' является разбиением веера Σ, то морфизм $X'_\Sigma \to X_\Sigma$ является конечным и сюръективным. Используя критерий гладкости торического многообразия, нетрудно указать алгоритм разрешения особенностей многообразия X_Σ. Это чистая задача комбинаторной геометрии. Сначала путем барицентрического подразделения превращают веер Σ в веер Σ_1, все конусы которого являются симплициальными. Затем, при необходимости, каждый конус веера Σ_1 разбивают на конусы, порожденные элементами базиса решетки $\hat{T}^0$. Полученный веер Σ' является искомым и мы имеем морфизм гладкого многообразия X'_Σ на X_Σ. Наиболее просто это происходит в размерности два. Пусть σ — двумерный конус в веере Σ и Δ — выпуклая оболочка в $\hat{T}^0_{\mathbb{Q}}$ множества $\sigma \cap \hat{T}^0 - \{0\}$. Пусть $m_1, \ldots, m_s$ — элементы из $\hat{T}^0$, лежащие на компактных отрезках границы Δ. Тогда лучи $< m_1 >, \ldots, < m_s >$ дают нужное разбиение конуса σ.

Пример 6.1.2. Пусть T — максимальный тор в группе $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$, его уравнение $xyz = 1$. Рассмотрим проективизацию X многообразия $T : x_1x_2x_3 = x_0^3$. Кубическая поверхность X является торической поверхностью, она имеет три особые точки. На дополнении $X - T$ лежат три прямые, на их пересечении и находятся особые точки. Пусть Σ — веер многообразия X, множество $|\Sigma|$ состоит из трех векторов. Нетрудный расчет показывает, что мы имеем следующую симметрическую картину: $|\Sigma| = \{OA, OB, OC\}$, группа, порожденная векторами OA, OB, имеет индекс 3 в $\hat{T}^0$, поэтому X — фактор $\mathbb{P}^2/W$, где W — группа порядка 3. Каждый двумерный конус, например, $\sigma = < OA, OB >$, разбивается на 3 базисных, в результате получаем гладкий веер Σ', у которого множество $|\Sigma'|$ состоит из 9 векторов $OA, OB, OC, OD_i, 1 \leqslant i \leqslant 6$. Веер Σ' является разбиением и веера Σ_1, у которого множество $|\Sigma_1| = \{OD_i, 1 \leqslant i \leqslant 6\}$. Проективное многообразие X_{Σ_1} является гладким, это поверхность Дель-Пеццо степени 6. Имеем бирациональные морфизмы

$$X_\Sigma \leftarrow X_{\Sigma'} \to X_{\Sigma_1}.$$

В конструкции X_Σ поле k играло весьма вспомогательную роль. Если взять вместо колец $k[\sigma^0 \cap \hat{T}]$ кольца $\mathbb{Z}[\sigma^0 \cap \hat{T}]$, то путем склеивания получим $\mathbb{Z}$-схему $X_{\Sigma,\mathbb{Z}}$, которую в дальнейшем обозначим X_Σ, а всякое торическое k-многообразие X для замкнутого поля k имеет вид $X = X_\Sigma \otimes k$.

6.2. Проективные инвариантные вееры. Пусть T — алгебраический n-мерный тор, определенный над незамкнутым полем k, тор T однозначно определяется представлением группы

$\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ на характерах $\hat{T}$ тора T. Пусть $h : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ — соответствующее целочисленное представление, группа разложения $h(\mathcal{G})$ является конечной подгруппой в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. На группе $G_m^n \otimes k_s$ действуют два представления группы $\mathcal{G}$: геометрическое $g \to h(g) \otimes 1$ и арифметическое: $g \to 1 \otimes g$, $g \in \mathcal{G}$. Они коммутируют друг с другом, поэтому можно взять представление $u(g) = h(g) \otimes g$ группы $\mathcal{G}$ в группу $\mathrm{Aut}_k(G_m^n \otimes k_s)$. Тогда тор T изоморфен фактору $(G_m^n \otimes k_s)/u(\mathcal{G})$. Выберем в решетке $\hat{T}^0$ гладкий проективный веер Σ, инвариантный относительно конечной группы $h(\mathcal{G}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, действующей на Σ по правилу переноса структур. Как показано в работе Брилинского [42], это всегда можно сделать подходящим разбиением, исходя из любого полного веера. Тогда группа $h(\mathcal{G})$ естественно действует автоморфизмами на X_Σ, и мы имеем эквивариантное вложение $G_m^n \subset X_\Sigma$. Фактор $X = (X_\Sigma \otimes k_s)/u(\mathcal{G})$ является k-формой многообразия $X_\Sigma \otimes k$, содержащей тор T в качестве открытого подмножества. Это доказывает существование гладкой проективной модели тора T над произвольным полем. Схему X назовем моделью Демазюра тора T. Она весьма удобна при вычислении $\mathcal{G}$-модуля $\mathrm{Pic}(X \otimes_k k_s)$, поскольку $\mathcal{G}$-модуль $\mathrm{Pic}(X \otimes_k k_s)$ изоморфен $\mathcal{G}$-модулю $\mathrm{Pic}\, X_\Sigma$, на котором группа $\mathcal{G}$ действует геометрически. Последовательность (6.1.1) позволяет вычислить действие группы $\mathcal{G}$ на $\mathrm{Pic}\, X_\Sigma$, зная действие группы на $\hat{T}$ и на ребрах веера Σ. Заметим также, что группа $\mathrm{Aut}_k(X_\Sigma)$ содержит в качестве подгруппы полупрямое произведение $h(\mathcal{G})T(k_s)$, где $T(k_s)$ — группа сдвигов, $h(\mathcal{G})$ нормализует группу $T(k)$. Поэтому среди k-форм многообразия $X_\Sigma \otimes k$ имеются и все пополнения главных однородных пространств k-тора T.

Перейдем к вопросу практического построения инвариантных проективных вееров и многообразий Демазюра размерности n. По теореме Жордана существует конечное число несопряженных конечных подгрупп в группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. Для каждой такой группы W можно построить инвариантный веер Σ в решетке $M^0 = \mathbb{Z}^n$ и модель Демазюра X_Σ. В малых размерностях n максимальная конечная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ может быть реализована в качестве группы автоморфизмов некоторой системы корней n-мерного пространства. Это позволяет сравнительно просто строить минимальные проективные торические модели с максимальной группой автоморфизмов.

Пример 6.2.1. 1) Гладкая проективная одномерная торическая модель только одна — это проективная прямая $\mathbb{P}^1$.

2) В случае $n = 2$ имеются две максимальные несопряженные подгруппы W_1 и W_2 в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Группа W_1 имеет порядок 8, это группа автоморфизмов системы корней типа B_2. Решетка корней B_2 является обычной квадратной решеткой с инвариантной квадратичной формой $x^2 + y^2$. Веер Σ состоит из 4-х базисных конусов и всех его частей. Схема $X_\Sigma = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, e_1, e_2 — базис решетки B_2. Антиканонический дивизор $D = -K$ равен $D_1 + D_2 + D_3 + D_4$, он инвариантен относительно группы W_1, D_i соответствует лучу $< 0, e_i >$. Все k-формы многообразия $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ являются k-рациональными, если они имеют рациональную k-точку.

Группа W_2 имеет порядок 12: группа автоморфизмов системы корней типа A_2, ее инвариантная квадратичная форма $x^2 + xy + y^2$. Веер Σ содержит 6 базисных конусов, $|\Sigma| = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6\}$. Веер Σ_0, порожденный базисами $(e_1,\ e_3)$, $(e_3,\ e_5)$, $(e_5,\ e_1)$, является полным и определяет проективную плоскость $\mathbb{P}^2$. Поэтому схема $X_\Sigma \otimes k$ есть поверхность Дель-Пеццо степени 6, полученная из $\mathbb{P}^2$ раздутием трех точек O_1, O_2, O_3. Группа W_2 — прямое произведение $S_3 \times S_2$, где S_3 — симметрическая группа, действующая проективно на $\mathbb{P}^2$, а S_2 — квадратичное преобразование плоскости $\mathbb{P}^2$ с фундаментальными точками O_1, O_2, O_3. Всякая k-форма X схемы $X_\Sigma \otimes k$, имеющая рациональную k-точку, является k-рациональной.

3) В размерности 3 имеются четыре максимальные несопряженные подгруппы группы $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$. Три из них являются неэквивалентными представлениями прямого произведения симметрической группы S_4 и группы второго порядка S_2.

а) Группа W_1 является группой автоморфизмов обычной кубической решетки L_0 в евклидовом пространстве, она сохраняет форму $x^2 + y^2 + z^2$, веер содержит 8 октантов, множество $|\Sigma|$ состоит из 6 ребер, схема X_Σ есть $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Вопрос о бирациональной тривиальности k-форм этого типа будет рассмотрен в примере 6.2.2.

б) Группа W_2 связана с решеткой L_1, которая получается из кубической добавлением центров кубов. Минимальный инвариантный проективный веер Σ содержит 14 ребер, следовательно, $\mathrm{Pic}\, X_\Sigma$ имеет ранг 11. Схема X_Σ получается из $\mathbb{P}^3$ с помощью последовательных раздутий. Граф дивизоров из $|\Sigma|$ можно описать с помощью выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$. Он состоит из 8 шестиугольников и 6 четырехугольников. Это в точности "многогранник" дивизоров, получаемых из $\mathbb{P}^3$ последовательным раздутием 4-х вершин и 6 ребер координатного тетраэдра $x_0 x_1 x_2 x_3 = 0$, где x_i — однородные координаты в $\mathbb{P}^3$.

в) Группа W_3 есть группа автоморфизмов решетки L_2, получаемой из кубической добавлением центров граней. Решетки L_1 и L_2 дуальны друг другу: $L_2 = \mathrm{Hom}(L_1, \mathbb{Z})$. Инвариантный веер состоит из 32 базисов, множество $|\Sigma|$ имеет 18 элементов, $\mathrm{Pic}\, X_\Sigma$ имеет ранг 15.

г) Наконец, группа W_4 есть группа автоморфизмов решетки, являющейся прямой суммой одномерной решетки и двумерной, составленной из правильных треугольников. Инвариантная модель Демазюра X_Σ есть $\mathbb{P}^1 \times X$, где X — поверхность Дель-Пеццо степени 6.

Используя эти явные геометрические конструкции, Б.Кунявский [26] получил полную бирациональную классификацию трехмерных торов. Из 73 трехмерных решеток выделены 15, для которых соответствующие торы не являются рациональными и не являются стабильно эваивалентными между собой. Все торы размерности 3, кроме этих отмеченных, являются k-рациональными. В частности, все стабильно рациональные трехмерные торы на самом деле рациональны.

Пример 6.2.2. Пусть $f = x_1^2 + ... + x_n^2$. Этой форме соответствует кубическая решетка L_0 в евклидовом пространстве E^n, порожденная ортонормированным базисом $e_1, ..., e_n$, $W = O(n, f)$ — группа всех целочисленных преобразований, сохраняющих форму f; $|W| = 2^n n!$. Рассмотрим веер Σ, порожденный n-мерными симплексами $g\sigma$, $g \in W$, $\sigma =< 0, e_1, ..., e_n >$. Множество $|\Sigma|$ состоит из $2n$ ребер, соответствующая схема Демазюра X_Σ есть $\mathbb{P}^1 \times ... \times \mathbb{P}^1$ (n раз). Пусть T — тор размерности n над полем k, определенный представлением $h : \mathcal{G} \to W \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, где $\mathcal{G}$ действует на $\hat{T}^0$. Тогда тор T вкладывается в k-форму X схемы $X_\Sigma \otimes k$ и мы имеем точную последовательность $\mathcal{G}$-модулей

$$0 \to \hat{T} \xrightarrow{\alpha} \hat{S} \to \mathrm{Pic}\, X_\Sigma \to 0, \qquad (6.2.1)$$

где $\hat{S}$ — пермутационный $\mathcal{G}$-модуль, порожденный ребрами веера Σ. Множество $|\Sigma|$ состоит из векторов (дивизоров) $e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n$, где $f_i = -e_i$. (В группе $\hat{S}$ все они считаются независимыми!) Ранг $\mathbb{Z}$-модуля $\mathrm{Pic}\, X_\Sigma$ равен n. Вложение α определено формулой

$$\alpha(m) = \sum u(m)u, \quad u \in |\Sigma|.$$

Пусть $m_1, ..., m_n$ — базис в $\hat{T}$, дуальный базису $e_1, ..., e_n \in \hat{T}^0$. Тогда $\alpha(m_i) = e_i - f_i$, т.е. дивизоры e_i и f_i линейно эквивалентны и только они. Классы дивизоров $\mathrm{cl}(e_i)$ образуют $\mathbb{Z}$-базис

$\mathcal{G}$-модуля $\operatorname{Pic} X_\Sigma = \hat{N}$. Группа $\mathcal{G}$ действует перестановкой на базисе $|\Sigma|$ и очевидно, что перестановкой она действует и на базисе $\mathrm{cl}(e_i)$ модуля $\hat{N}$. Таким образом, тор T стабильно рационален над полем k. Для доказательства рациональности тора T рассмотрим точную последовательность торов над k, двойственную последовательности (6.2.1):

$$1 \to N \xrightarrow{u} S \xrightarrow{v} T \to 1.$$

Выбор базы $|\Sigma|$ в $\hat{S}$ позволяет считать S, а значит, и N, группой линейных преобразований пространства $\mathbb{A}_k^{2n}$. Строение отображения $\mathrm{cl} : \hat{S} \to \hat{N}$ показывает, что представление u есть прямая сумма двух точных представлений степени n, скажем, $V_1 \oplus V_2$. Пусть $x \in V_1(k)$ — точка, орбита которой $u(N)x$ биективна $N(k)$. Тогда v отображает $x \times V_2$ бирационально на T. Таким образом, k-торы T, у которых целочисленное представление $\mathcal{G}$-модуля $\hat{T}^0$ (или $\hat{T}$) эквивалентно над $\mathbb{Z}$ ортогональному, являются k-рациональными.

6.3. Бирациональные инварианты торов без аффекта в полупростых группах. Пусть T — алгебраический k-тор, X — его гладкая проективная модель. Пусть L/k — расширение Галуа конечной степени, расщепляющее тор T, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, тогда $H^1(k, \operatorname{Pic} \bar{X}) = H^1(\Pi, \operatorname{Pic} X_L)$. Вялая резольвента

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to \hat{N} \to 0, \quad \hat{N} = \operatorname{Pic} X_L$$

вместе с равенством $H^1(\Pi, \hat{S}) = 0$ дает коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & H^1(\Pi, \hat{N}) & \to & H^2(\Pi, \hat{T}) & \to & H^2(\Pi, \hat{S}) \\
 & & \downarrow \mathrm{res} & & \downarrow \mathrm{res} & & \downarrow \mathrm{res} \\
0 & \to & H^1(<g>, \hat{N}) & \to & H^2(<g>, \hat{T}) & \to & H^2(<g>, \hat{S}).
\end{array}$$

Так как модули $\hat{S}$ и $\hat{N}$ являются вялыми, то эта диаграмма показывает наличие естественного мономорфизма

$$H^1(\Pi, \hat{N}) \to \mathrm{Ker}[H^2(\Pi, \hat{T}) \xrightarrow{\mathrm{res}} \bigoplus_{g \in \Pi} H^2(<g>, \hat{T})].$$

Из инъективности отображения

$$H^2(\Pi, \hat{S}) \xrightarrow{\mathrm{res}} \bigoplus_{g} H^2(<g>, \hat{S})$$

следует изоморфизм

$$H^1(\Pi, p(T)) = \mathrm{Ker}[H^2(\Pi, \hat{T}) \stackrel{\mathrm{res}}{\to} \bigoplus_g H^2(< g >, \hat{T})]. \qquad (6.3.1)$$

Это соотношение имеется в статье Сансюка [67]. Б.Кунявский [28], изучая трехмерные торы, обнаружил следующий эффект: хотя имеются конечные подгруппы $\Pi \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$, для которых $H^1(\Pi, \mathrm{Pic}\, X_\Sigma) \neq 0$, но для всех максимальных конечных подгрупп $\Pi \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$ и соответствующих инвариантных вееров Σ справедливо равенство $H^1(\Pi, \mathrm{Pic}\, X_\Sigma) = 0$. Пример 6.2.1 показывает, что решетки L_0, L_1, L_2 являются решетками корней или весов полупростых групп ранга 3. Дальнейшие исследования Б.Кунявского [28] показали, что для максимального k-тора T без аффекта в связной присоединенной полупростой группе классического типа группа $H^1(\Pi, p(T)) = 0$. Окончательную ясность в эту ситуацию внес А.А.Клячко [24]. Итак, пусть T — максимальный k-тор без аффекта в связной полупростой группе G, R — система корней, $W(R)$ — группа Вейля, $A(R)$ — группа автоморфизмов системы R, $Q(R)$ — решетка корней, $P(R)$ — решетка весов, $Q(R) \subset \hat{T} \subset P(R)$; Π — группа разложения тора T; поскольку T — тор без аффекта, то $W(R) \subset \Pi \subset A(R)$. Вычисление $H^1(\Pi, p(T))$ по формуле (6.3.1) сводится к вычислению двумерных когомологий Π-модуля $\hat{T}$. Полезно знать и одномерные когомологии. А.Клячко [24] получает формулу

$$H^1(W, \hat{T}) = \frac{< m_\alpha \in \hat{T} \mid s_\alpha m_\alpha = -m_\alpha,\ \alpha \in \Delta >}{< (1 - s_\alpha)\, m \mid m \in \hat{T},\ \alpha \in \Delta >}, \qquad (6.3.2)$$

где Δ — базис системы корней R, s_α — отражение в корне $\alpha \in R$. Из формулы (6.3.2) имеем

$$H^1(W, Q(R)) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad R \neq A_1,\ B_n, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{если} \quad R = A_1,\ B_n; \end{cases}$$

$$H^1(W, P(R)) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad R \neq A_1,\ C_n, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{если} \quad R = A_1,\ C_n. \end{cases}$$

Если система R неприводима, то

$$H^1(W, \hat{T}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{если} \quad R = A_1, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{если} \quad R = C_n, \hat{T} = P(R), \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{если} \quad R = B_n, \hat{T} = Q(R), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Формула (6.3.2) также показывает, что группа $H^2(W,\hat{T})$ является 2-группой. Таким образом,

$$H^1(W,p(T)) = \mathrm{Ker}[H^2(W,\hat{T}) \overset{\mathrm{res}}{\to} \bigoplus_{\alpha\in\Delta} H^2(< s_\alpha >,\hat{T})].$$

А.Клячко показывает, что это ядро тривиально для всех промежуточных решеток $\hat{T}$, $Q(R) \subset \hat{T} \subset P(R)$. Если же система R неприводима, то группу W можно заменить на $\Pi \supset W(R)$. Используя равенство $H^1(W,p(T)) = 0$ и редукцию Хохшильда — Серра, покажем, что $H^1(\Pi,p(P(R))) = 0$ для всех $\Pi \supset W(R)$. Для решетки $Q(R)$ строится веер Σ в $\hat{T}^0 = P(R^\vee)$, он состоит из камер Вейля в пространстве $P(R^\vee)\otimes\mathbb{R}$ и всех его граней. В терминах веера Σ торического многообразия X можно описать все компоненты кольца Чжоу $CH(X) = \oplus CH^d(X)$. А.Клячко [22] показывает, что

$$H^1(\Pi,CH^d(X)) = H^{-1}(\Pi,CH^{n-d}(X)),$$

и доказывает, что $H^{-1}(\Pi,CH^d(X)) = 0$ для всех $\Pi \supset W(R)$. Переход от H^1 к H^{-1} ценен тем, что при проверке равенства $H^{-1}(\Pi,CH^d(X)) = 0$ дело сводится к нахождению Π-инвариантов в некоторых модулях, а таковые оказываются ненулевыми из-за того, что группа Π весьма велика.

Теорема. *Пусть $W(R)$ и $A(R)$ — группа Вейля и группа автоморфизмов системы корней R, $Q(R)$ и $P(R)$ — решетки корней и весов соответственно. Тогда:*

1) $H^1(W,p(T)) = 0$ *для любой W-решетки $\hat{T}$, $Q(R) \subseteq \hat{T} \subseteq P(R)$;*
2) $H^1(\Pi,p(P(R))) = H^1(\Pi,p(Q(R))) = 0,\ W(R) \subseteq \Pi \subseteq A(R)$;
3) *если система R неприводима, то*

$$H^1(\Pi,p(T)) = 0,\ W(R) \subseteq \Pi \subseteq A(R),\ Q(R) \subseteq \hat{T} \subseteq P(R).$$

Данная теорема имеет интересные приложения к арифметике линейных алгебраических групп.

Пример. Пусть V_r — линейное пространство над полем k, $\dim V_r = r$. Имеем тензорное представление прямого произведения $\mathrm{GL}(V_m)\times\mathrm{GL}(V_n)$ в пространстве $V = V_m \otimes_k V_n$: $(g_1,g_2)(x\otimes y) = g_1x\otimes g_2y$. Пусть S_r — максимальный k-тор в группе $\mathrm{GL}(V_r)$, через $N = S_mS_n$ обозначим образ группы $S_m\times S_n$ в $\mathrm{GL}(V)$ при тензорном представлении. Вопрос о рациональности поля инвариантов $k(V)^N$ возникал по разному поводу, см. п.6.2 и пример 3.7.1. Рассмотрим самый жесткий случай. Пусть

V_r является расширением поля k степени r, S_r — k-тор, возникающий из регулярного представления мультипликативной группы V_r^* поля V_r, тогда любой характер группы S_r, определенный над k, имеет вид χ_r^p, где χ_r — норменное отображение, $p \in \mathbb{Z}$. В случае, когда V_m и V_n поля и $(m,n) = 1$, то все характеры тора $N = S_m S_n$, определенные над k, порождены одним характером $\chi = \chi_m^n \chi_n^m$. Пусть A_p — пространство всех полуинвариантов группы N веса χ^p в кольце $k[V]$. Мы увидим, что A_p конечномерно, тогда можно рассмотреть $X = \operatorname{Proj} A$, $A = \bigoplus_0^\infty A_p$. Оказывается, X — гладкая проективная торическая модель тора $T = S/N$, где S — максимальный k-тор в группе $\mathrm{GL}(V)$, содержащий N. Действительно, имеем точные последовательности:

$$0 \to I_m \to \hat{S}_m \xrightarrow{\varepsilon_m} \mathbb{Z} \to 0,$$

$$0 \to I_n \to \hat{S}_n \xrightarrow{\varepsilon_n} \mathbb{Z} \to 0.$$

Модуль $\hat{T}$ есть не что иное, как $I_m \otimes I_n$, следовательно, имеем длинную точную последовательность $\mathcal{G}$-модулей

$$0 \to I_m \otimes I_n \xrightarrow{\alpha} \hat{S}_m \otimes \hat{S}_n \xrightarrow{\beta} \hat{S}_m \oplus \hat{S}_n \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z} \to 0,$$

$\operatorname{Im}(\beta) = \hat{N}$, $\beta(a \otimes b) = (\varepsilon_n(b)a, \varepsilon_m(a)b)$, $\gamma(u,v) = \varepsilon_m(u) - \varepsilon_n(v)$. Двойственная решетка $\hat{T}^0$ изоморфна $I_m^0 \otimes I_n^0$. Пусть $e_1, \ldots, e_{m-1}$ — базис в I_m^0, $f_1, \ldots, f_{n-1}$ — базис в I_n^0, $e_m = -e_1 - \ldots - e_{m-1}$, $f_n = -f_1 - \ldots - f_{n-1}$. Элементы $e_i \otimes f_j$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, образуют базис решетки $\hat{T}^0$. Пусть $|\Sigma|$ — множество элементов $e_i \otimes f_j$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Поскольку $|\Sigma|$ содержит базис группы $\hat{T}^0$, то линейная функция $m \in \hat{T}_{\mathbb{R}}$ вполне определяется своими значениями в точках $e_i \otimes f_j$. Пусть $m(e_i \otimes e_j) = x_{ij}$. Имеем $\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0$. Решетка $\hat{S}_m \otimes \hat{S}_n$ может быть описана как свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный символами $[e_i \otimes f_j]$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Отображение α имеет вид

$$\alpha(m) = \sum_{i,j} m(e_i \otimes f_j)[e_i \otimes f_j].$$

Пусть $[e_i]$ — базис $\hat{S}_m$, $[f_j]$ — базис $\hat{S}_n$, тогда

$$\beta(\sum_{i,j} n_{ij}[e_i \otimes f_j]) = n \sum_i n_{ij}[e_i] \oplus m \sum_j n_{ij}[f_j].$$

Рассмотрим выпуклую оболочку P элементов множества $|\Sigma|$ в $\hat{T}^0_{\mathbb{R}}$ и пусть

$$\Delta = \{m \in \hat{T}_{\mathbb{R}} \mid m(x) \geqslant -1 \ \forall x \in P\}$$

— двойственный многогранник. Матрица (x_{ij}) координат многогранника $\alpha(\Delta)$ удовлетворяет условиям $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0$, $x_{ij} \geqslant -1$. Элементы из $\alpha(\Delta \cap \hat{T})$ представимы матрицами с целыми координатами. Вместо $\alpha(\Delta)$ удобно взять его сдвиг на матрицу $a = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 1\ \forall i, j$. Обозначим через $\Omega_{m,n}$ полиэдр $\alpha(\Delta) + a$

$$\Omega_{m,n} = \{(y_{ij}) \mid \sum_{i=1}^{m} y_{ij} = m,\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = n,\ y_{ij} \geqslant 0\}.$$

Полиэдр $\Omega_{m,n}$ — известная фигура в теории транспортных задач. Это так называемый классический центральный транспортный многогранник порядка $m \times n$. Известно, что $\Omega_{m,n}$ целочисленный, т.е. все вершины имеют целые координаты, $\dim \Omega_{m,n} = (m-1)(n-1)$ и $\Omega_{m,n}$ является простым, если $(m, n) = 1$. Выпуклый многогранник называется простым, если двойственный ему является симплициальным. Итак, в нашем случае полиэдр P является симплициальным. А.Клячко [21] показал, что каждый симплекс многогранника P натянут на базис решетки $\hat{T}^0$. Следовательно, грани полиэдра P определяют в $\hat{T}^0$ гладкий проективный веер Σ, множеством примитивных векторов которого является исходное множество $|\Sigma|$. Антиканонический дивизор $-K = \sum_{i,j} e_i \otimes f_j$ очень обилен и

$$\beta(-K) = n\sum_{i=1}^{m}[e_i] + m\sum_{j=1}^{n}[f_j] \in \hat{N}.$$

Обозначим $\beta(-K)$ через χ, это характер группы N, и если записать его в мультипликативной форме, то $\chi = \chi_m^n \chi_n^m$ — тот самый базисный характер, с помощью которого было построено кольцо полуинвариантов $A = \oplus_{p=0}^{\infty} A_p$. Таким образом, $\operatorname{Proj} A$ — гладкое торическое проективное многообразие X, построенное с помощью веера Σ в $\hat{T}^0$. Заметим также, что $\dim A_p$ равна количеству целых точек транспортного многогранника $p\Omega_{m,n}$.

Частный случай : $m = 2$, n нечетное. В работе А.Клячко [21] получены следующие формулы:

$$\dim A_p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin[(p+1/2)\alpha]}{\sin \alpha/2}\right)^n d\alpha.$$

Например,

$$\dim A_1 = \dim \Gamma(X, O(-K)) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k},$$

$$\deg(-K) = \frac{2^{n-1}\,(n-1)!}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^n d\beta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} (n-2k)^{n-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Батырев В.В.* Трехмерные торические многообразия Фано// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — *48*, № 4. — С. 704–717 (РЖМат, 1981, 12А465)
2. *Богомолов Ф.А.* Группа Брауэра факторпространств линейных представлений// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1987. — *51*, № 3. — С. 485–516 (РЖМат, 1987, 10А360)
3. *Борель А.* Арифметические свойства алгебраических групп// Математика. Период. сб. перев. ин. статей. — 1964. — *8*, № 2. — С. 3–17 (РЖМат, 1964, 8А229)
4. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. — М.: Наука, 1976. — 648 с. (РЖМат, 1977, 5А103К)
5. *Воскресенский В.Е.* Группа Пикара линейных алгебраических групп// Исслед. по теории чисел. Вып.3. — Саратов: Саратовск. ун-т. — 1969. — С. 7–16 (РЖМат, 1969, 11А375)
6. *Воскресенский В.Е.* О бирациональной эквивалентности линейных алгебраических групп// Докл. АН СССР. — 1969. — *188*, № 5. — С. 978–981 (РЖМат, 1970, 2А377)
7. *Воскресенский В.Е.* Бирациональные свойства линейных алгебраических групп// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1970. — *34*, № 1. — С. 3–19 (РЖМат, 1970, 6А350)
8. *Воскресенский В.Е.* К вопросу о строении подполя инвариантов циклической группы автоморфизмов поля $\mathbb{Q}(x_1, .., x_n)$// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1970. — *34*, № 2. — С. 366–375 (РЖМат, 1970, 12А289)
9. *Воскресенский В.Е.* Поля инвариантов абелевых групп// Успехи мат. наук. — 1973. — *28*, № 5. — С. 77–102 (РЖМат, 1973, 12А341)
10. *Воскресенский В.Е.* Геометрия линейных алгебраических групп// Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1973. — *132*. — С. 151–161 (РЖМат, 1973, 11А377)
11. *Воскресенский В.Е.* Некоторые вопросы бирациональной геометрии алгебраичесих торов// Proc. Int. Congr. Math., Vancouver, 1974. Vol.1. — S.l.,1975. — С. 343–347 (РЖМат, 1976, 10А261)

12. *Воскресенский В.Е.* О бирациональных инвариантах алгебраических торов// Успехи мат. наук. — 1975. — *30*, № 2. — С. 207–208 (РЖМат, 1975, 9А361)
13. *Воскресенский В.Е.* Алгебраические торы $0 \to \hat{T} \to \hat{S} - \operatorname{Pic} V_L(T) \to 0$. — М.: Наука, 1977. — 224 с. (РЖМат, 1978, 7А561К)
14. *Воскресенский В.Е.* Проективные инвариантные модели Демазюра// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1982. — *46*, № 2. — С. 195–210 (РЖМат, 1982, 7А508)
15. *Воскресенский В.Е.* Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп. I// Вестн. Самар. гос. ун-та. — 1997. — *4*, № 2. — С. 18–98; II// Вестн. Самар. гос. ун-та. — 1997. — *6*, № 4. — С. 5–68
16. *Воскресенский В.Е., Клячко А.А.* Торические многообразия Фано и системы корней// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — *48*, № 2. — С. 237–263(РЖМат, 1984, 8А479)
17. *Гельфанд С.И., Манин Ю.И.* Методы гомологической алгебры. I. Введение в теорию гомологий и производные категории. — М.: Наука, 1988. — 416 с. (РЖМат, 1989, 3А345К)
18. *Данилов В.И.* Геометрия торических многообразий// Успехи мат. наук. — 1978. — *33*, № 2. — С. 83–134 (РЖМат, 1978, 8А452)
19. *Исковских В.А.* Бирациональные свойства поверхности степени 4 в $\mathbb{P}^4$// Мат. сб. — 1972. — *88*, № 1. — С. 31–37 (РЖМат, 1972, 8А519)
20. *Картан А., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра. — М.: Изд-во ин. лит., 1960. — 510 с. (РЖМат, 1961, 2А238К)
21. *Клячко А.А.* Модели Демазюра для специального класса торов// Семинар по арифметике алгебр. многообразий. — Саратов: Саратовск. ун-т, 1979. — С. 32–37 (РЖМат, 1981, 1А471)
22. *Клячко А.А.* *K*-теория моделей Демазюра// Исслед. по теории чисел. — 1982. — № 8. — С. 61–72 (РЖМат, 1983, 3А417)
23. *Клячко А.А.* О рациональности торов с циклическим полем разложения// Арифметика и геометрия многообразий: Межвуз. сб. науч. тр. — Куйбышев: Куйбыш. ун-т, 1988. — С. 73–78
24. *Клячко А.А.* Торы без аффекта в полупростых группах// Арифметика и геометрия многообразий: Межвуз. сб. науч. тр. — Куйбышев: Куйбыш. ун-т, 1989. — С. 67–78
25. *Кунявский Б.Э.* О торах с биквадратичным полем разложения// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1978. — *42*, № 3. — С. 580–587
26. *Кунявский Б.Э.* О бирациональной классификации торов малой размерности// Семинар по арифметике алгебр. многообразий. — Саратов: Саратовск. ун-т, 1979. — С. 37–42 (РЖМат, 1981, 1А472)
27. *Кунявский Б.Э.* Торы, разложимые над расширением Галуа с группой S_3// Исслед. по теории чисел. — 1982. — № 8. — С. 72–74 (РЖМат, 1983, 3А418)
28. *Кунявский Б.Э.* О трехмерных алгебраических торах// Исслед. по теории чисел. — 1987. — № 9. — С. 90–111 (РЖМат, 1987, 9А517)
29. *Мамфорд Д.* Абелевы многообразия. — М.: Мир, 1971. — 300 с. (РЖМат, 1972, 2А562К)

30. *Манин Ю.И.* Рациональные поверхности над совершенными полями.I// Publs math. Inst. hautes études scient. — 1966. — № 30. — С. 55—113 (РЖМат, 1967, 10А312)
31. *Манин Ю.И.* Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика. — М.: Наука, 1972. —304 с. (РЖМат, 1972, 12А367К)
32. *Милн Дж.* Этальные когомологии. — М.: Мир, 1983. — 392 с. (РЖМат, 1984, 2А384К)
33. *Назарова Л.А.* Целочисленные представления четверной группы// Докл. АН СССР. — 1961. — *140*, № 5. — С. 1011–1014 (РЖМат, 1962, 2А224)
34. *Попов В.Л.* Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1974. — *38*, № 2. — С. 294–322 (РЖМат, 1974, 7А620)
35. *Ройтер А.В.* О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами// Вестн. Ленингр. ун-та. — 1960. — *19*. — С. 65–74 (РЖМат, 1961, 7А233)
36. *Серр Ж.П.* Когомологии Галуа. — М.: Мир, 1968. — 208 с. (РЖМат, 1969, 4А329К)
37. *Чистов А.Л.* О бирациональной эквивалентности торов с циклическим полем разложения// Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. — 1976. — *64*. — С. 153–158 (РЖМат, 1977, 5А346)
38. *Чистов А.Л.* О числе образующих полугруппы классов алгебраических торов относительно стабильной эквивалентности// Докл. АН СССР. — 1978. — *242*, № 5. — С. 1027–1029 (РЖМат, 1979, 2А320)
39. *Шафаревич И.Р.* Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1972. — 568 с. (РЖМат, 1973, 1А387К)
40. *Beauville A., Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J., Swinnerton-Dyer P.* Variétés stablement rationnelles non rationnelles // Ann. Math. — 1985. — *121*, № 2. — С. 283–318 (РЖМат, 1986, 1А590)
41. *Bessenrodt C., Le Bruyn L.* Stably rationality of certain $PGL(n)$ quotients// Invent. math. — 1991. — *104*. — С. 179–199
42. *Brylinski J.-L.* Décomposition simpliciale d'un réseau, invariante par un groupe fini d'automorphismes// C.r.Acad. sci. — 1979. — *AB288*, № 2. — С. 137–139 (РЖМат, 1979, 7А484)
43. *Chevalley C.* On algebraic group varieties// J. Math. Soc. Jap. — 1954. — *6*, № 3–4. — С. 303–324 (РЖМат, 1956, 4359)
44. *Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J.* La R-équivalence sur les tores// Ann. sci. Ecole. norm. supér. — 1977. — *10*, № 2. — С. 175–230 (РЖМат, 1978, 2А426)
45. *Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J.* Principal homogeneous spaces under flasque tori// J. Algebra. — 1987. — *106*, № 1. — С. 148–205 (РЖМат, 1987, 7А431)
46. *Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J.* The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups// IX Escuela Latinoamericana de Math. — Santiago de Chile, 1988
47. *Demazure M.* Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona// Ann. sci. Ecole. norm. supér. — 1970. — *3*, № 4. — С. 507–588 (РЖМат, 1972, 7А360)

48. *Dress A.* The permutation class group of finite group// J. Pure and Appl. Algebra. — 1975. — *6*, № 1. — С. 1–12 (РЖМат, 1976, 1А409)
49. *Endo S., Miyata T.* Invariants of finite Abelian groups// J. Math. Soc. Jap. — 1973. — *25*, № 1. — С. 7–26 (РЖМат, 1973, 9А330)
50. *Endo S., Miyata T.* Quasi-permutation modules over finite groups. I// J. Math. Soc. Jap. — 1973. — *25*, № 3. — С. 347–421 (РЖМат, 1974, 4А282); II// J. Math. Soc. Jap. — 1974. — *26*, № 4. — С. 698–713 (РЖМат, 1975, 8А399)
51. *Endo S., Miyata T.* On a classification of the function fields of algebraic tori// Nagoya Math. J. — 1974. — *56*. — С. 85–104 (РЖМат, 1975, 9А288)
52. *Endo S., Miyata T.* On the projective class group of finite groups// Osaka J. Math. — 1976. — *13*. — С. 109–122
53. *Endo S., Miyata T.* On the class groups of dihedral groups// J. Algebra. — 1980. — *63*, № 2. — С. 548–573 (РЖМат, 1980, 10А308)
54. *Endo S., Miyata T.* Integral represantations with trivial first cohomology groups// Nagoya Math. J. — 1982. — *85*. — С. 231–240
55. *Formanek E.* The center of 3 × 3 generic matrices// Linear and Multilinear Algebra. — 1979. — *7*, № 3. — С. 203–212 (РЖМат, 1979, 12А298)
56. *Formanek E.* The center of 4 × 4 generic matrices// J. Algebra. — 1980. — *62*, № 2. — С. 304–319 (РЖМат, 1980, 8А251)
57. *Grothendieck A.* Le groupe de Brauer. I.II.III// Dix exposés cohomol. schemas. — 1968. — С. 46–188 (РЖМат, 1969, 11А38, 12А522, 12А523)
58. *Grothendieck A., Demazure M.* Schemas en groupes. I. — Berlin: Springer, 1977
59. *Hironaka H.* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I // Ann. Math. — 1964. — *79*, № 1. — С. 109–203 (РЖМат, 1966, 1А306); II// Ann. Math. — 1964. — *79*, № 2. — С. 205–326 (РЖМат, 1966, 1А306)
60. *Hulek K.* On the classification of stable rank r vector bundles over the projective plane// Progr. Math. — 1980. — *7*. — С. 113–144
61. *Jacobinski H.* Genera and decompositions of laftices over orders// Acta math. — 1968. — *121*, № 1-2. — С. 1–29 (РЖМат, 1969, 7А217)
62. *Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal embedding. I // Lect. Notes Math. — 1973. — *339*. — 309 с. (РЖМат, 1974, 7А621)
63. *Lenstra H.W. (Jr).* Rational functions invariant under a finite Abelian group// Invent. math. — 1974. — *25*, № 3–4. — С. 299–325 (РЖМат, 1975, 2А394)
64. *Lenstra H.W. (Jr).* Rational functions under a cyclic group// Queen's Pap. Pure and Appl. Math. — 1980. — *54*. — С. 91–99 (РЖМат, 1982, 2А362)
65. *Procesi C.* Non commutative Affine rings// Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. sci. fis. mat. e natur. — 1967. Sez. 1. — *8*, № 6. — С. 239–255 (РЖМат, 1968, 6А300)

66. *Rosenlicht M.* Some basic theorems on algebraic groups// Amer. J. Math. — 1956. — *78*, № 2. — С. 401–443 (РЖМат, 1959, 10394)
67. *Sansuc J.-J.* Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres// J. reine und angew. Math. — 1981. — *327*. — С. 12–80 (РЖМат, 1982, 3A515)
68. *Schofield A.* Matrix invariants of composite size// Prepr., 1989
69. *Segre B.* Sur un problème de M. Zariski// Colloq. int. d'algébre et de théorie des nombres. — Paris, 1950. — С. 135–138
70. *Segre B.* Arithmetical questions on algebraic varieties. — London, 1951
71. *Soltman D.J.* Noether's problem over an algebraically closed fields// Invent. math. — 1984. — *77*. — С. 71–84
72. *Swan R.G.* Invariant rational functions and a problem of Steenrod// Invent. math. — 1969. — *7*, № 2. — С. 148–158 (РЖМат, 1969, 10A173)
73. *Van den Bergh M.* The center of the generic division algebra// J. Algebra. — 1989. — *127*, № 1. — С. 106–126
74. *Weil A.* The field of definition of a variety// Amer. J. Math. — 1956. — *78*, № 3. — С. 509–524 (РЖМат, 1957, 5108)

Самарский государственный университет, ул. акад. Павлова, 21, Самара, 443011, Россия

УДК 554.32

III. ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ С ПОЧТИ ПРОСТОЙ КОМПОНЕНТОЙ L_0

М. И. Кузнецов

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-01756).

§ 0. Введение

Одним из наиболее значительных результатов в теории простых модулярных алгебр Ли является доказательство обобщенной гипотезы Кострикина — Шафаревича, полученное Штраде и Вильсоном [32] при $p > 7$. Согласно этой гипотезе, простая конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p > 5$ либо является классической алгеброй Ли, либо изоморфна одной из алгебр Ли картановских типов $W(\mathcal{F})$, $S(\mathcal{F},\omega)$, $H(\mathcal{F},\omega)$, $K(\mathcal{F})$. Для $p \leqslant 7$ проблема классификации остается открытой. При $p < 7$ имеются серии неклассических простых алгебр Ли, неизоморфных алгебрам Ли картановского типа.

При любом подходе к классификации простых алгебр Ли (метод сэндвичей Кострикина, метод сечений Блока—Вильсона—Штраде) центральное место в теории занимает исследование простых фильтрованных алгебр Ли и ассоциированных с ними градуированных алгебр Ли. Согласно теореме Вейсфейлера [33], при удачном выборе фильтрации в простой алгебре Ли $\mathcal{L}$ соответствующая ей градуированная агебра Ли L по модулю максимального идеала в L^- является полупростой и содержит простую градуированную алгебру $\mathfrak{g} = \oplus_{i\geqslant -q}\mathfrak{g}_{[i]}$. В связи с этим в теории простых модулярных алгебр Ли выделяется относительно независимая задача классификации простых градуированных алгебр Ли. Особую роль здесь играют простые 1-градуированные алгебры Ли $L = \oplus_{i\geqslant -1}L_{[i]}$. Эти алгебры в значительной степени определяются парой $(V, \mathcal{L})$, $V = L_{[-1]}$, $\mathcal{L} = L_{[0]}$, поскольку $L_{[i]}$, $i > 0$, естественным образом вкладывается в i-е продолжение Картана $\mathcal{L}^{(i)}$ пары $(V, \mathcal{L})$.

В настоящее время классификация простых 1-градуированных алгебр Ли получена в следующих случаях:

1) $L_{[0]}$ — классическая редуктивная алгебра Ли, $p > 2$, [6], [23].

2) $L_{[0]}$ — разрешимая алгебра Ли, $p > 2$, [9].

3) $L_{[0]}$ содержит нецентральный радикал, $p > 2$, [14].

4) $L_{[0]}$ содержит сумму коммутирующих неабелевых идеалов, $p > 2$, [28].

5) $L_{[0]}$ — почти полупростая алгебра Ли с непростым минимальным нецентральным идеалом, $p > 2$, [30].

Во всех неклассических случаях 2)—5) (и в случае 1), когда представление $L_{[0]}$ на $L_{[-1]}$ не является p-представлением) используется метод дифференциальных операторов, основанный на реализации алгебры Ли $\mathcal{L} = L_{[0]}$ дифференциальными операторами, действующими на некотором модуле $\tilde{V}$, $V \subset \tilde{V}$.

В настоящей работе изучаются простые 1-градуированные алгебры Ли L с почти простой компонентой $L_{[0]} = \mathcal{L}$, т.е. $\bar{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{L}/Z(\mathcal{L}) \subset \operatorname{Der}\bar{\mathfrak{g}}$, где $\bar{\mathfrak{g}}$ — простая алгебра Ли ($\bar{\mathfrak{g}}$ называется сердцевиной почти простой алгебры $\mathcal{L}$). Основная цель — для $p > 3$ получить полное описание простых 1-градуированных алгебр Ли с почти простой компонентой $L_{[0]}$, имеющей сердцевину картановского типа. В частности, доказываются результаты, анонсированные в [16], [30]. Отметим, что некоторые случаи 1-градуированных алгебр Ли с почти простой компонентой $L_{[0]}$ рассматривались прежде. В работе Я.С.Крылюка [8] изучались продолжения Картана усеченных индуцированных модулей над некоторыми градуированными алгебрами Ли картановского типа, а в работе Г.О.Эльстинга [22] исследованы продолжения Картана градуированных модулей над градуированными алгебрами Ли.

Пусть $\mathcal{L}_0$ — подалгебра в $\mathcal{L}$. По подалгебре $\mathcal{L}_0$ строится фильтрация в $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_{-1} = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}_i = \{l \in \mathcal{L}_{i-1} | [l, \mathcal{L}_{-1}] \subset \mathcal{L}_{i-1}\}$, $i > 0$. Пусть r — максимальный номер такой, что $\mathcal{L}_r \neq \mathcal{L}_{r+1} = Z(\mathcal{L})$. r называется высотой подалгебры $\mathcal{L}_0$ и обозначается через $\delta(\mathcal{L}_0)$. Чтобы применить метод дифференциальных операторов, будем рассматривать $\overline{\mathcal{L}}$ вместе с подалгеброй $\overline{\mathcal{L}}_0$ (черта означает переход к фактору по центру), удовлетворяющей следующим условиям:

(i) $\overline{\mathcal{L}}_0$ — максимальная подалгебра в $\overline{\mathcal{L}}$, не содержащая $\bar{\mathfrak{g}}$,

(ii) $\delta(\overline{\mathcal{L}}_0) \geqslant 3$,

(iii) $N_{\overline{\mathcal{L}}}(\overline{\mathcal{L}}_0) = \overline{\mathcal{L}}_0$.

Условия (i), (iii) означают, что пара $(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{L}}_0)$ — транзитивная алгебра Ли. При $p > 7$ существование такой подалгебры может быть установлено с помощью сэндвичей [27]. Пусть $\mathfrak{L}_0 = N_{[\mathcal{L}]_p}(\mathcal{L}_0)$, где $[\mathcal{L}]_p$ — p-замыкание $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{L} = \mathcal{L} + \mathfrak{L}_0$. Во второй части работы доказывается, что V — приводимый $\mathfrak{L}_0$-модуль (и неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль). Это позволяет вложить V в усеченный коиндуцированный модуль U так, что естественная фильтрация на U индуцирует нетривиальную фильтрацию F на $V = L_{[-1]}$ и на всех пространствах $L_{[i]}$. $\mathfrak{L}$-модуль V назовем модулем высоты 1 в смысле Рудакова, если $Z(\mathcal{L})$ отщепляется в $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_1 = \widetilde{\mathfrak{L}} \oplus Z(\mathcal{L})$, и $\widetilde{\mathfrak{L}}_1$ — идеал в $\mathfrak{L}_0$, действующий нильпотентно на V.

Во второй части работы доказывается, что фильтрация F в первом продолжении Картана $\mathfrak{L}^{(1)}$ пары $(V, \mathfrak{L})$ имеет глубину 1 или 0. Важную роль в работе играют следующие теоремы, доказанные во второй части.

Теорема 2.6. *Если* $\mathfrak{L}^{(1)} = F_{-1}\mathfrak{L}^{(1)} \neq F_0\mathfrak{L}^{(1)}$ *и для любых* $\mathfrak{L}_0$*-подмодуля* $\overline{M}$ *в* $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$ *и множества его образующих* N $\sum\limits_{i=0}^{p-2} \mathfrak{L}_0^i N = \overline{M}$, *то* V — $\mathfrak{L}$*-модуль высоты* 1.

Теорема 2.7. *Пусть* $L = \oplus_{i\geqslant -1} L_{[i]}$ — *простая градуированная алгебра Ли,* $V = L_{[-1]}$, $L_{[0]} = \mathcal{L}$ — *почти простая алгебра Ли с сердцевиной* $\overline{\mathfrak{g}}$, $\overline{\mathcal{L}}_0$ — *подалгебра в* $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/Z(\mathcal{L})$, *удовлетворяющая условиям* (i)–(iii), *и* $\overline{\mathcal{L}}_0 \cap \overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{g}}_0$ — *максимальная подалгебра в* $\overline{\mathfrak{g}}$. *Если* $L_{[1]} \subset F_0\mathfrak{L}^{(1)}$ *и* $\overline{\mathfrak{g}}_0$ — *подалгебра минимальной коразмерности в* $\overline{\mathfrak{g}}$, *то* V — $\mathfrak{L}$*-модуль высоты* 1.

В третьей части работы доказывается основной результат.

Теорема 3.8 ($p > 3$). *Пусть* $L = \oplus_{i\geqslant -1} L_{[i]}$ — *простая градуированная алгебра Ли с почти простой компонентой* $L_{[0]}$. *Если сердцевина* $\overline{\mathfrak{g}}$ *алгебры* $L_{[0]}$ *является алгеброй Ли картановского типа, то* $L_{[0]} = W(\mathcal{F})$ *и* L — *алгебра Ли картановского типа* $H(\mathcal{F}', \omega)$.

В первой части работы приводятся некоторые вспомогательные утверждения.

§ 1. Предварительные сведения

Всюду в дальнейшем основное поле K предполагается алгебраически замкнутым характеристики $p > 0$.

1.1. Алгебра разделенных степеней. Будем использовать обозначения из работы [7] для алгебры разделенных степеней и соответсвующих градуированных алгебр Ли картановского типа. Напомним, что алгебра разделенных степеней $\mathcal{O}(\mathcal{F})$, соответствующая флагу $\mathcal{F}$ в пространстве E, $\mathcal{F} : E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_r \supsetneqq E_{r+1} = 0$, задается образующими $x^{(s)}$, $x \in E_i$,

$s \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant s \leqslant p^i$, $i = 0, \ldots, r$, и определяющими соотношениями

$$x^{(0)} = 1,$$

$$x^{(s)}x^{(t)} = \binom{s+t}{s} x^{(s+t)},$$

$$(\alpha x)^{(s)} = \alpha^s x^{(s)}, \qquad \alpha \in K,$$

$$(x+y)^{(s)} = \sum_{i=0}^{s} x^{(i)} y^{(s-i)}.$$

Если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис E, согласованный с флагом $\mathcal{F}$, то мономы $x^{(a)} = x_1^{(a_1)} \ldots x_n^{(a_n)}$, $0 \leqslant a_i < p^{m_i}$, где $m_i = 1 + \max\{j | x_i \in E_j\}$, образуют базис $\mathcal{O}(\mathcal{F})$. Алгебра $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ с фиксированным базисом из мономов $x^{(a)}$ обозначается также через $\mathcal{O}(n : \bar{m})$, где $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ — набор высот "переменных" $x_1, \ldots, x_n$. Через δ будем обозначать n-набор $(p^{m_1} - 1, \ldots, p^{m_n} - 1)$, соответствующий моному максимальной степени в $\mathcal{O}(n : \bar{m})$. Отметим, что алгебра $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ изоморфна алгебре срезанных многочленов $\mathcal{O}_m = K[y_1, \ldots, y_m]/(y_1^p, \ldots, y_m^p)$, $\quad m = |\bar{m}| = m_1 + \ldots + m_n$. Алгебру $\mathcal{O}_m$ можно рассматривать как алгебру разделенных степеней $\mathcal{O}(m : \bar{1})$. Моном максимальной степени в $A = \mathcal{O}_m$ обозначим через $x^{(\delta_A)}$, где $\delta_A = (p-1, \ldots, p-1)$.

Дифференцирование D алгебры $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ называется специальным, если $D(x^{(s)}) = x^{(s-1)}D(x)$, $\quad x \in E$. Алгебра Ли специальных дифференцирований алгебры $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ называется общей алгеброй Ли картановского типа и обозначается через $W(\mathcal{F})$. Через W_m обозначим алгебру всех дифференцирований алгебры $\mathcal{O}_m$.

Подалгебра в алгебре Ли W_m, которая является свободным $\mathcal{O}_m$-подмодулем в W_m, называется *распределением* над $\mathcal{O}_m$. Подалгебра L в W_m называется TI-*подалгеброй*, если $\mathcal{O}_m$ не имеет ненулевых собственных L-инвариантных идеалов. Согласно [13], если L — TI-подалгебра, то $\mathcal{O}_m$-подмодуль в W_m, порожденный L, является TI-распределением. Если L — TI-распределение в W_m, то на $\mathcal{O}_m$ можно задать структуру алгебры разделенных степеней так, что $L = W(\mathcal{F})$, т.е. существует изоморфизм $\varphi : \mathcal{O}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{O}_m$ такой, что $\varphi W(\mathcal{F})\varphi^{-1} = L$ (см. [13]).

1.2. Алгебры Ли картановского типа. Определения и свойства модулярных градуированных алгебр Ли картановского типа см. в [7], [31]. Напомним лишь, что существуют следующие серии градуированных алгебр Ли картановского типа W, S, CS, H, CH, K. Эти алгебры состоят из специальных дифференцирований алгебры разделенных степеней $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ и характеризуются действием на дифференциальные формы — форму объема в случае алгебр серии S, гамильтонову форму в случае H и контактную форму в случае K. Эти алгебры снабжены стандартной градуировкой, индуцированной стандартной градуировкой алгебры $\mathcal{O}(\mathcal{F})$, $\deg x_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, в случаях W, S, H и градуировкой типа $(1, \dots, 1, 2)$, $\deg x_i = 1$, $i = 1, \dots, n-1$, $x_n = 2$, $n = 2m+1$. Вообще, градуировка типа $(s_1, \dots, s_n)$, $s_i \in \mathbb{Z}$, в алгебре $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ определяется тем, что $\deg x_i = s_i$. Здесь $\{x_1, \dots, x_n\}$ — базис пространства E, согласованный с флагом $\mathcal{F}$.

Пусть $L = \oplus_{i \geqslant -q} L_i$ — градуированная алгебра Ли. Фильтрованная алгебра Ли $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-q} \supset \ldots \supset \mathcal{L}_{-1} \supset \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \ldots$, называется фильтрованной деформацией градуированной алгебры Ли L, если $\operatorname{gr} \mathcal{L} \cong L$. Градуированная алгебра Ли L называется жесткой относительно фильтрованных деформаций, если любая ее фильтрованная деформация изоморфна как фильтрованная алгебра Ли алгебре L с фильтрацией, индуцированной градуировкой. Алгебра Ли $W(\mathcal{F})$ со стандартной градуировкой является жесткой относительно фильтрованных деформаций ([1], [15]). Фильтрованные деформации алгебр Ли картановских типов H, S соответствуют нестандартным гамильтоновым формам и формам объема [3]. Описание классов изоморфизма фильтрованных алгебр Ли типа S в терминах форм объема получено в [21], [34]. Гамильтоновы формы, соответствующие классам изоморфизма гамильтоновых алгебр Ли (серия H), получены в [19], [20]. Контактные алгебры Ли $K(\mathcal{F})$ являются жесткими относительно фильтрованных деформаций [29]. Фильтрованная алгебра Ли картановской серии X, соответсвующая форме ω, обозначается через $\tilde{X}(\mathcal{F}, \omega)$.

Простую фильтрованную алгебру Ли картановского типа X, соответствующую форме ω, обозначим через $X(\mathcal{F}, \omega)$. Она совпадает со вторым коммутантом алгебры $\tilde{X}(\mathcal{F}, \omega)$. Строение простых алгебр Ли $X(\mathcal{F}, \omega)$ для различных форм ω описано в [4], [5]. Используя эту информацию, легко получить следующие утверждения.

Предложение 1.1. *Если $\mathcal{L}$ — алгебра Ли картановского типа, допускающая 1-градуировку Γ, то либо $\mathcal{L}$ является одной из алгебр Ли $W(\mathcal{F})$, $K(\mathcal{F})$, $K^{(1)}(\mathcal{F})$, либо $X(\mathcal{F}, \omega) \subset \mathcal{L} \subset$*

$\tilde{X}(\mathcal{F}, \omega)$, $X = S, CS, H, CH$, *причем в случае* $X = S$ *либо*

(a) $\omega = \omega_0 = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, *либо*

(b) $\omega = (\exp x_1^{(p^{m_1})})\omega_0$, *в случае* $X = H$ *либо*

(a) $\omega = d(\sum_{i=1}^{m} x_i dxi + m) = d\omega_0$, *либо*

(b) $\omega = d(\exp x_1^{(p^{m_1})}\omega_0)$.

Градуировка Γ *эквивалентна градуировке типа* $(0,\ 1)$, *причем в случае* (b) $\deg x_1 = 0$.

Следствие 1.2. *Пусть* $\mathcal{L} = \oplus_{i\geqslant -1}\mathcal{L}^{\Gamma}_{[i]}$ — *простая 1-градуированная алгебра Ли картановского типа с нестандартной градуировкой типа* $(0,1)$. *Возможны следующие пары* $(\mathcal{L}^{\Gamma}_{[-1]}, \mathcal{L}^{\Gamma}_{[0]})$:

(1) $\mathcal{L} = W(\mathcal{F})$, $\mathcal{L}^{\Gamma}_{[-1]} \cong U \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F})$,
$$\mathcal{L}^{\Gamma}_{[0]} \cong \mathrm{gl}(U) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F}_1) + 1 \otimes W(\mathcal{F}_1),\ \dim U \geqslant 1;$$

(2) $\mathcal{L} = K(\mathcal{F})$, $K^{(1)}(\mathcal{F})$, $\mathcal{L}^{\Gamma}_{[-1]} \cong \mathcal{O}(\mathcal{F}_1)$, $\mathcal{L}^{\Gamma}_{[0]} \cong W(\mathcal{F}_1) + \mathcal{O}(\mathcal{F}_1)$;

(3) $H(\mathcal{L},\omega) \subset \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{\Gamma}_{[0]} \cong W(\mathcal{F}_1)$ *и либо* $\mathcal{L}^{\Gamma}_{[-1]} \cong \overline{\mathcal{O}(\mathcal{F}_1)}$, *либо* $\mathcal{L}^{\Gamma}_{[-1]} \cong \mathcal{O}_{c,0}(\mathcal{F}_1)$;

(4) $S(\mathcal{F},\ \omega) \subset \mathcal{L}$ *и либо* $\mathcal{L}^{\Gamma}_{[-1]} \cong U \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F}_1)$, $\dim U > 1$,
$$\mathrm{sl}(U) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F}_1) \subset \mathcal{L}^{\Gamma}_{[0]} \cong \mathrm{gl}(U) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F}_1) + 1 \otimes W(\mathcal{F}_1),$$
либо $\mathcal{O}'_{c,1}(\mathcal{F}_1) \subset \mathcal{L}^{\Gamma}_{[-1]} \subset \mathcal{O}_{c,1}(\mathcal{F}_1)$, $\mathcal{L}^{\Gamma}_{[0]} \cong W(\mathcal{F}_1)$.

Здесь $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$, $\overline{\mathcal{O}(\mathcal{F}_1)} = \mathcal{O}(\mathcal{F}_1)/\langle 1\rangle$, $\mathcal{O}_{c,\mu}(\mathcal{F}_1)$ — $W(\mathcal{F}_1)$-*модуль, пространство которого отождествляется с* $\mathcal{O}(\mathcal{F}_1)$, *а действие задается формулой*
$$D \circ f = D(f) + (\omega(D) + \mu \operatorname{div} D)f,$$
где
$$\omega = \sum_i c_i x_i^{(p^{m_i}-1)} dx_i.$$

Случай $c \neq 0$ *соответствует случаям* (b) *в предложении* 1.1, $c_i = \delta_{i1}$.

