Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения

УДК 517.91/517.93

I

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот обзор посвящен, в основном, локальной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В него не включена теория бифуркаций; ей будет посвящена отдельная статья. Метод усреднения излагается в обзоре В. И. Арнольда, В. В. Козлова, А. И. Нейштадта «Математические аспекты классической и небесной механики» (т. 3 настоящего издания).

Мы не касаемся спектральной теории дифференциальных операторов с одной независимой переменной (см., например,

[37]); по целям и методам она относится скорее к функциональному анализу. Не включены в обзор также теория интегральных преобразований и ее приложения к дифференциальным уравнениям. Асимптотической теории дифференциальных уравнений посвящен обзор М. В. Федорюка «Асимптотические методы в анализе»; некоторые общие теоремы асимптотической теории имеются в главе 7. Совсем не затронут вопрос об интегрировании конкретных уравнений; основным пособием на эту тему является книга Камке (E. Kamke) «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям».

В последние годы произошел резкий подъем активности в исследовании классических проблем теории дифференциальных уравнений, связанный с проникновением в эту теорию смежных дисциплин: алгебры (теория формальных нормальных форм), алгебраической геометрии (разрешение особенностей), комплексного анализа. Мы старались, по возможности, отразить эти исследования в предлагаемой статье.

Изложение ведется с единой точки зрения и с использованием единой терминологии. Мы начинаем каждую главу с определения основных понятий с тем, чтобы сделать наш обзор доступным и для читателя-неспециалиста. В существующей литературе отсутствует единая терминология — даже термин «особая точка» употребляется в различных значениях. Различие в терминологии и, что еще важнее, в математическом языке приводит к тому, что в разных источниках близкие результаты формулируются совсем по-разному. Для того, чтобы они воспринимались как части одного целого, мы зачастую формулируем их не в том виде, как в первоисточниках.

Исследование каждой проблемы мы старались начинать с рассмотрения объектов общего положения; они наиболее просты и одновременно имеют больше всего приложений, поскольку чаще всего встречаются. Вырождений высокой коразмерности мы касаемся только в двух случаях: 1) если все вырождения меньшей коразмерности в изучаемой проблеме уже описаны; 2) если проблема исследуется единообразно для вырождений всех коразмерностей.

Список литературы не претендует на полноту. В него включены некоторые учебники, а также монографии общего характера. Большая часть списка состоит из работ, содержащих подробное изложение результатов, сформулированных в обзоре. Для сокращения списка литературы мы пользовались двойными ссылками: если работа цитирована в монографии или статье, включенной в список литературы, то ссылка на нее имеет вид [a : b] или [a, стр. b]. Первое означает работу [b] из списка литературы в [a]; второе — работу, цитированную в [a] на стр. b. Знак ▲ указывает конец некоторых формулировок.

В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этой главе (§§ 1—6) дан краткий обзор основных понятий и результатов общего характера теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Более подробное изложение можно найти в книгах [7], [49], [51], [61], [63], [64], [93]. Параграфы 7 и 8 носят более специальный характер и содержат некоторые недавние результаты.

§ 1. Определения

1.1. Поля направлений и их интегральные кривые. Рассмотрим вещественное конечномерное линейное пространство $V=\mathbf{R}^n$. *Полем направлений* в области U пространства V называется соответствие, которое каждой точке $x\in U$ сопоставляет проходящую через x прямую.

Определение. *Интегральной кривой поля направлений* называется кривая, которая в каждой своей точке касается направления поля в этой точке.

1.2. Векторные поля, автономные дифференциальные уравнения, интегральные и фазовые кривые. *Векторным полем* v, заданным в области U пространства V, называется соответствие, сопоставляющее каждой точке $x\in U$ приложенный в ней вектор $v(x)$ пространства V.

Дифференциальным уравнением, соответствующим векторному полю v, называется уравнение

$$\dot{x}=v(x),\quad x\in U\subset V, \tag{1}$$

точка над буквой обозначает дифференцирование по $t: \dot{x}=dx/dt$[1].

Область U называется *фазовым пространством* этого уравнения, а прямое произведение $\mathbf{R}\times U$ — *расширенным фазовым пространством;* здесь $\mathbf{R}$ — ось времен (ось t).

Уравнение (1) называют также *автономным уравнением* (так как закон эволюции физически автономной, т. е. не взаимодействующей с другими системами, физической системы обычно не зависит от времени); *неавтономным уравнением* называется уравнение, правая часть которого зависит также и от t:

$$\dot{x}=v(t, x). \tag{2}$$

Определение. *Решением дифференциального уравнения* (2) называется диференцируемое отображение $\varphi: I\to U$

---

[1] Точнее, здесь и далее $\dot{x}$ или dx/dt означает значение производной отображения $t\mapsto x$ на стандартном орте оси t.

интервала $I=\{t\in\mathbf{R},\ a<t<b\}$ вещественной оси t (допускаются $a=-\infty$, $b=+\infty$) в фазовое пространство, если для любого $\tau\in I$ выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)\big|_{t=\tau}=v(\tau,\ \varphi(\tau)).$$

Определение. *Интегральной кривой дифференциального уравнения* называется график его решения; *фазовой кривой* — проекция интегральной кривой на фазовое пространство вдоль оси t.

1.3. Поля направлений и неавтономные дифференциальные уравнения. Пусть v — зависящее от времени векторное поле, т. е. отображение, сопоставляющее каждой точке $(t,\ x)$ некоторой области прямого произведения оси времени $\mathbf{R}$ и фазового пространства V вектор фазового пространства (приложенный в точке x).

Определение. *Полем направлений дифференциального уравнения*

$$\dot{x}=v(t,\ x),\quad (t,\ x)\in U\subset\mathbf{R}\times V \tag{2}$$

называется поле направлений, заданное в области расширенного фазового пространства, где определена правая часть, следующим правилом: точке $(t,\ x)$ сопоставляется проходящая через нее прямая, содержащая вектор $(1,\ v(t,\ x))$.

Легко доказывается

Теорема. Интегральными кривыми поля направлений уравнения (2) являются графики решений этого уравнения и только они.

Не всякое поле направлений является полем направлений дифференциального уравнения (2). Например, поле нулей 1-формы $f(x,\ y)dx+g(x,\ y)dy=0$ определяет (при условии $f^2+g^2\neq0$) поле направлений. Поле нулей формы $d(x^2+y^2)$ на плоскости без нуля не является полем направлений уравнения вида (2).

1.4. Диффеоморфизмы и фазовые потоки. *Диффеоморфизмом* области U на область W называется взаимно однозначное отображение, дифференцируемое вместе с обратным. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, дифференцируемость означает наличие непрерывных производных всех порядков.

Определение. *Однопараметрической группой* $\{g^t\}$ *диффеоморфизмов* области U называется такое отображение g прямого произведения $\mathbf{R}\times U$ в U:

$$g:\mathbf{R}\times U\to U,\quad g(t,\ x)=g^tx,\quad t\in\mathbf{R},\ x\in U,$$

что

1) g — дифференцируемое отображение,

2) семейство $\{g^t\,|\,t\in\mathbf{R}\}$ является однопараметрической группой преобразований: $g^t\circ g^s=g^{t+s}$ для любых $t,\ s\in\mathbf{R}$; $g^0=\mathrm{id}$.

Из 1) и 2) вытекает

3) при каждом $t \in \mathbf{R}$ отображение $g^t: U \to U$ — диффеоморфизм.

Фазовым потоком, заданным в области, называется однопараметрическая группа ее дифеоморфизмов.

Определение. *Полем фазовой скорости* потока $\{g^t\}$ называется поле скоростей, с которыми поток сдвигает точки с места: $v(x) = dg^t x/dt|_{t=0}$. Это поле называется также *производящим полем* однопараметрической группы $\{g^t\}$.

Теорема. Движение точки под действием фазового потока, $\varphi(t) = g^t(x_0)$, является решением уравнения (1), заданного полем фазовой скорости.

Обратно, в некоторых случаях (а именно, когда решения уравнения (1) продолжаются на всю ось времени) можно построить по данному векторному полю v фазовый поток, для которого v является полем фазовой скорости. Однако это не всегда так (пример — уравнение $\dot{x} = x^2$). В этом случае, как легко сосчитать, единственно возможный поток дается формулой $g^t x = x/(1-tx)$. Хотя $g^{t+s} = g^t \circ g^s$, эта формула не задает фазового потока на аффинной прямой, а лишь на проективной, получаемой из оси x добавлением точки ∞.

С каждым векторным полем и каждой точкой фазового пространства связан *локальный фазовый поток*: однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, определенных в некоторой окрестности этой точки. Отображения локального фазового потока соответствуют некоторому интервалу оси времен и обладают групповым свойством:

$$g^{t+s} = g^t \circ g^s; \quad g^{-t} = (g^t)^{-1};$$

первое равенство справедливо при всех t и s из некоторой окрестности нуля и при всех x из некоторой окрестности данной точки. Поле фазовых скоростей локального фазового потока совпадает с исходным векторным полем в этой окрестности.

Локальные фазовые потоки $\{g_1^t\}$ и $\{g_2^t\}$ двух векторных полей в точках x и y *топологически эквивалентны* (сопряжены), если существует гомеоморфизм H окрестностей этих точек, переводящий x в y и сопрягающий преобразования локальных фазовых потоков: $g_2^t \circ H = H \circ g_1^t$.

1.5. Особые точки.

Определение. *Особая точка векторного поля* — это точка, в который вектор поля обращается в нуль. *Особая точка дифференциального уравнения* $\dot{x} = v(x)$ — это особая точка соответствующего векторного поля v.

Пусть f — дифференцируемое отображение области U пространства $\mathbf{R}^n$ в область W пространства $\mathbf{R}^m$. *Производной отображения* f в точке x_0 называется «главная линейная часть» отображения f в точке x_0, точнее — линейный оператор A: $\mathbf{R}^n \to$

$\to \mathbf{R}^m$ такой, что

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+o(x-x_0).$$

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,\ldots,y_m)$ — координаты в прообразе и образе соответственно. Тогда отображение f записывается в виде вектор-функции $y=(f_1(x),\ldots,f_m(x))$. Это означает, что $y_k\circ f=f_k$. Матрица оператора A в координатах x, y — это якобиева матрица вектор-функции $f=(f_1,\ldots,f_m)$. Производная отображения и соответствующая матрица обозначаются одинаково:

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)=f_*(x_0),\quad A=(a_{ij}),\quad a_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0).$$

Дифференцируемое векторное поле — это поле с дифференцируемыми компонентами.

Пусть x_0 — особая точка дифференцируемого векторного поля v, $\partial v/\partial x$ — производная отображения $v{:}x\mapsto v(x)$.

Уравнение

$$\dot{x}=Ax,\quad A=\frac{\partial v}{\partial x}(x_0)$$

называется *линеаризацией уравнения* (1) *в особой точке* x_0, поле Ax — *линейной частью поля* v в точке x_0, A — оператор этой линейной части; иногда вместо $\partial v/\partial x$ пишется v_*.

Особая точка векторного поля называется *невырожденной*, если оператор линейной части поля в этой точке невырожден.

Особые точки дифференциального уравнения иногда называют также положениями равновесия. Собственные значения оператора линеаризации векторного поля в особой точке a (оператора $\partial v/\partial x(a)$) называют иногда собственными значениями особой точки.

1.6. Действие диффеоморфизма на векторное поле.

Определение. При диффеоморфизме $f: U\to W$ векторное поле v, заданное в области U, переходит в векторное поле $\tilde{v}$, заданное в области W по следующему правилу. Пусть движущаяся в U точка $\varphi(t)$ в момент $t=0$ выходит из x со скоростью $v(x)$. Тогда точка $f(\varphi(t))$ выходит из $y=f(x)$ со скоростью $\tilde{v}(y)$.

Это определение корректно ($\tilde{v}$ не зависит от выбора движения φ). Это показывает, например, теорема о дифференцировани и сложной функции: $\tilde{v}(y)=(f_*v)(x)$, $y=f(x)$. Иными словами, производная отображения f в x переводит вектор поля v в точке x в вектор поля $\tilde{v}$ в точке $f(x)$.

1.7. Первые интегралы.

Определение. Гладкая функция, постоянная на фазовых кривых автономного дифференциального уравнения, называется (не зависящим от времени) *первым интегралом* этого уравнения.

Зависящий от времени первый интеграл (вообще говоря, неавтономного уравнения) — это функция в расширенном фазовом пространстве, постоянная на интегральных кривых.

Полной системой первых интегралов дифференциального уравнения (автономного или неавтономного), зависящих или не зависящих от времени, называется такой набор первых интегралов, что любой другой первый интеграл является функцией от первых интегралов набора.

Пример. Уравнение $\dot{x}=x$, $\dot{y}=y$ на плоскости не имеет непостоянных (отличных от константы) первых интегралов, не зависящих от времени. То же уравнение имеет полную систему из двух зависящих от времени первых интегралов, а именно xe^{-t}, ye^{-t}.

1.8. Дифференциальные уравнения с комплексным временем. *Векторное поле*, заданное в области пространства $\mathbf{C}^n$, называется *голоморфным*, если его компоненты — голоморфные функции. Аналогично определяется голоморфное отображение $U\to W$, $U\subset\mathbf{C}^n$, $W\subset\mathbf{C}^m$.

Дифференциальным уравнением с комплексным временем (или комплексным автономным уравнением) называется уравнение вида

$$\frac{dz}{dt}=v(z), \quad z\in U\subset\mathbf{C}^n, \quad t\in\mathbf{C}.$$

Все определения пп. 1.1—1.7 переносятся очевидным образом с вещественных автономных уравнений на комплексные.

1.9. Голоморфные поля направлений в комплексной области. *Голоморфное поле направлений* — это соответствие, которое каждой точке некоторой области U пространства $\mathbf{C}^n$ сопоставляет проходящую через нее комплексную прямую, аналитически зависящую от точки. Это значит, что в окрестности каждой точки области U можно так выбрать голоморфную систему координат, что прямая, проходящая через точку U, имеет направляющий вектор $(1, v_2(z), \ldots, v_n(z))$; функции v_j голоморфны. *Интегральной кривой голоморфного поля направлений* называется голоморфная кривая, которая во всех своих точках касается направлений поля, связна и максимальна, то есть не является собственным подмножеством связной голоморфной кривой, касающейся во всех своих точках направлений поля.

Пример 1. Поле направлений, задаваемое эйлеровым векторным полем $z_1\partial/\partial z_1+z_2\partial/\partial z_2$, определено на проколотой плоскости $\mathbf{C}^2\setminus\{0\}$. Его интегральными кривыми являются прямые, проходящие через нуль, с выколотой точкой нуль. Эта точка, по определению, не принадлежит интегральным кривым, поскольку поле направлений не продолжается в нее аналитически. Точка $\{0\}$ не принадлежит интегральным кривым, хотя ее добавление оставляет кривые голоморфными.

Пример 2. Интегральными кривыми поля направлений $dH=0$, где $H(z, w)$ — многочлен, являются линии уровня многочлена H без их критических точек. Это — компактные римановы поверхности с выколотыми точками.

Тем самым, интегральные кривые поля направлений в комплексной области топологически могут быть сложнее, чем вещественные интегральные кривые, которые всегда гомеоморфны прямой $\mathbf{R}$. Отметим, что вещественные фазовые кривые либо топологически эквивалентны прямой или окружности, либо состоят из одной точки.

1.10. Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальное уравнение

$$x^{(n)}=f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}), \quad x \in \mathbf{R}^1, \tag{3}$$

сводится к системе вида (2) с помощью замены $y=(x, \dot{x}, \ldots \ldots, x^{(n-1)})$. Тогда

$$\dot{y}=\Delta y+f(t, y)\, e_n, \quad e_n=(0, 0, \ldots, 0, 1),$$

матрица Δ — жорданова верхнетреугольная клетка с нулями на диагонали. Решение уравнения (3) с начальным условием $x(t_0)=y_0$, $\dot{x}(t_0)=y_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0)=y_{n-1}$ — это первая компонента решения соответствующей системы с начальным условием $y(t_0)=(y_0, \ldots, y_{n-1})$. Основные теоремы для уравнений высших порядков выводятся из основных теорем для систем уравнений первого порядка.

1.11. Дифференциальные уравнения на многообразии. Все определения предыдущих разделов обобщаются на случай, когда вместо области вещественного или комплексного линейного пространства рассматривается вещественное или комплексное многообразие M. Например, автономное дифференциальное уравнение задается векторным полем на многообразии (сечением касательного расслоения). Подробности можно найти в книгах [7], [24], [47].

§ 2. Основные теоремы

В этом параграфе излагается теорема о выпрямлении векторного поля и следствия из нее. Всюду для простоты формулировок требуется гладкость (то есть бесконечная дифференцируемость) рассматриваемых векторных полей. Однако всюду, кроме п. 2.6, достаточно потребовать только C^1 — гладкости полей; в п. 2.6 необходимые требования гладкости сформулированы явно.

2.1. Теорема о выпрямлении векторного поля.

Основная теорема теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В достаточно малой окрестности неособой точки дифференцируемое векторное поле диффеоморфно постоянному полю $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Другими словами, в некоторой окрестности неособой точки существует диффеоморфизм, переводящий исходное поле в поле e_1.

Диффеоморфизм в этой теореме называется *выпрямляющим*.

Аналогичная теорема верна для голоморфных векторных полей. Если исходное поле — класса C^r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, то выпрямляющий диффеоморфизм тоже может быть выбран класса C^r.

Дальнейшие теоремы этого параграфа являются простыми следствиями теоремы о выпрямлении векторного поля.

2.2. Теорема существования и единственности.

Теорема. Через каждую точку расширенного фазового пространства дифференцируемого (голоморфного) векторного поля проходит одна и только одна интегральная кривая соответствующего дифференциального уравнения с вещественным (комплексным) временем.

Теорема. Через каждую точку области, где задано вещественное дифференцируемое или комплексно-аналитическое поле направлений, проходит одна и только одна интегральная кривая этого поля.

Теорема становится неверной, если в ее формулировке поле направлений заменить на поле плоскостей. *Поле плоскостей* — это соответствие, сопоставляющее каждой точке области векторного пространства проходящую через нее плоскость. Интегральная поверхность поля плоскостей — это дифференцируемая поверхность, касательное пространство к которой в каждой точке совпадает с плоскостью поля.

Поле плоскостей общего положения размерности 2 или выше не имеет ни одной интегральной поверхности. Пример: поле нулей формы $dz - y\,dx$ в $\mathbf{R}^3$. Достаточные условия существования интегральных поверхностей доставляет теорема Фробениуса [8], [47].

Условие гладкости правой части в предыдущих теоремах может быть ослаблено.

Определение. Отображение $f: U \to W$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $W \subset \mathbf{R}^m$, удовлетворяет *условию Липшица*, если существует такая положительная константа L, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$$

для всех $x_1 \in U$, $x_2 \in U$.

Теорема. Пусть правая часть уравнения

$$\dot{x} = v(t, x) \qquad (2)$$

в некоторой области пространства $\mathbf{R}^{n+1}$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x (то есть в каждой плоскости $t = \text{const}$) с одной и той же константой L. Тогда через каждую точку области U проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (2).

Если правая часть уравнения (2) только непрерывна, то и тогда через каждую точку проходит хотя бы одна интегральная кривая. Однако единственность нарушается, как показывает пример уравнения $\dot{x}=x^{1/3}$ (рис. 1).

2.3. Теорема о выпрямлении поля направлений.

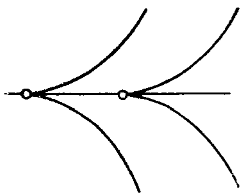


Рис. 1. Нарушение единственности.

Теорема. Каждая точка области, где задано вещественно дифференцируемое или комплексно-аналитическое поле направлений, имеет окрестность, в которой существует диффеоморфизм (соответственно, биголоморфное отображение), переводящий интегральные кривые векторного поля в параллельные прямые.

Поле плоскостей размерности выше 1 выпрямляется не всегда (пример — поле $dz=y\,dx$ в $\mathbf{R}^3$).

2.4. Приближенное решение дифференциальных уравнений.

а) Интегрирование с помощью степенных рядов.

Решение дифференциального уравнения с аналитической правой частью можно искать в виде степенного ряда методом неопределенных коэффициентов. Например, подставляя в $\dot{x}=x$ ряд $1+a_1t+\ldots$, последовательно находим коэффициенты $a_1=1$, $a_2=1/2,\ldots,a_k=1/k!$ решения с начальным условием $x(0)=1$.

б) Ломаные Эйлера.

Ломаные Эйлера состоят из отрезков, возникающих при аппроксимации решения линейными функциями на последовательных малых отрезках времени.

Вместо дифференциального уравнения (2) рассмотрим разностное

$$\varphi_{k+1}-\varphi_k=v(t_k,\ \varphi_k)h,\quad t_k=t_0+kh.$$

Из этого уравнения и начального условия $\varphi_0=x_0$ последовательно находятся $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_N$. Ломаная с вершинами (t_k,φ_k) называется *ломаной Эйлера*. На достаточно малом отрезке ($Nh\leqslant a$) ломаные Эйлера равномерно сходятся при $h\to 0$ к интегральной кривой дифференциального уравнения $\dot{x}=v(t,x)$, проходящей через начальную точку (t_0,x_0) (для сходимости достаточна непрерывность v).

Бóльшую точность при малом шаге h дают разностные уравнения, аппроксимирующие решения многочленами более высоких степеней, чем первая. Например, одна из наиболее употребительных формул *метода Рунге—Кутта* так задает вершину ломаной

$(x+h,\ y+\Delta y)$, следующую за (x, y) [13, с. 455]:

$$\Delta y = \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4),$$

где

$$k_1 = hv(x, y), \quad k_2 = hv\left(x + \frac{h}{3},\ y + \frac{k_1}{3}\right),$$

$$k_3 = hv\left(x + \frac{2h}{3},\ y - \frac{k_1}{3} + k_2\right), \quad k_4 = hv(x + h,\ y + k_1 - k_2 + k_3).$$

Вычисленное по этой формуле приращение Δy приближает приращение искомого решения с точностью $O(h^5)$.

в) Метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательность отображений $\varphi_k : I \to \mathbf{R}^n$, заданных рекуррентно:

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \quad \varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi_k(\tau))\, d\tau.$$

Отображения φ_k называются пикаровскими приближениями решения φ уравнения (2) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$. Если интервал I достаточно мал, то последовательность пикаровских приближений равномерно сходится к решению φ на интервале I не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем, пропорциональным длине интервала. (На самом деле, пикаровские приближения сходятся быстрее любой прогрессии.)

2.5. Теорема о продолжении.

Определение. *Продолжением* решения φ дифференциального уравнения называется решение, определенное на бо́льшем интервале оси времени и совпадающее с φ на интервале определения φ. Продолжение называется неограниченным вправо (влево), если оно определено на неограниченном вправо (влево) луче, вещественной оси. Решение продолжается до некоторого подмножества фазового пространства (или расширенного фазового пространства), если существует такое его продолжение, что соответствующая фазовая кривая (интегральная кривая) пересекает указанное множество.

Теорема. Пусть правая часть уравнения (1)

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U \subset \mathbf{R}^n$$

дифференцируема и K — компактное замыкание подобласти области U, содержащееся в U. Тогда каждое решение уравнения (1) с начальным условием из K продолжается вправо (влево) либо до границы множества K, либо неограниченно по времени. Решение неавтономного уравнения с начальным условием из компакта в расширенном фазовом пространстве продолжается до границы этого компакта.

Замечание. Дифференциальные уравнения со сколь угодно гладкой правой частью могут иметь решения, не продолжаемые на всю ось времени.

Пример. Решение уравнения $\dot{x}=x^2$ уходит на бесконечность за время $t=x(0)^{-1}$.

2.6. Теорема о дифференцируемой и аналитической зависимости решений от начальных условий и параметров.

Теорема. Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=v(t,\ x,\ \alpha),\ x\in U,\ U\subset\mathbf{R}^n, \qquad (\alpha)$$

заданных в фазовом пространстве U векторными полями v класса C^r, дифференцируемо (класса C^r) зависящими от параметра $\alpha\in A$, где A — область в вещественно линейном конечномерном пространстве $\mathbf{R}^a$. Тогда решение φ уравнения (α) с начальным условием $\varphi(t_0)=x$ дифференцируемо (класса C^r) зависит от t, x, α при достаточно малых $|t-t_0|$, $|x-x_0|$, $|\alpha-\alpha_0|$. ▲

Аналогичная теорема верна для уравнений с комплексным временем, только U и A являются областями в $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{C}^a$ соответственно (a — комплексная размерность пространства параметров), а вектор-функция v голоморфна в области, принадлежащей прямому произведению $\mathbf{C}\times U\times A$.

2.7. Уравнение в вариациях. Уравнение для первой производной решения по начальным условиям можно легко выписать явно. А именно, пусть φ_ξ — решение уравнения $\dot{x}=v(t,x)$ с начальным условием $\varphi_\xi(0)=\xi$. Фиксируем ξ и положим

$$X(t)=\left.\frac{\partial\varphi_\xi(t)}{\partial\xi}\right|_{\xi=x_0};$$

$X(t)$ — линейный оператор $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, зависящий от t. Операторнозначная функция X удовлетворяет следующему *уравнению в вариациях*:

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t), \quad \text{где} \quad A(t)=(\partial v/\partial x)|_{x=\varphi_{x_0}(t)}.$$

Это — линейное однородное неавтономное уравнение.

Запишем уравнения в вариациях для производной решения по параметрам. Пусть $\varphi_{\alpha,\xi}$ — решение уравнения (α) с начальным условием $\varphi_{\alpha,\xi}(0)=\xi$. Фиксируем $\xi=x_0$ и $\alpha=\alpha_0$ и положим

$$Y(t)=\left.\frac{\partial\varphi_{\xi,\alpha}(t)}{\partial\alpha}\right|_{\substack{\xi=x_0\\ \alpha=\alpha_0}};$$

$Y(t)$ — линейный оператор $\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^n$, зависящий от t. Операторнозначная функция Y удовлетворяет следующему уравнению в вариациях

$$\dot{Y}(t)=A(t)Y(t)+b(t), \quad \text{где} \quad A(t)=(\partial v/\partial x)|_{x=\varphi_{\alpha_0,x_0}(t)},$$

$$b(t)=(\partial v/\partial\alpha)|_{x=\varphi_{\alpha_0,x_0}(t)}.$$

Это — линейное неоднородное неавтономное уравнение.

2.8. Теорема о непрерывной зависимости. Если в предыдущей теореме зависимость поля v от параметра α лишь непрерывная, то тогда и зависимость решения от параметра непрерывна.

Зависимость решения от начального условия для уравнения с дифференцируемой правой частью всегда не только непрерывная, но и дифференцируемая.

2.9 Теорема о локальном фазовом потоке. Из теорем существования, единственности и дифференцируемой зависимости решений от начальных условий следует, что дифференцируемое векторное поле в окрестности любой точки фазового пространства задает локальный фазовый поток

2.10. Теорема о первых интегралах. Автономное уравнение с дифференцируемой правой частью в некоторой окрестности каждой неособой точки n-мерного фазового пространства имеет полную систему из $(n-1)$ функционально независимых и не зависящих от времени первых интегралов $I_1, \ldots, I_{n-1}$. Фазовые кривые уравнения (1) в этой окрестности задаются системой $I_1=c_1, \ldots, I_{n-1}=c_{n-1}$.

Для неавтономного уравнения (2) с n-мерным фазовым пространством существует полная система из n зависящих от времени локальных функционально независимых первых интегралов $I_1, \ldots, I_n$. Система $I_1=c_1, \ldots, I_n=c_n$ задает локальные интегральные кривые уравнения.

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения

Линейные автономные уравнения — едва ли не единственный большой класс дифференциальных уравнений, для которых имеется полная теория. Эта теория, являющаяся, в сущности, ветвью линейной алгебры, позволяет полностью решить все линейные автономные уравнения.

3.1. Экспонента линейного оператора. Пусть V—n-мерное вещественное или комплексное пространство, наделенное евклидовой или эрмитовой структурой соответственно, $|\cdot|$ — норма вектора в этом пространстве.

Нормой линейного оператора $A: V\to V$ называется супремум:

$$\|A\|=\sup_{|x|=1}|Ax|.$$

Этот супремум достигается ввиду компактности конечномерной сферы.

Последовательность линейных операторов $A_k: V\to V$ сходится к оператору $A: V\to V$, если $\|A_k-A\|\to 0$ при $k\to\infty$.

Определение. *Экспонентой* линейного оператора $A: V\to V$

называется оператор из V в V:

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots,$$

где E — тождественный оператор: $Ex = x$.

Эквивалентное определение:

$$e^A = \lim_{k\to\infty} \left(E + \frac{A}{k}\right)^k.$$

3.2. Теорема о связи фазовых потоков линейных векторных полей и экспонент линейных операторов.

Теорема. Любая однопараметрическая группа диффеоморфизмов, состоящая из линейных преобразований g^t: $V \to V$, имеет вид: $g^t = e^{At}$, где $A: V \to V$ — некоторый линейный оператор (производящий оператор группы). Решение линейного уравнения $\dot{x} = Ax$, $x \in V$ с начальным условием $\varphi(0) = \xi$ имеет вид

$$\varphi(t) = e^{At}\xi.$$

3.3. Комплексификация фазового пространства. *Комплексификацией* вещественного n-мерного линейного пространства V называется n-мерное комплексное пространство ${}^{\mathbf{C}}V$, которое строится следующим образом. Точки пространства ${}^{\mathbf{C}}V$ — это пары (ξ, η), обозначаемые $\xi + i\eta$, $\xi \in V$, $\eta \in V$. Операции сложения и умножения на комплексные числа определяются обычным способом.

Комплексификация линейного оператора $A: V \to V$ — это оператор ${}^{\mathbf{C}}A: {}^{\mathbf{C}}V \to {}^{\mathbf{C}}V$, действующий по следующему правилу:

$${}^{\mathbf{C}}A(\xi + i\eta) = A\xi + iA\eta.$$

Решения линейного автономного уравнения продолжаются неограниченно. Далее под решением линейного уравнения понимается решение, определенное на всей оси времени.

Из теоремы п. 3.2 следует, что пространство решений уравнения $\dot{x} = Ax$, $x \in V$, линейно и изоморфно V. Базис в этом пространстве называется *фундаментальной системой решений*. Переход от уравнения

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in V,$$

к уравнению

$$\dot{z} = {}^{\mathbf{C}}Az, \quad z \in {}^{\mathbf{C}}V, \tag{4}$$

называется комплексификацией (время остается вещественным).

Комплексифицированное уравнение (4) относительно $z = x + iy$ эквивалентно системе $\dot{x} = Ax$, $\dot{y} = Ay$ ($x \in V$, $y \in V$).

Линейное автономное уравнение с комплексным фазовым пространством (например, уравнение (4)) легко решается переходом к жорданову базису.

Пусть $\xi_0, \ldots, \xi_j$ — жорданова цепочка оператора ${}^{\mathrm{c}}A$ с собственным числом λ, то есть такая последовательность векторов, что оператор ${}^{\mathrm{c}}A-\lambda E$ (где λ — комплексное число) переводит их друг в друга:

$$\xi_0 \mapsto \xi_1 \mapsto \ldots \mapsto \xi_j \mapsto 0.$$

Вектор ξ_j называется собственным, а остальные векторы цепочки — присоединенными векторами собственного числа λ.

Вектор-функция

$$z=e^{\lambda t}\left(\xi_0+\frac{t}{1!}\xi_1+\ldots+\frac{t^j}{j!}\xi_j\right)$$

— решение уравнения $\dot{z}={}^{\mathrm{c}}Az$ с начальным условием ξ_0.

У каждого комплексного линейного оператора есть базис из жордановых цепочек. Поэтому из решений указанного выше вида можно составить фундаментальную систему решений.

3.4. Седло, узел, фокус, центр. Невырожденная особая точка линейного векторного поля на вещественной плоскости бывает одного из следующих четырех типов: *седло, узел, фокус, центр* (рис. 2). Пусть λ_1 и λ_2 — собственные значения соответствующего линейного оператора A, отличные от нуля в силу предположения невырожденности. Тогда если $\lambda_1 \lambda_2<0$, особая точка уравнения

$$\dot{x}=Ax$$

— седло (рис. 2а); если λ_1 и λ_2 вещественны и одного знака — узел (рис. 2б, в, г); если λ_1 и λ_2 невещественны и не чисто мнимы — фокус (рис. 2д); если λ_1 и λ_2 чисто мнимы — центр (рис. 2е). Среди узлов выделяются *жордановы узлы*[1]: матрица A эквивалентна жордановой клетке порядка 2 (рис. 2в), и дикритические узлы: матрица A скалярна (рис. 2г). Рисунки 2б—2д нарисованы для случая, когда $\operatorname{Re}\lambda_j>0$.

Все эти картинки, кроме последней, сохраняются при малых возмущениях, как показывают формулируемые в главе 3 теоремы Гробмана—Хартмана (P. Hartman) и Адамара—Перрона (J. Hadamard, O. Perron).

3.5. Формула Лиувилля—Остроградского. Пусть операторнозначная функция одного переменного удовлетворяет уравнению

$$\dot{X}=A(t)X, \quad t\in I\subset \mathbf{R}.$$

---

[1] Традиционное название этой невырожденной особой точки — «вырожденный узел».

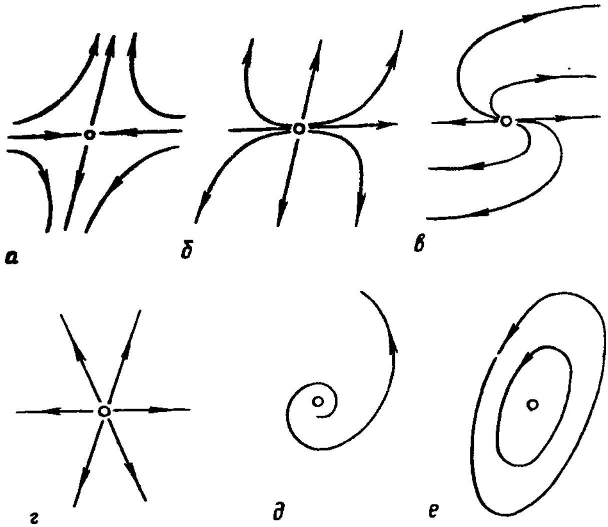


Рис. 2.

а) седло, б) узел, в) жорданов узел, г) дикритический узел, д) фокус, е) центр.

Тогда определитель $W = \det X$ (называемый *определителем Вронского*) удовлетворяет уравнению

$$\dot{W} = \operatorname{tr} A(t) W, \tag{5}$$

где $\operatorname{tr} A$ — след оператора A (сумма собственных значений). Из (5) следует формула для W:

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau.$$

Следствие. Обозначим через $V(t)$ евклидов объем области $g^t M$, в которую переводит область M фазовый поток векторного поля v (заданного в области евклидова пространства). Тогда

$$\frac{dV}{dt} = \int_{g^t M} \operatorname{div} v\, dx,$$

где dx — евклидов элемент объема.

Из формул (5) и из уравнения в вариациях по начальному условию (п. 2.7) следует формула для искажения фазового объема: якобиан $W(t, x) = \det \left(\frac{\partial g^t}{\partial x} \right) \Big|_{(t,x)}$ равен

$$W(t, x) = \exp \int_0^t (\operatorname{div} v) \circ (g^\tau x)\, d\tau.$$

В частности, если $\operatorname{div} v \equiv 0$, то фазовый поток уравнения $\dot{x}=v(x)$ сохраняет объем. Если $\operatorname{div} v<0$ всюду в фазовом пространстве, то преобразование фазового потока за положительное время уменьшает объем. Уравнение называется в этом случае *диссипативным*.

3.6. Линейные уравнения высших порядков. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^{(n)}+a_1(t)\,x^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)\,x=0. \tag{6}$$

Максимальный интервал, на котором все коэффициенты a_i непрерывны, называется интервалом непрерывности коэффициентов уравнения (6). Он определен неоднозначно; например, если $a_i(t)=t^{-1}$, то существует два интервала непрерывности коэффициентов: $t>0$ и $t<0$.

Теорема. Все решения уравнения (6), определенные в некоторой точке интервала непрерывности коэффициентов, продолжаются до решений, определенных на всем этом интервале.

Пространство решений уравнения (6), определенных на общем интервале непрерывности коэффициентов, лииейно и n-мерно. Базис в этом пространстве называется *фундаментальной системой решений.*

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — система решений уравнения (6). Функция

$$W(t)=\begin{vmatrix} \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ \dot{\varphi}_1 & \ldots & \dot{\varphi}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* этой системы.

Формула Лиувилля—Остроградского:

$$W(t)=W(0)\exp\left(-\int_0^t a_1(\tau)\,d\tau\right).$$

§ 4. Устойчивость

Здесь приведены простейшие результаты теории устойчивости. Более подробное обсуждение разных видов устойчивости см. в [48], [71], [42].

4.1. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая.

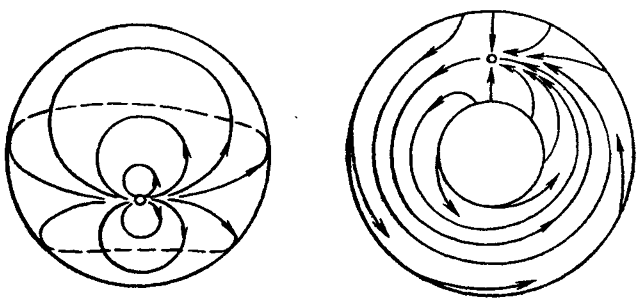
Определение. Стационарное решение автономного дифференциального уравнения (решение, тождественно равное положению равновесия) называется *устойчивым (по Ляпунову)*, если все решения этого уравнения с начальными условиями из достаточно малой окрестности указанного положения равновесия определены на всей положительной полуоси времени и равномерно по времени сходятся к исследуемому стационарному решению при стремлении начального условия к указанному положению равновесия.

Определение. Стационарное решение называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения, с достаточно близкими к изучаемому положению равновесия начальными условиями, стремятся к этому положению равновесия при $t \to +\infty$.

Замечание 1. Определение устойчивости предусматривает задание в фазовом пространстве некоторой метрики, при помощи которой определяется равномерная сходимость. Однако ни устойчивость, ни асимптотическая устойчивость положения равновесия от этой метрики не зависят.

Замечание 2. Устойчивость (и асимптотическая устойчивость) стационарного решения — локальное свойство векторного поля, задающего дифференциальное уравнение, в изучаемом положении равновесия: они не теряются и не приобретаются при изменении поля вне окрестности этого положения равновесия.

Замечание 3. Стремление решений к положению равновесия при $t \to \infty$ недостаточно для асимптотической устойчивости, как показывает рис. 3 (и не является локальным свойством).



а б

Рис. 3. Неустойчивая особая точка, к которой стремятся все фазовые кривые с началом в ее окрестности.

Замечание 4. Аналогично предыдущему, определяется устойчивость по Ляпунову любого решения любого дифференциального уравнения (автономного или нет); это — равномерная сходимость решений на полуоси $t \geqslant 0$ к рассматриваемому решению при стремлении начальных значений этих решений при $t=0$ к начальному значению изучаемого решения. Равномерная сходимость здесь определяется при помощи некоторой метрики в фазовом (или расширенном фазовом) пространстве (или многообразии). В отличие от случая положения равновесия автономной системы, определенная таким образом устойчивость зависит от выбранной метрики. Например, устойчивое решение автономного уравнения с евклидовым фазовым пространством может сделаться неустойчивым после диффеоморфизма фазового пространства. Таким образом, устойчивость движения зависит от координат, при помощи которых движение описывается.

Аналогичное замечание относится к понятию асимптотической устойчивости.

Устойчивость периодического решения автономного уравнения (как и для стационарного решения) — понятие геометрическое, не зависящее от выбора координат или метрики в фазовом пространстве. (Вообще, такая независимость имеет место всякий раз, когда замыкание фазовой кривой компактно.)

4.2. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Теорема. Если оператор линеаризации дифференцируемого векторного поля v в особой точке имеет собственные значения только с отрицательной вещественной частью, то эта особая точка асимптотически устойчива. Если одно из упомянутых собственных значений имеет положительную вещественную часть, то эта особая точка не устойчива по Ляпунову.

4.3. Функция Ляпунова и функция Четаева.

Определение. Дифференцируемая функция f называется *функцией Ляпунова* для особой точки x_0 векторного поля v, если она удовлетворяет следующим условиям:

Функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке строгий локальный минимум.

Производная функции f вдоль векторного поля v в некоторой окрестности точки x_0 неположительна: $L_v f \leqslant 0$[1].

Теорема ([49]). Особая точка дифференцируемого векторного поля, для которой существует функция Ляпунова, устойчива.

Определение. Дифференцируемая функция f называется *функцией Четаева* для особой точки x_0 векторного поля v, если она удовлетворяет следующим условиям:

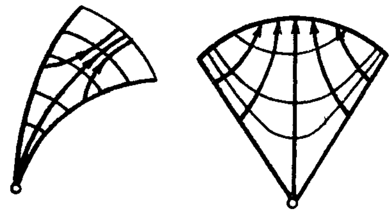
Функция f определена в области W, на границе которой лежит точка x_0; та часть границы этой области, которая лежит строго внутри достаточно малого шара с выколотым центром x_0, является кусочно-гладкой гиперповерхностью класса C^1 и в ее точках векторы поля v направлены внутрь области (рис. 4); $f(x) \to 0$ при $x \to x_0$, $x \in W$; $f > 0$ и $L_v f > 0$ всюду в W.

Теорема ([71]). Особая точка C^1-дифференцируемого векторного поля, для которой существует функция Четаева, неустойчива.

4.4. Особые точки общего положения. Оператор A линейной части векторного поля в особой точке поля общего положения

[1] Производной функции вдоль векторного поля называется скорость изменения функции вдоль фазовых кривых поля: $L_v f(x) = \frac{d}{dt} f \circ g^t x|_{t=0}$.

не имеет собственных значений на мнимой оси. В этом случае применима теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. В качестве функции Ляпунова (или функции Четаева) можно взять квадратичную форму. Пусть комплексифицированный оператор имеет базис из собственных векторов. Если все собственные значения лежат в левой полуплоскости, то в качестве функции Ляпунова можно взять сумму квадратов модулей координат в собственном базисе (ограниченную на вещественное подпространство).



