ВИНИТИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

Том 2

Москва 1985

ISSN 0233—6723

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

Том 2

Научный редактор
член-корреспондент АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1985 г.

МОСКВА 1985

1—8951

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ—2

Редактор-консультант
профессор *Я. Г. Синай*

Научный редактор тома
А. Г. Шипшина

Авторы

*Л. А. Бунимович, А. М. Вершик, Р. Л. Добрушин,
И. П. Корнфельд, Н. Б. Маслова, Я. Б. Песин,
Я. Г. Синай, Ю. М. Сухов, М. В. Якобсон*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый автор, участвовавший в создании этого выпуска, ставил своей целью воплотить основной замысел всего издания и донести до читателя свое понимание и видение соответствующего раздела эргодической теории или ее приложений. Поэтому читатель сможет не только почерпнуть конкретные сведения из этой быстро развивающейся области математики, но и ощутить разнообразие стилей и вкусов работающих в ней исследователей.

Я. Г. Синай

УДК 517.987+519.218.84

I

ОБЩАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1

ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОСНОВНЫЕ ПРИМЕРЫ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай

§1. Динамические системы с инвариантной мерой

В общей эргодической теории рассматриваются измеримые действия групп или полугрупп преобразований. С точки зрения приложений это означает, что от функций, задающих такие преобразования, не требуется никаких условий гладкости — они должны быть лишь измеримыми.

Измеримым пространством называется пара $(M, \mathcal{M})$, где M — произвольное множество, а $\mathcal{M}$ — выделенная σ-алгебра его подмножеств. В дальнейшем M будет фазовым пространством динамической системы. Что касается $\mathcal{M}$, то выбор ее во всех конкретных случаях не вызывает затруднений. Мы будем пользоваться ниже понятиями прямого произведения измеримых пространств и $\mathcal{M}$-измеримой функции.

Определение 1.1. Преобразование $T: M \to M$ называется измеримым, если для любого $C \in \mathcal{M}$ полный прообраз $T^{-1}C$ принадлежит $\mathcal{M}$.

Измеримое преобразование T называют также *эндоморфизмом измеримого пространства* $(M, \mathcal{M})$. Всякий эндоморфизм порождает циклическую полугруппу эндоморфизмов $\{T^n\}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Если T обратимо и T^{-1} — также измеримое преобразование, то T называют *автоморфизмом измеримого пространства* $(M, \mathcal{M})$. Всякий автоморфизм порождает циклическую группу автоморфизмов $\{T^n\}$, $-\infty < n < \infty$.

Прямое обобщение этих понятий возникает, если рассмотреть произвольную счетную группу или полугруппу G и для каждого $g \in G$ задать измеримое преобразование $T_g: M \to M$ таким образом, что $T_{g_1} \cdot T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$ для всех $g_1, g_2 \in G$, $T_e = \mathrm{id}$.

Определение 1.2. Семейство $\{T_g\}$, $g \in G$, называется *измеримым действием* счетной группы или полугруппы G.

Простейший пример строится следующим образом. Пусть $(X, \mathscr{X})$—измеримое пространство, а M—пространство X-значных функций на G, т. е. $x \in M$ есть последовательность $\{x_g\}$, $x_g \in X$, $g \in G$. Для любого $g_0 \in G$ зададим преобразование $T_{g_0}: M \to M$ формулой $T_{g_0}x = x'$, где $x_g' = x_{g_0 g}$. В таком случае $\{T_g\}$ называется группой или полугруппой сдвигов. В частности,

1) если G есть полугруппа $\mathbf{Z}_+^1 = \{n : n \geqslant 0,\ n \text{ целое}\}$, то M — пространство последовательностей со значениями в X, т. е. точки $x \in M$ имеют вид $x = \{x_n\}$, $x_n \in X$, $n \geqslant 0$, и $T_m x = \{x_{n+m}\}$, $m \in \mathbf{Z}_+^1$. T_1 иногда называют односторонним сдвигом;

2) если G есть группа $Z^1 = \{n: -\infty < n < \infty,\ n \text{ целое}\}$, то M—пространство последовательностей $x = \{x_n\}$, $x_n \in X$, $-\infty < n < \infty$, и $T_m x = \{x_{n+m}\}$, $m \in Z^1$. T_1 называют сдвигом в пространстве двусторонних последовательностей, или просто сдвигом;

3) если G есть группа $Z^d = \{(n_1, n_2, \ldots, n_d): n_i \in Z^1,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$, $d \geqslant 1$, то M—пространство последовательностей $x = \{x_n\} = \{x_{(n_1, \ldots, n_d)}\}$, и $T_m x = \{x_{n+m}\}$, $m = (m_1, \ldots, m_d) \in Z^d$.

Эти примеры естественно возникают в теории вероятностей, где роль M играет пространство всевозможных реализаций d-мерного случайного поля.

Пусть теперь G — произвольная группа или полугруппа, которая сама является измеримым пространством $(G, \mathscr{G})$, причем операция левого умножения есть измеримое преобразование.

Определение 1.3. *Измеримым действием* группы G называется такое семейство измеримых преобразований $T_g: M \to M$, $g \in G$, что

1) $T_{g_1} \cdot T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$ для любых $g_1, g_2 \in G$;

2) для любой $\mathscr{M}$-измеримой вещественнозначной функции $f(x)$ на M функция $f(T_g x)$ измерима как функция на прямом произведении измеримых пространств $(M, \mathscr{M})$ и $(G, \mathscr{G})$.

Измеримые действия измеримой группы G иногда называют G-потоками.

Основной случай для нас — это $G = \mathbf{R}^1$ с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{M}$ подмножеств $\mathbf{R}^1$. В главе 10 появятся естественные примеры с $G = \mathbf{R}^d$, $d > 1$.

Для $G = \mathbf{R}^1$ обозначим через T^t преобразование, отвечающее $t \in \mathbf{R}^1$. Тогда $T^{t_1} \cdot T^{t_2} = T^{t_1 + t_2}$. Действия группы $\mathbf{R}^1$ естественно возникают следующим образом. Пусть M—гладкое компактное многообразие, α—гладкое векторное поле на M. Рассмотрим преобразование T^t, состоящее в сдвиге каждой точки $x \in M$ вдоль определяемой ею траектории векторного поля α на время t. (Возможность определить T^t для любого t вытекает из компактности M). Тогда $T^{t_1} \cdot T^{t_2} = T^{t_1 + t_2}$, и семейство $\{T^t\}$ задает измеримое действие группы $\mathbf{R}^1$.

Измеримые действия группы $\mathbf{R}^1$ обычно называют *потоками*, а измеримые действия полугруппы $\mathbf{R}_+^1$ — *полупотоками*. Циклические группы или полугруппы измеримых преобразований называют также *динамическими системами с дискретным временем*, а потоки и полупотоки — *динамическими системами с непрерывным временем*.

Пусть теперь $(M, \mathcal{M}, \mu)$ — *пространство с мерой* т. е. $(M, \mathcal{M})$ — измеримое пространство, а μ — неотрицательная мера на $\mathcal{M}$. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мера μ считается нормированной: $\mu(M)=1$, т. е. $(M, \mathcal{M}, \mu)$ — вероятностное пространство. Введем меру ν на $\mathcal{M}$, определенную равенством $\nu(C)=\mu(T^{-1}C)$ для любого $C \in \mathcal{M}$. Говорят, что преобразование T переводит меру μ в меру ν, и ν называют образом меры μ под действием T. Часто также обозначают ν через $T\mu$.

Определение 1.4. Мера μ называется *инвариантной мерой* для измеримого преобразования $T: M \to M$, если $T\mu=\mu$.

Если μ инвариантна относительно T, то T называют *эндоморфизмом* пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Если же T обратимо и $T\mu=\mu$, то T называют *автоморфизмом* пространства $(M, \mathfrak{M}, \mu)$. Если $\{T^t\}$ — измеримое действие группы $\mathbf{R}^1$, и каждое T^t сохраняет меру μ, то $\{T^t\}$ называется потоком на пространстве $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Наиболее общий случай охватывается следующим определением.

Определение 1.5. Пусть $\{T_g\}$ — измеримое действие измеримой группы $(G, \mathcal{G})$ на $(M, \mathcal{M})$. Мера μ на $\mathcal{M}$ называется инвариантной для этого действия, если для любого $g \in G$ преобразование T_g сохраняет меру μ.

Для того, чтобы иметь возможность отождествлять динамические системы различного происхождения, обладающие одинаковыми эргодическими свойствами, вводится общее понятие метрического изоморфизма динамических систем.

Определение 1.6. Пусть $(G, \mathcal{G})$ — измеримая группа, $\{T_g^{(1)}\}$, $\{T_g^{(2)}\}$ — два G-потока, действующие соответственно на $(M_1, \mathcal{M}_1)$, $(M_2, \mathcal{M}_2)$ и обладающие инвариантными мерами μ_1, μ_2. Эти G-потоки называются *метрически изоморфными*, если существуют G-инвариантные подмножества $M_1' \in \mathcal{M}_1$, $M_2' \in \mathcal{M}_2$, $\mu_1(M_1')=\mu_2(M_2')=1$ и изоморфизм $\varphi: (M_1', \mathcal{M}_1, \mu_1) \to (M_2', \mathcal{M}_2, \mu_2)$ пространств с мерой M_1', M_2', при котором $T_g^{(2)} \varphi x^{(1)} = \varphi T_g^{(1)} x^{(1)}$ для любых $g \in G$, $x^{(1)} \in M_1'$.

В эргодической теории изучаются также измеримые преобразования и измеримые действия групп, для которых выделенная мера μ на фазовом пространстве $(M, \mathcal{M})$ не обязательно является инвариантной.

Определение 1.7. Пусть $\{T_g\}$ — измеримое действие измеримой группы $(G, \mathcal{G})$ на $(M, \mathcal{M})$. Мера μ на $\mathcal{M}$ называется *квазиинвариантной* относительно этого действия, если для любого $g \in G$ мера $\mu_g = T_g\mu$, являющаяся образом μ под действием T_g, эквивалентна μ. Иными словами, классы множеств нулевой меры относительно μ и μ_g совпадают.

В случае преобразований с квазиинвариантной мерой также говорят об эндоморфизмах, автоморфизмах, G-потоках, не вводя новых терминов. Метрический изоморфизм групп преобразований с квазиинвариантной мерой естественно понимать также «с точностью до преобразования с квазиинвариантной мерой», т. е. следует требовать, чтобы преобразование, фигурирующее в определении 1.6, переводило μ_1 в меру, эквивалентную μ_2, но не обязательно равную μ_2.

В § 2 будут приведены первые следствия инвариантности меры. Сейчас мы рассмотрим проблему существования такой меры.

Пусть α — гладкое векторное поле на m-мерном многообразии M, $\{T^t\}$ — отвечающая ему группа сдвигов вдоль траекторий векторного поля, и μ — абсолютно непрерывная мера, т. е. мера, которая в любой локальной системе координат задается плотностью: $d\mu = \rho(x_1, \ldots, x_m)dx_1, \ldots, dx_m$. Известная теорема Лиувилля (J. Liouville) утверждает, что мера μ инвариантна относительно группы $\{T^t\}$, если плотность ρ удовлетворяет уравнению Лиувилля $\operatorname{div}(\rho\alpha) = 0$. Эта мера называется мерой Лиувилля, или интегральным инвариантом динамической системы $\{T^t\}$. Такая мера может быть бесконечной, но с помощью нее часто удается построить и конечные инвариантные меры. Перечислим некоторые случаи, где применима теорема Лиувилля.

1. M есть $2m$-мерное симплектическое многообразие, а векторное поле α задается не зависящей от времени функцией Гамильтона H. В локальной системе координат $(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)$, в которой симплектическая форма ω имеет вид $\omega = \sum_{i=1}^{m} dq_i \wedge dp_i$, векторное поле α задается системой уравнений Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.1}$$

Мера μ с плотностью $\rho(q, p) = 1$ будет инвариантной.

Динамические системы, задающиеся уравнениями (1.1), называются *гамильтоновыми динамическими системами*. К этому классу относятся и часто встречающиеся в приложениях *геодезические потоки*, получающиеся при помощи следующей конструкции. Пусть Q — гладкое компактное m-мерное риманово многообразие. Обозначим через $\mathcal{T}_q(\mathcal{T}_q^*)$ касательное (кокасательное) пространство к Q в точке q и рассмотрим единичное касательное расслоение $M = \{(q, v): q \in Q, v \in \mathcal{T}_q, \|v\| = 1\}$, точки которого называются линейными элементами на Q.

Геодезический поток на Q — это группа $\{T^t\}$ преобразований пространства M такая, что каждое отдельное преобразование T^t состоит в сдвиге линейного элемента $x=(q, v)$ вдоль определяемой им геодезической на расстояние t. Мера μ на M с дифференциалом $d\mu=d\sigma(q)d\omega_q$, где $d\sigma(q)$ — элемент риманова объема, ω_q — мера Лебега на единичной сфере S^{m-1} в $\mathcal{T}_q$, инвариантна относительно $\{T^t\}$.

Геодезический поток можно ввести и другим, эквивалентным, способом. Касательное расслоение $\mathcal{T}Q=\{(q, \ v): q\in Q, \ v\in\mathcal{T}_q\}$ естественно отождествляется с кокасательным расслоением $\mathcal{T}^*Q=\{(q, p): q\in Q, p\in\mathcal{T}_q{}^*\}$. Если $(q_1, \dots, q_m)$ — набор локальных координат точки $q\in Q$, то любая точка $p\in\mathcal{T}_q{}^*$ задается своими компонентами $(p_1, \dots, p_m)$. Невырожденная дифференциальная 2-форма $\omega=\sum\limits_{i=1}^{m} dq_i\wedge dp_i$ задает симплектическую структуру на $\mathcal{T}^*Q$, а введенный выше геодезический поток $\{T^t\}$ естественно изоморфен ограничению на единичное кокасательное расслоение гамильтоновой динамической системы на $\mathcal{T}^*Q$ с функцией Гамильтона $H(q, p)=1/2\|p\|^2$. Эргодические свойства геодезического потока полностью определяются римановой структурой на Q.

2. Пусть $M=\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m$ — касательное расслоение над $\mathbf{R}^m$, $m\geqslant1$, и векторное поле α задается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=y_i, \quad \frac{dy_i}{dt}=\alpha_i(x_1, \dots, x_m), \quad 1\leqslant i\leqslant m, \qquad (1.2)$$

или $\frac{d^2x_i}{dt^2}=\alpha_i(x_1, \dots, x_m)$. Тогда мера μ, для которой $d\mu=dx_1\dots dx_m, \ d\dot{x}_1\dots d\dot{x}_m$, будет инвариантной для группы $\{T^t\}$, образованной сдвигами вдоль решений системы (1.2).

3. $M=\mathbf{R}^m$, $m\geqslant1$, векторное поле α задается системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=\alpha_i(x_1, \dots, x_m), \quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

и $\operatorname{div}\alpha=\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}=0$. Тогда мера μ, для которой $d\mu=dx_1\dots dx_m$, будет инвариантной для группы $\{T^t\}$, отвечающей векторному полю α. Важный частный случай возникает при $m=3$. Траектории векторного поля α описывают в этом случае силовые линии стационарного магнитного поля с напряженностью $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Равенство $\operatorname{div}\alpha=0$ есть одно из уравнений Максвелла.

Замечание. Как уже упоминалось, обычно инвариантная мера, даваемая теорией Лиувилля, бесконечна. Построить с ее помощью конечную инвариантную меру удается, если у системы есть первый интеграл $H(x)$, многообразия уровня которого

$M_c=\{x\in M: H(x)=c\}$, $c\in R^1$, компактны. Тогда всякая траектория принадлежит одному из многообразий M_c. Если $\rho(x)$ — плотность меры Лиувилля, то мера μ_c, сосредоточенная на M_c, для которой $d\mu_c=\frac{1}{|\nabla H|}\rho d\sigma$, где $d\sigma$ — элемент объема на M_c, также будет инвариантной. При этом мера μ_c может оказаться конечной, и, умножая на константу, можно ее сделать нормированной. Основной пример: в случае гамильтоновой системы (см. пример 1) сама функция Гамильтона H есть первый интеграл. Индуцированная мерой Лиувилля мера на многообразии постоянной энергии $H=\mathrm{const}$ называется микроканоническим распределением.

4. Биллиарды. Пусть Q_0 — замкнутое m-мерное риманово многообразие класса C^∞, а $Q\subset Q_0$ — подмножество Q_0, выделяемое системой неравенств вида $f_i(q)\geqslant 0$, $q\in Q_0$, $f_i\in C^\infty(Q_0), 1\leqslant i\leqslant r<\infty$. Фазовое пространство *биллиарда* в Q — это множество M, точками которого служат линейные элементы $x=(q, v)$, $x\in \mathrm{Int}\, Q$, $v\in S^{m-1}$, а также те $x=(q,v)$, $x\in\partial Q$, $v\in S^{m-1}$, у которых v направлен внутрь Q. Движение точки $x=(q,v)$ под действием биллиардного потока $\{T^t\}$ — это движение с единичной скоростью по траектории геодезического потока вплоть до достижения границы ∂Q, а в моменты достижения границы — отражение от нее по закону «угол падения равен углу отражения». Мера μ на M такая, что $d\mu=d\rho(q)d\omega_q$, где $d\rho(q)$ — элемент риманова объема, ω_q — мера Лебега на S^{m-1}, инвариантна относительно $\{T^t\}$. Более подробное определение биллиардов см. в [24].

5. M — коммутативная компактная группа, μ — мера Хаара на M. Если T — групповой сдвиг на M, т. е. преобразование вида $Tx=x+g$; $x, g\in M$, то мера μ инвариантна относительно T. Это следует непосредственно из определения меры Хаара (A. Haar).

Пусть теперь T — групповой эндоморфизм группы M, т. е. такое однозначное непрерывное отображение M на себя, что $T(x_1+x_2)=Tx_1+Tx_2$ для всех $x_1, x_2\in M$. В этом случае из единственности меры Хаара μ на M вытекает, что μ инвариантна относительно T.

6. Пусть $(X, \mathscr{X}, \lambda)$ — вероятностное пространство, M — пространство последовательностей вида $x=\{x_n\}$, где $x_n\in X$, $n\in Z^1$ или $n\in Z_+^1$, а T — сдвиг на M, т. е. $Tx=x'$, $x_n'=x_{n+1}$. Введем меру μ на M, являющуюся прямым произведением сомножителей, равных λ (product — мера меры λ). Иными словами, на пространстве (M,μ) случайные величины x_n взаимно независимы и каждая из них имеет распределение λ. Сдвиг T называется в этом случае *автоморфизмом* (эндоморфизмом) *Бернулли* (J. Bernoulli) и является одним из основных примеров автоморфизмов (эндоморфизмов) в эргодической теории. Пространство

$(X, \mathcal{H}, \lambda)$ называется пространством состояний автоморфизма (эндоморфизма) Бернулли.

7. Обобщим предыдущий пример следующим образом. Пусть $(Y, \mathcal{Y}, \lambda)$ — вероятностное пространство, и задан оператор перехода $P_y(\cdot)$. Это означает, что при каждом $y \in Y$ имеется вероятностная мера P_y на $\mathcal{Y}$, и семейство мер $\{P_y\}$ измеримо в том смысле, что для любой $\mathcal{Y}$-измеримой функции f интеграл $\int\limits_Y f(z)\,dP_y(z)$ также является $\mathcal{Y}$-измеримой функцией на Y. Предположим также, что λ — инвариантная мера для оператора перехода $P_y(\cdot)$, т. е. для любого $C \in \mathcal{Y}$

$$\lambda(C) = \int\limits_Y P_y(C)\,d\lambda(y). \tag{1.3}$$

Рассмотрим, как и в предыдущем примере, пространство M последовательностей $x = \{y_n\}$, $y_n \in Y$, $n \in \mathbf{Z}^1$ или $n \in \mathbf{Z}_+^1$, и сдвиг T на M. Меру μ зададим иначе, а именно, с помощью соотношения

$$\mu(\{y : y_i \in C_0, y_{i+1} \in C_1, \ldots, y_{i+k} \in C_k\}) =$$

$$= \int\limits_{C_0 \times C_1 \times \ldots \times C_{k-1}} d\lambda(y_i)\,dP_{y_i}(y_{i+1}) \cdot \ldots \cdot dP_{y_{i+k-2}}(y_{i+k-1}) \cdot P_{y_{i+k-1}}(C_k),$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{Y}$, $1 \leqslant k < \infty$.

Из (1.3) вытекает, что мера μ инвариантна относительно сдвига T. В этом случае T называется *автоморфизмом* (эндоморфизмом) *Маркова.*

Имеется большое число групп и полугрупп преобразований, для которых существование хотя бы одной инвариантной меры далеко не очевидно. Приведем сейчас общий подход к этой проблеме, принадлежащий Н. Н. Боголюбову и Н. М. Крылову. Пусть M — компактное метрическое пространство, $\mathcal{M}$ — его борелевская σ-алгебра, T — непрерывное отображение M в себя.

Теорема 1.1 (Н. Н. Боголюбов, Н. М. Крылов [58]). Существует хотя бы одна нормированная борелевская мера, инвариантная относительно T.

Действительно, пусть μ_0 — произвольная нормированная мера, заданная на $\mathcal{M}$. Для $n = 1, 2, \ldots$ введем меры μ_n, где $\mu_n(C) = \mu_0(T^{-n}C)$, $C \in \mathcal{M}$, а также меры $\mu^{(n)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mu_k$. Так как M компактно, то пространство нормированных борелевских мер на нем слабо компактно. Поэтому найдется последовательность чисел $\{n_s\}$, $n_s \to \infty$ при $s \to \infty$, такая, что меры $\mu^{(n_s)}$ слабо сходятся при $s \to \infty$ к некоторой мере μ. Эта предельная мера будет инвариантной: для любой непрерывной функции f на M

$$\int_M f(Tx)\,d\mu = \lim_{s\to\infty} \int_M f(Tx)\,d\mu^{(n_s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{n_s} \sum_{k=0}^{n_s-1} \int_M f(Tx)\,d\mu_k =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{n_s} \sum_{k=0}^{n_s-1} \int_M f(x)\,d\mu_{k+1} = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \int_M f(x)\,d\mu_k =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{n_s} \sum_{k=0}^{n_s-1} \int_M f(x)\,d\mu_k = \int_M f(x)\,d\mu,$$

что, очевидно, и означает инвариантность меры μ.

Если $\{T^t\}$ — непрерывная однопараметрическая группа гомеоморфизмов компактного метрического пространства, то такие же рассуждения показывают, что $\{T^t\}$ имеет хотя бы одну инвариантную меру.

Определение 1.8. Гомеоморфизм T компактного метрического пространства M называется *строго эргодическим*, если нормированная инвариантная относительно T борелевская мера единственна. Гомеоморфизм T называется *минимальным*, если траектория $\{T^n x : -\infty < n < \infty\}$ любой точки $x \in M$ плотна в M. Гомеоморфизм T называется *топологически транзитивным*, если у него существует всюду плотная траектория.

Введенные понятия характеризуют в разных смыслах «топологическую неразложимость» T. Иногда эти понятия относят не только к гомеоморфизмам, но и к более общим — борелевским преобразованиям топологических пространств. В § 3 для динамических систем на общих пространствах с мерой будет введено понятие эргодичности, характеризующее их метрическую неразложимость.

Свойства строгой эргодичности и минимальности близки в том смысле, что во многих естественных примерах они встречаются или не встречаются одновременно. Однако в общем случае ни одно из них не вытекает из другого. Минимальность означает отсутствие у T нетривиальных инвариантных замкнутых множеств. Смысл свойства строгой эргодичности проясняется при помощи следующей теоремы.

Теорема 1.2 (Фюрстенберг (H. Furstenberg) [70]). Пусть T — гомеоморфизм компактного метрического пространства M, μ — нормированная борелевская мера на M, инвариантная относительно T. Следующие утверждения эквивалентны:

1) T строго эргодичен;

2) для любой непрерывной функции f на M

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_M f\,d\mu;$$

3) для любой непрерывной функции f на M сходимость $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \to \int f d\mu$ равномерна на M.

В ситуациях, где применима теорема Боголюбова—Крылова, инвариантных мер может быть много. Естественно предложить критерий, который выделял бы наиболее существенные инвариантные меры. В последние годы, в связи с развитием теории гиперболических систем (см. часть II), появился новый подход к этому вопросу.

Пусть M — гладкое многообразие, $T: M \to M$ — диффеоморфизм, или $\{T^t\}$ — однопараметрическая группа сдвигов вдоль траекторий некоторого гладкого векторного поля на M. Рассмотрим какую-то абсолютно непрерывную меру μ_0 и ее сдвиги μ_n, $\mu_n(C) = \mu_0(T^{-n}C)$ (в случае дискретного времени), $\mu_t(C) = \mu_0(T^{-t}C)$ (в случае непрерывного времени). Может быть так, что при $n \to \infty$ (соответственно, при $t \to \infty$) сдвинутые меры стремятся к пределу μ, не зависящему от выбора начальной меры μ_0. Предельная мера μ будет инвариантной, и ее можно признать наиболее существенной инвариантной мерой для рассматриваемой динамической системы.

Такие меры могут быть и у диссипативных динамических систем. Пусть $\{T^t\}$ — однопараметрическая группа сдвигов вдоль решений системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_m), \quad 1 \leqslant i \leqslant m < \infty. \tag{1.4}$$

Система (1.4) называется *диссипативной*, если $\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$. Из упомянутой выше теоремы Лиувилля следует, что для любого $C_0 \subset \mathbf{R}^m$ m-мерный объем множества $C_t = T^t C_0$ убывает со временем и стремится к нулю. Это никоим образом не означает, что начальные меры μ_0 под действием динамики как-либо вырождаются. Наоборот, может быть так, что они стремятся к нетривиальным инвариантным мерам, сосредоточенным на инвариантных множествах, m-мерный объем которых равен нулю. Получается как бы, что сама динамика системы порождает естественную меру в ходе эволюции гладких мер. Подобная ситуация часто встречается в задачах со странными аттракторами (см. ч. II, гл. 7). Вопрос о существовании таких мер неоднократно возникал при математических подходах к анализу турбулентности.

Замечание о пространствах Лебега (H. L. Lebesgue). Многие из приводимых ниже результатов справедливы в предположении, что фазовое пространство $(M, \mathscr{M}, \mu)$ динамической сисистемы является *пространством Лебега*. Мы не будем здесь приводить полное определение пространств Лебега (см. [36]), отметим лишь, что в случае пространств с непрерывной (неатомической) мерой пространства Лебега — это пространства, изоморфные отрезку [0, 1] с мерой Лебега, определенной на борелевской σ-алгебре подмножеств [0, 1]. Предположение о том, что $(M, \mathscr{M}, \mu)$ — пространство Лебега, фактически не является ограничительным: оно, как правило, выполнено для пространств с мерой, встречающихся в приложениях. В частности, любое сепарабельное метрическое пространство с мерой, определенной на σ-алгебре, порожденной открытыми множествами, является пространством Лебега.

С другой стороны, при этом предположении можно пользоваться аппаратом теории измеримых разбиений, отсутствующим в общем случае.

Разбиение пространства $(M, \mathscr{M}, \mu)$ — это совокупность $\xi = \{C\}$ непустых непересекающихся измеримых множеств такая, что $\bigcup\limits_{C\in\xi} C = M$. Свойство измеримости разбиения ξ означает, что его элементы $C\in\xi$ сами могут быть превращены в пространства с мерами μ_C, причем эти меры играют роль условных вероятностей. Формальное определение таково.

Определение 1.9. *Канонической системой условных мер, принадлежащих разбиению* ξ, называется система мер $\{\mu_C\}$, $C\in\xi$, обладающая следующими свойствами:

1) μ_C определена на некоторой σ-алгебре $\mathscr{M}_C$ подмножеств множества C;

2) пространство $(C, \mathscr{M}_C, \mu_C)$ есть пространство Лебега;

3) для любого $A\in\mathscr{M}$ множество $A\cap C$ принадлежит $\mathscr{M}_C$ при почти всех $C\in\xi$, функция $f(x)=\mu_{C_\xi(x)}(A\cap C_\xi(x))$, где $C_\xi(x)$ — элемент разбиения ξ, содержащий $x\in M$, измерима и

$$\mu(A)=\int \mu_{C_\xi(x)}(A\cap C_\xi(x))\,d\mu.$$

Разбиение ξ называется *измеримым*, если оно обладает канонической системой условных мер.

Каноническая система условных мер для измеримого разбиения единственна в том смысле, что любая другая система $\{\mu_C'\}$ совпадает с ней для почти всех $C\in\xi$.

§ 2. Первые следствия существования инвариантной меры. Эргодические теоремы[1]

Первое представление о траекториях групп преобразований с инвариантной мерой дает теорема Пуанкаре (H. Poincaré) о возвращении.

Теорема 2.1 (теорема Пуанкаре о возвращении, см. [24]). Пусть $(M, \mathscr{M}, \mu)$ — пространство с мерой, $T: M\to M$ — его эндоморфизм. Тогда для любого $C\in\mathscr{M}$, $\mu(C)>0$, почти каж-

---

[1] В написании § 2 принимал участие Я. Б. Песин.

дая точка $x \in C$ бесконечное число раз возвращается в C, т. е. найдется такая бесконечная последовательность чисел $\{n_i\}$, $n_i \to \infty$, что $T^{n_i} x \in C$.

Тем самым, всякое множество $A \in \mathcal{M}$ такое, что $T^n A \cap A = \varnothing$ при всех $n > n_0$, имеет меру 0.

С теоремой Пуанкаре о возвращении связан так называемый парадокс Цермело в статистической механике. Рассмотрим замкнутый ящик и поместим в нем N молекул, которые будут двигаться под действием сил взаимодействия и упруго отражаться от стенок. Уравнения движения этой системы образуют гамильтонову систему, и поэтому однопараметрическая группа сдвигов вдоль траекторий сохраняет меру Лиувилля. Многообразия постоянной энергии здесь компактны, и мера Лиувилля порождает конечные инвариантные меры на многообразиях постоянной энергии. Тем самым мы находимся в условиях применимости теоремы Пуанкаре о возвращении. Допустим теперь, что множество C состоит из таких точек фазового пространства, что все молекулы находятся в одной половине ящика. По теореме Пуанкаре о возвращении должны найтись такие моменты времени, что все молекулы вновь соберутся в этой половине ящика. Парадокс заключается в том, что никто еще не наблюдал, чтобы газ занимал не весь предоставленный ему объем.

Объясняется это явление довольно просто. Вероятность множества C есть величина порядка $e^{-\mathrm{const}\cdot N}$, где const зависит от температуры, плотности и т. п. В реальных условиях $N \sim 10^{23}$ молекул/см^3, что показывает, что $\mu(C)$ чрезвычайно мала. Мы увидим далее (см. § 4), что попадания в множество C происходят через промежутки времени порядка $[\mu(C)]^{-1}$, а в нашем случае эти промежутки огромны. Для того чтобы наблюдать появление начального состояния, требуется держать ящик в неизменных условиях в течение времени того же порядка $[\mu(C)]^{-1}$, что, разумеется, нереально. С другой стороны, если N взять небольшим, например, $N \sim 10$, то вполне реально появление такого момента, когда все молекулы окажутся в половине ящика. Подобный эксперимент может быть осуществлен с помощью ЭВМ.

Важное следствие инвариантности меры — возможность усреднения по времени. Имеет место одна из основных теорем эргодической теории:

Теорема 2.2. (эргодическая теорема Биркгофа (G. Birkhoff)—Хинчина, см [24]). Пусть $f \in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$. Тогда для почти всех $x \in M$ существуют пределы:

1) в случае эндоморфизма T

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \overset{\text{def}}{=} \bar{f}(x);$$

2) в случае автоморфизма T

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{-k}x)\overset{\text{def}}{=}\bar{f}(x);$$

3) в случае потока $\{T^t\}$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T^t x)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T^{-t}x)\,dt\overset{\text{def}}{=}\bar{f}(x);$$

4) в случае полупотока $\{T^t\}$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T^t x)\,dt\overset{\text{def}}{=}\bar{f}(x).$$

При этом $\bar{f}\in L^1(M, \mathscr{M}, \mu)$ и $\int\limits_M \bar{f}d\mu=\int\limits_M fd\mu$. Функция $\bar{f}$ инвариантна, т. е. $\bar{f}(T^n x)=\bar{f}(x)$ при $n\geqslant 0$ в случае эндоморфизма и при $-\infty<n<\infty$ в случае автоморфизма; $\bar{f}(T^t x)=\bar{f}(x)$ при всех t, $-\infty<t<\infty$, в случае потока и при $t\geqslant 0$ в случае полупотока.

Посмотрим, что означает теорема Биркгофа—Хинчина для $f=\chi_C$, где χ_C—индикатор множества $C\in\mathscr{M}$. В этом случае $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$ есть частота попаданий траектории точки x в множество C. Мы видим, что с вероятностью 1 существует предел такой частоты при $n\to\infty$. Таким образом, эргодическая теорема Биркгофа—Хинчина есть утверждение типа усиленного закона больших чисел теории вероятностей.

Теореме Биркгофа—Хинчина предшествовало доказанное Нейманом (J. von Neumann) аналогичное утверждение, также касающееся сходимости (для функций $f\in L^2(M, \mathscr{M}, \mu)$) средних $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$, или $\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(T^t x)\,dt$, но не почти всюду, а в метрике пространства L^2. Это утверждение является следствием общей теоремы об изометрических операторах и группах (полугруппах) изометрических операторов в гильбертовом пространстве. Мы приведем ее формулировку для случая одного оператора.

Теорема 2.3 (эргодическая теорема Неймана, см. [24]). Пусть U—изометрический оператор в комплексном гильбертовом пространстве H; H_U—подпространство инвариантных относительно U векторов $f\in H$, т. е. $H_U=\{f\in H\colon\ Uf=f\}$; P_U—оператор ортогонального проектирования на H_U. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f-P_U f\right\|_H=0 \text{ для любого } f\in H.$$

Сходимость в $L^2=H$ средних $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$ для эндоморфизма $T:(M, \mathcal{M}, \mu)\to(M, \mathcal{M}, \mu)$ непосредственно вытекает из теоремы 2.3, примененной к оператору U, заданному формулой $U(f(x))=f(Tx)$, $f\in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$. Изометричность U является следствием инвариантности меры μ относительно T.

Существуют многочисленные обобщения эргодических теорем Неймана и Биркгофа—Хинчина — например, на измеримые преобразования без инвариантной меры или с бесконечной инвариантной мерой, на общие группы преобразований, на функции со значениями в банаховых пространствах и т. п. Мы не будем сейчас останавливаться на этих результатах (см. § 3 гл. 4, а также [87]). Отметим, что в простейшем случае (для одного преобразования с конечной инвариантной мерой, потока или полупотока, а также для функций из $L_2(M, \mathcal{M}, \mu)$), как правило, эти обобщения дают то же, что и сами теоремы Биркгофа—Хинчина или Неймана.

Имеется, однако, полученный сравнительно недавно глубокий результат, который и в указанном простейшем случае дает важную дополнительную информацию.

Пусть T — автоморфизм или эндоморфизм пространства с мерой $(M, \mathcal{M}, \mu)$, а $f\in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$. В теореме Биркгофа—Хинчина речь идет о сходимости почти всюду последовательностей функций

$$\frac{1}{n} g_n(x)=\frac{1}{n} g_n(x; f)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x).$$

Последовательности $\{g_n(x)\}$ можно охарактеризовать «внутренним» образом при помощи соотношения

$$g_{m+n}(x)=g_m(x)+g_n(T^m x), \quad x\in M, \quad m, n\in Z_+^1. \tag{1.5}$$

Действительно, при любой функции f набор $\{g_n(x; f)\}$ этому соотношению удовлетворяет, а с другой стороны, если оно выполнено, то $g_n(x)$ имеет вид $g_n(x; f)$, где $f=g_1(x)$. Рассмотрим теперь последовательность $\{g_n(x)\}$ вещественных измеримых функций на M, которые удовлетворяют вместо (1.5) лишь неравенству

$$g_{m+n}(x)\leqslant g_m(x)+g_n(T^m x) \tag{1.6}$$

для почти всех $x\in M$. Оказывается, уже этого достаточно для существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} g_n(x)$.

Теорема 2.4 (субаддитивная эргодическая теорема, Кингман (J. F. C. Kingman) [86]). Пусть T — эндоморфизм пространства с мерой $(M, \mathcal{M}, \mu)$, а $\{g_n(x)\}$, $n=1, 2, \ldots$, — последовательность измеримых функций, $g_n: M\to \mathbb{R}^1\cup\{-\infty\}$, $g_1^+\in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$¹⁾,

---

¹⁾ Для любой функции $f(x)$ мы полагаем $f^+(x)=\max(0, f(x))$.

удовлетворяющая (1.6). Тогда существует инвариантная относительно T функция $\bar{g}:M\to\mathbf{R}^1\cup\{-\infty\}$, $\bar{g}^+\in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}g_n(x)=\bar{g}(x)$ для почти всех $x\in M$, причем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_M g_n d\mu=\inf\limits_n\frac{1}{n}\int\limits_M g_n d\mu=\int\limits_M \bar{g}d\mu$.

Непосредственным следствием этой теоремы служит

Теорема 2.5 (теорема Фюрстенберга—Кестена (H. Kesten) о произведении случайных матриц [72]). Пусть T — эндоморфизм пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$, на котором задана измеримая функция $G(x)$ со значениями в пространстве квадратных матриц порядка m $(m\geqslant 1)$. Положим

$$G_x^{(n)}=G(x)\cdot G(Tx)\cdot\ldots\cdot G(T^{n-1}x).$$

Если $\ln^+\|G(\cdot)\|\in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$, то для почти всех $x\in M$ существует предел

$$\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\|G_x^{(n)}\|,$$

причем $\lambda\in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$ и инвариантна относительно T, а

$$\int\limits_M \lambda d\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_M \ln\|G_x^{(n)}\|d\mu=\inf_n\frac{1}{n}\int\limits_M \ln\|G_x^{(n)}\|d\mu.$$

Усилением теоремы Фюрстенберга—Кестена является следующее утверждение, которое, в свою очередь, есть частный случай приводимой ниже мультипликативной эргодической теоремы.

Теорема 2.6 (В. И. Оселедец [33]). Пусть T — эндоморфизм пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$, $G(x)$ — измеримая функция на M со значениями в пространстве квадратных матриц порядка m $(m\geqslant 1)$, $G_x^{(n)}\overset{\text{def}}{=}G(x)\cdot\ldots\cdot G(T^{n-1}x)$. Предположим, что $\ln^+\|G(\cdot)\|\in$ $\in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$. Тогда

1) существует инвариантное множество $\Gamma\in\mathcal{M}$, $\mu(\Gamma)=1$, такое, что при всех $x\in\Gamma$ существует предел $\Lambda_x=\lim\limits_{n\to\infty}[(G_x^{(n)})^*G_x^{(n)}]^{1/2n}$ (Λ_x — симметрическая неотрицательно определенная квадратная матрица порядка m, берется положительно-определенный корень, $*$ — переход к сопряженной матрице);

2) если $\exp\lambda_x^{(1)}<\exp\lambda_x^{(2)}<\ldots<\exp\lambda_x^{(s)}$ $(x\in\Gamma)$ — упорядоченный набор различных собственных значений матрицы Λ_x (здесь $s=s(x)\leqslant m$, а $\lambda_x^{(1)}$ может, вообще говоря, равняться $-\infty$); $E_x^{(1)}, E_x^{(2)},\ldots,E_x^{(s)}$ — соответствующий набор собственных подпространств, а $m_x^{(r)}\overset{\text{def}}{=}\dim E_x^{(r)}$, $1\leqslant r\leqslant s$, то функции $x\mapsto s(x)$, $x\mapsto\lambda_x^{(r)}$, $x\mapsto m_x^{(r)}$ $(1\leqslant r\leqslant s)$ измеримы и инвариантны относительно T;

3) если $x \in \Gamma$, то для любого вектора $u \in \mathbf{R}^m$, $u \neq 0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \| G_x^{(n)} u \|,$$

равный одному из чисел $\lambda_x^{(r)}$, $1 \leqslant r \leqslant s$, а число r, которое указывает, какому именно из этих чисел равняется предел, однозначно определяется из соотношений

$$u \in E_x^{(1)} \oplus E_x^{(2)} \oplus \ldots \oplus E_x^{(r)},$$

$$u \notin E_x^{(1)} \oplus E_x^{(2)} \oplus \ldots \oplus E_x^{(r-1)}.$$

Введем теперь некоторые важные понятия, необходимые для формулировки мультипликативной эргодической теоремы.

Определение 2.1. *Измеримым линейным расслоением* называется тройка (N, M, π), где N, M — измеримые пространства, $\pi: N \to M$ — измеримое отображение и существует изоморфизм ψ: $N \to M \times \mathbf{R}^m$ такой, что 1) ψ переводит разбиение N на множества $\pi^{-1}(x)$, $x \in M$, в разбиение $M \times \mathbf{R}^m$ на множества $\{x\} \times \mathbf{R}^m$; 2) отображение $\pi \circ \psi \circ \pi^{-1}$, где π_0: $M \times \mathbf{R}^m \to M$ — естественная проекция $(\pi_0(x, y) = x$ для $x \in M$, $y \in \mathbf{R}^m)$, является тождественным отображением M на себя. Иными словами, измеримое линейное расслоение есть образ прямого произведения $M \times \mathbf{R}^m$ при измеримом отображении. N называется пространством расслоения, M — базой, π — проекцией, $\pi^{-1}(x)$ — слоем над $x \in M$.

Отображение ψ вводит в каждом слое $\pi^{-1}(x)$ структуру нормированного векторного пространства. Примером измеримого линейного расслоения может служить произвольное непрерывное подрасслоение касательного расслоения к гладкому многообразию (в частности, само касательное расслоение).

Определение 2.2. *Характеристическим показателем* называется измеримая функция $\chi: N \to \mathbf{R}^1$, удовлетворяющая для любого $x \in M$ и любых v, v_1, $v_2 \in \pi^{-1}(x)$ условиям:

1) $-\infty < \chi(x, v) < \infty$ при $v \neq 0$, $\chi(x, 0) = -\infty$;
2) $\chi(x, av) = \chi(x, v)$, $a \in \mathbf{R}^1$, $a \neq 0$;
3) $\chi(x, v_1 + v_2) \leqslant \max\{\chi(x, v_1), \chi(x, v_2)\}$.

Можно показать, что ограничение χ на $\pi^{-1}(x)$ для любого $x \in M$ принимает не более m значений, отличных от $-\infty$. Обозначим эти значения в порядке возрастания через

$$\chi_1(x) < \chi_2(x) < \ldots < \chi_{s(x)}(x), \quad s(x) \leqslant m. \tag{1.7}$$

Обозначим $L_i(x) = \{v \in \pi^{-1}(x): \chi(x, v) \leqslant \chi_i(x)\}$. Подпространства $L_i(x)$ образуют фильтрацию $\pi^{-1}(x)$, т. е.

$$\{0\} = L_0(x) \subset L_1(x) \subset \ldots \subset L_{s(x)}(x) = \pi^{-1}(x). \tag{1.8}$$

Пусть $k_i(x) = \dim L_i(x)$, $k_0(x) = 0$. Целочисленные функции $s(x)$, $k_1(x), \ldots, k_{s(x)}(x)$ и семейства подпространств $L_i(x)$,

$i=1, \ldots, s(x)$, измеримо зависят от x. Обратно, пусть заданы целочисленная функция $s(x)\leqslant m$, измеримые функции $\chi_1(x), \ldots, \chi_{s(x)}(x)$, удовлетворяющие (1.7), и фильтрация (1.8), измеримо зависящая от x, причем $\dim L_i(x)=k_i(x)$. Тогда функция $\chi(x, v)$, определяемая равенством $\chi(x, v)=\chi_i(x)$ для $x\in M$, $v\in L_i(x)\setminus L_{i-1}(x)$, измерима и задает характеристический показатель в N.

Пусть T — эндоморфизм M, сохраняющий нормированную меру μ.

Определение 2.3. Измеримым мультипликативным коциклом относительно T называется измеримая функция $a(n, x)$, $x\in M$, со значениями в пространстве квадратных матриц порядка $m\geqslant 1$, удовлетворяющая условию $a(n+k, x)=a(n, T^k x)\cdot a(k, x)$ (более общее определение коцикла приведено в § 4).

Примером измеримого мультипликативного коцикла служит функция $a(n, x)=G(x)\cdot \ldots \cdot G(T^{n-1}x)$, где $G(x)$ — измеримая функция на M со значениями в пространстве квадратных матриц порядка m.

Пусть $a(n, x)$ — измеримый мультипликативный коцикл относительно T. Рассмотрим функцию

$$\chi^+(x, v)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln\| a(n, x)v\|, \quad x\in M, \quad v\in\pi^{-1}(x). \tag{1.9}$$

Можно показать, что функция χ^+ измерима и удовлетворяет условиям определения 2.2. Тем самым она определяет некоторый характеристический показатель, называемый *характеристическим показателем Ляпунова*, отвечающим эндоморифзму T и коциклу $a(n, x)$. Нетрудно показать, что функции $s(x)$, $\chi_i(x)$, $k_i(x)$ и подпространства $L_i(x)$, связанные с показателем χ^+, инвариантны относительно T.

Пусть $x\in M$. Рассмотрим фильтрацию (1.8) в точке x. Нормированный базис $\bar{e}(x)=\{e_i(x)\}$ пространства $\pi^{-1}(x)$ называется нормальным, если первые $k_1(x)$ векторов лежат в $L_1(x)$, следующие $k_2(x)-k_1(x)$ векторов лежат в $L_2(x)\setminus L_1(x)$ и т. д. Если $\{e_i(x)\}$ — нормальный базис в точке x, то векторы $e_i^{(n)}(x)=a(n, x)e_i(x)/\|a(n, x)e_i(x)\|$ образуют нормальный базис $\bar{e}^{(n)}(x)$ пространства $\pi^{-1}(T^n x)$.

Определение 2.4. Точка $x\in M$ называется правильной вперед, если для некоторого нормального базиса $\bar{e}(x)=\{e_i(x)\}$

$$\sum_{i=1}^{m}\chi^+(x, e_i(x))=\underline{\lim}_{n\to\infty}\ln|\det a(n, x)|.$$

Другие эквивалентные определения правильности вперед см. в [7], [33].

Если в правой части (1.9) вместо верхнего предела при $n\to+\infty$ рассматривать верхний предел при $n\to-\infty$, то мы получим характеристический показатель χ^- на N. Точка x называется правильной назад, если она является правильной вперед для показателя χ^-.

Понятия правильности вперед и правильности назад являются классическими и восходят к Ляпунову и Перрону (O. Perron), изучавшим устойчивость решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (при этом, как обычно, рассматриваются лишь односторонние решения при $t>0$ или при $t<0$). Исследование устойчивости решений уравнений в вариациях вдоль двусторонних траекторий обратимых динамических систем приводит к рассмотрению точек, которые не только являются правильными как вперед, так и назад, но в которых также значения характеристических показателей χ^+ и χ^-, а также связанные с ними фильтрации согласованы между собой. Последнее означает, что найдутся такие подпространства $E_i(x)$, $1\leqslant i\leqslant s(x)$, что

а) $L_i^+(x)=\overset{k_i(x)}{\underset{j=1}{\oplus}} E_j(x)$, $L_i^-(x)=\overset{s(x)}{\underset{j=k_i(x)+1}{\oplus}} E_j(x)$, где $\{L_i^+(x)\}$ и $\{L_i^-(x)\}$ — фильтрации, связанные с показателями χ^+ и χ^- соответственно;

б) $\lim\limits_{n\to\pm\infty}\frac{1}{|n|}\ln\|a(n, x)\|=\pm\chi_j(x)$ равномерно по $v\in E_j(x)$;

в) $\chi^-(\Gamma_j(x))=\chi^+(\Gamma_j(x))=(k_j(x)-k_{j-1}(x))\chi_j(x)$, где $\Gamma_j(x)$ — объем параллелепипеда в пространстве $E_j(x)$, а

$$\chi^\pm(\Gamma_j(x))\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{|n|}\ln|\Gamma_j(T^nx)|.$$

Точки, являющиеся правильными вперед и назад и удовлетворяющие условиям а), б), в), называются правильными по Ляпунову, или π-регулярными (см. [29]).

Можно показать, что если x — правильная по Ляпунову точка, то для всякого n точка T^nx также является правильной по Ляпунову (поэтому вместо правильных по Ляпунову точек часто говорят о правильных по Ляпунову траекториях), а подпространства $E_i(T^nx)$ в точке T^nx связаны с $E_i(x)$ соотношениями $E_i(T^nx)=a(n, x)E_i(x)$.

Обозначим соответственно через M^+, M^-, M_0 множества правильных вперед, правильных назад и правильных по Ляпунову точек в M. Эти множества инвариантны относительно T и, как следует из теоремы 2.6, $\mu(M^+)=\mu(M^-)=1$. Кроме того, $M_0\subset M^+\cap M^-$, причем, вообще говоря, имеет место строгое включение. Тем не менее можно показать, что множество M_0 также имеет полную меру. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.7 (мультипликативная эргодическая теорема, В. И. Оселедец [33], в несколько иной формулировке — В. М. Миллионщиков [30]). Пусть $a(n, x)$ — измеримый мультипликативный коцикл на измеримом расслоении (N, M, π). Предположим, что $\int\limits_M \ln\|a(1, x)\| d\mu < \infty$ (такой коцикл называется ляпуновским). Тогда μ-почти каждая точка $x \in M$ является правильной по Ляпунову.

Отметим, что в то время, как теорема о типичности правильности вперед или назад является простым следствием субаддитивной эргодической теоремы, доказательство типичности правильности по Ляпунову требует дополнительных специальных соображений.

§ 3. Эргодичность. Разложение на эргодические компоненты. Различные типы перемешивания

Эргодическая теорема Биркгофа—Хинчина (т. Б.—Х.) показывает, что из одного лишь существования инвариантной меры вытекает возможность усреднения вдоль траекторий почти всюду. Обозначим для $f \in L^1(M, \mathcal{M}, \mu)$ через $\bar{f}$ временнóе среднее, фигурирующее в т. Б.—Х.

Пусть T — эндоморфизм пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$.

Определение 3.1. Множество $A \in \mathcal{M}$ называется *инвариантным* $\operatorname{mod} 0$ относительно T, если $\mu(A \Delta T^{-1}A) = 0$[1].

Если A инвариантно $\operatorname{mod} 0$ относительно T, то A инвариантно $\operatorname{mod} 0$ относительно всех T^n.

Пусть $\{T^t\}$ — поток или полупоток.

Определение 3.2. Множество $A \in \mathcal{M}$ называется инвариантным $\operatorname{mod} 0$ относительно $\{T^t\}$, если $\mu(A \Delta T^t A) = 0$ для любого t.

Инвариантные $\operatorname{mod} 0$ множества образуют σ-алгебру инвариантных $\operatorname{mod} 0$ множеств $\mathcal{M}^{\text{inv}}$. Функция $\bar{f}$ в т. Б.—Х. есть условное математическое ожидание f относительно $\mathcal{M}^{\text{inv}}$. Следующее определение является одним из основных в эргодической теории.

Определение 3.3. Динамическая система называется *эргодической* (относительно меры μ), если $\mathcal{M}^{\text{inv}} = \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — тривиальная σ-алгебра, состоящая из множеств меры 1 или 0.

Во многих разделах математики для изучения встречающихся объектов выделяют неразложимые, или элементарные, объекты (простые числа в теории чисел, неприводимые представления, крайние точки выпуклых множеств и т. д.). Эргодические системы играют именно роль таких неразложимых объектов. В этом случае $\bar{f} = \int\limits_M f d\mu$, и утверждение эргодической теоремы совпадает с утверждением усиленного закона больших чисел. Пусть T — эргодический автоморфизм, $f = \chi_C$ — индикатор множества

---

[1] $A \Delta B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

$C\in\mathcal{M}$. Тогда $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$ есть доля попаданий траектории точки x в C за время n и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)=\mu(C)$. Поэтому в эргодическом случае т. Б.—Х. кратко формулируют так: среднее по времени равно среднему по пространству почти всюду.

Если T — строго эргодический гомеоморфизм компактного метрического пространства M с инвариантной нормированной борелевской мерой μ, то T, рассматриваемый как автоморфизм пространства (M, μ), эргодичен. Для него, согласно теореме 1.2, сходимость в т. Б.—Х. выполняется всюду на M, а не только почти всюду.

Имеется следующий результат о строго эргодической реализации автоморфизмов, полученный при некоторых ограничениях Джуиттом, а в общем случае — Кригером.

Теорема 3.1 (Кригер (W. Krieger) [89], Джуитт (R. Jewett) [76]). Для любого эргодического автоморфизма T пространства Лебега M существует строго эргодический гомеоморфизм T_1 некоторого компактного метрического пространства M_1, который, как автоморфизм M_1 со своей инвариантной мерой, метрически изоморфен T.

Для произвольной, не обязательно эргодической, динамической системы $\{T^t\}$ на пространстве Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$ введем измеримую оболочку ξ разбиения ζ на отдельные траектории $\{T^t\}$, т. е. самое мелкое из тех измеримых разбиений, элементы которых состоят из целых траекторий $\{T^t\}$. Пусть $\{\mu_C : C\in\xi\}$ — каноническая система мер для ξ.

Теорема 3.2 (о разложении на эргодические компоненты, [98], [37]). Для почти всех $C\in\xi$ динамическая система $\{T^t\}$ индуцирует на (C, μ_C) динамическую систему T_C, эргодическую относительно μ_C.

Элементы разбиения ξ называются иногда *эргодическими компонентами.*

Примеры.

1. Пусть M есть m-мерный тор с мерой Хаара, T — групповой сдвиг. В аддитивной записи $Tx=(x_1+\alpha_1, \ldots, x_m+\alpha_m)$ для $x=(x_1, \ldots, x_m)$, где сложение понимается по модулю 1. Тогда T эргодичен, если числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ линейно независимы над полем рациональных чисел.

2. Более общим образом, M есть коммутативная компактная группа, μ — мера Хаара на M, T — групповой сдвиг, т. е. $Tx=x+g$, $g\in M$. Через χ_n обозначим характеры группы $G(n=0, 1, 2, \ldots; \chi_0\equiv 1)$. Тогда T эргодичен, если $\chi_n(g)\neq 1$ ни при каком $n\neq 0$. При этом же условии T строго эргодичен и минимален.

3. По-прежнему, M есть m-мерный тор с мерой Хаара, $\{T^t\}$ — однопараметрическая группа сдвигов, т. е. $T^t x = (x_1 + \alpha_1 t, \ldots \ldots, x_m + \alpha_m t)$. Иногда такой поток называется условно-периодическим, или *условно-периодической обмоткой тора.* Поток $\{T^t\}$ эргодичен, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ линейно независимы над полем рациональных чисел.

4. Интегрируемые системы классической механики. Гамильтонова система в $2m$-мерном фазовом пространстве называется *интегрируемой* (см. [3]), если она имеет m первых интегралов в инволюции. Теорема Лиувилля утверждает, что если траектории системы лежат в ограниченной части пространства, то локально можно ввести m первых интегралов $I_1, \ldots, I_m$ таких, что m-мерное подмногообразие $I_1 = \mathrm{const}, \ldots, I_m = \mathrm{const}$, является m-мерным тором, на котором движение заменой переменных сводится к условно-периодическому. С точки зрения эргодической теории теорема Лиувилля означает, что гамильтонова система не эргодична, и ее эргодическими компонентами служат m-мерные торы с условно-периодическими обмотками. В частности, геодезические потоки на поверхностях вращения, имеющие дополнительный первый интеграл Клеро, не эргодичны, и их эргодическими компонентами служат двумерные торы. То же самое относится к геодезическому потоку на эллипсоиде, что вытекает из результатов Якоби.

5. Групповой автоморфизм. Пусть M — коммутативная компактная группа, μ — нормированная мера Хаара, T — групповой автоморфизм группы M. Через T^* обозначим сопряженный автоморфизм, действующий в группе характеров M^* группы M по формуле $(T^*\chi)(x) = \chi(Tx)$. T эргодичен тогда и только тогда, когда из равенства $(T^*)^n \chi = \chi$ при $n \neq 0$ вытекает, что χ — тривиальный характер. В частности, если M — m-мерный тор и T задается целочисленной матрицей $\|a_{ij}\|$, то приведенное условие означает, что среди собственных значений $\|a_{ij}\|$ нет корней из единицы.

6. Пусть M есть пространство последовательностей $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$, где все x_n — элементы некоторого множества X, T — сдвиг, μ — мера, инвариантная относительно сдвига. Через $\mathscr{A}^{(k)}$, $-\infty < k < \infty$, обозначим σ-алгебру, порожденную случайными величинами x_i, $-\infty < i \leqslant k$. Легко показать, что $\mathscr{M}^{\mathrm{inv}} \subseteq \bigcap_k \mathscr{A}^{(k)}$. Случайный процесс $(M, \mathscr{M}, \mu)$ удовлетворяет закону 0—1 Колмогорова, если $\bigcap_k \mathscr{A}^{(k)} = \mathscr{N}$, где $\mathscr{N}$ (как и ранее) — тривиальная σ-алгебра, состоящая из множеств меры 1 или 0. Мы видим, что для всякого такого процесса сдвиг T эргодичен. В частности, любой сдвиг Бернулли эргодичен.

Если T — эргодический автоморфизм, то для любой пары функций f, $g \in L^2(M, \mathscr{M}, \mu)$ из т. Б.—Х. почти всюду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_M f(T^k x)\,g(x)\,d\mu=\int_M f\,d\mu\cdot\int_M g\,d\mu.$$

Статистические свойства общих эргодических систем весьма слабые. Существует несколько усилений эргодичности, которые, ради простоты, мы сформулируем только для автоморфизмов.

Определение 3.4. Автоморфизм T называется *слабо перемешивающим*, если для любых $f, g \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_M f(T^k x)\,g(x)\,d\mu-\int_M f\,d\mu\cdot\int_M g\,d\mu\right]^2=0.$$

Определение 3.5. Автоморфизм T называется *перемешивающим*, если для любых $f, g \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_M f(T^n x)\,g(x)\,d\mu=\int_M f\,d\mu\cdot\int_M g\,d\mu.$$

Определение 3.6. Автоморфизм T называется перемешивающим кратности $r \geqslant 1$, если для любых $f_1, \ldots, f_r$, $g \in L^{r+1}(M, \mathcal{M}, \mu)$

$$\lim_{n_1\to\infty,\ldots,n_r\to\infty}\int_M f_1(T^{n_1}x)\,f_2(T^{n_1+n_2}x)\ldots f_r\left(T^{n_1+\ldots+n_r}x\right)g(x)\,d\mu=$$

$$=\prod_{i=1}^{r}\int_M f_i\,d\mu\cdot\int_M g\,d\mu.$$

Определение 3.7. Автоморфизм T называется *K-автоморфизмом* (автоморфизмом Колмогорова), если для произвольных измеримых множеств $A_0, A_1, \ldots, A_r$, $1 \leqslant r < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\sup|\mu(A_0 \cap B^{(n)})-\mu(A_0)\,\mu(B^{(n)})|=0,$$

где верхняя грань берется по множествам $B^{(n)}$ из σ-алгебры, порожденной множествами вида $T^k A_i$, $k \geqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Поток $\{T^t\}$ называется *K-потоком*, если хотя бы один из входящих в него автоморфизмов является K-автоморфизмом.

Всякий слабо перемешивающий автоморфизм эргодичен. Всякий перемешивающий автоморфизм является и слабо перемешивающим. Пусть μ_0 — мера на $\mathcal{M}$, абсолютно непрерывная относительно μ, и $\frac{d\mu_0}{d\mu}=f_0(x)$. С физической точки зрения, μ_0 естественно назвать неравновесным распределением. Через μ_n обозначим меру, для которой $\mu_n(C)=\mu_0(T^{-n}C)$, $C \in \mathcal{M}$. Тогда

$$\mu_n(C)=\int_{T^{-n}C} f_0(x)\,d\mu=\int_C f_0(T^n x)\,d\mu.$$

Иными словами, μ_n абсолютно непрерывна относительно μ и $\frac{d\mu_n}{d\mu} = f_0(T^n x)$. В случае перемешивания меры μ_n сходятся к μ в следующем смысле: для любой $g \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ $\int g\,d\mu_n \to \int g\,d\mu$. Иными словами, всякое неравновесное распределение под действием динамики сходится к пределу μ, который поэтому естественно назвать равновесным.

K-системы являются перемешивающими любой кратности $r \geqslant 1$. Они играют важную роль в энтропийной теории динамических систем (см. гл. 3). Определение K-автоморфизма можно сформулировать несколько иначе. А именно, пусть $\mathcal{A}_0$ есть σ-алгебра, порожденная множествами A_i, $0 \leqslant i \leqslant r$, и $\mathcal{A}_k = T^k \mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_l^\infty$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая все $\mathcal{A}_k$, $k \geqslant l$. Автоморфизм T является K-автоморфизмом тогда и только тогда, когда $\bigcap_l \mathcal{A}_l^\infty = \mathcal{N}$ для любой начальной $\mathcal{A}_0$. Если $\{T^t\}$ — поток и хотя бы один T^{t_0} является K-автоморфизмом, то и все T^t являются K-автоморфизмами (см. гл. 3).

Неизвестно, вытекает ли перемешивание кратности $r > 1$ из обычного перемешивания (кратности $r = 1$). Имеется принадлежащий Фюрстенбергу глубокий результат о связи между слабым перемешиванием и некоторым, довольно специальным, свойством типа кратного слабого перемешивания (формальное определение кратного слабого перемешивания можно было бы дать по аналогии с определением 3.6).

Теорема 3.3 (Фюрстенберг, см. [71]). Пусть T — слабо перемешивающий автоморфизм пространства Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$ и $r \geqslant 1$ — целое. Для любых $f_0, f_1, \ldots, f_r \in L^\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\int_M \prod_{l=0}^{r} T^{kl} f_l \, d\mu - \prod_{l=0}^{r} \int_M f_l \, d\mu \right]^2 = 0.$$

Сформулированная теорема имеет очень интересное приложение к теории чисел. Приведем сначала относящийся к произвольным автоморфизмам факт, в основе которого лежит теорема 3.3.

Теорема 3.4 (Фюрстенберг, см. [71]). Пусть T — автоморфизм пространства Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Для любого множества $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) > 0$, и любого натурального r найдется такое натуральное k, что

$$\mu\left(\bigcap_{l=0}^{r} T^{-lk} A \right) > 0.$$

Это утверждение называют эргодической теоремой Фюрстенберга. В случае слабо перемешивающего T оно вытекает из теоремы 3.3, примененной к $f_0 = f_1 = \ldots = f_r = \chi_A$. Кроме того, его несложно доказать для автоморфизмов специального вида — эргодических групповых сдвигов на коммутативных компактных группах (см. пример 2). В общем случае сначала с помощью разложения на эргодические компоненты дело сводится к эргодическим автоморфизмам, а для них проводится редукция к двум уже рассмотренным частным случаям.

Почти непосредственным следствием эргодической теоремы Фюрстенберга является следующий замечательный результат, первоначально полученный без использования эргодической теории.

Теорема 3.5 (Семереди (E. Szemeredi), см. [71]). Пусть $\Lambda\subset Z^1$ — подмножество множества целых чисел, имеющее положительную верхнюю плотность[1]. Тогда для любого натурального r найдется арифметическая прогрессия длины r, содержащаяся в Λ.

Для вывода теоремы Семереди из теоремы 3.4 достаточно ее применить к автоморфизму T, являющемуся ограничением преобразования сдвига в пространстве X последовательностей $x=\{x_i\}$, $x_i=0$ или 1, на множество M — замыкание траектории точки $x^{(\Lambda)}$ с координатами $x_i^{(\Lambda)}=1$, если $i\in\Lambda$, $x_i^{(\Lambda)}=0$, если $i\notin\Lambda$ $\left(\text{замыкание берется в тихоновской топологии на } X=\prod_{-\infty}^{\infty}\{0;\ 1\}\right)$. Инвариантная мера μ для T выбирается так, чтобы $\mu(\{x\in M: x_0=1\})>0$. Существование такой меры гарантируется положительностью верхней плотности Λ.

§ 4. Общие конструкции

В этом параграфе описываются общие конструкции эргодической теории, позволяющие с помощью имеющихся динамических систем получать новые системы.

4.1. Прямое произведение динамических систем. Для простоты ограничимся случаем автоморфизмов. Пусть даны автоморфизмы T_1, T_2, действующие в пространствах $(M_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ и $(M_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ соответственно. Автоморфизм T, действующий в прямом произведении $M=M_1\times M_2$ по формуле $Tx=(T_1x_1,\ T_2x_2)$ для $x=(x_1, x_2)$, называется прямым произведением $T_1\times T_2$ автоморфизмов T_1, T_2. Аналогично определяется прямое произведение нескольких автоморфизмов.

Теорема 4.1. 1) Если T_1 эргодичен, а T_2 слабо перемешивает, то $T_1\times T_2$ эргодичен.

2) Если T_1, T_2 слабо перемешивают, то $T_1\times T_2$ слабо перемешивает.

---

[1] Верхняя плотность $\bar\rho(\Lambda)$ понимается здесь в следующем смысле: $\bar\rho(\Lambda)=\varlimsup\limits_{n-m\to\infty}\operatorname{card}(\Lambda\cap[m,\ n])$.

3) Если T_1, T_2 перемешивают, то $T_1 \times T_2$ перемешивает.

4) Если T_1, T_2 — K-автоморфизмы, то $T_1 \times T_2$ также K-автоморфизм.

Прямое произведение двух эргодических автоморфизмов может не быть эргодическим. Пример: $M_1 = M_2$ есть окружность с мерой Хаара, $T_1 = T_2$ есть групповой сдвиг. В этом случае $T_1 \times T_2$ не эргодичен.

Определение прямого произведения эндоморфизмов и потоков делается совершенно аналогично. Теорема 4.1 для потоков сохраняется без изменений.

4.2. Косое произведение динамических систем. Пусть $(M, \mathscr{M}, \mu)$ есть прямое произведение пространств с мерой $(M_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ и $(M_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$. Рассмотрим автоморфизм T_1 пространства M_1 и измеримое семейство автоморфизмов $\{T_2(x_1)\}$ пространства M_2, измеримым образом зависящее от $x_1 \in M_1$. Последнее означает, что для любой измеримой функции $f(x_1, x_2)$ функции $f_n(x_1, x_2) = f(T_1^n x_1, T_2^n(x_1)x_2)$ также измеримы. Введем преобразование T, действующее по формуле $T(x_1, x_2) = (T_1, x_1, T_2(x_1)x_2)$. Нетрудно проверить, что T сохраняет меру μ. Автоморфизм T называется косым произведением автоморфизма T_1 и семейства $\{T_2(x_1)\}$.

Примеры. 1. M_2 — коммутативная компактная группа, μ_2 — мера Хаара на M_2, а семейство $\{T_2(x_1)\}$ состоит из групповых сдвигов, т. е. $T_2(x_1)x_2 = x_2 + \varphi(x_1)$, где φ есть измеримое отображение M_1 в M_2. Иногда $T = T_1 \times \{T_2(x_1)\}$ называют групповым расширением T_1. В этом случае нетрудно сформулировать критерий эргодичности: автоморфизм T эргодичен тогда и только тогда, когда

1) T_1 эргодичен;

2) для любого нетривиального характера χ группы M_2 уравнение $c(x_1) = c(T_1 x_1) \cdot \chi(\varphi(x_1))$ имеет только тривиальное решение $c \equiv 0$.

В частности, если $M_1 = M_2 = S^1$, $T_1 x_1 = x_1 + \alpha$, $\alpha \in S^1$, то косое произведение (косой сдвиг) $T(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha, x_2 + \varphi(x_1))$ называется косым сдвигом на торе.

Итерируя эту конструкцию, можно получать сложные косые сдвиги на m-мерном торе:

$$T(x_1, \ldots, x_m) = (x_1 + \alpha, x_2 + \varphi_1(x_1), x_3 + \varphi_2(x_1, x_2), \ldots$$
$$\ldots, x_m + \varphi_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1})).$$

Фюрстенберг доказал, что всякий сложный косой сдвиг, эргодический относительно меры Хаара, является строго эргодическим гомеоморфизмом ([70], см. также [24]).

2. T_1 есть автоморфизм Бернулли, действующий в пространстве M_1 бесконечных последовательностей $\{x_n^{(1)}\}_{-\infty}^{\infty}$ из нулей и единиц, $p(0) = p(1) = 1/2$, $M_2 = S^1$ с мерой Хаара. Выберем иррациональное $\alpha \in M_2$ и зададим семейство $\{T_2(x_1)\}$ в виде

$$T_2(x_1)\,x_2=\begin{cases}x_2, & \text{если } x_0^{(1)}=0,\\ x_2+\alpha, & \text{если } x_0^{(1)}=1,\end{cases}$$

где $x_1=\{x_n^{(1)}\}_{-\infty}^{\infty}$, а $x_2 \in M_2$.

Соответствующее косое произведение является K-автоморфизмом.

В теории косых произведений естественно возникает понятие коцикла. Пусть T_1 — автоморфизм пространства $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, G — измеримая группа, т. е. множество, наделенное согласованными друг с другом структурами группы и измеримого пространства. *Коциклом* для T_1 со значениями в G называется измеримое отображение $\Phi: M_1 \times \mathbf{Z}^1 \to G$, удовлетворяющее соотношению: $\Phi(x_1, m+n)=\Phi(x_1, m)\cdot\Phi(T_1^m x_1, n)$. Коциклы Φ_1 и Φ_2 когомологичны, если найдется такое измеримое отображение ψ: $M_1 \to G$, что $\Phi_1(x_1, n)=[\psi(T_1^n x_1)]^{-1}\cdot\Phi_2(x_1, n)\cdot\psi(x_1)$.

Всякому косому произведению $T=T_1\times\{T_2(x_1)\}$ отвечает коцикл Φ со значениями в группе $\mathfrak{M}$ автоморфизмов пространства M_2:

$$\Phi(x, n)=T_2(x_1)\cdot T_2(T_1 x_1)\cdot\ldots\cdot T_2(T_1^{n-1}x_1).$$

Если два таких коцикла когомологичны, то отвечающие им косые произведения метрически изоморфны.

4.3. Факторсистемы. Снова ограничимся для краткости случаем автоморфизмов. Пусть автоморфизмы T и T_1 действуют в пространствах с мерой $(M, \mathcal{M}, \mu)$ и $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ соответственно. Допустим, что существует гомоморфизм $\varphi: M \to M_1$, перестановочный с действием T и T_1, т. е. $\varphi(Tx)=T_1\varphi(x)$. Тогда говорят, что T_1 есть факторавтоморфизм((*факторсистема*), системы T. Например, любой сомножитель прямого произведения автоморфизмов является факторавтоморфизмом прямого произведения.

Пусть T_1 есть факторавтоморфизм T, и гомоморфизм φ таков, что прообраз $\varphi^{-1}(x_1)$ почти каждой точки $x_1 \in M_1$ конечен и состоит из N точек. Если T эргодичен, то условная мера каждой из них, как условная мера на элементе разбиения, индуцированного отображением φ, равна N^{-1}. Тогда автоморфизм T можно представить как косое произведение над T_1, в котором M_2 есть пространство из N точек, а семейство $\{T_2(x_1)\}$ состоит из перестановок множества M_2. В общем случае, если T_1 — факторавтоморфизм эргодического автоморфизма T и $\varphi: M \to M_1$ — соответствующий гомоморфизм, то разбиение ξ пространства M на прообразы $\varphi^{-1}(x_1)$, $x_1 \in M_1$, измеримо. Ему отвечает каноническая система мер $\{\mu_C : C \in \xi\}$.

В силу эргодичности T, для почти всех C пространства Лебега (C, μ_C) изоморфны между собой и представляют из себя либо пространство M_2 с непрерывной мерой, либо пространство M_2 из $N<\infty$ точек. Автоморфизм T индуцирует автоморфизмы пространств (C, μ_C). Семейство этих автоморфизмов естественно отождествляется с измеримым семейством $\{T_2(x_1)\}$, а T представляется как косое произведение $T_1\times\{T_2(x_1)\}$.

4.4. Производные и интегральные автоморфизмы. Пусть T — автоморфизм пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$ и $E\in\mathcal{M}$, $\mu(E)>0$. Превратим E в пространство с нормированной мерой, положив $\mu_E(A)=\mu(A\cap E)\cdot[\mu(E)]^{-1}$, $A\in\mathcal{M}$. На E зададим функцию $k_E(x)=\min\{n\geqslant 1: T^n x\in E\}$, которая называется временем возвращения в E. Из теоремы Пуанкаре о возвращении следует, что k_E определена почти всюду. Для эргодических автоморфизмов верна формула Каца (М. Кас): $\int\limits_E k_E(x)\,d\mu_E=[\mu(E)]^{-1}$, означающая, что среднее время возвращения в множество E равно $[\mu(E)]^{-1}$. Введем преобразование T_E, заданное почти всюду на E и действующее по формуле $T_E x=T^{k_E(x)}x$. Легко проверить, что T_E является автоморфизмом пространства с мерой $(E, \mathcal{M}_E, \mu_E)$, где $\mathcal{M}_E$ состоит из множеств вида $A\cap E$, $A\in\mathcal{M}$.

Определение 4.1. Автоморфизм T_E называется *производным автоморфизмом*, построенным по автоморфизму T и множеству E.

Перейдем к «двойственной» конструкции. Пусть T_1 есть автоморфизм пространства $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ и $f\in L^1(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ — функция, принимающая целые неотрицательные значения, причем $\int f d\mu_1<\infty$. Введем новое пространство с мерой M, точками которого служат пары (x_1, i), $0\leqslant i<f(x_1)$, i — целое. Мера μ в M определяется равенством

$$\mu(A_i)=\mu(A)\cdot\left(\int fd\mu_1\right)^{-1},$$

где A_i — множество точек вида (x, i), $x\in A\in\mathcal{M}_1$. Преобразование пространства M, действующее по формуле

$$T(x, i)=\begin{cases}(x_1, i+1), \text{ если } i+1<f(x_1),\\ (T_1x_1, 0), \text{ если } i+1=f(x_1),\end{cases}$$

является автоморфизмом пространства M.

Определение 4.2. T называется *интегральным автоморфизмом*, построенным по автоморфизму T_1 и функции f.

Пространство M_1 естественно отождествляется с подмножеством точек $x\in M$ вида $(x_1, 0)$, а исходный автоморфизм T_1 есть производный от T, построенный по этому подмножеству.

Свойство эргодичности сохраняется при переходе к производному и интегральному автоморфизму. С различными видами перемешивания дело обстоит сложнее. В частности, у любого эргодического автоморфизма есть перемешивающий производный автоморфизм.

Пример. Пусть T есть автоморфизм Маркова, действующий в пространстве двусторонних последовательностей $x=\{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$. причем каждая координата $x_n\in Y$, где Y — конечное множество

Допустим, что T эргодичен и $E_y=\{x:x_0=y\}$, $y\in Y$. Тогда производный автоморфизм T_{E_y} будет автоморфизмом Бернулли. Переход от T к T_{E_y} лежит в основе широко распространенного в теории марковских процессов метода Деблина (W. Doeblin).

4.5. Специальные потоки и специальные представления потоков. Пусть T_1 есть автоморфизм пространства с мерой $(M_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ и $f\in L^1(M_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$, $f>0$. Рассмотрим новое пространство $M=M_1{}^f$, точками которого служат пары (x_1, s), где $x_1\in M_1$, $0\leqslant s<f(x_1)$. Мера μ на M определяется как ограничение на M меры $\mu_1\times\lambda$, где λ — мера Лебега на $\mathbf{R}^1$. Ее можно выбрать так, что μ будет нормированной. Введем поток $\{T^t\}$ на M, под действием которого точка (x_1, s) движется вертикально вверх с единичной скоростью до упора в график функции f, после чего мгновенно перескакивает в точку $(T_1x_1, 0)$ и продолжает свое движение вверх. Формально поток $\{T^t\}$ задается при $t>0$ формулой

$$T^t(x_1, s)=\left(T_1{}^n x_1, s+t-\sum_{k=0}^{n-1} f(T_1{}^k x_1)\right),$$

где n однозначно определяется из неравенства

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(T_1{}^k x_1)\leqslant s+t<\sum_{k=0}^{n} f(T_1{}^k x_1).$$

При $t<0$ его можно определить аналогично или с помощью соотношения $T^{-t}=(T^t)^{-1}$.

Определение 4.3. Поток $\{T^t\}$ называется *специальным потоком*, построенным по автоморфизму T_1 и функции f.

Теорема 4.2 (Амброз, Какутани (W. Ambrose, S. Kakutani), см. [50]). Всякий поток $\{T^t\}$ на пространстве Лебега, у которого множество неподвижных точек имеет меру 0, метрически изоморфен некоторому специальному потоку.

Иногда метрический изоморфизм в теореме 4.2 называют специальным представлением потока $\{T^t\}$. Идея специальных представлений восходит к Пуанкаре, который сводил изучение поведения решений систем дифференциальных уравнений к изучению итераций «отображения последования» трансверсальных площадок векторного поля.

Примеры специальных представлений. 1. Пусть на двумерном торе с циклическими координатами (u, v) задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt}=A(u, v), \quad \frac{dv}{dt}=B(u, v) \tag{1.10}$$

с правыми частями класса C^r, $r\geqslant 2$. Предположим, что однопараметрическая группа $\{T^t\}$ сдвигов вдоль решений этой системы имеет инвариантную меру μ, $d\mu=P(u, v)du dv$, $P(u, v)>0$, и $A^2+B^2>0$. Существует гладкая несамопересекающаяся кривая Γ, ни в одной точке не касающаяся векторного поля (1.10) и такая, что для любой точки $p\in\Gamma$ траектория, выпущенная из p, при некотором $t=f(p)$ снова пересечет Γ в точке $q=q(p)$. На кривой Γ — ее называют *кривой Зигеля* (C. Siegel) для $\{T^t\}$ — можно выбрать параметр так, что отображение $p\mapsto q$ запишется как поворот окружности на некоторый угол.

Поток $\{T^t\}$ тем самым получает представление как специальный поток над поворотом окружности с функцией f.

2. Пусть $Q\subset\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 2$, — компактная область с кусочно гладкой границей, M — единичное касательное расслоение над Q, $\{T^t\}$ — биллиард в Q (см. § 1). Через M_1 обозначим множество единичных касательных векторов таких, что их носители принадлежат ∂Q, а сами они направлены внутрь Q. Через T_1 обозначим преобразование $M_1\to M_1$, сопоставляющее каждому $x\in M_1$ точку $y\in M_1$ следующим образом: x движется по биллиардной траектории до достижения ∂Q, а затем отражается от ∂Q. Результат этого отражения и есть y. Инвариантная мера μ_1 для T_1 имеет вид $d\mu_1=d\sigma(q)\,d\omega_q\cdot|(n(q),x)|$, где $d\sigma$ — элемент объема ∂Q, $d\omega$ — элемент объема на S^{d-1}, $n(q)$ — единичный вектор нормали к ∂Q в точке $q\in\partial Q$. Если $f(x)$ — время до следующего отражения, то поток $\{T^t\}$ представим как специальный поток, построенный по T_1 и f.

Имеется целый ряд усилений теоремы 4.2. Приведем одно из них.

Теорема 4.3 (Рудольф (D. Rudolph) [104]). Пусть $\{T^t\}$ — эргодический поток на $(M, \mathcal{M}, \mu)$ и заданы три числа p, q, $\rho>0$, причем p/q иррационально. Существует специальное представление $\{T^t\}$, в котором f принимает лишь значения p, q, причем

$$\mu_1(\{x_1\in M_1: f(x_1)=p\})=\rho\cdot\mu_1(\{x_1\in M_1: f(x_1)=q\}).$$

Построить такое представление в конкретных случаях далеко не просто.

4.6. Естественные расширения эндоморфизмов. Пусть T_0 — эндоморфизм $(M_0, \mathcal{M}_0, \mu_0)$. Введем новое пространство M, точками которого служат бесконечные последовательности вида $x=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots)$, где $x_i^{(0)}\in M_0$ и $T_0x_{i+1}^{(0)}=x_i^{(0)}$ для всех $i>0$. Через $\mathcal{M}$ обозначим σ-алгебру, порожденную подмножествами M вида $A_{i,C}=\{x: x_i^{(0)}\in C\}$, где $i>0$, $C\in\mathcal{M}_0$. Зададим на $\mathcal{M}$ меру, положив $\mu(A_{i,C})=\mu_0(C)$, и определим преобразование T пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$ формулой $T(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots)=(T_0x_1^{(0)}, T_0x_2^{(0)}, T_0x_3^{(0)}, \ldots)$. Это преобразование обратимо, причем $T^{-1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots)=(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots)$ и T сохраняет меру μ.

Определение 4.4. Автоморфизм T называется *естественным расширением эндоморфизма* T_0.

Теорема 4.4. T эргодичен, слабо перемешивает, перемешивает тогда и только тогда, когда T_0 обладает аналогичным свойством.

Имея эндоморфизм T_0, мы можем построить убывающую последовательность σ-подалгебр $\mathcal{M}_k$, где $\mathcal{M}_k$ состоит из множеств вида $T_0^{-k}C$, $C\in\mathcal{M}_0$.

Определение 4.5. Эндоморфизм T_0 называется *точным*, если $\bigcap\limits_{k>0}\mathcal{M}_k=\mathcal{N}$.

Если T_0 — точный эндоморфизм, то его естественное расширение есть K-автоморфизм. Понятие точного эндоморфизма играет важную роль в теории одномерных отображений (см. ч. II, гл. 9).

Пример. Пусть M_0 — пространство односторонних последовательностей $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots)$, где каждое $x_i^{(0)}$ принимает значения 1 или 0, T_0 — сдвиг в M_0, μ_0 — инвариантная мера. Пространство M есть пространство двусторонних последовательностей $\{x_i^{(0)}\}$, $-\infty<i<\infty$, и для любого цилиндра $C\subset M$ $\mu(C)$ есть мера соответствующего цилиндра в M_0.

Глава 2

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай

§ 1. Группы унитарных и полугруппы изометрических операторов, сопряженные с динамическими системами

В различных приложениях теории динамических систем важную роль играют временны́е корреляционные функции и их преобразования Фурье. Пусть $\{T^t\}$ — поток на пространстве с мерой $(M, \mathcal{M}, \mu)$, $f\in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ — функция на фазовом пространстве. Временно́й корреляционной функцией, отвечающей f, называется функция времени $b_f(t)=\int\limits_M f(T^t x)f(x)\,d\mu$. Многие статистические свойства динамической системы $\{T^t\}$ характеризуются тем, как ведут себя при $t\to\infty$ разности $b_f(t)-\left(\int\limits_M f d\mu\right)^2$. В случае перемешивания они стремятся к 0. Если это стремление к нулю происходит настолько быстро, что при некоторой $\rho(\lambda)=\rho_f(\lambda)$

$$b_f(t)-\left(\int\limits_M f d\mu\right)^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(i\lambda t)\cdot\rho_f(\lambda)\,d\lambda,$$

то $\rho_f(\lambda)$ называется спектральной плотностью f. Множество тех λ, для которых $\rho_f(\lambda)$ существенно отлично от нуля для типичных f, характеризует как бы те частоты, которые играют определяющую роль в динамике системы. Иногда даже говорят, что динамическая система «шумит» на этом множестве. Возможность анализировать поведение функций $b_f(t)$ (или аналогичных функций $b_f(n)$, $n\in\mathbf{Z}^1$, в случае динамических систем с дискретным временем) имеет большое теоретическое и прикладное значение.

В этой главе приведены основные факты из спектральной теории динамических систем, изучающей свойства функций b_f.

Если $\{T^t\}$ (соответственно, $\{T^n\}$) — однопараметрическая (соответственно, циклическая) группа автоморфизмов или полугруппа эндоморфизмов, то она порождает сопряженную группу или полугруппу операторов в $L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$, действующую по формуле $U^tf(x)=f(T^tx)$ (соответственно, $U^nf(x)=f(T^nx)$), $f\in L^2$. Для автоморфизмов (эндоморифзмов) операторы U^t или U^n унитарные (изометрические). Если $\{T^t\}$ — поток и $L^2(M,\mathcal{M},\mu)$ сепарабельно, то группа $\{U^t\}$ непрерывна. Введенные выше функции $b_f(t)$ можно выразить через U^t:

$$b_f(t)=(U^tf,f)\quad (t\in\mathbf{R}^1 \text{ или } \mathbf{R}_+^1).$$

Аналогично в случае дискретного времени

$$b_f(n)=(U^nf,f)\quad (n\in\mathbf{Z}^1 \text{ или } \mathbf{Z}_+^1).$$

Определение 1.1. Две динамические системы, действующие в пространствах $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ и $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$, называются спектрально эквивалентными, если существует изоморфизм гильбертовых пространств $L^2(M_1,\mathcal{M}_1,\mu_1)$ и $L^2(M_2,\mathcal{M}_2,\mu_2)$, переводящий действие группы или полугруппы $\{U_1{}^t\}$ ($\{U_1{}^n\}$) в действие группы или полугруппы $\{U_2{}^t\}$ ($\{U_2{}^n\}$).