Пусть L — полупростая алгебра Ли,
$$\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_n \subset L \subset (\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{O}_n + 1 \otimes W_n,$$
где $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, $\mathfrak{g}$ называется *сердцевиной* полупростой алгебры Ли L.

Рассмотрим простые фильтрованные алгебры Ли $\mathcal{L}$, у которых $\operatorname{gr}\mathcal{L} = L$ — полупростая алгебра Ли с сердцевиной картановского типа. Следующее утверждение легко получается из свойств весов нильпотентных подалгебр.

Предложение 1.3. *Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \supset \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \ldots$ — фильтрованная алгебра Ли, H — нильпотентная подалгебра в $\operatorname{Der}\mathcal{L}$, $H(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{L}_i$, Λ_i — множество весов H на $\mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i+1}$, $\mathcal{L}^\lambda$ — весовое подпространство веса λ, $\mathcal{L}_i^\lambda = \mathcal{L}^\lambda \cap \mathcal{L}_i$, $V_{[i]}^\lambda$ — подпространство, дополнительное к $\mathcal{L}_{i+1}^\lambda$ в $\mathcal{L}_i^\lambda$, $\mathcal{L}_{[i]} = \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda_i} V_{[i]}^\lambda$.*

Справедливы следующие утверждения:

(1) $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{[i]} \oplus \mathcal{L}_{i+1}$;

(2) *если* $(\Lambda_{-1}+\Lambda_{-1})\cap\Lambda_i = \varnothing$ *при* $i \leqslant k$, *то* $[\mathcal{L}_{[-1]}, \mathcal{L}_{[-1]}] \subset \mathcal{L}_{k+1}$;

(3) *если* $(\Lambda_{-1} + \Lambda_0) \cap \Lambda_0 = \varnothing$, *то* $[\mathcal{L}_{[-1]}, \mathcal{L}_{[0]}] \subset \mathcal{L}_{[-1]} + \mathcal{L}_1$;

(4) *если* $(\Lambda_{-1} + \Lambda_{-1}) \cap \Lambda_0 = \varnothing$, *то* $[\mathcal{L}_{[-1]}, \mathcal{L}_{[-1]}] \subset \mathcal{L}_{[-1]} + \mathcal{L}_1$;

(5) *если $\mathcal{L}$ — простая алгебра Ли и* $(\Lambda_{-1} + \Lambda_{-1}) \cap \Lambda_{-1} = \varnothing$, $(\Lambda_{-1} + \Lambda_0) \cap \Lambda_0 = \varnothing$, *то* $L_{[0]} = \operatorname{gr}_{[0]}[\mathcal{L}_{[-1]}, \mathcal{L}_{[-1]}] + \operatorname{gr}_{[0]}[\mathcal{L}_{[-1]}, \mathcal{L}_{[1]}]$.

Кроме того, если $(\Lambda_{-1}+\Lambda_{-1})\cap\Lambda_0 = \varnothing$, *то* $L_{[0]} = [L_{[-1]}, L_{[1]}]$.

Следствие 1.4. *Пусть $L = \oplus_{i\geqslant-1}L_{[i]}$ — полупростая алгебра Ли с сердцевиной картановского типа, отличной от $S(\mathcal{F})^\Gamma$ с градуировкой Γ типа $(0,\ldots,0,1)$ и от $H(\mathcal{F})$. Если $\mathcal{L}$ — простая фильтрованная алгебра Ли такая, что $\operatorname{gr}\mathcal{L} = L$, то $\mathcal{L}$ — алгебра Ли картановского типа.*

Для доказательства следствия необходимо рассмотреть все случаи, предоставляемые предложением 1.1 и следствием 1.2, и использовать технику весов из предложения 1.3 для подходящих нильпотентных подалгебр H.

1.3. Усеченные коиндуцированные модули. Алгебра Ли $\mathcal{L}$ с фиксированной максимальной подалгеброй $\mathcal{L}_0$ называется *транзитивной алгеброй Ли*, если $\mathcal{L}_0$ совпадает со своим нормализатором в $\mathcal{L}$ и не содержит нетривиальных идеалов алгебры $\mathcal{L}$. Пусть $\mathcal{L}^\# = \mathcal{L} + \mathcal{L}^p + \ldots + \mathcal{L}^{p^n} + \ldots \subset \mathcal{U}(\mathcal{L})$ — универсальное p-замыкание $\mathcal{L}$ в универсальной обертывающей алгебре $\mathcal{U}(\mathcal{L})$.

Напомним основные факты теории усеченных коиндуцированных модулей (см. [15]). Обозначим через $\mathcal{M}$ нормализатор

$\mathcal{L}_0$ в $\mathcal{L}^{\#}$. Пусть B — подалгебра в $\mathcal{U}(\mathcal{L})$, порожденная $\mathcal{M}$. Существует подалгебра Ли $\tilde{\mathcal{L}}_0 \subset \mathcal{M}$ такая, что $B = \mathcal{U}(\tilde{\mathcal{L}}_0)$. Пусть V — B-модуль. Пространство $\overline{\mathrm{coind}}V = \mathrm{Hom}_B(\mathcal{U}(\mathcal{L}), V)$ является $\mathcal{L}$-модулем отностительно действия $(lf)(a) = f(al)$, $l \in \mathcal{L}$, $a \in \mathcal{U}(\mathcal{L})$, $f \in \overline{\mathrm{coind}}V$, и называется усеченным коиндуцированным $\mathcal{L}$-модулем. В случае тривиального B-модуля K на алгебре $\overline{\mathrm{coind}}K$ каноническим образом определяется структура алгебры разделенных степеней $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ (флаг $\mathcal{F}$ обозначается через $\mathcal{F}(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$) и действие τ алгебры $\mathcal{L}$ на $\overline{\mathrm{coind}}V$ задает вложение $\mathcal{L}$ в алгебру Ли $W(\mathcal{F})$ в качестве транзитивной подалгебры. Последнее означает, что $\tau(\mathcal{L}) \cap W(\mathcal{F})_0 = \tau(\mathcal{L}_0)$, где $W(\mathcal{F})_0$ — стандартная максимальная подалгебра $W(\mathcal{F})$, и $\tau(\mathcal{L}) + W(\mathcal{F})_0 = W(\mathcal{F})$. Кроме того, τ является минимальным вложением, т.е. если τ_1 другое вложение $\mathcal{L}$ в $W(\mathcal{F}_1)$ в качестве транзитивной подалгебры, то $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{F}_1$ относительно естественного частичного упорядочения флагов пространства $E = (\mathcal{L}/\mathcal{L}_0)^*$, а в случае $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ τ и τ_1 отличаются на автоморфизм алгебры $W(\mathcal{F})$.

B-морфизм $\chi : \overline{\mathrm{coind}}V \longrightarrow V$, $\chi(f) = f(1)$, является универсальным: для любого $\mathcal{L}$-модуля U и B-морфизма $\psi : U \longrightarrow V$ существует единственный $\mathcal{L}$-морфизм $\sigma : U \longrightarrow \overline{\mathrm{coind}}V$ такой, что $\psi = \chi\sigma$. Легко убедиться, что $\sigma(u)(a) = \psi(au)$, $\quad a \in \mathcal{U}(\mathcal{L})$, $u \in U$. Следовательно, если $\ker\psi$ не содержит $\mathcal{L}$-подмодулей, то σ — вложение.

Пусть U — $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модуль. Оператор φ называется специальным дифференцированием $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модуля U, если существует $D_\varphi \in W(\mathcal{F})$ такой, что

$$\varphi(fu) = D_\varphi(f)u + f(\varphi(u)).$$

Множество $\mathrm{Der}(U,\ \mathcal{F})$ всех специальных дифференцирований $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модуля U является подалгеброй в алгебре Ли $\mathrm{gl}(U)$. Соответствие $\tau_U : \varphi \mapsto D_\varphi$ является гомоморфизмом алгебры Ли $\mathrm{Der}(U,\ \mathcal{F})$ в $W(\mathcal{F})$. Если задан гомоморфизм ρ алгебры Ли $\mathcal{L}$ в алгебру Ли $\mathrm{Der}(U,\ \mathcal{F})$, то говорят, что $\mathcal{L}$ действует на U специальными дифференцированиями.

$\mathcal{L}$-модуль $c(V) = \overline{\mathrm{coind}}V$ является свободным $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модулем, где $\mathcal{O}(\mathcal{F}) = \overline{\mathrm{coind}}K$, причем $\mathcal{L}$ действует на $c(V)$ специальными дифференцированиями:

$$l(fu) = (\tau(l)f)u + f(lu), \qquad l \in \mathcal{L},\ f \in \mathcal{O}(\mathcal{F}),\ u \in c(V).$$

Обратно, если $\mathcal{L}$ действует специальными дифференцированиями на $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модуле U, причем $\tau_U\rho = \tau$, то U — свободный

$\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модуль, $U \cong \overline{\mathrm{coind}}(U/\mathfrak{m}U)$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в $\mathcal{O}(\mathcal{F})$.

Конструкция усеченных коиндуцированых модулей обобщается на случай, когда подалгебра $\mathcal{L}_0$ в $\mathcal{L}$ содержит идеалы алгебры $\mathcal{L}$ (однако по-прежнему $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_0) = \mathcal{L}_0$). Пусть I — максимальный идеал в $\mathcal{L}$, содержащийся в $\mathcal{L}_0$, $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/I$, $\overline{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}_0/I$. Очевидно, $(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{L}}_0)$ — транзитивная алгебра Ли. Так же, как и выше, определим подалгебру B в $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ и для B-модуля V построим усеченный коиндуцированный модуль $\overline{\mathrm{coind}}V$. Естественное действие $\mathcal{L}$ на $\mathcal{O} = \overline{\mathrm{coind}}K$ задает гомоморфизм τ : $\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Der}_K \mathcal{O}$ и $\ker\tau = I$. На алгебре $\mathcal{O}$ существует каноническая структура алгебры разделенных степеней $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{F})$, и τ индуцирует минимальное вложение $\bar{\tau} : \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow W(\mathcal{F})$. Структура $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модуля на $\overline{\mathrm{coind}}V$ согласована со структурой $\mathcal{L}$-модуля, т.е. $\mathcal{L}$ действует специальными дифференцированиями на $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модуле $\overline{\mathrm{coind}}V$, при этом элементы идеала I действуют $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-эндоморфизмами на $\overline{\mathrm{coind}}V$. В дальнейшем такая ситуация встретится, когда $I = \mathcal{Z}(\mathcal{L})$ — центр $\mathcal{L}$. Пусть V — неприводимый модуль над алгеброй Ли $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0$ — подалгебра в $\mathcal{L}$. Обозначим через $[\mathcal{L}]_p$ p-замыкание $\mathcal{L}$ в $\mathrm{gl}(V)$. Положим $\mathfrak{L}_0 = N_{[\mathcal{L}]_p}(\mathcal{L}_0)$, $\mathfrak{L} = \mathcal{L} + \mathfrak{L}_0$. Если пара $(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{L}}_0)$ (черта означает переход к фактору по центру) является транзитивной алгеброй Ли, то $(\overline{\mathfrak{L}}, \overline{\mathfrak{L}}_0)$ — также транзитивная алгебра Ли. Если V_0 — максимальный $\mathfrak{L}_0$-подмодуль в V, то естественное отображение V в $\overline{\mathrm{coind}}(\overline{V})$, где $\overline{V} = V/V_0$, является вложением и V можно рассматривать как $\mathfrak{L}$-подмодуль в $\overline{\mathrm{coind}}(\overline{V})$. Следующая лемма получается непосредственно из определения усеченного коиндуцированого модуля.

Лемма 1.5. *Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра Ли, $\mathcal{L}_0$ — подалгебра в $\mathcal{L}$, $Z = Z(\mathcal{L})$ — центр алгебры Ли $\mathcal{L}$, $Z \subset \mathcal{L}_0$, $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/Z$, $\overline{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}_0/Z$ и $(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{L}}_0)$ — транзитивная алгебра Ли. Если V — $\widetilde{\mathcal{L}}_0$-модуль, на котором Z действует скалярными операторами, то Z действует скалярными операторами на $\mathcal{L}$-модуле $\overline{\mathrm{coind}}V$.*

1.4. Неприводимые пары с длинной фильтрацией.

Пусть $\mathcal{L} \subset \mathrm{gl}(V)$ — алгебра Ли с отмеченной подалгеброй $\mathcal{L}_0$. Пара $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$ называется *неприводимой*, если V — неприводимый $\mathcal{L}_0$-модуль. Фильтрацию пары $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \supset \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{L}_r \supsetneq \mathcal{L}_{r+1} = Z(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_{r+2} = \ldots$, назовем длинной, если $r = \delta(\mathcal{L}_0) > 3$.

Напомним, что, согласно [27], для любой подалгебры $\mathcal{L}_0$ в $\mathcal{L}$ можно построить фильтрацию, полагая $\mathcal{L}_{-1} = \mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}_i = \{l \in \mathcal{L}_{i-1} \mid [l, \mathcal{L}_{-1}] \subset \mathcal{L}_{i-1}\},\ i > 0.$$

Если единственным идеалом алгебры $\mathcal{L}$, содержащимся в $\mathcal{L}_0$, является центр $Z(\mathcal{L})$, то существует r такое, что $\mathcal{L}_r \neq Z(\mathcal{L})$, а $\mathcal{L}_{r+1} = Z(\mathcal{L})$. Число r называется *высотой* подалгебры $\mathcal{L}_0$ и обозначается через $\delta(\mathcal{L}_0)$.

Пусть $\mathcal{L} \supset < z >$ — центральное расширение алгебры Ли $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/ < z >$, $\overline{\mathfrak{A}}$ — абелева подалгебра в $\overline{\mathcal{L}}$, $[\psi] \in H^2(\overline{\mathcal{L}})$ — класс коцикла ψ, задающего расширение. Ограничение ψ на $\overline{\mathfrak{A}}$ называется *формой Гейзенберга* на $\overline{\mathfrak{A}}$. Если подалгебра $\overline{\mathcal{L}}_0$ содержится в нормализаторе $\overline{\mathfrak{A}}$, то форма Гейзенберга инвариантна относительно $\mathcal{L}_0$.

Пусть $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$ — неприводимая пара с длинной фильтрацией. Всюду в дальнейшем черта означает переход к фактору по $Z(\mathcal{L})$. Нам понадобится следующий результат (см.[30]).

Предложение 1.6 ($p > 3$). *Если в простой 1-градуированной алгебре Ли компонента $L_{[0]}$ содержится в алгебре Ли $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \subset \mathrm{gl}(V)$, $V = L_{[-1]}$, допускающей неприводимую пару с длинной фильтрацией, то форма Гейзенберга на $\mathcal{L}_{r-1}$ нулевая.*

В дальнейшем понадобится информация о продолжениях Картана алгебр Ли дифференциальных операторов специального вида. Следующие утверждения доказаны в [12]. Пусть $V = U \otimes_K \mathcal{O}(\mathcal{F})$ — свободный $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модуль, S — подалгебра Ли в $\mathrm{gl}(U)$, $S \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F})$ — подалгебра Ли в алгебре $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-эндоморфизмов модуля V.

Лемма 1.7. *Пусть $S^{(i)}$ — i-ое продолжение Картана пары $(S,\ U)$, $(S \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F}))^{(i)}$ — i-ое продолжение Картана пары $(S \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F}),\ V)$. Справедливо следующее равенство:*

$$(S \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F}))^{(i)} = S^{(i)} \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F}).$$

Напомним, что градуированная алгебра Ли $L = \oplus_{i \geqslant -1} L_{[i]}$ называется транзитивной, если $L^+ = \oplus_{i>0} L_{[i]}$ не содержит нетривиальных идеалов алгебры L, и неприводимой, если $L_{[-1]}$ — неприводимый $L_{[0]}$-модуль.

Лемма 1.8 ($p > 2$). *Пусть $L = \oplus_{i \geqslant -1} L_{[i]}$ — конечномерная градуированная алгебра Ли такая, что:*

1. *L — транзитивная, неприводимая алгебра Ли.*

2. $L_{[-1]}$ — *свободный модуль ранга* $l > 1$ *над алгеброй* $\mathcal{O}(\mathcal{F})$, $L_{[0]} \subset \operatorname{Der}(L_{[-1]}, \mathcal{F})$, $\tau_{L_{[-1]}}$ — *транзитивная подалгебра в* $W(\mathcal{F})$.
3. $L_{[0]} = [L_{[-1]}, L_{[1]}]$.
4. $\operatorname{Ass}(L_{[0]} \cap G) = G$, *где* $G = \operatorname{End}_{\mathcal{O}(\mathcal{F})} L_{[-1]}$.

Тогда L *изоморфна одной из алгебр Ли картановских серий* $W(\mathcal{F}')$, $S(\mathcal{F}', \omega)$ *с градуировкой типа* $(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{l})$, $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ *или* $\omega = (\exp x_i^{(p^{m_i})}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, $\deg x_i = 0$.

Пусть $A = \mathcal{O}_m = B \otimes_K C$, $B = \mathcal{O}_n$, $C = \mathcal{O}_{m-n}$, $n < m$. Образующие алгебры B обозначим через $x_1, \dots, x_n$, образующие алгебры C — через $y_1, \dots, y_{m-n}$. Пусть V — свободный A-модуль, $V = U \otimes A$, $\Sigma = 1 \otimes CW(B) + \mathrm{gl}(U) \otimes BW(C) + \mathrm{gl}(U) \otimes A$, $W(A)$ — алгебра Ли дифференцирований алгебры A. Через π обозначим проекцию Σ на $1 \otimes CW(B)$ вдоль остальных слагаемых.

Лемма 1.9. *Пусть* $\varphi \in \Sigma^{(1)} = (V, \Sigma)^{(1)}$. *Если* $\dim U > 1$, *то* $\pi\varphi : V \longrightarrow 1 \otimes CW(B)$ — *морфизм* B*-модулей.*

Доказательство. Запишем $\varphi(u \otimes f)$ в виде $\varphi(u \otimes f) = 1 \otimes D^x_{u \otimes f} + D^y_{u \otimes f} + F_{u \otimes f}$, где $D^x_{u \otimes f} \in CW(B)$, $D^y_{u \otimes f} \in \mathrm{gl}(U) \otimes BW(C)$, $F_{u \otimes f} \in \mathrm{gl}(U) \otimes A$.

Если f, $g \in A$, u, $v \in U$, то из равенства $\varphi(u \otimes f)(v \otimes g) = \varphi(v \otimes g)(u \otimes f)$ получаем

$$F_{u \otimes 1}(v \otimes 1) = F_{v \otimes 1}(u \otimes 1),$$

$$F_{u \otimes f}(v) \otimes 1 = u \otimes D^x_{v \otimes 1}(f) + D^y_{v \otimes 1}(u \otimes f) + F_{v \otimes 1}(u \otimes 1) f =$$
$$u \otimes D^x_{v \otimes 1}(f) + D^y_{v \otimes 1}(u \otimes f) + F_{u \otimes 1}(v \otimes 1) f.$$

Таким образом,

$$\varphi(u \otimes f)(v \otimes g) = v \otimes D^x_{u \otimes f}(g) + D^y_{u \otimes f}(v \otimes g) +$$
$$+ u \otimes g D^x_{v \otimes 1}(f) + g D^y_{v \otimes 1}(u \otimes f) + F_{u \otimes 1}(v \otimes 1) f g.$$

Отсюда получаем

$$(1 \otimes D^x_{u \otimes f} + D^y_{u \otimes f} - 1 \otimes f D^x_{u \otimes 1} - f D^y_{u \otimes 1})(v \otimes g) =$$
$$= (1 \otimes D^x_{v \otimes g} + D^y_{v \otimes g} - 1 \otimes g D^x_{u \otimes 1} - g D^y_{v \otimes 1})(u \otimes f). \qquad (1)$$

Пусть u, $v \in U$ линейно независимы, f, $g \in B$, тогда из (1) следует

$$D^x_{v \otimes g} = g D^x_{v \otimes 1}, \quad g \in B. \qquad (2)$$

Для $g \in A$ обозначим $1 \otimes D^x_{v\otimes g} - 1 \otimes g D^x_{v\otimes 1}$ через $\widehat{D}^x_{v\otimes g}$, $D^y_{v\otimes g} - g D^y_{v\otimes 1}$ — через $\widehat{D}^y_{v\otimes g}$. Тогда (1) перепишется так:

$$(\widehat{D}^x_{u\otimes f} + \widehat{D}^y_{u\otimes f})(v \otimes g) = (\widehat{D}^x_{v\otimes g} + \widehat{D}^y_{v\otimes g})(u \otimes f). \tag{3}$$

Пусть $f \in B$, $h \in B$, $g \in C$. Для $u \otimes f$, $v \otimes hg$ из (2)—(3) получим

$$\widehat{D}^x_{u\otimes f} = 0,$$

$$\widehat{D}^x_{v\otimes hg}(u \otimes f) = \widehat{D}^y_{u\otimes f}(v \otimes hg) =$$
$$= h(x)\widehat{D}^y_{u\otimes f}(v \otimes g) = h(x)\widehat{D}^x_{v\otimes g}(u \otimes f)$$

или

$$D^x_{v\otimes hg} - 1 - hg D^x_{v\otimes 1} = h(x) D^x v \otimes g - hg D^x_{v\otimes 1}.$$

Откуда $D^x_{v\otimes hg} = h(x) D^x v \otimes g$, $h \in B$, $g \in C$. Следовательно, $\pi\varphi : U \otimes A \longrightarrow 1 \otimes CW(B)$ — морфизм B-модулей. □

Следующее предложение доказывается так же, как предложение 2.3 в [14].

Предложение 1.10. *Пусть $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/Z(\mathcal{L})$ — алгебра Ли картановского типа $X(\mathcal{F}, \omega)$, $X = W, S, CS, H, CH, K$, V — $\widetilde{\mathcal{L}}_0$-модуль, $\dim V = 1$, $U = \overline{\mathrm{coind}} V$, J — нетривиальный неприводимый $\mathcal{L}$-подмодуль в U, ρ — представление $\mathcal{L}$ на U, $\rho(\mathcal{L}) = \mathfrak{L}$. Если $\mathfrak{L}^{(1)} = (\mathfrak{L}, J)^{(1)} \neq 0$, то $\overline{\mathcal{L}} = W(\mathcal{F})$.*

Предполагается, что $\mathcal{L}_0$ — прообраз в $\mathcal{L}$ стандартной максимальной подалгебры $\overline{\mathcal{L}}_0$, определение алгебры Ли $\widetilde{\mathcal{L}}_0$ дано при построении усеченного коиндуцированного модуля в п. 1.3.

§ 2. Модули над почти простыми алгебрами Ли, допускающие продолжения Картана

Алгебру Ли $\mathcal{L}$ назовем *почти простой*, если $\mathcal{L}/Z(\mathcal{L})$ — полупростая алгебра Ли с единственным минимальным идеалом $\bar{\mathfrak{g}}$, который является простой алгеброй Ли, т.е. $\bar{\mathfrak{g}} \cong \mathrm{ad}\,\bar{\mathfrak{g}} \subset \overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/Z(\mathcal{L}) \subset \mathrm{Der}\,\bar{\mathfrak{g}}$. Будем называть $\bar{\mathfrak{g}}$ сердцевиной алгебры Ли $\mathcal{L}$.

Пусть L — простая 1-градуированная алгебра Ли, $L_{[0]} = \mathcal{L}$ — почти простая алгебра Ли. Если $\bar{\mathfrak{g}}$ — классическая алгебра Ли, то либо $\mathcal{L} = \bar{\mathfrak{g}} \oplus Z(\mathcal{L})$, либо $\mathcal{L}$ изоморфна одной из алгебр Ли $\mathrm{sl}(pk)$, $\mathrm{gl}(pk)$, $\mathrm{pgl}(pk)$, и строение L описывается теоремой Кострикина — Острика [6] или теоремой Каца [2]. В этих теоремах предполагается, что представление $L_{[0]}$ на $L_{[-1]}$ является p-представлением. Согласно [10], [26], последнее предположение может быть опущено. Поэтому предположим, что $\bar{\mathfrak{g}}$ — неклассическая простая алгебра Ли. Всюду черта над символом будет обозначать переход к фактору по центру $Z(\mathcal{L})$. Рассмотрим $\bar{\mathcal{L}}$ вместе с подалгеброй $\bar{\mathcal{L}}_0$. В дальнейшем будем считать, что подалгебра $\bar{\mathcal{L}}_0$ удовлетворяет условиям:

i) $\bar{\mathcal{L}}_0$ — максимальная подалгебра в $\bar{\mathcal{L}}$, не содержащая $\bar{\mathfrak{g}}$,

ii) $\delta(\bar{\mathcal{L}}_0) \geqslant 3$,

iii) $N_{\bar{\mathcal{L}}}(\bar{\mathcal{L}}_0) = \bar{\mathcal{L}}_0$.

Условия i), iii) означают, что пара $(\bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{L}}_0)$ — транзитивная алгебра Ли.

Существование такой подалгебры для $p > 7$ может быть установлено с помощью сэндвичей. Действительно, согласно теореме Премета [18], $\bar{\mathfrak{g}}$ содержит сэндвичи алгебры $\bar{\mathcal{L}}$. Осуществляя спуск к толстым сэднdвичам, по теореме Кострикина [27] при $p > 7$ можно построить в $\bar{\mathcal{L}}$ сэндвич c толщины $\geqslant p-4$, лежащий в $\bar{\mathfrak{g}}$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}_0$ — максимальная подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$, содержащая $\ker_{\bar{\mathfrak{g}}} \operatorname{ad} c$. Тогда высота $\delta(\bar{\mathfrak{g}}_0)$ в $\bar{\mathfrak{g}}$ будет $\geqslant p-3$. Положим $\bar{\mathcal{L}}_0 = N_{\bar{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{g}}_0)$. Покажем, что $\bar{\mathcal{L}}_0$ обладает свойствами i)—iii).

i) Очевидно, $\bar{\mathcal{L}}_0$ не содержит $\bar{\mathfrak{g}}$. Пусть $\bar{M}$ — подалгебра в $\bar{\mathcal{L}}$, содержащая $\bar{\mathcal{L}}_0$, $\bar{M} \neq \bar{\mathcal{L}}_0$. Так как $\bar{\mathfrak{g}} \cap \bar{\mathcal{L}}_0 = N_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}}_0) = \bar{\mathfrak{g}}_0$ и $\bar{\mathfrak{g}}_0 \subset \bar{M} \cap \bar{\mathfrak{g}}$, то либо $\bar{M} \cap \bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}_0$, либо $\bar{M} \cap \bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}$. Допустим, что $\bar{M} \cap \bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}_0$. Так как $\bar{M} \neq \bar{\mathcal{L}}_0 = N_{\bar{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{g}}_0)$, то $[\bar{M}, \bar{\mathfrak{g}}_0] \not\subset \bar{\mathfrak{g}}_0$. С другой стороны, так как $\bar{\mathfrak{g}}$ — идеал в $\bar{\mathcal{L}}$, то $[\bar{M}, \bar{\mathfrak{g}}_0] \subset \bar{M} \cap \bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}_0$, получаем противоречие. Следовательно, $\bar{M} \cap \bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}$ и $\bar{\mathfrak{g}} \subset \bar{M}$.

ii) Так как $[c, \bar{\mathcal{L}}^{p-4}] \subset \bar{\mathfrak{g}} \cap \ker_{\bar{\mathcal{L}}} \operatorname{ad} c = \ker_{\bar{\mathfrak{g}}} \operatorname{ad} c \subset \bar{\mathfrak{g}}_0 \subset \bar{\mathcal{L}}_0$, то $\delta_{\bar{\mathcal{L}}}(\bar{\mathcal{L}}_0) \geqslant p-3$.

iii) Если $N_{\bar{\mathcal{L}}}(\bar{\mathcal{L}}_0) \neq \bar{\mathcal{L}}_0$, то, согласно i), для $\bar{M} = N_{\bar{\mathcal{L}}}(\bar{\mathcal{L}}_0)$ имеем $\bar{\mathfrak{g}} \subset \bar{M}$. Следовательно, $[\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}_0] \subset \bar{\mathcal{L}}_0 \cap \bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}_0$ и $\bar{\mathfrak{g}}_0$ — идеал в $\bar{\mathfrak{g}}$, что противоречит простоте $\bar{\mathfrak{g}}$.

Доказательство пунктов i), iii) не использует сэндвичи и является, по существу, доказательством следующей леммы.

Лемма. *Пусть $\mathcal{L}$ — почти простая алгебра Ли с сердцевиной $\bar{\mathfrak{g}}$. Если $\bar{\mathfrak{g}}_0$ — максимальная подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$, то $\bar{\mathcal{L}}_0 = N_{\bar{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{g}}_0)$ обладает свойствами* i), iii).

Пусть $\mathcal{L}$ — почти простая алгебра Ли, V — точный неприводимый $\mathcal{L}$-модуль, $(\bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{L}}_0)$ — пара, удовлетворяющая условиям i)—iii). Прообраз фильтрации в $\bar{\mathcal{L}}$, соответствующей подалгебре $\bar{\mathcal{L}}_0$, дает длинную фильтрацию пары $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \supset \mathcal{L}_0 \supset \ldots \supset \mathcal{L}_r \supsetneqq Z(\mathcal{L}) = \ldots, \quad r \geqslant 3.$$

Вместо пары $(\mathcal{L},\mathcal{L}_0)$ рассмотрим пару $(\mathfrak{L},\mathfrak{L}_0)$, которая строится следующим образом. Пусть $[\mathcal{L}]_p$ — p-замыкание $\mathcal{L}$ в $\mathrm{gl}(V)$, $\mathfrak{L}_0 = N_{[\mathcal{L}]_p}(\mathcal{L}_0)$, $\mathfrak{L} = \mathcal{L} + \mathfrak{L}_0$. Очевидно, пара $(\mathfrak{L},\mathfrak{L}_0)$ удовлетворяет условиям i)—iii).

Предложение 2.1 ($p>3$). *Если* $\mathfrak{L}^{(1)} = (V,\mathfrak{L})^{(1)} \neq 0$, *то* V — *неприводимый* $\mathfrak{L}_0$-*модуль.*

Доказательство. Допустим, что V — неприводимый $\mathfrak{L}_0$-модуль. Рассмотрим укороченную фильтрацию в $\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{L} = \widetilde{\mathfrak{L}}_{-1} \supset \widetilde{\mathfrak{L}}_0 \supset \ldots \supset \widetilde{\mathfrak{L}}_{r-2} \supset \widetilde{\mathfrak{L}}_{r-1} \supsetneqq \widetilde{\mathfrak{L}}_r = Z(\mathfrak{L}) = \ldots,$$

где $\widetilde{\mathfrak{L}}_i = \mathfrak{L}_i$, $i=-1,\ldots,r-1$. Согласно предложению 1.6, форма Гейзенберга на предпоследнем нецентральном члене фильтрации, т.е. на $\widetilde{\mathfrak{L}}_{r-2}$, нулевая. Обозначим через A ассоциативную коммутативную подалгебру в $\mathrm{gl}(V)$, порожденную $\widetilde{\mathfrak{L}}_{r-2}$, через B — подалгебру, порожденную $\widetilde{\mathfrak{L}}_{r-1}$. Пусть τ_A и τ_B — гомоморфизмы $\mathfrak{L}_0$ в $W(A)$, $W(B)$, соответственно, соответствующие присоединенному действию $\mathfrak{L}_0$ на $\widetilde{\mathfrak{L}}_{r-2}$, $\widetilde{\mathfrak{L}}_{r-1}$ соответственно. Согласно [30] (предложение 7.3), $\tau_A(\mathfrak{L}_0)$, $\tau_B(\mathfrak{L}_0)$ — транзитивные подалгебры в $W(A)$, $W(B)$. Согласно [30] (следствие 8.4),

$$V = U\otimes_K A,\ A = B\otimes C,\ A\cong \mathcal{O}_m,\ B\cong\mathcal{O}_n,$$
$$n<m,\ C\cong\mathcal{O}_{m-n},$$

$$\mathfrak{L}_0 = \widetilde{\mathfrak{L}}_0 \subset 1\otimes W(B) + \mathrm{gl}(U)\otimes BW(C) + \mathrm{gl}(U)\otimes A.$$
$$\mathfrak{L}\subset\Sigma = 1\otimes CW(B) + \mathrm{gl}(U)\otimes BW(C) + \mathrm{gl}(U)\otimes A.$$

Отметим, что $\dim U > 1$, так как в противном случае $\mathfrak{L}\subset N_{\mathrm{gl}(V)}(A)$ и $\mathfrak{L}\cap A$ — абелев нецентральный идеал в $\mathfrak{L}$ ($\widetilde{\mathfrak{L}}_{r-2}\subset \mathfrak{L}\cap A$), что противоречит полупростоте алгебры $\widetilde{\mathfrak{L}}$.

Обозначим через π проекцию Σ на $1\otimes CW(B)$ вдоль остальных слагаемых. Покажем, что если $l\in\mathfrak{L}$ и $\pi(l)\in 1\otimes W(B)$, то $l\in\mathfrak{L}_0$. Действительно, если $\pi(l)\in 1\otimes W(B)$, то из вида Σ заключаем, что $l\in N_{\mathfrak{L}}(B)$, т.е. $l\in N_{\mathfrak{L}}(B\cap\mathfrak{L})$. Если $\mathfrak{L}_0\neq N_{\mathfrak{L}}(B\cap\mathfrak{L})$, то для $M_0 = N_{\mathfrak{L}}(B\cap\mathfrak{L})$ из свойства i) подалгебры $\mathfrak{L}_0$ следует, что $\bar{\mathfrak{g}}\subset M_0$ и $[\bar{\mathfrak{g}},\overline{B\cap\mathfrak{L}}]$ — нетривиальный (т.к. $\bar{\mathfrak{g}}\subset\overline{\mathfrak{L}}\subset \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$) абелев идеал в $\bar{\mathfrak{g}}$, что противоречит простоте $\bar{\mathfrak{g}}$. Следовательно, $N_{\mathfrak{L}}(B\cap\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}_0$ и $l\in\mathfrak{L}_0$.

Согласно лемме 1.9, $\pi(\mathfrak{L})$ — B-подмодуль в $1\otimes CW(B)$. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — стандартные образующие алгебры $B\cong\mathcal{O}_n$. Так как $\tau_B(\mathfrak{L}_0)$ — транзитивная подалгебра в $W(B)$, то $\mathfrak{L}_0$ содержит элементы l_i такие, что

$$l_i \equiv x^{(\delta_B)}\partial_{x_i} (\mod 1\otimes BW(C) + \mathrm{gl}(U)\otimes A). \tag{4}$$

Теперь вернемся к стандартной фильтрации пары $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_0)$:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{-1} \supset \mathfrak{L}_0 \supset \ldots \supset \mathfrak{L}_{r-2} \supset \mathfrak{L}_{r-1} \supset \mathfrak{L}_r \supsetneqq \mathfrak{L}_{r+1} = Z(\mathfrak{L}) = \ldots .$$

Обозначим через B_1 ассоциативную подалгебру в $\mathrm{gl}(V)$, порожденную $\mathfrak{L}_r$, $B_1 \subset B$. Согласно [30] (предложение 7.3 и следствие 8.4), можно провести еще одно разделение переменных:

$$B = B_1 \otimes C_1 \cong \mathcal{O}_n, \quad B_1 \cong \mathcal{O}_s, \quad C_1 \cong \mathcal{O}_{n-s}, \quad 0 < s < n,$$

$$A = B \otimes C = B_1 \otimes C_1 \otimes C.$$

Выберем первые s образующих $x_1, \ldots, x_s$ алгебры B из B_1, а остальные $n-s$ образующих — из C_1. Так как $[\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_r] \subset \mathfrak{L}_r$, то $[\mathfrak{L}_0,\ B_1] \subset B_1$. Однако для элементов $l_i \in \mathfrak{L}_0$ вида (4), $i = 1, \ldots, s$, $[l_i,\ B_1] \not\subset B_1$. Получили противоречие. Таким образом, V — приводимый $\mathfrak{L}_0$-модуль. □

Всюду в дальнейшем предполагаем, что $(V, \mathcal{L}) = (L_{[-1]},\ L_{[0]})$, где $L = \oplus_{i \geqslant -1} L_{[i]}$ — простая 1-градуированная алгебра Ли, $\mathcal{L}$ — почти простая алгебра Ли с сердцевиной $\bar{\mathfrak{g}}$, $\bar{\mathfrak{g}}$ — неклассическая простая алгебра Ли.

Предложение 2.2. *V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль.*

Доказательство. Допустим, что V — приводимый $\mathfrak{g}$-модуль. По теореме Блока о дифференциально неприводимых модулях [25]

$$\mathcal{L} \subset \mathrm{gl}(X) \otimes 1 \otimes \mathcal{O}_n + 1 \otimes \mathrm{gl}(Y) \otimes \mathcal{O}_n + 1 \otimes 1 \otimes W_n = G,$$

$$\mathfrak{g} \subset \mathrm{gl}(X) \otimes 1 \otimes \mathcal{O}_n = \mathrm{Ass}\,\mathfrak{g}.$$

Здесь $\mathrm{Ass}\,\mathfrak{g}$ — ассоциативная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathrm{End}(V)$. Из последнего включения следует, что $\dim X > 1$. Если $\dim Y > 1$, то G содержит сумму коммутирующих неабелевых илеалов. Согласно [28], $L_{[2]} \subset \mathcal{L}^{(2)} \subset G^{(2)} = 0$ и L изоморфна классической алгебре Ли типа A_s с 1-градуировкой, что противоречит условию: $\mathcal{L} = L_{[0]}$ — почти простая алгебра Ли с неклассической сердцевиной $\bar{\mathfrak{g}}$.

Таким образом, $\dim Y = 1$, $V = X \otimes \mathcal{O}_n$,

$$\mathcal{L} \subset \mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_n + 1 \otimes W_n, \quad \mathrm{Ass}\,\mathfrak{g} = \mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_n,$$

проекция $\pi(\mathcal{L})$ алгебры $\mathcal{L}$ на W_n — TI-подалгебра в W_n, т.е. $\mathcal{O}_n$ не имеет нетривиальных собственных идеалов относительно $\pi(\mathcal{L})$, [13] (из приводимости $\mathfrak{g}$-модуля V следует, что $n > 0$). Так как в простой алгебре Ли L $L_{[0]} = [L_{[-1]},\ L_{[1]}]$, то $\mathcal{L}^{(1)}(V) = \mathcal{L}$. Согласно [13], $\mathcal{O}_n$-подмодуль в W_n, порожденный TI-подалгеброй в W_n, является TI-распределением над $\mathcal{O}_n$, которое в случае алгебраически замкнутого поля представляет собой алгебру Ли $W(\mathcal{F})$ специальных дифференцирований относительно некоторой структуры разделенных степеней на $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}(\mathcal{F})$. Согласно предложению 2.1 из [14], $\pi(\mathcal{L}) = 1 \otimes W(\mathcal{F})$ и $\mathrm{Ass}(\mathcal{L}) \cap (\mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F})) = \mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F})$. По лемме 1.8 простая 1-градуированная алгебра Ли L изоморфна одной из алгебр Ли картановского типа $W(\mathcal{F}_1)$, $S(\mathcal{F}_1, \omega)$ с градуировкой типа $(0,1)$. Отсюда получаем, что

$$\mathrm{sl}(X) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{L} \subset \mathrm{gl} \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F}) + 1 \otimes W(\mathcal{F}).$$

Следовательно, $\mathrm{sl}(X) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F})$ — единственный минимальный нецентральный идеал в $\mathcal{L}$. Но $\mathcal{L}$ имеет единственный минимальный нецентральный идеал $\mathfrak{g}$. Получили противоречие. Таким образом, V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль. □

Следствие 2.3. *Пусть $L = \oplus_{i \geqslant -1} L_{[i]}$ — простая 1-градуированная алгебра Ли, $(L_{[-1]}, L_{[0]}) = (V, \mathcal{L})$, $\mathcal{L}$ — почти простая алгебра Ли с неклассической сердцевиной $\bar{\mathfrak{g}}$. Если $\mathcal{L} \neq \mathfrak{g}$, то для любого $v \in V$ существует элемент $\varphi \in L_{[1]}$ такой, что $\varphi(v) \in \mathfrak{g} + < D >$, $\varphi(v) \notin \mathfrak{g}$.*

Доказательство. Пропуская каждый элемент $\varphi \in L_{[1]} \subset \mathcal{L}^{(1)} \subset \mathrm{Hom}(V, \mathcal{L})$ через проекцию $\pi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}/\mathfrak{g}$, получаем вложение $\mathfrak{g}$-модулей

$$\mathcal{L}^{(1)}/\mathfrak{g}^{(1)} \hookrightarrow \mathrm{Hom}(V, \mathcal{L}/\mathfrak{g}).$$

Так как $\mathcal{L}/\mathfrak{g}$ — тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль, а V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль (предложение 2.2), то $\mathrm{Hom}(V, \mathcal{L}/\mathfrak{g})$ — прямая сумма $\mathfrak{g}$-модулей, изоморфных V^*, разложение в прямую сумму соответствует выбору базиса в $\mathcal{L}/\mathfrak{g}$. В простой алгебре Ли L, $L_{[0]} = \mathcal{L} = [L_{[-1]}, L_{[1]}]$, откуда следует нужное утверждение. □

Вернемся к паре $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_0)$, которая рассматривалась в предложении 2.1. Обозначим через V_0 собственный максимальный $\mathfrak{L}_0$-подмодуль в V и положим $\overline{V} = V/V_0$. Так как $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_0)$ — транзитивная алгебра Ли и $\mathfrak{L}_0 = N_{[\mathcal{L}]_p}(\mathcal{L}_0)$, то $\mathfrak{L}$-модуль V можно вложить в усеченный коиндуцированный модуль $U = \overline{\mathrm{coind}}(\overline{V})$ (см. § 1). $\mathfrak{L}$-модуль U имеет естественную структуру $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модуля, где $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_0) = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{L}}_0)$ - минимальный флаг, соответствующий минимальному вложению $\tau : \overline{\mathcal{L}} \longrightarrow W(\mathcal{F})$, алгебра Ли $\mathfrak{L}$ действует дифференцированиями $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модуля U, $\tau_U(\mathfrak{L}) = \tau(\mathfrak{L})$. Согласно лемме 1.5, $Z(\mathfrak{L})$ действует на U скалярными операторами.

Рассмотрим стандартную фильтрацию в $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ и индуцированную фильтрацию в U,

$$F_iU = U_i = \mathfrak{m}^{i+1}U, \ i \geqslant -1. \tag{5}$$

Здесь $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в $\mathcal{O}(\mathcal{F})$. Тогда $V_0 = V \cap U_0$. Положим $V_i = V \cap U_i$. Так как $U/\mathfrak{m}U = V/V_0$, то можно выбрать элементы $v_1, \ldots, v_m \in V$, образующие базис свободного $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модуля U. Пусть $U = S \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F})$, $S =< v_1, \ldots, v_m >$, $G = 1 \otimes W(\mathcal{F}) + \mathrm{gl}(S) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F})$.

Фильтрация F индуцирует фильтрацию в G,

$$F_iG = 1 \otimes \mathfrak{m}^{(i+1)}W(\mathcal{F}) + \mathrm{gl}(S) \otimes \mathfrak{m}^{(i)}. \tag{6}$$

Очевидно, $\mathfrak{L}_0 \subset F_0G$. Положим $F_i\mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cap F_iG$.

Лемма 2.4. 1) *Если для $l \in \mathfrak{L}$ и некторого $i \geqslant 0$ $lV_i \subset V_i \neq 0$, то $l \in \mathfrak{L}_0$.*

2) *Для любого $v \in V_i \setminus V_{i+1}$, $i \geqslant 0$, существует элемент $l \in \mathfrak{L}_{-1} \setminus \mathfrak{L}_0$ такой, что $lv \in V_{i-1} \setminus V_i$.*

Доказательство. 1) Пусть $M_0 = \{l\mathfrak{L} \mid lV_i \subset V_i\}$. Очевидно, $M_0 \supset \mathfrak{L}_0$. Если $M_0 \neq \mathfrak{L}_0$, то, согласно свойству i), подалгебры $\mathfrak{L}_0$ $\mathfrak{g} \subset M_0$, но V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль (предложение 2.2) и $V_i \neq V$. Получили противоречие. Следовательно, $M_0 = \mathfrak{L}_0$.

2) следует из транзитивности $\tau_U(\mathfrak{L})$ в $W(\mathcal{F})$. □

Фильтрация F в V и $\mathfrak{L}$ (см. (5), (6)) индуцирует фильтрацию в продолжении Картана $\mathfrak{L}^{(1)} = (V, \ \mathfrak{L})^{(1)}$,

$$F_j\mathfrak{L}^{(1)} = \{\varphi \in \mathfrak{L}^{(1)} | \ \varphi(V_i) \subset F_{i+j}\mathfrak{L} \ \text{ для любого } i\}.$$

Фильтрация в i-ом продолжении Картана $\mathfrak{L}^{(i)}$ определяется по индукции. Напомним, что индукцией по $i + j$, $i, j \geqslant -1$, определяется произведение $[\mathfrak{L}^{(i)}, \ \mathfrak{L}^{(j)}] \subset \mathfrak{L}^{(i+j)}$, где $\mathfrak{L}^{(-1)} = V$, $\mathfrak{L}^{(0)} = \mathfrak{L}$, относительно которого $\hat{\mathfrak{L}} = \oplus_{i \geqslant -1}\mathfrak{L}^{(i)}$ является градуированной алгеброй Ли.

Предложение 2.5. 1) $F_{-q}\mathfrak{L}^{(1)} = F_{-1}\mathfrak{L}^{(1)}$ *для* $q > 1$.

2) *Если $F_{-1}\mathfrak{L}^{(1)} \neq F_0\mathfrak{L}^{(1)}$, то для любого $\varphi \in F_{-1}\mathfrak{L}^{(1)} \setminus F_0\mathfrak{L}^{(1)}$ существует элемент $v \in V_0 \setminus V_1$ такой, что $\varphi(v) \in F_{-1}\mathfrak{L} \setminus F_0\mathfrak{L}$.*

3) *Если $\mathfrak{L}^{(1)} = F_0\mathfrak{L}^{(1)}$, то $\mathfrak{L}^{(i)} = F_{i-1}\mathfrak{L}^{(i)} \neq F_i\mathfrak{L}^{(i)}$.*

4) $[F_s\mathfrak{L}^{(i)}, \ F_t\mathfrak{L}^{(j)}] \subset F_{s+t}\mathfrak{L}^{(i+j)}$.

Доказательство. 1)—2) Пусть $\mathfrak{L}^{(1)} = F_{-q}\mathfrak{L}^{(1)} \neq F_{-q+1}$, $\varphi \in F_{-q}\mathfrak{L}^{(1)} \setminus F_{-q+1}\mathfrak{L}^{(1)}$. Существует минимальное k такое, что

$V_k \neq 0$, $\varphi(V_k) \subset F_{k-q}\mathfrak{L}$, $\varphi(V_k) \not\subset F_{k-q+1}\mathfrak{L}$. Так как для $G = \mathrm{Der}(U, \mathcal{F})$ $F_{-\lambda}G = F_{-1}G$ при $\lambda > 1$, то $k - q \geqslant -1$, т.е. $k \geqslant q - 1$.

Если $k - q \geqslant 0$, то $[\mathfrak{L}, \varphi(V_k)] \subset F_{k-q-1}\mathfrak{L} \setminus F_{k-q}\mathfrak{L}$ (см. лемму 2.4, 2)). Так как

$$[l,\ \varphi](v_k) = [l,\ \varphi(v_k)] - \varphi(lv_k)$$

и k — минимальное, то $\varphi(lv_k) \in F_{k-q}\mathfrak{L}$ для любых $l \in \mathfrak{L}_{-1} = F_{-1}\mathfrak{L}$ и $v_k \in V_k$. Однако существует элемент $l \in F_{-1}\mathfrak{L}$ такой, что $[l,\ \varphi(v_k)] \in F_{k-q-1}\mathfrak{L}$. Следовательно, $0 \neq [l,\ \varphi] \in F_{-q-1}\mathfrak{L}^{(1)} \setminus F_{-q}\mathfrak{L}^{(1)}$, что противоречит выбору q. Таким образом, $k - q = -1$ и существует $v \in V_k$, для которого

$$\varphi(v) = D_\varphi(v) + A_\varphi(v) \in F_{-1}\mathfrak{L} \setminus F_0\mathfrak{L},\ D_\varphi(v) \in 1 \otimes W(\mathcal{F}),$$

$$A_\varphi(v) \in \mathrm{gl}(S) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{F}),\ \text{т.е.} D_\varphi(v) \in 1 \otimes W(\mathcal{F})_{-1} \setminus 1 \otimes W(\mathcal{F})_0.$$

Существует, согласно лемме 2.4, 2), $w \in V_0$ такой, что

$$V_{-1} \setminus V_0 \ni (1 \otimes D_\varphi(v) + A_\varphi(v))(w) = \varphi(v)(w) =$$

$$\varphi(w)(v) = (1 \otimes D_\varphi(w) + A_\varphi(w))(v).$$

Пусть $k \geqslant 1$. Левая часть равенства содержится в $V_{-1} \setminus V_0$, а правая — в V_{k-1}. Но $k - 1 \geqslant 0$, следовательно, $q \leqslant 1$, а при $q = 1$, $k = 0$.

3) Индукция по $i \geqslant 2$. Например, при $i = 2$ допустим, что $\mathfrak{L}^{(2)} = F_q\mathfrak{L}^{(2)} \neq F_{q+1}\mathfrak{L}^{(2)}$, $q \leqslant 0$. Пусть $\varphi \in F_q\mathfrak{L}^{(2)} \setminus F_{q+1}\mathfrak{L}^{(2)}$, $v \in F_kV \setminus F_{k+1}V$, $\varphi(v) \in F_{q+k}\mathfrak{L}^{(1)} \setminus F_{q+k+1}\mathfrak{L}^{(1)}$. Будем считать k минимальным. По условию $q + k \geqslant 0$, следовательно, $k \geqslant -q \geqslant 0$.

Пусть $v_s \in F_sV \setminus F_{s+1}V$, $\varphi(v_k)(v_s) \in F_{q+k+s}\mathfrak{L} \setminus F_{q+k+s+1}\mathfrak{L}$ и s — минимальное. Из условия симметричности $\varphi(v_k)(v_s) = \varphi(v_s)(v_k)$ следует, что $\varphi(v_s) \in F_{q+s}\mathfrak{L}^{(1)} \setminus F_{q+s+1}\mathfrak{L}^{(1)}$. Значит, $q + s \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$. Таким образом, $q + k + s \geqslant 0$. Поэтому существует $l \in F_{-1}\mathfrak{L} \setminus F_0\mathfrak{L}$ такой, что $[l,\ \varphi(v_k)(v_s)] \in F_{q+k+s-1}\mathfrak{L} \setminus F_{q+k+s}\mathfrak{L}$. С другой стороны,

$$[l,\ \varphi(v_k)(v_s)] = [l,\ \varphi](v_k)(v_s) + \varphi(lv_k)(v_s) + \varphi(v_k)(lv_s) =$$

$$[l,\ \varphi](v_k)(v_s) + \varphi(lv_k)(v_s) + \varphi(lv_s)(v_k).$$

В силу выбора φ, v_k, v_s $\varphi(lv_k)(v_s)$, $\varphi(lv_k)(v_s) \in F_{q+k+s}\mathfrak{L}$. Таким образом,

$$[l, \varphi](v_k)(v_s) \in F_{q+k+s-1}\mathfrak{L} \setminus F_{q+k+s}\mathfrak{L},$$

что невозможно, так как $[l,\ \varphi] \in \mathfrak{L}^{(2)} = F_q\mathfrak{L}^{(2)}$. Следовательно, $q \geqslant 1$. Если $q > 1$, то $[[\mathfrak{L}^{(2)},\ V],\ V] \subset \mathfrak{L}_0$ и $[[\mathfrak{L}^{(2)},\ V],\ V]$ — нецентральный идеал в $\mathfrak{L}$, что противоречит транзитивности $(\overline{\mathfrak{L}},\ \overline{\mathfrak{L}}_0)$.

4) легко проверяется индукцией по $i+j$. □

Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{-1} \supset \mathfrak{L}_0 \supset \mathfrak{L}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{L}_r \supsetneqq \mathfrak{L}_{r+1} = Z(\mathfrak{L}) = \ldots$ — естественная фильтрация в $\mathfrak{L}$, соответствующая подалгебре $\mathfrak{L}_0$. $\mathfrak{L}$-модуль V назовем модулем *высоты* 1 *в смысле Рудакова*, если $Z(\mathfrak{L})$ отщепляется в $\mathfrak{L}_1$, т.е. $\mathfrak{L}_1 = \tilde{\mathfrak{L}}_1 \oplus Z(\mathfrak{L})$, причем $\tilde{\mathfrak{L}}_1$ — идеал в $\mathfrak{L}_0$ и $\tilde{\mathfrak{L}}_1$ действует нильпотентно на V.

Напомним, что рассматривается простая градуированная алгебра Ли $L = \oplus_{i\geqslant -1} L_{[i]}$, $V = L_{[-1]}$, $L_{[0]} = \mathcal{L}$ — почти простая алгебра Ли с сердцевиной $\bar{\mathfrak{g}}$, $(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{L}}_0)$ — пара, удовлетворяющая условиям i)—iii), $\mathfrak{L}_0 = N_{[\mathcal{L}]_p}(\mathcal{L}_0)$, $\mathfrak{L} = \mathcal{L} + \mathfrak{L}_0$. $\mathfrak{L}$-модуль V вложен в усеченный коиндуцированный модуль $\overline{\mathrm{coind}}(\overline{V})$ и наделен фильтрацией, соответствующей структуре разделенных степеней в $\mathcal{O}(\mathcal{F})$, где $\overline{\mathcal{L}} \hookrightarrow W(\mathcal{F})$ — минимальное вложение. Стандартные образующие $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ обозначим через $x_1, \ldots, x_n$.

Теорема 2.6. *Если* $\mathfrak{L}^{(1)} = F_{-1}\mathfrak{L}^{(1)} \neq F_0\mathfrak{L}^{(1)}$ *и для любых* $\mathfrak{L}_0$*-подмодуля* $\overline{M}$ *в* $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$ *и множества его образующих* N $\sum_{i=0}^{p-2} \mathfrak{L}_0^i N = \overline{M}$, *то* V *—* $\mathfrak{L}$*-модуль высоты* 1.

Доказательство. Пусть ρ — представление $\mathfrak{L}_0$ на $V_{-1}/V_0 = \overline{V}$. Допустим $\rho(\mathfrak{L}_1) \neq \rho(Z(\mathfrak{L}))$. Напомним, что V_{-1}/V_0 — неприводимый $\mathfrak{L}_0$-модуль. Обозначим V_i/V_{i+1} через $V[i]$, таким образом, $\overline{V} = V_{[-1]}$, $V_{[0]} =< x_1, \ldots, x_n > \otimes V_{[-1]}$. Элементы из $\mathfrak{L}_1$ действуют тривиально на $< x_1, \ldots, x_n >\cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}$, поэтому для представления ρ_0 алгебры $\mathfrak{L}_0$ на $V_{[0]}$ имеем

$$\rho_0(l) = 1 \otimes \rho(l), \ l \in \mathfrak{L}_1. \tag{7}$$

Для любого $\varphi \in F_{-1}\mathfrak{L}^{(1)} \backslash F_0\mathfrak{L}^{(1)}$, согласно предложению 2.5,2), существует $v \in V_0 \setminus V_1$ такой, что $\varphi(v) \in \mathfrak{L}_{-1} \setminus \mathfrak{L}_0$.

Из предложения 2.2 и свойства i) подалгебры $\overline{\mathfrak{L}}_0$ следует, что $\mathfrak{L}_0 = \mathrm{stab}_{\mathfrak{L}}(V_0)$ — стабилизатор V_0 в $\mathfrak{L}$. Поэтому $\overline{[[[\mathfrak{L}^{(1)}], V_0], V_0]} = ([[\mathfrak{L}^{(1)}, V_0], V_0] + V_0)/V_0$ — нетривиальный $\mathfrak{L}_0$-подмодуль в $V_{[-1]}$. Из неприводимости $\mathfrak{L}_0$-модуля $V_{[-1]}$ получаем

$$\overline{[[[\mathfrak{L}^{(1)}], V_0], V_0]} = V_{[-1]}. \tag{8}$$

Пропуская $\varphi \in \mathfrak{L}^{(1)}$ через проекцию $\mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_{[-1]}$, имеем отображение $\overline{\varphi}: \ V_0 \longrightarrow \mathfrak{L}_{[-1]} \cong W(\mathcal{F})_{[-1]}$. Из обычного действия $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{L}^{(1)}$ получаем

$$\overline{[l,\ \varphi(v)]} = \overline{[l,\ \varphi]}(\bar{v}) - \overline{\varphi}(\overline{lv}), \tag{9}$$
$$l \in \mathfrak{L}_0,\ v \in V_0,\ \varphi \in \mathfrak{L}^{(1)}.$$

Так как $\rho(\mathfrak{L}_1)$ — нильпотентный нецентральный идеал в $\rho(\mathfrak{L}_0)$, то, согласно лемме 1.1 [14] (см. также [17]), либо $\rho(\mathfrak{L}_1)$ является алгеброй Гейзенберга, либо $\rho(\mathfrak{L}_1)$ содержит абелев идеал, отличный от центра. Рассмотрим эти случаи.

a) $\rho(\mathfrak{L}_1)$ — алгебра Гейзенберга,

$$\rho(\mathfrak{L}_1) =< D_1, \dots, D_m,\ y_1, \dots, y_m,\ 1 >,\ D_i^p = y_i^p = 0, \tag{10}$$
$$[D_i,\ y_j] = \delta_{ij},\ [D_i,\ D_j] = [y_i,\ y_j] = 0.$$

Ассоциативная алгебра с образующими D_i, y_j, удовлетворяющими соотношениям (10), изоморфна алгебре всех линейных операторов на пространстве алгебры срезанных многочленов $\mathcal{O}_m$. Поэтому любой точный модуль над алгеброй Гейзенберга, в котором выполняются соотношения (10), изотипен и, следовательно, представим в виде $S \otimes \mathcal{O}_m$.

Пусть A — подалгебра в $\mathrm{End}(V_{[-1]})$, порожденная $y_1, \dots, y_m$. Тогда $A \cong \mathcal{O}_m$, $V_{[-1]}$ — свободный A-модуль, $V[-1] = S \otimes A$, $D_i(s \otimes f) = s \otimes D_i f$, $f \in A$. Из (7) получаем $V_{[0]} = T \otimes A$, где $T \subset < x_1, \dots, x_n > \otimes S$.