а *б*

Рис. 4. Область определения функции Четаева: тонкие линии изображают поверхности уровня функции, толстые — границы области и фазовые кривые поля.

Замечание. Если собственного базиса нет, то для любого $\varepsilon>0$ есть почти собственный базис, в котором матрица оператора верхнетреугольная и наддиагональные элементы по модулю меньше ε. При достаточно малом ε сумма квадратов модулей координат в этом базисе — функция Ляпунова. Для особых точек общего положения собственный базис есть.

Пусть оператор A имеет хотя бы одно собственное значение в правой полуплоскости. Тогда в качестве функции Четаева годится та же форма f, рассматриваемая в подходящем конусе W с вершиной 0 в пространстве $\mathbb{R}^n$ (рис. 4б).

Замечание. Стационарное решение неавтономного уравнения $\dot{x}=Ax+f(t, x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, для которого все собственные числа оператора A лежат строго в левой полуплоскости, асимптотически устойчиво, если $|f(t, x)|\leqslant C|x|^2$ при всех $t\geqslant0$, $|x|\leqslant a$. Стремление решений к нулю при этом экспоненциальное: $|\varphi(t)|\leqslant K_\alpha(\exp(-\alpha t))|\varphi(0)|$ при $t\geqslant0$ для любого $\alpha>0$ такого, что все $\mathrm{Re}\lambda_j<-\alpha$.

§ 5. Циклы

В физических системах, закон эволюции которых не меняется со временем, могут устанавливаться периодические режимы. Математическое описание этого явления дает теория циклов (замкнутых фазовых кривых), развитая А. Пуанкаре (H. Poincaré).

5.1. Строение фазовых кривых вещественных дифференциальных уравнений.

Теорема. Фазовая кривая вещественного дифференциального уравнения $\dot{x}=v(x)$ с гладкой правой частью либо состоит из одной точки, либо диффеоморфна окружности или прямой.

Таким образом, индивидуальная фазовая кривая уравнения с вещественным временем всегда имеет простую внутреннюю геометрию; сложным может быть только ее расположение в фазовом пространстве.

Фазовая кривая, диффеоморфная окружности, называется *циклом.*

5.2. Преобразование монодромии замкнутой фазовой кривой. Предельные циклы. Предположим, что гладкое векторное поле имеет замкнутую фазовую кривую (цикл). Выберем на этой кривой точку и проведем через эту точку трансверсаль к циклу (гладкую гиперповерхность, то есть поверхность размерности $n-1$, если размерность фазового пространства n). Фазовые кривые, начинающиеся в точках трансверсали, достаточно близких к исходной точке цикла, возвращаются на трансверсаль. Сопоставим точке трансверсали (достаточно близкой к исходной точке цикла) первую точку возвращения выходящей из точки фазовой кривой на трансверсаль. Определенный таким образом росток отображения трансверсали на себя (в точке цикла) называется *отображением последования* или *преобразованием монодромии.*

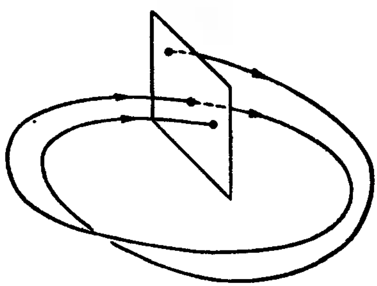
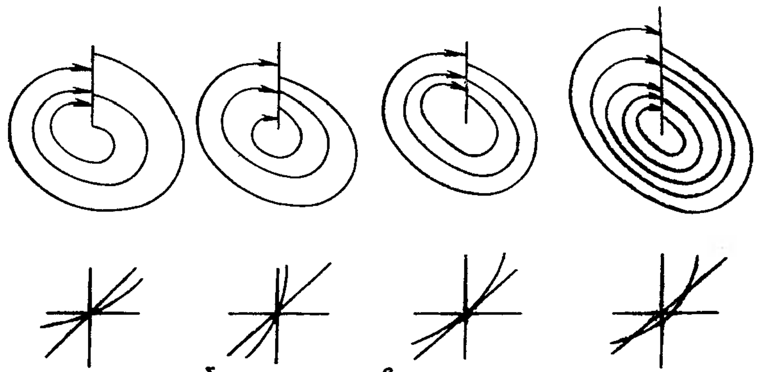


Рис. 5. Преобразование монодромии цикла.

Точка цикла является неподвижной точкой преобразования монодромии. Преобразование монодромии не зависит от выбора трансверсали и даже от выбора исходной точки в том смысле, что преобразования монодромии, отвечающие разным трансверсалям, сопряжены (переводятся одно в другое ростком диффеоморфизма трансверсалей).

Определение. *Предельным циклом* автономного дифференциального уравнения на плоскости называется изолированная (диффеоморфная окружности) фазовая кривая этого уравнения. Иными словами, замкнутая фазовая кривая называется предельным циклом, если соответствующая ей неподвижная точка преобразования монодромии изолирована.

Окрестность предельного цикла на плоскости состоит из спиралей, наматывающихся на цикл при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$; асимптотическое поведение фазовых кривых, расположенных по одну сторону от цикла вблизи его, одинаковое (рис. 6). На рисунках 6а и 6б изображены предельные циклы общего положения; картина 6в разрушается малым возмущением (рис. 6г).



а б в г

Рис. 6. Внизу нарисованы графики преобразований монодромии, соответствующие предельным циклам наверху:
а) устойчивый цикл, б) неустойчивый, в) полуустойчивый, Картина г) получается малым возмущением картины в).

5.3. Кратность циклов.

Определение. *Кратностью цикла* называется локальная кратность соответствующей ему неподвижной точки преобразования монодромии.

Если фазовое пространство двумерно, то трансверсаль одномерна, и преобразование монодромии задается функцией одного переменного, $x \mapsto \Delta(x)$, $\Delta(0)=0$. В этом случае кратность — порядок нуля функции $\Delta(x)-x$ в точке 0.

Кратность отображения $x \mapsto \Delta(x)$ *в неподвижной точке* 0 пространства $\mathbf{R}^n$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ определяется как

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]/(\Delta_1(x)-x_1, \ldots, \Delta_n(x)-x_n),$$

где числитель — алгебра формальных степенных рядов, а знаменатель — идеал в ней, порожденный рядами компонент вектора $\Delta(x)-x$. Подробнее о кратности см., например, [10] [1].

5.4. Мультипликаторы.

Определение. *Мультипликаторами цикла* называются

[1] Аналогично, *кратность особой точки* 0 векторного поля v определяется как кратность неподвижной точки 0 отображения $x \mapsto v(x)$. Подробнее см. [10, с. 212].

собственные значения линейной части преобразования монодромии этого цикла в соответствующей циклу неподвижной точке[1].

Цикл называется *невырожденным*, если все его мультипликаторы отличны от 1[2]:

Невырожденный цикл сохраняется при малых возмущениях; возмущенное дифференциальное уравнение по-прежнему имеет невырожденный цикл, близкий к исходному. Циклы векторных полей общего положения невырожденные.

Для уравнений (1) на плоскости мультипликатор цикла вычисляется по формуле

$$\lambda = \exp \int_{\gamma} (\operatorname{div} v)\, dt,$$

где цикл γ параметризован временем t. Для цикла в $\mathbf{R}^n$ правая часть равна произведению всех мультипликаторов.

Определение. Цикл называется *орбитально устойчивым* (по Ляпунову), если для сколь угодно малой его окрестности U все положительные полутраектории, начинающиеся в достаточно малой окрестности цикла, не выходят из U.

Определение. Цикл называется *орбитально асимптотически устойчивым*, если он орбитально устойчив по Ляпунову и все фазовые кривые с достаточно близким к циклу начальным условием неограниченно приближаются к нему при $t \to +\infty$.

Замечание. Асимптотически устойчивым непостоянное периодическое решение никак не может быть, ибо решения с начальными условиями в разных точках цикла не сближаются при $t \to \infty$.

Если все мультипликаторы цикла по модулю меньше 1, то он орбитально асимптотически устойчив. Устойчивость следует из того, что отображение монодромии при $|\lambda_j| < 1$ — сжимающее при подходящем выборе метрики на трансверсали. Эта метрика строится так же, как функция Ляпунова вблизи особой точки, асимптотически устойчивой по первому приближению. Из сжатия вытекает орбитальная асимптотическая устойчивость: близкие фазовые кривые наматываются на цикл как спирали. Можно доказать, что фаза движения вдоль цикла при этом стремится к фазе движения одной из точек по циклу. Отсюда следует равномерная близость (на полуоси $t \geqslant 0$) не только фазовой кривой, но и любого решения, отвечающего близкому к циклу начальному условию, к одному из решений, описывающих движение по циклу.

---

[1] Мультипликаторы цикла определяют часто как собственные значения оператора монодромии (см. ниже п. 3.1, гл. 6) уравнения в вариациях; это определение отличается от принятого в нашей статье наличием мультипликатора 1, соответствующего собственному вектору, касающемуся цикла.

[2] Невырожденный цикл называют иногда грубым.

5.5. Предельные множества и теорема Пуанкаре — Бендиксона. Расположение фазовых кривых на вещественной плоскости существенно проще, чем в многомерном пространстве (в теории дифференциальных уравнений «много» значит «три и более»). Это различие обусловлено тем, что кривая локально разделяет плоскость и не разделяет пространства.

Определения. 1. *Положительной полутраекторией* автономного уравнения называется часть фазовой кривой, соответствующая положительно ориентированному лучу оси времен:

$$\varphi_+ = \{\varphi(t) \mid t \in [t_0, +\infty)\},$$

где φ — решение уравнения.

2. Аналогично определяется *отрицательная полутраектория.*

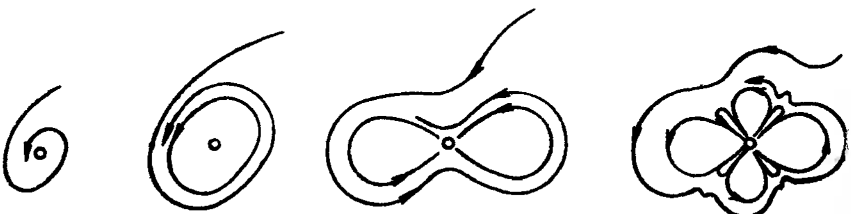
3. ω-*предельным* (α-*предельным*) *множеством* фазовой кривой называется пересечение замыканий всех ее положительных (отрицательных) полутраекторий. Другими словами, ω — предельное множество Ω состоит из точек, мимо которых (или через которые) положительная полутраектория проходит счетное число раз:

$x \in \Omega$, если и только если существует последовательность $\{t_n\}$ такая, что $t_n \to +\infty$, $\varphi(t_n) \to x$ при $n \to \infty$.

Обозначение мотивируется тем, что α — первая, ω — последняя буква греческого алфавита.

Теорема Пуанкаре — Бендиксона (I. Bendixson). Пусть положительная полутраектория C^1-гладкого векторного поля с изолированными особыми точками на вещественной плоскости расположена в ограниченной области. Тогда ω-предельное множество соответствующей фазовой кривой может быть одного из следующих трех типов: 1) особая точка, 2) цикл (замкнутая фазовая кривая), 3) объединение особых точек и фазовых кривых, каждая из которых стремится при $t \to +\infty$ к одной и при $t \to -\infty$, вообще говоря, к другой особой точке объединения (рис. 7).

В последнем случае ω-предельное множество может иметь патологический характер даже для бесконечно гладкого векторного поля с конечным числом особых точек: число фазовых кривых, принадлежащих множеству, выходящих из одной особой точки и входящих в нее же, может быть бесконеч-



а б в г

Рис. 7. ω-предельные множества

ным (рис. 7г). Чисто топологические соображения, связанные с теоремой существования и единственности, этого не запрещают. Однако это невозможно для аналитических векторных полей и для всех гладких полей, не принадлежащих некоторому исключительному множеству коразмерности бесконечность. Это следует из теорем о разрешении особенностей (гл. 5). Теорема Пуанкаре—Бендиксона верна также для уравнений на сфере, но не на сфере с ручками (см. гл. 2): замкнутая кривая разделяет сферу, но, вообще говоря, не разделяет сферу с ручками (см. [6]).

§ 6. Системы с симметриями

В этом параграфе излагаются общие соображения, позволяющие понизить порядок дифференциального уравнения, а иногда и проинтегрировать его.

6.1. Группа симметрий дифференциального уравнения.

Определение. Диффеоморфизм фазового пространства в себя называется *симметрией* заданного на нем векторного поля и соответствующего автономного дифференциального уравнения, если он переводит поле в себя. В этом случае говорят, что поле инвариантно относительно диффеоморфизма.

Определение. Диффеоморфизм расширенного фазового пространства на себя называется *симметрией поля направлений* (и соответствующего неавтономного уравнения), если он переводит поле в себя (другими словами, поле направлений инвариантно относительно диффеоморфизма).

Все симметрии дифференциального уравнения образуют группу с операцией суперпозиции, называемую *группой всех симметрий* этого уравнения.

Пример. Все симметрии автономного уравнения $\dot{x}=x$, $x\in \mathbf{R}^n$, образуют в точности полную линейную группу $GL(n, \mathbf{R})$.

6.2. Факторсистемы.

Определение. Рассмотрим гладкое отображение f области вещественно-линейного пространства на область меньшей размерности. Векторное поле v в прообразе этого отображения называется *f-опускаемым*, если существует такое поле $\tilde{v}$ на области-образе, которое получается из исходного под действием отображения f. Поле $\tilde{v}=f_*v$ определяется равенством:

$$\tilde{v}(y)=f_*(x)\,v(x),\ \text{где}\ y=f(x);$$

условие f-опускаемости состоит в том, что вектор $\tilde{v}(y)$ не зависит от выбора прообраза точки y. Система $\dot{y}=\tilde{v}(y)$ называется *факторсистемой* для системы $\dot{x}=v(x)$. Векторное поле, для которого известна однопараметрическая группа симметрий, часто опускаемо.

Пример. Уравнение на плоскости $\mathbf{R}^2$, инвариантное относительно вращений, с использованием комплексной координаты $z=x+iy$ записывается в виде

$$\dot{z}=zg(\rho), \tag{7}$$

где $\rho=z\bar{z}$, $g:\mathbf{R}^+\to\mathbf{C}$ — комплекснозначная функция на положительной полуоси. Векторное поле этой системы f-опускаемо для отображения $f:z\mapsto\rho$. Соответствующая факторсистема имеет вид

$$\dot{\rho}=2\rho\,\mathrm{Re}\,g(\rho).$$

Уравнение (7) при $\mathrm{Re}\,g(0)=0$ (центр по линейным членам) используется в теории устойчивости (§ 5, гл. 3).

Ниже указаны простейшие приложения симметрии к исследованию и интегрированию уравнений.

6.3. Однородные уравнения.

Определение. Поле направлений называется *однородным*, если оно инвариантно относительно всех растяжений

$$g^\lambda(x)=e^\lambda x,\ \lambda\in\mathbf{R},$$

(поле должно быть задано в конусе, инвариантном относительно растяжений, например в $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$). Соответствующее дифференциальное уравнение также называется *однородным*.

Обозначим через G группу растяжений $\{g^\lambda|\lambda\in\mathbf{R}\}$ области $U=\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$. Факторпространство U/G — это сфера S^{n-1}. Однородному уравнению в $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ соответствует поле направлений на сфере S^{n-1} — образ поля в U при проектировании $U\to S^{n-1}$.

Любое (возможно с особенностями) поле направлений на сфере S^{n-1} может возникнуть из однородного уравнения в $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$. Поэтому все трудности, возникающие в «глобальной» теории дифференциальных уравнений на S^{n-1}, возникают также в локальной теории дифференциальных уравнений на $\mathbf{R}^n$.

6.4. Использование симметрий для понижения порядка. Знание однопараметрической группы симметрий векторного поля позволяет на 1 понизить размерность фазового пространства. Для этого надо рассмотреть многообразие орбит однопараметрической группы симметрий. Локально (в окрестности не неподвижной точки группы) эти орбиты — кривые; исходное фазовое пространство расслоено на орбиты; по теореме о выпрямлении орбиты становятся параллельными прямыми после подходящего диффеоморфизма. Пространство орбит имеет размерность на 1 меньше, чем исходное фазовое пространство.

Векторное поле в исходном фазовом пространстве проектируется на пространство орбит и задает на нем векторное поле. Дифференциальное уравнение, соответствующее этому полю, называется факторсистемой. Если факторсистему удается проинтегрировать, то уравнение, заданное исходным векторным полем, также легко интегрируется.

В частности, если исходное фазовое пространство двумерно, то фазовое пространство факторсистемы одномерно. В этом случае факторсистема интегрируется. Поэтому автономное дифференциальное уравнение с двумерным фазовым пространством, для которого известна однопараметрическая группа симметрий, явно интегрируется в квадратурах. Все приемы элементарного интегрирования дифференциальных уравнений специальных типов (с разделяющимися переменными, линейных однородных и неоднордных, квазиоднородных и т. д.) основаны на том, что в этих случаях имеются очевидные группы симметрий.

Пример. *Группой квазиоднородных растяжений* линейного пространства с координатами $x_1, \ldots, x_n$ весов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называется однопараметрическая группа линейных преобразований

$$g^s: (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (e^{\alpha_1 s} x_1, \ldots, e^{\alpha_n s} x_n).$$

Функция в этом пространстве называется *квазиоднородной* степени r, если она является собственным вектором действия квазиоднородных растяжений на пространстве функций с собственным числом e^{rs}, т. е. $f(g^s x) \equiv e^{rs} f(x)$.

Например, многочлен $\Sigma a_m x^m$ квазиоднороден степени r, если $(m, \alpha) = r$ для всех показателей m одночленов, входящих в сумму с ненулевыми коэффициентами.

Для квазиоднородности функции при положительных весах α_i необходимо и достаточно выполнение тождества Эйлера

$$\Sigma \alpha_i x_i \partial f / \partial x_i = r \cdot f,$$

означающего, что f — собственный вектор дифференцирования по направлению эйлерова векторного поля (фазовый поток которого является группой квазиоднородных растяжений).

Векторное поле называется *квазиоднородным* степени r, если каждое из квазиоднородных растяжений группы умножает его на e^{sr}. Векторное поле $v = \Sigma v_k(x) \partial/\partial x_k$ квазиоднородно степени r тогда и только тогда, когда его компоненты — квазиоднородные функции, степени которых отличаются от степеней соответствующих координат на r: $\deg v_k = \alpha_k + r$, $\deg \partial/\partial x_k = \alpha_k$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = a(x, y)$, $\dot{y} = b(x, y)$, заданную квазиоднородным векторным полем степени 0 на плоскости с координатами весов $\deg x = \alpha$, $\deg y = \beta$. Орбиты группы имеют вид $x = x_0 e^{\alpha s}$, $y = y_0 e^{\beta s}$. За координату на факторпространстве (номер орбиты) можно (при $x > 0$, $y > 0$) принять $u = y^\alpha / x^\beta$. Факторсистема имеет вид $\dot{u} = f(u)$. Интегрирование системы завершается переходом к координатам (x, u) в фазовом пространстве.

§ 7. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной[1]

Здесь формулируются основные результаты об особенностях решений неявных дифференциальных уравнений первого порядка.

7.1. Основные понятия: криминанта, интегральные кривые. *Дифференциальным уравнением первого порядка, не разрешенным относительно производной,* называется уравнение $F(x, y, p)=0$, где $p=dy/dx$. Для гладкой функции F общего положения это уравнение задает гладкую *поверхность уравнения* в пространстве 1-струй функций $y(x)$. Проектирование поверхности уравнения на плоскость (x, y) вдоль оси p называется *складыванием.* Критические точки складывания называются *особыми точками* уравнения.

В окрестности неособой точки уравнение $F=0$ можно разрешить относительно p, т. е. свести к обычному уравнению $dy/dx=v(x, y)$, по теореме о неявной функции.

Особые точки уравнения $F=0$ образуют его *криминанту.* Для функции F общего положения криминанта — гладкая кривая. Проекция криминанты на плоскость (x, y) называется *дискриминантной кривой.* Для функции F общего положения дискриминантная кривая имеет особенностями лишь полукубические точки возврата и точки трансверсального самопересечения. Отображение складывания над точками возврата имеет особенность типа сборка (нормальная форма: $(u, v)\mapsto(u^3+uv, v)$), в остальных точках криминанты — *складку* ($(u, v)\mapsto(u^2, v)$).

Пространство 1-струй функций снабжено *полем контактных плоскостей* $dy=pdx$. Контактные плоскости высекают на поверхности уравнения *поле направлений* этого уравнения. Интегральные кривые этого поля называются *интегральными кривыми уравнения.*

7.2. Регулярные особые точки. Особая точка уравнения общего положения *регулярна,* если криминанта в ней не касается контактной плоскости.

Два уравнения называются *эквивалентными,* если одно из них переходит в другое при диффеоморфизме плоскости (x, y).

Теорема Чибрарио ((M. Cibrario), доказательство см. в [8, § 4 ж]). В окрестности регулярной особой точки уравнение эквивалентно уравнению $p^2=x$. Эта эквивалентность гладкая для гладких уравнений, аналитическая для аналитических.

На рис. 8а ядро производной складывания вертикально, криминанта — горизонтальна. Проекции частей интегральных

[1] Этот параграф написан при участии А. А. Давыдова. Он использует простейшие понятия теории особенностей и дифференциальной геометрии поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

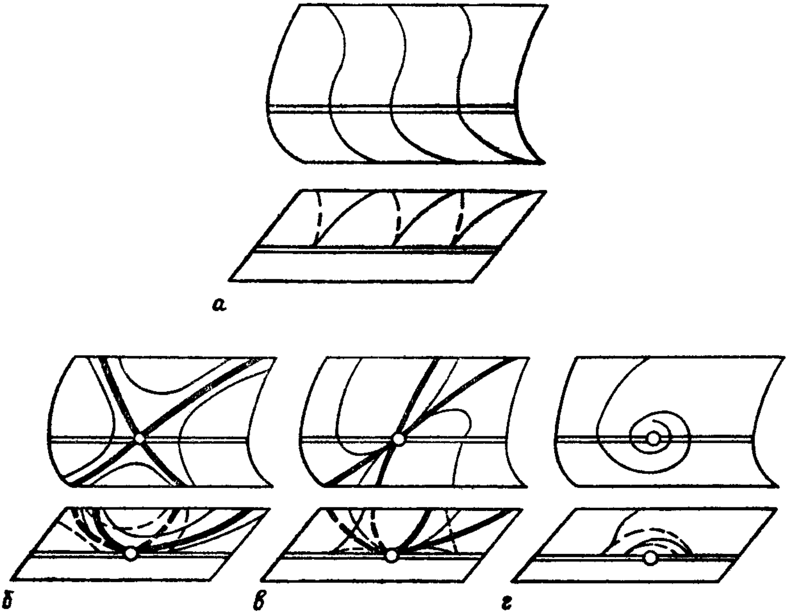


Рис. 8. Особые точки уравнеиий, ие разрешеиных относительно производиой. а) регулярная особая точка, б) сложенное седло, в) сложенный узел, г) сложенный фокус.

кривых с одного листа накрытия изображены сплошными, а с другого — штриховыми линиями.

7.3. Сложенные седла, узлы и фокусы. Контактная плоскость может коснуться поверхности уравнения. Для уравнения общего положения касание происходит в отдельных точках. Эти точки обязательно лежат на криминанте. В окрестности точки касания поле направлений порождается гладким векторным полем на поверхности уравнения, обращающимся в точке касания в 0.

Для уравнения общего положения: 1) особая точка порождающего векторного поля — невырожденное седло, узел или фокус, причем модули обоих собственных чисел узла и седла различны; 2) собственные векторы линеаризации поля в особой точке не касаются ни криминанты, ни ядра складывания (направления оси p).

Особые точки, удовлетворяющие перечисленным условиям в точке складки, называются *сложенным седлом, узлом* и *фокусом* соответственно. Их интегральные кривые и их проекции на плоскость (x, y) изображены на рис. 8б, в, г (обозначения те же, что и на рис. 8 а).

7.4. Нормальные формы сложенных особых точек. *Инволюцией* называется диффеоморфизм, квадрат которого — тождественное преобразование. Назовем инволюцию плоскости *допустимой* для векторного поля на плоскости с особой точкой нуль, если неподвижные точки инволюции образуют проходящую через нуль кривую, инволюция переводит поле на этой кривой в противоположное и ни инвариантный, ни антиинвариантный собственный вектор линеаризации инволюции в нуле не являются собственными для оператора линейной части поля в нуле.

Теорема (А. А. Давыдов, 1984). Все инволюции, допустимые для данного векторного поля с особой точкой 0 типа фокус или седло, либо узел с неравными по модулю собственными числами, кривые неподвижных точек которых не разделены собственными векторами оператора линейной части поля в нуле, локально переводятся друг в друга диффеоморфизмами плоскости, оставляющими каждую точку на проходящей через нее фазовой кривой поля.

Эта теорема и ее следствия верны и в гладком, и в аналитическом случае.

Следствие 1. Сложенные седла (узлы, фокусы) эквивалентны, если соответствующие (несложенные) особые точки векторных полей, порождающих поля направлений на поверхностях уравнений, орбитально эквивалентны (т. е. имеют диффеоморфные фазовые портреты)[1].

Следствие 2. Уравнение общего положения, не разрешенное относительно производной, в окрестности каждой своей особой точки типа сложенное седло (узел, фокус) эквивалентно нормальной форме $(p+kx)^2=y$.

Собственные числа линеаризации векторного поля, порождающего поле направлений уравнения[2], нормированные условием $\lambda_1+\lambda_2=2$, равны $1\pm\sqrt{1-8k}$. Сложенные седла ($k>0$) все топологически эквивалентны друг другу: гомеоморфизм плоскости (x, y) переводит друг в друга проекции семейств их интегральных кривых. Точно так же топологически одинаковы все сложенные узлы ($0<k<1/8$) и все сложенные фокусы ($k>1/8$).

Пример. Сеть асимптотических линий на поверхности общего положения в трехмерном пространстве имеет регулярные особенности в общих точках параболической кривой и сложенные — в отдельных точках параболической кривой.

7.5. Сборки. Кроме сложенных особых точек, уравнение общего положения, не разрешенное относительно производной, может иметь еще только один тип нерегулярных особых точек: *сборки* складывания. Поле направлений на поверхности уравнения в такой точке неособо, но касается криминанты. Крими-

---

[1] Определения орбитальной эквивалентности см. во введении к гл. 3.
[2] Эти числа определены с точностью до умножения на одну и ту же ненулевую константу, поскольку векторное поле, порождающее данное поле направлений, определено с точностью до умножения на функцию.

нанта неособа, но касается ядра проектирования, и дискриминантная кривая имеет точку возврата.

Топологически разных особенностей этого типа бесконечно много, но существенно различаются лишь два класса: а и б на рис. 9. Изображенные здесь проекции интегральных кривых на плоскость можно вблизи точки сборки описать так (Брюс (J. Bruce), 1983).

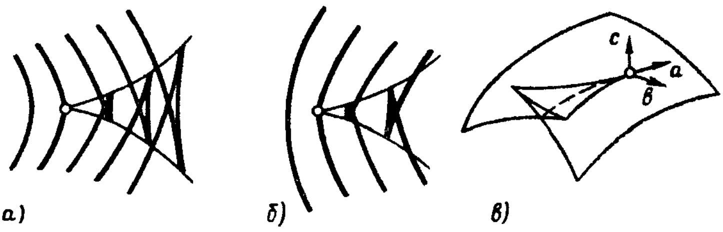


Рис. 9. Особая точка типа сборки складываиия.

Рассмотрим *ласточкин хвост* (рис. 9в), т. е. поверхность в пространстве с координатами (a, b, c), образованную многочленами z^4+az^2+bz+c, имеющими кратные корни. Плоскости $a=\text{const}$ высекают на ласточкином хвосте кривые. Чтобы получить семейство проекций интегральных кривых уравнения общего положения вблизи точки сборки на плоскость, достаточно спроектировать полученные на поверхности ласточкиного хвоста кривые на плоскость при помощи субмерсии (отображения ранга 2) общего положения трехмерного пространства (a, b, c) на плоскость (x, y).

В частности, проекция каждой индивидуальной интегральной кривой диффеоморфна соответствующему плоскому сечению ласточкиного хвоста. Например, проекция кривой, проходящей через точку сборки, имеет особенность порядка 4/3 и локально диффеоморфна кривой $u^4=v^3$.

§ 8. Аттракторы

В нашем обзоре «аттрактор» означает, «притягивающее множество». В этом параграфе обсуждаются, в основном, оценки сверху размерности аттракторов.

Предположим, что фазовые кривые эволюционного процесса неограниченно приближаются при $t\to+\infty$ к некоторому компактному множеству M — аттрактору. Наблюдатель, обладающий прибором ограниченной точности и следящий за эволюцией состояния вдоль фиксированной фазовой кривой, через некоторое время перестает отличать точки этой кривой от точек аттрактора. Тем самым, аттрактор содержит естественное «фазовое пространство установившихся режимов». В ряде задач математической физики фазовое пространство бескоиечиомерно, а аттрактор — конечномерен (см. п. 8.3).

8.1. Определения. Область фазового пространства поглощает, если все положительные полутраектории с началом в ней целиком ей принадлежат. Она глобально поглощает если, кроме того, в нее попадает каждая фазовая точка за конечное (неотрицательное) время.

Определение. Пусть g^t — преобразование за время t фазового потока дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(x)$$

с поглощающей областью B, замыкание которой $\bar{B}$ компактно. Тогда множество

$$M = \bigcap_{t>0} g^t \bar{B}$$

называется *аттрактором*[1] уравнения (1). Если область B глобально поглощающая, то аттрактор называется максимальным.

Замечание. Аттрактор всегда инвариантен: $g^t M = M$.

Пример. Асимптотически устойчивые особые точки и орбитально асимптотически устойчивые циклы являются аттракторами.

Определение. *Странным аттрактором* называется аттрактор, отличный от конечного объединения подмногообразий фазового пространства (термин введен в [104], где означал аттрактор, отличный от точки и цикла).

Замечание. Фазовое пространство установившихся режимов может быть у́же, чем максимальный аттрактор. Например, на рис. 3б изображен фазовый портрет системы, максимальный аттрактор, который — окружность, а все решеиия стремятся к особой точке.

По-видимому, адекватное математическое определение физически наблюдаемого аттрактора дает принадлежащее Я. Г. Синаю понятие «стохастического аттрактора» [59]. «Стохастический аттрактор» необязательно является странным.

8.2. Оценка сверху размерности максимальных аттракторов. Аттрактор может не быть многообразием. Рассмотрим компакт в метрическом пространстве. Назовем d-мерным объемом конечного покрытия компакта шарами сумму d-ых степеней радиусов шаров.

Определение. Хаусдорфова размерность компакта — это нижняя грань тех d, для которых компакт допускает коиечные покрытия шарами, имеющие сколь угодно малый d-мерный объем.

---

[1] В литературе приняты и другие, не эквивалентные этому, определения аттрактора.

Примеры. 1. Хаусдорфова размерность гладкого подмногообразия евклидова пространства равна обычной размерности.

2. Хаусдорфова размерность стандартного канторова совершенного множества равна $\log_3 2$.

Замечание. Хаусдорфова размерность декартова произведения двух компактов может быть больше суммы размерностей сомножителей ([31]: В. И. Бахтин [1]).

Определение. Отображение области евклидова пространства в себя называется *k-сжимающим*, если оно уменьшает k-мерные объемы; точнее, если его производное отображение уменьшает объем любого k-мерного параллепипеда в касательном пространстве, и отношение объемов образа и прообраза не превосходит некоторой не зависящей от точки и параллелепипеда константы, меньшей 1.

Теорема ([83], [31]). Хаусдорфова размерность компактного инвариантного множества k-сжимающего диффеоморфизма области евклидова пространства в себя не превосходит k.

Пусть система (1) имеет глобально поглощающую область с компактным замыканием, обозначаемую B, и фазовое пространство евклидово.

Определение. Система (1) называется *k-сжимающей*, если преобразование фазового потока этой системы за положительное время является k-сжимающим в области B.

Теорема. Хаусдорфова размерность аттрактора k-сжимающей системы не превосходит k.

Сформулируем достаточное условие того, чтобы система (1) была k-сжимающей. В каждой точке x области B рассмотрим квадратичную форму

$$F(x): \xi \mapsto (v_*(x)\xi, \xi), \quad \xi \in T_x B.$$

Пусть $\lambda_1(x) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(x)$ — собственные значения этой квадратичной формы.

Лемма. Для того чтобы система (1) была k-сжимающей, достаточно выполнения неравенства

$$\lambda_1(x) + \ldots + \lambda_k(x) < 0$$

всюду в компакте $\bar{B}$.

8.3. Приложения. Доказаны бесконечномерные аналоги теорем предыдущего пункта (см. [11]) и указанную там литературу); они позволяют доказать конечномерность аттракторов для ряда эволюционных уравнений математической физики. Например, хаусдорфова размерность аттрактора двумерного уравнения Навье—Стокса с двоякопериодическими граничными условиями не превышает $C\mathfrak{R}^2 \ln \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — число Рейнольдса (величина, обратная обезразмеренной вязкости) [11], [31], [40]. Константа C зависит от решетки периодов.

Глава 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Эта глава посвящена дифференциальным уравнениям на сфере, а также уравнениям на торе, допускающим преобразование монодромии. Основное внимание уделено структурной устойчивости этих уравнений и теории диффеоморфизмов окружности.

§ 1. Структурно устойчивые уравнения на окружности и сфере

Согласно идее, восходящей к классикам, дифференциальное уравнение адекватно описывает физическую реальность, если качественное поведение его решений мало меняется при малом изменении правой части. Действительно, физические параметры, входящие в уравнение, как правило, известны лишь приблизительно; если при малом изменении параметров свойства решений резко меняются, то выводы, сделанные относительно уравнения, описывающего модель, могут быть неприменимы к исходной физической задаче. Одна из попыток формализации этой точки зрения привела к созданию понятия структурной устойчивости [4], введенного А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным, развивавшим исследования Пуанкаре по предельным циклам.

1.1. Определения. Два дифференциальных уравнения называются *топологически орбитально эквивалентными,* если существует гомеоморфизм фазового пространства первой системы на фазовое пространство второй, переводящий ориентированные фазовые кривые первой системы в ориентированные фазовые кривые второй.

Пусть M — компактное гладкое многообразие, v — гладкое векторное поле на M. Система (M, v) называется *структурно устойчивой,* если существует такая окрестность поля v в C^1-топологии, что всякое векторное поле из этой окрестности задает систему, топологически орбитально эквивалентную исходной, причем гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность, близок к тождественному.

1.2. Одномерный случай.

Теорема. Векторное поле на окружности задает структурно устойчивую систему, если и только если оно имеет лишь невырожденные особые точки (особая точка поля v называется невырожденной, если линеаризация поля в особой точке — невырожденный оператор). Два векторных поля с невырожденными особыми точками на окружности топологически орбитально эквивалентны, если и только если числа особых точек у них одинаковы. Структурно устойчивые поля образуют в пространстве всех векторных полей на окружности открытое всюду плотное множество в C^1-топологии. ▲

1.3. Структурно устойчивые системы на двумерной сфере ([4], [8]). В пространстве векторных полей на компактном многообразии открытое всюду плотное множество в C^1-топологии образуют поля, все *особые точки* которых *гиперболические*[1] ([8], гл. 6). В двумерном случае гиперболические особые точки топологически либо седла, либо узлы. Фазовая кривая, стремящаяся к седлу при $t\to+\infty$, называется входящей *сепаратрисой* седла, а при $t\to-\infty$ — выходящей.

Теорема. Векторное поле на двумерной сфере структурно устойчиво, если и только если выполнены следующие условия:

1°. Поле имеет конечное число особых точек.

2°. Все особые точки поля гиперболические.

3°. Ни одна выходящая сепаратриса седла не является входящей.

4°. Поле имеет конечное число циклов.

5°. Все циклы невырождены.

Замечание. Условия 1° и 4° следуют из трех остальных. Все пять условий приведены отдельно, чтобы подчеркнуть, что они следуют из структурной устойчивости поля.

Теорема. Структурно устойчивые векторные поля образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех векторных полей на сфере, наделенном C^1-топологией.

Замечание. Аналогичные результаты справедливы для векторных полей на круге, которые не касаются граничной окружности. Эти два случая легко сводятся друг к другу.

§ 2. Дифференциальные уравнения на двумерном торе

Здесь исследуются дифференциальные уравнения на торе, допускающие преобразование монодромии.

2.1. Двумерный тор и векторные поля на нем. Мы будем рассматривать векторные поля на торе $T^2=\{(x, y)\bmod 2\pi\}$, для которых первая компонента не равна нулю. Всякое векторное поле без особых точек и циклов на двумерном торе превращается после подходящей замены координат в векторное поле с ненулевой первой компонентой (Зигель (C. L. Siegel), см. § 7, [62]). Это, вообще говоря, не так для векторных полей без особых точек, но с циклами (рис. 10).

Произвольное дифференциальное уравнение на торе может быть задано в виде

$$\dot{z}=v(z),\quad z\in\mathbf{R}^2,\quad v(z+2\pi e_1)=v(z+2\pi e_2)=v(z),$$
$$e_1=(1, 0),\quad e_2=(0, 1).$$

[1] Т. е. вещественные части собственных чисел оператора линейной части поля в особой точке отличны от нуля.

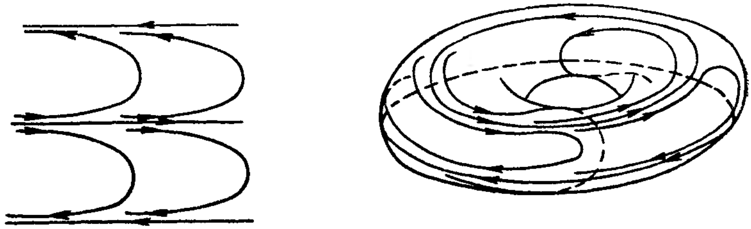


Рис. 10. Уравнение на торе без преобразования монодромии. Справа изображены фазовые кривые на торе, слева — фазовый портрет соответствующего двоякопериодического поля на плоскости.

Фазовые кривые уравнения, заданного векторным полем с ненулевой первой компонентой, совпадают с интегральными кривыми неавтономного уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \quad f(x+2\pi, y)=f(x, y+2\pi)=f(x, y). \qquad (1)$$

Только такие уравнения на торе рассматриваются ниже.

2.2. Преобразование монодромии. *Преобразованием монодромии* (или функцией последования) для уравнения (1) называется отображение оси y на себя, сопоставляющее каждой точке $(0, y)$ значение при $x=2\pi$ решения с этим начальным условием, а также соответствующее отображение окружности $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Преобразование монодромии A дифференцируемо вместе с обратным и отличается от тождественного отображения на периодическую функцию, называемую *угловой:*

$$A(y)=y+a(y), \quad a(y+2\pi)=a(y), \qquad (2)$$
$$a'(y)>-1.$$

Определения. 1. *Траекторией* точки под действием диффеоморфизма пространства на себя называется множество, состоящее из этой точки и ее образов под действием всех итераций диффеоморфизма и его обратного.

2. *Периодическая точка диффеоморфизма* — это такая точка, траектория которой конечна; эта траектория называется *циклом*, а число точек цикла — его *периодом.*

3. *Кратностью цикла* с периодом q диффеоморфизма A называется кратность любой принадлежащей циклу неподвижной точки диффеоморфизма A^q (эта кратность одинакова для всех точек цикла). *Цикл невырожден*, если соответствующие неподвижные точки невырождены (не имеют мультипликаторов, равных 1).

Изучение уравнения (1) на торе сводится к изучению соответствующей функции последования — диффеоморфизма окружности. Так, например, периодическим точкам преобразования монодромии соответствуют замкнутые интегральные кривые уравнения на торе, и обратно.

2.3. Число вращения. Пусть A — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности на себя, записанный в виде (2).

Определение. *Числом вращения гомеоморфизма A называется предел*

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \to \infty} \frac{A^k(y)}{k}.$$

Теорема. Предел в определении числа вращения существует и не зависит от начальной точки y.

Определение. *Числом вращения дифференциального уравнения* (1) *на торе* называется число вращения соответствующего преобразования монодромии.

§ 3. Структурно устойчивые дифференциальные уравнения на торе

Здесь исследуются дифференциальные уравнения на торе с рациональным числом вращения.

3.1. Описание структурно устойчивых уравнений ([8]).

Теорема. Дифференциальное уравнение (1) на торе имеет рациональное число вращения, если и только если оно имеет замкнутые интегральные кривые (циклы). Если число вращения равно p/q (несократимая дробь), то периоды всех циклов равны $2\pi q$ (роль времени играет независимая переменная x).

Теорема. Дифференциальное уравнение (1) на торе структурно устойчиво, если и только если число вращения рационально, и все периодические решения невырождены.

Аналогичные утверждения справедливы для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности.

, Определения. 1. Диффеоморфизмы $f: M \to M$ и $g: M \to M$ *топологически* (C^k, *аналитически*) *эквивалентны,* если существует гомеоморфизм $h: M \to M$ (соответственно, диффеоморфизм класса C^k или аналитический), сопрягающий f и $g: f = h \circ g \circ h^{-1}$.

2. Диффеоморифзм многообразия M в себя называется *структурно устойчивым,* если любой C^1-близкий ему диффеоморфизм M в себя топологически эквивалентен исходному, и сопрягающий гомеоморфизм близок к тождественному.

Теорема. Сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности структурно устойчив, если и только если число вращения рационально и все циклы невырождены. Структурно устойчивые диффеоморфизмы образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех дважды гладких сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности с топологией C^2.

Не следует думать, однако, что «наугад взятый» диффеоморфизм окружности будет в подавляющем большинстве случаев иметь рациональное число вращения (см. § 4).

3.2. Оценка числа циклов.

Теорема Якобсона. Диффеоморфизм окружности $y \mapsto y+a(y)$, для которого угловая функция a — тригонометрический многочлен степени n, имеет не более чем $2n$ циклов с учетом кратности.

Следствие. Каждый диффеоморфизм из двупараметрического семейства

$$f_{\varepsilon, a}: y \mapsto y+a+\varepsilon \sin y$$

имеет не более двух циклов.

Замечание. Число вращения диффеоморфизмов семейства пробегает всю ось; периоды возникающих при этом циклов могут быть сколь угодно большими.