Если динамические системы метрически изоморфны, то они спектрально эквивалентны. Обратное, вообще говоря, неверно. Свойства динамической системы, которые можно выразить через спектральные свойства операторов $U^t(U^n)$, называются ее спектральными свойствами. Операторы $U^t(U^n)$ имеют всегда одномерное пространство собственных функций, постоянных почти всюду, которые отвечают собственному значению 1.

Теорема 1.1. 1) Динамическая система эргодична тогда и только тогда, когда пространство собственных функций с собственным значением 1 одномерно.

2) Динамическая система обладает слабым перемешиванием тогда и только тогда, когда всякая собственная функция сопряженной с ней группы унитарных операторов или полугруппы изометрических операторов есть константа.

3) Динамическая система обладает перемешиванием тогда и только тогда когда для любой $f\in L^2(M,\mathcal{M},\mu)$

$$\lim_{t\to\infty} b_f(t)=\left(\int f\,d\mu\right)^2$$

в случае непрерывного времени и

$$\lim_{n\to\infty} b_f(n) = \left(\int f d\mu\right)^2$$

в случае дискретного времени.

Таким образом, эргодичность, слабое перемешивание и перемешивание являются спектральными свойствами.

Дальше рассматриваются только автоморфизмы (циклические группы автоморфизмов) и потоки на пространстве Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$, а также сопряженные с ними группы унитарных операторов. Напомним основные результаты из теории унитарной эквивалентности групп унитарных операторов.

1. Случай автоморфизмов. Существует такая конечная борелевская мера σ на окружности S^1, что для любой $f \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ функция $b_f(n)$ представима в виде

$$b_f(n) = \int_0^1 \exp(2\pi i \lambda n) \cdot p_f(\lambda)\, d\sigma(\lambda), \tag{2.1}$$

причем найдется такая f, что $p_f(\lambda) \equiv 1$. Мера σ называется *мерой максимального спектрального типа*. Окружность S^1 допускает разбиение на счетное число подмножеств $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_k, \ldots, A_\infty$ и, соответственно, $L^2(M, \mathcal{M}, \mu) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k \oplus H_\infty$, где все подпространства H_k, $k = 1, 2, \ldots, \infty$, попарно ортогональны, $\dim H_k = k$ и в каждом H_k можно выбрать базис $f_{k,i}$, $i = 1, \ldots, k$, так, что $p_{f_{k,i}}(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in A_k$, $p_{f_{k,i}}(\lambda) = 0$ при $\lambda \notin A_k$.

Функция $n(\lambda)$, принимающая значение k на A_k, называется *функцией кратности*. Если $\sigma(A_k) > 0$ при бесконечном числе значений k, то говорят, что оператор U имеет спектр неограниченной кратности. В противном случае кратность спектра ограниченна. Если $\sigma(A_k) > 0$ только при одном k, то оператор U имеет *однородный спектр* кратности k. В частности, когда $k = \infty$ и σ — мера Лебега на S^1, оператор U имеет *счетнократный лебеговский спектр*.

2. Случай потоков. Вместо (2.1) имеет место представление

$$b_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i \lambda t)\, p_f(\lambda)\, d\sigma(\lambda),$$

где σ — конечная борелевская мера на $\mathbf{R}^1$. Подмножества A_k теперь будут подмножествами прямой, а мера Лебега на окружности заменяется на меру Лебега на прямой.

Пусть T — эргодический автоморфизм, $\{U^n\}$ — сопряженная с $\{T^n\}$ группа операторов, $\Lambda_d(T)$ — набор собственных значений оператора $U_T = U^1$. Ввиду унитарности U_T, $\Lambda_d(T) \subset S^1$. Аналогичным образом, $\Lambda_d(\{T^t\}) \subset \mathbf{R}^1$ есть множество собственных значений однопараметрической группы $\{U^t\}$, сопряженной с эргодическим потоком $\{T^t\}$.

Теорема 1.2 (см. [24]). $\Lambda_d(T)$ есть подгруппа S^1, каждое собственное значение $\lambda \in \Lambda_d(T)$ имеет кратность 1 и модуль каждой собственной функции постоянен почти всюду. Для потока справедливы аналогичные утверждения, но только в этом случае $\Lambda_d(\{T^t\})$ есть подгруппа $\mathbf{R}^1$.

Теорема 1.3 (см. [24]). Пусть T есть K-автоморфизм или $\{T^t\}$ есть K-поток. Тогда на инвариантном подпространстве функций с нулевым средним спектр сопряженной группы унитарных операторов счетнократный лебеговский.

Справедливость этих теорем вытекает из того, что унитарные операторы, сопряженные с автоморфизмами, обладают специфическим свойством: если f, g, $f \cdot g \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$, то $U(fg) = U(f)U(g)$, т. е. сохраняют дополнительную структуру, связанную с наличием частичного умножения в L^2, — структуру так называемого унитарного кольца.

§ 2. Структура динамических систем с чисто точечным и квазидискретным спектром

Определение 2.1. Эргодический автоморфизм T (поток $\{T^t\}$) называется *автоморфизмом (потоком) с чисто точечным спектром*, если циклическая группа $\{U_{T^n}\}$ (однопараметрическая группа $\{U_{T^t}\}$) имеет полную в $L^2(M, \mathfrak{M}, \mu)$ систему ортогональных собственных функций.

Для динамических систем с чисто точечным спектром, в отличие от общего случая, из унитарной эквивалентности сопряженных групп операторов вытекает их метрический изоморфизм. Это позволяет провести полную метрическую классификацию таких систем.

Теорема 2.1 (Нейман [98]). Для того, чтобы эргодические автоморфизмы T_1, T_2 пространства Лебега $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ с чисто точечным спектром были метрически изоморфны, необходимо и достаточно равенство $\Lambda_d(T_1) = \Lambda_d(T_2)$, где $\Lambda_d(T)$ — счетная подгруппа окружности S^1, образованная собственными значениями оператора U_T, сопряженного с T.

С помощью теории двойственности Понтрягина для произвольной счетной подгруппы $\Lambda \subset S^1$ легко построить автоморфизм с чисто точечным спектром, у которого $\Lambda_d(T) = \Lambda$. Этот автоморфизм есть групповой сдвиг на компактной группе M характеров группы Λ с нормированной мерой Хаара μ и задается формулой $Tg = g \cdot g_0 (g, g_0 \in M)$, где $g_0(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

Теорема 2.1 в сочетании с этим утверждением означает, что всякий эргодический автоморфизм пространства Лебега с чисто точечным спектром метрически изоморфен групповому сдвигу на группе характеров спектра. В случае непрерывного времени (для потоков) имеет место аналогичное утверждение.

Теорема 2.2. Для того чтобы эргодические потоки $\{T_1^t\}$, $\{T_2^t\}$ на пространствах Лебега $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ были метрически изоморфны, необходимо и достаточно равенство $\Lambda_d(\{T_1^t\}) = \Lambda_d(\{T_2^t\})$, где $\Lambda_d(\{T^t\})$ — счетная подгруппа аддитивной группы $\mathbf{R}^1$, образованная собственными значениями однопараметрической группы $\{U^t\}$.

Как и в случае автоморфизмов, для любой счетной подгруппы $\Lambda \subset \mathbf{R}^1$ можно построить поток $\{T^t\}$ с чисто точечным спектром, у которого $\Lambda_d(\{T^t\}) = \Lambda$ и который состоит из сдвигов на группе характеров группы Λ. Поэтому всякий эргодический поток с чисто точечным спектром метрически изоморфен потоку, порожденному групповыми сдвигами вдоль некоторой однопараметрической подгруппы группы характеров спектра.

Примеры. 1. T есть эргодический групповой сдвиг на m-мерном торе: $Tx = (x_1 + \alpha_1, \ldots, x_m + \alpha_m)$ для $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Полную систему характеров тора образуют функции $\chi_{n_1,\ldots,n_m} = \exp 2\pi i \sum_{k=1}^{m} n_k x_k$. Автоморфизм T имеет чисто точечный спектр, состоящий из чисел $\exp 2\pi i \sum_{k=1}^{m} n_k \alpha_k$; $(n_1, \ldots, n_m \in Z^1)$.

2. Пусть M — аддитивная группа целых 2-адических чисел с нормированной мерой Хаара μ. Каждой точке $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k \in M$ ($a_k = 0$ или 1) можно сопоставить бесконечную последовательность $(a_0, a_1, \ldots)$ из нулей и единиц, отождествляя M с пространством всех таких последовательностей. Фиксируем $x_0 = 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 + \ldots \in M$. Преобразование $T: M \to M$, действующее по формуле $Tx = x \oplus x_0$ ($\oplus$ — сложение 2-адических чисел), — групповой сдвиг, и, значит, автоморфизм пространства (M, μ). Вычислим спектр T.

Для любого конечного набора $i^{(n)} = (i_0, i_1, \ldots, i_{n-1})$ длины $n \geqslant 1$ из 0 и 1 введем цилиндрическое множество $C_{i_n}^{(n)} = \left\{ x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k \in M : a_k = i_k \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$. При каждом n имеется 2^n множеств $C_{i_n}^{(n)}$, которые циклически переставляются под действием T. Занумеруем их $C_0^{(n)}, C_1^{(n)}, \ldots, C_{2^n-1}^{(n)}$ так, что

$$TC_p^{(n)} = C_{p+1}^{(n)}, \quad 0 \leqslant p < 2^n.$$

Функции $\chi_{r/2^n}(x) = \exp \frac{2\pi i r p}{2^n}$ для $x \in C_p^{(n)}$ ($n = 0, 1, \ldots, 0 \leqslant r < 2^n$) образуют полную систему характеров группы M, причем

$U_T\chi_{r/2^n}=\exp\frac{2\pi ir}{2^n}\chi_{r/2^n}$. Значит, T — автоморфизм с чисто точечным спектром, состоящим из чисел вида $\exp\frac{2\pi ir}{2^n}$.

Теория автоморфизмов с чисто точечным спектром обобщается на более широкий класс систем.

Пусть T — автоморфизм пространства Лебега $(M, \mathscr{M}, \mu)$, $\Lambda_0\overset{\text{def}}{=}\Lambda_d(T)$ — группа собственных значений унитарного оператора U_T; Φ_0 — группа (по умножению) нормированных в $L^2(M)$ собственных функций U_T. Группы Λ_0 и Φ_0 можно рассматривать как подмножества $L^2(M)$, причем $\Lambda_0\subset\Phi_0$.

При $n\geqslant 1$ положим

$$\Phi_n=\{f\in L^2(M):\|f\|=1,\ U_Tf=\lambda f \text{ для некоторого } \lambda\in\Phi_{n-1}\},$$

$$\Lambda_n=\{\lambda\in L^2(M):\|\lambda\|=1,\ U_Tf=\lambda f \text{ для некоторого } f\in\Phi_n\}.$$

Тем самым по индукции для всякого $n\geqslant 0$ определены группы Φ_n, Λ_n, элементы которых называются соответственно квазисобственными функциями и квазисобственными значениями порядка n

Так как $\Phi_n\subset\Phi_{n+1}$, $\Lambda_n\subset\Lambda_{n+1}$, то можно ввести группы $\Phi=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\Phi_n$, $\Lambda=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\Lambda_n$. Каждое квазисобственное значение порядка $n\geqslant 1$ можно рассматривать как квазисобственную функцию порядка $n-1$, и ей отвечает квазисобственное значение порядка $n-1$. Таким образом, возникает гомоморфизм $\theta:\Lambda\to\Lambda$, задаваемый формулой $\theta f=\lambda$ для $f\in\Lambda$, если $U_Tf=\lambda f$, $\lambda\in\Lambda$. Ограничивая θ на Λ_n, получим гомоморфизмы $\theta_n:\Lambda_n\to\Lambda_{n-1}$.

Определение 2.2. Эргодический автоморфизм T, для которого Φ есть полная система функций в $L^2(M)$, называется автоморфизмом с *квазидискретным спектром.*

Всякий автоморфизм с чисто точечным спектром, разумеется, имеет квазидискретный спектр. Эргодический косой сдвиг на двумерном торе: $T(x, y)=(x+\alpha,\ y+x)$, $x, y\in S^1$, α иррационально, — пример автоморфизма с квазидискретным спектром, но не с чисто точечным спектром.

Мы ограничимся рассмотрением вполне эргодических автоморфизмов T, т. е. таких, что T^n эргодичен при всех $n\neq 0$.

Теорема 2.3 (Л. М. Абрамов [1]). Пусть T_1, T_2 — вполне эргодические автоморфизмы пространств Лебега $(M_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$, $(M_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ с квазидискретным спектром. Они метрически изоморфны тогда и только тогда, когда для соответствующих групп $\Lambda^{(1)}=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\Lambda_n^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\Lambda_n^{(2)}$ квазисобственных значений и для гомоморфизмов $\theta^{(1)}:\Lambda^{(1)}\to\Lambda^{(1)}$, $\theta^{(2)}:\Lambda^{(2)}\to\Lambda^{(2)}$ выполнены условия:

1) $\Lambda_0^{(1)}=\Lambda_0^{(2)}\overset{\text{def}}{=}\Lambda_0$;

2) существует изоморфизм V групп $\Lambda^{(1)}$ и $\Lambda^{(2)}$ такой, что а) $V\lambda=\lambda$ при $\lambda\in\Lambda_0$; б) $V\Lambda_n^{(1)}=\Lambda_n^{(2)}$ при $n=0, 1, \ldots$; в) $\theta^{(2)}=V\theta^{(1)}V^{-1}$.

По аналогии со случаем чисто точечного спектра, для любой последовательности счетных коммутативных групп $\Lambda_0\subseteq\Lambda_1\subseteq\ldots$, $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\Lambda_n=\Lambda$, где $\Lambda_0\subset S^1$ — подгруппа, не содержащая корней из единицы (кроме 1), можно построить вполне эргодический автоморфизм T с квазидискретным спектром, действующий на группе характеров M группы Λ и такой, что при всех n группа его квазисобственных значений порядка n изоморфна Λ_n.

§ 3. Примеры спектрального анализа динамических систем

Имеются многочисленные примеры динамических систем, для которых спектр сопряженных с ними групп унитарных операторов полностью вычисляется.

Теорема 1.3 показывает, что K-системы имеют счетнократный лебеговский спектр. Существуют динамические системы, не являющиеся K-системами, но имеющие счетнократный лебеговский спектр — например, потоки орициклов на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны (см. ч. II, гл. 7, § 5).

При некоторых общих условиях полностью вычисляется спектр эргодических сложных косых сдвигов на торе, т. е. преобразований вида

$$T(x_1, \ldots, x_m)=(x_1+\alpha,\ x_2+f_1(x_1), \ldots, x_m+f_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1})),$$

где $x_1, \ldots, x_m\in S^1$, α иррационально. Если функции $f_k(x_1, \ldots, x_k)$ гладкие и их производные удовлетворяют определенным неравенствам, то спектр оператора U_T в инвариантном пространстве $H_1\subset L^2$ функций от x_1 чисто точечный, а в ортогональном дополнении $H_1^{\perp}$ — счетнократный лебеговский (А. Г. Кушниренко, см. [24]).

Изучение спектров различных классов динамических систем долгое время оставляло надежду на то, что какой-то аналог теории систем с чисто точечным спектром может быть построен для систем более общего вида. Впоследствии, однако, такая надежда разрушилась. Были построены, в основном, с помощью методов теории аппроксимации (см. гл. 4) примеры динамических систем с весьма неожиданными спектральными свойствами. Приведем несколько таких примеров (см. [24]).

1. Пусть автоморфизм T действует в пространстве $M=S^1\times\mathbf{Z}_2$, где S^1 — единичная окружность с мерой Лебега, $\mathbf{Z}_2=\{1, -1\}$ с мерой $(^1/_2, {}^1/_2)$, и является косым произведением над поворотом окружности: $T(x, z)=(x+\alpha,\ g(x)z)$, $x\in S^1$, $z\in\mathbf{Z}_2$. В подпространстве $H\subset L^2(M)$, состоящем из функций, зависящих лишь от x, унитарный оператор U_T имеет чисто точечный

спектр, а в ортогональном дополнении $H^{\perp}$ — непрерывный спектр. Так как $H^{\perp}$ состоит из функций f, для которых $f(x, -z) = -f(x, z)$, то произведение любых двух функций из $H^{\perp}$ принадлежит H.

2. Для автоморфизма T с чисто точечным спектром максимальный спектральный тип ρ (т. е. тип дискретных мер, сосредоточенных на группе $\Lambda_d(T)$), очевидно, подчиняет свою свертку $\rho * \rho$. Это свойство, называемое групповым свойством спектра, имеется также у многих естественно возникающих систем с непрерывным или смешанным спектром. Однако, гипотеза о том, что так бывает всегда, оказалась неверной.

Опровергающим примером может служить автоморфизм T, также действующий в пространстве $M = S^1 \times \mathbf{Z}_2$ и являющийся косым произведением над поворотом окружности. Точнее, для $x \in S^1$, $z \in \mathbf{Z}_2$ $T(x, z) = (x + \alpha, w(x) z)$, где $w(x) = -1$, если $x \in [0, \beta)$, $w(x) = 1$, если $x \in [\beta, 1)$, α, β — специально подобранные иррациональные числа.

3. Во всех «естественных» случаях, когда вычислялась функция кратности спектра, оказывалось, что либо она неограниченна, либо равна 1 на множестве полной меры максимального спектрального типа (т. е. U_T — оператор с простым спектром). Но и эта закономерность не распространяется на общий случай: существуют автоморфизмы (также строящиеся как косые произведения над поворотом окружности) с непростым конечнократным непрерывным спектром.

Вопрос о том, каковы точные условия, которым должен удовлетворять спектр группы унитарных операторов $\{U^n\}$ ($\{U^t\}$) для того, чтобы эта группа была сопряженной с некоторой динамической системой, чрезвычайно сложен. Неизвестно, в частности, существуют ли динамические системы с простым лебеговским, или даже конечнократным абсолютно непрерывным спектром.

§ 4. Спектральный анализ гауссовских динамических систем

Важный класс динамических систем, для которых проведен в некотором смысле полный спектральный анализ, связан с гауссовскими распределениями и стационарными гауссовскими процессами теории вероятностей.

Пусть M — пространство всех вещественнозначных функций $x(s)$, определенных для целых s, $-\infty < s < \infty$. Введем σ-алгебру $\mathcal{M}$, порожденную конечномерными цилиндрами, т. е. множествами вида $A = \{x(s) \in M : x(s_1) \in C_1, \ldots, x(s_r) \in C_r\}$, где $C_1, \ldots, C_r$ — борелевские подмножества $\mathbf{R}^1$. Мера μ на $\mathcal{M}$ называется гауссовской, если совместное распределение любого набора случайных величин $\{x(s_1), \ldots, x(s_r)\}$ является r-мерным гауссовским распределением. Если среднее значение $m = \mathbf{E} x(s)$ не зависит от s, а корреляционная функция $b(s_1, s_2)$

зависит лишь от разности $s_1 - s_2$, то гауссовская мера называется стационарной.

Для стационарной меры последовательность $b(s) \overset{\text{def}}{=} b(s, 0)$ положительно определенная и поэтому представляется в виде $b(s) = \int\limits_0^1 \exp(2\pi i s\lambda)\, d\sigma(\lambda)$, где σ — конечная мера на окружности S^1, которая называется спектральной мерой гауссовской меры μ.

Определение 4.1. Циклическая группа $\{T^n\}$ преобразований сдвига в пространстве M, снабженном стационарной гауссовской мерой, называется *гауссовской динамической системой* с дискретным временем. Образующий элемент T этой группы называется автоморфизмом Гаусса.

Вместо пространства функций $x(s)$ целочисленного аргумента s можно рассматривать пространство M всех вещественнозначных функций $x(s)$ вещественного аргумента s, $-\infty < s < \infty$, и таким же образом определить σ-алгебру $\mathscr{M}$ и гауссовские стационарные меры на ней.

Определение 4.2. Однопараметрическая группа $\{T^t\}$ преобразований сдвига в пространстве $M(T^t x(s) = x(s+t))$, снабженном стационарной гауссовской мерой, называется гауссовской динамической системой с непрерывным временем (потоком Гаусса).

Мы будем формулировать результаты лишь для случая дискретного времени. Опишем, как устроен унитарный оператор U_T, сопряженный с автоморфизмом Гаусса.

Комплексное гильбертово пространство $L^2(M, \mathscr{M}, \mu)$ разбивается в ортогональную прямую сумму счетного числа подпространств: $L^2(M, \mathscr{M}, \mu) = \bigoplus\limits_{m=0}^{\infty} H_m$, инвариантных относительно U_T. Каждое из H_m имеет вид $H_m = H_m^{(r)} \oplus i H_m^{(r)}$, где $H_m^{(r)}$ — вещественное подпространство вещественного гильбертова пространства $L^2_{(r)}(M, \mathscr{M}, \mu)$. $H_0^{(r)}$ (соответственно H_0) — подпространство вещественных (соответственно комплексных) констант. $H_1^{(r)}$ — подпространство, натянутое на всевозможные линейные комбинации вида $y = \sum a_k x(s_k)$, a_k вещественны. Все случайные величины $y \in H_1^{(r)}$ имеют гауссовское распределение. При $m > 1$ подпространство $H_m^{(r)}$ натянуто на всевозможные *полиномы Эрмита* (C. Hermite)—*Ито* (K. Ito) $:y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m:$ гауссовских величин $y_1, \ldots, y_m \in H_1^{(r)}$[1].

Для описания действия оператора U_T на подпространстве H_m при $m > 1$ введем сначала вещественное гильбертово про-

---

[1] Полином Эрмита — Ито $: y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m :$ $(y_i \in H_1^{(r)})$ — это перпендикуляр, опущенный из конца вектора $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_m$ на вещественное подпространство, порожденное всеми произведениями $y_1' \cdot y_2' \cdot \ldots \cdot y_p'$, где $p < m$, $y_i' \in H_1^{(r)}$.

странство $Q_m^{(r)}$, состоящее из комплекснозначных функций $\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, определенных для $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in S^1$ (т. е. на m-мерном торе Tor^m), симметричных по своим аргументам, удовлетворяющих соотношению $\varphi(-\lambda_1, \dots, -\lambda_m) = \overline{\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}$ и таких, что норма

$$\|\varphi\| \overset{\mathrm{def}}{=} \left[\int\limits_{\mathrm{Tor}^m} |\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_m)|^2 d\sigma(\lambda_1) \dots d\sigma(\lambda_m) \right]^{1/2} < \infty,$$

где σ — спектральная мера гауссовской меры μ.

Затем определим комплексное гильбертово пространство Q_m равенством $Q_m = Q_m^{(r)} \oplus i Q_m^{(r)}$.

Теорема 4.1 (см. [24]). Для любого $m \geqslant 1$ существует изометрическое отображение $\theta_m : Q_m \to H_m$ такое, что 1) $\theta_m Q_m = H_m$, 2) при изоморфизме $\theta_m^{-1} : H_m \to Q_m$ оператор U_T переходит в оператор умножения на функцию $\exp 2\pi i (\lambda_1 + \dots + \lambda_m)$.

Такое полное описание структуры оператора U_T позволяет связать ряд эргодических и спектральных свойств автоморфизма T со свойствами спектральной меры σ.

Необходимым и достаточным условием эргодичности автоморфизма Гаусса T является непрерывность меры σ. Это же условие необходимо и достаточно для того, чтобы T обладал слабым перемешиванием. Для сильного перемешивания, а также для перемешивания любой кратности необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье $b_s = \int\limits_0^1 \exp(2\pi i s \lambda)\, d\sigma(\lambda)$ меры σ стремились к нулю при $|s| \to \infty$. Максимальный спектральный тип оператора U_T равен типу меры $e^\sigma \overset{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{(k)}}{k!}$, где при $k \geqslant 1$ мера $\sigma^{(k)}$ — k-кратная свертка меры σ, а при $k = 0$ — мера, сосредоточенная в точке $\lambda = 0$.

Описание структуры оператора U_T позволяет также строить в классе гауссовских систем примеры преобразований с нетривиальными спектральными свойствами. В частности, существуют гауссовские автоморфизмы с простым непрерывным спектром (см. [24]).

Глава 3

ЭНТРОПИЙНАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай

Понятие энтропии возникло в трудах основателей статистической механики прошлого века Клаузиуса (R. Clausius), Максвелла (J. C. Maxwell), Больцмана (L. Boltzmann) и других в связи с анализом явлений необратимости. Затем энтропия появилась и стала основным понятием в теории информации Шеннона (C. Shannon), возникшей в середине этого века и посвященной проблемам передачи информации в присутствии случайных помех. Хотя формальное выражение для энтропии в обоих случаях было одинаковым, смысловая ее роль оказалась несколько различной. В работе А. Н. Колмогорова [22] идеи теории информации и понятие энтропии были привлечены к анализу проблем эргодической теории. После появления этой работы в эргодической теории возникло новое глубокое направление, богатое по своим результатам и их приложениям,— энтропийная теория динамических систем. Сейчас можно считать, что построение этой теории, в основном, закончено. Ее изложению посвящена эта глава.

§ 1. Энтропия разбиения, условная энтропия разбиения

В основе всей теории лежат сравнительно элементарные понятия энтропии и условной энтропии конечного или счетного разбиения. Пусть ξ — конечное или счетное разбиение пространства Лебега $(M, \mathscr{M}, \mu)$ с элементами C_i, $i=1, 2, \ldots$.

Определение 1.1. *Энтропией разбиения* ξ называется величина

$$H(\xi) = -\sum_i \mu(C_i) \ln \mu(C_i).$$

Мы принимаем обычное соглашение $0 \cdot \ln 0 = 0$. Ясно, что $0 \leqslant H(\xi) \leqslant \infty$. Если разбиение ξ несчетно, то полагаем, по определению, $H(\xi) = \infty$. Тем самым $H(\xi)$ определено для произвольного разбиения ξ. Выражение для $H(\xi)$ можно переписать несколько иначе. А именно, пусть $C_\xi(x)$ есть элемент разбиения, содержащий точку x. Тогда

$$H(\xi) = -\int_M \ln \mu(C_\xi(x))\, d\mu(x).$$

Ниже мы будем пользоваться свойствами измеримых разбиений. Для удобства читателей приводим их здесь.

1. Говорят, что $\xi_1 \leqslant \xi_2$, если ξ_2 есть подразбиение $\xi_1 (\mathrm{mod}\, 0)$, т. е. ξ_2 мельче $\xi_1 (\mathrm{mod}\, 0)$. Уточним смысл обозначения $\mathrm{mod}\, 0$. Оно означает здесь, что из пространства M можно выбросить множество меры 0 так, что на дополнении каждый элемент ξ_1 состоит из целых элементов ξ_2. Введенное неравенство задает частичный порядок на множестве разбиений. Наибольшим разбиением служит разбиение ε пространства M на отдельные точки, а наименьшим — разбиение ν, единственным элементом которого является все M. Для любого семейства измеримых разбиений $\{\xi_\alpha\}$ определены измеримые разбиения $\sup\limits_\alpha \xi_\alpha$ и $\inf\limits_\alpha \xi_\alpha$, обозначае-

мые соответственно $\bigvee\limits_{\alpha}\xi_\alpha$ и $\bigwedge\limits_{\alpha}\xi_\alpha$ и называемые произведением и пересечением разбиений ξ_α. Для любого измеримого разбиения ξ через $\mathscr{M}(\xi)$ обозначается σ-подалгебра σ-алгебры $\mathscr{M}$, образованная подмножествами M, состоящими $\bmod 0$ из элементов разбиения ξ. Тогда $\mathscr{M}(\bigwedge\limits_{\alpha}\xi_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha}\mathscr{M}(\xi_\alpha)$, а $\mathscr{M}(\bigvee\limits_{\alpha}\xi_\alpha)$ есть наименьшая σ-алгебра, содержащая все $\mathscr{M}(\xi_\alpha)$.

Пусть η — измеримое разбиение. Почти каждый элемент D_η разбиения η представляет собой пространство Лебега с мерой $\mu(\cdot|D_\eta)$. Произвольное измеримое разбиение ξ индуцирует измеримое разбиение на почти каждом D_η. Энтропия этого разбиения обозначается $H(\xi|D_\eta)$ и называется условной энтропией ξ при условии D_η.

Определение 1.2. *Условной энтропией* ξ при условии η называется величина $H(\xi|\eta)=\int\limits_{M/\eta}H(\xi|D_\eta)\,d\mu$, где M/η — факторпространство пространства M по разбиению η, мера на котором индуцирована мерой μ.

Если $\mu(C_\xi(x)|\eta)$ есть условная мера $C_\xi(x)$ при условии $D_\eta(x)$, то $H(\xi|\eta)=-\int\limits_{M}\ln\mu(C_\xi(x)|\eta)\,d\mu(x)$. Ясно также, что $H(\xi|\nu)=H(\xi)$.

Разбиения ξ, η называются независимыми, если для любых $A\in\mathscr{M}(\xi)$, $B\in\mathscr{M}(\eta)$ справедливо соотношение $\mu(A\cap B)=\mu(A)\cdot\mu(B)$. В случае независимых разбиений $H(\xi|\eta)=H(\xi)$. Приведем свойства условной энтропии разбиения. В силу сказанного выше, из них автоматически вытекают свойства безусловной энтропии:

1) $H(\xi|\eta)\geqslant 0$; равенство достигается лишь при $\xi\preccurlyeq\eta$;

2) $H(\xi|\eta)\leqslant H(\xi)$; если $H(\xi)<\infty$, то равенство достигается лишь при независимости ξ и η;

3) если $\xi_1\preccurlyeq\xi_2$, то $H(\xi_1|D_\eta)\leqslant H(\xi_2|D_\eta)$ для почти каждого D_η; следовательно, $H(\xi_1|\eta)\leqslant H(\xi_2|\eta)$; если $\xi_1\preccurlyeq\xi_2$ и $H(\xi_1|\eta)=H(\xi_2|\eta)$, то $\xi_1=\xi_2 \pmod 0$;

4) $H(\xi_1\vee\xi_2|\eta)=H(\xi_1|\eta)+H(\xi_2|\xi_1\vee\eta)$;

5) $H(\xi|\eta_1)\leqslant H(\xi|\eta_2)$, если $\eta_1\succcurlyeq\eta_2 \pmod 0$.

Из свойств 4, 5 сразу получаем

$$H(\xi_1\vee\xi_2|\eta)\leqslant H(\xi_1|\eta)+H(\xi_2|\eta);$$

если $H(\xi_1|\eta)<\infty$, $H(\xi_2|\eta)<\infty$, то равенство достигается тогда и только тогда, когда ξ_1 и ξ_2 независимы на почти каждом D_η;

6) если $\xi_1\preccurlyeq\xi_2\preccurlyeq\ldots$, $\xi=\bigvee\limits_{n}\xi_n$, то $H(\xi|\eta)=\lim\limits_{n\to\infty}H(\xi_n|\eta)$;

7) если $\xi_1\succcurlyeq\xi_2\succcurlyeq\ldots$, $\xi=\bigwedge\limits_{n}\xi_n$ и $H(\xi_n|\eta)<\infty$ хотя бы при одном n, то $H(\xi|\eta)=\lim\limits_{n\to\infty}H(\xi_n|\eta)$;

8) если $\eta_1 \preccurlyeq \eta_2 \preccurlyeq \ldots$, $\eta = \bigvee_n \eta_n$ и $H(\xi \mid \eta_n) < \infty$ хотя бы при одном n, то $H(\xi \mid \eta) = \lim_{n\to\infty} H(\xi \mid \eta_n)$;

9) если $\eta_1 \succcurlyeq \eta_2 \succcurlyeq \ldots$ и $\eta = \bigwedge_n \eta_n$, то $H(\xi \mid \eta) = \lim_{n\to\infty} H(\xi \mid \eta_n)$;

10) если T — эндоморфизм пространства Лебега, то

$$H(T^{-1}\xi \mid T^{-1}\eta) = H(\xi \mid \eta).$$

Обозначим через Z пространство разбиений ξ, для которых $H(\xi) < \infty$. Введем в этом пространстве метрику, положив $\rho(\xi, \eta) = H(\xi \mid \eta) + H(\eta \mid \xi)$. Тогда Z с метрикой ρ становится полным метрическим сепарабельным пространством.

§ 2. Энтропия динамической системы

В этом параграфе мы определим чисто формально энтропию динамической системы и для ряда простейших примеров приведем ее значение. Смысл понятия энтропии постепенно раскрывается в следующих параграфах и в части II. Начнем со случая дискретного времени. Пусть T — эндоморфизм пространства Лебега $(M, \mathscr{M}, \mu)$, ξ — измеримое разбиение. Положим $\xi^{-}{}_T = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\xi$. Разбиение $T^{-1}\xi^{-}{}_T$ иногда называют «прошлым» разбиения ξ относительно T.

Определение 2.1. Энтропией на один шаг разбиения ξ относительно T называется величина $h(T, \xi) = H(\xi \mid T^{-1}\xi^{-}{}_T)$.

Свойства $h(T, \xi)$ (см. [38]):

1) $h(T, \xi) \leqslant H(\xi)$;

2) $h(T, \xi_1 \vee \xi_2) \leqslant h(T, \xi_1) + h(T, \xi_2)$; если $\xi^{-}{}_1 \overset{\text{def}}{=} (\xi_1)^{-}_T$ и $\xi^{-}{}_2 \overset{\text{def}}{=} (\xi_2)^{-}_T$ независимы, то в последнем неравенстве достигается равенство;

3) если $H(\xi) < \infty$, то $h(T, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi\right)$;

4) $h\left(T^n, \bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi\right) = n \cdot h(T, \xi)$, $n = 1, 2, \ldots$;

5) если T — автоморфизм и $\xi \in Z$, то $h(T, \xi) = h(T^{-1}, \xi)$;

6) $h(T, \xi)$ — непрерывная функция на Z;

7) если $\xi_1, \xi_2 \in Z$ и $\xi_1 \preccurlyeq \xi_2$, то $h(T, \xi_1) \leqslant h(T, \xi_2)$;

8) если $H(\xi_1 \vee \xi_2 \mid T^{-1}\xi^{-}{}_1) < \infty$, то

$$h(T, \xi_1) = \lim_{n\to\infty} H(\xi_1 \mid T^{-1}\xi^{-}{}_1 \vee T^{-n}\xi^{-}{}_2).$$

Следующее определение является центральным для всей теории. Пусть $\{T^n\}$ есть циклическая полугруппа эндоморфизмов или циклическая группа автоморфизмов пространства Лебега $(M, \mathscr{M}, \mu)$ с образующим элементом $T = T^1$.

Определение 2.2. *Энтропией* T *(динамической системы* $\{T^n\}$) называется величина $h(T)=\sup h(T,\xi)$, где верхняя грань берется по всем измеримым разбиениям ξ.

Энтропия $h(T)$ является, очевидно, метрическим инвариантом: если T_1 и T_2 метрически изоморфны, то $h(T_1)=h(T_2)$. Иногда $h(T)$ называется также метрической энтропией, энтропией Колмогорова, несколько реже энтропией Колмогорова—Синая.

Свойства энтропии $h(T)$ (см. [24]):

1) $h(T)=\sup h(T,\xi)$, где верхняя грань берется только по конечным разбиениям ξ;

2) если $\xi_1 \prec \xi_2 \prec \ldots, \xi_n \in Z$ при всех $n \geqslant 1$ и $\bigvee\limits_n \xi_n = \varepsilon$, то $\lim\limits_{n\to\infty} h(T,\xi_n)$ существует и равен $h(T)$;

3) $h(T^n)=n\cdot h(T)$ при всех целых $n \geqslant 0$; если T — автоморфизм, что $h(T^{-1})=h(T)$ и $h(T^n)=|n|\cdot h(T)$ при всех целых n, $-\infty<n<\infty$;

4) если T_1 — факторэндоморфизм эндоморфизма T (см. § 4 гл. 1), то $h(T_1)\leqslant h(T)$;

5) $h(T_1\times T_2)=h(T_1)+h(T_2)$;

6) если T — эргодический автоморфизм, $E\in\mathcal{M}$, $\mu(E)>0$ и T_E — производный автоморфизм (см. § 4 гл. 1), то

$$h(T_E)=[\mu(E)]^{-1}\cdot h(T);$$

это соотношение называется формулой Абрамова;

7) если T^f — интегральный автоморфизм, построенный по эргодическому автоморфизму T и целочисленной функции f (см. § 4 гл. 1), то $h(T^f)=\left(\int\limits_M f d\mu\right)^{-1}\cdot h(T)$;

8) энтропия эндоморфизма равна энтропии его естественного расширения;

9) если η — разбиение M на эргодические компоненты T, то $h(T)=\int\limits_{M/\eta} h(T\,|\,C_\eta)\,d\mu$.

Введем теперь энтропию потока.

Определение 2.3. *Энтропией потока* $\{T^t\}$ называется величина $h(T^1)$.

Разумность такого определения показывает следующая теорема.

Теорема 2.1 (Л. М. Абрамов, см. [24]). Если $\{T^t\}$ — поток, то $h(T^t)=|t|\cdot h(T^1)$ при любом $t\in\mathbb{R}^1$.

Для специального потока $\{T^t\}$, построенного по эргодическому автоморфизму T_1 и функции f (см. § 4 гл. 1),

$$h(\{T^t\})=\left(\int f d\mu_1\right)^{-1}\cdot h(T_1).$$

Определение 2.4. Измеримое разбиение ξ называется *образующим* (или односторонним образующим) для эндоморфизма T, если $\xi_T^- = \varepsilon$. Измеримое разбиение ξ называется образующим (или двусторонним образующим) для автоморфизма T, если $\xi_T \overset{\text{def}}{=} \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n \xi = \varepsilon$.

Вычисление энтропии во многих конкретных случаях опирается на следующую теорему.

Теорема 2.2 (А. Н. Колмогоров [22], Я. Г. Синай [41]). Если $\xi \in Z$ и ξ — одностороннее образующее для эндоморфизма T или двустороннее образующее для автоморфизма T, то $h(T) = h(T, \xi)$.

Примеры вычисления энтропии.

1. Если T — периодический автоморфизм, т. е. существует такое m, что $T^m x = x$ для почти всех x, то $h(T) = 0$. Это вытекает из того, что для любого разбиения ξ, состоящего из $r < \infty$ элементов, и любого $n > 0$ разбиение $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi$ состоит не более чем из r^m элементов, поэтому

$$h(T, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} \ln r = 0.$$

2. Если T — поворот окружности S^1 на угол α, то $h(T) = 0$. При рациональном α это следует из примера 1, а при иррациональном α разбиение $\xi = \{[0, 1/2), [1/2, 1)\}$ является образующим для T, и $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi$ состоит из $2n$ отрезков. Поэтому

$$h(T) = h(T, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln 2n = 0.$$

3. Пусть T — автоморфизм Бернулли, действующий в пространстве $(M, \mathcal{M}, \mu)$ последовательностей $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$, $x_i \in (Y, \mathcal{Y}, \nu)$, $Y = \{a_1, \ldots, a_r\}$, $\nu(\{a_k\}) = p_k$, $1 \leqslant k \leqslant r$. Разбиение $\xi = (C_1, \ldots, C_r)$, где $C_k = \{x \in M : x_0 = a_k\}$ является образующим для T. Следовательно, $h(T) = h(T, \xi) = H(\xi) = -\sum_{k=1}^{r} p_k \ln p_k$. Отсюда непосредственно вытекает, что для любого $h > 0$ существуют автоморфизмы Бернулли T с $h(T) = h$ и, значит, имеется континуум попарно метрически неизоморфных автоморфизмов Бернулли. Никакие известные до введения энтропии метрические инварианты не позволяли доказать существование неизоморфных автоморфизмов Бернулли.

4. Пусть пространство M — то же, что в примере 3, а T — автоморфизм Маркова с матрицей вероятностей перехода $\Pi = \|p_{ij}\|$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant r$, и стационарными вероятностями $(p_1, \ldots$

..., p_r). Разбиение ξ из примера 3 в этом случае также является образующим, а $h(T)=h(T, \xi)=-\sum\limits_{i,j=1}^{r} p_i p_{ij} \ln p_{ij}$.

5. Пусть T — эргодический алгебраический автоморфизм m-мерного тора с инвариантной мерой Хаара, задающийся целочисленной $m \times m$-матрицей A с $\det A=1$. Допустим, что $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — собственные значения A. Тогда $h(T)=\ln \prod\limits_{i:|\lambda_i|>1} |\lambda_i|$.

6. Пусть $M=[0, 1]$, эндоморфизм T задается функцией f, т. е. $Tx=f(x)$. Предположим, что f имеет лишь конечное число точек разрыва, а в промежутках между ними $|f'(x)|>1$. Пусть, далее, μ — инвариантная относительно T абсолютно непрерывная мера с плотностью $\rho(x)$. Тогда

$$h(T)=\int_0^1 \ln|f'(x)|\,\rho(x)\,dx.$$

Для эндоморфизма T с $f(x)=\left\{\frac{1}{x}\right\}$ будет

$$h(T)=\frac{2}{\ln 2}\int_0^1 \frac{|\ln x|}{1+x}\,dx=\frac{\pi^2}{6 \ln 2}.$$

Этот эндоморфизм естественно связан с разложением действительных чисел в непрерывные дроби (см. [56]).

7. Для интегрируемой гамильтоновой системы $h(\{T^t\})=0$.

8. Энтропия биллиарда в любом многоугольнике или многограннике с плоскими гранями равна нулю.

9. Для геодезического потока $\{T^t\}$ на поверхности постоянной отрицательной кривизны, равной $-K$, энтропия $h(\{T^t\})=\sqrt{K}$.

§ 3. Структурные теоремы о динамических системах с положительной энтропией

Некоторое представление о смысле энтропии дает следующая

Теорема 3.1 (теорема Шеннона — Макмиллана (B. McMillan) — Бреймана (L. Breiman), см. [45]). Пусть T — эргодический автоморфизм пространства Лебега $(M, \mathscr{M}, \mu)$, ξ — конечное разбиение, $C_n(x)$ — элемент разбиения $\xi \vee T\xi \vee \dots \vee T^{n-1}\xi$, содержащий $x \in M$. Для почти всех x

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{n}\ln \mu(C_n(x))\right]=h(T, \xi).$$

Важную роль играет также теорема Кригера об образующем разбиении.

Теорема 3.2 (Кригер [88]). Пусть T — эргодический автоморфизм, $h(T)<\infty$. Для любого $\varepsilon>0$ существует конечное образующее разбиение ξ такое, что $H(\xi)\leqslant h(T)+\varepsilon$. Если $h(T)<\ln k\leqslant h(T)+1$ при некотором целом k, то существует образующее разбиение из k элементов.

Эта теорема показывает, что всякий эргодический автоморфизм с конечной энтропией можно реализовать как стационарный случайный процесс теории вероятностей с дискретным временем и конечным числом состояний.

Возвращаясь к произвольным эндоморфизмам, рассмотрим такие конечные разбиения ξ, что $h(T,\xi)=0$. Для таких разбиений $\xi^-_T=T^{-1}\xi^-_T=T^{-2}\xi^-_T=\ldots$, т. е. $\xi\preccurlyeq T^{-1}\xi^-_T$. С точки зрения теории вероятностей, равенство $h(T,\xi)=0$ означает, что мы имеем дело со случайным процессом, в котором бесконечно далекое прошлое полностью определяет будущее течение процесса. М. С. Пинскер (см. [38]) ввел разбиение $\pi(T)$, которое есть наименьшая верхняя грань всех разбиений ξ с $h(T,\xi)=0$. В случае потока $\{T^t\}$ разбиение $\pi(T^t)$ не зависит от t и обозначается $\pi(\{T^t\})$. Эндоморфизмы T, у которых $\pi(T)=\nu$, называются *эндоморфизмами с вполне положительной энтропией.*

Теорема 3.3 (см. [38]). Пусть T — эргодический автоморфизм, $h(T)>0$. Обозначим через $\mathscr{H}^+$ ортогональное дополнение в $L^2(M,\mathscr{M},\mu)$ к подпространству функций, постоянных $\operatorname{mod} 0$ на элементах $\pi(T)$. Тогда $U_T\mathscr{H}^+=\mathscr{H}^+$, и на подпространстве $\mathscr{H}^+$ оператор U_T имеет счетнократный лебеговский спектр.

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что всякий автоморфизм с чисто точечным, конечнократным или сингулярным спектром имеет нулевую энтропию.

Теорема 3.4 (см. [38]). Если T — эндоморфизм с вполне положительной энтропией, то T — точный эндоморфизм. Если T — автоморфизм с вполне положительной энтропией, то T есть K-автоморфизм.

Введем следующее

Определение 3.1. Разбиение ζ называется *исчерпывающим* для автоморфизма T, если $T\zeta\succcurlyeq\zeta$, $\bigvee\limits_{k=0}^{\infty} T^k\zeta=\varepsilon$.

С точки зрения теории вероятностей, $\mathscr{M}(\zeta)$ есть аналог σ-алгебры, отвечающей прошлому случайного процесса.

Теорема 3.5 (см. [38]). Если ζ — исчерпывающее разбиение, то $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}\zeta\succcurlyeq\pi(T)$.

Из этой теоремы автоматически следует, что для K-автоморфизмов $\pi(T)=\nu$. Таким образом, равенство $\pi(T)=\nu$ эквивалентно тому, что T есть K-автоморфизм.

Отсюда, в частности, получаем, что факторавтоморфизм и любая степень K-автоморфизма снова будут K-автоморфизмами.

Определение 3.2. Исчерпывающее разбиение ζ называется *экстремальным*, если $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}\zeta=\pi(T)$. Экстремальное разбиение ζ называется *совершенным*, если $h(T,\zeta)=h(T)$.

Теорема 3.6 (В. А. Рохлин, Я. Г. Синай, см. [38]). Всякий автоморфизм имеет совершенные разбиения.

Приведенные определения легко переносятся на случай непрерывного времени.

Определение 3.3. Измеримое разбиение ζ называется экстремальным разбиением для потока $\{T^t\}$, если 1) $T^t\zeta\succcurlyeq\zeta$ при $t>0$; 2) $\bigvee\limits_{t>0} T^t\zeta=\varepsilon$; 3) $\bigwedge\limits_{t} T^t\zeta=\pi(\{T^t\})$. Экстремальное разбиение называется совершенным, если $H(T^s\zeta\,|\,\zeta)=s\cdot h(\{T^t\})$ при любом $s>0$.

Теорема 3.7 (Рудольф, Б. М. Гуревич, Бланшар (F. Blanchard), см. [104], [16], [57]). Всякий эргодический поток имеет совершенные разбиения.

Из этой теоремы вытекает, что если T^{t_0} является K-автоморфизмом при некотором t_0, то поток $\{T^t\}$ является K-потоком и, следовательно, все T^t, $t\neq0$, являются K-автоморфизмами.

Автоморфизмы с нулевой энтропией характеризуются тем, что для них $\pi(T)=\varepsilon$, и в этом смысле они противоположны K-автоморфизмам, где $\pi(T)=\nu$.

Теорема 3.8 (см. [38]). Свойство автоморфизма иметь нулевую энтропию эквивалентно любому из следующих свойств:

1) единственное исчерпывающее разбиение для T есть ε;

2) всякое двустороннее образующее разбиение для T является и односторонним;

3) существует одностороннее образующее разбиение ξ с $H(\xi)<\infty$.

§ 4. Проблема изоморфизма автоморфизмов Бернулли и K-систем

Проблема классификации динамических систем с точностью до метрического изоморфизма (проблема изоморфизма), как показывают имеющиеся в настоящее время примеры, в общей постановке является совершенно необозримой. Введение энтропии и доказательство с ее помощью существования континуума попарно неизоморфных автоморфизмов Бернулли привлекло внимание к суженной проблеме изоморфизма, относящейся к классам автоморфизмов Бернулли и K-автоморфизмов. Для них проблема изоморфизма ставится как своеобразная проблема кодирования. В случае, например, автоморфизмов Бернулли с разными пространствами состояний (разными алфавитами) требуется закодировать последовательности, записанные в одном алфавите, в последовательности, записанные в другом алфавите. При этом необходимо, чтобы сдвинутые последовательности кодировались также сдвинутыми последовательностями.

Два автоморфизма Бернулли T_1, T_2 с конечными пространствами состояний, меры в которых задаются соответственно векторами $(p_1, \ldots, p_{m_1})$, $(q_1, \ldots, q_{m_2})$, заведомо неизоморфны, если $h(T_1) \neq h(T_2)$, т. е. $-\Sigma p_i \ln p_i \neq -\Sigma q_i \ln q_i$. Следующий пример, построенный Л. Д. Мешалкиным [28], показывает, что при $h(T_1) = h(T_2)$ автоморфизмы Бернулли T_1 и T_2 с различными (неизоморфными) пространствами состояний могут оказаться метрически изоморфными.

Пусть $Y^{(1)} = \{a_i\}_{i=1}^{4}$, $Y^{(2)} = \{b_j\}_{j=0}^{4}$, и меры $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ на $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ задаются соответственно векторами (1/4, 1/4, 1/4, 1/4), (1/2, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8). Пусть $T_l\,(l=1, 2)$ — автоморфизм Бернулли, действующий на $M_l = \prod\limits_{n=-\infty}^{\infty} Y_n^{(l)}$, $Y_n^{(l)} \equiv Y^{(l)}$ с инвариантной мерой $\mu_l = \prod\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n^{(l)}$, $\sigma_n^{(l)} \equiv \sigma^{(l)}$. Рассмотрим отображение $\varphi: M_1 \to M_2$, переводящее $x^{(1)} = (\ldots, a_{i_{-1}}, a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots)$ в $x^{(2)} = (\ldots, b_{j_{-1}}, b_{j_0}, b_{j_1}, \ldots)$ по следующему правилу: если $i_n = 1$ или 2, то $j_n = 0$; если $i_n = 3$ (соответственно 4), то находим сначала наибольшее $n_1 < n$, для которого $\operatorname{card}(\{k: n_1 \leqslant k \leqslant n,\ i_k = 1$ или $2\}) = \operatorname{card}(\{k: n_1 \leqslant k \leqslant n,\ i_k = 3$ или $4\})$. С вероятностью 1 такое n_1 существует. Ясно, что $i_{n_1} = 1$ или 2, и мы полагаем $j_n = 1$ (соответственно 3), если $i_{n_1} = 1$; $j_n = 2$ (соответственно 4), если $i_{n_1} = 2$. Легко проверить, что φ задает метрический изоморфизм T_1 и T_2.

Приведенная конструкция, хотя и допускает некоторые обобщения, применима лишь к автоморфизмам Бернулли специального вида. Первый результат общего характера, относящийся к проблеме изоморфизма автоморфизмов Бернулли, был связан с понятием слабого изоморфизма.

Определение 4.1. Две динамические системы называются слабо изоморфными, если каждая из них метрически изоморфна факторсистеме другой.

Теорема 4.1 (Я. Г. Синай [43]). Любые два автоморфизма Бернулли с одинаковой энтропией слабо изоморфны.

Эта теорема является непосредственным следствием более общего результата:

Теорема 4.2 (Я. Г. Синай [43]). Если T_1 — эргодический автоморфизм пространства Лебега, T_2 — автоморфизм Бернулли с $h(T_2) < \infty$, $h(T_2) \leqslant h(T_1)$, то T_2 метрически изоморфен некоторому факторавтоморфизму автоморфизма T_1.

Из слабого изоморфизма динамических систем, вообще говоря, не вытекает метрический изоморфизм, но соответствующие примеры сложны (см. Рудольф [105]). Окончательное решение проблемы изоморфизма для автоморфизмов Бернулли дается следующей теоремой Орнстейна.

Теорема 4.3 (Орнстейн (D. Ornstein) [100]). Любые два автоморфизма Бернулли T_1, T_2, для которых $h(T_1)=h(T_2)$, метрически изоморфны.

В теореме Орнстейна пространства состояний для T_1, T_2 не предполагаются конечными или счетными, случай $h(T_1)=h(T_2)=\infty$ также не исключается. Таким образом, энтропия является полным метрическим инвариантом автоморфизмов Бернулли.

Мы дадим краткий обзор понятий и фактов, на которых основано доказательство этой важной теоремы, а затем приведем ряд дальнейших результатов, относящихся к проблеме изоморфизма K-автоморфизмов и K-потоков.

Определение 4.2. Измеримое разбиение ξ пространства Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$ называется *бернуллиевским* относительно автоморфизма $T: M\to M$, если все его сдвиги $T^n\xi$, $-\infty<n<\infty$, независимы. Автоморфизм T называется *B-автоморфизмом*, если он имеет бернуллиевское образующее разбиение.

Класс B-автоморфизмов, очевидно, совпадает с классом автоморфизмов, метрически изоморфных автоморфизмам Бернулли. Приведенное определение — просто «бескоординатная» версия определения автоморфизма Бернулли, удобная в вопросах, связанных с проблемой изоморфизма.

Если бернуллиевская образующая ξ для T конечна, то соответствующий автоморфизм Бернулли имеет конечное число состояний.

Ниже часто будут встречаться пары (T, ξ), где T — эргодический автоморфизм пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$, ξ — разбиение M. Не оговаривая особо, мы будем считать, что $\xi=(C_1, \ldots, C_r)$ — конечное измеримое разбиение, и порядок его элементов фиксирован (т. е. ξ — упорядоченное разбиение), M — пространство Лебега с непрерывной мерой. Каждой паре (T, ξ) естественно сопоставляется случайный процесс с r состояниями или, иными словами, инвариантная относительно сдвига мера в пространстве $M^{(r)}$ двусторонних последовательностей из r символов. Две пары (T_1, ξ_1), (T_2, ξ_2) считаются эквивалентными: $(T_1, \xi_1)\sim(T_2, \xi_2)$, если им отвечает одна и та же мера на $M^{(r)}$. Иногда пару (T, ξ) называют процессом, отождествляя ее с отвечающим ей случайным процессом.

Расстояние Орнстейна между парами (T_1, ξ_1), (T_2, ξ_2). Сначала для двух упорядоченных разбиений $\xi_1=(C_1, \ldots, C_r)$, $\xi_2=(D_1, \ldots, D_r)$ пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$ введем расстояние

$$\rho(\xi_1, \xi_2)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{1<i,j<r\\ i\neq j}}\mu(C_i\cap D_j).$$

Пусть теперь $\{\xi_1^{(k)}\}_{k=0}^{n-1}$ (соответственно, $\{\xi_2^{(k)}\}_{k=0}^{n-1}$) — последовательность из $n\geqslant 1$ разбиений пространства $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ (соответственно, $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$), и каждое разбиение состоит из r элементов. Рассмотрим новое пространство $(M, \mathcal{M}, \mu)$ и отображения $\Phi_l : M_l \to M$ $(l=1, 2)$, задающие изоморфизм M_l и M. Разбиение $\xi_l^{(k)}$ под действием Φ_l перейдет в разбиение $\Phi_l(\xi_l^{(k)})$ пространства M $(l=1, 2;\ k=0, 1, \ldots, n-1)$. Положим

$$\bar{d}_{\Phi_1, \Phi_2}\left(\{\xi_1^{(k)}\}_0^{n-1}, \{\xi_2^{(k)}\}_0^{n-1}\right) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(\Phi_1(\xi_1^{(k)}), \Phi_2(\xi_2^{(k)})\right),$$

$$\bar{d}\left(\{\xi_1^{(k)}\}_0^{n-1}, \{\xi_2^{(k)}\}_0^{n-1}\right) \overset{\text{def}}{=} \inf_{\Phi_1, \Phi_2} \bar{d}_{\Phi_1, \Phi_2}\left(\{\xi_1^{(k)}\}_0^{n-1}, \{\xi_2^{(k)}\}_0^{n-1}\right),$$

где нижняя грань берется по всевозможным отображениям Φ_1, Φ_2, задающим изоморфизмы M_1, M_2 с M. Ясно, что $\bar{d}$ не зависит от выбора M и что всегда $0 \leqslant \bar{d} \leqslant 1$. Если T_l — автоморфизм пространства M_l, ξ_l — разбиение M_l $(l=1, 2)$, то при $n \geqslant 1$ положим

$$\bar{d}_n((T_1, \xi_1), (T_2, \xi_2)) \overset{\text{def}}{=} \bar{d}\left(\{T_1^k \xi_1\}_0^{n-1}, \{T_2^k \xi_2\}_0^{n-1}\right).$$

Определение 4.3. Расстоянием Орнстейна между парами (T_1, ξ_1), (T_2, ξ_2) называется величина

$$\bar{d}((T_1, \xi_1), (T_2, \xi_2)) = \overline{\lim_{n}}\, \bar{d}_n((T_1, \xi_1), (T_2, \xi_2)). \tag{3.1}$$

В правой части (3.1) верхний предел можно заменить на обычный, так как $\lim\limits_n \bar{d}_n$ всегда существует.

Отсюда следует, что для $\bar{d}$ выполнено неравенство треугольника.

Чтобы прояснить смысл метрики Орнстейна $\bar{d}$, введем для рассмотренных последовательностей $\{\xi_1^{(k)}\}_0^{n-1}$, $\{\xi_2^{(k)}\}_0^{n-1}$ меры $\nu_n^{(1)}$, $\nu_n^{(2)}$ на пространстве $M_n^{(r)}$ всех последовательностей I вида $I=(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1})$, $1 \leqslant i_k \leqslant r$, i_k — целые:

$$\nu_n^{(l)}(I) = \mu_l\left(C_{i_0, 0}^{(l)} \cap C_{i_1, 1}^{(l)} \cap \ldots \cap C_{i_{n-1}, n-1}^{(l)}\right),$$

где $C_{1,k}^{(l)}, \ldots, C_{r,k}^{(l)}$ — элементы разбиений $\xi_l^{(k)}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$; $l=1, 2$. Если $\{\xi_1^{(k)}\}$, $\{\xi_2^{(k)}\}$ имеют вид $\{T_1^k \xi_1\}_0^{n-1}$, $\{T_2^k \xi_2\}_0^{n-1}$, то меры $\nu_n^{(1)}$, $\nu_n^{(2)}$ — это конечномерные распределения случайных процессов, отвечающих парам (T_1, ξ_1), (T_2, ξ_2), а $\bar{d}_n((T_1, \xi_1), (T_2, \xi_2))$ фактически служит расстоянием между $\nu_n^{(1)}$, $\nu_n^{(2)}$. Равенство $\bar{d}((T_1, \xi_1), (T_2, \xi_2)) = 0$ означает, что $(T_1, \xi_1) \sim (T_2, \xi_2)$, или, иными словами, что факторавтоморфизмы $T_1 | (\xi_1)_{T_1}$, $T_2 | (\xi_2)_{T_2}$ метрически изоморфны $\left(\text{здесь } \xi_T = \bigvee\limits_{-\infty}^{\infty} T^n \xi\right)$, Таким образом, $\bar{d}$ есть метрика на множестве классов эквивалентности пар (T, ξ).

Метрика $\bar{d}(\{\xi_1^{(k)}\}_0^{n-1}, \{\xi_2^{(k)}\}_0^{n-1})$ может быть получена из следующей общей конструкции, впервые предложенной Л. В. Канторовичем и Г. Ш. Рубинштейном (см. русский перевод [100]). Пусть X — метризуемое топологическое пространство, $\mathrm{Mes}(X)$ — пространство нормированных борелевских мер на X. Всякой метрике ρ на X можно сопоставить метрику d_ρ на $\mathrm{Mes}(X)$:

$$d_\rho(\nu_1, \nu_2) = \inf_\lambda \int\limits_{X \times X} \rho(x_1, x_2)\, d\lambda(x_1, x_2),$$

где нижняя грань берется по всем нормированным борелевским мерам λ на $X \times X$, проекции которых на первый и второй сомножитель равны соответственно ν_1 и ν_2 (т. е. $\lambda(A \times X) = \nu_1(A)$, $\lambda(X \times B) = \nu_2(B)$ для всех измеримых $A, B \subset X$). Если взять $M_n^{(r)}$ в качестве X, метрику Хемминга χ на X в качестве ρ: $\chi((i_0^{(1)}, \ldots, i_{n-1}^{(1)}), (i_0^{(2)}, \ldots, i_{n-1}^{(2)}))$ равно доле тех k, для которых $i_k^{(1)} \neq i_k^{(2)}$, то конструкция Канторовича — Рубинштейна приводит к метрике d_ρ, эквивалентной $\bar{d}$ (т. е. задающей ту же топологию, что и $\bar{d}$).

Конечно определенные разбиения. Пусть T — автоморфизм пространства $(M, \mathscr{M}, \mu)$, $\xi = (C_1, \ldots, C_r)$ — разбиение M.

Определение 4.4. Разбиение ξ называется *конечно определенным* относительно T, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и целое $n \gg 1$, что для любой пары $(\bar{T}, \bar{\xi})$, где $\bar{T}$ — автоморфизм пространства Лебега $(\bar{M}, \bar{\mathscr{M}}, \bar{\mu})$, $\bar{\xi} = (\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_r)$ — разбиение $\bar{M}$, удовлетворяющей условиям:

1) $|h(\bar{T}, \bar{\xi}) - h(T, \xi)| < \delta$,

2) $\sum\limits_{1 \leqslant i_0, i_1, \ldots, i_{n-1} \leqslant r} \left| \bar{\mu}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n-1} \bar{T}^k \bar{C}_{i_k}\right) - \mu\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n-1} T^k C_{i_k}\right)\right| < \delta$, выполнено неравенство $\bar{d}((T, \xi), (\bar{T}, \bar{\xi})) < \varepsilon$.

Иногда пару (T, ξ) называют конечно определенной, если ξ конечно определенное относительно T.

Условие конечной определенности в терминах отвечающего паре (T, ξ) стационарного процесса означает, что из близости достаточно большого набора конечномерных распределений произвольного процесса $(\bar{T}, \bar{\xi})$ к соответствующим распределениям для (T, ξ), а также близости энтропий $h(T, \xi)$, $h(\bar{T}, \bar{\xi})$ всегда следует $\bar{d}$-близость самих процессов (T, ξ), $(\bar{T}, \bar{\xi})$.

Теорема 4.4 (см. [100]). Если ξ — конечное бернуллиевское разбиение для автоморфизма T, то ξ конечно определено относительно T.

Основные этапы доказательства теоремы Орнстейна об изоморфизме автоморфизмов Бернулли. Мы ограничимся случаем автоморфизмов Бернулли с конечным числом состояний. В этом случае теорема является следствием следующего более общего утверждения.

Теорема 4.5. Если T_1 и T_2 обладают конечно определенными образующими разбиениями и $h(T_1)=h(T_2)$, то T_1 и T_2 метрически изоморфны.

Для вывода отсюда теоремы 4.3 достаточно заметить, что бернуллиевские образующие, согласно теореме 4.4, являются конечно определенными. Доказательство теоремы 4.5 распадается на два этапа.

А. Пусть пары (T_1, ξ_1), (T_2, ξ_2) таковы, что: 1) $h(T_2, \xi_2) \leqslant h(T_1, \xi_1)$; 2) ξ_2 конечно определено относительно T_2. Тогда существует такое разбиение $\tilde{\xi}_1$ пространства M_1, что фактор-автоморфизмы $T_1 | (\tilde{\xi}_1)_{T_1}$ и $T_2 | (\xi_2)_{T_2}$ метрически изоморфны, и $\rho(\xi_1, \tilde{\xi}_1) < \mathrm{const} \cdot \mathscr{D}^{1/2}$, где $\mathscr{D} = \bar{d}((T_1, \xi_1), (T_2, \xi_2))$.

Утверждение А в случае, когда T_2 — автоморфизм Бернулли, ξ_2 — его бернуллиевская образующая, уточняет теорему 4.2. Требуемое разбиение $\tilde{\xi}_1$ получается как предел индуктивно строящейся последовательности $\{\xi_1^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, $\xi_1^{(0)} = \xi_1$, такой, что $\bar{d}((T_1, \xi_1^{(n)}), (T_2, \xi_2)) \to 0$. Для предельного разбиения $\bar{d}((T_1, \tilde{\xi}_1), (T_2, \xi_2)) = 0$, т. е. $T_1 | (\tilde{\xi}_1)_{T_1}$ и $T_2 | (\xi_2)_{T_2}$ изоморфны. Индуктивный выбор $\xi_1^{(n)}$ производится с помощью следующей леммы, занимающей центральное место в доказательстве.

Лемма. Пусть (T_1, ξ_1), (T_2, ξ_2) и $\mathscr{D}$ те же, что в формулировке утверждения А. Тогда для всякого $\delta > 0$ найдется такое разбиение $\xi^{(\delta)}$ пространства M_1, что $\bar{d}((T_1, \xi_1^{(\delta)}), (T_2, \xi_2)) < \delta$, причем $\rho(\xi_1, \xi_1^{(\delta)}) \leqslant \mathrm{const} \cdot \mathscr{D}^{1/2}$.

Применяя утверждение А к парам (T_1, ξ_1), (T_2, ξ_2), фигурирующим в теореме 4.5, мы будем иметь два разбиения ξ_1 и $\tilde{\xi}_1$ пространства M_1, и для завершения доказательства достаточно заменить $\tilde{\xi}_1$ на разбиение η пространства M_1, обладающее теми же свойствами, что и $\tilde{\xi}_1$, но являющееся к тому же образующим для T_1. Возможность такой замены гарантируется следующим утверждением.

В. Пусть T — автоморфизм пространства $(M, \mathscr{M}, \mu)$; ξ, $\tilde{\xi}$ — конечно определенные относительно T разбиения, причем ξ — образующее. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $\eta^{(\varepsilon)}$, что факторавтоморфизмы $T | \tilde{\xi}_T$ и $T | \eta_T^{(\varepsilon)}$ метрически изоморфны, причем $\rho(\tilde{\xi}, \eta^{(\varepsilon)}) < \varepsilon$, и $\eta_T^{(\varepsilon)} \overset{\varepsilon}{\succ} \xi$[1].

---

[1] Мы пишем $\eta \overset{\varepsilon}{>} \xi$, если существует такое ξ', что $\rho(\xi, \xi') < \varepsilon$ и $\eta > \xi'$.

При помощи утверждения В с T_1 в роли T разбиение η строится как предел последовательности $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\eta_0=\tilde{\xi}$, где $\eta_{n+1}=\eta_n^{(\varepsilon_n)}$, $\varepsilon_n\to 0$. С ростом n разбиение η_n становится, так сказать, «все более образующим», а предельное образующее разбиение η дает возможность построить требуемый метрический изоморфизм.

Структура B-автоморфизмов. Из теорем 4.5 и 4.4 вытекает, что любой автоморфизм, имеющий конечно определенное образующее разбиение, является B-автоморфизмом. Следующий результат показывает, что свойство конечной определенности, если оно имеется у некоторого образующего разбиения, наследуется любым конечным разбиением.

Теорема 4.6. Если T есть B-автоморфизм пространства $(M, \mathscr{M}, \mu)$, $h(T)<\infty$, то любое конечное разбиение ξ пространства M является конечно определенным относительно T.

Следствие. Любой факторавтоморфизм T_1 для B-автоморфизма T с $h(T)<\infty$ также является B-автоморфизмом.

Для доказательства достаточно применить теорему 4.6 к конечному образующему разбиению ξ для T_1, рассматриваемому как разбиение пространства M, где действует T.

Результат следствия верен и при $h(T)=\infty$.

Из теоремы Орнстейна об изоморфизме легко выводится, что любой B-автоморфизм обладает корнями всех степеней (корень n-й степени из T — это такой автоморфизм Q_n, что $(Q_n)^n$ метрически изоморфен T). В качестве Q_n можно взять автоморфизм Бернулли с $h(Q_n)=\frac{1}{n}h(T)$. Других, не изоморфных автоморфизму Бернулли, корней у B-автоморфизма нет.

Для доказательства того, что некоторый автоморфизм является B-автоморфизмом, достаточно, согласно теореме Орнстейна, найти для него конечно определенное образующее разбиение. В конкретных случаях, однако, конечную определенность удобно заменить другим свойством, легче поддающимся проверке. Условимся для упорядоченного разбиения $\xi=(C_1, \ldots, C_r)$ пространства $(M, \mathscr{M}, \mu)$ и множества $D\in\mathscr{M}$, $\mu(D)>0$, через $\xi|D$ обозначать упорядоченное разбиение $(C_1\cap D, \ldots, C_r\cap D)$ пространства $(D, \mathscr{M}|D, [\mu(D)]^{-1}\cdot\mu)$, где $\mathscr{M}|D=\{A\in\mathscr{M} : A\subseteq D\}$.

Определение 4.5. Разбиение ξ пространства $(M, \mathscr{M}, \mu)$ называется *очень слабо бернуллиевским* (о. с. б.) разбиением относительно заданного на M автоморфизма T, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое целое $N=N(\varepsilon)>0$, что при любых $m\geqslant 0$ и $n\geqslant N$ существует множество A, целиком состоящее из элементов разбиения $\eta_m=\bigvee_{k=-m}^{0} T^k\xi$ и удовлетворяющее условиям:

1) $\mu(A)>1-\varepsilon$;

2) $\bar{d}(\{T^k\xi\,|\,D_1\}_0^{n-1}, \{T^k\xi\,|\,D_2\}_0^{n-1}) < \varepsilon$ для любых элементов D_1, D_2 разбиения η_m таких, что D_1, $D_2 \subseteq A$.

Условие 2) можно, очевидно, заменить условием

2′) $\bar{d}(\{T^k\xi\}_0^{n-1}, \{T^k\xi\,|\,D\}_0^{n-1}) < \varepsilon$ для любого $D \in \eta_m$ такого, что $D \subseteq A$.

Теорема 4.7. Для любого автоморфизма T классы о. с. б. разбиений и конечно определенных разбиений совпадают.

Следствие. Если ξ — о. с. б. разбиение для T, то факторавтоморфизм $T\,|\,\xi_T$ является B-автоморфизмом.

Свойство очень слабой бернуллиевости ξ часто выводят из другого, проще формулируемого свойства.

Определение 4.6. Разбиение ξ называется *слабо бернуллиевским* относительно T, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое $n > 0$, что $\bigvee_{k=-m}^{0} T^k\xi$ ε-независимо[1] от $\bigvee_{k=n}^{n+m} T^k\xi$ при всех $m \geqslant 0$.

Всякое слабо бернуллиевское для T разбиение является о. с. б. разбиением для T.

Пусть T — перемешивающий автоморфизм Маркова, действующий в пространстве M двусторонних последовательностей $x = (\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots)$, $y_i \in Y$, где $Y = \{a_1, \ldots, a_r\}$ — конечное множество. Образующее разбиение $\xi = (C_1, \ldots, C_r)$, $C_i = \{x \in M : y_0 = a_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, является слабо бернуллиевским для T. Отсюда вытекает, что любой перемешивающий автоморфизм Маркова является B-автоморфизмом.

Имеются примеры конечных разбиений для B-автоморфизмов, не являющихся слабо бернуллиевскими. Иначе обстоит дело с о. с. б. свойством: любое конечное разбиение, как показывают теоремы 4.6 и 4.7, является о. с. б. разбиением.

Следующая теорема позволяет устанавливать, что данное преобразование является B-автоморфизмом, не находя для него о. с. б. образующего разбиения.

Теорема 4.8. Пусть $\xi_1 \preccurlyeq \xi_2 \preccurlyeq \ldots$, $\xi_n \to \varepsilon$ — возрастающая последовательность конечных разбиений пространства $(M, \mathscr{M}, \mu)$, являющихся о. с. б. разбиениями для заданного на M автоморфизма T. Тогда T есть B-автоморфизм.

В-потоки.

Определение 4.7. Поток $\{T^t\}$ на пространстве Лебега $(M, \mathscr{M}, \mu)$ называется *В-потоком*, если T^{t_0} при некотором $t_0 \in \mathbb{R}^1$ является B-автоморфизмом.

В настоящее время имеются примеры B-потоков различной природы (см. ч. II). Однако, сам факт существования хотя бы

---

[1] Разбиения $\xi = \{C_i\}$, $\eta = \{D_j\}$ ε-независимы, если $\sum_{i,j} |\mu(C_i \cap D_j) - \mu(C_i)\mu(D_j)| < \varepsilon$.

одного B-потока далеко не тривиален: до теории Орнстейна не было известно, может ли быть включен в поток какой-нибудь автоморфизм Бернулли с конечной энтропией.

Пример. Пусть T_1 — автоморфизм Бернулли, действующий в пространстве M_1 двусторонних последовательностей $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$ из нулей и единиц с мерой μ, задающейся вектором (1/2, 1/2). Рассмотрим специальный поток, построенный по T_1 и функции $f: M_1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ такой, что $f(x) = \alpha$, если $x_0 = 0$; $f(x) = \beta$, если $x_0 = 1$, и α/β иррационально, $\alpha, \beta > 0$.

Этот поток действует в пространстве $M = \{(x, t): x \in M_1, 0 \leqslant t < f(x)\}$. Разбиение $\xi = (C_1, C_2)$ пространства M такое, что $C_1 = \{(x, t) \in M: x_0 = 0\}$, $C_2 = \{(x, t) \in M: x_0 = 1\}$, является образующим для T^{t_0} при достаточно малых t_0. Можно показать, что ξ есть о. с. б. разбиение для T^{t_0}, поэтому $\{T^t\}$ есть B-поток

Теорема Орнстейна об изоморфизме переносится на B-потоки.

Теорема 4.9 (Орнстейн [100]). Любые два B-потока $\{T_1^t\}$, $\{T_2^t\}$ с $h(\{T_1^t\}) = h(\{T_2^t\})$ метрически изоморфны.

Доказательство теоремы об изоморфизме для потоков проводится в основном по той же схеме, что и для автоморфизмов, и использует аналог $\bar{d}$-метрики, которая на этот раз служит расстоянием между парами $((\{T_1^t\}, \xi_1), (\{T_2^t\}, \xi_2))$.

Проблема изоморфизма для К-систем. В то время как для автоморфизмов Бернулли полная их метрическая классификация дается теоремой Орнстейна, в случае K-систем ситуация значительно более сложная. Имеющиеся здесь результаты носят отрицательный характер. Орнстейн построил пример K-автоморфизма, метрически не изоморфного автоморфизму Бернулли. Некоторая модификация этого примера привела к построению континуума попарно не изоморфных K-автоморфизмов с одинаковой энтропией.

Существовала принадлежащая М. С. Пинскеру гипотеза о том, что всякий эргодический автоморфизм T с $h(t) > 0$ метрически изоморфен прямому произведению $T_1 \times T_2$, где T_1 — K-автоморфизм, а $h(T_2) = 0$. Справедливость этой гипотезы означала бы, что общая проблема изоморфизма для эргодических автоморфизмов сводится к двум частным случаям, относящимся к автоморфизмам с нулевой энтропией и K-автоморфизмам. Однако контрпример к гипотезе Пинскера, также построенный Орнстейном, показал, что такое сведение невозможно. Все это указывает на то, что проблема изоморфизма в классе K-систем чрезвычайно сложна.

Финитарный изоморфизм. Имеется интересное уточнение теоремы Орнстейна об изоморфизме автоморфизмов Бернулли.

Пусть M_l, $l = 1, 2$, — пространство последовательностей $x^{(l)} = (\ldots, y_{-1}^{(l)}, y_0^{(l)}, y_1^{(l)}, \ldots)$, $y_i^{(l)} \in Y^{(l)} = \{a_1, \ldots, a_{r_l}\}$, $r_1, r_2 < \infty$; $T_l: M_l \rightarrow M_l$ — автоморфизм сдвига, т. е. $T_l x^{(l)} = \tilde{x}^{(l)} = (\ldots, \tilde{y}_{-1}^{(l)},$

$\tilde{y}_0^{(l)}, \tilde{y}_1^{(l)}, \ldots), \tilde{y}_i^{(l)} = y_{i+1}^{(l)}$ с инвариантной мерой μ_l, заданной на борелевской σ-алгебре $\mathscr{M}_l$ подмножеств M_l1). Через $\pi_0: M_l \to Y$ будем обозначать проекцию: $\pi_0 x^{(l)} = y_0^{(l)}$ для $x^{(l)} = (\ldots, y_{-1}^{(l)}, y_0^{(l)}, y_1^{(l)}, \ldots)$. Для $x^{(l)} \in M_l$ и натурального n через $C_n(x^{(l)})$ обозначим цилиндрическое подмножество M_l вида $\{\bar{x}^{(l)} \in M_l: \pi_0(T^k \bar{x}^{(l)}) = \pi_0(T^k x^{(l)})$ при $|k| \leqslant n\}$.

Определение 4.8. Автоморфизмы сдвига T_1, T_2 называются *финитарно изоморфными*, если они метрически изоморфны и отображения $\Phi_1: M_1 \to M_2$, $\Phi_2: M_2 \to M_1$, $\Phi_2 = \Phi_1^{-1}$, задающие их изоморфизм, могут быть выбраны такими, что для всякой точки $x^{(l)} \in M_l$, $l = 1, 2$, из некоторого множества $A_l \in M_l$, $\mu_l(A_l) = 1$, найдется такое натуральное n, что если $\bar{x}^{(l)} \in C_n(x^{(l)})$, то $\pi_0(\Phi_l \bar{x}^{(l)}) = \pi_0(\Phi_l x^{(l)})$.

Иными словами, условие финитарности изоморфизма означает, что для почти всякой точки x любого из пространств M_1, M_2 всякая координата сопоставляемой ей точки другого пространства может быть однозначно определена, если известно достаточно большое, но конечное число координат точки x. Например, изоморфизм из примера Мешалкина (см. начало параграфа) является финитарным.

Общая конструкция Орнстейна для доказательства изоморфизма автоморфизмов Бернулли с одинаковой энтропией приводит к нефинитарному изоморфизму. Имеются примеры метрически изоморфных сдвигов в пространстве последовательностей, не являющихся финитарно изоморфными. Тем не менее, справедлива следующая

Теорема 4.10 (теорема о финитарном изоморфизме, Кин—Смородинский (M. Keane, M. Smorodinsky [84])). Любые два автоморфизма Бернулли T_1, T_2 с конечными пространствами состояний и с $h(T_1) = h(T_2)$ финитарно изоморфны.

Теорема о финитарном изоморфизме справедлива также для перемешивающих автоморфизмов Маркова (Кин—Смородинский).

§ 5. Эквивалентность динамических систем в смысле Какутани

Так как проблема метрического изоморфизма динамических систем чрезвычайно сложна, делались попытки ослабить требование изоморфизма в надежде получить более обозримую картину. Одна из самых содержательных попыток такого рода связана с принадлежащим Какутани понятием эквивалентности динамических систем.

---

1) На M_l $(l = 1, 2)$ рассматривается естественная топология прямого произведения.

Определение 5.1. Эргодические автоморфизмы T_1 и T_2 пространств Лебега $(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ называются *эквивалентными в смысле Какутани* (или просто эквивалентными), если выполнено одно из двух условий:

1) существуют такие множества $E_1 \in \mathcal{M}_1$, $E_2 \in \mathcal{M}_2$, $\mu(E_1) > 0$, $\mu(E_2) > 0$, что производные автоморфизмы $(T_1)_{E_1}$, $(T_2)_{E_2}$ метрически изоморфны;

2) существуют такие функции $f_1 \in L^1(M_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$, $f_2 \in L^1(M_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ с натуральными значениями, что интегральные автоморфизмы $(T_1)^{f_1}$, $(T_2)^{f_2}$ метрически изоморфны.

Несложно доказывается, что условия 1) и 2) эквивалентны, поэтому в определении 5.1 можно требовать выполнения лишь одного из них. Введенное отношение транзитивно и, значит, действительно является отношением эквивалентности.

Какутани ввел это отношение эквивалентности в связи с теоремой о специальном представлении потоков для того, чтобы выяснить, насколько неоднозначны такие представления.

Теорема 5.1 (Какутани, см. [101]). Эргодические автоморфизмы T_1 и T_2 могут служить базисными автоморфизмами в двух специальных представлениях одного и того же потока тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

Свойство автоморфизма иметь нулевую, положительную или бесконечную энтропию, в силу теоремы Абрамова (свойства 6, 7 энтропии автоморфизма), является инвариантом эквивалентности в смысле Какутани. Долгое время были известны лишь эти три класса неэквивалентных систем. Примеры, показывающие, что внутри указанных классов также есть неэквивалентные системы, были построены сравнительно недавно с помощью методов, в значительной степени навеянных изложенной в предыдущем параграфе теорией Орнстейна. Мы дадим краткое изложение этих методов и полученных с их помощью результатов.

Расстояние $\bar{f}$ *между парами* (T_1, ξ_1), (T_2, ξ_2). Как отмечалось в § 4, $\bar{d}$-расстояние между двумя последовательностями разбиений $\{\xi_1^{(k)}\}_0^{n-1}$, $\{\xi_2^{(k)}\}_0^{n-1}$ пространства с мерой $(M, \mathcal{M}, \mu)$. такими, что каждое разбиение $\xi_1^{(k)}$, $\xi_2^{(k)}$ состоит из $r < \infty$ элементов, может быть получено из метрики Хемминга χ в пространстве $M_n^{(r)}$ при помощи конструкции Канторовича — Рубинштейна. Введем в $M_n^{(r)}$ другую метрику, χ': для $I^{(1)} = (i_0^{(1)}, \ldots, i_{n-1}^{(1)})$, $I^{(2)} = (i_0^{(2)}, \ldots, i_{n-1}^{(2)})$ положим $\chi'(I^{(1)}, I^{(2)}) = 1 - \frac{s}{n}$, где s — максимальное целое число, для которого найдутся две последовательности $k_1 < k_2 < \ldots < k_s$, $m_1 < m_2 < \ldots < m_s$ такие, что $i_{k_p}^{(1)} = i_{m_p}^{(2)}$, $1 \leqslant p \leqslant s$. Ясно, что для любых $I^{(1)}, I^{(2)} \in M_n^{(r)}$

$$\chi'(I^{(1)}, I^{(2)}) \leqslant \chi(I^{(1)}, I^{(2)}). \qquad (3.2)$$

Применяя конструкцию Канторовича — Рубинштейна к метрике χ' вместо χ, придем к новому расстоянию $\bar{f}$ между мерами $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$ на $M_n^{(r)}$ или между отвечающими этим мерам последовательностями разбиений $\{\xi_1^{(k)}\}_0^{n-1}$, $\{\xi_2^{(k)}\}_0^{n-1}$:

$$\bar{f}(\{\xi_1^{(k)}\}_0^{n-1}, \{\xi_2^{(k)}\}_0^{n-1}) = \inf_{\lambda} \int\limits_{M_n^{(r)} \times M_n^{(r)}} \chi'(I^{(1)}, I^{(2)})\, d\lambda,$$

где нижняя грань берется по всем нормированным мерам λ на $M_n^{(r)} \times M_n^{(r)}$, для которых $\lambda(A \times M_n^{(r)}) = \nu^{(1)}(A)$, $\lambda(M_n^{(r)} \times B) = \nu^{(2)}(B)$ для любых $A, B \subset M_n^{(r)}$.

Из (3.2) вытекает, что $\bar{f}(\{\xi_1^{(k)}\}, \{\xi_2^{(k)}\}) \leqslant \bar{d}(\{\xi_1^{(k)}\}, \{\xi_2^{(k)}\})$.

Определение 5.2. Расстояние $\bar{f}$ между парами (T_1, ξ_1), (T_2, ξ_2) задается формулой

$$\bar{f}((T_1, \xi_1), (T_2, \xi_2)) = \overline{\lim_{n}}\, \bar{f}_n((T_1, \xi_1), (T_2, \xi_2)),$$

где

$$\bar{f}_n((T_1, \xi_1), (T_2, \xi_2)) = \bar{f}(\{T_1^k \xi_1\}_0^{n-1}, \{T_2^k \xi_2\}_0^{n-1}).$$

Допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что метрика $\bar{f}$ так же связана с понятием эквивалентности динамических систем в смысле Какутани, как метрика $\bar{d}$ — с понятием метрического изоморфизма. Значительная часть понятий и результатов теории Орнстейна допускает перевод с «языка $\bar{d}$-метрики» на «язык $\bar{f}$-метрики», и это приводит к глубоким результатам, относящимся к проблеме эквивалентности. Мы начнем с перевода понятия очень слабо бернуллиевского (о. с. б.) разбиения.

LB-разбиения и LB-автоморфизмы[1].

Определение 5.3. Конечное разбиение ξ пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$ называется *LB-разбиением* относительно заданного на M эргодического автоморфизма T, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое $N = N(\varepsilon) > 0$, что при любых $m \geqslant 0$ и $n \geqslant N$ существует множество A, целиком состоящее из элементов разбиения $\eta_m = \bigvee\limits_{k=-m}^{0} T^k \xi$ и удовлетворяющее условиям:

1) $\mu(A) > 1 - \varepsilon$;

2) $\bar{f}(\{T^k \xi\}_0^{n-1}, \{T^k \xi \mid D\}_0^{n-1}) < \varepsilon$ для любого элемента $D \in \eta_m$ такого, что $D \subset A$.