Пусть $\overline{\varphi}(\bar{v}) = \partial_\xi \in \mathfrak{L}_{[-1]} = W(\mathcal{F})_{[-1]}$, $\bar{v} \in V_{[0]}$, $\varphi \in \mathfrak{L}^{(1)}$. Тогда для некоторого $\bar{w} \in T \otimes 1 \in V_{[0]} = T \otimes A$

$$0 \neq \partial_\xi \bar{w} = \overline{\varphi}(\bar{v})(\bar{w}) = \overline{\varphi}(\bar{w})(\bar{v}) \quad \text{т.е. } \overline{\varphi}(\bar{w}) \neq 0.$$

Следовательно, для некоторого $\bar{w}_1 \in T \otimes 1$

$$0 \neq \overline{\varphi}(\bar{w})(\bar{w}_1) \in S \otimes 1 \subset V_{[-1]}.$$

Теперь,

$$0 \neq \overline{\varphi}(\bar{w})(y^{(\delta)}\bar{w}_1) = y^{(\delta)}\overline{\varphi}(\bar{w})(\bar{w}_1) \in S \otimes y^{(\delta)} \subset V_{[-1]}.$$

С другой стороны,

$$\overline{\varphi}(\bar{w})(y^{(\delta)}\bar{w}_1) = \overline{\varphi}(y^{(\delta)}\bar{w}_1)(\bar{w}) \in S \otimes 1 \subset V_{[-1]}.$$

Получили противоречие. Таким образом, случай a) невозможен.

b) $\rho(\mathfrak{L}_1)$ содержит абелев нецентральный идеал $\mathfrak{A}$. Обозначим через A ассоциативную подалгебру в $\mathrm{End}(V_{[-1]})$, порожденную $\mathfrak{A}$. Так как $V_{[-1]}$ — дифференциально неприводимый $\mathfrak{A}$-модуль, то $V_{[-1]} = S \otimes A$, $A \cong \mathcal{O}_m$ (см. [25]). Присоединенное действие $\rho(\mathfrak{L}_0)$ на $\mathfrak{A}$ индуцирует гомоморфизм $\tau_A : \mathfrak{L}_0 \longrightarrow W(A) =$

$\operatorname{Der} A = W_m$, $\tau_A(\mathfrak{L}_0)$ — TI-подалгебра в W_m. Согласно [13], $A = \mathcal{O}_m = \mathcal{O}(\mathcal{F}_1)$, $\tau_A(\mathfrak{L}_0)$ — транзитивная подалгебра в $W(\mathcal{F}_1)$.

Так как $\mathfrak{L}_1\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^{(2)} \subset \mathcal{O}(\mathcal{F})$ и $V_{[0]}$ — A-подмодуль в свободном A-модуле $\mathfrak{m}_{[1]} \otimes V_{[-1]}$ (см. (7)), на котором $\mathfrak{L}_0$ действует дифференциальными операторами, $\tau_{V_{[0]}} = \tau_A$, то $V_{[0]}$ — свободный A-модуль.

Максимальный идеал $\mathfrak{m}_A$ имеет фильтрацию, индуцированную структурой разделенных степеней в A, $\mathfrak{m}_A \supset \mathfrak{m}_A^{(2)} \supset \ldots \supset \mathfrak{m}_A^{(|\delta|)} \supset 0$. Покажем, что

$$\overline{\mathfrak{L}^{(1)}(\mathfrak{m}_A^{(i)} V_{[0]})} \neq \overline{\mathfrak{L}^{(1)}(\mathfrak{m}_A^{(i+1)} V_{[0]})} \subset \mathfrak{L}_{[-1]} = W(\mathcal{F})_{[-1]},$$

$0 \leqslant i \leqslant |\delta| - 1$.

Так как

$$\mathfrak{L}_0(\mathfrak{m}_A^{(i)} V_{[0]}) + \mathfrak{m}_A^{(i)} V_{[0]} = \mathfrak{m}_A^{(i-1)} V_{[0]},$$

то, согласно (9), из равенства

$$\mathfrak{L}^{(1)}(\mathfrak{m}_A^{(i)} V_{[0]}) = \mathfrak{L}^{(1)}(\mathfrak{m}_A^{(i+1)} V_{[0]})$$

следует

$$\overline{\mathfrak{L}^{(1)}(\mathfrak{m}_A V_{[0]})} = \overline{\mathfrak{L}^{(1)}(V_{[0]})}.$$

Таким образом, для любых $\varphi \in \mathfrak{L}^{(1)}$, $v_0 \in V_{[0]}$ найдется $v_1 \in \mathfrak{m}_A V_{[0]}$ такой, что $\overline{\varphi}(v_0) = \overline{\varphi}(v_1)$. Следовательно, для любого $w \in V_{[0]}$

$$\overline{\varphi}(v_0)(w) = \overline{\varphi}(v_1)(w) = \overline{\varphi}(w)(v_1) \in \mathfrak{m}_A V_{[-1]},$$

т.е. $\overline{[[\mathfrak{L}^{(1)},\ V_0],\ V_0]} \subset \mathfrak{m}_A V_{[-1]} \neq V_{[-1]}$, что противоречит (8).

Мы получили фильтрацию в $\mathfrak{L}_0$-модуле $\overline{M} = \overline{\mathfrak{L}^{(1)}(V_0)} \subset \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$, $\overline{M} = \overline{M}_0 \subset \overline{M}_1 \subset \ldots \overline{M}_{|\delta|}$, $\overline{M}_i = \overline{\mathfrak{L}^{(1)}(\mathfrak{m}_A^{(i)} V_{[0]})}$, $\overline{M}_i \neq \overline{M}_{i+1}$. Из (9) следует $\overline{M}_i = \mathfrak{L}_0 \overline{M}_{i+1} + \overline{M}_{i+1}$. Таким образом, $\overline{M}_{|\delta|}$ порождает $\mathfrak{L}$-модуль $\overline{M}$. Так как $|\delta| > p - 2$, то $\sum_{i=0}^{p-2} \mathfrak{L}_0^i \overline{M}_{|\delta|} \neq \overline{M}$, что противоречит условию теоремы.

Итак, получили $\rho(\mathfrak{L}_1) = \rho(Z(\mathfrak{L}))$. Следовательно, каждый элемент из $\mathfrak{L}_1$ имеет вид

$$l = \tau(l) + a + \alpha \cdot 1,\ \ \tau(l) \in W(\mathcal{F})_1,\ \ a \in \mathfrak{m}\,\mathrm{gl}(\overline{V}).$$

Так как $\mathfrak{L}_0$ — p-подалгебра в $\mathrm{gl}(U)$, $U = \overline{\mathrm{coind}}(\overline{V})$, то $\alpha \cdot 1 \in Z(\mathfrak{L})$. Согласно лемме 1.5, $Z(\mathfrak{L})$ действует скалярными операторами на U, поэтому $\mathfrak{L}_1 = \widetilde{\mathfrak{L}}_1 \oplus Z(\mathfrak{L})$, где $\widetilde{\mathfrak{L}}_1 = \mathfrak{L}_1 \cap F_1 \operatorname{Der}(U,\ \mathcal{F})$ —

подалгебра Ли в $\mathfrak{L}_1$. Так как $F_1 \operatorname{Der}(U, \mathcal{F})$ состоит из нильпотентов, то и $\tilde{\mathfrak{L}}$ состоит из нильпотентов. Так как $\mathfrak{L}_0 \subset F_0 \operatorname{Der}(U, \mathcal{F})$ и $[F_0 \operatorname{Der}(U, \mathcal{F}), F_1 \operatorname{Der}(U, \mathcal{F})] \subset F_1 \operatorname{Der}(U, \mathcal{F})$, то $\tilde{\mathfrak{L}}_1$ — идеал в $\mathfrak{L}_0$. □

Подалгебру $\overline{\mathfrak{L}}_0$ в $\overline{\mathfrak{L}}$, удовлетворяющую условиям i)—iii), можно выбирать разными способами. В следующей теореме предполагается, что $\overline{\mathfrak{L}}$ выбрана некоторым оптимальным способом.

Согласно предложению 2.1, $\mathfrak{L}_0$-модуль V приводим. Вложим V в $\mathfrak{L}$-модуль $U = \overline{\operatorname{coind}}(\overline{V})$, где $\overline{V} = V/V_0$ — неприводимый $\mathfrak{L}$-модуль, тогда $\mathfrak{L}_0 = N_{[\mathcal{L}]_p}(\mathcal{L}_0)$, $\mathfrak{L} = \mathcal{L} + \mathfrak{L}_0$. Фильтрации в V, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^{(1)} = (V, \mathfrak{L})^{(1)}$ индуцированы стандартной фильтрацией в $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модулях U, $\operatorname{Der}(U, \mathcal{F})$.

Теорема 2.7. *Пусть $L = \oplus_{i \geqslant -1} L_{[i]}$ — простая градуированная алгебра Ли, $V = L_{[-1]}$, $L_{[0]} = \mathcal{L}$ — почти простая алгебра Ли с сердцевиной $\overline{\mathfrak{g}}$, $\overline{\mathcal{L}}_0$ — подалгебра в $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/Z(\mathcal{L})$, удовлетворяющая условиям i)—iii), и $\overline{\mathcal{L}}_0 \cap \overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{g}}_0$ — максимальная подалгебра в $\overline{\mathfrak{g}}$. Если $L_{[1]} \subset F_0 \mathfrak{L}^{(1)}$ и $\overline{\mathfrak{g}}_0$ — подалгебра минимальной коразмерности в $\overline{\mathfrak{g}}$, тогда V — $\mathfrak{L}$-модуль высоты 1.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру Ли $\tilde{L} = \oplus_{i \geqslant -1} \tilde{L}_{[i]}$, $\tilde{L}_{[i]} = L_{[i]}$, $i \neq 0$, $\tilde{L}_{[0]} = L_{[0]} + N_{[L_0]_p}(\mathcal{L}_0) = \mathfrak{L}$, где $[L_{[0]}]_p$ — p-замыкание $L_{[0]}$ в $\operatorname{Der} L$. Фильтрация F в $\mathfrak{L}^{(i)}$ индуцирует фильтрацию в $\tilde{L}_{[i]}$. Согласно предложению 2.5, 3), $L_{[i]} = F_{i-1} L_{[i]} \neq F_i L_{[i]}$, $i > 0$. Фильтрации, очевидно, согласованы, т.е.

$$[F_i \tilde{L}_{[s]}, F_j \tilde{L}_{[t]}] \subset F_{i+j} \tilde{L}_{[s+t]}.$$

Рассмотрим новую фильтрацию в $\tilde{L}$:

$$\tilde{L} = \mathcal{M}_{-1} \supset \mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \dots, \quad \mathcal{M}_j = \oplus_{i \geqslant -1} F_j \tilde{L}_{[i]}. \tag{11}$$

Можно считать, что $L_{[3]} \neq 0$, тогда $\mathcal{M}_2 \neq 0$, согласно предложению 2.5, 3). Пусть $M = \operatorname{gr} \mathcal{M} = \oplus_{i \geqslant -1} M_{[i]}$. Из (11) получаем

$$M_{[-1]} = V_{-1}/V_0 \oplus \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0 = V_{[-1]} \oplus \mathfrak{L}_{[-1]},$$

$$M_{[0]} = V_0/V_1 \oplus \mathfrak{L}_0/F_1\mathfrak{L} \oplus F_0 L_{[1]}/F_1 L_{[1]} =$$

$$Q_{[-1]} + \tilde{\mathfrak{L}}_{[0]} + \tilde{Q}_{[1]}, \quad \text{где} \quad Q_{[-1]} = V_0/V_1, \ \tilde{Q}_{[1]} = F_0 L_{[1]}/F_1 L_{[1]},$$

$$\tilde{\mathfrak{L}}_{[0]} = F_0\mathfrak{L}/F_1\mathfrak{L}, \ [Q_{[-1]}, V_{[-1]}] = 0, \ [\tilde{Q}_{[1]}, \mathfrak{L}_{[-1]}] = 0.$$

Доказательство теоремы разбивается на несколько шагов.

a) Покажем, что $M_{[-1]}$ — неприводимый $M_{[0]}$-модуль. Пусть $J \neq 0$ — $M_{[0]}$-подмодуль в $M_{[-1]}$. Если $[Q_{[-1]},\ J] \neq 0$, то $\widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]}$ — подмодуль в $V_{[-1]}$. Так как $V_{[-1]}$ — неприводимый $\widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]}$-модуль, то $[Q_{[-1]},\ J] = V_{[-1]} \subset J$. Теперь, $[\tilde{Q}_{[1]},\ V_{[-1]}] = [V,\ L_{[1]}] + F_0\mathfrak{L}/F_1\mathfrak{L} = \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_{[-1]}$. Таким образом, $\mathfrak{L}_{[-1]} \subset J$ и $J = M_{[-1]}$. Если $[Q_{[-1]},\ J] = 0$, то $J \subset V_{[-1]}$, следовательно, $J = V_{[-1]}$. Однако $[\tilde{Q}_{[1]},\ V_{[-1]}] = \mathfrak{L}_{[-1]} \subset J$, получаем противоречие. Таким образом, $M_{[-1]}$ — неприводимый $M_{[0]}$-модуль.

b) Априори, фильтрованная алгебра Ли $\mathcal{M}$ не является транзитивной. Обозначим через μ представление $M_{[0]}$ на $M_{[-1]}$. Для любого $v \in V_0 \backslash V_1$ существует $l \in \mathfrak{L}_1 \backslash \mathfrak{L}_0$ такое,что $[l,\ v] \in V_{-1} \backslash V_0$. Следовательно, μ является точным представлением $Q_{[-1]}$ на $M_{[-1]}$, μ является точным и на $\widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]}$. Поэтому $\mu(Q_{[-1]})$, $\mu(\widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]})$ обозначим также через $Q_{[-1]}$ и $\widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]}$.

Положим $Q_{[1]} = \mu(\tilde{Q}_{[1]})$. Так как $L_{[1]} = F_0 L_{[1]}$, $[L_{[-1]},\ L_{[1]}] = [V,\ L_{[1]}] = L_{[0]} = \mathcal{L}$ и $\mathcal{L}/\mathcal{L}_0 = \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_{[-1]}$, то $[V_{[-1]},\ Q_{[1]}] = \mathfrak{L}_{[-1]}$ и $\mu(\tilde{Q}_{[1]}) \neq 0$.

c) Пусть $Q = Q_{[-1]} + Q_{[0]} + Q_{[1]}$, $Q_{[0]} = [Q_{[-1]},\ Q_{[1]}]$. Тогда Q — градуированный идеал в $\mu(M_{[0]})$, а $M_{[-1]} = V_{[-1]} \oplus \mathfrak{L}_{[-1]}$ — градуированный Q-модуль. Покажем, что $Q_{[0]} \neq 0$ и, следовательно, Q — некоммутативный идеал в $\mu(M_{[0]})$.

Пусть $Q^0_{[1]} = \{l \in Q_{[1]} \mid [l,\ Q_{[-1]}] = 0\}$, $\quad i = -1, 1$. $Q^0_{[1]}$ — абелев идеал в $\mu(M_{[0]})$, состоящий из нильпотентов. Из неприводимости $M_{[0]}$-модуля $M_{[-1]}$ следует $Q^0_{[1]} = 0$.

d) Покажем, что $M_{[-1]} = X \otimes \mathcal{O}_m, \qquad X = X'_{[-1]} \oplus X''_{[-1]}$,

$$V_{[-1]} = X'_{[-1]} \otimes \mathcal{O}_m, \qquad \mathfrak{L}_{[-1]} = X''_{[-1]} \otimes \mathcal{O}_m,$$

$$\operatorname{Ass} Q = \mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_m,\ \mu(M_{[0]}) \subset \mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_m + 1 \otimes W_m,$$

$$Q^{(2)} = (M_{[-1]},\ Q)^{(2)} \neq 0.$$

Так как $M_{[-1]}$ — дифференциально неприводимый Q-модуль, то по теореме Блока [25]

$$M_{[-1]} = X \otimes Y \otimes \mathcal{O}_m,$$

$$\mu(M_{[0]}) \subset \mathrm{gl}(X) \otimes 1 \otimes \mathcal{O}_m + 1 \otimes \mathrm{gl}(Y) \otimes \mathcal{O}_m + 1 \otimes 1 \otimes W_m = G,$$

$$\operatorname{Ass} Q = \mathrm{gl}(X) \otimes 1 \otimes \mathcal{O}_m.$$

Согласно п. c), Q — неабелева алгебра Ли, поэтому $\dim X > 1$. Если $\dim Y > 1$, то G содержит сумму коммутирующих неабелевых идеалов. Однако $F_2L_{[3]}/F_3L_{[3]} \subset M_{[2]}$,

$$[F_2L_{[3]}/F_3L_{[3]},\ \mathfrak{L}_{[-1]}]_M = 0,$$

$$[[F_2L_{[3]}/F_3L_{[3]},\ V_{[-1]}],\ V_{[-1]}]_M = \tilde{Q}_{[1]}.$$

Следовательно, $Q^{(2)} = (M_{[-1]},\ Q)^{(2)} \neq 0$. Если $\dim Y > 1$, то алгебра Ли G содержит сумму коммутирующих неабелевых идеалов, поэтому, согласно [28], $G^{(2)} = 0$. Так как $0 \neq Q^{(2)} \subset G^{(2)}$, то $\dim Y = 1$ и, следовательно, $\mu(M_{[0]}) \subset \mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_m + 1 \otimes W_m$, $M_{[-1]} = X \otimes \mathcal{O}_m$, $\mathrm{Ass}\, Q = \mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_m$.

Одномерный тор $T = \{\Phi_t,\ t \in K^*\} \subset GL(M_{[-1]})$, задающий градуировку в $M_{[-1]}$, $\Phi_t|_{V_{[-1]}} = t^{-1} \cdot \mathrm{id}$, $\Phi_t|_{\mathfrak{L}_{[-1]}} = \mathrm{id}$, действует сопряжениями на Q, $\Phi_t q \Phi_t^{-1} = t^i q$, $q \in Q_{[i]}$. Следовательно, T действует сопряжениями на централизаторе Q в $\mathrm{End}(M_{[-1]})$, изоморфном $\mathcal{O}_m$. T имеет лишь два ненулевых весовых подпространства в $M_{[-1]}$. Поэтому T действует тривиально на $\mathcal{O}_m$, следовательно, получаем разложение $X = X' \oplus X''$, $V_{[-1]} = X'_{[-1]} \otimes \mathcal{O}_m$, $\mathfrak{L}_{[-1]} = X''_{[-1]} \otimes \mathcal{O}_m$.

e) Пусть λ — представление Q на X,

$$\lambda(Q) = Q + \mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_m / \mathrm{gl}(X) \otimes \mathfrak{m}.$$

Покажем, что $\lambda(Q) = \mathrm{sl}(X)$ или $\mathrm{sp}(X)$.

Для $l \in Q_{[i]}$, $i = \pm 1$, $l^2 = 0$, в $\mathrm{End}(M_{[-1]})$. Пусть H — алгебраическая подгруппа, порожденная $\exp tl$, $t \in K$, $l \in Q_{[i]}$, $i = \pm 1$. Очевидно, $Q \in \mathrm{Lie}(H)$. Группа H состоит из $\mathcal{O}_m$-эндоморфизмов пространства $M_{[-1]}$ и так как, согласно d), $\lambda(Q)$-модуль X неприводим, то X — неприводимый $\lambda(H)$-модуль. Следовательно, $\lambda(H)$ — редуктивная группа и, значит, $\lambda(\mathrm{Lie}(H))$ — прямая сумма не более чем одномерного центра и s слагаемых, которые являются классическими простыми алгебрами Ли и, возможно, алгебрами Ли $\mathrm{sl}(pk)$, $\mathrm{gl}(pk)$, $\mathrm{psl}(pk)$.

Так как $\lambda(Q)$ — неприводимая подалгебра в $\mathrm{gl}(X)$, то $\lambda(Q)$ содержит все нецентральные минимальные идеалы алгебры $\lambda(\mathrm{Lie}(H))$. Кроме того, согласно d), $0 \neq Q^{(2)} \subset (\mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_m)^{(2)} = (\mathrm{gl}(X))^{(2)} \otimes \mathcal{O}_m$ (см. лемму 1.7). Поэтому $\lambda(Q)^{(2)} = (X,\ \lambda(Q))^{(2)} \neq 0$ и, согласно [28], число s прямых слагаемых в $\lambda(\mathrm{Lie}(H))$ равно 1.

Так как $\lambda(Q)^{(2)} \neq 0$, то $B \subset \lambda(Q) \subset (\mathrm{Der}\, B) + \mathfrak{z}$, $B = \mathrm{sp}(X)$ или $\mathrm{sl}(X)$, $\dim \mathfrak{z} \leqslant 1$. Очевидно, 1-градуировка $\lambda(Q)$ индуцирует 1-градуировку в B и $\lambda(Q_{[-1]}) = B_{[-1]}$, $\lambda(Q_{[1]}) = B_{[1]}$. Следовательно, $\lambda(Q) = B$, $B = \mathrm{sp}(X)$ или $\mathrm{sl}(X)$.

f) $Q = B \otimes \mathcal{O}_m$. Действительно, согласно d), $Q^{(2)} \neq 0$, $Q^{(1)} \subset (\mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_m)^{(1)} = \mathrm{gl}(X)^{(1)} \otimes \mathcal{O}_m$. Каждый элемент $\varphi \in Q^{(1)}$ является $\mathcal{O}_m$-морфизмом из $M_{[-1]} = X \otimes \mathcal{O}_m$ в Q. Таким образом, Q — $\mathcal{O}_m$-подмодуль в $\mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_m$. Так как Q — идеал в $\mu(M_{[0]})$ и проекция $\mu(M_{[0]})$ на $1 \otimes W_m$ является TI-подалгеброй в W_m (следствие неприводимости $M_{[0]}$-модуля $M_{[-1]}$), то Q — свободный $\mathcal{O}_m$-подмодуль в $\mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_m$. Следовательно, $Q \cong \lambda(Q) \otimes \mathcal{O}_m = B \otimes \mathcal{O}_m$, $B = \mathrm{sl}(X)$ или $\mathrm{sp}(X)$.

g) Пусть $\lambda(Q) = B = \mathrm{sp}(X)$. Легко убедиться (рассматривая максимальный тор в группе $\mathcal{S}p(X)$), что единственный тип 1-градуировок в алгебре Ли $\mathrm{sp}(X)$ соответствует разложению X в прямую сумму максимальных вполне изотропных подпространств, $X = X'_{[-1]} + X''_{[-1]}$, $X'_{[-1]} \cong (X''_{[-1]})^*$ — изоморфизм $B_{[0]}$-модулей, $B_{[0]} \cong \mathrm{gl}(X''_{[-1]})$.

Очевидно,

$$N_{\mathrm{gl}(M_{[-1]})}(Q) = N_{\mathrm{gl}(M_{[-1]})}(\mathrm{sp}(X) \otimes \mathcal{O}_m) = \\ = \mathrm{sp}(X) \otimes \mathcal{O}_m + I \otimes \mathcal{O}_m + I \otimes W_m,$$

где I — тождественный оператор на X, следовательно,

$$\mu(M_{[0]}) = Q_{[-1]} + \mathfrak{L}_{[0]} + Q_{[1]} \subset N = \\ = \mathrm{sp}(X) \otimes \mathcal{O}_m + I \otimes \mathcal{O}_m + I \otimes R \subset N_{\mathrm{gl}(M_{[-1]})}(Q),$$

где R — TI-подалгебра в W_m (R — проекция $\mu(M_{[0]})$ на W_m). Очевидно, N инвариантно относительно тора T из п. d). Из вида N заключаем, что

$$N = Q_{[-1]} + N_{[0]} + Q_{[1]}, \\ N_{[0]} = Q_{[0]} + 1 \otimes \mathcal{O}_m + 1 \otimes R, \\ Q_{[0]} = (\rho_V \oplus \rho_{\mathfrak{L}})(\mathrm{gl}_n(K) \otimes \mathcal{O}_m),$$

где ρ_V, $\rho_{\mathfrak{L}}$ — представления $N_{[0]}$ на $V_{[-1]} = X'_{[-1]} \otimes \mathcal{O}_m$ и $\mathfrak{L}_{[-1]} = X''_{[-1]} \otimes \mathcal{O}_m$ соответственно. Здесь $\mathrm{gl}_n(K) \cong B_{[0]}$.

Видно, что

$$\ker \rho_{\mathfrak{L}} = (1 - I) \otimes \mathcal{O}_m, \qquad 1 \in \mathrm{gl}_n(K), \tag{12}$$

$$\rho_V(\ker \rho_{\mathfrak{L}}) = 1 \otimes \mathcal{O}_m. \tag{13}$$

Кроме того,

$$\rho_{\mathfrak{L}}(\widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]}) = \mathfrak{L}_0/\mathfrak{L}_1 = \mathrm{gl}(X''_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m + 1 \otimes R. \tag{14}$$

h) Пусть $\lambda(Q) = B = \mathrm{sl}(X)$.
Разложение $X = X'_{[-1]} + X''_{[-1]}$ индуцирует градуировку в B, $B = B_{[-1]} + B_{[0]} + B_{[1]}$, $B_{[-1]} = (X''_{[-1]})^* \otimes X'_{[-1]}$, $B_{[1]} = (X'_{[-1]})^* \otimes X''_{[-1]}$.

Отсюда легко получить строение $B_{[0]}$ (см. [11]):

$$\dim X'_{[-1]} = l, \ \dim X''_{[-1]} = k,$$

$$B_{[0]} = \begin{cases} \mathrm{gl}(X'_{[-1]}) + \mathrm{gl}(X''_{[-1]}), & l + k \not\equiv 0(p), \\ \mathrm{sl}(X'_{[-1]}) + \mathrm{sl}(X''_{[-1]}), & l + k \equiv 0(p), lk \not\equiv 0(p), \\ < \mathrm{sl}(X'_{[-1]}) + \mathrm{sl}(X''_{[-1]}), T_{11} + E_{11} >, & l \equiv k \equiv 0(p). \end{cases} \tag{15}$$

Здесь T_{11}, E_{11} — соответствующие матричные единицы. Теперь

$$N_{\mathrm{gl}(M_{[-1]})}(Q) = N_{\mathrm{gl}(M_{[-1]})}(\mathrm{sl}(X) \otimes \mathcal{O}_m) = \mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_m + I \otimes W_m,$$

где I — тождественный оператор на X. Так же, как в п. g), получаем

$$\mu(M_{[0]}) = Q_{[-1]} + \widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]} + Q_{[1]} \subset N =$$
$$= \mathrm{gl}(X) \otimes \mathcal{O}_m + I \otimes R \subset N_{\mathrm{gl}(M_{[-1]})}(Q),$$

где R — TI-подалгебра в W_m.

$$N = Q_{[-1]} + N_{[0]} + Q_{[1]},$$

$$N_{[0]} = (\mathrm{gl}(X'_{[-1]}) + \mathrm{gl}(X''_{[-1]})) \otimes \mathcal{O}_m + 1 \otimes R.$$

Согласно (15),

$$(\mathrm{sl}(X'_{[-1]}) + \mathrm{sl}(X''_{[-1]})) \otimes \mathcal{O}_m \subset \widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]} \subset N_{[0]}.$$

Пусть, как в g), $\rho_{\mathfrak{L}}$ — представление $N_{[0]}$ на $\mathfrak{L}_{[-1]} = \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0 = X''_{[-1]} \otimes \mathcal{O}_m$. Тогда $(\ker \rho_{\mathfrak{L}}) \subset \mathrm{gl}(X'_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m$. Так как $(\ker \rho_{\mathfrak{L}}) \cap \widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]} = \mathfrak{L}_1 + F_1\mathfrak{L}/F_1\mathfrak{L}$ — нильпотентный идеал в $\widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]}$ и $\mathrm{sl}(X'_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m \subset Q_{[0]} \subset \widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]}$, то

$$\dim X'_{[-1]} = 1. \tag{16}$$

Из (15) следует, что $\rho_{\mathfrak{L}}(Q_{[0]}) = \mathrm{gl}(X''_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m$, кроме единственного случая $k = l_0 p - 1$, когда $\rho_{\mathfrak{L}}(Q_{[0]}) = \mathrm{sl}(X''_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m$.

Итак,

$$\mathrm{sl}(X''_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m \subset \rho_{\mathfrak{L}}(\widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]}) \subset \mathrm{gl}(X''_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m + 1 \otimes R, \tag{17}$$

причем если $\mathrm{gl}(X''_{[-1]}) \rho_{\mathfrak{L}}(\widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]})$, то

$$\dim X''_{[-1]} = l_0 p - 1 \geqslant 3. \tag{18}$$

Отметим, что во всех случаях пп. g)—h) $Q_{[0]} \subset \tilde{\mathcal{L}}_{[0]} \subset \widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]}$, где $\tilde{\mathcal{L}}_{[0]} = \mathcal{L}_0 / F_1 \mathcal{L}$. Таким образом, $\mathrm{gl}(X''_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m \subset \widetilde{\mathfrak{L}}_{[0]}$, кроме, может быть, случая, когда имеет место (18).

i) Из (14) и (17) заключаем, что

$$\mathrm{gr}\,\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}_{[-1]} + \mathfrak{L}_{[0]} + \dots, \qquad \mathfrak{L}_{[-1]} = X''_{[-1]} \otimes \mathcal{O}_m,$$

$$\mathrm{sl}(X''_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m \subset \mathfrak{L}_{[0]} = \rho_{\mathfrak{L}}(\widetilde{\mathfrak{L}}[0]) \subset \mathrm{gl}(X''_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m + 1 \otimes R.$$

$L_{[0]} = \mathcal{L} \subset \mathfrak{L}$, поэтому $\mathrm{gr}\,\overline{\mathcal{L}}$ — однородный идеал в $\mathrm{gr}\,\overline{\mathfrak{L}}$. При этом либо $\mathrm{gl}(X''_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m \subset \mathrm{gr}_{[0]}\overline{\mathcal{L}}$, либо $\mathrm{sl}(X''_{[-1]}) \otimes \mathcal{O}_m \subset \mathrm{gr}_{[0]}\overline{\mathcal{L}}, \dim X''_{[-1]} \geqslant 3$.

Алгебра Ли $\mathrm{gr}\,\overline{\mathcal{L}}$ — полупростая алгебра Ли, содержащая единственный минимальный идеал $X(\mathcal{F}_1) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{m}}$, где $X(\mathcal{F}_1) = S(\mathcal{F}_1)$ или $W(\mathcal{F}_1)$, $\tilde{m} \leqslant m$, причем в случае $S(\mathcal{F}_1)$ градуировка отлична от градуировки типа $(0, \dots, 0, 1)$ (см. вид нулевых компонент нестандартных 1-градуировок в алгебрах картановского типа в следствии 1.2).

Согласно следствиям 1.2, 1.4, $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли картановского типа $S(\mathcal{F}_1, \omega)$ или $W(\mathcal{F}_1)$ с градуировкй типа $(1, \dots, 1)$ (и тогда $m = 0$), или $(\underbrace{1, \dots, 1}_{t}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m})$.

Если $m > 0$, то $\bar{\mathfrak{g}}_0$ не является подалгеброй минимальной коразмерности, так как $\dim \bar{\mathfrak{g}} / \bar{\mathfrak{g}}_0 = \dim \mathcal{L}_{[-1]} = \dim \mathfrak{L}_{[-1]} = tp^m$, а минимальная коразмерность подалгебр равна $t + m$. Следовательно, $m = 0$. Теперь из (13) и (16) заключаем, что $\mathfrak{L}_1 / F_1 \mathfrak{L} = \rho_V \ker \rho_{\mathfrak{L}} \subset < 1 >$. Таким образом, $\rho(\mathfrak{L}_1) = \rho(Z(\mathfrak{L}))$ и доказательство заканчивается повторением последнего абзаца из доказательства теоремы 2.6. □

Следствие 2.8. 1) *В условиях теоремы* 2.7 $\mathfrak{g} = S(\mathcal{F}_1, \omega)$ *или* $W(\mathcal{F}_1)$.

2) *Если в условиях теоремы* 2.7 $\mathfrak{L}_0$*-модуль* V *имеет максимальный собственный подмодуль коразмерности больше* 1, *то* $L = H(\mathcal{F}, \omega)$ *— гамильтонова алгебра Ли картановского типа.*

Доказательство. Утверждение 1) получено в п. i) доказательства теоремы 2.7.

2) Как показано в п. i), $m = 0$, следовательно, $V_{[-1]} = X'_{[-1]}$, $\mathfrak{L}_{[-1]} = X''_{[-1]}$, $Q = \mathrm{sp}(X)$ или $\mathrm{sl}(X)$ (см. п. f) доказательства теоремы 2.7).

Если $Q = \mathrm{sl}(X)$, то, согласно п. h) (см. (16)), $\dim V_{[-1]} = 1$. Если $Q = \mathrm{sp}(X)$, то $Q_{[0]} \cong \mathrm{gl}(V_{[-1]})$, $\tilde{\mathfrak{L}}_{[0]} = Q_{[0]} + \mathfrak{z}$, где $\mathfrak{z}$ — образ $Z(\mathfrak{L})$ в $\tilde{\mathfrak{L}}_{[0]} = F_0\mathfrak{L}/F_1\mathfrak{L}$. В алгебре $\mathcal{M}$ (см. (11)) для представления ρ подалгебры $\mathcal{M}_0$ на $\mathcal{M}_{-1}/\mathcal{M}_0 = M_{[-1]}$ имеем $\rho(\mathcal{M}_0) = \mu(M_{[0]}) \cong \mathrm{sp}(M_{[-1]}) + \mathfrak{z}$. Следовательно, $\mathcal{M}$ — фильтрованная гамильтонова алгебра Ли $H(\mathcal{F}, \omega)$, и простая алгебра Ли L является идеалом в $\tilde{L} = \mathcal{M}$. Следовательно, L — простая гамильтонова алгебра Ли $H(\mathcal{F}, \omega)$. Итак, из доказательства теоремы 2.7 следует, что в случае $\dim V_1/V_0 > 1$ L — алгебра Ли картановского типа $H(\mathcal{F}, \omega)$ с нестандартной градуировкой. □

§ 3. Градуированные алгебры Ли с почти простой компонентой $L_{[0]}$ картановского типа

В этом параграфе рассматриваются простые алгебры Ли $L = \oplus_{i \geqslant -1} L_{[i]}$ с компонентой $L_{[0]} = \mathcal{L}$ такой, что

$$\bar{\mathfrak{g}} \subset \overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/Z(\mathcal{L}) \subset \mathrm{Der}\, \bar{\mathfrak{g}},$$

где $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли картановского типа $X(\mathcal{F}, \omega)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $L_{[0]}$, $L_{[1]}$ наделены согласованными градуировками.

Пусть $L = \oplus_{i \geqslant -1} L_{[i]}$ — простая градуированная алгебра Ли такая, что:

1) $L_{[0]} = \mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} \oplus Z(\mathcal{L})$, $X(\mathcal{F}) \subset \overline{\mathcal{L}} \subset \tilde{X}(\mathcal{F})$, $X = W, S, CS, H, CH$, $\overline{\mathcal{L}}$ — градуированая алгебра Ли со стандартной градуировкой, $\mathcal{L} = \oplus_{i \geqslant -1} \mathcal{L}_{[i]}$, $\mathcal{L}_{[i]} = \overline{\mathcal{L}}_{[i]}$, $i \neq 0$, $\mathcal{L}_{[0]} = \overline{\mathcal{L}}_{[0]} \oplus Z(\mathcal{L})$.
2) $L_{[-1]} = V$, $L_{[1]} = G$ — неприводимые градуированные $L_{[0]}$-модули, $V = \oplus_{i=-1}^{r} V_{[i]}$, $L_{[1]} = G = \oplus_{i=q}^{s} G_{[i]}$.
3) $L_{[j]}$ — градуированные $L_{[0]}$-модули.

Лемма 3.1. 1) $q \geqslant -1$.

2) $V_{[-1]}$, $G_{[q]}$, $V_{[r]}$, $G_{[s]}$ — *неприводимые $\mathcal{L}$-модули,* $[\mathcal{L}_{[-1]}, V_{[i]}] = V_{[i-1]}$, $[\mathcal{L}_{[-1]}, G_{[i]}] = G_{[i-1]}$.

Доказательство. 1) следует из предложения 2.5, 1).

2) Для универсальной обертываеющей алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ имеем разложение $\mathcal{U}(\mathcal{L}) = \mathcal{U}(\mathcal{L}^+)\mathcal{U}(\mathcal{L}_{[0]})\mathcal{U}(\mathcal{L}_{[-1]}) = \mathcal{U}(\mathcal{L}_{[-1]})\mathcal{U}(\mathcal{L}_{[0]})\mathcal{U}(\mathcal{L}^+)$, где $\mathcal{L}^+ = \oplus_{i>0}\mathcal{L}_{[i]}$. Поэтому в силу условия 2) для любых $\mathcal{L}_{[0]}$-подмодулей $\tilde{V}_{[-1]} \subset V_{[-1]}$, $\tilde{V}_{[r]} \subset V_{[r]}$

$$V = \mathcal{U}(\mathcal{L})\tilde{V}_{[-1]} = \mathcal{U}(\mathcal{L}^+)\tilde{V}_{[-1]}, \qquad V = \mathcal{U}(\mathcal{L})\tilde{V}_{[r]} = \mathcal{U}(\mathcal{L}_{[-1]})\tilde{V}_{[r]}.$$

Следовательно, $\tilde{V}_{[-1]} = V_{[-1]}$, $\tilde{V}_{[r]} = V_{[r]}$. □

Лемма 3.2. *Если* $G_{[1]} \neq 0$, *то* $\dim V_{[-1]} = 1$, $L_{[0]} = W(\mathcal{F})$, L *— алгебра Ли картановского типа.*

Доказательство. $[V_{[0]}, G_{[-1]}] \neq 0$, $[V_{[0]}, G_{[-1]}] \subset \mathcal{L}_{[-1]}$, согласно предложению 2.5 1). Из неприводимости $\mathcal{L}$-модуля $\mathcal{L}_{[-1]}$ получаем $[V_{[0]}, G_{[-1]}] = \mathcal{L}_{[-1]}$. Далее, $[[V_{[1]}, G_{[-1]}], V_{[-1]}] \subset [[V_{[1]}, V_{[-1]}], G_{[-1]}] + [V_{[1]}, [G_{[-1]}, V_{[-1]}]] = 0$. С другой стороны, $[[V_{[1]}, G_{[-1]}], \mathcal{L}_{[-1]}] = [V_{[0]}, G_{[-1]}] = \mathcal{L}_{[-1]}$. Следовательно, $J = [V_{[1]}, G_{[-1]}]$ — идеал в $mcL_{[0]}$ такой, что

$$\begin{gathered}[J, V_{[-1]}] = 0,\\ [J, \mathcal{L}_{[-1]}] = \mathcal{L}_{[-1]}.\end{gathered} \tag{19}$$

В частности, $J \neq 0$.

Пусть $M = [V_{[2]}, G_{[-1]}] \subset \mathcal{L}_{[1]}$. Тогда по лемме 3.1

$$[\mathcal{L}_{[-1]}, M] = [\mathcal{L}_{[-1]}, [V_{[2]}, G_{[-1]}]] = [V_{[1]}, G_{[-1]}] = J.$$

Следовательно, $M \neq 0$. Для любого нетривиального $\mathcal{L}_{[0]}$-модуля M в $\mathcal{L}_{[-1]}$ $[\mathcal{L}_{[0]}, \mathcal{L}_{[0]}] \subset [\mathcal{L}_{[-1]}, M]$. Поэтому $[\mathcal{L}_{[0]}, \mathcal{L}_{[0]}] \subset J$. Из (19) следует, что $[\mathcal{L}_{[0]}, \mathcal{L}_{[0]}]$ действует тривиально на неприводимом $\mathcal{L}_{[0]}$-модуле $V_{[-1]}$. Таким образом, $\dim V_{[-1]} = 1$. Из предложения 1.10 и результатов Я.С. Крылюка [8] получаем, что $L_{[0]} = W(\mathcal{F})$, L — алгебра Ли картановского типа. □

Следующая лемма является следствием теоремы 2.7.

Лемма 3.3. *Пусть* $G_{[-1]} = 0$, *тогда:*

1) $G_{[0]} \neq 0$,

2) $\mathcal{L} = W(\mathcal{F})$, L *— алгебра Ли картановского типа.*

Доказательство. 1) Если $G_{[0]} = 0$, то $[V, G] \subset \oplus_{i\geqslant 1}\mathcal{L}_{[i]}$, $[V, G]$ — идеал в $\mathcal{L}$, что противоречит условию 1), которому удовлетворяет алгебра L.

2) Если $\dim V_{[-1]} = 1$, то утверждение следует из результатов [8]. Предположим, что $\dim V_{[-1]} > 1$. $\overline{\mathcal{L}}$ — алгебра Ли одного из картановских типов $S(\mathcal{F})$, $CS(\mathcal{F})$, $W(\mathcal{F})$, согласно следствию 2.8, 1).

Согласно следствию 2.8, 2) из условия $\dim V_{[-1]} > 1$ следует, что $\overline{\mathcal{L}}$ — алгебра Ли типа $CS(\mathcal{F})$ или $W(\mathcal{F})$. Так как по условию 3) $L_{[j]}$ — градуированный $L_{[0]}$-модуль, то $L_{[j]} = \oplus_{i \geqslant j-1} L_{[i]}$, $j \geqslant 1$, согласно предложению 2.5, 3). Несложная проверка показывает, что относительно новой градуировки

$$L = M = M_{[-1]} + M_{[0]} + M_{[1]} + \dots, \qquad M_{[i]} = \oplus_{j \geqslant -1} L_{[j],[i]},$$

L является транзитивной неприводимой алгеброй Ли (при доказательстве теоремы 2.7 мы аналогично вводили новую фильтрацию в L). Теперь следствие 2.8, 2) показывает, что $M_{[0]} = \mathrm{sp}(M_{[-1]}) + \mathfrak{z}$. Следовательно, M — простая алгебра Ли картановского типа $H(\mathcal{F})$ со стандартной градуировкой, а градуировка, соответствующая алгебре L, является градуировкой типа $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$. Рассматривая градуировки типа $(0, 1)$ в гамильтоновой алгебре Ли $H(\mathcal{F})$, нетрудно убедиться, что в случае почти простой компоненты $L_{[0]}$ с сердцевиной картановского типа $L_{[0]} = W(\mathcal{F})$. □

Суммируем полученные результаты.

Предложение 3.4 ($p > 3$). *Пусть $L = \oplus_{i \geqslant -1} L_{[i]}$ — простая градуированная алгебра Ли такая, что*

$$L_{[0]} = \mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} + Z(\mathcal{L}), \qquad X(\mathcal{F}) \subset \overline{\mathcal{L}} \subset \tilde{X}(\mathcal{F}),$$

$X = W, S, CS, H, CH$, *$\overline{\mathcal{L}}$ — градуированная алгебра Ли со стандартной градуировкой, $L_{[j]}$ — градуированные $L_{[0]}$-модули, $L_{[1]}$ — неприводимый $L_{[0]}$-модуль. Тогда:*

1) $L_{[0]} = W(\mathcal{F})$,

2) *L — алгебра Ли картановского типа.*

Вернемся теперь к общему случаю, когда сердцевина $\bar{\mathfrak{g}}$ почти простой алгебры Ли $L_{[0]} = \mathcal{L}$ — алгебра Ли картановского типа $X(\mathcal{F}, \omega)$, $X = W, S, CS, H, CH, K$.

Пусть $\bar{\mathfrak{g}}_0$ — стандартная максимальная подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$ минимальной коразмерности. Всюду в дальнейшем черта означает переход к фактору по центру. Положим, как в § 2, $\overline{\mathcal{L}}_0 = N_{\overline{\mathcal{L}}}(\bar{\mathfrak{g}}_0)$, $[\mathcal{L}]_p$ — p-замыкание $\mathcal{L}$ в $\mathrm{gl}(V)$, $V = L_{[-1]}$, $\mathfrak{L}_0 = N_{[\mathcal{L}]_p}(\bar{\mathfrak{g}}_0)$, $\mathfrak{L} = \mathcal{L} + \mathfrak{L}_0$.

В §2 V вложен в усеченный коиндуцированный модуль $\overline{\mathrm{coind}}(\overline{V})$, где $\overline{V} = V/V_0$, V_0 — максимальный ненулевой собственный $\mathfrak{L}_0$-подмодуль в V, который существует, согласно предложению 2.1. $U = \overline{\mathrm{coind}}(\overline{V})$ является свободным $\mathcal{O}(\mathcal{F})$-модулем, где $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{L}}_0)$ — минимальный флаг (см. §1). Стандартная фильтрация в $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ индуцирует фильтрацию F в U, V, $\mathrm{Der}(U, \mathcal{F})$, $\mathfrak{L} \subset \mathrm{Der}(U, \mathcal{F})$, продолжениях Картана $\mathfrak{L}^{(i)} = (V, \mathfrak{L}^{(i)})$, в $L_{[i]} \subset \mathfrak{L}^{(i)}$. Очевидно, условия теорем 2.6, 2.7 выполнены для пары $(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{L}}_0)$, поэтому V — модуль высоты 1 в смысле Рудакова, $\mathfrak{L}_1 = \tilde{\mathfrak{L}}_1 \oplus Z(\mathfrak{L})$ и $\tilde{\mathfrak{L}}_1 \subset F_1 \mathrm{Der}(U, \mathcal{F})$. Нетрудно убедиться, что для $\bar{\mathfrak{g}}$ картановского типа $0 \neq [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_1] = [\tilde{\mathfrak{L}}_1, \tilde{\mathfrak{L}}_1] \subset F_2 \mathrm{Der}(U, \mathcal{F})$. Так как по определению $F_2 \mathrm{Der}(U, \mathcal{F})U \subset F_1 U$, то $0 \neq [\tilde{\mathfrak{L}}_1, \tilde{\mathfrak{L}}_1]V \subset V_1 = V \cap F_1 U$, т.е. $V_1 = F_1 V \neq 0$.

$\mathfrak{L}^{(1)} = F_{-1}\mathfrak{L}^{(1)}$, согласно предложению 2.5, 1). Если $\mathcal{L} \neq \mathfrak{g}$, то по следствию 2.3 для любого $D \in \mathcal{L} \setminus \mathfrak{g}$, $0 \neq v \in V$ существует $\varphi \in L_{[1]} \subset \mathfrak{L}^{(1)}$ такой, что $\varphi(v) = l + \alpha D$, $l \in \mathfrak{g}$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$. Пусть $v \in V_1 = F_1 V$. Тогда $\varphi(v) = l_0 = l + \alpha D \in \mathcal{L}_0 = F_0 \mathcal{L}$. Отсюда $D = \alpha^{-1}(l_0 - l) \in \mathfrak{g} + \mathcal{L}_0$. Следовательно, $\mathcal{L} = \mathfrak{g} + \mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_0 = N_{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_0)$, пара $(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{L}}_0)$ — транзитивная алгебра Ли картановского типа, $X(\mathcal{F}, \omega) \subset \overline{\mathcal{L}} \subset C\tilde{X}(\mathcal{F}, \omega)$, со стандартной максимальной подалгеброй. Очевидно, алгебра $\mathfrak{L}$ имеет аналогичное строение: $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} + \mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{L}_0 = N_{[\mathcal{L}]_p}(\mathfrak{g}_0)$, $X(\mathcal{F}, \omega) \subset \overline{\mathfrak{L}} \subset C\tilde{X}(\mathcal{F}, \omega)$.

В фильтрованных компонентах $FL_{[i]}$, переходя к ассоциированным градуированным пространствам, получим градуированную алгебру Ли $\mathrm{gr}\ L = \oplus_{i \geqslant -1} \mathrm{gr}\ FL_{[i]}$ с компонентой $\mathrm{gr}_{[0]} L = \mathrm{gr}(FL_{[0]})$. Отметим, что градуировка в $\mathrm{gr}\, L$ индуцирована градуировкой в L, т.е. $\mathrm{gr}_{[i]} L = \mathrm{gr}\, FL_{[i]}$, $i \geqslant -1$. Умножение в $\mathrm{gr}\, L$ задается следующим образом: если $l_i \in F_s L_{[i]} \setminus F_{s+1} L_{[i]}$, $l_j \in F_t L_{[j]} \setminus F_{t+1} L_{[j]}$, то в $\mathrm{gr}\, L$

$$[\bar{l}_i, \bar{l}_j] = [l_i, l_j] + F_{s+t+1} L_{[i+j]}.$$

Корректность такого умножения следует из предложения 2.5, 4).

Используя теоремы 2.6, 2.7, выясним строение ассоциированной градуированной алгебры $\mathrm{gr}\, FL_{[0]}$, которая может, вообще говоря, отличаться от центрального расширения градуированной алгебры Ли $\mathrm{gr}\, \mathcal{L}$, соотвествующей стадартной фильтрации в $\mathcal{L}$. Для $l \in F_i \mathfrak{L} \setminus F_{i+1} \mathfrak{L}$ обозначим через $\bar{l}$ соответствующий элемент в ассоциированной градуированной алгебре $\mathrm{gr}\, F\mathfrak{L}$. Пусть τ — минимальное вложение алгебры $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_0)$ в $W(\mathcal{F})$. Как известно, $\tau(\mathfrak{L}_i) \subset W(\mathcal{F})_i$, где $\{W(\mathcal{F})_i\}$ — стандартная фильтрация в $W(\mathcal{F})$. Таким образом, стандартная фильтрация в $\mathfrak{L}$ совпадает с фильтрацией, индуцированной стандартной фильтрацией в $W(\mathcal{F})$, т.е. $\mathfrak{L}_i = \tau^{-1}(W(\mathcal{F})_i)$. Фильтрация $F_i\mathfrak{L}_i$ индуцирована фильтрацией в алгебре Ли $\mathrm{Der}(U,\ \mathcal{F})$.

Согласно теоремам 2.6, 2.7, центр $Z = Z(\mathfrak{L})$ отщепляется в $\mathfrak{L}_1$, т.е. $\mathfrak{L}_1 = \widetilde{\mathfrak{L}}_1 \oplus Z$ и $\widetilde{\mathfrak{L}}_1 \subset F_1 \mathrm{Der}(U,\ \mathcal{F})$. Положим $F_i\widetilde{\mathfrak{L}}_1 = F_i \mathrm{Der}(U,\ \mathcal{F}) \cap \widetilde{\mathfrak{L}}_1,\quad i \geqslant 1$. Очевидно, $F_i\mathfrak{L} = F_i\widetilde{\mathfrak{L}}_1,\quad i \geqslant 1$, и $\widetilde{\mathfrak{L}}_1 = F_1\widetilde{\mathfrak{L}}_1$. Кроме того, $F_{-1}\mathfrak{L} = \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{-1}$ и $F_0\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0$. Очевидно, $F_i\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_i$ для $i > 1$. Допустим, что $l \in F_i\widetilde{\mathfrak{L}}_1 \setminus F_{i+1}\widetilde{\mathfrak{L}}_1$, но $l \in \mathfrak{L}_j \setminus \mathfrak{L}_{j+1},\quad j > i$. Выбирая плоскую аффинную связность на U, соответствующую дополнительному подпространству $V_{[-1]}$ к V_0 в $V = V_{-1}$ (см. [15]), получим $0 \neq \bar{l} \in \mathrm{gl}(V_{[-1]}) \otimes \mathfrak{m}_{[i]}$, где $\{\mathfrak{m}_{[i]}\}$ — стандартная градуировка максимального идеала алгебры $\mathcal{O}(\mathcal{F})$. Покажем, что $\bar{l} \in 1 \otimes \mathfrak{m}_{[i]}$. Действительно,

$$(\mathrm{ad}\, \mathfrak{L}_{-1})^i(l) \subset \mathfrak{L}_{j-i} \subset \mathfrak{L}_1 = \widetilde{\mathfrak{L}}_1 \oplus Z.$$

Так как $\tau(\mathfrak{L}_1)$ — транзитивная подалгебра в $W(\mathcal{F})$, $\widetilde{\mathfrak{L}}_1 \in F_1 \mathrm{Der}(U,\ \mathcal{F})$, а Z состоит из скалярных операторов, то $(\mathrm{ad}\, W(\mathcal{F})_{[-1]})^i(\bar{l}) \subset < 1 >$ и, следовательно, $\bar{l} \in 1 \otimes \mathfrak{m}_{[i]}$.

Как показано выше, $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} + \mathfrak{L}_0$, где $\mathfrak{g}$ — центральное расширение с помощью одномерного центра алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ картановского типа $X(\mathcal{F},\ \omega)$. Очевидно, $\tau(\mathfrak{L}_0) \subset N_{W(\mathcal{F})_0}(\bar{\mathfrak{g}}_0)$. Пусть $\mathrm{gr}\, \bar{\mathfrak{g}} = \oplus_{i \geqslant -1} \bar{\mathfrak{g}}_{[i]}$ — градуированная алгебра Ли, ассоциирванная с фильтрацией в $\bar{\mathfrak{g}}$, индуцированной стандартной фильтрацией алгебры $W(\mathcal{F})$. Аналогично получаем градуированную алгебру $\mathrm{gr}\, \overline{\mathfrak{L}}$. Очевидно, $\mathrm{gr}\, \bar{\mathfrak{g}}$ — градуированная алгебра Ли картановского типа $X(\mathcal{F})$ и $X(\mathcal{F}) \subset \mathrm{gr}\, \overline{\mathfrak{L}} \subset C\tilde{X}(\mathcal{F})$ для $X \neq K$. Для $X = K$

$$H(\mathcal{F}') \otimes \mathcal{O}(1:m) \subset \mathrm{gr}\, \overline{\mathfrak{L}} \subset$$
$$\subset \mathrm{Der}(H(\mathcal{F}')) \otimes \mathcal{O}(1:m) + 1 \otimes W(1:m).$$

Согласно [7], тип алгебры однозначно определяется тройкой $\bar{\mathfrak{g}}_{[i]},\quad i = -1,0,1$. Так как $\mathfrak{L}_i = F_i\mathfrak{L},\quad i = -1,0,1$, и $F_1\mathfrak{L} = \widetilde{\mathfrak{L}}_1 \cong \mathfrak{L}_1/Z$, то $\mathrm{gr}_{[-1]} F\mathfrak{L} = \mathrm{gr}_{[-1]}\mathfrak{L} = \bar{\mathfrak{g}}_{[-1]},\quad \mathrm{gr}_{[0]} F\mathfrak{L}/Z = \mathrm{gr}_{[0]}\mathfrak{L} \supset \bar{\mathfrak{g}}_{[0]}$. Если для двух элементов $l_1,\ l_2 \in \widetilde{\mathfrak{L}}_i \setminus \widetilde{\mathfrak{L}}_{i+1},\quad l_1 \neq l_2,\quad \tau(l_1), \tau(l_2) \in W(\mathcal{F})_i \setminus W(\mathcal{F})_{i+1}$ и $\tau(l_1) - \tau(l_2) \in W(\mathcal{F})_{i+1}$, то $\bar{l}_1 - \bar{l}_2 = \overline{l_1 - l_2} \in \mathrm{gl}(V_{[-1]}) \otimes \mathfrak{m}_{[i]}$ и, как показано выше, $\bar{l}_1 - \bar{l}_2 \in 1 \otimes \mathfrak{m}_{[i]}$. Так как $F_1\mathfrak{L}/F_2\mathfrak{L} = F_1\widetilde{\mathfrak{L}}_1/F_2\widetilde{\mathfrak{L}}_1 = \widetilde{\mathfrak{L}}_1 + F_2 \mathrm{Der}(U,\ \mathcal{F})/F_2 \mathrm{Der}(U,\ \mathcal{F}) \subset 1 \otimes W(\mathcal{F})_{[1]} + \mathrm{gl}(V_{[-1]}) \otimes \mathfrak{m}_{[1]}$, то

$\mathrm{gr}_{[1]}\mathfrak{L}/(\mathrm{gr}_{[1]}\mathfrak{L}\cap 1\otimes\mathfrak{m}_{[1]})\cong\mathrm{gr}_{[1]}\overline{\mathfrak{L}}$, следовательно, $\mathrm{gr}_{[1]}F\mathfrak{L}\cong C_{[1]}+A_{[1]}$, где $C_{[1]}=\mathrm{gr}_{[1]}F\mathfrak{L}$, $A_{[1]}=\mathrm{gr}_{[1]}F\mathfrak{L}\cap(1\otimes\mathfrak{m}_{[1]})$. Для $i\geqslant 1$ $\mathrm{gr}_{[i]}F\mathfrak{L}\cong C_{[i]}+A_{[i]}$, где $C_{[i]}\subset\mathrm{gr}_{[i]}\overline{\mathfrak{L}}$, $A_{[i]}\subset 1\otimes\mathfrak{m}_{[i]}$. Положим $C_{[-1]}=\mathrm{gr}_{[-1]}\mathfrak{L}=\bar{\mathfrak{g}}_{[-1]}$, $C_{[0]}=\mathrm{gr}_{[0]}\mathfrak{L}$. Тогда $\mathrm{gr}\,F\mathfrak{L}=C+A$, где $C=\oplus_{i\geqslant -1}C_{[i]}$ — градуированная подалгебра в $\mathrm{gr}\,F\mathfrak{L}$, A — абелев идеал в $\mathrm{gr}\,F\mathfrak{L}$, $Z\in C_{[0]}$ и алгебра C/Z изоморфна транзитивной подалгебре в $\mathrm{gr}\,\overline{\mathfrak{L}}$ типа $X(\mathcal{F})$ в случае $X\neq K$. Так как $\bar{\mathfrak{g}}_{[-1]}=C_{[-1]}$, $\bar{\mathfrak{g}}_{[i]}\subset C_{[i]}$, $i=0,1$, то, согласно [7], C/Z является алгеброй Ли типа $X(\mathcal{F}_1)$ для некоторого флага $\mathcal{F}_1\leqslant\mathcal{F}$. Нетрудно убедиться, что центр Z отщепляется в C, $C=C'\oplus Z$.

Аналогично, в случае $X=K$ получаем $H(\mathcal{F}_1')\otimes\mathcal{O}(1:m')\subset C/Z\subset\mathrm{Der}(H(\mathcal{F}_1'))\otimes\mathcal{O}(1:m')+1\otimes W(1:m')$, следовательно, нетрудно убедиться, что $A\subset\mathcal{O}(\mathcal{F}_2)$, $\mathcal{F}_1\leqslant\mathcal{F}_2$. Очевидно, аналогичное строение имеет градуированная алгебра Ли $\mathrm{gr}\,F\mathcal{L}$.

Соберем полученные результаты.

Лемма 3.5. *Пусть $\overline{\mathfrak{L}}$ — алгебра Ли картановского типа $X(\mathcal{F},\ \omega)$. Градуированная алгебра Ли $\mathrm{gr}\,F\mathfrak{L}$ имеет следующее строение:*

1) *$\mathrm{gr}\,F\mathfrak{L}\cong +A$, где $C=C'\oplus Z$, C' — градуированная алгебра Ли типа $X(\mathcal{F}_1)$, если $X\neq K$;*
2) *если $X=K$, то C/Z — полупростая алгебра Ли такая, что $H(\mathcal{F}_1')\otimes\mathcal{O}(1:m')\subset C/Z\subset\mathrm{Der}(H(\mathcal{F}_1'))\otimes\mathcal{O}(1:m')+1\otimes W(1:m')$;*
3) *A — абелев идеал в $\mathrm{gr}\,F\mathfrak{L}$, $A\subset\mathcal{O}(\mathcal{F}_2)$, $\mathcal{F}_1\leqslant\mathcal{F}_2\leqslant\mathcal{F}$.*

Центр Z, $\dim Z\leqslant 1$, содержится в $C_{[0]}$.

Аналогичное строение имеет градуированная алгебра Ли $\mathrm{gr}\,F\mathcal{L}$.

Так как L — простая алгебра Ли, то $L_{[0]}=[L_{[-1]},\ L_{[1]}]$. Отсюда и из леммы 3.5 получаем, что идеал $[\mathrm{gr}_{[-1]}L,\ \mathrm{gr}_{[1]}L]=[\mathrm{gr}\,FL_{[-1]},\ \mathrm{gr}\,FL_{[1]}]$ в $\mathrm{gr}_{[0]}L=\mathrm{gr}\,FL_{[0]}$ имеет вид $C'+A'$, где либо $C'/(Z\cap C')$ — алгебра Ли картановского типа $X(\mathcal{F}_1)$, либо $C'/(Z\cap C')$ имеет вид $A'\subset A$, указанный в лемме 3.5, 2). Из леммы 3.5 следует, что A является разрешимым радикалом алгебры $\mathrm{gr}_{[0]}L$.