Аналогичная теорема для дифференциальных уравнений на торе не доказана. Неизвестно даже, существует ли оценка сверху на число циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ с тригонометрическим многочленом f в правой части через степень многочлена f.

§ 4. Уравнения на торе с иррациональным числом вращения

Все интегральные кривые стандартного уравнения $\frac{dy}{dx}=\omega$, ω — иррационально, всюду плотны на торе и, следовательно, незамкнуты. Ниже исследуется вопрос об эквивалентности дифференциального уравнения с иррациональным числом вращения на торе и стандартного уравнения. Начнем с диффеоморфизмов окружности.

4.1. Эквивалентность диффеоморфизма окружности повороту.

Теорема Данжуа ((A. Denjoy), [8], [62]). Дважды гладкий сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения топологически эквивалентен повороту[1].

Для почти всех (по мере Лебега) чисел вращения сопрягающий гомеоморфизм в теореме Данжуа имеет лишь немного меньшую гладкость, чем исходный, как показывает

[1] Для гомеоморфизма окружиости с иррациональным числом вращеиия α- и ω-предельиые миожества всех траекторий совпадают. Оии представляют собой либо всю окружность (для гомеоморфизмов класса C^2), либо каиторово совершенное миожество (соответствующие примеры построеиы для гомеоморфизмов класса C^1 [62]). В первом случае, как уже указывалось, гомеоморфизм окружиости топологически эквивалентен повороту; полиая топологическая классификация гомеоморфизмов окружиости во втором случае получеиа в [101].

Теорема Эрмана ((M. R. Herman) [92]). На вещественной прямой существует множество полной меры такое, что C^r — гладкий диффеоморфизм окружности, число вращения которого принадлежит этому множеству, C^{r-2}-гладко эквивалентен повороту; здесь r — любое натуральное число, большее 2, ∞ или ω, причем $\infty-2=\infty$, $\omega-2=\omega$[1].

Условие на иррациональное число вращения (так называемое «условие A» Эрмана), достаточное для принадлежности μ множеству, указанному в теореме, состоит в следующем. Пусть $\mu=a_0+1/(a_1+1/(a_2+\ldots))$ — разложение числа μ в непрерывную дробь. Число μ удовлетворяет условию A, если

$$\lim_{B\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{a_i\geqslant B}\ln(1+a_i)\right)\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\ln(1+a_i)\right)^{-1}=0.$$

При дополнительном предположении, что невязка (отличие от поворота) мала, условие A можно упростить:

Теорема ([9 : 2]). Пусть число μ удовлетворяет условию

$$\left|\mu-\frac{p}{q}\right|>Cq^{-(2+\varepsilon)}$$

для всех несократимых p/q и некоторых положительных C и ε. Тогда аналитический диффеоморфизм окружности с числом вращения μ, достаточно близкий к повороту на μ, аналитически эквивалентен повороту.

Если в предыдущей теореме $\varepsilon>\sqrt{5}-2$, то C^∞-диффеоморфизм окружности с числом вращения μ C^∞-эквивалентен повороту для любой, не обязательно малой, угловой функции (Йоккос (J. C. Yoccoz) [90, с. 814]).

Большинство близких к повороту гладких (аналитических) диффеоморфизмов окружности гладко (аналитически) эквивалентно повороту. Например, рассмотрим двупараметрическое семейство $y\mapsto y+a+\varepsilon b(y)$, где b — гладкая 2π-периорическая функция.

Доля тех значений параметров (a, ε) из прямоугольника $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, $0\leqslant a\leqslant 2\pi$, для которых диффеоморфизм гладко неэквивалентен повороту, стремится к нулю, когда $\varepsilon_0\to 0$. В частности, суммарная площадь всех резонансных языков на рис. 11 в малой окрестности оси a составляет малую долю площади окрестности.

В «исключительных» случаях сопрягающий гомеоморфизм в теореме Данжуа может быть не гладким, если даже исходный диффеоморфизм аналитичен. Это бывает, когда число вращения ненормально близко аппроксимируется рациональными числами [9 : 2].

Аналогичные теоремы верны для дифференциальных уравнений на торе. Они следуют из предыдущих теорем и замеча-

[1] Через C^ω обозначается класс аналитических отображений.

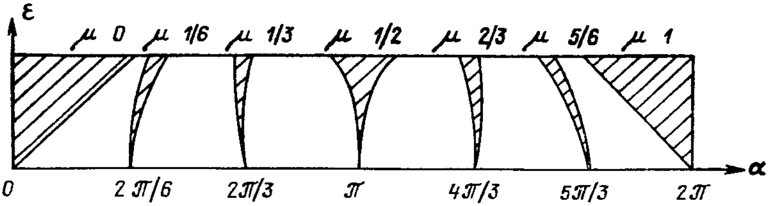


Рис. 11. Резонансные зоны для семейства диффеоморфизмов окружности.

ния: дифференциальное уравнение на торе, допускающее преобразование монодромии, топологически (C^r-гладко, аналитически) эквивалентно стандартному, если и только если соответствующее преобразование монодромии топологически (C^r-гладко, аналитически) эквивалентно повороту.

4.2. Диффеоморфизмы окружности и векторные поля на S^3. Данжуа построил пример диффеоморфизма окружности класса C^1, не эквивалентного повороту окружности и имеющего иррациональное число вращения (см. [62]). Используя этот пример, Швейцер (P. Schweitzer) дал отрицательное решение следующей проблемы Зейферта (H. Seifert).

Верно ли, что всякое векторное поле без особых точек на S^3 имеет цикл?

Теорема ([62]). На трехмерной сфере существует C^1-гладкое векторное поле без особых точек и циклов.

Недавно построено C^2-гладкое поле с тем же свойством [91]. Можно ли еще повысить гладкость поля в теореме Швейцера — неизвестно.

§ 5. Замечания о числе вращения

В этом параграфе число вращения исследуется как функция параметров; определяются и исследуются «множества вращения» для эндоморфизмов окружности[1].

5.1. Число вращения как функция параметров. Рассмотрим семейство диффеоморфизмов окружности на себя с параметрами a и ε:

$$y \mapsto y + a + \varepsilon f(y), \quad f(y + 2\pi) = f(y). \qquad (3)$$

Определение. Точка (a, ε) принадлежит *области резонанса m/n*, если число вращения отображения (3) равно m/n.

Области резонансов m/n при малых n в случае, когда $f(y) = \sin y$, показаны на рис. 11. Они подходят к линии $\varepsilon = 0$ узкими языками с острием в точке m/n, «язык» тем у́же, чем больше n.

Теорема ([9]). Пусть f — тригонометрический многочлен

[1] Эндоморфизм — однозначное, но необязательно взаимно однозначное, отображение.

от одной переменной степени p. Тогда ширина области резонанса m/n не превосходит $C\varepsilon^r$, где r — целая часть дроби $-n/p$: $r=-[-n/p]$.

5.2. Семейства уравнений на торе. Аналогичная теорема справедлива для дифференциальных уравнений на торе

$$\frac{dy}{dx}=a+\varepsilon F(x, y), \quad F(x+2\pi, y)=F(x, y+2\pi)=F(x, y). \quad (4)$$

Теорема (О. Г. Галкин). Пусть F — тригонометрический многочлен степени p по y. Тогда ширина области резонанса m/n (так называется множество тех (a, ε), для которых уравнение (4) имеет число вращения m/n) не превосходит $C\varepsilon^r$, где $r=-[-n/p]$.

5.3. Эндоморфизмы окружности ([74]). Пусть A — эндоморфизм окружности, то есть $A(y)=y+a(y)$, $a(y+2\pi)=a(y)$, но условие взаимной однозначности $a'>-1$ может быть нарушено.

Определение 1. *Множеством вращения эндоморфизма A окружности* на себя называется замыкание $\mu(A)$ множества $\{\mu^+(A, y)\,|\,y\in\mathbf{R}\}$,
где

$$\mu^+(A, y)=\lim_{k\to\infty}\sup\frac{A^k y}{k}.$$

2. Множеством вращения $\mu(A, y)$ называется множество всех предельных точек последовательности $A^k(y)/k$.

Следующая теорема дает описание множеств $\mu(A, y)$.

Теорема. Пусть A — непрерывное отображение окружности на себя степени 1 (то есть такое, как в начале пункта). Тогда

1°. Множество $\mu(A, y)$ при любом y — это отрезок, принадлежащий $\mu(A)$.

2°. Для каждого отрезка σ, принадлежащего $\mu(A)$, существует такое y, что $\mu(A, y)=\sigma$.

Глава 3

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОМЕРНОМ ВЕЩЕСТВЕННОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Локальная теория дифференциальных уравнений в значительной мере посвящена классификационным задачам. В зависимости от того, какое отношение эквивалентности используется при классификации, возникает та или иная ветвь теории.

Определение. Два дифференциальных уравнения (или, что то же самое — два векторных поля) *топологически эквивалентны* в окрестности особых точек, если существует гомеоморфизм, переводящий первую особую точку во вторую и сопрягающий локальные фазовые потоки рассматриваемых уравнений в этих особых точках. Если сопрягающий гомеоморфизм гладок класса C^k (k — натуральное число или бесконечность) или аналитичен, то дифференциальные уравнения называются *C^k-гладко или аналитически эквивалентными.*

Определение. Два дифференциальных уравнения (два векторных поля) *орбитально топологически эквивалентны* в окрестности особых точек, если существует гомеоморфизм некоторой окрестности особой точки одного поля в некоторую окрестность особой точки другого, переводящий первую особую точку во вторую и отображающий локальные фазовые кривые одного уравнения в локальные фазовые кривые другого с сохранением направления движения. *C^k-гладко и аналитически орбитально эквивалентные* уравнения определяются аналогично тому, как определены C^k-гладко и аналитически эквивалентные уравнения.

Эти определения имеют смысл как в вещественной, так и в комплексной области (время в последнем случае комплексное). Аналитическую эквивалентность дифференциальных уравнений естественно изучать в комплексном фазовом пространстве; в этой главе рассматривается вещественный случай и топологическая или гладкая классификация. В дальнейшем, если не оговорено противное, «гладкость» означает бесконечную гладкость; время считается вещественным, а векторные поля — гладкими.

§ 1. Топологическая классификация гиперболических особых точек

В этой главе, наряду с особенностями общего положения, классифицируются и нетипичные особенности.

Топологический тип дифференциального уравнения в окрестности особой точки общего положения определяется линеаризацией поля в точке (теорема 1.1 ниже). Случаи более сложных особых точек обсуждаются в §§ 2 и 5.

1.1. Теорема Гробмана—Хартмана.

Определение. Особая точка дифференциального уравнения называется *гиперболической*, если ни одно собственное значение линейной части уравнения в этой точке не лежит на мнимой оси.

Теорема ([8], [67]). C^1-гладкое векторное поле с гиперболической особой точкой в некоторой окрестности этой точки топологически эквивалентно своей линейной части.

1.2. Классификация линейных систем.

Теорема. Пусть линейный оператор A без собственных значений на мнимой оси имеет n^+ собственных значений в правой полуплоскости и n^- — в левой. Тогда дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=Ax, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad n=n^++n^-$$

топологически эквивалентно стандартному

$$\dot{y}=y, \quad \dot{z}=-z, \quad y\in\mathbf{R}^{n^+}, \quad z\in\mathbf{R}^{n^-}.$$

Замечание. Топологическая классификация особых точек линейных систем, даже и не гиперболических, совпадает с топологической классификацией линейных систем во всем пространстве $\mathbf{R}^n$, заключающейся в следующем.

Теорема ([38]). Два линейных дифференциальных уравнения $\dot{x}=Ax$, $x\in\mathbf{R}^n$, и $\dot{y}=By$, $y\in\mathbf{R}^n$, топологически эквивалентны, если и только если числа собственных значений с отрицательной (соответственно положительной) вещественной частью операторов A и B равны, а ограничения этих операторов на их инвариантные подпространства, соответствующие чисто мнимым собственным значениям, линейно эквивалентны.

§ 2. Устойчивость по Ляпунову и проблема топологической классификации

В этом параграфе обсуждаются общие подходы к локальным задачам анализа и приводятся теоремы, которые показывают, что в сильно вырожденных случаях проблема устойчивости и проблема топологической классификации особых точек в определенном смысле неразрешимы. Полученные в настоящее время критерии устойчивости и классификационные теоремы, применимые в «не слишком вырожденных случаях», приводятся в § 5.

2.1. О локальных задачах анализа. Начнем с определения струй функций и векторных полей. Фиксируем систему координат в $\mathbf{R}^n$.

Определение. *N-струей* гладкой функции в точке 0 пространства $\mathbf{R}^n$ называется класс функций, тейлоровские разложения которых в точке 0 до членов степени N включительно совпадают.

Тем самым, в фиксированной системе координат N-струя функции задается полиномом степени не выше N. Дадим теперь другое определение, независимость которого от системы координат очевидна.

Определение. N-струя гладкой функции f в точке 0 пространства $\mathbf{R}^n$ — это класс всех функций, совпадающих с f с точностью до $o(r^N)$ при $r\to 0$ (r — расстояние до нуля); эта N-струя обозначается $f^{(N)}$ или $j_0^N f$.

Это определение эквивалентно предыдущему, для которого, тем самым, доказана независимость от системы координат.

Так же определяются N-струи функций в произвольной точке x пространства $\mathbf{R}^n$; нужно только считать, что r — расстояние до x. Аналогично определяются N-струи векторных полей в произвольной точке пространства $\mathbb{R}^n$. Подпространство этого пространства, состоящее из струй векторных полей с особой точкой нуль, обозначается $J_0^N(n)$.

Выбор системы кординат в фазовом пространстве позволяет выбрать систему координат в пространстве $J^N(n)$: каждой N-струе соответствует набор коэффициентов векторного полинома степени не выше N, являющегося ее представителем.

Определение. Струя векторного поля в особой точке положительна (отрицательна) относительно свойства A, если все ее представители обладают (не обладают) свойством A. Струя нейтральна относительно свойства A, если она не положительна и не отрицательна.

Определение. Задача различения векторных полей, обладающих или не обладающих свойством A, называется *алгебраически разрешимой*, если

1°. Множества положительных, отрицательных и нейтральных относительно свойства A N-струй при каждом N образуют полуалгебраические множества[1] в пространстве $J^N(n)$.

2°. Коразмерность множества нейтральных N-струй в пространстве $J^N(n)$ стремится к бесконечности при $N \to \infty$. ▲

Аналитически разрешимые задачи определяются так же, как алгебраические разрешимые, только во всех определениях слово «алгебраический» заменяется на «аналитический».

В этом параграфе в качестве свойства A рассматривается устойчивость по Ляпунову. Вместо «струя векторного поля в особой точке положительна (отрицательна, нейтральна) относительно свойства устойчивости по Ляпунову» будем говорить «*струя устойчива* (*неустойчива, нейтральна*)».

Пример. По теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению, 1-струя Ax векторного поля в точке 0 устойчива, если все собственные значения оператора A лежат в левой полуплоскости, неустойчива, если хотя бы одно собственное значение лежит в правой полуплоскости, и нейтральна, если хотя бы одно собственное значение лежит на мнимой оси, а в правой полуплоскости собственных значений оператора A нет. Тем самым, множества устойчивых, неустойчивых и нейтральных 1-струй полуалгебраичны при любой размерности фазового пространства.

2.2. Алгебраическая и аналитическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову. Существует алгебраическое подсемейство коразмерности порядка ста в пространстве струй $J^5(3)$, пересечение которого с множеством нейтральных струй

[1] Подмножество вещественного числового пространства называется *полуалгебраическим множеством*, если оно является объединением конечного числа подмножеств, задаваемых конечным числом алгебарических уравнений и неравенств вида $P>0$.

неполуалгебраично. Это доказывает алгебраическую неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову (В. И. Арнольд, 1970, [8, с. 300]).

Э. Э. Шноль и Л. Г. Хазин [66 : 3] обнаружили аналогичное явление в семействе струй малой коразмерности.

Теорема ([66 : 3]). Подсемейство пространства $J_0^3(4)$, состоящее из струй векторных полей в особой точке, линейная часть которых в этой точке имеет две чисто мнимых пары собственных значений вида $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, $3\omega_1 = \omega_2$, пересекает множество устойчивых струй по неполуалгебраическому множеству.

Теорема (Г. Г. Хазина, Л. Г. Хазин, 1977). Тем же свойством обладает подсемейство пространства $J_0^3(4)$, состоящее из струй с диагонализируемой линейной частью, собственные значения которых двукратны и чисто мнимы.

Коразмерности этих подсемейств в соответствующих пространствах струй равны 3 и 4 соответственно.

«Можно ожидать, что граница устойчивости, потеряв полуалгебраичность и ничем более не сдерживаемая, будет представлять патологии на теоретико-множественном уровне. Например, множество устойчивых струй в конечномерном алгебраическом подмногообразии пространства струй фиксированного порядка может, вероятно, иметь бесконечное число компонент связности или быть всюду плотным вместе со своим дополнением». Одна из предсказанных здесь патологий в настоящее время обнаружена. Построено однопараметрическое алгебраическое семейство в пространстве струй $J^5(5)$, пересекающее множество устойчивых струй по счетному числу интервалов, накапливающихся к внутренней точке семейства. Несколько более слабый результат опубликован.

Теорема ([28]). Проблема устойчивости по Ляпунову аналитически неразрешима. В частности, множество устойчивых струй в пространстве $J^3(5)$ не является полуаналитическим.

2.3. Алгебраическая разрешимость до вырождений конечной коразмерности. Естественным показателем, характеризующим, насколько далеко удается провести исследование алгебраически неразрешимой локальной задачи, является «коразмерность вырождения».

Определение. *Ростком векторного поля* в особой точке называется класс всех векторных полей, совпадающих с ним в некоторой (зависящей от поля) окрестности этой точки. Поля из этого класса называются представителями ростка. Два ростка векторных полей в особых точках x и y называются топологически (*гладко, аналитически, орбитально топологически*...) *эквивалентными*, если они имеют топологически (гладко, аналитически, орбитально топологически...) эквивалентных представителей, и сопрягающий гомеоморфизм переводит x в y.

Аналогично определяются *ростки диффеоморфизмов* в неподвижной точке и их эквивалентность, а также *ростки функций.*

Определение. Задача о ростках векторных полей в особой точке 0 пространства $\mathbf{R}^n$ *алгебраически разрешима до коразмерности k включительно*, если для некоторого N существует последовательность вложенных алгебраических многообразий

$$V_0=J_0^N(n)\supset V_1\supset V_2\supset\ldots\supset V_k\supset V_{k+1},\quad \operatorname{codim}_{\mathbf{R}}V_j=j,$$

обладающая следующим свойством. Каждая из разностей $V_j\setminus V_{j+1}$, $j=0,\ldots,k$, распадается на конечное число связных компонент (стратов); для любых двух ростков, N-струи которых принадлежат одному страту, локальная задача имеет один и тот же ответ.▲

Например, если речь идет о задаче топологической классификации ростков векторных полей, то все ростки, принадлежащие одному страту, топологически эквивалентны.

Проблема устойчивости по Ляпунову и проблема топологической классификации ростков векторных полей алгебраически разрешима до коразмерности 2 включительно. Зачастую алгебраическое исследование локальной задачи может быть продолжено, если ограничиться рассмотрением некоторого подмножества W пространства ростков. Задачи, алгебраически разрешимые на подмножестве W до коразмерности k включительно, определяются так же, как и выше, только в предыдущем определении $V_0=W^{(N)}$ и $\operatorname{codim} V_j=j$ в $W^{(N)}$; здесь $W^{(N)}$ — множество N-струй ростков класса W. Так, задача об устойчивости по Ляпунову алгебраически разрешима до коразмерности 3 включительно на множестве ростков векторных полей, линейная часть которых не имеет собственных значений вида $\pm i\omega$, $\pm 3i\omega$.

2.4. Топологически нестабилизируемые струи. Фиксируем систему координат. M-струя векторного поля называется *продолжением N-струи* $(M>N)$, если ее многочлен Тейлора степени M получается из многочлена Тейлора N-струи дописыванием старших членов (степени выше N).

Инвариантное определение. M-струя векторного поля является *продолжением N-струи*, если $M>N$ и класс векторных полей, образующих M-струю, принадлежит классу полей, образующих N-струю.

Определение. Струя $V^{(N)}$ векторного поля в особой точке называется *топологически нестабилизируемой* в классе гладких (аналитических) ростков векторных полей, если любая струя более высокого порядка, являющаяся продолжением струи $V^{(N)}$, содержит топологически неэквивалентных в любой окрестности особой точки гладких (аналитических) представителей.

Другими словами, если струя векторного поля топологически нестабилизируема, то никакая информация о конечном числе старших членов не позволяет нарисовать фазовый портрет этого поля в окрестности особой точки даже с точностью до гомеоморфизма.

Теорема Такенса ((F. Takens) [109]). В пространстве 3-струй векторных полей, линейная часть которых имеет одно нулевое и две пары чисто мнимых собственных значений, существует открытое подмножество, состоящее из струй, топологически нестабилизируемых в классе гладких ростков векторных полей.

Аналогичный результат для аналитических ростков пока не известен.

Коразмерность множества топологически нестабилизируеных струй в теореме Такенса (рассматриваемого как подмножество пространства струй с особой точкой 0) равна трем. Топологическая классификация ростков векторных полей, принадлежащих некоторому подмножеству коразмерности 6, может даже иметь числовые модули.

Теорема ([110]). В пространстве 5-струй векторных полей, линейные части которых имеют две пары чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, $0<\omega_1<\omega_2$, существует подмногообразие коразмерности 4 и открытое подмножество на нем, обладающие следующим свойством. Если два ростка векторных полей в особой точке, 5-струи которых принадлежат упомянутому подмножеству, топологически эквивалентны, то отношения ω_1/ω_2 для этих ростков совпадают.

§ 3. Формальная классификация ростков векторных полей

Согласно общему принципу, восходящему к А. Пуанкаре, для исследования дифференциальных уравнений удобно искать не решения, а замену, приводящую уравнение к возможно более простому виду. В этом параграфе обсуждается первый шаг в этом направлении — исследование действия формальных замен. Всюду ниже ростки векторных полей рассматриваются в особой точке; часто это не оговаривается специально.

3.1. Формальные векторные поля и их эквивалентность.

Определения. Ниже K — одно из полей $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Формальным рядом Тейлора называется выражение $f(x)=\sum\limits_{\mathbf{Z}_+^n} a_k x^k$, $a_k\in K$, $x^k=x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}$; никаких требований сходимости не налагается. С формальными рядами Тейлора можно выполнять те же действия, что и со сходящимися: сложение, умножение, дифференцирование, подстановка ряда в ряд (суперпозиция) и т. д. Все эти операции над сходящимися рядами можно определять как действия над коэффициентами рядов, не используя сходимости; по тем же формулам эти операции определяются в формальном случае. Множество всех формальных рядов Тейлора от векторной переменной x с коэффициентами в поле K обозначается $K[[x]]$; $f(0)=a_0$.

Формальным векторным полем с особой точкой 0 называется выражение $v=\sum_{1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $f_j \in K[[x]]$, $f(0)=0$. *Формальной заменой* с неподвижной точкой 0 называется выражение $H=(H_1(x),\ldots,H_n(x))$, $H_j \in K[[x]]$, $H_j(0)=0$, $\det H_*(0)\neq 0$.

Два формальных векторных поля v и $\tilde{v}$ с особой точкой нуль называются *формально эквивалентными*, если существует формальная замена H с неподвижной точкой 0, для которой выполняется соотношение $\frac{\partial H}{\partial x} v=\tilde{v}\circ H$.

Замечание. Предыдущее соотношение выполняется, если поля v и $\tilde{v}$ гладки и диффеоморфизм H переводит поле v в поле $\tilde{v}$ (см. п. 1.6, гл. 1).

Замечание. Каждому ростку векторного поля в особой точке соответствует формальное векторное поле — ряд Тейлора ростка v, обозначаемый $\hat{v}$. Для гладкой или аналитической эквивалентности ростков векторных полей необходима формальная эквивалентность соответствующих формальных векторных рядов Тейлора. Тем самым, гладкой или аналитической классификации ростков векторных полей предшествует формальная классификация.

Оказывается, в окрестности особой точки голоморфное векторное поле общего положения голоморфно эквивалентно своей линейной части, но для полей не общего положения дело обстоит значительно сложнее.

3.2. Резонансы. Нормальные формы Пуанкаре—Дюлака и их обобщения. Формальное векторное поле общего положения в особой точке формально эквивалентно своей линейной части. Для общности положения линейная часть должна быть нерезонансной.

Определение Набор $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbf{C}^n$ называется *резонансным*, если одно из чисел набора является целочисленной линейной комбинацией остальных с неотрицательными коэффициентами, сумма которых не меньше двух, то есть выполняется соотношение

$$\lambda_j-(\lambda,k)=0, \tag{1}$$

называемое *резонансом*. Здесь $k\in\mathbf{Z}_+^n$, $|k|=k_1+\ldots+k_n\geqslant 2$, $(\lambda,k)=\Sigma\lambda_j k_j$, $\mathbf{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел, $j\in\{1,\ldots,n\}$. Линейное векторное поле называется *резонансным,* если спектр соответствующего оператора является резонансным набором, и нерезонансным — в противном случае.

Теорема Пуанкаре ([8]). Формальное векторное поле с особой точкой нуль и нерезонансной линейной частью формально эквивалентно своей линейной части. Если исходное поле вещественно, то формальная замена тоже может быть выбрана вещественной.

Наличие резонансов существенно осложняет формальную классификацию.

Определение. Пусть $(z_1, \ldots, z_n)$ — координаты, в которых матрица линейной части формального векторного поля v имеет жорданову нормальную форму; пусть λ — спектр этой матрицы. Одночлен $z^k \partial/\partial z_j$ называется *резонансным членом*, если выполнено резонансное соотношение (1).

Теорема Пуанкаре-Дюлака ((H. Dulac) [8]).[1] Формальное векторное поле с особой точкой нуль и резонансной линейной частью формально эквивалентно такому полю, линейная часть которого имеет жорданову нормальную форму Jz, а нелинейные члены резонансны. Это поле имеет вид

$$w(z) = Jz + \sum a_{kj} z^k \partial / \partial z_j;$$

суммирование ведется по таким парам j, k, что $\lambda_j = (\lambda, k)$, λ — спектр J. Коэффициенты a_{kj} могут быть комплексными, даже если исходное поле вещественно.

В случае, когда матрица линейной части поля нильпотентна, теорема Пуанкаре—Дюлака не дает никаких упрощений. В этом случае полезна следующая теорема Г. Р. Белицкого [14].

Теорема. Векторное поле с особой точкой нуль формально эквивалентно такому полю, линейная часть которого имеет жорданову нормальную форму Jz, а нелинейная коммутирует[2] с векторным полем J^*z (звездочка означает эрмитово сопряжение $(a_{ij}) \to (\bar{a}_{ji})$).

Пример ([109]). Вещественное двукомпонентное векторное поле с линейной частью $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ формально эквивалентно полю $(x_2 + f(x_1)) \partial / \partial x_1 + g(x_1) \partial / \partial x_2$. Аналогичная задача для произвольной размерности исследуется в § 7.

3.3. Приложения теории формальных нормальных форм.

1. Дифференциальные уравнения с резонансной линейной частью, записанные в нормальной форме Пуанкаре—Дюлака, имеют, как правило, богатую группу симметрий и допускают понижение порядка. Порядок полученного уравнения (так называемой факторсистемы) равен числу линейно независимых резонансных соотношений на спектр линейной части. В случае, когда это число равно 1, нормальная форма Пуанкаре—Дюла-

[1] Нормальная форма, даваемая этой теоремой, называется нормальной формой Пуанкаре—Дюлака; она допускает дальнейшие упрощения и поэтому иногда называется предварительной нормальной формой.

[2] Два векторных поля v и w коммутируют, если соответствующие дифференциальные операторы перестановочны: $L_v L_w f = L_w L_v f$ для всех гладких функций f.

ка интегрируется в квадратурах; когда это число больше 1 — вообще говоря, не интегрируется. Тем самым, приложения теории нормальных форм к явному интегрированию уравнений существенны, но жестко ограничены.

2. При исследовании топологически сложных случаев, когда линейная часть уравнения в особой точке имеет собственные значения на мнимой оси, очень полезен метод Пуанкаре. Он применяется для приведения к нормальной форме конечной струи, то есть конечного числа членов ряда Тейлора векторного поля в особой точке. После этого старшие члены отбрасываются, исследуется укороченное уравнение, а затем доказывается, что старшие члены не меняют качественной картины. С помощью этого метода не только доказываются, но и формулируются результаты § 5. Особенно полезен этот метод в теории бифуркаций (см. [8]).

3. Приведение к формальной нормальной форме особенно эффективно, когда удается уничтожить все члены, кроме конечного числа. Этот случай всегда имеет место, когда все собственные числа лежат в одной полуплоскости, не содержащей точки нуль, а также в некоторых других случаях, которые разбираются в следующем пункте.

3.4. Полиномиальные нормальные формы.

Определение. Будем считать, что формальный степенной ряд имеет нуль порядка N в нуле, если он не содержит членов степени, меньшей N; пишем $f=o(|x|^{N-1})$. После этого струи формальных векторных полей определяются так же, как струи гладких векторных полей.

Определение. Формальное векторное поле называется *формально N-определенным,* если все формальные векторные поля с той же N-струей ему формально эквивалентны. Формальное векторное поле называется *формально конечно определенным,* если оно формально N-определено для некоторого N.

Замечания 1. Формально конечно определенное векторное поле формально допускает полиномиальную формальную нормальную форму.

2. Если спектр линейной части формального векторного поля удовлетворяет лишь конечному числу резонансных соотношений, то это поле формально конечно определено. Это немедленно следует из теоремы Пуанкаре—Дюлака.

Определение. Набор $\lambda\in C^n$, а также линейное векторное поле со спектром λ, называется *k-резонансным,* если число образующих аддитивной группы, порожденной множеством векторов $\{r\in \mathbf{Z}_+^n | (r, \lambda)=0\}$ равно k.

Теорема ([95 : 1], близкая теорема содержится в книге [18]). Пусть формальное векторное поле v имеет однорезонансную линейную часть и пусть все резонансные соотношения являются следствиями одного: $(r,\lambda)=0$, $r\in\mathbf{Z}_+^n$. Пусть $w(z)=Jz+Zg(u)$ — нормальная форма Пуанкаре—Дюлака поля v; здесь $Z=\operatorname{diag} z$, $u=z^r$, $g=(g_1, \ldots, g_n)$ — векторный формальный ряд от одного переменного. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Поле v формально конечно определено.
2. $(r, g) \not\equiv 0$.▲

Замечания 1. Если равенство $(r, g) \equiv 0$ выполняется для одной нормальной формы Пуанкаре—Дюлака поля v, то оно выполняется и для любой другой. 2. Аналогичная теорема справедлива для любого однорезонансного поля [95].

Теорема ([95 : 1]). Формальное векторное поле, спектр линейной части которого k-резонансный при $k \geqslant 2$, никогда не является формально конечно определенным.

Из сравнения результатов п. 3.3 и п. 3.4 видно, что свойства интегрируемости и формальной конечной определенности нормальной формы Пуанкаре—Дюлака оказываются весьма близкими.

§ 4. Инвариантные многообразия и теорема сведения

Гомеоморфизм, линеаризующий векторное поле в окрестности гиперболической особой точки, не всегда можно выбрать гладким. Например, этому препятствует резонансность линейной части. Тем не менее, между уравнением и его линеаризацией в особой точке сохраняется значительное сходство, выражаемое формулируемыми ниже теоремами об инвариантных многообразиях.

4.1. Теорема Адамара—Перрона.

Определение. *Инвариантное многообразие* векторного поля и соответствующего дифференциального уравнения — это такое подмногообразие фазового пространства, которое в каждой своей точке касается вектора поля.

Рассмотрим линейный оператор $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Пространство $\mathbf{R}^n$ распадается в прямую сумму трех подпространств:

$$\mathbf{R}^n = T^s \oplus T^u \oplus T^c$$

(s — от stable, u — от unstable, c — от centre). Это разложение определяется следующим требованием: все три подпространства в правой части инвариантны относительно оператора A; спектр ограничения $A|_{T^s}$ лежит в открытой левой полуплоскости, ограничения $A|_{T^u}$ — в правой и ограничения $A|_{T^c}$ — на мнимой оси.

Рассмотрим сначала случай, когда 0 — гиперболическая особая точка уравнения $\dot{x} = Ax$, то есть $T^c = \{0\}$. Следующая теорема обобщает результаты Ж. Адамара и О. Перрона и по традиции называется теоремой Адамара—Перрона. Приводимая ниже формулировка содержится в книге [44], где имеются ссылки на оригинальные работы. В следующих двух теоремах r — натуральное число или бесконечность.

Теорема. Пусть v—C^r-гладкое векторное поле с гиперболической особой точкой 0 и линейной частью Ax в нуле, T^s и T^u — плоскости, соответствующие оператору A. Тогда дифференциальное уравнение $\dot{x}=v(x)$ имеет два C^r-гладких инвариантных многообразия W^s и W^u, проходящих через 0 и касающихся в нуле плоскостей T^s и T^u соответственно. Решения с начальными условиями на $W^s(W^u)$ экспоненциально стремятся к нулю при $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$. W^s называется *устойчивым*, а W^u-*неустойчивым* многообразием особой точки 0.

Следующие две теоремы лежат в основе локальной теории устойчивости и локальной теории бифуркаций.

4.2. Теорема о центральном многообразии.

Теорема. Пусть v—C^{r+1}-гладкое векторное поле с особой точкой 0 и линейной частью Ax, $r<\infty$. Пусть T^s, T^u и T^c — плоскости, соответствующие оператору A, как описано в пункте 4.1. Тогда дифференциальное уравнение $\dot{x}=v(x)$ имеет инвариантные многообразия W^s, W^u и W^c, гладкие класса C^{r+1}, C^{r+1} и C^r, проходящие через 0 и касающиеся в нуле плоскостей T^s, T^u и T^c соответственно. Фазовые кривые этого уравнения на многообразиях W^s, W^u ведут себя так же, как в теореме Адамара—Перрона; поведение фазовых кривых на многообразии W^c определяется нелинейными членами.[1]

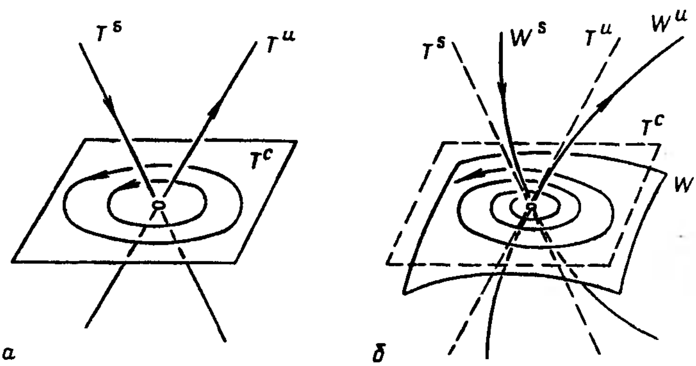


Рис. 12. Устойчивое, неустойчивое и центральное многообразия: а) линейной системы, б) нелинейной системы.

Многообразия W^s и W^u в этой теореме по-прежнему называются *устойчивым* и *неустойчивым*. Если росток v — класса C^∞ или аналитичен, то устойчивое и неустойчивое многообразия в

---

[1] При тех же условиях уравнение $\dot{x}=v(x)$ имеет еще два инвариантных многообразия: устойчиво-центральное W^{sc} и неустойчиво-центральное W^{uc}, гладкие класса C^r; первое содержит центральное и устойчивое, второе — центральное и неустойчивое многообразия. C^r-гладкость этих многообразий так же, как и центрального, имеет место, вообще говоря, только при $r<\infty$.

обеих предыдущих теоремах — класса C^∞ или аналитичны; центральное многообразие лишь конечно гладко.

Многообразие W^c в этой теореме называется *центральным многообразием*, плоскость $T^s \oplus T^u$ — плоскостью *гиперболических переменных*. Следующая теорема утверждает, что при исследовании топологии нелинейного ростка векторного поля важно только ограничение этого ростка на центральное многообразие, а гиперболические переменные можно не учитывать.

4.3. Принцип сведения.

Теорема сведения Шошитайшвили ([8]). Пусть дифференциальное уравнение с дважды гладкой правой частью имеет особую точку 0 и линейную часть Ax. Пусть T^s, T^u и T^c — инвариантные плоскости оператора A, описанные в п. 4.1. Тогда в окрестности точки 0 рассматриваемое уравнение топологически эквивалентно прямому произведению двух уравнений: ограничению исходного на центральное многообразие и «стандартного седла»:

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y, \quad x \in T^s, \quad y \in T^u. \blacktriangle$$

Эта теорема применяется как в исследовании индивидуальных уравнений, так и в исследовании семейств: семейство $\dot{x} = f(x, \varepsilon)$ эквивалентно уравнению $\dot{x} = f(x, \varepsilon)$, $\dot{\varepsilon} = 0$. Эти приложения обсуждаются в § 5 и в [8]. Различные варианты двух предыдущих теорем были получены В. А. Плиссом и Хиршем, Пью и Шубом (M. W. Hirsch, C. Pugh, M. Shub). Бесконечномерные аналоги теоремы сведения находят применение в математической физике, в частности, в гидродинамике вязкой жидкости. Теория инвариантных многообразий обсуждается также в § 3 главы 4 (аналитический случай).

§ 5. Критерии устойчивости и топологическая классификация особых точек в случае вырождений малой коразмерности

В этом параграфе описано топологическое строение ростков векторных полей во всех вырожденных особых точках, за исключением некоторого многообразия коразмерности 3, и выписаны соответствующие критерии устойчивости.

5.1. Структура критериев. Чтобы применить критерии этого параграфа к фиксированному ростку векторного поля, нужно

1. Определить, к какому из перечисленных ниже классов принадлежит линейная часть этого ростка и привести к нормальной форме Пуанкаре—Дюлака N-струю этого ростка[1]; число N указано в приводимых ниже таблицах.

---

[1] В третьей строке таблицы 4 использоваиа иормальная форма, описанная в примере п. 3.3.

2. Приравнять нулю гиперболические переменные. Эти два шага осуществляют нормализацию N-струи ограничения исходного ростка на соответствующее центральное многообразие.

3. Убедиться, что тейлоровские коэффициенты нормализованной струи не удовлетворяют требованиям, выделяющим в пространстве N-струй исключительное многообразие, соответствующее вырождениям высшей коразмерности.

4. Найти в соответствующей таблице класс, которому принадлежит нормализованная струя; для этого предварительно может понадобиться линейная замена, например, $(x, z) \mapsto (-x, z)$ или $(z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$.

5.2. Топологическая классификация ростков гладких векторных полей до вырождений коразмерности 2 включительно.

Пространство ростков гладких векторных полей в особой точке 0 пространства $\mathbf{R}^n$, 1-струи которых не принадлежат некоторому алгебраическому подмногообразию коразмерности 3, распадается на 5 классов, перечисленных ниже в таблице 1. Эти классы различаются размерностью центрального многообразия W^c или жордановой нормальной формой Λ линейной части ограничения ростка на W^c.

Таблица 1

Класс	dim W^c	Λ
W_1^0	1	0
W_2^I	2	$I = {}^{\mathbf{R}}i\omega,\ \omega \neq 0$
W_2^J	2	$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$W_3^{0,\,I}$	3	$\operatorname{diag}(0, I)$
$W_4^{I,\,I}$	4	$\operatorname{diag}(I_1, I_2),\ I_j = {}^{\mathbf{R}}i\omega_j,\ 0 < \omega_1 \leqslant \omega_2$

Дифференциальное уравнение, соответствующее нормальной форме Пуанкаре—Дюлака для вещественного векторного поля в особой точке 0 пространства $\mathbf{R}^n$ может быть записано в виде

$$\dot{x} = f(x, z, w), \quad \dot{z} = g(x, z, w), \quad \dot{w} = h(x, z, w).$$

Здесь $(x, z, w) \in {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$, x вещественно на $\mathbf{R}^n$, а $w = \bar{z}$ на $\mathbf{R}^n$. При этом $h(x, z, \bar{z}) = \bar{g}(x, \bar{z}, z)$. Тем самым уравнение для w однозначно определяется уравнением для z и ниже не выписывается.

Ниже в таблицах 2—5 приведены дифференциальные уравнения, соответствующие нормализованным струям; для краткости соответствующий столбец называется «нормализованная

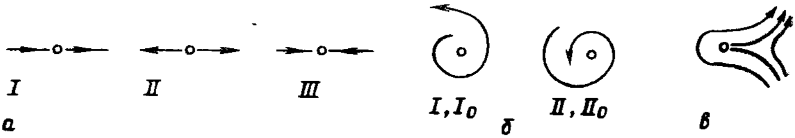


Рис. 13. Фазовые портреты векторных полей:

а) класса W_1^0 (случаи I, II, III), б) класса W_2^I (случаи I и I_0; II и II_0), в) класса $W_2^{J;*}$ ($a\neq 0$).

N-струя». В выражениях для нормализованных струй опущены члены, не влияющие на ответ. Обозначения: $z_j=x_j+iy_j$, $z=(z_1,\ldots,z_k)$, $k\in\{1;\ 2;\ 3\}$, $r_j=|z_j|$, $\rho_j=r_j^2$, $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geqslant 0\}$.

Теорема. Ограничение на центральное многообразие каждого из ростков перечисленных выше классов W_1^0, W_2^I, W_2^J топологически эквивалентно одному из ростков, N-струи которых перечислены в таблице 2, при условии, что нормализованная N-струя исследуемого ростка не принадлежит исключительному многообразию; это многообразие и число N также указаны в таблице.

Таблица 2

Топологические нормальные формы

Класс	N	Нормализованная N-струя	Вырождение коразмерности 3	Класс топологической эквивалентности: Определение	Класс топологической эквивалентности: Обозначение
W_1^0	3	$\dot{x}=ax^2+bx^3$	$a=b=0$	I. $a\neq 0$	$W_1^{0;*}$
				II. $\begin{cases}a=0\\ b>0\end{cases}$ III. $\begin{cases}a=0\\ b<0\end{cases}$	$W_1^{0;0}$
W_2^I	5	$\dot{z}=z(i\omega+\alpha\rho+\beta\rho^2)$ $\omega>0$ $a=\mathrm{Re}\,\alpha$, $b=\mathrm{Re}\,\beta$	$a=b=0$	I. $a>0$ II. $a<0$	$W_2^{I;*}$
				I_0 $\begin{cases}a=0\\ b>0\end{cases}$ II_0 $\begin{cases}a=0\\ b<0\end{cases}$	$W_2^{I;0}$
W_2^J	2	$\dot{x}=y$ $\dot{y}=ax^2$	$a=0$	$a\neq 0$	$W_2^{J;*}$

Этот результат для одномерных и двумерных систем был известен классикам.