---

[1] Название «LB-автоморфизм» происходит от английского Loosely Bernoulli.

Автоморфизм T называется *LB-автоморфизмом*, если он обладает образующим LB-разбиением.

Из соотношения между $\bar{f}$-метрикой и $\bar{d}$-метрикой вытекает, что класс LB-автоморфизмов содержит все B-автоморфизмы с конечной энтропией. На самом деле этот класс значительно шире. Многие автоморфизмы с нулевой энтропией, в частности, эргодические сдвиги на коммутативных компактных группах, эргодические перекладывания отрезков (см. § 2 гл. 4) являются LB-автоморфизмами.

LB-свойство было введено Фельдманом (J. Feldman), использовавшим его для построения новых примеров небернуллиевских K-автоморфизмов.

Теорема 5.2 (Фельдман, см. [101]). Если T есть LB-автоморфизм, то

1) любой производный автоморфизм автоморфизма T является LB-автоморфизмом;

2) любой интегральный автоморфизм автоморфизма T является LB-автоморфизмом;

3) любой факторавтоморфизм автоморфизма T является LB-автоморфизмом.

Из 1) и 2) вытекает, что LB-свойство есть инвариант эквивалентности в смысле Какутани.

Фельдманом (см. [101]) был также построен пример эргодического автоморфизма T_0 с нулевой энтропией, не являющегося LB-автоморфизмом, т. е., в частности, не эквивалентного никакому групповому сдвигу. Используя этот пример и теорему 5.2, можно строить автоморфизмы с положительной энтропией и даже K-автоморфизмы, не обладающие LB-свойством.

Пусть T_1 — автоморфизм Бернулли на $(M_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ с двумя состояниями, имеющими вероятности $(1/2, 1/2)$, $\xi=(C_1, C_2)$ — бернуллиевское разбиение для T_1, $\mu_1(C_1)=\mu_2(C_2)=1/2$. Для любого эргодического автоморфизма T_2 пространства $(M_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ рассмотрим семейство автоморфизмов $\{T_2(x_1)\}$, $x_1 \in M_1$, пространства $M_2 : T_2(x_1)=T_2$, если $x_1 \in C_1$, $T_2(x_1)=\mathrm{Id}$, если $x_1 \in C_2$, а также отвечающее этому семейству косое произведение $T= =T_1 \times \{T_2(x_1)\}$ на $M_1 \times M_2$: $T(x_1, x_2)=(T_1 x_1, \ T_2 x_2)$, если $x_1 \in C_1$, $T(x_1, x_2)=(T_1 x_1, \ x_2)$, если $x_1 \in C_2$. Мейлисон (I. Meilijson, см. [101]) доказал, что все автоморфизмы T, построенные таким способом, являются K-автоморфизмами. Производный автоморфизм $T_{C_1 \times M_2}$, очевидно, изоморфен прямому произведению $(T_1)_{C_1} \times T_2$ и, значит, T_2 является факторавтоморфизмом этого производного автоморфизма. В силу теоремы 5.2, для того чтобы T был LB-автоморфизмом, необходимо, чтобы T_2 был LB-автоморфизмом. Если же в качестве T_2 взять упомянутый выше автоморфизм Фельдмана T_0, то косое произведение T будет K-автоморфизмом, который не только метрически не изоморфен автоморфизму Бернулли, но и не эквивалентен в смысле Какутани никакому K-автоморфизму.

Каликов (S. Kalikow) [78] доказал, что такими же свойствами обладает следующий, значительно более простой пример. Пусть T_1, как и раньше, — автоморфизм Бернулли на $(M_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ с двумя состояниями и вероятностями $(1/2, 1/2)$, а $\xi = (C_1, C_2)$ — бернуллиевское разбиение для T_1, $\mu_1(C_1) = \mu_1(C_2) = 1/2$. Пусть T_2 — такой же автоморфизм на $(M_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$. Автоморфизм T на $M_1 \times M_2$, действующий по формуле $T(x_1, x_2) = (T_1 x_1, T_2 x_2)$, если $x_1 \in C_1$, $T(x_1, x_2) = (T_1 x_1, T_2^{-1} x_2)$, если $x_1 \in C_2$, является K-автоморфизмом, но не обладает LB-свойством.

Конечно фиксированные разбиения. При доказательстве теорем об изоморфизме в теории Орнстейна вместо понятия о. с. б. разбиения используется эквивалентное ему понятие конечно определенного разбиения. Аналогичную роль в вопросах, связанных с эквивалентностью в смысле Какутани, играет следующее понятие.

Определение 5.4. Разбиение $\xi = (C_1, \ldots, C_r)$ пространства Лебега $(M, \mathscr{M}, \mu)$ называется *конечно фиксированным* относительно заданного на M эргодического автоморфизма T, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $n \geqslant 1$, что для любой пары $(\overline{T}, \overline{\xi})$, где $\overline{T}$ — эргодический автоморфизм пространства Лебега $(\overline{M}, \overline{\mathscr{M}}, \overline{\mu})$, $\overline{\xi} = (\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_r)$ — разбиение $\overline{M}$, удовлетворяющее условиям:

1) $|h(\overline{T}, \overline{\xi}) - h(T, \xi)| < \delta$,

2) $$\sum_{0 \leqslant i_0, i_1, \ldots, i_{n-1} \leqslant r} \left| \overline{\mu}\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \overline{T}^k \overline{C}_{i_k}\right) - \mu\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} T^k C_{i_k}\right) \right| < \delta,$$

выполнено неравенство $\overline{f}((T, \xi), (\overline{T}, \overline{\xi})) < \varepsilon$. Автоморфизм T называется конечно фиксированным, если он обладает конечно фиксированным образующим разбиением.

Теорема 5.3. Для любого эргодического автоморфизма T классы LB-разбиений и конечно фиксированных разбиений совпадают.

Отсюда и из теоремы 5.2 вытекает, что свойство конечной фиксированности автоморфизма инвариантно относительно эквивалентности в смысле Какутани.

Приводимые ниже теоремы 5.4 и 5.5 являются основными результатами позитивного характера, относящимися к проблеме эквивалентности в смысле Какутани. Их можно рассматривать как «$\overline{f}$-аналоги» теорем 4.2 и 4.5.

Теорема 5.4. Если T_1 — эргодический автоморфизм пространства Лебега, T_2 — конечно фиксированный автоморфизм и $h(T_2) \leqslant h(T_1)$, то существует автоморфизм T_1', эквивалентный T_1 и такой, что некоторый его факторавтоморфизм метрически изоморфен T_2.

Теорема 5.5. Если T_1, T_2 — конечно фиксированные автоморфизмы, и либо оба они имеют нулевую энтропию, либо оба имеют положительную энтропию, то они эквивалентны в смысле Какутани.

К сожалению, аналогия между «$\bar{f}$-теорией», изложенной в этом параграфе, и «$\bar{d}$-теорией» Орнстейна распространяется настолько далеко, что за пределами класса LB-автоморфизмов (подобно тому, как в теории Орнстейна — за пределами класса B-автоморфизмов) результаты в основном носят негативный характер.

Построен пример автоморфизма T, не эквивалентного в смысле Какутани T^{-1} (см. [101]). Для любого h, $0 \leqslant h \leqslant \infty$, доказано существование несчетного числа попарно не эквивалентных автоморфизмов с энтропией h (см. [101]). Имеются примеры таких LB-автоморфизмов T, что декартов квадрат $T \times T$ не является LB-автоморфизмом (см. [101]).

§ 6. Сдвиги в пространстве последовательностей и гиббсовские меры

Пусть M — пространство последовательностей $x = \{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$, где x_n принимают значения из конечного множества $C = \{C_1, \ldots, C_r\}$. Рассмотрим сдвиг T на $M: Tx = x'$, где $x_n' = x_{n+1}$. Как уже говорилось, это преобразование естественно возникает во многих задачах эргодической теории. Мы опишем сейчас широкий класс инвариантных относительно T мер с хорошими свойствами перемешивания, включающий бернуллиевские и многие марковские меры. Этот класс мер строится при помощи термодинамического формализма (см. [106], [44]).

Возьмем произвольную функцию $U = U(x_0; x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \ldots)$, которую мы будем называть потенциалом взаимодействия переменной x_0 со всеми остальными переменными x_n, $n \neq 0$. (Терминология здесь и далее заимствована из статистической механики). Естественно потребовать, чтобы основной вклад в это взаимодействие вносили переменные x_n с небольшими значениями n. Фиксируем последовательность неотрицательных чисел $\alpha = \{\alpha_n\}_1^{\infty}$, $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 6.1. Потенциал U принадлежит классу $\mathfrak{A}(\alpha)$, если найдутся постоянная $C = C(U)$ и для любого натурального n функция $U_n = U_n(x_0; x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n})$ такие, что

$$\sup_{x_m : |m| \geqslant n+1} |U(x_0; x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n}, x_{n+1}, x_{-n-1}, \ldots) - U_n(x_0; x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n})| \leqslant C\alpha_n.$$

Последнее соотношение означает, что значение функции U меняется не больше, чем на $2C\alpha_n$, при произвольных вариациях переменных x_m, $|m| \geqslant n+1$.

Мы будем рассматривать классы $\mathfrak{A}(\alpha)$, для которых $\Sigma\alpha_n < \infty$. Смысл этого условия заключается в следующем. Возьмем последовательность $x = \{x_n\}$ и отрезок $[a, b]$. Положим $x' =$

$=\{x_n'\}$, где $x_n'=x_n$ при $n\notin[a,b]$, $x_n'=c$ при $n\in[a,b]$, и введем сумму

$$H(\{x_k\}_a^b \mid \{x_k\},\ k\notin[a,b]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [U(x_k;\ x_{k+1}, x_{k-1}, \dots) - \\ - U(x_k';\ x_{k+1}', x_{k-1}', \dots)].$$

Если $\Sigma\alpha_n<\infty$, то эта сумма конечна; x' можно было бы определить и иначе, фиксировав другую последовательность в отрезке $[a,b]$. Чуть ниже (см. определение 6.2) станет ясно, что конкретный выбор x_n', $n\in[a,b]$, является несущественным. Величину $H(\{x_k\}_a^b \mid \{x_k\},\ k\notin[a,b])$ мы будем называть энергией конфигурации $\{x_k\}_a^b$ при граничном условии $\{x_k\}$, $k\notin[a,b]$.

Определение 6.2. *Условным распределением Гиббса* в отрезке $[a,b]$ при условии $\{x_k\}$, $k\notin[a,b]$, отвечающим потенциалу U, называется распределение вероятностей на пространстве конечных последовательностей $\{x_k\}$, $a\leqslant k\leqslant b$, для которого

$$P(\{x_k\},\ a\leqslant k\leqslant b \mid \{x_k\}, k\notin[a,b]) = \frac{\exp(-H(\{x_k\}_a^b \mid \{x_k\},\ k\notin[a,b]))}{\Xi(\{x_k\},\ k\notin[a,b])}.$$

Здесь $\Xi(\{x_k\},\ k\notin[a,b])$ — нормирующий множитель, называемый статистической суммой:

$$\Xi(\{x_k\},\ k\notin[a,b]) = \sum_{\{x_k\}_a^b} \exp(-H(\{x_k\}_a^b \mid \{x_k\},\ k\notin[a,b])).$$

Пусть теперь μ — произвольная мера на M. Для любого отрезка $[a,b]$ рассмотрим измеримое разбиение $\xi_{[a,b]}$, элементы которого получаются при фиксировании всех x_n, $n\notin[a,b]$.

Определение 6.3. Мера μ в пространстве M называется *гиббсовской* относительно потенциала U, если для любого отрезка $[a,b]$ условная мера на μ-почти всех $C_{\xi_{[a,b]}}$ является условным распределением Гиббса.

В другой ситуации гиббсовские меры вводятся в части III, глава 10.

Теорема 6.1. Если $\Sigma\alpha_n<\infty$, то хотя бы одна гиббсовская мера для потенциала U существует.

Гиббсовская мера, не обязательно инвариантная относительно T, строится достаточно просто. Для возрастающей последовательности отрезков $[a_i,b_i]$, $\bigcup_i[a_i,b_i]=\mathbf{Z}$, и произвольной согласованной последовательности граничных условий $\{x_k\}$, $k\notin[a_i,b_i]$, построим с помощью определения 6.2 последовательность условных гиббсовских распределений для конфигураций в отрезках $[a_i,b_i]$. Слабая предельная точка этой последовательности будет, как легко проверить, гиббсовской мерой. Сдвиги этой меры (ее образы под действием T^n, $n\in\mathbf{Z}$) и средние арифметические этих сдвигов также будут гиббсовскими мерами. Предельная точка последовательности средних арифметических даст гиббсовскую меру, инвариантную относительно сдвига.

Имеются примеры медленно убывающих последовательностей $\alpha=\{\alpha_n\}$ и потенциалов из классов $\mathfrak{A}(\alpha)$, для которых гиббсовская мера не единственна. Проблема построения и анализа таких мер тесно связана с теорией фазовых переходов в статистической механике, и мы ее не будем здесь касаться. Нас, наоборот, будет интересовать противоположный случай быстрого убывания α_n.

Теорема 6.2 (см. [106]). Если $\alpha=\{\alpha_n\}$ такова, что $\Sigma n\alpha_n<\infty$, то гиббсовская мера μ_0, отвечающая потенциалу $U\in\mathfrak{A}(\alpha)$, единственна. Динамическая система (M, μ_0, T) являетмя бернуллиевской (B-системой).

Поясним смысл условия $\Sigma n\cdot\alpha_n<\infty$. Возьмем большой отрезок $[a, b]$ и рассмотрим энергию $H(\{x_k\}_a{}^b|\{x_k\}, k\notin[a, b])$. Тогда если $\Sigma n\cdot\alpha_n<\infty$, то разность $H(\{x_k\}_a{}^b|\{\bar{x}_k\}, k\notin[a, b])-$ $-H(\{x_k\}_a{}^b|\{\bar{\bar{x}}_k\}, k\in[a, b])$ при двух разных граничных условиях $\{\bar{x}_k\}$, $\{\bar{\bar{x}}_k\}$ ограничена постоянной, не зависящей от $[a, b]$, т. е. условные распределения Гиббса при разных граничных условиях эквивалентны, и плотность равномерно ограничена сверху и снизу. Отсюда уже нетрудно вывести утверждение о единственности.

Вариационный принцип для гиббсовских мер.

Для произвольной инвариантной относительно T меры μ составим выражение $P(\mu)=-\int U(x)d\mu+h_\mu(T)$, где $h_\mu(T)$ — энтропия T (по мере μ). Гиббсовская мера μ_0 однозначно определяется тем, что

$$P(\mu_0)=\max_{\mu} P(\mu),$$

где max берется по всем мерам, инвариантным относительно сдвига.

В главе 7, § 3 (ч. II) аналогичный вариационный принцип встретится в теории гладких гиперболических систем.

Гиббсовские меры удобны тем, что задаются с помощью достаточно простого параметра — потенциала взаимодействия U. Пусть

$$U_1,\ U_2\in\mathfrak{A}(\alpha),\ \Sigma n\alpha_n<\infty,$$

таковы, что отвечающие им гиббсовские меры совпадают. Тогда U_1 и U_2 связаны гомологическим уравнением $U_1(x)=U_2(x)+$ $+V(Tx)-V(x)$, где $V\in\mathfrak{A}(\alpha')$, $\alpha_n'=n\alpha_n$ (см. [44]).

В случае гиббсовских мер можно достаточно полно исследовать скорость убывания корреляций. Особенно просто исследуется экспоненциальный случай, когда $\alpha_n=\rho^n$, $0<\rho<1$.

Теорема 6.3 (см. [106]). Пусть $U\in\mathfrak{A}(\{\rho^n\})$, μ — соответствующая гиббсовская мера, $f(x)$, $x\in M$, такова, что найдутся по-

последовательность функций $f_n(x)=f_n(x_{-n},\ldots,x_n)$ и положительные числа $C<\infty$, $\rho_1<1$, для которых

$$\sup_x|f(x)-f_n(x)|\leqslant C\rho_1^n.$$

Тогда

$$\left|\int f(T^n x)f(x)\,d\mu-\left(\int f\,d\mu\right)^2\right|\leqslant K\lambda^n$$

при некоторых положительных K и $\lambda<1$.

В приложениях гиббсовские меры встречаются в более общей ситуации. Пусть $\Pi=\|\pi_{ij}\|$ — матрица порядка r, и матричные элементы π_{ij} принимают значения 1 и 0. Мы будем рассматривать так называемый транзитивный случай, когда при некотором $m>0$ все элементы матрицы Π^m положительны. Введем пространство M_Π, состоящее из таких последовательностей $x\in M$, что $\pi_{x_n,x_{n+1}}=1$, $-\infty<n<\infty$. Иными словами, Π определяет, какие символы могут стоять рядом в последовательности x. Рассмотренная выше ситуация является частным случаем, когда $\pi_{ij}\equiv 1$.

Сдвиг $\{T^t\}$ на M_Π называется *топологической цепью Маркова.* Мерой с максимальной энтропией для сдвига T называется такая инвариантная мера μ_0, что $h_{\mu_0}(T)=\max\limits_{\mu} h_\mu(T)$, где max берется по всем инвариантным мерам μ. Такая мера μ_0 строится явно. А именно, пусть $e=\{e_i\}_1^r$ — собственный вектор для Π с положительными компонентами и с положительным собственным значением λ, т. е. $\Pi e=\lambda e$, и $e^*=\{e_i{}^*\}_1^r$ — аналогичный вектор для Π^*, т. е. $\Pi^* e^*=\lambda e^*$. Существование e, e^* вытекает из известной теоремы Перрона—Фробениуса, и $\lambda>1$ из-за целочисленности π_{ij}. Мера μ_0 есть марковская мера с вероятностями перехода $p_{ij}=\pi_{ij}e_j/\lambda e_i$ и стационарным распределением $\{e_ie_i{}^*\}_1^r$. Предполагается, что e, e^* нормированы так, что $\sum\limits_{i=1}^r e_ie_i{}^*=1$.

Теорема 6.4. Пусть O_n — множество точек периода n для T, т. е. таких точек x, что $T^n x=x$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\operatorname{card}(O_n)=\ln\lambda$,

2) для любой $f\in C(M_\Pi)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\operatorname{card}(O_n)}\sum_{x\in O_n}f(x)=\int f\,d\mu_0.$$

Иными словами, периодические точки T распределены равномерно по мере μ_0 в пространстве M_Π. В главе 7 части II приводится далекое обобщение этой теоремы.

Для пространства M_Π без всяких изменений вводится понятие условного распределения Гиббса и гиббсовской меры, переносятся теоремы 6.1 и 6.2 и вариационный принцип. В частности, мера с максимальной энтропией может быть определена с помощью вариационного принципа при $U=0$.

Глава 4

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ, СПЕКТРАЛЬНАЯ И ЭНТРОПИЙНАЯ ТЕОРИЯ ДЛЯ ДЕЙСТВИЙ ОБЩИХ ГРУПП

А. М. Вершик, И. П. Корнфельд

§ 1. Теория аппроксимации динамических систем периодическими динамическими системами. Потоки на двумерном торе[1]

Простейшимч, с точки зрения поведения траекторий, динамическими системами (д. с.) являются периодические д. с., все траектории которых имеют один и тот же период. Периодические д. с. служат удобным инструментом для аппроксимации д. с. общего вида подобно тому, как в конструктивной теории функций полиномами или рациональными функциями аппроксимируют более сложные функции. «Отправным пунктом» при изучении аппроксимаций д. с. периодическими преобразованиями служит следующее утверждение, указывающее на саму возможность такой аппроксимации.

Определение 1.1. Автоморфизм T называется апериодическим, если множество его периодических точек имеет меру нуль.

Теорема 1.1 (лемма Рохлина—Халмоша, см. Халмош (P. Halmos) [74]). Если T — апериодический автоморфизм пространства Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$, то для любых $\varepsilon > 0$ и натурального n найдется такое множество $E \in \mathcal{M}$, что

1) $T^iE \cap T^jE = \varnothing$ при $0 \leqslant i \neq j \leqslant n-1$;

2) $\mu\left(\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} T^iE\right) > 1-\varepsilon$.

Из леммы Рохлина—Халмоша непосредственно выводится следующее важное

Следствие. Множество периодических автоморфизмов плотно в пространстве всех автоморфизмов пространства Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$, снабженном равномерной топологией, т. е. топологией, задаваемой метрикой $d(T_1, T_2) = \sup\limits_{E \in \mathcal{M}} \mu(T_1E \Delta T_2E)$.

Многие свойства динамических систем можно связать с величинами, характеризующими скорость аппроксимации этих

---

[1] В написании §§ 1 и 2 принимал участие Е. А. Сатаев.

систем периодическими. Для получения конкретных результатов такого рода следует сначала уточнить понятие скорости аппроксимации.

Определение 1.2. Пусть $f(n)\searrow 0$. Автоморфизм T пространства Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$ допускает *аппроксимацию первого рода периодическими преобразованиями* (а. п. п. I) со скоростью $f(n)$, если найдутся последовательность конечных разбиений ξ_n пространства M, $\xi_n \to \varepsilon$, и последовательность автоморфизмов T_n такие, что

1) T_n сохраняет ξ_n, т. е. переводит каждый элемент ξ_n в элемент того же разбиения;

2) $\sum\limits_{i=1}^{q_n} \mu(TC_i^{(n)} \Delta T_n C_i^{(n)}) < f(q_n)$, $n=1, 2, \ldots$, где $\{C_i^{(n)}\}$, $1 \leqslant i \leqslant q_n$, — набор всех элементов разбиения ξ_n.

Если, кроме 1), 2), выполнено условие

3) T_n циклически переставляет элементы ξ_n, то говорят, что T допускает *циклическую а. п. п.* I со скоростью $f(n)$.

Если последовательности разбиений $\{\xi_n\}$, $\xi_n = \{C_i^{(n)}\}_1^{q_n}$, и периодических автоморфизмов T_n таковы, что

1′) T_n сохраняет ξ_n;

2′) $\sum\limits_{i=1}^{q_n} \mu(TC_i^{(n)} \Delta T_n C_i^{(n)}) < f(p_n)$, где p_n — порядок T_n, т. е. $p_n = \min\{p \geqslant 1 : T_n^p = \mathrm{Id}\}$;

3′) имеется сходимость сопряженных с динамическими системами унитарных операторов $U_{T^n} \to U_T$ в сильной операторной топологии, то говорят, что T допускает *аппроксимацию второго рода периодическими преобразованиями* (а. п. п. II) со скоростью $f(n)$.

Приведем определение аппроксимаций для случая непрерывного времени.

Определение 1.3. Пусть $g(u)\searrow 0$ при $u \to \infty$. Поток $\{T^t\}$ на пространстве Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$ допускает аппроксимацию первого рода периодическими преобразованиями (а. п. п. I) со скоростью $g(u)$, если существуют такие последовательности действительных чисел t_n, разбиений ξ_n пространства M на q_n множеств $C_i^{(n)} \in \mathcal{M}$ и автоморфизмов S_n пространства M, что

1) $\xi_n \to \varepsilon$;

2) S_n сохраняет ξ_n;

3) $\sum\limits_{i=1}^{q_n} \mu(T^{t_n} C_i^{(n)} \Delta S_n C_i^{(n)}) < g(q_n)$;

4) $p_n t_n \to \infty$, где p_n — порядок S_n как перестановки множеств $C_i^{(n)}$, т. е. $p_n = \min\{p \geqslant 1\colon S_n^p C_i^{(n)} = C_i^{(n)}, 1 \leqslant i \leqslant q_n\}$.

Если, кроме 1)—4), выполнено

5) S_n циклически переставляет множества $C_i^{(n)}$, то говорят, что поток $\{T^t\}$ допускает циклическую аппроксимацию со скоростью g.

Если последовательности чисел $\{t_n\}$, разбиений $\{\xi_n\}$ и периодических автоморфизмов $\{S_n\}$ таковы, что

1′) $\xi_n \to \varepsilon$;

2′) S_n сохраняет ξ_n;

3′) $p_n t_n \to \infty$, где p_n — порядок S_n как перестановки элементов $C_i^{(n)}$ разбиения ξ_n;

4′) $\sum\limits_{i=1}^{q_n} \mu(T^{t_n} C_i^{(n)} \Delta S_n C_i^{(n)}) < g(p_n)$;

5′) для любого элемента $f \in L^2(M, \mathcal{M}, \mu)$ имеет место сходимость $\| U_{T^{t_n}} f - U_{S_n} f \| \to 0$ при $n \to \infty$, то поток $\{T^t\}$ допускает аппроксимацию второго рода периодическими преобразованиями (а. п. п. II) со скоростью g.

Пример. Пусть $T = T_\alpha$ — поворот окружности S^1 на иррациональный угол α, т. е. $Tx = x + \alpha \pmod 1$, $x \in [0, 1)$, и пусть $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\alpha_n = p_n / q_n$, — последовательность несократимых дробей, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Допустим, что для некоторой функции $f(n)$ такой, что $n \cdot f(n) \searrow 0$, выполнены неравенства

$$|\alpha - p_n/q_n| < f(q_n), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.1}$$

Рассматривая разбиения $\xi_n = \{C_i^{(n)}\}_1^{q_n}$, $C_i^{(n)} = \left[\frac{i-1}{q_n}, \frac{i}{q_n}\right)$ и автоморфизмы $T_n = T_{\alpha_n}$ поворота окружности на α_n, мы убедимся, что T_α допускает циклическую аппроксимацию со скоростью $2n \cdot f(n)$. В теории непрерывных дробей доказывается, что при $f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}\, n^2}$ для всякого α найдется $\{p_n/q_n\}_1^\infty$, удовлетворяющая (4.1). Поэтому любой автоморфизм поворота T_α допускает циклическую аппроксимацию со скоростью $f(n) = \frac{2}{\sqrt{5}\, n}$.

Естественно ожидать, что чем быстрее д. с. аппроксимируется периодическими преобразованиями, тем хуже ее статистические свойства. Приведем ряд точных утверждений о связи перемешивания, спектра, энтропии д. с. со скоростью аппроксимации.

Теорема 1.2 (см. [20]). Если автоморфизм T (поток $\{T^t\}$) допускает а. п. п. II со скоростью $f(n) = \theta/n$, где $\theta < 2$, то T ($\{T^t\}$) не обладает перемешиванием.

Теорема 1.3 (см. [20]). Если автоморфизм T (поток $\{T^t\}$) допускает циклическую аппроксимацию со скоростью $f(n) = \theta/n$, $\theta < 1/2$, то унитарный оператор U_T (группа унитарных операторов $\{U_{T^t}\}$) имеет простой спектр.

Теорема 1.4 (см. [20]). Если автоморфизм T (поток $\{T^t\}$) допускает а. п. п. II со скоростью $f(n)=\theta/n$, $\theta<1/2$, то максимальный спектральный тип унитарного оператора U_T (группы унитарных операторов $\{U_{T^t}\}$) сингулярен относительно меры Лебега.

Теорема 1.5 (см. [20]). Если T — эргодический автоморфизм с энтропией $h(T)$, то $h(T)=1/2\ c(T)$, где $c(T)$ — нижняя грань множества таких чисел θ, что T допускает а. п. п. I со скоростью $f(n)=\theta/\ln n$.

Что касается свойства эргодичности д. с., то здесь имеет место в некотором смысле противоположное утверждение: достаточно хорошая циклическая аппроксимация гарантирует эргодичность автоморфизма.

Теорема 1.6 (см. [20]). Если автоморфизм T допускает циклическую аппроксимацию со скоростью $f(n)=\theta/n$, $\theta\geqslant 2$, то число его эргодических компонент не превосходит $\theta/2$.

Следствие. Если T допускает циклическую аппроксимацию со скоростью $f(n)=\theta/n$, $\theta<4$, то T эргодичен.

Для скорости аппроксимации (в смысле а. п. п. I) имеется оценка снизу, справедливая на всем классе автоморфизмов. Эту оценку можно рассматривать как некоторое уточнение леммы Рохлина—Халмоша.

Теорема 1.7 (см. [20]). Всякий автоморфизм T допускает а. п. п. I со скоростью $f(n)=a_n/\ln n$, где $\{a_n\}$ — произвольная монотонная последовательность действительных чисел, стремящихся к бесконечности.

Оценки сверху для скорости аппроксимации, справедливой для всех автоморфизмов, не существует. Более того, рассмотренный в § 2 главы 2 автоморфизм T с чисто точечным спектром, состоящим из чисел вида $\exp 2\pi i p/2^q$, обладает тем свойством, что для любой $f(n)\searrow 0$ он допускает циклическую аппроксимацию со скоростью $f(n)$.

Важность метода аппроксимаций д. с. периодическими преобразованиями в значительной степени связана с тем, что он позволяет строить конкретные примеры д. с. с нетривиальными метрическими и спектральными свойствами.

С помощью аппроксимаций строится такой эргодический автоморфизм T, что максимальный спектральный тип σ оператора U_T не подчиняет свою свертку $\sigma*\sigma$ (см. [20]). Смысл этого примера в следующем: для эргодических автоморфизмов с чисто точечным спектром свойство максимального спектрального типа σ оператора U_T подчинять свертку $\sigma*\sigma$ непосредственно вытекает из того, что множество собственных значений U_T есть группа. До введения аппроксимаций существовала гипотеза о том, что это свойство, называемое групповым свойством спектра, имеется у любого эргодического автоморфизма.

Были построены примеры автоморфизмов с непрерывным спектром, не имеющие квадратного корня (см. [20]).

Метод аппроксимаций позволил также полностью исследовать спектральные свойства гладких эргодических д. с. на двумерном торе. Пусть на торе $M=\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ с циклическими координатами u, v и нормированной мерой Лебега $du\,dv$ задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt}=A(u, v), \quad \frac{dv}{dt}=B(u, v) \tag{4.2}$$

с правыми частями класса C^r, $r \geqslant 2$. Введем поток $\{T^t\}$ на M как однопараметрическую группу сдвигов вдоль решений системы (4.2) и предположим, что $\{T^t\}$ обладает абсолютно непрерывной относительно $du\,dv$ инвариантной мерой μ с плотностью $P(u, v)$ класса C^5, а также, что $A^2+B^2>0$, т. е. что у системы (4.2) нет неподвижных точек.

Число $\lambda=\lambda_1/\lambda_2$, где $\lambda_1=\iint\limits_M PAdudv$, $\lambda_2=\iint\limits_M PBdudv$, называется числом вращения системы (4.2). Спектральные свойства потока $\{T^t\}$ с инвариантной мерой μ существенно зависят от скорости апрроксимации числа λ рациональными числами.

Если λ рационально или хотя бы одно из чисел λ_1, λ_2 равно нулю, то поток $\{T^t\}$ не эргодичен. При иррациональном λ изучение свойств потока $\{T^t\}$ основывается на специальном представлении этого потока.

Теорема 1.8 (А. Н. Колмогоров, см. [23]). Если λ иррационально, то поток $\{T^t\}$ метрически изоморфен специальному потоку, построенному по автоморфизму поворота окружности S^1 на иррациональный угол α вида $\alpha=\frac{m\lambda+n}{p\lambda+q}$, m, n, p, q — целые, $\det\left\|\begin{matrix} m & n \\ p & q \end{matrix}\right\|=1$, и некоторой функции $F:S^1\to\mathbf{R}^1$ класса C^5.

Идея доказательства теоремы 1.8 состоит в построении гладкой замкнутой несамопересекающейся кривой Γ на торе, всюду трансверсальной к траекториям потока $\{T^t\}$ и такой, что каждая траектория пересекает Γ бесконечное число раз как при $t>0$, так и при $t<0$. Такая кривая называется кривой Зигеля (C. Siegel) для $\{T^t\}$. Преобразование кривой Γ, переводящее каждую точку $x\in\Gamma$ в точку, где проходящая через x траектория $\{T^tx\}$ впервые при $t>0$ пересечет Γ, сопряжено повороту окружности, который и служит базисным автоморфизмом в специальном представлении потока $\{T^t\}$.

Если число λ, а вместе с ним и все числа вида $\alpha=\frac{m\lambda+n}{p\lambda+q}$, m, n, p, q — целые, $\det\left\|\begin{matrix} m & n \\ p & q \end{matrix}\right\|=1$, достаточно плохо аппроксимируется рациональными числами, то специальный поток, фигурирующий в теореме 1.8, метрически изоморфен специальному потоку с тем же базисным автоморфизмом и функцией, тождественно равной константе. Эти соображения приводят к следующей теореме.

Теорема 1.9 (А. Н. Колмогоров, см. [24]). Если λ таково, что $|\lambda-p/q| \geqslant \mathrm{const}\cdot q^{-4}$, $\mathrm{const}>0$, при всех целых p, q, $q\neq 0$, то группа унитарных операторов $\{U^t\}$, сопряженная с потоком $\{T^t\}$, имеет чисто точечный спектр, состоящий из чисел вида $\mathrm{const}\cdot(k+l\lambda)$, $-\infty<k$, $l<\infty$, k, l — целые.

Достаточно хорошая аппроксимация числа λ рациональными числами гарантирует достаточно хорошую циклическую аппроксимацию специального потока из теоремы 1.8.

Теорема 1.10 (А. Б. Каток [17]). Если для числа λ найдется последовательность несократимых дробей $\{p_n/q_n\}$ такая, что $q_n^4\cdot|\lambda-p_n/q_n|\to 0$ при $n\to\infty$, то поток $\{T^t\}$ допускает циклическую аппроксимацию со скоростью $g(u)=o(u^{-2})$.

Из теорем 1.9 и 1.10, а также из общих теорем об аппроксимациях (теоремы 1.2, 1.3, 1.4) вытекает, что при любом иррациональном λ поток $\{T^t\}$ не обладает перемешиванием, спектр сопряженной с ним группы $\{U^t\}$ простой и максимальный спектральный тип сингулярен относительно меры Лебега.

Если число вращения гладкого потока $\{T^t\}$ без неподвижных точек, заданного уравнениями (4.2), хорошо аппроксимируется рациональными числами, то $\{T^t\}$ может обладать слабым перемешиванием, т. е. спектр сопряженной группы $\{U^t\}$ может быть непрерывным в ортогональном дополнении к подпространству констант (А. Н. Колмогоров [23]). Соответствующая конструкция содержится в работе М. Д. Шкловера [49]. Имеется усовершенствование этой конструкции, позволяющее строить примеры более общего вида (Д. В. Аносов [2]).

Эргодические свойства гладких потоков на торе, имеющих неподвижные точки, могут быть существенно иными. В [26] построен пример гладкого потока с состояниями равновесия на двумерном торе, который обладает перемешиванием. Для потока $\{T^t\}$ без неподвижных точек на торе, заданного уравнениями вида (4.2) с непрерывными, но не обязательно гладкими правыми частями, спектр сопряженной с ним группы $\{U^t\}$ может иметь как непрерывную, так и дискретную компоненту [27].

§ 2. Потоки на поверхностях рода $p\geqslant 1$ и перекладывания

Методы, близкие к теории аппроксимаций, позволяют изучать эргодические свойства гладких потоков не только на торе, но и на ориентируемых поверхностях рода $p\geqslant 1$. Для таких потоков при достаточно общих предположениях также строится секущая (подобно кривой Зигеля для потоков на торе) и с ее помощью — специальное представление. Однако базисными автоморфизмами будут в этом случае преобразования более общего вида, чем повороты окружности — так называемые перекладывания. Их изучение представляет и самостоятельный интерес.

Пусть пространство M есть полуинтервал $[0,1)$; $\xi = (\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$ — разбиение M на r, $2 \leqslant r < \infty$, непересекающихся полуинтервалов, занумерованных слева направо; $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_r)$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, r$.

Определение 2.1. Преобразование $T: M \to M$, являющееся сдвигом на каждом из полуинтервалов Δ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, и такое, что Δ_i переставляются в соответствии с перестановкой π (т. е. полуинтервалы $\Delta_i' = T\Delta_i$ примыкают друг к другу в порядке $\Delta'_{\pi_1}, \ldots$ $\ldots, \Delta'_{\pi_r}$), называется *перекладыванием*, отвечающим разбиению ξ и перестановке π.

Всякое перекладывание является обратимым преобразованием пространства M, имеющим лишь конечное число точек разрыва и сохраняющим нормированную меру Лебега. Если перекладывание T имеет хотя бы одну периодическую точку, то оно заведомо не эргодично относительно меры Лебега, т. к. в этом случае, как нетрудно показать, найдется нетривиальное подмножество M, состоящее из конечного числа интервалов и инвариантное относительно T.

Теорема 2.1 (Кин [82]). Следующие свойства перекладывания T эквивалентны:

1) T апериодично (T не имеет периодических точек);

2) T топологически транзитивно (T имеет всюду плотную траекторию):

3) T минимально (все траектории всюду плотны);

4) $\max\limits_{1 \leqslant i_0, i_1, \ldots, i_n \leqslant r} \operatorname{diam}(\Delta_{i_0} \cap T\Delta_{i_1} \cap \ldots \cap T^n\Delta_{i_n}) \to 0$ при $n \to \infty$;

5) траектории точек разрыва T бесконечны и для разных точек разрыва не пересекаются между собой.

При $r=2$ (r — число перекладываемых полуинтервалов) перекладывание сводится к повороту окружности, а при $r=3$ — к производному автоморфизму, построенному по повороту окружности и некоторому отрезку $\Delta \subset [0,1)$. Отсюда вытекает, что при $r=2, 3$ всякое апериодическое (минимальное) перекладывание эргодично относительно меры Лебега и, более того, строго эргодично, т. е. мера Лебега — единственная инвариантная нормированная борелевская мера. Начиная с $r=4$, подобное утверждение уже неверно: имеются примеры минимальных, но не строго эргодических перекладываний 4 и более отрезков (Кин [83]). Даже эргодичность относительно меры Лебега не гарантирует строгой эргодичности перекладывания [83]. Однако число различных эргодических нормированных инвариантных мер для любого апериодического (минимального) перекладывания всегда конечно. Справедлива следующая оценка.

Теорема 2.2 (Вич (W. Veech) [108]). Пусть T — апериодическое (минимальное) перекладывание r полуинтервалов. Тогда число эргодических нормированных инвариантных мер для T не превосходит $[r/2]$.

Перекладывания, не являющиеся строго эргодическими, представляют собой в некотором смысле исключение. Чтобы придать точный смысл этому утверждению, будем задавать всякое перекладывание вектором $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$, состоящим из длин переставляемых полуинтервалов, и перестановкой π. Обозначим перекладывание, отвечающее λ и π, через $T_{\lambda,\pi}$. Перекладывание $T_{\lambda,\pi}$ заведомо не эргодично, если π приводима, т. е. $\pi(\{1, 2, \ldots, j\}) = \{1, 2, \ldots, j\}$ при некотором j, $1 \leqslant j < r$.

Теорема 2.3 (Кин, Рози (G. Rauzy), В. А. Чулаевский [48]). Пусть $r \geqslant 2$ и перестановка π неприводима. Тогда множество тех $\lambda \in \mathbf{R}^r$, для которых $T_{\lambda,\pi}$ не строго эргодично, имеет первую категорию в смысле Бэра (R. Baire).

Кин сформулировал в виде гипотезы метрический аналог теоремы 2.3, т. е., грубо говоря, утверждение о том, что «почти все» перекладывания строго эргодичны. Эта гипотеза была доказана независимо Мазуром и Вичем, причем оба доказательства используют весьма глубокие методы.

Теорема 2.4 (Мазур (H. Masur) [95], Вич [109]). Пусть $r \geqslant 2$ и перестановка π неприводима. Тогда множество тех $\lambda \in \mathbf{R}^r$, для которых $T_{\lambda,\pi}$ не строго эргодично, имеет нулевую меру Лебега.

Недавно Бошерницан (M. Boshernitzan) нашел сравнительно простое доказательство теоремы 2.4. Мы приведем предложенное им условие $\mathcal{P}$, гарантирующее строгую эргодичность минимального перекладывания и выполняющееся «почти всюду». Подмножество A натурального ряда назовем существенным, если для любого целого $l \geqslant 2$ найдутся вещественные $c_1, c_2 > 1$ такие, что система неравенств

$$\begin{cases} n_{i+1} > c_1 \cdot n_i, & 1 \leqslant i \leqslant l-1, \\ n_l < c_2 \cdot n_1 \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений $(n_1, \ldots, n_l)$, для которых все $n_i \in A$. Пусть для перекладывания T вектор $\lambda^{(n)} = (\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_{r_n}^{(n)})$ есть вектор длин отрезков, переставляемых перекладыванием T^n, $n=1, 2, \ldots$. Положим $m_n(T) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant r_n} \lambda_i^{(n)}$.

Определение 2.2. Перекладывание T обладает свойством $\mathcal{P}$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ множество $A = A(T, \varepsilon) = \left\{ n \in \mathbf{N} : m_n(T) \geqslant \frac{\varepsilon}{n} \right\}$ является существенным.

Теорема 2.5 (Бошерницан). Пусть T — минимальное перекладывание, обладающее свойством $\mathcal{P}$. Тогда T строго эргодично. Для любого $r \geqslant 2$, любой перестановки π из r элементов множество тех $\lambda \in \mathbf{R}^r$, для которых $T_{\lambda,\pi}$ не обладает свойством $\mathscr{P}$, имеет нулевую меру Лебега.

Что касается статистических свойств, более сильных, чем эргодичность, то здесь имеется следующий общий результат.

Теорема 2.6 (А. Б. Каток, см. [24]). Пусть T — перекладывание и μ — любая инвариантная борелевская мера для T. Тогда T не обладает перемешиванием по отношению к мере μ.

Некоторые утверждения, относящиеся к потокам на поверхностях рода $p \geqslant 1$, можно получать теми же методами, что и соответствующие утверждения для перекладываний или же с помощью специального представления этих потоков, о котором говорилось в начале параграфа.

Пусть $\{T^t\}$ — топологически транзитивный поток класса C^1 на двумерном компактном ориентируемом многообразии рода $p \geqslant 1$ (т. 1, ч. II), имеющий лишь конечное число неподвижных точек, являющихся невырожденными седлами, и не имеющий блуждающих точек (т. е. таких точек, у которых есть окрестность U, для которой $U \cap T^t U = \varnothing$ при $|t| \geqslant t_0$). В [18] доказано, что число нетривиальных нормированных эргодических мер для таких потоков (т. е. таких, относительно которых любая траектория имеет меру нуль) не превосходит p. Эта оценка точна: для любых натуральных p, k, $p \geqslant k$, существует топологически транзитивный поток класса C^∞ на поверхности M_p рода p, имеющий ровно k нетривиальных нормированных эргодических мер и $2p-2$ неподвижных точек, являющихся невырожденными седлами (Е. А. Сатаев [40]). В [6] построены примеры строго эргодических потоков на всех поверхностях, кроме сферы, проективной плоскости и бутылки Клейна, где существование таких потоков невозможно. В [26] построены примеры перемешивающих потоков класса C^∞ с инвариантной мерой, имеющей положительную плотность класса C^∞, на всех поверхностях, кроме только что перечисленных трех исключительных поверхностей.

§ 3. Действия общих групп

3.1. Введение. Под эргодической теорией для общих групп (иначе — под теорией динамических систем с «общим временем») понимают изучение произвольных групп преобразований с инвариантной или квазиинвариантной мерой. Классическая эргодическая теория изучает случай групп $\mathbf{Z}^1$ и $\mathbf{R}^1$. На первых порах переход к более общим группам мотивировался пользой для изучения классического случая. Один из наиболее ранних и интересных примеров такого рода принадлежит И. М. Гельфанду и С. В. Фомину [14]: геодезический поток на замкнутой поверхности постоянной отрицательной кривизны можно рассматривать как действие однопараметрической (гипербoлической) подгруппы группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ на однородном пространстве $M=\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$, где Γ — дискретная подгруппа. Используя имевшуюся информацию об унитарных представлениях $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ в $L^2(M)$, удалось легко доказать теорему о лебеговости и счетнократности спектра геодезического потока, впервые полученную в 40-х годах Хопфом (E. Hopf) и Хедлундом (G. Hedlund) довольно трудным способом (см. [96]). Эта же идея использовалась в дальнейшем (поток орициклов для геодезического потока и др.). Вслед за этим потоки на однородных пространствах стали систематически рассматриваться в связи с действиями групп Ли на этих пространствах. Об этих результатах см. [52].

Другой пример связан с теорией аппроксимаций. Оказалось, что для аппроксимаций автоморфизмов полезно изучать действия локально конечных групп, например, $\Sigma\mathbf{Z}_2$ или квазициклической группы. С одной стороны, общая теория действий таких групп (проблема изоморфизма, спектральная теория, построение метрических инвариантов) нисколько не проще, чем теория для группы $\mathbf{Z}$, и поэтому хорошо ее моделирует; а с другой стороны, эти группы заметно проще с точки зрения аппроксимаций, и потому аппроксимационные инварианты удобно моделировать на этих группах.

Начиная с 70-х годов, преимущества широкого изучения действия общих групп стали очевидными и соответствующая теория интенсивно развивалась в тесном взаимодействии с теорией представлений, теорией групп Ли и дифференциальной геометрией. При этом, в свою очередь, эргодические методы дали много нового и для теории групп Ли (например, в теории арифметических подгрупп Мостова—Маргулиса) и теории представлений. Особенно важно, что метрические задачи для групп $\mathbf{Z}^n$, $\mathbf{R}^n$, групп движений и др. стали широко использоваться в математической физике. В самое последнее время активно изучаются действия бесконечномерных («больших») групп (например, групп диффеоморфизмов, токов и др.). Различие между локально компактными группами и остальными в эргодической теории очень существенно, а именно, орбиты действия не локально компактной группы могут не иметь даже квазиинвариантной меры; поэтому разбиение на орбиты, разложение на эргодические компоненты могут быть не определены корректно. Для локально компактных групп эти вопросы решаются так же, как и для групп $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{R}$. Здесь мы будем рассматривать лишь локально компактные группы. Остановимся на немногих общих вопросах: определение действия групп, эргодические теоремы, характеризация дискретного спектра.

3.2. Общее определение действия локально компактных групп на пространствах Лебега. Пусть G — произвольная локально компактная сепарабельная группа, а $(M, \mathscr{M}, \mu)$ — пространство Лебега. Имеются две возможности для естественного определения действия группы G на $(M, \mathscr{M}, \mu)$, сохраняющего меру μ. Эти два определения очевидным образом совпадают для дискретных групп, но для непрерывных групп (в том числе и для $\mathbf{R}^1$) они различны по существу.

а) Определение *измеримого действия* (см. гл. 1, § 1). Рассмотрим отображение $T:G\times M\to M$, $T(g, x)=T_g x$, удовлетворяющее условиям: 1) измеримость: T измеримо как отображение пространства $(G\times M, m\times\mu)$ в (M, μ), где m — мера Хаара на G (выбор ее несущественен, так как важна лишь измеримость, а не значения меры), 2) инвариантность: $\mu(T_g^{-1}A)=\mu(A)$, $A\in\mathcal{M}$, 3) групповое свойство: $T_{g_1g_2}x=T_{g_1}T_{g_2}x$, $T_e x=x$. В этом соотношении x пробегает некоторое множество полной меры, не зависящее от g_1, g_2.

б) Определение *непрерывного действия*. Рассмотрим отображение в группу классов mod 0 совпадающих автоморфизмов пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$, снабженную слабой топологией: $g\mapsto\tilde{T}_g$.

Пусть выполнены условия: 1) для любых измеримых $A, B\subset M$ функция $g\mapsto\mu(\tilde{T}_g A\cap B)$ непрерывна на G; 2) $\mu(\tilde{T}_g A)=\mu(A)$; 3) $\tilde{T}_{g_1g_2}=\tilde{T}_{g_1}\tilde{T}_{g_2}$.

Здесь $\tilde{T}_g$ — класс совпадающих mod 0 автоморфизмов.

Из общей теории ясно, что определение непрерывного действия эквивалентно заданию непрерывного гомоморфизма G в группу унитарных вещественных мультипликативных относительно частичного умножения операторов $g\mapsto U_g$, а именно $(U_g f)(x)=f(T_g^{-1}x)$. Таким образом, непрерывное действие задает канонически слабо непрерывное унитарное представление $g\mapsto U_g$ группы G. Оно называется купмановским.

Всякое измеримое действие является, как нетрудно видеть, и непрерывным. Для доказательства нужно ввести операторы U_g и воспользоваться теоремой о том, что из измеримости на G функции $(U_g f_1, f_2)$ при всех f_1, f_2 из гильбертова пространства, в котором действует унитарное представление группы $g\mapsto U_g$, следует ее непрерывность.

Проблема обращения этого утверждения более сложна. Это, как говорят, задача о групповом лифтинге, а именно, нужно доказать, что из соотношения

$$T_{g_1g_2}x=T_{g_1}T_{g_2}x,$$

выполненного для почти всех x, пробегающих зависящее от g_1 и g_2 множество полной меры, следует существование такой измеримой группы $g\mapsto T_g'$, для которой $T_g=T_g'\operatorname{mod}0$.

Для счетных групп G эта проблема легко решается (Нейман—Халмош, см. [37]), поскольку для каждого g, а их счетное число, нужно произвести изменение T_g на множестве меры нуль. Для непрерывных групп требуется специальное построение измеримой реализации, поскольку для наугад взятых индивидуальных автоморфизмов из каждого класса mod 0 совпадающих автоморфизмов групповое условие нарушается в континуальном числе множеств меры нуль и их объединение может совпадать со всем пространством. В случае $G=\mathbf{R}^1$ и дискретного спектра вопрос был положительно решен В. А. Рохлиным в [37]. Для общего случая локально компактной группы положительное решение в несколько различающихся вариантах дано Макки (G. Mackey) [91] и А. М. Вершиком [8], а для $\mathbf{R}$ — Маруямой (C. Maruyama) [94]. Единственность доказана в [8].

Окончательная теорема выглядит так.

Теорема 3.1. Для всякого непрерывного действия с инвариантной мерой сепарабельной локально компактной группы G на пространстве Лебега $(M, \mathscr{M}, \mu)$ существует и единственна $\operatorname{mod} 0$ измеримая реализация.

Таким образом, можно не делать различия между непрерывным и измеримым действиями и пользоваться тем из них, которое наиболее удобно в данной ситуации. Например, в энтропийной теории проще использовать непрерывные действия, а в траекторной (см. гл. 5) — измеримые. Теорема также верна для действий с квазиинвариантной мерой. Отметим, что она перестает быть верной, вообще говоря, как только мы опускаем требование локальной компактности, так как в ее доказательстве существенно используется существование меры Хаара.

3.3. Эргодические теоремы. Первые работы о действиях произвольных групп на пространствах с мерой были посвящены, в частности, обобщению эргодических теорем (например, [61]). С вероятностной точки зрения эти теоремы есть законы больших чисел для стационарных в узком смысле случайных полей на группе, а с физической — они обосновывают замену «временных» по группе средних пространственными.

Пусть G — группа, действующая на $(M, \mathscr{M}, \mu)$ в смысле определений пункта 3.2. Выделим в G семейство компактных подмножеств G_n, $n=1, 2, \ldots$. Будем говорить, что для действия $g \mapsto T_g$ выполнена индивидуальная эргодическая теорема относительно $\{G_n\}$, если для любой $f \in L^1(M)$ почти всюду существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{card}(G_n)} \sum_{g \in G_n} f(T_g x) = \bar{f}(x)$$

для дискретных групп, и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(G_n)} \int\limits_{G_n} f(T_g x)\, dm(g) = \bar{f}(x)$$

для непрерывных групп (m — мера Хаара). Функция $\bar{f}$ есть проекция f на подпространство G-инвариантных функций; если действие эргодично, то $\bar{f} = \text{const} = \int\limits_M f\, d\mu$.

Напомним, что для $\mathbf{Z}$ и для $\mathbf{R}$ эргодическая теорема Биркгофа—Хинчина выглядит так:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)=\overline{f}(x) \text{ почти всюду,}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(T^t x)\,dt=\overline{f}(x) \text{ почти всюду.}$$

Если последовательность $\{G_n\}$ такова, что теорема относительно $\{G_n\}$ имеет место для всех действий группы G с инвариантной мерой, то она называется универсальной. Для групп $\mathbf{Z}^k$, $\mathbf{R}^k$ универсальная последовательность существует. Множества G_n — в этом случае, например, кубы растущих размеров. Теорема также доказана для разрешимых групп, но универсальные множества строятся сложнее. Общая конструкция доказательства таких теорем на основе теоремы о мартингалах предложена А. М. Вершиком.

К сожалению, для произвольных локально компактных групп вопрос до конца не решен (1984 г.). Естественно предположить, что для аменабельных локально компактных групп[1] универсальной последовательностью служит последовательность Фёлнера (E. Følner), т. е. такая совокупность $\{G_n\}$, $G_n\subset G$, что для любых $h_1,\ldots,h_k\in G$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} h_i G_n\right)}{m(G_n)}=1,$$

m — мера Хаара. Эта гипотеза согласуется с вышеприведенными теоремами и с теоремой Конна (A. Connes)—Фельдмана—Вейса (B. Weiss) [66].

Рассматриваются также разнообразные обобщения индивидуальной теоремы, в которых выбранное суммирование заменяется другим — взвешенным. В этом направлении можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2 (В. И. Оселедец [32]). Пусть G — счетная группа, μ — мера на ней. Предположим, что G действует на (M, m) с инвариантной мерой. Тогда для любой функции f такой, что $f\ln f\in L^1(M)$, почти всюду существует предел $\sum\limits_g f(gx)\mu^n(g)$, где μ^n означает n-кратную свертку меры μ.

---

[1] Группа G (дискретная или локально компактная) называется аменабельной, если на пространстве $L^\infty(G, m)$, где m — левая мера Хаара на G, существует левоинвариантное среднее, т. е. такой линейный функционал l, что $l(\overline{f})=\overline{l(f)}$ для всех $f\in L^\infty(G,m)$ (здесь черта означает комплексное сопряжение), $\operatorname{ess\,inf}\{f(x)\}\leqslant l(f)\leqslant\operatorname{ess\,sup}\{f(x)\}$ для вещественных f, и $l(g^{-1}f)=$ $=l(f)$ для всех $g\in G$, $f\in L^\infty(G,m)$.

Отметим также мультипликативную эргодическую теорему [33], связанную со случайными произведениями элементов группы.

Наиболее сильное обобщение теоремы Биркгофа—Хинчина для одного оператора принадлежит Хопфу—Орнстейну—Чакону (R. Chacon). Это индивидуальная эргодическая теорема для положительных сжатий в L^1: для любой функции $f \in L^1$ существует почти всюду предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (P^i f)(x),$$

где $P : L^1 \to L^1$ — положительное в смысле конуса неотрицательных функций в L^1 сжатие ($\|P\| \leqslant 1$), сохраняющее единицу: $P1 = 1$ (т. е. марковский оператор). Аналогом этого обобщения было бы аналогичное утверждение для полугрупп положительных сжатий. Для аменабельных полугрупп такие теоремы имеются (см. [47]).

Гораздо более изучены статистические эргодические теоремы, обобщающие теорему Неймана о сильной сходимости в $L^2(M)$ операторов $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i$, где U — оператор, сопряженный с эндоморфизмом T: $(Uf)(x) = f(Tx)$. Эти теоремы ближе к теории операторов, чем к эргодической теории, обычно они рассматриваются для операторов в произвольных линейных пространствах. Наиболее общие теоремы доказаны А. А. Темпельманом. Оказалось, например, что статистические теоремы для групп Ли (в том числе и для неаменабельных) имеют место для произвольной последовательности усредняющих множеств G_n, меры которых стремятся к бесконечности [47]. В то же время для дискретных групп имеются контрпримеры к аналогичному утверждению. Например, если W_2 — свободная группа с двумя образующими, а G_n — множество слов длины n, то существует такое действие, что при усреднении по G_n ни индивидуальная, ни статистическая теоремы не имеют места [54].

3.4. Спектральная теория. Спектральная теория действия групп с инвариантной мерой есть часть теории представлений. Сопоставим каждому элементу группы G, действующей с инвариантной (ил иквазиинвариантной) мерой на $(M, \mathfrak{M}, \mu)$, унитарный оператор U_g в $L^2(M)$ по формуле

$$(U_g f)(x) = f(g^{-1}x) \sqrt{p_g(x)},$$

$p_g(x) = \frac{d\mu_g(x)}{d\mu}$ — плотность; это мультипликативный 1-коцикл группы G со значениями в L^1; он когомологичен нулю тогда и только тогда, когда существует эквивалентная конечная инвариантная мера; если мера инвариантна, то $(U_g f)(x) = f(g^{-1}x)$. Соответствие $g \mapsto U_g$ задает унитарное представление группы G.

Основные вопросы здесь следующие:

а) разложить представление на неприводимые;

б) выяснить, какие представления могут возникать в такой конструкции.

Для группы $\mathbf{Z}$ вопрос а) сводится к нахождению спектральной меры и кратностей, вопрос б) — к описанию возможных спектров динамических систем. Оба вопроса являются тонкими, хотя и далеко продвинуты для $G = \mathbf{Z}$ (см. [24]). Разумеется, для общих локально компактных групп ситуация много сложней.

Одной из первых работ по спектральной теории общих действий была работа Макки [92], дававшая точное обобщение известной теоремы Неймана о чисто точечном спектре. Приведем ее формулировку.

Унитарное представление группы G имеет по определению чисто точечный, или дискретный, спектр, если оно есть прямая сумма конечномерных неприводимых представлений. Для группы $\mathbf{Z}$ это определение совпадает с обычным определением чисто точечного спектра (ограничение на конечность кратности отсутствует). Теорема Неймана утверждает, что для $G = \mathbf{Z}$ и эргодического действия собственные числа (спектр) образуют счетную подгруппу в S^1, кроме того, по спектру действие восстанавливается однозначно с точностью до метрического изоморфизма и может быть реализовано сдвигом на коммутативной компактной группе, а именно, на группе характеров спектра. Тем самым любая счетная подгруппа может быть спектром некоторой динамической системы (см. гл. 2, § 2). Обобщение Макки состоит в следующем.

Теорема 3.3. Пусть G — сепарабельная локально компактная группа, эргодически действующая на пространстве Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$ с инвариантной мерой, и спектр G дискретен. Тогда существуют компактная группа K, гомоморфизм $\varphi: G \to K$ на плотную в K подгруппу и замкнутая подгруппа $H \subset K$ такие, что действие G на $(M, \mathcal{M}, \mu)$ метрически изоморфно действию G сдвигами на элементы $\varphi(G)$ в однородном пространстве K/H правых классов смежности, снабженном образом меры Хаара на K.

Эта теорема решает полностью проблему описания динамических систем со «временем» G, имеющих дискретный спектр. Отличие от коммутативного случая в том, что представление не определяет однозначно систему, поскольку легко привести пример группы (даже конечной) и двух ее не сопряженных подгрупп H_1, H_2, для которых представления K в $L^2(K/H_1)$ и $L^2(K/H_2)$ тем не менее эквивалентны. Сама же группа K определяется по представлению однозначно: это замыкание группы

$\{U_g\colon g \in G\}$ в группе унитарных операторов в $L^2(M)$ со слабой топологией.

Столь полная аналогия теории дискретных спектров не продолжается на общий случай. Не ясно даже, какие представления могут встречаться в спектрах действия. Эта проблема очень интересна уже для группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ и вообще для групп с дополнительными сериями (не входящими в регулярное представление, т. е. для неаменабельных групп).

Роль счетнократного лебеговского спектра играет счетнократный планшерелевский спектр. Приведем пример. Пусть G — дискретная группа, и $[0, 1]^G$ — пространство всех последовательностей на G со значениями в $[0, 1]$. Рассмотрим меру μ на $[0, 1]^G$, являющуюся product-мерой с одним и тем же сомножителем μ_0, т. е. мерой на $[0, 1]$. Тогда действие G левыми сдвигами на себе порождает действие в $[0, 1]^G$, сохраняющее меру μ. Оно называется бернуллиевским действием по аналогии с бернуллиевским сдвигом для группы $\mathbf{Z}$.

Теорема 3.4. Спектр бернуллиевского действия является *счетнократным планшерелевским*, т. е. $L^2([0, 1]^G, \mu)$ разлагается в счетную прямую сумму подпространств, в каждом из которых действует леворегулярное представление группы G.

Нетрудно обобщить спектральную теорию нормальных (гауссовских) динамических систем (см. [24]) на произвольные локально компактные группы. Для групп типа II[1] спектральная теория тесно связана с теорией факторов [21].

§ 4. Энтропийная теория действий общих групп

Определение инвариантов типа энтропии для действий групп, естественно обобщающее определение энтропии автоморфизма, было дано в [21] (см. также [67], [81]). Как и при обобщении эргодических теорем, достаточно развитую теорию можно построить для класса аменабельных групп. Мы будем в основном рассматривать лишь группы $\mathbf{Z}^m$, $m \geqslant 2$, для которых имеются наиболее полные результаты, и начнем с определения энтропии для этого случая. Для упрощения обозначений положим $m=2$.

Пусть T_1, T_2 — два коммутирующих автоморфизма пространства Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$ с непрерывной мерой. Они порождают действие $\{T_g\}$ группы $G=\mathbf{Z}^2$ на M. Через T_g обозначается автоморфизм $T_1^{n_1}T_2^{n_2}$, отвечающий элементу $g=(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2$.

Начнем с определения энтропии измеримого разбиения ξ относительно $\{T_g\}$. Удобно исходить не из определения $h(T, \xi)$ для случая действий $\mathbf{Z}^1$ — определения 2.1 главы 3, а из приведен-

---

[1] Группы типа II — это группы, у которых есть такие представления, что алгебра, натянутая на операторы представления, является алгеброй типа II, т. е. в ее центральном разложении на множестве положительной меры встречаются факторы типа II.

ного там же свойства 3) величины $h(T, \xi)$. Мы будем пользоваться обозначениями § 2 главы 3.

Для любого $E \subset Z^2$ через ξ_E обозначим разбиение $\bigvee_{g \in E} T_g \xi$. Множество $\Pi \subset Z^2$ назовем параллелограммом, если $\Pi = \tilde{\Pi} \cap Z^2$, где $\tilde{\Pi}$ — некоторый параллелограмм на $R^2 \supset Z^2$. Через $m(\Pi)$ обозначим длину минимальной стороны $\tilde{\Pi}$, а через $|\Pi|$ — число элементов Π.

Теорема 4.1 (см. [67]). Пусть $\xi \in Z$ и $\{\Pi_n\}$ — последовательность параллелограммов на Z^2 такая, что $m(\Pi_n) \to \infty$. Существует предел

$$h(G, \xi) = \lim_{n \to \infty} 1/|\Pi_n| \cdot H(\xi_{\Pi_n}),$$

не зависящий от выбора $\{\Pi_n\}$.

В записи $h(G, \xi)$, а также часто в дальнейшем, под G понимается не сама группа $G = Z^2$, а ее действие $\{T_g\}$.

Определение 4.1. Величина $h(G, \xi)$ называется энтропией разбиения ξ относительно действия $\{T_g\}$.

Отметим, что в случае общей дискретной аменабельной группы G вместо $\{\Pi_n\}$ можно брать любую последовательность Фёлнера $\{\Phi_n\}$ подмножеств G. При этом соответствующий предел также существует и не зависит от $\{\Phi_n\}$.

Свойства $h(G, \xi)$ (см. Конз (J. Conze) [67]):

1) $h(G, \xi) \underset{\text{def}}{=} H(\xi \mid \xi_{\overline{T_1}} \vee (\xi_{T_2})_{\overline{T_1}})$. Это свойство показывает, что разбиение $\xi_{\overline{G}} = \xi_{\overline{T_1}} \vee (\xi_{T_2})_{\overline{T_1}}$ играет роль «прошлого» разбиения ξ относительно G. «Прошлое» определяется не только действием G, но и выбором у G упорядоченной пары образующих (T_1, T_2). Для счетных аменабельных групп все возможные способы определения «прошлого» описаны в [34];

2) $h(G, \xi) \leqslant H(\xi)$;

3) $h(G, \xi_1 \vee \xi_2) \leqslant h(G, \xi_1) + h(G, \xi_2)$;

4) пусть G_n — подгруппа индекса n группы G $(n \geqslant 1)$, Γ_n — фундаментальная область для G_n, содержащая единицу группы. Тогда

$$h(G_n, \xi_{\Gamma_n}) = n \cdot h(G, \xi);$$

5) для всякого автоморфизма T_g в группе G

$$h(G, \xi) \leqslant h(T_g, \xi);$$

6) $h(G, \xi)$ как функция от ξ непрерывна на Z;

7) если $\xi_1 \preccurlyeq \xi_2$, то $h(G, \xi_1) \leqslant h(G, \xi_2)$;

8) для любых $\xi_1, \xi_2 \in Z$

$$h(G, \xi_1) = \lim_{n \to \infty} H(\xi_1 \mid (\xi_1)_{\overline{G}} \vee T_1^{-n} (\xi_2)_{\overline{G}});$$

9) если ξ — образующее разбиение для G, т. е. $\xi_G \overset{\text{def}}{=} \xi_{Z^2} = \varepsilon$, то для любого $\eta \in Z$

$$h(G, \eta) \leqslant h(G, \xi).$$

Определение 4.2. *Энтропией действия* $\{T_g\}$ называется величина

$$h(G) = \sup_{\xi \in Z} h(G, \xi).$$

Энтропия $h(G)$ является метрическим инвариантом: если два действия G_1, G_2 одной и той же группы метрически изоморфны, то $h(G_1) = h(G_2)$.

Свойства энтропии $h(G)$:

1) Если $G = G_1 \times G_2$, т. е. действие G некоторой группы является прямым произведением действий G_1 и G_2 той же группы (определение естественно обобщает определение прямого произведения для действий $\mathbf{Z}^1$), то $h(G) = h(G_1) + h(G_2)$;

2) если G_1 — фактордействие действия G (определение также получается перенесением со случая действий $\mathbf{Z}^1$), то

$$h(G_1) \leqslant h(G);$$

3) для всякой подгруппы G_n индекса n

$$h(G_n) = n \cdot h(G);$$

4) для всякого автоморфизма T_g в группе G

$$h(T_g) \geqslant h(G);$$

5) если T_1, T_2 — образующие действия группы $\mathbf{Z}_2$, и $h(T_1) < \infty$ или $h(T_2) < \infty$, то $h(G) = 0$.

Примеры. 1) Пусть M — пространство всех последовательностей $x = \{x_{n_1, n_2}\}$, $(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2$, где каждое x_{n_1, n_2} принимает значения из конечного множества X, мера λ на котором задается вероятностным вектором $(p_1, \ldots, p_m)$, $p_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$. Введем в M меру μ, являющуюся product-мерой меры λ, и положим $T_1 x = x'$, $T_2 x = x''$, где $x'_{n_1, n_2} = x_{n_1+1, n_2}$, $x''_{n_1, n_2} = x_{n_1, n_2+1}$. Ясно, что T_1 и T_2 коммутируют и задают действие G группы $\mathbf{Z}^2$ на M. Это бернуллиевское действие $\mathbf{Z}^2$. Для него $h(G) = -\sum_{k=1}^{m} p_k \ln p_k$. Легко проверить, что при этом $h(T_1) = h(T_2) = \infty$.

2) Пусть M — пространство последовательностей $x = \{x_n\}$, $n \in \mathbf{Z}^1$, где каждое x_n — точка пространства Лебега $(X, \mathscr{X}, \lambda)$, на котором действует автоморфизм S. Мера μ на M, как и в предыдущем примере, является product-мерой меры λ. Автоморфизмы T_1, T_2 пространства M задаются формулами $T_1(\{x_n\}) = \{Sx_n\}$, $T_2(\{x_n\}) = \{x_{n+1}\}$. Энтропия действия группы $\mathbf{Z}^2$, порожденного T_1 и T_2, равна $h(S)$.

Ряд фундаментальных фактов энтропийной теории действий переносится на действия более общих групп. Так, для свободного эргодического действия (т. е. такого, что $\mu(\{x \in M\colon T_g x =$

$=x\})=0$ для всех $g\in G\setminus\{e\})$ с конечной энтропией счетной аменабельной группы G существует конечное образующее разбиение (см. [107]). Имеются обобщения теоремы Орнстейна об изоморфизме бернуллиевских действий с равной энтропией (А. М. Стёпин [46]). Что касается теоремы Шеннона—Макмиллана—Бреймана, то, насколько нам известно, имеется лишь ее аналог для случая действий квазициклической группы — группы двоично-рациональных точек окружности (см. Б. С. Пицкель, А. М. Стёпин [35]). Если же в этой теореме заменить сходимость почти всюду на сходимость в метрике пространства L^1, то соответствующий результат (аналог теоремы Макмиллана) справедлив для действий произвольной счетной аменабельной группы (см. Кифер (J. C. Kieffer) [85]).

В [53] было предложено понятие энтропии случайного блуждания на группе. Это понятие подробно изучено в работе [77] и применено к проблеме нахождения границы случайных блужданий.

Теория динамических систем с положительной энтропией (см. § 3 гл. 3) обобщается на действия групп $\mathbf{Z}^m$, $m\geqslant 2$. Чтобы избежать громоздких обозначений, мы опять будем вести изложение для $m=2$.

Как и для действий $\mathbf{Z}^1$, вводится разбиение Пинскера π: $\pi(G)=\sup\{\xi\colon \xi\in Z,\ h(G,\xi)=0\}$. Действия G, для которых $\pi(G)=\nu$, называются действиями с вполне положительной энтропией.

Следующее определение существенно для построения энтропийной теории действий группы $\mathbf{Z}^2$ и не имеет аналога в случае действий $\mathbf{Z}^1$.

Определение 4.3. Пусть (T_1, T_2) — упорядоченная пара образующих действия G группы $\mathbf{Z}^2$ на пространстве Лебега $(M, \mathscr{M}, \mu)$; ξ — измеримое разбиение. Разбиение ζ называется *строго* (T_1, T_2)-*инвариантным*, если 1) $T_1\zeta\preccurlyeq\zeta$; 2) $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_1^{-n}\zeta=$ $=T_2^{-1}\zeta_{T_1}$.

Из строгой инвариантности ζ вытекает, что $T_1^{n_1}T_2^{n_2}\zeta\preccurlyeq\zeta$, если $(n_1, n_2)\prec(0, 0)$, причем пары (n_1, n_2) упорядочены лексикографически. Разбиения ζ, обладающие этим свойством, называют (T_1, T_2)-инвариантными. (T_1, T_2)-инвариантные разбиения могут не быть строго (T_1, T_2)-инвариантными. Однако для каждого действия G с $h(G)>0$ имеются нетривиальные строго инвариантные разбиения. В частности, если $\xi\in Z$ таково, что все разбиения $T_g\xi$, $g\in\mathbf{Z}^2$, независимы, то разбиение $\zeta=\xi^{-}_{G}$ строго инвариантно.

При построении теории действий группы $\mathbf{Z}^2$ с положительной энтропией именно понятие строгой инвариантности служит естественной заменой инвариантности разбиения для действий $\mathbf{Z}^1$.

Определение 4.4. Разбиение $\zeta \in Z$ называется (T_1, T_2)-исчерпывающим, если оно строго (T_1, T_2)-инвариантно и $\bigvee\limits_{n=0}^{\infty} T_2^n \zeta_{T_1} = \varepsilon$.

Теорема 4.2 (Каминский (B. Kaminski) [80]). Если ζ — (T_1, T_2)-исчерпывающее разбиение, то $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_2^{-n} \zeta_{T_1} \succeq \pi(G)$.

Утверждение этой теоремы становится неверным, если вместо (T_1, T_2)-строгой инвариантности потребовать лишь (T_1, T_2)-инвариантность ζ.

Определение 4.5. (T_1, T_2)-исчерпывающее разбиение ζ называется (T_1, T_2)-экстремальным, если $\bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} T_2^{-n} \zeta_{T_1} = \pi(G)$. (T_1, T_2)-экстремальное разбиение ζ называется (T_1, T_2)-совершенным, если $h(G) = h(G, \zeta) = H(\zeta \mid T_1^{-1}\zeta)$.

Теорема 4.3 (Каминский [80]). Для всякой упорядоченной пары (T_1, T_2) образующих группы G существуют (T_1, T_2)-совершенные разбиения.

Определение 4.6. Действие G группы $\mathbf{Z}^2$ называется K-действием (G называется K-группой), если для любой пары (T_1, T_2) образующих G и произвольных $A_0, A_1, \ldots, A_r \in \mathscr{M}$ $(1 \leqslant r < \infty)$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{B^{(n)} \in \mathscr{B}^{(n)}} |\mu(A_0 \cap B^{(n)}) - \mu(A_0)\mu(B^{(n)})| = 0,$$

где $\mathscr{B}^{(n)}$ — σ-алгебра, отвечающая разбиению $T_1^{-n}\xi_{\overline{T_1}} \vee T_2^{-n}(\xi_{T_1})_{\overline{T_2}}$, а ξ — наименьшее разбиение, относительно которого измеримы $A_1, \ldots, A_r$.

Теория строго инвариантных разбиений используется для доказательства следующей теоремы.

Теорема 4.4 (Каминский [80]). G является K-группой тогда и только тогда, когда она имеет вполне положительную энтропию.

Глава 5

ТРАЕКТОРНАЯ ТЕОРИЯ

А. М. Вершик

§ 1. Основные формулировки

Траекторная теория динамических систем начинается с естественного вопроса, восходящего еще к Пуанкаре и относящегося к классическим динамическим системам. Рассмотрим две топологические динамические системы, т. е. однопараметрические группы непрерывных преобразований компакта. Будем говорить, что они топологически орбитально (или траекторно) эквивалентны, если существует гомеоморфизм компакта, переводящий траектории одной системы в траектории другой с сохранением их ориентации. Столь грубая эквивалентность оказывается полезной при изучении фазового портрета, т. е. характера разбиения пространства динамической системы на траектории. Например, наличие или отсутствие периодических траекторий, инвариантных подмногообразий и т. п. есть инварианты топологической орбитальной эквивалентности. Это понятие необходимо при изучении грубых свойств систем (см. [4]).

В эргодической теории вместо топологической орбитальной эквивалентности естественно рассматривать метрическую. Приведем точное определение, при этом сначала будем рассматривать один автоморфизм (точнее, группу $\mathbf{Z}$), а затем перейдем к более общему случаю.

Пусть $(M, \mathscr{M}, \mu)$ — пространство Лебега и T — его автоморфизм, сохраняющий меру μ. Обозначим через $\tau(T)$ разбиение пространства M на траектории автоморфизма T, иначе говоря, элемент разбиения $\tau(T)$, содержащий точку x, есть не более чем счетное множество $\{y : y=T^n x\}$, $n \in \mathbf{Z}$. Назовем $\tau(T)$ траекторным разбиением. Определение является корректным по отношению к замене автоморфизма T на автоморфизм, совпадающий с ним на множестве полной меры. Подчеркнем, что разбиение $\tau(T)$, вообще говоря, не является измеримым; в частности, факторизация пространства $(M, \mathscr{M}, \mu)$ по τ не приводит к пространству Лебега, т. к. на факторпространстве может вообще не существовать нетривиальных измеримых множеств. По той же причине может не быть измеримых функций, постоянных на элементах $\tau(T)$. Но все это не означает, что разбиение на траектории есть какой-то патологический объект вроде неизмеримых множеств; напротив, это означает лишь, что нужны иные методы для изучения траекторных свойств. Например, на элементах $\tau(T)$ нет, вообще говоря, условных мер, как в случае измеримых разбиений, но есть система отношений или коцикл, заменяющий условные меры (см. дальше).

Определение 1.1. Два автоморфизма T_1 и T_2 пространства $(M, \mathscr{M}, \mu)$ называются *траекторно изоморфными*, если их траекторные разбиения $\tau(T_1)$ и $\tau(T_2)$ метрически изоморфны: $S\tau(T_1)=\tau(T_2)$, где S — некоторый автоморфизм $(M, \mathscr{M}, \mu)$.

Для наглядности, сформулируем это понятие чуть иначе. Предположим сначала, что траекторные разбиения T_1 и T_2 совпадают. Это означает, что из того, что $y=T_2{}^n x$, вытекает, что $y=T_1{}^m x$ при некотором $m=m(n, x)$, и наоборот. Иначе говоря, существуют измеримые по x функции $m_1=m_1(n, x)$ и $m_2=m_2(n, x)$, $x \in M$, $n \in \mathbf{Z}^1$, принимающие значения в $\mathbf{Z}^1$, для которых $T_1^n x = T_2^{m_1(n,x)} x$ и $T_2^n x = T_1^{m_2(n,x)} x$; в частности, $T_1 x = T_2^{m_1(x)} x$, $T_2 x = T_1^{m_2(x)} x$, где $m_1(x) \equiv m_1(1, x)$, $m_2(x) \equiv m_2(1, x)$. Иными словами, $T_1(T_2)$ с помощью измеримой замены времени получается из T_2 (соответственно T_1). Следовательно, два автоморфизма траекторно изоморфны, если каждый из них метрически изоморфен автоморфизму, получаемому из другого измеримой заменой времени.

Нетрудно видеть, что по $m_1(x)$ полностью восстанавливается $m_1(n, x)$: $m_1(n, x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_1(T_2^i x)$ для $n > 0$; $m_1(-1, x) = -m_1(T_2^{-1} x)$. Однако, для обобщений на другие группы удобно иметь дело с функцией $m_1(\cdot, \cdot)$: $\mathbf{Z} \times M \to \mathbf{Z}$, которую можно называть функцией замены времени (а не только с $m_1(\cdot)$).

Пусть теперь некоторая локально компактная группа G действует автоморфизмами измеримым образом на пространстве Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$ с инвариантной мерой.

Для того, чтобы корректно определить траекторное разбиение, воспользуемся теоремой о единственности mod 0 измеримой реализации (см. [8]). В силу единственности при изменении mod 0 действия T группы G, траекторное разбиение также меняется на множестве меры нуль. Обозначим через $\tau(T)$ траекторное разбиение действия T группы G, или через $\tau(G)$, если группа G отождествляется с представляющими ее автоморфизмами.

Определение 1.2. Две группы автоморфизмов G_1 и G_2 называются траекторно изоморфными, если разбиения $\tau(G_1)$ и $\tau(G_2)$ метрически изоморфны.

В нашем определении не требуется, чтобы группы G_1 и G_2, как абстрактные группы, были изоморфны.

Как и для группы $\mathbf{Z}$, совпадение $\tau(T_1)$ и $\tau(T_2)$ влечет существование таких измеримых функций m_1 $: G_1 \times M \to G_2$, m_2: $G_2 \times M \to G_1$, что для $g_i \in G_i$, $i = 1, 2$, $T_1(g_1)x = T_2(m_1(g_1, x))x$, $T_2(g_2)x = T_2(m_2(g_2, x))x$.

Выполнение лишь одного из соотношений, например, первого, равносильно условию $\tau(G_1) \subseteq \tau(G_2)$, т. е. траектории группы G_1 целиком содержатся mod 0 в траекториях группы G_2. Функции m_1 и m_2 можно рассматривать как функции замены времени. В частности, для потоков $(G_1 = G_2 = \mathbf{R})$ имеем:

$$S_1^t x = S_2^{m_1(t,x)} x, \quad S_2^t x = S_1^{m_2(t,x)} x,$$

m_1, m_2 : $\mathbf{R} \times M \to \mathbf{R}$ — измеримые функции.

Наконец, как и для группы $\mathbf{Z}$, можно из вышеприведенного определения заключить, что траекторный изоморфизм двух групп автоморфизмов означает, что каждая из них с помощью измеримой замены времени превращается в изоморфную другой.

Для общих динамических систем на пространстве с мерой траекторный изоморфизм — понятие намного более грубое, чем топологическая орбитальная эквивалентность, т. к. непрерывность отображения заменяется требованиями измеримости и сохранения меры; не требуется сохранения ориентации и, наконец, разрешается пренебрегать множествами меры нуль.

Теперь задачу метрической траекторной теории можно сформулировать так.

Описать классы траекторной эквивалентности для групп автоморфизмов, сохраняющих меру; в первую очередь, для групп **Z** и **R**. Можно также рассматривать группы с квазиинвариантной мерой, но тогда и классификацию следует проводить с точностью до преобразований с квазиинвариантной мерой.

Привыкнув к тому, что почти все встречающиеся нетривиальные задачи классификации в теории динамических систем не имеют обозримых ответов, можно приготовиться к такому же итогу и в нашей задаче. И действительно, таково было первоначальное мнение специалистов. Но оказалось, что для групп **Z**, **R** и вообще аменабельных групп (см. далее) дело обстоит совершенно иначе, и ответ на поставленный вопрос очень прост и неожиданен. Для более общих групп задача не решена полностью, но ясно, что простой классификации там нет.

К настоящему времени траекторная теория стала обширной областью теории динамических систем. Обычно ее связывают с изучением так называемых эргодических отношений эквивалентности и группоидов, частным случаем которых являются траекторные разбиения. Другие примеры — слоения на многообразиях, классификационные разбиения и т. п. Наиболее изученными пока остаются траекторные разбиения.

Сейчас трудно установить, кем впервые была поставлена проблема для **Z**. Во всяком случае, она ставилась неявно в работе Неймана и Мюррея (F. Murrey) в 1944 г. в связи с кольцами операторов [99], в иной формулировке — Макки (виртуальные подгруппы) [93] и В. А. Рохлиным в конце 50 годов. Решение для инвариантной меры и группы **Z** было получено Даем (H. Dye) в 1963 г. [68] на пути работ Неймана и чисто метрическим способом А. М. Вершиком [9] и Р. М. Белинской [5] в 1966 г.

Дай вслед за Нейманом связал эту проблему с теорией факторов типа II_1, а именно, задача оказалась эквивалентной доказательству гиперконечности фактора, построенного по автоморфизму. Эта связь будет упомянута позже, а сейчас приведем ответ и набросок метрического доказательства, сначала для группы **Z**.

Теорема 1.1. Любые два эргодические автоморфизма пространства Лебега с инвариантной мерой траекторно изоморфны.

Следствия. 1) Для траекторного изоморфизма двух автоморфизмов необходимо и достаточно, чтобы измеримые разбиения на эргодические компоненты этих автоморфизмов были изоморфны.

Это следствие получается стандартным способом: надо установить изоморфизм разбиений на эргодические компоненты и применить к каждой из них теорему.

Теорема тем самым показывает, что в определенном смысле траекторный изоморфизм для группы **Z** оказывается мало содержательным: никакие динамические инварианты (спектр, энтропия и др.) не сохраняются при траекторном изоморфизме; что касается типа разложения на эргодические компоненты, то он является геометрическим инвариантом автоморфизма, так как, очевидно, не меняется при траекторном изоморфизме, и им исчерпывается перечень траекторных инвариантов.

2) Для любого эргодического автоморфизма T найдется метрически изоморфный ему автоморфизм S, который можно получить заменой времени из эргодического автоморфизма Q с дискретным двоично рациональным спектром:

$$Sx=Q^{m(x)}x, \quad S=VTV^{-1}.$$

Автоморфизм Q выбран в этом следствии как самый простой. Таким образом, перестраивая траектории автоморфизма Q, можно получить, например, автоморфизм Бернулли в качестве S и т. п. Разумеется, функция $m(x)$ будет в этом случае весьма сложной, а функция распределения ее будет убывать очень медленно. Открывается возможность изучать вместо автоморфизмов инварианты функции $m(\cdot)$, позволяющей получить данный автоморфизм из Q или другого базового эргодического автоморфизма заменой времени с функцией $m(\cdot)$.

Рассмотрим теперь более общие группы. Следующая теорема, полученная совсем недавно Конном, Орнстейном, Фельдманом, Вейссом [66], явилась итогом длительного процесса обобщения теоремы 1.1 в работах тех же авторов, а также А. М. Вершика и Кригера.

Теорема 1.2. Пусть счетная дискретная группа G эргодично и свободно (т. е. $\mu(\{x: gx=x\})=0$ для всех $g\in G\setminus\{e\}$) действует с инвариантной мерой на пространстве $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Для того, чтобы она была траекторно изоморфна эргодическому действию группы **Z**, необходимо и достаточно, чтобы G была аменабельна (т. е. имела инвариантное среднее). Это означает, что любые два эргодических свободных действия счетных аменабельных групп траекторно изоморфны; если же группа неаменабельна, то ее траекторный класс иной.

Эта замечательная теорема показывает еще раз, что класс аменабельных групп в эргодической теории служит естественной областью, куда распространяются самые общие теоремы о действии группы **Z**.

Аналогичная теорема имеет место и для непрерывных групп.

Теорема 1.3. Пусть G_1 и G_2 — две недискретные локально компактные аменабельные (т. е. имеющие топологическое инвариантное среднее) группы со счетной базой открытых множеств. Любые два свободных эргодических действия этих групп с инвариантной мерой траекторно изоморфны между собой, и, в частности, изоморфны эргодическому действию группы $\mathbf{R}^1$ сдвигами на двумерном торе.

Эта теорема есть сравнительно несложное следствие трудной теоремы 1.2 (подробнее см. далее).