Остановимся подробнее на случае $X=K$. В алгебре L $L_{[0]}=[L_{[-1]},\ L_{[1]}]$, поэтому в обозначениях леммы 3.5, 2) $[\mathrm{gr}_{[-1]}L,\ \mathrm{gr}_{[1]}L]=[\mathrm{gr}\,FL_{[-1]},\ \mathrm{gr}\,FL_{[1]}]$ содержит $F_1\mathfrak{L}/F_0\mathfrak{L}=K(\mathcal{F})/K(\mathcal{F})_0=H(\mathcal{F}')_{[-1]}\otimes 1\oplus 1\otimes W(1:m')_{[-1]}$. Следовательно, в случае $X=K$, $C'/(Z\cap C')$ — полупростая алгебра Ли.

Пусть $\mathrm{solv}(\mathrm{gr}\,L)$ — разрешимый радикал алгебры Ли $\mathrm{gr}\,L$.

Так как $\mathrm{solv}(\mathrm{gr}\, L)$ инвариантен относительно автоморфизмов алгебры $\mathrm{gr}\, L$, то $\mathrm{solv}(\mathrm{gr}\, L)$ — однородный идеал в $\mathrm{gr}\, L$ и $\mathrm{gr}_{[i]}(\mathrm{solv}(\mathrm{gr}\, L))$ — подпространство в $\mathrm{gr}\, FL_{[i]} = \mathrm{gr}_{[i]}\, L$. В частности, $\mathrm{gr}_{[0]}(\mathrm{solv}(\mathrm{gr}\, L)) \subset A$. Так как C — транзитивная градуированная подалгебра в $W(\mathcal{F})$, то в случае $\mathrm{gr}_{[0]}\,\mathrm{solv}(\mathrm{gr}\, L) \neq 0$ получаем $1 \in \mathrm{gr}_{[0]}\,\mathrm{solv}(\mathrm{gr}\, L)$. Однако 1 действует как тождественный оператор на $\mathrm{gr}_{[-1]}\, L$, значит, $\mathrm{gr}_{[-1]}\, L \subset \mathrm{solv}(\mathrm{gr}\, L)$. Следовательно, $C' \subset [\mathrm{gr}_{[-1]}\, L,\ \mathrm{gr}_{[1]}\, L] \subset \mathrm{solv}(\mathrm{gr}\, L)$, что невозможно. Таким образом, $\mathrm{gr}_{[0]}\,\mathrm{solv}(\mathrm{gr}\, L) = 0$.

Алгебра Ли $M = \mathrm{gr}\, L/\mathrm{solv}(\mathrm{gr}\, L)$ — полупростая 1-градуированная алгебра Ли с компонентой $M_{[0]} = \mathrm{gr}_{[0]}\, L = \mathrm{gr}\, FL_{[0]} = C + A$. Кроме того, $M_{[0]}$ содержит идеал $[M_{[-1]}, M_{[1]}] = C' + A'$. Отметим,что алгебра $\mathrm{gr}\, L$ биградуирована, так как все подпространства $\mathrm{gr}_{[i]}\, L = \mathrm{gr}\, FL_{[i]}$ снабжены согласованными градуировками. Следовательно, M — биградуированная алгебра Ли. Напомним, что $L_{[i]} = F_{-1}L_{[i]}$, $i = -1, 0$, $L_{[1]} = F_q L_{[1]}$, $q \geqslant -1$.

По теореме Блока (см. [24]) полупростая алгебра Ли M содержит сумму минимальных идеалов $\mathrm{soc}\, M = \oplus_i (B_i \otimes \mathcal{O}_{m_i})$, где B_i — простые алгебры Ли. Если число минимальных идеалов в M больше 1, то подалгебра M_0 должна содержать больше 1 коммутирующих ненулевых идеалов, что невозможно в силу леммы 3.5. Следовательно, M имеет единственный минимальный идеал $B \otimes \mathcal{O}_m$.

Одномерный тор в группе автоморфизмов M, задающий 1-градуировку в M, индуцирует согласованные градуировки в простой алгебре Ли B и в $\mathcal{O}_m$. Здесь возможны два случая.

а) $B = B_{[0]}$. Так как $M \subset (\mathrm{Der}\, B) \otimes \mathcal{O}_m + 1 \otimes W_m$, то градуировка в $\mathcal{O}_m$ имеет тип $(0,\ 1)$. Разделяя переменные, получим

$$\mathcal{O}_m = \mathcal{O}_k \otimes \mathcal{O}_n, \quad M_{[-1]} = W_{n,[-1]} \otimes \mathcal{O}_k \otimes 1, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} B \otimes \mathcal{O}_k \otimes 1 \subset M_{[0]} \subset (\mathrm{Der}\, B) \otimes \mathcal{O}_k \otimes 1 +& \\ +1 \otimes W_k \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes W_{n,[0]},& \end{aligned} \tag{21}$$

$$B \otimes \mathcal{O}_{\otimes}\mathfrak{m}_{n,[1]} \subset M_{[1]} \subset 1 \otimes 1 \otimes W_{n,[1]}. \tag{22}$$

Здесь $\mathfrak{m}_{n,1}$ — максимальный идеал в $\mathcal{O}_n$. Сравнивая (21) со строением $\mathrm{gr}\, FL_{[0]}$ в лемме 3.5, заключаем, что $A = 0$, $Z = 0$, а в случае $X \neq K$ имеем $k = 0$.

Пусть теперь $X = K$. Из (20)—(22) получаем

$$B \otimes \mathcal{O}_k \subset [M_{[-1]},\ M_{[1]}] \subset B \otimes \mathcal{O}_k \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes W_{n,[0]},$$

таким образом, если $k > 0$, то $N = [M_{[-1]},\ M_{[1]}]$ содержит разрешимый идеал $B \otimes \mathfrak{m}_{k,1} \otimes 1$, где $\mathfrak{m}_{k,1}$ — максимальный идеал алгебры $\mathcal{O}_k$. Как отмечалось выше в случае $X = K$ при $A = 0$, $\quad Z = 0$ $[M_{[-1]},\ M_{[1]}] = [\operatorname{gr} FL_{[-1]},\ \operatorname{gr} FL_{[1]}]$ — полупростая алгебра Ли. Следовательно, и в случае $X = K$ имеем $k = 0$.

Из (21) следует, что минимальный идеал B в $M_{[0]}$ простой. В частности, случай $X = K$ исключается и $B = X(\mathcal{F})$, $\quad X \neq K$. Так как $A = 0$ и $\quad Z = 0$, то фильтрация F в $L_{[0]}$ совпадает с естественной фильтрацией алгебры $\mathcal{L}$, $\quad \mathfrak{g} \subset \mathcal{L} \subset \mathfrak{g} + \operatorname{Der}_0 \mathfrak{g}$, где $\operatorname{Der}_0 \mathfrak{g}$ — алгебра Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$, сохраняющих стандартную максимальную подалгебру $\mathfrak{g}_0$, $\quad \mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли картановского типа $X(\mathcal{F}, \omega)$, $\quad X = W,\ S,\ H$.

Из (20) получаем $[B,\ M_{[-1]}] = 0$. Так как $M_{[-1]}$ и $M_{[1]}$ имеют градуировки, согласованные с градуировкой B, то $M_{[-1]} = M_{[-1],[0]}$. Таким образом, для неприводимого $\mathcal{L}$-модуля $V = L_{[-1]}$ высоты 1, снабженного фильтрацией, индуцированной стандартной фильтрацией коиндуцированного модуля U, соответствующий градуированный $\operatorname{gr} \mathcal{L}$-модуль $\operatorname{gr} V$ имеет однородный подмодуль (в нашем случае — $\operatorname{gr}_{[-1]} \operatorname{solv} L$), отличающийся от $\operatorname{gr} V$ только в нулевой компоненте (градуировка имеет глубину 1). Воспользуемся теорией модулей высоты 1 над алгебрами типа W, S, H. Согласно [15], ассоциированный градуированный модуль $\operatorname{gr} U$, $\quad U = \operatorname{coind} \overline{V}$, $\quad \overline{V} = F_1 L_{[-1]} / F_0 L_{[-1]}$, является $\operatorname{gr} \mathcal{L}$-модулем, коиндуцированным с того же $\mathcal{L}_{[0]}$-модуля $\overline{V}$ $(\mathcal{L}_{[0]} = \mathcal{L}_{-1}/\mathcal{L}_0)$, и если $\overline{V}$ — неисключительный $\mathcal{L}_{[0]}$-модуль для $\operatorname{gr} \mathcal{L}$, то он также является неисключительным для $\mathcal{L}$. В случае $\dim \overline{V} > 1$ из реализации исключительных $\operatorname{gr} \mathcal{L}$-модулей на пространстве дифференциальных форм [8] следует, что эта конструкция дает также исключительные $\mathcal{L}$-модули (например, для типа S — это пространства точных форм). Непосредственно из конструкции видно, что при $p > 2$ нулевая компонента соответствующих градуированных модулей одинакова (и не зависит от флага $\mathcal{F}$). Если $\dim \overline{V} = 1$, то $\operatorname{gr} U = \overline{\operatorname{coind}}(\overline{V}) = \mathcal{O}(\mathcal{F})$. В этом случае, очевидно, $\operatorname{gr}_{[0]} U = \operatorname{gr}_{[0]} FL_{[-1]} = \mathfrak{m}_{[1]}$ — неприводимый $\mathcal{L}_{[0]}$-модуль. Таким образом, для любого $\mathcal{L}_{[0]}$-модуля $\overline{V}$ нулевая компонента модуля $\operatorname{gr} V = \operatorname{gr} FL_{[-1]}$ совпадает с нулевой компонентой любого нетривиального $\operatorname{gr} \mathcal{L}$ подмодуля. Полученное противоречие показывает, что случай a) не реализуется.

b) $B = \oplus_{i \geqslant -1} B_{[i]}$, $B_{[-1]} \neq 0$, т.е. B — простая 1-градуированная алгебра Ли. Так же, как в случае a), градуировка в алгебре M индуцирует градуировку в $\mathcal{O}_m$ типа (0, 1) (см. (20)), $\mathcal{O}_m = \mathcal{O}_k \otimes \mathcal{O}_m$,

$$B_{[0]} \otimes \mathcal{O}_k \otimes 1 \subset M_{[0]} \subset$$
$$\subset (\mathrm{Der}_{[0]} B) \otimes \mathcal{O}_k + 1 \otimes W_k \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes W_{n,[0]}, \tag{23}$$

$$B_{[-1]} \otimes \mathcal{O}_k \otimes 1 \subset M_{[-1]} \subset$$
$$\subset \mathrm{Der}_{[-1]} \otimes \mathcal{O}_k \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes W_{n,[0]}. \tag{24}$$

Лемма 3.5 предоставляет следующие возможности:

i) $B_{[0]}$ — абелева алгебра Ли. Тогда $B = W(1 : r)$ для некоторого r, $\mathrm{Der}_{[i]} B = B_{[i]}$, $i \geqslant -1$, $B_{[0]} \otimes \mathcal{O}_k = A$ (см. лемму 3.5). Так как $1 \in A$ действует как тождественый оператор на $M_{[-1]}$, $< 1 >= B_{[0]} \otimes 1 \otimes 1$, то из (24) получаем $n = 0$ и $m = k$, $M_{[-1]} = B_{[-1]} \otimes \mathcal{O}_m$ и $[M_{[-1]}, M_{[1]}] = B_{[0]} \otimes \mathcal{O}_m = A$, что противоречит условию $[M_{[-1]}, M_{[1]}] = C' + A'$, где либо C' — алгебра Ли картановского типа $X = W, S, H$, либо C'/Z — полупростая алгебра Ли (см. лемму 3.5) в случае $X = K$.

Таким образом, случай i) не реализуется.

ii) $B_{[0]}$ — неабелева алгебра Ли. Из леммы 3.5 получаем, что либо: 1) $B_{[0]}$ имеет абелев нецентральный радикал, либо 2) B_0 почти полупростая алгебра Ли с непростым минимальным нецентральным идеалом, либо 3) $B_{[0]} = C' \oplus Z$, где C' — градуированная алгебра Ли картановского типа $X(\mathcal{F}')$, $X = W, S, H$. Согласно результатам работы [30], случай 2) несовместим с леммой 3.5, а в случае 1) $B_{[0]} = M_{[0]} = W(\mathcal{F}') + \mathcal{O}(\mathcal{F}')$ и, таким образом, C' в лемме 3.5 имеет тип $X = W$. Так как M — биградуированная алгебра Ли,то в случае 3) $B_{[-1]}$ — градуированный $B_{[0]}$-модуль. Согласно предложению 3.4, $B_{[0]} = C' \oplus Z$, где C' — алгебра Ли типа W. Отметим, что картановский тип алгебры C' в лемме 3.5 совпадает с типом сердцевины компоненты $L_{[0]}$. Таким образом, получили следующую теорему.

Теорема 3.6 ($p > 3$). *Пусть $L = \oplus_{i \geqslant -1} L_{[i]}$ — простая градуированная алгебра Ли. Если $L_{[0]}$ — почти простая алгебра Ли с сердцевиной $\bar{\mathfrak{g}}$ картановского типа, то $\bar{\mathfrak{g}} = W(\mathcal{F})$.*

Напомним, что $L_{[0]} = \mathcal{L}$ — почти простая алгебра Ли, $\bar{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{L}/Z \subset \mathrm{Der}\, \bar{\mathfrak{g}}$, где Z — центр $\mathcal{L}$, $\bar{\mathfrak{g}}$ — простая алгебра Ли картановского типа $X(\mathcal{F}, \omega)$, $X = W, S, H, K$. Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра в $\mathcal{L}$ такая, что $\mathfrak{g}/Z = \bar{\mathfrak{g}}$. Выше было показано, что $\mathcal{L} = \mathfrak{g} + \mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_0 = N_{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_0)$, где $\mathfrak{g}_0$ — стандартная максимальная подалгебра в $\mathfrak{g}$, т.е. $\mathfrak{g}_0/Z = \bar{\mathfrak{g}}_0$ — стандартная максимальная подалгебра в алгебре Ли картановского типа $\bar{\mathfrak{g}}$. Согласно теореме 3.6, $\bar{\mathfrak{g}} = W(\mathcal{F})$. Следовательно, $L_{[0]} = \mathcal{L} = \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}/Z = W(\mathcal{F})$.

Покажем, что центр отщепляется в $\mathcal{L}$. Пусть $\psi \in Z^2(W(\mathcal{F}))$ — коцикл, задающий центральное расширение $\mathcal{L}$. Обозначим $W(\mathcal{F})$ через W, $W = W_{-1} \supset W_0 \supset W_1 \supset \dots$, $W \oplus_{i \geqslant -1} W_{[i]}$ — стандартные фильтрация и градуировка в W. По теоремам 2.6, 2.7 центр отщепляется в $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_1 = W_1 \oplus Z$ и W_1 — идеал в $\mathcal{L}_0$. Таким образом, можно считать, что $\psi(W_0, W_1) = 0$. Коцикл ψ индуцирует коцикл $\bar{\psi}$ на $W_{[0]} = \mathrm{gl}(n)$. Так как $H^2(\mathrm{gl}(n)) = 0$, то можно считать $\psi(W_0, W_0) = 0$. Из соотношения $\psi(W_0, W_{-1}) = 0$ следует $\psi(W_{-1}, [W_1, W_1]) = 0$. Поэтому ψ индуцирует $W_{[0]}$-инвариантное спаривание $\tilde{\psi} : W_{[-1]} \times W_1/[W_1, W_1] \longrightarrow K$. Используя строение $W_{[0]}$-модуля $W_1/[W_1, W_1]$ (см.[7]), легко убедиться, что $\tilde{\psi} = 0$. Таким образом, $\psi(W_{-1}, W_1) = 0$. Так как $\psi(W_0, W_0) = 0$, то ψ индуцирует коцикл $\hat{\psi} \in H^1(W_{[0]}, W_{[-1]}) = 0$, следовательно, можно считать $\psi(W_{-1}, W_0) = 0$. Наконец, ψ определяет кососимметричную $W_{[0]}$-инвариантную форму на $W_{[-1]}$, которая, очевидно, нулевая. Таким образом, когомологический класс $[\psi]$ равен нулю в $H^2(W)$ и $\mathcal{L} = W(\mathcal{F}) \oplus Z$.

Лемма 3.7. *Если $L_{[0]} = \mathcal{L} = W(\mathcal{F}) \oplus Z(\mathcal{L})$, то $L_{[0]} = W(\mathcal{F})$ и L — алгебра Ли картановского типа.*

Доказательство. Напомним, что $L_{[0]}$-модуль $L_{[-1]} = V$ вложен в усеченный коиндуцированный модуль $U = \overline{\mathrm{coind} V}$ и наделен фильтрацией F, индуцированной естественной фильтрацией модуля U, V — неприводимый $W(\mathcal{F})$-модуль высоты 1. На пространстве $L_{[1]}$ также задана фильтрация F.

Случай $V = U$ подробно рассмотрен в [8] (см. также [15]), где показано, что $Z = 0$, и дано описание модулей V, для которых первое продолжение Картана пары $(W(\mathcal{F}), V)$ отлично от нуля. Это возможно только при $\dim \overline{V} = 1$. Несложный анализ продолжений Картана показывает, что в этих случаях алгебра Ли L изоморфна одной из алгебр Ли картановского типа $S(\mathcal{F}', \omega)$, $\omega = \exp x_i^{(p^{m_i})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, $H(\mathcal{F}', \omega)$, $\omega = d(\exp x_i^{(p^{m_i})} \sum_{j=1}^m x_j dx_{m+j})$.

Если $V \neq U$, то $\mathrm{gl}(n)$-модуль $\overline{V}$ называется исключительным. Для исключительных $\overline{V}$ покажем, что $L_{[1]} = F_0 L_{[1]}$. Тогда утверждение леммы будет следовать из теоремы 2.7 и следствия 2.8, 2).

Согласно [8], V реализуется в пространстве дифференциальных форм $\Omega^k(\mathcal{F})$, $0 < k < n$,

$$V = B_c^k(\mathcal{F}) = \mathrm{Im}\ (d_c : \Omega^{k-1}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^k(\mathcal{F})),$$

$$d_c\omega = d\omega + \omega_c \wedge \omega, \qquad \omega_c = \sum_i c_i x_i^{(p^{m_i}-1)} dx_i.$$

Очевидно, в $W(\mathcal{F})$-модуле $\mathrm{gr}\, V = V_{[-1]} + V_{[0]} + V_{[1]} + \dots$

$$V_{[-1]} =< dX_I, \quad I = \{i, \dots, i_k\}, \quad 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n >,$$

$$dX_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

$$V_{[0]} =< x_i dX_I, \quad i \in I; \qquad x_{i_s} dX_{I_s} + x_{i_t} dX_{I_t},$$

$$\{i_s\} \cup I_s = \{i_t\} \cup I_t, \qquad i_s \notin I_s, \quad i_t \notin I_t > .$$

Предположим $F_{-1}L_{[1]} \neq F_0 L_{[1]}$. Для любого $\varphi \in F_{-1}L_{[1]} \setminus F_0 L_{[1]}$, согласно предложению 2.5, 2), существует элемент $v \in V_0 \setminus V_1$ такой, что $\varphi(v) \in F_{-1}\mathcal{L} \setminus F_0\mathcal{L}$. Таким образом, если $\varphi \in \mathrm{gr}_{[-1]} L_{[1]}$, то $\varphi(v) = \partial_\xi \neq 0$ для некоторого $v \in V_{[0]}$. Без потери общности можно считать $\varphi(v) = \partial_i$, тогда

$$\varphi(v)(x_1 dX_I) = dX_I = \varphi(x_1 dX_I)(v) \neq 0$$

для любого I такого, что $1 \in I$. Пусть $\varphi(x_1 dX_I) = \partial_\xi$, $\quad \xi(x_s) \neq 0$. Очевидно, найдется набор $I' \neq I$ такой, что $x_s dX_{I'} \in V_{[0]}$, либо $x_s dX_{I'} \pm x_k dX_J \in V_{[0]}$, $\quad s \neq k$, $\quad J \neq I'$, $\quad s \notin I'$. Тогда либо

$$\begin{gathered} \varphi(x_1 dX_I)(x_s dX_{I'}) = \xi(x_s) dX_{I'} = \\ = \varphi(x_s dX_{I'})(x_1 dX_I) = \alpha dX_I, \quad \alpha \in K, \end{gathered}$$

либо

$$\begin{gathered} \varphi(x_1 dX_I)(x_s dX_{I'} \pm x_k dX_J) = \\ = \xi(x_s) dX_{I'} \pm \xi(x_k) dX_J = \beta dX_I. \end{gathered}$$

В любом случае получаем противоречие. Следовательно, $L_{[1]} = F_0 L_{[1]}$. □

Соберем полученные результаты.

Теорема 3.8 ($p > 3$). *Пусть* $L = \oplus_{i \geqslant -1} L_{[i]}$ *— простая градуированная алгебра Ли с почти простой компонентой* $L_{[0]}$. *Если сердцевина* $\bar{\mathfrak{g}}$ *алгебры* $L_{[0]}$ *является алгеброй Ли картановского типа, то* $L_{[0]} = W(\mathcal{F})$ *и* L *— алгебра Ли картановского типа* $H(\mathcal{F}', \omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джумадильдаев А. С.* Деформации алгебры Ли $W_n(\bar{m})$// Мат. сб. — 1989. — *180.* — С. 168–186
2. *Кац В. Г.* О классификации простых алгебр Ли над полем с ненулевой характеристикой// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1970. — *34*, № 2. — С. 385–408 (РЖМат, 1971, 1А234)
3. *Кац В. Г.* Описание фильтрованных алгебр Ли, с которыми ассоциированы градуированные алгебры Ли картановского типа// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1974. — *38*, № 4. — С. 800–834 (РЖМат, 1974, 11А337)
4. *Кириллов С. А.* Специальная алгебра Ли картановского типа// Препр./АН СССР. Ин-т прикл. физ. — 1989. — № 247. — С. 1–13 (РЖМат, 1990, 7А216)
5. *Кириллов С. А.* Гамильтонова алгебра Ли картановского типа// Препр./АН СССР. Ин-т прикл. физ. — 1990. — № 257. — С. 1–28 (РЖМат, 1990, 11А206)
6. *Кострикин А. И., Острик В. В.* К теореме распознавания для алгебр Ли характеристики 3// Мат. сб. — 1995. — *186*, № 5. — С. 73–88 (РЖМат, 1996, 3А217)
7. *Кострикин А. И., Шафаревич И. Р.* Градуированные алгебры Ли конечной характеристики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1969. — *33*, № 2. — С. 251–322 (РЖМат, 1969, 11А245)
8. *Крылюк Я. С.* Алгебры картановского типа: продолжения и представления: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук/ МГУ, Москва, 1978
9. *Кузнецов М. И.* Модулярные простые алгебры Ли с разрешимой максимальной подалгеброй// Мат. сб. — 1976. — *101*, № 1. — С. 77–86 (РЖМат, 1977, 1А266)
10. *Кузнецов М. И.* Модулярные фильтрованные алгебы Ли с унипотентным дифференцированием// 3-й Всес. симп. по теории колец, алгебр и модулей. Тез. сообщ. — Тарту, 1976. — С. 61–62 (РЖМат, 1977, 3А218К)
11. *Кузнецов М. И.* Градуированные алгебры Ли с нулевой компонентой, равной сумме коммутирующих идеалов// Мат. сб. — 1981. — *116*, № 4. — С. 568–572 (РЖМат, 1982, 4А295)
12. *Кузнецов М. И.* Свободные модули ранга $l > 1$ над алгеброй разделенных степеней: дифференцирования и продолжения Картана. Горьк. ун-т. — Горький, 1986. — 27 с. Библиогр. 9 назв. — Деп. в ВИНИТИ 03.11.86, № 7524-В (РЖМат, 1987, 3А304)
13. *Кузнецов М. И.* Распределения над алгеброй срезанных многочленов// Мат. сб. — 1988. — *136.* — С. 187–205

14. *Кузнецов М. И.* Классификация простых градуированных алгебр Ли с неполупростой компонентой L_0// Мат. сб. — 1989. — *180*, № 2. — С. 147–158 (РЖМат, 1989, 6А244)
15. *Кузнецов М. И.* Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1989. — *53*, № 3. — С. 557–589 (РЖМат, 1989, 10А239)
16. *Кузнецов М. И.* Дифференциальные простые операторы в классификации простых модулярных алгебр Ли// Успехи мат. наук. — 1992. — *47*, № 4. — С. 195–196 (РЖМат, 1993, 6А230)
17. *Панюков В. В.* О представлениях алгебр Ли в положительной характеристике// Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. — 1983. — *2*. — С. 53–58 (РЖМат, 1983, 8Б994)
18. *Премет А. А.* Алгебры Ли без сильного вырождения// Мат. сб. — 1986. — *129*, № 1. — С. 140–153 (РЖМат, 1986, 9А225)
19. *Скрябин С. М.* Канонический вид гамильтоновых и контактных форм над алгебрами разделенных степеней. МГУ. — М., 1986. — 65 с. Библиогр. 12 назв. — Деп. в ВИНИТИ 16.12.86, № 8594-В86. (РЖМат, 1987, 7А488)
20. *Скрябин С. М.* Классификация гамильтоновых форм над алгебрами разделенных степеней// Мат. сб. — 1990. — *181*. — С. 114–133
21. *Тюрин С. А.* Классификация деформаций специальной алгебры Ли картановского типа// Мат. заметки. — 1978. — *24*, № 6. — С. 847–857 (РЖМат, 1979, 6А240)
22. *Эльстинг Г. О.* О продолжениях Картана неприводимых градуированных модулей над градуированными алгебрами Ли// Успехи мат. наук. — 1981. — *36*, № 3. — С. 203–204 (РЖМат, 1981, 11А296)
23. *Benkart G., Kostrikin A. I., Kuznetsov M. I.* The simple graded Lie algebras of characteristic three with classical reductive component L_0// Commun. Algebra — 1996.— *24*, № 1. — С. 223–234 (РЖМат, 1997, 1А153)
24. *Block R. E.* Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal// Ann. Math. — 1969. — *90*, № 3. — С. 433–459 (РЖМат, 1971, 2А225)
25. *Block R. E.* Modules over differential polynomial rings// Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — *79*, № 4. — С. 729–733 (РЖМат, 1974, 8А258)
26. *Gregory T. B.* Simple Lie algebras with classical reductive null component// J. Algebra — 1980. — *63*, № 2. — С. 484–493 (РЖМат, 1980, 11А465)
27. *Kostrikin A. I.* Around Burnside, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3 Folge, Band 20. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1990
28. *Kuznetsov M. I.* Graded Lie algebras with null component containing sum of commuting ileals// Commun. Algebra. — 1984. — *12*. — С. 1917–1927
29. *Kuznetsov M. I.* On Lie algebras of contact type// Commun. Algebra. — 1990. — *18*, № 9. — С. 2943–3013 (РЖМат, 1991, 4А262)

30. *Kuznetsov M. I.* Classification of simple 1-graded Lie algebras of characteristic *p*// 2nd Int. Conf. Algebra Dedicat. Mem. A. I. Shirshov, Barnaul, Aug. 20–25, 1991. — Providence, 1995. — C. 255–265 (РЖМат, 1997, 2A153)
31. *Strade H., Farnsteiner R.* Modular Lie algebras and their representations. Textbook and Monographs. V. 116. — New York: Marcel Dekker , 1988
32. *Strade H., Wilson R. L.* Classification of simple Lie algebras over algebraically closed fields of prime characteristic// Bull. Amer. Math. Soc. — 1991. — *24*, № 2. — C. 357–362 (РЖМат, 1993, 6A217)
33. *Weisfeiler B. Ju.* On the structure of the minimal ideal of some graded Lie algebras of characteristic $p > 0$// J. Algebra. — 1978. — *53*, № 2. — C. 344–361 (РЖМат, 1979, 3A256)
34. *Wilson R. L.* Simple Lie algebras of type *S* // J. Algebra. — 1980. — *62*, № 2. — C. 292–298 (РЖМат, 1980, 10A207)

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, проспект Гагарина 23, 603600, Нижний Новгород

УДК 512.554.32

IV. ТЕОРИЯ ЛОРЕНЦЕВЫХ АЛГЕБР КАЦА — МУДИ

В.В. Никулин

СОДЕРЖАНИЕ

§ 0. Введение

Лев Семенович Понтрягин был Великим Математиком. Он интересовался многими областями. Одной из них была теория топологических групп, групп Ли и алгебр Ли. Упомяну его классическую книгу "Непрерывные группы" [11], содержащую его результаты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00933).

Я рад представить обзор, который посвящен *лоренцевым* (или *гиперболическим*) алгебрам Ли Каца — Муди, являющимся гиперболическим аналогом классических полупростых конечномерных алгебр Ли. Некоторая теория таких алгебр была недавно развита В.А. Гриценко и автором [4], [24]–[29]. Она тесно связана и существенно использует результаты Р. Борчердса [13]–[17].

§ 1. Лоренцевы алгебры Каца — Муди

1.1. Некоторые общие результаты по алгебрам Каца — Муди. Все определения и детали этого пункта можно найти в классической книге Виктора Каца [33].

Обобщенная матрица Картана A — это квадратная целочисленная матрица конечного ранга, имеющая на диагонали только 2 и вне диагонали только неположительные целые числа. Будем рассматривать только *симметризуемые* обобщенные матрицы Картана A. Это значит, что существует такая диагональная матрица D с положительными рациональными диагональными коэффициентами, что $B = DA$ целочисленна и симметрична. Тогда B называется *симметризацией* матрицы A. По определению, $\operatorname{sign}(A) = \operatorname{sign}(B)$. Предположим, что матрица A *неразложима,* т. е. не существует такого разбиения $I = I_1 \cup I_2$ множества I индексов матрицы A, что $a_{ij} = 0$, если $i \in I_1$ и $j \in I_2$.

Каждая обобщенная матрица Картана определяет алгебру Ли Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$ над $\mathbb{C}$. *Алгебра Каца — Муди* $\mathfrak{g}(A)$ задается множествами образующих и их определяющих соотношений, предписываемыми обобщенной матрицей Картана A. Они были найдены В. Кацем и Р. Муди. Фактически, они являются естественным обобщением классических результатов Киллинга, Картана, Г. Вейля, Шевалле и Серра по конечномерным полупростым алгебрам Ли. Следует ввести образующие h_i, e_i, f_i, $i \in I$, с определяющими соотношениями

$$\begin{cases} [h_i, h_j] = 0, \quad [e_i, f_i] = h_i, \quad [e_i, f_j] = 0, \text{ если } i \neq j, \\ [h_i, e_j] = a_{ij}e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij}f_j, \\ (\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}}e_j = (\operatorname{ad} f_i)^{1-a_{ij}}f_j = 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases} \tag{1.1}$$

Важное свойство алгебры $\mathfrak{g}(A)$ заключается в том, что она проста или почти проста: проста после факторизации по известному идеалу.

Отметим некоторые общие свойства алгебр Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$.

1. Симметризация B определяет свободный $\mathbb{Z}$-модуль $Q = \sum_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ с образующими α_i, $i \in I$, с симметрической билинейной формой $((\alpha_i, \alpha_j)) = B$, определяемой симметризацией B. Q называется *решеткой корней.* Алгебра $\mathfrak{g}(A)$ *градуирована решеткой корней* Q (по определению образующие h_i, e_i, f_i имеют веса 0, α_i, $-\alpha_i$ соответственно):

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha\in Q}\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha\in-\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha\right), \tag{1.2}$$

где $\mathfrak{g}_\alpha$ являются конечномерными линейными пространствами, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, подалгебра $\mathfrak{g}_0 \equiv Q\otimes\mathbb{C}$ коммутативна и называется *подалгеброй Картана.* Элемент $0 \neq \alpha \in Q$ называется *корнем,* если $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. Подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ называется *корневым пространством,* соответствующим α. Размерность $\operatorname{mult}(\alpha) = \dim\mathfrak{g}_\alpha$ называется *кратностью* корня α. В (1.2) $\Delta\subset Q$ является множеством всех корней. Оно делится на множество $\Delta_+ \subset \sum_{i\in I}\mathbb{Z}_+\alpha_i$ *положительных* и множество $-\Delta_+$ *отрицательных* корней. Корень $\alpha\in\Delta$ называется *вещественным,* если $(\alpha, \alpha) > 0$. В противном случае (если $(\alpha, \alpha) \leqslant 0$) он называется *мнимым.* Каждый вещественный корень α определяет *отражение* $s_\alpha : x \mapsto x - (2(x,\alpha)/(\alpha,\alpha))\,\alpha$, $x\in Q$. Все отражения s_α в вещественных корнях порождают *группу Вейля* $W\subset O(S)$. Множество корней Δ и кратности корней инвариантны относительно W.

2. Имеется *тождество Вейля — Каца для знаменателя,* которое позволяет вычислять кратности корней:

$$e(-\rho)\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-e(-\alpha))^{\operatorname{mult}(\alpha)} = \sum_{w\in W}\det(w)e(-w(\rho)). \tag{1.3}$$

Здесь $e(\,\cdot\,)\in\mathbb{Z}[Q]$ — формальные экспоненты, ρ называется *вектором Вейля* и определяется условием $(\rho, \alpha_i) = -(\alpha_i, \alpha_i)/2$ для любого $i\in I$.

Тождество (1.3) является комбинаторным, и формулы для кратностей $\operatorname{mult}(\alpha)$ в общем случае не известны. Один из подходов к решению этой проблемы заключается в замене формальной функции (1.3) на неформальную (например, заменой формальных экспонент на неформальные), при которой получается функция с “хорошими” свойствами. Эти хорошие свойства могут помочь найти формулы для кратностей.

1.2. Конечный и аффинный случаи. Имеются два случая, когда есть очень ясная картина (или теория) алгебр Каца — Муди.

Конечный случай. Обобщенная матрица Картана A положительно определена, $A > 0$. Тогда алгебра $\mathfrak{g}(A)$ конечномерна, следовательно, получаем классическую теорию *конечномерных полупростых алгебр Ли.*

Аффинный случай. Обобщенная матрица Картана полуположительно определена, $A \geqslant 0$. Тогда алгебра $\mathfrak{g}(A)$ называется *аффинной.*

В обоих случаях имеются три очень хороших свойства:

(I) Имеется классификация всех возможных обобщенных матриц Картана A. Они классифицируются диаграммами Дынкина в конечном случае и расширенными диаграммами Дынкина в аффинном случае.

(II) В тождестве для знаменателя (1.3) формальные экспоненты могут быть заменены на неформальные, что дает функцию с очень хорошими свойствами. В конечном случае получается полином. В аффинном случае получается автоморфная форма Якоби. Используя эти свойства (или непосредственно), можно вычислить все кратности.

(III) Оба случая чрезвычайно важны в математике и физике.

Хотелось бы построить подобную теорию для *лоренцева* (*или гиперболического*) *случая,* когда обобщенная матрица Картана A *гиперболична,* т. е. имеет ровно один отрицательный квадрат, все ее остальные квадраты являются положительными или нулевыми. Имеется необозримое множество гиперболических обобщенных матриц Картана, найти их все и классифицировать невозможно. С другой стороны, вероятно, не все они дают интересные алгебры Каца — Муди, поэтому следует найти естественные условия на эти матрицы.

1.3. Лоренцев случай. Пример Борчердса. Имеется следующий ключевой пример, найденный Р. Борчердсом [13]–[17].

В примере Борчердса решетка корней $Q = S$, где S — гиперболическая четная унимодулярная решетка сигнатуры $(25, 1)$. Здесь “четная” означает, что (x, x) четно для любого $x \in S$.

"Унимодулярная" означает, что двойственная решетка S^* совпадает с S эквивалентно, для базиса $e_1, \dots, e_{26}$ решетки S определитель матрицы Грама $((e_i,\ e_j))$ равен ± 1. Решетка S с такими свойствами единственна с точностью до изоморфизма. В примере Борчердса группа Вейля W порождена отражениями $s_\alpha : x \mapsto x - (x, \alpha)\alpha$, $x \in S$, во всех элементах $\alpha \in S$, имеющих квадрат $\alpha^2 = 2$. Группа W дискретна в гиперболическом пространстве $\mathcal{L}(S) = V^+(S)/\mathbb{R}_{++}$. Здесь $V^+(S)$ является полой светового конуса $V(S) = \{x \in S \otimes \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$ решетки S. Пространство $\mathcal{L}(S)$ состоит из лучей, лежащих в $V^+(S)$.

Фундаментальная камера $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(S)$ для W задается множеством P элементов $\alpha \in S$ с $\alpha^2 = 2$, которые *ортогональны камере* $\mathcal{M}$. Множество P имеет следующее описание, полученное Конвеем [20]. Существует ортогональное разложение $S = [\rho,\ e] \oplus L$, где матрица Грама элементов ρ, e равна $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (в частности, $(\rho, \rho) = 0$), и L — решетка Лича, т. е. положительно определенная четная унимодулярная решетка ранга 24, не имеющая элементов с квадратом 2. Множество P корней, ортогональных фундаментальной камере $\mathcal{M}$ (или множество *простых корней*) группы Вейля W, равно

$$P = \{\alpha \in S \mid (\alpha,\ \alpha) = 2 \text{ и } (\rho, \alpha) = -1\}. \tag{1.4}$$

Это значит, что фундаментальная камера $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(S)$ равна

$$\mathcal{M} = \{\mathbb{R}_{++}x \in \mathcal{L}(S) \mid (x,\ P) \leqslant 0\}, \tag{1.5}$$

и P минимально с этим свойством. Отметим, что фундаментальная камера $\mathcal{M}$ имеет *"почти конечный" объем*. Это значит, что $\mathcal{M}$ конечна в любом угле гиперболического пространства $\mathcal{L}(S)$ с вершиной в бесконечно удаленной точке $\mathbb{R}_{++}\rho$.

Матрица

$$A = ((\alpha,\ \alpha')), \quad \alpha,\ \alpha' \in P, \tag{1.6}$$

является обобщенной матрицей Картана и ρ является вектором Вейля

$$(\rho,\ \alpha) = -(\alpha,\ \alpha)/2 \ \forall \alpha \in P. \tag{1.7}$$

Таким образом, A определяет лоренцеву алгебру Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$, градуированную гиперболической решеткой S. Но алгебра $\mathfrak{g}(A)$ — не та алгебра, которая рассматривается в примере Борчердса. Алгебру $\mathfrak{g}(A)$ следует *"откорректировать"*.

Имеется классическая $SL_2(\mathbb{Z})$-модулярная касп форма Δ веса 12 на верхней полуплоскости $\operatorname{im}\tau > 0$

$$\Delta = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{m\geqslant 0}\tau(m)q^m, \tag{1.8}$$

где $q = \exp(2\pi i\tau)$. Имеем

$$\Delta^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} p_{24}(n)q^{n-1}, \tag{1.9}$$

где $p_{24}(n)$ — положительные целые числа. Борчердс [14] доказал *тождество*

$$\Phi(z) = \exp(-2\pi i(\rho, z))\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-2\pi i(\alpha, z)))^{p_{24}(1-(\alpha,\alpha)/2)} =$$

$$= \sum_{w\in W}\det(w)\sum_{m>0}\tau(m)\exp(-2\pi i(w(m\rho), z)). \tag{1.10}$$

Здесь $\Delta_+ = \{\alpha\in S\,|\,\alpha^2 = 2$ и $(\alpha,\rho)<0\}\cup(S\cap\overline{V^+(S)}-\{0\})$. Переменная z пробегает *комплексифицированный конус* $\Omega(V^+(S)) = S\otimes\mathbb{R} + iV^+(S)$ светового конуса $V^+(S)$. Кроме того, Борчердс [16], [17] доказал, что функция $\Phi(z)$ ***является автоморфной формой веса*** 12 относительно группы $O^+(T)$, где $T = U\oplus S$ — расширенная решетка сигнатуры $(26, 2)$. Группа $O^+(T)$ естественно действует в эрмитовой симметрической области типа IV

$$\Omega(T) = \{\mathbb{C}\omega\subset T\otimes\mathbb{C}\mid(\omega,\omega)=0,\quad(\omega,\overline{\omega})<0\}_0, \tag{1.11}$$

которая канонически отождествляется с $\Omega(V^+(S))$ следующим образом: $z\in\Omega(V^+(S))$ определяет элемент $\mathbb{C}\omega_z\in\Omega(T)_0$, где $\omega_z = ((z,z)/2)e_1 + e_2\oplus z\in T\otimes\mathbb{C}$ и e_1, e_2 — базис решетки U с приведенной выше матрицей Грама U. Здесь "автоморфная форма веса 12" обозначает, что функция $\widetilde{\Phi}(\lambda\omega_z) = \lambda^{-12}\Phi(z)$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$, однородна степени -12 (это очевидно) в однородном конусе $\widetilde{\Omega(T)}_0$ над $\Omega(T)_0$, и $\widetilde{\Phi}(g\omega) = \det(g)\widetilde{\Phi}(\omega)$ для любых $\omega\in\widetilde{\Omega(T)}_0$ и $g\in O^+(T)$, где $O^+(T)$ — подгруппа индекса 2 группы $O(T)$, сохраняющая компоненту связности (1.11) (отмеченную 0).

Тождество (1.10) очень похоже на тождество (1.3) для знаменателя алгебры Каца — Муди, но имеется некоторое отличие.

Чтобы проинтерпретировать (1.10) как тождество для знаменателя алгебры Ли, Борчердс определил [13] *обобщенные алгебры Каца — Муди* $\mathfrak{g}(A')$, соответствующие более общим матрицам, чем обобщенные матрицы Картана. Назовем их *обобщенными матрицами Картана*. Разница заключается в том, что обобщенная матрица Картана A' может иметь также неположительные вещественные числа $a_{ij} \leqslant 0$ на диагонали и вне диагонали, но все $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, если $a_{ii} = 2$. Определение обобщенной алгебры Каца — Муди $\mathfrak{g}(A')$, соответствующей обобщенной матрице Картана A', аналогично (1.1). Следует заменить последнюю строку в (1.1) на

$$(\mathrm{ad}\ e_i)^{1-a_{ij}} e_j = (\mathrm{ad}\ f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, \text{ если } i \neq j \text{ и } a_{ii} = 2, \qquad (1.12)$$

и добавить соотношение

$$[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0, \text{ если } a_{ij} = 0. \qquad (1.13)$$

Борчердс показал, что обобщенные алгебры Каца — Муди аналогичны обычным алгебрам Каца — Муди. Они также имеют тождество для знаменателя, которое имеет более общую форму, чем (1.3), и содержит (1.10) как частный случай.

Тождество (1.10) является тождеством для знаменателя обобщенной алгебры Каца — Муди $\mathfrak{g}(A')$, где A' — обобщенная матрица Картана, равная матрице Грама $A' = ((\alpha, \alpha'))$, $\alpha, \alpha' \in P'$, где

$$P' = P \cup 24\rho \cup 24(2\rho) \cup \dots \cup 24(n\rho) \cup \dots \qquad (1.14)$$

— последовательность элементов решетки S. Здесь $24(n\rho)$ означает, что при определении матрицы Грама A' элемент $n\rho$ берется двадцать четыре раза. Детали см. в [13]–[15].

В (1.14) множество P', задающее A', называется *множеством простых корней*. Оно делится на множество $P'^{\mathrm{re}} = P$, описанное в (1.4), *простых вещественных корней* (они ортогональны фундаментальной камере $\mathcal{M}$ группы Вейля W и имеют положительный квадрат) и совпадает с множеством простых корней (все они вещественны) обычной алгебры Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$, задаваемой обобщенной матрицей Картана A в (1.6). Дополнительная последовательность

$$P'^{\mathrm{im}} = 24\rho \cup 24(2\rho) \cup \dots \cup 24(n\rho) \cup \dots \qquad (1.15)$$

в P' (элементы P'^{im} имеют нулевые квадраты) задается коэффициентами Фурье суммы в тождестве (1.10). Например, 24 определяется 24 в (1.10). Вместе P'^{re} и P'^{im} определяют обобщенную матрицу Картана A' и обобщенную алгебру Каца — Муди $\mathfrak{g}(A')$.

Пример Борчердса очень фундаментален и красив. Он имеет важные приложения в математике (например, к Монстру) и физике (например, в Теории Струн).

1.4. Теория лоренцевых алгебр Каца — Муди. Анализируя пример Борчердса, можно предложить общий класс лоренцевых алгебр Каца — Муди (или автоморфных алгебр Каца — Муди) $\mathfrak{g}$, см. [4], [10], [24]–[29].

Берутся приведенные ниже данные (1)—(5):

(1) Гиперболическая решетка S (т. е. целочисленная симметрическая билинейная форма сигнатуры $(n,1)$).

(2) Группа отражений (или група Вейля) $W \subset O(S)$, порожденная отражениями в корнях решетки S. Напомним, что $\alpha \in S$ называется *корнем*, если $\alpha^2 > 0$ и $\alpha^2 \,|\, 2(\alpha, S)$. Любой корень α дает отражение $s_\alpha : x \mapsto x - (2(x,\alpha)/\alpha^2)\alpha$, $x \in S$, являющееся автоморфизмом решетки S.

(3) Множество P ортогональных корней к фундаментальной камере $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(S)$ группы W. Это означает, что множество P корней решетки S должно иметь свойство (1.5) и должно быть минимально с данным свойством. Кроме того, множество P должно иметь *вектор Вейля* $\rho \in S \otimes \mathbb{Q}$, определенный равенством (1.7) (правильнее называть его *решеточным вектором Вейля*).

Основным инвариантом данных (1)—(3) является *обобщенная матрица Картана*

$$A = \left(\frac{2(\alpha,\alpha')}{(\alpha,\alpha)}\right), \quad \alpha, \alpha' \in P. \tag{1.16}$$

Она определяет данные (1)—(3) с точностью до очень ясного отношения эквивалентности и задает множество вещественных корней алгебры $\mathfrak{g}$, которую мы хотим построить.

(4) Автоморфная (голоморфная) форма $\Phi(z)$ на эрмитовой симметрической области типа IV, $z \in \Omega(V^+(S)) = \Omega(T)$, относительно подгруппы $G \subset O^+(T)$ конечного индекса расширенной решетки $T = U(k) \oplus S$, где $U(k) = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$. (Более общее определение см. в [27].) Она должна иметь разложение Фурье, имеющее вид тождества для знаменателя обобщенной

алгебры Каца — Муди с гиперболической обобщенной матрицей Картана, а именно:

$$\Phi(z) = \sum_{w\in W} \det(w)\Big(\exp\left(-2\pi i(w(\rho), z)\right) -$$
$$- \sum_{a\in S\cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}} m(a)\exp\left(-2\pi i(w(\rho + a), z)\right)\Big), \qquad (1.17)$$

где все коэффициенты $m(a)$ должны быть целыми. Автоморфная форма Φ определяет множество простых мнимых корней алгебры $\mathfrak{g}$.

Как и в примере Борчердса, данные (1)—(4) задают обобщенную алгебру или супералгебру (если некоторые коэффициенты Фурье $m(a)$ отрицательны) Каца — Муди $\mathfrak{g}$. (Определение $\mathfrak{g}$ смотри ниже.) Используя автоморфные свойства $\Phi(z)$, хотелось бы вычислить *бесконечное произведение в тождестве для знаменателя*

$$\Phi(z) = \exp\left(-2\pi i(\rho, z)\right) \prod_{\alpha\in\Delta_+} \Big(1 - \exp\left(-2\pi i(\alpha, z)\right)\Big)^{\mathrm{mult}(\alpha)}, \qquad (1.18)$$

которое дает кратности $\mathrm{mult}(\alpha)$ корней α алгебры $\mathfrak{g}$. В случае супералгебры кратность $\mathrm{mult}(\alpha) = \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{0}} - \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{1}}$ является разностью размерностей четной и нечетной частей корневого пространства $\mathfrak{g}_\alpha$.

Естественно дополнительно предполагать (по крайней мере, чтобы иметь результаты конечности) следующее дополнительное условие:

(5) Автоморфная форма Φ в области $\Omega(V^+(S)) = \Omega(T)$ должна быть *рефлективна*. Это означает, что дивизор (нулей) формы Φ является объединением квадратичных дивизоров, ортогональных корням расширенной решетки T. Здесь для корня $\alpha \in T$ (определение корня решетки T то же, что и для решетки S) *квадратичный дивизор, отрогональный* α, равен

$$D_\alpha = \{\mathbb{C}\omega \in \Omega(T) \mid (\omega, \alpha) = 0\}. \qquad (1.19)$$

Свойство (5) имеет место в примере Борчердса и во всех известных случаях. Кроме того, оно верно в окрестности каспа, в котором сходится бесконечное произведение (1.18). Таким образом, мы хотим, чтобы оно выполнялось глобально.

Обобщенная супералгебра Каца — Муди $\mathfrak{g}$, соответствующая данным (1)—(4), задается последовательностью $P' \subset S$

простых корней. Эта последовательность делится на множество P'^{re} *простых вещественных корней* и последовательность P'^{im} *простых мнимых корней.* Последовательность P'^{im} делится на последовательность $P'^{\mathrm{im}}_{\bar{0}}$ *четных простых мнимых корней* и последовательность $P'^{\mathrm{im}}_{\bar{1}}$ *нечетных простых мнимых корней.* Для примитивного $a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M}$ с $(a, a) = 0$ нужно найти $\tau(na) \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, из тождества с формальной переменной t:

$$1 - \sum_{k \in \mathbb{N}} m(ka)t^k = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - t^n)^{\tau(na)}.$$

Множество $P'^{\mathrm{re}} = P$, где P определено в данных (3). Множество P'^{re} является четным: $P'^{\mathrm{re}} = P'^{\mathrm{re}}_{\bar{0}}$ и $P'^{\mathrm{re}}_{\bar{1}} = \emptyset$. Полагаем

$$P'^{\mathrm{im}}_{\bar{0}} = \{m(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M},\ (a,a) < 0 \text{ и } m(a) > 0\} \cup$$
$$\cup \{\tau(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M},\ (a,a) = 0 \text{ и } \tau(a) > 0\};$$

$$P'^{\mathrm{im}}_{\bar{1}} = \{-m(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M},\ (a,a) < 0 \text{ и } m(a) < 0\} \cup$$
$$\cup \{\tau(a)a \mid a \in S \cap \mathbb{R}_{++}\mathcal{M},\ (a,a) = 0 \text{ и } \tau(a) < 0\}.$$

Обобщенная супералгебра Каца — Муди $\mathfrak{g}$ является супералгеброй Ли, порожденной h_r, e_r, f_r, где $r \in P'$. Все образующие h_r четны, образующие e_r, f_r четны (соответственно нечетны), если r четно (соответственно нечетно). Они имеют определяющие соотношения 1)—5), приведенные ниже.

1) Отображение $r \mapsto h_r$ для $r \in P'$ задает вложение $S \otimes \mathbb{C}$ в $\mathfrak{g}$ как абелевой подалгебры (она четна).

2) $[h_r, e_{r'}] = (r, r')e_{r'}$ и $[h_r, f_{r'}] = -(r, r')f_{r'}$.

3) $[e_r, f_{r'}] = h_r$, если $r = r'$, и равно 0, если $r \neq r'$.

4) $(\mathrm{ad}e_r)^{1-2(r,r')/(r,r)}e_{r'} = (\mathrm{ad}f_r)^{1-2(r,r')/(r,r)}f_{r'} = 0$, если $r \neq r'$ и $(r, r) > 0$

(эквивалентно, $r \in P'^{\mathrm{re}}$).

5) Если $(r, r') = 0$, то $[e_r, e_{r'}] = [f_r, f_{r'}] = 0$.

По поводу деталей см. [13], [24], [25], [27], [40]. Отметим, что это определение эквивалентно определению из п. 1.3, использующему обобщенную матрицу Картана, задаваемую последовательностью P'.

Обобщенные супералгебры Каца — Муди $\mathfrak{g}$, задаваемые данными (1)—(5), *составляют теорию лоренцевых алгебр Каца —*

Муди (или автоморфных лоренцевых алгебр Каца — Муди), которые мы рассматриваем.

В силу (4) они имеют свойство, аналогичное свойству (II) для конечных или аффинных алгебр: их тождество для знаменателя дает автоморфную форму. Для лоренцева случая это автоморфная форма на эрмитовой симметрической области типа IV.

Что можно сказать по поводу аналога свойства (I) для конечных и аффинных алгебр Каца — Муди? Как много имеется данных (1)—(5)?

Далее предположим, что $\operatorname{rk} S \geqslant 3$. Это условие можно понимать как рассмотрение лоренцевых аналогов нетривиальных конечномерных полупростых алгебр Ли. Если $\operatorname{rk} S = 1, 2$, то классификация данных (1)—(5) другая и, по-видимому, более проста.

Теорема 1. *Если* $\operatorname{rk} S \geqslant 3$, *то множество возможных данных* (1)—(3) *в данных* (1)—(4) *конечно, если* $(\rho, \rho) < 0$, *и "в существенном конечно", если* $(\rho, \rho) = 0$. *Неравенство* $(\rho, \rho) > 0$ *невозможно.*

Здесь "в существенном конечно" означает, что множество может быть бесконечно, но имеется очень ясное его описание. Например, множество возможных диаграмм Дынкина типа A_n бесконечно, но мы очень ясно себе его представляем.

Ключевой момент в доказательстве теоремы 1 заключается в том, что данные (1)—(4) дают $(\rho, \rho) \leqslant 0$ и фундаментальная камера $\mathcal{M}$ имеет конечный, если $(\rho, \rho) < 0$, и "почти конечный", если $(\rho, \rho) < 0$, объем (см. [10], [27]). (Здесь "почти конечный" обозначает то же, что в примере Борчердса.) Тогда число возможных решеток корней S конечно. Это следует из результатов автора [7], [8], [10] и Э.Б. Винберга [1]. Если дополнительно существует вектор Вейля ρ для P, то имеется конечность, если $(\rho, \rho) < 0$, и в существенном конечность, если $(\rho, \rho) = 0$, множеств групп Вейля W, фундаментальных камер $\mathcal{M}$ (с точностью до действия W) и множеств ортогональных коней P к $\mathcal{M}$, см. [10]. Это дает конечность и в существенном конечность соответственно множества возможных обобщенных матриц Картана A в (1.16), соответствующих простым вещественным корням.

Отсюда следует, что в принципе можно классифицировать все возможные данные (1)—(3) в данных (1)—(4). (Для $\operatorname{rk} S = 1, 2$ подобная классификация тривиальна.) Это делает теорию лоренцевых алгебр Каца — Муди очень похожей на теории конечных и аффинных алгебр Каца — Муди.

Было бы хорошо иметь результаты конечности также для данных (4), (5). Недавно были получены некоторые частные результаты конечности [27], [39], которые показывают, что автоморфные формы $\Phi(z)$ в (4) и (5) чрезвычайно редки. Это делает очень вероятным следующее утверждение.

Гипотеза 2. *Если* $\mathrm{rk}\, S \geqslant 3$, *то множество возможных данных* (4), (5) *в существенном конечно.*

Причина, по которой ожидается утверждение гипотезы 2, основана на *принципе Кгхера* (например, см. [12]): Любая голоморфная автоморфная форма на эрмитовой симметрической области Ω должна иметь нули в Ω, если $\dim \Omega - \dim \Omega_\infty \geqslant 2$.

Применяя этот принцип к ограничению $\Phi|\Omega(T_1)$ рефлективной автоморфной формы Φ решетки T на все подобласти $\Omega(T_1) \subset \Omega(T)$, где $T_1 \subset T$ — подрешетка сигнатуры $(k, 2)$, получаются очень сильные условия на решетку T, если она имеет рефлективную автоморфную форму Φ. Это было продемонстрировано в [39].

Предполагаем, что гипотеза 2 очень интересна. С нашей точки зрения, теория рефлективных автоморфных форм на областях $\Omega(T)$ типа IV, где T — решетка сигнатуры $(n, 2)$, "аналогична" (Зеркально Симметрична) теории групп отражений W с фундаментальной камерой конечного или почти конечного объема гиперболических решеток S, см. [26]-[29], [39].

Было бы интересно классифицировать (или описать) гипотетически "конечное множество" данных (1)—(5). Даже конечное множество может иметь очень интересную структуру. В результате получим некоторую теорию лоренцевых алгебр Каца — Муди, которую можно рассматривать как гиперболический аналог теорий конечных и аффинных алгебр Каца — Муди.

В заключение опишем небольшой фрагмент этой классификации, полученный в [4], [27], [28].

Имеется ровно 12 обобщенных матриц Картана данных (1)—(3) в (1)—(4), которые симметричны, имеют ранг 3, имеют вектор Вейля ρ с $(\rho, \rho) < 0$ и некомпактный фундаментальный многогранник $\mathcal{M}$ (имеется еще 4 матрицы с компактным $\mathcal{M}$). Эти двенадцать матриц приведены ниже.

Список всех симметричных гиперболических обобщенных матриц Картана ранга 3 с некомпактным $\mathcal{M}$ и $\mathrm{vol}(\mathcal{M}) < \infty$, имеющих решеточный вектор Вейля ρ

$$A_{1,0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,\mathrm{III}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -6 & -7 \\ -6 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ -6 & -6 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_{2,0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{2,\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -6 \\ -6 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,\mathrm{III}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -8 & -16 & -18 & -14 & -8 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -8 & -14 & -18 & -16 & -8 \\ -8 & 0 & 2 & -2 & -8 & -16 & -18 & -14 \\ -16 & -8 & -2 & 2 & 0 & -8 & -14 & -18 \\ -18 & -14 & -8 & 0 & 2 & -2 & -8 & -16 \\ -14 & -18 & -16 & -8 & -2 & 2 & 0 & -8 \\ -8 & -16 & -18 & -14 & -8 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -8 & -14 & -18 & -16 & -8 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A_{3,0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{3,\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -5 \\ -5 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -5 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{3,\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -10 & -14 & -10 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -10 & -14 & -10 \\ -10 & -2 & 2 & -2 & -10 & -14 \\ -14 & -10 & -2 & 2 & -2 & -10 \\ -10 & -14 & -10 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -10 & -14 & -10 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{3,\mathrm{III}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 \\ -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 \\ -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 \\ -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 \\ -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 \\ -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 & -37 & -47 \\ -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 & -23 & -37 \\ -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 & -11 & -25 \\ -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 & -1 & -11 \\ -11 & -25 & -37 & -47 & -50 & -46 & -37 & -23 & -11 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -11 & -23 & -37 & -46 & -50 & -47 & -37 & -25 & -11 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Во всех этих случаях фундаментальная камера $\mathcal{M}$ является замкнутым многоугольником на гиперболической плоскости с углами соответственно:

$A_{1,0}:\ \pi/2,\ 0,\ \pi/3$; $A_{1,\mathrm{I}}:\ 0,\ \pi/3,\ \pi/3$; $A_{1,\mathrm{II}}:\ 0,\ 0,\ 0$;
$A_{1,\mathrm{III}}:\ 0,\ \pi/2,\ 0,\ \pi/2, 0$;
$A_{2,0}:\ 0,\ \pi/2,\ 0$; $A_{2,\mathrm{I}}:\ 0,\ \pi/2,\ 0,\ \pi/2$; $A_{2,\mathrm{II}}:\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$;
$A_{2,\mathrm{III}}:\ 0,\ \pi/2,\ 0,\ \pi/2,\ 0,\ \pi/2,\ 0,\ \pi/2$;
$A_{3,0}:\ 0,\ \pi/3,\ 0$; $A_{3,\mathrm{I}}:\ 0,\ \pi/3,\ 0,\ \pi/3$; $A_{3,\mathrm{II}}:\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$;
$A_{3,\mathrm{III}}:\ 0,\ \pi/3,\ 0,\ \pi/3,\ 0,\ \pi/3,\ 0,\ \pi/3,\ 0,\ \pi/3,\ 0,\ \pi/3$.

Все эти многоугольники касаются окружности с центром $\mathbb{R}_{++}\rho$, где ρ — вектор Вейля. Это показывает геометрический смысл вектора Вейля.