Теорема ([109, 87]). Ограничение на центральное многообразие каждого из ростков класса $W_3^{0,I}$ или $W_4^{I,I}$ может быть после обращения знака (умножения векторного поля на (—1)) топологически эквивалентно одному из ростков, N-струи которых перечислены в таблице 3; предполагается, что нормализованная N-струя исследуемого ростка не принадлежит исключительному многообразию; это многообразие и число N также указаны в таблице.

Таблица 3

Топологические нормальные формы

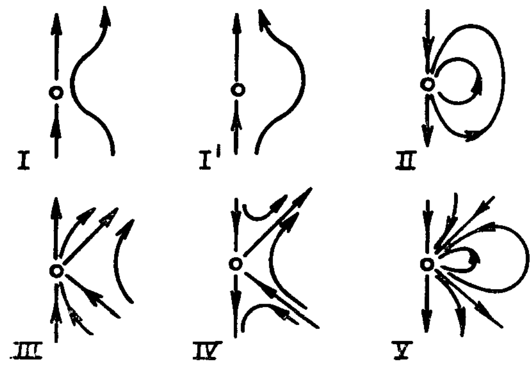
Класс	N	Нормализованная N-струя	Вырождение коразмерности 3	Классы топологической эквивалентности: определение	обозначение
$W_3^{0,I}$	2	$\dot{x}=ar^2+bx^2$ $\dot{z}=z\,(i\omega+\alpha x)$ $c=\operatorname{Re}\alpha$ $a>0$ (*)	$ab(b-c)=0$ или $\begin{cases}c=0\\ b-c<0\end{cases}$	I. $a>0,\ b-c>0,\ b>0$ II. $a>0,\ b-c>0,\ b<0$ III. $a>0,\ b-c<0,\ b>0,\ c>0$ IV. $a>0,\ b-c<0,\ b<0,\ c>0$ V. $a>0,\ b-c<0,\ b<0,\ c<0$	$W_3^{0,I;*}$
$W_4^{I,I}$	3	$\dot{z}=Z\,(i\omega+\mathscr{A}\rho)$ $z=(z_1,z_2)$, $\rho=(\rho_1,\rho_2)$ $\omega=(\omega_1,\omega_2)$, $0<\omega_1<\omega_2$ $A=\operatorname{Re}\mathscr{A}=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{pmatrix}$ $\det A=\Delta$ $b_1=a_{11}-a_{21}$ $b_2=a_{12}-a_{22}$ $a_{11}\geqslant a_{22}$ (*)	$a_{11}a_{22}b_1b_2=0$ или $\begin{cases}\Delta=0\\ b_1b_2<0\end{cases}$ или $k\omega_1=\omega_2$ $k\in\{1;2;3\}$	I. $a_{22}<0$ (**), $b_1b_2>0$ а) $a_{11}>0,\ b_1>0$ б) $a_{11}>0,\ b_1<0$ в) $a_{11}<0$, II. $b_1<0$ (**), $b_1b_2<0$ а) $a_{11}>0,\ a_{22}>0,\ \Delta<0$ б) $a_{11}>0,\ a_{22}<0,\ \Delta<0$ в) $a_{11}>0,\ a_{22}<0,\ \Delta>0$ г) $a_{11}<0,\ a_{22}<0,\ \Delta<0$ д) $a_{11}<0,\ a_{22}<0,\ \Delta>0$	$W_4^{I,I;*}$

Примечание. Всюду в этом параграфе выполнения условий (∗) можно добиться заменой $(x,r)\mapsto(-x,r)$ или $(z_1,z_2)\mapsto(z_2,z_1)$, а неравенств (∗∗) — обращением времени. В таблице 3 условия I и II налагаются на все ростки подклассов Iа, Iб, Iв и подклассов IIа, ..., IIд, соответственно.

В последних пяти строках таблицы 3 перечислены все комбинации знаков отличных от нуля величин a_{11}, a_{22}, Δ, совместные с неравенствами $a_{11}\geqslant a_{22}$, $b_1<0$, $b_1b_2<0$. Действительно, комбинации $-++$ и $-+-$ отпадают по очевидной причине. Комбинация $+++$ отпадает потому, что из неравенств $a_{11}>0$, $a_{22}>0$, $b_1<0$, $b_2>0$ следует $a_{21}>a_{11}>0$, $a_{12}>a_{22}>0$ и, значит, $\Delta<0$.

5.3. Фазовые портреты нормальных форм.

1. Все уравнения таблицы 3 интегрируются в квадратурах. Их удобно исследовать, перейдя к факторсистемам относительно переменных (x, r) для ростков класса $W_3^{0,I}$ и относительно (ρ_1, ρ_2) для класса $W_4^{I,I}$. В первом случае факторсистемы определены в полуплоскости $r \geqslant 0$, во втором — в квадранте $\rho_j \geqslant 0$. Их фазовые портреты изображены на рис. 14а и 14б. Пользуясь



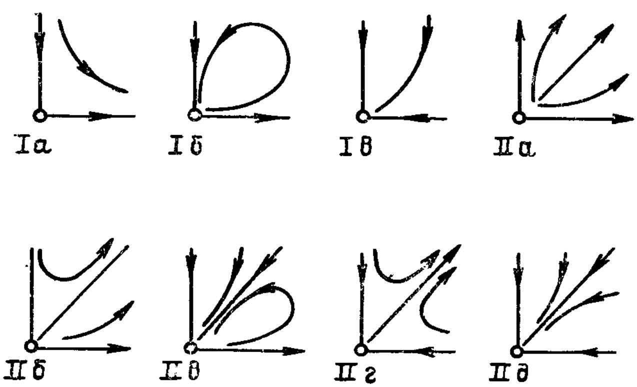


Рис. 14, а) Фазовые портреты факторсистем, соответствующих невырожденным уравнениям класса $W_3^{0,I}$. Рис. I и I′ изображают фазовые портреты топологически эквивалентных факторсистем при $c>0$ и $c<0$ соответственно; разница между ними сказывается при бифуркациях. б) Фазовые портреты факторсистем, соответствующих невырожденным уравнениям класса $W_4^{I,I}$.

этими рисунками и предыдущей теоремой, можно получить большую информацию о поведении фазовых кривых исходного ростка. Например, объединение 0^+- и 0^--кривых[1]) для подходящего представителя любого ростка подкласса IV класса $W_8^{0,I;*}$ гомеоморфно объединению оси x пространства $\mathbf{R}^3=\{(x, z)\}$ и конуса $x^2-|z|^2=0$ с выколотой точкой нуль.

2. Проблема. Дать (конечно) гладкую классификацию ростков, перечисленных в таблице 3.

5.4. Критерии устойчивости по Ляпунову для вырождений до коразмерности 3 включительно. Из предыдущей теоремы легко вытекают критерии устойчивости по Ляпунову до вырожденной коразмерности 2 включительно; в основном, они были получены еще Ляпуновым (см. [66] и указанную там литературу). В таблице 4 указаны подклассы из таблиц 2 и 3,

Таблица 4

Критерии устойчивости в случае вырождений коразмерности 1 и 2

Класс	Устойчивые подклассы	Классы ростков, имеющих вырождение коразмерности 3: определение [2])	Классы ростков, имеющих вырождение коразмерности 3: обозначение
W_1^0	III	$a=b=0$	$W_1^{0;0,0}$
W_2^I	II и II_0	$a=b=0$	$W_2^{I;0,0}$
W_2^J	$\varnothing$	$a=0$	$W_2^{J;0}$
$W_3^{0,I}$	$\varnothing$	$a=0$	$W_3^{0,I;0}$
$W_4^{I,I}$	Iв, IIд и —II а (получается из IIа обращением времени). Явные критерии $\begin{cases} a_{11}<0 \\ a_{22}<0 \\ b_1b_2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_{11}<0 \\ a_{22}<0 \\ b_1b_2<0 \\ b_1\Delta<0 \end{cases}$	$a_{11}a_{22}=0$	A_1
		$\begin{cases} b_1b_2<0 \\ \Delta=0 \end{cases}$	A_2
		$\omega_1=\omega_2$	A_3
		$2\omega_1=\omega_2$	A_4
		$3\omega_1=\omega_2$	A_5; $A=\bigcup\limits_1^5 A_j$

[1]) Так называются кривые, входящие в 0 при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$ соответственно. Те и другие вместе называются 0-кривыми.

[2]) В определении класса A_1 нужно потребовать, чтобы ненулевой коэффициент a_{ii} был отрицателен, а в определении классов A_2—A_5 коэффициенты $a_{11}<0$, $a_{22}<0$.

для представителей которых точка 0 устойчива. В третьем столбце приведены условия, означающие вырождения коразмерности 3 в задаче об устойчивости. Обозначения те же, что в таблицах 2 и 3.

Нижеследующие критерии принадлежат многим авторам (ссылки в [66]). Эти критерии приведены в таблице 5; там, где удобно, вместо нормализованной струи записана соответствующая факторсистема. Неустойчивость имеет место для всех ростков, не удовлетворяющих критериям устойчивости и не принадлежащих исключительному многообразию. Обозначения те же, что в таблицах 2 и 3.

Таблица 5

Критерии устойчивости в случае вырождений коразмерности 3 (для подклассов класса $W_4^{I,\,I}$ указан номер вырождения из таблицы 4—класс A_j)

Класс[1])	N	Нормализованная струя	Критерий устойчивости	Вырождение коразмерности 4
$W_1^{0;\,0,\,0}$	4	$\dot{x}=cx^4$	$\varnothing$	$c=0$
$W_2^{I;\,0,\,0}$	7	$\dot{z}=z(i\omega+\gamma\rho^2)$	$\operatorname{Re}\gamma<0$	$\operatorname{Re}\gamma=0$
$W_2^{I;\,0}$	4	$\dot{x}=y+x^2(b+cx)$ $\dot{y}=x^3(d+ex)$	$\begin{cases}d<0\\ b^2+2d<0\\ 5cd-2be<0\end{cases}$	Линейная часть ограничения ростка на W^c равна нулю или $d(b^2+2d)\cdot$ $\cdot(5cd-2be)=0$
$W_3^{0,\,I;\,0}$	3	$\dot{x}=br^2+dx^2$ $\dot{z}=i\omega z+\alpha xz$ $c=\operatorname{Re}\alpha$	$\begin{cases}bc<0\\ d<0\end{cases}$	$bcd=0$
A_1	5	$\dot{\rho}_1=\rho_1(a_{12}\rho_2+a_3\rho_1^2)$ $\dot{\rho}_2=\rho_2(a_{21}\rho_1+a_{22}\rho_2)$	$\begin{cases}a_1<0\\ b_1b_2>0\end{cases}$ или $\begin{cases}a_3<0\\ b_1b_2<0\\ b_1\Delta<0\end{cases}$	$a_{22}a_3b_1b_2=0$ или $\begin{cases}b_1b_2<0\\ \Delta=0\end{cases}$
A_2	5	$\dot{\rho}_1=\rho_1(a_{11}\rho_1+a_{12}\rho_2+$ $+f_2(\rho))$, $\dot{\rho}_2=\rho_2(a_{21}\rho_1+$ $+a_{22}\rho_2+g_2(\rho))$ f_2 и g_2—однородные полиномы второй степени	$K<0$, $K=a_{21}f_2(a,\,1)+$ $+g_2(a,\,1)$, $a=-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}=-\dfrac{a_{22}}{a_{21}}$	$a_{11}a_{22}K=0$

1) Первые 9 классов определены в таблице 4.

Класс	N	Нормализованная струя	Критерий устойчивости	Вырождение коразмерности 4
A_3	3	$\dot z_1 = i\omega z_1 + z_2$ $\dot z_2 = i\omega z_2 + \alpha z_1 \rho_1$	$\varnothing$	$\operatorname{Im}\alpha = 0$ или $\Lambda = \operatorname{diag}(\pm i\omega, \pm i\omega)$
A_4	4	$\dot z_1 = i\omega z_1 + \alpha \bar z_1 z_2$ $\dot z_2 = 2i\omega z_2 + \beta z_1^2$	$\varnothing$	$\alpha\beta = 0$ или $\begin{cases} \operatorname{Im}(\beta/\alpha) = 0 \\ \operatorname{Re}(\beta/\alpha) < 0 \end{cases}$
A_5	Алгебраических критериев устойчивости не существует.			
W_3^J: $\dim W^c = 3$, $\Lambda = J_3 = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$	2	$\dot x_1 = x_2$ $\dot x_2 = x_3$ $\dot x_3 = a x_1^2$	$\varnothing$	$a = 0$
$W_4^{I,J}$: $\dim W^c = 4$, $\Lambda = \begin{pmatrix} I & \\ & J_2 \end{pmatrix}$	2	$\dot z = i\omega z$ $\dot x_1 = x_2$ $\dot x_2 = a x_1^2$	$\varnothing$	$a = 0$
$W_5^{0,I,I}$: $\dim W^c = 5$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_1 & \\ & & I_2 \end{pmatrix}$	2	$\dot x = a x^2$ $\dot z_1 = i\omega_1 z$ $\dot z_2 = i\omega_2 z$	$\varnothing$	$a = 0$
$W_6^{I,I,I}$: $\dim W^c = 6$, $\Lambda = {}^{\mathbf{R}}\operatorname{diag}(i\omega)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\omega_j \neq 0$	3	$\dot z = Z(i\omega + \mathcal{A}\rho)$, $\mathcal{A} \in \operatorname{Hom}(\mathbf{C}^3, \mathbf{C}^3)$ $A = \operatorname{Re}\mathcal{A}$ $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$, $\mathcal{B}$ — множество главных миноров матрицы A	для каждого $B \in \mathcal{B}$ уравнение $B\xi = \mathbf{1}$ не имеет решений со всеми положительными компонентами	Существует $B \in \mathcal{B}$: уравнение $B\xi = 0$ имеет решение со всеми положительными компонентами

Здесь $\mathbf{1}$ — вектор, все компоненты которого равны 1; Λ — жорданова нормальная форма линейной части ограничения роста на центральное многообразие. Знак $\varnothing$ в столбце «критерий устойчивости» означает, что невырожденные струи неустойчивы.

Примечание. В последних четырех строках указаны только те вырождения коразмерности 4, которые выделяются требованиями на нелинейные члены. К ним нужно добавить классы, которые соответствуют дополнительным вырождениям линейной части и к которым примыкают, в смысле определения 5.5 ниже, классы $W_3^J, \ldots, W_6^{I,I,I}$; например, класс W_3^J примыкает к классу $W_3^{J,0}$: $\dim W^c=3$, $\Lambda=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, класс $W_4^{I,J}$ — к классу W_4^J: $\dim W^c=4$, Λ — нильпотентная жорданова клетка порядка 4 и т. д. В последней строке, а также в строках, соответствующих классам A_1 и A_2, к числу дополнительных вырождений линейной части относятся, в числе прочих, «внутренние резонансы порядка не выше 5», то есть соотношения вида $\omega_j=(k, \omega)$, $2\leqslant|k|\leqslant 5$, $k\in Z_+^3$; $\omega_i\neq\omega_j$ при $i\neq j$.

5.5. Диаграмма примыканий. Опишем примыкания классов ростков, исследованных на устойчивость в таблицах 4 и 5.

Определение. Пусть A и B — два непересекающихся класса ростков векторных полей в особой точке 0. Скажем, что класс B примыкает к классу A (пишется $B\to A$), если для каждого ростка v класса A существует непрерывная деформация, выводящая этот росток в класс B. Точнее, существует непрерывное семейство ростков $\{v_t \mid t\in[0, 1]\}$ такое, что $v_0=v$ и v_t — росток класса B при всех $t\in(0, 1]$.

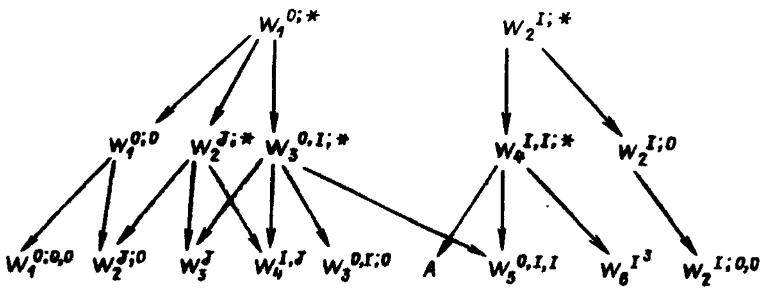


Рис. 15. Диаграмма примыканий в задаче об устойчивости по Ляпунову. Когда определение класса не слишком громоздко, оно зашифровано в обозначении. Нижний индекс в обозначении класса указывает размерность центрального многообразия. Верхние индексы до точки с запятой характеризуют собственные значения линейной части на мнимой оси и соответствующие жордановы блоки. Например, $W_5^{0,I,I}$ — класс векторных полей с одним нулевым и двумя парами чисто мнимых собственных значений линеаризации. Верхние индексы после точки с запятой характеризуют нелинейные члены:

звездочка (в обозначении класса коразмерности 2) указывает на отсутствие вырождений коразмерности 3, перечисленных в таблицах 2 и 3; число нулей после запятой указывает на число вырождений в нелинейных членах. Полная расшифровка обозначений содержится в таблицах 2—5.

5.6. Теоремы об алгебраической разрешимости.

Теорема. Проблема устойчивости и проблема топологической классификации ростков векторных полей классов W_1^0, W_2^I и W_2^J алгебраически разрешима.

Эта теорема использует теорему сведения § 4; для класса W_1^0 она почти очевидна, а для классов W_2^I и W_2^J следует из результатов Пуанкаре—Ляпунова (§ 4, гл. 5), а также [43] (см. гл. 5).

Теорема (Ю. С. Ильяшенко, 1984). Проблема устойчивости по Ляпунову для ростков векторных полей класса $W_3^{0,I}$ и класса $W_4^{I,I}$ при дополнительном условии: отношение ω_1/ω_2 иррационально и фиксировано — алгебраически разрешима до вырождений произвольной коразмерности. Струя ограничения на центральное многообразие векторного поля каждого из этих классов, записанная в нормальной форме Пуанкаре—Дюлака (п. 5.2) в переменных x, z и z_1, z_2 соответственно, устойчива, если и только если устойчива соответствующая струя фактор-системы относительно переменных x, r или ρ_1, ρ_2.

Проблема. Верна ли аналогичная теорема для задачи о топологической классификации ростков тех же классов?

§ 6. Гладкая классификация ростков векторных полей

6.1. Соотношение формальной и гладкой классификации. Случай общего положения исследован Ченем (K. T. Chen) [67 : 1]

Теорема. Если два ростка гладких векторных полей в гиперболической особой точке формально эквивалентны, то они гладко эквивалентны.

Проблема. Верна ли аналогичная теорема для негиперболических ростков с однорезонансными линейными частями?

Такие ростки принадлежат классам W_1^0 и W_2^I (п. 5.2). Предположим дополнительно, что ограничение ростка на центральное многообразие, записанное в формальной нормальной форме Пуанкаре—Дюлака, имеет ненулевые нелинейные члены.

В этом случае утвердительный ответ доказан Такенсом (F. Takens, 1973) [14 : 90] для ростков класса W_1^0 на прямой и ростков класса W_2^I на плоскости. В многомерном случае утвердительный ответ для этих классов получен недавно Г. Р. Белицким (частное сообщение).

6.2. Ростки векторных полей с симметриями.

Теорема ([14]). Для каждого ростка гладкого векторного поля в точке 0 пространства $\mathbb{R}^n$ и для каждой евклидовой структуры на $\mathbf{R}^n$ существует росток, формально эквивалентный исходному, имеющий линейную часть Λx, нелинейная часть которого коммутирует с векторным полем $\Lambda^* x$ ($*$ — сопряжение, порожденное выбранной евклидовой структурой). ▲

Рассмотрим на пространстве ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ эрмитово скалярное произведение, в котором жорданов базис оператора Λ, инвариантный относительно комплексного сопряжения, ортонормирован. Для применений предыдущей теоремы удобно в качестве евклидовой структуры на $\mathbf{R}^n$ брать ограничение на $\mathbf{R}^n$ этого скалярного произведения.

Следствие 1. Росток гладкого векторного поля класса $W_4^{I,I}$ в точке 0 пространства $\mathbf{R}^n$ при отсутствии внутренних резонансов $\omega_2 = k\omega_1$, $k = 1, 2, \ldots, 0 < \omega_1 < \omega_2$, формально эквивалентен ростку, задающему дифференциальное уравнение вида

$$\dot{z} = Z(i\omega + f(\rho)), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2), \tag{2}$$

где f — росток в нуле гладкой комплекснозначной вектор-функции, $Z = \mathrm{diag}(z_1, z_2)$.

Следствие 2. Росток гладкого векторного поля класса W_2^{J} на плоскости формально эквивалентен ростку, задающему дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = y + x^2 f(x), \quad \dot{y} = x^2 g(x),$$

где f и g — ростки гладких в нуле функций.

Для уравнений (2) асимптотика фазовых кривых, входящих в нуль, и инвариантных многообразий, проходящих через нуль, легко исследуется[1]. Тем самым, импликация «формальная эквивалентность⇒гладкая эквивалентность» содержательна даже тогда, когда формальная нормальная форма зависит от бесконечного числа нелинейных членов.

6.3. Квазигиперболичность. Импликация «формальная эквивалентность⇒гладкая эквивалентность» имеет место не только для ростков векторных полей с гиперболической линейной частью (теорема Ченя), но и для так называемых квазигиперболических ростков (см. [14], где рассмотрены ростки диффеоморфизмов). Квазигиперболические ростки векторных полей имеют, как и гиперболические, устойчивое и неустойчивое инвариантное множество, но эти множества — необязательно многообразия, и фазовые кривые приближаются к особой точке по

---

[1] Действительно, уравнение (2) симметрично относительно вращений $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda z_1, \mu z_2)$, $|\lambda| = |\mu| = 1$, и задает поэтому факторсистему на плоскости $\rho = (\rho_1, \rho_2)$. Исследование 0-кривых исходной системы сводится к исследованию 0-кривых факторсистемы, методика которого хорошо разработана (см. гл. 5).

устойчивому множеству не экспоненциально, а лишь степенным образом: модуль решения убывает как некоторая степень t при $t \to +\infty$. Решения, фазовые кривые которых лежат на неустойчивом множестве, ведут себя аналогично при $t \to -\infty$.

6.4. Конечно гладкая эквивалентность ростков векторных полей. Векторное поле с резонансной линейной частью может быть, вообще говоря, приведено к линейной нормальной форме конечно гладкой заменой, только класс гладкости будет ниже младшей степени резонансных членов. Первый результат в этом направлении принадлежит Стернбергу (S. Sternberg) [67 : 3]. Различные теоремы, посвященные повышению класса гладкости сопрягающего диффеоморфизма, получены В. А. Кондратьевым, В. С. Самоволом [14 : 44], Г. Р. Белицким [14]. Окончательный результат недавно получен Селлом (G. R. Sell) [105].

Теорема. Пусть v — росток векторного поля со спектром линейной части $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$, причем $(\lambda, k) - \lambda_j \neq 0$ для любого $k \in \mathbf{Z}_+^n$, $2 \leqslant |k| \leqslant 2N$; $\operatorname{Re}[(\lambda, k) - \lambda_j] \neq 0$ для любого $k \in \mathbf{Z}_+^n$, $|k| = 2N$. Тогда росток v C^N-гладко эквивалентен своей линейной части. Напротив, росток

$$2Nx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - (Nx_2 - x_1^N x_3^N) \frac{\partial}{\partial x_2} - (2N+1) x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

не является C^N-эквивалентным своей линейной части (резонанс $N\lambda_1 + N\lambda_3 - \lambda_2 = 0$).

§ 7. Нормальные формы векторных полей, линейная часть которых — нильпотентная жорданова клетка

Исследование нормальных форм в случае, когда линейная часть — нильпотентная жорданова клетка, облегчается теорией представлений алгебры Ли $\mathrm{sl}(2)$, каков бы ни был порядок клетки. В сущности, речь идет о следующей алгебраической задаче. Рассмотрим фазовый поток линейного векторного поля, заданного нильпотентной жордановой клеткой. Эта однопараметрическая группа линейных преобразований действует также на различных пространствах тензоров, например, на пространстве векторных полей с коэффициентами в виде однородных многочленов фиксированной степени. Спрашивается, какова жорданова структура определенных таким образом операторов на пространствах тензоров?

7.1. Центрированные цепочки. Теория представлений алгебры $\mathrm{sl}(2)$ позволяет найти число клеток и сказать кое-что о жордановом базисе (В. Н. Богаевский, А. Я. Повзнер, А. Б. Гивенталь). Занумеруем базисные векторы исходной жордановой клетки размера $d+1$ целыми числами от $-d$ до $+d$ через 2 (удобство такой нумерации ясно из дальнейшего). Итак, наша жорданова клетка J действует на базис по правилу

$$e_{-d} \mapsto e_{-d+2} \mapsto \ldots \mapsto e_d \mapsto 0. \tag{3}$$

Соответствующим координатным функциям $x_{-d}, \ldots, x_d$ припишем в качестве весов их номера, $\deg x_a = a$. Положим $\deg\left(\frac{\partial}{\partial x_a}\right) = -a$. Вес одночлена определяется, как сумма весов сомножителей, например, $\deg x_a{}^p = pa$, $\deg(x_b \partial/\partial x_a) = b - a (\partial/\partial x_a = e_a)$. Сумме элементов одного веса приписывается тот же вес.

Теорема. Рассмотрим действие группы e^{Jt} в векторном пространстве V и соответствующую ей группу преобразований в пространстве тензоров L над V. Жордановы цепочки производящего оператора этой группы в пространстве тензоров можно выбрать центрированными (такими, что крайние элементы каждой цепочки имеют противоположные веса, и при движении вдоль каждой цепочки вес каждый раз уменьшается на 2, как в формуле (3)).

7.2. Неубиваемые невязки. Размерность пространства однородных векторных многочленов степени N, входящих в невязку формальной нормальной формы векторного поля с линейной частью Jx, не превосходит числа жордановых клеток оператора $\operatorname{ad} J$. Здесь $\operatorname{ad} J$ — оператор коммутирования с J, действующий на пространстве L всех однородных векторных многочленов степени N. В силу предыдущей теоремы число этих клеток равно числу центрированных цепочек. Размерность пространства тензоров фиксированного веса нетрудно сосчитать. Поэтому из теоремы (после некоторых вычислений) вытекает

Следствие. Векторное поле с нильпотентной линейной частью, состоящей из одной жордановой клетки порядка n, формально эквивалентно такому, у которого слагаемые веса μ с компонентами однородной степени N принадлежат некоторому линейному пространству размерности

$$\operatorname{res}_{x=0}\left[x^{\frac{\mu}{2}-S}(1-x^n)\operatorname{res}_{t=0}\left(t^{-N}\prod_{k=1}^{n}(1-tx^k)^{-1}\right)\right],$$

где $S=N(n+1)/2$. В частности, все цепочки с фиксированным N одной четности: если n нечетно, то длины всех цепочек нечетны; а если n четно, то четность длины цепочки равна четности N.

Пп. 7.3—7.5 посвящены доказательству теоремы для пространства L, определенного в начале п. 7.2.

7.3. Стандартное представление группы SL(2) и алгебры sl(2). Группа линейных преобразований плоскости, сохраняющих площадь (группа SL(2)), естественно действует на пространстве P^{m+1} однородных многочленов степени m от двух переменных. Рассмотрим действия подгрупп гиперболических поворотов («картановской») и сдвигов («борелевской»):

$$H^t(x, y) = (e^t x, e^{-t} y), \quad S^t(x, y) = (x + ty, y).$$

При действии гиперболических поворотов одночлены x^m, $x^{m-1}y, \ldots, y^m$ умножаются на $e^{mt}, e^{(m-2)t}, \ldots, e^{-mt}$. Поэтому собственные числа производящего оператора действия картановской подгруппы (оператора A_H) равны $m, m-2, \ldots, -m$. Занумеруем собственные векторы оператора A_H соответствующими собственными значениями.

При сдвиге S^t ограничение многочлена на прямую $y = y_0$ сдвигается на $y_0 t$. Поэтому производящий оператор A_B действия борелевской подгруппы сводится к дифференцированию по x с последующим умножением на y. Значит, этот оператор переводит каждый собственный вектор картановской подгруппы в следующий (уменьшая собственное значение производящего оператора A_H на 2 единицы).

Описанное представление группы $\mathrm{SL}(2)$ (и соответствующее ему представление алгебры $\mathrm{sl}(2)$) назовем стандартным.

7.4. Продолжение нильпотентного оператора до представления алгебры Ли $\mathrm{sl}(2)$. Оператор J, действующий в $(d+1)$-мерном линейном пространстве V по формуле (3), можно достроить до представления в V алгебры Ли $\mathrm{sl}(2)$ группы сохраняющих площадь преобразований плоскости. Для этого достаточно перенести стандартное представление группы $\mathrm{SL}(2)$ (и алгебры $\mathrm{sl}(2)$) на пространство V с помощью изоморфизма $C: V \to P^{d+1}$, полагая в формулах предыдущего раздела $m = d$:

$$e_{-d} \mapsto \frac{x^d}{d!}, \quad e_{-d+2} \mapsto \frac{x^{d-1}y}{(d-1)!}, \quad \ldots, \quad e_d \mapsto y^d.$$

Этот изоморфизм сопрягает действие оператора J с действием производящего оператора A_B борелевской подгруппы, определенного в п. 7.3, а оператор A_H — с оператором $\tilde{A}^H$: $e_d \mapsto -de_d, \ldots$ $\ldots, e_{-d} \mapsto de_{-d}$. Полученное представление группы Ли $\mathrm{SL}(2)$ и алгебры Ли $\mathrm{sl}(2)$ на V назовем ассоциированным с оператором J. Следующая теорема утверждает, что всякое неприводимое представление алгебры $\mathrm{sl}(2)$ может быть получено аналогичным образом.

Теорема. Каждое неприводимое представление алгебры Ли $\mathrm{sl}(2)$ сопряжено со стандартным.

7.5. Окончание доказательства теоремы. Рассмотрим пространство L векторных полей на V, компоненты которых — однородные многочлены степени N от $d+1$ переменных (или какое-нибудь другое пространство тензоров над V). Пусть $J: V \to V$ — тот же оператор, что и выше. Рассмотрим представление алгебры $\mathrm{sl}(2)$ на V, ассоциированное с оператором J и соответствующее ему представление T алгебры $\mathrm{sl}(2)$ на L.

Собственные векторы оператора T_{A_H}, соответствующие производящему оператору картановской подгруппы — это векторные полиномы, состоящие из мономов одного веса, с собственным значением равным весу. Разложим представление Т на неприводимые; пусть V^{m+1} — пространство одного из неприводимых представлений размерности $m+1$. По предыдущей теореме неприводимое представление $T\,|\,V^{m+1}$ сопряжено со стандартным. Следовательно, собственные векторы ограничения T_{A_H} на V^{m+1} образуют центрированную цепочку $v_m, v_{m-2}, \ldots, v_{-m}$, вес векторного полинома v_a равен a. Рассмотрим теперь оператор T_{A_S}, соответствующий производящему оператору A_S борелевской подгруппы. Его ограничение на пространство V^{m+1} действует по формуле

$$v_m \mapsto v_{m-2} \mapsto \ldots \mapsto v_{-m} \mapsto 0 \tag{4}$$

(если нужно, векторы v_a заменяются на коллинеарные).

Заметим в заключение, что T_{A_S} — это и есть тот производящий оператор, о котором говорится в теореме п. 7.1, а именно, оператор коммутирования с векторным полем Jx; здесь x — столбец с компонентами $x_d, \ldots, x_{-d}$. Действительно, борелевская подгруппа $\{S^t\}$ действует на пространстве V по правилу: $x \mapsto (\exp Jt)x$, а на пространстве L по правилу: поле v переходит в поле $\tilde{v}=e^{Jt}v \circ e^{-Jt}$. Производящий оператор последней подгруппы — это оператор коммутирования с полем Jx.

Тем самым, (4) — искомая центрированная цепочка оператора $\mathrm{ad}\,J$. ▶

Глава 4

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Локальная теория аналитических дифференциальных уравнений позволяет до конца исследовать особенности полей общего положения. Здесь приведены н смежные результаты о вырожденных особенностях.

§ 1. Линейные нормальные формы

Росток аналитического векторного поля общего положения в особой точке аналитически эквивалентен своей линейной части, как показывают сформулированные ниже теоремы.

1.1. Области Пуанкаре и Зигеля. Малые знаменатели.

Определение. Набор $\lambda \in \mathbb{C}^n$ принадлежит *области Пуанкаре*, если выпуклая оболочка векторов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на комплексной плоскости не содержит нуля, и *области Зигеля* — в противном случае. *Набор* $\lambda \in \mathbf{C}^n$ — *строго зигелев*, если выпуклая оболочка векторов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ содержит нуль вместе с окрестностью.

Определение. Линейное векторное поле — *типа Пуанкаре* или *Зигеля*, илн *строго зигелева типа*, если спектр соответствующего оператора принадлежит области Пуанкаре или Зигеля, или строго зигелев.

Набор собственных чисел называется *резонансным*, если одно из них является суммой не менее двух собственных чисел (не обязательно различных).

Формальные замены, приводящие ростки аналитических векторных полей с нерезонансной линейной частью к линейной нормальной форме, называются в этом параграфе нормализующими рядами; при их вычислении приходится делить на выражения $(\lambda, k) - \lambda_j$, $(k, j) \in J$, где $J = \{(k, j) \mid k \in \mathbf{Z}_+^n,\ |k| = \Sigma k_i \geqslant 2,\ j \in \{1, \ldots, n\}\}$; эти выражения обращаются в 0 для резонансных наборов. Для нерезонансного набора λ множество чисел $\{(\lambda, k) - \lambda_j \mid (k, j) \in J\}$ имеет предельную точку нуль, если и только если λ принадлежит области Зигеля. Числа из этого множества и называются *малыми знаменателями;* их появление затрудняет сходимость нормализующих рядов.

1.2. Сходимость нормализующих рядов.

Теорема Пуанкаре ((H. Poincaré), [8], [48]). Росток аналитического векторного поля с нерезонансной линейной частью типа Пуанкаре аналитически эквивалентен своей линейной части.

Теорема Зигеля ((C. L. Siegel), [8]). Для почти всех (в смысле меры Лебега) наборов собственных чисел линейной части ростка голоморфного векторного поля в особой точке росток биголоморфно эквивалентен своей линейной части.

Почти всегда выполненное условие на собственные числа, достаточное для голоморфной эквивалентности ростка своей линейной части, оценивает малые знаменатели снизу через порядок соответствующего резонанса. Перейдем к точным формулировкам.

Определение. Набор $\lambda \in \mathbf{C}^n$ *несоизмерим по А. Д. Брюно*, если существуют такие положительные С и ε, что

$$|(\lambda, k) - \lambda_j| > Ce^{-|k|^{1-\varepsilon}}$$

для всех $(k, j) \in J$, для которых $(\lambda, k) - \lambda_j \neq 0$ (для почти всех $\lambda \in \mathbf{C}^n$ выполняется даже аналогичная оценка с правой частью $C|k|^{-(n+1)}$).

Теорема ([18 : 31]). Росток аналитического векторного поля в особой точке, спектр линейной части которого нерезонансен и несоизмерим по Брюно, биголоморфно эквивалентен своей линейности части.

В [18 : 31] эквивалентность линеаризации доказана при еще более слабом ограничении на λ.

Аналогичные теоремы справедливы в случае, когда набор λ резонансный, если росток векторного поля формально эквивалентен своей линейной части (например, в случае центра по линейным членам при наличии формального первого интеграла $x^2+y^2+\ldots$). Общие теоремы такого рода содержатся в работах А. Д. Брюно и В. А. Плисса [18 : 31]; [14 : 54].

1.3. Аналитические теоремы о расходимости нормализующих рядов.

Если малые знаменатели патологически малы, то нормализующие ряды, как правило, расходятся.

Определение. Набор $\lambda\in\mathbf{C}^n$ — почти резонансный, если ряд

$$\sum z^k[(\lambda, k)-\lambda_j]^{-1}\partial/\partial z_j$$

не сходится ни в каком шаре с центром 0.

Теорема ([30]). Пусть набор λ — почти резонансный и коэффициенты сходящегося векторного ряда $f(z)=\sum\limits_{j} f_{kj}z^k\partial/\partial z_j$ оцениваются снизу по модулю некоторой геометрической прогрессией: $|f_{kj}|\geqslant Cq^{|k|}$. Тогда для почти всех в смысле меры Лебега комплексных α уравнение

$$\dot z=(\operatorname{diag}\lambda)z+\alpha f(z)$$

аналитически неэквивалентно линейному в любой окрестности точки 0.

1.4. Геометрические теоремы о расходимости нормализующих рядов. Геометрической причиной расходимости нормализующих рядов в случае патологически малых знаменателей служит явление материализации резонансов; оно состоит в следующем (см. [8]).

Рассмотрим однопараметрическое семейство векторных полей, линейные части которых при нулевом значении параметра проходят трансверсально через резонанс (точнее, спектр линейной части при прохождении параметра через 0 трансверсально пересекает резонансную плоскость). При прохождении параметра через 0 от координатных плоскостей некоторой карты отделяется аналитическое многообразие, зависящее от параметра семейства[1] и инвариантное для уравнения, соответствующего тому же значению параметра. Топология этого многообразия определяется арифметикой резонанса. Наличие «большого куска» этого многообразия в некоторой окрестности особой точки препятствует приведению уравнения к линейной

[1] Простейший геометрический пример такого рода доставляет семейство многообразий $xy=\varepsilon$; при $\varepsilon=0$ многообразие семейства совпадает с объединением координатных осей.

нормальной форме в этой окрестности. Если набор λ патологически близок счетному числу резонансов, то в каждой окрестности особой точки уравнение

$$\dot{z} = (\operatorname{diag}\lambda)\, z + f(z)$$

при условии, что невязка f — общего положения, имеет счетное число инвариантных многообразий. Каждое из них возникает при материализации одного из резонансов, близких к λ; взятые вместе, эти многообразия препятствуют сходимости нормализующих рядов в какой-либо окрестности нуля.

Доказанные на этом пути геометрические теоремы о расходимости [34], [34 : 6] предполагают, что малые знаменатели убывают еще быстрее, чем в предыдущем пункте, а именно, для некоторого $\sigma>0$ при любом $C>0$ существует $k\in\mathbf{Z}_+^n$, для которого

$$0<|(\lambda, k)-\lambda_j|<C|k|^{-\sigma|k|}.$$

§ 2. Связь формальной и аналитической классификации

Здесь обсуждается соотношение между формальной и аналитической классификациями ростков векторных полей, спектр линейной части которых резонансен, но несоизмерим по Брюно.

2.1. Условие А. А. Д. Брюно [18 : 31] нашел необходимое и достаточное условие для того, чтобы класс ростков аналитических векторных полей, формально эквивалентных ростку с несоизмеримым по Брюно спектром линейной части, совпадал с классом ростков, аналитически эквивалентных этому ростку — так называемое условие А. Условие А налагается на нелинейные члены предварительной нормальной формы ростка v в случае, когда линейная часть ростка — резонансна. Все формально эквивалентные предварительные нормальные формы удовлетворяют или не удовлетворяют условию А одновременно; поэтому условие А является условием на сам росток, а не только на его нормальную форму. Формулировка этого условия громоздка и здесь не приводится. Отметим в качестве примера, что росток векторного поля иа плоскости с линейной частью $px\partial/\partial x - qy\partial/\partial y$ (p и q натуральные) удовлетворяет условию А, если и только если росток орбитально аналитически эквивалентен своей линейной части. Кроме того, условие А автоматически выполнено для всех ростков с линейной частью типа Пуанкаре. Сходимость нормализующих рядов для этого случая была доказана Дюлаком (см. [18]). В области Зигеля условие А выполняется редко.

2.2. Замечание. Проблемы гладкой и аналитической классификации ростков векторных полей в особой точке естественно распадаются на 3 части.

I. Формальная классификация (см. § 3, гл. 3).

II. Изучение связи между формальной и гладкой (или аналитической) классификацией.

В нерезонансном случае формальная нормальная форма линейна. Связь классификаций нерезонансных ростков в гладком и в аналитическом варианте описана в § 6 главы 3 и § 1 главы 4. Резонансный случай для голоморфных ростков исследован так же подробно, как нерезонансный (см. п. 2.1). Ввиду крайней жесткости условия A, класс формально эквивалентных аналитических ростков векторных полей с резонансной линейной частью в особой точке почти никогда не совпадает с классом аналитически эквивалентных ростков. О гладком случае см. теорему Ченя и некоторые другие теоремы (§ 6, гл. 3 и § 2, гл. 6).

III. Получение (полной) системы инвариантов аналитической классификации ростков векторных полей[1)].

До последнего времени при решении этой задачи ограничивались инвариантами формальной классификации. Затем исследовалась сходимость соответствующих формальных замен. Если они сходились, проблема была решена, если расходились — исследование прекращалось. Работы, где были найдены инварианты аналитической классификации, отличные от формальных, излагаются в главах 5 и 7.

§ 3. Аналитические инвариантные многообразия

Аналитических инвариантных многообразий для аналитических систем существенно меньше, чем гладких. Так, для ростков аналитических векторных полей на $\mathbb{R}^2$ со спектром линейной части $(\lambda, 0)$, $\lambda\neq 0$, всегда существует конечно гладкое центральное многообразие (§ 4, гл. 3), но, как правило, не существует аналитического (§ 5, гл. 5).

Теоремы об аналитическом устойчивом (неустойчивом) инвариантном многообразии сформулированы в § 4 главы 3. Аналогичные теоремы справедливы для голоморфных векторных полей [18 : 31]. Формулируемые ниже теоремы о локальных инвариантных многообразиях голоморфных векторных полей позволяют находить аналитические инвариантные многообразия, содержащие особую точку вещественно аналитического поля и не принадлежащие ни устойчивому, ни неустойчивому многообразию этой точки.