Теоремы 1.1—1.3 решают поставленную выше проблему о траекторном изоморфизме для действий локально компактных аменабельных групп с инвариантной мерой. За пределами этого класса групп все обстоит значительно сложнее. Мы сформулируем несколько результатов позже, а сейчас наметим доказательство теоремы 1.1 и введем попутно важные новые понятия. Мы следуем доказательству [9], [5], см. также [69], [10], [90], [97], [75].

§ 2. Набросок доказательств. Ручные разбиения

Определение 2.1. Разбиение τ пространства Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$ называется *ручным*, если его можно представить в виде теоретико-множественного пересечения убывающей последовательности измеримых разбиений.

Поясним, что разбиение ξ меньше разбиения η, если почти всякий элемент C разбиения ξ составлен из нескольких элементов разбиения η[1]. Поэтому последовательность $\{\xi_n\}_1^\infty$ убывает, если элементы $C_n(x)$ разбиений ξ_n, содержащие точку $x \in M$, монотонно возрастают. Теоретико-множественным пересечением $\bigcap\limits_n \xi_n$ называется разбиение с элементами $C(x) = \bigcup C_n(x)$, где $C_n(x)$ — элемент ξ_n, содержащий точку x. Разбиение $\bigcap\limits_n \xi_n$ не обязательно измеримо.

Напомним еще, что измеримое пересечение $\bigwedge\limits_n \xi_n$ есть максимальное измеримое разбиение, меньшее чем все ξ_n; оно существует всегда, а в нашем случае является измеримой оболочкой разбиения $\bigcap\limits_n \xi_n$. Ручное разбиение называется эргодическим, если его измеримая оболочка тривиальна ($=\nu$), т. е. является разбиением, единственный непустой элемент которого есть все пространство mod 0.

---

[1] В комбинаторике по существенным причинам принято противоположное упорядочение разбиений.

Всякое измеримое разбиение, разумеется, ручное, но следующий основной пример показывает, что существуют и другие ручные разбиения.

Пример. Пусть $M=[0, 1]$, $\xi_n^{(0)}$ — разбиение M на классы чисел; внутри каждого класса — 2^n чисел, которые друг от друга отличаются на слагаемое вида $k/2^n$, $k=0, 1, \ldots, 2^n-1$. Очевидно, что $\xi_1^{(0)}\succ\xi_2^{(0)}\succ\ldots$. Разбиение $\tau^{(0)}=\bigcap\limits_n \xi_n^{(0)}$ есть разбиение на классы чисел, отличающихся на двоично-рациональные слагаемые. Разбиение $\tau^{(0)}$ — эргодическое. Саму последовательность $\{\xi_n^{(0)}\}_1^\infty$ (и ей изоморфные) назовем стандартной диадической последовательностью разбиений.

Для ручных разбиений, не являющихся измеримыми, нельзя определить каноническую систему условных мер, однако можно определить проективную систему следующим образом. Прежде всего заметим, что условные меры обладают следующим свойством транзитивности: если $\xi\prec\zeta$ и $x, y\in C\in\xi$, $x, y\in D\in\zeta$, то $\mu_\xi^C(x)/\mu_\xi^C(y)=\mu_\zeta^D(x)/\mu_\zeta^D(y)$ почти всюду, здесь $\mu_\eta^E(x)$ — условная мера точки x в элементе E разбиения η. Поэтому, если $\tau=\bigcap\limits_n \xi_n$, то корректно определено число $\mu^C(x)/\mu^C(y)\equiv\equiv\mu_{\xi_n}^{C_n}(x)/\mu_{\xi_n}^{C_n}(y)$ при всех достаточно больших n. Более того, это число не зависит от способа представления разбиения τ как пересечения убывающей последовательности измеримых разбиений, в силу того же замечания о транзитивности условных мер. Пусть $\beta(x, y)=\mu^C(x)/\mu^C(y)$, где $x, y\in C\in\tau=\bigcap\limits_n \xi_n$. Нетрудно видеть, что функция β удовлетворяет условиям:

1) β определено на парах точек из одного элемента ручного разбиения, $\beta(x, y)\in\mathbf{R}_+$;

2) $\beta(x, x)=1$, $\beta(x, y)=\beta(y, x)^{-1}$;

3) $\beta(x, y)\beta(y, z)=\beta(x, z)$.

Всякую функцию, удовлетворяющую условиям 1) — 3), назовем 1-коциклом со значениями в $\mathbf{R}_+$. Построенный выше 1-коцикл назовем коциклом Радона (J. Radon) — Никодима (O. Nicodym) ручного разбиения. Если бы сумма $\sum\limits_{x\in C(y)} \beta(x, y)=[\mu^C(y)]^{-1}$ была конечна, то $\mu^C(\cdot)$ можно было бы рассматривать как условную меру, поэтому конечность суммы для почти всех x равносильна измеримости τ; если же τ не является измеримым, то сумма бесконечна и обычную условную меру определить нельзя. Тем не менее, коцикл β служит хорошим ее заменителем. Оказывается, что подобно тому, как в системе условных мер содержится полная информация о метрическом типе измеримых разбиений, в коцикле Радона—Никодима заключена вся информация о метрическом типе ручного разбиения. Если этот коцикл $\beta\equiv1$, то разбиение называется однородным.

Сформулируем теоремы о связи теории ручных и траекторных разбиений.

Предложение 1. Траекторное разбиение для произвольного автоморфизма пространства Лебега с квазиинвариантной мерой—ручное. Если мера инвариантна, то это ручное разбиение однородно, и обратно. Эргодичность автоморфизма равносильна эргодичности отвечающего ему траекторного разбиения.

Теорема 2. 1. Существует единственное с точностью до изоморфизма эргодическое однородное ручное разбиение.

Из этих двух фактов вытекает теорема 1.1. Доказательство предложения 1 может быть получено разными способами, но наиболее ясный метод состоит в последовательном применении аппроксимаций периодическими автоморфизмами (аналог леммы Рохлина—Халмоша).

Можно считать, что автоморфизм апериодичен, т. к. у периодического автоморфизма (или периодической части) разбиение на траектории измеримо и потому ручное. Будем рассматривать автоморфизм с квазиинвариантной мерой. Построим по автоморфизму T конечную башню, т. е. возьмем множество A_1, $\mu(A_1) < 1/2$, такое, что $\mu(\bigcup_k T^k A_1) = 1$, и обозначим через ξ_1 разбиение, элемент которого есть множество $\{x, Tx, \ldots, T^{k(x)}x\}$, где $x \in A_1$, $T^{k(x)+1}x \in A_1$ и $T^i x \notin A_1$, $1 \leqslant i \leqslant k(x)$; конечности $k(x)$ почти всюду легко добиться, чуть расширяя множество A_1.

Далее, на A_1 возьмем производный автоморфизм T_{A_1}, выберем точно так же $A_2 \subset A_1$, $\mu(A_2) < 1/4$, и построим новую башню; ξ_2' есть аналогичное разбиение A_1, а ξ_2 есть его поднятие в M с помощью проекции $\pi: M \to A_1$ вдоль ξ_1, т. е. $\xi_2 = \pi^{-1}\xi_2'$. Ясно, что $\xi_1 \succ \xi_2$. Продолжая этот процесс, мы получим убывающую последовательность $\xi_1 \succ \xi_2 \succ \ldots$ и $\bigcap_n \xi_n = \tau(T)$. Тем самым $\tau(T)$—ручное. Оно однородно, если T сохраняет меру.

Доказательство теоремы 2.1 уже более глубоко. Прежде всего, нетрудно перестроить аппроксимацию произвольного ручного разбиения со счетными элементами $\tau = \bigcap_n \xi_n$ так, что $\tau = \bigcap_n \tilde{\xi}_n$ и почти каждый элемент $\tilde{\xi}_n$ содержит 2^n точек; $\tilde{\xi}_1 \succ \tilde{\xi}_2 \succ \ldots$ —диадическая последовательность. Теорема 2.1 следует из такой теоремы о диадических последовательностях:

Теорема 2.2 ([9]). Пусть $\{\xi_n\}_1^\infty$—однородная эргодическая (т. е. $\bigwedge_n \xi_n = \nu$) диадическая последовательность измеримых разбиений. Существует такая последовательность натуральных чисел $n_k \to \infty$, что подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ метрически изоморфна $\{\xi_{n_k}^{(0)}\}_{k=1}^\infty$, где $\{\xi_n^{(0)}\}$—стандартная диадическая последовательность (см. выше).

Следствия. 1) (О лакунарном изоморфизме). Любые две однородные эргодические диадические последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\xi_n'\}$ лакунарно изоморфны, т. е. существует такая последовательность $n_k \to \infty$, что $\{\xi_{n_k}\}$ и $\{\xi'_{n_k}\}$ метрически изоморфны.

2) В тех же обозначениях $\bigcap\limits_n \xi_n$ и $\bigcap\limits_n \xi_n'$ метрически изоморфны (поскольку $\bigcap\limits_n \xi_n = \bigcap\limits_k \xi_{n_k}$, если $n_k \to \infty$).

Следствие 2) вместе с предложением 1 доказывает теорему 2.1. Доказательство теоремы 2.2 носит более технический характер. Иные способы доказательств теоремы 1.1 имеются в работах Дая [68], Какутани и др. [73]. Попутно отметим, что изучение траекторных задач с помощью убывающих последовательностей, предложенное в [9], оказалось полезным само по себе, теория диадических последовательностей оказалась содержательной и привела к новым инвариантам автоморфизмов.

Из предложения 1 следует, что траекторная теория для автоморфизмов с квазиинвариантной мерой сводится к классификации ручных разбиений со счетными элементами. Здесь положение следующее: выделен класс таких разбиений, внутри которого классификация производится столь же просто, как для однородного случая, а общая классификация равносильна метрической классификации потоков и тем самым невозможна в сколько-нибудь обозримых терминах. Но и сама эта редукция очень важна и изящна. Эти результаты принадлежат в основном Кригеру. Приведем их подробнее. Сначала опишем пример.

Рассмотрим пространство $M = \prod\limits_{n=1}^{\infty} X$, $\operatorname{card}(X) = k$ и вероятностный вектор $p = (p_1, \ldots, p_k)$. Пусть μ — бернуллиевская мера на M, являющаяся бесконечным произведением одинаковых сомножителей на X, равных p. Пусть $\varkappa$ — разбиение на классы последовательностей, отличающихся лишь конечным числом координат. Назовем его хвостовым. Если снабдить M мерой μ, то $\varkappa$ станет ручным эргодическим разбиением. Назовем его бернуллиевским. Если $p_i = \frac{1}{k}$, то $\varkappa$ — однородное.

Ниже под изоморфизмом понимается изоморфизм с квазиинвариантной мерой (т. е. переводящий меру в эквивалентную).

Теорема 2.3. 1) Эргодическое ручное разбиение имеет однородное эргодическое подразбиение тогда и только тогда, когда оно изоморфно бернуллиевскому.

2) Всякое бернуллиевское разбиение однозначно определяется с точностью до изоморфизма подгруппой мультипликативной группы $\mathbf{R}_+$, являющейся замыканием группы, порожденной отно-

шениями p_i/p_j, $i, j=1, \dots, k$. При $p_i=\frac{1}{k}$ эта группа есть $\{1\}$, и мы получаем утверждение теоремы 2.1).

Вторая часть теоремы получена независимо Кригером и А. М. Вершиком. Поскольку замкнутые подгруппы $\mathbf{R}_+$ есть $\{1\}$, $\mathbf{R}_+$ и $\{\lambda^n\}_{n \in Z}$, $0<\lambda<1$, то классификация ручных разбиений с однородным эргодическим подразбиением получена в явном виде. Построенную группу можно назвать «перечнем отношений» для траекторного разбиения. Отметим еще один факт, получающийся отсюда: существует с точностью до изоморфизма единственное эргодическое однородное ручное разбиение пространства Лебега с σ-конечной мерой (т. е. такой, что пространство есть объединение счетного числа подмножеств конечной меры).

Перейдем теперь к общему случаю. Здесь удобно ввести понятие потока Пуанкаре, рассмотренного Макки и примененного к изучаемому вопросу Кригером. Мы будем использовать логарифм коцикла Радона—Никодима $\Delta(x, y)=\ln\beta(x, y)$, называемый иногда модулярной функцией; это сблизит формулировки с траекторными формулировками. Пусть S — эргодический автоморфизм с квазиинвариантной мерой; если $y=Sx$, то легко видеть, что $\Delta(x, y)=\ln\frac{d\mu(Sx)}{d\mu(x)}$. Рассмотрим $Y'=X\times\mathbf{R}$ и $\mu'=\mu\times m$, где m — мера Лебега на $\mathbf{R}$. Определим на Y' поток: $T_t'(x, a)=(x, a+t)$ и автоморфизм $\tilde{S}(x, a)=(Sx, a+\Delta(x, Sx))$. Очевидно, что T_t' и $\tilde{S}$ коммутируют. Пусть $Y=Y'/\tau(\tilde{S})$ — факторпространство относительно действия $\tilde{S}$, т. е. относительно измеримой оболочки разбиения на траектории $\tau(\tilde{S})$. Тогда Y, снабженное фактормерой $\mu'/\tau(\tilde{S})$, есть снова пространство Лебега (может быть с σ-конечной инвариантной мерой), на котором корректно определен поток $T_t=T_t'/\tau(\tilde{S})$. Этот поток мы назовем потоком Пуанкаре или потоком, ассоциированным с траекторным разбиением автоморфизма S. Основное свойство этой конструкции в следующем.

Теорема 2.4. Два эргодических автоморфизма S_1 и S_2 с квазиинвариантной мерой траекторно изоморфны (в смысле квазиинвариантной меры) в том и только в том случае, если ассоциированные потоки изоморфны как потоки с квазиинвариантной мерой.

Эта теорема редуцирует задачу о классификации ручных разбиений (или траекторных для автоморфизмов с квазиинвариантной мерой) к задаче о метрическом изоморфизме потоков с квазиинвариантной мерой. Последняя, как известно, не допускает полного решения в обозримых терминах, однако, редукция позволяет использовать инварианты потока и получать отсюда нетривиальные инварианты траекторных разбиений.

Случай однородного ручного разбиения ($\beta=1$, $\Delta\equiv0$) приводит, как легко проверить, к тривиальному потоку, т. е. к потоку на $\mathbf{R}:T_ta=a+t$; бернуллиевское разбиение (см. выше) с группой $\{\lambda^n\}$ — к периодическому потоку с периодом $(-\ln\lambda)$, а с группой $\mathbf{R}$ — к тождественному потоку на одноточечном пространстве. Остальные ручные разбиения — к апериодическому потоку (детали см. в [90], [97], [75]).

Эти результаты исчерпывают общие проблемы траекторной теории для группы $\mathbf{Z}$. Любопытно здесь следующее обстоятельство: многие конструкции и формулировки были заимствованы из теории алгебр операторов, с которой траекторная теория постоянно взаимодействовала. Хотя мы излагаем вопросы в чисто метрических терминах, следует иметь в виду, что аналоги основного коцикла, модулярной функции (перечня отношений) и др. имелись, а иногда возникали ранее, в теории факторов. Мы уже упоминали в этой связи работу Дая [68], следует также назвать работы Араки и Вудса (H. Araki, E. Woods) [51] и Конна [63]. Возможно, это первые примеры обратного влияния теории алгебр операторов на эргодическую теорию; ранее теория факторов широко использовала конструкции, связанные с пространствами с мерой и их преобразованиями.

Перейдем к более общим группам.

§ 3. Траекторная теория для аменабельных групп

Сначала займемся непрерывными группами.

Два разбиения τ_1, τ_2 пространства Лебега $(M,\mathcal{M},\mu)$ назовем стабильно эквивалентными, если разбиения пространства $(M\times[0,1],\ \mu\times m)$, имеющие вид $(\tau_1\times\varepsilon)$ и $(\tau_2\times\varepsilon)$, где m — мера Лебега, а ε — разбиение $([0,1),\ m)$ на отдельные точки, изоморфны.

Теорема 3.1 (Рамсей (A. Ramsey) [102]). *Траекторное разбиение любой локально компактной недискретной группы со счетной базой на пространстве Лебега с квазиинвариантной мерой стабильно эквивалентно траекторному разбиению некоторой дискретной группы.*

В простейшем случае $G=\mathbf{R}$; тогда по следствию из теоремы Амброза—Какутани о специальном представлении потоков (теорема 4.2 гл. 1), траекторное разбиение стабильно изоморфно разбиению на траектории базового автоморфизма.

С другой стороны, можно показать, что стабильный изоморфизм двух ручных разбиений со счетными элементами равносилен обычному изоморфизму (с квазиинвариантной мерой). Поэтому задача для потоков и вообще для локально компактных групп свелась к задаче о дискретных группах. В частности, сформулированная ранее (§ 1) теорема 1.3 вытекает из теоремы 1.2 и теоремы 3.1.

Выделим специально формулировку для потоков, т. е. для однопараметрических групп автоморфизмов с инвариантной мерой.

Теорема 3.2. Любые два эргодических потока с инвариантной конечной (соответственно σ-конечной) мерой траекторно изоморфны. Таким образом, всякий эргодический поток с инвариантной конечной мерой метрически изоморфен потоку, получаемому измеримой заменой времени из условно-периодического потока на двумерном торе.

Для каких дискретных групп с инвариантной мерой траекторное разбиение будет ручным, и, тем самым, действие группы можно получить с помощью замены времени из группы **Z**? Еще в работе Дая [68] было доказано, что это верно для счетных групп с полиномиальным ростом числа слов для каждой конечно порожденной подгруппы. Тогда же было высказано предположение о том, что это верно для всех аменабельных счетных групп, т. е. групп с инвариантным средним. То, что траекторное разбиение ручное только для аменабельных групп, легко получается применением критерия Фёлнера (см. [68]); однако обратное утверждение долго не поддавалось многочисленным усилиям. Оно было доказано для некоторых классов групп (разрешимых — Конн—Кригер, вполне гиперконечных — А. М. Вершик) и лишь недавно, в полном объеме Фельдманом—Конном—Орнстейном—Вейссом (см. теорему 1.2). Доказательство использует понятия теории группоидов с мерой (см. [103]) и фактически основывается на обобщении критерия Фёлнера. Важно, что групповая задача погружается в более общую задачу о гиперконечности группоида, и доказывается, что понятия ручного (=гиперконечного) и аменабельного группоидов совпадают. Мы не можем останавливаться на деталях доказательства, а подчеркнем лишь следующее. Эта теорема показывает, что класс аменабельных групп совпадает с классом групп, для свободного действия которых выполнены основные факты обычной эргодической теории действий группы **Z**: лемма Рохлина—Халмоша, эргодическая теорема Биркгофа—Хинчина, инвариантное определение энтропии; при этом оказалось, что справедливость этих метрических фактов определяется лишь алгебраической структурой группы и не зависит от того, каково действие группы (лишь бы оно было свободным и сохраняло меру). В частности, все эргодические действия траекторно изоморфны между собой и изоморфны действию **Z**. За пределами аменабельных[1] групп дело обстоит гораздо сложнее (см. § 4).

---

[1] Может быть, следует упомянуть, что среди аменабельных групп содержатся все коммутативные, конечные; что этот класс замкнут относительно переходов к подгруппам, факторгруппам, расширениям (и потому содержит разрешимые группы). Он не содержит свободные группы с не менее чем двумя образующими и, тем самым, решетки полупростых групп. В то же время,

Чтобы закончить рассмотрение ручных разбиений, упомянем еще о нескольких фактах. Исчерпывается ли класс ручных разбиений траекторными разбиениями дискретных или непрерывных локально компактных групп? Оказывается, нет.

Теорема 3.3 (А. М. Вершик [11], В. Г. Винокуров и Н. Ганиходжаев [13]). Существует единственное с точностью до изоморфизма эргодическое ручное разбиение, не являющееся стабильно изоморфным ручному разбиению со счетными элементами.

Назовем его особым ручным разбиением. Его реализация такова. Пусть $\{\xi_n\}_1^\infty$ — убывающая последовательность измеримых разбиений, для которых почти все элементы разбиений ξ_n/ξ_{n-1} непрерывны. Тогда $\bigcap\limits_n \xi_n$ есть особое ручное разбиение. Например, хвостовое разбиение $M=\prod\limits_1^\infty [0, 1]$ с product-мерой m^∞ является особым. Напомним, что элемент хвостового разбиения состоит из всех последовательностей, которые лишь конечным числом координат отличаются друг от друга. Эквивалентная реализация такова: пусть $T^\infty=\prod\limits_1^\infty S^1$ — бесконечномерный тор, а $\sum\limits_1^\infty S^1$ — прямая сумма окружностей, которая покоординатно действует на T^∞. Ее траекторное разбиение и является особым ручным разбиением. Особое разбиение не является траекторным для какой-либо локально компактной группы, но есть траекторное для индуктивного предела компактных групп. Траекторная теория для не локально компактных групп еще не создана, нет даже основных понятий.

Другое замечание относится к полугруппам эндоморфизмов пространств Лебега. Пусть G — счетная полугруппа эндоморфизмов пространства Лебега с квазиинвариантной мерой. Траекторное разбиение $\tau(G)$ для нее определяется так: x и y лежат на одной траектории, если существуют такие g_1, $g_2 \in G$, что $g_1x=g_2y$. Для полугруппы $\mathbf{Z}_+$ это определение дано В. А. Рохлиным; если G — группа, то это определение переходит в старое, т. к. $y=g_2^{-1}g_1x$. Имеется еще одно полезное разбиение, которое можно назвать хвостовым: точки x и y лежат в одном его элементе, если существует такое $g \in G$, что $gx=gy$; оно не

не всякая неаменабельная группа содержит свободную группу с двумя образующими в качестве подгруппы (А. Ю. Ольшанский [31]). Кроме того, существуют аменабельные группы с промежуточным ростом слов (быстрее полиномиального, но медленнее экспоненциального) и неполучающиеся обычными конструкциями из коммутативных и конечных (Р. И. Григорчук [15]).

имеет аналога для групп. Изучение траекторных разбиений полугрупп лишь начинается, разобран лишь случай полугруппы $\mathbf{Z}_+{}^1$, т. е. одного эндоморфизма.

Теорема 3.4 (Боуэн (R. Bowen) [60], А. М. Вершик [12]). Разбиение на траектории произвольного эндоморфизма является ручным.

§ 4. Траекторная теория для неаменабельных групп. Жесткость

За исключением важных работ Циммера (R. Zimmer), обобщившего теоремы Г. А. Маргулиса о жесткости арифметических подгрупп на теорию действий полупростых групп, систематических результатов по траекторным разбиениям неаменабельных групп почти нет. Но есть ряд интересных примеров.

Ситуация здесь существенно отличается от теории, изложенной в §§ 1—3, в нескольких отношениях. Мы будем рассматривать далее действия групп с инвариантной мерой, а относительно квазиинвариантных мер сделаем лишь одно замечание: траекторное разбиение для свободного действия с квазиинвариантной мерой может быть ручным для любой счетной группы, в том числе и неаменабельной. (Напомним, что траекторное разбиение свободного действия с инвариантной мерой ручное лишь для аменабельных групп). Такие примеры строятся просто: очевидно, что действие счетной группы на себе (например, слева) — ручное; здесь пространство с мерой (G, m), где m — мера Хаара, дискретно, но после умножения его на $[0, 1]$, введения эквивалентной конечной меры на $G\times[0, 1]$ и произвольного задания свободного действия на $[0, 1]$, получим нужный пример с непрерывной мерой. Гораздо более важно, что действия с ручным траекторным разбиением для неаменабельных групп часто возникают естественным образом. Вот нетривиальный пример.

Пример 1 (Боуэн [60], А. М. Вершик [12]). Действие $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ на $P_1\mathbf{R}$ дробно-линейными подстановками.

Рассмотрим действие группы дробно-линейных целочисленных подстановок на прямой: $x\mapsto\frac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d\in\mathbf{Z}$, $ad-bc=1$. Траекторное разбиение есть разбиение на классы эквивалентности в смысле теории непрерывных дробей (см. [62]). Хотя группа $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ неаменабельна, а действие почти всюду по лебеговой мере свободно, разбиение $\mathbf{R}$ (точнее $P_1\mathbf{R}$) на классы эквивалентности, тем не менее, является ручным относительно лебеговой меры. Это означает в частности, что существует такое измеримое по Лебегу преобразование T, что два числа x и y эквивалентны тогда и только тогда, когда $T^n x=y$ при некотором $n\in\mathbf{Z}$. Этот пример имеет прямое отношение к теореме 3.4, т. к. разбиение на траектории эндоморфизма по существу совпадает с разбиением этого примера. Недавно Конн, Фельдман, Вейсс [66] получили этот результат из следующего общего факта (с помощью одной теоремы Циммера): если G — локально компактная группа, P — ее замкнутая аменабельная подгруппа, а Γ — дискретная подгруппа, то разбиение $\tau(\Gamma)$ на траектории действия Γ на G/P — ручное. В нашем примере $G=\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, $P=\{\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ 0 & *\end{smallmatrix}\right)\}$, $\Gamma=\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$.

Пример 2. Ручное действие свободной группы (граница). Пусть W_k — свободная группа с k образующими, и $\tilde{W}_k$ — множество всех бесконечных (в одну сторону) несократимых слов, т. е. последовательностей $\{x_i\}_0^\infty$, где $x_i\in\{g_1, g_2, \ldots, g_k, g_1^{-1}, \ldots, g_k^{-1}\}$ и $x_ix_{i+1}\neq e$. Группа W_k действует на $\tilde{W}_k$ (приписывание слова слева и сокращение). Снабдим $\tilde{W}_k$ product-мерой μ с равномерными сомножителями (x_i принимает $2k$ значений при $i=0$, и $2k-1$ при $i>0$). Оказывается, $\tau(\tilde{W}_k)$ есть ручное разбиение на $(\tilde{W}_k, \mu)$. Оно опять-таки связано с траекторным разбиением эндоморфизма сдвига. Заметим, что $\tilde{W}_k$ есть граница случайного блуждания на W_k с финитной мерой.

В отличие от аменабельных групп, одна и та же неаменабельная группа может иметь много попарно траекторно неизоморфных свободных действий с инвариантной мерой.

Пример 3. Пусть W_2 — свободная группа с двумя образующими. Рассмотрим два ее действия: а) вращениями двумерной сферы S^2 с мерой Лебега ($W_2\subset\mathrm{SO}(3)$) и б) бернуллиевское, т. е. действие левыми сдвигами в пространстве $\mathbf{Z}_2(W_2)=\mathbf{Z}_2^W$, всех функций на W_2 со значениями в $\mathbf{Z}_2$ и product-мерой с сомножителем $(^1/_2, {}^1/_2)$. Оба действия $\mathrm{mod}\, 0$ свободны, но траекторно неизоморфны. Дело в том, что первое из них обладает свойством, описанным в следующей теореме.

Теорема 4.1. Пусть счетная группа G действует с инвариантной мерой на пространстве $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Рассмотрим унитарное представление $g\mapsto U_g$, где $(U_gf)(x)=f(g^{-1}x)$. Следующее свойство унитарного представления $\{U_g\}$ является траекторным (т. е. не меняется при замене группы на любую траекторно эквивалентную): для любых $\varepsilon>0$ и $g_1, \ldots, g_n\in G$ существует $f\in L^2(M)$, $f\perp 1$, такая, что $\max\limits_i \|U_{g_i}f-f\|<\varepsilon$ (почти инвариантный вектор).

В приведенном выше примере первое действие обладает этим свойством, а второе — нет. Оба траекторных разбиения (по теореме 1.2) — не ручные. Проверку этих свойств нетрудно провести, используя разложения представления на неприводимые.

То же свойство можно описать более геометрично: существует нетривиальное почти инвариантное множество, т. е. для любых $\varepsilon>0$, $g_1, \ldots, g_n\in G$ существует такое $B\in\mathcal{M}$, что $|\mu(B)-{}^1/_2|<\varepsilon$, $\max\limits_i \mu(g_iB\Delta B)<\varepsilon$.

Другие траекторные свойства — существование почти инвариантных конечных разбиений и т. п. По аналогии с работой Макдуфф (D. McDuff), которая привела континуум счетных групп, у которых факторы, порожденные регулярным представлением, попарно неизоморфны, В. Я. Голодец и С. И. Безуглый [55] привели континуум групп и их действий с инвариантной мерой, которые попарно траекторно неизоморфны.

Было бы очень интересно построить деформацию действий какой-либо одной группы, например W_2, попарно неизоморфными разбиениями на траектории. Есть гипотеза, что бернуллиевские действия W_2 с разной энтропией образуют такое семейство. Неизвестно также, являются ли траекторно изоморфными бернуллиевские действия групп W_k и W_s при $k \neq s$ (W_k — свободная группа с k образующими).

Перейдем теперь к результатам Циммера о жесткости траекторных разбиений некоторых групп. Основное свойство, открытое Циммером на основе исследований Г. А. Маргулиса и других по арифметическим подгруппам полупростых групп Ли, состоит в том, что для некоторых групп траекторный изоморфизм почти совпадает с изоморфизмом действий; это прямо противоположно тому, что мы наблюдаем в классе аменабельных групп.

Теорема 4.2 (Циммер [110]). Пусть G и G' — две связные полупростые группы Ли без центра и без компактных факторгрупп, имеющие вещественный ранг, больший единицы. Пусть, далее, их свободные действия с инвариантной мерой эргодичны при ограничении на любой нетривиальный нормальный делитель (=неприводимо эргодичны). Тогда траекторная эквивалентность действий равносильна существованию изоморфизма групп G и G', при фиксации которого действия метрически изоморфны.

Эта теорема, в частности, означает следующее:

Пусть заданы эргодические свободные действия T_1 группы $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ и T_2 группы $\mathrm{SL}(m, \mathbf{R})$, $m, n \geqslant 3$, на пространстве Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Тогда траекторный изоморфизм T_1 и T_2 равносилен равенствам $m=n$ и $VT_1(g)V^{-1}=T_2(r(g))$, где V — автоморфизм $(M, \mathcal{M}, \mu)$, а r — автоморфизм $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$.

При $n=2$ утверждение уже не верно. Из этой теоремы следует такой факт для дискретных групп.

Пример 4. Действия $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ на торе $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ траекторно неизоморфны при различных $n \geqslant 2$. Действия на $P_{n-1}\mathbf{R}$ также неизоморфны траекторно при различных $n \geqslant 2$.

Соответствующая теорема о жесткости такова.

Теорема 4.3 (Циммер [110]). Пусть G и G' — две полупростые группы вещественного ранга, большего единицы, не имеющие центра и компактных факторгрупп. Пусть S и S' — их дискретные подгруппы. Если неприводимо эргодические действия S и S' траекторно изоморфны, то $G=G'$, а действия S и S' сопряжены, как в предыдущей теореме.

В приведенных результатах свойство жесткости состоит в том, что траекторный тип в существенном определяет действие, подобно тому как в теоремах Маргулиса—Мостова фундаментальная группа в определенных условиях задает почти однозначно риманову метрику.

Переформулировки, предложенные Циммером, понятий, относящих к группам Ли аменабельность, жесткость, дискретный спектр и т. п., на действия этих групп (аменабельность действия и т. п.), составляют важную часть его метода; любопытно, что они помогают в некоторых случаях упростить доказательства чисто групповых результатов.

§ 5. Заключительные замечания. Связь с теорией алгебр с инволюцией

Хотя в нашем изложении траекторная теория выглядела чисто геометрически, имеется ее функционально-алгебраическая версия. Более того, она, как уже отмечалось, формировалась одновременно с геометрическим языком. Напомним, что измеримое разбиение описывается адекватно кольцом функций (из L^∞ или L^2), постоянных на элементах разбиения. Поэтому теория измеримых разбиений или σ-подалгебр σ-алгебры измеримых множеств есть теория подколец коммутативного кольца L^∞. Поскольку траекторные разбиения в наиболее интересных случаях не являются измеримыми, то подобного эквивалента здесь нет[1]. Выход оказывается в том, чтобы рассматривать некоммутативные алгебры. Исторически это построение было впервые приведено в статье [99] в форме скрещенного произведения по действию группы и лишь гораздо позже было осознано, что это скрещенное произведение фактически зависит лишь от траекторного разбиения, а не от действия. Эта широко известная конструкция используется как для изучения C^*- и W^*-алгебр, факторов, представлений и построения примеров с помощью эргодической теории, так и наоборот, для изучения динамических систем, траекторных разбиений, слоений и др. с помощью алгебраических методов. Вот в чем она состоит.

---

[1] Однако, есть следующая возможность. Будем сопоставлять каждому измеримому разбиению множество функций из L^2, интегралы которых по элементам разбиения (т. е. условные ожидания) равны почти всюду нулю. Ясно, что это линейное замкнутое подпространство, ортогональное подкольцу, о котором шла речь выше. Оказывается, такое соответствие между разбиениями и подпространствами продолжается на более широкий класс разбиений: сопоставим данному разбиению (не обязательно измеримому) линейное (но уже, вообще говоря, незамкнутое) подпространство функций, каждая из которых имеет нулевые интегралы по элементам какого-нибудь измеримого разбиения, мажорирующего данное. Это — соответствие между ручными разбиениями и некоторыми незамкнутыми, вообще говоря, линейными подпространствами в L^2, ортогональные дополнения к которым есть подкольца, отвечающие измеримым оболочкам разбиений.

Пусть G — дискретная группа, действующая на пространстве Лебега $(M, \mathcal{M}, \mu)$ с инвариантной мерой. Рассмотрим пространство $M\times G$ и меру $\mu\times m$ (m — мера Хаара) на нем. В пространстве $L^2(M\times G)$ рассмотрим слабо замкнутую алгебру операторов, порожденных операторами $M_\varphi f(x,g)=\varphi(x)f(x,g)$ и $(U_h f)(x,g)=f(T_h x, hg)$, где $\varphi\in L^\infty(M)$, $h, g\in G$, $f\in L^2(M\times G)$. Эта алгебра $W(G,M)$ называется скрещенным произведением $L^\infty(M)$ и $l^1(G)$ относительно действия G на M. Именно эта конструкция содержится в [99]. Оказывается, что она траекторно инвариантна, т. е. если вместо G взять произвольную траекторно изоморфную ей группу G', то алгебра $W(G, M)$ не изменится. Более того, имеется способ строить эту алгебру прямо в инвариантных терминах, не используя действия (например, [69]). Поэтому алгебраические инварианты этой алгебры служат траекторными инвариантами. В настоящее время имеется развитая теория, обобщающая это построение на квазиинвариантные меры, на слоения, на C^*-алгебры, использующая когомологии и др. (см. обзоры [69], [97], [75], [65]). Много работ посвящено так называемой полной группе, или группе Дая, состоящей из всех автоморфизмов T, для которых $\tau(T)$ более мелкое, чем данное траекторное разбиение, например, чем $\tau(G)$. Полезна такая аналогия: алгебра $\mathfrak{M}=\{M_\varphi : \varphi\in L^\infty(M)\}$ есть аналог алгебры Картана в $W(G,M)$, а группа Дая, обозначаемая $[G]$, — аналог группы Вейля в теории полупростых алгебр Ли. Эта аналогия [10], [69] оказалась очень полезной для изучения W^*-алгебр. В свою очередь, многие продвижения в траекторной теории (например, теорема Фельдмана—Конна—Орнстейна—Вейсса (у нас — теорема 1.2)) были получены после аналогичных теорем теории W^*-алгебр (в данном случае, после теоремы Конна [64]).

ЛИТЕРАТУРА

В [3], [4] обсуждаются связи эргодической теории с классической механикой и теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. В [7] изложена теория характеристических показателей Ляпунова для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Обзор [19] содержит подробную библиографию работ по эргодической теории до 1975 года. В [20] содержится изложение теории аппроксимаций динамических систем периодическими динамическими системами и ее приложений. В [24] изложена спектральная теория, а также описаны многочисленные конкретные примеры динамических систем. Обзорные статьи [36], [37], [38] содержат подробное изложение теории меры, а также основных вопросов общей метрической и энтропийной теории динамических систем. Доступное и краткое изложение элементов эргодической теории содержится в [45]. Изложению энтропийной теории посвящено несколько глав книги [56]. Книга [74] — одно из первых систематических изложений эргодической теории. Обзор работ, посвященных общим эргодическим теоремам, с подробной библиографией содержится в [87]. Проблеме метрического изоморфизма посвящена книга [100]. В ней изложены важные результаты, полученные, в основном, ее автором, в частности, полное решение проблемы изоморфизма для автоморфизмов Бернулли. В [101] изложены результаты недавних исследований, относящихся к проблеме эквивалентности динамических систем в смысле Какутани. Книга [106] посвящена связям эргодической теории и статистической механики решетчатых систем. Основные приложения термодинамического формализма лежат в области гиперболических динамических систем.

1. *Абрамов Л. М.*, Метрические автоморфизмы с квазидискретным спектром. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, *26*, № 4, 513—530

2. *Аносов Д. В.*, Об аддитивном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, *37*, № 6, 1259—1274

1. *Арнольд В. И.*, Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, 431 с.

4. —, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.

5. *Белинская Р. М.*, Разбиения пространства Лебега на траектории, определяемые эргодическими автоморфизмами. Функц. анализ и его прил., 1968, *2*, № 3, 4—16

6. *Блохин А. А.*, Гладкие эргодические потоки на поверхностях. Тр. Моск. мат. о-ва, 1972, *27*, 113—128

7. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.*, Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966, 576 с.

8. *Вершик А. М.*, Измеримая реализация непрерывных групп автоморфизмов унитарного кольца. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, *29*, № 1, 127—136

9. —, О лакунарном изоморфизме последовательностей измеримых разбиений. Функц. анализ и его прил., 1968, *2*, № 3, 17—21

10. —, Неизмеримые разбиения, траекторная теория, алгебры операторов. Докл. АН СССР, 1971, *199*, № 5, 1004—1007

11. —, Убывающие последовательности σ-алгебр. Теория вероятностей и ее применения, 1974, *19*, № 3, 657—658

12. —, Действие $PSL(2, R)$ на P_1R аппроксимируемо. Успехи мат. наук, 1978, *33*, № 1, 209—210

13. *Винокуров В. Г., Ганиходжаев Н.*, Условные функции в траекторной теории динамических систем. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, *42*, № 5, 428—463

14. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.*, Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны. Успехи мат. наук, 1952, *7*, № 1, 118—137

15. *Григорчук Р. И.*, К проблеме Милнора о групповом росте. Докл. АН СССР, 1983, *271*, № 1, 30—33

16. *Гуревич Б. М.*, Совершенные разбиения для эргодических потоков. Функц. анализ и его прил., 1977, *2*, № 3, 20—23

17. *Каток А. Б.*, Спектральные свойства динамических систем с интегральным инвариантом на торе. Функц. анализ и его прил., 1967, *1*, № 4, 75—85

18. —, Инвариантные меры потоков на ориентируемых поверхностях. Докл. АН СССР, 1973, *211*, № 4, 775—778

19. —, *Синай Я. Г., Стёпин А. М.*, Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой. В сб. «Мат. анализ. Т. 13. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 129—262

20. —, *Стёпин А. М.*, Аппроксимация в эргодической теории. Успехи мат. наук, 1967, *22*, № 5, 81—106

21. *Кириллов А. А.*, Динамические системы, факторы и представления групп. Успехи мат. наук, 1967, *22*, № 5, 67—80

22. *Колмогоров А. Н.*, Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и эндоморфизмов пространств Лебега. Докл. АН СССР, 1958, *115*, № 5, 861—864

23. —, О динамических системах с интегральным инвариантом на торе. Докл. АН СССР, 1953, *93*, № 5, 763—766
24. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.*, Эргодическая теория. М.: Наука, 1980, 384 с.
25. *Кочергин А. В.*, Об отсутствии перемешивания у специальных потоков над поворотом окружности и потоков на двумерном торе. Докл. АН СССР, 1972, *205*, № 3, 515—518
26. —, Замена времени в потоках и перемешивание. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, *37*, № 6, 1275—1298
27. *Крыгин А. Б.*, Пример непрерывного потока на торе со смешанным спектром. Мат. заметки, 1974, *15*, № 2, 235—240
28. *Мешалкин Л. Д.*, Один случай изоморфизма схем Бернулли. Докл. АН СССР, 1959, *128*, № 1, 41—44
29. *Миллионщиков В. М.*, Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений. Мат. сб., 1968, *77*, № 2, 163—173
30. —, Критерий устойчивости вероятностного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами. Мат. сб., 1969, *78*, № 2, 179—202
31. *Ольшанский А. Ю.*, К проблеме существования инвариантного среднего на группе. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 4, 199—200
32. *Оселедец В. И.*, Марковские цепи, косые произведения и эргодические теоремы для «общих» динамических систем. Теория вероятностей и ее применения, 1965, *10*, № 3, 551—557
33. —, Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем. Тр. Моск. мат. о-ва, 1968, *19*, 179—210
34. *Пицкель Б. С.*, Об информационных будущих аменабельных групп. Докл. АН СССР, 1975, *223*, № 5, 1067—1070
35. —, *Стёпин А. М.*, О свойстве равнораспределенности энтропии коммутативных групп метрических автоморфизмов. Докл. АН СССР, 1971, *198*, № 5, 1021—1024
36. *Рохлин В. А.*, Об основных понятиях теории меры. Мат. сб., 1949, *67*, № 1, 107—150
37. —, Избранные вопросы метрической теории динамических систем. Успехи мат. наук, 1949, *30*, № 2, 57—128
38. —, Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой. Успехи мат. наук, 1967, *30*, № 2, 57—128
39. —, *Синай Я. Г.*, Построение и свойства инвариантных измеримых разбиений. Докл. АН СССР, 1961, *141*, № 5, 1038—1041
40. *Сатаев Е. А.*, О числе инвариантных мер для потоков на ориентируемых поверхностях. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, *39*, № 4, 860—878
41. *Синай Я. Г.*, О понятии энтропии динамической системы. Докл. АН СССР, 1959, *124*, № 4, 768—771
42. —, Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром 1. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, *25*, № 6, 899—924
43. —, О слабом изоморфизме преобразований с инвариантной мерой. Мат. сб., 1964, *63*, № 1, 23—42
44. —, Гиббсовские меры в эргодической теории. Успехи мат. наук, 1972, *27*, № 4, 21—64
45. —, Введение в эргодическую теорию. Ереван, Изд-во Ереванского ун-та, 1973, 132 с.
46. *Стёпин А. М.*, Сдвиги Бернулли на группах. Докл. АН СССР, 1975, *223*, № 2, 300—302
47. *Темпельман А. А.*, Эргодические функции и усредняющие последовательности. Докл. АН СССР, 1981, *259*, № 2, 290—294
48. *Чулаевский В. А.*, Циклические аппроксимации перекладываний отрезков. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 2, 215—216
49. *Шкловер М. Д.*, О классических динамических системах на торе с непрерывным спектром. Изв. вузов. Мат., 1967, № 10, 113—124

50. *Ambrose W., Kakutani S.,* Structure and continuity of measurable flows. Duke Math. J., 1942, *9,* 25—42

51. *Araki H., Woods E.,* A classification of factors. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 1960, *A(4),* 51—130

52. *Auslander L., Green L., Hahn F.,* Flows on homogeneous spaces. Princeton N. Y., Princeton Univ. Press, 1963, 107 pp. (Пер. на рус. яз.: *Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф.,* Потоки на однородных пространствах. М.: Мир, 1966, 208 с.)

53. *Avez A.,* Entropy des groupes de type fini. C. r. Acad. sci., 1972, *275A,* 1363—1366

54. *Bewely T.,* Extentions of the Birkhoff and von Neumann ergodic theorems to semigroups actions. Ann. Inst. H. Poincaré, 1971, *B7,* № 4, 283—291

55. *Bezuglyi S. I., Golodets V. Ya.,* Hyperfinite and II_1-actions for non-amenable groups. J. Funct. Anal., 1981, *40,* № 1, 30—44

56. *Billingsley P.,* Ergodic theory and information. New York—London—Sydney, J. Wiley and Sons, 1965, 220 pp. (Пер. на рус. яз.: *Биллингслей П.,* Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969, 238 с.)

57. *Blanchard F.,* Partitions extremales de flots d'entropie infinie. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 1976, *36,* № 2, 129—136

58. *Bogoluboff N. N., Krylov N. M.,* La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude de systèmes dynamiques de la mécanique non-linéaire. Ann. Math., 1937, *38,* 65—113

59. *Bowen R.,* Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Lect. Notes Math., 1975, *470,* 108 pp.

60. —, Anosov foliations are hyperfinite. Ann. Math., 1977, *106,* № 3, 549—565

61. *Calderon A.,* A general ergodic theorem. Ann. Math., 1953, *58,* № 1, 182—191

62. *Cassels J. W. S.,* An introduction to diophantine approximation. Cambridge Univ. Press, 1957, 166 pp. (Пер. на рус. яз.: *Касселс Дж. В. С.,* Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Изд-во ин. лит., 1961, 213 с.)

63. *Connes A.,* Une classification des facteurs de type III. Ann. sci. Ecole norm. supér., 1973, *6,* № 2, 133—252

64. —, Classification of injective factors of types II_1, II_∞, III_λ, $\lambda\neq 1$. Ann. Math., 1976, *104,* № 1, 3—115

65. —, Classification des facteurs. Proc. Symp. Pure Math., 1982, *38,* № 2, 43—102

66. —, *Feldman J., Weiss B.,* An amenable equivalence relation is generated by single transformation. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1981, *1,* № 4, 431—450

67. *Conze J. P.,* Entropie d'une groupe abélien de transformations. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 1972, *25,* № 1, 11—30

68. *Dye H.,* On group of measure preserving transformations. I, II. Amer. J. Math., 1959, *81,* № 1, 110—159; 1963, *85,* № 4, 551—576

69. *Feldman J., Moore C. C.,* Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras. I, II. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *234,* № 2, 289—359

70. *Furstenberg H.,* Strict ergodicity and transformations of the torus. Amer. J. Math., 1961, *83,* № 4, 573—601

71. —, *Katznelson Y., Ornstein D.,* The ergodic theoretical proof of Szemeredi's theorem. Bull. Amer. Math. Soc., 1982, *7,* № 3, 527—552

72. —, *Kesten H.,* Products of random matrices. Ann. Math. Stat., 1960, *31,* № 2, 457—469

73. *Hajan A., Ito Y., Kakutani S.,* Full groups and a theorem of Dye. Adv. Math., 1975, *17,* № 1, 48—59

74. *Halmos P.,* Lectures on ergodic theory. Tokyo, Math. Soc. Jap., 1956, 99 pp. (Пер. на рус. яз.: *Халмош П. Р.,* Лекции по эргодической теории. М.: Изд-во ин. лит., 1959, 147 с.)

75. *Hamachi T., Osikawa M.*, Ergodic groups of automorphisms and Krieger's theorem. Seminair on Math. Sci., Keio University, 1982, № 3, 113 pp.

76. *Jewett R. I.*, The prevalence of uniquely ergodic systems. J. Math. and Mech., 1970, *19*, № 8, 717—729

77. *Kaimanovich V., Vershik A.*, Random walks on discrete groups: boundary and entropy. Ann. Probab., 1983, *11*, № 3, 457—490

78. *Kalikow S. A.*, T, T^{-1}-transformation is not loosely Bernoulli. Ann. Math., 1982, *115*, № 2, 393—409

79. *Kaminski B.*, Mixing properties of two-dimensional dynamical systems with completely positive entropy. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., 1980, *28*, № 9—10, 453—463

80. —, The theory of invariant partitions for $\mathbf{Z}^d$-actions. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., 1981, *29*, № 7—8, 349—362

81. *Katznelson Y., Weiss B.*, Commuting measure-preserving transformations. Isr. J. Math., 1972, *12*, № 2, 161—173

82. *Keane M.*, Interval exchange transformations. Math. Z., 1975, *141*, № 1, 25—31

83. —, Nonergodic interval exchange transformations. Isr. J. Math., 1977, *26*, № 2, 188—196

84. —, *Smorodinsky M.*, Bernoulli schemes of the same entropy are finitarily isomorphic. Ann. Math., 1979, *109*, № 2, 397—406

85. *Kieffer J. C.*, A generalized Shannon-McMillan theorem for the action of an amenable group on a probability space. Ann. Probab., 1975, *3*, № 6, 1031—1037

86. *Kingman J. F. C.*, Subadditive ergodic theory. Ann. Probab., 1973, *1*, 883—909

87. *Krengel U.*, Recent progress in ergodic theorems. Astérisque, 1977, № 50, 151—192

88. *Krieger W.*, On entropy and generators of measure-preserving transformations. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, *149*, № 2, 453—464

89. —, On unique ergodicity. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., 1970, 327—346

90. —, On ergodic flows and the isomorphism of factors. Math Ann., 1976, *223*, № 1, 19—30

91. *Mackey G. W.*, Point realisations of transformation groups. Ill. J. Math., 1962, *6*, № 2, 327—335

92. —, Ergodic transformations groups with a pure point spectrum. Ill. J. Math., 1964, *8*, № 4, 593—600

93. —, Ergodic theory and virtual groups. Math. Ann., 1966, *166*, № 3, 187—207

94. *Maruyama G.*, Transformations of flows. J. Math. Soc. Japan, 1966, *18*, № 3, 303—330

95. *Masur H.*, Interval exchange transformations and measured foliations. Ann. Math., 1982, *115*, № 1, 169—200

96. *Mautner F.*, Geodesic flows on symmetric Riemann spaces. Ann. Math., 1953, *65*, № 3, 416—431

97. *Moore C. C.*, Ergodic theory and von Neumann algebras. Proc. Symp. Pure Math., 1982, *38*, № 2, 179—226

98. *Neumann J. von.*, Zur Operatorenmethode in der Klassischen Mechanik. Ann. Math., 1932, *33*, 587—642

99. —, *Murrey F.*, On rings of operators. IV. Ann. Math., 1943, *44*, 716—808

100. *Ornstein D. S.*, Ergodic theory, randomness and dynamical systems. New Haven and London, Yale Univ. Press, 1974, 141 pp. (Пер. на рус. яз.: *Орнстейн Д. С.*, Эргодическая теория, случайность и динамические системы. М.: Мир, 1978, 168 с.)

101. —, *Rudolph D. J., Weiss B.*, Equivalence of measure preserving transformations. Mem. Amer. Math. Soc., 1982, № 262, 1—116

102. *Ramsey A.*, Virtual groups and group actions. Adv. Math., 1971, *6*, № 3, 253—322

103. *Renault J.,* A groupoid approach to C^*-algebras. Lect. Notes Math., 1980, *793*, 160 pp.
104. *Rudolph D. J.,* A two-valued step-coding for ergodic flows. Proc. Intern. Conf. Dyn. Syst. Math. Phys., Rennes, 1975
105. —, An example of a measure preserving map with minimal self-joinings and applications. J. anal. math., 1979, *35*, 97—122
106. *Ruelle D.,* Thermodynamic formalism. London—Amsterdam—Don Mills, Ontario—Sydney—Tokyo, Addison-Wesley, 1978, 183 pp.
107. *Šujan S.,* Generators of an Abelian group of invertible measure-preserving transformations. Monatsh. Math., 1980, *90*, № 1, 69—79
108. *Veech W. A.,* Interval exchange transformations. J. anal. math., 1978, *33*, 222—278
109. —, Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. Ann. Math., 1982, *115*, № 1, 201—242
110. *Zimmer R.,* Ergodic theory, group representations and rigidity. Bull. Amer. Math. Soc., 1982, *6*, № 3, 383—416

УДК 517.938+517.987

II

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 6

СТОХАСТИЧНОСТЬ ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КАМ

Я. Г. Синай

§ 1. Интегрируемые и неинтегрируемые гладкие динамические системы. Иерархия стохастических свойств детерминированной динамики

Гамильтонова система с n степенями свободы и функцией Гамильтона $H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ называется интегрируемой, если она имеет n первых интегралов $I_1=H$, $I_2, \ldots, I_n$, находящихся в инволюции. Известная теорема Лиувилля утверждает (см. [7], [23]), что если n-мерное многообразие, получающееся при фиксировании значений этих интегралов $I_1=C_1$, $I_2=C_2, \ldots$ $\ldots, I_n=C_n$, компактно, а сами интегралы в окрестности точки $(C_1, \ldots, C_n)$ функционально независимы, то это многообразие оказывается n-мерным тором. На нем можно ввести циклические переменные $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, в которых уравнения движения принимают простой вид: $\dot{\varphi}_i=F_i(I_1, \ldots, I_n)=\mathrm{const}$, $1\leqslant i\leqslant n$, а само движение будет условно-периодическим с n частотами.

С точки зрения эргодической теории, описанная ситуация означает, что поток $\{S^t\}$, отвечающий гамильтоновой системе с функцией Гамильтона $H(p, q)$ и инвариантной мерой $dq\,dp$, не эргодичен. Его эргодическими компонентами служат (mod 0) n-мерные торы, на каждом из которых индуцируется эргодический поток с чисто точечным спектром. И в более общем случае, если динамическая система не эргодична, а на почти всех ее эргодических компонентах реализуется динамическая система с чисто точечным спектром, то мы будем называть ее интегрируемой.

Имеется много примеров интегририруемых систем: геодезические потоки на поверхностях вращения, геодезический поток на трехосном эллипсоиде, биллиард внутри эллипса, система трех точечных вихрей двумерной гидродинамики и др. В последнее десятилетие много новых примеров интегрируемых систем было открыто с помощью метода обратной задачи теории рассеяния (см. кн. «Теория солитонов. Метод обратной задачи» (под ред. С. П. Новикова). М.: Наука, 1980, 319 с.).

Тем не менее, интегрируемость динамической системы следует считать исключением, а не правилом. Уже при малом возмущении достаточно общего вида функции Гамильтона полная интегрируемость гамильтоновой системы исчезает. Знаменитая теория Колмогорова—Арнольда—Мозера (J. Moser) (теория КАМ, см. следующий параграф) утверждает, что инвариантные торы, на которых частоты «достаточно сильно несоизмеримы между собой», не исчезают, а лишь несколько смещаются в фазовом пространстве, причем движение на них остается условно-периодическим. Эти инвариантные торы образуют множество положительной меры, не являющееся областью. Дополнение к нему состоит из стохастических слоев, в которых динамика носит гораздо более сложный характер. Основной механизм появления таких слоев связан с возникновением гетероклинических и гомоклинических траекторий (см. гл. 7, § 2). Слои имеют сложную топологическую структуру (по некоторым направлениям типа канторова множества), в них имеется бесконечное число неустойчивых периодических траекторий (см. гл. 7, § 2). Ниже мы опишем математически строгие результаты, относящиеся к структуре и свойствам траекторий в стохастических слоях. К сожалению, пока эти результаты относятся только к траекториям на подмножествах меры нуль и не охватывают «типичных траекторий». Не доказана даже теорема о том, что стохастические слои имеют положительную меру, хотя исследователи убеждены в том, что это так.

Другой распространенный механизм неинтегрируемости связан с появлением «подковы Смейла» (S. Smale) (см. гл. 7, § 2), т. е. подмножества фазового пространства, в котором динамика обладает специальными свойствами неустойчивости. По мере удаления от интегрируемости множество, занятое инвариантными торами, уменьшается, а множество, заполненное неинтегрируемой частью со сложным поведением траекторий, растет. Пределом можно считать динамические системы, обладающие самыми сильными статистическими свойствами на всем фазовом пространстве. Наиболее важными примерами таких систем служат геодезические потоки на компактных многообразиях отрицательной кривизны, биллиарды в областях с выпуклой внутрь границей (см. гл. 7 и 8) и некоторые одномерные отображения (гл. 9). В основе исследования эргодических свойств подобных систем лежит понятие гиперболичности, которое подробно обсуждается в главе 7, § 1.

Перечислим теперь свойства динамической системы, которые мы будем называть стохастическими.

1) Существование инвариантной меры. Для целого ряда случаев, например, для гамильтоновых систем или для систем алгебраического происхождения, естественная инвариантная мера есть с самого начала. Однако, бывают важные ситуации, когда заранее такая инвариантная мера не известна, а возникает в ходе анализа свойств динамики. Таковыми являются системы с гиперболическими (гл. 7, § 2 и § 3) и странными аттракторами (гл. 8, § 2). Естественный путь построения для них инвариантной меры состоит в том, чтобы взять произвольную гладкую начальную меру и исследовать предел ее сдвигов при $t\to\infty$ (если он существует) и зависимость его от выбора началь-

ной меры. Эта программа в ряде случаев реализуется (см. гл. 7, 8 и 9).

2) Эргодичность (см. гл. 1, § 3). После того, как инвариантная мера выбрана, естественно поставить вопрос об эргодических свойствах динамической системы по отношению к этой мере. Простейшим из них является вопрос об эргодичности.

3) Перемешивание (см. гл. 1, § 3). С точки зрения статической механики, перемешивание означает необратимость динамики: любая начальная мера, абсолютно непрерывная относительно инвариантной меры, сходится к последней (слабо) под действием динамики.

4) K-свойство (см. гл. 1, § 3). Если динамическая система является K-системой, то ее спектр счетнократный лебеговский, она обладает перемешиванием всех степеней, имеет положительную энтропию. K-свойство означает, что детерминированную динамическую систему можно закодировать в регулярный стационарный процесс теории вероятностей.

5) Бернуллиевость. Если, в случае дискретного времени, кодировку можно устроить так, что этот процесс окажется последовательностью независимых случайных величин, то динамическая система называется бернуллиевской (см. гл. 3, § 4). В случае непрерывного времени сказанное относится к любому автоморфизму, входящему в поток. Следует, впрочем, иметь в виду, что кодировка, как правило, осуществляется сложными негладкими функциями и связь с гладкой структурой фазового пространства при этом теряется.

6) Центральная предельная теорема. Пусть (M, μ, T) — эргодический автоморфизм. В силу эргодической теоремы Биркгофа—Хинчина (см. гл. 1, § 2), для любой $f \in \mathcal{L}^1(M, \mu)$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(T^k(x)) - \bar{f}\right] = 0$$

почти всюду, $\bar{f} = \int f d\mu$. Разность $\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(T^k(x)) - \bar{f}\right]$ называется *временной флуктуацией* (около среднего). Будем говорить, что f подчиняется *центральной предельной теореме* (ц. п. т.) теории вероятностей, если найдется $\sigma = \sigma(f)$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left\{x : \sqrt{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(T^k(x)) - \bar{f}\right] < a\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2\sigma}} d\mu.$$

Ц. п. т. показывает, что временные флуктуации имеют порядок $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. В ряде задач требуется доказать ц. п. т. для возможно более широкого класса функций. Как правило, это более трудно, чем установить K-свойство.

7) Скорость убывания корреляций. Если для функции $f \in \mathscr{L}^2(M, \mu)$ с нулевым средним найдутся такие положительные числа C, $\rho < 1$, что

$$\left| \int f(T^n(x)) f(x)\, d\mu \right| \leqslant C\rho^{|n|},$$

то говорят, что f обладает свойством *экспоненциального убывания корреляций.*

Это свойство устанавливается, когда T — автоморфизм Маркова, а f — функция достаточно простого вида. В общем же случае для доказательства экспоненциального убывания корреляций или вообще анализа скорости их убывания в случае гладких f требуется строить аппроксимации динамической системы автоморфизмами Маркова, что часто оказывается весьма сложным.

Ниже, говоря о стохастических свойствах динамической системы, мы будем иметь в виду перечисленную выше иерархию 1)—7) этих свойств.

§ 2. Теория Колмогорова—Арнольда—Мозера (теория КАМ)

Мы начнем изложение теории КАМ с одного важного примера, а потом приведем более общие результаты. Рассмотрим разностное уравнение типа стационарного уравнения «синус-Гордон»

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = \lambda V'(u_n), \qquad (6.1)$$

где V — периодическая функция периода 1, λ — параметр. При $V(u) = 1 - \cos 2\pi u$ получаем в точности стационарное разностное уравнение «синус-Гордон». Мы будем считать, что $V \in C^\infty(R^1)$, хотя на самом деле класс гладкости можно значительно понизить. Введем новые переменные $z_n = u_n - u_{n-1}$, $\varphi_n = \{u_n\}$, где, как всегда, $\{\cdot\}$ — знак дробной части. Тогда (6.1) принимает вид

$$z_{n+1} = z_n + \lambda V'(\varphi_n), \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + z_{n+1} \pmod 1). \qquad (6.2)$$

Пространство пар (z, φ), где $-\infty < z < \infty$, $\varphi \in S^1$, пробегает двумерный цилиндр C. Соотношения (6.2) показывают, что последовательности (z_n, φ_n) являются траекториями преобразования T цилиндра в себя, где

$$T(z, \varphi) = (z', \varphi'), \; z' = z + \lambda V(\varphi), \; \varphi' = \varphi + z' \pmod 1). \qquad (6.3)$$

Преобразование T с $V(u) = 1 - \cos 2\pi u$ ввел Б. В. Чириков (см. [61]), и с тех пор оно часто называется *преобразованием Чирикова.* Общее преобразование (6.3) мы будем называть *стандартным отображением.*

Стандартные отображения встречаются во многих задачах теории нелинейных колебаний, физики плазмы, физики твердого тела (модель Френкеля—Конторовой), и им посвящена обширная физическая и математическая литература. Из физических обзоров упомянем [61], а из математических работ, помимо книг В. И. Арнольда [7], [8] и Мозера [85], укажем недавние работы Обри (S. Aubry) (см., например, [50]), Мезера (J. Mather) [79] и Персиваля (I. Percival) [87].

В последних работах рассматривается и более общая ситуация. А именно, возьмем функцию Лагранжа двух переменных $L(u, u')$, предполагая, что

а) $L(u+1, u'+1)=L(u, u')$ (периодичность),

б) $-\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u'} \geqslant \text{const} > 0$ и непрерывна (twist condition).

Для любого набора точек на прямой $u_0, u_1, \ldots, u_m$ определим функцию Лагранжа $L(u_0, u_1, \ldots, u_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} L(u_i, u_{i-1})$. Вариационные принципы механики и статистической физики приводят к необходимости построения таких цепочек $\{u_i\}_{-\infty}^{\infty}$, что $L(u_s, u_{s+1}, \ldots$ $\ldots, u_{s+m})$ принимает наименьшее значение при любых s, $m>0$ и фиксированных u_s, u_{s+m}. Необходимое условие для этого состоит в том, что

$$\frac{\partial L(u_s, \ldots, u_{s+m})}{\partial u_n} = \frac{\partial L(u_{n+1}, u_n)}{\partial u_n} + \frac{\partial L(u_n, u_{n-1})}{\partial u_n} = 0,$$

$$-\infty < n < \infty.$$

Введем «сопряженный с u» импульс $p = \frac{\partial L(u, u')}{\partial u}$. Тогда последняя цепочка уравнений приобретает вид

$$p_n + \frac{\partial L(u_{n+1}, u_n)}{\partial u_n} = 0, \quad p_{n+1} - \frac{\partial L(u_{n+1}, u_n)}{\partial u_{n+1}} = 0, \tag{6.4}$$

$$-\infty < n < \infty.$$

Из б) вытекает однозначная разрешимость первого уравнения, которое позволяет рассматривать u_{n+1} как функцию p, u_n, а второе уравнение позволяет найти p_{n+1}. Тем самым определено преобразование T, для которого $(u_{n+1}, p_{n+1}) = T(u_n, p_n)$. Условие а) позволяет перейти к фазам $\varphi_n = \{u_n\}$ и считать, что T действует на том же цилиндре C. Стандартное отображение получается при $L(u, u') = \frac{1}{2}(u-u')^2 + \lambda V(u')$. Полезный пример другого типа получается следующим образом: Пусть Γ — выпуклая кривая класса C^∞, ограничивающая выпуклую область на плоскости. Введем на Γ циклическую переменную u и положим

$$L(u, u') = \|\vec{r}(u) - \vec{r}(u')\|^2,$$

где $\vec{r}(u)$ — радиус-вектор точки с координатой u. Тогда, как нетрудно показать, последовательности $\{u_n\}$, удовлетворяющие (6.4), отвечают биллиардным траекториям внутри Г.

Вернемся к преобразованию (6.2). Рассмотрим формально (6.2) при $\lambda=0$. Решениями служат последовательности $\{z_n=I, \varphi_n=\varphi_0+nI\}$, I — постоянная. Геометрически это означает, что каждая окружность $\Gamma_{I,0}=\{(z,\varphi):z=I\}$ инвариантна относительно T, и на ней T сводится к повороту на угол I. Теория КАМ утверждает, что при малых λ большинство из этих окружностей сохраняется, лишь несколько меняя свою форму на цилиндре C. Более точно, имеет место следующая теорема (см. [7], [8], [85]).

Теорема 2.1. Пусть число I плохо приближается рациональными, т. е. $\min\limits_{p}\left|I-\frac{p}{q}\right|>1/q^{2+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon>0$ и всех достаточно больших q. Тогда найдется такое $\lambda_0(I)=\lambda_0$, что при всех λ, $|\lambda|\leqslant\lambda_0$, стандартное отображение T имеет инвариантную кривую $\Gamma_{I,\lambda}$, C^0-близкую к $\Gamma_{I,0}$, на которой T сводится к повороту на угол I. При достаточно малых λ множество кривых $\Gamma_{I,\lambda}$ имеет положительную меру.

Эта теорема теории КАМ есть, конечно, теорема теории возмущений. Ее существенная особенность состоит в том, что строящиеся в ней инвариантные кривые не образуют никакой области. Согласно одной теореме Биркгофа (см. [53]), в любой окрестности такой кривой расположены периодические траектории. В случае «общего положения», т. е. функции V из всюду плотного подмножества второй категории, среди этих периодических траекторий имеются гиперболические траектории, сепаратрисы которых пересекаются трансверсально. При этом образуются упоминавшиеся выше в § 1 стохастические слои, лежащие между инвариантными кривыми теории КАМ. Некоторая информация об этих слоях приводится в гл. 7, § 2.

В упоминавшихся выше работах Обри [50], Мезера [80] и Персиваля [87] развивается разработанный пока в двумерном случае новый подход к теории КАМ. Обри вводит следующее определение.

Определение 2.1. Последовательность $\{u_n\}$ называется *конфигурацией с наименьшей энергией* (к. н. э.), если она обладает следующим свойством: для любых s, t, $s<t$, рассмотрим последовательность $\{u_n'\}$, где $u_n'=u_n$ при $n\leqslant s$, $n\geqslant t$. Тогда

$$\sum_{n=s+1}^{t} L(u_n', u_{n-1}')\geqslant\sum_{n=s+1}^{t} L(u_n, u_{n-1}).$$

Иными словами, если интерпретировать L как энергию, то всякое конечное возмущение к. н. э. не уменьшает энергии конфигурации. Обри показывает, что для каждой к. н. э. $\{u_n\}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}u_n=\omega$, являющийся аналогом числа вращения для гомеоморфизма окружности. Более того, для каждого ω существуют к. н. э. с этим ω. Если ω рационально, $\omega=\frac{p}{q}$, то в случае общего положения среди к. н. э. имеются гиперболические периодические траектории периода q. Если же ω иррационально, то существует измеримое инъективное (mod 0) отображение f_ω единичной окружности S^1 в C такое, что $f_\omega(S^1)$ инвариантно относительно T и $Tf_\omega(x)=f(x+\omega)$, т. е. $T|f_\omega(S^1)$ сводится к повороту на угол ω. Если отображение f_ω непрерывно, то $f_\omega(S^1)$ есть непрерывная кривая, охватывающая C. В случае чисел ω, плохо приближаемых рациональными, и достаточно малых λ, кривая $f_\omega(S^1)$ совпадает с кривой теории КАМ. Если же f_ω разрывно, то $f_\omega(S^1)$ есть канторово совершенное множество, которое называется канторотором. Оно инвариантно относительно T, и на нем T, по-прежнему, сводится к повороту. Геометрический подход к построению таких инвариантных множеств, основанный на одной теореме Биркгофа, был предложен в [50].

Для любого стандартного отображения существует такое критическое значение λ_{cr}, что при всех $\lambda>\lambda_{\text{cr}}$ нет инвариантных кривых, охватывающих C. Следовательно, все инвариантные множества $f_\omega(S^1)$ при таких λ оказываются канторотороами. По-видимому, для каждого I, фигурирующего в теореме 1, имеется такое $\lambda_{\text{cr}}(I)$, что при всех $\lambda<\lambda_{\text{cr}}(I)$ инвариантная кривая $\Gamma_{I,\lambda}$ существует, а при $\lambda>\lambda_{\text{cr}}(I)$ она разрушается и превращается в канторотор, но характер этой бифуркации до конца не выяснен. При дальнейшем увеличении λ проекция каждого канторотора оказывается сосредоточенной в малой окрестности минимума функции V. Как показал Обри (см. [50]), при таких λ проекция канторотора на ось φ имеет меру нуль. Вероятно, и хаусдорфова размерность этой проекции равна нулю.

Приведенное выше описание показывает, как могут выглядеть отдельные эргодические компоненты стандартного отображения. При малых λ инвариантные кривые $\Gamma_{I,\lambda}$ образуют множество положительной меры и поэтому T имеет инвариантные множества положительной меры, на которых оно не эргодично. С другой стороны, при больших λ численный счет и качественные соображения на физическом уровне строгости (критерий перекрытия резонансов Чирикова) показывают, что у T есть инвариантные множества большой меры, на которых оно обладает определенными свойствами стохастичности. Однако, соответствующего математически строгого результата не существует.

Теперь мы перейдем к формулировке основного утверждения теории КАМ. В теории КАМ большое значение имеют не только полученные здесь конкретные результаты, но и метод, с помощью которого они получены, поскольку он применим к очень широкому кругу задач. К сожалению, мы не имеем возможности остановиться на этом подробнее, тем более, что теория КАМ подробно излагается в томе 3 этого издания. Остановимся лишь на основной теореме этой теории в применении к гамильтоновым системам. Пусть имеется интегрируемая гамильтонова система с n степенями свободы. Тогда в фазовом пространстве существует открытое множество $\mathcal{O}=U\times\mathrm{Tor}^n$, где U — окрестность в n-мерном пространстве, Tor^n — n-мерный тор с координатами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, и функция Гамильтона H_0 имеет вид $H_0=H_0(I_1, \ldots, I_n)$, где $(I_1, \ldots, I_n)$ — координаты в U. Рассмотрим функцию Гамильтона $H(I, \varphi)=H_0(I)+\varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon)$, являющуюся малым возмущением функции Гамильтона H_0. Предположим, что H аналитична в области $\mathcal{O}'=U'\times S$, где U' — комплексная окрестность U в $\mathbf{C}^n$, а S — комплексная окрестность Tor^n в $\mathbf{C}^n$.

Основная теорема теории КАМ (см. [7], [8], [85]). Предположим, что $\det\left\|\frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j}\right\| \neq 0$ в U. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ в $\mathcal{O}$ можно найти подмножество $K\subset\mathcal{O}$ такое, что $\mathrm{mes}\,K\to\mathrm{mes}\,\mathcal{O}$ при $\varepsilon\to 0$ и K допускает измеримое разбиение на инвариантные n-мерные торы. На каждом таком торе гамильтонова динамическая система с функцией Гамильтона H сводится к условно-периодическому движению с чисто точечным спектром с n образующими частотами.

Приведенная теорема показывает, что малое возмущение интегрируемой системы не эргодично и имеет инвариантное подмножество положительной меры, эргодические компоненты которого имеют чисто точечный спектр. Этим была, в частности, полностью опровергнута гипотеза, часто встречавшаяся в физических работах, о том, что многомерная нелинейная гамильтонова система общего вида эргодична. Заметим дополнительно, что строящиеся в теории КАМ торы гладко зависят от параметра $u\in K$.

Имеются различные модификации этой теоремы, распространяющие теорию КАМ на негамильтоновы системы, ослабляющие требования гладкости или допускающие отдельные вырождения, при которых $\det^2\left\|\frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j}\right\| \equiv 0$. Мы не будем здесь на этом останавливаться.

Глава 7

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ГЛАДКИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Я. Б. Песин

§ 1. Гиперболичность отдельных траекторий

1.1. Вводные замечания. Весьма заманчивой представляется идея исследования глобального поведения траекторий динамической системы на основе информации о ее локальных свойствах. Частичной реализации этой идеи служат исследования в области гиперболических динамических систем.

Гиперболическое поведение траектории динамической системы формулируется в терминах поведения близких, точнее, бесконечно близких траекторий. Существуют три грубых типа поведения близких траекторий: а) близкие траектории притягиваются к исходной траектории при $t \to +\infty$ (полная устойчивость); б) все близкие траектории притягиваются к исходной при $t \to -\infty$ (полная неустойчивость); в) имеются траектории, притягивающиеся к исходной при $t \to +\infty$, и другие траектории, притягивающиеся к ней же при $t \to -\infty$. Именно последний тип поведения кладется в основу определения гиперболичности.

Как правило, мы будем рассматривать в этой главе случай, когда фазовое пространство M есть компактное риманово n-мерное многообразие класса C^∞ и преобразование T или поток $\{S^t\}$ также имеют класс гладкости C^∞ (если класс гладкости специально не отмечен). Пусть поток $\{S^t\}$ порождается гладким векторным полем $X(x)$. Ему отвечает векторное поле в касательном пространстве $\mathcal{T}M$ вида $(X(x), X_x(x))$, называемое векторным полем вариации поля X. Соответствующий ему поток обозначается $\tilde{S}^t(x, v) = (S^t(x), dS_x{}^t v)$. Каждое преобразование $\tilde{S}^t$ задает отображение касательного пространства $(\mathcal{T}M)_x$ в точке x в касательное пространство $(\mathcal{T}M)_{S^t(x)}$ в точке $S^t(x)$. Система дифференциальных уравнений, отвечающая $\{\tilde{S}^t\}$, есть *система уравнений в вариациях*:

$$\dot{x} = X(x), \quad \dot{v} = X_x(\dot{x})\,v. \qquad (7.1)$$

Если время t дискретно, то вместо уравнения в вариациях появляется дифференциал dT диффеоморфизма T, отображающий касательное пространство $\mathcal{T}_x$ в касательное пространство $\mathcal{T}_{T^t(x)}$.

Решения уравнения в вариациях определяют коцикл $\mathfrak{A}(x, t)$, задающий отображение касательной плоскости $\mathcal{T}_x$ в касательную плоскость $\mathcal{T}_{S^t(x)}(\mathcal{T}_{T^t(x)}$ в случае дискретного времени). Допустим, что динамическая система имеет эргодическую инвариантную меру ν. Тогда применима мультипликативная эргодическая теорема (см. гл. 1, § 2), из которой вытекает существование показателей Ляпунова $\chi_1 \leqslant \chi_2 \leqslant \ldots \leqslant \chi_n$. Эта теорема показывает также, что для ν-типичных траекторий решения уравнений в вариациях ведут себя достаточно правильным образом.

Теория, излагаемая в этой главе, относится, главным образом, к тому случаю, когда все показатели отличны от нуля в случае дискретного времени, или только один из них (порождаемый направлением движения) равен нулю в случае непрерывного времени. Считается, что так будет в случае систем «общего положения», но соответствующие строгие результаты пока не доказаны.

Во многих задачах естественная инвариантная мера заранее не известна. В основу теории этой главы кладутся условия на поведение решений уравнений в вариациях, так или иначе связанные с мультипликативной эргодической теоремой. Далее окажется, что часто, исходя из этих условий, можно строить инвариантные меры, а сами эти условия проверять, анализируя локальные свойства динамической системы.

1.2. Равномерная гиперболичность. Рассмотрим сначала динамические системы с дискретным временем. Для единства обозначений диффеоморфизм будем обозначать S^1, а порожденную им группу $\{S^t\}$, $t \in \mathbf{Z}$.

Определение 1.1. Траектория $\{S^t(x)\}$ называется *равномерно полно гиперболической*[1], если существуют подпространства $E^s(S^t(x))$ и $E^u(S^t(x))$[2] $(t \in \mathbf{Z})$ касательного пространства $\mathcal{T}_{S^t(x)}$ и числа $C>0$, λ, μ такие, что

$$\mathcal{T}_{S^t(x)} = E^s(S^t(x)) \oplus E^u(S^t(x)), \tag{7.2}$$

$$dS^\tau E^s(S^t(x)) = E^s(S^{t+\tau}(x)), \quad dS^\tau E^u(S^t(x)) = E^u(S^{t+\tau}(x)), \tag{7.3}$$

$$0 < \lambda < 1 < \mu, \tag{7.4}$$

и для всех t и $\tau \geqslant 0$

$$\begin{gathered} \|dS^\tau v\| \leqslant C\lambda^\tau \|v\|, \quad v \in E^s(S^t(x)), \\ \|dS^\tau v\| \geqslant C^{-1}\mu^\tau \|v\|, \quad v \in E^u(S^t(x)), \\ \gamma(S^t(x)) \geqslant \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{7.5}$$

где $\gamma(S^t(x))$ — угол между подпространствами $E^s(S^t(x))$ и $E^u(S^t(x))$.

Если x — периодическая (в частности, неподвижная) точка, то равномерная полная гиперболичность траектории $\{S^t(x)\}$ эк-

---

[1] В тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, мы будет говорить просто о равномерной гиперболичности.

[2] Индексы «s» и «u» происходят от английских слов «stable» и «unstable».

вивалентна тому, что x — гиперболическая периодическая (неподвижная) точка.

Определение 1.1 тем самым предполагает, что касательное пространство $\mathcal{T}_x$ разделено на два подпространства $E^s(x)$, $E^u(x)$, определяемые тем, что бесконечно близкие траектории, отвечающие $v\in E^s(x)$ $(v\in E^u(x))$, экспоненциально сближаются при $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$. Мы увидим далее, что из такого поведения уравнений в вариациях вытекает аналогичное поведение настоящих траекторий.

1.3. Неравномерная гиперболичность. Ослабление условия равномерной гиперболичности может быть осуществлено в двух направлениях. Во-первых, гиперболичность может быть неравномерной (и полной). Во-вторых, она может быть лишь частичной, т. е. выполняться не для всего касательного пространства.

Определение 1.2. Траектория $\{S^t(x)\}$ называется *неравномерно гиперболической*, если существуют подпространства $E^s(S^t(x))$, $E^u(S^t(x))$ $(t\in\mathbf{Z})$, удовлетворяющие (7.2) и (7.3), числа λ, μ, удовлетворяющие (7.4), число $\alpha<1$ и для всякого ε, $0<\varepsilon<\alpha\min\{\ln\mu,\ (-\ln\lambda)\}$, существует функция $C(x,\varepsilon)>0$ такая, что

$$C(S^t(x),\varepsilon)\leqslant C(x,\varepsilon)e^{\varepsilon|t|}\quad(t\in\mathbf{Z}),\tag{7.6}$$

и для всех t и $\tau\geqslant0$

$$\begin{gathered}\|dS^\tau v\|\leqslant C(S^{t+\tau}(x),\varepsilon)\lambda^\tau\|v\|,\quad v\in E^s(S^t(x)),\\ \|dS^\tau v\|\geqslant C^{-1}(S^{t+\tau}(x),\varepsilon)\mu^\tau\|v\|,\quad v\in E^u(S^t(x)),\\ \gamma(S^t(x))\geqslant C^{-1}(S^t(x),\varepsilon)\gamma(x).\end{gathered}\tag{7.7}$$

Смысл (7.6) состоит в следующем: оценки (7.7) «ухудшаются» вдоль траектории (т. е. с ростом t) «не слишком сильно» (т. е. с малой по сравнению с $\max\{\ln\mu,\ \ln\lambda^{-1}\}$ экспоненциальной скоростью). Эти условия играют не просто техническую, но принципиальную роль при исследовании неравномерной гиперболичности. На первый взгляд требование (7.6) может показаться довольно искусственным и ограничительным. Однако, мы увидим ниже, что это не так, и часто ему удовлетворяют типичные (по какой-либо инвариантной мере) траектории.

Отметим, что для периодической траектории $\{S_t(x)\}$ условия равномерной и неравномерной гиперболичности совпадают.

Частичная гиперболичность может быть формально получена из полной заменой требования (7.4) на

$$0<\lambda<\min(1,\mu)\tag{7.8}$$

(т. е. без предположения: $\mu>1$). Соответственно различают *равномерную частичную гиперболичность* и *неравномерную частичную гиперболичность*. В примерах условия частичной гиперболичности чаще всего реализуются следующим образом.

Касательное пространство в точке $S^t(x)$ разлагается в прямую сумму трех подпространств

$$\mathcal{T}_{S^t(x)}=E^s(S^t(x))\oplus E^0(S^t(x))\oplus E^u(S^t(x)), \tag{7.9}$$

инвариантных относительно dS^t. В подпространствах $E^s(S^t(x))$ и $E^u(S^t(x))$ дифференциал системы действует как сжатие и, соответственно, растяжение (так что имеют место неравенства (7.5) или (7.7) в зависимости от того, является ли гиперболичность равномерной или нет). Подпространство $E^0(S^t(x))$ называется *нейтральным*. Векторы из этого подпространства могут как сжиматься, так и растягиваться, но с «небольшими» скоростями. Более точно (мы ограничимся только случаем равномерной частичной гиперболичности): существуют такие C_1, λ_1, μ_1, что

$$C_1>0, \quad 0<\lambda<\lambda_1\leqslant 1\leqslant\mu_1<\mu<\infty, \tag{7.10}$$

и для любых t и $\tau>0$

$$C_1^{-1}\lambda_1^\tau\|v\|\leqslant\|dS^\tau v\|\leqslant C_1\mu_1^\tau\|v\|, \quad v\in E^0(S^t(x)). \tag{7.11}$$

Указанный вариант частичной гиперболичности мы будем называть *частичной гиперболичностью в узком смысле.*

В случае динамических систем с непрерывным временем условия гиперболичности (равномерной, неравномерной и частичной) определяются аналогично; отличие состоит лишь в ином по сравнению с (7.2) разложении касательного пространства $\mathcal{T}_{S^t(x)}$ в точке $S^t(x)$ траектории ($t\in\mathbf{R}$), а именно:

$$\mathcal{T}_{S^t(x)}=E^s(S^t(x))\oplus E^u(S^t(x))\oplus X(S^t(x)), \tag{7.12}$$

где $X(S^t(x))$ — одномерное подпространство, порожденное вектором потока (и, очевидно, инвариантное относительно dS^t). Отметим, что, как видно из сравнения (7.9) и (7.12), любой диффеоморфизм S^t (являющийся сдвигом вдоль траекторий потока на время t) удовлетворяет условиям частичной (равномерной или нет) гиперболичности.

1.4. Локальные многообразия. Условия гиперболичности позволяют прежде всего исследовать асимптотическое поведение траекторий в окрестности гиперболической точки. Точное описание дается следующей теоремой, являющейся одной из ключевых в гиперболической теории.

Теорема 1.1 (о локальном многообразии, см. [31]). Пусть $\{S^t(x)\}$ ($t\in\mathbf{Z}$) — неравномерно гиперболическая траектория. Тогда существует такое *локальное устойчивое многообразие* (ЛУМ) $V^s(x)$, что при $y\in V^s(x)$ траектории $\{S^t(x)\}$ и $\{S^t(y)\}$ сближаются с экспоненциальной скоростью, т. е. для любых t и $\tau\geqslant 0$

$$d(S^{t+\tau}(x), S^{t+\bar{\tau}}(y))\leqslant KC(S^t(x), \varepsilon)\lambda^\tau e^{\varepsilon\tau}d(S^t(x), S^t(y)), \tag{7.13}$$

где d — расстояние в M, индуцированное римановой метрикой, и $K>0$ — некоторая постоянная.

Сделаем несколько замечаний.

Замечание 1.1. Термин «локальное многообразие» применительно к нашему случаю означает, что существует гладкое отображение

$$\psi(x) : B^s(r) \to E^u(x)$$

($B^s(r)$ — шар в $E^s(x)$ с центром в нуле и радиуса r; число $r=r(x)$ называется размером ЛУМ), причем

$$\psi(0)=0 \text{ и } d\psi(0)=0. \tag{7.14}$$

ЛУМ получается проектированием в M (с помощью экспоненциального отображения) графика ψ. Из (7.14) следует, что

$$x \in V^s(x), \quad \mathcal{T}_x V^s(x) = E^s(x). \tag{7.15}$$

Замечание 1.2. Существование ЛУМ устанавливается в предположении, что $\{S^t\} \in C^{1+\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$ (т. е. первые производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α). При этом, если $\{S^t\} \in C^{r+\alpha}$, $r\geqslant 1$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $V^s(x) \in C^r$ (см. [31]).

Замечание 1.3. ЛУМ можно построить в каждой точке $y=S^t(x)$ неравномерно гиперболической траектории (ибо точка y с равным основанием может быть взята в качестве начальной точки траектории). При этом размеры ЛУМ в точках x и $S^t(x)$ удовлетворяют неравенству

$$r(S^t(x)) \geqslant K e^{-\varepsilon|t|} r(x) \tag{7.16}$$

($K>0$ — некоторая постоянная). В типичных случаях функция $r(S^t(x))$ как функция от t является осциллирующей, так что в отдельные моменты времени $r(S^t(x))$ имеет тот же порядок, что и $r(x)$. Тем не менее, для некоторых значений t величина $r(S^t(x))$ становится настолько малой, насколько позволяет соотношение (7.16).