Для 9 обобщенных матриц Картана $A_{i,j}$, соответствующих $i = 1, 2, 3$ и $j = 0, \mathrm{I}, \mathrm{II}$, построены автоморфные формы Φ для данных (4), (5) и, в частности, построены соответствующие (автоморфные) лоренцевы алгебры Каца — Муди, найдены их разложения в бесконечное произведение (1.18). См. [4], [24], [25], [27], [28]. Интересно, что некоторые из этих автоморфных форм были хорошо известны. Например, автоморфная форма Φ для $A_{1,\mathrm{II}}$ является классической. Она имеет вес 5 и является произведением всех четных тэта-констант рода два (их десять). Она автоморфна относительно $Sp_4(\mathbb{Z})$ с некоторым квадратичным характером и дает дискриминант модулей кривых рода 2. Автоморфная форма Φ для $A_{1,0}$ имеет вес 35 и автоморфна относительно $Sp_4(\mathbb{Z})$. Эта автоморфная форма была найдена Игузой более 30-ти лет назад и является $Sp_4(\mathbb{Z})$-автоморфной формой наименьшего нечетного веса. Для обеих этих автоморфных форм были найдены разложения в бесконечные произведения (1.18), которые не были известны. Здесь мы используем изоморфизм области типа IV и размерности три с верхней полуплоскостью Зигеля рода 2.

Все другие автоморфные формы Φ для обобщенных матриц Картана $A_{1,0}$—$A_{3,\mathrm{II}}$ не были известны. Приведем одну из них.

Дадим автоморфную форму Φ для $A_{3,\mathrm{II}}$. Для этого случая $T = 2U(12) \oplus \langle 2\rangle = U(12) \oplus S$, где $S = U(12) \oplus \langle 2\rangle$ дает данное (1). Используем базис f_2, $\hat{f}_3$, f_{-2} решетки S с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и с соответствующими координатами z_1, z_2, z_3 в пространстве $S \otimes \mathbb{C}$. Группа Вейля W в данных (2) порождена отражениями во всех элементах с квадратом 2 решетки S. Множество P в данных (3) равно

$$P = \{\alpha_1 = (0,1,0),\ \alpha_2 = (0,-1,1),\ \alpha_3 = (1,-5,2),\ \alpha_4 = (2,-7,2),$$
$$\alpha_5 = (2,-5,1),\ \alpha_6 = (1,-1,0)\}.$$

Оно имеет матрицу Грама $A_{3,\mathrm{II}}$. Вектор Вейля $\rho = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$. Автоморфная форма Φ является автоморфной касп формой Δ_1

относительно группы $G = O^+(T)$ с некоторым характером порядка 6. Она имеет наименьший возможный вес 1, разложение Фурье и разложение в бесконечное произведение

$$\Delta_1(z_1, z_2, z_3) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{M\geqslant 1} \sum_{\substack{m>0,\, l\in\mathbb{Z}\\ n,m\equiv 1 \mod 6\\ 4nm-3l^2=M^2}} \left(\frac{-4}{l}\right)\left(\frac{12}{M}\right) \sum_{a|(n,l,m)} \left(\frac{6}{a}\right) q^{n/6} r^{l/2} s^{m/6} = \\
&= q^{1/6} r^{1/2} s^{1/6} \prod_{\substack{n,l,m\ \in\mathbb{Z}\\ (n,l,m)\ >0}} (1 - q^n r^l s^m)^{f_3(nm,l)},
\end{aligned} \tag{1.20}$$

где $q = \exp(24\pi i z_1)$, $r = \exp(4\pi i z_2)$, $s = \exp(24\pi i z_3)$ и

$$\left(\frac{-4}{l}\right) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } l \equiv \pm 1 \mod 4, \\ 0, & \text{если } l \equiv 0 \mod 2; \end{cases}$$

$$\left(\frac{12}{M}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } M \equiv \pm 1 \mod 12, \\ -1, & \text{если } M \equiv \pm 5 \mod 12, \\ 0, & \text{если } (M, 12) \neq 1; \end{cases}$$

$$\left(\frac{6}{a}\right) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } a \equiv \pm 1 \mod 6, \\ 0, & \text{если } (a, 6) \neq 1\ . \end{cases}$$

Кратности $f_3(nm, l)$ бесконечного произведения определяются слабой формой Якоби $\phi_{0,3}(\tau, z) = \sum_{n\geqslant 0,\, l\in\mathbb{Z}} f_3(n, l) q^n r^l$ веса 0 и индекса 3 с целыми коэффициентами Фурье:

$$\phi_{0,3}(\tau, z) =$$

$$= r^{-1} \left(\prod_{n\geqslant 1} (1 + q^{n-1} r)(1 + q^n r^{-1})(1 - q^{2n-1} r^2)(1 - q^{2n-1} r^{-2}) \right)^2, \tag{1.21}$$

где $q = \exp(2\pi i \tau)$, $\operatorname{im} \tau > 0$, и $r = \exp(2\pi i z)$. Дивизор формы Δ_1 является суммой с кратностями один всех квадратичных дивизоров, ортогональных элементам решетки T с квадратом 2. Эти данные S, W, P и Δ_1 определяют обобщенную лоренцеву супералгебру Каца — Муди $\mathfrak{g}$ с тождеством для знаменателя (1.20).

Для построения автоморфной формы Δ_1 используется *арифметический подъем форм Якоби на эрмитовы симметрические области типа* IV, построенный в [4], [24]–[26] (это дает построение формы Δ_1 в виде разложения Фурье в (1.20)). Для разложения Δ_1 в бесконечное произведение (1.20) используется *подъем Борчердса* [17], который является экспоненциальным аналогом арифметического подъема. Детали см. в [28].

1.5. Физические приложения. Рассмотренные выше лоренцевы алгебры Каца — Муди и соответствующие автоморфные формы Φ нашли очень интересные приложения в физике: Теории Струн, Зеркальной Симметрии и др. Отошлем читателя к хорошему обзору [36] и имеющимся в нем ссылкам. Например, см. [18], [19], [21], [30], [31], [34], [35]. Грубо говоря, лоренцевы алгебры Каца — Муди связаны с симметриями фундаментальных физических теорий.

1.6. Интересная проблема. В приведенных выше данных (1)—(5) очень важно существование вектора Вейля $\rho \in S \otimes \mathbb{Q}$ (или решеточного вектора Вейля). Это эквивалентно рассмотрению автоморфных форм Φ на эрмитовых симметрических областях типа IV. Было бы интересно расширить данную теорию лоренцевых алгебр Каца — Муди на случаи, когда решеточный вектор Вейля ρ не существует. По-видимому, в более общем случае следует рассматривать автоморфные формы в некотором более общем смысле. С другой стороны, эта более общая теория потеряет некоторые свойства конечности. Это было бы жалко.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Винберг Э.Б.* Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1984. — *47*. — С. 68 - 102 (РЖМат, 1985, 4A530)
2. *Гриценко В.А.* Функции Фурье — Якоби n переменных// Зап. науч. семин. ЛОМИ. Анал. теория чисел и теория функций. — 1988. — № 9. — С. 32–44 (РЖМат, 1989, 5A328)
3. *Гриценко В. А.* Модулярные формы и пространства модулей абелевых и $K3$ поверхностей// Алгебра и Анал. — 1994. — *6*, № 6. — С. 65–102 (РЖМат, 1995, 7A265)
4. *Гриценко В.А., Никулин В.В.* Модулярные формы Игузы и "самые простые" лоренцевы алгебры Каца — Муди// Мат. сб. — 1996. — *187*, № 11. — С. 27–66 (РЖМат, 1997, 5A271)

5. *Никулин В.В.* Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — *43*, № 1. — С. 111–177 (РЖМат, 1979, 6А484)
6. *Никулин В.В.* О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат. — 1981. — *18.* — С. 3–114
7. *Никулин В.В.* Об арифметических группах, порожденных отражениями в пространствах Лобачевского// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 3. — С. 637–669 (РЖМат, 1980, 11А489)
8. *Никулин В.В.* О классификации арифметических групп, порожденных отражениями в пространствах Лобачевского// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — *45*, № 1. — С. 113–142 (РЖМат, 1981, 6А182)
9. *Никулин В.В.* Поверхности типа $K3$ с конечной группой автоморфизмов и группой Пикара ранга три// Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1984. — *165.* — С. 119–142 (РЖМат, 1984, 10А425)
10. *Никулин В.В.* Группы отражений в пространствах Лобачевского и тождество для знаменателя лоренцевых алгебр Каца — Муди// Изв. РАН. Сер. мат. — 1996. — *60*, № 2. — С. 73–106 (РЖМат, 1998, 5А321)
11. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. 4 изд. — М.: Наука, 1984. — 520 с.
12. *Baily W.L.* Fourier–Jacobi series. Algebraic groups and discontinuous subgroups// Proc. Symp. Pure Math. Vol. IX (A. Borel, G.D. Mostow, eds). — Providence: Amer. Math. Soc., 1966. — С. 296–300
13. *Borcherds R.* Generalized Kac–Moody algebras// J. Algebra. — 1988. — *115*, № 2. — С. 501–512 (РЖМат, 1988, 10А431)
14. *Borcherds R.* The monster Lie algebra// Adv. Math. — 1990. — *83*, № 1. — С. 30–47 (РЖМат, 1991, 6А514)
15. *Borcherds R.* The monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras// Invent. math. — 1992. — *109.* — С. 405–444
16. *Borcherds R.* Sporadic groups and string theory// 1st. Eur. Congr. Math., Paris, July 6–10, 1992. Vol.1. Pt 1.— Basel etc., 1994. — С. 411–421 (РЖМат, 1995, 12А111)
17. *Borcherds R.* Automorphic forms on $O_{s+2,2}\mathbb{R}$ and infinite products// Invent. math. — 1995. — *120*, № 1. — С. 161–213 (РЖМат, 1996, 10А312)
18. *Cardoso G. L.* Perturbative gravitational couplings and Siegel modular forms in $D = 4$, $N = 2$ string models// Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 1997. — *56B.* — С. 94-101
19. *Cardoso G.L., Curio G., Lust D.* Perturbative coupling and modular forms in $N = 2$ string models with a Wilson line// Nucl. Phys. — 1997. — *B491.* — С. 147–183
20. *Conway J.H.* The automorphism group of the 26 dimensional even unimodular Lorentzian lattice// J. Algebra. — 1983. — *80*, № 1. — С. 159–163 (РЖМат, 1983, 8А221)
21. *Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H.* Counting dyons in $N = 4$ string theory// Nucl. Phys. — 1997. — *B484.* — С. 543–561

22. *Gritsenko V.A.* Arithmetical lifting and its applications// Number Theory. Proc. Paris Semin., 1992–1993 (S. David, ed.). — Cambridge Univ. Press, 1995. — С. 103–126
23. *Gritsenko V.A.* Irrationality of the moduli spaces of polarized Abelian surfaces// Int. Math. Res. Notices. — 1994. — *6.* — С. 235–243
24. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* Siegel automorphic form correction of some Lorentzian Kac–Moody Lie algebras// Amer. J. Math. — 1997. — *119*, № 1. — С. 181–224
25. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* Siegel automorphic form correction of a Lorentzian Kac–Moody algebra// C. r. Acad. sci. Sér. 1. — 1995. — *321.* — С. 1151–1156
26. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* $K3$ surfaces, Lorentzian Kac–Moody algebras and mirror symmetry// Math. Res. Lett. — 1996. — *3*, № 2. — С. 211–229
27. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. I // Int. J. Math. — 1998. — *9*, № 2. — С. 153–199
28. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. II // Int. J. Math. — 1998. — *9*, № 2. — С. 201–275
29. *Gritsenko V.A., Nikulin V.V.* A lecture on arithmetic mirror symmetry and Calabi–Yau manifolds (Препринт покрывается следующими опубликованными работами:
Gritsenko V.A., Nikulin V.V. $K3$ surfaces, Lorentzian Kac–Moody algebras and mirror symmetry// Math. Res. Lett. — 1996. — *3*, № 2. — С. 211–229
Gritsenko V.A., Nikulin V.V. Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. I // Int. J. Math. — 1998. — *9*, № 2. — С. 153–199
Gritsenko V.A., Nikulin V.V. Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. II // Int. J. Math. — 1998. — *9*, № 2. — С. 201–275)
30. *Harvey J., Moore G.* Algebras, BPS-states, and strings// Nucl. Phys. — 1996. — *B463.* — С. 315–368
31. *Harvey J., Moore G.* On the algebras of BPS-states// Prepr., 1996
32. *Igusa J.* On Siegel modular forms of genus two. II // Amer. J. Math. — 1964. — *84*, № 2. — С. 392–412 (РЖМат, 1965, 4А213)
33. *Kac V.* Infinite dimensional Lie algebras. — Cambridge Univ. Press, 1990
34. *Kawai T.* $N = 2$ heterotic string threshold correction, $K3$ surfaces and generalized Kac–Moody superalgebra// Phys. Lett. — 1996. — *B372.* — С. 59–64
35. *Kawai T.* String duality and modular forms// Phys. Lett. — 1997. — *B397.* — С. 51–62
36. *Moore G.* String duality, automorphic forms, and generalized Kac–Moody algebras// Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 1998. — *67.* — С. 56–67
37. *Nikulin V.V.* Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces// Proc. Int. Congr. Math., Berkeley, Calif., Aug.

3–11, 1986. Vol. 1. — Providence, 1987. — С. 654–671 (РЖМат, 1988, 9А542)

38. *Nikulin V.V.* A lecture on Kac–Moody Lie algebras of the arithmetic type// Prepr./ Queen's Univ., Canada. — 1994. — № 16
39. *Nikulin V.V.* The remark on discriminants of moduli of $K3$ surfaces as sets of zeros of automorphic forms// J. Math. Sci. — 1996. — *81*, № 3. — С. 2738–2743
40. *Ray U.* A character formula for generalized Kac–Moody superalgebras// J. Algebra. — 1995. — *177*. — С. 154–163

Математический институт им. Стеклова РАН, ул. Губкина 8, Москва ГСП-1, 177966, Россия

УДК 512.664.4

V. ПРОБЛЕМЫ ПОДЪЕМА В КОГОМОЛОГИЯХ ГРУПП И ПРИЛОЖЕНИЯ

Ханс Ополка

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

Пусть Γ — проконечная группа, C — дискретный Γ-модуль. Для каждого непрерывного q-коцикла

$$\alpha : \Gamma^q \to C$$

($q \geqslant 2$) строится такое расширение проконечных групп

$$1 \to N(\alpha) \to \Gamma(\alpha) \to \Gamma \to 1 \qquad (^*)_\alpha$$

с абелевым ядром $N(\alpha)$, что $\Gamma(\alpha)$ поднимает коциклический класс (α), принадлежащий α, т.е. (α) содержится в ядре гомоморфизма раздувания

$$\inf : H^q(\Gamma, C) \to H^q(\Gamma(\alpha), C)$$

Авторизованный перевод на русский язык А. А. Туганбаева

соответствующих групп когомологий. Кроме того, в дополнение к этому свойству подъема требуем выполнения некоторых других условий для $(^*)_\alpha$. Например, если Γ конечна и является факторгруппой данной проконечной группы G, то $\Gamma(\alpha)$ должна быть конечной и проблема вложения для G, определяемая $(^*)_\alpha$, должна быть разрешимой.

Проблемы подъема такого типа послужили исходной точкой для изучения групповых когомологий. А именно, И. Шур рассмотрел в связи со своей работой по проективным представлениям проблему подъема для конечной группы Γ, тривиальный Γ-модуль $C = \mathbb{C}^*$ и $q = 2$. По ходу своих исследований он получил следующую формулу:

$$H^2(\Gamma, \mathbb{C}^*)^\frown \cong (R \cap [G,G])/[G,R],$$

где $^\frown$ обозначает двойственность и

$$1 \to R \to G \to \Gamma \to 1$$

— любое конечно порожденное проконечное свободное представление группы Γ, т.е. G — конечно порожденная проконечная свободная группа и R — замкнутая нормальная подгруппа соотношений, которые используются для получения Γ в виде факторгруппы группы G (подробности см. в [33] или [17, V, § 23]). Позже эта формула для $H^2(\Gamma, \mathbb{C}^*)^\frown$ была также приведена в работе Хопфа [15] об алгебраических аспектах топологии (более общий случай см. в [16]).

Помимо некоторых чисто теоретико-групповых аспектов, данная статья содержит приложения к различным типам центральных расширений и центральных покрытий, к норменному принципу Хассе для расширений Галуа числовых полей, к числовой версии гипотезы Леопольда из теории алгебраических чисел и к классу расширений локальных и глобальных числовых полей, называемых расширениями переноса.

§ 2. Проблемы подъема

Пусть Γ — проконечная группа, C — дискретный Γ-модуль, q — целое число $\geqslant 0$, $H^q(\Gamma, C) = Z^q(\Gamma, C)/B^q(\Gamma, C)$ — q-я группа когомологий группы Γ относительно C.

2.1. Определение. Коциклический класс $(\alpha) \in H^q(\Gamma, C)$, представленный нормализованным q-коциклом $\alpha \in Z^q(\Gamma, C)$, обладает свойством подъема относительно проконечной группы G, если выполняются следующие условия:

(i) существует непрерывный эпиморфизм $\pi : G \to \Gamma$;

(ii) существует такое расширение проконечных групп

$$1 \to N(\alpha) \to \Gamma(\alpha) \to \Gamma \to 1 \qquad (^*)_\alpha$$

с абелевым ядром $N(\alpha)$, что

$$(\alpha) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{inf}\colon\ H^q(\Gamma, C) \to H^q(\Gamma(\alpha), C));$$

(iii) проблема вложения для G, определенная посредством $(^*)_\alpha$, разрешима, т.е. существует такой непрерывный гомоморфизм $\phi:\ G \to \Gamma(\alpha)$, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[d, "\pi"] \\ \Gamma(\alpha) \arrow[r] & \Gamma \end{tikzcd}$$

(такое ϕ также называется решением проблемы вложения).

Аналогично, подгруппа $(U) \leqslant H^q(\Gamma, C)$, представленная группой q-коциклов $U \leqslant Z^q(\Gamma, C)$, обладает свойством подъема относительно G, если выполняются следующие условия:

(a) существует непрерывный эпиморфизм $G \to \Gamma$;

(b) существует такое расширение проконечных групп

$$1 \to N(U) \to \Gamma(U) \to \Gamma \to 1 \qquad (^*)_U$$

с абелевым ядром $N(U)$, что

$$(U) \leqslant \mathrm{Ker}(\mathrm{inf}\colon\ H^q(\Gamma, C) \to H^q(\Gamma(U), C));$$

(c) проблема вложения для G, определенная посредством $(^*)_U$, разрешима.

Если условия (i), (ii), (iii) (соответственно, (a), (b), (c)) выполняются для $(^*)_\alpha$ (соответственно, $(^*)_U$), то $(^*)_\alpha$ (соответственно, $(^*)_U$) — группа подъема для (α) (соответственно, для (U)) относительно G.

2.2. Предложение. *Если $(\alpha), (\beta) \in H^q(\Gamma, C)$ обладают свойством подъема относительно G, то произведение $(\alpha)\cdot(\beta)$ тоже обладает этим свойством.*

Доказательство. Допустим, что

$$1 \to N(\alpha) \to \Gamma(\alpha) \to \Gamma \to 1, \qquad (^*)_\alpha$$

$$1 \to N(\beta) \to \Gamma(\beta) \to \Gamma \to 1 \qquad (^*)_\beta$$

— групповые расширения, удовлетворяющие условиям (i), (ii), (iii) определения п.2.1, и пусть $\phi_\alpha : G \to \Gamma(\alpha)$, $\phi_\beta : G \to \Gamma(\beta)$ — решения соответствующих проблем вложения. Положим $N = \mathrm{Ker}(\pi)$ и определим $N(\alpha\cdot\beta)$ как образ гомоморфизма

$$\phi_{\alpha|N} \times \phi_{\beta|N} : N \to N(\alpha) \times N(\beta).$$

Обозначим через

$$(v) \in H^2(\Gamma, N/N')$$

коциклический класс, соответствующий абелианизированному расширению

$$1 \to N/N' \to G/N' \to \Gamma \to 1.$$

Пусть

$$(v_{\alpha\beta}) \in H^2(\Gamma, N(\alpha\cdot\beta))$$

— образ класса (v) при гомоморфизме

$$(\phi_{\alpha|N} \times \phi_{\beta|N})^* : H^2(\Gamma, N/N') \to H^2(\Gamma, N(\alpha\cdot\beta)),$$

индуцированном гомоморфизмом $(\phi_{\alpha|N} \times \phi_{\beta|N})$. $(v_{\alpha\beta})$, определяет групповое расширение

$$1 \to N(\alpha\cdot\beta) \to \Gamma(\alpha\cdot\beta) \to \Gamma \to 1. \qquad (^*)_{\alpha\cdot\beta}$$

Из работы Артина и Тейта ([5, гл. 13, раздел 1, теорема 2]) следует, что $(\phi_{\alpha|N} \times \phi_{\beta|N})$ продолжается до решения $\phi_{\alpha\beta} : G \to \Gamma(\alpha\cdot\beta)$ проблемы вложения для G, определенной посредством $(^*)_{\alpha\cdot\beta}$. Кроме того, $(\alpha)\cdot(\beta) \in \mathrm{Ker}(\inf : H^q(\Gamma, C) \to H^q(\Gamma(\alpha\cdot\beta), C))$. Доказательство предложения завершено. □

В соответствии с этим получаем следующие два следствия.

2.3. Следствие. *Множество $H^q_G(\Gamma, C)$, состоящее из всех элементов $(\alpha) \in H^q(\Gamma, C)$ со свойством подъема относительно G, является подгруппой в $H^q(\Gamma, C)$.*

2.4. Следствие. *Для каждой подгруппы $(U) \leqslant H^q_G(\Gamma, C)$, представленной группой q-коциклов U, существует групповое расширение*

$$1 \to N(U) \to \Gamma(U) \to \Gamma \to 1 \qquad (^*)_U$$

с абелевым ядром $N(U)$, являющимся группой подъема для (U) относительно G.

2.5. Определение. Группа подъема $\Gamma(U)$ для $(U) \leqslant H^q_G(\Gamma, C)$ относительно G называется минимальной, если

$$(U) = \mathrm{Ker}(\inf : H^q(\Gamma, C) \to H^q(\Gamma(U), C)).$$

2.6. Предложение. *Для каждой пары (Γ, C) с вышеуказанными свойствами и любого целого числа $q > 1$ существует такая проконечная группа G, что $H^q(\Gamma, C) = H^q_G(\Gamma, C)$.*

Доказательство этого предложения будет приведено в § 4.

§ 3. Построение некоторых групповых расширений

Пусть G — проконечная группа, N — замкнутая нормальная подгруппа в G с факторгруппой $\Gamma = G/N$, C — такой дискретный G-модуль, что N действует тривиально на C, т.е. C — дискретный Γ-модуль. Группа непрерывных гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(N, C)$ обычным образом рассматривается как Γ-модуль и для каждого целого числа $q \geqslant 0$ определена группа когомологий

$$H^q(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C)).$$

Для коциклического класса (λ) из этой группы, представленного нормализованным q-коциклом

$$\lambda : \Gamma^q \to \mathrm{Hom}(N, C),$$

определим N_λ как пересечение ядер всех

$$\lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in \mathrm{Hom}(N, C) \quad , \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in \Gamma^q,$$

где при $q = 0$ коцикл λ является Γ-инвариантным элементом из $\mathrm{Hom}(N, C)$. Из коциклических соотношений следует, что N_λ — Γ-модуль. Поэтому

$$N(\lambda) := N/N_\lambda$$

тоже является Γ-модулем. Пусть N' — замкнутая коммутаторная подгруппа группы N,

$$1 \to N/N' \to G/N' \to \Gamma \to 1$$

— абелианизированное расширение с коциклическим классом

$$(v) \in H^2(\Gamma, N/N'). \tag{3.1}$$

Естественный эпиморфизм

$$N/N' \to N(\lambda)$$

является Γ-эквивариантным и поэтому индуцирует гомоморфизм

$$H^2(\Gamma, N/N') \to H^2(\Gamma, N(\lambda)).$$

Пусть $(v(\lambda)) \in H^2(\Gamma, N(\lambda))$ — образ класса (v) при этом гомоморфизме и

$$1 \to N(\lambda) \to \Gamma(\lambda) \to \Gamma \to 1 \tag{3.2}$$

— соответствующее групповое расширение. Два элемента $\lambda_1, \lambda_2 \in H^0(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C))$ называются эквивалентными, если существует такой гомоморфизм $\chi \in \mathrm{Hom}(G, C)$, что

$$\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \chi_{|N}.$$

Тогда

$$\mathrm{Ker}(\lambda_1) \cap \mathrm{Ker}(\chi_{|N}) = \mathrm{Ker}(\lambda_2) \cap \mathrm{Ker}(\chi_{|N}).$$

При $q > 0$ предположим $(\lambda_2) = (\lambda_1) \in H^q(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C))$, т.е. существует такая кограница $\delta_\chi : \Gamma^q \to \mathrm{Hom}(N, C)$, что $\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \delta_\chi$. В этом случае

$$\mathrm{Ker}(\lambda_1(\sigma_1, \dots, \sigma_q)) \cap \mathrm{Ker}(\delta\chi(\sigma_1, \dots, \sigma_q)) =$$
$$= \mathrm{Ker}(\lambda_2(\sigma_1, \dots, \sigma_q)) \cap \mathrm{Ker}(\delta\chi(\sigma_1, \dots, \sigma_q))$$

для всех $(\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in G^q$. Поэтому

$$N_{\lambda_1} \cap N_{\delta\chi} = N_{\lambda_2} \cap N_{\delta\chi}.$$

3.1. Определение. Скажем, что групповое расширение $1 \to M \to \tilde{\Gamma} \to \Gamma \to 1$ с абелевым ядром M имеет тип $q, q \geqslant 0$, относительно проконечной группы G и Γ-модуля C, если существует такая подгруппа $Z \leqslant Z^q(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C))$, что

$$M = N(Z), \quad \text{где} \quad N(Z) = N/N_Z\ , \ N_Z = \bigcap_{\lambda \in Z} N_\lambda\ ,$$

и если коциклический класс, соответствующий этому групповому расширению, является образом определенного в (3.1) коциклического класса $(v) \in H^2(\Gamma, N/N')$ при гомоморфизме $H^2(\Gamma, N) \to H^2(\Gamma, M)$, индуцированном естественным Γ-эквивариантным эпиморфизмом $N \to M$. Два таких расширения типа q с ядрами $M_1 = N(Z_1), M_2 = N(Z_2)$ называются принадлежащими одному роду, если существует такая подгруппа $Z \leqslant B^q(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C))$ для $q > 0$ (соответственно, $Z \leqslant \mathrm{res}^G_N(H^1(\Gamma, C))$ для $q = 0$), что

$$N_{Z_1} \cap N_Z = N_{Z_2} \cap N_Z.$$

Суммируя изложенное, получаем

3.2. Предложение. *Каждая подгруппа*

$(Z) \leqslant H^0(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C))/\mathrm{res}^G_N(H^1(G, C))$ (*соответственно,* $(Z) \leqslant H^q(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C)))$ *при* $q > 0$

единственным образом определяет род группового расширения $1 \to N(Z) \to \Gamma(Z) \to \Gamma \to 1$ *типа* q *относительно* (G, C).

3.3. Замечание. Допустим, что Γ действует тривиально на C. Тогда групповое расширение $1 \to M \to \tilde{\Gamma} \to \Gamma \to 1$ типа 0 относительно (G, C) является центральным расширением группы Γ (т.е. M содержится в центре группы $\tilde{\Gamma}$), причем соответствующая проблема вложения для G разрешима. Кроме того, правилом $(Z) \mapsto (1 \to N(Z) \to \Gamma(Z) \to \Gamma \to 1)$ задается биективное соответствие между множеством подгрупп $(Z) \leqslant H^0(\Gamma, \mathrm{Hom}(N,C))/\mathrm{res}_N^G(H^1(G,C))$ и множеством родов центральных расширений группы Γ относительно (G,C).

Предположим, что

$$H^i(N,C) = 0 \quad \text{для всех} \quad i > 1. \tag{3.3}$$

Тогда из спектральной последовательности Хохшилда — Серра (соответственно, [40] в проконечном случае) вытекает точная последовательность:

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow H^i(\Gamma,C) \xrightarrow{\text{inf}} H^i(G,C) \xrightarrow{r} H^{i-1}(\Gamma, \mathrm{Hom}(N,C)) \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{t} H^{i+1}(\Gamma,C) \xrightarrow{\text{inf}} H^{i+1}(G,C) \longrightarrow \ldots, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где гомоморфизмы r и t определены указанным ниже образом (см. [13, гл. II]).

Представим $(\alpha) \in H^i(G,C)$ нормализованным коциклом

$$\alpha : G^i \to C$$

и для каждого набора $(g_1, \ldots, g_{i-1}) \in G^{i-1}$ и любого $n \in N$ положим

$$r(\alpha)(\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{i-1})(n) := \alpha(g_1, \ldots, g_{i-1}, n),$$

где $\bar{g}_j$ — образы элементов g_j при данном эпиморфизме $G \to \Gamma$.

Чтобы описать t, возьмем $(\lambda) \in H^{i-1}(\Gamma, \mathrm{Hom}(N,C))$ и для каждого

$(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i+1}) \in \Gamma^{i+1}$ положим

$$t(\lambda)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i+1}) := \lambda(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1})(v(\sigma_i, \sigma_{i+1})).$$

Если даны две замкнутые нормальные подгруппы $N_2 \leqslant N_1$ группы G, действующие тривиально на C, и если $\Gamma_1 = G/N_1$, $\Gamma_2 = G/N_2$, то получаем коммуникационную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \ldots \arrow[r] & H^i(G,C) \arrow[r, "r"] \arrow[d, equal] & H^{i-1}(\Gamma_2, \mathrm{Hom}(N_2,C)) \arrow[r, "t"] & H^{i+1}(\Gamma_2,C) \arrow[r, "\text{inf}"] & H^{i+1}(G,C) \arrow[d, equal] \\ \ldots \arrow[r] & H^i(G,C) \arrow[r, "r"] & H^{i-1}(\Gamma_1, \mathrm{Hom}(N_1,C)) \arrow[r, "t"] \arrow[u, "f"] & H^{i+1}(\Gamma_1,C) \arrow[r, "\text{inf}"] \arrow[u, "\text{inf}"'] & H^{i+1}(G,C), \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

где f задается следующим образом:

$$f(\lambda)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}) = \lambda(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_{i-1})_{|N_2} \tag{3.6}$$

для всех $(\lambda) \in H^{i-1}(\Gamma_1, \mathrm{Hom}(N_1, C))$ и всех $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) \in \Gamma_2^{i-1}$, где $\bar{\sigma}_j$ — образы элементов σ_j при естественном эпиморфизме $\Gamma_2 \to \Gamma_1$. Допустим, что расширение проконечных групп

$$1 \to N \to G \to \Gamma \to 1$$

удовлетворяет равенствам

$$H^i(N, C) = 0 \quad \text{и} \quad H^i(\Gamma, C) = 0 \quad \text{для всех} \quad i > 1. \tag{3.7}$$

Тогда точная последовательность (3.4) влечет изоморфизмы

$$H^0(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C))/\mathrm{res}_N^G(H^1(\Gamma, C)) \xrightarrow[\sim]{t} H^2(\Gamma, C), \tag{3.8}$$

$$H^{i-1}(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C)) \xrightarrow[\sim]{t} H^{i+1}(\Gamma, C), \quad i > 1. \tag{3.9}$$

Варианты этих изоморфизмов получены в случае, когда G — проконечная группа, B — такой дискретный мультипликативный G-модуль, что семейство $(G/N, B^N)$ ($N \leqslant G$ — любая открытая нормальная подгруппа) является формацией классов в смысле [5, гл. 14] и $C = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ всегда снабжена тривиальной групповой операцией. Если (Γ, A) — любой конечный слой в этой формации классов (например, $\Gamma = G/N$ и $A = B^N$), то из двойственности Накаямы — Тейта следует изоморфизм групп когомологий Тейта

$$\widehat{H}^{i-1}(\Lambda, \mathrm{Hom}(A, C)) \xrightarrow{\tau} \widehat{H}^{i+1}(\Lambda, C) \tag{3.10}$$

для каждого целого числа i и каждой подгруппы $\Lambda \leqslant \Gamma$. Здесь τ — отображение, двойственное к отображению Накаямы — Тейта и получаемое $\cup$-произведением с фундаментальным классом $(u_\Lambda) \in H^2(\Lambda, A)$:

$$\widehat{H}^q(\Lambda, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^{q+2}(\Lambda, A) \ , \ q \in \mathbb{Z}.$$

Кроме того, если (Γ_1, A_1), (Γ_2, A_2) — два таких конечных слоя, что $\Gamma_1 = G/N_1$, $\Gamma_2 = G/N_2$, $A_1 = A^{N_1}$, $A_2 = A^{N_2}$ с данными $N_2 \leqslant N_1$, то для любого $i \in \mathbb{Z}$ получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{H}^{i-2}(\Gamma_2, \mathrm{Hom}(A_2, C)) \arrow[r, "\tau", "\sim"'] & \widehat{H}^{i+1}(\Gamma_2, C) \\
\widehat{H}^{i-1}(\Gamma_1, \mathrm{Hom}(A_1, C)) \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\tau", "\sim"'] & \widehat{H}^{i+1}(\Gamma_1, C), \arrow[u, "\inf"']
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

где f определяется следующим образом:

$$f(\lambda)(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) = \lambda(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_{i-1}) \circ N_{A_2/A_1}$$

для всех $(\lambda) \in \widehat{H}^{i-1}(\Gamma_1, \mathrm{Hom}(A_1, C))$ и всех $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) \in \Gamma_2^{i-1}$, причем $\bar{\sigma}_j$ — образы σ_j при естественном эпиморфизме $\Gamma_2 \to \Gamma_1$ и

$$N_{A_2/A_1} : A_2 \to A_1$$

— норменное отображение данной формации классов. Отметим некоторые формации классов, которые будут использоваться позже.

3.4. Пусть G — проконечная группа, у которой строгая когомологическая размерность не превосходит 2 (например, это так, если G свободна). Тогда G является податливой в смысле [6]. Поэтому, согласно [35, с. 156, теорема 5], семейство $A(J) = J/J'$, где $J \leqslant G$ — любая открытая подгруппа, J' — замкнутая коммутаторная подгруппа группы J вместе с отображениями переноса в качестве норменных отображений

$$V_{J_1/J_2} : A(J_1) \to A(J_2) \quad J_1 \geqslant J_2 ,$$

образует формацию классов.

3.5. Пусть k — локальное или глобальное числовое поле. Для каждого расширения Галуа K/k конечной степени через C_K обозначим $G(K/k)$-модуль K^* в локальном случае и группу классов иделей поля K в глобальном случае. Тогда семейство $\{C_K, K/k\}$ вместе с обычными норменными отображениями $N_{L/K} : C_L \to C_K$, $L \supset K$ образует формацию классов (см. [5]).

§ 4. Построение групп подъема

В данном параграфе доказывается предложение п.2.6, а именно: для каждой проконечной группы Γ, любого дискретного Γ-модуля C и каждого целого числа $q > 1$ существует такая проконечная группа G, что $H^q(\Gamma, C)$, т.е. каждый коциклический класс $(\alpha) \in H^q(\Gamma, C)$ поднимается относительно G в смысле определения п. 2.1. Пусть

$$1 \to N \to G \to \Gamma \to 1 \tag{4.1}$$

— расширение проконечных групп, являющееся проконечным свободным представлением группы Γ. Тогда

$$H^i(N, C) = 0 \quad \text{и} \quad H^i(G, C) = 0 \quad \text{для всех} \quad i > 1.$$

Следовательно, выполняются условия (3.7) и имеют место изоморфизмы

$$H^0(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C))/\mathrm{res}_N^G(H^1(\Gamma, C)) \xrightarrow[\sim]{t} H^2(\Gamma, C), \tag{4.2}$$

$$H^{i-1}(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C)) \xrightarrow[\sim]{t} H^{i+1}(\Gamma, C), \quad i > 1 \tag{4.3}$$

(см. (3.8), (3.9)).

Возьмем $(\alpha) \in H^{i+1}(\Gamma, C)$ и при $i > 1$ выберем такой коцикл $\lambda \in Z^{i-1}(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C))$ (соответственно, при $i = 1$ элемент $\lambda \in H^0(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, C))$), что $t((\lambda)) = (\alpha)$. Рассмотрим групповое расширение $1 \to N(\lambda) \to \Gamma(\lambda) \to \Gamma \to 1$, построенное в (3.2). Запишем $N_1 = N, N_2 = N_\lambda$, где (λ) принадлежит ядру гомоморфизма

$$f : H^{i-1}(\Gamma_1, \mathrm{Hom}(N_1, C)) \to H^{i-1}(\Gamma_2, \mathrm{Hom}(N_2, C)),$$

описанного в (3.6). Используя коммутативную диаграмму (3.5), получаем

$$(\alpha) \in \mathrm{Ker}(\inf : H^{i+1}(\Gamma_1, C) \to H^{i+1}(\Gamma_2, C)).$$

Из построения $\Gamma(\lambda)$ следует разрешимость проблемы вложения для G, определенной посредством $\Gamma(\lambda)$. Поэтому выполняются свойства (i), (ii), (iii) из определения п. 2.1, и предложение п. 2.6 доказано.

Применяя (4.2) к конечной группе Γ и тривиальному Γ-модулю $C = \mathbb{C}^*$, получим формулу для $H^2(\Gamma, \mathbb{C}^*)\hat{}$, упомянутую во введении.

Из предложения п. 2.6 и замечания п. 3.3 легко выводится следующий результат.

4.1. Предложение. *Допустим, что* Γ *действует тривиально на* C. *Тогда существует биективное соответствие между множеством подгрупп группы* $H^2_G(\Gamma, C)$ *и множеством родов центральных групповых расширений группы* Γ *относительно* (Γ, C).

§ 5. Подъем групп малого порядка

5.1. Определение. Пусть G — проконечная группа, Γ — конечный эпиморфный образ группы G, C — Γ-модуль, q — неединичное натуральное число. Для $(\alpha) \in H^q_G(\Gamma, C)$ обозначим через $i((\alpha)) = i_G((\alpha))$ такое наименьшее натуральное число (если такое имеется), что существует групповое расширение $1 \to N(\alpha) \to \Gamma(\alpha) \to \Gamma \to 1$ с таким абелевым ядром $N(\alpha)$, что $N(\alpha)$ — группа подъема для (α) относительно G и порядок $|N(\alpha)|$ группы $N(\alpha)$ делит $i((\alpha))$. Аналогично, если $(U) \leqslant H^q_G(\Gamma, C)$ — подгруппа, то через $i((U)) = i_G((U))$ обозначим такое наименьшее натуральное число (если такое имеется), что существует групповое расширение $1 \to N(U) \to \Gamma(U) \to \Gamma \to 1$ с таким абелевым ядром $N(U)$, что $N(U)$ — группа подъема для U относительно G и порядок $|N(U)|$ группы $N(U)$ делит $i((U))$. Назовем $i((\alpha)) = i_G((\alpha))$ (соответственно, $i((U)) = i_G((U))$) индексом подъема для (α) (соответственно, (U)) относительно G.

5.2. Замечание. Если $(\alpha), (\beta) \in H^q_G(\Gamma, C)$, то

$$i((\alpha)\cdot(\beta))/i((\alpha))i((\beta)).$$

Доказательство. Для ядра группового расширения $1 \to N(\alpha\cdot\beta) \to \Gamma(\alpha\cdot\beta) \to \Gamma \to 1$, построенного в доказательстве п. 2.2, утверждение вытекает из

$$|N(\alpha\cdot\beta)| \;/\; |N(\alpha)||N(\beta)| \;.$$

□

5.3. Предложение. *Пусть $q > 1$ — целое число и Γ — конечная группа, действующая тривиально на $C = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Тогда существует такая проконечная группа G, что*

$$i_G((U))/ \;|(U)|^{|\Gamma|^{q-2}}$$

для каждой подгруппы $(U) \leqslant H^q_G(\Gamma, C)$.

Доказательство. Из пп. 2.2 и 5.2 следует достаточность существования такой проконечной группы G, что каждый (базисный) элемент $(\alpha) \in (U)$ удовлетворяет

$$i_G((\alpha))/\operatorname{ord}((\alpha))^{|\Gamma|^{q-2}}.$$

Пусть G — такая проконечная группа, что Γ — эпиморфный образ группы G и когомологическая размерность группы G не превосходит 1 (например, любое конечно порожденное проконечное свободное представление $1 \to N \to G \to \Gamma \to 1$ обладает этим свойством). Положим $m := \operatorname{ord}((\alpha)), C_m := \frac{1}{m}\mathbb{Z}/Z$. Тогда существует такой элемент $(\beta) \in H^q(\Gamma, C_m)$, что (α) — образ элемента (β) при гомоморфизме $H^q(\Gamma, C_m) \to H^q(\Gamma, C)$, индуцированном вложением $C_m \hookrightarrow C$. Для каждого расширения проконечных групп $\tilde{\Gamma} \to \Gamma$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
H^q(\tilde{\Gamma}, C_m) \arrow[r] & H^q(\tilde{\Gamma}, C) \\
H^q(\Gamma, C_m) \arrow[r] \arrow[u, "\inf"] & H^q(\Gamma, C). \arrow[u, "\inf"']
\end{tikzcd}$$

Поэтому достаточно показать, что $|N(\beta)|$ делит $m^{|\Gamma|^{q-2}}$. Пусть $(\lambda) \in H^{q-2}(\Gamma, \operatorname{Hom}(N, C_m))$ — такой элемент, что $t((\lambda)) = (\beta)$. Тогда из построения $N(\beta)$ следует

$$|N(\beta)| = (N : \cap \operatorname{Ker}(\lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_{q-2}))),$$

где перечечение берется по всем $(\sigma_1, \dots, \sigma_{q-2}) \in \Gamma^{q-2}$. Последний показатель, очевидно, делит $m^{|\Gamma|^{q-2}}$. □

Позже рассмотрим некоторые частные случаи этого предложения.

5.4. Замечание. В случае $q = 2$ и $(U) = H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ каждое групповое расширение

$$1 \to N(U) \to \Gamma(U) \to \Gamma \to 1, \qquad (^*)_U$$

для которого

$$(^*)_U \text{ — группа подъема для } (U),$$
$$|N(U)| = |H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})|,$$

является группой представления в смысле И. Шура (см., например, [17, V, § 23]). Поэтому п. 5.3 влечет за собой обобщение введенного И. Шуром понятия группы представления.

5.5. Определение. Групповое расширение $\tilde{\Gamma}$ группы Γ с абелевым ядром A называется *расширением* переноса группы Γ, если ядро отображения переноса

$$\mathrm{Ver}\colon \tilde{\Gamma} \to A$$

содержится в A.

5.6. Примеры.

(a) Циклическая группа порядка 4 или любая обобщенная группа кватернионов порядка 2^n является расширением переноса циклической группы порядка 2. Это легко проверяется с использованием явных формул для отображения переноса.

(b) Другой пример обеспечивается формацией классов. А именно, пусть (Γ, A) — конечный слой в формации классов и пусть $1 \to A \to W \to \Gamma \to 1$ — групповое расширение, соответствующее фундаментальному классу в $H^2(\Gamma, A)$. Хорошо известно, что отображение переноса

$$\mathrm{Ver}\colon W \to A^\Gamma$$

индуцирует изоморфизм

$$W/W' \xrightarrow{\sim} A^\Gamma.$$

Поэтому если Γ абелева, то W — расширение переноса группы Γ.

5.7. Предложение. *Допустим, что* Γ *абелева. Пусть* $1 \to A \to \tilde{\Gamma} \to \Gamma \to 1$ — *конечное расширение переноса. Тогда* $|\Gamma|$ *делит* $|A|$.

Доказательство. По теоретико-групповому варианту теоремы Гильберта 94, полученному Судзуки (см. [42]),

$$|\Gamma|/(\mathrm{Ker}(\mathrm{Ver})\colon \widetilde{\Gamma}'). \tag{5.1}$$

Так как $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ver}) \leqslant A$, то $|\Gamma|/|A|$, что и требовалось доказать. □

5.8. Предложение. *Допустим, что конечная циклическая группа Γ является эпиморфным образом такой проконечной группы G, что строгая когомологическая размерность группы G не превосходит 2. Для каждой подгруппы $(U) \leqslant H^3(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ существует конечное расширение переноса $1 \to A \to \widetilde{\Gamma} \to \Gamma \to 1$, являющееся группой подъема для (U) относительно G.*

Доказательство. Обозначим через N ядро эпиморфизма $G \to \Gamma$. Рассмотрим следующую диаграмму изоморфизмов групп когомологий Тейта:

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{H}^1(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \xrightarrow{\ \tau\ } & \widehat{H}^3(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\widehat{H}^{-1}(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \xrightarrow{\ \widehat{\mathrm{Ver}}^*\ } & \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),
\end{array} \tag{5.2}$$

где вертикальные отображения возникают из периодичности когомологий циклических групп, верхнее горизонтальное отображение — это отображение, определенное в (3.10), а нижнее горизонтальное отображение индуцировано двойственным отображением переноса

$$\widehat{\mathrm{Ver}} : \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

задаваемым хорошо известной формулой

$$\widehat{\mathrm{Ver}}(\chi) = \frac{\det(\mathrm{Ind}_N^G(\chi))}{\det(\mathrm{Ind}_N^G(\mathbf{1}))},$$

$\chi \in \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $\mathbf{1}$ — единичный характер группы N. Заметим, что если χ имеет норму 1, то из этой формулы следует, что N содержится в ядре $\widehat{\mathrm{Ver}}(\chi)$. Пусть ψ — представитель образующего подгруппы в $H^{-1}(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$, соответствующей данной подгруппе $(U) \leqslant H^3(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Положим $A = N/(\cap \mathrm{Ker}(\psi^\sigma))$, $\widetilde{\Gamma} := G/(\cap \mathrm{Ker}(\psi^\sigma))$, где пересечение берется по всем $\sigma \in \Gamma$. Тогда $\widehat{\mathrm{Ver}}(\psi)$ — образующий для $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ и $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ver}\colon \widetilde{\Gamma} \to A)$ содержится в A. Кроме того, из построения и приведенной выше коммутативной диаграммы (5.2) следует, что для $\widetilde{\Gamma}$ выполнены (b) и (c) из определения п. 2.1. Это означает, что $\widetilde{\Gamma}$ — группа подъема для $(U) \leqslant H^3(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ относительно G, что и требовалось доказать. □

Справедливо также обратное

5.9. Предложение. *Пусть G — проконечная группа, у которой строгая когомологическая размерность не превосходит 2, Γ — конечный циклический эпиморфный образ группы G и пусть $1 \to A \to \widetilde{\Gamma} \to \Gamma \to 1$ такое конечное расширение переноса группы Γ, что соответствующая проблема вложения для G разрешима. Тогда $\widetilde{\Gamma}$ определяет такую подгруппу $(U) \leqslant H^3(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, что $\widetilde{\Gamma}$ — группа подъема для (U) относительно G.*

Доказательство. Запишем $\Gamma = G/N$. Гомоморфизм $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, индуцированный решением $\varphi : G \to \widetilde{\Gamma}$ проблемы вложения и его ограничением на N, индуцирует гомоморфизм

$$\iota : \widehat{H}^1(\Gamma, \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \to \widehat{H}^1(\Gamma, \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})).$$

Определим $(U) := \tau(\text{образ}(\iota)) \leqslant H^3(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Легко видеть, что (U) — искомая подгруппа. □

5.10. Предложение. *Пусть G — проконечная p-группа и пусть*

$$p^e := p^{e(G)} := \text{экспонента периодической части группы } \mathbb{Z}_p \otimes G^{ab},$$

если эта экспонента существует (т.е. конечна). Тогда для каждого конечного эпиморфного образа Γ группы G и для каждого $(\alpha) \in H^2_G(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ показатель подъема $t_G((\alpha))$ делит $\mathrm{ord}((\alpha)) \cdot p^{e(G)}$.

Доказательство. Основной момент приведенного ниже доказательства неявно содержится в [25, раздел 3]. Для каждого целого числа $m \geqslant 0$ пусть $Q_m := \frac{1}{p^m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Положим $p^n := \mathrm{ord}((\alpha))$. Пусть $(\beta) \in H^2(\Gamma, Q_n)$ — коциклический класс, который отображается в (α) при гомоморфизме $H^2(\Gamma, Q_n) \to H^2(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$, индуцированном вложением $Q_n \hookrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Обозначим через

$$0 \to Q_{n+e} \to \widetilde{\Gamma} \to \Gamma \to 1$$

центральное групповое расширение, соответствующее 2-коциклу

$$\Gamma \times \Gamma \xrightarrow{\beta} Q_n \hookrightarrow Q_{n+e}.$$

Из построения $\widetilde{\Gamma}$ следует, что $(\beta) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{inf}\colon H^2(\Gamma, Q_{n+e}) \to H^2(\widetilde{\Gamma}, Q_{n+e}))$, тогда $(\alpha) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{inf}\colon H^2(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to H^2(\widetilde{\Gamma}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))$. Остается доказать разрешимость проблемы вложения для G, определенной посредством $\widetilde{\Gamma}$. Для этого достаточно показать, что $(\beta) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{inf}\colon H^2(\Gamma, Q_{n+e}) \to H^2(G, Q_{n+e}))$ (см. например, [14, 1.1]).

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Q_{n+e} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \xrightarrow{p^{n+e}} & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \| & & \uparrow{\scriptstyle p^e} & & \\
0 & \longrightarrow & Q_n & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \xrightarrow{p^n} & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Она индуцирует следующую коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \xrightarrow{p^{n+e}} & \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\delta} & H^2(G, Q_{n+e}) & \longrightarrow & H^2(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{p^{n+e}} & \ldots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle p^e} & & \uparrow & & \| & & \\
\ldots & \xrightarrow{p^n} & \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\delta} & H^2(G, Q_n) & \longrightarrow & H^2(G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{p^n} & \ldots.
\end{array}$$

Так как $(\alpha) \in H^2_G(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ удовлетворяет равенству $\mathrm{inf}_\Gamma^G((\alpha)) = 0$, то утверждение вытекает из этой диаграммы. □

5.11. Примеры.

(a) G — такая проконечная p-группа, что $\mathbb{Z}_p \otimes G^{ab}$ не имеет кручения. Тогда $p^{e(G)} = 1$.

(b) G — максимальный про-p-фактор абсолютной группы Галуа расширения k конечной степени поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Для доказательства существования $p^{e(G)}$ используется гомоморфизм взаимности из теории локальных полей классов (отображение Артина)

$$k^* \to G^{ab},$$

индуцирующий изоморфизм соответствующих двойственных по Понтрягину

$$\widehat{k^*} \cong \widehat{G},$$

(см., например, [36, XIII, раздел 4] вместе со структурой k^*:

$$k^* \cong <\pi> \times \mu_{q-1} \times U^1,$$

где π — простой элемент кольца целых чисел ∂ поля k, q — число элементов в поле классов вычетов для k, μ_{q-1} — группа корней из единицы в k^* порядка, делящего $q-1$, и U^1 — группа главных обратимых элементов кольца ∂. Известно, что U^1 — $\mathbb{Z}_p$-модуль, являющийся прямой суммой группы корней из единицы из k^* порядка степени p и свободного $\mathbb{Z}_p$-модуля ранга $(k:\mathbb{Q}_p)$ (см. [12, II, раздел 15]).

(c) k — числовое поле, p — простое число, S — конечное множество плейсов поля k, состоящее из всех плейсов над p и бесконечности, k_S/k — максимальное алгебраическое p-расширение поля k, не разветвленное вне S, G — группа Галуа расширения k_S/k. Для доказательства существования $p^{e(G)}$ заметим, что из теории глобальных полей классов следует, что G^{ab} изоморфна p-пополнению для

$$I_k/k^* \cdot_{v \notin S} U_v,$$

где I_k — группа иделей поля k и (для каждого плейса v поля k) U_v — группа обратимых элементов кольца целых чисел v-пополнения k_v поля k (см. [5, особенно гл. 8]). Из строения k_v^*, указанного в (b), следует существование $p^{e(G)}$. В случае, если k тотально действительно, $p \neq 2$ и пара (k,p) удовлетворяет гипотезе Леопольда, то можно показать, что $p^{e(G)}$ делит p-часть числа

$$\frac{h \cdot R_p}{w\sqrt{|d|}} \cdot \prod_{v/p}(1 - \frac{1}{N_v}),$$

где h — число классов поля k, R_p — p-адический регулятор поля k, w — число корней из единицы в k, d — дискриминант поля k, N_v — число элементов в поле классов вычетов для k_v; это вытекает из хорошо известной формулы Коутса (см., например, [25]).

(d) G — проконечная p-группа, являющаяся группой Демушкина (см. [1], [19]), т.е.

$H^2(G,\mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/p$,

$H^1(G,\mathbb{Z}/p)$ имеет размерность n над $\mathbb{Z}/p$,

$\cup$-произведение $H^1(G,\mathbb{Z}/p) \times H^1(G,\mathbb{Z}/p) \to \mathbb{Z}/p$

не вырождено.

Допустим, что $n > 1$. Тогда либо $G^{ab} \cong \mathbb{Z}_p^n$ и $p^{e(G)} = 1$, либо $G^{ab} \cong \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^{n-1}$ для некоторой p-степени $q = p^h$ и $p^{e(G)} = q$.

(e) (Этот пример рассмотрен в [39, 6.4], а также в [10, IV.9].) Пусть X — риманова поверхность, $S \subset X$ — конечное подмножество и для каждого $p \in S$ пусть n_p — натуральное число > 1. Множество S вместе с отображением $n : S \to \{2, 3, \dots\}$, $P \to n_p$ называется сигнатурой на X. Известно, что существует универсальное покрытие Y поверхности X относительно данной сигнатуры (S, n). Кроме того, если N — нормальная подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(X - S)$ для $X - S$, порожденная элементами s^{n_p}, $P \in S$, то $H = \pi_1(X - S)/N$ действует точно на Y, Y односвязно и $Y \backslash H = X$. Если $X = \widetilde{X} - T$, где $\widetilde{X}$ — компактная риманова поверхность рода g, $T \subset \widetilde{X}$ — конечное подмножество, $S = \{P_1, \dots, P_s\} \subset X$, $T = \{P_{s+1}, \dots, P_{s+t}\}$, $n_i := n_{P_i}$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, $n_i := \infty$ при $s + 1 \leqslant i \leqslant s + t$, то H задается образующими

$$a_1, b_1, \dots, a_g, g_g, c_1, \dots, c_s + t$$

и соотношениями

$$[a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_g, b_g] c_1 \cdot \ldots \cdot c_{s+t} = 1;$$
$$c_1^n = 1, \dots, c_s^{n_s} = 1.$$

Используя таблицы из [39, 6.4] или [10, IV.9], можно в терминах данной сигнатуры вычислить $p^{e(G)}$ для каждого простого p, где G — про-p-пополнение для H.

§ 6. Приложения

Допустим, что k — поле характеристики 0 и M/k — бесконечное расширение Галуа с группой Галуа $G = G(M/k)$. Пусть Γ — конечная факторгруппа группы G, соответствующая конечному подрасширению Галуа K/k расширения M/k. Тогда $\Gamma = G(K/k)$. Конечное подрасширение Галуа L/k расширения M/k, содержащее K/k, называется центральным расширением, если $G(L/K)$ содержится в центре группы $G(L/k)$. Два таких центральных расширения L_1, L_2 расширения K/k называются принадлежащими одному роду, если существует такое конечное абелево подрасширение k_0/k расширения M/k, что $L_1 \cdot k_0 = L_2 \cdot k_0$ или, эквивалентно, если групповые расширения $G(L_1/k)$, $G(L_2/k)$ группы $\Gamma = G(K/k)$ принадлежат одному роду в смысле определения п.3.1. Для подгруппы (Z) группы $H_G^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ обозначим через $1 \to N(U) \to \Gamma(U) \to \Gamma \to 1$ центральное расширение вида, указанного в п. 3.2. Пусть L_U/k —

подрасширение Галуа расширения M/k, соответствующее $\Gamma(U)$ (т.е. $\Gamma(U) = G(L_U/k)$). Следующее предложение вытекает из п. 4.1.

6.1. Предложение. *Правилом* $(U) \mapsto L_U$ *устанавливается биективное соответствие между множеством подгрупп из* $H^2_G(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *и множеством родов центральных расширений для* K/k. *Кроме того, отображение трансгрессии влечет эпиморфизм*

$$G(L_U/K)^\frown \tilde{\to} (U).$$

Для подгруппы $(U) \leqslant H^2_G(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ можно ставить вопросы о канонических представителях; например, когда k — локальное или глобальное числовое поле, можно пытаться найти представителей малой степени или с малым кондуктором. Кажется очевидным, что решения этих проблем будут способствовать более глубокому пониманию нильпотентных подрасширений расширения M/k. Укажем некоторые результаты, связанные с этими проблемами.

6.2. Центральные расширения локальных числовых полей. Пусть $k/\mathbb{Q}_p$ — конечное расширение поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ для некоторого простого p. Хорошо известно, что если $M = \bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k или если $M = k(\varphi)$ — максимальное алгебраическое p-расширение поля k, то $H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ (см., например, [38, § 6]). Поэтому $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = H^2_G(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ для каждой конечной факторгруппы $\Gamma = G(K(k))$ группы G. Из п. 5.11(b) следует, что каждый род центральных расширений расширения K/k, соответствующий по п. 4.1 подгруппе $(U) \leqslant H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, может быть представлен таким центральным расширением L/k расширения K/k, что

$$(L:K) \text{ делит } |(U)| \cdot |\mu_{p^\infty}(k)|,$$

где $\mu_{p^\infty}(k)$ — группа корней степени p из единицы в k^*. Говоря более точно, в теореме 2 из [23] показано, что L/K можно выбрать так, что

$$(L:K) \text{ делит } |(U)| \cdot |\mu_{p^\infty}(k) \cap N_{k/k}(K^*)|.$$

Вопрос о представлении этого рода центральным расширением с минимальным кондуктором является более тонким и далек от решения; частный случай абелевой $\Gamma = G(K/k)$ связан с классификацией p-расширений класса 2 и рассматривался в [44].

6.3. Центральные расширения глобальных числовых полей. Пусть k — числовое поле (т.е. конечное расширение поля $\mathbb{Q}$). Хорошо известно, что если $M = \bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k или $M = k(p)$ — максимальное алгебраическое p-расширение поля k, то $H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ (см., например, [18] или [38, § 6]). Тогда для каждой конечной факторгруппы $\Gamma = G(K/k)$ группы G $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = H^2_G(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. В [28] показано, что каждый род центральных расширений расширения K/k, соответствующий подгруппе $(U) \leqslant H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, может быть представлен по п. 6.1 таким центральным расширением L/k расширения K/k, что

$$(L:K) \text{ делит } 2\cdot|(U)| \cdot \text{l.c.m.}\{t((U_v))|v \text{ — плейс поля } k, \text{ ветвящийся в } K\},$$

где $(U_v) \leqslant H^2(\Gamma_{\bar{v}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ — образ элемента (U) при гомоморфизме ограничения $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^2(\Gamma_{\bar{v}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $\Gamma_{\bar{v}}$ — группа разложения, соответствующая некоторому расширению $\bar{v}$ плейса v поля k на K. Вопрос о представлении рода центральным расширением с малым кондуктором является более тонким и далек от решения. Частичные результаты в этом направлении приведены в [41]. Частный случай абелевой группы $\Gamma = G(K/k)$ связан с классификацией расширений класса 2; при $k = \mathbb{Q}$ см. [11].