3.1. Теорема об инвариантном многообразии. Рассмотрим росток аналитического векторного поля в особой точке 0, линейная часть которого имеет инвариантную плоскость. Исследуется вопрос, имеет ли росток аналитическое инвариантное многообразие, касающееся в нуле этой плоскости.

[1)] Гладкий аналог этой проблемы, насколько нам известно, исследован только на формальном уровне; исключение составляет результат С. М. Воронина [60, с. 143] и Мартине—Рамиса [99, § 5, гл. III].

Рассмотрим формальное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=\Lambda x+f(x, y),\ \dot{y}=My+g(x, y),\ f(0)=0,\ g(0)=0,$$
$$f_*(0)=0,\ g_*(0)=0,\ x=(x_1, \ldots, x_n),\ y=(y_1, \ldots, y_m). \qquad (1)$$

Определение. Плоскость $y=0$ называется *формальным инвариантным многообразием* уравнения (1), если $g(x, 0)=0$. Уравнение $\dot{x}=\Lambda x+f(x, 0)$ называется ограничением уравнения (1) на это формальное инвариантное многообразие.

Определение. Скажем, что формальное векторное поле принадлежит классу НФИМ (нормальная форма на инвариантном многообразии) с линейной частью (Λx, My), если ему соответствует уравнение (1), для которого плоскость $y=0$ является формальным инвариантным многообразием, а ограничение уравнения (1) на эту плоскость имеет предварительную нормальную форму.

Теорема (Ю. Н. Бибиков [77]). Пусть v — росток аналитического векторного поля в особой точке, формально эквивалентный формальному векторному полю w класса НФИМ с линейной частью (Λx, My), $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — спектр матрицы Λ, и $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ — спектр M, причем выполнены следующие условия:

1°. Отсутствуют «перекрестные резонансы»:

$$\mu_j \neq (\lambda, k) \text{ для всех } k \in \mathbf{Z}_+^n,\ |k| \geqslant 2,\ j=1, \ldots, m.$$

2°. λ — резонансный набор без малых знаменателей: 0 — изолированная точка множества чисел $\{(\lambda, k)-\lambda_j \mid (k, j) \in J\}$.

3°. Ограничение уравнения (1), соответствующего полю w, на плоскость $y=0$, удовлетворяет условию А, (см. [18 : 31]).

Тогда росток v аналитически эквивалентен некоторому ростку класса НФИМ с линейной частью (Λx, My). ▲

Теоремы об инвариантных многообразиях и множествах, охватывающие и вырожденные системы, анонсированы А. Д. Брюно [18]: ([40], [42], [43], [46]), но их доказательства пока не опубилкованы.

3.2. Следствия. Аналитичность центрального многообразия.

Определение. Пусть формальное векторное поле записано в предварительной нормальной форме. Плоскость, на которой гиперболические переменные обращаются в нуль, называется *формальным центральным многообразием* для этого поля.

Замечание. Если уравнение аналитически эквивалентно предварительной нормальной форме, то это определение задает обычное центральное многообразие.

Теорема. Если ограничение предварительной нормальной формы на формальное центральное многообразие имеет вид

$$\dot{z}=iz\sum_{0}^{\infty} a_k z^k \bar{z}^k,\ z \in \mathbf{C},\ \operatorname{Im} a_k=0,\ a_0=\omega \neq 0,$$

или вид $\dot{x}=0$, $x \in \mathbf{R}$, то центральное многообразие аналитично и состоит из замкнутых фазовых кривых (в первом случае), либо из положений равновесия (во втором).

Это — аналог теоремы Пуанкаре—Ляпунова (§ 4, гл. 5). Для гладких ростков многообразия неподвижных точек или замкнутых кривых, вообще говоря, нет.

Обратимые системы. Так называются дифференциальные уравнения, инвариантные относительно обращения времени.

Рассмотрим уравнение малых колебаний $\ddot{x}+Ax=0$, $x \in \mathbf{R}^n$, матрица A симметрична и положительно определена. Соответствующее фазовое пространство $\mathbf{R}^{2n}$ распадается в прямую сумму двумерных инвариантных плоскостей L_j, $j=1, \ldots, n$. Каждая такая плоскость заполнена замкнутыми фазовыми кривыми, движение по которым происходит с частотой ω_j, где ω_j^2, $j=1, \ldots, n$, — собственные значения оператора A. Следующая теорема показывает, что если уравнение малых колебаний возмутить нелинейными членами так, что полученная система будет сохраняться при обращении времени, тогда возмущенная система будет иметь, как и в линейном случае, n однопараметрических семейств замкнутых фазовых кривых; на частоты ω_j налагается слабое ограничение.

Теорема. Пусть аналитическая система

$$\ddot{x}+Ax=\Phi(x, \dot{x}), \quad \Phi(0, 0)=0, \quad \Phi_*(0, 0)=0 \qquad (2)$$

инвариантна относительно обращения времени, то есть $\Phi(x, -p)=\Phi(x, p)$, и пусть матрица A, плоскости L_j и частоты ω_j — те же, что и выше. Пусть, кроме того, $\omega_j \neq k\omega_l$ для любых $k \in \mathbf{Z}$, $j \neq l$. Тогда в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ системы (2) существуют n двумерных аналитических поверхностей, касающихся плоскостей L_j в нуле и заполненных замкнутыми фазовыми кривыми этой системы.

Более сильная теорема доказана в [77]. Обратимые системы имеют много общих свойств с гамильтоновыми системами[1].

3.3. Об аналитическом центральном многообразии дифференциальных уравнений на плоскости. В этом пункте исследуются дифференциальные уравнения в окрестности особой точки на плоскости $\mathbf{R}^2$, одно собственное значение линейной части которых равно нулю, а другое — отлично от нуля:

$$\begin{gathered}\dot{x}=f_1(x, y), \quad \dot{y}=\lambda y+f_2(x, y),\\ \lambda \neq 0, \quad f_j(0, 0)=0, \quad df_j(0, 0)=0, \quad j=1;\ 2.\end{gathered} \qquad (3)$$

Уравнения такого вида всегда имеют бесконечно гладкое

[1] См. V. I. Arnol'd, Reversible systems, in «Nonlinear and Turbulent Processes», Acad. Publ. New York, 1984, 1161—1174.

центральное многообразие (эффект двумерности), но, вообще говоря, не имеют аналитического. Последнее обстоятельство отмечено Эйлером на примере уравнения

$$\dot{x}=x^2, \quad \dot{y}=y-x$$

(линейной заменой приводимого к виду (3)). Оказывается, что вопрос о наличии аналитического центрального многообразия уравнения (3) не может быть решен по формальной нормальной форме уравнения в изолированной особой точке 0: в каждом классе формально эквивалентных уравнений такого типа существуют уравнения как имеющие, так и не имеющие аналитическое центральное многообразие [98]. Для того чтобы все уравнения вида (3), формально эквивалентные между собой, имели аналитическое центральное многообразие, необходимо и достаточно, чтобы особая точка 0 этих уравнений была неизолированной; центральное многообразие в этом случае состоит из особых точек. Это условие выделяет множество уравнений коразмерности бесконечность. Между тем, множество уравнений (3), имеющих аналитическое центральное многообразие, имеет в классе всех уравнений (3) комплексную коразмерность 1 [98].

§ 4. Топологическая классификация особых точек в комплексной области

Формулируемые ниже теоремы показывают, что в отличие от вещественного случая топологическая классификация векторных полей в комплексном фазовом пространстве недискретна (имеет непрерывные инварианты) даже для линейных векторных полей общего положения.

4.1. Линейные векторные поля.

Определение. Линейное векторное поле в комплексном фазовом пространстве называется *гиперболическим* (*слабо гиперболическим*) если никакие два собственные значения соответствующего оператора не имеют вещественного (соответственно, вещественного неположительного) отношения.

Теорема Гукенхеймера (J. Guckenheimer). Ростки голоморфных векторных полей в особой точке 0 пространства $\mathbf{C}^n$ с гиперболической линейной частью типа Пуанкаре орбитально топологически эквивалентны друг другу.

Ситуация резко меняется даже для линейных полей типа Зигеля.

Теорема (Н. Н. Ладис, Камачо (С. Camacho), Кёйпер (N. H. Kuiper), Пэйлис (J. Palis), Ю. С. Ильяшенко, [8, с. 287]). Диагонализируемые линейные векторные поля, спектр которых лежит строго внутри области Зигеля, орбитально топологически эквивалентны в некоторой окрестности точки нуль пространства $\mathbf{C}^n$, если и только если наборы обратных величин их собственных значений переходят друг в друга при $\mathbb{R}$-линейном отображении $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Теорема (Ю. С. Ильяшенко, Н. Н. Ладис, [96]). Два строго зигелевых невырожденных линейных векторных поля, имеющих нетривиальные жордановы клетки, орбитально топологически эквивалентны, если и только если они аффинно эквивалентны.

Проблемы. Для получения полной орбитальной топологической классификации линейных векторных полей в $\mathbb{C}^n$ осталось разобрать следующие случаи.

1. Линейные векторные поля, спектр которых лежит на границе области Зигеля.

2. Линейные векторные поля, имеющие нетривиальные жордановы клетки с нулевым собственным значением.

4.2. Нелинейный случай. Росток голоморфного векторного поля в особой точке топологически (и даже аналитически) эквивалентен своей линейной части для всех нерезонансных полей со спектром из области Пуанкаре, а в области Зигеля для почти всех (в смысле меры Лебега) наборов собственных значений. Это следует из теоремы Пуанкаре и Зигеля. Однако росток топологически эквивалентен своей линейной части зачастую и тогда, когда теорема Зигеля неприменима: малые знаменатели не препятствуют этой эквивалентности.

Шаперон (M. Chaperon) [90, p. 93] доказал, что если спектр линейной части ростка голоморфного векторного поля в особой точке является слабо гиперболическим набором, тогда росток топологически эквивалентен своей линейной части, и сопрягающий гомеоморфизм можно выбрать удовлетворяющим условию Гельдера.

Глава 5

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ И КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Здесь описан метод разрешения особенностей. Он позволяет заменить сколь угодно вырожденную особую точку векторного поля на плоскости так называемыми элементарными, которые хорошо изучены как в вещественной, так и в комплексной области. Типичные поля не имеют вырожденных особенностей.

§ 1. Разрешение особенностей

В этом параграфе излагаются классическая теорема Бендиксона и ее модификации.

1.1. Раздутие или σ-процесс на плоскости. Начнем с определения полярного раздутия. Пусть гладкое неплоское в нуле векторное поле[1] v задано в окрестности U особой точки 0 на плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть (r, φ) — точка с полярными координатами (r, φ). Рассмотрим отображение $U\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2$, $(r, \varphi)\mapsto(r+1, \varphi)$. Область $U\setminus\{0\}$ перейдет при этом в кольцо с внутренней границей $r=1$. Векторное поле, полученное из v при этом отображении, можно так гладко продолжить в полную окрестность окружности $r=1$, что продолженное поле после деления на подходящую степень $(r-1)$ будет гладким в некоторой окрестности окружности $r=1$, будет иметь лишь конечное число особых точек на этой окружности и будет неплоским во всех этих точках.

Это построение называется *полярным раздутием* особой точки векторного поля, а окружность $r=1$, возникающая из особой точки, — *вклеенной окружностью.*

Каждая из особых точек, полученных при раздутии, вообще говоря, проще исходной. Для дальнейшего упрощения полученных точек можно снова применять полярное раздутие. Прежде чем описывать, какие простейшие точки могут при этом получиться, определим алгебраический вариант раздутия, называемый *σ-процессом.*

Рассмотрим естественное отображение проколотой вещественной плоскости $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ на проективную прямую $\mathbb{R}P^1$: каждой точке проколотой плоскости сопоставляется прямая, соединяющая эту точку с нулем. График этого отображения обозначим через M; его замыкание $\overline{M}$ в прямом произведении $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}P^1$ диффеоморфно листу Мёбиуса. Проектирование π: $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}P^1\to\mathbb{R}^2$ вдоль второго сомножителя переводит $\overline{M}$ в $\mathbb{R}^2$; полным прообразом нуля при этом отображении является проективная прямая $L=\mathbb{R}P^1$ (называемая далее *вклеенной проективной прямой*); проектирование π: $\overline{M}\setminus L\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ — диффеоморфизм.

Лемма. Гладкому неплоскому в нуле векторному полю v, заданному в окрестности точки 0 плоскости $\mathbb{R}^2$, соответствует гладкое поле направлений α, определенное в некоторой окрестности вклеенной прямой L на поверхности $\overline{M}$ всюду, за исключением конечного числа точек, расположенных на L и называемых особыми. При проектировании $\pi: \overline{M}\setminus L\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ поле α переходит в поле направлений, порожденное полем v. В окрестности каждой особой точки поле α порождается некоторым гладким векторным полем $\tilde{v}$, не плоским в особой точке.

Утверждение леммы позволяет продолжать σ-процесс по индукции.

Это построение, в отличие от полярного раздутия, дословно переносится в комплексную область, только вместо $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}P^1$ нужно рассматривать $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}P^1$.

---

[1] Гладкое векторное поле называется *плоским* в некоторой точке, если оно обращается в нуль в этой точке вместе со всеми производными.

1.2. Элементарные особые точки.

Определение. Особая точка векторного поля на плоскости называется *элементарной*, если хотя бы одно собственное значение линейной части поля в этой точке отлично от нуля.

Топологическая классификация изолированных элементарных особых точек на вещественной плоскости проста: кроме узлов, седел, фокусов и центров среди них встречаются еще лишь седлоузлы (рис. 16).

1.3. Хорошие раздутия. За конечное число полярных раздутий или σ-процессов вырожденную особую точку векторного поля на плоскости можно рассыпать на конечное число элементарных при очень слабых ограничениях на векторное поле.

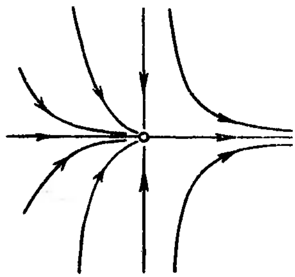


Рис. 16. Седлоузел.

Теорема Бендиксона ((I. Bendixson) [75], [84]). Вещественно-аналитическое векторное поле, заданное в окрестности вещественно-изолированной особой точки на плоскости $\mathbf{R}^2$, в результате конечного числа σ-процессов переходит в аналитическое поле направлений, заданное в окрестности вклеенных проективных прямых и имеющее лишь конечное число особых точек, каждая из которых элементарна.

Раздутие, описанное в теореме Бендиксона, называется *«хорошим раздутием»*.[1)]

Теорема Зайденберга ((A. Seidenberg) [105]). Хорошее раздутие существует для голоморфного векторного поля, заданного в окрестности изолированной особой точки на плоскости $\mathbf{C}^2$.

Для гладких векторных полей аналогичная теорема справедлива при несколько более жестких ограничениях.

Определение. Векторное поле v удовлетворяет в особой точке x_0 условию Лоясевича, если $|v(x)|$ убывает не быстрее некоторой степени расстояния до особой точки при стремлении $x\to x_0$, то есть $|v(x)|\geqslant c|x-x_0|^p$ для некоторых положительных c и p.

Множество ростков векторных полей, не удовлетворяющих условию Лоясевича (S. Łojasiewicz), имеет коразмерность бесконечность в пространстве всех ростков. Например, для конечнократной особой точки это условие всегда выполнено.

Теорема Дюмортье ((F. Dumortier) [84], [85]). Хорошее раздутие существует для гладких векторных полей, заданных в окрестности особой точки на плоскости $\mathbf{R}^2$, удовлетворяющих условию Лоясевича. Кроме того, каждое такое поле за

[1)] В оригинальной работе [84] «хорошее раздутие» удовлетворяет более жестким требованиям.

конечное число полярных раздутий можно превратить в гладкое векторное поле в плоской области с конечным числом особых точек, каждая из которых элементарна.

Замечание. В работе [84] дана несколько иная, более сильная формулировка.

§ 2. Гладкая орбитальная классификация элементарных особых точек на плоскости

Элементарность особых точек имеет двоякий смысл: 1) сложная особая точка рассыпается на элементарные, как на атомы. 2) Элементарные особые точки сравнительно просто устроены (см. § 2 и § 5). Указанная в заглавии классификация получена для всех ростков гладких векторных полей, за исключением подмногообразия коразмерности бесконечность, и, в частности, для всех ростков аналитических векторных полей с изолированной особой точкой; она дается следующими двумя теоремами.

2.1. Таблица нормальных форм: аналитический случай.

Теорема. Росток аналитического векторного поля в изолированной элементарной особой точке на вещественной плоскости гладко орбитально эквивалентен одному из векторных полей, указанных в следующей таблице (здесь и всюду в этой главе числа p, q и k натуральные, a — вещественное, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}=(x, y)$, $r^2=x^2+y^2$, I — оператор поворота на $\pi/2$, $\varepsilon\in\{0;\ 1;\ -1\}$, дробь p/q несократима).

Тип особой точки	Нормальная форма
1. Поле с нерезонансной линейной частью	$w(\mathbf{x})=\Lambda\mathbf{x}$
2. Центр по линейным членам	$w(\mathbf{x})=I\mathbf{x}+\varepsilon(r^{2k}+cr^{4k})\mathbf{x}$
3. Резонансный узел	$w(x,y)=x\frac{\partial}{\partial x}+(ny+\varepsilon x^n)\frac{\partial}{\partial y}$
4. Резонансное седло с отношением собственных чисел $\lambda=-p/q$	$w(x,y)=x[1+\varepsilon(u^k+au^{2k})]\times$ $\times\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y\frac{\partial}{\partial y}$, $u=x^py^q$ — резонансный моном
5. Вырожденная элементарная особая точка	$w(x,y)=x(\pm x^k+ax^{2k})\frac{\partial}{\partial x}\pm y\frac{\partial}{\partial y}$ (знаки + и — независимы)

2.2. Нормальные формы в гладком случае.

Определение. *Формальным первым интегралом* ростка векторного поля v называется формальный ряд F, для которого $(\hat{v}, \operatorname{grad} F)=0$.

Теорема. К таким же, как выше, нормальным формам приводятся ростки гладких векторных полей в элементарных особых точках. удовлетворяющие условию Лоясевича и не имеющие формального первого интеграла, тейлоровский ряд которого начинается с положительно определенной квадратичной формы.

Эти теоремы доказаны по частям в [94], [67], [14 : 90], [18], [16], [32] и в готовящейся к печати статье Ю. С. Ильяшенко.

§ 3. Топологическая классификация сложных особых точек с характеристической траекторией

Задача, указанная в заглавии, алгебраически разрешима и для ее решения имеется простой алгоритм. Всюду в этом параграфе речь идет о вещественной плоскости.

3.1. Основная альтернатива.

Определение. Фазовая кривая дифференциального уравнения на плоскости называется *характеристической траекторией* особой точки, если она входит в эту точку при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$, касаясь некоторой прямой.

Определение. Особая точка векторного поля называется *монодромной,* если существуют окрестность этой точки и гладкая дуга[1] с началом в этой точке, трансверсальная полю всюду вне начала, такие, что поле направлений в окрестности с выброшенной дугой диффеоморфно стандартному (рис. 17). Точнее, существует непрерывное отображение замкнутого прямоугольника на замыкание окрестности особой точки, диффеоморфно переводящее внутренность прямоугольника на дополнение окрестности до упомянутой трансверсальной дуги и преобразующее горизонтальное поле — в исходное; вертикальные стороны прямоугольника оно отображает на трансверсаль, а нижнюю горизонтальную сторону переводит в особую точку. Каждая фазовая кривая исходного поля с началом на трансверсали, достаточно близким к особой точке, сделав один виток вблизи этой точки, возвращается на ту же трансверсаль. Отображение, переводящее начальную точку каждой такой дуги в ее конец (точку первого возвращения на трансверсаль), называется *преобразованием монодромии особой точки* (рис. 17).

Замечание. Во внутренних точках трансверсали преобразование монодромии имеет тот же класс гладкости, что и векторное поле, и аналитично вместе с ним. Однако оно может не продолжаться гладко за начало трансверсали даже для аналитического векторного поля.

Легко привести пример гладкого векторного поля, особая точка которого не имеет характеристической траектории и не является монодромной (рис. 18). Однако соответствующее векторное поле обязательно будет плоским в особой точке.

[1] Гладкость дуги в начальной точке означает возможность гладко продолжить дугу через начало.

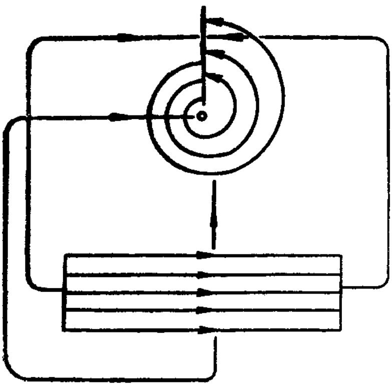


Рис. 17. Монодромная особая точка.

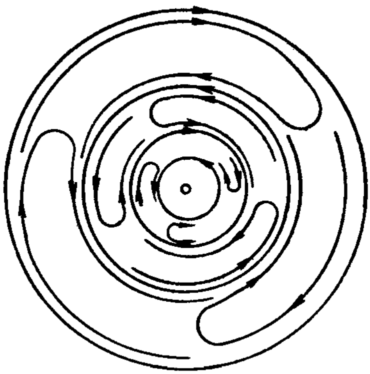


Рис. 18. Немонодромная особая точка без характеристической траектории.

Теорема. Особая точка гладкого векторного поля на плоскости, не плоского в этой точке, либо имеет характеристическую траекторию, либо монодромна.

3.2. Топологическая классификация дифференциальных уравнений на плоскости в окрестности особой точки. Как доказано в [3], окрестность особой точки векторного поля, имеющего характеристическую траекторию, при необременительных ограничениях на векторное поле распадается в конечное объединение так называемых гиперболических, параболических и эллиптических секторов.

Определение. Стандартным гиперболическим (соответственно, параболическим, эллиптическим) сектором называется множество S_h (S_p, S_e) с векторным полем $v_h(v_p, v_e)$ на нем, причем $v_h=x\partial/\partial x-y\partial/\partial y$, S_h ограничено линиями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $xy=1/2$ (гиперболический сектор); $v_p=x\partial/\partial x+$ $+y\partial/\partial y$, S_p ограничено линиями $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2=1$ (параболический сектор); $v_e=z^3\partial/\partial z$, $z=x+iy$, S_e ограничено фазовой кривой поля v_e, расположенной в области $x>0$, $y>0$ и пополненной точкой 0 (эллиптический сектор) (рис. 19).

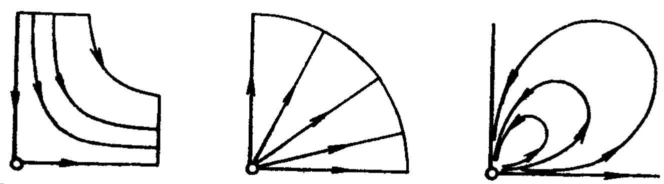


Рис. 19.

а) Гиперболический сектор, б) параболический сектор, в) эллиптический сектор.

Определение. Гиперболическим (эллиптическим, параболическим) сектором векторного поля v с особой точкой 0 называется замыкание S открытого множества, содержащего нуль на границе, при условии, что существует гомеоморфизм $S_h \to S$ ($S_p \to S$, $S_e \to S$), переводящий фазовые кривые стандартного поля v_h (v_p, v_e) в фазовые кривые поля v, причем характеристические траектории переходят в характеристические.

Теорема 1 ([3]). Пусть некоторая окрестность изолированной особой точки гладкого неплоского векторного поля v с характеристической траекторией не содержит счетного числа эллиптических секторов без общих внутренних точек. Тогда эта особая точка имеет окрестность, распадающуюся в конечное объединение параболических, эллиптических и гиперболических секторов поля v, не имеющих общих внутренних точек.

Из теоремы Дюмортье (п. 1.3) вытекает следующая

Теорема 2. Заключение предыдущей теоремы справедливо для особой точки гладкого векторного поля, удовлетворяющего в этой точке условию Лоясевича. В частности, заключение справедливо для изолированной особой точки аналитического векторного поля.

Тем самым, патологическая картина со счетным числом эллиптических секторов, не запрещенная чисто геометрическими соображениями (теоремой существования, единственности и непрерывной зависимости), не возможна в аналитическом случае.

В книге [3] построен полный набор топологических инвариантов векторных полей с конечным числом особых точек на сфере, удовлетворяющих условиям теоремы 1. В частности, это дает топологическую классификацию аналитических векторных полей с изолированными особыми точками на сфере. Проблема реализации, то есть вопрос о том, какие из перечисленных в [3] фазовых портретов фактически реализуются для аналитических векторных полей на сфере, остается открытой: неизвестно, могут ли такие поля иметь счетное число предельных циклов (см. § 4, гл. 6).

3.3. Топологическая конечная определенность. Диаграммы Ньютона векторных полей.

Теорема ([84], [85]). Для каждого ростка гладкого векторного поля на плоскости, удовлетворяющего условию Лоясевича, можно по некоторой конечной струе определить, имеет ли этот росток характеристическую траекторию или не имеет. При наличии характеристической траектории исследуемый росток имеет конечную струю, все представители которой топологически эквивалентны. В этом случае фазовый портрет представителя исследуемого ростка можно построить с точностью до гомеоморфизма с помощью конечного числа алгебраических операций над тейлоровскими коэффициентами соответствующей струи.

Это построение проводится следующим образом. Сначала делается хорошее полярное раздутие. Затем рисуются фазовые портреты в окрестности полученных при этом элементарных особых точек. При наличии характеристической траектории это позволяет построить, с точностью до гомеоморфизма, фазовый портрет полученного при раздутии векторного поля в окрестности вклеенной кривой (объединения вклеенных окружностей). Затем полученная картина проектируется в исходную окрестность особой точки с помощью отображения, обратного раздутию.

Существенно более быстрый способ исследования, использующий диаграмму Ньютона и нормальные формы, предложил А. Д. Брюно [18]; сходный алгоритм запрограммирован [18 : 16].

Определения. 1. Носителем векторного монома $\mathrm{x}^k \frac{\partial}{\partial x}$ или $\mathrm{x}^k \frac{\partial}{\partial y}$, $\mathrm{x}=(x, y) \in \mathbb{R}^2$ называется точка $k+e_2$ или $k+e_1$ решетки $\mathbb{Z}^2$; $e_1=(1, 0)$; $e_2=(0, 1)$.

2. Носителем аналитического векторного поля v с особой точкой нуль на плоскости называется объединение носителей всех мономов тейлоровского разложения поля v, которые имеют ненулевые коэффициенты.

3. *Диаграммой Ньютона векторного поля* v называется ломаная, которая строится следующим образом. Рассмотрим объединение всех квадрантов, вершины которых расположены в точках носителя поля v, а стороны сонаправлены со сторонами первого координатного угла. Граница выпуклой оболочки этого множества состоит из двух открытых лучей и ломаной, ни одно звено которой не параллельно координатным осям (она может состоять и из одной точки). Эта ломаная и называется диаграммой Ньютона поля v.

4. *Главной частью векторного поля* v называется сумма всех мономов тейлоровского разложения v, показатели которых принадлежат диаграмме Ньютона, с их коэфициентами.

Скажем, что некоторое свойство выполняется для Γ — невырожденных векторных полей, если множество векторных полей с диаграммой Ньютона Γ, не обладающих этим свойством, выделяется конечным числом нетривиальных алгебраических уравнений на коэффициенты тейлоровского разложения при мономах, показатели которых принадлежат Γ.

3.4. Исследование векторных полей по главной части.

Теорема (Ф. С. Березовская [15]). Пусть Γ — диаграмма Ньютона векторного поля на плоскости с изолированной особой точкой нуль. В пространстве всех аналитических векторных полей с диаграммой Ньютона Γ существует открытое всюду плотное множество U «Γ — невырожденных векторных полей», обладающее следующим свойством. Область U распадается на две: S и ZF. Векторные поля с главной частью в области S имеют характеристические траектории, а в области ZF — не имеют. Область S состоит из конечного числа связных компонент S_i; поля с главной частью в одной и той же компоненте орбитально топологически эквивалентны в окрестности нуля. Границы областей ZF и S — полуалгебраические множества.

Замечания 1. Критерии принадлежности к каждой из областей ZF и S сформулированы в виде явных условий на главные части. Проверка этих условий, громоздкая при счете вручную, запрограммирована. Запрограммировано также вычисление главных членов асимптотик характеристических траекторий.

2. Предыдущая теорема ничего не говорит о различении центра и фокуса. До настоящего времени не известен ответ даже на следующий вопрос:

Пусть для данной диаграммы Ньютона существуют векторные поля без характеристических траекторий. Верно ли, что среди таких полей существует хотя бы одно, имеющее особую точку типа фокус?

Предполагаемый ответ — положительный.

§ 4. Проблема различения центра и фокуса

В этом параграфе обсуждается одна из старейших проблем качественной теории дифференциальных уравнений.

4.1. Постановка проблемы. Росток аналитического векторного поля на плоскости имеет особую точку типа центр, если выполнено счетное число условий на нелинейные члены. Поэтому невозможно указать проверяемый критерий наличия центра в сколько-нибудь общих бесконечномерных классах уравнений. Реалистической представляется следующая постановка проблемы. Указать алгоритм, обладающий следующими свойствами. 1. Каждый шаг алгоритма использует лишь конечную струю исследуемого поля и осуществляется с помощью алгебраических действий и интегрирования. 2. Для всех ростков гладких или аналитических векторных полей в особой точке на плоскости, не принадлежащих некоторому исключительному множеству коразмерности бесконечность в соответствующем функциональном пространстве, алгоритм останавливается за конечное число шагов, и в этом случае особая точка является фокусом.

Такой алгоритм найден для классов векторных полей, перечисленных ниже в пп. 4.3—4.5. Состояние проблемы центра для полиномиальных векторных полей фиксированной степени обсуждается в п. 4.8.

4.2. Алгебраическая неразрешимость. Трудность задачи различения центра и фокуса в том, что она алгебраически неразрешима в смысле определения п. 2.1 главы 3 [8, с. 300]. Неизвестно, является ли эта задача аналитически разрешимой (предполагаемый ответ — положительный). Доказано, что проблема различения центра и фокуса алгебраически разрешима до коразмерности 10 включительно (см. пп. 4.3, 4.4) и неразрешима до коразмерности 11 (Б. В. Алексеев). Аналитическая разрешимость доказана лишь до коразмерности 11 включительно.

Перечислим классы векторных полей, в которых проблема различения центра и фокуса алгебраически разрешима.

4.3. Центр по линейным членам.

Теорема. Проблема различения центра и фокуса в классе уравнений с линейной частью $\dot{z}=i\omega z$, $\omega>0$, аналитически разрешима.

Это — модификация теоремы А. М. Ляпунова [43] и А. Пуанкаре [54]. Наметим ее доказательство, поскольку оно использует понятия, нужные для дальнейшего.

◀ Пусть $\hat{v}$ — формальный ряд Тейлора изучаемого поля. Уравнение

$$(\hat{v}, \nabla F)=g(r^2) \tag{1}$$

относительно вещественных формальных рядов F и g от двух и одного переменного соответственно всегда разрешимо. Существует единственное решение этого уравнения, для которого разложение F по степеням $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$ не имеет членов вида $z^n\bar{z}^n$ при $n>1$ и начинается с монома $z\bar{z}$. Назовем это решение отмеченным.

Коэффициенты в разложении g для отмеченного решения (называемые ляпуновскими фокусными величинами) — это многочлены от коэффициентов ряда $\hat{v}$. Особая точка 0 поля v является центром, если и только если все эти многочлены обращаются в нуль, что и доказывает теорему. ▶

Теорема ([43], [54]). Если аналитическое уравнение с линейной частью $\dot{z}=i\omega z$, $\omega>0$, имеет формальный первый интеграл (то есть существует решение уравнения (1), для которого $g\equiv 0$, $F\not\equiv \mathrm{const}$), то поле v имеет центр в точке 0.

Обобщение на многомерный случай см. в п. 3.2, гл. 4.

4.4. Нильпотентная жорданова клетка. Проблема различения центра и фокуса решена для полей, удовлетворяющих условию Лоясевича, линейная часть которых — нильпотентная жорданова клетка [43], [102]. Решение проводится в два шага.

1. Формальной заменой переменных и умножением на формальный ряд с ненулевым свободным членом исходное уравнение можно привести к виду

$$\dot{x}=y+f(x), \quad \dot{y}=\varepsilon x^l, \quad \varepsilon=\pm 1;$$

тейлоровские коэффициенты формального ряда f — многочлены от тейлоровских коэффициентов исходного ряда.

2. Теорема. Пусть в предыдущем уравнении

$$f(x)=x^m\tilde{f}(x),\quad \tilde{f}(0)=a\neq 0.$$

Особая точка 0 исходного уравнения монодромна, если и только если выполнено одно из следующих условий:

$$\begin{cases}\varepsilon=-1\\ l=2n-1\\ m>n\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\varepsilon=-1\\ l=2n-1\\ m=n\\ an^2<4m.\end{cases}$$

Если при этом не имеет места симметрия $f(x)=f(-x)$, тогда особая точка 0 исходного уравнения является фокусом, устойчивым, если младший член нечетной степени в разложении f имеет отрицательный коэффициент, и неустойчивым — в противном случае.

Замечание. Отсюда легко следует алгебраическая разрешимость проблемы различения центра и фокуса в рассматриваемом классе.

Теорема. Если исходный росток аналитичен, а построенный выше формальный ряд f не содержит нечетных степеней ($f(x)=f(-x)$), то особая точка 0 является центром.

Теоремы этого и предыдущего пунктов показывают, что в классе векторных полей на плоскости с ненулевой 1-струей (линейной частью) в особой точке проблема различения центра и фокуса алгебраически разрешима.

Для гладких ростков с нулевой линейной частью и ненулевой 2-струей проблема различения центра и фокуса не возникает. Дело в том, что каждый такой росток, удовлетворяющий условию Лоясевича, всегда имеет характеристическую траекторию. Пространство ростков с нулевой 2-струей имеет коразмерность 10. В этом пространстве проблема различения центра и фокуса алгебраически разрешима до коразмерности 0 включительно [48]. Следовательно, в классе всех ростков векторных полей в особой точке на плоскости проблема различения алгебраически разрешима до коразмерности 10 включительно.

4.5. Особые точки без исключительных направлений.

Определение. Гладкое векторное поле, заданное в окрестности особой точки и не плоское в этой точке, не имеет исключительных направлений, если в результате одного полярного раздутия его можно превратить в векторное поле без особых точек на вклеенной окружности.

Замечание. Исследование окрестности особой точки без исключительных направлений с помощью полярного раздутия сводится к исследованию окрестности замкнутой фазовой кривой (вклеенной окружности). Оно, в свою очередь, сводится к вычислению соответствующего преобразования монодромии. Если это преобразование нетождественно, то исходная особая точка — фокус. Тейлоровские коэффициенты преобразования монодромии вычисляются рекуррентно через тейлоровские коэффициенты поля. Однако соответствующие функции оказываются неалгебраическими, а множества их нулей — неалгебраическими множествами. Тем самым, алгоритм различения центра и фокуса в классе полей без исключительных направлений существует, но сама задача различения в этом классе алгебраически неразрешима.

4.6. Общий случай. Алгоритм различения центра и фокуса в общем случае лишь намечен и состоит в следующем. Особая точка векторного поля при кратном σ-процессе, приводящем к хорошему раздутию, заменяется «сложным циклом» — объединением особых точек полученного при раздутии поля направлений, и интегральных кривых, лежащих на вклеенных проективных прямых и соединяющих эти особые точки. Все особые точки, полученные при этом, элементарны. Окрестность сложного цикла, содержащего только элементарные особые точки, изучается методами Дюлака (§ 4, гл. 6), которые позволяют вычислять асимптотику преобразования монодромии исходной особой точки. Если какой-нибудь отрезок полученного при этом асимптотического ряда задает отображение, отличное от тождественного, то исходная особая точка — фокус. Асимптотический ряд для преобразования монодромии совпадает с id лишь для множества векторных полей коразмерности бесконечность.

4.7. Обобщенная первая фокусная величина.

Теорема ([32]). Главный член преобразования монодромии для монодромной особой точки гладкого векторного поля, удовлетворяющего условию Лоясевича, всегда линеен.

Определение. Пусть главный член в предыдущей теореме есть $x \mapsto cx$. Величина $\ln c$ называется *первой фокусной величиной* соответствующей сложной особой точки.

Замечание. Значение первой фокусной величины зависит от выбора трансверсали; ее знак зависит только от векторного поля. Если первая фокусная величина отлична от нуля, то особая точка — фокус.

Предыдущая теорема так же, как и конкретное вычисление первой фокусной величины, использует геометрию поверхности, получаемой из окрестности особой точки при кратном σ-процессе. Эта поверхность представляет собой объединение круговых колец и листов Мёбиуса.

4.8. Полиномиальные векторные поля. Ниже рассматриваются только векторные поля, имеющие центр по линейным членам. Наличие центра для таких полей равносильно обращению в нуль всех ляпуновских фокусных величин. Поэтому условие центра для полиномиального поля степени n задается бесконечным числом алгебраических уравнений на конечное число коэффициентов исследуемого полиномиального поля. По теореме Гильберта о базисе, эта бесконечная система алгебраических уравнений равносильна конечной. Проблема различения центра и фокуса для полиномиальных полей степени n состоит в том, чтобы эту систему вычислить.

Ляпуновские фокусные величины вычисляются по рекуррентным формулам; это вычисление запрограммировано. Нерешенная часть проблемы состоит в следующем: для каждого n требуется найти такое $N(n)$, чтобы обращение в нуль первых $N(n)$ фокусных величин гарантировало наличие центра. Неизвестно даже, меньше ли число $N(n)$ размерности пространства коэффициентов полиномиальных векторных полей степени n.

Неожиданно простой ответ получен Дюлаком (H. Dulac) при $n=2$ [58 : 9]. Оказывается, $N(2)=3$: при обращении в нуль первых трех фокусных величин уравнение интегрируется в квадратурах и имеет центр. Для полей $Ix+f_3(x)$, $x\in\mathbf{R}^2$, f_3 — однородный векторный полином степени 3, $N=6$. Подробное изложение проблемы имеется в книге К. С. Сибирского [58].

§ 5. Аналитическая классификация элементарных особых точек в комплексной области

Настоящий параграф посвящен орбитальной аналитической классификации ростков векторных полей в элементарной особой точке с резонансной линейной частью. Эта классификация имеет функциональные модули. Первым шагом является изучение ростков одномерных отображений.

5.1. Ростки конформных отображений с тождественной линейной частью.

Определение. Два ростка f и g конформных отображений $(\mathbf{C}, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$, называются *аналитически эквивалентными*, если существует росток конформного отображения h: $(\mathbf{C}, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$, сопрягающий ростки f и g: $f=h\circ g\circ k^{-1}$.

Обозначим через A_2 пространство ростков f: $(\mathbf{C}, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$ вида

$$z\mapsto z+az^2+\ldots,\quad a\neq 0.$$

Все ростки класса A_2 с одинаковой 3-струей формально эквивалентны. Однако аналитически неэквивалентных ростков гораздо больше. По каждому ростку класса A_2 можно построить класс ростков голоморфных функций (инвариант классификации); эти инварианты для двух формально эквивалентных ростков совпадают, если и только если соответствующие ростки аналитически эквивалентны. Опишем «пространство инвариантов». Пусть 0 и ∞ — точки на сфере Римана. Инвариант строится с помощью пар ростков конформных отображений

$\varphi=(\varphi_+, \varphi_-)$; φ_+: $(\mathbf{C}, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$, φ_-: $(\mathbf{C}P, \infty)\to(\mathbf{C}P, \infty)$, $\varphi_+'(0)=1$.

Определение. Две пары φ и ψ называются эквивалентными, если существует линейное отображение $\lambda: \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ такое, что

$$\varphi\circ\lambda=\lambda\circ\psi.$$

Инвариантом является класс эквивалентных пар.

Пространство таких классов называется пространством инвариантов и обозначается через M_2.

Теорема ([21], [32], [88], [89], [97], [72]). 1. Инвариант. Множеству аналитически эквивалентных ростков класса A_2 однозначно соответствует класс эквивалентных пар $[\varphi]$ из M_2 (функциональный инвариант).

2. Эквимодальность и эквивалентность. Два формально эквивалентных ростка класса A_2 с одинаковым функциональным инвариантом аналитически эквивалентны.

3. Реализация. Каждый класс пар $[\varphi]$ из M_2 реализуется, как инвариант некоторого отображения класса A_2.

4. Аналитическая зависимость. Если росток класса A_2 аналитически зависит от конечного числа комплексных параметров, то соответствующий инвариант также аналитически зависит от этих параметров (аналитическая зависимость класса пар от параметра означает возможность выбрать по представителю в каждом классе пар так, что получится аналитическое семейство пар ростков). ▲

5.2. Классификация резонансных отображений и векторных полей с нелинейностями общего положения. Рассмотрим множество ростков отображений $(\mathbf{C}, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$ с резонансной линейной частью вида

$$f: z\mapsto \nu z+\ldots,\quad \nu=\exp\left(-2\pi i\frac{p}{q}\right),\quad z\in\mathbf{C}, \tag{2}$$

здесь и ниже p и q — взаимно простые натуральные числа. Росток f^q имеет вид $z\mapsto z+az^{q+1}+\ldots$ (здесь f^q — итерация $f\circ\ldots\circ f$ (q раз)). Обозначим через B_q класс ростков f вида (1), для которых в выражении для f^q $a\neq 0$.

Теорема (С. М. Воронин, Ю. С. Ильяшенко [32]; [99]). Для ростков класса B_q справедлива теорема 5.1, в формулировке которой класс A_2 заменен классом B_q.

Рассмотрим множество ростков векторных полей, называемых седловыми резонансными:

$$v(z)=\Lambda z+f(z),\quad \Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2),\quad f(0)=0,$$

$$\partial f/\partial z(0)=0,\quad \lambda_2/\lambda_1=-p/q,\quad z\in\mathbf{C}^2. \tag{3}$$

Существуют две и только две фазовые кривые уравнения $\dot z=v(z)$, голоморфно продолжаемые в точку 0; они касаются координатных осей в нуле и по аналогии с вещественным случаем называются сепаратрисами. Рассмотрим положительно ориентированную, обходящую точку 0 петлю на сепаратрисе, касающейся в нуле оси Oz_j. Этой петле соответствует преобразование монодромии Δ_j: $(\mathbf{C}, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$ (см. ниже § 1, гл. 6). Оказывается, для поля v вида (3) росток Δ_1 имеет вид (2). Обозначим через $\tilde{B}_q$ класс ростков седловых резонансных векторных полей (3), для которых преобразование Δ_1 — класса B_q.