Замечание 1.4. Сравнивая (7.13) и (7.16), нетрудно убедиться, что размеры ЛУМ убывают вдоль траектории с «малой» экспоненциальной скоростью по сравнению со скоростью сближения траекторий $\{S^t(x)\}$ и $\{S^t(y)\}$.

Замечание 1.5. Конечно, если траектория $\{S^t(x)\}$ удовлетворяет условиям равномерной гиперболичности (полной или частичной), то для нее справедлива теорема о локальном многообразии (поскольку эта гиперболичность является частным случаем неравномерной). Соответствующее утверждение известно как теорема Адамара (J. Hadamard)—Перрона (см. [4], [31]). Она справедлива для $\{S^t\} \in C^1$, а если $\{S^t\} \in C^r$, $r\geqslant 1$, то $V^s(x) \in C^r$. Кроме того, в этом случае можно показать, что $r(S^t(x)) \geqslant \text{const}$ и $C(S^t(x), \varepsilon) \leqslant \text{const}$ (см. 7.6)) равномерно по t.

Замечание 1.6. В гиперболической теории имеет место симметрия между объектами, помеченными индексами «s» и

«u». А именно, при изменении направления времени объекты с индексами «s» и «u» меняются ролями. Это позволяет, в частности, определить *локальное неустойчивое многообразие* (ЛНМ) $V^u(x)$ в точке x как ЛУМ для отображения S^{-1}. Разумеется, оно обладает свойствами, аналогичными свойствам $V^s(x)$.

Замечание 1.7. Для динамических систем с непрерывным временем ЛУМ и ЛНМ определяются как построенные для диффеоморфизма S^1 (сдвига на единицу времени вдоль траекторий потока).

Как будет видно из дальнейшего, ЛУМ и ЛНМ играют решающую роль при анализе эргодических и топологических свойств гиперболических динамических систем. Их явный вид можно определить только в весьма специальных случаях систем с дополнительной симметрией (см. далее). В общем же случае они строятся с помощью варианта метода сжатых отображений (см. [31]).

1.5. Глобальные многообразия. *Глобальным устойчивым многообразием* (ГУМ), проходящим через точку $x\in M$, называется гладкое иммерсированное подмногообразие

$$W^s(x)=\bigcup_{-\infty<t<\infty} S^{-t}(V^s(S^t(x)))\quad (t\in\mathbf{Z}). \tag{7.17}$$

Это подмногообразие имеет тот же класс гладкости, что и ЛУМ. Оно состоит из тех и только тех y, для которых

$$d(S^t(x),\, S^t(y))\to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

Аналогично определяется *глобальное неустойчивое многообразие* (ГНМ).

Для динамических систем с непрерывным временем ГУМ определяется по формуле (7.17), где $t\in\mathbf{R}$. Дополнительная структура, связанная с непрерывностью времени, позволяет построить гладкое *глобальное слабо устойчивое* иммерсированное *многообразие* по формуле

$$W^{so}(x)=\bigcup_{-\infty<t<\infty} W^s(S^t(x)). \tag{7.18}$$

При этом для всякого $y\in W^{so}(x)$ вся траектория $\{S^t(y)\}\in W^{so}(x)$. Аналогично определяются *глобальное неустойчивое и глобальное слабо неустойчивое многообразия* для потоков[1].

---

[1] Наряду с нашей системой обозначений и терминологией используется также и другая: в случае динамических систем с непрерывным временем ГУМ обозначается $W^{ss}(x)$ и называется сильно устойчивым (strong stable) многообразием, а глобальное слабо устойчивое подмногообразие обозначается $W^s(x)$ и называется устойчивым многообразием. Аналогичная система обозначений и терминология используются по отношению к неустойчивым многообразиям.

§ 2. Основные классы гладких гиперболических динамических систем. Определения и примеры

2.1. Системы Аносова.

Определение 2.1. Динамическая система называется *системой Аносова* (соответственно говорят о *диффеоморфизмах Аносова* и *потоках Аносова*), если каждая ее траектория является равномерно полно гиперболической, а постоянные C и λ можно выбрать одинаковыми для всех точек[1].

Теорема 2.1 (см. [4], [6]). Пусть $\{S^t\}$ — система Аносова класса C^1. Тогда

1) Подпространства $E^s(x)$, $E^u(x)$, $x\in M$, образуют два непрерывных инвариантных распределения (подрасслоения) касательного расслоения $\mathcal{T}$ (обозначаемых соответственно E^s и E^u). Эти распределения трансверсальны (т. е. $E^s(x)\cap E^u(x)=0$ для всякого $x\in M$).

2) Если система $\{S^t\}$ принадлежит классу $C^{1+\alpha}$, $\alpha>0$, то распределение E^s удовлетворяет условию Гёльдера, т. е. $\tilde{d}(E^s(x), E^s(y))\leqslant C\rho(x, y)^\alpha$, где $C>0$, $\alpha\in[0, 1]$ — некоторые постоянные, не зависящие от x и y, $\tilde{d}$ — расстояние в грассмановом расслоении подпространств, индуцированное римановой метрикой. Аналогичное утверждение справедливо для E^u.

3) Распределение E^s интегрируемо; его максимальные интегральные подмногообразия образуют непрерывное C^1-слоение на M (определение см. [4]), обозначаемое W^s. Слой слоения W^s, проходящий через точку x, совпадает с ГУМ $W^s(x)$. Слоение W^s инвариантно относительно системы $\{S^t\}$ (т. е. $S^t(W^s(x))=$ $=W^s(S^t(x))$ для всякого $x\in M$). Слоение W^s сжимающееся, т. е. для любых $x\in M$, $y\in W^s(x)$, $t\geqslant 0$

$$d^s(S^t(x), S^t(y))\leqslant C\lambda^t d^s(x, y),$$

где $C>0$ — некоторая постоянная (не зависящая от x и y) и d^s — расстояние, измеряемое вдоль слоев слоения $W^s(x)$, индуцируемое римановой метрикой слоя, как гладкого подмногообразия в M.

4) Аналогичные утверждения справедливы для распределения E^u. Соответствующее слоение обозначается W^u, оно инвариантно относительно системы $\{S^t\}$ и является сжимающимся при $t\leqslant 0$. Слоения W^s и W^u трансверсальны в каждой точке $x\in M$ (т. е. $V^s(x)\cap V^u(x)\cap U(x)=x$, где $U(x)$ — малая окрестность точки x).

5) В случае непрерывного времени распределения $E^s\oplus X$ и $E^u\oplus X$ (см. (7.12)) непрерывны, инвариантны относительно dS^t и интегрируемы; их максимальные интегральные подмного-

---

[1] Интересный вопрос: будет ли динамическая система, все траектории которой являются равномерно полно гиперболическими, системой Аносова. Положительный ответ получен в [36] для систем класса C^2, сохраняющих меру, эквивалентную риманову объему.

образия образуют непрерывные инвариантные относительно $\{S^t\}$ C^1-слоения на M, обозначаемые соответственно W^{so} и W^{uo}; слой слоения W^{so} (соответственно W^{uo}), проходящий через точку x, совпадает с $W^{so}(x)$ (соответственно $W^{uo}(x)$).

Мы приведем два важных результата о топологических свойствах диффеоморфизмов Аносова (подробнее топологические свойства описаны в [4], [90]; там же рассмотрен случай непрерывного времени).

Точка $x \in M$ называется *неблуждающей точкой* гомеоморфизма S, если для любой ее окрестности U найдется такое $n \neq 0$, что $S^n(U) \cap U \neq \varnothing$. Гомеоморфизм S называется *топологически транзитивным*, если он обладает всюду плотной траекторией.

Теорема 2.2 (см. [4], [90]). 1) Если S — топологически транзитивный диффеоморфизм Аносова класса C^2, то $\overline{W^s(x)}=M$, $\overline{W^u(x)}=M$ для всякого $x \in M$.

2) Периодические точки диффеоморфизма Аносова S класса C^2 плотны в множестве $\Omega(S)$ неблуждающих точек[1]. Число P_n периодических точек периода $\leqslant n$ конечно и

$$\lim \frac{\log P_n}{n} = h,$$

где h — топологическая энтропия $S|\Omega(S)$ (определение топологической энтропии см. в § 3).

Приведем примеры систем Аносова. Пусть Tor^n — n-мерный тор, получающийся факторизацией $\mathbf{R}^n$ по целочисленной решетке $\mathbf{Z}^n$; $A:\mathrm{Tor}^n \to \mathrm{Tor}^n$ — алгебраический автоморфизм, заданный целочисленной матрицей $A=(a_{ij})$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — комплексные собственные значения матрицы A.

Теорема 2.3 (см. [4]). Алгебраический автоморфизм является аносовским тогда и только тогда, когда $|\lambda_i| \neq 1$ для $i=1, \ldots, n$ (в этом случае A называется *гиперболическим автоморфизмом тора*).

Автоморфизм A сохраняет лебеговскую меру в Tor^n тогда и только тогда, когда $\det A = \pm 1$. ГУМ и ГНМ получаются проекцией на тор семейств k- и $(n-k)$-мерных плоскостей: первые параллельны собственному подпространству, отвечающему собственным значениям λ_i с $|\lambda_i|<1$ (в количестве k штук); вторые — собственному подпространству, отвечающему остальным собственным значениям (в количестве $(n-k)$ штук). Малое возмущение гиперболического автоморфизма в C^1-топологии[2] представляет собой аносовский диффеоморфизм тора (см. ниже теорему 2.11). Более того, каждый аносовский диффеоморфизм тора топологически сопряжен с некоторым гиперболичес-

---

[1] Множество $\Omega(S)$ замкнуто и инвариантно относительно S.

[2] Т. е. отображение вида $A+\varepsilon S$, где S — диффеоморфизм тора вида $S(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$, и функции $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ периодические с периодом 1.

ким автоморфизмом. Существует пример аносовского автоморфизма нильмногообразия (т. е. фактора нильпотентной группы Ли по ее дискретной подгруппе), отличного от тора.

Пример потока Аносова легче всего получить с помощью конструкции специального потока над диффеоморфизмом Аносова (см. гл. 1, § 4). Другой интересный пример представляют геодезические потоки на римановых многообразиях отрицательной кривизны. Их свойства подробно обсуждаются в § 4.

2.2. Гиперболические множества.

Определение 2.2. Множество Λ называется *гиперболическим множеством* динамической системы $\{S^t\}$, если оно замкнуто и состоит целиком из траекторий, удовлетворяющих условию равномерной полной гиперболичности с одними и теми же постоянными C и λ.

Если Λ совпадает с M, то $\{S^t\}$ — система Аносова. Если же $\Lambda \neq M$, то множество Λ является «дырявым», т. е. имеет структуру канторовского множества. Вместе с тем локальные свойства траекторий на Λ те же, что и у систем Аносова.

Как и в случае систем Аносова, подпространства $E^s(x)$ и $E^u(x)$ образуют два непрерывных распределения (подрасслоения) касательного расслоения $\mathcal{T}\Lambda$ (обозначаемых соответственно E^s и E^u). Они инвариантны относительно dS^t, трансверсальны друг другу и удовлетворяют условию Гёльдера (если $S^t \in C^{1+\alpha}$). Пересечения Λ с ГУМ $W^s(x)$ и ГНМ $W^u(x)$, $x \in \Lambda$, образуют две *C^1-ламинации*[1] Λ (см. [90]), касательные соответственно к E^s и E^u. В случае непрерывного времени существуют две дополнительные C^1-ламинации Λ, образованные пересечениями Λ с $W^{so}(x)$ и $W^{uo}(x)$. Множества

$$W^s(\Lambda)=\bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x), \quad W^u(\Lambda)=\bigcup_{x\in\Lambda} W^u(x)$$

называются соответственно *устойчивым и неустойчивым многообразиями гиперболического множества* Λ.

Для диффеоморфизмов класса $C^{1+\alpha}$ при некотором $\alpha \in (0, 1]$ известно, что риманов объем Λ равен либо 0, либо 1 (см. [13]; в последнем случае мы имеем дело с диффеоморфизмом Аносова). Для диффеоморфизмов класса C^1 это, вообще говоря, не верно (соответствующий пример приведен в [13]).

Примером гиперболического множества может служить *подкова Смейла*. Наглядное представление о ней можно получить, рассмотрев отображение S квадрата $K=[0, 1]\times[0, 1]$ в плоскость $\mathbb{R}^2$, при котором квадрат сначала «сильно» растягивается в горизонтальном направлении, потом изгибается, приобретая форму подковы, и, наконец, накладывается на исходный квадрат так, чтобы пересечение $K \cap S(K)$ состояло из двух полос $P_i=$

---

[1] C^1-ламинацией Λ называется разбиение Λ, получающееся ограничением на Λ C^1-слоения, определенного в окрестности Λ.

$=[0, 1]\times[a_i, b_i]$, $i=1, 2$, $0<a_1<b_1<a_2<b_2<1$ (см. рис. 1). При следующей итерации в каждой полосе P_i образуются две новых полосы P_{i_1, i_2}, i_1, $i_2=1, 2$, и т. д. При этом $P_{i_1 i_2 \ldots i_n}\to 0$ при $n\to\infty$. Под действием S^{-1} горизонтальные и вертикальные направления меняются ролями, а в остальном ситуация аналогична. То, что существует отображение класса C^2 с указанными выше свойствами, доказано, например, в [86]. Там же показано, что множество $\Lambda=\bigcap\limits_{-\infty<n<\infty} S^n(K)$ является гиперболическим.

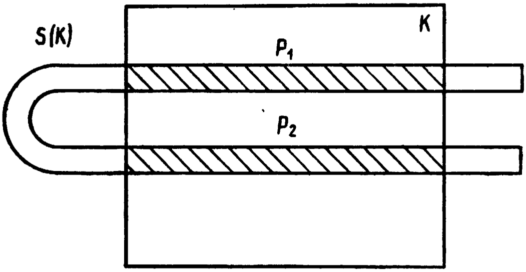

Рис. 1

Разумеется, эту конструкцию можно обобщить, потребовав, чтобы на первом месте вместо двух образовалось бы любое конечное число полос, скажем, l; тогда на втором шаге образуется l^2 полос и т. д. (при этом число полос, образующихся при отображении T^{-1}, будет, вообще говоря, не равно l). Наконец, это построение можно обобщить на многомерный случай (см. [45]). Имеются и другие видоизменения приведенной конструкции. Укажем еще на гладкую реализацию подковы Смейла, построенную в [86], а именно: существует диффеоморфизм $\tilde{S}$ класса C^2 двумерной сферы в себя, продолжающий построенное выше отображение[1] S, для которого $\Omega(\tilde{S})=\Lambda\cup p\cup q$, где p и q — неподвижные притягивающая и отталкивающая точки.

Другой пример гиперболического множества доставляют инвариантные множества в окрестности гомоклинической точки. Пусть p — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма S. Точка x пересечения устойчивой $W^s(p)$ и неустойчивой $W^u(p)$ сепаратрис точки p, отличная от самой точки p, называется *гомоклинической точкой* точки p. Если сепаратрисы пересекаются в точке x трансверсально (т. е. $\mathcal{T}_x W^s(p)\oplus\mathcal{T}_x W^u(p)=\mathcal{T}_x$ и $\mathcal{T}_x W^s(p)\cap\mathcal{T}_x W^u(p)=0$), то x называется *трансверсальной гомоклинической точкой*. Существование одной трансверсальной гомоклинической точки влечет за собой существова-

---

[1] Сначала квадрат K заключают в некоторый диск D^2 и отображение S продолжают до отображения $S_0: D^2\to D^2$, потом S_0 продолжают до искомого отображения $\tilde{S}$.

ние бесконечного множества гомоклинических точек с различными траекториями. Грубо говоря, ситуация состоит в следующем. Так как сепаратрисы точки p инвариантны, то траектория гомоклинической точки состоит из гомоклинических точек. Это заставляет сепаратрису $W^u(p)$ сильно осциллировать, наматываясь на себя по мере приближения итераций точки x к p вдоль $W^s(p)$. Аналогичная картина наблюдается для сепаратрисы $W^s(p)$. Накладываясь друг на друга, обе сепаратрисы порождают решетку из гомоклинических точек (см. рис. 2). Рассмотрим теперь компактное множество Γ, состоящее из траектории трансверсальной гомоклинической точки x и точки p, и выберем окрестности $U_0, U_1, \ldots, U_n$ следующим образом: U_0 — это окрестность точки p, накрывающая все точки траектории $\{S^n(x)\}$, за исключением некоторого конечного числа; оставшиеся точки покрываются по одной попарно непересекающимися окрестностями $U_1, \ldots, U_n$.

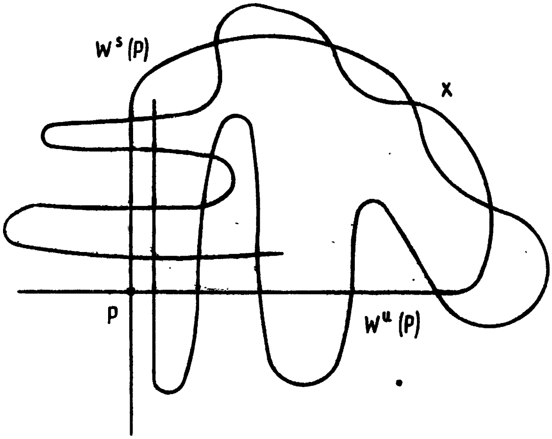

Рис. 2

Теорема 2.4 (см. [1]). Для всякой окрестности V множества Γ существует такая система окрестностей $U_i \subset V$, $i = 0, 1, \ldots, n$, что

$$\Lambda = \bigcap_{m=-\infty}^{\infty} S^m \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right)$$

является инвариантным гиперболическим множеством[1].

Таким образом, множество Λ состоит из всех точек y, траектории которых $\{S^n(y)\}$, $-\infty < n < \infty$, остаются в окрестности V. С уменьшением диаметра окрестности V множество Λ стягивается к Γ.

---

[1] Можно показать, что Λ канторово, т. е. нигде не плотное совершенное множество.

Приведем простое объяснение того, в каком смысле при появлении гомоклинической точки возникают «стохастические траектории». Ограничимся случаем C^2-диффеоморфизма двумерного цилиндра M, имеющего неподвижную гиперболическую точку $\mathcal{O}$. Обозначим отрезки неустойчивой и устойчивой сепаратрис этой точки через $\gamma^{(u)}$ и $\gamma^{(s)}$ и предположим, что один их общий конец есть точка $\mathcal{O}$, а другой — трансверсальная гомоклиническая точка A_0 (см. рис. 3). Точка $S^{-1}(A_0)=A_{-1}$ также, очевидно, является гомоклинической. Геометрически ясно, что между A_{-1} и A_0 должна быть по крайней мере еще одна гомоклиническая точка, которую мы обозначим через B_0. Окружим B_0 и A_0 достаточно малыми окрестностями U' и U'' и будем писать 1, если движущаяся точка попадет в U', и 0, если она попадет в U''. Зададим теперь произвольную последовательность $\varepsilon=\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ из 0 и 1. Тогда оказывается, что найдется такая точка $x\in\Lambda$, что ее траектория будет последовательно попадать в U' или U'' в соответствии со словом ε. А так как большинство последовательностей ε «случайно», то мы видим, что случайные последовательности «реализуются» траекториями преобразования S.

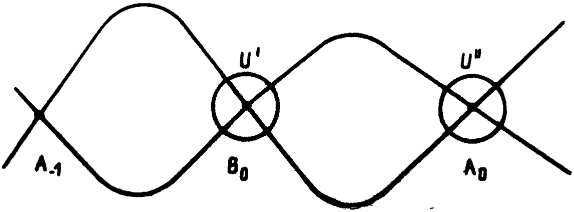

Рис. 3

Гомоклинические точки являются частным случаем так называемых гетероклинических точек (точка x называется *гетероклинической*, если существуют периодические точки p_1 и p_2 такие, что $x\in W^s(p_1)\cap W^u(p_2)$), на которые переносятся все предыдущие построения и результаты.

2.3. Локально максимальные гиперболические множества. С топологической точки зрения произвольное гиперболическое множество может иметь весьма сложное строение. Поэтому мы ограничимся рассмотрением специального, но достаточно широкого класса гиперболических множеств, введенного В. М. Алексеевым [2] и Д. В. Аносовым [5].

Определение 2.3. Инвариантное относительно диффеоморфизма S компактное множество Λ называется *локально максимальным* (или изолированным), если существует такая окрестность $U(\Lambda)\supset\Lambda$, что любое инвариантное множество Λ', для которого $\Lambda\subset\Lambda'\subset U(\Lambda)$, совпадает с Λ.

Пусть Λ — локально максимальное гиперболическое множество (ЛМГМ) диффеоморфизма S. Обозначим через

$\Omega(S|\Lambda)$ и $\operatorname{Per}(S|\Lambda)$ множество неблуждающих и соответственно периодических точек отображения $S|\Lambda$.

Теорема 2.5 (о спектральном разложении ЛМГМ, см. [13], [21]).

1) Множество $\Omega(S|\Lambda)$ представимо в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, на каждом из которых отображение S топологически транзитивно.

2) Каждое множество Ω_i представимо как объединение попарно непересекающихся замкнутых множеств $\Omega_i^1, \ldots, \Omega_i^{n_i}$, циклически переставляющихся под действием S, и отображение $S^{n_i}|\Omega_i^1$ *топологически перемешивает* (т. е. для любых U, $V \subset \Omega_i^1$, открытых в топологии Ω_i^1, существует такое N, что $(S^{n_i})^n(U) \cap V \neq \varnothing$ для всякого $n \geqslant N$).

3) $\overline{W^s(x)} \supseteq \Omega_i$, $\overline{W^u(x)} \supseteq \Omega_i$ для всякого $x \in \Omega_i$.

4) $\Omega(S|\Lambda) = \overline{\operatorname{Per}(S|\Lambda)}$.

Для динамической системы с непрерывным временем $\{S^t\}$ также имеет место теорема о спектральном разложении ЛМГМ на топологически транзитивные компоненты $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$. При этом аналогом утверждений 2 и 3 является следующая альтернатива: либо $\overline{W^s(x)} \supseteq \Omega_i$ и $\overline{W^u(x)} \supseteq \Omega_i$ для всякого $x \in \Omega_i$, либо поток $\{S^t\}$ представляется в виде специального потока (см. гл. 1, § 4) над гомеоморфизмом T некоторого компакта X[1]. Множество X имеет сложную топологическую структуру (является «дырявым»), тем не менее можно показать, что отображение $T|X$ обладает некоторыми свойствами типа гиперболических (и выражаемых посредством так называемой аксиомы A^* (см. [90]) или иного ее варианта — аксиомы $A^\#$ (см. [3])). Для топологически транзитивных потоков Аносова, конечно, имеет место аналогичная альтернатива. При этом в том случае, когда $\{S^t\}$ является специальным потоком над отображением T пространства X, можно доказать, что X — гладкое компактное риманово многообразие, а T — его диффеоморфизм Аносова (см. [4]).

2.4. A-диффеоморфизмы. Говорят, что диффеоморфизм S удовлетворяет аксиоме А (или является *А-диффеоморфизмом* (см. [13])), если его множество неблуждающих точек $\Omega(S)$ гиперболично и периодические точки S плотны в $\Omega(S)$. Можно показать, что если S удовлетворяет аксиоме А, то множество $\Omega(S)$ локально максимально; его компоненты топологической транзитивности (т. е. множества Ω_i в теореме 2.5) называются базисными.

2.5. Гиперболические аттракторы.

Определение 2.4. Множество Λ называется *аттрактором* динамической системы $\{S^t\}$ $(t \in \mathbf{Z}$ или $t \in \mathbf{R})$, если существует

---

[1] См. Plante J. F., Anosov flows. Amer. J. Math., 1972, 94, № 3, 729—754.

такая окрестность $U \supset \Lambda$, что $\overline{S^t(U)} \subset U$ при $t>0$ и $\Lambda = \bigcap\limits_{t>0} S^t(U)$[1].

Легко видеть, что Λ замкнуто, локально максимально и инвариантно относительно $\{S^t\}$.

Определение 2.5. Множество Λ называется *гиперболическим аттрактором*, если оно является аттрактором и одновременно гиперболическим множеством.

Хотя гиперболические аттракторы и не встречаются в простых физических системах, они служат хорошей моделью того, что происходит в реальных ситуациях.

Теорема 2.6 (см. [90]). ЛМГМ Λ является гиперболическим аттрактором тогда и только тогда, когда $W^u(x) \subset \Lambda$ для всякого $x \in \Lambda$.

Таким образом гиперболический аттрактор целиком состоит из неустойчивых многообразий, а сложность топологической структуры такого аттрактора связана с тем, что пересечение неустойчивых многообразий с трансверсальным к ним подмногообразием представляет собой множество канторовского типа.

Исторически первым примером гиперболического аттрактора служит так называемый *соленоид Смейла—Вильямса* (R. Williams). Соответствующая общая конструкция приведена, например, в [86], мы ограничимся лишь ее простейшим вариантом. Пусть g — отображение окружности S^1 вида $g(x) = 2x \pmod 1$ и ψ_0 — иммерсия S^1 в полноторий $M = D^2 \times S^1$ вида $\psi_0(x) = (0, 0, 2x)$. Приблизим эту иммерсию в C^1-топологии вложением вида $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), 2x)$, а затем продолжим ψ до отображения $S: M \to M$ так, чтобы каждое сечение $D^2 \times x_0$ полнотория $D^2 \times S^1$ переходило внутрь сечения $D^2 \times \psi(x_0)$ и при этом равномерно сжималось (в качестве S можно взять, например, отображение $S(\alpha, \beta, x) = \left(10^{-10}\alpha + \frac{1}{2}\cos x, 10^{-10}\beta + \frac{1}{2}\sin x, 2x\right)$. Множество $\Lambda = \bigcap\limits_{n>0} S^n(M)$ есть соленоид. Топологически — это локально тривиальное расслоение с базой S^1 и слоем — канторовым совершенным множеством. Соленоид Λ является связным, но не локально связным (см. [86]).

Другой пример гиперболического аттрактора можно получить, перестроив гиперболический автоморфизм A двумерного тора Tor^2. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.7 (см. [35]). Существует диффеоморфизм $S: \mathrm{Tor}^2 \to \mathrm{Tor}^2$ класса C^2 и открытые окрестности U_1, U_2 начала координат $O = (0, 0)$, $U_1 \subset U_2$ такие, что

1) $S(x) = A(x)$ для $x \in \mathrm{Tor}^2 \setminus U_2$;

2) $S(x) = B(x)$ для $x \in U_1$; отображение $B: U_1 \to \mathrm{Tor}^2$ имеет три неподвижные точки O_1, O, O_2: точки O_1 и O_2 — гиперболи-

---

[1] Если заранее требовать замкнутости Λ, то условие $\overline{S^t(U)} \subset U$ можно отбросить.

ческие, точка O — притягивающая, O_1, $O_2 \in W^s(O)$, а устойчивые и неустойчивые сепаратрисы точек O_1, O_2 лежат соответственно на ГУМ и ГНМ этих точек для отображения A.

Гиперболический аттрактор для S является замыканием неустойчивых сепаратрис точек O_1 и O_2.

В малых окрестностях гиперболических множеств (в том числе гиперболических аттракторов) динамическая система обнаруживает стохастические свойства в наиболее яркой форме. Во многих известных случаях, где обнаружено стохастическое поведение (наряду с той либо иной степенью неустойчивости траекторий), причиной стохастичности служит наличие в фазовом пространстве динамической системы инвариантных множеств, которые в первом приближении моделируются подковой Смейла или соленоидом Смейла—Вильямса (или их модификациями).

2.6. Частично гиперболические динамические системы.

Определение 2.6. Динамическая система называется *равномерно частично гиперболической* (РЧГ-системой), если каждая ее траектория удовлетворяет условию частичной гиперболичности и постоянные C, λ, μ можно выбрать одними и теми же для всех траекторий. Инвариантное множество Λ, все траектории которого являются равномерно частично гиперболическими (с одними и теми же постоянными C, λ, μ), называется *равномерно частично гиперболическим* (РЧГ-множеством). Если РЧГ-множество является аттрактором, оно называется *равномерно частично гиперболическим аттрактором* (РЧГ-аттрактором). Под РЧГ-системой (соответственно РЧГ-множеством или РЧГ-аттрактором) в узком смысле мы понимаем РЧГ-систему, все траектории которой удовлетворяют условию частичной гиперболичности в узком смысле.

По-видимому, самый простой пример РЧГ-систем строится следующим образом. Пусть T — диффеоморфизм Аносова гладкого многообразия M и N — гладкое многообразие. Тогда диффеоморфизм $S: M \times N \to M \times N$ вида $S(x, y) = (T(x), y)$, $x \in M$, $y \in N$, является РЧГ-диффеоморфизмом. Его нейтральное распределение интегрируемо, а соответствующие слои компактны (и гомеоморфны N). Если $\pi: M \times N \to M$ — проекция, то (в очевидных обозначениях) $\pi(W^s_S\ (z)) = W^s_T\ (\pi(z))$, $\pi(W^u_S\ (z)) = W^u_T\ (\pi(z))$.

Обобщением этой конструкции является косое произведение над диффеоморфизмом Аносова. Любое малое возмущение S является РЧГ-диффеоморфизмом (см. теорему 2.11). Более того, оно гомеоморфно косому произведению над диффеоморфизмом Аносова.

Аналогично можно построить пример РЧГ-множества и РЧГ-аттрактора: если отображение T обладает гиперболическим множеством (соответственно гиперболическим аттрактором) Λ, то множество $\Lambda\times N$ — это РЧГ-множество (соответственно РЧГ-аттрактор) для отображения S и любое малое возмущение S обладает РЧГ-множеством (соответственно РЧГ-аттрактором).

2.7. Теория Мезера. Динамическая система $\{S^t\}$ на гладком компактном римановом многообразии M порождает группу непрерывных линейных операторов $\{S^t_*\}$, действующую в банаховом пространстве $\Gamma^0(\mathcal{T}M)$ непрерывных векторных полей $v(x)$ на M по формуле

$$(S^t_* v)(x) = dS^t v(S^{-t}(x)).$$

Спектр Q комплексификации оператора S^1_* называется *мезеровским спектром* динамической системы $\{S^t\}$.

Теорема 2.8 (о структуре мезеровского спектра, Мезер ([79], [22])). Пусть $\{S^t\}$ — динамическая система класса C^1 на гладком компактном римановом многообразии M. Предположим также, что непериодические траектории системы S^t плотны в M. Тогда

1) каждая связная компонента спектра Q представляет собой кольцо Q_i с радиусами λ_i, μ_i, а число таких колец $p\leqslant\leqslant\dim M$, и

$$0<\lambda_1\leqslant\mu_1<\ldots<\lambda_l\leqslant 1\leqslant\mu_l<\ldots<\lambda_p\leqslant\mu_p;$$

2) инвариантное подпространство $\mathcal{E}_i\subset\Gamma^0(\mathcal{T}M)$ оператора S^1_*, отвечающее компоненте спектра Q_i, является модулем над кольцом непрерывных функций; совокупность подпространств $E_i(x)=\{v(x)\in\mathcal{T}_x : v\in\mathcal{E}_i\}$ образует инвариантное относительно dS^1 непрерывное распределение на $\mathcal{T}M$, причем $\mathcal{T}_x=\bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_i(x)$ $(x\in M)$;

3) если время t непрерывно, то единичная окружность лежит в Q;

4) аналогичные утверждения справедливы для спектра комплексификации оператора S^t_* для любого $t\neq 0$.

Мы дополним это утверждение следующим.

Теорема 2.9 (см. [14]). В условиях теоремы 2.8

1) если $\mu_k<1$, то распределение $F^s_k=\bigoplus\limits_{i=1}^{k} E_i$ интегрируемо, а его максимальные интегральные многообразия образуют непрерывное C^1-слоение M, обозначаемое W^s_k; слой $W^s_k(x)$, проходящий через точку $x\in M$, является C^1-иммерсированным подмногообразием[1] M;

2) если $\lambda_k>1$, то аналогичное утверждение справедливо для распределения $F^u_k=\bigoplus\limits_{i=k}^{p} E_i$ (соответствующее слоение обозначим W^u_k, а его слой, проходящий через точку $x\in M$, через $W^u_k(x)$);

3) слоение W^s_k является инвариантным относительно S^t

---

[1] Можно показать, что если $\{S^t\}\in C^r$, то $W^s_k(x)\in C^r$.

и сжимающимся, т. е. для любых $x\in M$, $y\in W_k^s(x)$, $t\geqslant 0$

$$d^{(s)}(S^t(x), S^t(y))\leqslant C(\lambda_k+\varepsilon)^t d^{(s)}(x, y),$$

где $C>0$ — некоторая постоянная, не зависящая от x, y, t; ε — любое число, удовлетворяющее условию $0<\varepsilon\leqslant\min\{\lambda_{k+1}-\mu_k; 1-\mu_k\}$; $d^{(s)}$ — расстояние на слое $W_k^s(x)$, индуцированное римановой метрикой слоя как гладкого подмногообразия в M;

4) слоение W_k^u является инвариантным относительно $\{S^t\}$ и сжимающимся при $t\leqslant 0$.

Из теорем 2.8 и 2.9 вытекает существование двух фильтраций распределений

$$F_1^s\subset F_2^s\subset\ldots\subset F_{l-1}^s,\quad F_{l+1}^u\subset\ldots\subset F_p^u$$

и соответствующих им двух фильтраций слоений

$$W_1{}^s\subset W_2{}^s\subset\ldots\subset W_{l-1}^s,\quad W_{l+1}^u\subset\ldots\subset W_p{}^u.$$

Конечно, для произвольной динамической системы эти фильтрации могут оказаться тривиальными (это соответствует тому, что спектр S состоит из одного кольца, обычно содержащего единичную окружность).

Теоремы 2.8 и 2.9 останутся справедливыми, если вместо всего многообразия M рассмотреть инвариантное относительно динамической системы $\{S^t\}$ множество Λ (при этом вместо пространства $\Gamma^0(\mathcal{T}M)$ следует рассмотреть пространство $\Gamma^0(\mathcal{T}\Lambda)$).

Введенные выше классы динамических систем допускают характеризацию посредством их мезеровского спектра.

Теорема 2.10 (см. [79]). 1) Диффеоморфизм S^1 является аносовским тогда и только тогда, когда его мезеровский спектр $Q=Q_1\cup Q_2$, где $Q_1\cap Q_2=\varnothing$ и Q_1 лежит строго внутри, а Q_2 — строго вне единичного круга.

2) Поток $\{S^t\}$ является аносовским тогда и только тогда, когда его мезеровский спектр $Q=Q_1\cup Q_2\cup Q_3$, где $Q_i\cap Q_j=\varnothing$, $i\neq j$, и Q_2 совпадает с единичной окружностью.

3) Динамическая система является РЧГ-системой (соответственно РЧГ-системой в узком смысле), если ее мезеровский спектр можно представить в виде $Q=Q_1\cup Q_2$, где $Q_1\cap Q_2=\varnothing$ и $Q_1\neq\varnothing$, $Q_2\neq\varnothing$ (соответственно $Q=Q_1\cup Q_2\cup Q_3$, где $Q_i\cap\cap Q_j=\varnothing$ при $i\neq j$ и $Q_i\neq\varnothing$ при $i=1, 2, 3$).

4) Инвариантное множество Λ является гиперболическим (соответственно РЧГ-множеством), если мезеровский спектр динамической системы на Λ удовлетворяет утверждениям 1) или 2) (соответственно утверждению 3)).

Обозначим через $\mathrm{Diff}^r(M)$ (соответственно $\Gamma^r(\mathcal{T}M)$) пространство диффеоморфизмов (соответственно векторных полей) класса C^r, снабженное C^r-топологией. Мезеровский спектр устойчив относительно малых возмущений динамической системы в следующем смысле.

Теорема 2.11 (см. [22]). Пусть $Q=\bigcup_{i=1}^{p} Q_i$ — разложение мезеровского спектра динамической системы $\{S^t\}$ класса C^r, $r\geqslant 1$, Q_i — кольцо с радиусами λ_i, μ_i и $0<\lambda_1\leqslant\mu_1<\ldots<\lambda_p\leqslant\leqslant\mu_p$, где $p\leqslant\dim M$. Пусть также $\mathcal{T}M=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ — соответствующее разложение касательного расслоения на dS^1-инвариантные распределения E_i, $i=1,\ldots,p$. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность U системы $\{S^t\}$ (соответственно в пространствах $\mathrm{Diff}^r(M)$, если $t\in\mathbf{Z}$, и $\Gamma^r(\mathcal{T}M)$, если $t\in\mathbf{R}$), что для любой системы $\{\tilde S^t\}\in U$ ее мезеровский спектр $\tilde Q$ состоит из компонент $\tilde Q_i$, содержащихся в кольцах с радиусами $\tilde\lambda_i$, $\tilde\mu_i$, где $|\lambda_i-\tilde\lambda_i|\leqslant\varepsilon$ и $|\mu_i-\tilde\mu_i|\leqslant\varepsilon$. Кроме того, распределение E_i, отвечающее компоненте спектра $\tilde Q_i$, удовлетворяет условию $\tilde d(E_i,\tilde E_i)\leqslant\varepsilon$.

Замечание 2.1. В то время как компонента Q_i спектра системы $\{S^t\}$ является кольцом, соответствующая ей компонента $\tilde Q_i$ системы $\{\tilde S^t\}$ является в общем случае объединением нескольких колец.

Из теоремы 2.11 вытекает, что системы Аносова и РЧГ-системы образуют открытое множество соответственно в пространствах $\mathrm{Diff}^r(M)$ (в случае диффеоморфизмов) и $\Gamma^r(\mathcal{T}M)$ (в случае потоков), $r\geqslant 1$. Про системы Аносова можно доказать и более сильное утверждение, состоящее в том, что они структурно устойчивы (см. [4]). Если Λ—ЛМГМ системы $\{S^t\}$ класса C^r, то можно доказать (см. [22]), что любая система $\{\tilde S^t\}$ класса C^r, достаточно близкая к $\{S^t\}$ в C^r-топологии, обладает ЛМГМ $\tilde\Lambda$, гомеоморфном Λ посредством гомеоморфизма $h:\Lambda\to\tilde\Lambda$, близкого к тождественному в C^0-топологии (в частности, $\tilde\Lambda$ лежит в малой окрестности Λ), причем $h\circ S^t\,|\Lambda=S^t\circ h\,|\Lambda$.

2.8. Неравномерно гиперболические динамические системы. Показатели Ляпунова. Допустим, что динамическая система $\{S^t\}$ имеет инвариантную меру ν.

Определение 2.7. Система $\{S^t\}$ называется *неравномерно полно гиперболической* (НПГ), соответствено *неравномерно частично гиперболической* (НЧГ), если существует инвариантное множество Λ, $\nu(\Lambda)>0$, состоящее из траекторий, удовлетворяющих условиям неравномерной полной гиперболичности (соответственно, неравномерной частичной гиперболичности). При этом функции $C(S^t(x),\varepsilon)$, $\gamma(S^t(x))$, постоянные λ, μ, ε (см. (7.6) и (7.7)) являются ограничениями на траекторию некоторых измеримых функций $C(x)$, $\gamma(x)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\varepsilon(x)$.

Дадим иное эквивалентное определение НПГ- и НЧГ-систем. Мы уже упоминали выше, в начале этой главы, что всякой гладкой динамической системе отвечает коцикл $\mathfrak{A}(X,t)$, описывающий поведение решений уравнения в вариациях. Этот коцикл удовлетворяет условиям, сформулированным в главе 1, § 2, и определяет характеристический показатель Ляпунова $\chi(x, v)$ на касательном расслоении $\mathcal{T}M$ ($x\in M$, $v\in\mathcal{T}_x$).

Пусть $\{S^t(x)\}$ — правильная траектория (см. гл. 1, § 2).

Теорема 2.12 (см. [31]). Траектория $\{S^t(x)\}$ является неравномерно (полно) гиперболической, если

$$\chi(x, v)\neq 0\begin{cases}\text{для всякого } v\neq aX(x), \text{ если } t\in\mathrm{R},\\ \text{для всякого } v\in\mathcal{T}_x, \text{ если } t\in\mathrm{Z}\end{cases} \qquad (7.19)$$

($X(x)$ — векторное поле, задающее поток $\{S^t\}$, $a\in\mathrm{R}$); и неравномерно частично гиперболической, если

$$\chi(x, v)<0 \text{ для некоторого } v\in\mathcal{T}_x. \qquad (7.20)$$

Из этой теоремы и мультипликативной эргодической теоремы (см. гл. 1, § 2) следует, что определение НПГ- и НЧГ-систем эквивалентно следующему: множество Λ, состоящее из траекторий, удовлетворяющих (7.19) (соответственно (7.20)), является множеством полной меры по отношению к некоторой инвариантной борелевской мере (поэтому НПГ-системы называют также *системами с ненулевыми показателями Ляпунова*).

В случае НПГ- и НЧГ-систем распределение E^s является, вообще говоря, только измеримым. Чтобы получить более точную информацию, рассмотрим множества

$$\Lambda_l=\left\{x\in M\colon C(x)\leqslant l,\ \gamma^{-1}(x)\leqslant l,\ \lambda(x)\leqslant\frac{l-1}{l}<\frac{l+1}{l}\leqslant\mu(x)\right\}. \qquad (7.21)$$

Очевидно, что множества Λ_l измеримы, $\Lambda_l\subset\Lambda_{l+1}$ и $\bigcup\limits_l\Lambda_l=\Lambda\,(\mathrm{mod}\,0)$. На множествах Λ_l оценки (7.6) и (7.7) равномерны по x, но ухудшаются с ростом l. Как показано в [31], множества Λ_l замкнуты, а распределение E^s непрерывно на Λ_l. Кроме того, размеры ЛУМ ограничены равномерно снизу на Λ_l, а сами ЛУМ $V^s(x)$ непрерывно зависят от $x\in\Lambda_l$ (поэтому Λ_l называют «множеством с равномерными оценками»).

Обозначим через mes риманов объем в M. В том случае, когда $\mathrm{mes}(\Lambda)>0$ (при этом mes может не быть инвариантной мерой), ЛУМ на множестве Λ_l обладают важным свойством, называемым *абсолютной непрерывностью*. Пусть $x\in\Lambda$. Фиксируем $l>0$ и выберем малую окрестность $U(x)$ точки $x\in\Lambda$ (размер которой, вообще говоря, зависит от l). Рассмотрим ЛУМ $V^s(y)$, где $y\in\Lambda_l\cap U(x)$. Выберем два гладких подмногообразия W_1 и W_2 в $U(x)$, трансверсальные этим ЛУМ. Положим $A_i=\{z\colon z=W_i\cap V^s(y)$ для некоторого $y\in\Lambda_l\cap U(x)\}$, $i=1, 2$, и пусть $p\colon A_1\to A_2$ — такое отображение, что точка $p(z)$ лежит на том же ЛУМ $V^s(y)$, что и точка z (p называется *отображением последования*). Обозначим μ_{W_i} меру на W_i, индуцированную ограничением римановой метрики в M на W_i, $i=1, 2$. При достаточно большом l имеем $\mu_{W_1}(A_1)>0$.

Теорема 2.13 (об абсолютной непрерывности ЛУМ) (см. [31]). Мера $p^*\mu_{W_1}$ абсолютно непрерывна относительно меры μ_{W_2} (при любом выборе x, $U(x)$, l, W_1, W_2).

Обозначим ξ_l разбиение $U\cap\Lambda_l$, задаваемое ЛУМ $V^s(y)$, $y\in\Lambda_l\cap U$. Из теоремы 2.12 вытекает, что условная мера $\operatorname{mes}(\cdot|C_{\xi_l})$ на почти каждом элементе разбиения $C_{\xi_l}(y)=$ $=V^s(y)\cap U\cap\Lambda_l$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_{V^s(y)}$. Это обстоятельство играет весьма важную роль при исследовании эргодических свойств гиперболических динамических систем. Оно является тем мостом, по которому можно перейти от локальных свойств динамики к изучению ее глобальных свойств. Формулировка свойства абсолютной непрерывности и доказательство теоремы 2.13 в случае систем Аносова было дано в [4] (см. также [6]). Переформулировка на случай РЧГ-систем имеется в [14]. Для случая НЧГ-систем приведенная выше формулировка содержится в [31]. В случае систем Аносова и РЧГ-систем формулировка свойства абсолютной непрерывности несколько упрощается: так как «размеры» ЛУМ «одинаковы», отображение последования определено для всех $z\in W_1$.

Исходя из потока Аносова класса C^2, можно построить НПГ-поток класса C^2 без неподвижных точек (см. [32]). На любом двумерном многообразии существует НПГ-диффеоморфизм класса C^2, а на любом n-мерном многообразии с $n>2$ можно построить диффеоморфизм класса C^2, у которого все показатели Ляпунова, кроме одного, отличны от нуля (см. [55], [71]). В этих примерах мера Лебега инвариантна, и по отношению к ней диффеоморфизм метрически изоморфен автоморфизму Бернулли.

§ 3. Эргодические свойства гладких гиперболических динамических систем

3.1. u-гиббсовские меры. Цель этого параграфа — показать, что гиперболические динамические системы обладают инвариантными мерами, которые определяют статистические свойства типичных траекторий и стохастические свойства всей системы в целом. Если имеется гладкая инвариантная мера, то она и является той мерой, которая строится в общей теории.

Для простоты ограничимся случаем диффеоморфизма; необходимые уточнения на случай непрерывного времени будут сделаны в конце этого параграфа. Мы будем всюду предполагать, что динамическая система принадлежит классу C^2. Рассмотрим $x\in M$, тректория $\{S^n(x)\}$ которой $(S:M\to M$ — диффеоморфизм) неравномерно полно гиперболическая (см. § 1), и ГНМ $W^u(y)$ для $y=S^n(x)$. Сейчас на каждом $W^u(y)$ будет построена однозначно (с точностью до постоянного множителя) определенная мера, абсолютно непрерывная относительно риманова объема на $W^u(y)$. Пусть $z \in W^u(y)$, $S(z) \in W^u(S(y))$. Обозначим $J^{(u)}(z)$ якобиан отображения $W^u(S(y)) \xrightarrow{S^{-1}} W^u(y)$, показывающий, как сжимается объем на $W^u(S(y))$ под действием S^{-1}. Составим дробь

$$\psi_n(z,\ x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{J^{(u)}(S^k(z))}{J^{(u)}(S^k(x))}. \tag{7.22}$$

Из-за того, что dist $(S^k(x),\ S^k(z)) \to 0$ экспоненциально по k, сомножители с большими k экспоненциально стремятся к 1. По этой причине существует положительный $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(z,x) = \psi(z,x)$. Из построения следует, что $\psi(z,x)\cdot\psi(x,y) = \psi(z,y)$.

Обозначим $\nu^u(x)$ лебегову меру на $W^u(x)$ как на гладком подмногообразии в M и введем на $W^u(x)$ меру μ^u, для которой $d\mu^u(z)/d\nu^u(z) = \psi(z,x)$. Тем самым, внутренним образом определена мера μ^u на каждом ГНМ $W^u(x)$. При изменении x мера μ^u умножается на постоянный множитель.

Допустим, что динамическая система имеет гиперболический аттрактор Λ (см. § 2). Тогда вместе с каждой точкой $x \in \Lambda$ он содержит $W^u(x)$. Фиксируем малую окрестность $U(x)$ точки x в M и через точки $y \in U(x) \cap \Lambda$ проведем ЛНМ $V^u(y)$, которые образуют разбиение $\xi^u = \xi^u_{U(x)\cap\Lambda}$ множества $U(x)\cap\Lambda$. Рассмотрим произвольную борелевскую меру λ на Λ и ее ограничение на $U(x)\cap\Lambda$. Поскольку ξ^u измеримо, λ индуцирует на λ-почти каждом C_{ξ^u} условную меру $\mu(\cdot|C_{\xi^u})$.

Определение 3.1. Мера λ называется *u-гиббсовской*, если $\lambda(\cdot|C_{\xi^u})$ имеет вид $d\lambda(z|C_{\xi^u}) = \Xi^{-1}\cdot\psi(z,\ x)\,d\nu^u(z)$, $x \in C_{\xi^u}$, а Ξ — нормирующий множитель,

$$\Xi = \int\limits_{C_{\xi^u}} \psi(z,\ x)\,d\nu^u(z).$$

Ясно, что $\lambda(\cdot|C_{\xi^u})$ определена однозначно, т. е. не зависит от конкретного выбора ψ. Обозначение Ξ выбрано по аналогии со статистической механикой, где так обозначают статистические суммы.

Теорема 3.1. u-гиббсовская мера существует и инвариантна относительно S; если $S|\Lambda$ топологически транзитивно, то u-гиббсовская мера единственна.

Ниже мы увидим, что она обладает еще целым рядом замечательных свойств. Естественный путь построения такой меры заключается в следующем. Пусть $A \subset M$ — открытое множество с кусочно гладкой границей. Для построения $\lambda(A)$ возьмем ЛНМ $V^u(x)$ и будем его расширять с помощью S^n. Слои $S^n(V^u(x))$ будут более или менее равномерно распределяться по аттрактору. Положим

$$\lambda_n(A)=\frac{\int\limits_{A\cap S^n(V^u(x))}\psi(z,S^n(x))\,d\nu^u(z)}{\int\limits_{S^n(V^u(x))}\psi(z,S^n(x))\,d\nu^u(z)}. \tag{7.23}$$

Оказывается, что в хороших случаях $\lambda_n(A)$ стремятся при $n\to\infty$ к пределу, не зависящему от выбора начального слоя $V^u(x)$, который и дает значение $\lambda(A)$. Доказательство этого утверждения и анализ свойств меры λ основаны на специальном символическом представлении $S|\Lambda$, которое открывает также глубокие связи теории гиперболических динамических систем с равновесной статистической механикой решетчатых систем.

3.2. Символическая динамика. Символическое представление гладкой динамической системы означает, что почти каждая (в топологическом или метрическом смысле) траектория кодируется посредством конечного или счетного алфавита в бесконечную последовательность, так что динамическая система оказывается ассоциированной (сопряженной) со сдвигом в подмножестве пространства двусторонних последовательностей. Хорошая кодировка — это такая, при которой возникающее подмножество последовательностей устроено достаточно просто. Она требует специальных разбиений.

Пусть Λ—ЛМГМ. Множество $R\subset\Lambda$ называется прямоугольником, если диаметр R достаточно мал, $R=\overline{\operatorname{Int} R}$ и $V^s(x)\cap V^u(y)\in R$ для любых x, $y\in R$.

Приведенное определение не исключает того, что прямоугольник может быть «дырявым» множеством типа прямого произведения канторовых множеств. Любой прямоугольник получается следующим образом. Возьмем $z\in\Lambda$ и выберем открытые подмножества $U^s\subset V^s(z)\cap\Lambda$, $U^u\subset V^u(z)\cap\Lambda$ и через каждую точку $y\in U^u$ проведем $V^s(y)$. Тогда $R=\bigcup\limits_{x,y}(V^u(x)\cap V^s(y))$ будет прямоугольником.

Определение 3.2. *Марковским разбиением* называется конечное покрытие Λ прямоугольниками $R_1, R_2, \ldots, R_k$ такое, что

1) $\operatorname{Int} R_i\cap\operatorname{Int} R_j=\varnothing$ для $i\neq j$ и

2) если $x\in\operatorname{Int} R_i$, $S(x)\in\operatorname{Int} R_j$, то

$$S(V^u(x)\cap R_i)\supset V^u(S(x))\cap R_j,$$

$$S^{-1}(V^s(x)\cap R_i)\supset V^s(S^{-1}(x))\cap R_j.$$

Геометрически условие марковости означает довольно жесткое требование согласованности «границ» элементов марковского разбиения. Например, для гиперболических автоморфизмов двумерного тора пересечение $R_i \cap S(R_j)$ должно иметь правильный вид (см. рис. 4).

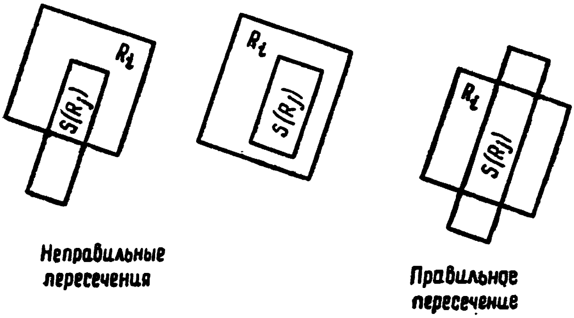

Рис. 4

Теорема 3.2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует марковское разбиение ЛМГМ Λ, диаметры элементов которого меньше ε.

Идея марковского разбиения и первый подход к его построению для систем Аносова появились в [40], [43]. Важные усовершенствования и обобщения на случай гиперболических множеств принадлежат Боуэну [13]. Простой конкретный пример марковского разбиения для гиперболического автоморфизма двумерного тора был предложен Адлером (R. L. Adler) и Вейссом [49]: оно состоит из двух элементов, которые являются проекциями на тор «настоящих» параллелограммов на плоскости.

Всякое конечное разбиение $\xi = \{R_1, \ldots, R_k\}$ множества Λ позволяет построить отображение ψ множества Λ в пространство $\Sigma_{(k)}$ двусторонних последовательностей из k символов, а именно, $\psi(x) = \{\omega_n\}$, где ω_n таково, что $S^n(x) \in R_{\omega_n}$. При этом ψ осуществляет сопряжение S со сдвигом σ в $\Sigma_{(k)}$. Тройка $(\psi, \psi(\Lambda), \sigma)$ называется *символическим представлением* S на Λ. В случае марковского разбиения ξ отображение ψ, заданное, как указано выше, определено однозначно всюду, кроме траекторий границ прямоугольников, т. е. на множестве $\Lambda \setminus \bigcup_n S^n \left(\bigcup_{i=1}^{k} \partial^i R_i \right)$. Основное достоинство марковского разбиения состоит в том, что образ $\psi(\Lambda)$ оказывается топологической марковской цепью (ТМЦ) (Σ_A, σ) с матрицей переходов $A = (a_{ij})$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{Int} R_i \cap S^{-1}(\operatorname{Int} R_j) \neq \varnothing, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(см. гл. 3, § 6). Точнее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.3 (см. [13]). 1) Пусть $\omega = \{\omega_n\} \in \Sigma_A$. Тогда пересечение $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} S^n(R_{\omega_n})$ непусто и состоит в точности из одной точки; тем самым ψ^{-1} определено на всем Σ_A по формуле $\psi^{-1}(\omega) = \bigcap_{n\in Z} S^n(R_{\omega_n})$; оно непрерывно и взаимно однозначно вне некоторого подмножества первой категории в смысле Бэра.

3.3. Меры с максимальной энтропией. Теорема 3.3 позволит нам свести многие вопросы о топологических и эргодических свойствах гиперболических аттракторов к проблемам статистической механики *u*-гиббсовских мер.

Пусть Λ — ЛМГМ диффеоморфизма S, причем $S|\Lambda$ — топологически транзитивно. Пусть также (Σ_A, σ) — символическое представление Λ, построенное посредством марковского разбиения ξ. Рассмотрим стационарную цепь Маркова с вероятностями переходов $p_{ij} = a_{ij}z_i/\lambda(A)z_i$, где $\lambda(A)$ — максимальное положительное собственное значение матрицы A и $Z = \{z_i\}$ — соответствующий собственный вектор (см. [3]). Пусть далее $\mu_0{}^*$ — марковская мера на этой цепи Маркова и μ_0 — прообраз меры $\mu_0{}^*$ под действием отображения ψ. Как показано в [3], μ_0 — мера с максимальной энтропией для S на Λ (определение см. ниже п. 3.5). Сейчас будут указаны и некоторые другие важные свойства меры μ_0.

Обозначим P_k число периодических точек периода k в аттракторе Λ, через $P_k(B)$ — число периодических точек периода k, содержащихся в подмножестве $B \subset \Lambda$.

Теорема 3.4 (см. [3]). Если $B \subset A$ — такое множество, что $\mu_0(B \setminus \operatorname{Int} B) = 0$, то

$$\mu_0(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n(B)}{P_n}.$$

Эта теорема показывает, что периодические точки образуют как бы «равномерный остов» любого ЛМГМ. О конкретных приложениях этой теоремы см. § 4.

Обозначим $\mu_0{}^u$ и $\mu_0{}^s$ условные меры, индуцированные мерой μ_0 на ГУМ $W^s(x)$ и ГНМ $W^u(x)$ соответственно, $x \in \Lambda$.

Теорема 3.5 (см. [30]). Имеют место соотношения:

$$\mu_0{}^u(S(A)) = K\mu_0{}^u(A) \text{ для любого } A \subset W^u(x),$$

$$\mu_0{}^s(S(A)) = K^{-1}\mu_0{}^s(A) \text{ для любого } A \subset W^s(x),$$

где $K = \exp h > 1$ и $h = h(S)$ — топологическая энтропия $S|\Lambda$ (определение см. п. 3.5).

Эта теорема выражает замечательное свойство меры с максимальной энтропией: индуцируемые ею условные меры на ГУМ и ГНМ равномерно сжимаются (соответственно растягиваются) под действием S. Можно показать, что μ_0 — единственная мера с таким свойством.

3.4. Конструкция *u*-гиббсовских мер. Мы опишем теперь способ построения *u*-гиббсовской меры, навеянный соображениями, применяемыми в статистической физике, и развитый в

[41]. Не ограничивая общности, можно считать на основании теоремы 2.5, что $S|\Lambda$ топологически транзитивно (в противном случае следует перейти к рассмотрению компоненты топологической транзитивности). Пусть $\xi=\{R_1,\ldots,R_k\}$ — марковское разбиение Λ и $\psi:\Lambda\to\Sigma_A$ — соответствующее символическое представление. Положим для $x\in M$

$$\varphi^u(x)=-\ln|\operatorname{Jac}(dS\,|\,E^u(x))|. \tag{7.24}$$

Тогда $\varphi_*^u(x)=\varphi^u(\psi^{-1}(x))$ — непрерывная функция на Σ_A. Рассмотрим на Σ_A последовательность мер $\mu_n^*=\rho_n\mu_0^*$, где μ_0^* — указанная выше мера с максимальной энтропией на Σ_A, а плотность

$$\rho_n=\frac{\exp\sum\limits_{k=0}^{n}\varphi_*^u(\sigma^k(\omega))}{\int\limits_{\Sigma_A}\exp\sum\limits_{k=0}^{n}\varphi_*^u(\sigma^k(\omega))\,d\mu_0^*}.$$

Так как распределение $E^u(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера, этому условию удовлетворяет и функция $\varphi^u(x)$. Отсюда нетрудно вывести, что

$$|\varphi_*^u(\omega^1)-\varphi_*^u(\omega^2)|\leqslant d_\beta(\omega^1,\omega^2)^{\alpha}\,[1] \tag{7.25}$$

для любых $\omega^1, \omega^2\in\Sigma_A$. Теперь из сказанного в главе 3, § 6 следует, что существует однозначно определенный слабый предел мер μ_n^*, который мы обозначим через μ^*.

Теорема 3.6 (см. [41]). Прообраз меры μ^* под действием ψ совпадает со слабым пределом мер λ_n и представляет собой u-гиббсовскую меру на аттракторе Λ.

3.5. Топологическое давление и топологическая энтропия. Мы опишем сейчас другой подход к построению u-гиббсовских мер, который предложил Боуэн [13]. Прежде чем сделать это, нам необходимо ввести некоторые общие понятия и сформулировать относящиеся к ним результаты, имеющие важное самостоятельное значение для теории динамических систем.

Пусть $T:X\to X$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства X, $\varphi\in C(X)$, $\mathcal{U}$ — конечное открытое покрытие X. Обозначим через $\mathcal{W}_m(\mathcal{U})$ множество всех наборов длины m, состоящих из элементов покрытия $\mathcal{U}$: $\mathrm{U}=U_{i_1}U_{i_2}\ldots$ $\ldots U_{i_m}$. Пусть также

$$X(\mathrm{U})=\{x\in X:T^k(x)\in U_{i_k},\ k=0,1,\ldots,m-1\},$$

$$S_m\varphi(\mathrm{U})=\sup\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\varphi(T^k(x)):\ x\in X(\mathrm{U})\right\}.$$

---

[1] Напомним, что расстояние в Σ_A определяется числом β, $0<\beta<1$, равенством $d_\beta(\omega^1,\omega^2)=\beta^N$, где N — максимальное из неотрицательных чисел, для которых $\omega_n^1=\omega_n^2$ при $|n|<N$.

Если $X(\mathbf{U}) = \varnothing$, то полагаем $S_m\varphi(\mathbf{U}) = -\infty$. Мы скажем, что $\Gamma \subset \mathcal{W}_m(\mathcal{U})$ покрывает X, если $X = \bigcup\limits_{\mathbf{U} \in \Gamma} X(\mathbf{U})$. Положим

$$Z_m(\varphi, \mathcal{U}) = \inf_{\Gamma} \sum_{\mathbf{U} \in \Gamma} \exp S_m\varphi(\mathbf{U}),$$

где Γ пробегает всевозможные подмножества $\mathcal{W}_m(\mathcal{U})$, покрывающие X. Можно показать, что существует конечный предел (см. [13])

$$P(\varphi, \mathcal{U}) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \log Z_m(\varphi, \mathcal{U}).$$

Величина

$$P(\varphi) = \lim_{\operatorname{diam} \mathcal{U} \to 0} P(\varphi, \mathcal{U})$$

(здесь $\mathcal{U}$ пробегает всевозможные конечные открытые покрытия X; можно показать, что предел в правой части существует (см. [13])) называется *топологическим давлением функции* φ *на* X относительно T (используют поэтому также обозначение $P_T(\varphi)$).

Следующее утверждение называется *вариационным принципом для топологического давления*.

Теорема 3.7 (Рюэль (D. Ruelle) [94], Уолтерс (P. Walters) [101], Боуэн [13]).

$$P_T(\varphi) = \sup_{\mu} \left(h_\mu(T) + \int \varphi \, d\mu \right),$$

где μ пробегает всевозможные инвариантные относительно T борелевские меры.

Пусть $\varphi \in C(X)$. Инвариантная относительно T борелевская мера μ_φ называется *равновесным состоянием* для функции φ, если

$$h_{\mu_\varphi}(T) + \int \varphi \, d\mu_\varphi = P_T(\varphi).$$

Равновесные состояния существуют не всегда (подробнее см. [90]). Тем большее значение имеет следующий общий критерий существования равновесных состояний.

Мы скажем, что гомеоморфизм T разделяет точки, если для сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ и любых $x, y \in X$ найдется такое целое n, что $\rho(T^n(x), T^n(y)) \geqslant \varepsilon$ (ρ — расстояние в X).

Теорема 3.8 (см. [13]). Если гомеоморфизм T разделяет точки, то для всякой $\varphi \in C(X)$ существует равновесное состояние μ_φ.

Равновесное состояние может быть неединственным (для заданой функции), ситуация здесь отдаленно напоминает теорию фазовых переходов (см. [90]).

Величина $h(T)=P_T(0)$ называется *топологической энтропией отображения* T. Дадим иное эквивалентное определение топологической энтропии. Фиксируем $n>0$ и введем расстояние в X, $\rho_n(x, y)$, положив

$$\rho_n(x, y)=\max_{0<i<n}\rho(T^i(x), T^i(y)).$$

Для $\varepsilon>0$ обозначим $N(n, T, \varepsilon)$ наименьшее число шаров радиуса ε в метрике ρ_n, необходимых для того, чтобы покрыть X. Можно показать (см. [70]), что

$$h(T)=\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log N(n, T, \varepsilon)}{n}=\lim_{\varepsilon\to 0}\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log N(n, T, \varepsilon)}{n}.$$

Из теоремы 3.7 вытекает *вариационный принцип для топологической энтропии* (см. [13]):

$$h(T)=\sup_{\mu}h_\mu(T),$$

где μ пробегает всевозможные инвариантные относительно T нормированные борелевские меры. Меры, на которых верхняя грань достигается, являются равновесными состояниями для $\varphi=0$ и называются *мерами с максимальной энтропией.*

Замечание 3.1. Приведенные выше определения можно обобщить на случай отображений, определенных и непрерывных на некомпактных подмножествах компактных метрических пространств (это позволяет охватить случай разрывных отображений, которые непрерывны на некомпактном множестве, состоящем из точек, траектории которых «не попадают» в множество разрыва). Определение топологической энтропии для этого случая дано в [13], а топологического давления в [34].

Теперь мы в состоянии описать подход Боуэна к построению u-гиббсовских мер. Рассмотрим в Σ_A равновесное состояние, отвечающее функции $\varphi_*{}^u(\omega)=\varphi^u(\psi^{-1}(\omega))$. В силу (7.25) оно определено однозначно. Обозначим его μ^*.

Теорема 3.9 (см. [13]). Образ $\psi_*{}^{-1}\mu^*$ является u-гиббсовской мерой на гиперболическом аттракторе Λ.

Из этой теоремы следует, что u-гиббсовская мера является единственным равновесным состоянием, отвечающим функции $\varphi^u(x)$.

3.6. Свойства *u*-гиббсовских мер. u-гиббсовские меры играют решающую роль при исследовании статистических свойств «типичных» траекторий в окрестности гиперболических аттракторов. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.10 (см. [13], [90]). Пусть Λ — гиперболический аттрактор диффеоморфизма S, причем $S|\Lambda$ — топологически транзитивно. Тогда существует окрестность U аттрактора Λ такая, что для любой непрерывной в U функции φ и почти любой (по отношению к риманову объему в U) точки x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(S^k(x))=\int\varphi d\mu,$$

где μ — единственная u-гиббсовская мера на Λ.

Рассмотрим в окрестности U аттрактора Λ меру ν, абсолютно непрерывную относительно риманова объема в U. В соответствии с общей схемой Боголюбова—Крылова рассмотрим последовательность мер

$$\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_*^k\nu \tag{7.26}$$

(см. гл. 1, § 1). Из теоремы 3.10 вытекает, что

$$\mu_n\to\mu \text{ при } n\to\infty \tag{7.27}$$

в слабой топологии. Это утверждение, обычно, истолковывают, говоря, что система $\{S^n\}$ в окрестности гиперболического аттрактора «забывает начальное распределение траекторий», что представляет собой один из важнейших признаков стохастичности.

Для гиперболических аттракторов справедлив иной вариант теоремы о сходимости, чем (7.27). А именно, последовательность мер $S_*{}^n\nu$ слабо сходится к мере μ. Однако, для аттракторов, более общих, чем гиперболические, следует, вообще говоря, ожидать лишь сходимости в среднем.

В работе [91] развит подход, не использующий марковских разбиений и позволяющий непосредственно доказать, что меры μ_n слабо сходятся к u-гиббсовской мере на Λ. Он оказывается эффективным (и, по-существу, единственным) при изучении РЧГ-аттракторов.

Теорема 3.11 (см. [91]). Пусть Λ — РЧГ-аттрактор диффеоморфизма S класса C^2. Тогда любая предельная мера последовательности мер μ_n является u-гиббсовской мерой на Λ.

Поскольку топологическое строение РЧГ-аттракторов, вообще говоря, более сложное, чем гиперболических, последовательность мер μ_n может быть не сходящейся, даже если S топологически транзитивно.

В заключение отметим, что подход Боуэна к построению равновесных состояний обобщается на произвольные ЛМГМ. Хотя в этом случае понятие u-гиббсовской меры не имеет смысла, равновесное состояние, отвечающее функции φ^u, представляет известный интерес (см. [13]). Аналог u-гиббсовской меры для подковы Смейла построен в [45].

u-гиббсовские меры обладают богатым запасом эргодических свойств, что наряду с теоремой 3.10 определяет их роль в гиперболической теории. Пусть μ — u-гиббсовская мера для диффеоморфизма S на гиперболическом аттракторе Λ. Из сказанного в пункте 3.4 и приводимой ниже теоремы 3.12 вытекает, что динамическая система (S, μ) на каждой компоненте топологической транизитивности в Λ эргодична, а некоторая степень изоморфна схеме Бернулли, обладает экспоненциальной скоростью убывания корреляций и для широкого класса гладких и кусочно гладких функций выполняется центральная предельная теорема теории вероятностей. Энтропия $S|\Lambda$ по отношению к μ вычисляется по формуле (7.28) (см. далее).

3.7. Малые случайные возмущения. Рассмотрим семейство распределений вероятностей $q(\cdot\,|x, \varepsilon)$ на M, ε — параметр. Предположим, что $q(\cdot\,|x, \varepsilon)$ непрерывно зависит от точки x и для любого фиксированного ρ

$$\min_{x \in M} q\left(U_\rho(x)\,|\,x, \varepsilon\right) \to 1 \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где $U_\rho(x)$ — окрестность радиуса ρ точки x.

Пусть S — гомеоморфизм многообразия M. Построим семейство цепей Маркова Π_ε, в котором закон движения случайной точки x выглядит следующим образом: вначале x переходит в точку $S(x)$, а затем в случайную точку y, выбранную в соответствии с распределением $q(\cdot\,|S(x), \varepsilon)$. Семейство цепей Маркова Π_ε, удовлетворяющее указанному выше условию, называется *малым случайным возмущением гомеоморфизма* S. Нетрудно показать, что если $I_\varepsilon = \{\pi_\varepsilon\}$ — набор инвариантных мер для цепи Маркова Π_ε, то всякая предельная (в смысле слабой сходимости) при $\varepsilon \to 0$ мера для семейства I_ε будет инвариантной мерой для S. Нетрудно построить примеры, когда I_ε при любом $\varepsilon > 0$ содержит несколько мер.

В случае, когда S — диффеоморфизм класса C^2 гладкого многообразия M, обладающий гиперболическим аттрактором Λ, Кифером найдены условия, при выполнении которых последовательность мер π_ε сходится к единственной u-гиббсовской мере на Λ. Для частного случая, когда S — диффеоморфизм Аносова гладкого компактного многообразия, этот результат был получен ранее в [41].

3.8. Равновесные состояния, их эргодические свойства. Помимо указанной выше u-гиббсовской меры, для гиперболической теории определенный интерес представляют и некоторые другие инвариантные меры, способ построения которых изложен в [13]. Пусть Λ — ЛМГМ диффеоморфизма S класса C^2, φ — непрерывная на Λ функция. Нетрудно показать, что отображение S разделяет точки и поэтому обладает равновесным состоянием μ_φ (см. п. 3.5). Вообще говоря, мера μ_φ неединственная и, чтобы обеспечить единственность, достаточно потребовать некоторых довольно слабых условий гладкости φ. Например, пусть функция удовлетворяет условию Гёльдера на Λ. Тогда функция

$\Phi(\omega)=\varphi(\psi^{-1}(\omega))$ на Σ_A непрерывна и удовлетворяет (7.25) [1] Поэтому (см. [3]) существует единственное равновесное состояние μ_Φ на Σ_A, прообраз которого под действием ψ будет единственным равновесным состоянием для φ. Поскольку эргодические свойства равновесных состояний на ТМЦ с конечным числом состояний, отвечающих функциям, удовлетворяющим (7.25), достаточно хорошо известны (см. гл. 3, § 6), указанный подход позволяет получить достаточно полные результаты об эргодических свойствах мер μ_φ.

Теорема 3.12 (см. [13]). Пусть φ — непрерывная на Λ функция, удовлетворяющая условию Гёльдера. Предположим, что отображение S топологически транзитивно. Тогда существует единственное равновесное состояние μ_φ, обладающее следующими свойствами:

1) мера μ_φ положительна на открытых подмножествах Λ;

2) отображение S эргодично по отношению к мере μ_φ;

3) существуют $m\geqslant 1$ и множество $\Lambda_0\subset M$ такие, что

$$\Lambda=\bigcup_{k=0}^{m-1} S^k(\Lambda_0),\quad S^m(\Lambda_0)=\Lambda_0,\quad S^i(\Lambda_0)\cap S^j(\Lambda_0)=\varnothing$$

при $i\neq j$, $0\leqslant i$, $j\leqslant m$; отображение $S^m|\Lambda_0$ с мерой μ_φ изоморфно автоморфизму Бернулли (в частности, перемешивает и обладает K-свойством);

4) для отображения $S^m|\Lambda_0$ с мерой μ_φ имеет место экспоненциальное убывание корреляций и выполняется центральная предельная теорема теории вероятностей (см. гл. 6, § 1) для функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.

Если отображение S не является топологически транзитивным, то сформулированные выше утверждения остаются справедливыми для каждой его компоненты топологической транзитивности (см. теорему 2.5). В [41] получены результаты о единственности и некоторых свойствах равновесных состояний при более слабых предположениях на функцию φ, чем условие Гёльдера.

3.9. Эргодические свойства динамических систем с ненулевыми показателями Ляпунова. Факт существования u-гиббсовских мер и возможность исследования их эргодических свойств связаны в конечном итоге с сильной степенью неустойчивости траекторий на гиперболическом аттракторе. Мы рассмотрим сейчас ситуацию, когда, напротив, динамическая система проявляет довольно слабую степень неустойчивости траекторий.

Пусть S — диффеоморфизм многообразия M класса C^2. Обозначим через Λ множество всех бирегулярных точек[2] в M, для которых значения $\chi_i(x)$ характеристического показателя

---

[1] Напомним, что (ψ, Σ_A, σ) — символическое представление для S на Λ.

[2] Определение бирегулярных точек и характеристического показателя Ляпунова см. в § 2 главы 1.

$\chi^+(x, v)$ отличны от нуля. Диффеоморфизм $S|\Lambda$ является НПГ-диффеоморфизмом.

Определение 3.3. Мера μ называется *мерой с ненулевыми показателями*, если μ инвариантна относительно S и $\mu(\Lambda)=1$.

Мы введем класс мер на Λ, обобщающих u-гиббсовские меры.

Определение 3.4. Мера μ называется *мерой Синая* на Λ, если μ — мера с ненулевыми показателями Ляпунова и семейства ЛНМ (или семейства ЛУМ) обладают свойством абсолютной непрерывности по отношению к μ (см. § 2).

Множество Λ, вообще говоря, не является аттрактором; однако, если оно допускает меру Синая, то для μ-почти всякого x ЛНМ $V^u(x)$ (либо ЛУМ $V^s(x)$) лежит в Λ.

Вопрос о существовании мер Синая является трудным и до сих пор нерешенным. Единственный известный результат доказан в [31] и состоит в следующем: если μ — мера Лиувилля (см. гл. 1, § 1) с ненулевыми показателями, то μ — мера Синая.

Меры Синая обладают богатым запасом эргодических свойств, описываемых следующими утверждениями. Для НПГ-систем с мерой Лиувилля они доказаны в [31], в общем случае — в [75].

Мы приведем сначала один общий результат, дающий оценку сверху энтропии произвольного диффеоморфизма.

Теорема 3.13 (см. [70]). Энтропия диффеоморфизма S класса C^1 по отношению к инвариантной борелевской мере μ допускает оценку сверху

$$h_\mu(S) \leqslant \int\limits_M \sum_{i=1}^{k(x)} q_i(x)\,\chi_i(x)\,d\mu(x),$$

где $\chi_1(x) \geqslant \ldots \geqslant \chi_{k(x)}(x) \geqslant 0 \geqslant \chi_{k+1}(x) \geqslant \ldots \geqslant \chi_n(x)$ — упорядоченный набор значений характеристического показателя Ляпунова в точке x ($n=\dim M$), $q_i(x)$ — кратности соответствующих значений.

Отсюда, в частности, следует, что если почти все (по отношению к μ) значения характеристического показателя Ляпунова равны нулю, то $h_\mu(S)=0$. Для произвольной борелевской меры μ, вообще говоря, имеет место строгое неравенство (см. [70]). Точное же равенство можно доказать, например, для мер Синая.

Теорема 3.14 (*формула для энтропии*; см. [31], [70], [75]). Энтропия диффеоморфизма S класса $C^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, по отношению к мере Синая (и, в частности, мере Лиувилля с ненулевыми показателями Ляпунова) вычисляется по формуле

$$h_\mu(S)=\int_M \sum_{i=1}^{k(x)} q_i(x)\,\chi_i(x)\,d\mu(x). \qquad (7.28)$$

Следующее утверждение описывает разбиение на эргодические компоненты для мер Синая.

Теорема 3.15 (см. [31], [75]). Пусть μ — мера Синая для диффеоморфизма S класса $C^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Тогда существуют такие инвариантные множества Λ_i, $i=0, 1, 2, \ldots$, что

1) $\bigcup\limits_{i\geqslant 0}\Lambda_i=\Lambda$, $\Lambda_i\cap\Lambda_j=\varnothing$, если $i\neq j$;

2) $\mu(\Lambda_0)=0$, $\mu(\Lambda_i)>0$, если $i>0$;

3) $S\,|\,\Lambda_i$ эргодичен при $i>0$.

В [31] приведены достаточные условия, обеспечивающие эргодичность S на Λ. Оказывается, что если слоение W^u (или W^s) является локально непрерывным на Λ (определение см. в [31]), то каждая эргодическая компонента Λ_i будет $\operatorname{mod} 0$ открытым множеством. Поэтому, если $S\,|\,\Lambda$ топологически транзитивен, то S эргодичен на Λ. Свойство локальной непрерывности слоения W^u является аналогом для случая гладких систем свойства, выделенного в основной теореме теории рассеивающих биллиардов (см. гл. 8, § 1).

Следующее утверждение описывает разбиение на K-компоненты.

Теорема 3.16 (см. [31], [75]). Каждое из множеств Λ_i разлагается в конечное число попарно непересекающихся множеств $\Lambda_i^{(j)}$, $j=1, \ldots, n_i$, таких, что

1) $S(\Lambda_i^{(j)})=\Lambda_i^{(j+1)}$ для $j=1, \ldots, n_i-1$, $S(\Lambda_i^{(n_i)})=\Lambda_i^{(1)}$,

2) $S^{n_i}\,|\,\Lambda_i{}^{(1)}$ изоморфно автоморфизму Бернулли.

Пусть $\pi(S)$ — π-разбиение для диффеоморфизма S (т. е. максимальное разбиение с нулевой энтропией (см. [36])). Обозначим через ξ^- (соответственно ξ^+) разбиение многообразия M на ГУМ $W^s(x)$ (соответственно ГНМ $W^u(x)$); для $x\in M\setminus\Lambda$ положим $W^s(x)=W^u(x)=x$.

Теорема 3.17 (см. [31]). Существует измеримое разбиение η многообразия M со следующими свойствами:

1) для почти каждого $x\in\Lambda$ элемент $C_\eta(x)$ есть открытое $\operatorname{mod} 0$ подмножество в $W^s(x)$;

2) $S\eta\geqslant\eta$, $\bigvee\limits_{0}^{\infty} S^k\eta=\varepsilon$;

3) $\bigwedge\limits_{-\infty}^{0} S^k\eta=\nu(\xi^-)=\nu(\xi^+)=\nu(\xi^-)\wedge\nu(\xi^+)=\pi(S)$[1];

4) $h_\mu(S)=h_\mu(S, \eta)$.

---

[1] Напомним, что $\nu(\xi)$ обозначает измеримую оболочку разбиения ξ.

3.10. Эргодические свойства систем Аносова и РЧГ-систем. Приведенные выше теоремы полностью применимы к системам Аносова. Следует положить только $\Lambda = M$. Следующее утверждение вытекает из теоремы 3.10.

Теорема 3.18. Пусть S — диффеоморфизм Аносова класса C^2. Предположим, что S топологически транзитивен. Тогда

1) последовательность мер μ_n (см. (7.26)) сходится в слабой топологии при $n \to +\infty$ к единственной u-гиббсовской мере μ_1, которая является единственным равновесным состоянием для функции φ^u (см. (7.24));

2) последовательность мер μ_n сходится в слабой топологии при $n \to -\infty$ к единственной s-гиббсовской мере[1] μ_2, которая является единственным равновесным состоянием для функции

$$\varphi^s(x) = \ln |\mathrm{Jac}(dS|E^s(x))|.$$

Я. Г. Синай и А. Н. Лифшиц показали (см. [41]), что $\mu_1 = \mu_2$ тогда и только тогда, когда для любой периодической точки x периода p

$$|\mathrm{Jac}(dS^p(x))| = 1.$$

Это свойство выполняется крайне редко: диффеоморфизмы Аносова, для которых $\mu_1 = \mu_2$, содержатся в дополнении к множеству 2-й категории в смысле Бэра в $\mathrm{Diff}^2(M)$ (см. [41]). Тем не менее, в этом классе автоморфизмов могут быть интересные примеры такие, как автоморфизмы алгебраического происхождения. Поэтому допустим сейчас, что $\mu = \mu_1 = \mu_2$ и поэтому μ абсолютно непрерывна. Из теоремы 3.12 следует

Теорема 3.19 (см. [4], [6]). Диффеоморфизм Аносова с мерой Лиувилля класса C^2 изоморфен автоморфизму Бернулли (в частности, он эргодичен, перемешивает, обладает K-свойством, имеет положительную энтропию); кроме того, он обладает свойством экспоненциального убывания корреляций и удовлетворяет центральной предельной теореме теории вероятностей для функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.

Отметим, что для случая систем Аносова большинство утверждений теоремы 3.19 (вплоть до K-свойства) было доказано раньше (см. [4]).

Существование u-гиббсовских и s-гиббсовских мер для РЧГ-диффеоморфизмов вытекает из теоремы 3.11 (см. [91]). Эти меры могут быть получены как предельные для последовательности мер μ_n (см. (7.26)). Они имеют положительную энтропию (см. [91]). При исследовании эргодических свойств РЧГ-систем с мерой Лиувилля важная роль принадлежит понятию транзитивности пары слоений W^u и W^s.

Фиксируем точки $x, y \in M$. *(R, N)-цепочкой Хопфа* называется последовательность точек $x_1, \ldots, x_n$ таких, что $x_1 = x$, $x_N = y$

---

[1] Определение s-гиббсовской меры аналогично определению u-гиббсовской.

и точка x_i лежит на устойчивом или неустойчивом слое точки x_{i-1} на расстоянии (измеряемом вдоль слоя), не превосходящем R, $i=2, \dots, N$. (R, N)-множеством, ассоциированным с точкой $x \in M$, называется множество всех $y \in M$, для которых существует (R, N)-цепочка Хопфа, соединяющая x с y. В случае диффеоморфизмов Аносова существуют такие R и N, что (R, N)-множество, ассоциированное с любой точкой $x \in M$, совпадает со всем многообразием. Этот факт лежит в основе доказательства эргодичности диффеоморфизмов Аносова. В случае РЧГ-диффеоморфизмов сумма размерностей устойчивых и неустойчивых слоений меньше размерности многообразия. Поэтому вполне возможной является ситуация, когда (R, N)-множества, ассоциированные с любой точкой $x \in M$, имеют меру нуль. Например, если пара слоений W^u и W^s интегрируема[1] и образует слоение W, то (R, N)-множество, ассоциированное с точкой $x \in M$, есть слой $W(x)$. Конечно, в этом случае диффеоморфизм S не эргодичен.

Пара слоений W^u и W^s называется *локально транзитивной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что (ε, N)-множество, ассоциированное с любой точкой $x \in M$, содержит окрестность точки x. *РЧГ-диффеоморфизм* называется *локально транзитивным*, если его пара слоений W^u и W^s локально транзитивна. При малом возмущении локально транзитивного РЧГ-диффеоморфизма достаточно высокого класса гладкости получается локально транзитивный РЧГ-диффеоморфизм (см. [14]). В [14] доказано, что если S — локально транзитивный РЧГ-диффеоморфизм класса C^2 с мерой Лиувилля, то при некоторых дополнительных предположениях на слоения W^u и W^s он обладает K-свойством.

3.11. Динамические системы с непрерывным временем. Определения u-гиббсовских мер, мер с ненулевыми показателями Ляпунова и мер Синая переносятся на случай динамических систем с непрерывным временем (при этом необходимо исключить из рассмотрения показатель вдоль направления движения, который равен нулю). Определение марковского разбиения, его конструкция и соответствующая символическая модель для потоков на гиперболических множествах требуют определенных модификаций (см. [13]). Теоремы 3.1, 3.2, 3.10—3.12 (кроме утверждений 3) и 4)), 3.13—3.15, 3.17, а также приведенные по ходу изложения следствия из них переносятся дословно (следует только считать, что $n \in \mathbb{R}$). Теоремы 3.4 и 3.5 переносятся с очевидными модификациями (см. [3]). Аналогом утверждений 3) и 4) теоремы 3.12 является следующее утверждение:

---

[1] Т. е. интегрируемым является распределение $\mathcal{T}_x W^u(x) \oplus \mathcal{T}_x W^s(x)$; примерами служат диффеоморфизмы S^t (t фиксировано) в потоке Аносова, а также прямое произведение диффеоморфизма Аносова на тождественное преобразование (см. § 2).

если выполняется первая возможность альтернативы (см. п. 2.3), то поток $\{S^t\}$ с мерой μ_φ изоморфен потоку Бернулли (см. Bowen R., Periodic orbits for hyperbolic flows. Amer. J. Math., 1972, 94, № 1, 1—30).