Особого внимания заслуживает подгруппа

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}(K/k) := \operatorname{Ker}(H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \prod_v H^2(\Gamma_{\bar{v}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})),$$

где произведение берется по всем плейсам v поля k, поскольку (как отметил Тейт [8, с. 198]) эта подгруппа двойственна препятствию для норменного принципа Хассе для K/k, т.е.

$$\widehat{\mathcal{H}} \cong \{a \text{ — норма в каждом локальном расширении } K_v/k_v\} \text{ по модулю глобальной норменной подгруппы } N_{K/k}(K^*).$$

Следующий результат был доказан в [26] и (с другим доказательством) в [21].

6.4. Предложение. *Пусть $L/K/k$ — центральное расширение, принадлежащее роду для $\mathcal{H}$ в смысле п. 6.1. Тогда каждое $a \in k^*$, являющееся локальной нормой повсюду в L/k, является глобальной нормой в K/k.*

Упомянем также результат, касающийся минимальности группы подъема для подгруппы $\mathcal{H} \leqslant H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ и полученный в [24].

6.5. Предложение. *Допустим, что либо степень $(K:k)$ нечетна, либо тройка $(k,(K:k),S)$, где S — пустое множество (плейсов поля k), не принадлежит особому случаю в смысле теории полей классов (см.* [5, *гл.* 10]). *Тогда каждый род центральных расширений, соответствующий $\mathcal{H}$, содержит такое центральное расширение $L/K/k$, что $G(L/k)$ — минимальная группа подъема для $\mathcal{H}$ в смысле определения п.* 2.4.

6.6. Замечания.

(a) Можно показать (см. [30]), что в условиях этого предложения и при $k = \mathbb{Q}$ узкое центральное поле классов Гильберта для поля K (т.е. максимальное центральное расширение L расширения K/k, не ветвящееся на K во всех конечных плейсах) является группой подъема для $\mathcal{H}$.

(b) Построение центральных расширений расширения Галуа числовых полей K/k с момощью $\widehat{\mathcal{H}}$ было инициировано Шольцом в [32].

Предложение п. 6.4 применялось в [2] и [3]. В результате сочетания п. 6.4 с техникой так называемой леммы Артина из теории полей классов в [34] был получен следующий результат.

6.7. Предложение. *Пусть $f = f(x_1,\dots,x_n)$ — многочлен нормальной формы, соответствующий k-базису расширения Галуа числовых полей K/k степени n и пусть $a \in k^*$. Тогда существует такой примитивный корень из единицы ζ, что $f(x_1,\dots,x_n) - ax_{n+1}^n$ имеет нетривиальный нуль с кооординатами в $k(\zeta)$; порядок корня ζ можно оценить через a и коэффициенты многочлена f.*

6.8. Центральные расширения глобальных числовых полей с ограниченным ветвлением. Пусть k — числовое поле, p — простое число, S — конечное множество плейсов поля k над p и ∞. Пусть M — максимальное алгебраическое p-расширение поля k, неразветвленное вне S, и $G = G(M/k)$. Следующий результат вытекает из пп. 5.10 и 5.11(c).

6.9. Предложение. *Существует такое целое число $t = t(k,p) \geqslant 0$, зависящее только от k и p, что для любой конечной факторгруппы $\Gamma = G(K/k)$ группы G и каждой подгруппы $(U) \leqslant H^2_G(\Gamma,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ род центральных расширений расширения K/k, соответствующий (U), может быть представлен по п.* 6.1 *таким центральным расширением L расширения K/k, что*

$$(L:K) \text{ делит } |(U)|\cdot p^t.$$

Известно, что утверждение $H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ равносильно гипотезе Леопольда для пары (k,p) (о возникновении этой гипотезы см. [20], а об ее эвивалентности равенству $H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ см., например, [24]). Известно, что эта гипотеза верна для абелевых расширений поля $\mathbb{Q}$ и каждого простого числа p (см. [7]). Используя эту эквивалентность, теорию Ивасавы и теорему двойственности для расширений Галуа с ограниченным ветвлением, получаем следующий результат (см. [25, (2.6)]).

6.10. Предложение. *Допустим, что гипотеза Леопольда верна для (k,p) и пусть $t = t(k,p)$ — такое целое число, как в п. 6.9. Тогда для каждого целого числа $n > 0$ и любой S-единицы x поля k верно следующее: если x содержится в $k_v^{*p^{n+t}}$ для всех $v \in S$, то x содержится в k^{*p^n}.*

Наименьшее целое число $t = t(k,p) \geqslant 0$, для которого выполняется утверждение предложения п. 6.10, называется числом Леопольда пары (k,p) и обозначается через $l = l(k,p)$.

6.11. Примеры.

(a) $l(\mathbb{Q}, p) = 0$ для каждого простого числа p.

(b) $l(\mathbb{Q}(J_p), p) = 0$ тогда и только тогда, когда p — регулярное простое число (здесь через ζ_p обозначает, конечно, примитивный корень p-й степени из единицы). Поэтому можно рассматривать $l(k,p)$ в качестве показателя нерегулярности пары (k,p). Кроме того, п. 6.10 можно рассматривать как обобщение так называемой леммы Куммера из теории циклотомических полей (см. [43, (5.36)]).

(c) Другие числовые примеры указаны в [25, раздел 3].

6.12. Расширения переноса для локальных и глобальных числовых полей. Пусть k — локальное или глобальное числовое поле, $M = \bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k с абсолютной группой Галуа $G = G(M/k)$. Если $\Gamma(K/k)$ — конечная факторгруппа группы G, соответствующая расширению Галуа K/k, то через C_K обозначим мультипликативную группу поля K в локальном случае и группу классов иделей поля K в глобальном случае, рассматриваемых обычным образом как G-модуль.

6.13. Предложение. *Допустим, что строгая когомологическая размерность поля k не превосходит 2 (это верно, если k — локальное числовое поле или глобальное чисто мнимое числовое поле) и Γ — циклическая группа. Тогда существует такое расширение Галуа $L/K/k$ конечной степени, что*

$G(L/k)$ — расширение переноса группы $G(K/k)$ и группа подъема для $H^3(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Кроме того, L/K соответствует G-инвариантной норменной подгруппе $A \leqslant C_K$ со свойством $A \cap C_k \leqslant N_{K/k}C$ и L/k содержит такое абелево подрасширение K_0/k, что $(K:k)$ делит $(K_0:K)$.

Доказательство. Это просто переформулировка пп. 5.7, 5.8 для формации классов $\{(G, C_K)\}$ с помощью следующей хорошо известной коммутативной диаграммы (см. [5]):

$$\begin{tikzcd} C_K \arrow[r, "\text{отображение Артина}"] & G(L/K) \\ C_K \arrow[u, "\text{включение}"] \arrow[r, "\text{отображение Артина}"] & G(L/k)^{ab} \arrow[u, "\text{перенос}"'] \end{tikzcd} .$$

Подробности оставляются читателю. □

По-видимому, трудно получить точную информацию о наименьшей степени и кондукторе таких расширений Галуа $L/K/k$, что $G(L/k)$ — группа подъема для $H^3(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (даже для циклических Γ). В этом направлении отметим только следующий результат, вытекающий из [9].

6.14. Предложение. *Допустим, что k — чисто мнимое числовое поле и K/k — квадратичное расширение с группой Галуа Γ. Тогда существует такое расширение Галуа $L/K/k$, что $G(L/k)$ — обобщенная группа кватернионов порядка 32 и группа подъема для $H^3(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. В частности, $G(L/k)$ — расширение переноса группы Γ.*

На самом деле, в [9] показано, что K/k можно вложить в кватернионное расширение L/k степени 32. Как уже отмечалось в п. 5.6(a), $G(L/k)$ — расширение переноса группы $G(K/k)$, тогда по п. 5.9 $G(L/k)$ является также группой подъема для $H^3(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демушкин С.П.* Группа максимального p-расширения локального поля// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1961. — *25*, № 3. — С. 329–346 (РЖМат, 1961, 12А303)
2. *Дракохруст Ю.А.* О полном препятствии к принципу Хассе// Докл. АН БССР. — 1986. — *30*, № 1. — С. 5–8 (РЖМат, 1986, 6А510)

3. *Дракохруст Ю.А., Платонов В.П.* Норменный принцип Хассе для полей алгебраических чисел// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — *50*, № 5. — С. 946–968 (РЖМат, 1987, 1А350)
4. *Кузьмин Л.В.* Гомологии проконечных групп, мультипликатор Шура и теория полей классов// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1969. — *33*, № 6. — С. 1220–1254 (РЖМат, 1970, 4А332)
5. *Artin E., Tate J.* Class field theory. — New York: Benjamin, 1967
6. *Brumer A.* Pseudocompact algebras, profinite groups and class formations// J. Algebra. — 1966. — *4*, № 3. — С. 442–470 (РЖМат, 1967, 10А241)
7. *Brumer A.* On the units of algebraic number fields// Mathematika. — 1967. — *14*, № 2. — С. 121–124 (РЖМат, 1968, 9А118)
8. *Cassels J.W.S., Fröhlich A.* Algebraic number theory. — London, New York: Acad. Press, 1967. — 366 с. (РЖМат, 1968, 6А405К)
9. *Damey P., Martinet J.* Plongement d'une extension quadratique dans une extension quaternionne// J. reine und angew. Math. — 1973. — *262-263*. — С. 323–338 (РЖМат, 1974, 5А388)
10. *Farkas H.M., Kra I.* Riemann sufaces. — New York: Springer Verlag, 1980. — 337 с. — (Grad. Texts Math. Vol. 7)(РЖМат, 1981, 7А596К)
11. *Fröhlich A.* On fields of class two// Proc. London Math. Soc. — 1954. — *4*, № 14. — С. 235–256 (РЖМат, 1956, 6432)
12. *Hasse H.* Zahlentheorie. — Berlin: Akad. Verl., 1969. — 611 с. (РЖМат, 1970, 2А305К)
13. *Hochschild G.P., Serre J.P.* Cohomology of group extensions// Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — *74*, № 1. — С. 110–134 (РЖМат, 1953, 600)
14. *Hoechsmann K.* Zum Einbettungsproblem// J. reine und angew. Math. — 1968. — *229*. — С. 81–106 (РЖМат, 1969, 5А285)
15. *Hopf H.* Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe// Coment. math. helv. — 1941/42. — *14*. — С. 257–309
16. *Hopf H.* Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören// Coment. math. helv. — 1944/45. — *17*. — С. 39–79
17. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1967. — 793 с. — (Grundlehren math. Wiss., Bd 134) (РЖМат, 1968, 6А256К)
18. *Kawada Y.* Class formations// Proc. Symp. Pure Math., Vol. 20. — Providence: Amer. Math. Soc., 1969. — С. 96–114
19. *Labute J.P.* Classification of Demushkin groups// Can. J. Math. — 1967. — *19*, № 1. — С. 106–132 (РЖМат, 1968, 7А281)
20. *Leopoldt H.W.* Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern// J. reine und angew. Math. — 1962. — *209*, № 1-2. — С. 54–71 (РЖМат, 1963, 5А246)
21. *Lorenz F.* Über eine Verallgemeinerung des Hesseschen Normensatzes// Math. Z. — 1980. — *173*, № 2. — С. 203–210 (РЖМат, 1981, 2А337)
22. *Miyake K.* Leopoldt kernels and central extensions of algebraic number fields// Nagoya Math. J. — 1990. — *120*. — С. 67–76

23. *Miyake K., Ormerod N.* Abundant central extensions of nontrivial genera// Nagoya Math. J. — 1984. — *95.* — C. 51–62 (РЖМат, 1985, 4A328)
24. *Müller O.* Lokal zerfallende zentrale Gruppenerweiterungen in der algebraischen Zahlentheorie: Diss. TU Braunschweig, 1993
25. *Nguyen Quang Do Thong, Opolka H.* Some numerical invariants related to central embedding problems// J. Number Theory. — 1995. — *52.* — C. 7–16
26. *Opolka H.* Zur Auflösung zahlentheoretischer Knoten// Math. Z. — 1980. — *173,* № 1. — C. 95–103 (РЖМат, 1981, 2A336)
27. *Opolka H.* Extensions of number fields defined by cohomology groups// Nagoya Math. J. — 1983. — *92.* — C. 179–186 (РЖМат, 1984, 8A296)
28. *Opolka H.* Geschlechter von zentralen Erweiterungen// Arch. Math. — 1981. — *37,* № 5. — C. 418–424 (РЖМат, 1982, 7A370)
29. *Opolka H.* The lifting problem in group cohomology// J. Pure and Appl. Algebra. — 1996. — *107.* — C. 263–270
30. *Opolka H.* Auflösung zahlentheoretischer Knoten in Galoiserweiterungen von $\mathbb{Q}$// Arch. Math. — 1980. — *34.* — C. 416–420
31. *Safarevic I.R.* Algebraic number fields// Proc. Int. Congress Math. — Stockholm, 1963. — C. 163–176
32. *Scholz A.* Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nichtabelscher Körpererweiterungen. II// J. reine und angew. Math. — 1940. — *182.* — C. 217–234
33. *Schur I.* Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen// J. reine und angew. Math. — 1904. — *127.* — C. 20–50
34. *Schwant G.* Lösbarkeit von Normengleichungen in Einheitswurzelkörpern// Diss. TU Braunschweig, 1997
35. *Serre J.P.* Groupes algebrique et corps de classe. — Paris: Hermann, 1989
36. *Serre J.P.* Corps locaux. — Paris: Hermann, 1962
37. *Serre J.P.* Galois cohomology. 5 eme ed., rev. et complete // Lecture Notes Math. *5.*— Berlin: Springer Verlag, 1994. — 181 c.
38. *Serre J.P.* Modular forms of weight one and Galois representations// In: Algebraic Number Fields. L Fonct. and Galois Prop./ Ed. Fröhlich A. — London: Acad. Press, 1977. — C. 193–268 (РЖМат, 1979, 5A287)
39. *Serre J.P.* Topics in Galois theory. — Boston, 1992
40. *Shatz S.S.* Profinite groups, arithmetic and geometry// Ann. Math. Stud. — 1972. — № 67. — 252 c. (РЖМат, 1972, 9A311)
41. *Shirai S.* On the central class field mod m of Galois extensions of an algebraic number field// Nagoya Math. J. — 1978. — *71.* — C. 61–85 (РЖМат, 1979, 6A303)
42. *Suzuki H.* A generalization of Hilbert's theorem 94// Nagoya Math. J. — 1991. — *121.* — C. 161–169
43. *Washington L.C.* Introduction to cyclotomic fields. — New York: Springer Verlag, 1982

44. *Zink E. W.* Lokale projektive Klassenkörpertheorie. II// Mat. Nachr. — 1983. — *114*. — C. 123–150 (РЖМат, 1984, 6А310)

TU Braunschweig,
Institut für Algebra und Zahlentheorie,
Pockelsstrasse 14,
D-38106 Braunschweig,
Federal Republic of Germany

УДК 512.552.4+512.538+512.664.3

VI. ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕКРЫВАЮЩИЕ ТАСОВОЧНЫЕ АЛГЕБРЫ

М. Хазевинкель

СОДЕРЖАНИЕ

Авторизованный перевод на русский язык С. А. Вахрамеева

§ 1. Введение

Алгебра Лейбница — Хопфа над кольцом целых чисел — это свободная ассоциативная алгебра $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}\langle Z_1, Z_2, \ldots \rangle$ над $\mathbb{Z}$ со счетным числом образующих и с коумножением вида

$$\mu(Z_n) = \sum_{i+j=n} Z_i \otimes Z_j,\ Z_0 = 1.$$

Градуированная алгебра, двойственная к ней, обозначена через $\mathcal{M}$ и названа *перекрывающей тасовочной алгеброй*. Над полем рациональных чисел алгебра Лейбница — Хопфа изоморфна алгебре Хопфа:

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}\langle U_1, U_2, \ldots \rangle,\ \ \mu(U_n) = 1 \otimes U_n + U_n \otimes 1.$$

Обозначим через $\mathcal{N}$ градуированную алгебру, двойственную к $\mathcal{U}$ над кольцом целых чисел. Это так называемая *тасовочная алгебра*. Согласно одной теореме, имеющей большое значение, например, в теории свободных алгебр Ли, алгебра $\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ является коммутативной свободной алгеброй многочленов от слов Линдона. Неверно, что алгебра $\mathcal{N}$ является свободной алгеброй многочленов над кольцом целых чисел. Гипотеза Диттера гласит, что алгебра $\mathcal{M}$, напротив, является свободной алгеброй многочленов, коммутативной над кольцом целых чисел. Эта гипотеза дает более изящную версию $\mathcal{N}$. В данной статье вначале рассматриваются все факты относительно гипотезы Диттера, известные автору.

Определение перекрывающей тасовочной алгебры может быть обобщено на любую подходящую частичную полугруппу. Случай полугруппы $\mathbb{N}$ натуральных чисел соответствует алгебре $\mathcal{M}$. Эти обобщенные перекрывающие тасовочные алгебры (ОПТА) представляются нам весьма интересным объектом. Вторая часть статьи посвящена определению обобщенных перекрывающих тасовочных алгебр; в ней также развивается ряд первых результатов, полученных в области исследования этих биалгебр.

§ 2. Перекрывающая тасовочная алгебра

Для начала рассмотрим перекрывающую тасовочную алгебру. Обозначим ее через $\mathcal{M}$. Ниже она обозначена так же как ОПТА($\mathbb{N}$), где ОПТА означает "обобщенную перекрывающую тасовочную алгебру" и это, вероятно, самая важная из всех перекрывающих тасовочных алгебр. Ее понимание имеет ряд далеко идущих последствий. В частности, "гипотеза Диттера" (ее доказательство), которая рассматривается ниже, имеет важное значение во многих областях, например, в теории некоммутативных симметрических функций (см. [4]), в комбинаторике подстановок (см. [5], [6]) и в теории некоммутативных формальных групп (см. [2], [3], [15]).

В качестве абелевой группы, т.е. в качестве $\mathbb{Z}$-модуля, $\mathcal{M}$ является свободной алгеброй с базисом, состоящим из всех слов на $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, включая пустое слово. Такое пустое слово обозначим как $w = [a_1, a_2, \dots, a_n], a_i \in \mathbb{N}$, например [1,1,2]. Перекрывающее тасующее умножение двух слов $w = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ и $v = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ является суммой всех тех слов, которые могут быть получены следующим образом. Возьмем слово длины r со всеми его пока незаполненными "местами"; при этом $\max\{m, n\} \leqslant r \leqslant n + m$. Вставим символы a_i слова w в это слово в их первоначальной последовательности так, чтобы никакие два символа не попали в одно и то же "место". Проделаем ту же процедуру с символами b_j. При этом допускается попадание символов из w и v в одно и то же "место"; в этом случае они суммируются. Все имеющиеся "места" должны быть заполнены. Такое умножение обозначим следующим рядом:

$$\begin{aligned}[a,b][c,d] &= [a+c,b+d] + [a+c,b,d] + [a+c,d,b] + [a,b+c,d] + \\ &+ [c,a+d,b] + [a,c,b+d] + [c,a,b+d] + [a,b,c,d] + \\ &+ [a,c,b,d] + [a,c,d,b] + [c,a,b,d] + [c,a,d,b] + [c,d,a,b],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[2][1,3,5] &= [3,3,5] + [3,5,5] + [1,3,7] + [2,1,3,5] + \\ &+ [1,2,3,5] + [1,3,2,5] + [1,3,5,2],\end{aligned}$$

$$[1][1,1,1] = [2,1,1] + [1,2,1] + [1,1,2] + 4[1,1,1,1].$$

Наглядное представление о таком умножении дает так называемое стрелковое тасование из карточных игр. Представим себе два слова в виде двух колод карт. Выполним стрелковое тасование, при котором может случиться, что две карты — одна из левой колоды и одна из правой — слипнутся; в этом случае их значения должны суммироваться.

При таком умножении абелева группа $\mathcal{M}$, очевидно, становится ассоциативной коммутативной алгеброй над $\mathbb{Z}$ с единичным элементом (пустым словом), т.е. ассоциативным и коммутативным кольцом с единичным элементом.

§ 3. Слова Линдона

Пусть элементы множества $\mathbb{N}^*$, т.е. слова над $\mathbb{N}$, лексикографически упорядочены, когда каждый символ больше, чем ничто. Так $[a_1, a_2, \dots, a_{i-1}] > [b_1, b_2, \dots, b_m]$ тогда и только тогда, когда существует такое i, что $a_1 = b_1, \dots, a_{i-1} = b_{i-1}, a_i > b_i$ (при обязательном условии $1 \leqslant i \leqslant \min\{m, n\}$), или $n > m$ и $a_1 = b_1, \dots, a_m = b_m$.

Собственным хвостом слова $[a_1, \dots, a_n]$ называется слово вида $[a_i, \dots, a_n]$ при $1 < i \leqslant n$. (Пустое слово и односимвольные слова не имеют собственных хвостов.)

Слово называется *словом Линдона*, если все его собственные хвосты больше, чем само слово. Например, слова $[1,1,3], [1,2,1,3], [2,2,3,2,4]$ являются словами Линдона, а слова $[2,1], [1,2,1,1,2], [1,3,1,3]$ таковыми не являются. Множество слов Линдона обозначается через Lyn.

Очевидно, что все эти определения имеют смысл для любого вполне упорядоченного множества, а не только для множества натуральных чисел.

Рассмотрим $\mathbb{N}^*$ как полугруппу при сшивающем произведении (которое, конечно, очень сильно отличается от перекрывающего тасовочного призведения на $\mathcal{M}$).

Теорема (факторизация Чена — Фокса — Линдона, см. [1], [12]). *Каждое слово w из $\mathbb{N}^*$ единственным образом разлагается в убывающее сшивающее произведение слов Линдона:*

$$w = v_1 * v_2 * \cdots * v_k,\ v_i \in \mathrm{Lyn},\ v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots \geqslant v_k.$$

Например,

$$[2,3,1,3,1,4,1,3,1,1] = [2,3] * [1,3,1,4] * [1,3] * [1] * [1].$$

Одним из эффективных алгоритмов нахождения факторизации Чена — Фокса — Линдона какого-либо слова является алгоритм блочного разложения из [15].

§ 4. Гипотеза Диттера

Слова Линдона — подходящие объекты для тасовочной алгебры над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и для перекрывающей тасовочной алгебры над $\mathbb{Q}$ со словами из множества Lyn в качестве образующих. Подробнее об этом будет сказано в §§ 9, 10. Однако над кольцом целых чисел множество Lyn определенно не является свободно порождающим множеством для перекрывающей тасовочной алгебры; см. также § 9.

Слово $w = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{N}^*$ называется *элементарным*, если наибольшим общим делителем (НОД) его символов является 1, НОД $a_1, a_2, \ldots, a_n = 1$. *Сшивающей степенью* слова w (или *звездной степенью*) называется слово вида

$$w^{*m} = \underbrace{w * w * \cdots * w}_{m \text{ сомножителей}}.$$

Обозначим через ESL множество всех слов, являющихся звездными степенями элементарных слов Линдона. Например, слова $[1,1,1,1], [1,2,1,2], [1,2,1,4]$ принадлежат множеству ESL (но первые два не являются словами Линдона), а слова $[4]$, $[2,4]$ не принадлежат множеству ESL, а принадлежат множеству Lyn.

Гипотеза Диттера гласит, что элементы множества ESL образуют свободное (сообщающееся) порождающее множество для перекрывающей тасовочной алгебры $\mathcal{M}$ над кольцом целых чисел.

Пусть *вес* слова $w = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ равен $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Элементы ESL веса $\leqslant 6$ следующие:

$$[1];$$
$$[1,1];$$
$$[1,1,1],[1,2];$$
$$[1,1,1,1],[1,1,2],[1,3];$$
$$[1,1,1,1,1],[1,1,1,2],[1,1,3],[1,2,2],[1,4],[2,3];$$
$$[1,1,1,1,1,1],[1,1,1,1,2],[1,1,1,3],[1,1,2,2],[1,1,4],[1,2,1,2],$$
$$[1,2,3],[1,3,2],[1,5].$$

Гипотеза Диттера появилась в 1972 году (см. [2], [3]); цитируемые публикации содержали доказательства этой гипотезы, в которых, однако, были допущены ошибки. Последняя известная нам попытка доказательства сделана в работе [15], и до августа 1997 года это доказательство считалось правильным. Однако это не так. Ошибка была допущена во втором абзаце на странице 74. (Не гарантировано, что "разложимые произведения" длины 1, фигурирующие там, являются лексикографически меньшими, чем рассматриваемый в этот раз элемент $w_{(k)}$; и действительно, если провести вычисления в явном виде, то окажется, что это не так; на примерах слов с небольшими весами можно показать, что ни одно такое "треугольное доказательство," основанное на индукции относительно некоторого упорядочения слов, не сработает непосредственно.)

Таким образом, в настоящее время вопрос о справедливости гипотезы вновь становится открытым (в противоположность тому, что отмечалось в [9]).

Тем не менее существует много свидетельств в пользу справедливости гипотезы Диттера, и мы убеждены в том, что эта гипотеза верна. Ниже сделана попытка представить в обобщенном виде доводы в пользу справедливости рассматриваемой гипотезы.

— Количество образующих для каждого веса в гипотезе указано верно. Этот факт может быть более точно сформулирован следующим образом. Перекрывающая тасовочная алгебра $\mathcal{M}$ градуируется весами слов так, как определено выше. Рассмотрим свободную коммутативную алгебру над кольцом целых чисел, $\mathbb{Z}[\mathrm{ESL}]$, от "переменных" из ESL, причем пусть каждой переменной придан ее вес как слова, а вес одночлена берется равным произведению весов его сомножителей. Включение $\mathrm{ESL} \subset \mathcal{M}$ индуцирует градуированный гомоморфизм $\mathbb{Z}$-алгебр

$$\phi\colon \mathbb{Z}[\mathrm{ESL}] \to \mathcal{M},$$

а ранги однородных частей веса n двух алгебр равны, т.е.

$$\mathbb{Z}[\mathrm{ESL}]_n = \mathcal{M}_n.$$

Это видно из следующего. Во-первых, существует столько же слов Линдона веса n, сколько есть элементов множества ESL веса n. Биективное соответствие задается как

$$\alpha\colon \mathrm{Lyn} \to \mathrm{ESL}, [a_1, a_2, \ldots, a_n] \mapsto [d^{-1}a_1, d^{-1}a_2, \ldots, d^{-1}a_n]^{*d},$$

где d = НОД $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (НОД — наибольший общий делитель). Во-вторых, перекрывающая тасовочная алгебра над $\mathbb{Q}$ изоморфна $\mathbb{Q}[\mathrm{Lyn}]$ при посредстве однородного морфизма, индуцированного включением $\mathrm{Lyn} \subset \mathcal{M}$ (см. § 10).

Тогда для доказательства того, что ϕ является изоморфизмом, достаточно доказать его сюръективность.

— Отображение $\phi_n\colon Z[\mathrm{ESL}]_n \to \mathcal{M}_n$ является изоморфизмом для $n \leqslant 10$ (что показано с помощью специальных и весьма беспорядочных расчетов).

— Аналог гипотезы Диттера для натуральных p-адических чисел справедлив (см. § 11).

Следующее свидетельство требует знания того факта, что перекрывающая тасовочная алгебра естественно изоморфна алгебре квазисимметрических функций; подробнее см. § 5.

— Подалгебра симметрических функций $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(X) \subset \mathrm{Qsym}_{\mathbb{Z}}(X) = \mathcal{M}$ лежит в образе ϕ. Действительно, она порождена словами

$$\underbrace{[1, 1, \ldots, 1]}_{n},$$

которые соответствуют элементарным симметрическим функциям. Слова Линдона $[n], n = 2, 3, \ldots$, соответствуют степенным суммам и являются образующими для симметрических функций над $\mathbb{Q}$, но не над $\mathbb{Z}$.

— Пусть J_n — подмодуль $\mathcal{M}$, порожденный словами длины $\geqslant n$. Он является идеалом в $\mathcal{M}$. Для доказательства сюръективности ϕ достаточно показать, что сквозное отображение

$$\phi\colon \mathbb{Z}[\mathrm{ESL}] \to \mathcal{M} \to M/J_n$$

сюръективно при каждом n, т.е. ϕ сюръективно по модулю J_n для каждого $n = 2, 3, \ldots$. В приложении этот факт доказан для $n = 2, 3, 4, 5$. Дополнительный интерес к тому, чтобы указанное свойство выполнялось по модулю слов длины $\geqslant 5$, вызван тем обстоятельством, что именно при длине 4 впервые появляются слова Линдона "второго поколения". (Слово Линдона "первого поколения" — это слово вида $[1, 1, \ldots, 1, a_1, a_2, \ldots, a_m]$, $a_i \geqslant 2$; слово $[1, 2, 1, 3]$ — это слово Линдона "второго поколения".)

§ 5. Квазисимметрические функции

Пусть X — конечное подмножество бесконечного множества (переменных), рассмотрим кольцо степенных рядов $R[X]$ от коммутирующих переменных из X над коммутативным кольцом R с единичным элементом. Многочлен или степенной ряд $f(X) \in R[[X]]$ называется симметрическим, если для любых конечных последовательностей неизвестных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ из X и для любой последовательности экспонент $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ коэффициенты в $f(X)$ при $X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$ и $Y_1^{i_1} Y_2^{i_2} \cdots Y_n^{i_n}$ одинаковы.

Квазисимметрические формальные степенные ряды — это обобщение, введенное Гессель (см. [5]) в связи с комбинаторикой разбиений плоскости. На этот раз берется вполне *упорядоченное* множество неизвестных, например, $V = V_1, V_2, \ldots$ с упорядочением типа упорядочения натуральных чисел, и условие состоит в том, что коэффициенты при $X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$ и $Y_1^{i_1} Y_2^{i_2} \cdots Y_n^{i_n}$ из X равны для всех вполне упорядоченных множеств неизвестных $X_1 < X_2 < \cdots < X_n$ и $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n$. Так, например,

$$X_1 X_2^2 + X_2 X_3^2 + X_1 X_3^2$$

— это квазисимметрический многочлен от трех переменных, который не является симметрическим.

Произведения и суммы квазисимметрических многочленов и степенных рядов опять-таки являются квазисимметрическими (что очевидно) и, таким образом, имеем, например, кольцо квазисимметрических степенных рядов

$$\mathrm{Qsym}_{\mathbb{Z}}(X)^{\vee}$$

от счетного числа коммутирующих переменных над кольцом целых чисел и его подкольцо

$$\mathrm{Qsym}_{\mathbb{Z}}(X)$$

квазисимметрических многочленов от конечного или счетного числа неизвестных, которые являются квазисимметрическими степенными рядами ограниченной степени.

Пусть дано слово $w = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ над $\mathbb{N}$, называемое также *композицией* в этом контексте; рассмотрим квазимономиальную функцию

$$M_w = \sum_{Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n} Y_1^{a_1} Y_2^{a_2} \ldots Y_n^{a_n},$$

заданную словом w. Они образуют базис подкольца $\mathrm{Qsym}_{\mathbb{Z}}(X)$ над кольцом целых чисел.

Предложение. *Задание $w \mapsto M_w$ определяет однородный изоморфизм между перекрывающей тасовочной алгеброй $\mathcal{M}$ и* $\mathrm{Qsym}_{\mathbb{Z}}(X)$.

Доказательство очевидно.

§ 6. Алгебра Лейбница — Хопфа

Рассмотрим свободную ассоциативную алгебру от счетного числа (некоммутирующих) неизвестных над кольцом целых чисел:

$$\mathcal{Z} = \mathbb{Z}\langle Z_1, Z_2, \dots \rangle.$$

Это кольцо снабжено структурой алгебры Хопфа посредством коумножения, определенного формулой

$$\mu(Z_n) = \sum_{\substack{i+j=n,\\ i,j\in\mathbb{N}\cup\{0\}}} Z_i \otimes Z_j,\ Z_0 = 1,$$

расширения

$$\varepsilon(Z_n) = 0,\ n = 1, 2, \dots ,$$

и антипода

$$\imath(Z_n) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} (-1)^k Z_{i_1} Z_{i_2} \dots Z_{i_k},$$

где последняя сумма берется по всем последовательностям $(i_1, i_2, \dots, i_k), i_j \in \mathbb{N}$, которые суммируются до n. Это *алгебра Лейбница — Хопфа*. Если каждому Z_n придан вес n, то коумножение и антипод являются сохраняющими вес операциями. Таким образом, градуированная алгебра, двойственная к $\mathcal{Z}$, является градуированной алгеброй над кольцом целых чисел. Базис алгебры $\mathcal{Z}$ над кольцом целых чисел задан одночленами от неизвестных. Таким образом, базис двойственного модуля составляют слова над $\mathbb{N}$ с двойственностью, заданной формулой

$$\langle w, Z_v \rangle = \delta_{w,v},$$

где δ — символ Кронекера и $Z_v = Z_{b_1} Z_{b_2} \cdots Z_{b_m}$ для $v = [b_1, \dots, b_m]$. Умножение на двойственной алгебре определено как

$$\langle wv, Z_u \rangle = \langle w \otimes v, \mu(Z_u) \rangle.$$

С помощью простых выкладок можно убедиться, что умножение слов как раз и есть перекрывающее тасующее умножение.

Таким образом, перекрывающая тасовочная алгебра $\mathcal{M}$ есть градуированная алгебра над кольцом целых чисел, двойственная к алгебре Лейбница — Хопфа $\mathcal{Z}$.

§ 7. Представляющее кольцо больших векторов Витта

Максимальной коммутативной факторалгеброй алгебры Лейбница — Хопфа является алгебра

$$\mathcal{R} = Z[X_1, X_2, \dots]$$

многочленов от счетного числа коммутирующих неизвестных над кольцом целых чисел с таким же коумножением. Это — представляющее кольцо больших векторов Витта (см. [7])

$$\mathrm{Ring}(\mathcal{R}, A) = W(A)$$

для любого кольца A, где Ring — категория коммутативных колец с единичным элементом, а W — функтор больших векторов Витта.

Кольцо $\mathcal{R}$ играет важную роль в теории классификации коммутативных формальных групп [7]. Поэтому представляется естественным рассмотреть возможную роль некоммутативного подъема алгебры $\mathcal{Z}$ в теории классификации некоммутативных формальных групп. Именно в этой связи и возникла гипотеза Диттера.

§ 8. Алгебра спуска Соломона и представления симметрических групп

Одним из (многих) проявлений алгебры $\mathcal{R}$ в различных областях математики является ее фигурирование в виде прямой суммы колец представлений симметрических групп:

$$\mathcal{R} = \bigoplus_n R(S_n),$$

где $R(S_n)$ — кольцо комплексных представлений симметрических групп на n буквах S_n (см. [11]). Точнее, $\mathcal{R}$ является самодвойственной и эта теоретическая алгебра представлений $\mathcal{R}$ является двойственной к алгебре $\mathcal{R}$, рассмотренной в предыдущем параграфе. Однако умножение на алгебре $\mathcal{R}$ не является (очевидно) обычным (тензорным) умножением представлений. Вместо этого оно определено посредством естественного изоморфизма

$$R(S_i) \otimes R(S_j) = R(S_i \times S_j)$$

следующей формулой:

$$\rho\sigma = \mathrm{Ind}_{S_i \times S_j}^{s_{i+j}}(\rho \otimes \sigma),$$

где Ind означает индукцию. Аналогично, двойственным образом при помощи того же естественного изоморфизма коумножение определено следующим ограничением:

$$\mu(\tau) = \sum_{i+j=n} \mathrm{Res}_{S_i \times S_j}^{s_n}(\tau).$$

Значительная часть теории представлений симметрических групп, например фробениусова взаимность, заключена в наблюдении того факта, что алгебра $\mathcal{R} = \bigoplus_n R(S_n)$ с умножением и коумножением, определенными таким образом, является алгеброй Хопфа и что она самодвойственна (см. [7]).

Обычное умножение на кольце $R(S_n)$ определяет второе умножение на алгебре $\mathcal{R}$, которое дистрибутивно над первым в соответствующем смысле, что делает $\mathcal{R}$ кольцом в категории коалгебр.

Алгебры спуска Соломона $D(S_n)$ (см. [16]) были изобретены в качестве некоммутативных аналогов кольца характеров симметрических групп (и вообще групп Кокстера). Эти алгебры также могут быть "прямо суммированы" в более крупный объект:

$$\mathcal{D} = \bigoplus_n D(S_n)$$

с новым умножением, над которым прямая сумма исходных умножений дистрибутивна. Оказывается, что $\mathcal{D}$ естественно изоморфна алгебре Лейбница — Хопфа $\mathcal{Z}$ (см. [13], а также [4]) и $\mathcal{R} = \bigoplus_n R(S_n)$ является коммутативной факторалгеброй алгебры $\mathcal{D}$ точно так же, как $\mathcal{R} = \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]$ является коммутативной факторалгеброй алгебры $\mathcal{Z}$.

Алгебра, двойственная к $\mathcal{Z}$, — это перекрывающая тасовочная алгебра $\mathcal{M}$, являющаяся алгеброй квазисимметрических функций $\mathrm{Qsym}_{\mathbb{Z}}(X)$, содержащей алгебру симметрических функций $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(X)$, которая, в свою очередь, является двойственной к $\mathcal{R}$; таким образом, все сходится к тому, что ситуация, являющаяся двойственной к факторситуации $\mathcal{Z} \to \mathcal{R}$, есть ситуация вложения $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(X) \subset \mathrm{Qsym}_{\mathbb{Z}}(X)$.

§ 9. Тасовочная алгебра

Существует вторая структура алгебры Хопфа на свободной ассоциативной алгебре от счетного числа неизвестных над $\mathbb{Z}$, т.е. второй способ превращения кольца $\mathbb{Z}\langle Z_1, Z_2, \dots \rangle$ в алгебру Хопфа. Эта структура в действительности значительно более широко известна и играет важнейшую роль в теории свободных алгебр Ли и в связанных с этой теорией областях. Для того чтобы избежать путаницы в обозначениях, пусть

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}\langle U_1, U_2, \dots \rangle$$

является другим экземпляром свободной ассоциативной алгебры от счетного числа переменных над $\mathbb{Z}$ и коумножение задано формулой

$$\mu(U_n) = 1 \otimes U_n + U_n \oplus 1.$$

Пусть $\mathcal{N}$ — градуированная алгебра, двойственная к $\mathcal{U}$. Это *тасовочная алгебра*. Тасующее умножение — это то же самое, что и перекрывающее тасующее умножение с тем отличием, что перекрытия не допускаются. Так, например,

$$\begin{gathered}[a,b] \times_{\text{ш}} [c,d] = \\ = [a,b,c,d] + [a,c,b,d] + [a,c,d,b] + \\ +[c,a,b,d] + [c,a,d,b] + [c,d,a,b]\end{gathered}$$

и

$$[1] \times_{\text{ш}} [1] = 2[1,1], \ [1] \times_{\text{ш}} [1] \times_{\text{ш}} [1] = 6[1,1,1].$$

Хорошо известная теорема гласит, что над полем рациональных чисел тасовочная алгебра является свободной алгеброй полиномов. Точнее, пусть $\mathbb{Q}[\mathrm{Lyn}]$ — свободное коммутативное кольцо полиномов над множеством Lyn слов Линдона, тогда (ср., например, [14]) справедлива

Теорема (теорема о структуре тасовочной алгебры).

$$\mathcal{N} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\mathrm{Lyn}].$$

Отметим, что ничто подобное не имеет места над кольцом целых чисел. Действительно, из второго примера тасующего умножения, приведенного выше, $\mathcal{N} \otimes \mathbb{Z}/(2)$ имеет нильпотенты и поэтому $\mathcal{N}$ не может быть свободной алгеброй над $\mathbb{Z}$.

С этой точки зрения если гипотеза Диттера верна (что весьма вероятно), то перекрывающая тасовочная алгебра $\mathcal{M}$ представляется более изящной “версией” алгебры $\mathcal{N}$. Здесь слово “версия” применено ввиду того, что над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ становятся изоморфными друг другу (см. § 10).

Доказательство теоремы о структуре тасовочной алгебры может быть получено непосредственным применением следующей теоремы, касающейся тасовочных произведений в связи с факторизацией Чена — Фокса — Линдона.

Теорема. *Пусть $w \in \mathbb{N}^*$ — слово на натуральных числах и $w = v_1 * v_2 * \cdots * v_m$ — факторизация Чена — Фокса — Линдона этого слова. Тогда все слова, встречающиеся с ненулевыми коэффициентами в тасовочном произведении $v_1 \times_{\text{ш}} v_2 \times_{\text{ш}} \cdots \times_{\text{ш}} v_m$, лексикографически меньше или равны w и w встречается с ненулевым целочисленным коэффициентом в этом произведении.*

Имея в виду этот результат, доказательство теоремы о структуре тасовочной алгебры осуществляется следующим образом. Упорядочим все слова лексикографически. Рассмотрим некоторое непустое слово w. Наименьшим непустым словом является [1]; по индукции можем предположить, что все слова, которые лексикографически меньше, чем w, были записаны в виде многочленов от элементов множества Lyn. Возьмем факторизацию Чена — Фокса — Линдона $w = v_1 * v_2 * \cdots * v_m$ слова w и рассмотрим, используя теорему о факторизации Чена — Фокса — Линдона, выражение

$$v_1 \times_{ш} v_2 \times_{ш} \cdots \times_{ш} v_m = aw + (\text{остаток}).$$

Согласно этой теореме, коэффициент a является ненулевым и все слова в (остатке) являются лексикографически меньшими, чем w; следовательно, они принадлежат множеству $\mathbb{Q}[\mathrm{Lyn}]$. Имеем также $w \in \mathbb{Q}[\mathrm{Lyn}]$. Это доказывает порождение, т.е. сюръективность естественного отображения $\mathbb{Q}[\mathrm{Lyn}] \to \mathcal{N}$. Инъективность следует из подсчета. Отображение является однородным, обе алгебры градуированы и $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\mathrm{Lyn}]_{\mathrm{n}}) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{N}_{\mathrm{n}})$. Подробнее см. [14], [15].

§ 10. Перекрывающая тасовочная алгебра над полем рациональных чисел

Как уже отмечалось, перекрывающая тасовочная алгебра и тасовочная алгебра становятся изоморфными друг другу над полем рациональных чисел. Учитывая тот факт, что тасовочная алгебра над полем рациональных чисел является свободной алгеброй многочленов, то существует, несомненно, очень много возможных гомоморфизмов алгебр. Среди них есть один (особенно изящный) между $\mathcal{Z} \otimes \mathbb{Q}$ и $\mathcal{U} \otimes \mathbb{Q}$, получаемый с помощью изоморфизма алгебр Хопфа следующим образом.

Рассмотрим выражение

$$1 + Z_1 t + Z_2 t + Z_3 t^2 + Z_3 t^3 + \cdots = \exp(U_1 t + U_2 t^2 + U_3 t^3 + \cdots).$$

С его помощью каждое Z_i можно выразить через $U_1, \ldots, U_i$ и тем самым определен следующий гомоморфизм алгебр:

$$\beta\colon \mathcal{Z} \otimes \mathbb{Q} \to \mathcal{U} \otimes \mathbb{Q}.$$

Теорема. *Гомоморфизм β алгебр есть изоморфизм алгебр Хопфа и, следовательно, двойственный к нему гомоморфизм определяет изоморфизм алгебр $\beta^*\colon \mathcal{N} \otimes \mathbb{Q} \to \mathcal{M} \otimes \mathbb{Q}$.*

Эта теорема доказывает, безусловно, что $\mathcal{M} \otimes \mathbb{Q}$ является свободной алгеброй многочленов и дает набор образующих, который, однако, не является ни множеством Lyn, ни множеством ESL. Подробнее см. [8].

Нетрудно также переделать доказательство того, что $\mathcal{N} \otimes \mathbb{Q}$ является свободной алгеброй многочленов на Lyn, в доказательство того факта, что $\mathcal{M} \otimes \mathbb{Q}$ является свободной алгеброй многочленов на Lyn. Единственной необходимой модификацией является некоторое изменение используемого упорядочения слов. Упорядочение, которое действует в данном случае, имеет следующий вид:

$$w \succ v \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{длина } (w) > \text{длина } (v) \text{ или} \\ \text{длина } (w) = \text{длина } (v) \text{ и } w \geqslant v \text{ (лексикографически).} \end{cases}$$

На настоящий момент нам неизвестны доказательства того, что $\mathcal{M} \otimes \mathbb{Q}$ является свободной алгеброй многочленов (над $\mathbb{Q}$) на ESL.

§ 11. p-адический аналог гипотезы Диттера

Существует p-адический аналог гипотезы Диттера; удивительно, что он может быть доказан с помощью прямой модификации доводов, использованных при доказательстве теоремы о структуре тасовочной алгебры. Удивительно потому, что мы не считаем такой путь правильным для доказательства самой гипотезы Диттера.

Начнем с формулировок. Слово $w = [a_1, \dots, a_n]$ на $\mathbb{N}$ называется *p-элементарным* (здесь p — простое число), если наибольший общий делитель чисел $a_1, \dots, a_n$ не делится на p. Слово вида

$$w = \underbrace{v * \cdots * v}_{p^r \text{множителей}}$$

называется p-звездной степенью слова. Множество ESL(p) есть множество слов, которые являются p-звездными степенями p-элементарных слов Линдона.

Теорема (p-адический аналог гипотезы Диттера).

$$\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)}[\mathrm{ESL}(p)].$$

Иначе говоря, $\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ *является свободной коммутативной алгеброй на* ESL(p) *над* $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Для доказательства этой теоремы потребуются некоторые сведения о биномиальных и полиномиальных коэффициентах. Расширим стандартным образом обычное определение биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n}{m} = 0, \quad \text{если } m > n, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \text{если} \quad n \geqslant 0.$$

Предложение. *Рассмотрим p-адические разложения двух натуральных чисел* m *и* n :

$$n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k, m = b_0 + b_1 p + \cdots + b_k p^k,$$
$$a_i, b_j \in 0, 1, \dots, p-1.$$

Величина биномиального коэффициента по модулю p равна

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1} \cdots \binom{a_n}{b_n}.$$

В частности, если $b_i \leqslant a_i$ *для всех* i, *то этот биномиальный коэффициент является ненулевым по модулю* p.

Следствие. *Полиномиальный коэффициент*

$$\binom{n}{\underbrace{p^k\cdots p^k}_{a_k\ \textit{раз}}\underbrace{p^{k-1}\cdots p^{k-1}}_{a_{k-1}\ \textit{раз}}\cdots\underbrace{1\cdots 1}_{a_0\ \textit{раз}}}$$

является ненулевым по модулю p.

Доказательство предложения. При $0 \leqslant n \leqslant p-1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant p$; запишем p-адическое разложение n и m, как это сделано в формулировке предложения, и пусть

$$n_1 = a_0 + a_1 p + \cdots a_{k-1}p^{k-1}, m_1 = b_0 + b_1 p + \cdots + b_{k-1}p^{k-1}.$$

Имеем

$$(x+y)^n = (x+y)^{a_k p^k}(x+y)^{n_1} \equiv \left(x^{p^k} + y^{p^k}\right)^{a_k}(x+y)^{n_1}.$$

В явном виде получаем

$$(x+y)^n = \left\{\binom{a_k}{0}\left(x^{p^k}\right)^a_k\left(y^{p^k}\right)^0 + \cdots + \right.$$

$$\left. + \binom{a_k}{i}\left(x^{p^k}\right)^{a_k-i}\left(y^{p^k}\right)^i + \cdots + \left(x^{p^k}\right)^0\left(y^{p^k}\right)^{a_k}\right\} \times$$

$$\times \left\{\binom{n_1}{0}x^{n_1}y^0 + \cdots + \binom{n_1}{i}x^{n_1-i}y^i + \cdots + \binom{n_1}{0}x^0y^{n_1}\right\}.$$

Следовательно,

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{a_k}{b_k}\binom{n_1}{m_1}$$

и по индукции получаем требуемый результат. □

Доказательство p-адического аналога гипотезы Диттера. Используем такое же упорядочение слов, какое описано в конце § 10, т.е. вначале слова упорядочиваются по длине, а затем слова одинаковой длины упорядочиваются лексикографически. Пусть $\mathrm{SL}(p)$ — множество всех p-звездных степеней слов Линдона, т.е. слов вида

$$w = v^{*p^k}, v \in \mathrm{Lyn}.$$

Первым шагом является доказательство того, что все слова записаны в виде многочленов от элементов множества $\mathrm{SL}(p)$. Пусть w — слово над $\mathbb{N}$. Индуктивно предположим, что все меньшие слова могут быть записаны в виде многочленов от элементов $\mathrm{SL}(p)$, а с помощью индукции по весам — то, что все нетривиальные произведения могут быть записаны таким образом. Пусть

$$w = v_1^{*n_1} * v_2^{*n_2} * \cdots v_m^{*n_m}, \; v_i \in \mathrm{Lyn}, \; v_1 > v_2 > \cdots > v_m,$$

является факторизацией Чена — Фокса — Линдона. Рассмотрим произведения вида

$$\prod_{i=1}^{k_1} v_1^{*n_{1i}} \prod_{i=1}^{k_2} v_2^{*n_{2i}} \cdots \prod -i = 1^{k_m} v_m^{*n_{mi}},$$

где произведения представляют собой перекрывающие тасовочные произведения и где $n_{i1} + \cdots n_{ii_k} = n_i$, $i = 1, \ldots, m$. Наибольшим словом, фигурирующим в таком произведении (при используемом нами упорядочении), будет слово w независимо от того, как разбиваются различные звездные степени. Однако коэффициент при w будет зависеть от того, каким образом разбиваются звездные степени v_j. Действительно, этот коэффициент является произведением полиномиальных коэффициентов

$$\binom{n_1}{n_{11} \cdots n_{1k_1}} \binom{n_2}{n_{21} \cdots n_{2k_2}} \cdots \binom{n_m}{n_{m1} \cdots n_{mk_m}}.$$

Например, если взять $n_{ij} = 1 \; \forall i, j$ (что было сделано при доказательстве равенства $\mathcal{M} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\mathrm{Lyn}]$, см. § 10), то коэффициент будет равен $n_1! n_2! \cdots n_m!$, а если взять другой крайний случай $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 1$, то коэффициент будет равен 1. Имея в виду поставленную цель, разбиваем каждое n_j в соответствии с его p-адическим разложением. Итак, если $n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k$, $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, то оно разбивается (разлагается) на

$$\underbrace{p^k, P^k, \ldots, p^k}_{a_k \text{частей}}, \underbrace{p^{k-1}, \ldots, p^{k-1}}_{a_{k-1} \text{частей}}, \ldots, \underbrace{p, \ldots, p}_{a_1 \text{частей}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_0 \text{частей}}.$$

Согласно вышеприведенному следствию, в этом случае коэффициент является ненулевым по модулю p, т.е. он является обратимым элементом $\mathbb{Z}_{(p)}$. Тем самым доказано, что w также может быть записано в виде многочлена от элементов множества $\mathrm{SL}(p)$.

Для некоторого веса n пусть $w_1, w_2, \ldots, w_m$ — все слова с этим весом, которые принадлежат множеству $\mathrm{SL}(p)$, но не являются p-элементарными. Таким образом, если $w_i = [a_{i1}, \ldots, a_{ik_i}]$, то $p|$НОД $\{a_{i1}, \ldots a_{ii_k}\}$. Пусть

$$b_{ij} = p^{-1} a_{ij}, \; v_i = [b_{i1}, \ldots, b_{ik_i}].$$

Рассмотрим перекрывающие тасовочные степени v_i^p. Легко видеть, что они имеют вид

$$v_i^p = w_i + p\,(\text{что-либо веса } n).$$

Согласно доказанному выше, каждое из этих "что-либо веса n" может быть записано в виде многочленов от элементов множества $\mathrm{SL}(p)$. Выполним такую запись. Произведем вычисления по модулю нетривиальных произведений и элементов множества $\mathrm{ESL}(p)$. Результатом будет n отношений конгруэнтности

$$a_{11}w_1 + \dots + a_{1n}w_n \equiv 0, \quad \dots, \quad a_{n1}w_1 + \dots + a_{nn}w_n \equiv 0,$$

где матрица $A = a_{ij}$ обладает свойством $A \equiv I_n \bmod p$. Это означает, что определитель матрицы A обратим в $\mathbb{Z}_{(p)}$, тогда $w_1, \dots, w_n$ могут быть исключены. Этим доказан тот факт, что элементов из множества $\mathrm{ESL}(p)$ хватит для того, чтобы породить все $\mathcal{M} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ над $\mathbb{Z}_{(p)}$. Подсчет, аналогичный использовавшемуся ранее, завершает доказательство.

Замечание. Не существует (известного нам) предсказания того, какие слова w будут появляться в этих отношениях конгруэнтности. Априори могут появляться большие, меньшие (лексикографически) и равные. Так оно и есть. Именно здесь и разваливается попытка доказательства гипотезы Диттера в [15]. Известно только, что строки матрицы A распадаются на несколько классов, соответствующих различным простым p, и эти строки являются "единичными строками" по модулю этих p. Этого недостаточно, как показывает матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

для простого числа 2 для первой строки и для простого числа 3 для второй строки. Явные примеры для низких весов дают матрицы A, которые обратимы над полем рациональных чисел, но не обязательно являются таковыми над кольцом целых чисел; это показывает необходимость использования большего числа отношений в $\mathcal{M}$.

§ 12. Обобщенные перекрывающие тасовочные алгебры

Пусть S — частичная полугруппа, т.е. множество с частично определенной функцией умножения

$$S \times S \to S,$$

которое является ассоциативным. Последнее требование означает, что если определены произведения s_1s_2 и s_2s_3, то определены также произведения $(s_1s_2)s_3$ и $s_1(s_2s_3)$, и эти два последних произведения равны между собой; если определены s_2s_3 и $s_1(s_2s_3)$, то определено и s_1s_2 (и $(s_1s_2)s_3 = s_1(s_2s_3)$), а если определены s_1s_2 и $(s_1s_2)s_3$, то определено s_2s_3 (и $(s_1s_2)s_3 = s_1(s_2s_3)$).

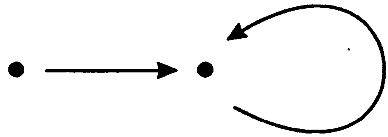

Рис. 1

Например, множество морфизмов категории является частичной полугруппой в этом смысле.

Обобщенная перекрывающая тасовочная алгебра, задаваемая частичной полугруппой над $\mathbb{Z}$ (или вообще над коммутативным кольцом R с единичным элементом), определена следующим образом. Будучи свободной абелевой группой, она имеет своим базисом все слова на множестве S. Произведение является в основном перекрывающим тасовочным произведением (с учетом порядка сомножителей); допускаются только те перекрытия, для которых произведение определено. Это ассоциативная алгебра с единичным элементом (представленным пустым словом). Такая алгебра будет обозначаться ОПТА(S). Например, пусть S — частичная полугруппа, изображенная на рис. 1, т.е.

$$S = \{s_1, s_2;\ s_2 s_1 = s_1, s_2 s_2 = s_2, \text{другие произведения не определены}\}.$$

Тогда, например,

$$[s_1][s_2] = [s_1, s_2] + [s_2, s_1], [s_2][s_1] = [s_2] + [s_2, s_1] + [s_1, s_2]$$

и

$$[s_2][s_2, s_1] = 2[s_2, s_1] + 2[s_2, s_2, s_1] + [s_2, s_1, s_2],$$
$$[s_2, s_1][s_2] = [s_2, s_1] + 2[s_1, s_2, s_1] + [s_2, s_1, s_2].$$

В частности, рассматриваемая ОПТА некоммутативна. Действительно, ОПТА(S) является коммутативной тогда и только тогда, когда коммутативна S.

Если умножение на полугруппе S нигде не определено, то мы получаем тасовочную алгебру $Ш_{\mathbb{Z}}(S)$ над множеством S. В случае полугруппы $\mathbb{N}$ натуральных чисел с операцией сложения результатом является перекрывающая тасовочная алгебра, которую исследовали в предыдущих параграфах, т.е. ОПТА($\mathbb{N}$) = $\mathcal{M}$. Другие специальные обобщенные перекрывающие тасовочные алгебры будут подробнее рассмотрены ниже.

§ 13. Обобщенные перекрывающие тасовочные алгебры как двойственые к алгебрам Хопфа

Пусть S — частичная полугруппа. Нам потребуется следующее умеренное дополнительное условие конечности:

$$\forall s \in S \#(t, u) \in S \times S\colon tu = s < \infty.$$

Оно выполняется, например, для всех конечных полугрупп, для (частично) упорядоченных полугрупп таких, как натуральные числа; оно не выполняется ни для какой бесконечной группы, например, для группы целых чисел.

Определим $\mathcal{Z}(S)$ как свободную ассоциативную алгебру над кольцом целых чисел от (некоммутирующих) переменных $Z_s, s \in S$, т.е. как алгебру $\mathcal{Z}(S) = \mathbb{Z}\langle Z_s : s \in S\rangle$, и определим коумножение и коединицу формулами

$$\mu(Z_s) = 1 \otimes Z_s + \sum ut = sZ_u \otimes Z_t + Z_s \otimes 1,$$

$$\varepsilon(Z_s) = 0$$

соответственно. Тем самым определена биалгебра $\mathcal{Z}(S)$, а градуированная алгебра, двойственная к последней, является ОПТА(S) (если S не является конечной, то необходимо использовать возрастающие веса для Z_s).

Можно с уверенностью сказать, что неверно утверждение о том, что такие биалгебры всегда можно снабдить структурой алгебры Хопфа, т.е. эти алгебры всегда допускают антипод, например,

$$S = \{e, s_1, s_2;\ s^2 = s_2, s_1 s_2 = s_2 s_1 = s_2^2 = s_2\}$$

с единичным элементом e. Простые выкладки показывают, что в этом случае не может быть антипода. Другим примером является биалгебра мультипликативных групп

$$\mathbb{Z}[X],\ \mu(X) = 1 \otimes X + X \otimes X + X \otimes 1,$$

но в этом случае антипод существует, если $Z[X]$ дополнена до кольца степенного ряда $\mathbb{Z}[[X]]$, что делает этот пример своего рода тривиальным контрпримером.

Предложение. *Пусть S — частичная полугруппа без единичного элемента с частичным порядком на этой полугруппе таким, что $pq > p$ для всех q, и таким, что*

$$\#L(s) < \infty, \text{ где } L(s) = \{t \in S : t < s\}$$

для всех $s \in S$. Тогда биалгебра $\mathcal{Z}(S)$ имеет антипод.

Доказательство является простым; его необходимо начинать с минимальных элементов, т.е. с таких, для которых $L(s) = \varnothing$. Это утверждение никоим образом не является наиболее общим утверждением из тех, которые можно доказать для антиподов биалгебр $\mathcal{Z}(S)$.

Для любого кольца R с единичным элементом и для полугруппы S пусть

$$M_S(R) = \left\{1 + \sum a_s s : s \in S, a_s \in R\right\}$$

является полугруппой “1-единиц” $R[S]$, где $R[S]$ — полугрупповая алгебра полугруппы S над R (однако без отождествления единичного элемента полугруппы S (если таковой имеется) с единицей полугрупповой алгебры $R[S]$). Тогда полугрупповой функтор $R \mapsto M_S(R)$ представлен биалгеброй $\mathcal{Z}(S)$.

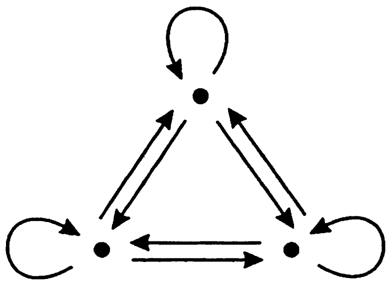

Рис. 2

Замечание. Существуют некоторые очевидные варианты построения $\mathcal{Z}(S)$, данного выше, например, следующие.