Определение. Два ростка v и w голоморфных векторных полей называются *формально орбитально эквивалентными*, если существует формальная замена H и формальный ряд T с ненулевым свободным членом такие, что

$$H_*\hat{v}=T\hat{w}\circ H.$$

Замечание. В случае, когда ряды H и T сходящиеся, это равенство влечет орбитальную аналитическую эквивалентность ростков v и w.

Теорема ([32], [99]). Для ростков класса $\tilde{B}_q$ при $p/q\neq1$ (то есть $\lambda_1\neq-\lambda_2$ в формуле (3)) справедлива теорема 5.1, в формулировке которой формальная и аналитическая эквивалентность заменена формальной и аналитической орбитальной эквивалентностью, а класс B_q — классом $\tilde{B}_q$.

5.3. Продолжение предыдущего: вырожденные элементарные особые точки. Рассмотрим множество $\tilde{A}$ ростков голоморфных векторных полей в вырожденной элементарной особой точке. Каждый такой росток имеет фазовую кривую, голоморфно продолжаемую в точку нуль; она касается собственного вектора линейной части ростка с ненулевым собственным значением. Так же, как и выше, ей соответствует преобразование монодромии Δ: $(\mathbf{C}, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$. Оказывается, $\Delta(z)=z+$ $+\alpha z^2+\ldots$ Обозначим через $\tilde{A}_2$ класс ростков, для которых преобразование Δ — класса A_2. Пространство функциональных инвариантов ростков класса $\tilde{A}_2$ уже, чем A_2 (не все ростки из A_2 реализуются, как преобразования монодромии для ростков класса $\tilde{A}_2$).

Обозначим через M_+ подмножество классов из M_2, состоящих из пар (φ_+, φ_-), для которых

$$\varphi_-(z)=z+c$$

(это — росток голоморфного отображения $(\mathbf{C}P, \infty)\to(\mathbf{C}P, \infty)$).

Теорема ([98]). Для ростков класса $\tilde{A}_2$ справедлива теорема 5.1, в формулировке которой формальная эквивалентность заменена на формальную орбитальную эквивалентность, а классы A_2 и M_2 — классами $\tilde{A}_2$ и M_+ соответственно.

Замечание. Теоремы последних двух разделов формулировались для ростков с нелинейностями общего положения; аналогичные теоремы верны без всяких ограничений на нелинейности (нужно только, чтобы рассматриваемые ростки не были формально или формально орбитально эквивалентны линейным); излишне также ограничение $\lambda_1 \neq -\lambda_2$, однако формулировки становятся более громоздкими.

5.4. Геометрия аналитических нормальных форм. Ростки перечисленных выше классов A_2, $\tilde{A}_2$, B_q, $\tilde{B}_q$ (пп. 5.1—5.3) обладают следующим общим свойством. Каждый из этих ростков имеет представителя, аналитически или орбитально аналитически эквивалентного очень простой нормальной форме, но не в окрестности особой точки 0, а в области, содержащей 0 на границе. Упомянутые нормальные формы для ростков векторных полей класса $\tilde{B}_q$ или $\tilde{A}_2$ выписаны в таблице п. 2.1 (случаи 4 и 5), только нужно считать, что $\varepsilon=1$, $k=1$, $a \in \mathbf{C}$. Для всех изучаемых ростков можно выбрать пару пересекающихся областей, покрывающих проколотую окрестность точки 0, в каждой из которых росток аналитически (орбитально аналитически) эквивалентен одной и той же нормальной форме. Возможность такого выбора обеспечивается теоремами о «секториальной нормализации» [21], [94]. Однако сопрягающие голоморфизмы в этих областях различны. В пересечении областей возникает функция перехода — биголоморфное отображение, сохраняющее нормальную форму ростка. Последнее требование очень жестко; оно позволяет описать функцию перехода с помощью пары ростков (φ_+, φ_-).

Этот набор — формальная или орбитальная формальная нормальная форма; пара областей с нулем на границе, в каждой из которых росток уже приведен к упомянутой нормальной форме, и, наконец, функция перехода — и образует аналитическую нормальную форму ростка. Зная этот набор, можно многое сказать о свойствах ростка. Именно на этом пути получены теоремы следующего раздела. Аналогичный подход может быть использован в теории линейных систем с иррегулярной особой точкой (§ 2, гл. 7).

5.5. Приложения. Функциональные инварианты ростков f, v и т. д. обозначаются μ_f, μ_v и т. д.

Теорема ([21], [89]). Росток отображения f класса A_2 является n-й степенью ростка g класса A_2 (операция — суперпозиция), если и только если инвариант μ_f состоит из ростков отображений, перестановочных с умножением на все корни степени n из единицы.

Теорема ([21], [89]). Росток отображения f класса A_2 включаем (то есть представим в виде сдвига за время единица по фазовым кривым голоморфного векторного поля), если и только если соответствующий функциональный инвариант тривиален, то есть отображения φ_- и φ_+ линейны.

Теорема ([32]). Росток векторного поля класса $\tilde{B}_q$ аналитически эквивалентен своей предварительной нормальной форме, если и только если соответствующий функциональный инвариант тривиален.

Теорема ([98]). Росток v векторного поля класса $\tilde{A}_2$ имеет аналитическое центральное многообразие (фазовую кривую, голоморфно продолжаемую в нуль и касающуюся ядра линейной части в нуле), если и только если $\mu_v = (\mathrm{id}, \varphi_+)$.

5.6. Добавление об аналитических нормальных формах. А. Д. Брюно и П. М. Елизаровым [60, с. 165, 144] анонсированы теоремы об аналитических нормальных формах ростков резонансных векторных полей, подобные теореме Пуанкаре—Дюлака.[1] Эти теоремы описывают какие мономы тейлоровского разложения ростка векторного поля можно убить с помощью аналитической замены координат. Полученная при этом нормализованная нелинейность содержит так мало членов, что два ростка с разными нормализованными нелинейностями аналитически неэквивалентны.

§ 6. Орбитальная топологическая классификация элементарных особых точек на комплексной плоскости

6.1. Нерезонансный случай. Росток векторного поля с нерезонансной линейной частью на комплексной плоскости либо аналитически эквивалентен своей линейной части (соответствующие достаточные условия приведены в § 1 главы 4), либо даже топологически ей неэквивалентен (В. А. Найшуль). В первом случае орбитальная топологическая классификация проста, во втором — почти не исследована.

6.2. Седловые резонансные векторные поля. Как указывалось выше в п. 2.1, голоморфное седловое резонансное векторное поле в особой точке на плоскости $\mathbf{C}^2$ формально орбитально эквивалентно полю

$$z\left(1+u^k+au^{2k}\right)\frac{\partial}{\partial z}+\lambda w\frac{\partial}{\partial w},\quad \lambda=-\frac{p}{q},\quad u=z^p w^q,\quad a\in\mathbf{C}. \tag{3}$$

Теорема Камачо и Сада ((C. Camacho, P. Sad) [79]). Числа p, q и k составляют полный набор топологических инвариантов ростка седлового резонансного векторного поля.

6.3. Вырожденные элементарные особые точки. Росток класса $\tilde{A}_2$ формально орбитально эквивалентен ростку

$$(z^2+az^3)\frac{\partial}{\partial z}+w\frac{\partial}{\partial w},\quad a\in\mathbf{C}, \tag{4}$$

и имеет функциональный модуль вида (φ_-, φ_+), где $\varphi_+=\mathrm{id}+c$.

П. М. Елизаровым получена орбитальная топологическая классификация ростков (4) при любых a, φ_-, φ_+, за исключением случая $\varphi_-=\mathrm{id}$, a — иррациональное число, аномально хорошо приближаемое рациональными числами. В частности, справедлива

[1] См. также А. Д. Брюно, Докл. АН СССР, 1983, 263, вып. 4, 781—784.

Теорема (П. М. Елизаров, 1983). Пусть росток v класса $\tilde{A}_2$ имеет функциональный модуль (φ_-, φ_+), причем $\varphi_- = \mathrm{id}$. Пусть число a в формуле (4) рационально: $a = p/q$, и отображение $z \mapsto \nu\varphi_+(z)$, $\nu = \exp(2\pi i a)$ формально эквивалентно отображению $z \mapsto \nu z(1 + z^k + \alpha z^{2k})$. Тогда числа p, q и k образуют полный набор инвариантов орбитальной топологической классификации ростков, для которых $\varphi_- = \mathrm{id}$ и $a \in \mathbb{Q}$. ▲

Заметим, что число k связано с модулем аналитической классификации исходного ростка, а не с его формальной орбитальной нормальной формой, и не может быть вычислено ни по какой конечной струе ростка v.

Глава 6

ЦИКЛЫ

Эта глава посвящена (предельным) циклам дифференциальных уравнений в вещественной и комплексной области, а также общим свойствам полиномиальных дифференциальных уравнений на комплексной плоскости.

§ 1. Преобразование монодромии

Здесь определяется преобразование монодромии, связывающее циклы дифференциальных уравнений в комплексной области с голоморфными отображениями трансверсалей к ним.

1.1. Определения. Фазовая кривая голоморфного векторного поля — это связное одномерное комплексное многообразие (имеющее вещественную размерность 2). Фазовое пространство уравнения в окрестности неособой точки расслоено на фазовые кривые. В целом же фазовые кривые образуют, вообще говоря, не расслоение, а лишь слоение.

Слоение с k-мерными листами на n-мерном многообразии — это разбиение на k-мерные гладкие вложенные многообразия (листы слоения) такое, что разбиение некоторой окрестности каждой точки многообразия на связные компоненты пересечения листов с окрестностью выпрямляемо (диффеоморфно разбиению n-мерного куба на плоскости, параллельные k-мерной грани).

Слоение называется голоморфным, если многообразие, листы и выпрямления голоморфные.

Замкнутому пути на листе слоения отвечает росток отображения трансверсали к листу в исходной точке в себя, называемый *монодромией пути*. Определяется монодромия так. Выпрямление слоения в окрестности точки пути определяет диффеоморфизм локальных трансверсалей в точках пути, покрытых этой окрестностью, переводящий точку листа в точку того же листа. Переходя от начальной точки пути к конечной по последовательности покрывающих путь окрестностей, получаем диффеоморфизм локальной трансверсали в исходной точке пути в себя, переводящий точку каждого листа в точку того же листа и начальную точку в себя.

Монодромия не зависит от выбора трансверсали: определенные на разных трансверсалях преобразования сопряжены (переводятся друг в друга диффеоморфизмом трансверсалей). В сущности, монодромия — отображение в себя локального многообразия листов вблизи исходной точки пути, и при ее определении трансверсаль можно было бы не упоминать.

Монодромия пути не меняется при замене пути гомотопным ему на том же листе путем.

Возникающее представление фундаментальной группы листа в группу ростков диффеоморфизмов трансверсали называется *группой монодромии* (или группой голономии) слоения.

Группа монодромии голоморфного слоения состоит из ростков голоморфных отображений (в смысле естественной комплексной структуры на локальной трансверсали, то есть на локальном многообразии листов).

При замене исходной точки замкнутого пути на листе другой точкой того же пути получается преобразование монодромии, сопряженное исходному. Поэтому преобразование монодромии, с точностью до сопряжения, определяется классом свободной гомотопии замкнутых путей на листе.[1]

Определение. *Комплексным циклом* голоморфного векторного поля называется класс свободной гомотопии замкнутых путей на его фазовой кривой.

Преобразованием монодромии комплексного цикла называется соответствующее циклу преобразование монодромии слоения на фазовые кривые. Это росток отображения трансверсали к фазовой кривой в себя. Монодромия комплексного цикла голоморфна и не зависит от выбора трансверсали, начальной точки и от представителя класса свободной гомотопии путей (с точностью до биголоморфных сопряжений).

1.2. Реализация. Всякий росток C^∞-диффеоморфизма $(\mathbf{R}^{n-1}, 0)\to(\mathbf{R}^{n-1}, 0)$ может быть реализован как преобразование монодромии замкнутой фазовой кривой гладкого векторного поля на вещественном n-мерном многообразии (но не в $\mathbf{R}^n$; пример — преобразование $x\mapsto -x$, $x\in\mathbf{R}$).

Теорема ([34 : 6]). Любой росток аналитического диффеоморфизма $(\mathbf{C}^{n-1}, 0)\to(\mathbf{C}^{n-1}, 0)$ может быть реализован, как преобразование монодромии, соответствующее комплексиому

[1] Два замкнутых пути на листе называются свободно гомотопными, если соответствующие отображения окружности в лист гомотопны.

циклу голоморфного векторного поля, заданного в подобласти пространства $\mathbf{C}^n$.

Доказательство использует результат Сью (Y. T. Sue, Invent. math., 1976, 38, № 1, 89—100): штейново подмногообразие аналитического многообразия имеет окрестность, также являющуюся многообразием Штейна.

§ 2. Локальная теория диффеоморфизмов

Локальные теории диффеоморфизмов и дифференциальных уравнений почти идентичны. В этом параграфе дается краткий обзор первой из упомянутых теорий.

2.1. Линейные нормальные формы. В этом пункте обсуждается аналитическая, гладкая и топологическая эквивалентность ростка диффеоморфизма в неподвижной точке своей линейной части.

Определение. Набор $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\in\mathbf{C}^n$ называется *мультипликативно резонансным*, если существует целочисленный вектор $m=(m_1, \ldots, m_n)$ с неотрицательными компонентами, сумма которых не меньше двух, такой, что для некоторого $j\in\{1, \ldots, n\}$ выполняется равенство

$$\lambda_j=\lambda^m;$$

здесь $\lambda^m=\lambda_1^{m_1}\ldots\lambda_n^{m_n}$.

Определение. Набор $\lambda\in\mathbf{C}^n$ принадлежит *области Пуанкаре*, если модули чисел набора все меньше единицы или все больше единицы. Дополнение к области Пуанкаре составляет *область Зигеля*.

Теорема. Для почти всех (в смысле меры Лебега) наборов собственных чисел линейной части ростка голоморфного диффеоморфизма в неподвижной точке росток биголоморфно эквивалентен своей линейной части (превращается в свою линейную часть биголоморфной заменой координат в окрестности неподвижной точки).

Точнее, справедливы следующие теоремы.

Теорема Пуанкаре. Росток аналитического диффеоморфизма в неподвижной точке, спектр линейной части которого принадлежит области Пуанкаре и мультипликативно нерезонансен, биголоморфно эквивалентен своей линейной части.

Определение. Набор $\lambda\in\mathbf{C}^n$ называется *набором мультипликативного типа* (C, ν), если для всех $j\in\{1, \ldots, n\}$, $m\in\mathbf{Z}_+$: $|m|=\Sigma m_j\geqslant 2$ выполняются неравенства

$$|\lambda_j-\lambda^m|\geqslant C|m|^{-\nu}.$$

Теорема Зигеля. Росток аналитического диффеоморфизма в неподвижной точке, спектр линейной части которого имеет мультипликативный тип (C, ν) для некоторых положительных C и ν, биголоморфно эквивалентен своей линейной части.

Арифметические условия на λ в теореме Зигеля можно ослабить [18 : 31]. Аналитические и геометрические теоремы о расходимости формальных замен, приводящих аналитический диффеоморфизм к линейной нормальной форме, в случае патологической близости набора λ счетному числу резонансов [34 : 6] аналогичны сформулированным в § 1 главы 4 теоремам о векторных полях.

Гладкая теория не налагает таких арифметических требований на спектр линейной части.

Теорема Стернберга (S. Sternberg). Росток гладкого диффеоморфизма в неподвижной точке пространства $\mathbf{R}^n$, спектр линейной части которого мультипликативно нерезонансен, гладко эквивалентен ростку своей линеаризации в неподвижной точке.

Замечание. Вещественно линейный невырожденный оператор, спектр которого мультипликативно нерезонансен, не имеет собственных значений, по модулю равных 1. Тем самым, неподвижная точка в теореме Стернберга гиперболическая в смысле следующего определения.

Определение. Неподвижная точка диффеоморфизма называется *гиперболической*, если ни одно из собственных значений линейной части диффеоморфизма в этой точке не равно по модулю единице.

Топологическая теория не требует отсутствия резонансов.

Теорема Гробмана-Хартмана ([67]). Росток C^1-гладкого диффеоморфизма в гиперболической неподвижной точке топологически эквивалентен своей линейной части.

Отображения общего положения гиперболичны и нерезонансны.

2.2. Резонансный случай. В резонансном случае формальная нормальная форма ростков диффеоморфизмов дается формулируемой ниже теоремой Пуанкаре—Дюлака.

Определение. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — координаты, в которых матрица линейной части ростка диффеоморфизма в неподвижной точке имеет жорданову нормальную форму; z_j соответствует собственному значению λ_j (числа λ_j необязательно различны). Одночлен $z^m \partial/\partial z_j$ называется *мультипликативно резонансным членом*, если выполнено резонансное соотношение $\lambda_j = \lambda^m$.

Теорема Пуанкаре—Дюлака. Формальное отображение с резонансной линейной частью формально эквивалентно такому отображению, линейная часть которого имеет жорданову нормальную форму, а нелинейная часть содержит только мультипликативно резонансные члены.

В случае, когда спектр линейной части ростка аналитического диффеоморфизма в неподвижной точке принадлежит области Пуанкаре, росток всегда аналитически эквивалентен своей формальной нормальной форме, описанной в теореме Пуанкаре—Дюлака.

Формальные ряды, приводящие росток диффеоморфизма из области Зигеля с резонансной линейной частью к нормальной форме Пуанкаре—Дюлака, за редкими исключениями расходятся (теорема А. Д. Брюно [18:31]). В гладком случае справедлива

Теорема Ченя ([67]). Если два ростка диффеоморфизма в гиперболической неподвижной точке формально эквивалентны, то они гладко эквивалентны.

2.3. Инвариантные многообразия ростков диффеоморфизмов. Для отображений справедливы: теорема Адамара—Перрона, теорема о центральном многообразии и принцип сведения Шошитайшвили (см. § 4, гл. 3).

Пусть f — диффеоморфизм. Напомним, что через f^q, $q>0$, обозначается итерация $f\circ f\circ\ldots\circ f$ (q раз), $f^{-q}=(f^q)^{-1}$, рассматриваемая там, где она определена.

Определение. *Траектория точки p под действием диффеоморфизма f* — это множество точек $f^q(p)$, рассматриваемых для всех q, для которых эти точки определены.

Рассмотрим невырожденный линейный оператор A: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$. Пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму трех инвариантных подпространств:

$$\mathbf{R}^n=T^s\oplus T^u\oplus T^c$$

(буквы s, u и c обозначают stable, unstable и centre соответственно, как и в § 4, гл. 3). Это разложение определяется следующим требованием: спектр ограничения $A|_{T^s}$ (соответственно $A|_{T^u}$, $A|^{T^c}$) лежит внутри (соответственно вне или на) единичной окружности. *Устойчивое инвариантное многообразие ростка диффеоморфизма* $x\mapsto Ax+\ldots$ касается плоскости T^s в нуле, *неустойчивое* — T^u, а *центральное* — плоскости T^c. Теоремы § 4 главы 3 переносятся на отображения, если в их формулировке векторные поля и дифференциальные уравнения заменить диффеоморфизмами, решения — траекториями диффеоморфизмов, непрерывное время сделать дискретным (заменить t на q). Роль стандартного седла в дискретном случае играет отображение

$$(x, y, u, v)\mapsto(2x, -2y, u/2, -v/2),$$

где x, y, u, v — точки четырех подпространств, для которых прямая сумма первых двух равна T^u, а двух других T^s.

2.4. Инвариантные многообразия цикла. Рассмотрим периодическое решение дифференциального уравнения и фиксируем некоторую окрестность U соответствующей замкнутой фазовой кривой γ в фазовом пространстве. Пусть Δ — соответствующее этому циклу преобразование монодромии, W^s, W^u и W^c — устойчивое, неустойчивое и центральное многообразия ростка отображения Δ в неподвижной точке, соответствующей циклу. Рассмотрим объединение всех дуг фазовых кривых с началом на W^s, каждая дуга рассматривается на максимальном интервале времени, в течение которого она не выходит за пределы окрестности U. Окрестность U можно выбрать так, что это объединение образует многообразие, называемое *устойчивым многообразием цикла* γ. Это многообразие инвариантно относительно исходного уравнения, и все решения на нем экспоненциально приближаются к γ при $t \to +\infty$. Аналогично определяется *неустойчивое многообразие цикла* γ; оно состоит из дуг фазовых кривых, экспоненциально приближающихся к γ при $t \to -\infty$. Аналогично определяется и *центральное многообразие цикла* γ; поведение фазовых кривых на нем зависит не только от линейных, но и от нелинейных членов преобразования монодромии.

Если неподвижная точка ростка преобразования монодромии Δ гиперболическая, то и цикл γ называется *гиперболическим*. Все циклы уравнения общего положения гиперболические.

Теоремы об инвариантных многообразиях в окрестности замкнутых фазовых кривых аналитических векторных полей анонсированы А. Д. Брюно [18 : 42]. В силу теоремы п. 1.2, они переносятся на локальную теорию аналитических диффеоморфизмов.

2.5. Раздутия. Укажем в заключение один класс ростков диффеоморфизмов, проблема топологической классификации которых алгебраически разрешима до вырождений любой конечной коразмерности. Речь идет о некотором классе ростков диффеоморфизмов плоскости в неподвижной точке, для которого проблема одновременно нетривиальна и разрешима. Перечислим сначала классы ростков, для которых проблема тривиальна.

Ростки с гиперболической особой точкой исследуются теоремой Гробмана—Хартмана. Ростки, линейная часть которых — поворот на угол, не соизмеримый с 2π, являются сжимающими или растягивающими, за исключением множества вырожденных ростков коразмерности бесконечность (в это множество попадают, впрочем, такие важные классы, как конформные и сохраняющие площадь отображения, линейная часть которых в неподвижной точке — поворот).

Остаются ростки, линейная часть которых а) поворот на угол, соизмеримый с 2π, (некоторая степень (итерация) такого ростка имеет тождественную линейную часть); б) унипотентная жорданова клетка $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение. Пусть f — диффеоморфизм окрестности нуля на вещественной плоскости с неподвижной точкой нуль и с униипотентной (может быть тождественной) линейной частью. Траектория точки p под действием f называется характеристической, если она входит в точку 0 с определенной касательной. Это значит, что точки $f^q(p)$ определены при всех $q \geqslant 0$ или $q \leqslant \leqslant 0$, $\lim f^q(p)=0$ (при $q \to +\infty$ или $q \to -\infty$), и расстояние от $f^q(p)$ до некоторой прямой l — величина более высокого порядка малости, чем расстояние от $f^q(p)$ до нуля. Росток диффеоморфизма в неподвижной точке имеет характеристическую траекторию, если какой-либо его представитель ее имеет.

Наличие характеристической траектории у ростка диффеоморфизма, линейная часть которого унипотентна, устанавливается по конечной струе ростка. Топологический тип ростка с характеристической траекторией определяется с помощью конечного числа алгебраических действий по конечной струе методом разрешения особенностей [86].

§ 3. Уравнения с периодической правой частью

В этом параграфе рассматриваются уравнения с периодической правой частью в окрестности постоянного решения, а именно, уравнения вида

$$\frac{dx}{dt}=v(t, x), \quad v(t, 0)=0, \quad v(t+2\pi, x)\equiv v(t, x), \tag{1}$$

x принадлежит окрестности нуля в пространстве V, $V=\mathbf{R}^n$ или $V=\mathbf{C}^n$, t вещественно. Будем считать, что t пробегает окружность $S^1=\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Выбор нового времени τ и добавление уравнения $\dot{t}=1$ (точка — это $d/d\tau$) превращает исходную систему в автономную:

$$\dot{x}=v(t, x), \quad \dot{t}=1, \quad v(t, 0)=0, \quad t\in S^1.$$

Преобразование монодромии полученного автономного уравнения, соответствующее замкнутой фазовой кривой $x=0$, называется преобразованием монодромии исходного периодического уравнения. Это построение вместе с теоремой о реализации из § 1 сводит теорию периодических уравнений к локальной теории диффеоморфизмов: все эффекты, наблюдаемые в одной теории, наблюдаются и в другой. Однако вычисление асимптотики преобразования монодромии, как правило, невозможно без приведения периодического дифференциального уравнения к нормальной форме. Начнем с изучения линейного случая.

3.1. Нормальная форма линейного уравнения с периодическими коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}=A(t)x, \quad A(t+2\pi)\equiv A(t), \quad x\in\mathbf{C}^n.$$

Преобразование монодромии такого уравнения — невырожденный линейный оператор $C: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, называемый *оператором монодромии*.

Теорема Флоке (G. Floquet). Существует линейная по x и 2π-периодическая по t замена $x=B(t)y$, которая переводит исходное линейное уравнение в уравнение с постоянными коэффициентами $\dot{y}=\Lambda y$, причем $C=\exp(2\pi\Lambda)$.

Замечание. Линейное периодическое по t уравнение с вещественным фазовым пространством может быть приведено к уравнению с постоянными коэффициентами вещественной линейной заменой $x=B(t)y$ лишь с вдвое большим периодом по t, чем правая часть. Причина: невырожденный линейный оператор имеет комплексный логарифм, вещественный же — не всегда, но его квадрат имеет вещественный логарифм.

В силу теоремы Флоке, можно добиться заменой переменных того, что линейная (по x при $x=0$) часть уравнения (1) автономна; собственные числа оператора полученного автономного уравнения называется собственными числами или спектром периодического уравнения.

3.2. Линейные нормальные формы. *Область Пуанкаре* для периодического дифференциального уравнения $\dot{x}=\Lambda x+\ldots$ определяется условием: все собственные числа линеаризованного уравнения лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda<0$ ($\mathrm{Re}\lambda>0$).

Определение. Набор $\lambda\in\mathbf{C}^n$ собственных чисел оператора Λ *резонансен для 2π-периодического уравнения* $\dot{x}=\Lambda x+\ldots$, если выполнено соотношение

$$\lambda_j=(\lambda,\ m)+ik,\ m\in\mathbf{Z}_+{}^n,\ |m|=\Sigma m_j\geqslant 2,\ k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

Теорема Пуанкаре. Периодическое дифференциальное уравнение, спектр линейной части которого лежит в области Пуанкаре и не резонансен, приводится в окрестности нулевого решения к автономной линейной нормальной форме $\dot{x}=\Lambda x$ биголоморфным 2π-периодическим по t преобразованием.

Теорема ([18 : 31]). Биголоморфное приведение к автономной линейной нормальной форме существует для всех уравнений, спектр линейной части которых принадлежит некоторому множеству полной лебеговой меры в пространстве $\mathbf{C}^n$ (а именно множеству таких λ, для каждого из которых существуют положительные C и σ такие, что

$$|\lambda_j-(\lambda,\ m)-ik|>C\cdot(|m|+|k|)^{-\sigma}$$

для всех $m\in\mathbf{Z}_+{}^n$, $k\in\mathbf{Z}$, $|m|\geqslant 2$).

3.3. Резонансные нормальные формы. Пусть линейный оператор Λ имеет жорданову нормальную форму, $z=(z_1,\ldots,z_n)$ — координаты в жордановом базисе; z_j соответствует собственному значению λ_j. Одночлен $z^m e^{ikt}\partial/\partial z_j$ называется *резонансным членом,* если выполнено соотношение

$$\lambda_j=(\lambda,\ m)+ik.$$

В резонансном случае периодическое дифференциальное уравнение с помощью замены, формальной по x и периодической по t, приводится к виду

$$\dot{y}=Jy+w(t, y),$$

где матрица J имеет жорданову нормальную форму, а w — формальный ряд Фурье по t и Тейлора по y, состоящий из одних резонансных членов.

В локальной теории автономных дифференциальных уравнений и диффеоморфизмов любое конечное число членов нормальной формы Пуанкаре—Дюлака вычисляется с помощью конечного числа алгебраических действий. Для периодических дифференциальных уравнений уже вычисление оператора монодромии линеаризованной системы требует решения линейной системы с периодическими коэффициентами в $\mathbf{R}^n$; при $n>1$ решение такого уравнения, как правило, не может быть найдено с помощью квадратур (см. § 3, гл. 7).

§ 4. Предельные циклы полиномиальных векторных полей на плоскости

Неизвестно, конечно ли число предельных циклов всякого полиномиального векторного поля на вещественной плоскости. В доказательстве конечности, предложенном Дюлаком [25], имеется не заполненный пробел [32].

4.1. Проблема конечности и сложные циклы. Пуанкаре (H. Poincaré) свел проблему конечности к исследованию окрестности так называемого сложного цикла.

Опредление. *Сложным циклом* векторного поля называется объединение конечного числа особых точек и неточечных фазовых кривых этого поля, причем множество особых точек непусто; решения, соответствующие неточечным фазовым кривым, стремятся к особым точкам при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$; сложный цикл связен и не может быть стянут по себе ни в какое свое собственное подмножество.

Замечание. Сложные циклы могут состоять из одной точки. Сложные циклы часто возникают из особых точек при разрешении особенностей. Примеры сложных циклов изображены на рис. 20.

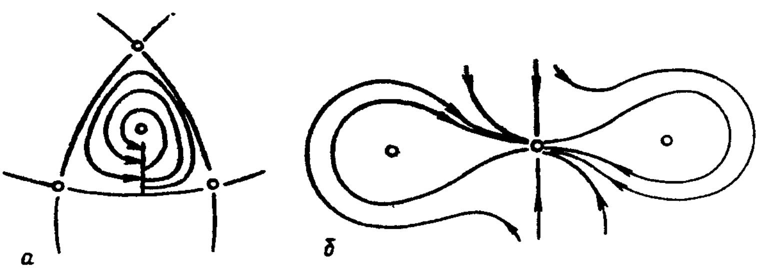


Рис. 20. Сложный цикл:
а) допускающий и б) не допускающий преобразования монодромии.

Проблема конечности равносильна следующей:

Может ли счетное число предельных циклов полиномиального векторного поля накапливаться к сложному циклу этого поля?

Предполагаемый ответ — отрицательный, причем не только для полиномиальных, но и для аналитических векторных полей.

4.2. Преобразование монодромии сложного цикла. *Преобразование монодромии для сложного цикла* определяется так же, как для замкнутой фазовой кривой, только вместо трансверсали берется *полутрансверсаль* — гомеоморфный образ полуинтервала с вершиной на цикле (рис. 20а). Полутрансверсаль трансверсальна векторному полю в своих внутренних точках. Не всякий сложный цикл допускает преобразование монодромии (рис. 20б).

Если полутрансверсаль принадлежит аналитической кривой, трансверсальной к сложному циклу, то во внутренних точках этой полутрансверсали преобразование монодромии аналитично; однако оно может не продолжаться даже C^1-гладко в окрестность вершины. Это связано с природой преобразования монодромии, которое зачастую принадлежит классу «полурегулярных отображений», введенных Дюлаком.

Определение. *Росток отображения* f: $(\mathbf{R}^+, 0)\to(\mathbf{R}^+, 0)$ называется *полурегулярным*, если для любого достаточно большого натурального N существует такое k, что

$$f(x)=cx^{\nu_0}+\sum_1^k P_j(\ln x)\, x^{\nu_j}+o(x^N),$$

где $c>0$, $0<\nu_0<\nu_1<\ldots<\nu_k\leqslant N$, P_j — многочлены. Представитель полурегулярного ростка называется полурегулярным отображением.

Определение. *Росток отображения* в точке называется *плоским*, если все его производные в ней равны нулю.

Теорема Дюлака ([25]). Полутрансверсаль к сложному циклу полиномиального векторного поля, допускающему преобразование монодромии, может быть выбрана так, что преобразование монодромии либо плоско, либо обратно плоскому, либо полурегулярно.

Обобщение ([32]). Утверждение теоремы Дюлака верно для гладких векторных полей, все особые точки которых удовлетворяют условию Лоясевича.

Если к сложному циклу векторного поля, удовлетворяющего условию Лоясевича в особых точках, накапливаются замкнутые фазовые кривые, то этот сложный цикл допускает преобразование монодромии, а предельному циклу, расположенному вблизи сложного цикла, соответствует изолированная неподвижная точка преобразования монодромии.

Дюлак выводит из своей теоремы существование окрестности сложного цикла, свободной от предельных циклов, при помощи леммы:

Полурегулярное отображение либо тождественно, либо имеет изолированную неподвижную точку нуль.

Контрпример: $f=x+e^{-1/x}\sin(1/x)$.

Существует аналитическое векторное поле, имеющее сложный цикл, преобразование монодромии которого — тождественное плюс ненулевой плоский добавок [33].

4.3. Открытые вопросы.

I. Верно ли, что полиномиальное векторное поле на вещественной плоскости имеет лишь конечное число предельных циклов?

II. Верно ли, что особая точка аналитического векторного поля без характеристических траекторий всегда либо центр, либо фокус?

Предполагаемые ответы — утвердительные. Утвердительный ответ на второй вопрос следует из утвердительного ответа на первый. Второй вопрос выделен, чтобы подчеркнуть, что положительно решающая его «теорема», широко распространенная в математической литературе и фольклоре, не доказана.

III. Гипотеза. Для каждого n существует такое N, что уравнение с полиномиальной правой частью степени n на плоскости не может иметь: а) комплексного предельного цикла, кратность которого превышает N [95]; б) больше N вещественных предельных циклов (вопрос Гильберта в его 16-й проблеме, не решенный уже при $n=2$).

4.4. Одна теорема конечности. При дополнительных ограничениях на векторное поле конечность доказана.

Теорема ([33]). Полиномиальное векторное поле с невырожденными особыми точками на вещественной плоскости (включая бесконечно удаленные)[1] имеет конечное число предельных циклов.

Полиномиальное поле на плоскости можно заменить здесь аналитическим векторным полем на замкнутой двумерной поверхности.

4.5. Метод доказательства теоремы Дюлака и ее обобщения.

Определение. *Сложный цикл* называется *элементарным*, если все особые точки на нем — элементарные.

Шаг I. Сложный цикл в обобщенной теореме Дюлака заменяется элементарным. Это делается с помощью хорошего раздутия неэлементарных особых точек, существующего по теореме Бендиксона—Дюмортье (§ 1, гл. 5).

Шаг II. Преобразование монодромии элементарного сложного цикла разлагается в суперпозицию определяемых ниже отображений соответствия.

Отображение соответствия для гиперболического сектора

---

[1] Определение даио ниже в п. 6.1.

особой точки векторного поля на плоскости — это отображение вдоль фазовых кривых полутрансверсали, через которую фазовые кривые входят в сектор, на полутрансверсаль, через которую фазовые кривые выходят из сектора (рис. 21); вершина полутрансверсали, по определению, переходит в вершину.

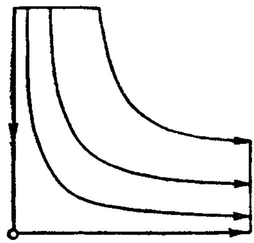


Рис. 21. Отображение соответствия гиперболического сектора.

Если элементарный сложный цикл — неодноточечный и допускает преобразование монодромии, то все особые точки на нем принадлежат классам 1, 4 и 5 из таблицы п. 2.1 главы 5. Из классификационной теоремы пп. 2.1 и 2.2 главы 5 вытекает

Следствие. Отображение соответствия для гиперболического сектора гладкого векторного поля на вещественной плоскости с особой точкой, удовлетворяющей условию Лоясевича, полурегулярно, когда особая точка невырождена, и имеет вид $\exp(-1/h)$ или $h(-1/\ln x)$, когда особая точка вырождена; здесь h — полурегулярное отображение.

Классификационная теорема сводит доказательство этого утверждения к случаю, когда векторное поле имеет нормальную форму, указанную в таблице. В этом случае отображение соответствия легко вычисляется.

Шаг III. Доказывается, что суперпозиции отображений соответствия, перечисленных в предыдущем следствии, принадлежат одному из классов, названных в теореме Дюлака (ростки полурегулярных отображений образуют группу).

4.6. Полиномиальные векторные поля второй степени. Хотя конечность числа циклов и здесь не доказана, получена некоторая информация о форме и расположении предельных циклов [81 : 3]. Например, они всегда выпуклы и каждый из них окружает лишь одну особую точку. Построены квадратичные поля с четырьмя предельными циклами [80], [107]. Доказано, что никакой круг на плоскости $\mathbb{R}^2$ не содержит счетного числа предельных циклов квадратичного векторного поля [81].

§ 5. Предельные циклы систем, близких к гамильтоновым

В этом параграфе рассматриваются возмущения гамильтоновых систем на вещественной и комплексной плоскости.

5.1. Рождение вещественных предельных циклов. Пусть векторное поле на вещественной плоскости имеет семейство замкнутых фазовых кривых, зависящих от параметра. При возмущении такого (в высшей степени вырожденного) поля возникает, вообще говоря, поле с изолированными невырожденными циклами.

Пример. Малое возмущение гамильтонова поля:

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y}+\varepsilon A(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x}+\varepsilon B(x, y, \varepsilon).$$

Определение. Цикл $\gamma(c)$, лежащий на линии уровня $H=c$, называется *порождающим*, если возмущенное уравнение имеет при малых $|\varepsilon|$ непрерывно зависящий от ε цикл, стремящийся к $\gamma(c)$ при $\varepsilon\to 0$.

Определение. *Вариацией (монодромии)* называется функция $I(c)=\oint(Bdx-Ady)$ (интеграл по $\gamma(c)$ при $\varepsilon=0$).

Теорема ([52]). Если цикл $\gamma(c)$ порождающий, то $I(c)=0$. Обратно, если c — простой нуль вариации, то цикл $\gamma(c)$ — порождающий, и порожденный им цикл возмущенной системы при малых $|\varepsilon|$ невырожден и гладко зависит от ε.

Доказательство основано на том, что I есть производная приращения H вдоль витка фазовой кривой по ε при $\varepsilon=0$.

5.2. Рождение комплексных циклов. В комплексном случае рассматривается семейство уравнений $\omega_\varepsilon=0$. 1-форма ω_ε на двумерном комплексном многообразии предполагается голоморфной и голоморфно зависящей от комплексного (малого) одномерного параметра ε. Невозмущенная форма (отвечающая $\varepsilon=0$) предполагается точной: $\omega_0=dH$, где H — голоморфная функция. Пусть уравнение $\omega_0=0$ имеет семейство неодносвязных интегральных кривых. Роль $\gamma(c)$ играет комплексный цикл, представленный замкнутым путем на неодносвязной интегральной кривой формы ω_0, путь непрерывно (а кривая голоморфно) зависит от комплексного параметра ε.

Вариация I — голоморфная функция от c: $I(c)=\oint\limits_{\gamma(c)}\omega$, $\omega=\left.\frac{d\omega_\varepsilon}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$. Так определенную функцию I называют абелевым интегралом, зависящим от параметра.

Теорема ([50], [27 : 2]). Если комплексный цикл $\gamma(c)$ порождающий, то $I(c)=0$. Изолированные нули I определяют порождающие комплексные циклы; порожденные ими циклы при малых $|\varepsilon|$ невырождены и голоморфно зависят от ε при $\varepsilon\neq 0$.

Циклы, соответствующие простым нулям I, голоморфно зависят от ε и при $\varepsilon=0$.

5.3. Исследование вариации. В алгебраической ситуации проверка изолированности нулей вариации облегчается.

Определение. Многочлен степени $n+1$ от двух комплексных переменных называется *правильным* если он имеет n^2 критических точек с различными критическими значениями и линии уровня его имеют $n+1$ различных асимптотических направлений.

Многочлен общего положения правилен; критические точки правильного многочлена невырождены.

В окрестности невырожденной критической точки многочлен биголоморфной заменой координат приводится к нормальной форме $H=x^2+y^2+\text{const}$. Исчезающим в критической точке циклом называется цикл на неособой линии уровня функции H, задающийся в указанной системе координат вещественной окружностью $x^2+y^2=c$, если c вещественно, и окружностью $x+iy=\sqrt{c}e^{i\varphi}$, $x-iy=\sqrt{c}e^{-i\varphi}$, $\varphi\in[0, 2\pi]$, $(x, y)\in\mathbf{C}^2$, если c комплексно. Исчезающий цикл на линии уровня $H=c$ обозначается через $\delta(c)$ (этот цикл определен для c, близких к рассматриваемому критическому значению, и исчезает, стягиваясь в критическую точку, когда c стремится к этому критическому значению функции H).

Теорема ([27]). Пусть H — правильный многочлен степени $n+1$ и ω—1-форма на плоскости с полиномиальными коэффициентами степени не выше n. Если

$$I(c)=\oint_{\delta(c)}\omega \tag{2}$$

— тождественный нуль (как функция от c), то форма ω точна.

Замечание. Итак, в условиях теоремы возмущение семейства линий уровня функции H, заданное уравнением $dH+\varepsilon\omega=0$, определяет тождественно нулевую вариацию монодромии только в том очевидном случае, когда возмущенные интегральные кривые — алгебраические, а именно — линии уровня близкого к H многочлена той же степени, что и H.

5.4. Ослабленная проблема Гильберта. Гильберт в 16-й проблеме высказал гипотезу, что число предельных циклов полиномиального векторного поля на вещественной плоскости ограничено зависящей лишь от степени поля величиной.

Из гипотезы Гильберта следует ограниченность числа порождающих циклов для полиномиальных возмущений полиномиальных гамильтоновых полей. В отличие от гипотезы Гильберта, это ее ослабление доказано.

Теорема Варченко ([20]). Существует $N(n, m)$ такое, что для любого вещественного многочлена степени n от двух переменных, для любого непрерывного семейства замкнутых связных компонент его линий уровня $\gamma(c)$ и для любой полиномиальной 1-формы ω с компонентами степени не выше m интеграл ω по $\gamma(c)$ либо тождественно по c равен нулю, либо имеет не более $N(n, m)$ вещественных нулей (с учетом кратностей).

Замечания. 1. Конечность числа рождающихся предельных циклов не доказана даже для полиномиальных возмущений полиномиальных гамильтоновых систем. Дело в том, что предельные циклы могут рождаться не только из замкнутых фазовых кривых, но и вблизи сложных циклов, образованных сепаратрисами гамильтонова уравнения.