§ 4. Гиперболические геодезические потоки

На протяжении долгого времени геодезические потоки играли важную стимулирующую роль в развитии гиперболической теории. Так, например, влияние неустойчивости на глобальное поведение траекторий динамической системы, характеризуемое эргодичностью, топологической транзитивностью и т. д., отмечали еще Адамар и Морс в начале XX-го века, изучавшие статистику поведения геодезических на поверхностях отрицательной кривизны. И позже исследования, связанные с геодезическими потоками, привели к введению различных классов гиперболических динамических систем (систем Аносова, РЧГ-систем и НПГ-систем с мерой Лиувилля). Сами же геодезические потоки всегда были прекрасным полем применения динамических методов, что, в частности, позволяло получать интересные результаты дифференциально-геометрического характера. О связи геодезических потоков с классической механикой сказано в главе 1, § 1[1].

4.1. Многообразия отрицательной кривизны. Пусть Q — компактное риманово *многообразие* размерности p *отрицательной кривизны*, т. е. для любого $x\in Q$ кривизна $K_x(v_1, v_2)$ в любом двумерном направлении, определяемом двумя линейно независимыми векторами $v_1, v_2 \in \mathcal{T}_x$, удовлетворяет неравенству

$$K_x(v_1,\ v_2) \leqslant -k,\ k>0. \tag{7.29}$$

Геодезический поток $\{S^t\}$ в единичном касательном расслоении $M=SQ$ был определен в главе 1, § 1. Исследование его топологических и эргодических свойств основано на следующем важном утверждении.

Теорема 4.1. Геодезический поток на компактном римановом многообразии отрицательной кривизны является потоком Аносова.

Доказательство этого утверждения основано на исследовании решений уравнения в вариациях для потока $\{S^t\}$, т. е. уравнения Якоби (см. [33]):

$$Y''(t)+R_{XY}Y=0, \tag{7.30}$$

где $Y(t)$ — векторное поле вдоль геодезической $\gamma(t)$, $X(t)=\dot{\gamma}(t)$ и R_{XY} — тензор кривизны. Здесь необходимо сделать следующее уточнение. Пусть $v\in M$. Обозначим $\pi: M\to Q$ — проекцию и $K:\mathcal{T}_vM\to\mathcal{T}_{\pi(v)}Q$ — отображение связности, индуциро-

---

[1] Подробная библиография по излагаемым здесь вопросам имеется в [33].

ванное римановой метрикой (т. е. K — связность Леви-Чивита). Сопоставим $\xi \in \mathcal{T}_v M$ решение уравнения Якоби $Y_\xi(t)$ с начальными условиями $Y_\xi(0) = d\pi\xi$, $Y'_\xi(0) = K\xi$. Отображение $\xi \xrightarrow{\chi} Y_\xi(t)$ является изоморфизмом и $d\pi dS^t\xi = Y_\xi(t)$, $KdS^t\xi = Y'_\xi(t)$. Отождествление посредством χ и позволяет говорить, что (7.30) является уравнением в вариациях для потока $\{S^t\}$. Фиксируем $v \in M$ и обозначим $\gamma_v(t)$ геодезическую, задаваемую вектором v. Используя базис Ферми $\{e_i(t)\}$, $i = 1, \ldots, p$, вдоль $\gamma_v(t)$[1], перепишем (7.30) в матричной форме

$$\frac{d^2}{dt^2} A(t) + K(t) A(t) = 0, \tag{7.31}$$

где $A(t) = (a_{ij}(t))$, $K(t) = (k_{ij}(t))$ — матричные функции и $K_{ij}(t) = K_{\gamma_v(t)}(e_i(t), e_j(t))$. Используя условие (7.29), можно показать (см. [4]), что для уравнения (7.31) однозначно разрешима краевая задача и, значит, существует единственное решение $A_s(t)$, удовлетворяющее граничным условиям $A_s(0) = I$ (единичная матрица), $A_s(s) = 0$. Далее, существует предел $\lim\limits_{s\to\infty} \dot{A}_s(t)|_{t=0} = A^+$. Решение $D^+(t)$ уравнения (7.31), определяемое начальными условиями $D^+(t)|_{t=0} = I$, $\dot{D}^+(t)|_{t=0} = A^+$, называется *положительным предельным решением* уравнения (7.31). Оно невырождено (т. е. $\det(D^+(t)) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$) и $D^+(t) = \lim\limits_{s\to+\infty} A_s(t)$. Кроме того,

$$D^+(t) = C(t) \int\limits_t^\infty C^{-1}(s)(C^{-1}(s))^* ds, \tag{7.32}$$

где $C(t)$ — решение уравнения (7.31) с начальными условиями $C(0) = 0$, $\frac{d}{dt} C(t)|_{t=0} = I$. Аналогично, устремляя $s \to -\infty$, определим *отрицательное предельное решение* уравнения (7.31). Векторы $\chi^{-1}(D^+(0)e_i(0))$, $i = 1, \ldots, p$, линейно независимы и порождают подпространство $E^+(v) \subset \mathcal{T}_v M$. Можно показать, что подпространства $E^+(v)$ и $E^-(v)$ образуют два инвариантных распределения для $\{S^t\}$, по отношению к которым поток удовлетворяет условиям равномерной гиперболичности. Это и доказывает теорему 4.1.

Далее, для геодезического потока на многообразиях отрицательной кривизны всегда реализуется первая из двух возможностей альтернативы для потоков Аносова (см. п. 2.3). А именно, поток $\{S^t\}$ перемешивает. Это утверждение можно вывести из одной теоремы Арнольда или доказать прямыми рассуждениями (см. [42]). Теперь описание топологических и эргодичес-

---

[1] $\{e_i(t)\}$ является образом при параллельном переносе вдоль $\gamma_v(t)$ на расстояние t ортонормированного базиса $\{e_i(0)\}$ в $\mathcal{T}_{\pi(v)}M$.

ких свойств геодезических потоков получается из общих результатов о потоках Аносова.

Теорема 4.2. Пусть $\{S^t\}$ — геодезический поток на компактном римановом многообразии отрицательной кривизны. Тогда

1) $\{S^t\}$ изоморфен потоку Бернулли (в частности, эргодичен, перемешивает, имеет непрерывный спектр, обладает K-свойством, имеет положительную энтропию);

2) $\{S^t\}$ топологически перемешивает, в частности, топологически транзитивен;

3) периодические траектории $\{S^t\}$ плотны в M; число $P(T)$ периодических траекторий периода $\leqslant T$ конечно и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{hTP(T)}{e^{hT}} = 1,$$

где $h = h(S^1)$ — топологическая энтропия отображения S^1;

4) для потока $\{S^t\}$ существует однозначно определенная мера с максимальной энтропией μ_0. Кроме того, если $B \subset M$ — борелевское множество и

$$N_{t,\varepsilon}(B) = \sum_{\gamma \in Q(\varepsilon, t)} \omega_\gamma(B) \Bigg/ \sum_{\gamma \in Q(\varepsilon, t)} \tau(\gamma)$$

($Q(\varepsilon, t)$ — множество периодических траекторий γ, период которых (не обязательно минимальный) лежит в интервале $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$, $\tau(\gamma)$ — минимальный период γ, $\omega_\gamma(\cdot)$ — мера в M, являющаяся образом меры Лебега на $[0, \tau(\gamma))$ при отображении $t \to S^t(x)$, $x \in \gamma$), то при условии $\mu_0(B \setminus \operatorname{int} B) = 0$ имеем

$$\lim_{t\to\infty} N_{t,\varepsilon}(B) = \mu_0(B).$$

Обозначим W^s и W^u устойчивые и неустойчивые слоения для потока $\{S^t\}$. Слой $W^s(v)$ (соответственно $W^u(v)$), проходящий через линейный элемент v, называется *устойчивой* (соответственно *неустойчивой*) *орисферой*[1]. Можно показать, что для всякого $v \in M$ устойчивая и неустойчивая орисферы всюду плотны в M.

Мы видим, что с помощью методов теории динамических систем можно получить важную информацию о геометрических свойствах компактных многообразий отрицательной кривизны, а именно: плотность, асимптотическое число и распределение замкнутых геодезических, существование всюду плотных геодезических, всюду плотность устойчивых и неустойчивых орисфер и ряд других.

---

[1] Терминология сложившаяся в последнее время, несколько отличается от традиционной, согласно которой под орисферами (в двумерном случае — орициклами) понимались проекции $W^s(v)$ и $W^u(v)$ в Q. В настоящее время за этими объектами резервируется термин предельная сфера (соответственно — предельная окружность), а орисферы являются оснащениями предельных сфер (подробнее см. ниже).

Опишем сейчас другой подход к построению устойчивых и неустойчивых орисфер. Во-первых, он дает описание топологической и геометрической структур орисфер, а, во-вторых, позволяет, отчасти, перенести сформулированные выше результаты на более широкие классы метрик (см. п. 4.2).

Обозначим через H универсальное риманово накрывающее многообразие для Q. Согласно теореме Адамара—Картана любые две точки в H можно соединить единственной геодезической, и для всякого $x \in H$ отображение $\exp_x : \mathbf{R}^p \to H$ является диффеоморфизмом. Поэтому отображение

$$\varphi_x(y) = \exp_x[(1 - \|v_y\|^{-1}]$$

будет гомеоморфизмом открытого единичного шара B на H (v_y — вектор в $\mathcal{T}_x Q$ с началом в нуле и концом в точке $y \in B$). Пусть G — группа движений (т. е. изометрий) пространства H. Тогда Q является фактором H/Γ, где Γ — дискретная подгруппа G.

Геодезические $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ в H называются *асимптотическими* при $t > 0$, если

$$\rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leqslant \mathrm{const}$$

при всех $t > 0$ (ρ — расстояние в H, индуцированное римановой метрикой). Можно показать, что асимптотические при $t > 0$ геодезические не пересекаются и через каждую точку можно провести ровно одну геодезическую, асимптотическую при $t > 0$ данной. Отношение асимптотичности при $t > 0$ есть отношение эквивалентности. Обозначим $H(\infty)$ совокупность классов эквивалентности, т. е. пучков асимптотических при $t > 0$ геодезических в H (называемых также *бесконечно удаленными точками*; $H(\infty)$ называют *абсолютом* H). В множестве $H \cup H(\infty)$ можно ввести топологию τ, в которой $H \cup H(\infty)$ будет компактным метрическим пространством и ограничение $\tau | H$ совпадает с топологией в H, индуцированной римановой метрикой. При этом отображение φ_x продолжается до гомеоморфизма (мы будем обозначать его, по-прежнему, φ_x) замкнутого шара $\bar{B} = B \cup S^{p-1}$ (S^{p-1} — ($p-1$)-мерная сфера в $\mathbf{R}^p$) на $H \cup$ $\cup H(\infty)$ с помощью равенства

$$\varphi_x(y) = \gamma_{v_y}(+\infty), \quad y \in S.$$

В частности, φ гомеоморфно отображает S на $H(\infty)$. При этом образ асимптотического пучка — это разбиение B на непересекающиеся кривые, «сходящиеся» к некоторой точке в S^{p-1}. *Предельной сферой* называется подмногообразие в H, ортогональное пучку асимптотических геодезических (точнее, это означает, что через каждую точку этой поверхности проходит ровно одна геодезическая из пучка в направлении, ортогональном этой поверхности). Можно показать, что предельные сферы существуют и обладают следующими свойствами:

1) предельная сфера однозначно определяется точкой q, соответствующей рассматриваемому пучку, и точкой $x \in H$ (поэтому мы обозначим ее $L(q,x)$);

2) $\bigcup\limits_{-\infty<t<\infty} L(q, \gamma(t))=H$;

3) $L(q, \gamma(t_1)) \cap L(q, \gamma(t_2))=\varnothing$, $t_1 \neq t_2$;

4) $\rho(L(q, \gamma(t_1)), L(q, \gamma(t_2)))=|t_2-t_1|$.

Здесь $\gamma(t)$ — такая геодезическая, что $\gamma(+\infty)=q$. Последнее свойство выражает эквидистантность предельных сфер.

Множество $\varphi^{-1}(L(q,x)) \cup \varphi^{-1}(q) \subset \bar{B}$ гомеоморфно $(p-1)$-мерной сфере в $\bar{B}$, которая касается S^{p-1} в единственной точке $\varphi^{-1}(q)$. Предельную сферу можно получить также как предел сфер. Точнее, рассмотрим геодезическую $\gamma(t)$, соединяющую точки q и x, а также окружность в H с центром в точке $\gamma(t)$ радиуса t (проходящую через x). Предел этих окружностей при $t \to \infty$ есть $L(q, x)$[1]. Оснащение предельной сферы $L(q,x)$ векторами, направленными внутрь (соответственно вне) $L(q,x)$, совпадает с устойчивой орисферой $W^s(v)$ (соответственно неустойчивой орисферой $W^u(v)$), где $\pi(v)=x$, $\gamma_v(+\infty)=q$.

4.2. Римановы метрики без сопряженных точек. Точки x и y называются *сопряженными* вдоль геодезической $\gamma(t)$, если для некоторых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, $x=\gamma(t_1)$, $y=\gamma(t_2)$ существует такое ненулевое решение $Y(t)$ уравнения Якоби (7.30) вдоль $\gamma(t)$, что $Y(t_1)=Y(t_2)=0$[2]. Отсутствие сопряженных точек означает однозначную разрешимость вдоль $\gamma(t)$ краевой задачи для уравнения (7.30). Говорят, что риманова метрика не имеет сопряженных точек, если никакие две точки ни на какой геодезической не являются сопряженными. Условие отсутствия сопряженных точек позволяет, как и в пункте 4.1, построить положительные и отрицательные предельные решения уравнения (7.31) вдоль $\gamma(t)$, а с их помощью два распределения подпространств $E^+(v)$ и $E^-(v)$, $v \in SH$. Можно показать далее, что при некотором дополнительном предположении геометрического характера (выражаемом посредством так называемой аксиомы асимптотичности) поля подпространств E^+ и E^- интегрируемы. Для объяснения этого рассмотрим, как и в пункте 4.1, универсальное риманово накрывающее многообразие H (так что $M=H/\Gamma$, где Γ — дискретная подгруппа изометрий H) и поднимем поля E^+ и E^- в поля на SH. Как и в пункте 4.1, можно доказать существование в этом случае предельных сфер (как пределов сфер), ортогональных пучкам асимптотических геодезических.

---

[1] Это и определяет название «предельная сфера».

[2] Эквивалентное, но более геометрическое определение сопряженных точек, см. [38].

Их оснащения (называемые орисферами) как раз и будут интегральными многообразиями распределений E^+ и E^- (подробнее см [33]).

Если для любого $v \in M$

$$E^-(v) \oplus E^+(v) \oplus X(v) = \mathscr{T}_v M \tag{7.33}$$

($X(v)$ — одномерное подпространство, отвечающее направлению потока), то $\{S^t\}$ — поток Аносова. Конечно, условие (7.33) выполняется для метрик отрицательной кривизны, но оно может выполняться и для метрик, допускающих некоторые участки нулевой и даже положительной кривизны. Это обстоятельство привело к рассмотрению так называемых *многообразий аносовского типа*, допускающих риманову метрику, в которой геодезический поток является потоком Аносова (важный подкласс среди них образуют *многообразия гиперболического типа*, допускающие риманову метрику отрицательной кривизны, в частности, все поверхности рода >0). Для таких многообразий можно получить информацию о свойствах геодезического потока по отношению к любой метрике без сопряженных точек.

Мы приведем теперь достаточные условия, обеспечивающие выполнение (7.33) вдоль некоторой геодезической, задаваемой вектором $v \in M$. Пусть $w \in M$ ортогонально v и $Y_w(t)$ — положительное предельное решение уравнения (7.31), определяемое вектором w (т. е. $Y_w(0) = D^+(0)w$, $Y_w'(0) = \dot{D}^+(0)w$). Обозначим $K_w(t)$ кривизну Q в точке $\gamma_v(t)$ в двумерном направлении, задаваемом векторами $Y_w(t)$, $\gamma_v(t)$. Наше условие состоит в следующем: для любого w

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t K_w(s)\, ds < 0. \tag{7.34}$$

Можно показать, что (7.34) влечет (7.33) вдоль геодезической $\gamma_v(t)$. Кроме того, для любого $\xi \in E^+(v)$ характеристический показатель Ляпунова $\chi^+(\xi, v) > 0$, а для $\xi \in E^-(v)$ имеем $\chi^+(\xi, v) < 0$. Если условие (7.34) выполняется для векторов v, образующих множеств $\Lambda \subset M$ положительной меры, то поток $\{S^t\} | \Lambda$ является НПГ-потоком. Оказывается, что при некоторых ограничениях геометрического характера на риманову метрику (выражаемых посредством так называемой аксиомы видимости) имеет место альтернатива: либо $\mu(\Lambda) = 0$, либо $\mu(\Lambda) = 1$ (и тогда поток $\{S^t\}$ изоморфен потоку Бернулли). Вторая возможность реализуется, например, для геодезических потоков на поверхностях рода >0 с римановой метрикой без сопряженных точек, на многообразиях с римановой метрикой без фокальных точек, удовлетворяющих аксиоме видимости, и в некоторых других случаях.

Сказанное выше означает, что гиперболические свойства, присущие геодезическим потокам на многообразиях отрицательной кривизны, могут иметь место (но возможно в более слабой степени) и для метрик более общего типа. Однако, в то время как отрицательность кривизны есть локальное и грубое[1] свойство, отсутствие сопряженных точек есть свойство глобальное, негрубое и, как правило, весьма трудно проверяемое. Однако, по крайней мере в одном отношении, приведенные выше результаты имеют принципиальное значение. Речь идет о метриках неположительной кривизны, которые лежат на границе множества метрик отрицательной кривизны. Простой пример геодезического потока на n-мерном торе со стандартной метрикой, который не эргодичен и имеет нулевую энтропию, показывает, что ситуация здесь существенно иная. Однако, этот пример в некотором смысле нетипичен. Оказывается, что если универсальная накрывающая H компактного многообразия M неположительной кривизны не допускает геодезически изометрического вложения плоскости (это условие для метрик неположительной кривизны эквивалентно упоминавшейся выше аксиоме видимости), то геодезический поток в M является НПГ-потоком и изоморфен потоку Бернулли. Грубо говоря, нулевая кривизна проявляется в возможности вложить геодезически изометрически в H бесконечную полоску нулевой кривизны, состоящую из геодезических, соединяющих две заданные точки на абсолюте. Оказывается, что при выполнении приведенного выше условия суммарная мера таких полосок равна нулю.

4.3. Энтропия геодезического потока. Пусть $v \in M$. Множество векторов $w \in M$, ортогональных v, обозначим $v^{\perp}$. Рассмотрим линейное отображение $S_v : v^{\perp} \to v^{\perp}$, задаваемое равенством: $S_v w = K\xi(w)$, где $\xi(w)$ — такой вектор в $E^{-}(v)$, что $d\pi\xi(w) = w$.

Теорема 4.3. Если риманова метрика класса C^4 не имеет сопряженных точек и удовлетворяет аксиоме асимптотичности, то S_v — это линейный самосопряженный оператор, совпадающий с оператором второй квадратичной формы предельной сферы $L(\pi(v), \gamma_v(+\infty))$ в точке $\pi(v)$.

Формула (7.32) позволяет дать представление оператора S_v в виде, аналогичном разложению в цепную дробь для оператора $B(x)$ (см. гл. 8, § 1).

Обозначим через $\{e_i(v)\}$, $i=1, \ldots, p-1$, ортонормированный базис в $v^{\perp}$, состоящий из собственных векторов оператора S_v, а $K_i(v)$ — соответствующие собственные значения. Числа $K_i(v)$ являются *главными кривизнами*, а векторы $e_i(v)$ — *направлениями главных кривизн* предельной сферы в точке $\pi(v)$.

Теорема 4.4. В условиях теоремы 4.3 для энтропии

---

[1] Т. е. близкая метрика также имеет отрицательную кривизну.

$h_\mu(S^1)$ геодезического потока имеет место равенство

$$h_\mu(S^1) = -\int\limits_M \sum_{i=1}^{p-1} K_i(v)\, d\mu(v) = -\int\limits_M \operatorname{tr} S_v d\mu(v)$$

(tr — след оператора S_v).

Этот результат вполне аналогичен результату, полученному в [44] для рассеивающих биллиардов.

§ 5. Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны

Эргодическая теория геодезических потоков на многообразиях постоянной отрицательной кривизны может быть достаточно глубоко исследована с помощью методов теории унитарных представлений групп Ли. Впервые идея об алгебраической конструкции таких геодезических потоков появилась в работе И. М. Гельфанда и С. В. Фомина (см. [20]), где было получено много важных результатов. Динамические системы, к которым применим подход Гельфанда—Фомина, иногда называют динамическими системами алгебраического происхождения. Многие относящиеся к ним результаты описаны в обзоре [22]. Здесь мы остановимся только на геодезических потоках на многообразиях постоянной отрицательной кривизны. Мы будем пользоваться моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского на верхней комплексной полуплоскости $H = \{z = (x+iy) \colon y > 0\}$. Линия $y=0$ называется абсолютом (и обозначается $H(\infty)$), а ее точки — бесконечно удаленными. Прямыми в H служат полуокружности [1] с центрами на абсолюте или лучи, ортогональные к абсолюту. Риманова метрика кривизны — K задается в виде скалярного произведения $\langle , \rangle_л$ в точке $z = (x+iy) \in H$ равенством $\langle , \rangle_л = \frac{k}{y^2} \langle , \rangle$, где $\langle , \rangle$ — евклидово скалярное произведение, $k > 0$. Геодезическими в этой метрике служат как раз указанные выше прямые. *Асимптотическим пучком* называется совокупность всех ориентированных прямых в геометрии Лобачевского, параллельных заданной, т. е. приходящих в одну и ту же точку абсолюта. Ортогональными линиями асимптотического пучка (предельными окружностями) служат окружности, касающиеся абсолюта, а также прямые, параллельные абсолюту.

Движениями (изометриями) в *геометрии Лобачевского* служат дробно-линейные преобразования $z \to \frac{a+bz}{c+dz}$, переводящие верхнюю полуплоскость в себя. Здесь a, b, c, d — действительные числа и можно нормировать их так, что $\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$.

---

[1] Окружности, полуокружности, прямые здесь и далее понимаются в евклидовом смысле.

Две матрицы $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}$ задают одно и то же преобразование, если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}$. Матрицы $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ образуют центр Z группы $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, и группа движений G плоскости Лобачевского изоморфна группе $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})/Z$. Движение $g \in G$ называется

а) *эллиптическим*, если g сопряжено с преобразованием $z \to \lambda z$, $|\lambda| = 1$;

б) *гиперболическим*, если g сопряжено с преобразованием $z \to \lambda z$, $|\lambda| > 1$;

в) *параболическим*, если g сопряжено с преобразованием $z \to z + 1$.

Для нас наиболее важны гиперболические преобразования. Пусть $g_0 z = \lambda z$, $\lambda > 1$. Прямая $\{\mathrm{Re}\, z = 0\} = \gamma$ инвариантна относительно g_0, т. е. $g_0 \gamma = \gamma$ и всякая точка $z \in \gamma$ сдвигается под действием g_0 на неевклидово расстояние $\ln \lambda$. Если g сопряжено с g_0, то найдется другая инвариантная относительно g прямая, на которой каждая точка сдвигается на расстояние $\ln \lambda$. Поскольку $g = g_1 g \circ g_1^{-1}$, где $g_1 \in G$, то λ — собственное значение g, $\lambda > 1$.

Обозначим единичный касательный пучок SH через M_0. Тогда $G = M_0 = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})/N$, где N — группа, образованная из двух элементов $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, поскольку всякое движение однозначно определяется тем, во что оно переводит единичный касательный вектор с носителем в $z = i$, направленный вертикально вверх. Поверхность Q постоянной отрицательной кривизны строится как факторпространство $Q = H/\Gamma$, где Γ — дискретная подгруппа группы G. Фазовое пространство геодезического потока, т. е. единичный касательный пучок над Q строится как факторпространство $M = \Gamma \setminus G$ левых классов смежности по подгруппе Γ, мера μ на M индуцируется мерой Хаара на G. В конструкции Гельфанда—Фомина существенную роль играют следующие два наблюдения:

1) В гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2(M, \mu)$ индуцируется унитарное представление группы G, порожденное действием G с помощью правых сдвигов, т. е. $U_g f(x) = f(xg)$, $x \in \Gamma \setminus G$, $g \in G$.

2) Геодезический поток $\{S^t\}$ порождается однопараметрической подгруппой $g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, т. е. $S^t(x) = x g_t$.

Раскладывая представление группы G на неприводимые представления и вычисляя спектр $\{U_t\}$ в каждом неприводимом представлении, можно таким образом вычислить спектр геодезического потока, что и было сделано впервые в [20].

Для поверхностей постоянной отрицательной кривизны имеется тесная связь между длинами замкнутых геодезических и собственными значениями гиперболических преобразований

$g \in \Gamma$. В самом деле, пусть γ — геодезическая в H, инвариантная относительно g. Возьмом $q \in \gamma$ и x — линейный элемент, касательный к γ в точке q. Тогда gx и x отождествляются. Геометрически это означает, что γ переходит в себя под действием g, т. е. отрезок геодезической между x и gx есть замкнутая геодезическая. Можно показать, что все замкнутые геодезические могут быть получены таким образом. Тем самым, оказывается, что длины простых замкнутых геодезических равны логарифмам собственных значений, больших 1, преобразований $g \in \Gamma$.

Имеется замечательная формула, принадлежащая Сельбергу (A. Selberg) (см. [20]), которая связывает собственные значения преобразований $g \in \Gamma$ с собственными значениями оператора Лапласа на поверхности Q. Тем самым возникает связь между собственными значениями оператора Лапласа на поверхности постоянной отрицательной кривизны и длинами замкнутых геодезических. На сегодняшний день не известно никакого обобщения этого факта на поверхности переменной отрицательной кривизны. Исследование данного вопроса представляется одной из самых интересных нерешенных задач в этой области.

Рассмотрим теперь один конкретный пример некомпактной поверхности постоянной отрицательной кривизны, но конечной площади.

Обозначим Γ *модулярную подгруппу* $\mathrm{SL}(2, R)$, состоящую из матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с целыми коэффициентами и определителем 1. Опираясь на красивую теорему Артина (L. Artin), мы покажем, как описывать непосредственно эргодические свойства геодезического потока $\{S^t\}$ на многообразии $Q = H/\Gamma$. Рассмотрим геодезическую γ в Q и какое-либо ее поднятие $\tilde{\gamma}$ в H. Пусть $\tilde{x} = \tilde{\gamma}(-\infty)$, $\tilde{y} = \tilde{\gamma}(+\infty)$. Предположим для простоты, что $\tilde{x} > 0$ и $\tilde{y} < 0$, и пусть $\tilde{x} = [\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \ldots]$ и $-\tilde{y} = [\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \ldots]$ — разложение чисел $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ в цепную дробь с $\tilde{n}_i > 0$ и $\tilde{m}_i > 0$. Пусть $\hat{\gamma}$ — какое-либо другое поднятие геодезической γ в H и $\hat{x} = \hat{\gamma}(-\infty)$, $\hat{y} = \hat{\gamma}(+\infty)$. Тогда $\hat{\gamma} = g\tilde{\gamma}$ для некоторого $g \in \Gamma$. Пусть $\hat{x} = [\hat{n}_1, \hat{n}_2, \ldots]$ и $-\hat{y} = [\hat{m}_1, \hat{m}_2, \ldots]$ — разложение чисел $\hat{x}$ и $\hat{y}$ в цепную дробь (мы снова для определенности считаем, что $\hat{x} > 0$ и $\hat{y} < 0$). Теорема Артина гласит: точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $(\hat{x}, \hat{y})$ определяют одну и ту же геодезическую в M тогда и только тогда, когда для некоторого целого k имеем $\sigma^k(\ldots, \tilde{m}_2, \tilde{m}_1, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \ldots) = (\ldots, \hat{m}_2, \hat{m}_1, \hat{n}_1, \hat{n}_2, \ldots)$, где σ — сдвиг в пространстве Σ бесконечных двусторонних последовательностей целых положительных чисел. Таким образом, мы имеем отображение $\psi: SQ \to \Sigma$ и можно показать, что вопрос об эргодичности $\{S^t\}$ по отношению к риманову объему μ в SQ эквивалентен вопросу об эргодичности σ по отношению к мере $\psi_*\mu$. Последний вопрос, очевидно, эквивалентен вопросу об эргодичности σ в пространстве Σ_+ односторонних последовательностей целых положительных чисел (для которого Σ служит естественным расширением) по отношению к мере, являющейся проекцией $\psi_*\mu$ (обозначим эту меру ν). С другой стороны, рассмотрим преобразование T отрезка $[0, 1]$ в себя, задаваемое равенством $T(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$[1]. Легко видеть, что если $x=[n_1, n_2, \ldots]$, то $T(x)=[n_2, n_3, \ldots]$, так что T сопряжено со сдвигом σ в Σ_+. Обозначим отображение сопряжения через χ. Мера $\chi_*^{-1}\nu$ есть известная гауссовская мера на $[0, 1]$ с плотностью $\frac{dx}{\log 2(1+x^2)}$, инвариантная относительно T. Эргодичность же T по отношению к этой мере хорошо известна (см. [23]). Обобщение описанной конструкции на некоторые другие дискретные группы приведено в [96].

§ 6. Размерностные характеристики инвариантных множеств динамических систем

6.1. Вводные замечания. Как уже отмечалось, топологическая структура гиперболических множеств (в том числе, странных аттракторов) может быть весьма сложной и нерегулярной (см. § 2). В известном смысле она описывается с помощью процесса, аналогичного процессу построения канторовского множества. Это позволяет характеризовать тополого-геометрическую структуру инвариантного гиперболического множества посредством некоторых числовых характеристик типа размерности. Во многих случаях нет необходимости знать всю сложную топологическую картину индивидуального поведения траекторий динамической системы, а достаточно ограничиться изучением эргодических характеристик их глобального поведения. Размерностные характеристики занимают, так сказать, промежуточное положение между топологическими и эргодическими и, как показали недавние исследования, тесно связаны с последними. Сейчас в ряде физических работ введено довольно большое число размерностных характеристик инвариантных множеств динамических систем (как правило, эти множества не являются гиперболическими в строгом смысле, но имеют с ними много общего (см. [64]). Однако, строгие математические результаты, известные на сегодняшний день, связаны только с хаусдорфовой размерностью, емкостью, а также размерностью относительно отображения (см. ниже).

6.2. Хаусдорфова размерность. Пусть X — компактное метрическое пространство, F — совокупность открытых шаров в X.

---

[1] $[y]$ означает целую часть y.

Определим α-меру Хаусдорфа подмножества $Y\subset X$ формулой

$$m_H(Y,\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{G\subset F}\left\{\sum_{S\in G}(\operatorname{diam} S)^{\alpha}:\ \bigcup_{S\in G} S\supset Y,\ \operatorname{diam} S\leqslant\varepsilon\right\}. \quad (7.35)$$

(Здесь G — конечное или счетное подмножество F; нетрудно видеть, что фигурирующий в этом выражении предел существует). Величина $m_H(Y,\alpha)$ как функция Y (при фиксированном α) представляет собой регулярную борелевскую внешнюю σ-аддитивную меру (см. [52]); как функция α (при фиксированном Y) она не возрастает и обладает следующим свойством: существует такое α_0, что $m_H(Y,\alpha)=\infty$ при $\alpha<\alpha_0$ и $m_H(Y,\alpha)=0$ при $\alpha>\alpha_0$. *Хаусдорфова размерность* множества Y определяется равенством:

$$\dim_H Y=\alpha_0=\inf\{\alpha: m_H(Y,\alpha)=0\}=\sup\{\alpha: m_H(Y,\alpha)=\infty\}.$$

Перечислим некоторые свойства хаусдорфовой размерности:

1) $\dim_H\left(\bigcup_i Y_i\right)=\sup_i \dim_H Y_i$ для любой счетной совокупности множеств $Y_i\subset X$.

2) $\dim_H(Y\times Z)\geqslant\dim_H Y+\dim_H Z$ для любых борелевских (в частности, компактных) подмножеств $Y, Z\subset X$, причем возможны случаи, когда имеет место строгое неравенство (более того, существует множество A такое, что $\dim_H(A\times A)>2\dim_H A$).

3) Если A — борелевское подмножество X и B — шар в $\mathbf{R}^n$, то $\dim_H(A\times B)=\dim_H A+n$.

Мы приведем некоторые результаты по вычислению и оценке хаусдорфовой размерности инвариантных множеств динамических систем.

Пусть Λ — инвариантное подмножество диффеоморфизма S класса C^1 компактного риманова многообразия M. Обозначим $M_S(\Lambda)$ множество S-инвариантных сосредоточенных на Λ борелевских нормированных эргодических мер. Для $\mu\in M_S(\Lambda)$ введем множество G_μ тех точек $x\in\Lambda$, для которых $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(S^k(x))\to\int_\Lambda\varphi\, d\mu$ для любой непрерывной функции φ на Λ. Эквивалентное определение: G_μ состоит из тех $x\in\Lambda$, для которых последовательность мер $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta(S^k(x))$ ($\delta(x)$ — мера, сосредоченная в точке x) сходится в слабой топологии к мере μ. G_μ называется множеством типичных вперед точек для μ. Пусть также $\chi^1(x)\geqslant\ldots\geqslant\chi^n(x)$ ($n=\dim M$) — упорядоченный по убыванию набор значений характеристического показателя Ляпунова в точке x. Так как функции $\chi^i(x)$ инвариантны относительно S, то для $\mu\in M_S(\Lambda)$ и μ-почти всякого $x\in M$ имеем $\chi^i_\mu \overset{\text{def}}{=} \chi^i(x) = \text{const}$, причем $\chi^i_\mu \geqslant \ldots \geqslant \chi^n_\mu$.

Положим

$$\alpha(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \chi^1_\mu < 0, \\ \sup\left\{\alpha : 0 \leqslant \alpha \leqslant n, \sum_{i=1}^{[\alpha]} \chi^i_\mu + (\alpha - [\alpha])\, \chi^{[\alpha]+1}_\mu \geqslant 0\right\}, & \text{если } \chi^1_\mu \geqslant 0. \end{cases}$$

Величина $\alpha(\mu)$ называется *размерностью Ляпунова меры* μ. В работе [84] была выдвинута гипотеза, уточненная формулировка которой гласит: $\dim_H \Lambda = \alpha(\mu)$ для некоторой меры μ. Эта гипотеза поддерживалась в ряде физических работ (см., например, [64]). Некоторые ее видоизменения справедливы в двумерном случае (см. [102]) и в многомерном, если вместо хаусдорфовой размерности рассматривать некоторые другие характеристики (см. ниже п. 6.3, а также [89], [88]). Не приходится даже надеяться на то, что существует общая формула, связывающая хаусдорфову размерность только со значениями характеристического показателя Ляпунова. Тем больший интерес имеет следующая оценка хаусдорфовой размерности, полученная Ледрапье в [74].

Теорема 6.1.

$$\dim_H \Lambda \leqslant \sup_{\mu\in M_S(\Lambda)} \alpha(\mu).$$

Более интересные и точные результаты удается получить, когда Λ — ЛМГМ диффеоморфизма S класса $C^{1+\alpha}$. Фиксируем $x\in\Lambda$ и малую окрестность $U(x)$ точки x в M. Так как Λ локально максимально, существуют открытые множества $U_1 \subset \subset V^s(x)$, $U_2 \subset V^u(x)$, для которых $\Lambda \cap U(x) = (\Lambda \cap U_1) \times (\Lambda \cap U_2)$. Оказывается, что в случае, когда $\dim M = 2$, хаусдорфова размерность Λ равна хаусдорфовой размерности $\Lambda \cap U(x)$ (независимо от выбора точки $x\in\Lambda$ и окрестности $U(x)$), а последняя равна сумме хаусдорфовых размерностей множеств $\Lambda \cap U_1$ и $\Lambda \cap U_2$ (которые также не зависят от x). Последние характеризуют хаусдорфову размерность Λ в сечении его соответственно устойчивыми и неустойчивыми слоями. Для $\mu\in M_S(\Lambda)$ аналогичная ситуация имеет место, когда вместо Λ рассматривается носитель меры или множество G_μ (подчеркнем, что $\mu(G_\mu) = 1$). Перейдем теперь к точным формулировкам.

Положим $\psi^u(t) = P(t\varphi^u)$ (здесь $\varphi^u(x)$ определена равенством (7.24) и $P(t\varphi^u)$ — давление функции $t\varphi^u$ на Λ). Легко видеть, что $\psi^u(0) = P(0) = h(S) \geqslant 0$. Нетрудно также показать, что функция $\psi^u(t)$ строго монотонно убывает (см. [101]). Из результатов [13] следует, что $\psi^u(1) \leqslant 0$. Поэтому существует единственное число t^u, являющееся корнем уравнения

$P(t^u\varphi^u)=0$. Аналогично, рассматривая функцию $\psi^s(t)=P(t\varphi^s)$, можно доказать существование единственного числа t^s, для которого $P(t^s\varphi^s)=0$.

Теорема 6.2 (см. [78]). Предположим, что $\dim M=2$, Λ — ЛМГМ диффеоморфизма S класса $C^{1+\alpha}$, $S|\Lambda$ топологически транзитивно. Тогда для любого $\mu\in M_S(\Lambda)$ и $x\in\Lambda$

$$\begin{gathered}\dim_H G_\mu=\dim_H(G_\mu\cap V^u(x))+\dim_H(G_\mu\cap V^s(x)),\\ \dim_H(G_\mu\cap V^s(x))=h_\mu/\chi_\mu^1, \qquad (7.36)\\ \dim_H(G_\mu\cap V^u(x))=h_\mu/|\chi_\mu^2|\end{gathered}$$ [1]

(где h_μ — метрическая энтропия S).

Скажем несколько слов о том, как доказывается (7.36). Пусть ξ — марковское разбиение Λ и $\xi_n=\bigvee_{k=0}^{n-1}S^k\xi$. Из теоремы Шеннона — Макмиллана — Бреймана (см. гл. 3, § 3) и свойств характеристических показателей Ляпунова вытекает, что для любого малого $\varepsilon>0$ существует такое множество $G_\mu^\varepsilon\subset G_\mu$, что $\mu(G_\mu^\varepsilon)\geqslant 1-\varepsilon$ и 1) число элементов разбиения ξ_n, покрывающих множество $V^u(x)\cap G_\mu^\varepsilon$, пропорционально $\exp(h_\mu\pm\varepsilon)n$; 2) диаметр каждого элемента разбиения ξ_n, пересекающегося с G_μ^ε, пропорционален $\exp(\chi_\mu^2\pm\varepsilon)n$. Далее можно показать, что разбиение ξ_n является «наилучшим», т. е. почти реализует inf в (7.35). Поэтому $\dim_H(V^u(x)\cap G_\mu^\varepsilon)\approx(h_\mu\pm\varepsilon)/(|\chi_\mu^2|\pm\varepsilon)$. Остается перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$.

Теорема 6.3 (см. [78]). В условиях теоремы 6.2 для любого $x\in\Lambda$

1) $\dim_H\Lambda=\dim_H(\Lambda\cap V^u(x))+\dim_H(\Lambda\cap V^s(x))$;

2) $\dim_H(\Lambda\cap V^u(x))=t^u=\sup\limits_{\mu\in M_S(\Lambda)}\dim_H(G_\mu\cap V^u(x))=\dim_H(G_{\mu_1}\cap V^u(x))$, где μ_1 — гиббсовская мера, отвечающая функции $t^u\varphi^u$;

3) $\dim_H(\Lambda\cap V^s(x))=t^s=\sup\limits_{\mu\in M_S(\Lambda)}(G_\mu\cap V^s(x))=\dim_H(G_{\mu_2}\cap V^s(x))$,

где μ_2 — гиббсовская мера, отвечающая функции $t^s\varphi^s$.

Пусть Λ — гиперболический аттрактор. Поскольку $V^u(x)\subset\Lambda$ для всякого $x\in\Lambda$, то $\dim_H(V^u(x)\cap\Lambda)=1$ и, следовательно, $\dim_H\Lambda=1+t^s$. Кроме того, если μ — мера Боуэна — Рюэля — Синая на Λ, то $\dim_H(G_\mu\cap V^s(x))=\chi_\mu^1/|\chi_\mu^2|$ (см. § 3) и, следовательно, $\dim_H G_\mu=1+\chi_\mu^1/|\chi_\mu^2|$.

6.3. Размерность относительно динамической системы. В многомерном случае ситуация оказывается более сложной. Поскольку хаусдорфова размерность не связана с динамикой системы, ее использование оказывается не вполне удобным.

---

[1] Так как $\dim M=2$ и Λ — гиперболическое множество, то в соответствии с нашими обозначениями $\chi_\mu^1>0>\chi_\mu^2$.

В [88] определена иная размерностная характеристика инвариантного гиперболического множества Λ, так называемая *размерность относительно динамической системы.* Не останавливаясь на точном определении, отметим, что введение этой характеристики основано на следующих соображениях. В том случае, когда $\dim W^s(x) > 1$, из-за различия в скоростях сжатия в различных направлениях, касательных к $W^s(x)$, образом шара в $W^s(x)$ под действием динамической системы S^t будет «маленький и сильно вытянутый эллипсоид». При подсчете хаусдорфовой размерности это обстоятельство игнорируется («эллипсоиды» заменяются на шары, диаметры которых равны наибольшей полуоси «эллипсоида»). Напротив, при подсчете размерности относительно динамической системы учитываются как раз «наилучшие упаковки», составленные из таких «эллипсоидов». Отметим, что в случае, когда $\dim W^s(x) = 1$, обе размерности совпадают. Конечно, «недостатком» размерности относительно динамической системы является то, что она зависит не только от множества Λ, но и того, какая на нем действует динамическая система. Вместе с тем, как показано в [88], для этой размерности справедливы утверждения теорем 6.2 и 6.3.

6.4. Емкостные и другие характеристики. Пусть X — компактное метрическое пространство, $Y \subset X$. Обозначим через $N(\varepsilon)$ наименьшее число шаров радиуса ε, покрывающих Y. *Верхней* (соответственно *нижней*) *емкостью* множества Y называется величина

$$\overline{C}(Y) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad \left(\text{соответственно } \underline{C}(Y) = \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}\right).$$

Нетрудно показать, что $\dim_H Y \leqslant \underline{C}(Y) \leqslant \overline{C}(Y)$.

Пусть μ — борелевская мера на пространстве X. Величины

$$\dim_H \mu = \inf\{\dim_H Y : Y \subset X,\ \mu(Y) = 1\},$$

$$\overline{C}(\mu) = \overline{\lim_{\delta\to 0}} \inf\{\overline{C}(Y) : Y \subset X,\ \mu(Y) \geqslant 1-\delta\},$$

$$\underline{C}(\mu) = \underline{\lim_{\delta\to 0}} \inf\{\underline{C}(Y) : Y \subset X,\ \mu(Y) \geqslant 1-\delta\}$$

называются соответственно *размерностью меры, верхней* и *нижней емкостью меры.*

Для заданных $\varepsilon, \delta > 0$ обозначим через $N(\varepsilon, \delta)$ наименьшее число шаров радиуса ε, необходимых для того, чтобы покрыть множество μ-меры $\geqslant 1-\delta$. Величины

$$\underline{C}_L(\mu) = \overline{\lim_{\delta\to 0}}\, \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\log N(\varepsilon, \delta)}{\log(1/\varepsilon)},$$

$$\overline{C}_L(\mu) = \overline{\lim_{\delta\to 0}}\, \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\log N(\varepsilon, \delta)}{\log(1/\varepsilon)}$$

называются соответственно *нижней и верхней емкостью Ледрапье меры* μ. Легко видеть, что $\dim_H\mu\leqslant\underline{C}(\mu)\leqslant\overline{C}(\mu)$, $\underline{C}_L(\mu)\leqslant\underline{C}(\mu)$, $\overline{C}_L(\mu)\leqslant\overline{C}(\mu)$, $\underline{C}_L(\mu)\leqslant\overline{C}_L(\mu)$.

Кроме того, можно доказать, что $\dim_H\mu\leqslant\underline{C}_L(\mu)$.

Пусть ξ — конечное измеримое разбиение X. Фиксируем $\varepsilon>0$ и положим

$$H_\mu(\varepsilon)=\inf\{H_\mu(\xi):\operatorname{diam}\xi\leqslant\varepsilon\}$$

($H_\mu(\xi)$ — энтропия разбиения ξ; см. гл. 3, § 1).

Величины

$$\overline{R}(\mu)=\varlimsup_{\varepsilon\to0}\frac{H_\mu(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},\quad \underline{R}(\mu)=\varliminf_{\varepsilon\to0}\frac{H_\mu(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

называются соответственно *верхней* и *нижней информационной размерностью* (или *верхней* и *нижней размерностью Реньи* (A. Renyi)).

Теорема 6.4 (см. [102]). Пусть μ — борелевская вероятностная мера на компактном метрическом пространстве X. Предположим, что для μ-почти всякого x

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\log\mu(B(x,\rho))}{\log\rho}=\alpha$$

($B(x,\rho)$ — шар с центром в x и радиуса ρ). Тогда

$$\dim_H\mu=\overline{C}(\mu)=\underline{C}(\mu)=\overline{C}_L(\mu)=\underline{C}_L(\mu)=\overline{R}(\mu)=\underline{R}(\mu)=\alpha.$$

Если Λ — инвариантное множество динамической системы $\{S_t\}$, то введенные выше величины могут быть использованы для характеризации, в некотором отношении, тополого-геометрической структуры множества Λ, т. е. являются, так сказать, размерностными характеристиками Λ. Общий подход к введению характеристик такого типа приведен в [89].

Ниже формулируются результаты, позволяющие вычислить введенные характеристики в некоторых случаях.

Теорема 6.5 (см. [103]). Пусть Λ — инвариантное множество диффеоморфизма S класса $C^{1+\alpha}$ гладкого компактного многообразия M, μ — мера Синая (см. § 3), для которой $\chi^1_\mu\geqslant\ldots$ $\ldots\geqslant\chi^k_\mu>0>\chi^{k+1}_\mu\geqslant\ldots\geqslant\chi^n_\mu$. Тогда

$$\overline{C}(\operatorname{supp}\mu)\geqslant k+(\chi^1_\mu+\ldots+\chi^k_\mu)/|\chi^{k+1}_\mu|=A.$$

Следствие (см. [103]). Если Λ — гиперболический аттрактор диффеоморфизма S класса $C^{1+\alpha}$, отображение $S|\Lambda$ топологически транзитивно и μ — мера Боуэна—Рюэля—Синая на Λ (см. § 3), то $\overline{C}(\Lambda)\geqslant A$.

Теорема 6.6 (см. [102]). Пусть S — диффеоморфизм класса $C^{1+\alpha}$ гладкого компактного риманова двумерного многообразия M, μ — борелевская вероятностная мера с показателями $\chi_\mu^1 > 0 > \chi_\mu^2$ (см. § 3).

Тогда

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\log \mu (B(x, \rho))}{\log \rho} = \alpha = h_\mu (S) \left(\frac{1}{\chi_\mu^1} - \frac{1}{\chi_\mu^2} \right)$$

и, следовательно,

$$\dim_H \mu = \overline{C}(\mu) = \underline{C}(\mu) = \overline{C}_L(\mu) = \underline{C}_L(\mu) = \overline{R}(\mu) = \underline{R}(\mu).$$

Пусть p — периодическая гиперболическая точка диффеоморфизма S класса C^2 гладкой поверхности M, x — трансверсальная гомоклиническая точка (см. § 2). Фиксируем малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ЛМГМ Λ_ε, лежащее в ε-окрестности траектории $\{S^n(x)\}$ (см. теорему 2.4). Обозначим λ, γ — собственные значения оператора $DS(p)$, $0 < \lambda < 1 < \gamma$.

Теорема 6.7 (см. [11]). Существуют такие постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что

$$\beta \leqslant \dim_H (\Lambda_\varepsilon \cap V^u(x)) \leqslant \alpha,$$

где $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ — единственные корни уравнений $\alpha \ln \frac{C_1 \gamma}{\varepsilon} = -\ln(\gamma^\alpha - 1)$, $\beta \ln \frac{C_2 \gamma}{\varepsilon} = -\ln(\gamma^\beta - 1)$.

Следствие. Функция $\varphi(\varepsilon) = \dim_H (\Lambda_\varepsilon \cap V^u(x))$ при $\varepsilon \to 0$ асимптотически ведет себя как $\varphi(\varepsilon) = \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} / \ln \frac{1}{\varepsilon} - \ln \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \cdot \ln \gamma / \ln \frac{1}{\varepsilon}$.

Аналогичный результат (с заменой γ на λ^{-1}) имеет место для $\dim_H (\Lambda_\varepsilon \cap V^s(x))$.

Глава 8

СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОСОБЕННОСТЯМИ

Л. А. Бунимович

Гиперболические динамические системы с особенностями возникают во многих важных физических проблемах. Кроме того, при переходе к отображению Пуанкаре потоков, отвечающих гладким, даже аналитическим системам обыкновенных дифференциальных уравнений, часто теряется гладкость (см. далее). Переход же к отображению Пуанкаре и представление исходного потока в виде специального потока (см. гл. 1, § 4) являются в настоящее время наиболее эффективными методами исследования эргодических свойств динамических систем с непрерывным временем.

§ 1. Биллиарды

Среди динамических систем с особенностями наиболее важны, как для приложений, так и для общей теории, динамические системы с упругими отражениями от края или, как их принято называть, биллиарды. Биллиардом называется динамическая система, отвечающая движению по инерции материальной точки внутри области с кусочно гладкой границей с условием упругого отражения от границы области.

1.1. Общее определение биллиарда. Пусть Q — компактное риманово многообразие с кусочно гладкой границей, $\dim Q=d$. Граница ∂Q состоит из конечного числа гладких компактных подмногообразий $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ коразмерности один. Точки $q\in \bigcup_{i=1}^{r}\left(\Gamma_i\setminus \bigcup_{i\neq j}\Gamma_j\right)$ будем называть *регулярными*, остальные точки границы — *особыми*, а сами множества $\tilde{\Gamma}_i=\Gamma_i\setminus \bigcup_{i\neq j}\Gamma_j$ — регулярными компонентами границы.

Пусть $\mathscr{T}_q$ — касательное пространство к подмногообразию Γ_i в точке q, $n(q)$ — единичный вектор нормали к $\mathscr{T}_q$, направленный внутрь Q. Если q — регулярная точка границы, то вектор $n(q)$ определен однозначно. В особых точках может быть несколько векторов $n(q)$.

Через M обозначим единичный касательный пучок над Q, т. е. $M=\{x:x=(q,v),\ q\in Q,\ v\in S^{d-1}\}$, где S^{d-1} — единичная сфера в $(d-1)$-мерном евклидовом пространстве. Точка $x=(q,v)\in M$ называется линейным элементом с носителем q. Пусть $\pi:M\to Q$ — проекция, т. е. $\pi(q,v)=q$. Если Q — компактное риманово многообразие с кусочно гладкой границей, то M — тоже многообразие с кусочно гладкой границей $\partial M=\pi^{-1}(\partial Q)$, состоящей из конечного числа регулярных компонент $\partial M_i=\pi^{-1}(\Gamma_i)$. Ясно, что $\dim M=2d-1$.

Зададим в M меру μ, положив $d\mu=d\rho(q)d\omega_q$, где $d\rho(q)$ — элемент объема на Q, индуцированного римановой метрикой, ω_q — мера Лебега на сфере $S^{d-1}(q)=\pi^{-1}(q)$.

Рассмотрим на пространстве M геодезический поток (см. гл. 1, § 1). Он определяется векторным полем $X=\{X(x),\ x\in M\}$, где $X(x)$ — касательный вектор к M в точке x. Тогда X определяет движение точки с единичной скоростью по геодезическим линиям в M. Пусть N_{ij} есть множество таких внутренних точек $x=(q,v)\in M$, что отрезок геодезической, проведенной по направлению[1] x, пересекает ∂Q в точке множества $\Gamma_i\cap\Gamma_j$. Ясно, что N_{ij} есть замкнутое подмногообразие коразмерности 1, и поэтому $\mu(\bigcup_{i\neq j}N_{ij})=0$.

---

[1] Геодезической, проведенной по направлению $x=(q,\ v)$, мы называем геодезическую, проходящую через точку x по направлению вектора v.

Мы будем предполагать, что для почти каждой (в смысле меры μ) точки $x \in \operatorname{Int} M$ геодезическая, проведенная по направлению x, пересекается с границей ∂Q. Это свойство выполняется во всех известных в настоящее время интересных примерах биллиардов. Пусть s — наименьшее положительное число такое, что геодезический сегмент длины s, проведенный по направлению x, оканчивается в регулярной точке границы ∂Q. (Можно показать, что мера μ множества точек, через которые проходят геодезические сегменты, оканчивающиеся в особых точках ∂Q, равна нулю). Обозначим через y касательный к Q вектор, полученный из x при помощи параллельного перенесения вдоль геодезической до конца сегмента длины s. Отразим y в точке $q = \pi(y)$ по закону «угол падения равен углу отражения», т. е. построим новый касательный вектор $y' = y - 2(n(q), y) n(q)$. Выпустим по направлению y' геодезический сегмент до следующего пересечения с границей и т. д. Можно показать, что множество точек x, для которых описанный процесс приводит к бесконечному числу отражений за конечное время, имеет меру 0. Будем считать также, что для почти всех точек все получающиеся при этом геодезические сегменты имеют конечную длину.

Тем самым существует подмножество $M' \subset M$ полной меры, на котором можно определить однопараметрическую группу преобразований $\{T^t\}$, положив для любых $x \in M'$ и t, $-\infty < t < \infty$, $T^t x$ равным касательному вектору, получающемуся в результате сдвига x вдоль определяемой им траектории на расстояние t. Если t — момент достижения границы, полагаем $T^t x = \lim\limits_{t' \to t+0} T^{t'} x$. Если $y = (q, v)$ — точка границы ∂M, то удобно отождествить y с точкой $y' = y - 2(n(q), y) n(q)$. Получающееся в результате этого отождествления множество также будем обозначать M'.

Определение. Группа преобразований $\{T^t\}$ называется *биллиардом* в Q.

Можно показать [23], что мера μ инвариантна относительно группы $\{T^t\}$, и, тем самым, биллиард является потоком в смысле эргодической теории. M обычно называют фазовым, а Q — конфигурационным пространством биллиарда.

Из приведенного определения непосредственно видно, что биллиарды можно рассматривать как геодезические потоки на римановых многообразиях с краем с условием отражения от него по закону «угол падения равен углу отражения». Биллиард в области Q можно определить и как гамильтонову систему с потенциалом $V(q) = 0$ при $q \in \operatorname{Int} Q$ и $V(q) = \infty$ при $q \in \partial Q$.

Биллиард $\{T^t\}$ имеет естественное специальное представление (см. гл. 1, § 4). Пусть $M_1 = \{x \in \partial M : (n(q), x) \geqslant 0,\ q = \pi(x)\}$. Рассмотрим преобразование T_1 множества M_1 в себя, определяемое следующим образом. Выпустим из точки $q = \pi(x)$ по направлению x отрезок геодезической до первого достижения границы и отразим касательный вектор в конце этого отрезка от границы. В результате получается вектор y, который мы полагаем равным T_1x. Таким образом, мы получаем специальное представление потока $\{T^t\}$ с помощью преобразования T_1 и функции $\tau(x)$, где $\tau(x)$ — длина указанного геодезического отрезка. T_1 сохраняет меру ν, являющуюся проекцией μ на край ∂M.

1.2. Биллиарды в многоугольниках и многогранниках. Пусть $Q\subset R^d$ — выпуклый многогранник, т. е. ограниченное множество вида $Q=\{q\in R^d : f_i(q)\geqslant 0,\ i=1,\dots,r\}$, где функции $f_1,\dots,f_r$ линейны. В этом случае Γ_i, $i=1,\dots,r$, — не что иное, как грани многогранника Q. Обозначим через n_i единичный вектор нормали к Γ_i, направленный внутрь Q.

Из определения вытекает, что траектории биллиардов в областях евклидова пространства представляют собой ломаные. Рассмотрим изометрическое отображение $\sigma_i:S^{d-1}\to S^{d-1}$, действующее в каждой точке $x=(q, v)$, $q\in\Gamma_i$, по формуле $\sigma_i(v)=$ $=v-2(n_i, v)n_i$. Пусть некоторая траектория биллиарда в многограннике Q имеет вершины (точки излома) на гранях с номерами $i_1, i_2, \dots$ Тогда последовательные отражения Q относительно этих граней превращают эту ломаную в прямую, пересекающую многогранники Q, Q_{i_1}, $Q_{i_1,i_2}, \dots$, где $Q_{i_1,\dots,i_k}$ — результат последовательного отражения Q от граней $\Gamma_{i_1},\dots,\Gamma_{i_k}$, где Γ_{i_l} — грань $Q_{i_1,\dots,i_{l-1}}$.

Возьмем $x_0=(q_0, v_0)\in M$. Вектор $v_0\in S^{d-1}$ задает начальную скорость биллиардной траектории, выходящей из точки $q_0\in Q$. Вектор скорости на отрезке траектории между k-м и $(k+1)$-м отражениями есть $v_k=(\sigma_{i_k}\sigma_{i_{k-1}}\dots\sigma_1)v_0$.

Обозначим через G_Q подгруппу группы изометрий сферы S^{d-1}, порожденную изометриями $\sigma_1,\dots,\sigma_r$.

Теорема 1.1. Если G_Q — конечная группа, то биллиард в многограннике Q не эргодичен. Более того, каждой орбите действия группы G_Q на S^{d-1} (т. е. множеству $\Omega=\Omega(v_0)=$ $=\{gv_0\in S^{d-1}: g\in G_Q,\ v_0\in S^{d-1}\}$) отвечает инвариантное относительно потока $\{T^t\}$ множество A_Q, состоящее из всех $x=(q, v)\in M$, для которых $v\in\Omega$.

Наглядно утверждение этой теоремы означает следующее: если группа G_Q конечна, то при движении по биллиардным траекториям из данного начального направления может получиться только конечный набор направлений. В двумерном случае конечность группы G_Q эквивалентна соизмеримости всех углов многоугольника Q.

Простейшим в рассматриваемом классе является биллиард в прямоугольнике. В этом случае группа G_Q состоит из 4-х элементов: Id, σ_1, σ_2, $\sigma_2\sigma_3$. Фазовое пространство биллиарда в прямоугольнике разбивается на инвариантные относительно $\{T^t\}$ подмножества A_Ω, где $\Omega=\Omega(v)$. Легко видеть, что если $\sigma_1 v \neq v$ и $\sigma_2 v \neq v$, то A_Ω — двумерный тор. Поток $\{T^t_\Omega\}$, индуцированный на A_Ω потоком $\{T^t\}$, есть однопараметрическая группа сдвигов тора. Поэтому (см. гл. 1, § 3) если отношение $\frac{v_2 a_1}{v_1 a_2}$ иррационально, где v_1, v_2 — составляющие скорости v вдоль сторон прямоугольника, а a_1 и a_2 — длины этих сторон, то поток $\{T^t_\Omega\}$ эргодичен. Тем самым, разбиение фазового пространства на инвариантные торы A_Ω есть разбиение на эргодические компоненты. Аналогично для биллиардов в прямоугольном параллелепипеде $Q \subset \mathbb{R}^d$ эргодические компоненты mod 0 — суть однопараметрические группы сдвигов, действующие на d-мерных инвариантных торах.

Проблема изучения эргодических свойств биллиардов в произвольных многоугольниках (и, тем более, многогранниках) в настоящее время остается открытой. Основные имеющиеся здесь результаты даются следующими двумя утверждениями ([54], [23]).

Теорема 1.2. Энтропия динамической системы, отвечающей биллиарду внутри произвольного (не обязательно выпуклого) многогранника, равна нулю.

Теорема 1.3. Если углы многоугольника Q соизмеримы, то почти все траектории отвечающего ему биллиарда плотны в Q.

Существовала гипотеза, что любая траектория биллиарда в многоугольнике либо периодическая, либо всюду плотна. Недавно Г. А. Гальперин показал, что существуют примеры многоугольников, для которых это не так: есть траектория, всюду плотно заполняющая некоторую подобласть соответствующего многоугольника. По-видимому, такая ситуация является достаточно распространенной.

К изучению биллиардов в многоугольниках и многогранниках сводятся некоторые задачи классической механики. Пусть на отрезке движется $n \geqslant 2$ материальных точек, упруго отражающихся друг от друга и от концов отрезка. Так как порядок точек на отрезке при их движении не меняется, то конфигурационным пространством этой системы является симплекс. Можно показать, что закон упругого столкновения частиц приводит к отражению траектории от границы этого симплекса по закону «угол падения равен углу отражения».

1.3. Биллиарды в областях с (гладкой) выпуклой границей. Пусть Q — область на плоскости, ограниченная гладкой выпуклой замкнутой кривой $\Gamma=\partial Q$. В простейшем случае Γ — окружность. Ясно, что каждое звено ломаной, отвечающей произвольной траектории в конфигурационном пространстве биллиарда в окружности, касается некоторой концентрической с Γ

окружности меньшего радиуса. Поэтому биллиард в окружности является вполне интегрируемой гамильтоновой системой. Рассмотрим теперь случай, когда Γ — эллипс $\Gamma=\Gamma_c=\{q\in \mathbf{R}^2 : \operatorname{dist}(q, A_1)+\operatorname{dist}(q, A_2)=c\}$ с фокусами A_1 и A_2. Легко проверить, что все звенья любой траектории биллиарда в Q, не проходящей через его фокусы, касаются либо одного и того же эллипса Γ_{c_1}, $c_1<c$, софокусного с Γ_c, либо одной и той же гиперболы $H_{c_1}=\{q\in\mathrm{R}^2 : \operatorname{dist}(q, A_1)-\operatorname{dist}(q, A_2)=c_1\}$, также софокусной с Γ_c (во втором случае соответствующие точки касания могут лежать не на самих звеньях ломаной, а на их продолжениях). Из этого свойства вытекает, что биллиард в эллипсе не эргодичен.

Оказывается, что изучение эргодических свойств биллиардов важно и для некоторых задач теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Рассмотрим в области Q следующую задачу

$$\begin{aligned}(\Delta+\lambda)\, u(x, y)&=0,\\ u\,|_{\partial Q}&=0,\end{aligned} \tag{8.1}$$

где $(x, y)\in Q$, Δ — оператор Лапласа, λ — спектральный параметр. К этой задаче сводится изучение малых колебаний мембраны с закрепленной границей. С другой стороны, ее можно воспринимать как задачу квантовой механики о нахождении собственных значений и собственных функций уравнения Шрёдингера с потенциалом, равным нулю внутри области Q и ∞ — на границе. Весьма важным является вопрос об асимптотическом поведении при $\lambda\to\infty$ собственных чисел и собственных функций задачи (8.1). Асимптотика $\lambda\to\infty$ соответствует квазиклассическому приближению ($\hbar\to 0$). Естественно предположение, что решения квантовой задачи связаны с решениями соответствующей задачи классической механики, которой является биллиард в области Q.

Определение. Гладкая кривая γ, лежащая внутри области $Q\subset\mathrm{R}^2$, называется *каустикой*, если из того, что хотя бы одно звено (один отрезок) произвольной конфигурационной траектории биллиарда в Q касается γ, следует, что все остальные звенья этой траектории также касаются γ.

В случае окружности имеется одно семейство каустик — концентрические окружности, а у эллипса два — софокусные с ним эллипсы и гиперболы.

В. Ф. Лазуткин доказал [25], что если граница $\Gamma=\partial Q$ является достаточно гладкой, то существует бесконечное семейство каустик, имеющее положительную меру (в Q), для которого Γ является предельной точкой. При этом мера (в M) множества траекторий, касающихся каустик, также положительна. Из этого результата вытекает, что биллиард в области на плоскости, ограниченной достаточно гладкой выпуклой кривой, не эргодичен. Оказывается [26], что с помощью инвариантных множеств биллиарда можно построить «почти» собственные функции задачи Дирихле в области Q, носители которых сосредоточены в окрестности соответствующих инвариантных множеств, и «почти» собственные значения. С другой стороны, А. И. Шнирельман [47] показал, что для эргодических биллиардов носители собственных функций оператора Лапласа в Q при $\lambda\to\infty$ в определенном смысле заполняют всю область.

1.4. Рассеивающие биллиарды (биллиарды Синая). Рассмотрим биллиард в области Q, изображенной на рис. 5. Пусть все регулярные компоненты границы ∂Q являются гладкими (класса C^3) выпуклыми внутрь Q кривыми и кривизна границы принимает строго положительные значения (при оснащении границы единичными нормалями $n(q)$, $q\in\partial Q$, направленными внутрь области Q). Оказывается, что эргодические свойства биллиарда в такой области существенно отличаются от свойств биллиардов, рассмотренных в двух предыдущих пунктах.

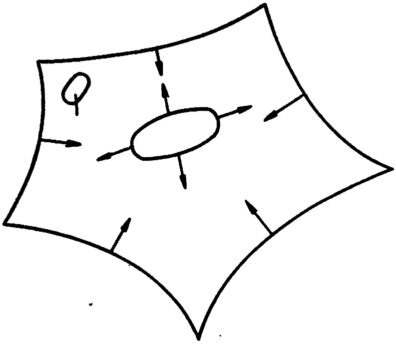

Рис. 5

Нетрудно заметить, что этот пример и примеры, приведенные в п.п. 1.2. и 1.3., отличаются друг от друга структурой границы областей, в которых рассматривались биллиарды. В пункте 1.2 граница области Q состояла из кусков плоскостей (прямых), в пункте 1.3 — была выпуклой наружу, а в последнем примере — внутрь области Q.

Эргодические свойства биллиардов в областях евклидова пространства ($Q\subset\mathbb{R}^d$) и на торе T^d с евклидовой метрикой определяются свойствами границы ∂Q. В частности, биллиарды в областях Q с выпуклой внутрь Q границей являются гиперболическими динамическими системами.

Строгое математическое исследование биллиардов, удовлетворяющих условию гиперболичности, было начато Я. Г. Синаем [37], [97]. В [37] им был введен важный класс рассеивающих биллиардов (которые в настоящее время принято называть биллиардами Синая).

Напомним, что граница ∂Q оснащена полем единичных нормалей $n(q)$, направленных внутрь области Q. Поэтому для любой регулярной точки $q \in \partial Q$ можно определить оператор второй квадратичной формы $K(q)$, действующий в касательном пространстве $\mathcal{T}_q$ к границе ∂Q в точке q. Оператор $K(q)$ является самосопряженным.

Определение. Биллиард называется *рассеивающим*, если $K(q) > 0$ для любой регулярной точки $q \in \partial Q$.

Для двумерных областей это условие эквивалентно строгой положительности кривизны границы. Сейчас мы объясним, почему рассеивающие биллиарды являются естественным аналогом гладких гиперболических систем. Обратимся снова к биллиарду в области, изображенной на рис. 5. Предположим для простоты, что в своих концевых точках регулярные компоненты границы области Q пересекаются трансверсально.

озьмем в Q гладкую кривую $\tilde{\gamma}$ и рассмотрим непрерывное семейство γ единичных векторов, нормальных к $\tilde{\gamma}$. Ясно, что γ есть кривая в фазовом пространстве M биллиарда, и таких семейств всего два. Фиксировав одно из них, мы можем с его помощью определить кривизну кривой $\tilde{\gamma}$. Тем самым можно говорить и о кривизне γ. Будем называть кривую γ *выпуклой*, если ее кривизна всюду положительна (см. рис. 6). Обозначим через $\varkappa(x_0)$ кривизну γ в точке x_0. Пусть в течение времени t ни одна точка кривой γ не достигает границы ∂Q. Тогда, как легко вычислить, кривизна кривой $\gamma_t = T^t\gamma$ в точке $x_t = T^t x_0$ уменьшается с линейной скоростью $\varkappa(x_t) = \varkappa(x_0)(1 + t\varkappa(x_0))^{-1}$, а длина соответствующей кривой $\tilde{\gamma}_t$ в конфигурационном пространстве Q (локально) во столько же раз увеличивается. Отсюда видно, что если γ — выпуклая кривая, то и γ_t — выпуклая кривая.

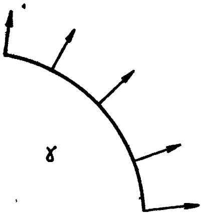

Рис. 6

Посмотрим теперь, что происходит с γ при отражении от границы. Обозначим через $\tau(x_0) > 0$ момент первого отражения от границы траектории точки x_0. Тогда из элементарных геометрических рассмотрений получаем $\varkappa(x_{\tau+0}) = \varkappa(x_{\tau-0}) + \frac{2k(q_r)}{\cos\varphi_r}$, где

$k(q_r)$ — кривизна границы ∂Q в точке отражения, φ_r — угол падения (угол между направлением падающего луча и внешней нормалью к границе), $\cos\varphi_r \geqslant 0$. Таким образом, в силу положительности кривизны $k(q)$ границы ∂Q во всех точках $q \in \partial Q$, после каждого отражения кривизна кривой γ_t получает добавку, не меньшую, чем $2 \min\limits_{q \in \partial Q} k(q)$. Отсюда сразу вытекает, что для рассматриваемого биллиарда расстояние между близкими траекториями (локально) увеличивается с экспоненциальной скоростью. Действительно, из приведенных формул вытекает, что между i-м и $(i+1)$-м, $i \geqslant 1$, отражениями от границы длина образа выпуклой кривой γ локально возрастает в $1+ +\tau_{i+1}(x_0)k_{i+1}(x_0)$ раз, где $x_0 \in \gamma$, а $\tau_{i+1}(x_0)$ и $k_{i+1}(x_0)$ — соответственно промежуток времени между i-м и $(i+1)$-м отражениями от границы траектории точки x_0 и кривизна границы области в точке $(i+1)$-го отражения. Число же отражений в «типичной ситуации», как легко видеть, растет линейно по времени.

Таким образом, рассеивающие биллиарды по своим свойствам похожи на геодезические потоки на римановых многообразиях отрицательной кривизны (см. гл. 7, § 4). Роль отрицательной кривизны в данном случае играет выпуклая внутрь области граница. Однако, в отличие от таких геодезических потоков, рассеивающие биллиарды, как будет показано ниже, являются неравномерно полно гиперболическими (НПГ) системами (см. гл. 7, § 1).

Естественно попытаться построить для рассеивающих биллиардов локальные устойчивые и неустойчивые многообразия (ЛУМ и ЛНМ) (см. гл. 7, § 1). Соответствующая теорема для подобного рода биллиардов была доказана в [37] (см. также [97]).

Приведенные при исследовании предыдущего примера формулы для изменения кривизны гладкой кривой в M под действием динамической системы позволяют сразу написать дифференциальное уравнение для векторных полей, задающих искомые локальные многообразия. Пусть $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ — моменты последовательных отражений траектории точки $x \in M$ от края ∂M, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$; $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $t_0 = 0$; $q_i \in \partial Q$ — точки, в которых происходят соответствующие отражения от границы ∂Q; v_i^- и v_i^+ — скорости непосредственно перед и после i-го отражения; $\cos\varphi_i = -(v_i^+, n(q_i))$; K_i — оператор второй квадратичной формы границы ∂Q в точке q_i; U_i — изометрический оператор, отображающий гиперплоскость A_i^- в $\mathbb{R}^d$ (содержащую точку q_i и перпендикулярную вектору v_i^-) параллельно вектору $n(q_i)$ на гиперплоскость A_i^+ (содержащую точку q_i и перпендикулярную v_i^+); V_i — оператор, отображающий A_i^- параллельно v_i^- на гиперплоскость $A_i \subset \mathbb{R}^d$, касательную к границе ∂Q в точке q_i, а V_i^* — сопряженный к нему оператор. Рассмотрим следующую формальную *операторнозначную цепную дробь*

$$B(x)=\cfrac{I}{\tau_1 I+\cfrac{I}{2\cos\varphi_1 V_1^* K_1 V_1+U_1^{-1}\cfrac{I}{\tau_2 I+\cfrac{I}{2\cos\varphi_2 V_2^* K_2 V_1+U_2^{-1}\ldots}}U_1}} \qquad (8.2)$$

В случае $d=2$ (рис. 5) вместо оператора K_i в (8.2) стоит число $\varkappa_i^-$ — кривизна ∂Q в точке q_i, а вместо U_i, U_i^{-1}, V_i, V_i^* — единицы. Оказывается, что оператор $B(x)$ задает касательную плоскость к локальному устойчивому многообразию в фазовом пространстве биллиарда [97].

Определение. Гладкое $(d—1)$-мерное подмногообразие $\gamma\subset\mathbf{R}^d$ называется *выпуклым* (*вогнутым*), если оператор второй квадратичной формы положительно (отрицательно) определен во всех его точках.

Теорема 1.4. Для почти любой точки $x\in M$ существует гладкое вогнутое (выпуклое) $(d—1)$-мерное подмногообразие $\gamma^{(s)}(x)\ni x$ $(\gamma^{(u)}(x)\ni x)$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\ln\operatorname{diam}T^{t}(\gamma^{(s)}(x))}{t}\right]>0\left(\lim_{t\to\infty}\left[-\mathrm{l}\frac{\mathrm{n}\operatorname{diam}T^{-t}(\gamma^{(u)}\smallsetminus x))}{t}\right]>0\right)$$

Как уже отмечалось, между рассеивающими биллиардами и геодезическими потоками на многообразиях отрицательной кривизны имеются существенные отличия. Главное из них состоит в том, что для таких биллиардных систем поток $\{T^t\}$ определен только почти всюду на фазовом пространстве M и не является гладким. Особенности возникают на траекториях, попадающих в особые точки границы ∂Q, и на траекториях, касающихся ее (см. рис. 7). Именно с этим обстоятельством связано то, что ЛУМ и ЛНМ существуют для рассеивающих бил-

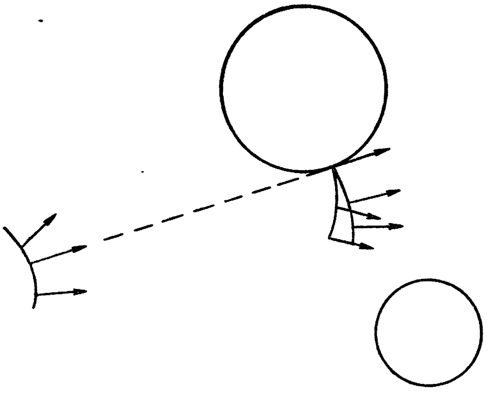

Рис. 7

лиардов только почти всюду. Они не существуют для таких точек $x \in M$, траектории которых слишком близко подходят к особым точкам ∂Q и к траекториям, касающимся ∂Q.

В связи с этим рассеивающие биллиарды естественно относить к классу неравномерно полно гиперболических систем (см. гл. 7, § 1). Можно показать, что построенные локальные многообразия обладают свойством абсолютной непрерывности (см. гл. 7, § 3). Отсюда, согласно общей теории для НПГ-систем (см. гл. 7, § 3), сразу вытекает, что эргодические компоненты рассеивающего биллиарда имеют положительную меру, его энтропия положительна и на почти каждой эргодической компоненте поток $\{T^t\}$ является K-потоком.

С наличием указанного особого множества связано и то, что глобальные устойчивые и неустойчивые многообразия для рассеивающих биллиардов представляют собой подмногообразия, состоящие из счетного числа гладких компонент, весьма сложным образом расположенных в фазовом пространстве. На рис. 8 изображен типичный вид куска глобального расширяющегося слоя для случая $d=2$. При этом особенности типа точек возврата возникают из-за траекторий, касающихся границы, а типа точек излома — из-за траекторий, попадающих в особые точки ∂Q.

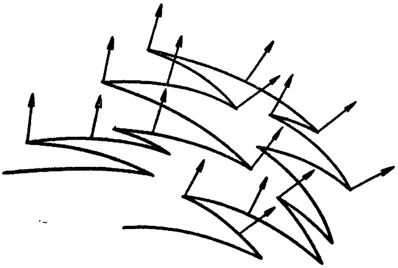

Рис. 8

Данное обстоятельство приводит к тому, что дальнейшее исследование эргодических свойств биллиардов, по сравнению с гладкими равномерно полно гиперболическими системами (см. гл. 7, § 3), значительно усложняется. В самом деле, для последних систем сразу можно доказать эргодичность. Это делается с помощью *метода*, впервые *примененного Хопфом* (E. Hopf) для доказательства эргодичности геодезического потока на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Идея этого метода состоит в том, что для почти всех точек x_1 и x_2 фазового пространства рассматриваемой системы строится конечный набор W_1^s, W_1^u, W_2^s, $W_2^u, \ldots, W_n^s$ ЛУМ и ЛНМ (цепочка Хопфа) такой, что $W_1^s \ni x_1$, $W_n^s \ni x_2$ и $W_i^s \cap W_j^u \neq \varnothing$, где $j=i\pm1$. Тогда из эргодической теоремы Биркгофа—Хинчина (см. гл. 1, § 2) легко выводится, что точки x_1 и x_2 принадлежат одной эргодической компоненте. Однако для рассеивающих биллиардов построить такую цепочку аналогичным способом нельзя, так как в особой точке глобальное многообразие меняет направление («почти») на противоположное. Поэтому для построения цепочки Хопфа надо доказать, что (в каком-то смысле) для большинства точек в M проходящие через них регулярные компоненты ГУМ и ГНМ имеют достаточно большие размеры. Соответствующее утверждение было сформулировано и доказано в [37]. С тех пор оно несколько раз обобщалось, а доказательство модифицировалось (см. [16], [97], [38]). Для всех биллиардов, являющихся полно гиперболическими системами, доказательство аналогичного утверждения необходимо предшествует доказательству их эргодичности (см., например, [15], [97], [56]). Поэтому его естественно назвать *основной теоремой эргодической теории биллиардов*. Мы сформулируем эту теорему в ее простейшем варианте для того, чтобы можно было наглядно прояснить ее смысл и способ доказательства.

Введем вначале некоторые обозначения. В дальнейшем мы всюду в этом параграфе, если не оговорено противное, будем рассматривать динамическую систему с дискретным временем, порожденную преобразованием T_1 (см. п. 1.1). Для простоты предположим, что Q_0 — двумерный тор и граница ∂Q состоит из одной связной компоненты. Введем на фазовом пространстве M_1 координаты (l, φ), где l есть параметр длины дуги на ∂Q, а φ — угол между линейным элементом $x=(q, v)$ и $n(q)$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Легко видеть, что M_1 в переменных (l, φ) представляет собой цилиндр. Пусть S_0 — множество всех линейных элементов, касательных к краю. Преобразование T_1 разрывное. Оно терпит разрыв на множестве $S_{-1}=T_1^{-1}S_0$ (см. рис. 7). Это множество состоит из счетного числа гладких кривых на цилиндре M_1. Каждая из этих кривых в переменных (l, φ) задается монотонно возрастающей функцией $\varphi(l)$ (см. рис. 9), удовлетворяющей дифференциальному уравнению $\frac{d\varphi}{dl}=k(l)+\frac{\cos\varphi}{\tau(l, \varphi)}$, где $k(l)$ — кривизна границы ∂Q в точке l, а $\tau(l, \varphi)$ — время до следующего столкновения с границей траектории линейного элемента (l, φ). Предельными точками для множества S_{-1} служат такие точки, в окрестности которых функция $\tau(l, \varphi)$ неограничена. Этим точкам отвечают периодические траектории биллиарда, все время касающиеся края ∂Q, причем в точках касания край ∂Q лежит по одну сторону от соответствующей траектории (см. рис. 10). Число таких траекторий конечно. Аналогичную структуру имеет множество разрыва преобразования T_1^{-1} с той разницей, что его регулярные компоненты в переменных (l, φ) задаются монотонно убывающими кривыми. Будем называть

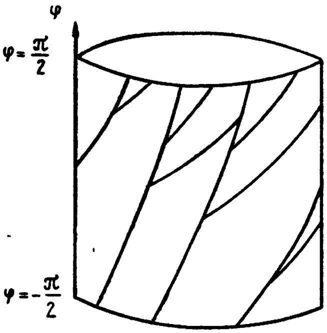

Рис. 9

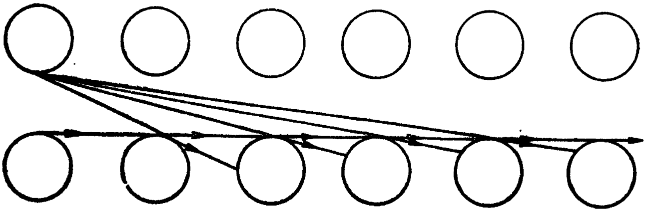

Рис. 10

кусочно гладкую кривую $\varphi=\varphi(l)$ *возрастающей* (*убывающей*), если $a_1 \leqslant \frac{d\varphi}{dl} \leqslant a_2 \left(-b_1 \leqslant \frac{d\varphi}{dl} \leqslant -b_2\right)$, где $0<a_1<a_2$, $0<b_2<b_1$ — некоторые константы, значения которых зависят от геометрических свойств области Q. Оказывается, что ЛУМ (ЛНМ) являются возрастающими (убывающими) кривыми на цилиндре M_1. *Четырехугольником* назовем область $G \subset M_1$, граница которой образована из четырех кривых, каждая из которых кусочно непрерывно дифференцируема и одна пара противоположных граничных кривых состоит из возрастающих кривых, а другая пара из убывающих (рис. 11). Длину кусочно гладкой кривой γ

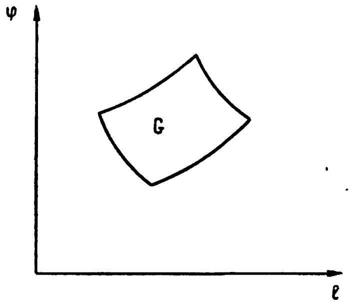

Рис. 11

на M_1 обозначим $l(\gamma)$. Теперь мы можем сформулировать основную теорему эргодической теории биллиардов для рассматриваемого примера.

Теорема 1.5. Пусть положительная полутраектория $T_1^k x_0$ при $k=0, 1, 2, \ldots$ точки $x_0 \in M_1$ ни разу не попадает в особые точки края. Тогда для любых чисел α и C $(0<\alpha\leqslant 1,\ 0<C<\infty)$ найдется такое $\varepsilon=\varepsilon(x_0,\ \alpha,\ C)$, что ε-окрестность U_ε точки x_0 обладает следующим свойством: для любой возрастающей кривой $\gamma_0 \subset U_\varepsilon$, $l(\gamma_0)=\delta_0$ можно построить четырехугольник $G_1(G_2)$, для которого γ_0 является верхней (нижней) стороной, и если $G_i'=\{x : x\in G_i$ и через x проходит ЛУМ $\gamma^{(s)}(x)$, пересекающее верхнюю и нижнюю стороны G, $l(\gamma^{(s)}(x))>C\delta_0\}$, $i=1,\ 2$, то $\nu(G_i')\geqslant(1-\alpha)\nu(G)$, $i=1, 2$.

Идея доказательства этой теоремы такова. Рассмотрим четырехугольник G, для которого γ_0 является верхней (или нижней) стороной, и любая убывающая кривая, пересекающая его верхнюю и нижнюю стороны, имеет длину, большую $C\delta_0$. Если ε достаточно мало, то преобразование $T_1^{k_0}$ непрерывно на U_ε для достаточно большого k_0. При этом образ $T_1^{k_0}G$ станет весьма узким и длинным четырехугольником, который разбивается на связные компоненты кривыми из множества S_{-1}. Как легко видеть, множеству $G_1'(G_2')$ не принадлежат прообразы точек, лежащих в малой окрестности этих кривых. К каждой связной компоненте, получающейся при пересечении $T_1^{k_0}G$ с S_{-1}, применим преобразование T_1 и рассмотрим пересечение образа с S_{-1}. Тогда к $G_1'(G_2')$ не принадлежат прообразы точек, лежащих в еще меньшей окрестности соответствующих кривых из S_{-1}. Снова применим к получившимся связным компонентам пересечения $T_1^{k_0+1}G\cap S_{-1}$ преобразование T_1 и т. д. Так как в направлении убывающих кривых под действием T_1 происходит сжатие, то на каждом последующем шаге мы выбрасываем все более узкие окрестности кривых из S_{-1}, так что суммарная площадь выброшенного в итоге множества оказывается относительной малой. Аналогичная теорема верна, если ЛУМ заменить на ЛНМ, а верхнюю и нижнюю стороны G — на левую и правую.

Теперь, используя цепочку Хопфа, звеньями которой являются не ЛУМ и ЛНМ, а множества типа G_1' и G_2', построенные в теореме 1.5, получаем, что имеет место

Теорема 1.6. Рассеивающий биллиард эргодичен и является K-системой.

Можно показать [65], что рассеивающий биллиард изоморфен схеме Бернулли.

1.5. Газ Лоренца и газ твердых шаров. В этом пункте приведем два примера биллиардов, относящихся к числу наиболее популярных моделей неравновесной статистической механики.

В 1905 году, в связи с проблемой описания динамики электронного газа в металлах, Лоренц (H. Lorentz) ввел динамическую систему, которую принято называть газом Лоренца. Мы рассмотрим сейчас ее простейший вариант. Общее определение газа Лоренца будет дано в п. 1.10.