Пусть вновь лежащей в основе алгеброй является свободная ассоциативная алгебра на $Z_s, s \in S$. Но теперь определим коумножение формулой

$$\mu(Z_s) = \sum_{ut=s} Z_u \otimes Z_t.$$

Обозначим эту "биалгебру" через $\mathcal{Z}_0(S)$. Слово биалгебра заключено в кавычки, так как не всегда имеется соответствующая коединица.

Для S матричная частичная полугруппа, подобная той, которая изображена на рис. 2 (которая, конечно, представляет случай 3×3), $\mathcal{Z}_0(S)$ имеет естественную коединицу, а именно

$$\varepsilon(Z_{ij}) = \delta_{ij},$$

и получающаяся биалгебра есть биалгебра матричных функций матричного коумножения. Построение самой $\mathcal{Z}(S)$ также дает эту биалгебру матричных функций, но "сдвинутую"(см. § 15). Это построение, по всей видимости, менее приемлемо, поскольку "чисто тасовочная" часть умножения в двойственной алгебре исходит от частей $1 \otimes Z$ и $Z \otimes 1$ коумножения.

Третий вариант следующий. Пусть M — частичный моноид, т.е. существует двусторонний единичный элемент e. Лежащей в основе алгеброй является алгебра $\mathbb{Z}\langle Z_m : m \in M \backslash \{e\}\rangle$ и Z_e отождествляется с 1. Формула коумножения такая же, как выше, т.е.

$$\mu(Z_s) = \sum_{ut=s} Z_u \otimes Z_t,$$

и имеется коединица, определенная формулой

$$\varepsilon(Z_m) = 0 \ \forall m \in M\backslash\{e\}.$$

Обозначим результат этого построения через $\mathcal{Z}_{00}(M)$. Ясно, что $\mathcal{Z}(S) = \mathcal{Z}_{00}(S \cup \{e\})$, где $S \cup \{e\}$ — частичный моноид, полученный путем добавления нового (искусственного) двустороннего единичного элемента e. Имеются соответствующие обобщенные перекрывающие тасовочные алгебры: ОПТА$_0$ и ОПТА$_{00}$.

§ 14. Простейшая обобщенная перекрывающая тасовочная алгебра

Вероятно, простейшей частичной полугруппой является одноэлементная частичная полугруппа $S = \{s; s_2 = s\}$. Посмотрим, как выглядит соответствующая ОПТА, т.е. ОПТА($\{s\}$). Двойственным к S является кольцо $\mathbb{Z}[X]$ многочленов от одной переменной с коумножением $X \mapsto 1 \otimes X + X \otimes X + 1 \otimes X$, т.е. мультипликативная (формальная) группа. Возможные слова на $\{s\}$ — это цепочки, состоящие из n элементов s и обозначенные для удобства некоторым символом как $\langle n \rangle$. Умножение на ОПТА($\{s\}$) задано явной формулой

$$\langle n \rangle \langle m \rangle = \sum_{i=0}^{\min\{m,n\}} \left(\frac{(n+m-i)!}{(n-i)!(m-i)!i!} \right) \langle n+m-i \rangle.$$

Пусть $P = P_{\text{конечное}}(\mathbb{N} \cup \{0\})$ — множество всех конечных подмножеств множества неотрицательных целых чисел. Запишем для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ его двоичное разложение

$$n = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_k 2^k, \ a_i \in \{0, 1\}$$

и определим

$$\xi(n) = \{i \colon a_i \neq 0\} \in P.$$

Придадим множеству P структуру полугруппы посредством операции объединения.

Теорема. *Отображение $\langle n \rangle \mapsto \xi(n) \in P$ определяет изоморфизм*

$$\xi \colon \text{ОПТА}(\{s\}) \otimes \mathbb{Z}/(2)[P],$$

где целью является полугрупповая алгебра полугруппы P над $\mathbb{Z}/(2)$. Подробнее см. [10].

§ 15. Алгебра матричных функций

Рассмотрим частичную полугруппу из n^2 элементов, определенную следующим образом:

$$M_n = \{s_{ij} \colon i, j \in \{1, \ldots, n\}; s_{ij}s_{jk}, \text{ другие произведения не определены}\}$$

(так сказать, "полугруппу матричных произведений"). Ее можно рассматривать как частичную полугруппу морфизмов некоторой конечной категории; случай $n = 3$ изображен на рис. 2. Соответствующая биалгебра $\mathcal{Z}(M_n)$ является "биалгеброй матричных функций" в том смысле, что для любого кольца с единичным элементом R $\mathrm{Ring}(\mathcal{Z}(M_n), R)$ является полугруппой матриц размерности $n \times n$ с коэффициентами из R при матричном умножении. Для $\alpha \in \mathrm{Ring}(\mathcal{Z}(M_n), R)$ соответствующей матрицей является $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \alpha(Z_{ij}) + \delta_{ij}$. Безусловно, имеется соответствующее "косложение" $\sigma(Z_{ij}) = 1 \otimes Z_{ij} + Z_{ij} \otimes 1 - \delta_{ij}$ (и соответствующий "конуль"), делающее $\mathcal{Z}(M_n)$ объектом типа кокольцо в категории колец. Существует много "функториальных" колец подматриц, которые представлены подобными алгебрами $\mathcal{Z}(S)$.

§ 16. ОПТА(N*)

Еще одним классом обобщенных перекрывающих тасовочных алгебр, представляющих (по нашему мнению) интерес для исследователя, является следующий:

$$\mathcal{G}_n = \text{ОПТА } (A^* \{e\}) = \text{ОПТА }_{00}(A^*),$$

где A — алфавит, состоящий из n букв, A^* — свободный моноид из всех слов над этим алфавитом, а через e обозначено пустое слово. Базис этой ОПТА состоит из всех цепочек (последовательностей) слов $s = [w_1, w_2, \dots, w_n]$, т.е. из предложений, включая пустое предложение, которое служит в качестве единичного элемента. Пусть алфавит A состоит из множества букв

$$A = \{y_1, y_2, y_3, \dots\} (\text{конечного или счетного}).$$

Длина предложения s является суммой длин слов, составляющих это предложение. Сигнатура предложения s — это цепочка $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ неотрицательных целых чисел, где i_j — общее число появлений буквы y_j в словах, составляющих предложение s. Например:

$$\mathrm{sig}[y_1y_2, y_1, y_4y_1] = (3, 1, 0, 1).$$

Если предложения s_1, s_2 имеют сигнатуры σ_1, σ_2, то произведение $s_1s_2 \in \mathcal{G}$ является суммой тех элементов базиса, которые имеют сигнатуру $\sigma_1 + \sigma_2$, где сигнатуры складываются покомпонентно.

Обобщенные перекрывающие тасовочные алгебры $\mathcal{G}$ являются сильно некоммутативными и в первую очередь необходимо выяснить, являются ли они свободно порожденными некоторыми (возможно частично коммутирующими) образующими. Эти алгебры таковыми не являются. Первое препятствие возникает при длине 3. Для сигнатуры $(1, 1, 1)$ необходимо (по модулю произведений предложений меньших длин), по меньшей мере, 7 образующих, например

$$[y_1, y_2y_3], [y_1, y_3y_2], [y_2, y_1y_3], [y_3, y_1y_2], [y_1, y_3, y_2], [y_2, y_1, y_3],$$

и тогда имеется одно соотношение, получаемое из следующего выражения

$$[y_1][y_2, y_3] - [y_2, y_3] + (S_3) = 0,$$

где "$+(S_3)$" означает: "выполнить нетождественные подстановки из S_3 в выражение слева и прибавить все эти подстановки к этому выражению."

В общем случае для любых трех слов $u, v, w \in A^*$ имеет место соотношение

$$[u][v*w] - [v*w][u] + [v][w*u] - [w*u][v] + [w][u*v] - [u*v][w] = 0$$

или, эквивалентно,

$$[u][v, w] - [v, w][u] + (S_3) = 0.$$

Существуют соотношения для слов большей длины типа

$$[y_1][y_2, y_3, y_4] - [y_2, y_3, y_4][y_1] + (C_4) = 0,$$

где C_4 — циклическая группа четырех подстановок $(1), (1234), (13)(24), (1432)$, а также естественные обобщения этих соотношений для случаев из пяти и более букв y. Далее, существуют соотношения вида

$$[y_1, y_2][y_3y_4] - [y_3y_4][y_1, y_2] + (A_4) = 0,$$

где A_4 — знакопеременная группа на четырех буквах. До длины 4 включительно только эти виды квадратичных соотношений являются необходимыми и есть искушение считать, что это так и в общем случае.

§ 17. Алгебра Хопфа — Мальвенуто — Рейтенауэра

Алгебра Лейбница — Хопфа $\mathcal{Z}$ некоммутативных симметрических функций является некоммутативным обобщением алгебры Хопфа симметрических функций. Последняя является самодвойственной, каковой алгебра $\mathcal{Z}$ быть не может, будучи кокоммутативной, с одной стороны, и (максимально) некоммутативной, с другой. Однако существует некоммутативное и некокоммутативное обобщение алгебры симметрических функций над кольцом целых чисел, которое является самодвойственной алгеброй. Этот очень изящный объект введен Мальвенуто и Рейтенауэром в работе [13]. Это значительно более симметричная вещь, для которой $\mathcal{M}$ является естественной факторалгеброй (а $\mathcal{Z}$ — естественным подобъектом), и мы предложили бы пересмотреть теорию некоммутативных симметрических функций именно в этом контексте, а не на несамодвойственном обобщении $\mathcal{Z}$ алгебры симметрических функций.

Приложение. Порождение по модулю длины n

Пусть J_n — подпространство алгебры $\mathcal{M}$, порожденное словами длины n (где длина слова $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, конечно, равна n). Это подпространство является идеалом в $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M}$ рассматривать как алгебру квазисимметрических функций, и, следовательно, как подалгебру степенных рядов от $X_1, X_2, \dots$, то подсчет по модулю J_n — это в точности то же самое, что подсчет по модулю $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$.

Поскольку слово веса n имеет длину $\leqslant n$, то для доказательства сюръективности отображения ϕ: $\mathbb{Z}[\mathrm{ESL}] \to \mathcal{M}$ достаточно доказать, что оно сюръективно по модулю J_n для каждого n. Это полностью аналогично случаю симметрических функций, где для доказательства того, что симметрический многочлен степени n является многочленом от элементарных симметрических функций, достаточно оперировать лишь с первыми n элементарными симметрическими функциями.

Полезно ввести некоторые термины. Будем говорить, что элемент $\mathcal{M}$ "является ДМn" (где $n = 2, 3, 4$ или 5 для рассматриваемых здесь случаев), если он лежит в образе отображения ϕ по модулю идеала J_n. ("ДМ" обозначает "доступный по модулю".)

Ниже приводятся подробные доказательства того, что отображение ϕ: $\mathbb{Z}[\mathrm{ESL}] \to \mathcal{M}$ является сюръективным по модулю J_n для $n \leqslant 5$. Эти доказательства лежат в широком диапазоне, начиная с очевидного (для $n = 2$) и кончая весьма беспорядочным (для $n = 5$).

А1. Порождение по модулю J_2. Единственными словами длины $\leqslant 2$ являются слова $[n]$, которые соответствуют степенным суммам:

$$X_1^n + X_2^n + \dots \in \mathrm{Qsym}_{\mathbb{Z}}(X) = \mathcal{M}.$$

Эти последние являются многочленами над $\mathbb{Z}$ от элементарных симметрических функций, которые, в свою очередь, соответствуют словам

$$\underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_{n} \in \mathrm{ESL}.$$

А2. Порождение по модулю J_3. Ввиду доказанного выше, достаточно рассматривать только слова длины 2. Теперь

$$[a][b] = [a + b] + [a, b] + [b, a],$$

с помощью индукции (по весам) можно полагать, что все произведения являются ДМ3. Таким образом, достаточно показать, что $[a, b]$ является ДМ3 для $a \leqslant b$; в действительности, для $a < b$, так как $[a, a]$ является симметричным и, следовательно, ДМn при всех n. $[1,n]$ является образующей (т.е. элементом множества ESL); имеем

$$[a-1][1,b] \equiv [a,b] + [1,a+b-1] \mod J_3$$

и нужный нам результат получен. В действительности несложно показать, что алгебра $\mathcal{M}/J_3$ изоморфна алгебре над $\mathbb{Z}$, порожденной тремя элементами [1],[1,1],[1,2] по модулю единственного соотношения

$$[1,2]^2 \equiv [1][1,1][1,2] - [1][1,1]^2.$$

Здесь имеется существенное различие между $\mathrm{Qsym}_{\mathbb{Z}}(X)$ и $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(X)$. В последнем случае $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(x)/J_n$ является свободной алгеброй многочленов с n образующими для каждого n.

А3. Порождение по модулю J_4. Ввиду А2 достаточно доказать, что все слова длины 3 являются ДМ4. (Однако доказательство все же будет включать более подробное рассмотрение слов меньшей длины.) Имеем

$$[1][a-1,b,c] \equiv [a,b,c] + [a-1,b+1,c] + [a-1,b,c+1],$$

где символом $\equiv$ обозначена сравнимость (конгруэнтность) по модулю J_4. Таким образом, если применить индукцию по весу и индукцию по первому символу в словах длины 3, то достаточно доказать, что слова длины 3, начинающиеся с 1, являются ДМ4. Необходимо рассмотреть следующие три случая:

$$[1,a,b], a,b > 1,$$

$$[1,1,b], b \geqslant 1,$$

$$[1,a,1], a > 1.$$

В первых двух случаях фигурируют образующие. Поэтому достаточно рассмотреть только последний случай. Имеем

$$[1][1,a] = [2,a] + [1,a+1] + 2[1,1,a] + [1,a,1].$$

Если a нечетно, то $[2,a]$ принадлежит множеству ESL, также и $[1,a+1],[1,1,a] \in$ ESL. Таким образом, осталось показать, что слова вида $[2,2b]$ являются ДМ4; при этом можно принять $b \geqslant 2$, так как $[2,2]$ симметрично. Имеем

$$[1,b]^2 \equiv [2,2b] + 2[1,b+1,b] + 2[1,1,2b] + 2[2,b,b]$$

и

$$[2,b,b] \equiv [1,1,1][1,b-1,b-1].$$

Это завершает доказательство.

А4. Порождение по модулю J_5. Символ $\equiv$ обозначает сравнимость (конгруэнтность) по модулю J_5. Ввиду А3 достаточно иметь дело именно со словами длины 4. Вновь с помощью индукции по весам можно предположить, что все суммы нетривиальных произведений являются ДМ5. Выкладки требуют рассмотрения довольно значительного числа различных случаев.

Шаг 1. Слова вида $[a,b,c,d]$, где $a,b,c,d \geqslant 2$, являются ДМ5. Действительно, $[a,b,c,d] \equiv [1,1,1,1][a-1,b-1,c-1,d-1]$.

Шаг 2. Слова вида $[2,2b,2c]$, где $b,c \geqslant 2$, являются ДМ5. Чтобы убедиться в этом, вычислим

$$[1,b,c]^2 \equiv [2,2b,2c] + 2[1,b+1,c+b,c] + 2[2,b,b+c,c] + \\ + 2[2,2b,c,c] + 2[1,b+1,b,2c] + 2[1,1,2b,2c].$$

Все члены в правой части, кроме $[2,2b,2c]$, являются образующими или же они ДМ5 в соответствии с шагом 1.

Шаг 3. Слова вида $[2,2b]$ являются ДМ5. Если $b=1$, то это слово симметрично и, следовательно, ДМn при всех n; поэтому можно считать, что $b \geqslant 2$. Вычислим

$$[1,b]^2 = [2,2b] + 2[1,b+1,b] + 2[1,1,2b] + 4[1,1,b,b] + 2[1,b,1,b].$$

Единственным проблемным членом является $[2,b,b]$. Но если $b=2$, то он симметричен; если b нечетно, то это образующая, а если $b \geqslant 4$ и четно, то рассматриваемое слово является ДМ5 в силу шага 2.

Шаг 4. Слова вида $[1,a,1,c]$, где $a,c \geqslant 3$, являются ДМ5. Если $c \geqslant a > 1$, то слова являются образующими, т.е. принадлежат множеству ESL. Если $1 < c < a$, то вычислим

$$\begin{aligned}[1,a][1,c] =&[2,a+c] + [2,a,c] + [2,c,a] + [1,a+1,c] + \\ &+ [1,c+1,a] + 2[1,1,a+c] + [1,a,1,c] + \\ &+ 2[1,1,a,c] + 2[1,1,c,a] + [1,c,1,a].\end{aligned}$$

Теперь $[2,a+c]$ — либо образующая, либо оно является ДМ5 в силу шага 3. Все другие члены в правой части, кроме требуемого $[1,a,1,c]$, являются образующими за возможным исключением $[2,a,c]$ и $[2,c,a]$. Если, по крайней мере, одно из a,c является нечетным, то эти члены являются образующими, а если оба эти числа являются четными, то оба члена являются ДМ5 в силу шага 2.

Шаг 5. Слова вида $[a,1,b,c]$, где $a,b,c \geqslant 2$, являются ДМ5. Чтобы убедиться в этом, вычислим

$$[a-1][1,1,b,c] \equiv \\ \equiv [a,1,b,c] + [1,a,b,c] + [1,1,a+b-1,c] + [1,1,b,a+c-1]$$

и отметим, что все члены в правой части этого выражения, кроме требуемого, являются образующими.

Шаг 6. Слова вида $[2,2,c]$, где $c \geqslant 2$, являются ДМ5. Если c нечетно, то это слово является образующей, а если $c = 2$, то оно симметрично. Таким образом, можно считать, что $c = 2b$, $b \geqslant 2$. Как в шаге 2, вычислим

$$[1,1,b]^2 \equiv [2,2,2b] + 2[1,2,b+1,b] + 2[2,1,b+1,b] + 2[2,2,b.b] + \\ + 2[2,1,1,2b] + 2[1,2,1,2b] + 2[1,1,2,2b].$$

Первый член в правой части — это искомый, второй является образующей, третий является ДМ5 в силу шага 1, два последних — образующие. Остается рассмотреть $[2,1,1,2b]$. Имеем

$$[1][1,1,1,2b] \equiv [2,1,1,2b] + [1,2,1,2b] + [1,1,2,2b] + [1,1,1,2b+1],$$

и все члены в правой части, кроме искомого, являются образующими.

Шаг 7. Слова вида $[1,a,b,1]$, где $a \geqslant 2$, $b \geqslant 3$, являются ДМ5. Чтобы убедиться в этом, вычислим

$$[1][1,a,b] = [2,a,b] + [1,a+1,b] + [1,a,b+1] + \\ + 2[1,1,a,b] + [1,a,1,b] + [1,a,b,1].$$

Последний член в правой части — это искомый, предпоследний член является образующей, если $b \geqslant a$; в противном случае он является ДМ5 в силу шага 4, так как $b \geqslant 3$. Все остальные члены в правой части, кроме $[2,a,b]$, являются образующими. Если одно из чисел a, b является нечетным, то этот член является образующей; если оба они четны и $a \geqslant 4$, то этот член является ДМ5 в силу шага 2; если же оба четны и $a = 2$, то этот член является ДМ5 в силу шага 6.

Шаг 8. Слова вида $[a,b,1,c]$, где $a,b,c \geqslant 2$, являются ДМ5. На этот раз вычислим

$$[a-1,b-1][1,1,1,c] \equiv [a,b,1,c] + [a,1,b,c] + [1,a,b,c] + \\ + [a,1,1,b+c-1] + [1,a,1,b+c-1] + \\ + [1,1,a,b+c-1].$$

Первый член в правой части — это искомый, второй является ДМ5 в силу шага 5, третий является образующей, равно как и шестой, последний. Далее, $b+c-1 \geqslant 3$. Таким образом, если $a = 2$, то пятый член является образующей, а если $a \geqslant 3$, то он ДМ5 в силу шага 4. Остается рассмотреть четвертый член. Для этого рассмотрим

$$[a-1][1,1,1,b+c-1] \equiv [a,1,1,b+c-1] + [1,a,1,b+c-1] + \\ + [1,1,a,b+c-1] + [1,1,1,a+b+c-1].$$

Второй член снова либо образующая, либо является ДМ5 в силу шага 4, третий и четвертый члены являются образующими. Таким образом, $[a, 1, 1, b + c - 1]$ тоже является ДМ5 и данный шаг завершен.

Шаг 9. Слова вида $[a, b, c, 1]$, где $a, b, c \geqslant 2$, являются ДМ5. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим

$$[a-1, b-1, c-1][1, 1, 1, 1] \equiv [a, b, c, 1]+[a, b, 1, c]+[a, 1, b, c]+[1, a, b, c],$$

и заметив, что $[1, a, b, c]$ является образующей, применим шаги 7 и 8.

Шаг 10. Слова вида $[1, a, 1, c]$, где $a, c \geqslant 2$, являются ДМ5. Этот шаг дополняет результат шага 4. Однако шаг 4 в его исходном виде был использован для шага 8, который, в свою очередь, будет использован здесь. Если $a, c \geqslant 3$, то получаем шаг 4, а если $a \leqslant c$, то это — образующая. Таким образом, остается рассмотреть только случай $[1, a, 1, 2]$, $a \geqslant 3$. Имеем

$$[1][1, a-1, 1, 2] \equiv [2, a-1, 1, 2]+[1, a, 1, 2]+[1, a-1, 2, 2]+[1, a-1, 1, 3].$$

Первый член в правой части является ДМ5 в силу шага 8; второй — это искомый; четвертый является образующей, если $a \leqslant 4$, и он является ДМ5 в силу шага 4, если $a \geqslant 4$.

Шаг 11. Слова вида $[1, a, b, 1]$, где $a, b \geqslant 2$, являются ДМ5. Этот шаг дополняет результат шага 7. Используя результат шага 7, остается рассмотреть слова вида $[1, a, 2, 1], a \geqslant 2$. С этой целью рассмотрим

$$[1][1, a-1, 2, 1] \equiv [2, a-1, 2, 1]+[1, a, 2, 1]+[1, a-1, 3, 1]+[1, a-1, 2, 2].$$

Вначале пусть $a \geqslant 3$. Тогда первый член является ДМ5 в силу шага 9; второй член — это искомый; третий член является ДМ5 в силу шага 7; четвертый член — это образующая. Тем самым этот подслучай доказан. Для $a = 2$ рассмотрим

$$\begin{aligned}[1][1, 2, 2] = [2, 2, 2] + [1, 3, 2] + [1, 2, 3] +\\ + 2[1, 1, 2, 2] + [1, 2, 1, 2] + [1, 2, 2, 1].\end{aligned}$$

Последний член в правой части — это искомый, первый симметричен, а все остальные представляют собой образующие, что завершает рассмотрение данного подслучая.

Шаг 12. Слова вида $[3, b, c]$, где $b, c \geqslant 3$, являются ДМ5. Для этого случая рассмотрим

$$\begin{gathered}[1, 1, 1][2, b-1, c-1] \equiv\\ \equiv [3, b, c] + [1, 3, b, c-1] + [3, 1, b, c-1] + [3, b, 1, c-1] +\\ +[3, b, c-1, 1] + [3, 1, b-1, c] + [1, 3, b-1, c] + [1, 2, b, c] +\\ +[3, b-1, 1, c] + [3, b-1, c, 1] + [2, b, c, 1] + [2, b, 1, c] + [2, 1, b, c]\end{gathered}$$

и заметим, что все члены в правой части, кроме искомого, являются ДМ5 в силу шагов 7, 8 и 9.

Шаг 13. Слова вида $[1, 1, a, 1]$, где $a \geqslant 5$, являются ДМ5. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим

$$[2][1, 1, a-2, 1] \equiv [3, 1, a-2, 1]+[1, 3, a-2, 1]+[1, 1, a, 1]+[1, 1, a-2, 3]$$

и

$$\begin{aligned}[1, 1][2, 1, a-3, 1] \equiv{}& [3, 2, a-3, 1] + [3, 1, a-2, 1] + [3, 1, a-3, 2] + \\ &+ [2, 2, a-2, 1] + [2, 2, a-3, 2] + [2, 1, a-2, 2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1, 1][1, 2, a-3, 1] \equiv{}& [2, 3, a-3, 1] + [2, 2, a-2, 1] + [2, 2, a-3, 2] + \\ &+ [1, 3, a-2, 1] + [1, 3, a-3, 2] + [1, 2, a-2, 2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1, 1][1, 1, a-3, 2] \equiv{}& [2, 2, a-3, 2] + [2, 1, a-2, 2] + [2, 1, a-3, 3] + \\ &+ [1, 2, a-2, 2] + [1, 2, a-3, 3] + [1, 1, a-2, 3].\end{aligned}$$

Комбинируя эти выражения и используя шаги 1, 7, 8 и 9, получаем желаемый результат.

Шаг 14. Слова вида $[1, 1, a, 1]$, где $a \geqslant 2$, являются ДМ5. Для $a \geqslant 5$ — это шаг 13. Поэтому пусть $a \leqslant 4$. Рассмотрим

$$[1][1, 1, a] = [2, 1, a] + [1, 2, a] + [1, 1, a+1] + 3[1, 1, 1, a] + [1, 1, a, 1]$$

и

$$[2][1, a] = [3, a] + [1, 2+a] + [2, 1, a] + [1, 2, a] + [1, a, 2].$$

Для рассматриваемых значений a первый член в правой части второго уравнения является ДМ5, а второй, четвертый и пятый являются образующими. Таким образом, $[2, 1, a]$ является ДМ5 для $a \leqslant 4$. Поэтому, из первого уравнения этого шага получаем, что $[1, 1, a, 1]$ является ДМ5 также и для этих значений a, и, следовательно, оно таково при всех значениях a.

Шаг 15. Слова вида $[2, 1, a]$, где $a \geqslant 2$, являются ДМ5. Это следует из шага 14, если использовать первое уравнение шага 14.

Шаг 16. Слова вида $[2, a, 1]$, где $a \geqslant 2$, являются ДМ5. Рассмотрим

$$[2][1, a] = [3, a] + [1, a+2] + [2, 1, a] + [1, 2, a] + [1, a, 2]$$

и

$$[1][2, a] = [3, a] + [2, a+1] + [1, 2, a] + [2, 1, a] + [2, a, 1].$$

Из первого из этих двух уравнений имеем, что $[3, a]$ является ДМ5; тогда, используя шаг 3, из второго уравнения получаем требуемый результат.

Шаг 17. Слова вида $[1, a, 1, 1]$, где $a \geqslant 2$, являются ДМ5. Рассмотрим

$$[1,1][1,a] = [2,a+1] + [2,1,a] + [2,a,1] + [1,2,a] + [1,a+1,1] + \\ + 2[1,1,a+1] + 3[1,1,1,a] + 2[1,1,a,1] + [1,a,1,1].$$

Используя шаги 3, 14, 15 и 16, получим желаемый результат, если удастся показать, что $[1, a+1, 1]$ является ДМ5. Это следует непосредственно из соотношения

$$[1][1,a+1] = [2,a+1] + [1,a+2] + 2[1,1,a+1] + [1,a+1,1]$$

и из шага 3.

Шаг 18. Все слова длины 4 являются ДМ5. Это доказывается с помощью индукции по первому элементу слова $[a, b, c, d]$ с использованием формулы

$$[1][a-1,b,c,d] \equiv [a,b,c,d] + [a-1,b+1,c,d] + \\ + [a-1,b,c+1,d] + [a-1,b,c,d+1].$$

Таким образом, остается рассмотреть лишь все слова вида $[1, a, b, c]$. Если $a, b, c \geqslant 2$, то это — образующая. Если в точности одно из a, b, c равно 1, то имеем один из случаев:

$$[1,1,b,c], b,c \geqslant 2; \ [1,a,1,c], a,c \geqslant 2; \ [1,a,b,1], a,b \geqslant 2.$$

Первое из этих слов является образующей, второе и третье рассмотрены в шагах 10 и 11 соответственно. Если в точности два из a, b, c равны 1, то имеем один из следующих случаев:

$$[1,1,1,c], c \geqslant 2; \ [1,1,b,1], b \geqslant 2; \ [1,a,1,1], a \geqslant 2.$$

Первое из этих слов является образующей, второе и третье рассмотрены в шагах 14 и 17.

Тем самым доказано, что образующих, указанных в гипотезе, достаточно по модулю длины 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chen K. T., Fox R. H., Lyndon R. C.* Free differential calculus. IV. The quotient groups of the lower central series// Ann. Math. — 1958. — *68*, № 1. — С. 81–95 (РЖМат, 1961, 5А205)
2. *Ditters E. J.* Curves and formal (co)groups// Invent. math. — 1972. — *17*, № 1. — С. 1–20 (РЖМат, 1973, 4А548)
3. *Ditters E. J.* Groupes formels. Lecture notes// Orsay: Univ. de Paris XI, 1974
4. *Gelfand I. M., Krob D., Lascoux A., Leclerc B., Retakh V. S., Thibon J.-I.* Noncommutative symmetric functions// Adv. Math. — 1995. — *112*. — С. 218–348

5. *Gessel I. M.* Multipartite P-partitions and inner product of skew Schur functions// In: Contemp. Math. — 1984. — *34.* — C. 289–301 (РЖМат, 1985, 10B641)
6. *Gessel I. M., Reutenauer C.* Counting permutations with given cycle-structure and descent set// J. Combin. Theory. A. — 1993. — *64.* — C. 189–215
7. *Hazewinkel M.* Formal groups and applications. — Acad. Press, 1978
8. *Hazewinkel M.* The Leibniz–Hopf algebra and Lyndon words// Prepr./ CWI, Amsterdam, 1996
9. *Hazewinkel M.* Leibniz–Hopf algebra// In: Encyclopaedia of Mathematics. Supp. I, KAP, 1997. — C. 349–350
10. *Hazewinkel M.* The simplest generalized overlapping shuffle algebra// Prepr./ CWI, 1998
11. *Knutson D.* λ-rings and the representation theory of the symmetric group. — Berlin — New York: Springer Verlag, 1973. — 203 c. (РЖМат, 1974, 5A274K)
12. *Lothaire M.* (ed). Combinatorics on words// Addison–Wesley, 1983
13. *Malvenuto C., Reutenauer C.* Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra// J. Algebra. — 1994. — *177.* — C. 967–982
14. *Reutenauer C.* Free Lee algebras. — Oxford Univ. Press, 1993
15. *Scholtens A.C.J.* S-typical curves in non-commutative hopf algebras// Thesis/ Free Univ., Amsterdam, 1996
16. *Solomon L.* A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group// J. Algebra. — 1976. — *41*, № 2. — C. 255–268 (РЖМат, 1977, 5A194)

CENTRUM VOOR WISKUNDE
P. O. BOX 4079
1009 A. B. AMSTERDAM
THE NETHERLANDS

УДК 512.544.42

VII. ВНУТРЕННЯЯ АМЕНАБЕЛЬНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ГРУПП КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПРЯМОЙ

Туллио Г. Чеккерини-Зилберштейн, Фабио Скаработти

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

Следуя Брину и Сквайеру [3], обозначим через $PLF(R)$ группу гомеоморфизмов действительной прямой R, сохраняющих ориентацию и являющихся кусочно-линейными относительно *конечного* разбиения прямой R (гомеоморфизм $f : R \longrightarrow R$ кусочно-линеен, если существует такое конечное подмножество $B(f)$ прямой R, что f обладает постоянной положительной производной на каждой связной компоненте множества $R \setminus B(f)$).

Брин и Сквайер доказали много интересных утверждений об этой группе: они нашли представления группы $PLF(R)$ и некоторых ее подгрупп, доказали, что $PLF(R)$ не содержит свободных неабелевых подгрупп и не удовлетворяет тождествам. Кроме того, они рассмотрели указанные ниже подгруппы группы $PLF(R)$ (где $\alpha \in R$, K — мультипликативная подгруппа

Поддержано грантом FNSRS № 20-050575.97 и CNR–GNAFA.
Авторизованный перевод на русский язык А. А. Туганбаева.

в R_+, Λ — аддитивная подгруппа в R с условием $k\lambda \in \Lambda$ для всех $k \in K$ и $\lambda \in \Lambda$, $K(p) = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$ $(p > 1,\ p \in \mathbb{Z})$, $\Lambda(p) = \{\frac{q}{p^n} : q \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\})$ $(p > 1,\ p \in \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
&PLF_+(R) = \{f \in PLF(R) \mid f \text{ тождественен возле } -\infty\},\\
&PLF_\alpha(R) = \{f \in PLF(R) \mid f(x) = x \text{ для всех } x \leqslant \alpha\},\\
&PLF^K(R) = \{f \in PLF(R) \mid f'(x) \in K\} \text{ для всех } x \notin B(f),\\
&PLF^K_\Lambda(R) = \{f \in PLF^K(R) \mid B(f) \subset \Lambda\},\\
&G(p) = PLF_0(R) \cap PLF^{K(p)}_{\Lambda(p)}(R).
\end{aligned}$$

Кроме того, они доказали, что $G(p)$ — конечно представимая группа ([3, теорема 2.9]). В частности, при $p = 2$ группа $G(2)$ изоморфна группе Ричарда Томпсона

$$F =< A, B : [AB^{-1}, A^{-1}BA], [AB^{-1}, A^{-2}BA^2] > .$$

Эта группа была открыта Р. Томпсоном в 1965 и является сейчас популярной, благодаря трудной задаче: является ли эта группа аменабельной. О важности этой задачи и других вопросах говорится в интересном обзоре [4]. Напомним, что группа G называется *аменабельной* ([10], [11]), если она допускает конечно аддитивную лево-инвариантную вероятностную меру (т.е. такую функцию $\mu : \mathcal{P}(G) \longrightarrow [0,1]$, что $\mu(G) = 1$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых подмножеств $A, B \subset G$ с пустым пересечением, $\mu(gA) = \mu(A)$ для всех $g \in G$ и $A \subset G$).

Понятие *внутренней аменабельности* было введено Е.Г. Эффросом в 1975 году в операторно-алгебраическом контексте ([7]); оно является вариацией понятия аменабельности, при которой группа действует на себе сопряжениями, а не левым умножением. Иными словами, группа G называется *внутренне аменабельной* (как дискретная группа), если существует такая функция $\mu : \mathcal{P}(G) \longrightarrow [0,1]$, что $\mu(G) = 1$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ для любых не пересекающихся подмножеств A, B из G, $\mu(g^{-1}Ag) = \mu(A)$ для всех $g \in G$ и $A \subset G$, причем $\mu(\{1\}) < 1$ для исключения тривиального случая (последнее равносильно равенству $\mu(\{1\}) = 0$). Примеры и некоторые характеризации внутренне аменабельных групп приведены в [2]. Упомянем, что класс всех аменабельных групп строго содержится в классе внутренне аменабельных групп.

Ниже приведен вариант теоремы об альтернативе Тарского для случая внутренней аменабельности (см. [2], [6], [11]).

Теорема (Тарский). *Группа G не является аменабельной тогда и только тогда, когда существует* внутреннее парадоксальное разложение *группы G, а именно: существуют подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_m$ множества $G \setminus \{1\}$ и* *элементы* $g_1, g_2, \dots, g_n$, $h_1, h_2, \dots, h_m$ *из* G *такие, что*

$$\begin{aligned} G\setminus\{1\} &= A_1 \coprod A_2 \coprod \cdots \coprod A_n \coprod B_1 \coprod B_2 \coprod \cdots \coprod B_m = \\ &= g_1^{-1}A_1g_1 \coprod g_2^{-1}A_2g_2 \coprod \cdots \coprod g_n^{-1}A_ng_n = \\ &= h_1^{-1}B_1h_1 \coprod h_2^{-1}B_2h_2 \coprod \cdots \coprod h_m^{-1}B_mh_m, \end{aligned}$$

где $\coprod$ *обозначает дизъюнктное объединение.*

Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема. *Группа* $PLF(R)$ *и все ее указанные выше подгруппы являются внутренне аменабельными как дискретные группы.*

В частности, получаем еще одно доказательство внутренней аменабельности группы Ричарда Томпсона F, что ранее было доказано другими методами в работе Жолиссэ [8].

Следствие (Жолиссэ). *Группа Ричарда Томпсона* F *является внутренне аменабельной.*

§ 2. Доказательство

Сначала нам потребуется напомнить две леммы.

Лемма 1 ([3, 2.14]). *Если* $f, g \in PLF(R)$, *то коммутатор* $[f,g]$ *имеет тангенс угла наклона* 1 *возле* $-\infty$ *и* $+\infty$. *Если* $f, g \in PLF(R)$ *имеют тангенс угла наклона* 1 *возле* $-\infty$ *и* $+\infty$, *то носитель* $s(h) := \overline{\{x \in R : h(x) \neq x\}}$ *элемента* $h := [f,h]$ *компактен.*

Коммутатор $PLF'(R)$ группы $PLF(R)$ состоит в точности из тех элементов группы $PLF(R)$, которые имеют тангенс угла наклона 1 возле $-\infty$ и $+\infty$, а второй коммутатор $PLF''(R)$ состоит из тех элементов группы $PLF(R)$, которые равны единице возле $-\infty$ и $+\infty$ (т.е. имеют компактные носители). Кроме того, имеют место точные последовательности:

$$\begin{gathered} 1 \longrightarrow PLF''(R) \longrightarrow PLF'(R) \longrightarrow R\times R \longrightarrow 1, \\ 1 \longrightarrow PLF'(R) \longrightarrow PLF(R) \longrightarrow R\times R \longrightarrow 1. \end{gathered}$$

Лемма 2 ([2, следствие 2, (iv)]). *Допустим, что существует точная последовательность*

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1,$$

где группа N *внутренне аменабельна и* H *аменабельна. Тогда* G *внутренне аменабельна.*

Доказательство. Пусть $G := PLF(R)$. Так как $R \times R$ аменабельна, то по леммам 1 и 2 достаточно доказать, что второй коммутатор G'' является внутренне аменабельной группой. Допустим противное. Пусть

$$\left.\begin{aligned} G'' \setminus \{1\} &= A_1 \coprod A_2 \coprod \cdots \coprod A_n \coprod B_1 \coprod B_2 \coprod \cdots \coprod B_m = \\ &= g_1^{-1} A_1 g_1 \coprod g_2^{-1} A_2 g_2 \coprod \cdots \coprod g_n^{-1} A_n g_n = \\ &= h_1^{-1} B_1 h_1 \coprod h_2^{-1} B_2 h_2 \coprod \cdots \coprod h_m^{-1} B_m h_m \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

— внутреннее парадоксальное разложение группы G''. Так как все g_i и h_j имеют компактные носители, то существует такое $M > 0$, что g_i и h_j равны единице вне $[-M, M]$. Обозначим $V = \{v \in G'' : s(v) \subset (-\infty, -M]\}$ и заметим, что V нетривиально (на самом деле, V содержит изоморфную копию G''). Если $v \in V$, то

$$g_i^{-1} v g_i = v = h_j^{-1} v h_j, \tag{2}$$

следовательно,

$$g_i^{-1} V g_i = V = h_j^{-1} V h_j. \tag{3}$$

Положим $A_i' := A_i \cap V$ и $B_j' = B_j \cap V$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(g_i^{-1} A_i g_i\right) \cap V &=_{(3)} \left(g_i^{-1} A_i g_i\right) \cap \left(g_i^{-1} V g_i\right) = \\ &= g_i^{-1} \left(A_i \cap V\right) g_i =_{(2)} A_i \cap V = A_i' \end{aligned}$$

и аналогично

$$\left(h_j^{-1} B_j h_j\right) \cap V = B_j'.$$

Беря пересечения подмножеств из (1) с V, получаем

$$\begin{aligned} V \setminus \{1\} &= A_1' \coprod A_2' \coprod \cdots \coprod A_n' \coprod B_1' \coprod B_2' \coprod \cdots \coprod B_m = \\ &= A_1' \coprod A_2' \coprod \cdots \coprod A_n' = \\ &= B_1' \coprod B_2' \coprod \cdots \coprod B_m', \end{aligned}$$

что приводит к противоречию. □

То же самое доказательство (с очевидными изменениями) проходит для других групп, например для группы Р. Томпсона F (см. [5]).

Замечание 1. Пьер де ла Харп спросил после прочтения предварительной версии данной заметки, существуют ли подгруппы группы $PLF(R)$, *не* являющиеся внутренне аменабельными. Полагая, что все такие подгруппы внутренне аменабельны, мы не можем распространить предыдущие рассуждения на все подгруппы группы $PLF(R)$. Тем не менее, приведем ниже следующие соображения.

Пусть G — подгруппа группы $PLF(R)$. Положим $\mu(G) = \inf_{g\in G}\{\inf s(g)\}$ и $M(G) = \sup_{g\in G}\{\sup s(g)\}$. Скажем, что G *слабо* (*сильно*) *фрактальна*, если для любых $a < b \in [\mu(G), M(G)]$ существует такое $g \in G\setminus\{1\}$, что $s(g) \subseteq [a,b]$ (существует такая подгруппа $\hat{G} \leqslant G$, что $\hat{G}$ изоморфна G и $s(g) \subseteq [a,b]$ для всех $g \in \hat{G}$). Тогда можно повторить рассуждения из доказательства теоремы и получить, что каждая слабо фрактальная (и, следовательно, каждая сильно фрактальная) подгруппа группы $PLF(R)$ является внутренне аменабельной.

Замечание 2. Напомним, что счетная группа G называется ICC-группой (*группой с бесконечными классами сопряженности*), если все ее нетривиальные классы сопряженности бесконечны, и что алгебра фон Неймана $M := L(G)$, ассоциированная с левым регулярным представлением ICC-группы G является II_1-*фактором*. Заметим, что если K и L счетны (например, если $K \leqslant Q_+$ и $\Lambda \leqslant Q$), то соответствующая группа $PLF_\Lambda^K(R)$ счетна. В этом случае, используя приведенные выше геометрические методы и теорему В из [1], можно показать, что II_1-фактор M, ассоциированный с $PLF_\Lambda^K(R)$, является фактором *МакДаффа*, т.е. является стабильным относительно тензорного умножения на гиперконечный II_1-фактор $\mathcal{R}$: $M \cong M \otimes \mathcal{R}$ (это свойство строго сильнее, чем *свойство* Г Маррея и фон Неймана, которое влечет свойство внутренней аменабельности [2], [6]). Для группы Ричарда Томпсона F этот и другие факты были доказаны Жолиссэ в [9].

Мы благодарны П. Жолиссэ и В. Сергиеску за плодотворные дискуссии, а также А. Валету и П. де ла Харпу за ряд предложений и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bédos E.* On actions of amenable groups on II_1-factors// J. Funct. Anal. — 1990. — *91*, № 2. — С. 404–414 (РЖМат, 1991, 2Б979)
2. *Bédos E., de la Harpe P.* Moyennabilité intérieure des groupes: définitions et exemples// Enseign. math. — 1986. — *32*, № 1–2. — С. 139–157 (РЖМат, 1987, 4Б1074)
3. *Brin M.G., Squier C.C* Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line// Invent. math. — 1985. — *79*. — С. 485–498

4. *Cannon J.F., Floyd W.J., Parry W.R.* Introductory notes on Richard Thompson's groups// Enseign. math. — 1996. — *42*. — С. 215–256 (РЖМат, 1998, 1А203)
5. *Ceccherini-Silberstein T.G.* Around amenability, these proceedings
6. *Ceccherini-Silberstein T.G., Grigorchuk R.I., de la Harpe P.* Amenability and paradoxical decompositions for pseudogroups and for discrete metric spaces// Тр. Мат. ин-та РАН (to appear)
7. *Effros E.G.* Property Γ and inner amenability// Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — *47*, № 2. — С. 483–486 (РЖМат, 1975, 12Б940)
8. *Jolissaint P.* Moyennabilité intérieure du groupe *F* de Thompson// C. r. Acad. sci. Sér. 1. — 1997. — *325*, № 1. — С. 61–64 (РЖМат, 1998, 4А144)
9. *Jolissaint P.* Central sequences in the factor associated with Thompson's group *F*// Ann. Inst. Fourier (to appear)
10. *von Neumann J.* Zur allgemeinen Theorie des Masses// Fundam. math. — 1929. — *13*. — С. 73–116
11. *Wagon S.* The Banach-Tarski paradox. — Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1985

Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi del Sannio
Corco Garibaldi, 82100 Benevento
Italy

Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Via Scarpa 16, I-00161 Roma
Italy

УДК 512+515.1+517.98+519.1

VIII. ВОКРУГ АМЕНАБЕЛЬНОСТИ

Туллио Г. Чеккерини-Зилберштейн

СОДЕРЖАНИЕ

Поддержано грантом FNSRS № 20-050575.97 и CNR–GNAFA.
Авторизованный перевод на русский язык А. А. Туганбаева.

§ 1. Введение

Целью данной статьи является обзор различных аспектов аменабельности и неаменабельности дискретных групп и более общих дискретных структур. Представленные здесь результаты были получены в [11]–[15].

Во втором параграфе мы напомним основные определения аменабельности и парадоксальных разложений в случаях групп и динамических систем. Напомним также приведенное в [12] понятие числа Тарского, которое является инвариантом, характеризующим сложность возможных парадоксальных разложений группы или динамической системы; напомним теорему Йонссона, утверждающую, что число Тарского группы G равно 4 тогда и только тогда, когда G содержит свободную подгруппу F_2, и приведем другое доказательство этого результата (см. [12]). Кроме того, приводятся некоторые свойства этого инварианта, а также доказательства, опущенные в [12]. Напомним также понятия элементарной аменабельной группы и класса NF групп без свободных подгрупп. Затем обсуждается так называемая проблема Дэя и дается краткое знакомство с группой Ричарда Томпсона F.

В § 3 обсужаются аменабельность и парадоксальные разложения дискретных метрических пространств (см. [12]) с особым упором на метрические аспекты конечно порожденных групп или графов.

В § 4 обсуждаются глубокие связи между теоремой Кантора — Бернштейна и теоремой об альтернативе Тарского. В частности, представлены два варианта альтернативы Тарского для случая эргодической теории (теорема Хопфа) и для операторных алгебр (теорема Маррея и фон Неймана о классификации факторов).

В § 5 обсуждаются некоторые функционально-аналитические понятия: спектральный радиус простого случайного блуждания на конечно порожденной группе (или на регулярном графе), ко-рост, изопериметрическая константа. В § 6 указана связь с аменабельностью и неаменабельностью (критерии Фёлнера, Кестена и Григорчука) и приведено общее утверждение (из [12]) для дискретных метрических пространств с несколькими эквивалентными условиями неаменабельности.

В § 7 результаты предыдущих разделов применяются для получения некоторых оценок числа Тарского τ свободных групп Бернсайда $B(m,n)$, где $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 665$ — нечетное. В [12] и [13] получена оценка $6 \leqslant \tau(B(m,n)) \leqslant 14$.

В § 8 описано, как фелнеровская характеризация аменабельности может быть использована в теории клеточных автоматов для получения распространения теорем Мура и Майхилла на аменабельные группы. В этих теоремах (из [14]) утверждается, что для любого клеточного автомата на аменабельной группе существование так называемых образов райского сада равносильно существованию двух взаимно стираемых образов.

В § 9 разновидность альтернативы Тарского используется для получения другого, более комбинаторного, доказательства (см. [15]) внутренней аменабельности группы Ричарда Томпсона F, что было ранее доказано Жолиссэ.

§ 2. Аменабельность и парадоксальные разложения

Понятие *аменабельности*, по существу принадлежащее фон Нейману ([36]), играет фундаментальную роль в функциональном и гармоническом анализе, а также в эргодической теории и различных других областях современной математики.

2.1. Определения. В данной статье мы будем иметь дело только с дискретными структурами; понятие аменабельности в более общей ситуации рассматривалось в монографиях [23], [38] и [40] (см. также [12]).

Определение 2.1.1. Дискретная группа G называется *аменабельной*, если она допускает *G-инвариантную вероятностную меру*, т.е. такое отображение $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$, определенное на множестве $\mathcal{P}(G)$ всех подмножеств из G, что:

$$\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B), \quad A, B \subseteq G \quad \text{(конечная аддитивность)};$$

$$\mu(gA) = \mu(A), \quad g \in G, A \subseteq G \quad \text{(G-инвариантность)};$$

$$\mu(G) = 1 \quad \text{(нормализация)},$$

где $\coprod$ обозначает дизъюнктное объединение (тем самым предполагается, что $A \cap B = \varnothing$) и $gA = \{ga : a \in A\}$ при $g \in G$ и $A \subseteq G$.

Пример 2.1.2. *Конечная* группа G является аменабельной. G-инвариантная вероятностная мера задается с помощью нормализованной подсчетной меры:

$$\mu(A) = \frac{|A|}{|G|}.$$

Другие примеры аменабельных групп приведены, например, в п. 2.3 и следствии 6.3.2.

Наиболее важным примером *неаменабельной* группы является *свободная группа ранга* 2, что было отмечено самим фон Нейманом [36].

Пример 2.1.3. Пусть F_2 — свободная группа ранга 2 со свободными образующими a и b. Тогда F_2 состоит из *сокращенных* слов в алфавите $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$, единичным элементом 1 является пустое слово, а произведение двух элементов w_1 и w_2 определяется как результат сокращения составного слова $w_1 w_2$. Рассмотрим следующие подмножества в F_2:

A — множество сокращенных слов, начинающихся с a,
A^- — множество сокращенных слов, начинающихся с a^{-1},
$B = \{1, b^{-1}, b^{-2}, \dots\} \coprod$ множество сокращенных слов, начинающихся с b,
B^- — множество сокращенных слов $\neq b^{-n}$, начинающихся с b^{-1}.

Тогда

$$\mathbf{F}_2 = A \coprod A^- \coprod B \coprod B^-. \tag{1}$$

Кроме того,

$$\mathbf{F}_2 = A \coprod aA^- = B \coprod bB^-. \tag{2}$$

Следовательно, F_2 не допускает G-инвариантной меры. Действительно, если бы такая мера μ существовала, то

$$\begin{aligned} 1 = \mu(F_2) &= \mu(A \coprod A^- \coprod B \coprod B^-) = \\ &= \mu(A) + \mu(A^-) + \mu(B) + \mu(B^-) = \\ &= \mu(A) + \mu(aA^-) + \mu(B) + \mu(bB^-) = \\ &= \mu(A \coprod aA^-) + \mu(B \coprod bB^-) = \\ &= \mu(F_2) + \mu(F_2) = 1 + 1 = \\ &= 2, \end{aligned}$$

и получаем противоречие.

Динамической системой называется тройка (G, X, α), где G — группа, X — пространство и $\alpha : G \ni g \longmapsto \alpha_g \in BT(X)$ — действие группы G *биективными преобразованиями пространства* X.

В дальнейшем будем рассматривать только *дискретные* динамические системы, т.е. дискретные группы и дискретные пространства.

Определение 2.1.4. Динамическая система (G, X, α) называется *аменабельной*, если пространство X допускает α-инвариантную вероятностную меру, т.е. такое отображение $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1]$, что:

(i) $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$, $A, B \subseteq X$ (конечная аддитивность);

(ii) $\mu(\alpha_g(A)) = \mu(A)$, $g \in G, A \subseteq X$ (α-инвариантность);

(iii) $\mu(X) = 1$ (нормальзация).

Если в качестве пространства X взята сама группа G и действие λ задается *левыми сдвигами* (т.е. $\lambda_g(h) = gh$), то ясно что аменабельность группы G равносильна аменабельности динамической системы (G, G, λ). В таком случае для $g, h \in G$ и $A \subseteq G$ вместо $\lambda_g(h)$ и $\lambda_g(A)$ будем писать gh и gA соответственно.

Опишем ситуацию примера 2.1.3.

Определение 2.1.5. Говорят, что динамическая система (G, X, α) *парадоксальна* или, эквивалентно, X допускает *α-парадоксальное разложение*, если существуют такие подмножества $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$ в X и элементы $g_1, g_2, \dots, g_n$, $h_1, h_2, \dots, h_m \in G$, что

$$X = \begin{cases} A_1 \coprod A_2 \coprod \cdots \coprod A_n \coprod B_1 \coprod B_2 \coprod \cdots \coprod B_m, \\ \alpha_{g_1}(A_1) \coprod \alpha_{g_2}(A_2) \coprod \cdots \coprod \alpha_{g_n}(A_n), \\ \alpha_{h_1}(B_1) \coprod \alpha_{h_2}(B_2) \coprod \cdots \coprod \alpha_{h_m}(B_m). \end{cases} \tag{3}$$

Если система (G, G, λ) парадоксальна, то группа G *парадоксальна*.

Ясно, что парадоксальная динамическая система не может быть аменабельной. Других препятствий для аменабельности не существует — это является содержанием следующей теоремы Тарского, характеризующей аменабельность в терминах отсутствия парадоксальных разложений.

Теорема 2.1.6 (альтернатива Тарского). *Пусть (G, X, α) — динамическая система. Тогда возможны ровно два следующих взаимно исключающих случая:*

(G, X, α) аменабельна;

X α-парадоксально.

Данная теорема была исходно доказана Тарским [39]. Другие доказательства приведены также в [28], [38], [40]. В последней работе, в частности, содержится более общее утверждение (включающее *псевдогруппы*), опирающееся, в основном, на теоремы Хана — Банаха, Кантора — Бернштейна и Кёнига. В [12] мы привели другое доказательство, основывающееся на *условии Фелнера для псевдогрупп* (см. § 6) и теореме Холла — Радо о соответствиях (играющая здесь роль теоремы Кёнига). В § 6 приведено общее утверждение, использующее псевдогруппу ограниченных возмущений единицы дискретного метрического пространства (соответствующие определения см. в § 3).

2.2. Число Тарского.

Определение 2.2.1. Число $\tau = n + m$, равное числу *частей*, входящих в парадоксальное разложение (3), называется *сложностью* или *числом Тарского* этого парадоксального разложения; наименьшее из таких чисел для всех возможных α-парадоксальных разложений пространства X называется *числом Тарского* системы (G, X, α) и обозначается через $\tau(G, X, \alpha)$. Если $X = G$ и α — действие левыми сдвигами, то это число обозначается через $\tau(G)$. Если парадоксальных разложений не существует (т.е. динамическая система (группа) является аменабельной (теорема 2.1.6)), то $\tau(G, X, \alpha) = \infty$ ($\tau(G) = \infty$).

Из определения ясно, что число Тарского является целым числом $\geqslant 4$. В примере 2.1.3 указано *парадоксальное разложение* свободной группы F_2, использующее только 4 части. Поэтому $\tau(F_2) = 4$.

Предложение 2.2.2. *Пусть H — подгруппа (факторгруппа) группы G. Если H парадоксальна, то G тоже парадоксальна и $\tau(G) \leqslant \tau(H)$.*

Доказательство. Пусть $H = A_1 \coprod \cdots \coprod A_n \coprod B_1 \coprod \cdots \coprod B_m = g_1A_1 \coprod \cdots \coprod g_nA_n = h_1B_1 \coprod \cdots \coprod h_mB_m$ — парадоксальное разложение подгруппы H, использующее $\tau(H) = n + m$ частей.

Если H — подгруппа в G, то обозначим через $\{t_k\}_{k \in K}$ множество представителей левых смежных классов по H в G. Тогда $G = \coprod_{k \in K} Ht_k$. Положим $\tilde{A}_i = \coprod_{k \in K} A_it_k$ и $\tilde{B}_j = \coprod_{k \in K} B_jt_k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Тогда $G = \tilde{A}_1 \coprod \cdots \coprod \tilde{A}_n \coprod \tilde{B}_1 \coprod \cdots \coprod \tilde{B}_m = g_1\tilde{A}_1 \coprod \cdots \coprod g_n\tilde{A}_n = h_1\tilde{B}_1 \coprod \cdots \coprod h_m\tilde{B}_m$ — парадоксальное разложение группы G и $\tau(G) \leqslant n + m = \tau(H)$.

Теперь пусть $\pi : G \longrightarrow H$ — эпиморфизм на парадоксальную группу H. Обозначим через N ядро эпиморфизма π и выберем сечение $\phi : H \longrightarrow G$; таким образом, $\pi(\phi(h)) = h$ для $h \in H$. Каждый элемент g группы G единственным образом выражается в виде произведения $g = \phi(h)n$, где $h \in H$ и $n \in N$. В частности, $G = \phi(H)N$. Положим $\tilde{A}_i = \phi(A_i)N$ и $\tilde{B}_j = \phi(B_j)N$

$(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ и заметим, что $\phi(gA)N = \phi(g)\phi(A)N$ при $g \in H$ и $A \subseteq H$. Тогда имеем парадоксальное разложение $G = \tilde{A}_1 \coprod \cdots \coprod \tilde{A}_n \coprod \tilde{B}_1 \coprod \cdots \coprod \tilde{B}_m = \phi(g_1)\tilde{A}_1 \coprod \cdots \coprod \phi(g_n)\tilde{A}_n = \phi(h_1)\tilde{B}_1 \coprod \cdots \coprod \phi(h_m)\tilde{B}_m$ и $\tau(G) \leqslant n + m = \tau(H)$. □

Следствие 2.2.3. *Допустим, что группа G содержит свободную группу F_2. Тогда G парадоксальна и $\tau(G) = 4$.*

Верно утверждение, обратное к следствию 2.2.3: это неопубликованный результат Йонссона, студента Тарского (соответствующая ссылка приведена в разделе "Замечания", гл. 4 книги [40]). Здесь мы приводим другое доказательство (см. [12, предложение 20]), использующее лемму Клейна о настольном теннисе (см. [27]).

Теорема 2.2.4. *Пусть G — группа. Тогда $\tau(G) = 4$ тогда и только тогда, когда G содержит свободную подгруппу ранга 2.*

Доказательство. Допустим, что $\tau(G) = 4$ и

$$G = A_1 \coprod A_2 \coprod B_1 \coprod B_2 = g_1 A_1 \coprod g_2 A_2 = h_1 B_1 \coprod h_2 B_2$$

— парадоксальное разложение группы G, использующее 4 части. Положим $g = g_1^{-1} g_2$ и $h = h_1^{-1} h_2$. Тогда

$$G = A_1 \coprod A_2 \coprod B_1 \coprod B_2 = A_1 \coprod g A_2 = B_1 \coprod h B_2$$

и

$$\begin{aligned}
&A_1 = G \setminus gA_2 = gA_1 \textstyle\coprod gB_1 \coprod gB_2, \\
&A_1 \supset gA_1 \supset gA_2 \supset \ldots \supset g^{k-1}A_1 \supset g^k B_j \quad (k \geqslant 1, j = 1, 2), \\
&A_2 = G \setminus g^{-1}A_1 = g^{-1}A_2 \textstyle\coprod g^{-1}B_1 \coprod g^{-1}B_2, \\
&A_2 \supset g^{-1}A_1 \supset g^{-1}A_2 \supset \ldots \supset g^{-k+1}A_1 \supset g^{-k}B_j \\
&\quad (k \geqslant 1, j = 1, 2).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$g^k B_j \subseteq A_1 \cup A_2, \quad h^k A_j \subseteq B_1 \cup B_2$$

для всех ненулевых $k \in \mathbb{Z}$ $(j = 1, 2)$, причем по лемме Клейна g и h порождают свободную подгруппу ранга 2.

Обратное утверждение доказано в предыдущем следствии. □

Следующие ниже предложения также представляют некоторый интерес: в частности, 2.2.6 используется в § 8 для оценки числа Тарского групп Бернсайда.