2) В [20], [69] можно найти обобщения теоремы на многомерный и на комплексный случаи, но доказательства принципиально не дают никакой явной оценки числа N.

5.5. Специальные случаи. Описанные ниже специальные интегралы возникают при применении теоремы 5.1 к стандартным уравнениям теории бифуркаций общих динамических систем. В этих специальных случаях число нулей вариации обычно оказывается равным минимально возможному по соображениям размерности (своеобразная неколеблемость соответствующего линейного дифференциального уравнения Пикара—Фукса).

Пример 1. Действительное n-мерное пространство назовем *чебышевским*, если ненулевые функции пространства имеют менее n нулей с учетом кратности.

Обозначим через Ω_m пространство всех полиномиальных 1-форм вида

$$\omega=A(x,\ y)dx+B(x,\ y)dy,$$

где A и B — вещественные многочлены степени не выше m.

Теорема (Г. С. Петров, 1984). Пространство интегралов (2) по исчезающим циклам многочлена H от форм $\omega\in\Omega_m$ является чебышевским при любом m. Здесь $H=y^2-x^3+3x$, исчезающие циклы соответствуют интервалу между двумя критическими значениями: $|c|<2$. Тем же свойством обладает пространство функций, полученных аналитическим продолжением описанных интегралов с интервала $|c|<2$ в открытую верхнюю (или нижнюю) полуплоскость, объединенную с интервалом $|c|<2$. Аналогичное утверждение верно для интегралов по исчезающим циклам гамильтонианов $H=y^2+x^2\pm x^4$, $H=y^2-x^2+$ $+x^4$ и $H=x^3+y^3+\lambda xy$. ▲

Доказательства используют явный вид уравнений Пикара—Фукса для исследуемых интегралов и теорию малочленов [69].

Пример 2. Алгебро-геометрические методы исследования нулей интегралов, возникающих в теории потери устойчивости автоколебаний, описаны в [8] (см. указанную там литературу).

Пример 3. Исследование потери устойчивости автоколебаний с двумя парами чисто мнимых собственных значений[1] упирается в оценку числа нулей интеграла

[1] А также исследование бифуркаций циклов в обобщенной теории модели Лотка—Вольтерра (в этой модели рассматриваются векторные поля на плоскости, касающиеся координатных осей).

$$I(c)=\oint\frac{\omega_1+\lambda\omega_2}{xyz},\quad \omega_1=\beta y dx-\alpha x dy,\quad \omega_2=xy(xdy-ydx)$$

по замкнутой компоненте линии уровня $H=c$ функции $H(x, y)=$ $=x^\alpha y^\beta z^\gamma$ в треугольнике $x>0$, $y>0$, $z>0$, где $z=1-x-y$, $\alpha\beta=$ $=1$, $\alpha>0$, $\gamma>0$ (предполагаемое число нулей — один).

§ 6. Полиноминальные дифференциальные уравнения на комплексной плоскости

Голоморфные векторные поля на комплексной проективной плоскости исчерпываются полями алгебры Ли проективной группы, линейными в однородных координатах. Другие поля направлений с конечным числом особых точек также оказываются алгебраическими. Они структурно неустойчивы.

6.1. Допустимые поля.

Определение. *Допустимым полем направлений на комплексном многообразии* называется поле прямых, голоморфное на дополнении к аналитическому подмножеству комплексной коразмерности не меньше 2. Поле направлений полиномиального векторного поля в $\mathbf{C}^2$ продолжается до допустимого поля направлений в $\mathbf{C}P^2$.

Теорема ([29]). Допустимое поле направлений на комплексной проективной плоскости (а также на комплексном проективном пространстве произвольной размерности) в любой аффинной окрестности порождается полиномиальным векторным полем.

Два допустимых поля на комплексном многообразии называются *топологически (аналитически) эквивалентными,* если существует гомеоморфизм (биголоморфизм) многообразия на себя, переводящий интегральные кривые одного поля в интегральные кривые другого.

Пусть $\mathscr{A}$ — конечно-параметрическое семейство допустимых полей направлений на $\mathbf{C}P^2$. Говорят, что свойством A обладает типичное поле класса $\mathscr{A}$, если множество значений параметров, которым соответствуют не обладающие этим свойством поля, имеет нулевую меру Лебега.

Говорят, что свойством A обладает общее по Петровскому—Ландису поле класса $\mathscr{A}$, если множество значений параметров, которым соответствуют не обладающие свойством A поля, нигде не плотно и не разделяет пространство параметров (дополнение к этому множеству линейно связно).

6.2. Полиномиальные поля. Рассмотрим допустимые поля направлений в $\mathbf{C}P^2$, отвечающие всем полиномиальным векторным полям степени n в фиксированной аффинной карте. Этот класс допустимых полей и соответствующих им уравнений обозначим через $\mathscr{A}_n$. Общее по Петровскому—Ландису поле класса $\mathscr{A}_n$ имеет на бесконечно удаленной прямой, дополняющей исходную аффинную карту, $(n+1)$ особую точку; эти особые точки называются *бесконечно удаленными*. В окрестности такой особой точки наше допустимое поле направлений можно задать как поле направлений векторного поля с невырожденной особой точкой. Отношение собственных чисел линеаризации этого поля в особой точке называется характеристическим числом особой точки (в знаменатель ставится собственное число, чей собственный вектор направлен вдоль бесконечно удаленной прямой).

После удаления этих точек бесконечно удаленная прямая становится интегральной кривой.

Теорема ([70]). Для типичного поля класса $\mathscr{A}_n$ все интегральные кривые, кроме конечного числа, плотны в $\mathbf{C}P^2$.

Для общего по Петровскому—Ландису поля класса $\mathscr{A}_n$ единственная интегральная кривая, гомеоморфная сфере с выколотыми точками, — бесконечно удаленная прямая с выколотыми бесконечно удаленными особыми точками.

Теорема. Если два поля класса $\mathscr{A}_n$ с указанным свойством топологически эквивалентны, то наборы характеристических чисел их бесконечно удаленных особых точек $\mathbf{R}$-линейно эквивалентны (см. [29], [46]). Последнее означает, что существует $\mathbf{R}$-линейное преобразование ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}\to{}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}$, переводящее один набор в другой.

Замечание. В доказательстве используется обобщение теоремы Пуанкаре о числах вращения.

Лемма ([46]). Пусть два ростка конформных отображений $(\mathbf{C}, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$, линейные части которых — повороты, топологически эквивалентны. Тогда углы поворота для обоих ростков совпадают (с точностью до знака).

Для гладких отображений совпадение не обязательно. Лемма верна для отображений, при которых граница образа любой достаточно малой окрестности нуля пересекает границу прообраза.

Для допустимых полей направлений, отвечающих однородным векторным полям в $\mathbf{C}^2$ из $\mathbf{R}$-эквивалентности наборов характеристических чисел бесконечно удаленных особых точек следует топологическая эквивалентность [39].

Теорема ([29]). Для почти каждого поля класса $\mathscr{A}_n$ существует такая его окрестность в классе $\mathscr{A}_n$ и такая окрестность тождественного гомеоморфизма $\mathbf{C}P^2$ в себя, что всякое поле из первой окрестности, сопряженное с исходным при помощи гомеоморфизма из второй, аффинно эквивалентно исходному.

Описанное здесь свойство поля называется *абсолютной негрубостью.*

Число комплексных предельных циклов уравнения класса $\mathscr{A}_n$ (циклов, отвечающих изолированным неподвижным точкам своей монодромии) не более чем счетно [50].

Теорема ([29]). Почти все уравнения класса $\mathcal{A}_n$ имеют бесконечное количество комплексных предельных циклов, которые гомологически независимы (в том смысле, что циклы, лежащие на одной интегральной кривой, независимы как элементы группы гомологий этой кривой с компактными носителями).

Теорема ([72]). Свойства плотности, абсолютной негрубости и бесконечности количества гомологически независимых предельных циклов выполняются для всех полей класса $\mathcal{A}_n$, исключая некоторое вещественно-алгебраическое подмногообразие вещественной коразмерности 1 (а не просто множество меры нуль) в пространстве коэффициентов.

Замечание. По-видимому, теми же свойствами обладают почти все допустимые поля направлений в CP^d, порожденные полиномиальными векторными полями степени $n>1$ в $\mathbf{C}^d$ (ср. [96]).

Глава 7

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Эта глава посвящена теории уравнений без подвижных критических точек и линейным уравнениям с комплексным временем.

§ 1. Уравнения без подвижных критических точек

Понятие критической точки возникает, когда решения изучаются как функции от выделенной переменной.

1.1. Определение. 1. Пусть F — голоморфная функция в некоторой области пространства $\mathbf{C}^{n+2}$. *Решением дифференциального уравнения*

$$F(z, w, w', \ldots, w^{(n)})=0 \qquad (1)$$

называется полное аналитическое продолжение ростка голоморфной функции $z \mapsto w(z)$, удовлетворяющей этому уравнению. Уравнение (1) называется *алгебраическим*, если F — полином по $w, w^1, \ldots, w^{(n)}$.

Определение 2. Точка ветвления решения называется его *критической точкой*.

Определение 3. Дифференциальное уравнение (1) имеет *подвижные критические точки*, если критические точки его решений заполняют некоторую область на оси z; точки этой области называются *подвижными критическими точками уравнения*.

1.2. Подвижные критические точки уравнения первого порядка.

Пример. Рассмотрим уравнение с рациональной правой частью

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P(z, w)}{Q(z, w)}, \tag{2}$$

P и Q — многочлены. Пусть кривая $Q=0$ проектируется на область оси z. Тогда все точки оси z, кроме конечного числа, — подвижные критические для уравнения (2). Действительно, пусть a — неособая точка векторного поля $Q\partial/\partial z+P\partial/\partial w$ и пусть $Q(a)=0$, $Q|_{z=z(a)}\not\equiv 0$. Пусть φ_a — интегральная кривая уравнения (2), проходящая через точку a. Ограничение $z|_{\varphi_a}$ непостоянно; следовательно, при некотором натуральном m функция $t=(z-z(a))^{1/m}$ является локальным параметром на кривой φ_a в точке a; значит, $z(a)$ — алгебраическая точка ветвления решения с начальным условием a. Итак, подвижные критические точки рассматриваемого уравнения представляют собой особенности проектирования интегральных кривых на ось z; сами интегральные кривые голоморфны (особенностей не имеют, см. п. 1.9, гл. 1).

Теорема Пенлеве. Все подвижные критические точки алгебраического уравнения

$$F(z, w, w')=0 \tag{3}$$

— алгебраические точки ветвления.

Алгебраическое уравнение (3) не может иметь подвижных критических точек иной природы, чем у уравнения, разобранного в предыдущем примере; на этом основано доказательство теоремы Пенлеве (P. Painlevé).

1.3. Уравнения Риккати. Оставшаяся часть параграфа посвящена исследованию уравнений без подвижных критических точек (см. [1], [22] и указанную там литературу).

Теорема ([22]). Уравнение (2) не имеет подвижных критических точек, если и только если это *уравнение Риккати*:

$$\frac{dw}{dz}=a_0(z)w^2+a_1(z)w+a_2(z).$$

◀ Действительно, если уравнение (2) не имеет критических точек, то соответствующее поле направлений аналитически продолжается на произведение $\mathbf{C}\times\mathbf{C}P^1$, $z\in\mathbf{C}$, $w\in\mathbf{C}P^1$, и трансверсально каждому слою $\{z\}\times\mathbf{C}P^1$, кроме, может быть, конечного множества слоев. Поднимем поле $\partial/\partial z$ до векторного поля v, порождающего наше поле направлений; проектируя v на слои $\{z\times\mathbf{C}P^1\}$ вдоль оси z, получим семейство голоморфных векторных полей на проективной прямой. Но такие поля задаются полиномами второй степени. ▶

1.4. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Фукс (L. Fuchs) нашел условия на алгебраическое уравнение (3), необходимые и достаточные для того, чтобы оно не имело подвижных критических точек.

Пусть функция F определена в области $\Omega\times\mathbf{C}^2$, $z\in\Omega$, $(w, p)\in\in\mathbf{C}^2$. Поверхность E уравнения $F=0$ пополняется «бесконечно удаленными точками» до замкнутой поверхности $\bar{E}$ в $\Omega\times\mathbf{C}P^2$. Точки, в которых отображение складывания, проектирующее поверхность E на плоскость (z, w) вдоль оси p, не является локальным диффеоморфизмом, называются, как и в § 7 главы 1, особыми для уравнения (3). Условия Фукса — явно выписанные ограничения на поведение поверхности уравнения вблизи бесконечно удаленных и особых точек. Полный список этих условий содержится в книге [1]; в [22] одно условие пропущено. Алгебраические уравнения (3) без подвижных критических точек сводятся к уравнениям Риккати или явно интегрируются [22], [100]. Сформулируем в заключение следующую теорему Мальмквиста (S. Malmquist).

Теорема. Пусть F — полином от трех переменных. Тогда уравнение (3), имеющее хотя бы одно мероморфное, но не рациональное, решение, не имеет подвижных критических точек.

На языке дифференциальной алгебры теория алгебраических уравнений (3) без подвижных критических точек, изложена в [100]. Доказательство теоремы Мальмквиста[1)] и ее обобщений можно найти в [26], где приведен обширный список литературы.

1.5. Уравнения Пенлеве. Пенлеве (P. Painlevé) и Гамбье (B. Gambier) классифицировали уравнения

$$w''=R(z, w, w'),$$

не имеющие подвижных критических точек, при условии, что функция R рациональна по w и w' с коэффициентами, мероморфными по z и определенными в некоторой области Ω плоскости z. Уравнения, обладающие этим свойством, часто называются уравнениями класса P.

Определение. Рассмотрим два уравнения класса P. Пусть правая часть одного определена при $z\in\Omega_1$, а другого — при $z\in\Omega_2$. Скажем, что первое уравнение индуцировано из второго, если существует голоморфное отображение H: $\Omega_1\times\mathbf{C}P^1\to\to\Omega_2\ \mathbf{C}P^1$, переводящее слои $z=\mathrm{const}$ друг в друга, дробно-линейное на каждом слое $\{z\}\times\mathbf{C}P^1$ и переводящее первое уравнение во второе.

Пенлеве и Гамбье нашли такой список из 50 уравнений, что каждое из уравнений класса P может быть индуцировано из одного из уравнений этого списка [1], [22]. Из этих пятидесяти уравнений 44 интегрируются в квадратурах или приводятся

[1)] По-видимому, первое, свободное от пробелов.

к алгебраическим уравнениям вида (3). Остальные шесть называются *уравнениями Пенлеве*; перечислим их

$$\text{I. } w''=6w^2+z; \quad \text{II. } w''=2w^3+zw+a;$$

$$\text{III. } w''=w'^2w^{-1}+e^z(aw^2+b)+e^{2z}(cw^3+dw^{-1}), \quad |b|+|d|\neq 0;$$

$$\text{IV. } w''=\frac{1}{2}w'^2w^{-1}+\frac{3}{2}w^3+4zw^2+2(z^2-\alpha)w+\beta w^{-1};$$

$$\text{V. } w''=w'^2\left(\frac{1}{2w}+\frac{1}{w-1}\right)-\frac{w'}{z}+\frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w+\frac{\beta}{w}\right)+$$
$$+\gamma\frac{w}{z}+\delta\frac{w(w+1)}{w-1};$$

$$\text{VI. } w''=\frac{w'^2}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-z}\right)-w'\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{w-z}\right)+$$
$$+\frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left[\alpha+\beta\frac{z}{w^2}+\gamma\frac{z-1}{(w-1)^2}+\delta\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right].$$

Все решения первых четырех уравнений Пенлеве — мероморфные функции. Решения пятого уравнения имеют логарифмические точки ветвления $z=0$ и $z=\infty$, а шестого: $z=0$, $z=1$, $z=\infty$. Недавно обнаружена связь между интегрируемыми уравнениями математической физики и уравнениями класса P. Так, если функция w — решение второго уравнения Пенлеве, то функция

$$u(z, t)=t^{-2/3}(w'(z)+w^2(z))$$

является решением уравнения Кортевега-де Фриза. Подробнее об исследовании уравнений Пенлеве и их приложениях см. [23].

§ 2. Локальная теория линейных уравнений с комплексным временем

Этот параграф посвящен теории формальных и аналитических нормальных форм линейных уравнений и систем. Коэффициенты уравнений — ростки в нуле мероморфных функций с полюсом в точке 0. Точка 0 в этом случае называется особой.

2.1. Регулярные и иррегулярные особые точки.

Определение. Особая точка 0 системы

$$\dot z=A(t)z, \quad z\in\mathbf{C}^n, \tag{4}$$

называется *регулярной*, если все решения системы в каждом секторе плоскости t с вершиной 0 растут не быстрее некоторой (отрицательной) степени модуля t, когда t стремится к нулю, оставаясь внутри сектора[1]) (показатель в этой оценке — общий для всех секторов и всех решений). Особая точка, не являюща-

[1]) Не имеет смысла говорить о скорости роста многозначной функции при стремлении аргумента к логарифмической точке ветвления, не ограничивая функцию на сектор: функция $\ln t$ растет как $|t|^{-1}$ при стремлении t к нулю вдоль специально выбранной спирали.

яся регулярной, называется *иррегулярной*. Аналогично определяется регулярность и иррегулярность особой точки 0 для уравнения

$$x^{(n)}+a_1(t)\,x^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)\,x=0. \tag{5}$$

Примеры. 1. При $n=1$ регулярность особой точки 0 системы (4) равносильна простоте полюса A в нуле.

2. Особая точка 0 системы $\dot z=(A/t)z$, где A — постоянная матрица, регулярна. Росток фундаментальной матрицы решений имеет вид $X(t)=t^A$; по определению, $t^A=e^{A\ln t}$. Отметим, что аналитическое продолжение этого ростка имеет, вообще говоря, логарифмическое ветвление в точке 0.

3. Пусть L — многочлен с комплексными коэффициентами. Уравнение

$$L\left(t\,\frac{d}{dt}\right)x=0$$

называется *уравнением Эйлера*. Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ — корни многочлена L кратности $k_1,\ldots,k_m$ соответственно. Тогда фундаментальная система решений уравнения Эйлера имеет вид t^{λ_1}, $t^{\lambda_1}\ln t,\ldots,t^{\lambda_1}(\ln t)^{k_1-1},\ldots,t^{\lambda_m}(\ln t)^{k_m-1}$. Очевидно, особая точка 0 этого уравнения регулярна.

Замечание. Уравнение Эйлера превращается в уравнение с постоянными коэффициентами вида $L\left(\frac{d}{d\tau}\right)x=0$ с помощью замены $t=e^\tau$.

Определение. Если матричная функция A в системе (4) имеет простой полюс в нуле, то особая точка 0 системы (4) называется *фуксовой*.

Теорема 1. Фуксова особая точка системы (4) регулярна.

Замечание. Обратное, очевидно, неверно. Действительно, особая точка 0 уравнения Эйлера порядка n регулярна. Превратим это уравнение в систему (1) с помощью замены $z=(x,\dot x,\ldots,x^{(n-1)})$. Особая точка полученной системы будет регулярной, а матрица этой системы имеет, вообще говоря, полюс в нуле порядка n.

Теорема 2. Особая точка 0 уравнения (5) (коэффициенты которого — ростки мероморфных функций в нуле) регулярна, если и только если все функции t^ja_j голоморфны в нуле.

Требование голоморфности в нуле функций t^ja_j называется *условием Фукса*.

Замечание. Замена $z=\left(x,\left(t\,\frac{d}{dt}\right)x,\ldots,\left(t\,\frac{d}{dt}\right)^{n-1}x\right)$ превращает уравнение (5), удовлетворяющее в точке 0 условию Фукса, в систему (4) с простым полюсом в нуле. Это показывает, что $\ln t$ — естественное время для уравнений с регулярной особой точкой.

2.2. Формальная, голоморфная и мероморфная эквивалентность. Всюду ниже через π обозначается проектирование $\mathbf{C}\times\times\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$ вдоль второго сомножителя.

Определение.[1] Два уравнения (4) называются *голоморфно (мероморфно) эквивалентными*, если существует голоморфное (мероморфное с полюсом в точке 0) отображение $B\times\times\mathbf{C}^n$ в себя, линейное по z, сохраняющее время t и переводящее одно уравнение в другое. Здесь B — окрестность нуля или проколотая окрестность нуля соответственно. Другими словами, существует голоморфное (мероморфное) отображение $H: B\to\to\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, называемое сопрягающим и такое, что замена $(t, z)\mapsto(t, H(t)z)$ переводит одно уравнение в другое.

Две системы $\dot z=A(t)z$ и $\dot w=B(t)w$ сопряжены отображением H, если и только если $B=\dot HH^{-1}+HAH^{-1}$.

Определение. Если предыдущее соотношение выполнено, как равенство формальных рядов и H — формальный ряд Тейлора (Лорана) по t с коэффициентами из $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, то системы называются *формально $\mathcal{O}$-эквивалентными или формально $\mathcal{F}$-эквивалентными* ($\mathcal{O}$ — кольцо ростков голоморфных функций в нуле, $\mathcal{F}$ — его поле частных). Иногда вместо «формальной $\mathcal{O}$- или $\mathcal{F}$-эквивалентности» будем говорить *«формально голоморфная» и «формально мероморфная» эквивалентность.*

Теорема ([37]). Из формальной $\mathcal{O}$- или $\mathcal{F}$-эквивалентности ростков систем с регулярной особой точкой следует их голоморфная (соответственно, мероморфная) эквивалентность, причем сопрягающий формальный ряд сходится.

Для систем с иррегулярной особой точкой это неверно.

2.3. Монодромия. Пусть $t_0\neq0$ — произвольная точка, в которой определена матрица A системы (4). При аналитическом продолжении над петлей с началом и концом t_0, обходящей точку 0 один раз в положительном направленни, пространство ростков в точке t_0 решений системы (4) переходит в себя. Этот автоморфизм линеен, не зависит от выбора петли, обладающей описанными свойствами, и называется *преобразованием монодромии.* Например, для системы $\dot z=(A/t)z$ преобразование монодромии равно $\exp(2\pi iA)$.

Одно только понятие монодромии позволяет описать решения системы (4) с регулярной особой точкой.

Теорема. Система (4) с регулярной особой точкой мероморфно эквивалентна системе $\dot z=(C/t)z$, где $2\pi iC$ — произвольное значение логарифма преобразования монодромии системы (4).

◀ Пусть точка t_0 — та же, что и выше, X — росток фундаментальной матрицы решений системы (4) в точке t_0. Рассмот-

---

[1] Определяемые ниже сопрягающие отображения — это автоморфизмы тривиального векторного расслоения с одномерной базой B (окрестностью нуля или проколотой окрестностью нуля) и слоем $\mathbf{C}^n$.

рим аналитическое продолжение ростка $H=Xt^{-C}$ на проколотую окрестность нуля. Оно однозначно, поскольку при продолжении над петлей, обходящей 0, ростки X и t^C умножаются справа на одну и ту же матрицу преобразования монодромии $T=\exp(2\pi i C)$. Продолжение ростка H мероморфно в нуле в силу регулярности особой точки 0. Наконец, t^C — фундаментальная матрица решений системы $\dot{z}=(C/t)z$.▶

Две последние теоремы позволяют искать решения линейных дифференциальных уравнений и систем в окрестности регулярной особой точки в виде формальных рядов по степеням t и $\ln t$, не заботясь об их сходимости [37].

Для уравнений (5) отыскание формальных решений начинается с решения определяющего уравнения. А именно, уравнение (5) с регулярной особой точкой 0 можно записать в виде

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^n x+b_1(t)\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n-1}x+\ldots+b_n(t)\,x=0,$$

где b_j — голоморфные функции. *Определяющее уравнение* в этом случае имеет вид

$$\lambda^n+b_1(0)\,\lambda^{n-1}+\ldots+b_n(0)=0.$$

Если корни λ_j этого уравнения попарно различны, то уравнение (5) имеет фундаментальную систему решений $\varphi_j(t)\,t^{\lambda_j}$, где φ_j — голоморфные функции, $\varphi(0)\neq 0$ (см., например, [37]).

2.4. Формальная теория линейных систем с фуксовой особой точкой. Для формальной классификации линейных систем полезно привлечь общие методы теории нормальных форм Пуанкаре (гл. 3). Рассмотрим неавтономную систему

$$t^r\dot{z}=A(t)z;\quad A(0)\neq 0; \tag{6}$$

операторнозначная функция A голоморфна в нуле. Рассмотрим соответствующую автономную систему, в которой штрих означает $d/d\tau$ (τ — новое время):

$$z'=A(t)z,\quad t'=t^r.$$

Фазовые кривые новой системы вне плоскости $t=0$ совпадают с интегральными кривыми старой. Теорема Пуанкаре—Дюлака (п. 3.2, гл. 3) позволяет найти формальную нормализующую замену, сопрягающую автономную систему с ее формальной нормальной формой, нелинейная часть которой содержит только резонансные члены. Для систем, линейных по z, эта теорема может быть усилена: нормальная форма и нормализующая замена линейны по z, причем нормализующая замена сохраняет время t.

Определение. Набор $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbf{C}^n$ — *резонансный для системы* (6) *с фуксовой особой точкой,* если разность каких-либо двух чисел набора — натуральное число.

Теорема. Система $t\dot{z}=A(t)z$ с фуксовой особой точкой и нерезонансным спектром оператора $A(0)=\Lambda$, формально $\mathcal{O}$-эквивалентна, а значит, и голоморфно эквивалентна, стандартной: $t\dot{z}=\Lambda z$.

Следствие. В условиях предыдущей теоремы фундаментальная матрица решений системы имеет вид $\Phi(t)t^{\Lambda}$, где Φ: $B\to GL(n, \mathbf{C})$ — голоморфная операторнозначная функция, B — некоторая окрестность нуля.

Доказательство теоремы. Пусть $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — спектр оператора $\Lambda=A(0)$ и особая точка — фуксова, то есть в формуле (6) $r=1$. Линейная часть соответствующей автономной системы имеет тогда собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, 1. Одночлен $t^k z_i \frac{\partial}{\partial z_j}$ является резонансным членом, если и только если $\lambda_j=\lambda_i+k$. Предыдущая теорема следует теперь из усиленной теоремы Пуанкаре — Дюлака. ▶

В резонансном случае выражение для фундаментальной матрицы решений сложнее, но формальная нормальная форма линейной системы с регулярной особой точкой всегда интегрируется. На этом основан метод Фробениуса, позволяющий интегрировать уравнение (5) с регулярной особой точкой с помощью рядов [37], независимо от наличия резонансов.

2.5. Формальная теория линейных систем с нефуксовой особой точкой.

Определение. *Набор* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — *резонансный для системы* (6) *с нефуксовой особой точкой* $(r>1)$, если какие-нибудь два числа набора равны, и нерезонансный в противном случае. Соответственно, система (6) называется резонансной или нерезонансной.

Теорема. Пусть в системе (6) $r>1$ и спектр матрицы $A(0)$ нерезонансен. Тогда эта система формально $\mathcal{O}$-эквивалентна системе

$$t^r\dot{w}=B(t)w,\ B(t)=\operatorname{diag}(b_1(t), \ldots, b_n(t)),$$

здесь матрица $B(t)$ — диагональна с полиномами $b_i(t)$ степени не выше $r-1$ на диагонали.

Замечание. Последняя система называется формальной нормальной формой системы (6) или нормализованной системой; она распадается на одномерные и интегрируется; пусть $\int B(t)t^{-r}=D(t^{-1})+C\ln t$, где C — постоянная диагональная матрица, а D — диагональная матрица с полиномами от t^{-1} на диагонали степени не выше $r-1$.

Следствие. Фундаментальная матрица формальных решений системы (6) имеет вид $X(t)=\widehat{H}(t)t^C\exp D(t^{-1})$, где $\widehat{H}$ — формальный операторнозначный ряд Тейлора [19], [37].

Приведем набросок краткого доказательства.

◀ Заменим систему (6) автономной

$$\frac{dz}{d\tau}=A(t)z, \quad \frac{dt}{d\tau}=t^r.$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — спектр матрицы $A(0)$. Линейная часть рассматриваемой автономной системы имеет спектр $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0$. Применим к этой системе теорему Пуанкаре — Дюлака, модифицированную как в предыдущем пункте. Одночлен $t^k z_i \frac{\partial}{\partial z_j}$ является резонансным членом, если и только если $\lambda_i=\lambda_j$. Следовательно, существует формальная замена $(t, z)\mapsto(t, \tilde{H}(t)z)$, которая приводит рассматриваемую автономную систему к виду

$$\frac{dw}{d\tau}=\tilde{B}(t)w, \quad \frac{dt}{d\tau}=t^r,$$

где $\tilde{B}$ — диагональная матрица с формальными рядами Тейлора на диагонали. Положим: $\tilde{B}(t)=B(t)+t^rB_1(t)$. Тогда фундаментальная матрица решений системы $t^r\dot{w}=\tilde{B}(t)w$ примет вид $W=e^{B_2(t)}t^C\exp D(t^{-1})$, где C и D те же, что и выше, $\dot{B}_2=B_1$. Замена $(t,z)\mapsto(t,\hat{H}z), \hat{H}=e^{-B_2}\tilde{H}$ является искомой. ▶

Аналогичный результат для резонансных систем дает

Теорема ([73]). Резонансная линейная система (6) с нефуксовой особой точкой формально мероморфно эквивалентна системе

$$t^{\tilde{r}}\dot{w}=B(t)w, \quad B(t)=D_1+\ldots+D_{\tilde{r}-1}t^{\tilde{r}-2}+Ct^{\tilde{r}-1}, \qquad (7)$$

где $\tilde{r}\leqslant r$, операторы D_j и C попарно коммутируют и операторы D_j диагонализируемы.

Формально мероморфные замены дают в резонансном случае бо́льшие упрощения, чем формально голоморфные. Это связано с тем, что при формально голоморфных заменах порядок полюса правой части системы (4) не может измениться, а при формально мероморфных — может (см. пример п. 2.1 с уравнением Эйлера).

2.6. Асимптотические ряды и явление Стокса. Нормализующие замены, описанные в предыдущем разделе, зачастую расходятся. Например, ряд $\Sigma k!t^k$ является формальным решением уравнения $t^2\ddot{x}+(3t-1)\dot{x}+x=0$ [37]. Однако формальные замены позволяют найти так называемые асимптотические ряды, приближающие истинные решения в достаточно узких секторах с вершиной 0.

Определение. Пусть f — голоморфная функция в секторе S с вершиной 0. *Ряд* $\Sigma f_k t^k$ называется *асимптотическим* для этой функции, если при любом k k-я частная сумма этого ряда отличается от f на $o(t^k)$ при $t\to0$ в S.

Теорема. В условиях теорем п. 2.5 каждый луч с вершиной 0 можно заключить в сектор S такой, что система (6) в произведении $S\times\mathbf{C}^n$ аналитически эквивалентна своей формальной нормальной форме (7). Более того, существует голоморфное отображение H: $S\to\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, сопрягающее уравнение с его нормальной формой и такое, что $\widehat{H}$ — асимптотический ряд для H в секторе S; здесь $\widehat{H}$ — формальная замена из теорем пункта 2.5.

Эту теорему можно усилить.

Определение. *Лучом раздела*, соответствующим паре (λ_i, λ_j), называется любой луч с вершиной 0, на котором $\mathrm{Re}(\lambda_i-\lambda_j)t^{1-r}=0$.

Добавление. В предыдущей теореме в качестве S можно взять любой замкнутый сектор с вершиной 0, удовлетворяющий следующему требованию: ни для какой пары (λ_i, λ_j) сектор S не содержит двух лучей раздела, соответствующих этой паре.

Опишем теперь *явление Стокса* для систем с нефуксовой особой точкой 0. Рассмотрим два пересекающихся сектора S_1 и S_2 с вершиной в нуле, удовлетворяющих предыдущему требованию, объединение которых этому требованию не удовлетворяет. Пусть H_{S_1} и H_{S_2} — нормализующие отображения (как и выше, сохраняющие t), соответствующие секторам S_1 и S_2; $S=S_1\cap S_2$. Функция перехода $H_S=H_{S_1}\circ H_{S_2}^{-1}$ тоже сохраняет t и переводит нормализованную систему в себя. Обозначим через L_S пространство решений нормализованной системы, определенных в секторе S. Отображение H_S задает линейный автоморфизм пространства L_S в себя, который называется *оператором Стокса* и обозначается C_S.

Отметим, что отображение H_S имеет тривиальное асимптотическое разложение, поскольку асимптотические разложения для H_{S_1} и H_{S_2} совпадают: $H_S\sim E$, то есть $H_S=E+o(t^N)$ при $t\to 0$ в S для любого натурального N.

2.7. Аналитическая классификация нерезонансных систем в окрестности иррегулярной особой точки. Рассмотрим класс нерезонансных систем (6) с нефуксовой особой точкой. Пусть матрица $A(0)$ диагональна (в нерезонансном случае этого можно добиться линейной заменой переменных). В этом разделе рассматривается «сильная голоморфная эквивалентность» таких систем: требуется, чтобы сопрягающая замена отличалась от тождественной на $O(t)$ при $t\to 0: H=E+O(t)$. В рассматриваемом классе систем операторы Стокса являются инвариантами сильной голоморфной классификации. Опишем, какие операторы могут возникнуть как операторы Стокса. Это описание облегчается тем, что нормализованная система интегрируется явно; фиксируем ее.

Каждому сектору $S=S_1\cap S_2$, S_1 и S_2—те же, что в п. 2.6, соответствует оператор Стокса C_S и отображение $H_S: S\to\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, $H\sim E$. Базис в пространстве L_S образуют решения вида $\varphi_j(t)=$

$=a_j(t)\,\partial/\partial w_j$, где $\dot a_j = t^{-r} b_j(t)\, a_j$, $b_j(0)=\lambda_j$. Отметим, что $a_j(t) = \exp[\lambda_j t^{1-r}(1/(1-r)+O(t))]$.

Отображение H_S и оператор Стокса C_S связаны между собой следующим образом. Пусть

$$C_S\varphi_i = \psi_i, \quad \psi_i = \sum c_{ij}\varphi_j.$$

Тогда $H_S(t)\,\partial/\partial w_i = a_i^{-1}(t)\,\psi_i(t)$.

Поскольку $H_S \sim E$, получаем: $c_{ii}=1$; $c_{ij}\neq 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_i-\lambda_j)\,t^{1-r}\to -\infty$ при $t\to 0$ в S.

Определение. Оператор $C: L_S\to L_S$, удовлетворяющий предыдущим условиям, будем называть допустимым для сектора S и системы (7).

Определение. Пусть круг с центром 0 покрыт конечным числом секторов S_j с вершиной в центре, ни один из которых не содержит двух лучей раздела, соответствующих одной и той же паре (λ_p, λ_q). Пусть каждой упорядоченной паре секторов (S_i, S_j) с непустым пересечением S_{ij} сопоставлен оператор C_{ij}, допустимый для этого сектора S_{ij} и нормализованной системы (7), причем $C_{ij}C_{ji}=E$, $C_{ij}C_{jk}C_{ki}=E$. Тогда набор $\{C_{ij}\}$ называется *набором Стокса*.

Теорема ([76], [108]). Каждый набор Стокса может быть реализован, как набор операторов Стокса для некоторой нерезонансной системы с иррегулярной особой точкой, формально эквивалентной заданной нормализованной системе.

Теорема ([108]). Две формально эквивалентные нерезонансные системы с иррегулярной особой точкой и с одинаковым набором операторов Стокса голоморфно эквивалентны в окрестности этой точки.

Аналогичные теоремы справедливы и в резонансном случае, но относятся уже к мероморфной классификации, причем построение и описание операторов Стокса проводится не столь явно. На языке когомологий набор Стокса интерпретируется как 1-коцикл так называемого пучка Стокса (G. Stokes) над окружностью (см. [76]).

Отметим в заключение, что коядро дифференциального оператора $t^{-r}d/dt - A(t)$, действующего из пространства ростков мероморфных вектор-функций в нуле в себя, всегда конечномерно [76].

§ 3. Теория линейных уравнений в целом

Этот параграф посвящен теории линейных уравнений и систем с регулярными особыми точками на CP^1 и ее приложениям к теории абелевых интегралов и клейновых групп.

3.1. Уравнения и системы класса Фукса.

Определение. Система $\dot z = A(t)z$ имеет фуксову особую точку (или неособую точку) на бесконечности, если система, полученная из нее заменой $\tau=1/t$, имеет фуксову особую точку (или неособую точку) в нуле. Аналогично определяется условие Фукса на бесконечности для уравнения (5)

$$x^{(n)}+a_1(t)\,x^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)\,x=0.$$

Эквивалентное определение. Система $\dot z=A(t)z$ или уравнение (5) удовлетворяет условию Фукса на бесконечности, если матричная функция $tA(t)$ (соответственно, вектор-функция $ta_1(t),\ldots,t^n a_n(t)$), голоморфна на ∞.

Замечание. Система $\dot z=A(t)z$ имеет на сфере Римана лишь фуксовы особые точки, если и только если она имеет вид

$$\dot z=\sum\frac{A_j}{t-a_j}z; \tag{8}$$

матрицы A_j постоянны.

Уравнение (5) имеет на сфере Римана лишь фуксовы особые точки, если и только если $a_j(t)=P_j(t)\,Q^{-j}(t)$, где $Q(t)=$ $=\prod(t-a_k)$, $\deg P_j\leqslant(m-1)\,j$, $\deg Q=m$.

Матрицы A_j в системе (8) называются матрицами-вычетами. Уравнения и системы, описанные в этой теореме, называются *фуксовыми.*

3.2. Продолжимость и монодромия. Ниже универсальная накрывающая над областью Ω обозначается $\widehat{\Omega}$. Возможность продолжить росток аналитической функции в точке $p\in\Omega$ на универсальную накрывающую $\hat\Omega$ означает, что этот росток продолжается над любой кривой $\gamma\subset\Omega$ с началом p и результат не меняется при непрерывной деформации γ в Ω, сохраняющей начало и конец кривой.

Теорема. Каждое решение линейного уравнения или системы с мероморфными коэффициентами может быть продолжено на универсальную накрывающую над областью голоморфности коэффициентов.

Эта теорема является комплексным аналогом теоремы о продолжении решений линейных уравнений с вещественным временем на весь интервал непрерывности коэффициентов.

При продолжении решений над петлей, не проходящей через полюса коэффициентов, пространство ростков решений в начальной точке петли переходит в себя. Этот автоморфизм линеен и называется *преобразованием монодромии.* Последовательному обходу петель соответствует произведение преобразований монодромии. Возникает гомоморфизм фундаментальной группы области голоморфности коэффициентов в подгруппу группы $\mathrm{GL}(n,\,\mathbf{C})$. Этот гомоморфизм называется монодромией уравнения или системы; оператор, соответствующий петле γ, зависит только от гомотопического класса петли и обозначается T_γ. Образ гомоморфизма называют *группой монодромии.*

3.3. Теорема Римана—Фукса. Решения уравнений класса Фукса продолжаются на универсальную накрывающую над комплексной осью t с выколотыми полюсами коэффициентов, задают группу монодромии и регулярны (растут не быстрее некоторой степени расстояния до особой точки в любом секторе с вершиной в этой точке). Оказывается, эти свойства присущи только решениям уравнений класса Фукса.

Теорема ([56]). Пусть росток голоморфной вектор-функции φ голоморфно продолжается на универсальную накрывающую над сферой Римана с выколотыми точками $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, ∞ и определитель Вронского продолженной вектор-функции (обозначаемой также φ) нигде не обращается в нуль. Пусть росток φ задает группу монодромии: при продолжении над каждой петлей, принадлежащей проколотой сфере Римана, линейное пространство, порожденное компонентами ростка, испытывает линейный автоморфизм. Пусть это продолжение регулярно: когда t стремится к выколотой точке α, оставаясь внутри некоторого сектора с вершиной α, модуль $\varphi(t)$ растет не быстрее некоторой степени расстояния до α на сфере Римана. Тогда существует уравнение класса Фукса, для которого φ — росток фундаментальной системы решений.

Следствие 1. Любая алгебраическая функция одного переменного удовлетворяет уравнению класса Фукса.

◀ Рассмотрим множество Ω неособых точек функции; пусть $p \in \Omega$ — произвольная точка. Обозначим через $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ростки голоморфных функций в точке p, соответствующие разным листам алгебраической функции. Выберем среди них максимальное число линейно независимых $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (n может быть меньше m; пример: $\sqrt[m]{t}$). Росток $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ продолжается на универсальную накрывающую $\hat{\Omega}$ и порождает группу монодромии: листы алгебраической функции при продолжении вдоль петель переставляются. Определитель Вронского вектор-функции φ (обозначаемый W) умножается на константу (равную определителю преобразования монодромии); поэтому $W=0$ над конечным числом точек $\beta_j \in \Omega$; их следует тоже выколоть. Регулярность алгебраической функции в особых точках доказывается элементарно. Тем самым, можно применить предыдущую теорему. ▶

Следствие 2. Абелев интеграл, зависящий от параметра, рассмотренный в п. 5.2 главы 6, удовлетворяет уравнению класса Фукса (соответствующее уравнение называется уравнением Пикара—Фукса).

◀ Докажем это, полагая, что H — правильный многочлен. Точками ветвления интеграла являются критические значения H и ∞; монодромия описывается теоремой Пикара—Лефшеца [24]; регулярность доказывается элементарно. ▶

3.4. Аналитические функции от матриц. И. А. Лаппо-Данилевский применил к вычислению групп монодромии линейных дифференциальных уравнений и к восстановлению уравнения по группе монодромии теорию аналитических функций от матриц.

Исследования Лаппо — Данилевского относятся в основном к фуксовым системам. Рассмотрим систему (8). Фиксируем петли $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ с общим началом, каждая из которых обходит (один раз) ровно один полюс коэффициентов. Соответствующие матрицы монодромии $T_j = T_{\gamma_j}$ порождают всю группу монодромии системы (8). При фиксированных полюсах a_j матрицы монодромии зависят только от матриц-вычетов A_j.

Теорема 1. Матрицы T_j — целые функции матриц-вычетов A_j:

$$T_j = E + 2\pi i A_j + \sum_{1<k,\, j<n} a_{kl}(a)\, A_k A_j + \ldots;$$

$$a = (a_1, \ldots, a_m);$$

справа стоят степенные ряды от некоммутирующих матричных переменных A_j, сходящейся при всех значениях переменных.