Пусть D — компактная область с кусочно гладкой границей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 1$; $B_1,\ldots,B_r$ — совокупность непересекающихся d-мерных шаров, называемых *рассеивателями*, лежащих в D. Газом Лоренца называется биллиард в области $Q=D\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{r}B_i$.

Расмотрим теперь *газ твердых*, или абсолютно упругих, *шаров*. Предположим, что внутри компактной области $W\subset\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 1$, движутся равномерно и прямолинейно r твердых шаров радиуса ρ и массы 1, которые сталкиваются между собой и с границей ∂D по законам упругого удара.

Положение i-го шара однозначно определяется координатами $q_j^{(i)}$, $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant d$, его центра. Пусть D^- — подмножество области D, состоящее из всех точек, отстоящих от границы ∂D на расстояние, не меньшее ρ. Рассмотрим прямое произведение $D^{(r)}=\underbrace{D^-\times D^-\times\ldots\times D^-}_{r\text{ раз}}\subset\mathbb{R}^{dr}$ и исключим из $D^{(r)}$ все внутренние точки $\frac{r(r-1)}{2}$ множеств

$$C_{i_1,i_2}=\left\{q\in D^{(r)}:\sum_{j=1}^{d}\left(q_j^{(i_1)}-q_j^{(i_2)}\right)^2\leqslant(2\rho)^2\right\},\quad 1\leqslant i_1,\ i_2\leqslant r,\quad i_1\neq i_2.$$

Легко видеть, что множество C_{i_1,i_2} представляет собой произведение $(d-1)$-мерной сферы на евклидово пространство $\mathbb{R}^{d(r-2)}$, т. е. цилиндр. Получившееся в результате множество $Q\subset\mathbb{R}^{dr}$ есть область с кусочно гладкой границей. Всякому расположению r шаров радиуса ρ в D отвечает точка $q\in Q$. Поэтому описанное выше движение шаров порождает группу преобразований множества Q. Легко проверить, что законы упругого столкновения шаров между собой и с ∂D приводят к тому, что отражение движущейся точки q от границы ∂Q происходит так же, как в биллиардах.

1.6. Полурассеивающие биллиарды. В пункте 1.5 было показано, что рассеивающих биллиардов условие равномерной гиперболичности выполняется на множестве полной меры. Из общей теории гиперболических систем (см. гл. 7, § 3) известно, что хорошими статистическими свойствами могут обладать и системы, удовлетворяющие иным (более слабым) условиям гиперболичности. Оказывается, что для биллиардов ситуация, в какой-то степени, аналогична. Описанию соответствующих классов биллиардов посвящены этот и следующий пункты.

Определение. Биллиард называется *полурассеиваю-*

щим, если соответствующий оператор второй квадратичной формы $K(q)\geqslant 0$ для любой регулярной точки $q\in\partial Q$.

Другими словами, у полурассеивающих биллиардов граница области ∂Q не является строго выпуклой внутрь Q, а имеются точки, в которых по некоторым направлениям кривизна ∂Q нулевая. Полурассеивающие биллиарды являются аналогом частично гиперболических систем. Наиболее важным примером полурассеивающего биллиарда служит газ твердых шаров. Наличия хороших эргодических свойств у полурассеивающего биллиарда можно ожидать лишь при условии непараллельности плоских направлений границы в различных ее точках. Например, система двух упруго взаимодействующих дисков на торе T^2 имеет дополнительный первый интеграл (полный импульс) и поэтому не эргодична, такая же система на квадрате является K-системой [37]. Легко видеть, что в первом случае нулевые направления края параллельны, а во втором — нет.

Как всегда для (гиперболических) биллиардных систем первый этап изучения их эргодических свойств связан с исследованием соответствующего оператора $B(x)$ (см. (8.2)). В работе [97] доказано, что цепная дробь $B(x)$ сходится почти всюду в фазовом пространстве M и определяет симметричный неотрицательно определенный оператор, действующий в гиперплоскости $J(x)$, $x=(q, v)$, ортогональной вектору v. Поэтому $J(x)$ можно разложить в прямую сумму двух (нулевого $J_0(x)$ и положительного $J_+(x)$) $B(x)$-инвариантных подпространств.

Для рассеивающих биллиардов размерности обоих трансверсальных слоений равны $d-1$, где d — размерность конфигурационного пространства. В полурассеивающих биллиардах размерность слоений зависит от геометрических свойств границы ∂Q. В работе [46] было показано, что для всех точек x некоторого множества $\hat{M}\subset M$, содержащего открытое всюду плотное подмножество M, существуют проходящие через них локальные трансверсальные слои. При этом функция, равная размерности расширяющегося (сжимающегося) слоя, принимает постоянное значение на отрицательной (положительной) полутраектории точки x. Отсюда вытекает в, частности, что энтропия полурассеивающего биллиарда положительна.

В заключение этого пункта отметим, что впервые на наличие экспоненциальной неустойчивости газа твердых шаров было указано в работах Н. С. Крылова [24].

1.7. Биллиарды в областях с границей, имеющей фокусирующие участки. В этом пункте мы рассмотрим биллиарды в областях Q на плоскости или двумерном торе, имеющих выпуклые вовне Q компоненты границы ∂Q, которые мы будем называть фокусирующими, аналогично тому, как выпуклые внутрь Q компоненты ∂Q называются рассеивающими.

Первоначальное интуитивное представление о том, что биллиарды в таких областях могут обладать хорошими статистическими свойствами, состояло в следующем: если «сгладить» углы границы рассеивающего биллиарда, то типичная траектория должна проводить большую часть времени на рассеивающей части границы и лишь изредка попадать на фокусирующую часть.

Оказалось, однако, что ситуация существенно иная. Для того чтобы понять, что на самом деле происходит, рассмотрим, как изменяется кривизна гладкой кривой $\gamma\subset M$ в течение серии последовательных отражений от какой-нибудь фокусирующей компоненты ∂Q.

Основная трудность при этом состоит в исследовании соответствующей цепной дроби (8.2), элементами которой в данном случае ($d=2$) являются числа, а не операторы. Однако в отличие от рассеивающих биллиардов, когда элементы цепной дроби (8.2) имеют один и тот же знак, отрезок цепной дроби, отвечающий отражению от фокусирующей компоненты ∂Q, имеет элементы разных знаков, что значительно усложняет исследование ее сходимости. Основным при этом является следующее утверждение ([15], [56]).

Теорема 1.7. Пусть на фокусирующую компоненту $\Gamma\subset\partial Q$, имеющую постоянную кривизну (т. е. являющуюся дугой окружности), падает пучок траекторий, отвечающий кривой $\gamma\subset M_1$ с нулевой кривизной (рис. 12), и пусть он испытывает серию из n подряд идущих отражений от Γ. Тогда для любого $x\in\gamma$ и для любого m, $1\leqslant m\leqslant n$,

$$\varkappa_-(T_1{}^m x_0)<0,\quad \varkappa_+(T_1^{m-1}x_0)>0,\quad \varkappa_+(T_1^{m-1}x_0)>|\varkappa_-(T_1{}^m x_0)|$$

и

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{\varkappa_+(T_1^{m-1}x_0)}{|\varkappa_-(T_1{}^m x_0)|}=1,$$

где $x_0=T^{\tau(x)+0}x$, $\tau(x)$ — ближайший момент отражения от края траектории точки x, $\varkappa_-(T_1{}^m x_0)$ — кривизна образа γ в точке $T_1{}^m x_0$ перед, а $\varkappa_+(T_1{}^m x_0)$ — после m-го отражения от границы.

Наглядный смысл этой теоремы состоит в следующем. Пучок траекторий с нулевой кривизной (т. е. с плоским фронтом) после отражения от фокусирующей компоненты Γ границы становится сходящимся, но перед следующим отражением от Γ он проходит через сопряженную точку и при этом время, когда он был расходящимся, превосходит время, в течение которого данный пучок сходился (т. е. сжимался) (см. рис. 12). Такая же ситуация имеет место между любыми двумя последовательными отражениями от Γ в данной серии. При этом кривизна пучка остается ограниченной (по абсолютной величине) сверху. Тем самым в течение серии отражений от фокусирующей компоненты границы не происходит эффективного уменьшения длины кривой γ в фазовом пространстве.

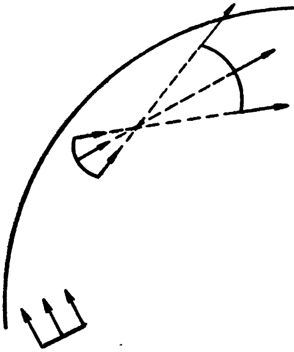

Рис. 12

Основные классы эргодических биллиардов с фокусирующими компонентами были изучены в работах [15], [56].

В [15] было показано, что биллиард в области, граница которой имеет как рассеивающие, так и фокусирующие компоненты, является K-системой, если выполнены следующие условия:

1) кривизна каждой фокусирующей компоненты ∂Q постоянна;

2) никакие две фокусирующие компоненты не являются дугами одной и той же окружности;

3) дуга, дополняющая любую фокусирующую компоненту до полной окружности, лежит внутри области Q.

При этом длина фокусирующей части границы ∂Q не только не обязана быть малой, но может существенно превосходить суммарную длину рассеивающих компонент ∂Q (рис. 13).

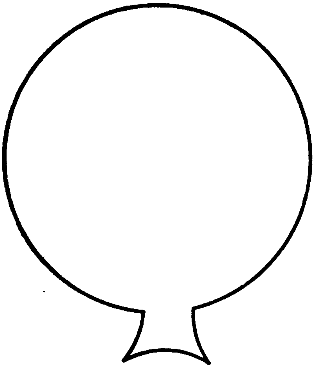

Рис. 13

В [56] K-свойство было доказано для некоторых классов биллиардов, когда граница ∂Q вовсе не имеет рассеивающих компонент. При этом ∂Q обязана содержать хотя бы одну фокусирующую компоненту, и все такие компоненты имеют постоянную кривизну. Примеры областей подобного рода изображены на рис. 14. Самый популярный пример — *«стадион»* —

Рис. 14

(рис. 14а) имеет границу, состоящую из двух полуокружностей и двух касательных к ним отрезков, т. е. является выпуклой областью. С другой стороны, биллиард в области, ограниченной достаточно гладкой кривой, не эргодичен (см. п. 1.2). Гладкость границы «стадиона» — C^1. Поэтому один из наиболее интересных вопросов в данной проблематике состоит в том, насколько можно сгладить границу «стадиона», чтобы соответствующий биллиард оставался K-системой. Гипотеза состоит в том, что «пороговой» является гладкость класса C^2.

Отметим в связи с этим интересную работу [51], в которой численно исследовался переход от биллиарда в круге к биллиарду в стадионе, происходящий при непрерывной деформации границы области. В частности, в этой работе показано, что при таком переходе метрическая энтропия возрастает, но не монотонно, что, по-видимому, связано с возникновением у системы в некоторый промежуточный момент рассматриваемого перехода нескольких эргодических компонент положительной меры.

1.8. Гиперболические динамические системы с особенностями (общий подход). Рассмотренные выше классы биллиардов являются примерами гиперболических динамических систем, действующих на многообразиях с краем и имеющих особенности (например, разрывы) на множестве меры нуль.

Результаты доказательства теорем, полученные для таких систем, основаны на детальном анализе свойств соответствующего особого множества. Естественно попытаться выяснить, насколько можно продвинуться, имея лишь информацию общего характера о структуре этого множества. Такое направление было развито в работах Катка и Стрельцина (A. Katok, J.-M. Strelcyn).

Пусть M — гладкое компактное риманово многообразие с границей ∂M, ρ — соответствующая метрика на M, $N \subset M$ — компактное подмногообразие, $f: M \setminus N \to f(M \setminus N)$ — диффеоморфизм класса C^2, сохраняющий борелевскую меру μ. Пара (f, N) называется *динамической системой с особенностями*, если для нее выполнены следующие условия:

1) $\int\limits_M \ln^+ \|df_x\| d\mu < +\infty$, где df_x — дифференциал f в точке x, $\|\cdot\|$ — норма в касательном пространстве, $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существуют константы $C_1 > 0$ и a_1, $0 < a_1 \leqslant 1$, такие, что $\mu(U_\varepsilon(N)) \leqslant C_1 \varepsilon^{a_1}$, где $U_\varepsilon(N)$ — ε-окрестность множества N;

3) существуют $C_2 > 0$, $C_3 > 0$, a_2, a_3, $0 < a_2$, $a_3 \leqslant 1$, такие, что для любого $x \in M \setminus N$

$$\|df_x\| \leqslant C_2 \rho(x, N)^{-a_2},$$
$$\|d^2 f_x\| \leqslant C_3 \rho(x, N)^{-a_3};$$

4) для отображения f^{-1} и множества $N' = M \setminus f(M \setminus N)$ выполняются (быть может, с другими константами) свойства 1), 2), 3);

5) свойства 1), 2), 3) имеют место для отображений f и f^{-1} и множества $N_1 = M \setminus (M \setminus N) \cap f(M \setminus N)$;

6) существуют числа $k > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого связного замкнутого подмножества $X \subset M \setminus N$ имеет место неравенство $\operatorname{diam} f(X) \leqslant k (\operatorname{diam} X)^{\varepsilon_0}$.

Из условия 1) и теоремы 2.7 (см. гл. 1, § 2) вытекает, что μ-почти любая точка $x \in M \setminus N$ является правильной по Ляпунову (см. гл. 7, § 2). Из 2) следует, что $\mu(N) = 0$. Условия 1)—4) дают возможность построить локальные многообразия для любой регулярной точки $x \in M \setminus N$, в которой характеристические показатели отличны от нуля. Условие 5) необходимо для доказательства свойства абсолютной непрерывности, а условие 6 — для получения точной оценки сверху для энтропии рассматриваемой динамической системы. Доказательства во многом повторяют доказательства соответствующих утверждений для гладких систем, рассмотренных в главе 7. Сформулируем основные результаты, полученные на этом пути.

Теорема 1.8. Пусть (f, N) — динамическая система с особенностями, сохраняющая меру μ, эквивалентную риманову объему. Пусть, далее, множество $\Lambda \subset M \setminus N$ состоит из точек с ненулевыми характеристическими показателями и $\mu(\Lambda) > 0$. Тогда

1) эргодические компоненты автоморфизма $f|\Lambda$ имеют положительную меру;

2) если автоморфизм $f|\Lambda$ имеет непрерывный спектр, то он изоморфен схеме Бернулли;

3) для энтропии отображения f имеет место формула главы 7.

Пожалуй, единственным известным сейчас примером консервативных гиперболических систем с особенностями, кроме биллиардов, являются *суперпозиции косых сдвигов тора*. Пусть

$T^2=\mathbf{R}^2/Z^2$ — стандартный двумерный тор. Рассмотрим два замкнутых кольца на T^2

$$P=\{(x,\ y)\in T^2: y_0\leqslant y\leqslant y_1,\ |y_1-y_0|\leqslant 1\}$$

и

$$Q=\{(x,\ y)\in T^2: x_0\leqslant x\leqslant x_1,\ |x_1-x_0|\leqslant 1\}.$$

Пусть, далее, $f:[y_0,\ y_1]\to\mathbf{R}$, $g:[x_0,\ x_1]\to\mathbf{R}$ — функции класса C^2, для которых имеют место равенства $f(y_0)=g(x_0)=0$, $f(y_1)=k$, $g(x_1)=l$, где k и l — некоторые числа.

Определим теперь отображения F_f и G_g множества $P\cup Q$ на себя следующим образом: $F_f(x,\ y)=(x+f(y),\ y)$ на P, $F_f=\mathrm{Id}$ на $Q\setminus P$, соответственно, $G_g(x,\ y)=(x,\ y+g(x))$ на Q и $G_g=\mathrm{Id}$ на $P\setminus Q$. Нас будет интересовать суперпозиция этих отображений $H=H_{f,g}=G_g\circ F_f$. Легко видеть, что отображение H сохраняет лебегову меру на $P\cup Q$ и имеет особенности на $\partial P\cup\partial Q$.

Предположим, что $\frac{df}{dy}\neq 0$ и $\frac{dg}{dx}\neq 0$ для всех $y\in[y_0,\ y_1]$, $x\in[x_0,\ x_1]$, и обозначим $\alpha=\inf\left\{\frac{df}{dy}: y\in[y_0,\ y_1]\right\}$, $\beta=\inf\left\{\frac{dg}{dx}: x\in[x_0,\ x_1]\right\}$. Будем называть отображение F, G $(k,\ \alpha)$-сдвигом (соответственно, $(l,\ \beta)$-сдвигом).

Имеющиеся результаты о рассматриваемом классе отображений содержатся в следующем утверждении (Пшитицкий (F. Przytycki)).

Теорема 1.9. Пусть H есть суперпозиция $(k,\ \alpha)$- и $(l,\ \beta)$-сдвигов. Тогда: если $\alpha\beta>0$ или если $\alpha\beta<-C<-4$, где C — некоторая константа, и $|k|$, $|l|\geqslant 2$, то H изоморфно сдвигу Бернулли; если $\alpha\beta<-4$, то все показатели Ляпунова почти всюду (по мере Лебега) отличны от нуля и множество $P\cup Q$ разлагается в счетную сумму попарно непересекающихся множеств Λ_i $(i=1,\ 2,\ldots)$ таких, что $H|\Lambda_i$ эргодично, $\Lambda_i=\bigcup\limits_{j=1}^{j(i)}\Lambda_i{}^j$, где $\Lambda_i^{j'}\cap\Lambda_i^{j''}=\varnothing$ при $j'\neq j''$, $H|\Lambda_i$ переставляет множества $\Lambda_i{}^j$ и для любого j отображение $H^{j(i)}|\Lambda_i{}^j$ изоморфно сдвигу Бернулли.

1.9. Марковские разбиения и символическая динамика для рассеивающих биллиардов. Для рассеивающих биллиардов может быть построено марковское разбиение (определение см. в гл. 7, § 3). Однако в отличие от гладких систем, для которых (например, для систем с аксиомой А) существует конечное марковское разбиение, в случае биллиардов на это не приходится надеяться, так как в силу разрывного характера преобразования T_1 регулярные компоненты глобальных устойчивого и неустойчивого многообразий могут быть сколь угодно малыми.

Поэтому должны быть такие элементы марковского разбиения, которые имеют как угодно малые диаметры.

В работе [59] было построено марковское разбиение со счетным числом элементов для двумерных рассеивающих биллиардов с конечным числом кривых разрыва для преобразований T_1 и T_1^{-1}, удовлетворяющих также некоторым дополнительным условиям технического характера.

Однако наличие счетного марковского разбиения не дает возможности сразу получить те следствия, которые имеют место для гладкой системы с конечным марковским разбиением. В случае счетного разбиения, порождаемая им символическая динамика должна обладать некоторыми дополнительными свойствами. Эти свойства состоят в том, что мера множества, состоящего из элементов марковского разбиения, имеющих малые диаметры, мала и элементы с малыми диаметрами под действием $\{T_1^n\}$ преимущественно попадают в элементы с большими диаметрами.

Для систем Аносова образ любого ЛНМ под действием динамической системы приобретает очень большие (экспоненциальные по времени) размеры и поэтому за большое время образы всех ЛНМ приблизительно одинаково равномерно заполняют все фазовое пространство. Рассеивающие же биллиарды являются разрывными системами. Поэтому одновременно с процессом растяжения ЛНМ происходит его дробление при попадании его образа на многообразие разрыва преобразования T_1. С использованием некоторых дополнительных свойств построенного в [59] марковского разбиения в этой работе показано, во-первых, что процесс растяжения превалирует над процессом дробления и, во-вторых, что существует множество, состоящее из ЛНМ, имеющее большую (а не полную, как для гладких систем) меру, образы которых за большое время достаточно плотно и примерно одинаково заполняют все фазовое пространство биллиарда.

1.10. Статистические свойства рассеивающих биллиардов и газа Лоренца. Установленные в работе [59] свойства символической динамики позволяют доказать для рассеивающих биллиардов в двумерных областях ряд утверждений, аналогичных некоторым предельным теоремам теории вероятностей.

Пусть $h(\omega)$ — функция, определенная на пространстве последовательностей Ω, такая, что $|h(\omega)| < C_1$, где C_1 — некоторая константа. Пусть, кроме того, существует такое λ_5, $0 < \lambda_5 < 1$, что для всех достаточно больших n найдутся функции $h_n(\omega) = h_n(\omega_{-n}, \ldots, \omega_n)$, $\int\limits_{\Omega} h_n d\mu_0 = 0$, зависящие только от координат ω_i, $|i| \leqslant n$, такие, что $\sup\limits_{\omega} |h(\omega) - h_n(\omega)| < \lambda_5^n$. Обозначим через T_0 сдвиг в пространстве Ω, соответствующий преобразованию T_1

при символическом представлении $\varphi: M \to \Omega$. В работе [60] для рассеивающих биллиардов, для которых в [59] было построено марковское разбиение (имеющих, в частности, конечное число кривых разрыва), была доказана следующая

Теорема 1.10. Пусть μ_0 — мера, для которой выполнены свойства 1—3, установленные в [63] (см. леммы 6.2, 6.5, 6.6). Если $\int\limits_{\Omega} h d\mu_0 = 0$, то найдется такое α, $0 < \alpha < 1$, что $\left| \int\limits_{\Omega} h(T_0^n \omega) h(\omega) d\mu_0 \right| < \exp(-n^\alpha)$ для всех достаточно больших n.

Оказывается (см. [60]), что функции, удовлетворяющие условиям теоремы 1.10, подчиняются центральной предельной теореме теории вероятностей (см. гл. 6, § 1).

Наиболее важным примером рассеивающего биллиарда является газ Лоренца. Мы дадим сейчас общее определение этой динамической системы.

Пусть в d-мерном евклидовом пространстве, $d \geqslant 2$, случайно разбросано бесконечное множество шаров (рассеивателей). На дополнении ко множеству рассеивателей разбросано по закону Пуассона бесконечное число точечных частиц. Каждая из этих частиц движется с постоянной скоростью и при столкновении с рассеивателем отражается от его границы по закону «угол падения равен углу отражения». Динамическая система, отвечающая движению этого бесконечного ансамбля частиц, называется *газом Лоренца*.

Поскольку движущиеся частицы между собой не взаимодействуют, то можно рассмотреть динамическую систему, отвечающую движению только одной такой частицы. Свойства динамической системы, отвечающей движению бесконечного числа частиц, будут рассматриваться в главе 9.

Газ Лоренца является одной из самых популярных моделей неравновесной статистической физики, на которой, в частности, удобно исследовать проблему существования так называемых *коэффициентов переноса*. К коэффициентам переноса относятся коэффициенты диффузии, вязкости, теплопроводности, электропроводности и т. д. В силу характера динамики газа Лоренца его импульс не сохраняется и единственным коэффициентом переноса для него является *коэффициент диффузии* D. Согласно формуле Эйнштейна,

$$D = \frac{2}{d} \int\limits_0^\infty \int\limits_M (v(x(0))\, v(x(t)))\, d\mu(x(0))\, dt,$$

где $v(x(0))$ — скорость частицы в начальный момент времени.

Пусть расположение рассеивателей периодично. Тогда можно рассматривать движение точечной частицы на торе T^d с евклидовой метрикой. Говорят, что газ Лоренца имеет *конечный горизонт*, если длина свободного пробега (пути без отражения от границы рассеивателей) точечной частицы равномерно ограничена сверху некоторой константой. В этом случае число кривых разрыва преобразования T_1 конечно.

В работе [60] для газа Лоренца с периодическим расположением рассеивателей и конечным горизонтом было доказано, что при $d=2$ коэффициент диффузии существует и положителен.

Предположим, что прямоугольник $\Pi=\{q=(q_1, q_2): 0\leqslant q_1\leqslant B_1, 0\leqslant q_2<B_2\}$ является фундаментальной областью расположения рассеивателей на плоскости. Рассмотрим множество $M\cap(\Pi\times S^1)=\hat{M}$, где M — фазовое пространство газа Лоренца. Пусть μ — нормированная мера, абсолютно непрерывная относительно лебеговой меры на $\hat{M}$, причем соответствующая плотность $f(x)\in C^1$. Тогда положение точки $x\in M$ может рассматриваться как случайная величина, распределенная согласно мере μ, и если $T^t x=x(t)=(q(t), v(t))$, то $q(t)$, $v(t)$ тоже являются случайными переменными. Для любого $t>0$ положим $q_t(s)=\frac{1}{\sqrt{t}}q(st)$, $0\leqslant s\leqslant 1$. Мера μ индуцирует распределение вероятностей μ_t на множестве траекторий $q_t(s)$, $0\leqslant s\leqslant 1$, являющихся точками пространства $C_{[0,1]}(\mathbf{R}^2)$ непрерывных функций, определенных на единичном отрезке и принимающих значения в $\mathbf{R}^2$.

В [60] для рассматриваемой системы было доказано следующее утверждение, являющееся аналогом *принципа инвариантности* Донскера (M. Donsker) в теории случайных процессов.

Теорема 1.11. Последовательность мер μ_t слабо сходится к мере Винера (N. Wiener).

Следует отметить, что это первый результат о сходимости к броуновскому движению для чисто детерминированной (без какого-либо случайного механизма) системы. Обычно в качестве «физического» образа случайного блуждания рассматривается движение тяжелой частицы под действием ударов многочисленных легких частиц. Однако образ случайного блуждания, как движения легкой частицы в поле неподвижных (тяжелых) рассеивателей, от которых эта частица отражается, представляется даже более естественным.

Оказывается, что если длина свободного пробега частицы не ограничена сверху, то скорость убывания корреляций существенно замедляется (в случае непрерывного времени) и становится степенной. Это связано с наличием периодических траекторий, все время касающихся границы рассеивателей (рис. 10).

В заключение заметим, что наиболее интересная и важная задача в данной проблематике — это исследование эргодических свойств газа Лоренца со случайным расположением рассеивателей. Эта задача тесно связана с классической (но еще не решенной до конца) задачей о случайных блужданиях в случайных средах. Естественная гипотеза состоит в том, что корреляционная функция скоростей в этой системе убывает как $\mathrm{const}\, t^{-(d/2+1)}$.

§ 2. Странные аттракторы

2.1. Определение стохастического аттрактора. Термин *«странные аттракторы»* появился в работе Рюэля и Такенса (D. Ruelle, F. Takens) [95]. Авторы предложили так назвать инвариантные притягивающие множества динамических систем, которые в каком-либо сечении не являются многообразиями, а имеют структуру канторова совершенного множества. Их общая идея состояла в том, что именно такие множества возникают в динамической системе, отвечающей уравнению Навье (L. M. H. Navier) — Стокса (G. G. Stokes). Хотя эта идея и на сегодняшний день не реализована, сам термин получил широкое распространение, особенно среди физиков, благодаря тому, что странные аттракторы стали находить, главным образом численно, во многих физических задачах и связывать их наличие с хаотическим поведением траекторий. Кроме того, считается, что траектории на странном аттракторе обладают той или иной степенью неустойчивости, которая служит причиной стохастичности исходной системы. Строгих математических результатов, подтверждающих эту точку зрения, в настоящее время имеется очень немного. Тем не менее, обнаружение странного аттрактора стало в каком-то смысле модой. Задача математика состоит в том, чтобы на основании результатов численного счета сформулировать и доказать строгие утверждения о поведении траекторий исследуемой системы.

В последнее время появилось много работ, в которых вычисляются различные размерностные характеристики инвариантных множеств динамических систем. При этом считается, что дробное значение размерности может быть только у странного аттрактора. Теоремы общего характера, относящиеся к данной проблематике, приведены в главе 7, § 6.

В соответствии с общим стилем этой книги мы изложим только математически строгие результаты, относящиеся к эргодической теории странных аттракторов. Прежде всего, мы несколько изменим терминологию. Пусть поток $\{S^t\}$ порождается гладким векторным полем на компактном гладком многообразии M.

Определение. Инвариантное замкнутое множество A называется аттрактором, если у него существует окрестность U_0 такая, что $U_t = S^t U_0 \subset U_0$ при $t > 0$ и $\bigcap\limits_t U_t = A$.

Простейшими примерами аттракторов служат устойчивая неподвижная точка и устойчивая периодическая траектория. В главе 6, § 2 речь шла о гиперболических аттракторах гладких динамических систем и, в частности, об аттракторе Смейла—Вильямса, которые устроены гораздо сложнее. Мы введем понятие «стохастического аттрактора», взяв за основу существование инвариантной меры, аналогичной u-гиббсовской мере $\mu_\varphi^{(u)}$ для гладких гиперболических систем.

Определение. Аттрактор A называется *стохастическим*, если: 1) для любой абсолютно непрерывной меры μ_0, сосредоточенной в U_0, ее сдвиги μ_t при $t \to \infty$ сходятся (слабо) к предельной инвариантной мере λ, не зависящей от μ_0; 2) динамическая система $(A, \lambda, \{S^t\})$ обладает перемешиванием.

Выбор в качестве класса начальных μ_0 абсолютно непрерывных мер, помимо аналитических преимуществ, имеет еще и следующее достоинство: этот класс устойчив по отношению к дискретизациям динамической системы и ее численному исследованию на ЭВМ и по отношению к малым случайным возмущениям динамической системы.

Гиперболические аттракторы (см. гл. 7, п. 2.5) являются стохастическими. Сейчас мы подробно рассмотрим структуру и свойства стохастического аттрактора, возникающего в знаменитой *системе Лоренца* (E. Lorenz).

2.2. Аттрактор Лоренца. Речь пойдет о системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma(x-y), \\ \frac{dy}{dt} &= -xz+rx-y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy-bz, \end{aligned} \tag{8.3}$$

где σ, b, r — положительные параметры. Система (8.3) возникла как галеркинская аппроксимация для уравнений гидродинамики в задаче Рэлея (J. W. Rayleigh)—Бенара (Benard J.) о конвекции в жидкости, заполняющей слой между двумя горизонтальными плоскостями, разность температур между которыми поддерживается постоянной (см. [76]). Точно такая же, как (8.3), система возникает в теории лазеров и в геофизике.

Сам Лоренц исследовал эту систему численно при $r=28$, $\sigma=10$, $b=8/3$ и обнаружил, что ее траектории ведут себя крайне нерегулярным образом.

Опишем основные свойства системы (8.3):

i) Дивергенция правой части (8.3) равна $-\sigma-1-b<0$ и поэтому фазовый объем экспоненциально уменьшается со временем.

ii) Бесконечность является неустойчивой точкой; все траектории, рано или поздно, попадают в компактное подмножество фазового пространства и затем из него не выходят.

iii) Система (8.3) симметрична относительно замены $x \to -x$, $y \to -y$.

iv) При $\sigma=10$, $b=8/3$, $r>\sigma(\sigma+b+3)(\sigma-b-1)^{-1}=24{,}73\ldots$ система (8.3) имеет три неподвижные точки $O=(0, 0, 0)$, $O_1=(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ и $O_{-1}=(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, являющиеся гиперболическими; устойчивая сепаратриса $W^{(s)}$ точки O двумерна, а точек O_1 и O_{-1} — одномерна. Обозначим левую и правую ветви (одномерной) неустойчивой сепаратрисы точки O через Γ_1 и Γ_{-1} (см. рис. 15).

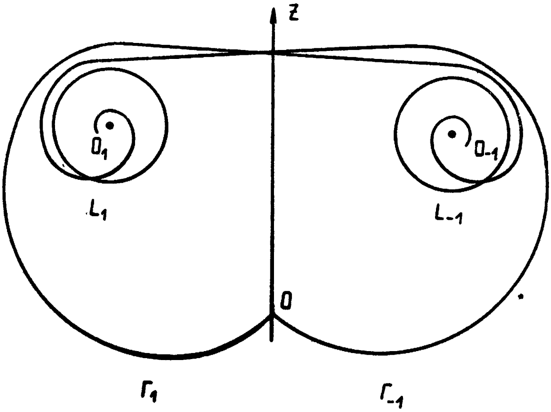

Рис. 15

Последовательность бифуркаций (при $r=28$, $b=8/3$, $0<\sigma\leqslant\leqslant 10$), приводящая к появлению стохастического аттрактора в модели Лоренца, была изучена в работе В. С. Афраймовича, В. В. Быкова и Л. П. Шильникова [9] (см. также [10], где изложены подробные доказательства для несколько более общего случая). Математический анализ качественного поведения системы (8.3) сочетается в [9] с оценками, проводимыми с помощью ЭВМ.

В [9] показано, что при $r=28$, $b=8/3$ и $\sigma=\sigma_1\approx 3.42$ каждая из ветвей Γ_1 и Γ_{-1} становится двоякоасимптотической, т. е. возвращается в седло O, касаясь $W^{(s)}$. Из результатов [9] вытекает, что при переходе σ через значение σ_1 из каждой из петель Γ_1 и Γ_{-1} рождается по одной гиперболической периодической траектории L_1 и L_{-1}. При $\sigma_1<\sigma<5.78$ ветвь Γ_1 стремится к устойчивой неподвижной точке O_{-1}, а Γ_{-1} — к O_1. При $\sigma=\sigma_2\approx\approx 5.87$ Γ_1 и Γ_{-1} начинают притягиваться к L_{-1} и L_1, соответственно (рис. 15). Переход через значение σ_2 и есть момент возникновения стохастического аттрактора в системе (8.3) — *аттрактора Лоренца.*

Для изучения поведения системы (8.3) удобно перейти к отображению Пуанкаре плоскости $P=\{z=r-1\}$, содержащей неподвижные точки O_1 и O_{-1}. Обозначим через z_i^*, $i=1, -1$, точки первого пересечения с P ветвей Γ_i, $i=1, -1$, причем предполагается, что в точке z_i^* сепаратриса Γ_i пересекает P сверху вниз (т. е. переходит из полупространства $\{z>r-1\}$ в $\{z<r-1\}$); через z_i^0, $i=1, -1$, — точки пересечения с P гиперболических циклов L_i, $i=1, -1$; через S — множество $W^{(s)}\cap P$. (Вообще говоря, множество S локально несвязно, так как сепаратриса $W^{(s)}$ весьма причудливо изгибается и не разделяет точек пространства, в частности, неустойчивая сепаратриса $\Gamma_1(\Gamma_{-1})$ может подойти к точке $O_{-1}(O_1)$, не пересекая $W^{(s)}$). Отображение Пуанкаре T точке $x \in P$ ставит в соответствие точку $y \in P$, в которой траектория x впервые пересекает P сверху вниз. Ясно, что T испытывает разрыв на множестве S. В самом деле, точки, лежащие на P по разные стороны от S, при движении по интегральным кривым системы Лоренца сначала подходят к началу координат, а затем уходят от него вдоль разных ветвей (Γ_1 и Γ_{-1}) неустойчивой сепаратрисы. В [9] на основании счета на ЭВМ и качественных соображений ожидаемые свойства отображения T были сформулированы следующим образом.

Рассмотрим на плоскости замкнутый квадрат $\Pi=\{|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1\}$. Обозначим $\Pi_1=\{|x|\leqslant 1, 0<y\leqslant 1\}$, $\Pi_{-1}=\{|x|\leqslant 1, -1\leqslant \leqslant y<0\}$. Предполагаются выполненными следующие свойства:

1) $T_i(x, y)=(f_i(x, y), g_i(x, y))$, $i=1, -1$, где функции f_i, g_i принадлежат классу C^2.

2) Отображение T_i имеет гиперболическую неподвижную точку $z_i^0 \in K_i=\{|x|\leqslant 1, y=i\}$, $i=1, -1$, корни характеристического уравнения в которой положительны.

3) Отрезок K_i принадлежит устойчивой сепаратрисе точки z_i^0, $i=1, -1$.

4) Функции f_i и g_i могут быть доопределены по непрерывности на S таким образом, что $\lim\limits_{y\to 0} f_i(x, y)=x_i^*$, $\lim\limits_{y\to 0} g_i(x, y)= =y_i^*$ и при этом $\operatorname{sgn} x_i^*=\operatorname{sgn} i$, $\operatorname{sgn} y_i^*=-\operatorname{sgn} i$, $i=1, -1$. Обозначим $z_i^*=(x_i^*, y_i^*)$.

5) На множестве $\Pi\diagdown\left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} T_1^{-k} S \cup \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} T_{-1}^{-k} S\right)$ отображения T_1 и T_{-1} являются равномерно полно гиперболическими (см. гл. 7, § 1); они растягивают в вертикальном направлении и сжимают в горизонтальном.

6) $f_1(x, y)=-f_{-1}(-x, -y)$, $g_1(x, y)=-g_{-1}(-x, -y)$[1].

Определим теперь отображение T следующим образом: $T=T_i|\Pi_i \cup S$, $i=1, -1$ (см. рис. 16).

Легко видеть, что образ $T\Pi$ состоит из двух криволинейных треугольников (рис. 16). В [98] с помощью счета на ЭВМ было показано, что при $\sigma=6$, $b=8/3$, $r=28$ действительно имеется два узких треугольника, лежащих на плоскости P по разные сторо-

---

[1] Условие 6) не является необходимым в том смысле, что все формулируемые далее для T результаты верны и без него.

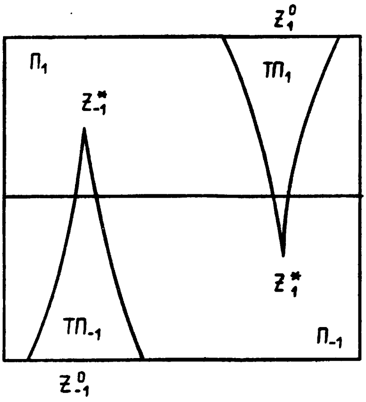

Рис. 16

ны от S, с вершинами z_1^* и z_{-1}^* соответственно, на которых отображение Пуанкаре плоскости P для системы (8.3) удовлетворяет свойствам гиперболичности. Отметим, что П. В. Гачок рассмотрел более общий класс систем, содержащий (8.3), и показал наличие в этом классе системы, обладающей странным аттрактором [19].

Исходя из свойств 1)—6), в работе [9] было доказано следующее утверждение[1].

Теорема 2.1. Если преобразование T топологически транзитивно (см. гл. 7, п. 2.2), то единственным устойчивым предельным множеством отображения T в П является одномерное гиперболическое множество $\Lambda = \bigcap\limits_{n \geqslant 0} T^n П$, которое

i) состоит из двух компонент связности,

ii) является замыканием множества периодических точек.

Аттрактор Λ содержит континуумы гладких кривых, однозначно проектирующихся на ось y, каждая из которых представляет собой регулярный отрезок растягивающегося слоя. Разбиение Λ на такие максимальные регулярные отрезки неустойчивых слоев обозначим через ξ, а элемент разбиения ξ, содержащий точку $x \in \Lambda$, — через $C_\xi(x)$.

Итак, мы имеем гиперболическое разрывное отображение T квадрата П в себя. Тем самым, ситуация в некоторых отношениях аналогична случаю рассеивающих биллиардов, рассмотренному в предыдущем параграфе. Однако система Лоренца имеет и ряд существенных отличий. Прежде всего у нее нет естественной инвариантной меры.

Теорема 2.2. Пусть ν — мера на П, абсолютно непрерывная относительно лебеговской меры, причем соответствующая

---

[1] В [9] были получены и другие результаты, касающиеся отображения T, но они нам не понадобятся.

плотность непрерывно дифференцируема. Тогда последовательность мер $T_*{}^n \nu$ слабо сходится к сосредоточенной на Λ инвариантной относительно T мере μ. При этом условная мера $\mu(\cdot|C_\xi)$, индуцируемая μ на регулярных растягивающихся слоях, абсолютно непрерывна по отношению к лебеговской мере на C_ξ.

Можно доказать более сильное утверждение, обеспечивающее сходимость почти всюду, аналогично сказанному в главе 7, § 3.

Тем не менее, оказывается, что при сформулированных условиях на отображение T аттрактор Λ не обязан быть стохастическим, т. е. ограничение T на Λ может не обладать свойством перемешивания. При этом элементы разбиения ξ все содержат дырки (лакуны), которые переходят друг в друга[1]. В результате в спектре возникает дискретная компонента. Для того чтобы T было перемешиванием, достаточно потребовать в условии 5) несколько более сильного растяжения, чем требуется обычно при формулировке условий гиперболичности. При этом имеет место (см. [17])

Теорема 2.3. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная в некоторой окрестности U, $\Lambda\subset U\subset\Pi$, и пусть ν — абсолютно непрерывная мера на Π, носитель которой совпадает с U. Тогда для почти любой (по мере ν) точки $x\in\Pi$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Pi} f(T^k x)\,d\nu=\int_{\Lambda} f(x)\,d\mu.$$

В работе [58] для широкого класса функций на Π была доказана центральная предельная теорема (см. § 1, гл. 6) и получена следующая оценка скорости перемешивания

$$\int_{\Lambda} f(x)\,g(T^n x)\,d\mu-\int_{\Lambda} f(x)\,d\mu\int_{\Lambda} g(x)\,d\mu\,\Big|<\mathrm{const}\,\exp(-n^{\gamma}) \qquad (8.4)$$

для достаточно больших n и некоторой положительной константы $\gamma<1$.

Отметим, что отображение T обладает глобальным устойчивым слоением, устроенным так же, как слоение на прямые $y=\mathrm{const}$ [9]. Это позволяет представить T как косое произведение (см. гл. 1, § 4) над монотонным отображением отрезка, имеющим одну точку разрыва, и воспользоваться теорией одномерных отображений (см. гл. 9, § 1). Однако для доказательства эргодических свойств (в частности, перемешивания) в этом случае нужно требовать гладкости устойчивого слоения, что далеко не очевидно.

Опишем некоторые возможные обобщения рассмотренного примера. Прежде всего ясно (ср. с рассеивающими биллиарда-

---

[1] Это явление полностью аналогично возникновению лакун для кусочно монотонных отображений отрезка в себя (см. гл. 9).

ми), что все результаты справедливы и в том случае, когда преобразование T терпит разрыв «первого рода» не на одной, а на конечном числе кривых. В равной степени несущественна двумерность фазового пространства, важно лишь, чтобы сжимающиеся слои (и, тем самым, многообразия разрыва) имели коразмерность один. Для соответствующей динамической системы на n-мерном кубе также существует одномерный стохастический аттрактор, причем при помощи факторизации по сжимающимся слоям снова можно перейти к одномерному отображению отрезка в себя.

2.3. Другие примеры гиперболических странных аттракторов. В. Н. Белых [12] рассмотрел отображение, имеющее гиперболический аттрактор и не сводящееся, ни в каком смысле, к одномерному. Этот пример также возник при исследовании конкретных динамических систем, возникающих в физике, — так называемых дискретных систем фазовой синхронизации. Для наглядности мы рассмотрим простейшую ситуацию, когда соответствующее отображение кусочно линейно и имеет место свойство 6).

Пусть T — отображение квадрата Π в себя, имеющее вид

$$\begin{cases} x_{n+1} \mp 1 = \lambda_1 (x_n \mp 1) \\ y_{n+1} \mp 1 = \lambda_2 (y_n \mp 1) \end{cases} \text{при } y \gtrless kx,$$

где $0 < \lambda_1 < \frac{1}{2}$, $1 < \lambda_2 < 2$, $k \neq 0$, $|k| < 1$. Отличие от отображения, отвечающего аттрактору Лоренца, состоит в том, что в данном случае не существует глобального сжимающегося слоения (из-за «непараллельности» соответствующих слоев кривой разрыва) и поэтому нельзя провести факторизацию. Тем не менее, для *аттрактора Белых*, по-видимому, можно получить результаты, аналогичные сформулированным выше результатам для аттрактора Лоренца. В частности, для аттрактора Белых существует счетное марковское разбиение. Однако если для аттрактора Лоренца это разбиение строится тривиально (его элементами являются совокупности всех регулярных неустойчивых слоев C_ξ, имеющих одни и те же концы), то марковское разбиение для аттрактора Белых выглядит существенно сложнее.

Рассмотрим далее класс кусочно линейных *отображений* плоскости в себя $(x, y) \rightarrow (1 + y - a|x|, bx)$, введенный *Лози* (R. Lozi) [77], который при $a = 1.7$ и $b = 0.5$ обнаружил (численно) наличие в этой системе странного аттрактора. Введение этого класса отображений было стимулировано многочисленными работами, посвященными *аттрактору Эно* (M. Henon) [66] для отображений плоскости в себя вида $(x, y) \rightarrow (1 + y - ax^2, bx)$. Однако в упомянутых работах нет доказательства существования такого аттрактора. Опыт, накопленный при изучении эргодических и топологических свойств одномерных отображений (см. гл. 9, § 2), подсказывал, что отображение Лози исследовать легче. И действительно, вскоре для некоторой области значений параметров a и b было строго доказано существование аттрактора и его гиперболичность [81]. Метрические свойства аттрактора Лози Λ изучались в работе [63], в которой была построена инвариантная мера, доказана ее единственность и показано, что индуцированная на Λ динамическая система обладает K-свойством, т. е. аттрактор Лози является стохастическим.

Появление гиперболических странных аттракторов в модельных системах является скорее исключением, чем правилом. Многочисленные исследования (как строгие математические, так и с использованием ЭВМ) показали, что в диссипативных системах со стохастическим поведением, наряду с нетривиальными гиперболическими множествами, обычно имеются еще и устойчивые периодические траектории. Тем самым, общая ситуация для таких систем, по-видимому, такая же, как и для гамильтоновых, т. е. динамика на типичном аттракторе похожа на динамику консервативной системы, имеющей и стохастические слои, и инвариантные торы КАМ (см. гл. 6, § 2).

Глава 9

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М. В. Якобсон

В этой главе рассматриваются одномерные отображения, занявшие в последние годы заметное место в теории динамических систем и эргодической теории. Фазовым пространством соответствующей динамической системы является отрезок [0,1] или любой другой отрезок $[a,b]\subset\mathbf{R}^1$. Преобразования T этого отрезка — не что иное как функции, заданные на $[a,b]$ и принимающие значения в $[a,b]$. В одном из следующих томов будут рассмотрены топологические свойства различных классов одномерных отображений, в том числе наиболее известного однопараметрического семейства квадратичных отображений.

§ 1. Растягивающие отображения

1.1. Определения, примеры, формула для энтропии. Рассмотрим следующее преобразование отрезка [0, 1]:

$$T_2(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,\ 1/2],\\ 2x-1, & x\in(1/2,\ 1].\end{cases}$$

Мера Лебега, которую мы будем обозначать $l(dx)$, инвариантна в том смысле, что $l(T_2^{-1}C)=l(C)$ для любого $C\subset[0, 1]$. Обозначим $(\Omega_2, S, \mu(1/2, 1/2))$ односторонний сдвиг Бернулли, т. е. сдвиг на пространстве двоичных последовательностей с мерой, которая равна $1/2^n$ на любом цилиндре длины n. Рассмотрим измеримое разбиение $\xi=\{A_0=[0, 1/2), A_1=(1/2, 1]\}$. Сопоставим двоичной последовательности $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)\in\Omega_2$ точку $\pi(\alpha)=$ $=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} T_2^{-k}A_{\alpha_k}$. Из равенства $l\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n-1} T_2^{-k}A_{\alpha_k}\right)=1/2^n$ вытекает, что π устанавливает изоморфизм (mod 0) между необратимыми преобразованиями (эндоморфизмами) пространств с мерой $([0, 1], T_2, dl)\overset{\pi}{\approx}(\Omega_2, S, \mu(1/2, 1/2))$. Аналогичным образом преобразование T_n: $x\to nx$ (mod 1), $2\leqslant n\in\mathbb{N}$, изоморфно (mod 0) одностороннему сдвигу на пространстве последовательностей из n символов.

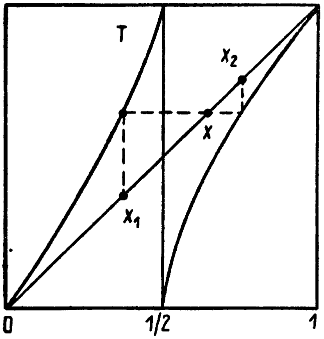

Рис. 17

Пусть теперь $T:[0, 1]\to[0,1]$ — преобразование (рис. 17), для которого производная уже не обязательно постоянна, но удовлетворяет *условию растяжения*

$$|dT/dx|\geqslant c_1>1.$$

Такие отображения называются растягивающими. Они обладают свойством неустойчивости, состоящим в том, что близкие точки под действием преобразования расходятся с экспоненциальной скоростью, что делает их аналогичными гиперболическим системам, рассмотренным в главах 7, 8. В частности, оказывается, что при широких условиях растягивающие отображения обладают абсолютно непрерывными инвариантными мерами.

Следующее рассуждение из [39] показывает, что для растягивающего преобразования с конечным числом участков монотонности класса гладкости C^2, каждый из которых отображается на весь отрезок $[0, 1]$, существует инвариантная мера

$\mu(dx)=h(x)dx$, где $h(x)$ непрерывна и отделена от нуля. Отображение T индуцирует в пространстве плотностей $\varphi(x)\in L^1_{dl}$ преобразование, которое называется *оператором Перрона—Фробениуса* (O. Perron, F. Frobenius)

$$\mathscr{L}\varphi(x)=\sum_{y\in T^{-1}x}\frac{\varphi(y)}{|T'(y)|}.$$

Предположим для определенности, что T монотонно возрастает от 0 до 1 на отрезках $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$. Тогда

$$\mathscr{L}\varphi(x)=\frac{\varphi(x_1)}{T'(x_1)}+\frac{\varphi(x_2)}{T'(x_2)},$$

где $\{x_1\in[0, 1/2],\ x_2\in[1/2, 1]\}=T^{-1}x$ (см. рис. 17).

Будем искать плотность инвариантной меры $\varphi(x)$ в множестве функций $\mathfrak{A}_c$, удовлетворяющих условию

$$\exp[-c\cdot d(x, y)]\leqslant\varphi(x)/\varphi(y)\leqslant\exp[c\cdot d(x, y)],$$

где $c>0$ — некоторая константа. Мы имеем

$$\frac{\mathscr{L}\varphi(x)}{\mathscr{L}\varphi(y)}\leqslant\max\left\{\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(y_1)}\cdot\frac{T'(y_1)}{T'(x_1)};\ \frac{\varphi(x_2)}{\varphi(y_2)}\cdot\frac{T'(y_2)}{T'(x_2)}\right\}.$$

При этом

$$\frac{\varphi(x_i)}{\varphi(y_i)}\cdot\frac{T'(y_i)}{T'(x_i)}\leqslant\exp[c\cdot d(x_i, y_i)+\ln T'(y_i)-\ln T'(x_i)].$$

Воспользуемся тем, что $|\ln T'(y_i)-\ln T'(x_i)|\leqslant\frac{|T''(\theta)|}{T'(\theta)}d(x_i, y_i)$, где $\theta\in[x_i, y_i]$, и условием растяжения $d(x_i, y_i)<c_1^{-1}\cdot d(x, y)$. Обозначив $c_2=\max\limits_{z\in[0,1]}|T''(z)|/T'(z)$, получаем

$$\mathscr{L}\varphi(x)/\mathscr{L}\varphi(y)<\exp\left[d(x, y)(c_1^{-1}c+c_1^{-1}c_2)\right].$$

Если c настолько велико, что $c_1^{-1}(c+c_2)<c$, то

$$\mathscr{L}\mathfrak{A}_c\subset\mathfrak{A}_c$$

и по теореме Шаудера (J. Schauder)—Тихонова существует неподвижная точка $\mathscr{L}h=h\in\mathfrak{A}_c$, которая и задает плотность абсолютно непрерывной инвариантной меры.

Традиционным объектом исследования в эргодической теории одномерных отображений являются задачи теории чисел, связанные с распределением дробных долей разных функций. А именно, для монотонной функции $g(x)$, определенной на интервале $(0, 1)$, рассматривается преобразование

$$Tx=\{g(x)\}$$

(здесь $\{\ \}$ — дробная часть). Спрашивается, существует ли T-инвариантная мера μ, эквивалентная мере Лебега, и каковы эргодические свойства μ, которые, конечно, порождают эргодические свойства соответствующих дробных долей. Классический пример $g(x)=1/x$ изучался еще Гауссом. В этом случае инвариантная мера выписывается явно:

$$\mu(X)=\frac{1}{\ln 2}\int\limits_X \frac{dx}{1+x}.$$

Широкий класс примеров был исследован в работах Реньи и В. А. Рохлина (см. [36]). Основные условия, использующиеся при доказательстве теорем Реньи, Рохлина и ряда дальнейших результатов, состоят в следующем. Пусть $\{a_i\}_{i=0}^m$ — конечное или счетное множество точек, в которых $g(x)$ принимает целые значения, а Tx терпит разрывы. Точки a_i делят $[0, 1]$ на интервалы Δ_i, которые назовем интервалами ранга 1. Обозначим $\xi^{(1)}=\{\Delta_i\}$ соответствующее конечное или счетное разбиение. Пусть $\xi^{(n)}=\bigvee\limits_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi^{(1)}$ — разбиение $[0, 1]$ на интервалы $\Delta_{i_1}\cap T^{-1}\Delta_{i_2}\cap\ldots\cap T^{-(n-1)}\Delta_{i_n}=\Delta_{i_1 i_2\ldots i_n}$ ранга n, на которых однозначно определено отображение T^n. Предположим, что:

(i) Существует $k_0 \in N$ такое, что T^{k_0} является растягивающим отображением.

(ii) Существует такое $c_1>0$, что при любом n для всякого интервала ранга n и любых $y, z \in \Delta_{i_1\ldots i_n}$ выполнено

$$c_1^{-1}\leqslant\frac{dT^n}{dx}(y)\Big/\frac{dT^n}{dx}(z)\leqslant c_1.$$

(iii) $T\Delta_i \supset (0, 1)$ для всякого интервала ранга 1. Это условие означает, что интервалы Δ_i образуют марковское разбиение специального вида. При этом $T^n(\Delta_{i_1 i_2\ldots i_n})\supset(0, 1)$ для интервалов любого ранга.

Если отображение T на участках монотонности принадлежит к классу гладкости C^2, то для того чтобы условие (ii) выполнялось для интервалов любого ранга, достаточно, чтобы оно выполнялось для интервалов 1-го ранга (см. [68]). В этом случае приведенное выше рассуждение доказывает существование абсолютно непрерывной меры $\mu(dx)$, инвариантной относительно T^{k_0}. При этом мера $\mu'=\sum\limits_{i=0}^{k_0-1} T^{i*}\mu$ T-инвариантна и плотность ее отделена от 0.

Как показал В. А. Рохлин, эндоморфизм (T, μ') является точным (см. гл. 1, § 4) и справедлива *формула для энтропии*

$$h_{\mu'}(T)=\int\limits_0^1 \log|dT/dx|\,\mu'(dx).$$

Покажем, как формула для энтропии следует из (i)—(iii).

Вследствие (i) разбиение $\xi^{(1)}$ образующее. Отсюда по теореме Шеннона — Макмиллана — Бреймана $-1/n \log \mu'(\Delta_{i_1\dots i_n}(x)) \to$ $\to h_{\mu'}(T)$ для почти всех x. По теореме о среднем

$$l(\Delta_{i_1\dots i_n}(x)) = 1 \Big/ \left|\frac{dT^n(\bar{x})}{dx}\right|, \quad \bar{x} \in \Delta_{i_1\dots i_n}(x).$$

Используя (ii) и свойства плотности инвариантной меры, мы получаем из предыдущего

$$c_3 \leqslant \mu'(\Delta_{i_1\dots i_n}(x)) \Big/ \left|\frac{dT^n(x)}{dx}\right| \leqslant c_2.$$

По теореме Биркгофа $1/n \log\left|\frac{dT^n(x)}{dx}\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \log\left|\frac{dT}{dx}(T^i x)\right|$ почти всюду стремится к $\int_0^1 \log\left|\frac{dT}{dx}\right| \mu'(dx)$, что и доказывает формулу для энтропии.

В частности, для $Tx = \{1/x\}$ получаем

$$h_\mu(T) = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{(\ln 2)^2}.$$

1.2. Теорема Уолтерса. Рассмотренные примеры являются частными случаями следующей теоремы Уолтерса о свойствах инвариантных мер несжимающих отображений, не обязательно одномерных.

Рассматривается компакт $\bar{X}$ с метрикой d, открытое плотное подмножество $X \subset \bar{X}$, открытое плотное подмножество $X_0 \subset X$ и $T: X_0 \to X$ — непрерывное сюръективное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

I. $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall x \in X$ $T^{-1}(B_{\varepsilon_0}(x) \cap X)$ есть объединение не более чем счетного семейства непересекающихся открытых компонент $A_i(x)$ таких, что для всякого i отображение $T|A_i(x)$ — гомеоморфизм $A_i(x)$ на $B_{\varepsilon_0}(x) \cap X$, причем $d(Ty, Ty') \geqslant d(y, y')$. Из свойства I следует, что если $d(x, x') < \varepsilon_0$, x, $x' \in X$, то между их прообразами $y \in T^{-n}x$, $y' \in T^{-n}x'$ любого порядка, лежащими в одной компоненте, существует взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем соответствующие прообразы помечаются штрихом.

II. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists m \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall x \in X$ $\{T^{-m}x\}$ образует в $\bar{X}$ ε-сеть.

Пусть на $\bar{X}$ задана некоторая нормированная борелевская мера ν, несингулярная относительно T и T^{-1}, т. е. из $\nu(E) = 0$ следует $\nu(TE) = \nu(T^{-1}E) = 0$. Предположим, что производная Радона—Никодима $d\nu T/d\nu$ может быть выбрана непрерывной и выполнены следующие условия:

(а) $\frac{d\nu T^{-1}}{d\nu}(x)=\sum\limits_{y\in T^{-1}x} 1\Big/\frac{d\nu T}{d\nu}(y)\leqslant K_1\ \forall x\in X,$

(б) $\sup\limits_{n\geqslant 1}\ \sup\limits_{y\in T^{-n}x}\frac{d\nu T^n}{d\nu}(y')\Big/\frac{d\nu T^n}{d\nu}(y)\leqslant K_2$, если $d(x,x')<\varepsilon_0$, и левая часть в (б) стремится к 1, когда $d(x,x')\to 0$. Определим оператор Перрона—Фробениуса первоначально для $f\in C(X)$, как

$$\mathcal{L}f(x)=\sum_{y\in T^{-1}x}\left(1\Big/\frac{d\nu T}{d\nu}(y)\right)f(y).$$

Из условий I, (а), (б) следует, что $\mathcal{L}$ продолжается до непрерывного линейного оператора $\mathcal{L}:C(\overline{X})\to C(\overline{X})$.

Теорема 1.1 ([100]).

(1) Существует функция $0<h(x)\in C(\overline{X})$ такая, что $\forall f\in C(\overline{X})$

$$\mathcal{L}^n f\rightrightarrows h(x)\cdot\nu(f);$$

(2) мера $\mu(dx)=h(x)\nu(dx)$ T-инвариантна и (T,μ) — точный эндоморфизм;

(3) $\nu\circ T^{-n}\to\mu$ в слабой топологии;

(4) μ является равновесным состоянием, т. е. для всякой меры m, абсолютно непрерывной относительно ν, справедлив вариационный принцип:

$$0=H_\mu(\mathcal{B}/T^{-1}\mathcal{B})-\mu\left(\log\left(\frac{d\nu T}{d\nu}\right)\right)\geqslant H_m(\mathcal{B}/T^{-1}\mathcal{B})-m\left(\log\left(\frac{d\nu T}{d\nu}\right)\right),$$

где $\mathcal{B}$ — борелевская сигма-алгебра, H_μ — условная энтропия.

Если существует конечное или счетное образующее разбиение ξ, то $H_\mu(\mathcal{B}/T^{-1}\mathcal{B})=h_\mu(T)$ и равенство нулю в левой части (4) дает формулу для энтропии. Пусть, кроме того, выполнены следующие условия:

Всякий элемент C разбиения ξ содержится в $T^{-1}B_{\varepsilon_0}(x)$ при некотором x; ξ — марковское разбиение относительно T; $\mu(\partial\xi)=0$. Тогда справедливо

(5) Естественное расширение эндоморфизма (T,μ) изоморфно сдвигу Бернулли.

Помимо рассмотренных выше примеров, из теоремы 1.1 вытекают существование и эргодические свойства абсолютно непрерывной меры для растягивающих эндоморфизмов компактных многообразий (см. [100]). Условие I теоремы Уолтерса, в частности, предполагает у T наличие локальной структуры прямого произведения. Этому требованию не удовлетворяют, например, такой популярный в теории чисел пример, как β-преобразования $x\to\beta x \pmod 1$ с иррациональным $\beta>1$.

В работе Хофбауэра (F. Hofbauer) и Келлера (G. Keller) [67] результаты Уолтерса были обобщены на широкий класс кусочно монотонных растягивающих отображений, включающий β-преобразования, а также был получен ряд дополнительных результатов об эргодических свойствах равновесных мер μ.

§ 2. Абсолютно непрерывные инвариантные меры для преобразований, не являющихся растягивающими

2.1. Некоторые примеры. Классический пример преобразования с абсолютно непрерывной инвариантной мерой, не являющегося растягивающим, — это

$$F: x \to 4x(1-x).$$

Это преобразование исследовали Улам (S. Ulam) и Нейман (см. [62]), но фактически основной результат содержится еще в работе Фату (P. Fatou) (1920 г.) об итерациях рациональных отображений (см. [83]). Замена $y=\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$ переводит F в кусочно линейное преобразование T_2 из пункта 1.1. Мера Лебега инвариантна относительно T_2. Ее образ относительно φ^{-1*} есть $\mu(dx)=\frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$.

Отсюда вытекает, что динамическая система $\left([0,1];\ F;\ \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\right)$ так же, как и $([0,1];\ T_2;\ dl)$, изоморфна сдвигу Бернулли.

В общем случае, когда инвариантная мера не задается явной формулой, ее построение и исследование является более трудной задачей, чем для растягивающих отображений. Первые результаты, полученные в этом направлении, относились к случаю, когда критическая точка в результате некоторой итерации попадает в периодическую отталкивающую орбиту (см. библиографию в [62], [68]. Здесь полезным оказывается переход к производному отображению (см. гл. 1, § 4).

Рассмотрим отображение $F\in C^2([0,1],\ [0,1])$ с невырожденной критической точкой c, удовлетворяющее условиям $F(0)=F(1)=0$, $F'(0)=A>1$, $F(c)=1$. Пусть t — неподвижная точка F, отличная от 0, t^{-1} — прообраз t. Рассмотрим производное отображение T (см. гл. 1, п. 4.4) на отрезке $[t^{-1},t]=I$ (рис. 18).

Это отображение имеет счетное число участков монотонности $T|\Delta_i=T_i=F^{i+1}$, $i=1,2,3,\ldots$, $T_i:\Delta_i\to I$. Используя невырожденность критической точки, непосредственным счетом проверяем, что при некоторых константах c_1, c_2, $c_3>0$, не зависящих от i, выполнены неравенства:

$$c_1A^{i/2}<\left|\frac{dT_i}{dx}\right|<c_2A^{i/2},$$

$$\left|\frac{d^2T_i(x)}{dx^2}\right|<c_3A^i.$$

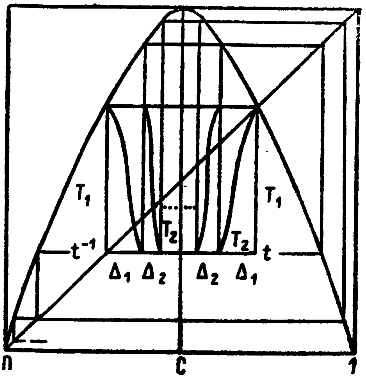

Рис. 18

Если i достаточно велико, мы получаем

$$\left|\frac{dT_i}{dx}\right| > c > 1.$$

Кроме того, при любых $x, y, z \in \Delta_i$ выполнены условия

$$\left|\frac{d^2T_i(x)}{dx^2}\right| \Big/ \left|\frac{dT_i}{dx}(y)\right| \cdot \left|\frac{dT_i}{dx}(z)\right| < c'.$$

Если отображение T или некоторая его степень T^{k_0} является растягивающим, то T удовлетворяет условиям теоремы 1.1, и мы получаем существование T-инвариантной абсолютно непрерывной меры ν и описание ее эргодических свойств. По ν однозначно определяется F-инвариантная эргодическая мера μ, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега. Плотность меры μ отделена от нуля и непрерывна всюду, кроме траектории критической точки (в данном случае, кроме точек $x=0$, $x=1$), где она имеет особенности типа $1/\sqrt{x}$.

Квадратичные отображения являются частным случаем унимодальных (т. е. с одним экстремумом: максимумом или минимумом) *отображений с отрицательным шварцианом*

$$SF = \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 < 0,$$

топологическая структура которых хорошо изучена (см. [62]). Для отображений с отрицательным шварцианом абсолютно непрерывная инвариантная мера существует в двух случаях, обобщающих ситуацию, изображенную на рисунке 18. Во-первых, если критическая точка F, начиная с некоторой итерации, совпадает с отталкивающей периодической и, во-вторых, если траектория критической точки попадает в инвариантное отталкивающее канторово множество (см. [82], [68]).

2.2. Чередование стохастичности и устойчивости. При исследовании ряда однопараметрических семейств одномерных отображений было обнаружено чередование двух различных типов динамики.

К I-му типу относятся отображения, для которых почти всякая в смысле меры Лебега траектория (в том числе траектории критических точек) сходится к устойчивому притягивающему циклу, и множество неблуждающих точек состоит из этого цикла и отталкивающего инвариантного канторова множества. Отображения I-го типа являются структурно устойчивыми.

Противоположным является II-й тип со стохастическим поведением траекторий на множестве положительной меры. К этому типу относятся унимодальные преобразования, для которых некоторая итерация критической точки содержится в инвариантном отталкивающем канторовом множестве. Однако такие преобразования, для которых траектория критической точки не приближается к ней самой меньше, чем на некоторое фиксированное расстояние, не исчерпывают всех примеров систем со стохастическим поведением.

Пусть $F:[0,1]\to[0,1]$, $F(0)=F(1)=0$, $F'(0)\neq 0$ — унимодальное отображение класса C^3 с невырожденной критической точкой. Рассмотрим однопараметрическое семейство кусочно гладких отображений

$$T_\lambda\colon x\mapsto\lambda\cdot F(x)\ (\mathrm{mod}\ 1),\ \lambda>1.$$

Отображение T_λ имеет конечное число монотонных ветвей, растущее с ростом λ, и центральную ветвь (рис. 19).

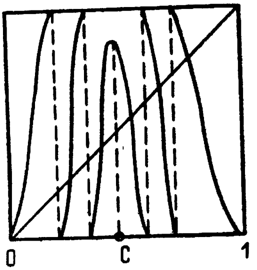

Рис. 19

При значениях параметра λ таких, что $\lambda\cdot F(c)\in\mathbf{N}$, центральная ветвь распадается на две монотонных и рождается новая центральная ветвь. Обозначим через λ_n соответствующие последовательные значения параметра.

Теорема 2.1 ([68]). $\forall\varepsilon>0$ существует $\Lambda(\varepsilon)$ такое, что для $\lambda_n>\Lambda(\varepsilon)$ mes $\{\lambda\in[\lambda_n,\lambda_{n+1}]:T_\lambda$ имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру$\}>(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(1-\varepsilon)$.

Множество значений параметра λ, соответствующих стохастическому поведению, строится как дополнение к открытому множеству $V=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} V_n$, где $V_n=\{\lambda{:}T_\lambda^n(c)$ попадает в запрещенный на шаге n интервал, содержащий $c\}$. Наличие большого параметра гарантирует, что длины запрещенных интервалов быстро убывают с ростом n, а вместе с ними и $\operatorname{mes} V_n$, так что $\operatorname{mes} V\to 0$ при $\lambda\to\infty$.

Теорема 2.1 непосредственно обобщается на случай отображения с несколькими экстремумами.

Для однопараметрического семейства квадратичных отображений $x\mapsto ax(1-x)$, $a\in[0, 4]$, большой параметр отсутствует. Однако, переходя к производному отображению, как это было описано выше в пункте 2.1, мы получаем при a, близких к 4, кусочно гладкое отображение T_a, аналогичное изображенному на рисунке 19. Используя то, что отображение T_4 является растягивающим, удается получить следующий результат (см. [68]).

Теорема 2.2. Пусть F — отображение, C^3-близкое к $x\mapsto x(1-x)$, и λ_0 определено условием $\lambda_0\cdot F(c)=1$. Тогда мера множества $M=\{\lambda\in(0,\lambda_0]\,|\,F_\lambda{:}\ x\mapsto \lambda\cdot F(x)$ имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру$\}$ больше нуля. При этом λ_0 — точка плотности множества M.

Аналогичный результат справедлив для семейства гладких унимодальных отображений $x\mapsto a\cdot F(x)$, где $F(x)$ — отображение с отрицательным шварцианом.

Результаты, аналогичные теореме 2.2, для различных классов унимодальных отображений получили Гукенхаймер (J. Guckenheimer), Бенедикс (M. Benedicks) и Карлесон (L. Carleson), Колле (P. Collet) и Экман (J.-P. Eckmann) (см. [62]).

Следующие два вопроса относятся к проблеме чередования структурно устойчивого и стохастического поведения в одномерных системах.

1. Является ли множество структурно устойчивых систем плотным в C^r-топологии при $r\geqslant 2$?

2. Верно ли, что всякое унимодальное отображение с отрицательным шварцианом, топологически сопряженное отображению постоянного угла наклона, имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру?

2.3. Эргодические свойства абсолютно непрерывных мер. Наиболее общие результаты об эргодических свойствах абсолютно непрерывных мер для отображений с разрывами и с критическими точками принадлежат Ледрапье [73] и изложены в следующих теоремах 2.3—2.6.

Рассматривается отображение $f: [0, 1]\to[0, 1]$, для которого существует конечное разбиение $[0, 1]$ точками $0=b_0<b_1<\ldots$ $\ldots<b_m<b_{m+1}=1$, такое, что ограничение f на каждый отрезок $[b_j, b_{j+1}]$ обладает следующими свойствами.

c_1. f дифференцируемо и f' удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\varepsilon > 0$.

c_2. Имеется конечное число критических точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $f'(a_i) = 0$.

c_3. Существуют положительные k_i^-, k_i^+ такие, что выражение $\log \frac{|f'(x)|}{|x-a_i|^{k_i^{-(+)}}}$ ограничено слева (справа) от a_i.

Теорема 2.3 ([73]). Пусть Q — разбиение отрезка $[0, 1]$, порожденное точками разрыва и критическими точками, μ — эргодическая, f — инвариантная, абсолютно непрерывная мера с положительной энтропией $h_\mu(f)$. Тогда если f^k эргодично при всех k, то естественное расширение эндоморфизма f изоморфно сдвигу Бернулли. В любом случае существует такое k_0, что естественное расширение f^{k_0} бернуллиевское на каждой эргодической компоненте, общее число которых конечно. Справедлива формула Рохлина для энтропии

$$h_\mu(f) = \int \log |f'| \, d\mu.$$

Доказательство теоремы 2.3 основано на построении для естественного расширения отображения f системы локальных неустойчивых слоев, аналогично тому, как это делается для гиперболических аттракторов, см. главы 7, 8.

Соласно терминологии главы 7, отображение f следует считать неравномерно полно гиперболическим. При этом слои укорачиваются как для траекторий, проходящих близко к критическим точкам, так и для траекторий, близких к точам разрыва (так же, как в системах, рассматриваемых в главе 8). Аналогия становится полной, если построить отображение с аттрактором, действие на котором изоморфно естественному расширению. Наиболее известный пример для отображений с разрывами — это аттрактор Лоренца (см. [92] и гл. 8). Пример для отображений с критическими точками — это так называемая «перекрученная подкова» (см. [69]).

Пусть $Q_i = [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ — элементы разбиения Q теоремы 2.3. Точки естественного расширения $y = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in (Y, \tilde{f}, \tilde{\mu})$ эндоморфизма (I, f, μ) (см. гл. 1, п. 4.6) могут быть обозначены как $y = (x; z) = (x; z_1, z_2, \ldots)$, где $x \in I$, а z_k — индекс элемента $Q_{z_k} \ni x_k$. Обозначим через Z множество последовательностей z; $\Pi: y = (x; z) \mapsto x$ — проекция.

Теорема 2.4 ([73]). Пусть f — отображение, удовлетворяющее $c_1 - c_3$, μ — абсолютно непрерывная f-инвариантная мера и пусть число χ удовлетворяет условию $0 < \chi < \int \log |f'| \, d\mu$. Тогда на Y существуют измеримые функции α, β, γ, $\tilde{\gamma}$ и константа D такие, что

(i) на Y $\tilde{\mu}$-почти всюду выполнено $\alpha > 0$, $1 < \beta < \infty$, $0 < \gamma < \tilde{\gamma} < \infty$.

(ii) Если $y=(x;\, z)$ и $|t|<\alpha(y)$, то $y_t=(x+t;\, z)\in Y$.

(iii) $|\Pi(\tilde{f}^{-n}y)-\Pi(\tilde{f}^{-n}y_t)|\leqslant|t|\,\beta(y)\exp(-\chi n)$.

(iv) Для всякого n

$$1/D\leqslant\frac{f'(\Pi(\tilde{f}^{-n}y))}{f'(\Pi(\tilde{f}^{-n}y_t))}\leqslant D.$$

$$\text{(v)}\quad \gamma(y)\leqslant\prod_{n=1}^{\infty}\frac{f'(\Pi(\tilde{f}^{-n}y))}{f'(\Pi(\tilde{f}^{-n}y_t))}=\Delta(y,\, y_t)\leqslant\tilde{\gamma}(y).$$

Теорема 2.4 показывает, что классы эквивалентности точек на Y, порожденные проекцией на Z, состоят из открытых интервалов. Эти классы определяют измеримое разбиение ξ. Условные меры, индуцированные $\tilde{\mu}$ на ξ, допускают явное описание.

Теорема 2.5 ([73]). Пусть в условиях теоремы 2.4 $q(y,\,\cdot)$ — система условных мер, индуцированных $\tilde{\mu}$ на разбиении ξ. Для $\tilde{\mu}$-почти всех y меры $q(y,\Pi^{-1},\,\cdot)$ на I абсолютно непрерывны относительно меры Лебега. Существует образующее разбиение $\eta>\xi$, и меры q задаются формулой

$$q(y,\, B)=\frac{\int\limits_{B\cap\eta(y)}\Delta(y,\, y')\,dy'}{\int\limits_{\eta(y)}\Delta(y,\, y')\,dy'},$$

где $\Delta(y,y')$ определено в свойстве (v) теоремы 2.4.

При рассмотрении индивидуальных траекторий естественно назвать *регулярными* точки, которые удовлетворяют следующим условиям:

(R_1) Последовательность мер $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i x}$ слабо сходится к эргодической мере μ_x.

(R_2) Последовательность чисел $1/n\log|(f^{n'})(x)|$ сходится к λ_x.

(R_3) $$\lambda_x=\int\log|f'|\,d\mu_x.$$

Регулярная точка называется *положительно регулярной*, если $\lambda_x>0$.

Теорема 2.6 ([73]). Пусть f — гладкое отображение $[0,1]$ в $[0,1]$, удовлетворяющее условиям c_1—c_3.

Множество положительно регулярных точек имеет положительную меру Лебега тогда и только тогда, когда существует абсолютно непрерывная инвариантная мера с положительной энтропией.

§ 3. Универсальность Фейгенбаума

3.1. Явление универсальности. При изучении некоторых однопараметрических семейств дифференциальных уравнений (система Лоренца, нелинейные колебания в электрическом контуре, галеркинские аппроксимации уравнений Навье—Стокса и др.) наблюдаются последовательные *бифуркации удвоения* периода устойчивых периодических траекторий. Это происходит в том случае, когда для некоторой периодической траектории γ, непрерывно зависящей от параметра μ, собственное значение $\lambda(\mu)$ линейной части оператора монодромии вдоль γ принимает значение $\lambda(\mu_0)=-1$. В случае общего положения, при прохождении параметра через μ_0 от γ ответвляется новое периодическое решение γ', которое при $\mu=\mu_0$ совпадает с дважды пройденным γ. Для $\gamma'(\mu)$ соответствующее собственное значение $\lambda'(\mu_0)=(\lambda(\mu_0))^2=1$. При дальнейшем изменении μ собственное значение $\lambda'(\mu)$ меняется, и при некотором μ_1 оказывается $\lambda'(\mu_1)=-1$, после чего от γ' ответвляется траектория с периодом вдвое большим, чем период $\gamma'(\mu_1)$, и так далее. Моменты последовательных бифуркаций μ_i имеют предел $\mu_\infty=\lim\limits_{i\to\infty}\mu_i$. При $\mu_i\to\mu_\infty$ бифурцирующие траектории становятся все более сложными и сходятся к некоторому инвариантному множеству, структура которого не зависит от рассматриваемого семейства уравнений.

Аналогичное явление наблюдается для многих дискретных преобразований, в частности для одномерных. Более того, для любого семейства дифференцируемых унимодальных отображений $F_t:[0,1]\to[0,1]$, $t\in[0,1]$, непрерывно зависящих от параметра, такого, что $F_0(x)\equiv0$, $\max F_1(x)=1$ (см. рис. 18), серии из последовательных бифуркаций удвоения встречаются бесконечное число раз.

Рассмотрим, в частности, следующее семейство квадратичных отображений $G_\mu(x)=1-\mu x^2$, $x\in[-1,1]$, $\mu\in[0,2]$. При $\mu_0=0.75$ происходит первая бифуркация удвоения: из неподвижной точки $x_0(0.75)=2/3$ рождается пара точек $x_1(\mu)$, $x_2(\mu)$, образующих цикл периода 2.

Последующие бифуркационные значения, приводящие к рождению циклов периодов 2^n, $n=2, 3, 4, \ldots$, будут равны: $\mu_1=1.25$, $\mu_2=1.3681$, $\mu_3=1.3940, \ldots$. Последовательность μ_n стремится к значению $\mu_\infty=1.40155\ldots$ такому, что отображение G_{μ_∞} имеет периодические траектории только периодов 2^n при любом n. Последовательные отношения $\dfrac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n}=\delta_n$ принимают значения: $\delta_1=4.23$, $\delta_2=4.55$, $\delta_3=4.65$, $\delta_4=4.664$, $\delta_5=4.668$, $\delta_6=4.669, \ldots$ Последовательность δ_n стремится к $\delta=4.6692\ldots$. Явление универсальности состоит в том, что числа δ_n, вычисленные для различных однопараметрических семейств, сходятся к числу δ, не зависящему ни от размерности фазового пространства, ни от выбора семейства. Иначе говоря,

$$|\mu_n - \mu_\infty| \sim c \cdot \delta^{-n},$$

где константа c зависит от семейства, а δ — универсальная константа. Другая универсальность наблюдается в расположении периодических траекторий. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}$ — значения точек цикла периода 2^n в момент бифуркации, когда $\frac{dF^{2^n}}{dx} = \prod_{i=1}^{2^n} \frac{dF}{dx}(x_i) = -1$. Обозначим $x_{(n)}$ ближайшую к 0 точку цикла $(x_1, x_2, \ldots, x_{2^n})$.

Справедливо соотношение $x_{(n)} \sim c' \cdot \lambda^n$, где $\lambda = -0{,}3995\ldots$ — также универсальная константа, не зависящая от семейства отображений.

3.2. Свойства преобразования удвоения. Явление универсальности было обнаружено и исследовано Фейгенбаумом (M. Feigenbaum) в 1978 г. и стимулировало большое число экспериментальных и теоретических работ (библиографию см. в [62]).

Для того чтобы объяснить явление универсальности Фейгенбаума, введем так называемое *преобразование удвоения*, состоящее в том, что мы рассматриваем композицию $G \circ G$, но не на всей области определения G, а на меньшем интервале, а затем перенормируем этот интервал. А именно, рассмотрим множество $\mathfrak{A}_1$, состоящее из четных унимодальных отображений $\psi: [-1, 1] \to [-1, 1]$ класса гладкости C^1, удовлетворяющих следующим условиям (см. рис. 20):

1) $\psi'(0) = 0$; $\psi(0) = 1$,

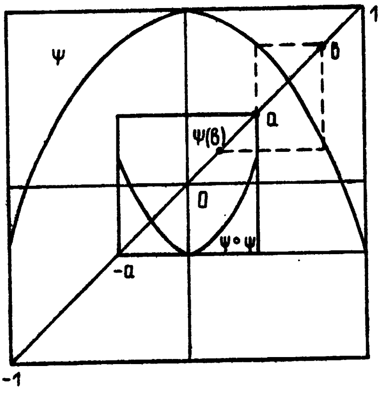

Рис. 20

2) $\psi(1) = -a < 0$,

3) $b = \psi(a) > a$; $\psi(b) = \psi^2(a) < a$,

для $\psi \in \mathfrak{A}_1$ определим

$$J\psi(x) = -1/a\, \psi \circ \psi(-ax).$$

Нелинейный оператор $J : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1$ называется преобразованием удвоения. Следующие утверждения описывают свойства оператора J.

Теорема 3.1. Существует четная аналитическая функция

$$\Phi(x) = 1 - 1.52763x^2 + 0.104815x^4 - 0.0267057x^6 + \dots,$$

инвариантная относительно преобразования удвоения. При этом $a = a(\Phi) = -\Phi(1)$ совпадает с $-\lambda = 0.3995$.

Обозначим $\mathscr{H}$ банахово пространство четных функций $\psi(z)$, аналитических и ограниченных в некоторой окрестности отрезка $[-1, 1]$, действительных на действительной оси; $\mathscr{H}_0$ — подпространство $\mathscr{H}$, состоящее из функций ψ, удовлетворяющих условиям $\psi(0) = \psi'(0) = 0$; $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_0 + 1$.

Теорема 3.2. Существует окрестность U_Φ точки Φ в $\mathscr{H}_1$ такая, что оператор J отображает U_Φ в $\mathscr{H}_1$ и является в U_Φ бесконечно дифференцируемым. Оператор DJ_Φ гиперболический, он имеет растягивающееся одномерное подпространство и сжимающееся подпространство коразмерности 1. Собственное значение в растягивающемся подпространстве совпадает с $\delta = 4.6692\dots$.

Пусть $\Sigma_0 \subset \mathfrak{A}_1$ обозначает бифуркационную поверхность, состоящую из отображений ψ, для которых в неподвижной точке $x_0 \in [0, 1]$, $\psi'(x_0) = -1$, $(\psi \circ \psi)'''(x_0) < 0$.

Теорема 3.3. Неустойчивое многообразие $W^u_{\text{лок}}(\Phi)$, определенное в окрестности Φ, может быть продолжено до глобального $W^u(\Phi)$, которое трансверсально пересекает поверхность Σ_0. $W^u(\Phi)$ состоит из отображений с отрицательным шварцианом.

Имеющиеся на сегодняшний день доказательства теорем 3.1—3.3 в той или иной степени используют оценки, полученные на компьютере (см. [18]). Строгие результаты получены Колле, Экманом и Лэнфордом для класса отображений $\mathfrak{A}_\varepsilon = \{f(|x|^{1+\varepsilon})$, f — аналитическая функция$\}$ при достаточно малом ε (см. [62]).

В окрестности U_Φ неподвижной точки Φ мы приходим к следующей картине (рис. 21). Из-за седлообразной структуры действия оператора J в окрестности точки Φ, поверхности $J^{-n}\Sigma_0$, имеющие коразмерность 1, вытягиваются вдоль устойчивого многообразия $W^s(\Phi)$ точки Φ. Однопараметрическому семейству отображений F_μ соответствует на рисунке 21 кривая. Если эта кривая трансверсально пересекает многообразие $W^s(\Phi)$, то начиная с некоторого n, F_μ трансверсально пересекает поверхности $J^{-n}\Sigma_0$. Точкам пересечения F_μ с $J^{-n}\Sigma_0$ соответствуют би-

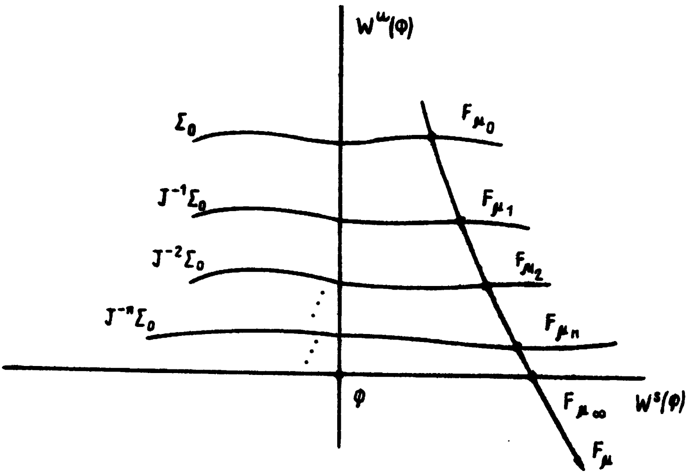

Рис. 21

фуркации удвоения периода $2^n \to 2^{n+1}$, а точке пересечения F_μ с $W^s(\Phi)$ — точка накопления бифуркационных значений $\mu_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$. Так как расстояние от $J^{-n}\Sigma_0$ до $W^s(\Phi)$ убывает как δ^{-n}, получаем

$$|\mu_\infty - \mu_n| \sim c\cdot\delta^{-n},$$

что и объясняет универсальность Фейгенбаума по параметру.