Предложение 2.2.5. *Пусть G — парадоксальная группа. Тогда существует такая конечно порожденная подгруппа $H \leqslant G$, что $\tau(H) = \tau(G)$.*

Доказательство. Пусть $G = A_1 \coprod \cdots \coprod A_n \coprod B_1 \coprod \cdots \coprod B_m = g_1A_1 \coprod \cdots \coprod g_nA_n = h_1B_1 \coprod \cdots \coprod h_mB_m$ — парадоксальное разложение группы G, использующее $\tau(G) = n + m$ частей. Обозначим через $H :=< g_1, g_2, \dots, g_n, h_1, h_2, \dots, h_m >$ подгруппу, порожденную элементами, входящими в парадоксальное разложение. Тогда верно равенство $(g_iA_i) \cap H = g_i(A_i \cap H)$ и аналогичное равенство для h_j и B_j. Положим $A'_i = A_i \cap H$, $B'_j = B_j \cap H$. Тогда $H = A'_1 \coprod \cdots \coprod A'_n \coprod B'_1 \coprod \cdots \coprod B'_m = g_1A'_1 \coprod \cdots \coprod g_nA'_n = h_1B'_1 \coprod \cdots \coprod h_mB'_m$. Поэтому $\tau(H) \leqslant \tau(G)$. Обратное включение следует из предложения 2.2.2. □

Предложение 2.2.6. *Пусть G — периодическая группа. Тогда $\tau(G) \geqslant 6$.*

Доказательство. Покажем, что для любого $m \geqslant 2$ G не имеет парадоксальных разложений, состоящих из "$2 + m$" частей. Допустим противное. Пусть $G = A_1 \coprod A_2 \coprod B_1 \coprod \cdots \coprod B_m = g_1A_1 \coprod g_2A_2 = h_1B_1 \coprod \cdots \coprod h_mB_m$ — парадоксальное разложение группы G, использующее $2 + m$ частей. Если k — порядок элемента $g := g_1^{-1}g_2$, как в доказательстве теоремы 2.2.4, то

$$A_1 \supset gA_1 \supset gA_2 \supset \dots \supset g^{k-1}A_1 \supset g^kB_1 = B_1,$$

чего быть не может. □

2.3. Классы EG, AG и NF; проблема Дэя. Класс всех аменабельных групп содержит все:

(i) *подгруппы аменабельных групп*;
(ii) *факторгруппы аменабельных групп*;
(iii) *расширения аменабельных групп с помощью аменабельных*;
(iv) *прямые объединения аменабельных групп.*

Кроме того, *конечные* группы и *абелевы* группы являются аменабельными. М.Дэй ввел класс *элементарных* (*аменабельных*) *групп* (обозначаемый через EG) как наименьший класс, содержащий все конечные и все абелевы группы, и замкнутый относительно операций из (i) – (iv). Обозначим через AG класс всех аменабельных групп, через NF — класс всех групп без свободных подгрупп. Тогда верны следующие включения:

$$EG \subseteq AG \subseteq NF.$$

Долго оставалась открытой так называемая *проблема Дэя*: являются ли приведенные выше включения строгими. Заметим, что включение $G \in NF \setminus AG$ равносильно $5 \leqslant \tau(G) < \infty$.

Первый пример группы из $AG \setminus EG$ был найден Р.И. Григорчуком в работе [2]: это — знаменитая группа *промежуточного роста*, являющаяся решением проблемы Милнора [31] (понятие роста группы приведено в § 3). А.Ю. Ольшанский [6], используя методы короста (см. § 5), первый построил примеры группы из $NF \setminus AG$ (см. также [12], [13]). Другими примерами групп из $NF \setminus AG$ являются свободные группы Бернсайда $B(m,n)$ ранга $m \geqslant 2$ и экспоненты n (для доказательства неаменабельности таких групп С.И.Адян [1] снова использовал методы короста). Кроме того, существование других примеров следует из соображений М.Громова [25] о гиперболических группах и свойстве Каждана [39].

Группы из этих примеров являются конечно порожденными, но *не* конечно представимыми. Р.И.Григорчук [3], [4] использовал рекурсивное строение (см. [5]) определяющих соотношений своей группы промежуточного роста для построения HNN-расширения этой группы, которое является конечно представимой группой и принадлежит $AG \setminus EG$ (см. также замечание 12 из [12]). С другой стороны, не известны примеры конечно представимых групп из $NF \setminus AG$.

В конце п. 2.3 заметим, что в случае *линейных групп* классы AG и NF совпадают. Более точно: каждая подгруппа линейной группы либо является виртуально разрешимой (и поэтому аменабельной), либо содержит F_2; это — глубокий результат Дж. Титса (см., например, [27]). Аналогичная ситуация имеет место для *групп с одним соотношением* (см. [11], где, среди прочего, имеется алгоритм, который для группы, соответствующей данному представлению с одним соотношением, определяет, является ли эта группа аменабельной или нет).

2.4. Группа Ричарда Томпсона F. Группа Ричарда Томпсона F, определенная в 1965 г., использовалась для построения конечно представимых групп с неразрешимой проблемой слов. Позже группа F была переоткрыта специалистами по теории гомотопий в связи с исследованиями по идемпотентам гомотопий и теории когомологий для групп.

Лемма-определение 2.4.1 ([10]). *Пусть F — множество кусочно-линейных гомеоморфизмов интервала $[0,1]$, которые не дифференцируемы только в не более чем конечном числе двоичных рациональных чисел и таковы, что на интервалах дифференцируемости их производные являются степенями двойки. Тогда F — группа относительно композиции и допускает следующее представление:*

$$F = < A, B : [AB^{-1}, A^{-1}BA], [AB^{-1}, A^{-2}BA^2] > . \qquad (4)$$

Группа F не является элементарной аменабельной группой и не содержит свободную группу F_2 (см. [10]) (другими словами, $F \in NF \setminus EG$). Однако не известно, является ли F аменабельной группой. Эта проблема привлекла внимание многих исследователей. Заметим, что если $F \notin AG$, то F будет первым примером *конечно представимой* группы из $NF \setminus AG$. Группа F обладает слабой формой аменабельности: *внутренней аменабельностью* (см. § 9).

§ 3. Аменабельность и парадоксальные разложения для дискретных метрических пространств

3.1. Дискретные метрические пространства. Напомним, что метрическое пространство называется *дискретным*, если для всех $x \in X$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ мощность $|B(x,n)|$ шара радиуса n и центром x является конечной.

Определение 3.1.1. Пусть (X, d) — дискретное метрическое пространство. *Ограниченным возмущением единицы* называется отображение $\gamma : S \longrightarrow T$, где S и T — такие подмножества пространства X, что $\|\gamma\| = \sup_{x \in S} d(x, \gamma(x))$ — конечное число. Множества $\alpha(\gamma) := S$ и $\omega(\gamma) := T$ называются *областью* и *рангом* для γ соответственно. Обозначим через

$$W(X) = \{\gamma : S \longleftrightarrow T; S, T \subseteq X, \|\gamma\| < \infty\}$$

множество всех *биективных* ограниченных возмущений единицы метрического пространства (X, d).

Определение 3.1.2. Дискретное метрическое пространство (X, d) называется *аменабельным*, если на X существует *$W(X)$-инвариантная вероятностная мера*, т.е. отображение $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, 1]$ из 2.1.4, в котором условие (ii) заменено на условие (ii′):

$$\mu(\alpha(\gamma)) = \mu(\omega(\gamma)) \quad \text{для всех } \gamma \in W(X).$$

Пространство (X, d) называется *парадоксальным*, если существуют такие $\gamma_1, \gamma_2 \in W(X)$, что

$$X = \alpha(\gamma_1) = \alpha(\gamma_2) = \omega(\gamma_1) \coprod \omega(\gamma_2).$$

В следующем параграфе покажем, почему понятие аменабельного (парадоксального) метрического пространства является *естественным* обобщением понятия аменабельной (парадоксальной) группы.

3.2. Конечно порожденные группы и их рост. Напомним, что группа G называется *конечно порожденной*, если она обладает конечной системой образующих (т.е. существует такое конечное подмножество X группы G, что любой элемент $g \in G$ является произведением элементов из X и обратных к ним); в формульном виде:

$$g = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n},$$

где $x_i \in X$ и $\epsilon_i = \pm 1$. Число n, минимальное среди возможных в таких записях элемента g, назывется *длиной элемента* g относительно системы образующих X и обозначается через $\ell_X(g)$. Группа G превращается в метрическое пространство, если ввести функцию расстояния $d_X(x,y) = \ell_X(xy^{-1})$.

Функция $\gamma_X(n) = |\{g \in G : \ell_X(g) \leqslant n\}|$ называется *функцией роста* группы G относительно системы образующих X. Существует предел

$$\lambda_X = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma_X(n)} \geqslant 1,$$

который называется *скоростью роста* группы G относительно X. Говорят, что группа G имеет *экспоненциальный рост* (*субэкспоненциальный рост*), если $\lambda_X > 1$ ($\lambda_X = 1$) для некоторой конечной системы образующих X.

Замечание 3.2.1. Пусть X и Y — две конечные системы образующих группы G. Полагая $L = \max\{\ell_Y(x), \ell_X(y) : x \in X, y \in Y\}$, получаем $1/L \cdot \ell_Y(g) \leqslant \ell_X(g) \leqslant L \cdot \ell_Y(g)$ для всех $g \in G$. Поэтому две индуцированные метрики d_X и d_Y эквивалентны.

В частности, $\gamma_X(n) \leqslant \gamma_Y(Ln)$ и, аналогично, $\gamma_Y(n) \leqslant \gamma_X(Ln)$. Поэтому $\sqrt[L]{\lambda_X} \leqslant \lambda_Y \leqslant (\lambda_X)^L$. Это показывает, что для группы G свойство иметь экспоненциальный или субэкспоненциальный рост не зависит от выбора системы образующих.

Кроме того, метрические пространства (G, d_X) и (G, d_Y) допускают одинаковые ограниченные возмущения единицы, а именно: $W(G, d_X) = W(G, d_Y)$. Действительно, из изложенных выше соображений следует, что для отображения $\gamma : S \longrightarrow T$ неравенство $\|\gamma\|_X < \infty$ равносильно неравенству $\|\gamma\|_Y < \infty$.

Через $W(G)$ обозначается множество всех биективных ограниченных возмущений единицы группы G.

Определение 3.2.2. *Кусочным сдвигом* группы G называется отображение γ подмножества $S \subseteq G$ на подмножество $T \subseteq G$, для которого существуют такие элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ и разбиение области $S = \coprod_{i=1}^n S_i$, что $\gamma(x) = g_i x$ при $x \in S_i$. Множество всех биективных кусочных сдвигов группы G обозначим через $\mathrm{BPT}(G)$.

Лемма 3.2.3. *Пусть G — конечно порожденная группа. Тогда* $\mathrm{BPT}(G) = W(G)$. *Другими словами, каждый* (*биективный*) *кусочный сдвиг является* (*биективным*) *ограниченным возмущением единицы* (*и наоборот*).

Доказательство. Очевидно, что кусочный сдвиг γ является, как и в 3.2.2, ограниченным возмущением единицы. Действительно, используя указанные выше обозначения, для $x \in S_i$

получаем

$$d(x, \gamma(x)) = d(x, g_i x) = \ell(x(g_i x)^{-1}) = \ell(g_i)$$

и

$$\|\gamma\| = \max\{\ell(g_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\} < \infty.$$

С другой стороны, пусть $\gamma : S \longrightarrow T$ — ограниченное возмущение единицы и $K = \|\gamma\|$. Для каждого $i \in \{0, 1, \dots, K\}$ обозначим через $G_i = \{g_{i,1}, g_{i,2}, \dots, g_{i,n(i)}\}$ множество элементов группы G длины i. Если $x \in S$, то $d(\gamma(x), x) = \ell(\gamma(x)x^{-1}) = i$ для некоторого $0 \leqslant i \leqslant K$. В частности, существуют такие $1 \leqslant j \leqslant n(i)$, что $g_{i,j} = \gamma(x)x^{-1}$. Положим $S_{i,j} = \{x \in S : \gamma(x)x^{-1} = g_{i,j}\}$. Тогда $S = \coprod_{1 \leqslant i \leqslant K; 1 \leqslant j \leqslant n(i)} S_{i,j}$ и $\gamma(x) = g_{i,j}x$, если $x \in S_{i,j}$. Поэтому $\gamma \in \mathrm{BPT}(G)$. $\square$

3.3. Графы Кэли. С данной конечно порожденной группой G и ее системой образующих X естественно ассоциируется так называемый *граф Кэли* $\mathcal{G}_X(G)$, определяемый указанным ниже образом. Множеством вершин этого графа является группа G. Две вершины x и y соединяются ребром, если $xy^{-1} \in X$ (в другой терминологии x и y являются соседями); в этом случае напишем $x \sim y$. Рассматривая граф Кэли $(\mathcal{G}_X(G), d)$ в качестве метрического пространства с геодезическим расстоянием d, получаем пространство (G, d_X).

Пример 3.3.1. Граф Кэли $\mathcal{G}_X(F)$ свободной группы F ранга m относительно системы свободных образующих X изоморфен $2m$–регулярному дереву T_{2m}.

§ 4. Теорема Кантора — Бернштейна и альтернатива Тарского

В данном параграфе анализируется глубокая связь между теоремами типа теоремы Кантора — Бернштейна и некоторыми вариациями теоремы об альтернативе Тарского.

4.1. Эквиразложимость. Пусть (G, X, α) — динамическая система и A,B — два подножества в X. Говорят, что множество B является *G-доминирующим* для A, т.е. $A \preceq B$, если существуют разбиение $A = \coprod_{i=1}^n A_i$ и групповые элементы $g_1, \dots, g_n$ такие, что $\coprod_{i=1}^n g_i A_i \subseteq B$. В случае равенства, пишем $A \sim B$, а множества A и B называются *G-эквиразложимыми* (в терминологии фон Неймана — "(endlich) zerlegungsgleich"). Если $A \preceq B$ и $B \preceq A$, то теорема типа теоремы Кантора — Бернштейна утверждает, что A и B являются эквиразложимыми.

Понятие эквиразложимости является отношением эвивалентности. Поэтому α-инвариантная вероятностная мера на пространстве X является вероятностной мерой μ, совместимой с отношением эквивалентности $\sim$ (т.е. $A \sim B \Longrightarrow \mu(A) = \mu(B)$, $A, B \subseteq X$).

Теорема 4.1.1 (Хаусдорф — Банах — Тарский). *Динамическая (недискретная) система* $(\mathbb{R}^3, SO(3,\mathbb{R}), \alpha)$ *с естественным действием* α *является парадоксальной. В частности, любые два ограниченных подмножества* A *и* B *с непустой внутренностью являются* α*-эквиразложимыми.*

Доказательство опирается на то, что группа $SO(3,\mathbb{R},\alpha)$ содержит свободную группу F_2 (подробности доказательства см. в [38] или [40]).

Эта теорема может быть сформулирована в следующем парадоксальном виде (в этимологическом смысле слова "парадоксальный"):

> *шар радиуса* 1 *может быть разбит на конечное число частей, которые можно переместить как твердое тело, и они будут образовывать шар радиуса* 2 *или два шара радиуса* 1.

Слабым местом этого "парадокса" является то, что слово "из действительной жизни" перепутано с его геометрической моделью (см. удивительный комментарий в [21]).

Обсуждение эквиразложимости завершим приведенными ниже результатами из [7] и [40].

Два плоских многоугольника называются *эквиразложимыми*, если они могут быть разрезаны на конгруэнтные треугольники. Два плоских многоугольника называются *эквидополненными*, если они могут быть превращены в конгруэнтные добавлением конгруэнтных треугольников.

Теорема 4.1.2 (Бойаи — Джервин). *Два плоских многоугольника являются эквиразложимыми и эквидополненными тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую площадь.*

Возможным 3-мерным аналогом этой теоремы была третья проблема Гильберта, поставленная в 1900 году.

Проблема 4.1.3 (третья проблема Гильберта). *Верно ли, что два тетраэдра с одинаковыми основаниями и равными высотами можно расщепить на конгруэнтные тетраэдры и дополнить конгруэнтными тетраэдрами до двух многогранников, которые могут быть расщеплены на конгруэнтные тетраэдры?*

Эта проблема была отрицательно решена М. Дэном в 1900 и 1902 гг.; обоснование этих контрпримеров не вполне ясно. Нетрудную и элегантную модификацию этих контрпримеров можно найти в [7, гл. 7].

4.2. $W(X)$-эквивалентность. Аналогичным образом, пусть (X,d) — метрическое пространство, A,B — два подмножества в X. Говорят, что множество B является *G-доминирующим* для A, т.е. $A \preceq B$, если существует инъективное ограниченное возмущение единицы $\gamma : A \longrightarrow B$. Если γ является также сюръективным (т.е. $\gamma \in W(X)$ по 3.1.1), то A и B называются *неустойчиво эквивалентными*, т.е. $A \cong B$ (терминология введена в [19]). По теореме типа теоремы Кантора — Бернштейна $\preceq$ снова является отношением порядка и неустойчивая эквивалентность является отношением эквивалентности. Поэтому (X,d) является аменабельным метрическим пространством, если на X существует вероятностная мера, принимающая одинаковые значения на неустойчиво эквивалентных подмножествах (т.е. $A \cong B \Longrightarrow \mu(A) = \mu(B)$, $A, B \subseteq X$).

4.3. Конечное и бесконечное: альтернатива Галилея. Пусть X — произвольное множество. Если A и B — два подмножества в X и существует инъекция $\gamma : A \longrightarrow B$, то A имеет *меньшую мощность* чем B, и $|A| \leqslant |B|$. *Классическая* теорема Кантора — Бернштейна утверждает, что если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$, то существует биекция $\gamma' : A \longrightarrow B$. В этом случае A и B имеют одинаковую мощность и $|A| = |B|$.

Галилей первым заметил, что множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ может быть "парадоксально" разложено в такое дизъюнктное объединение (четных и нечетных чисел) $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \coprod \mathbb{N}_1$, что $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}_1|$.

Нетрудно показать, что для любого множества X такого, что $|\mathbb{N}| \leqslant |X|$, существует разложение $X = X_1 \coprod X_2$, для которого $|X| = |X_1| = |X_2|$. Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.3.1 (альтернатива Галилея). *Для любого множества X выполняется ровно одно из следующих условий:*

- *существует такое разложение $X = X_1 \coprod X_2$, что $|X| = |X_1| = |X_2|$;*

- *существует такая вероятностная мера $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1]$, что $\mu(A) = \mu(B)$, если $|A| = |B|$.*

Заметим, что первая ситуация имеет место тогда и только тогда, когда существует подмножество $A \neq X$ такое , что $|X| = |A|$ (X биективно *собственному* подмножеству) (т.е. согласно Кантору, X *бесконечно*).

Имеются другие ситуации, в которых теорема Кантора — Бернштейна играет важную роль и приводит к теоремам типа теоремы об альтернативе Тарского. Приведем только две из таких теорем: одну из эргодической теории, а другую — из теории операторных алгебр.

4.4. Альтернатива Хопфа. Пусть $T : X \longrightarrow X$ — эргодическое невырожденное преобразование вероятностного пространства $(X, \mathcal{B}, m)$ с неатомной мерой m. Кроме того, пусть $[[T]]$ — множество всех таких взаимно однозначных невырожденных преобразований $\phi : U \longrightarrow V$, что $\phi(x)$ принадлежит T-орбите x для всех $x \in U$ (где $U, V \in \mathcal{B}$); $[[T]]$ — *полный группоид* Кацнелсона и Вейса. Пусть A и B — два измеримых подмножества в X. Скажем, что *B собственно доминирует* A, т.е. $A \prec B$, если существует такое биективное преобразование $\phi : A \longrightarrow B'$ из $[[T]]$, что B' — измеримое подмножество в B и $m(B \setminus B') > 0$.

Теорема 4.4.1 (альтернатива Хопфа). *При указанных выше условиях выполняется ровно одно из следующих :*

- *существует T-инвариантная вероятностная мера на $(X, \mathcal{B})$, эквивалентная m или*
- $X \prec X$.

Другими словами, в классе меры m существует конечная T-инвариантная мера тогда и только тогда, когда X само *не является* "сжимаемым по Хопфу". В таком случае T имеет *тип* II_1.

4.5. Альтернатива Маррея и фон Неймана. В работе [33] Маррей и фон Нейман развили теорию размерности для операторных алгебр (колец операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве, замкнутых относительно слабой топологии), которые являются *факторами* (т.е. имеют тривиальные относительные коммутанты). Эта теория основывается на так называемой теории сравнения проекций.

Пусть M — фактор. Обозначим через $P(M) = \{p \in M : p = p^2 = p^*\}$ множество всех проекций из M. Пусть p и q — две проекции. Говорят, что q доминирует p (обозначение $p \preceq q$), если существует унитарный оператор u из M такой, что $upu^* \leqslant q$. Если $p \preceq q$ и $q \preceq p$, то из теоремы типа теоремы Кантора — Бернштейна следует равенство $upu^* = q$, тогда эти две проекции являются *эквивалентными* и обозначаются так: $p \sim q$. Для любых двух проекций p и q из произвольного фактора всегда можно определить, доминирует ли p проекцию q или наоборот.

При рассмотрении операторной алгебры M как *некоммутативного пространства мер* вероятностные меры представляются *состояниями* (т.е. непрерывными функционалами $\phi : M \longrightarrow$

$\mathbb{C}$ нормы 1). Если состояние $\phi|_{P(M)}$ инвариантно относительно эквивалентности $\sim$, то оно называется *следовым состоянием* или, для краткости, *следом*[1)] Через $I : M \ni x \longmapsto x \in M$ обозначим тождественный оператор из M (заметим, что I — проекция и $p \preceq I$ для всех $p \in P(M)$).

Теорема 4.5.1 (альтернатива Маррея и фон Неймана). *Пусть M — фактор. Тогда выполняется ровно одно из следующих условий*:

- *существуют такие проекции p и q, что $I = p + q$ и $p \sim I \sim q$*;
- *существует след $\phi : M \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Согласно терминологии Маррея и фон Неймана, M называется *конечным*, если I *не* эквивалентен другой проекции $\neq I$. В этом случае M имеет тип I_n (или, соответственно, тип II_1), если упорядоченное множество $P(M)/\sim$ изоморфно множеству $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ (или, соответственно, единичному интервалу $[0, 1]$). Такие изоморфизмы даже индуцируются следами.

В частности, M имеет тип I_n тогда и только тогда, когда M изоморфен алгебре $n \times n$ матриц $M(n, \mathbb{C})$, а след ϕ — это просто нормализация $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}$ обычного следа $\mathrm{Tr}((a_{i,j})) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Классическим примером фактора типа II_1 является групповая алгебра фон Неймана $\mathcal{L}(G)$, ассоциированная с ICC-группой G (т. е. группой, в которой класс сопряженности любого нетривиального элемента бесконечен).

Замечание 4.5.2. В этой ситуации понятие аменабельности совпадает с понятием конечности Маррея и фон Неймана. Заметим, что в случае операторных алгебр существует другое понятие аменабельности (которое также называется *гиперконечностью* или *инъективностью*), отличающееся от нашего (см. [17] или [18]). Кроме того, в случае ассоциированности с ICC-группами факторов типа II_1 фундаментальная теорема А. Конна утверждает, что операторная алгебра $\mathcal{L}(G)$ аменабельна тогда и только тогда, когда группа G аменабельна, причем в этом случае $\mathcal{L}(G)$ изоморфна гиперконечному фактору $\mathcal{R}$ типа II_1 Маррея и фон Неймана.

§ 5. Случайные блуждания, корост и изопериметрические константы

5.1. Спектральный радиус регулярного графа. Пусть X — регулярный граф степени d. Множества вершин и гра-

[1)]Если M — фактор типа II_1 и ϕ — состояние, то условие $\phi(xy) = \phi(yx)$ $\forall x, y \in M$ равносильно следующему условию: $\phi(upu^*) = \phi(p)$ для всех унитарных u и проекций p из M. "Трудная" часть доказана в [34].

ней графа X обозначаются через X^0 и X^1 соответственно. Для определения спектрального радиуса графа X потребуются следующие ниже обозначения и терминология.

1) Обозначим через $l^2(X)$ гильбертово пространство комплексных функций с интегрируемым квадратом на множестве вершин X^0 графа X, а именно:

$$l^2(X) = \{f : X^0 \longrightarrow C; \|f\|^2 = \sum_{x \in X^0} |f(x)|^2 < \infty\}.$$

Пусть $M : l^2(X) \longrightarrow l^2(X)$ — *оператор Маркова*, определяемый равенством

$$Mf(x) = \frac{1}{d} \sum_{y \sim x} f(y).$$

Этот оператор является самосопряженным; его норма $\|M\|$ и *спектральный радиус* $\rho(M)$ определяются равенствами

$$\|M\| = \sup_{f \in l^2(X), \|f\| \leqslant 1} | < f, Mf > |,$$

$$\rho(M) = \sup\{|\lambda| : M - \lambda I \text{ не обратим }\};$$

$\rho(M)$ — наибольшая абсолютная величина элементов спектра оператора M.

2) *Путь* в X — это такая последовательность вершин $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, что $x_i \sim x_{i+1}$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Вершины x_0 и x_n называются *начальной* и *конечной* вершинами соответственно, а число n называется *длиной* пути. Если $x_0 = x_n$, то путь называется *замкнутым* и начальная (= конечная) вершина называется *базой*.

Зафиксируем произвольную вершину $* \in X^0$ и обозначим через p_n вероятность того, что случайно блуждающая частица, стартующая из $*$, возвращается назад в $*$ за n шагов:

$$p_n = \frac{\#\{\text{ замкнутые пути с базой } * \text{ и длиной } n\}}{\#\{\text{ пути длины } n, \text{ начинающиеся в } *\}}.$$

3) *Термодинамическая интерпретация свертки мер.* Допустим, что в момент времени $t = 0$ в фиксированную вершину $*$ графа X помещено количество тепла q_0. Кроме того, если в момент времени t в вершине $x \in X^0$ размещено количество тепла q, то оно равномерно распределяется среди d соседних вершин $y \sim x$ в момент времени $t + 1$. Обозначим через q_n количество тепла в базовой точке $*$ в момент $t = n$.

Лемма-определение 5.1.1. *Верны следующие равенства, определяющие спектральный радиус $\rho(X)$ графа X* :

$$\|M\| = \rho(M) = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{p_n} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{q_n}.$$

5.2. Коpост. Путь $\{x_0, x_1, \dots x_n\}$ на регулярном графе X называется *собственным*, если $x_{i+1} \neq x_{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$. Обозначим через r_n вероятность того, что случайно блуждающая частица, стартующая из базовой точки $*$, возвращается назад в $*$ за n собственных шагов:

$$r_n = \frac{\#\{\text{ замкнутые собственные пути с базой } * \text{ и длиной } n\}}{\#\{\text{ собственные пути длины } n, \text{ начинающиеся в } *\}}.$$

Определение 5.2.1. Число

$$\alpha(X) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{r_n} \tag{5}$$

называется *коростом* графа X.

Эта терминология относится к указанному ниже частному случаю, который является в действительности исходным. Конечно порожденная группа G всегда может рассматриваться как факторгруппа свободной группы $F = F_m$ конечного ранга m по некоторой нормальной подгруппе N $(G = F/N)$. Пусть $\pi : F \longrightarrow G$ — естественный эпиморфизм. Обозначим через ℓ функцию длины, ассоциированную со свободным базисом группы F и положим

$$a_n = \{g \in F : \ell(g) \leqslant n \text{ и } g \in N\}.$$

Легко видеть, что существует биекция между элементами из N и собственными замкнутыми путями с базовой точкой $* = 1$ в графе Кэли группы F относительно свободного базиса; эта биекция сохраняет длины (в частности $a_n = r_n$).

Приведенная ниже *формула Григорчука — Коэна* связывает спектральный радиус d-регулярного графа с его коростом [24]

$$\rho(X) = \frac{\sqrt{d-1}}{d}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{d-1}} + \frac{d-1}{\alpha}\right). \tag{6}$$

5.3. Изопериметрическая константа. Пусть X — граф.

Определение 5.3.1. Для подмножества F множества вершин X^0 графа X определим границу

$$\partial F = \{x \in X^0 \setminus F : \exists y \in F : x \sim y\} \tag{7}$$

как множество вершин, находящихся на расстоянии 1 от F.

Определение 5.3.2. Изопериметрической константой графа X называется число

$$\iota(X) = \inf_{F\subset X^0,\ \text{конечное}} \frac{|\partial F|}{|F|}. \tag{8}$$

Пример 5.3.3 ([12, с. 47]). Если T — дерево, в котором каждая вершина имеет степень не менее d, то изопериметрическая константа дерева T удовлетворяет неравенству $\iota(T) \geqslant d-2$. Если T_d — d-регулярное дерево, то $\iota(T_d) = d-2$.

Для графа X имеется аналог изопериметрического неравенства типа неравенства Чигера — Бусера. Например, (см. [12]) имеет место

Лемма 5.3.4. *Пусть X — регулярный граф. Тогда*

$$\iota(X) \geqslant 4\frac{1-\rho(X)}{\rho(X)}. \tag{9}$$

§ 6. Альтернатива Тарского для дискретных метрических пространств

6.1. Условие Фелнера, условие удвоения и условие Громова. Пусть (X, d) — дискретное метрическое пространство.

Для подмножества $\mathcal{R}$ множества $W(X)$ биективных ограниченных возмущений единицы и для подмножества A пространства X определим *$\mathcal{R}$-границу* $\partial_{\mathcal{R}}A$ множества A равенством

$$\partial_{\mathcal{R}}A = \{x \in X \setminus A : \exists \gamma \in \mathcal{R} \text{ такой, что } (x, \gamma(x)) \in (\alpha(\gamma) \times A) \cup (A \times \omega(\gamma))\}.$$

Определение 6.1.1. Дискретное метрическое пространство (X, d) удовлетворяет *условию Фелнера*, если для любого конечного подмножества $\mathcal{R}$ множества $W(X)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное подмножество $F = F(\mathcal{R}, \varepsilon)$ в X, что $|\partial_{\mathcal{R}}F| < \varepsilon|F|$.

Замечание 6.1.2. Если (X, d) — регулярный граф, то условие Фелнера равносильно равенству $\iota(X) = 0$. Это частично очевидно в случае графа Кэли в силу леммы 3.2.3.

Для непустого подмножества $F \subset X$ и $k \in \mathbb{N}$ обозначим через

$$\mathcal{N}_k(F) = \{x \in X : d(x, F) \leqslant k\}$$

k-окрестность множества F.

Определение 6.1.3. Дискретное метрическое пространство (X, d) удовлетворяет *условию удвоения*, если существует такая постоянная $K > 0$, что

$$|\mathcal{N}_K(F)| \geqslant 2|F| \tag{10}$$

для любого непустого подмножества F из X.

Ясно, что условие удвоения равносильно существованию таких $k > 0$ и $\epsilon > 0$, что

$$|\mathcal{N}_k(F)| \geqslant (1+\epsilon)|F| \tag{11}$$

для такого F, как выше.

Определение 6.1.4. Дискретное метрическое пространство (X, d) удовлетворяет *условию Громова*, если существует такое ограниченное возмущение единицы $\phi : X \longrightarrow X$, что

$$|\phi^{-1}(x)| \geqslant 2 \tag{12}$$

для всех x из X.

6.2. Двудольные графы: теорема Радо — Холла о "гареме". Напомним, что граф $X(A, B)$ называется *двудольным*, если множество X^0 его вершин можно разложить в такое дизъюнктное объединение $X^0 = A \coprod B$, что каждое ребро из X^1 соединяет ровно одну вершину из A и одну вершину из B (это равносильно тому, что $x, y \in X^0$, $x \sim y \Longrightarrow x \in A$ и $y \in B$ или наоборот).

Определение 6.2.1. Пусть $X(A, B)$ — двудольный граф. Назовем (m, n)-*соответствием* такое подмножество M в X^1, что каждая вершина из A (из B) соединена ребрами из M ровно с m (n) вершинами из B (A).

Сформулируем хорошо известную теорему Холла — Радо о соответствиях (доказательство и соответствующие ссылки см. в [12]).

Определение 6.2.2. Пусть $X(A, B)$ — двудольный граф. Критерием существования $(1, n)$–соответствия является следующее условие:

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}_1(F)| &\geqslant \ |F| \text{ для всех непустых } F \subseteq A; \\ |\mathcal{N}_1(F)| &\geqslant n|F| \text{ для всех непустых } F \subseteq B. \end{aligned}$$

С метрическим пространством (X, d) и постоянной $K > 0$ можно ассоциировать двудольный граф $B_K(X)$, у которого множество вершин состоит из двух дизъюнктных копий множества X, причем две вершины x и y (из первой и, соответственно, второй копии пространства X) соединяются ребром, если $d(x, y) \leqslant K$.

6.3. Альтернатива Тарского для дискретных метрических пространств и графов. Приведенная ниже теорема сформулирована и доказана в [12] в несколько более общем виде (для *псевдогрупп*). Как отмечено в [12], некоторые из импликаций известны; с другой стороны, доказательство импликации

(viii) $\Longrightarrow$ (i) (т.е. "трудной" части альтернативы Тарского) является новым, оно близко к [19].

Главная теорема 6.3.1. *Для дискретного метрического пространства (X,d) равносильны следующие условия:*

(i) *(X,d) парадоксально;*
(ii) *(X,d) не удовлетворяет условию Фелнера;*
(iii) *(X,d) удовлетворяет условию Громова;*
(iv) *существует такое ограниченное возмущение единицы $\phi : X \longrightarrow X$, что $|\phi^{-1}(x)| = 2$ для всех x из X;*
(v) *(X,d) удовлетворяет условию удвоения;*
(vi) *существует такое $K > 0$, что двудольный граф $B_K(X)$ допускает $(1,2)$-соответствие;*
(vii) *(X,d) не является аменабельным.*

Кроме того, если X — d-регулярный граф, то приведенные выше условия равносильны любому из следующих условий:

(viii) *$\rho(X) < 1$ (критерий Кестена);*
(ix) *$\iota(X) > 0$ (критерий Фелнера);*
(x) *$\alpha(X) < d-1$ (критерий Григорчука).*

В конце этого параграфа приведем следующее следствие критерия аменабельности Фелнера.

Следствие 6.3.2. *Группа G субэкспоненциального роста является аменабельной. В частности, счетные абелевы группы являются аменабельными.*

Доказательство. Пусть $F_n := B(1,n)$ — шар радиуса n с центром в единичном элементе. Тогда предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\partial F_n|}{|F_n|}$$

существует и равен нулю. Поэтому $\iota(G) = 0$. С другой стороны, рост конечно порожденной абелевой группы G не более чем полиномиален и, в частности, субэкспоненциален. Поэтому G аменабельна. Поскольку каждая счетная группа является объединением возрастающей цепи конечно порожденных подгрупп, то в общем случае применяем п. 2.3, (iv), что завершает доказательство. □

§ 7. Оценки числа Тарского свободных групп Бернсайда

Представлены оценки числа Тарского свободных групп Бернсайда. Напомним, что свободная группа Бернсайда $B(m,n)$ ранга m и экспоненты n — это универсальная m-порожденная группа с условием $w^n = 1$ для каждого элемента $w \in B(m,n)$.

С.И.Адян и П.С.Новиков (опровергая хорошо известную гипотезу Бернсайда) показали, что для всех $m \geqslant 2$ и любого достаточно большого нечетного n группа $B(m,n)$ бесконечна. Позже С.И.Адян [1] доказал, что если n нечетно и $\geqslant 665$, то группа $B(m,n)$ также неаменабельна. С другой стороны, поскольку такие группы являются периодическими, то они не имеют свободных подгрупп. Поэтому для числа Тарского верны неравенства $5 \leqslant \tau(B(m,n)) < \infty$. Используя результаты пп. 2.2 и 5.6, можно представить более точные нижнюю и верхнюю оценки для числа Тарского.

Теорема 7.0.3. *Пусть $B(m,n)$ — свободная группа Бернсайда с $m \geqslant 2$ образующими нечетной экспоненты $n \geqslant 665$. Тогда $6 \leqslant \tau(B(m,n)) \leqslant 14$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие *монотонные* функции:

$$\rho_m(\alpha) = \frac{\sqrt{2m-1}}{2m}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2m-1}} + \frac{\sqrt{2m-1}}{\alpha}\right), \sqrt{2m-1} \leqslant \alpha \leqslant 2m-1,$$
$$\iota(\rho) = 4\frac{1-\rho}{\rho}, \; 0 < \rho \leqslant 1,$$
$$K(\iota) = \left[\frac{\log 2}{\log(1+\iota)}\right], \; \iota \geqslant 0,$$
$$b_m(N) = \frac{m(2m-1)^N-1}{m-1}, \; N \geqslant 0.$$

Функция ρ_m выражает спектральный радиус канонического простого случайного блуждания на m-порожденной группе G в терминах относительного короста (см. (6)); о значении функции $\iota(\rho)$ см. лемму 5.3.4.

Если ι — изопериметрическая постоянная дискретного метрического пространства X, то из определений следует, что $K(\iota)$ — двойная характеристическая постоянная для X; это означает, что для получения парадоксального разложения пространства X необходимы только ограниченные возмущения единицы γ_1 и γ_2 норм $\|\gamma_i\| \leqslant K(\iota)$. В частности, если X — группа, то по лемме 3.2.3 для соответствующих кусочных сдвигов используются только элементы длины, не более $K(\iota)$.

Наконец, через $b_m(N)$ обозначается мощность множества всех элементов длины, не более N свободной группы ранга m. Таким образом, группа G с двойной характеристической постоянной K допускает парадоксальное разложение сложности, не более $2 \cdot b_m(K)$.

Собрав все эти факты вместе, получим следующую оценку числа Тарского m-порожденной группы G в терминах ее короста:

$$\tau(G) \leqslant 2 \cdot b_m\left(K\left(\iota((\rho_m(\alpha)))\right)\right). \tag{13}$$

С.И.Адян (см. [1]) оценил в нашем случае корост свободных групп Бернсайда $B(m,n)$ для всех $m \geqslant 2$ и любой нечетной экспоненты $n \geqslant 665$. В частности, для $m = 3$ он получил неравенство $\alpha < \sqrt[3]{25}$. Применяя приведенную выше оценку, получим неравенство $B(3,n) \leqslant 14$.

В общем случае известно, что две группы Бернсайда $B(m_1,n)$ и $B(m_2,n)$ одинаковой экспоненты n являются слабо соизмеримыми (т.е. содержат изоморфные образы друг друга, не обязательно конечного индекса). Из предложения 2.2.2 следует $\tau(B(m,n)) = \tau(B(3,n))$ для всех $m \geqslant 2$ и доказательство завершено. □

§ 8. Аменабельные клеточные автоматы

Приведем основной результат из [14]: теоремы Мура и Майхилла верны для клеточных автоматов на аменабельных группах.

В работе [26] М.Громов называет отображение f из пространства подпроизведения $X \subseteq \prod_{\delta\in\Delta} X_\delta$ в некоторое пространство Y *прединъективным*, если $f(x) \neq f(x')$ для любых таких $x \neq x'$, что $x(\delta) = x'(\delta)$ для почти всех $\delta \in \Delta$. Например, если X — линейное пространство функций x на Δ и f — линейный оператор, то слово "прединъективный" означает "инъективный на подпространстве функций с конечным носителем". В теории клеточных автоматов на $\mathbb{Z}^2$ (или $\mathbb{Z}^n$) теоремы Мура и Майхилла дают пример ситуации, в которой прединъективность равносильна сюръективности. Это было обобщено в [30] на случай клеточных автоматов на группах субэкспоненциального роста и в [14] — на аменабельные группы.

8.1. Клеточные автоматы. В классическом случае (см. [37]) клеточный автомат работает на решетке $U = \mathbb{Z}^2$ целочисленных точек евклидовой плоскости. Если S — конечное множество (*множество состояний*), то *конфигурация* — это отображение $c : U \longrightarrow S$. *Отображение перехода* — это такое отображение $\tau : C \longrightarrow C$ из множества C всех конфигураций в себя, что состояние $\tau[c](x)$ в точке $x \in U$ зависит только от состояний $c(y)$ в *соседях* y точки x.

Часто говорят о τ как о времени: если c — конфигурация вселенной в момент времени t, то $\tau[c]$ — конфигурация вселенной в момент $t+1$. *Начальная конфигурация* — это конфигурация в момент $t = 0$. Конфигурация c, не лежащая в образе τ (т.е. $c \in C \setminus \tau[C]$), называется конфигурацией райского сада (сокращенно — GOE-*конфигурацией*). Такая библейская терминология мотивируется тем, что GOE-конфигурации могут появляться только в качестве начальных конфигураций. Если F

— непустое конечное связное подмножество в U, то *образом с носителем* F называется отображение $p : F \longrightarrow S$. Образ p называется GOE-образом, если каждая конфигурация, продолжающая p за пределы ее носителя F, является GOE-конфигурацией: $\tau(c)_{|F} \neq p$ для всех $c \in C$. Используя топологические методы, можно проверить, что существование GOE-образов равносильно существованию GOE-конфигураций (см. [30, раздел 5]).

Два различных образа p_1 и p_2 с общим носителем F называются *взаимно стираемыми*, если $\tau(c_1) = \tau(c_2)$ для любых конфигураций c_1 и c_2, которые совпадают вне F и согласованы на F с p_1 и p_2 соответственно. Здесь c_1 и c_2 играют роль рассматривавшихся выше x и x', отличающихся только на конечном подмножестве из Δ.

8.2. Клеточные автоматы на конечно порожденных группах.

8.2.1. Определения. *Клеточный* (*детерминистический*) *автомат* на графе $\mathcal{G}$ — это тройка $\mathcal{A} = (S, \mathcal{G}, f)$, где:

(i) S — непустое конечное множество, называемое множеством *состояний* или *алфавитом*;

(ii) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_A(G)$ — граф Кэли группы G относительно конечной системы образующих $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$;

(iii) $f : S^{B(1;1)} \ni \overline{s} = (s_1, s_{a_1}, s_{a_2}, \dots, s_{a_N}) \longmapsto f(\overline{s}) \in S$ — функция, называемая *локальным отображением*.

Конфигурация — это отображение $c : \mathcal{G} \longrightarrow S$, ассоциирующее с каждой вершиной из $\mathcal{G}$ некоторое состояние. Множество всех конфигураций обозначается через C.

Отображение перехода — это функция $\tau : C \longmapsto C$, определяемая равенством

$$\tau[c](g) = f\left(c(g), c(a_1 g), c(a_2 g), \dots, c(a_N g)\right).$$

Заметим, что состояние, являющееся значением конфигурации $\tau[c]$ в вершине g, зависит только от образа $c_{|B(g;1)}$ (т.е. от состояний в окрестности $B(g;1)$ из конфигурации c).

Понятия GOE-конфигураций, GOE-образов и взаимно стираемых образов те же самые, что были описаны в п. 8.1 для группы $\mathbb{Z}^2$.

8.3. Теоремы Мура и Майхилла.

Теорема 8.3.1 (Мур и Майхилл). *Пусть U — решетка $\mathbb{Z}^2$ целочисленных точек евклидовой плоскости, C — множество всех конфигураций, $\tau : C \longrightarrow C$ — отображение перехода. Тогда необходимым и достаточным условием существования* GOE-*образов является существование двух взаимно стираемых образов.*

Необходимость доказана Муром, а достаточность — Майхиллом.

В [30] показано, что данная теорема зависит от роста *вселенной*. В классическом случае, вселенная — это решетка $\mathbb{Z}^2$ целочисленных точек евклидовой плоскости, имеющих квадратичный рост. Этот результат легко распространяется на $\mathbb{Z}^n$ и на более общий случай вселенных (т.е. графы Кэли групп полиномиального роста).

Исходное доказательство теорем Мура и Майхилла опирается на приведенные ниже свойства стандартного графа Кэли $\mathcal{G}$ решетки $\mathbb{Z}^2$:

(a) для каждого квадрата L из $\mathcal{G}$ существует такая вложенная последовательность $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ квадратов из $\mathcal{G}$, что $\mathcal{G} = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$ и все B_k являются дизъюнктными объединениями копий квадрата L;

(b) для любой такой вложенной последовательности $B_1 \subset B_2 \cdots$ квадратов из $\mathcal{G}$, что $\mathcal{G} = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$, предел при стремлении k к бесконечности дроби

$$\frac{\text{количество вершин графа } \mathcal{G} \text{ на расстоянии} \leqslant 1 \text{ от } \partial B_k}{\text{количество вершин в } B_k}$$

существует и равен нулю.

Аналогичная последовательность существует для графов Кэли аменабельных групп (в силу условия Фелнера см. замечание 6.1.2 и теорему 6.3.1). Поэтому теоремы Мура и Майхилла верны и в этой более общей ситуации. Отсюда следует (см. [14])

Теорема 8.3.2. *Пусть G — конечно порожденная аменабельная группа, $\mathcal{G}_A(G)$ — граф Кэли группы G относительно конечной симметричной системы образующих A, $\mathcal{A} = (S, \mathcal{G}_A(G), f)$ — произвольный клеточный автомат. Тогда существование* GOE-*образов равносильно существованию взаимно стираемых образов.*

В [30] приведены примеры клеточных автоматов на графах Кэли групп экспоненциального роста, для которых приведенная выше теорема не верна. Заметим, что эти примеры легко распространить на все группы, содержащие неабелевы свободные группы. Более точно, можно доказать (см. [14]) следующее.

Теорема 8.3.3. *Пусть G — конечно порожденная группа, содержащая свободную группу ранга два. Тогда существуют такие конечные симметричные системы образующих A_1, A_2 группы G и клеточные автоматы $\mathcal{A}_1 = (S_1, \mathcal{G}_{A_1}(G), f_1)$, $\mathcal{A}_2 = (S_2, \mathcal{G}_{A_2}(G), f_2)$, что:*

– для $\mathcal{A}_1$ существуют два взаимно стираемых образа, не являющиеся GOE-*схемами;*

– *для A_2 существуют* GOE-*образы, не являющиеся взаимно стираемыми образами.*

Мы не можем распространить приведенную выше теорему на неаменабельные группы без свободных подгрупп (например, на группы Ольшанского или свободные группы Бернсайда $B(m,n)$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 665$ — нечетное). Доказательство невозможности такого распространения дало бы новую характеризацию аменабельных конечно порожденных групп.

С другой стороны, Фюрстенберг [22] предположил, что использование соображений энтропии может привести к распространению теоремы 8.3.2 на класс групп, более широкий, чем класс аменабельных групп. В приложении "Garden of Eden, entropy и surjunctivity" из [26] М. Громов приводит новое доказательство теоремы 8.3.2, основанное на соображениях энтропии.

§ 9. Внутренняя аменабельность группы Ричарда Томпсона F

Как отмечено в п. 2.4, группа Ричарда Томпсона F играет важную роль в теории аменабельных групп. Эта группа изоморфна подгруппе группы $\mathrm{PLF}(R)$ гомеоморфизмов действительной прямой R, сохраняющих ориентацию и являющихся кусочно-линейными относительно *конечного* разбиения прямой R (гомеоморфизм $f : R \longrightarrow R$ является кусочно-линейным, если существует такое конечное подмножество $B(f)$ прямой R, что f обладает постоянной производной на каждой связной компоненте множества $R \setminus B(f)$, см. [9]). В [15] доказана внутренняя аменабельность $\mathrm{PLF}(R)$ и отмечено, что то же самое доказательство проходит для группы F, откуда следует результат, полученный ранее Жолиссэ (см. [29]). Перед доказательством этого результата напомним понятие внутренней аменабельности и некоторые предварительные сведения.

9.1. Внутренняя аменабельность. *Внутренняя аменабельность* была определена в 1975 году Эффросом в операторно-алгебраическом контексте [20] и является вариацией аменабельности: группа действует на себе сопряжениями, а не левым умножением. Другими словами:

Определение 9.1.1. Группа G называется *внутренне аменабельной* (как дискретная группа), если существует такая функция $\mu : \mathcal{P}(G) \longrightarrow [0,1]$, что: $\mu(G) = 1$; $\mu(\{1\}) \neq 1$[1];

[1]Это условие означает, что μ не является мерой Дирака, сосредоточенной в единичном элементе группы G, и позволяет избежать тривиальности.

если $A, B \subseteq G$ и $A \bigcap B = \varnothing$, то $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$; $\mu(g^{-1}Ag) = \mu(A)$ для всех $g \in G$ и $A \subseteq G$.

Примеры и некоторые характеризации внутренне аменабельных групп приведены в [8]. Упомянем только, что класс аменабельных групп *строго* содержится в классе внутренне аменабельных групп. С другой стороны, существуют внутренне аменабельные группы со свободными подгруппами (например, группа $F_2 \times A$, где A аменабельна).

Из теоремы 2.1.6, примененной к динамической системе (G, X, α) при $X = G \setminus \{1\}$ и $\alpha_g(x) = g^{-1}xg$, вытекает (см. также [8] и [12])

Теорема 9.1.2. (альтернатива Тарского для внутренних действий). *Пусть G — группа. Тогда либо G внутренне аменабельна, либо существует внутреннее парадоксальное разложение группы G, а именно: существуют такие подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m$ множества $G \setminus \{1\}$ и элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, \ldots, h_m$ из G, что*

$$\begin{aligned} G \setminus \{1\} &= A_1 \coprod A_2 \coprod \cdots \coprod A_n \coprod B_1 \coprod B_2 \coprod \cdots \coprod B_m = \\ &= g_1^{-1}A_1g_1 \coprod g_2^{-1}A_2g_2 \coprod \cdots \coprod g_n^{-1}A_ng_n = \\ &= h_1^{-1}B_1h_1 \coprod h_2^{-1}B_2h_2 \coprod \cdots \coprod h_m^{-1}B_mh_m. \end{aligned}$$

Лемма 9.1.3 ([8, следствие 2, (iv)]). *Допустим, что существует такая точная последовательность*

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1,$$

что N — внутренне аменабельная группа и H — аменабельная группа. Тогда G — внутренне аменабельная группа.

9.2. Внутренняя аменабельность группы F.

Лемма 9.2.1 ([10, теорема 4.1.]). *Коммутатор $[F, F]$ группы Ричарда Томпсона F состоит из всех элементов группы F, которые тривиальны в окрестностях нуля и единицы. Кроме того, имеется короткая точная последовательность*

$$1 \longrightarrow [F, F] \longrightarrow F \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 1.$$

Теорема 9.2.2. *Группа Ричарда Томпсона F является внутренне аменабельной.*

Доказательство. По предыдущим леммам достаточно показать, что $[F, F]$ — внутренне аменабельная группа (заметим, что абелева группа $\mathbb{Z}^2$ является аменабельной). По теореме 9.1.2 (типа альтернативы Тарского) это равносильно тому, что $[F, F]$

не имеет внутренних парадоксальных разложений. Допустим противное. Пусть

$$\begin{aligned}
[F,F]\setminus\{1\} &= A_1 \coprod A_2 \coprod \cdots \coprod A_n \coprod B_1 \coprod B_2 \coprod \cdots \coprod B_m = \\
&= g_1^{-1} A_1 g_1 \coprod g_2^{-1} A_2 g_2 \coprod \cdots \coprod g_n^{-1} A_n g_n = \\
&= h_1^{-1} B_1 h_1 \coprod h_2^{-1} B_2 h_2 \coprod \cdots \coprod h_m^{-1} B_m h_m
\end{aligned} \tag{14}$$

— внутреннее парадоксальное разложение группы $[F,F]$. Так как элементы g_i, h_j лежат в $[F,F]$, то по лемме 9.2.1 существует такое $\varepsilon > 0$, что g_i, h_j тривиальны в $[0,\varepsilon]$. Пусть V — подгруппа в $[F,F]$, состоящая из тех элементов, которые тривиальны в $[\varepsilon,1]$ (в терминологии [9] — с носителем из $[0,\varepsilon]$). Тогда

$$\begin{gathered}
g_i^{-1} v g_i = v = h_j^{-1} v h_j \text{ для всех } v \in V, \\
i = 1,\ldots,n; j = 1,\ldots,m.
\end{gathered} \tag{15}$$

Поэтому

$$g_i^{-1} V g_i = V = h_j^{-1} V h_j. \tag{16}$$

Положим $A_i' := A_i \cap V$ и $B_j' = B_j \cap V$. Тогда

$$\begin{aligned}
\left(g_i^{-1} A_i g_i\right) \cap V &=_{(16)} \left(g_i^{-1} A_i g_i\right) \cap \left(g_i^{-1} V g_i\right) = \\
&= g_i^{-1} \left(A_i \cap V\right) g_i =_{(15)} A_i \cap V = A_i'.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\left(h_j^{-1} B_j h_j\right) \cap V = B_j'.$$

Беря пересечения подмножеств из (14) с V, получаем

$$\begin{aligned}
V\setminus\{1\} &= A_1' \coprod A_2' \coprod \cdots \coprod A_n' \coprod B_1' \coprod B_2' \coprod \cdots \coprod B_m = \\
&= A_1' \coprod A_2' \coprod \cdots \coprod A_n' = \\
&= B_1' \coprod B_2' \coprod \cdots \coprod B_m',
\end{aligned}$$

что приводит к противоречию. □

Автор выражает свою глубокую благодарность Р.И. Григорчуку за его любезное приглашение участвовать в конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина, и сердечное гостеприимство во время этой конференции. Большое спасибо также С.М. Асееву за его доброжелательную помощь. Наконец, я благодарен Хиллелу Фурстенбергу за обсуждение аменабельных клеточных автоматов и Мише Громову за предоставление мне препринта [26].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адян С.И.* Случайные блуждания на свободных периодических группах// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1982. — *46*, № 6. — С. 1139–1149 (РЖМат, 1983, 4А193)
2. *Григорчук Р.И.* Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — *48*, № 5. — С. 939–985 (РЖМат, 1985, 3А266)
3. *Григорчук Р.И.* О проблеме М.Дэя об неэлементарных аменабельных группах в классе конечно определенных групп// Мат. сб. — 1996. — *60*, № 5. — С. 774–775
4. *Григорчук Р.И.* Пример конечно определенной аменабельной группы, не принадлежащей классу *EG*// Мат. сб. — 1998. — *189*, № 1. — С. 79–100 (РЖМат, 1998, 10А148)
5. *Лысенок И.Л.* Система определяющих соотношений для группы Григорчука// Мат. заметки. — 1985. — *38*, № 4. — С. 503–516 (РЖМат, 1986, 3А245)
6. *Ольшанский А.Ю.*Проблема существования инвариантного среднего на группе// Успехи мат. наук. — 1980. — *35*, № 4. — С. 180–181
7. *Aigner M., Ziegler G.M.* Proofs from the book. — Springer, 1998
8. *Bédos E., de la Harpe P.* Moyennabilité intérieure des groupes: définitions et exemples// Enseign. math. — 1986. — *32*, № 1–2. — С. 139–157 (РЖМат, 1987, 4Б1074)
9. *Brin M.G., Squier C.C.* Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line// Invent. math. — 1985. — *79*. — С. 485–498
10. *Cannon J.F., Floyd W.J., Parry W.R.* Introductory notes on Richard Thompson's groups// Enseign. math. — 1996. — *42*, № 3–4. — С. 215–256 (РЖМат, 1998, 1А203)
11. *Ceccherini-Silberstein T., Grigorchuk R.I.* Amenability and growth of one–relator groups// Enseign. math. — 1997. — *43*, № 3–4. — С. 337–354 (РЖМат, 1998, 9А141)
12. *Ceccherini-Silberstein T., Grigorchuk R.I., de la Harpe P.* Amenability and paradoxical decompositions for pseudogroups and for discrete metric spaces// Тр. Мат. ин-та РАН (to appear)
13. *Ceccherini-Silberstein T., Grigorchuk R.I., de la Harpe P.* Décompositions paradoxales des groupes de Burnside// C. r. Acad. sci. Sér. 1. — 1998. — *327*. — С. 127–132
14. *Ceccherini-Silberstein T., Machì A., Scarabotti F.* Amenable groups and cellular automata// Ann. Inst. Fourier (to appear)
15. *Ceccherini-Silberstein T., Scarabotti F.* Inner amenability of some groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line// These proceedings
16. *Chou C.* Elementary amenable groups// Ill. J. Math. — 1980. — *24*. — С. 396–407
17. *Connes A.* Noncommutative geometry. — Acad. Press, 1994

18. *Connes A*. On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms// Symp. math. Ist. naz. alta mat. Vol. 20. — London — New York, 1976 (1977). — C. 158–187
19. *Deuber W.A., Simonovitz M., Sós V.T.* A note on paradoxical metric spaces// Stud. sci. math. hung. — 1995. — *30*, № 1–2. — C. 17–23 (РЖМат, 1996, 8A283)
20. *Effros E.G.* Property Γ and inner amenability// Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — *47*, № 2. — C. 483–486 (РЖМат, 1975, 12Б940)
21. *Feynmann R.P.* Surely You're Joking Mr. Feynman! — New York: W.W. Norton & Co., 1985
22. *Furstenberg H.* Private communication
23. *Greenleaf F.P.* Invariant means on topological groups and their applications. — New York Van Nostrand, 1969 — 113 c. (РЖМат, 1972, 4Б947К)
24. *Grigorchuk R.I* Symmetrical random walks on discrete groups// In: Multicomponent random systems/ Eds Dobrushin R.L., Sinai Ya and Griffeath D. — Dekker, 1980. — C. 285–325. — (Adv. Probab. and Relat. Topics Vol. 6)
25. *Gromov M.* Hyperbolic groups. Essays Group Theory. — New York e. a., 1987. — C. 75–263 (РЖМат, 1988, 7A182)
26. *Gromov M.* Endomorphisms of symbolic algebraic varieties// Prepr./ IHES/M/98/56, 1998
27. *de la Harpe P.* Free groups in linear groups// Enseign. math. — 1983. — *29*, № 2. — C. 129-144 (РЖМат, 1983, 12A514)
28. *de la Harpe P., Skandalis G.* Un résultat de Tarski sur les actions moyennables de groupes et les partitions paradoxales// Enseign. math. — 1986. — *32*, № 1–2. — C. 121-138 (РЖМат, 1987, 3A263)
29. *Jolissaint P.* Moyennabilité intérieure du groupe *F* de Thompson// C. r. Acad. sci. Sér. 1. — 1997. — *325*, № 1. — C. 61-64 (РЖМат, 1998, 4A144)
30. *Machì A., Mignosi F.* Garden of Eden configurations for cellular automata on Cayley graphs of groups// SIAM J. Discrete Math. — 1993. — *6*. — C. 44–56
31. *Milnor J.* Problem 5603// Amer. Math. Mon. — 1968. — *75*, № 6. — C. 685–686
32. *Moore E.F.* Machine models of self-reproduction// In: Essays on Cellular Automata/ Ed. Burks Arthur B. — Urbana, Chicago, London: Univ. Ill. Press, 1970
33. *Murray F.J., von Neumann J.* On rings of operators// Ann. Math. — 1936. — *37*. — C. 116–229
34. *Murray F.J., von Neumann J.* On rings of operators. II // Trans. Amer. Math. Soc. — 1937. — *41*. — C. 208–248
35. *Myhill J.* The converse of Moore's Garden of Eden theorem// Proc. Amer. Math. Soc. — 1963. — *14*, № 4. — C. 685–686 (РЖМат, 1965, 8A142)
36. *von Neumann J.* Zur allgemeinen Theorie des Masses// Fundam. Math. — 1929. — *13*. — C. 73–116
37. *von Neumann J.* The theory of self-reproducing automata/ Ed. Burks A. — Urbana, IL: Univ. Ill. Press, 1966

38. *Paterson A.T.* Amenability. — Amer. Math. Soc., 1988. — (Math. Surveys and Monographs. Vol. 29)
39. *Tarski A.* Algebraische fassung des massproblems// Fundam. math. — 1938. — *31.* — C. 47–66
40. *Wagon S.* The Banach–Tarski paradox. — Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1985

Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi del Sannio
Corso Garibaldi, 82100 Benevento, Italy.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛР 021074 от 02.09.96

Подписано в печать 02.06.2000 Формат 60×90 1/16
Печать офсетная Бумага офсетная № 1
Печ. л. 16,25 Тираж 300 Заказ 5017

Адрес редакции: 125219, Москва, ул. Усиевича, д. 20

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ,
140010, г. Люберцы, Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554-21-86