Теорема 2. Если матрицы монодромии достаточно близки к единичной, то существует единственная фуксова система с заданной монодромией, матрицы—вычеты которой близки к нулю; они даются формулой

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}(T_j - E) + \sum_{1\leqslant k,\, j<n} b_{kj}(a)(T_k - E)(T_j - E) + \ldots,$$

справа стоят степенные ряды относительно $T_1 - E, \ldots, T_m - E$, сходящиеся в некоторой окрестности нуля.

Эти ряды получаются обращением предыдущих. Теорема 2 является своеобразной теоремой о неявной (для некоммутирующих переменных). Лаппо-Данилевский вычислил коэффициенты $a_{kj}, b_{kj}, \ldots$ как функции от a [41]; см. также [35].

3.5. Связь с теорией клейновых групп. Пространство ростков мероморфных и голоморфных решений уравнения Риккати в точке, отличной от полюса коэффициентов и от бесконечности, изоморфно CP^1. При продолжении над петлей, обходящей полюса коэффициентов, это пространство переходит в себя и испытывает дробно-линейное преобразование. Группа всех так построенных преобразований называется *группой монодромии уравнения Риккати.* Рассмотрим дифференциальное уравнение класса Фукса порядка 2. Группа монодромии этого уравнения — подгруппа группы $GL(2, \mathbb{C})$. Отобразим фазовое пространство $\mathbb{C}^2$ на $\mathbb{C}P^1$: $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 : z_2)$. Исходное уравнение перейдет в уравнение Риккати, его группа монодромии превратится в группу монодромии уравнения Риккати. Группа, состоящая из дробно-линейных преобразований $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, называется клейновой, если существует область, в которой она действует дискретно (никакая орбита действия группы не накапливается ко внутренней точке области). Каждая клейнова группа реализуется как группа монодромии для некоторого уравнения Риккати (это следует из положительного решения проблемы Римана—Гильберта для фуксовых уравнений, см. § 4). Эта связь обогащает обе теории: клейновых групп и дифференциальных уравнений [55]. В частности, деформации клейновых групп удобно изучать, деформируя коэффициенты соответствующего уравнения.

3.6. Интегрируемость в квадратурах. Лиувилль (J. Liouvill) доказал, что линейные уравнения второго порядка, вообще говоря, не интегрируются в квадратурах: решения не выражаются через коэффициенты с помощью арифметических действий, решения алгебраических уравнений, потенцирования и интегрирования[1]. В частности, не интегрируется уравнение $\ddot{x}+tx=0$.

Общая теория интегрируемости в квадратурах линейных уравнений и систем построена методами дифференциальной алгебры. С каждым линейным уравнением или системой с рациональными коэффициентами связывается группа Галуа, разрешимость которой отвечает за разрешимость уравнения или системы (см. [36], [68]). Сформулируем в заключение следующий геометрический результат.

Теорема Хованского ([35], [68]). Если группа монодромии фуксовой системы обладает разрешимым нормальным делителем конечного индекса, то эта система интегрируется в квадратурах. Если группа монодромии этим свойством не обладает, то система не интегрируется даже в «обобщенных квадратурах». Это значит, что общее решение системы не выражается через коэффициенты с помощью решения алгебраических уравнений, интегрирования и суперпозиций с целыми функциями любого числа переменных.

3.7. Замечания о специальных уравнениях. Уравнение второго порядка класса Фукса с тремя особыми точками на сфере называется *уравнением Римана.* Его коэффициенты однозначно определяются особыми точками и корнями определяющих уравнений, соответствующих этим точкам. Уравнения второго порядка с бóльшим числом особых точек и уравнения более высокого порядка этим свойством не обладают. Уравнение Римана с особыми точками 0; 1; ∞ — это *гипергеометрическое уравнение Гаусса*

$$t(t-1)\ddot{x}+[(\alpha+\beta+1)t-\gamma]\dot{x}+\alpha\beta x=0.$$

Линейные уравнения второго порядка часто встречаются в математической физике. Большинство из них сводится к част-

[1] Решение алгебраических уравнений не подразумевает решения в радикалах; считается, что вместе с каждым полиномом известно множество его нулей, и вместе с каждой функцией — ее интеграл.

ным или предельным случаям гипергеометрического уравнения. Например, таковы уравнения

$$t^2\ddot{x}+t\dot{x}+(t^2-\nu^2)\,x=0, \qquad \textit{(Бесселя)}$$

$$\ddot{x}+(a-t^2)\,x=0, \qquad \textit{(Вебера)}$$

$$(t^2-1)\,\ddot{x}+2t\dot{x}-\nu(\nu+1)\,x=0. \qquad \textit{(Лежандра)}$$

Общие линейные уравнения второго порядка, коэффициенты которых линейны, приводятся к вырожденному гипергеометрическому

$$t\ddot{x}+(b-t)\,\dot{x}-ax=0.$$

Все основные обыкновенные дифференциальные уравнения, встречающиеся в математической физике, получаются из следующего уравнения с пятью регулярными особыми точками $(1\leqslant r\leqslant 4)$ $\ddot{x}+\Sigma\dot{x}/2(t-a_r)+x(A+Bt)\,3t^2/16)/\Pi(t-a_r)=0$ (теорема Клейна и Бохера (F. Klein, M. Bocher) [1, с. 667]).

3.8. Группа монодромии уравнения Гаусса. Группа монодромии гипергеометрического уравнения с вещественными α, β, γ связана с треугольником, ограниченным дугами окружностей с углами $\pi\lambda$, $\pi\mu$, $\pi\nu: \lambda^2=(1-\gamma)^2$, $\mu^2=(\gamma-\alpha-\beta)^2$, $\nu^2=(\alpha-\beta)^2$.

Предположим, что $\lambda\in(0,\ 1)$, $\mu\in(0,\ 1)$, $\nu\in(0,\ 1)$. Группа, порожденная отражениями относительно сторон треугольника, содержит подгруппу индекса 2, состоящую из дробно линейных преобразований; обозначим ее G. Стандартное проектирование $\mathbf{C}^2\setminus\{0\}\to\mathbf{C}P^1$ переводит группу монодромии гипергеометрического уравнения, удовлетворяющего предыдущим ограничениям, в группу G. Если сумма $\lambda+\mu+\nu$ меньше 1 (равна 1, больше 1), то эта группа — подгруппа движений плоскости Лобачевского (евклидовой плоскости, сферы Римана). Это позволяет исследовать вопрос об интегрируемости гипергеометрического уравнения в алгебраических функциях (Шварц (H. Schwarz) 1, с. 530]). Случаи интегрируемости связаны с треугольниками с углами $(\pi/2,\ \pi/2,\ \pi/n)$ — диэдр, $(\pi/2,\ \pi/3,\ \pi/3)$ — тетраэдр, $(\pi/2,\ \pi/3,\ \pi/4)$ — октаэдр, $(\pi/2,\ \pi/3,\ \pi/5)$ — икосаэдр. Теоремы о неразрешимости гипергеометрического уравнения в «обобщенных квадратурах» следуют из результатов [68].

§ 4. Проблема Римана—Гильберта

«Показать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии». В этом состоит 21-я проблема Гильберта [53]. Она допускает различные обобщения.

4.1. Постановка проблемы[1]. Требуется доказать существование на сфере Римана

А. Уравнения класса Фукса.

Б. Системы $\dot{z}=A(t)z$ с регулярными особыми точками.

В. Фуксовой системы $\dot{z}=\Sigma A_j(t-\alpha_j)^{-1}z$, имеющих любой наперед заданный набор особых точек и заданную группу монодромии.

Проблема В, важная для приложений [57], до сих пор не решена, вопреки многочисленным утверждениям, распространенным в литературе ([41], [57], [103, § 85]). Ниже намечено решение проблемы Б, основанное на идеях Биркгофа и Рёрля (H. Röhrl) (оно, очевидно, влечет решение проблемы А), а также проблемы В при дополнительных ограничениях на группу монодромии (см. [65 : 58], [78]).

4.2. Проблема Римана—Гильберта для круга. Если в предыдущих проблемах сферу заменить на круг, то они решаются следующим образом. Строится матричная функция на универсальной накрывающей над кругом с выколотыми особыми точками, имеющая заданную группу монодромии и регулярные особые точки. Затем проверяется, что она удовлетворяет фуксовой системе уравнений.

Пусть $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ — заданный набор особых точек, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ — обходящие их петли с общим началом p (рис. 22), $T_1, \ldots, T_m$ — соответствующие этим петлям преобразования монодромии. Покроем круг K областями U_j с кусочно-гладкой границей; каждая область U_j содержит ровно одну точку $\alpha_j \in \alpha$; пересечение $U_j \cap U_{j+1}$ имеет кусочно-гладкую границу и односвязно, $\gamma_j \subset U_j$ (рис. 22). Для любой пары областей $U \subset G \subset \mathbf{C}$, содержащих точку p, обозначим через G_α разность $G \setminus \alpha$, через $\widehat{G}_\alpha$ — универсальную накрывающую над G_α с базисной точкой p, через $\widehat{U}$ — содержащую точку p связную компоненту области, лежащей над U на $\widehat{G}_\alpha$.

Определение. Матричная функция X на $\widehat{U}_j$ имеет фуксову главную часть t^C с монодромией T, если $X=\Phi t^C$, $T=\exp 2\pi i C$ и Φ — голоморфное отображение $U_j \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ (точнее следует писать $X(\widehat{t})=\Phi(P\widehat{t})\cdot(P\widehat{t})^C$, где $\widehat{t} \in \widehat{G}_\alpha$, P — проектирование $\widehat{G}_\alpha \to G_\alpha$; однако ниже, для краткости, вместо $\Phi \circ P$ пишется просто Φ).

Матричную функцию X на каждой из областей $\widehat{U}_j$ будем искать в виде $\Phi_j t^{C_j}$, где $2\pi i C_j$ — произвольное значение $\ln T_j$,

---

[1] Мы не касаемся здесь многочисленных исследований, посвященных вычислению коэффициентов уравнения по группе монодромии. Обширный материал по этому вопросу имеется в книге Н. П. Еругина «Проблема Римана». Минск, 1982 г.

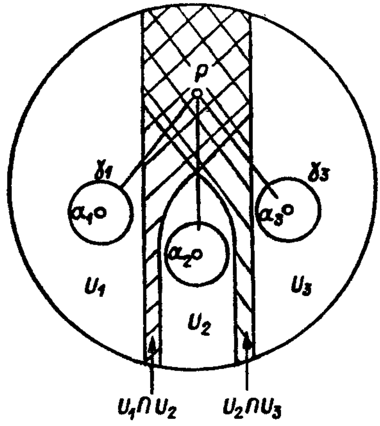


Рис. 22. Покрытие круга при решении проблемы Римана—Гильберта.

и отображение $\Phi_j : U_j \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ голоморфно. Условие совпадения этих выражений на пересечениях $\hat{U}_j \cap \hat{U}_{j+1}$ имеет вид

$$\Phi_j^{-1}\Phi_{j+1} = t^{C_j} t^{-C_{j+1}} |_{\hat{U}_j \cap \hat{U}_{j+1}}.$$

Задача об отыскании голоморфных отображений $\Phi_j : U_j \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, удовлетворяющих предыдущим уравнениям, разрешима при любых правых частях со значениями в $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. А именно, пусть для простоты $m = 2$. Заметим, что область $\hat{U}_j \cap \hat{U}_{j+1}$ однолистно накрывает $U_j \cap U_{j+1}$ и может быть отождествлена с ней.

Лемма А. Картана ((H. Cartan) [65:31]). Пусть U_1, U_2 и $U_1 \cap U_2$ — области с кусочно-гладкой границей и пересечение $U_1 \cap U_2$ связно и односвязно. Тогда для любого голоморфного отображения $F : \overline{U_1 \cap U_2} \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ существуют голоморфные отображения $\Phi_j : \overline{U}_j \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ такие, что $\Phi_1^{-1}\Phi_2 = F$ (напомним, что голоморфность на замкнутом множестве означает голоморфность в окрестности этого множества).

Тем самым, при $m = 2$ матричная функция на $\hat{U}_1 \cup \hat{U}_2$ вида $X = \Phi_j t^{C_j} |_{\hat{U}_j}$ существует. Ее особые точки очевидным образом регулярны. При $m > 2$ матричная функция X строится аналогично предыдущему индукцией по m.

Лемма. Матричная функция X удовлетворяет линейному уравнению на K с простыми полюсами

$$◀ \dot{X}X^{-1}|_{\hat{U}_j} = (\dot{\Phi}_j + \Phi_j C_j t^{-1})\Phi_j^{-1}. ▶$$

Этим заканчивается решение проблемы Римана—Гильберта для круга.

4.3. Проблема Римана—Гильберта для сферы. Без ограничения общности можно считать, что набор α особых точек содержит точку ∞:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \infty).$$

Воспользуемся предыдущим результатом. Покроем сферу двумя кругами K^+ и K^- с центрами 0 и ∞; круг K^+ содержит все петли $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, а пересечение $U = K^+ \cap K^-$ — точку p. Пусть $\gamma_{m+1} \subset U$ — петля с началом и концом в точке p, обходящая ∞ в положительном направлении (рис. 23). Петли $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ выберем так, что петля $\gamma_1 \ldots \gamma_m \gamma_{m+1}$ гомотопна нулю на K^+_α. Тогда $T_{m+1} = (T_m \ldots T_1)^{-1}$ — преобразование монодромии, соответствующее петле γ_{m+1}. Пусть $2\pi i C_j$ — произвольное значение $\ln T_j$, $j = 1, \ldots, m+1$. Построим, как в п. 4.2, матричную функцию X_+ на $\hat{K}^+_\alpha$ с фуксовыми главными частями t^{C_j}, $j = 1, \ldots, m$. Матричную функцию X на универсальной накрывающей над $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \infty\}$ будем искать в виде: $X|_{\hat{K}^+_\alpha} = \Phi_+ X_+$, $X|_{\hat{K}^-_\infty} = \Phi_- (1/t)^{C_{m+1}}$.

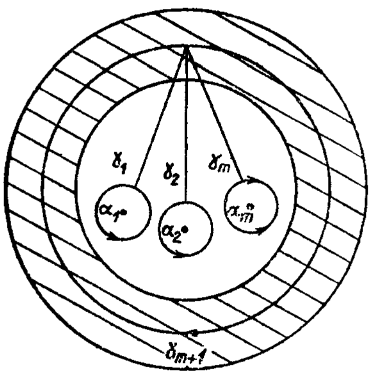


Рис. 23. Круг K_+.

Эта матричная функция существует, если разрешима следующая задача факторизации: $\Phi_+^{-1}\Phi_- = F|_U$, $F = X_+ X_-^{-1}|_U$.

Матричные функции X_+ и X_- неоднозначны на U, но при продолжении вдоль петли γ_{m+1} испытывают одинаковое преобразование монодромии, поэтому F — голоморфное отображение $U \to GL(n, \mathbf{C})$. Аналогом леммы Картана для этой задачи является

Теорема Биркгофа ((G. Birkhoff) [78]). Голоморфное отображение кольца $F: U \to GL(n, \mathbf{C})$ представимо в виде произведения $F = \Phi_+ \Phi_-$, где $\Phi_+: K^+ \to GL(n, \mathbf{C})$ — голоморфное отображение круга K^+, а $\Phi_-: K^- \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ — мероморфное отображение с полюсом ∞.

Этим завершается решение проблемы Б; матрица A искомого уравнения равна $\dot{X}X^{-1}$, имеет простые полюса в точках a_j и необязательно простой полюс ∞, являющийся, впрочем, регулярной особой точкой для уравнения $\dot{z}=A(t)z$.

4.4. Проблема Римана—Гильберта для фуксовых систем.

Теорема. Если хотя бы один из операторов $T_1, \ldots, T_m$, $M_{m+1}=(T_m \ldots T_1)^{-1}$ диагонализируем, то для любого набора $a=\{a_1, \ldots, a_m\}$ существует фуксова система с полюсами, принадлежащими a, и такая, что обходу точки a_j соответствует оператор монодромии T_j.

◀Пусть матрицы T_{m+1} и C_{m+1} диагональны и пусть, как и в п. 4.3, $X=\Phi_- t^{-C_{m+1}}$ над K^-; $X=\Phi_+ X_+$ над K^+.

Лемма Соважа ((A. Souvage), [67]). Мероморфное отображение Φ_-: $K^- \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ с полюсом ∞ представимо в виде $\Phi_-=P\Phi t^D$, где D — диагональная матрица, Φ — голоморфное отображение $K^- \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, P — полиномиальная матрица с определителем 1.

Применим эту лемму к отображению Φ_- в выражении для X. Положим: $Y=P^{-1}X$. Матричная функция Y по-прежнему имеет фуксовы главные части в точках $a_1, \ldots, a_m$. Кроме того, $Y|_{K^-}= =\Phi t^D t^{-C_{m+1}}$. Матрицы D и C_{m+1} диагональны и, следовательно, коммутируют. Поэтому произведение $\Phi t^D t^{-C_{m+1}}=\Phi t^{D-C_{m+1}}$ является фуксовой главной частью. Следовательно, матрица $\dot{X}X^{-1}$ имеет простые полюса на всей сфере; проблема В решена. ▶

Замечание. Рассуждения этого раздела следуют книге Племеля (J. Plemelj) [103], который дал первое решение проблемы Римана—Гильберта, и на работу которого ссылались все позднейшие исследователи. Племель проводит предыдущее рассуждение без формул, фактически передоказывает лемму Соважа и пользуется перестановочностью матриц D и C_{m+1}, не оговаривая этого явно. Для неперестановочных матриц D и C_{m+1} рассуждение Племеля не проходит. Например, если $\tau=\frac{1}{t}$, $X=\tau^D\tau^C$, $D=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, то матричная функция $A(\tau)= =\frac{dX}{d\tau}X^{-1}=\begin{pmatrix}0&\tau^{-2}\\0&\tau^{-1}\end{pmatrix}$ имеет непростой полюс в нуле.

4.5. Обобщения. В современной литературе линейные системы дифференциальных уравнений интерпретируются как связности в векторных расслоениях. Это позволяет решать проблему Римана—Гильберта с неклассическим временем (t пробегает произвольную риманову поверхность или многомерно [82]). Приведем некоторые приложения теории векторных расслоений на сфере к проблеме Римана—Гильберта; первая половина п. 4.7 представляет собой перевод на геометрический язык полученных ранее результатов.

4.6. Векторные расслоения на сфере.

Определение. *Векторным расслоением* ранга *n на сфере Римана* называется тройка (E, π, S), где E—$(n+1)$-мерное комплексное многообразие (называемое пространством расслоения), содержащее сферу S, называемую базой или нулевым сечением расслоения; $\pi : E \to S$ — голоморфное отображение, тождественное на S (ретракция). Каждый слой $F_t = \pi^{-1}t$ биголоморфно эквивалентен $\mathbf{C}^n$; тем самым на слоях задана линейная структура. Требуется еще, чтобы расслоение было локально тривиальным: для каждого круга K из S существует биголоморфное отображение $H_K : \pi^{-1}K \to K \times \mathbf{C}^n$, переводящее каждый слой F_t в слой $\{t\} \times \mathbf{C}^n$ и линейное на каждом слое.

Замечание. Пусть K^+ и K^- покрывающие сферу круги с центрами 0 и ∞ соответственно, $U = K^+ \cap K^-$. Функция перехода $(H_{K^+})^{-1} \circ H_{K^-}$ определяет голоморфное отображение $F : U \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Обратно, каждое такое отображение определяет голоморфное векторное расслоение над сферой: пространство E получается из объединения $K^+ \times \mathbf{C}^n$ и $K^- \times \mathbf{C}^n$ склейкой точек (t, z) и $(t, F(t)z)$, $t \in U$, $z \in \mathbf{C}^n$; проектирование π порождается проектированием вдоль второго сомножителя. Построенное векторное расслоение на сфере называется ниже расслоением со склейкой F.

Определения. а) Два *векторных расслоения* называются *эквивалентными*, если существует биголоморфное отображение пространства одного расслоения на пространство другого, сопрягающее проектирования и линейное на каждом слое. б) *Расслоение* называется *тривиальным*, если оно эквивалентно прямому произведению сферы на $\mathbf{C}^n$. в) Расслоение называется *прямой суммой линейных*, если оно эквивалентно расслоению со склейкой $F : t \mapsto \mathrm{diag}(t^{d_1}, \ldots, t^{d_n})$. г) Детерминантом векторного расслоения со склейкой F называется расслоение ранга 1 (линейное расслоение) со склейкой $\det F$.

Замечания. 1. Расслоение со склейкой F тривиально, если и только если уравнения $F = \Phi_+^{-1}\Phi_-$ имеет голоморфное решение

$$(\Phi_+, \Phi_-), \quad \Phi_+ : K^+ \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}), \quad \Phi_- : K^- \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}).$$

2. Лемма Соважа (1886 г.) (п. 4.4) означает, что каждое векторное расслоение на сфере эквивалентно прямой сумме линейных.

4.7. Применения к проблеме Римана—Гильберта. Пусть $a_1, \ldots, a_m$, ∞, $T_1, \ldots, T_m$, T_{m+1}—заданные точки и соответствующие им преобразования монодромии, $T_{m+1}T_m \ldots T_1 = E$. Каждый набор фуксовых главных частей $(t - a_1)^{C_1}, \ldots, (1/t)^{C_{m+1}}$, $\exp 2\pi i C_j = T_j$ задает векторное расслоение на сфере с помощью построений, описанных в пп. 4.2 и 4.3. Из тривиальности этого расслоения следует существование фуксовой системы с заданными полюсами и монодромией. Впрочем, построенное расслоение не всегда тривиально. Существование линейной системы с регулярными особыми точками следует из существования мероморфной тривиализации[1] этого расслоения с полюсом ∞. Теорема Биркгофа (п. 4.3) показывает, что такая тривиализация всегда существует.

Пусть S^1 — единичная окружность.

Теорема Шауна (D. Shaun, Topology, 1973, 12, № 4). В пространстве $\mathcal{L}$ всех ростков голоморфных отображений $(\mathbf{C}, S^1) \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, задающих аналитические векторные расслоения на сфере с тривиальным детерминантом, отображения, соответствующие нетривиальным расслоениям, образуют собственное аналитическое подмногообразие. Это значит, что в любом аналитическом конечно параметрическом семействе A отображений из пространства $\mathcal{L}$ отображения, соответствующие нетривиальным расслоениям, образуют замкнутое аналитическое подмножество; семейство A можно сколь угодно мало продеформировать так, что это подмножество станет собственным. Отсюда, после некоторых вычислений, получается следующая

Теорема (Ю. С. Ильяшенко, 1984). В пространстве $(\mathrm{GL}(n, \mathbf{C}))^m$ существует счетное объединение собственных аналитических подмногообразий, каждый набор $T_1, \ldots, T_m$ из дополнения к которому обладает следующим свойством. Для каждого набора $(t-a_1)^{C_1}, \ldots, (1/t)^{C_{m+1}}$ фуксовых главных частей: $\exp 2\pi i C_j = T_j$, $j = 1, \ldots, m+1$, $T_{m+1} = (T_m \ldots T_1)^{-1}$, $\sum_{1}^{m+1} \mathrm{tr}\, C_j = 0$ существует фуксова система, фундаментальная матрица решений которой имеет фуксовы главные части из данного набора.

4.8. Изомонодромные деформации и уравнения Пенлеве. Пусть коэффициенты линейного дифференциального уравнения или системы голоморфно зависят от одного комплексного параметра. Такое семейство называется деформацией уравнения. Деформация называется изомонодромной, если группа монодромии не меняется при изменении параметра. Шлезингер (L. Schlesinger) нашел условия на деформацию, при которых она изомонодромна. Для некоторых уравнений второго порядка условие изомонодромности записывается в виде уравнения класса P. Гарнье (R. Garnier) [22, с. 284] показал, что все уравнения Пенлеве получаются, как условия изомонодромности некоторых деформаций линейных уравнений. Недавно обнаружены новые связи между уравнениями Пенлеве и изомонодромными деформациями, имеющие приложения в теоретической физике [57].

---

[1] Т. е. существования репера в каждом слое, голоморфно зависящее от $t \in \mathbf{C}$ и мероморфного по t в точке ∞.

ЛИТЕРАТУРА

Начнем с аннотации некоторых книг из приводимого ниже списка литературы. В учебниках [51], [7], [93] излагаются основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, обсуждаются ее связи с другими областями математики и приложения к различным разделам естествознания: механике, электротехнике, экологии и т. д.

Книги [54] и [43] стоят у истоков качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости; наш обзор в значительной части является продолжением исследований, начатых А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым.

Книги [1], [48], [37], [67], [8] являются монографиями общего характера. Книги [48], [37], [67] отражают состояние качественной теории дифференциальных уравнений в конце 40-х, 50-х и 60-х годов соответственно. Книги [1], [22] излагают теорию дифференциальных уравнений в комплексной области. В частности, в книге [1] изложена теория интегральных преобразований и ее приложения к решению линейных уравнений. Основы теории линейных уравнений с комплексным временем освещены в книгах [37], [67].

Книга [8] содержит обзор современного состояния теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В ней изложены основы метода нормальных форм Пуанкаре и его приложения к исследованиям последних лет, основы теории гладких динамических систем, локальная теория бифуркаций.

В книге [2] дано первое систематическое изложение основ качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости: теория автоколебаний (предельных циклов), разрывных (релаксационных) колебаний, и разобраны многочисленные приложения к физике и технике.

Явление мягкой и жесткой потери устойчивости («опасные и безопасные границы области устойчивости») исследовано в книге [12], где разобраны также многочисленные приложения.

Книга [3] посвящена геометрической теории дифференциальных уравнений на плоскости и сфере. В ней фактически содержится полный набор топологических инвариантов аналитических векторных полей с изолированными особыми точками на двумерной сфере.

Книга [18] посвящена методу нормальных форм, разрешению особенностей и их приложениям к исследованию аналитических дифференциальных уравнений и к задачам механики. Книга [14] посвящена теории нормальных форм, в основном для формальных и гладких векторных полей и отображений. Геометрическое изложение метода разрешения особенностей содержится в книге [85]. Локальная теория инвариантных многообразий изложена в [44], [37], [85]; в [44] она применяется к уравнениям математической физики.

В книге [45] изложена локальная теория гамильтоновых систем, в которой из-за наличия инвариантной симплектической структуры возникают специфические явления, не встречающиеся в дифференциальных уравнениях общего положения.

Книга [17] посвящена теории возмущений, позволяющей исследовать системы, близкие к интегрируемым.

В книгах [7], [47] излагаются основы теории дифференциальных уравнений на многообразиях. Теория Фробениуса изложена в [47]; геометрическое изложение дано в [8].

Книга [62] посвящена теории слоений, частью которой является теория дифференциальных уравнений с вещественным и комплексным временем. Она содержит подробное изложение геометрической теории дифференциальных уравнений на двумерном и трехмерном торе.

Книга [5] посвящена У-системам — естественному классу дифференциальных уравнений на многообразиях, обладающих свойством структурной устойчивости. В этот класс входят, в частности, геодезические потоки на компактных многообразиях отрицательной кривизны.

Книга [19] посвящена в основном асимптотической теории линейных дифференциальных уравнений с комплексным временем.

Проблема Римана—Гильберта обсуждается в книгах [82], [103], [65], [57]. Книга [103] посвящена теории интегральных уравнений, с помощью которой было получено первое решение проблемы.

Книга [65] содержит теорию векторных расслоений и ее приложения к проблеме Римана—Гильберта для уравнений на некомпактных римановых поверхностях. В книге [57] разрешимость проблемы Римана—Гильберта прилагается к теории поля. В книге [82] теория линейных дифференциальных уравнений изложена на языке связностей в векторных расслоениях; это позволяет ставить и решать проблему Римана—Гильберта для уравнений с многомерным временем.

1. *Айнс Э. Л.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. ОНТИ, Харьков, 1939, 719 с.
2. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.*, Теория колебаний. Изд. 2-е. М.: Физматгиз, 1959, 916 с.
3. —, *Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.*, Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1967, *6*, 568 с.
4. —, *Понтрягин Л. С.*, Грубые системы. Докл. АН СССР, 1937, *14*, 247—251
5. *Аносов Д. В.*, Геодезические потоки на замкнутых римановых поверхностях отрицательной кривизны. Тр. Мат. ин-та, 1967, *90*, 212 с.
6. —, Гладкие динамические системы. Часть вторая настоящего тома с. 52—240
7. *Арнольд В. И.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1972, 240 с.
8. —, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
9. —, Замечания о теории возмущений для задач типа Матье. Успехи мат. наук, 1983, *38*, вып. 4, 189—203
10. —, *Варченко А. Н., Гусейн—Заде С. М.*, Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982, 304 с.
11. *Бабин А. В., Вишик М. И.*, Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности. Успехи мат. наук, 1983, *38*, вып. 4, 133—187
12. *Баутин Н. Н.*, Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости. М.—Л.: Гостехиздат, 1949, 164 с.
13. *Бахвалов Н. С.*, Численные методы. М.: Наука, 1975, 632 с.
14. *Белицкий Г. Р.*, Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. Киев: Наукова думка, 1979, 176 с.
15. *Березовская Ф. С.*, Сложная стационарная точка системы на плоскости: структура окрестности и индекс. Пущино, препринт НИВЦ АН СССР, 1978, 24 с.
16. *Богданов Р. И.*, Локальные орбитальные нормальные формы векторных полей на плоскости. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1979, вып. 5, 51—84
17. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 504 с.
18. *Брюно А. Д.*, Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979, 256 с.
19. *Вазов В.*, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968, 464 с. (Wasow W., Asymptotic expansions for ordinary differential equations. Wiley, 1963)
20. *Варченко А. Н.*, Оценка числа нулей вещественного абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, вып. 2, 14—25
21. *Воронин С. М.*, Аналитическая классификация ростков конформных отображений $(\mathbf{C}, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$ с тождественной линейной частью. Функц. анализ и его прил., 1981, *15*, вып. 1, 1—17
22. *Голубев В. В.*, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л.: 1950, 436 с.

23. *Громак В. И.*, О решениях второго уравнения Пенлеве. Дифференц. уравнения, 1982, *18*, вып. 5, 753—763
24. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.*, Современная геометрия. М.: Наука, 1979, 760 с.
25. *Дюлак А.*, О предельных циклах. М.: Наука, 1980, 160 с. (Dulac H. Sur les cycles limites, Bull. Soc. Math. France, 1923, *51*, 45—188)
26. *Еременко А. Э.*, Мероморфные решения алгебраических дифференциальных уравнений. Успехи мат. наук, 1982, *37*, вып. 4, 53—82
27. *Ильяшенко Ю. С.*, Пример уравнений $\frac{dw}{dz}=\frac{P_n(z, w)}{Q_n(z, w)}$, имеющих счетное число предельных циклов и сколь угодно большой жанр по Петровскому — Ландису. Мат. сб., 1969, *80*, вып. 3, 388—404
28. —, Аналитическая неразрешимость проблемы устойчивости и проблемы топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений. Мат. сб., 1976, *99*, вып. 2, 162—175
29. —, Топология фазовых портретов аналитических дифференциальных уравнений на комплексной проективной плоскости. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1978, вып. 4, 83—136
30. —, Расходимость рядов, приводящих аналитическое дифференциальное уравнение к линейной нормальной форме в особой точке. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, вып. 3, 87—88
31. —, Слабо сжимающие системы и аттракторы галеркинских приближений уравнения Навье—Стокса на двумерном торе. Успехи механики, 1982, *5*, вып. 1/2, 31—63
32. —, Особые точки и предельные циклы дифференциальных уравнений на вещественной и комплексной плоскости. Пущино, препринт, НИВЦ АН СССР, 1982, 39 с.
33. —, Предельные циклы полиномиальных векторных полей с невырожденными особыми точками на вещественной плоскости. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, вып. 3, 32—42
34. —, *Пяртли А. С.*, Материализация резонансов и расходимость нормализующих рядов для полиномиальных дифференциальных уравнений. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1982, вып. 8, 111—127
35. —, *Хованский А. Г.*, Теория Галуа систем дифференциальных уравнений типа Фукса с малыми коэффициентами. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша, 1974, № 117, 28 с.
36. *Капланский И.*, Введение в дифференцируемую алгебру. М.: ИЛ, 1959, 82 с.
37. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.*, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958, 474 с.
38. *Ладис Н. Н.*, Топологическая эквивалентность линейных потоков. Дифференц. уравнения, 1973, *9*, вып. 7, 2123—2135
39. —, Об интегральных кривых комплексного однородного уравнения. Дифференц. уравнения, 1979, *15*, вып. 2, 246—251
40. *Ладыженская О. А.*, О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье—Стокса и других диссипативных систем. Зап. науч. семинаров. Ленинград. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1981, *110*, 57—73
41. *Лаппо-Данилевский И. А.*, Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: АН СССР, 1957, 456 с.
42. *Лефшец С.*, Геометрическая теория дифференциальных уравнений. ИЛ, 1961, 388 с. (Lefschetz S., Differential equations; geometric theory (2 nd. ed.). Inter science. New York, 1963)
43. *Ляпунов А. М.*, Общая задача об устойчивости движения. М.—Л.: ГТТИ, 1950, 471 с.
44. *Марсден Дж., Мак Кракен М.*, Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980, 368 с. (Marsden J. & McCracken M., The Hopf bifurcation and its applications. Springer, 1976)

45. *Мозер Ю.,* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973, 168 с. (Moser J., Lectures on Hamiltonian systems, Courant Institute of Mathematical Science. N. Y., 1968)
46. *Найшуль В. А.,* Топологические инварианты аналитических и сохраняющих площадь отображений и их приложения к аналитическим дифференциальным уравнениям в $\mathbf{C}^2$ и $\mathbf{C}P^2$. Тр. Моск. мат. о-ва, 1982, *44*, 253—245
47. *Нарасимхан Р.,* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971, 232 с. (Narasimhan R., Analysis on real and complex manifolds. Université de Genève. Switzerland, 1968)
48. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.,* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., 1949, 550 с.
49. *Петровский И. Г.,* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970, 279 с.
50. —, *Ландис Е. М.,* О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P и Q — многочлены 2-й степени. Мат. сб., 1955, *37*, вып. 2, 209—250
51. *Понтрягин Л. С.,* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961, 312 с.
52. —, О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ, 1934, *4*, вып. 8, 234—238
53. Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969, 240 с.
54. *Пуанкаре А.,* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.—Л.: ГИТЛ, 1947, 392 с.
55. —, Избранные труды. М.: Наука, 1974, *3*, 772 с.
56. *Риман Р.,* Сочинения, 1948, 543 с.
57. *Сато М., Дзимбо М., Мива Т.,* Голономные квантовые поля. М.: Мир, 1983, 304 с.
58. *Сибирский К. С.,* Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. Кишинев: Штиинца, 1976, 268 с.
59. *Синай Я. Г.,* Эргодическая теория гладких динамических систем. Т. 2 настоящего издания
60. Совместные заседания семинара им. И. Г. Петровского и Московского матем. о-ва. 6-я сессия, 18—21 января 1983. Успехи мат. наук, 1983, *38*, вып. 5, 119—174
61. *Степанов В. В.,* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1959, 468 с.
62. *Тамура И. (Tamura I.),* Топология слоений. М.: Мир, 1979, 320 с.
63. *Трикоми Ф.,* Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962, 352 с. (Tricomi F., Differential equations. Blackie, 1961)
64. *Федорюк М. В.,* Обыкновенные дифференциальные уравнения: лекции для студентов второго курса. М.: Наука, 1972, 180 с.
65. *Форстер О.,* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980, 248 с.
66. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.,* Об устойчивости положений равновесия в критических случаях и случаях, близких к критическим. Прикл. мат. и мех., 1981, *45*, вып. 4, 595—604
67. *Хартман Ф.,* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970, 720 с. (Hartman P. Ordinary differential equations. Wiley, 1964)
68. *Хованский А. Г.,* О представимости функций в квадратурах. Успехи мат. наук, 1971, *26*, вып. 4, 251—252
69. —, Вещественные аналитические многообразия со свойством конечности и комплексные абелевы интегралы. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, вып. 2, 40—50
70. *Худай-Веренов М. О.,* Об одном свойстве решения одного дифференциального уравнения. Мат. сб., 1962, *56*, вып. 3, 301—308
71. *Четаев Н. Г.,* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: АН СССР, 1962, 536 с.
72. *Щербаков А. А.,* Топологическая и аналитическая сопряженность некоммутативных групп ростков конформных отображений и дифференциальные

уравнения на комплексной плоскости. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1984, вып. 12, 270—296
73. *Babbit G., Varadarajan V. S.*, Formal reduction theory of meromorphic differential equations: a group theoretic view. Pacif J. Math., 1983, *109*, N 1, 1—80
74. *Bamon R., Malta I. P., Pacifico M. J., Takens F.*, Rotation intervals of endomorphisms of the circle. Rio de Janeiro, 1983, Preprint, 10 p.
75. *Bendixson I.*, Sur les courbes definies par des équation différentielles. Acta math., 1901, *24*, 1—88 (Пер. на рус. яз. первой главы: Успехи мат. наук, 1941, *9*, 191—211)
76. *Bertrand D.*, Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires. Seminair Bourbaki, 31-t année N 538. Springer Verlag, Lect. Notes Math., 1980, *770*, 228—243
77. *Bibikov Yu. N.*, Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations. Springer Verlag, Lect. Notes Math., 1979, *702*, 147 p.
78. *Birkhoff G. D.*, Collected mathematical papers. I. Amer. Math. Soc., 1950, 259—306
79. *Camacho C., Sad P.*, Topological classification and bifurcations of holomorphic flows with resonances in C^2. Invent. math., 1982, *67*, 447—472
80. *Chen L., Wang M.*, The relative position and number of limit cycles if the quadratic differential systems. Acta math. sinica, 1979, *22*, N 6, 751—758
81. *Chicone C., Shafer D. S.*, Separatrix and limit cycles of quadratic systems and Dulac's theorem. Trans. Amer. Math. Soc., 1983, *278*, № 2, 585—610
82. *Deligne P.*, Equations différentielles à points singulieres réguliers. Springer Verlag, Lect. Notes Math., 1970, *163*, 131 p.
83. *Douady A., Oesterlé J.*, Dimension de Hausdorff des attracteurs. C. r. Acad. sci., 1980, *290*, 1135—1138
84. *Dumortier F.*, Singularities of vector fields on the plane. J. Different. Equat., 1977, *23*, N 1, 53—106
85. —, Singularities of vector fields. IMPA, Rio de Janeiro, 1978, 191 p.
86. —, *Rodrigues P. R., Roussarie R.*, Germs of diffeomorphisms in the plane. Springer Verlag, Lect. Notes Math., 1981, *902*, 197 p.
87. —, *Roussarie R.*, Germes de difféomorphismes et de champs de vecteurs en classe de différentiabilité finie. Grenoble Ann. Inst. Fourier, 1983, *33*, N 1, 195—268
88. *Ecalle J.*, Theorie iterative. Introduction à la théorie des invariants holomorphes. J. math. pures et appl., 1975, *54*, 183—258
89. —, Sur les fonctions resurgentes. T. I, II. Orsay, 1981, 1—250, 251—531
90. Geometric dynamics. Springer Verlag, Lect. Notes Math., 1983, *1007*, 827 p.
91. *Harrison J.*, A C^2 counterexample to the Seifert conjecture. Univ. of Calif. Berkeley, 1982, 73 p. Preprint.
92. *Hermann M. R.*, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations. Publ. math. Inst. hautes étud. sci., 1979, *49*, 5—233
93. *Hirsch M. W., Smale S.*, Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. New York, San Francisco, London, Acad. Press, 1974, 358 p.
94. *Hukuhara H., Kimura T., Matuda T.*, Equations differentialles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe. Publ. Math. Soc. of Japan, 1961, 155 p.
95. *Ichikawa F.*, On finit determinity of formal vector fields. Invent. math., 1982, *70*, N 1, 45—52
96. *Il'iašenko Ju. S.*, Global and local aspects of the theory of complex differential equations. Helsinki, Proc. Intern. Congr. Math., 1978, 821—826
97. *Malgrange B.*, Travaux d'Ecalle et de Martinez—Ramis sur les systemes dynamiques. Semin. Bourbaki, 1981, *582*, November, 1—16
98. *Martinet J., Ramis J. P.*, Problemes de modules pour des equation diffe-

rentielles non lineaires du premier ordre. Publ math. Inst. hautes étud. sci., 1982, *55*, 63—164
99. —, —, Classification analytique des equations differentielles non lineaires resonnantes du premier ordre. Ann. Sci. Ecole norm. supér., 1983, *16*, N 4, 571—621
100. *Matsuda M.*, First order algebraic differential equation. A differential algebraic approach. Springer Verlag, Lect. Notes Math., 1980, *804*, 204 p.
101. *Merkley M. G.*, Homeomorphisms of the cercle without periodic points. Proc. London Math. Soc., 1970, *20*, N 4, 688—698
102. *Moussu R.*, Symmetrie et forme normale des centres et foyers dégénérés. Ergod. Th. & Dynam. Syst., 1982, *2*, 241—251
103. *Plemelj J.*, Problems in the sense of Riemann and Klein. Inter. publ. New York—Sydney, 1964, 175 p.
104. *Ruelle D., Takens F.*, On the nature of turbulence. Communs Math. Phys., 1971, *20*, 167—192 (Пер. на рус. яз. В сб. «Странные аттракторы». М.: Мир, 1981, 117—151)
105. *Seidenberg A.*, Reduction of singularities of differential equation $Ady = Bdx$. Amer. J. Math., 1968, *90*, N 1, 248—269
106. *Sell G. R.*, Smooth linearisation near a fixed point. Preprint IMA, 1983, N 16, 69 p.
107. *Shi Songling*, A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems. Scientia (Sinica), 1980, *23*, N 2, 153—158
108. *Sibuya Y.*, Stokes phenomena. Bull. Amer. Math. Soc., 1977, *83*, 1075—1077
109. *Takens F.*, Singularities of vector fields. Publ. Math. Inst. hautes étud. sci., 1974, *43*, 47—100
110. —, Moduli of singularities of vector fields. Topology, 1984, *23*, № 1, 67—70
111. *Zehnder E.*, A simple proof of a generalization of a theorem by C. L. Siegel. Springer Verlag, Lect. Notes Math., 1977, *597*, 855—866

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