Пусть теперь $x_{(n)}$ — ближайшая к 0 точка цикла периода 2^n для F_{μ_n}. Отображение $J^nF_{\mu_n}$ принадлежит поверхности Σ_0 и находится, в силу седлообразного действия оператора J, в малой окрестности точки пересечения $W^u(\Phi)\cap\Sigma_0=\Phi_*$. Пусть $x_0\in[0, 1]$ — неподвижная точка для $J^nF_{\mu_n}$.

Мы имеем $x_{(n)} = x_0 \prod\limits_{i=1}^{n} (-a_i)$, где a_i — перенормировочная константа для $J^iF_{\mu_n}$. Подавляющее число точек $J^kF_{\mu_n}$, $k\in[1, n]$, находится в малой окрестности неподвижной точки Φ, и соответствующие значения a_i экспоненциально близки к $a(\Phi) = 0.3995\ldots$. Отсюда вытекает универсальность Фейгенбаума по пространству.

Если требуется доказать свойство универсальности для конкретного семейства F_μ, т. е. если экспериментальная проверка соотношения $|\mu_\infty - \mu_n| \sim c\cdot\delta^{-n}$ нас не удовлетворяет, то мы должны проверить, что кривая F_μ находится в области определения оператора J и что пересечение F_μ с $W^s(\Phi)$ трансверсально. Лэнфорд анонсировал соответствующее утверждение для семейства квадратичных отображений.

Способ построения полного неустойчивого многообразия предложили Е. Б. Вул и К. М. Ханин (см. [18]). Рассматривается пространство однопараметрических семейств $F_\mu(x)$ и делается преобразование удвоения по x и перенормировка параметра. Если семейство $F_\mu(x)$ содержится в достаточно малой окрестности сепаратрисы $W^u(\Phi)$, то при последовательном применении этого преобразования происходит экспоненциально быстрая сходимость к семейству, представляющему $W^u(\Phi)$.

3.3. Описание окрестности неподвижной точки. Следующее описание окрестности U_Φ точки Φ в пространстве аналитических функций представляется вполне правдоподобным. Многообразие $W^s(\Phi)$ делит эту окрестность на 2 части (рис. 22). Над

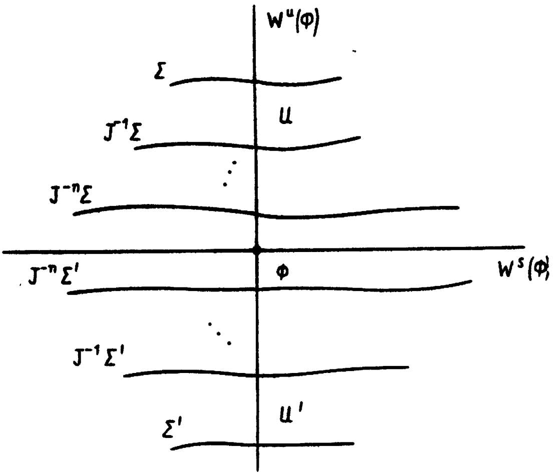

Рис. 22

$W^s(\Phi)$ фундаментальная область U оператора J^{-1} заключена между поверхностью $\Sigma = \{f : f^2(0) = 0\}$ и $J^{-1}\Sigma$ (рис. 23).

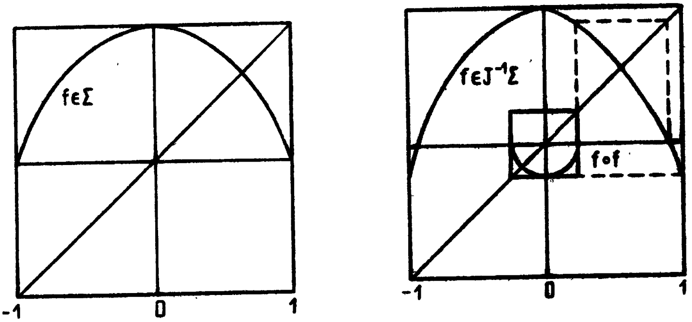

Рис. 23

Под $W^s(\Phi)$ фундаментальная область U' оператора J^{-1} заключена между $\Sigma' = \{f : f^2(0) = -1\}$ и $J^{-1}\Sigma'$ (рис. 24).

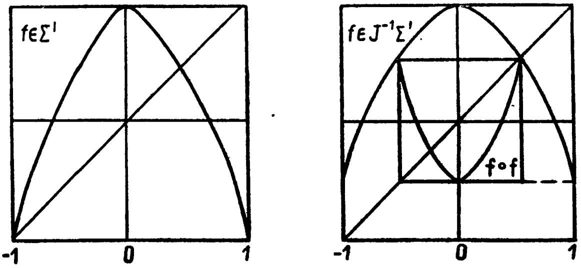

Рис. 24

Устойчивое многообразие $W^s(\Phi)$ отделяет лежащие над $W^s(\Phi)$ отображения с простой структурой (конечным множеством неблуждающих точек $\Omega(\psi)$ и нулевой топологической энтропией) от лежащих под $W^s(\Phi)$ отображений ψ со сложной структурой (бесконечным $\Omega(\psi)$ и $h(\psi)>0$).

Для отображений $\psi\in J^{-n}U$ множество $\Omega(\psi)$ состоит из притягивающей (или нейтральной для $\psi\in J^{-(n+1)}\Sigma_0$) траектории периода 2^{n+1} (или 2^{n+2}) и отталкивающих траекторий периодов 2^k, $k<n+1$ (или $k<n+2$).

Для отображений $\psi\in J^{-n}U'$, $n\geqslant 1$, все множество $\Omega(\psi)$, за исключением конечного числа отталкивающих траекторий периодов 2^k, $k<n$, содержится в объединении 2^n непересекающихся отрезков. Отображения $\psi\in U'$ имеют периодические траектории нечетных периодов, а для $\psi\in J^{-n}U'$ период любой периодической траектории делится на 2^n (кроме указанных выше траекторий периодов 2^k, $k<n$).

Устойчивое многообразие $W^s(\Phi)$ является границей возникновения стохастических движений. А именно, пусть $F_\mu\subset U_\Phi$ — кривая, трансверсально пересекающая $W^s(\Phi)$, и пусть $\gamma^{(n)}=F_\mu\cap J^{-n}U'$.

Преобразования $F_\mu\in\gamma^{(n)}$ имеют отрицательный шварциан, так как находятся в малой окрестности точки Φ, удовлетворяющей условию $S\Phi<0$. Отрицательность шварциана сохраняется при переходе к степени преобразования и при перенормировке. Отсюда следует, что преобразования $G_\mu=J^nF_\mu\in J^n\gamma^{(n)}\subset U'$ также удовлетворяют условию $SG_\mu<0$. Кривая $J^n\gamma^{(n)}$ трансверсально пересекает Σ', и из результатов, сформулированных в §2, следует, что мера множества $\{\mu : G_\mu$ имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру$\}$ положительна. Возвращаясь к преобразованиям F_μ, получаем, что существует множество значений параметра положительной меры $\{\mu : F_\mu$ имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру, сосредоточенную на 2^n отрезках, и ограничение $F_\mu^{2^n}$ на эргодическую компоненту бернуллиевское$\}$.

Аналогичная ситуация возникает в окрестности любой точки трансверсального пересечения семейства отображений с отрицательным шварцианом с $W^s(\Phi)$, в частности, семейства квадратичных отображений.

3.4. Свойства отображений, лежащих на устойчивом многообразии. Преобразования $\psi \in W^s(\Phi) \cap U_\Phi$, лежащие на границе между стохастическим и нестохастическим поведением, обладают специальными свойствами. А именно

(i) ψ имеет периодические точки периодов 2^n при всяком n и не имеет периодических точек других периодов,

(ii) $S\psi < 0$.

Следующая теорема, доказанная Мисюревичем (M. Misiurewicz) и независимо Ю. С. Барковским и Г. М. Левиным (см. [18]), описывает свойства унимодального отображения ψ, удовлетворяющего (i), (ii).

Теорема 3.4. $\Omega(\psi) = \sigma \cup \operatorname{Per} \psi$, где $\operatorname{Per} \psi$ — множество периодических точек ψ, а σ — замкнутое ψ-инвариантное канторово множество со следующими свойствами:

a) $\psi: \sigma \to \sigma$ — минимальный гомеоморфизм;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\psi^n x, \sigma) = 0 \quad \forall x \notin \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \psi^{-k}(\operatorname{Per} \psi)$;

c) $\forall x \in [-1, 1] \quad \exists t(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi^{2^n}(x)$ и $t(x) = x$ для $x \in \Omega(\psi)$;

d) единственная неатомическая ψ-инвариантная мера μ сосредоточена на σ; система (σ, ψ, μ) изоморфна сдвигу на дискретной абелевой группе — «двоичном соленоиде».

Соленоидальная структура действия $\psi|\sigma$ вытекает из следующего. Существует система отрезков $\Delta_i^{(n)}$, $n \geqslant 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, 2^n - 1$, такая, что $\psi\Delta_i^{(n)} = \Delta_{i+1}^{(n)}$, если $i < 2^n - 1$, и $\psi\Delta_{2^n-1}^{(n)} \subset$ $\subset \Delta_0^{(n)}$; при $i \neq j$ $\Delta_i^{(n)} \cap \Delta_j^{(n)} = \varnothing$; $\Delta_k^{(n-1)} \supset \{\Delta_k^{(n)}; \Delta_{k+2^{n-1}}^{(n)}\}$; $\operatorname{diam}\limits_{n\to\infty} \Delta_k^{(n)} \to 0$ и

$$\sigma = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{i=0}^{2^n-1} \Delta_i^{(n)}.$$

Спектр динамической системы (σ, ψ, μ) состоит из двоично-рациональных чисел. Соответствующие собственные функции будут иметь вид:

$$e^{(n)}(x) = \exp(2\pi i l \cdot 2^{-n}) \text{ для } x \in \Delta_l^{(n)} \text{ и}$$
$$e_r^{(n)}(x) = (e^{(n)}(x))^{2r+1}, \quad r = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1.$$

Неподвижная точка преобразования удвоения $\Phi = J\Phi$ обладает, помимо свойств a)—d) из теоремы 3.4, дополнительными свойствами, вытекающими из уравнения

$$\Phi(x) = -\frac{1}{\lambda} \Phi \circ \Phi(-\lambda x).$$

Следующие результаты получены в [18].

Теорема 3.5. Пусть $\varphi(x) \in C^1([-1, 1])$, $\int \varphi(x)\mu(dx) = 0$, $\rho_\varphi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{2^{n-1}-1} \rho_r^{(n)} \delta\left(\omega - \frac{2r+1}{2^n}\right)$ — спектральная мера функции φ. Тогда

$$\rho_r^{(n)} \leqslant \frac{1}{2} \max_{x \in [-1,1]} |\varphi'(x)| \cdot \max_{0 \leqslant l \leqslant 2^{n-1}-1} |\Delta_l^{(n-1)}|.$$

Теорема 3.6. Существуют константы $\gamma < 0$, $\beta_0 > 0$ такие, что для точек x некоторого подмножества полной μ-меры множества σ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |\Delta_l^{(n)}(x)| = \gamma,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left\{ \sum_{i=0}^{2^n-1} |\Delta_i^{(n)}|^{\beta_0} \right\} = 0.$$

При этом β_0 — хаусдорфова размерность σ и

$$\beta_0 > -\frac{\ln 2}{\gamma},$$

т. е. хаусдорфова размерность достигается за счет точек, нетипичных относительно меры μ.

§ 4. Рациональные эндоморфизмы сферы Римана

4.1. Множество Жюлиа и его дополнение. Динамике рациональных эндоморфизмов $z \mapsto R(z) = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 + \ldots + b_m z^m}$ сферы Римана были посвящены глубокие исследования Жюлиа (G. Julia) и Фату в начале этого века (см. книгу [83]). Как и для действительных одномерных отображений, в случае рационального эндоморфизма точки фазового пространства могут иметь как асимптотически устойчивое, так и стохастическое поведение. Описание различных типов динамики использует следующую классификацию периодических траекторий (иначе циклов) эндоморфизма R. Цикл $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}]$ называется *притягивающим*, если $|R^{m'}(\alpha)| = \left| \prod_{i=0}^{m-1} R'(\alpha_i) \right| < 1$; *нейтральным рациональным*, если $R^{m'}(\alpha) = \exp 2\pi i r$, $r \in \mathbf{Q}$; *нейтральным иррациональным*, если $R^{m'}(\alpha) = \exp 2\pi i \theta$, θ — иррационально; *отталкивающим*, если $|R^{m'}(\alpha)| > 1$.

Точки со стохастическим поведением содержатся в так называемом *множестве Жюлиа* $J(R)$, которое совпадает с замыканием множества периодических отталкивающих траекторий отображения R. Множество $J(R)$ непустое, совершенное, инвариантное относительно R и R^{-1}.

Существуют эндоморфизмы R, для которых $J(R)=\overline{\mathbf{C}}$ (см. [83]), однако, в смысле категории, такие эндоморфизмы, по-видимому, являются исключением (см. ниже). Если $\Delta(R)=\mathbf{C}\setminus J(R)\neq\varnothing$, то всякая компонента связности $D\subset\Delta(R)$ состоит из точек с одинаковым асимптотическим поведением. Возможные типы динамики для точек $z\in\Delta(R)$ изучались в работах Фату и Жюлиа. Окончательный результат был недавно получен Сулливаном (D. Sullivan) (см. [99]).

Теорема 4.1. Пусть D — компонента связности $\Delta(R)$. Тогда

(i) Существует такое k_0, что область $R^{k_0}D=D_1$ — периодическая, т. е. $D_1=R^mD_1$, $R^kD_1\cap R^lD_1=\varnothing$ при $|k-l|<m$ при некотором m.

(ii) Число периодических компонент конечно.

(iii) Динамика на любой периодической компоненте D относится к одному из следующих типов:

a) для всякого $z\in D$ траектория $\{R^n(z)\}$ сходится к точкам некоторого притягивающего цикла $\alpha=[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}]$, где $\alpha_i\in R^iD$;

b) для всякого $z\in D$ траектория $\{R^n(z)\}$ сходится к точкам некоторого рационального нейтрального цикла $\alpha=[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}]$, где α_i принадлежит границе R^iD;

c) D содержит точку некоторого иррационального нейтрального цикла $\alpha=[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}]$ и $R^m|D$ топологически сопряжено повороту на иррациональный угол в единичном круге;

d) $R^m|D$ топологически сопряжено повороту кольца на некоторый иррациональный угол.

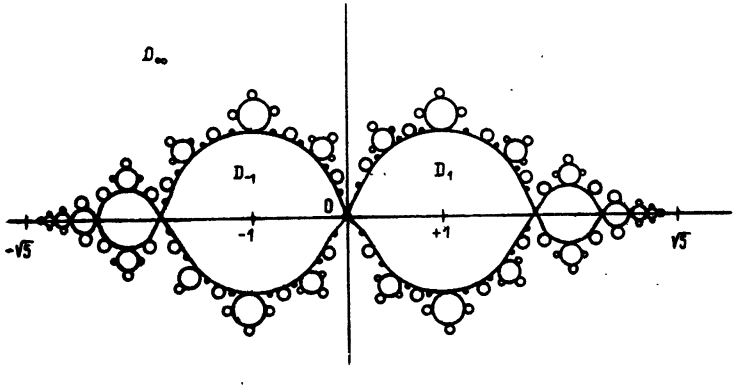

Рис. 25

Рассмотрим в качестве примера отображение, детально исследованное Жюлиа, $z \mapsto R(z) = \frac{1}{2}(z + z^3)$. Структура множества $J(R)$ и компонент связности множества $\Delta(R)$ видна из рисунка 25. $\Delta(R)$ состоит из инвариантной относительно R^{-1} области притяжения к бесконечности D_∞, областей притяжения D_1 и D_{-1} к неподвижным притягивающим точкам $z = 1$ и $z = -1$ и объединения всех прообразов $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^{-n}(D_{\pm 1})$. Как и для любого многочлена, $J(R)$ в этом случае совпадает с границей области D_∞.

4.2. Свойства устойчивости рациональных отображений. Наиболее исследована динамика рациональных отображений, удовлетворяющих следующему свойству гиперболичности:

Существуют такие $c > 1$ и $l_0 \in \mathbf{N}$, что для всякого $z \in J(R)$

$$\left|(R^{l_0})'(z)\right| > c.$$

В этом случае всякая компонента множества $\Delta(R)$ под действием некоторой итерации переходит в компоненту типа a). Необходимое и достаточное условие для гиперболичности состоит в следующем: итерации любой критической точки отображения R сходятся к некоторому притягивающему циклу.

Рациональные отображения с гиперболическим множеством Жюлиа структурно устойчивы. Для полиномиальных эндоморфизмов с гиперболическим множеством Жюлиа с помощью марковских разбиений строится символическая динамика (см. [48] и библиографию к этой статье).

До сих пор остается нерешенной следующая задача, сформулированная еще Фату: является ли множество эндоморфизмов с гиперболическим $J(R)$ плотным в пространстве всех рациональных эндоморфизмов? Эта гипотеза не доказана, в частности, и для семейства квадратичных отображений $z \mapsto z^2 + a$ (и для действительного семейства $x \mapsto x^2 + a$, $a \in \mathbf{R}$).

Для полиномиальных отображений $z \to P(z)$ справедливость этой гипотезы вытекает из следующего условия, сформулированного в недавней работе Сулливана, Манэ (R. Mañé) и Сада (P. Sad): множество полиномов $\{P(z)$, плоская мера Лебега множества Жюлиа $J(P)$ равна нулю$\}$ открыто и всюду плотно в пространстве параметров.

Несмотря на то, что неизвестно, плотны ли гиперболические отображения, справедлива следующая теорема о структурной устойчивости на множестве Жюлиа, так называемой J-устойчивости, доказанная Сулливаном, Манэ и Садом, а также в несколько более слабой форме М. Ю. Любичем [29].

Теорема 4.2. Для всякого семейства $R_w(z)$ рациональных эндоморфизмов, голоморфно зависящих от параметров $w \in U \subset \mathbf{C}^k$, множество $S = \{w : R_w(z)$ есть J-устойчивый эндоморфизм$\}$ открыто и всюду плотно в U. Гомеоморфизм, осуществляющий сопряженность между $J(R_1)$ и $J(R_2)$, где R_1 и R_2 лежат в одной компоненте связности множества S, может быть выбран квазиконформным.

4.3. Эргодические и размерностные свойства множества Жюлиа. Исследование эргодических свойств рациональных эндоморфизмов, т. е. инвариантных мер, сосредоточенных на множестве Жюлиа, было начато Бролиным (H. Brolin), который доказал, что для полиномиального отображения $z \mapsto P(z)$ прообразы $\{P^{-n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ любой точки (кроме, быть может, одной исключительной) распределены асимптотически равномерно по некоторой мере μ на $J(P)$.

В работе М. Ю. Любича [28] результат Бролина распространен на произвольные рациональные функции. Соответствующая мера является единственной мерой максимальной энтропии $h_\mu(R) = h(R) = \log \deg R$.

Для отображений с гиперболическим множеством Жюлиа гиббсовские меры и их связь с хаусдорфовой размерностью исследовал Рюэль [93]. Он доказал, что хаусдорфова размерность множества $J(R)$ аналитически зависит от коэффициентов R. В частности, если $R(z) = z^d + \varepsilon$, где $|\varepsilon|$ мал, то $HD(J(R)) = 1 + (|\varepsilon|^2/4) \cdot \log d +$члены более высокого порядка малости по ε. В то же время Мэннинг (A. Manning) показал в недавней работе, что для открытого множества в пространстве полиномов, содержащего в частности $z^d + \varepsilon$, хаусдорфова размерность носителя меры максимальной энтропии (которая определяется как $\inf\{HD(Y) : \mu(Y) = 1\}$) постоянна и равна 1.

М. Ю. Любич доказал [27], что если эндоморфизм R удовлетворяет условию $J(R) \neq \bar{\mathbf{C}}$, то любая инвариантная эргодическая мера с положительной энтропией взаимно сингулярна с мерой Лебега. В то же время, как показала в недавней работе Рис (M. Rees), положительную меру в пространстве параметров составляют эндоморфизмы R, удовлетворяющие условию: $J(R) = \bar{\mathbf{C}}$ и для всякого множества A положительной меры Лебега $\bigcup\limits_{n \geqslant 0} R^n A$ совпадает с $\mathbf{C}(\mathrm{mod}\, 0)$.

Таким образом, в пространстве параметров рациональных эндоморфизмов сферы Римана, также как для отображений отрезка, имеется два подмножества с противоположными свойствами. С одной стороны, открытое, гипотетически всюду плотное, подмножество, состоящее из структурно устойчивых эндоморфизмов, для которых почти все точки в смысле меры Лебега сходятся к конечному числу притягивающих циклов и множество неблуждающих точек гиперболично. С другой стороны, множество положительной меры, состоящее из эргодических относительно меры Лебега эндоморфизмов. Естественно задать вопрос: образует ли объединение устойчивых и стохастических эндоморфизмов множество полной меры в пространстве параметров?

Основные результаты и методы теории КАМ изложены в книгах [7], [8], [85]. Последние достижения в этой теории связаны с работами Обри (см. [50]), Персиваля [87], Мезера]80].

Основные результаты гиперболической теории (топологического и метрического характера), отражающие различные периоды ее развития, приведены в обзорах [22], [90], а также в книгах [86], [23]. Первая посвящена топологическим, а вторая — метрическим аспектам теории. В них имеются также разнообразные примеры, обширная библиография, приведены различные приложения.

Теория систем Аносова, сохраняющих меру Лиувилля, изложена в монографии [4], представляющей собой первое систематическое и фундаментальное исследование в гиперболической теории. Общие результаты теории систем Аносова имеются также в книге [8] и обзорной статье [6]. Теория гиперболических множеств (топологические свойства, различные примеры) и связанные с ней проблемы (*А*-системы и др.) освещены в книге [86] (см. также [21], где приведено полное доказательство теоремы о семействах ε-траекторий). Символическая динамика для систем Аносова (марковские разбиения, равновесные состояния, меры с максимальной энтропией) построена в [41] (см. также [40], [43]); обобщение на случай гиперболических множеств осуществлено в серии работ Боуэна (см. [13]); некоторые дальнейшие обобщения имеются в [3] (там же дан краткий обзор по топологическим марковским цепям). Основы теории РЧГ-систем развиты в [14]. НПГ-системы введены в [31], где исследованы их локальные свойства и эргодические свойства по отношению к мере Лиувилля (см. также [70]). Обобщение на меры Синая дано в [75].

Основные результаты, описывающие топологические и эргодические свойства геодезических потоков с гиперболическим поведением траекторий (на многообразиях без сопряженных или без фокальных точек, или отрицательной кривизны), а также их связь с римановой геометрией и классической механикой приведены в обзоре [33]. Там же имеется обширная библиография по этой теме, а также рассмотрены другие динамические системы геометрического происхождения (потоки реперов и потоки орициклов).

Доказательство утверждений общего характера о биллиардах можно найти в монографии [23]. Кроме того, в этой книге подробно объясняется, каким образом при изучении некоторых моделей классической механики возникают биллиардные системы. В работе [37] исследованы эргодические свойства рассеивающих биллиардов и, в частности, доказана эргодичность системы двух дисков на двумерном торе. Обсуждение некоторых аспектов эргодической теории рассеивающих и полурассеивающих биллиардов (в том числе газа твердых сфер) приведено в [97]. Подробное изложение теории биллиардов в двумерных выпуклых областях и их связь с задачей Дирихле содержится в [26]. В обзоре [90] приведено обсуждение общих свойств стохастичности динамических систем и, в частности, понятия стохастического аттрактора. Геометрические и топологические свойства аттракторов типа Лоренца изучены в [10], их эргодические свойства — в [16], [58].

Важную роль в развитии теории необратимых одномерных отображений сыграла работа [36], в которой связываются эргодические свойства эндоморфизма и его естественного расширения. В работах [100], [67] изучаются свойства гиббсовских мер для различных классов растягивающих отображений. Эргодическая теория одномерных отображений, не являющихся растягивающими, рассматривается в [68], [73]. Одномерные отображения сыграли существенную роль в развитии метода ренорм-группы применительно к динамическим системам, см. [62], [18]. В самое последнее время бурно развивается эргодическая теория комплексно-аналитических отображений сферы Римана; часть из полученных здесь результатов содержится в [27]—[29], [93].

1. *Алексеев В. М.*, Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики. В сб. «Девятая Летняя мат. школа». Киев, Ин-т мат. АН УССР, 1972, 212—341
2. —, Перроновские множества и топологические цепи Маркова. Успехи мат. наук, 1969, *24*, № 5, 227—228
3. —, *Якобсон М. В.*, Символическая динамика и гиперболические динамические системы. Добавление к сб. переводов: *Боуэн Р.*, Методы символической динамики. М.: Мир, 1979, 196—240
4. *Аносов Д. В.*, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1967, № 90, 210
5. —, Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем. Труды 5-й Межд. конф. по нелинейным колебаниям. Ин-т мат. АН УССР. Киев, 1970, *2*, 39—45
6. —, *Синай Я. Г.*, Некоторые гладкие эргодические системы. Успехи мат. наук, 1967, *22*, № 5, 107—172
7. *Арнольд В. И.*, Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979, 431 с.
8. —, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
9. *Афраймович В. С.*, *Быков В. В.*, *Шильников Л. П.*, О возникновении и структуре аттрактора Лоренца. Докл. АН СССР, 1977, *234*, № 2, 336—339
10. —, —, —, О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца. Тр. Моск. мат. о-ва, 1983, *44*, 150—212
11. —, *Песин Я. Б.*, Оценка хаусдорфовой размерности базисного множества в окрестности гомоклинической траектории. Успехи мат. наук, 1984, *39*, № 2, 135—136
12. *Белых В. П.*, Модели дискретных систем фазовой синхронизации, гл. 10 в кн. «Системы фазовой синхронизации» (под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной). М.: Радио и связь, 161—176
13. *Боуэн Р.*, Методы символической динамики. Сб. статей. М.: Мир, 1979, 245 с.
14. *Брин М. И.*, *Песин Я. Б.*, Частично гиперболические динамические системы. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, *38*, № 1, 170—212
15. *Бунимович Л. А.*, О бильярдах, близких .к рассеивающим. Мат. сб., 1974, *95*, № 1, 49—73
16. —, *Синай Я. Г.*, Об основной теореме теории рассеивающих бильярдов. Мат. сб., 1973, *90*, № 3, 415—431
17. —, —, Стохастичность аттрактора в модели Лоренца. В кн. «Нелинейные волны» (под ред. А. В. Гапонова-Грехова). М.: Наука, 1980, 212—226
18. *Вул Е. Б.*, *Ханин К. М.*, *Синай Я. Г.*, Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм. Успехи мат. наук, 1984, *39*, № 3, 3—37
19. *Гачок П. В.*, Конструирование моделей динамических систем со странным аттрактором. Докл. АН СССР, 1984, *274*, № 6, 1292—1294
20. *Гельфанд И. М.*, *Граев М. И.*, *Виленкин И. Я.*, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962, 656 с.
21. *Каток А. Б.*, Локальные свойства гиперболических множеств. Добавление I к кн.: *Нитецки З.*, «Введение в дифференциальную динамику». М.: Мир, 1975, 214—232
22. —, *Синай Я. Г.*, *Стёпин А. М.*, Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой. В сб. «Мат. анализ. Т. 13. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 129—262
23. *Корнфельд И. П.*, *Синай Я. Г.*, *Фомин С. В.*, Эргодическая теория. М.: Наука, 1980, 383 с.

24. *Крылов Н. С.*, Работы по обоснованию статистической физики. М.: Из-во АН СССР, 1950, 206 с.

25. *Лазуткин В. Ф.*, Существование каустик для биллиардной задачи в выпуклой области. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, *37*, № 1, 188—223

26. —, Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа. Л., Из-во Ленингр. Ун-та, 1981, 196 с.

27. *Любич М. Ю.*, О типичном поведении траекторий рационального отображения сферы. Докл. АН СССР, 1982, *268*, № 1, 29—32

28. —, О мере максимальной энтропии рационального эндоморфизма сферы Римана. Функц. анализ и его прил., 1982, *16*, № 4, 78—79

29. —, Исследование устойчивости динамики рациональных отображений. В сб. «Теория функций, функциональный анализ и их прилож.». Харьков, 1984, вып. 42, 72—91

30. *Маргулис Г. А.*, О некоторых мерах, связанных с У-потоками на компактных многообразиях. Функц. анализ и его прил., 1970, *4*, № 1, 62—76

31. *Песин Я. Б.*, Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 4, 55—111

32. —, Пример неэргодического потока с ненулевыми характеристическими показателями. Функц. анализ и его прил., 1974, *8*, № 3, 71—72

33. —, Геодезические потоки с гиперболическим поведением траекторий и связанные с ними объекты. Успехи мат. наук, 1981, *26*, № 4, 3—51

34. —, *Пицкель Б. С.*, Топологическое давление и вариационный принцип для некомпактных множеств. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, № 4, 50—63

35. *Плыкин Р. В.*, О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 3, 94—104

36. *Рохлин В. А.*, Точные эндоморфизмы пространства Лебега. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, *25*, № 4, 499—530

37. *Синай Я. Г.*, Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов. Успехи мат. наук, 1970, *25*, № 2, 141—192

38. —, Эргодические свойства газа Лоренца. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 3, 46—59

39. —, Несколько точных результатов об убывании корреляций. Дополнение к кн. Г. М. Заславского: «Статистическая необратимость в нелинейных системах». М.: Наука, 1970, 124—139

40. —, Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы. Функц. анализ и его прил., 1968, *2*, № 1, 64—89

41. —, Гиббсовские меры в эргодической теории. Успехи мат. наук, 1972, *27*, № 4, 21—64

42. —, Геодезические потоки на компактных поверхностях отрицательной кривизны. Докл. АН СССР, 1961, *136*, № 3, 549—552

43. —, Построение марковских разбиений. Функц. анализ и его прил., 1968, *2*, № 3, 70—80

44. —, *Чернов Н. И.*, Энтропия газа твердых сфер по отношению к группе пространственно-временных сдвигов Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1982, № 8, 218—238

45. *Ченцова Н. И.*, Естественная инвариантная мера на подкове Смейла. Докл. АН СССР, 1981, *256*, № 2, 294—298

46. *Чернов Н. И.*, Построение трансверсальных слоев в многомерных полурассеивающих бильярдах. Функц. анализ и его прил., 1982, *16*, № 4, 35—46

47. *Шнирельман А. И.*, Статистические свойства собственных функций. В сб. «Материалы Всес. мат. школы в Дилижане». Ереван, 1974, 267—278

48. *Якобсон М. В.*, Марковские разбиения для рациональных эндоморфизмов сферы Римана. В сб. «Многокомпонентные случайные системы». М.: Наука, 1978, 309—319

49. *Adler R. L., Weiss B.*, Entropy be a complete metric invariant for automorphisms of the torus. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1967, *57*, № 6, 1573—1576

50. *Aubry S., Le Daeron P. V.*, The discrete Frenkel-Kontorova model and its extension. Phys. D, 1983, *8D*, № 3, 381—422

51. *Benettin G., Strelcyn J.-M.*, Numerical experiments on a billiard. Stochastic transition and entropy. Phys. Rev., 1978, *A17*, 773—786

52. *Billingsley P.*, Ergodic theory and information. New York — London — Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1965, 220 pp. (Пер. на рус. яз.: *Биллингслей П.*, Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969, 238 с.)

53. *Birkhoff G. D.*, Dynamical systems. New York, 1927, 290 pp. (Пер. на рус. яз.: *Биркгоф Г.*, Динамические системы. Л. ОГИЗ, 1941, 319 с.)

54. *Boldrighini C., Keane M., Marchetti F.*, Billiards in polygons. Ann. Probab., 1978, *6*, № 4, 532—540

55. *Brin M., Feldman J., Katok A.*, Bernoulli diffeomorphisms and group extensions of dynamical systems with non-zero characteristic exponents. Ann. Math., 1981, *113*, № 1, 159—179

56. *Bunimovich L. A.*, On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. Commun. Math. Phys., 1979, *65*, № 3, 295—312

57. —, Some new advancements in the physical applications of ergodic theory. In the book: «Ergodic Theory and Related Topics» (ed. by Michel H.). Berlin, Akad.-Verlag, 1982, 27—33

58. —, Statistical properties of Lorenz attractors. In the book: «Nonlinear Dynamics and Turbulence» (ed. by G. I. Barenblatt). Boston—London—Melbourne, Pitman, 1983, 1—22

59. —, *Sinai Ya. G.*, Markov partitions for dispersed billiards. Commun. Math. Phys., 1980, *78*, № 2, 247—280

60. —, —, Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatters. Commun. Math. Phys., 1981, *78*, № 4, 479—497

61. *Chirikov B. V.*, A universal instability of many-dimensional oscillator systems. Phys. Repts, 1979, *52*, № 5, 263

62. *Collet P., Eckman J.-P.*, Iterated maps on the interval as dynamical systems. Boston, Birkhäuser, 1980, 248 pp.

63. —, *Levy Y.*, Ergodic properties of the Lozi mappings. Commun. Math. Phys., 1984, *93*, № 4, 461—482

64. *Farmer J. D., Ott E., Yorke J. A.*, The dimension of chaotic attractors. Phys. D, 1983, *7D*, № 1—3, 153—180

65. *Gallavotti G., Ornstein D.*, Billiards and Bernoulli schemes. Commun. Math. Phys., 1974, *38*, № 2, 83—101

66. *Henon M.*, A two-dimensional mappings with a strange attractor. Commun. Math. Phys., 1976, *50*, № 1, 69—77 (Пер. на рус. яз.: *Эно М.*, Двумерное отображение со странным аттрактором. В кн. «Странные аттракторы». М.: Мир, 1981, 152—163)

67. *Hofbauer F., Keller G.*, Equilibrium states for piecewise monotonic transformations. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1982, *2*, № 1, 23—43

68. *Jakobson M. V.*, Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. Commun. Math. Phys., 1981, *81*, № 1, 39—88

69. —, Invariant measures of some one-dimensional attractors. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1982, *2*, № 3—4, 317—337

70. *Katok A.*, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. Publ. Math. IHES, 1980, № 51, 137—173

71. —, Bernoulli diffeomorphisms on surfaces. Ann. Math., 1979, *110*, № 3, 527—547

72. —, Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorems. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1982, *2*, № 2, 185—194

73. *Ledrappier F.*, Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1981, *1*, № 1, 77—94

74. —, Some relations between dimension and Lyapunov exponents. Commun. Math. Phys., 1981, *81*, № 2, 229—238

75. —, Propriétés ergodiques des mesures de Sinai. C. r. Acad. sci., Paris, 1982, sér. 1, *294*, № 17, 593—595

76. *Lorenz E. N.*, Deterministic nonperiodic flow. J. Amer. Sci., 1963, *20*, 130—141 (Пер. на рус. яз.: *Лоренц Е.*, Детерминированное непериодическое течение. В кн. «Странные аттракторы». М.: Мир, 1981, 88—116)

77. *Lozi R.*, Un attracteur etrange du type attracteur de Henon. J. Phys., Paris, 1978, *39*, Coll. C5, 9—10

78. *Manning A.*, A relation between Lyapunov exponents, Hausdorff dimension and entropy. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1981, *1*, № 4, 451—459

79. *Mather J.*, Characterization of Anosov diffeomorphisms. Indag. math., 1968, *30*, № 5, 479—483

80. —, Concavity of the Lagrangian for quasi-periodic orbits. Comment Math. helv., 1982, *57*, № 3, 356—376

81. *Misiurewicz M.*, Strange attractors for the Lozi mappings. In the book: «Nonlinear dynamics» (ed. by R. G. Helleman). New York, N. Y., Acad. Sci., 1980, 348—358

82. —, Absolutely continuous measures for certain maps of an interval. Publ. Math. IHES, 1981, *53*, 17—51

83. *Montel P.*, Leçons sur les familles normales de fonctions analitiques et leurs applications. Paris, Gauthier-Villars, 1927, 252 p. (Пер. на рус. яз.: *Монтель П.*, Нормальные семейства аналитических функций. М.—Л., ОНТИ, 1936, 240 с.)

84. *Mori H.*, Fractal dimension of chaotic flows autonomous dissipative systems. Progr. Theor. Phys., 1980, *63*, № 3, 1044—1047

85. *Moser Ju.*, Lectures on Hamiltonian systems. New York, Courant Inst. Math. Sci., 1968, 154 pp. (Пер. на рус. яз.: Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973, 166 с.)

86. *Nitecki Z.*, Differentiable dynamics. MIT Press, London, 1971, 292 pp. (Пер. на рус. яз.: *Нитецки З.*, Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975, 302 с.)

87. *Percival I. C.*, Variational principles for invariant tori and cantori. Symp. on Nonlinear Dyn. and Beam—Beam Interactions, Amer. Inst. Phys. Conf. Proc., 1980, № 57, 310—320

88. *Pesin Ya. B.*, On the notion of the dimension with respect to a dynamical system. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1984, *4*, № 3, 405—420

89. —, The generalization of Caratheodory's construction for dimensional characteristics of dynamical systems. Proc. Conf. of Random Fields, Progr. Phys., Birkhäuser, 1984

90. —, *Sinai Ya. G.*, Hyperbolicity and stochasticity of dynamical systems. Gordon and Breach Press, Harwood Acad. Publ., USA, 1981, № 2, 53—116

91. —, —, Gibbs measures for partially hyperbolic attractors. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1982, *2*, № 3—4, 417—438

92. *Rand D.*, The topological classification of Lorenz attractors. Math. Proc. Cambidge Phil. Soc., 1978, *83*, № 3, 451—460 (Пер. на рус. яз.: Рэнд Д., Топологическая классификация аттракторов Лоренца. В кн. «Странные аттракторы». М.: Мир, 1981, 239—251)

93. *Ruelle D.*, Repellers for real analytic maps. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1982, *2*, № 1, 99—107

94. —, Thermodynamic formalism. Addison-Wesley, Publ. Comp., London, 1978, 180 pp.

95. —, *Takens F.*, On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys., 1971, *20*, № 3, 167—192 (Пер. на рус. яз.: *Рюэль Д., Такенс Ф.*, О природе турбулентности. В кн. «Странные аттракторы». М.: Мир, 1981, 117—151)

96. *Series C.*, The infinite word problem and limit sets in Fuchsian groups. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1981, *1*, № 3, 337—360

97. *Sinai Ya. G.*, Development of Krylov ideas. An addendum to the book: N. S. Krylov, «Works on the foundations of statistical physies». Princeton, Princeton Univ. Press., 1979, 239—281

98. —, *Vul E. B.,* Hyperbolicity conditions for the Lorenz model. Phys. D, 1981, *2D*, 3—7
99. *Sullivan D.,* Itération des fonctions analytiques complexes. C. r. Acad. sci., Paris, 1982, sér. 1, *294*, № 9, 301—303
100. *Walters P.,* Invariant measures and equilibrium states for some mappings which expand distances. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *236*, 121—153
101. —, A variational principle for the pressure of continuous transformations. Amer. J. Math., 1975, *97*, № 4, 937—971
102. *Young L.-S.,* Dimension, entropy and Lyapunov exponents. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1982, *2*, № 1, 109—124
103. —, Capacity of attractors. Ergod. Theory and Dyn. Syst., 1981, *1*, № 3, 381—388

УДК 519.248.2

III

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 10

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Р. Л. Добрушин, Я. Г. Синай, Ю. М. Сухов

§ 1. Введение

В статистической механике движение системы N d-мерных частиц описывается гамильтоновой системой $2dN$ обыкновенных дифференциальных уравнений, порождающих группу преобразований фазового пространства. Предметом изучения является эволюция вероятностных мер на фазовом пространстве, задаваемая этой группой преобразований. Главная особенность задач статистической механики определяется тем, что речь идет о системах, состоящих из большого числа однотипных частиц (грамм-молекула газа содержит $6 \cdot 10^{23}$ частиц). Поэтому представляют интерес лишь результаты, в которых все включаемые в них оценки равномерны по числу степеней свободы. Это непривычное с точки зрения стандартной теории динамических систем требование и выделяет математическую специфику задач статистической механики.

Таким образом, естественно возникает проблема асимптотического изучения свойств системы при $N \to \infty$. В последнее время, в рамках математически строгих исследований, на первый план выходит явное рассмотрение бесконечномерной динамической системы, описываемой бесконечной системой дифференциальных уравнений движения, которая возникает как предел систем уравнения движения N частиц при $N \to \infty$. В отличие от обычно рассматриваемых в математической физике бесконечных систем уравнений, возникающих в иных областях приложений, здесь интересны системы, в которых отдельные степени свободы (координаты, импульсы частиц) полностью равноправны.

Традиционно статистическую механику разделяют на равновесную и неравновесную. В *равновесной статистической механике* изучаются свойства специально выделенного класса инвариантных относительно динамики мер, определяемых известным постулатом Гиббса (J. W. Gibbs). Эта обширная тема, которой посвящено много исследований (см., например, [38], [61], [104]), остается в основном вне рамок нашего изложения, хотя часть соответствующей теории, связанная с приложениями к динамическим системам с гиперболическими свойствами, была затронута в § 6 главы 3 части I и в главах 7, 8 части II. В следующем параграфе мы приведем основные сведения о гиббсовских случайных полях, используемые в дальнейших разделах данной части.

Математическая разработка проблем *неравновесной статистической механики* находится сейчас на начальном этапе. Полученные к настоящему моменту результаты довольно разрознены; остающиеся пробелы заполняются математически формулируемыми гипотезами и физическими представлениями. Среди предшествующих обзорных изложений этой темы выделим статьи [10], [46], [62], [84] (обзорный характер носят также некоторые разделы работ[21], [85]). Ряд относящихся к нашей теме вопросов рассматривается в книге [26].

Для подробного изложения нами выбраны некоторые узловые и наиболее разработанные темы. Это, во-первых, вопрос о существовании «бесконечно частичной» динамики, которому посвящены § 3 и часть § 4. Во-вторых, это исследование в отдельных, наиболее простых случаях эргодических свойств бесконечно частичной динамической системы с инвариантной мерой (см. § 5). Фундаментальный вопрос об асимптотических свойствах временно́й эволюции при $t \to \pm\infty$ тесно связан с вопросом об описании множества инвариантных мер. Этот вопрос рассматривается в § 4. Содержание §§ 4,5 имеет непосредственное отношение к проблеме математического обоснования постулата Гиббса. В § 6 излагаются результаты, связанные с выводом кинетических уравнений, т. е. уравнений, приближенно описывающих временну́ю эволюцию средних значений основных физических величин.

Модели динамики, изучаемые в статистической механике, довольно разнообразны. В дальнейшем мы рассматриваем лишь один из типов таких моделей. Это — привычная из элементарных курсов механики ньютоновская динамика системы точечных частиц, движущихся в евклидовом пространстве под действием сил внутреннего взаимодействия. Относительно других типов моделей мы ограничимся ссылками на некоторые книги и ключевые статьи, где содержится более полная библиография. В литературе исследуется классическая «спиновая» динамика (см., например, работы [51], [86], [87]). В моделях спиновой динамики рассматривается изменение координат, которые описывают внутренние степени свободы частиц, закрепленных в точках правильной решетки. Из других изучаемых моделей динамики отметим градиентные модели, в которых для упрощения, вместо ньютоновской динамики, вводится система дифференциальных уравнений первого порядка для положений частиц (см. [65], [68], [89]).

К обсуждаемой проблематике идейно близки работы по стохастической динамике, образующие теперь обширную главу теории вероятностей — теорию марковских процессов с локальным взаимодействием (см. [64], [74], [93]), а также работы по динамике квантовых систем с бесконечным числом степеней свободы (см. [52]—[54]). Эти темы требуют специальных обзоров.

§ 2. Фазовое пространство систем статистической механики и гиббсовские меры

В этом параграфе вводятся основные понятия равновесной статистической механики, используемые в дальнейшем: конфигурационные и фазовые пространства динамических систем статистической механики и вероятностные меры на них.

2.1. Конфигурационное пространство. Следуя традиции, будем рассматривать системы d-мерных частиц, где целое число $d>0$ произвольно. Хотя, конечно, наиболее интересен случай $d=3$, меньшие размерности также допускают физическую интерпретацию (так, $d=2$ — это случай тонкой пленки или поверхности). Главный же довод в пользу такого обобщения — это то, что свойства систем статистической механики существенно зависят от размерности, и проследить эту зависимость интересно как с математической, так и с физической точек зрения.

Конфигурацию частиц в евклидовом пространстве R^d будем задавать как конечное или счетное подмножество $\mathrm{q}\subset R^d$. Пусть

$$\nu_{\mathcal{O}}(\mathrm{q})=|\mathrm{q}_{\mathcal{O}}|,\quad \mathcal{O}\subseteq R^d. \tag{10.1}$$

Здесь и далее $\mathrm{q}_{\mathcal{O}}=\mathrm{q}\cap\mathcal{O}$, а символ $|\cdot|$ обозначает мощность множества. На конфигурацию накладывается условие

$$\nu_{\mathcal{O}}(\mathrm{q})<\infty \text{ для любых ограниченных } \mathcal{O}\subset R^d, \tag{10.2}$$

означающее недопустимость бесконечных скоплений частиц· Совокупность всех таких q обозначим Q^0.

В ряде моделей динамических систем в некоторые моменты времени в одной и той же точке $q\in R^d$ может находиться несколько частиц. Поэтому удобно расширить введенное выше понятие и понимать под конфигурацией пару $(\mathrm{q}, n_{\mathrm{q}})$, где $\mathrm{q}\in Q^0$, а n_{q} — целочисленная функция, задающая число частиц в точках $q\in\mathrm{q}$. Совокупность всех таких пар $(\mathrm{q}, n_{\mathrm{q}})$ обозначается Q. Для заданных $\mathcal{O}\subset R^d$ и $(\mathrm{q}, n_{\mathrm{q}})\in Q$ обозначим $\nu_{\mathcal{O}}(\mathrm{q}, n_{\mathrm{q}})$ число частиц в множестве $\mathcal{O}$:

$$\nu_{\mathcal{O}}(\mathrm{q}, n_{\mathrm{q}})=\sum_{q\in\mathrm{q}_{\mathcal{O}}} n_{\mathrm{q}}(q). \tag{10.3}$$

Через $Q_{\mathcal{O}}$ обозначается совокупность конфигураций, сосредоточенных на множестве $\mathcal{O}$, т. е. таких, что $\nu_{\mathcal{O}^c}(\mathrm{q}, n_{\mathrm{q}})=0$ (здесь и далее $\mathcal{O}^c$ обозначает дополнение множества $\mathcal{O}$). Аналогично вводится множество $Q^0_{\mathcal{O}}$.

В пространстве Q вводится естественная топология: сходимость последовательности $(\mathrm{q}_s, n_{\mathrm{q}_s})$, $s=1, 2, \ldots$, к $(\mathrm{q}, n_{\mathrm{q}})$ означает, что при любом ограниченном открытом $\mathcal{O}\subset R^d$ таком, что

$\nu_{\partial\mathcal{O}}(\mathbf{q}, n_\mathbf{q})=0$, где $\partial\mathcal{O}$ — граница множества $\mathcal{O}$, для всех достаточно больших s

$$\nu_{\mathcal{O}}(\mathbf{q}_s, n_{\mathbf{q}_s})=\nu_{\mathcal{O}}(\mathbf{q}, n_\mathbf{q}).$$

Определим σ-алгебру $\mathcal{Q}$ подмножеств Q как σ-алгебру, порожденную функциями $\nu_{\mathcal{O}}$, где $\mathcal{O}$ — произвольное ограниченное борелевское подмножество R^d. Нетрудно показать, что $\mathcal{Q}$ есть борелевская σ-алгебра подмножеств Q по отношению к введенной выше топологии. Конфигурационным пространством системы частиц в R^d будем называть измеримое пространство $(Q, \mathcal{Q})$.

Конфигурации $(\mathbf{q}, n_\mathbf{q})$ с $n_\mathbf{q}\equiv 1$ образуют борелевское всюду плотное подмножество пространства Q, которое будет отождествляться с пространством Q^0. Подмножества Q^0, которые входят в σ-алгебру $\mathcal{Q}$, образуют σ-алгебру, которая обозначается через $\mathcal{Q}^0$. Почти все появляющиеся в дальнейшем распределения вероятностей на $(Q, \mathcal{Q})$ будут сосредоточены на Q^0, поэтому мы будем часто задавать вероятностные меры сразу на $(Q^0, \mathcal{Q}^0)$, не оговаривая особо возможность их интерпретации как мер на $(Q, \mathcal{Q})$.

На пространстве $(Q, \mathcal{Q})$ задано действие группы пространственных сдвигов (трансляций) $\{T_y,\ y\in R^d\}$:

$$T_y(\mathbf{q}, n_\mathbf{q})=(\mathbf{q}+y,\ n_{\mathbf{q}+y}),$$

где

$$\mathbf{q}+y=\{q\in R^d: q-y\in\mathbf{q}\},\quad n_{\mathbf{q}+y}=n_\mathbf{q}(q-y),\quad q\in\mathbf{q}+y.$$

Вероятностная мера P на $(Q, \mathcal{Q})$ называется *трансляционно инвариантной*, если при всех $A\in\mathcal{Q}$ и $y\in R^d$ $P(T_yA)=P(A)$.

Говоря о сходимости вероятностных мер на $(Q, \mathcal{Q})$ (и $(Q^0, \mathcal{Q}^0)$), мы будем подразумевать слабую сходимость относительно введенной топологии.

Вероятностная мера на пространстве $(Q, \mathcal{Q})$ описывает «конфигурационное состояние» системы частиц в R^d (см. [104]). На языке теории вероятностей она интерпретируется как распределение вероятностей точечного случайного поля, и многие полезные для наших целей результаты могут быть найдены в книгах и работах по теории точечных случайных процессов и полей (см., например, [78], [96]).

При заданном борелевском $\mathcal{O}\subset R^d$ можно ввести σ-подалгебру $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}}\subset\mathcal{Q}$, порожденную функциями $\nu_{\tilde{\mathcal{O}}}$, где $\tilde{\mathcal{O}}$ — произвольное ограниченное борелевское подмножество $\mathcal{O}$. Аналогичным образом определяется σ-алгебра $\mathcal{Q}^0_{\mathcal{O}}$. Для любой меры P на $(Q, \mathcal{Q})$ (или $(Q^0, \mathcal{Q}^0)$) будем обозначать через $P_{\mathcal{O}}$ сужение P на $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}}$ (или $\mathcal{Q}^0_{\mathcal{O}}$). Меру $P_{\mathcal{O}}$ можно отождествить с мерой, сосредоточенной на $Q_{\mathcal{O}}$ (или $Q^0_{\mathcal{O}}$).

2.2. Пуассоновские меры. Простейшим естественным примером вероятностной меры на $(Q^0, \mathcal{Q}^0)$ служит *пуассоновская мера* $P_z{}^0$ с параметром $z>0$. Она однозначно определяется следующими двумя условиями:

1) Для любого ограниченного борелевского $\mathcal{V}\subset R^d$ случайная величина $\nu_{\mathcal{V}}$ имеет пуассоновское распределение со средним значением $zl(\mathcal{V})$, где $l(\mathcal{V})$ — мера Лебега множества $\mathcal{V}$, т. е.

$$P_z{}^0(\{q\in Q^0\colon\ \nu_{\mathcal{V}}(q)=k\})=\frac{(zl(\mathcal{V}))^k}{k!}\exp(-zl(\mathcal{V})). \qquad (10.4)$$

2) Для любого набора попарно непересекающихся борелевских множеств $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n\subset R^d$ случайные величины $\nu_{\mathcal{V}_1}, \ldots, \nu_{\mathcal{V}_n}$ взаимно независимы.

В физической терминологии, пуассоновская мера $P_z{}^0$ задает конфигурационное равновесное состояние идеального газа. Параметр z задает плотность частиц в этом состоянии.

Мы будем рассматривать также «ненормированную» пуассоновскую меру (или, как ее иногда называют, меру Лебега — Пуассона). Точнее, для произвольного ограниченного борелевского $\mathcal{V}\subset R^d$ введем меру $L_{\mathcal{V}}$ на σ-алгебре $\mathcal{Q}^0_{\mathcal{V}}$, определяемую условием: для любого конечного набора попарно непересекающихся борелевских множеств $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n\subseteq\mathcal{V}$ с $\bigcup\limits_{j=1}^{n}\mathcal{V}_j=\mathcal{V}$ и любых целых неотрицательных $k_1, \ldots, k_n$

$$L_{\mathcal{V}}(\{q\in Q^0\colon \nu_{\mathcal{V}_j}(q)=k_j,\ j=1, \ldots, n\})=\prod_{j=1}^{n}\frac{(l(\mathcal{V}_j))^{k_j}}{k_j!}. \qquad (10.5)$$

Меру $L_{\mathcal{V}}$ можно естественным образом отождествить с мерой, сосредоточенной на множестве $Q^0_{\mathcal{V}}$. Мы будем в дальнейшем часто пользоваться таким приемом, не оговаривая этого каждый раз заново. Пуассоновская мера P^0_z характеризуется тем, что сужение $(P_z{}^0)_{\mathcal{V}}$ абсолютно непрерывно по отношению к мере $L_{\mathcal{V}}$ и

$$\frac{d(P_z{}^0)_{\mathcal{V}}}{dL_{\mathcal{V}}}(q)=z^{|q|}\exp(-zl(\mathcal{V})), \quad q\in Q^0_{\mathcal{V}}. \qquad (10.6)$$

2.3. Конфигурационное распределение Гиббса. В этом пункте мы введем определение конфигурационного распределения Гиббса. Это определение является естественным обобщением на случай бесконечного числа частиц хорошо известного определения большого канонического ансамбля в статистической механике. Возможность использования этого ансамбля для описания равновесных состояний системы частиц — основной постулат статистической механики (более подробное обсуждение см. в § 4).

Сначала мы введем распределение Гиббса в простейшей ситуации, для парного взаимодействия, инвариантного относительно евклидовой группы движений, а затем укажем несколько возможных обобщений. Взаимодействие частиц в рассматриваемой ситуации описывается парным *потенциалом взаимодействия* — фиксированной измеримой функцией U: $[0, \infty) \to R^1 \cup \{\infty\}$. Значение $U(r)$, $0 \leqslant r < \infty$, интерпретируется как потенциальная энергия взаимодействия пары точечных частиц, расположенных на расстоянии r друг от друга. Мы будем считать также, что фиксированы числа $z > 0$ и $\beta > 0$. Параметр z называется в статистической механике *активностью* системы, а параметр β обратно пропорционален абсолютной *температуре*. Иногда вместо активности z употребляют так называемый химический потенциал $\mu = \beta^{-1} \ln z$.

Для любого борелевского ограниченного $\mathcal{O} \subset R^d$ определим потенциальную энергию конфигурации $\mathbf{q} \in Q^0_{\mathcal{O}}$ равенством[1]

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{q, q' \in \mathbf{q}: \\ q \neq q'}} U(\| q - q' \|). \qquad (10.7)$$

Конфигурационным распределением Гиббса в объеме $\mathcal{O}$ со свободными граничными условиями, потенциалом взаимодействия U и параметрами (z, β) назовем вероятностную меру на $Q^0_{\mathcal{O}}$, заданную плотностью относительно меры $L_{\mathcal{O}}$ (рассматриваемой как мера на $Q^0_{\mathcal{O}}$) вида

$$\Xi^{-1}_{\mathcal{O}} z^{|\mathbf{q}|} \exp(-\beta V(\mathbf{q})), \quad \mathbf{q} \in Q^0_{\mathcal{O}}, \qquad (10.8)$$

где $\Xi_{\mathcal{O}}$ — нормирующий множитель, называемый *статистической суммой*

$$\Xi_{\mathcal{O}} = \int_{Q^0_{\mathcal{O}}} L_{\mathcal{O}}(d\mathbf{q})\, z^{|\mathbf{q}|} \exp(-\beta V(\mathbf{q})). \qquad (10.9)$$

Для корректности введенного определения нужно, конечно, предположить, что $\Xi_{\mathcal{O}} < \infty$.

Более широкий класс распределений вероятностей на $Q^0_{\mathcal{O}}$ получается при введении *граничного условия* $\bar{\mathbf{q}} \in Q^0_{\mathcal{O}^c}$. Положим

$$V(\mathbf{q} \mid \bar{\mathbf{q}}) = V(\mathbf{q}) + \sum_{q \in \mathbf{q}, q' \in \bar{\mathbf{q}}} U(\| q - q' \|), \quad q \in Q^0_{\mathcal{O}}. \qquad (10.10)$$

---

[1] Здесь и далее считается, что $a + \infty = \infty$ при всех $a \in R^1$, $a\infty = \infty$ при всех $a > 0$ и $\exp(-\infty) = 0$.

Конфигурационным распределением Гиббса в объеме $\mathcal{O}$ с граничным условием $\bar{\mathfrak{q}}$, потенциалом взаимодействия U и параметрами (z, β) будем называть вероятностную меру на $Q^0_{\mathcal{O}}$, заданную плотностью относительно $L_{\mathcal{O}}$ вида

$$\Xi_{\mathcal{O}}(\bar{\mathfrak{q}})^{-1} z^{|\mathfrak{q}|} \exp(-\beta V(\mathfrak{q} \mid \bar{\mathfrak{q}})), \quad \mathfrak{q} \in Q^0_{\mathcal{O}}, \tag{10.11}$$

где

$$\Xi_{\mathcal{O}}(\bar{\mathfrak{q}}) = \int\limits_{Q^0_{\mathcal{O}}} L_{\mathcal{O}}(d\mathfrak{q})\, z^{|\mathfrak{q}|} \exp(-\beta V(\mathfrak{q} / \bar{\mathfrak{q}})). \tag{10.12}$$

Для существования этого распределения достаточно, чтобы ряд в правой части (10.10) абсолютно сходился при почти всех $\mathfrak{q} \in Q^0_{\mathcal{O}}$ и интеграл $\Xi_{\mathcal{O}}(\bar{\mathfrak{q}})$ был конечен.

Определение 2.1. Вероятностная мера P на $(Q^0, \mathcal{Q}^0)$ называется конфигурационным распределением Гиббса в «бесконечном объеме», или кратко: конфигурационным распределением Гиббса с потенциалом взаимодействия U и параметрами (z, β), если при любом борелевском ограниченном $\mathcal{O} \subset R^d$

1) для P-почти всех $\bar{\mathfrak{q}} \in Q^0$ существует конфигурационное распределение Гиббса в объеме $\mathcal{O}$ с граничным условием $\bar{\mathfrak{q}}_{\mathcal{O}^c}$, потенциалом U и параметрами (z, β),

2) для P-почти всех $\bar{\mathfrak{q}} \in Q^0$ сужение на $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}}$ условного распределения вероятностей $P(\cdot \mid \mathcal{Q}_{\mathcal{O}^c})$ относительно σ-алгебры $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}^c}$ совпадает с конфигурационным распределением Гиббса в объеме $\mathcal{O}$ с граничным условием $\bar{\mathfrak{q}}_{\mathcal{O}^c}$, потенциалом U и параметрами (z, β).

Поясним наглядный смысл этого определения. Как уже говорилось, оно является обобщением определения (10.8) на случай бесконечной системы частиц. Непосредственно распространить на этот случай определение (10.8) нельзя, поскольку суммарная энергия бесконечной системы частиц бесконечна. Однако, исходя из (10.8), нетрудно подсчитать, что при $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ условная плотность распределения конфигурации $\mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{O}}} \in Q^0_{\tilde{\mathcal{O}}}$ в объеме $\tilde{\mathcal{O}}$ при заданной конфигурации $\mathfrak{q}_{\mathcal{O} \setminus \tilde{\mathcal{O}}}$ в дополнении $\mathcal{O} \setminus \tilde{\mathcal{O}}$ имеет вид (10.12). Таким образом, свойство 2) конфигурационного распределения Гиббса есть аналог такого же свойства обычной гиббсовской плотности (10.8). Что касается 1), то это свойство носит технический характер и необходимо для корректной формулировки 2).

Один из главных доводов в пользу естественности приведенного определения состоит в том, что мера P может быть получена как предел конфигурационных распределений Гиббса в объеме $\mathcal{J}$ с граничным условием $q_{\mathcal{J}^c}$ при $\mathcal{J}\nearrow R^d$[1]. По этой причине иногда используется термин «предельное конфигурационное распределение Гиббса». Идея подобного построения восходит к ставшей классической работе [4] (см. также [3], [30], [31], [103]).

Условия 1) и 2), фигурирующие в определении 2.1, часто называются в литературе *условиями ДЛР* (Р. Л. Добрушина—Лэнфорда (O. E. Lanford)—Рюэля (D. Ruelle) (см. [15]—[18], [88], [105]).

2.4. Потенциал парного взаимодействия. Существование и единственность конфигурационного распределения Гиббса. Обсудим условия на потенциал взаимодействия U, налагаемые при изучении конфигурационных распределений Гиббса, а также при исследовании динамических систем статистической механики, которое проводится в последующих параграфах. Простейшими примерами потенциалов взаимодействия являются потенциал *идеального газа*

$$U(r)\equiv 0,\quad r\geqslant 0, \tag{10.13}$$

и потенциал взаимодействия в газе *твердых*, или абсолютно упругих, *шаров* (*твердых стержней* при $d=1$)

$$U(r)=\begin{cases}\infty, & 0\leqslant r<r_0,\\ 0, & r\geqslant r_0,\end{cases} \tag{10.14}$$

где $r_0>0$ — диаметр шара (длина стержня). В этих случаях конфигурационное распределение Гиббса зависит лишь от одного параметра z; в случае идеального газа оно совпадает с пуассоновской мерой P_z^0.

Типичным примером модельного взаимодействия, используемого в физических расчетах, является потенциал Ленарда-Джонса (J. E. Lenard-Jones) при ($d=3$)

$$U(r)=\frac{a_1}{r^{12}}-\frac{a_2}{r^6}, \tag{10.15}$$

где a_1, $a_2>0$. Этот потенциал довольно хорошо описывает взаимодействие атомов благородных газов.

Взаимодействия, возникающие в различных физических ситуациях, весьма многообразны, и поэтому интересны результаты, справедливые при минимальных допущениях о потенциале взаимодействия. Однако, разные задачи требуют разных классов взаимодействий и соответствующие точные формулировки часто громоздки. Вводимые при этом предположения не представляются окончательными. Ввиду этого, мы не будем приводить точных условий, при которых доказан тот или иной результат, а ограничимся их качественным описанием и ссылками на оригинальные работы [3], [4], [17]—[19], [30], [31], [40], [72],

---

[1] Здесь и далее $\mathcal{J}\nearrow R^d$ означает направленное по включению множество d-мерных кубов $\mathcal{J}=[-a,a]^d$, $d>0$.

[103], [105]. Перечислим основные типы обычно накладываемых ограничений:

I) Условие ограниченности потенциала взаимодействия снизу:

$$\inf_{r>0} U(r) > -\infty.$$

Это условие физически естественно, и мы будем всегда в дальнейшем предполагать, что оно выполнено.

II) Условия возрастания потенциала при $r \to 0$. Типичный пример:

$$U(r) \geqslant cr^{-\gamma} \text{ при достаточно малых } r>0, \tag{10.16}$$

где $c>0$. При этом обычно считают, что $\gamma>d$. Довольно часто рассматривают потенциалы с твердой сердцевиной, для которых

$$U(r) \begin{cases} = \infty, & 0 \leqslant r < r_0, \\ < \infty, & r > r_0, \end{cases} \tag{10.17}$$

где $r_0>0$ — диаметр сердцевины (ср. с. (10.14)). Последнее условие существенно упрощает некоторые построения. Иногда рассматриваются также потенциалы взаимодействия, ограниченные сверху, но при этом обычно предполагается, что значения $U(r)$ при r, близких к 0, положительны, и положительная часть взаимодействия в некотором смысле доминирует над отрицательной.

Физический смысл условий этого типа состоит в требовании достаточно сильного отталкивания частиц на близких расстояниях, что нужно для того, чтобы предотвратить скопления частиц, которые исключаются в равновесной ситуации.

III) Условия убывания потенциала при $r \to \infty$. Типичный пример такого условия:

$$|U(r)| \leqslant cr^{-\gamma} \text{ при достаточно больших } r, \tag{10.18}$$

где $c>0$. Как и выше, при этом считают, что $\gamma>d$. Иногда для упрощения вводят условие финитности или конечности *радиуса действия потенциала* U:

$$U(r)=0 \text{ при } r \geqslant r_1. \tag{10.19}$$

Физический смысл условий III) связан с предположением о локальности взаимодействий, т. е. о его ослаблении на расстояниях, много больших среднего расстояния между частицами.

IV) Условия гладкости потенциала взаимодействия. Предполагается, что потенциал взаимодействия имеет достаточное число непрерывных производных в области, где он принимает конечные значения. Часто вводят дополнительные условия на поведение этих производных при $r \to 0$ ($r \to r_0$ в случае потенциала с твердой сердцевиной) и $r \to \infty$.

Условия последнего типа возникают обычно при доказательстве существования динамики (см. §§ 3, 4).

Теперь мы обсудим вопрос о существовании и единственности конфигурационного распределения Гиббса. В целях простоты изложения, будем предполагать, что потенциал U обладает твердой сердцевиной диаметра $r_0>0$ и удовлетворяет условию (10.19) с $\gamma>d$. По поводу распространения этих результатов на другие классы потенциалов см. цитированные выше работы.

Теорема существования конфигурационного распределения Гиббса формулируется следующим образом.

Теорема 2.1 ([17]). При любых заданных $z>0$ и $\beta>0$ существует по меньшей мере одно трансляционно инвариантное конфигурационное распределение Гиббса с потенциалом взаимодействия U и параметрами (z, β). Множество конфигурационных распределений Гиббса $\mathfrak{P}_{U,z,\beta}$ с потенциалом U и параметрами (z, β) образует выпуклый компакт в пространстве вероятностных мер на $(Q, \mathcal{Q})$ (и тем самым совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества своих крайних точек).

Формулировка теоремы единственности выглядит различным образом в многомерном $(d\geqslant 2)$ и одномерном $(d=1)$ случаях. Пусть $\mathcal{J}(y, b)$ обозначает d-мерный куб с центром в точке $y\in R^d$, сторонами, параллельными координатным осям, и длиной ребра $2b$.

Теорема 2.2 ([17], [30], [31], [103]). Предположим, что $d\geqslant 1$. Тогда для любого $\beta>0$ можно указать значение $z_0=z_0(\beta)>0$ такое, что при всех $z\in(0, z_0)$ существует ровно одно конфигурационное распределение Гиббса с потенциалом U и параметрами (z, β) (т. е. множество $\mathfrak{P}_{U,z,\beta}$ состоит из одной точки). Это распределение P трансляционно инвариантно и обладает следующим свойством перемешивания:

$$\sup_{y\in R^d}\ \sup_{\substack{A_1\in\mathfrak{A}_{\mathcal{J}(y,u)},\\ A_2\in\mathfrak{A}_{\mathcal{J}(y,\,u+s)^c}}} |P(A_1\cap A_2)-P(A_1)P(A_2)|\leqslant$$

$$\leqslant c_1 u^{d-1} s^{-\gamma'}, \quad u, s>0, \tag{10.20}$$

где $\gamma'\geqslant\gamma-d$ и $c_1>0$ — константы.

Теорема 2.3 ([17], [40], [72]). Предположим, что $d=1$ и потенциал U удовлетворяет условию (10.18) с $\gamma>2$. Тогда при любых $z>0$ и $\beta>0$ существует ровно одно конфигурационное распределение Гиббса с потенциалом U и параметрами (z, β). Это распределение P трансляционно инвариантно и обладает свойством перемешивания «по Розенблатту»:

$$\sup_{u\in R^1}\ \sup_{\substack{A_1\in\mathfrak{A}_{(-\infty,\,u)},\\ A_2\in\mathfrak{A}_{(u+s,\,+\infty)}}} |P(A_1\cap A_2)-P(A_1)P(A_2)|\leqslant$$

$$\leqslant c_1 s^{-(\gamma-2)}, \quad s>0, \tag{10.21}$$

где $c_1>0$ — константа.

Обсудим условие $z\in(0, z_0)$, фигурирующее в формулировке теоремы 2.2. С физической точки зрения оно означает, что рассматриваются системы частиц с малой плотностью. Согласно общепринятой гипотезе, при больших значениях z, т. е. высоких плотностях частиц, возможны фазовые переходы, проявляющиеся, в частности, в неединственности конфигурационного распределения Гиббса. В теореме 2.3 никаких ограничений на параметр z нет: это объясняется тем, что в одномерных системах, в соответствии с физическими представлениями, фазовые переходы отсутствуют (при широких условиях на потенциал взаимодействия).

2.5. Фазовое пространство. Распределение Гиббса. Для построения динамических систем статистической механики необходимо ввести более детальное описание системы частиц, при котором указываются как их положения q, как и импульсы p (в дальнейшем масса каждой частицы считается равной 1, что позволяет отождествлять ее импульс и скорость). Ситуации, где у двух частиц совпадают как положения, так и импульсы, обычно не возникают, и мы ограничимся рассмотрением фазового пространства, аналогичного конфигурационному пространству Q^0.

Обозначим M совокупность всех конечных или счетных подмножеств $\mathrm{x}\subset R^d\times R^d$, удовлетворяющих условию

$$\nu_{\mathcal{O}\times R^d}(\mathrm{x})<\infty \text{ для любых ограниченных } \mathcal{O}\subset R^d. \tag{10.22}$$

Здесь, как и выше,

$$\nu_{\mathcal{D}}(\mathrm{x})=|\mathrm{x}_{\mathcal{D}}|, \quad \mathcal{D}\subset R^d\times R^d, \tag{10.23}$$

а $\mathrm{x}_{\mathcal{D}}=\mathrm{x}\cap\mathcal{D}$. Через $M_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}\subset R^d$, обозначим совокупность тех $\mathrm{x}\in M$, для которых $\nu_{\mathcal{O}^c\times R^d}(\mathrm{x})=0$.

В пространстве M вводится естественная топология: сходимость последовательности x_s, $s=1, 2, \ldots$, к x означает, что при любом ограниченном открытом $\mathcal{O}\subset R^d$ и любом открытом $C\subseteq R^d$ таких, что $\nu_{\partial(\mathcal{O}\times C)}(\mathrm{x})=0$, для всех достаточно больших s

$$\nu_{\mathcal{O}\times C}(\mathrm{x}_s)=\nu_{\mathcal{O}\times C}(\mathrm{x}).$$

Определим σ-алгебру $\mathcal{M}$ подмножеств M как σ-алгебру, порожденную функциями $\nu_{\mathcal{O}\times C}$, где $\mathcal{O}$ — произвольное ограниченное борелевское подмножество, а C — произвольное борелевское подмножество R^d. Нетрудно показать, что $\mathcal{M}$ есть борелевская σ-алгебра подмножеств M по отношению к введенной выше топологии. Фазовым пространством системы частиц в R^d будем называть измеримое пространство $(M, \mathcal{M})$.

На пространстве $(M, \mathcal{M})$ так же, как и на $(Q, \mathcal{Q})$, задано действие группы пространственных трансляций $\{T_y, y\in R^d\}$:

$$T_y\mathrm{x}=\{(q, p)\in R^d\times R^d: (q-y, p)\in \mathrm{x}\}.$$

Вероятностная мера P на $(M, \mathcal{M})$ называется трансляционно инвариантной, если при всех $A\in\mathcal{M}$ и $y\in R^d$ $P(T_yA)=P(A)$.

Говоря о сходимости вероятностных мер на $(M, \mathscr{M})$, мы будем подразумевать слабую сходимость относительно упомянутой топологии.

На языке теории вероятностей мера на пространстве $(M, \mathscr{M})$ интерпретируется как распределение вероятностей маркированного точечного случайного поля (см. [96]).

При заданном борелевском $\mathcal{O} \subset R^d$ можно, как и выше, ввести σ-подалгебру $\mathscr{M}_{\mathcal{O}} \subset \mathscr{M}$, порожденную функциями $\nu_{\tilde{\mathcal{O}} \times C}$, где $\mathcal{O}$ — произвольное ограниченное борелевское подмножество $\mathcal{O}$, а C — произвольное борелевское подмножество R^d. Для любой меры P на $(M, \mathscr{M})$ будем обозначать через $P_{\mathcal{O}}$ сужение P на $\mathscr{M}_{\mathcal{O}}$. Меру $P_{\mathcal{O}}$ можно естественно отождествить с мерой, сосредоточенной на $\mathscr{M}_{\mathcal{O}}$.

Рассмотрим измеримое отображение $\Pi: \mathbf{x} \in M \mapsto (\mathbf{q}, n_{\mathbf{q}}) \in Q$, получающееся при «стирании» в $\mathbf{x}$ импульсов частиц:

$$\mathbf{q} = \{q \in R^d : \nu_{\{q\} \times R^d}(\mathbf{x}) \geqslant 1\}, \quad n_{\mathbf{q}}(q) = |\{p \in R^d : (q, p) \in \mathbf{x}\}|. \quad (10.24)$$

Это отображение позволяет для любого распределения вероятностей P на $(M, \mathscr{M})$ указать его «проекцию» ΠP, являющуюся вероятностной мерой на $(Q, \mathcal{Q})$.

Указанное отображение дает естественный способ построения вероятностной меры P на $(M, \mathscr{M})$ с заданной проекцией ΠP. А именно, для построения меры P достаточно, в дополнение к ΠP, задать условное распределение $P(\cdot \mid \mathscr{M}^Q)$ относительно σ-алгебры $\mathscr{M}^Q \subset \mathscr{M}$, индуцированной отображением Π. С наглядной точки зрения, речь идет об условном распределении импульсов при заданной конфигурации частиц. Предполагая для простоты, что мера ΠP сосредоточена на Q^0, мы можем задавать это условное распределение при помощи системы мер $P_{\mathbf{q}}$ на $(M, \mathscr{M})$, зависящих от $\mathbf{q} \in Q^0$. При этом, поскольку множество точек $\mathbf{x}$ с заданным $\mathbf{q} = \Pi \mathbf{x}$ естественно отождествляется с пространством $\mathcal{R}^{\mathbf{q}}$, мы можем интерпретировать $P_{\mathbf{q}}$ как вероятностную меру на $\mathcal{R}^{\mathbf{q}}$.

Зафиксируем потенциал парного взаимодействия U, числа $z > 0$, $\beta > 0$ и вектор $p_0 \in R^d$.

Определение 2.2. Вероятностная мера P на $(M, \mathscr{M})$ называется распределением Гиббса с потенциалом взаимодействия U и параметрами (z, β, p_0), если

1) проекция ΠP есть конфигурационное распределение Гиббса с потенциалом U и параметрами z, β,

2) условные распределения $P_{\mathbf{q}}$ являются совместными распределениями независимых случайных векторов, каждый из которых имеет d-мерное гауссовское распределение со средним значением p_0 и матрицей ковариации $\beta^{-1}E$.

Условное распределение вероятностей для импульсов частиц, о котором говорится в условии 2), называют максвелловским.

Аналогичным образом вводятся понятия распределения Гиббса в ограниченном объеме $\mathcal{O}\subset R^d$ и с граничными условиями $\bar{\mathrm{x}}\in M_{\mathcal{O}^c}$.

Теоремы существования и единственности распределения Гиббса легко получить, исходя из соответствующих теорем для конфигурационного распределения Гиббса, приведенных в пункте 2.3.

Иногда полезно рассматривать более общий класс мер, возникающих, если в условии 2) гауссовское распределение вероятностей заменить произвольным распределением вероятностей σ на R^d. При $U\equiv 0$, когда конфигурационное распределение Гиббса является пуассоновской мерой на $(Q^0, \mathcal{Q}^0)$, соответствующее распределение вероятностей на $(M, \mathcal{M})$ обозначается через $P^0_{z,\sigma}$. Меру $P^0_{z,\sigma}$ мы будем называть пуассоновской мерой на $(M, \mathcal{M})$ с параметрами (z, σ). В одномерном случае $(d=1)$ мы воспользуемся этой конструкцией в § 5 для потенциала идеальных твердых стержней (см. (10.14)). Соответствующая мера на $(M, \mathcal{M})$ обозначается через $P^{r_0}_{z,\sigma}$.

2.6. Гиббсовские распределения с общим потенциалом. В этом пункте мы обсудим понятие гиббсовского распределения, соответствующее общему «потенциалу», который зависит от положений и импульсов произвольных конечных наборов частиц. Такого рода обобщение важно, в частности, потому, что возникающие при этом вероятностные меры могут быть выделены в классе всех мер на $(M, \mathcal{M})$ некоторыми условиями, связанными с убыванием «корреляций» в естественном смысле (см. [25]). Ввиду этого, возможности математических приложений гиббсовских распределений шире диктуемых «физическими» традициями, и те или иные приводимые ниже результаты, верные для широкого класса таких распределений, можно считать довольно общими.

Потенциалом мы будем называть теперь последовательность $\Phi=(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)},\dots)$, где $\Phi^{(n)}$ — симметричная функция переменных $x_1,\dots,x_n$, где $x_j=(q_j, p_j)\in R^d\times R^d$, $j=1,\dots,n$, заданная на множестве

$$\{(x_1,\dots,x_n)\in(R^d\times R^d)^n: x_{j_1}\neq x_{j_2},\ 1\leqslant j_1<j_2\leqslant n\} \qquad (10.25)$$

и принимающая значения в $R^1\cup\{\infty\}$. Функция $\Phi^{(n)}$ называется n-частичным потенциалом (при $n=2$ мы сохраним за ней название «парный потенциал»). Иногда нам будет удобно рассматривать в качестве аргумента функции $\Phi^{(n)}$ точку $\mathrm{x}\in M$ с $|\mathrm{x}|=n$.

Для любого борелевского ограниченного $\mathcal{O}\subset R^d$ и произвольных $\mathrm{x}\in M_{\mathcal{O}}$ и $\bar{\mathrm{x}}\in M_{\mathcal{O}^c}$ положим

$$h^{(\Phi)}(\mathrm{x}\,|\,\bar{\mathrm{x}})=\sum_{n>1}\sum_{\substack{\mathrm{x}'\subseteq\mathrm{x}\cup\bar{\mathrm{x}}:\,|\mathrm{x}'|=n,\\ \mathrm{x}'\cap\mathrm{x}\neq\varnothing}}\Phi^{(n)}(\mathrm{x}'). \qquad (10.26)$$

Определение гиббсовского распределения вероятностей на $(M, \mathcal{M})$, отвечающего потенциалу Φ, аналогично определению конфигурационного распределения Гиббса, данному в пункте 2.3. Главное отличие состоит в том, что вместо σ-алгебр $\mathcal{Q}_\mathcal{O}$ и $\mathcal{Q}_{\mathcal{O}^c}$ рассматриваются σ-алгебры $\mathcal{M}_\mathcal{O}$ и $\mathcal{M}_{\mathcal{O}^c}$ соответственно, а мера $L_\mathcal{O}$ на $\mathcal{Q}_\mathcal{O}$, по отношению к которой выписывается плотность условного распределения, заменяется мерой $\bar{L}_\mathcal{O}$, заданной на σ-алгебре $\mathcal{M}_\mathcal{O}$. Мера $\bar{L}_\mathcal{O}$ определяется следующими условиями: 1) проекция $\Pi\bar{L}_\mathcal{O}$ совпадает с $L_\mathcal{O}$, 2) порожденная $\bar{L}_\mathcal{O}$ условная мера относительно σ-алгебры $\mathcal{M}^Q$ есть произведение $|\mathbf{q}|$ экземпляров лебеговой меры l. Плотность (по мере $\bar{L}_\mathcal{O}$) сужения на $\mathcal{M}_\mathcal{O}$ условного распределения $P(\cdot\,|\,\mathcal{M}_{\mathcal{O}^c})$ задается в виде

$$\Xi_\mathcal{O}(\bar{\mathrm{x}})^{-1} \exp\left(-h^{(\Phi)}(\mathrm{x}\,|\,\bar{\mathrm{x}})\right), \quad \mathrm{x} \in M_\mathcal{O}, \tag{10.27}$$

где

$$\Xi_\mathcal{O}(\bar{\mathrm{x}}) = \int\limits_{M_\mathcal{O}} \bar{L}_\mathcal{O}(d\mathrm{x}) \exp\left(-h^{(\Phi)}(\mathrm{x}\,|\,\bar{\mathrm{x}})\right). \tag{10.28}$$

Чтобы доказать существование (и единственность) гиббсовского распределения, отвечающего «общему» потенциалу $\Phi = (\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots)$, на него налагают ряд условий. Ввиду громоздкости, мы не будем приводить сейчас точные формулировки таких условий; в одном из возможных вариантов эти условия кратко обсуждаются ниже, в пункте 4.2.

Отметим связь приведенного общего определения с определением 2.2, данным в пункте 2.5. Распределение Гиббса с потенциалом U и параметрами (z, β, p_0) с точки зрения общего определения отвечает потенциалу $\Phi = \Phi_{U;z,\beta,p_0}$, у которого $\Phi^{(n)} \equiv 0$ при $n \geqslant 3$, и

$$\Phi^{(1)}(x) = \gamma + \beta/2\,\|p - p_0\|^2, \quad x = (q, p), \tag{10.29а}$$

$$\Phi^{(2)}(x_1, x_2) = \beta U(\|q_1 - q_2\|), \quad x_j = (q_j, p_j), \quad j = 1, 2, \tag{10.29б}$$

где $\gamma = -\ln z - d/2 \ln(2\pi\beta)$. Соответствующая функция $h^{(\Phi)}$ имеет вид

$$h^{(\Phi)}(\mathrm{x}\,|\,\bar{\mathrm{x}}) = \gamma\,|\mathrm{x}| + \beta/2 \sum_{(q,p) \in \mathrm{x}} \|p - p_0\|^2 + \beta V(\Pi\mathrm{x}\,|\,\Pi\bar{\mathrm{x}}). \tag{10.30}$$

2.7. Моментная мера и моментная функция. Распределения вероятностей на $(M, \mathcal{M})$ и $(Q, \mathcal{Q})$ часто бывает удобным задавать с помощью так называемой *моментной меры* или *момент-*

*ной функции*1) (см. подробнее [1], [91], [92]). Этот метод аналогичен известному методу описания случайных процессов и полей при помощи совместных моментов. Для определенности мы ограничимся рассмотрением вероятностных мер на $(M, \mathscr{M})$.

Пусть задано распределение вероятностей P на $(M, \mathscr{M})$. При каждом $n=1, 2, \ldots$ определим n-моментную меру $K_P^{(n)}$ на σ-алгебре борелевских подмножеств множества (10.25), инвариантных при перестановках точек x_j, $j=1, \ldots, n$, с помощью равенства

$$K_P^{(n)}(A)=\int_M P(d\mathrm{x}) \sum_{\mathrm{x}'\subseteq \mathrm{x}\,:\,|\mathrm{x}'|=n} \chi_A(\mathrm{x}') \qquad (10.31)$$

(χ_A, как обычно, обозначает индикатор множества A). Плотность меры $K_P^{(n)}$ относительно меры Лебега $\prod\limits_{j=1}^{n} dq_j\times dp_j$ (если она существует) называется n-моментной функцией и обозначается $k_P^{(n)}$. Это симметричная функция переменных $x_j=(q_j, p_j)\in \in R^d\times R^d$, $j=1, \ldots, n$. Наглядно, $k_P^{(n)}((q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n))\times \times\prod\limits_{j=1}^{n} dq_j\times dp_j$ интерпретируется как вероятность того, что в малых объемах dq_j с центрами в точках q_j расположены частицы с импульсами, принадлежащими малым объемам dp_j с центрами в точках p_j, $j=1, \ldots, n$. Последовательность $K_P=(K_P^{(1)}, K_P^{(2)}, \ldots)$ называется моментной мерой, а последовательность $k_P=(k_P^{(1)}, k_P^{(2)}, \ldots)$ — моментной функцией распределения вероятностей P.

Для пуассоновского распределения вероятностей $P^0_{z,\sigma}$ (см. п. 2.5) n-моментная мера задается формулой

$$K^{(n)}_{P^0_{z,\sigma}}\left(\prod_{j=1}^{n} dq_j\times dp_j\right)=z^n\prod_{j=1}^{n} dq_j\sigma(dp_j). \qquad (10.32)$$

Необходимым и достаточным условием взаимной однозначности соответствия между распределением вероятностей P и моментной мерой K_P является расходимость ряда

$$\sum_{n\geqslant 0}\left[K_P^{(n)}((\mathcal{O}\times R^d)^n)\,1/n!\right]^{1/n} \qquad (10.33)$$

при любом ограниченном борелевском $\mathcal{O}\subset R^d$. Этот результат является следствием известных результатов, связанных с проблемой моментов (см. [91]). Можно показать, что условие

---

1) В математической и физической литературе для этих объектов часто употребляются также термины *«корреляционная мера»*, *«корреляционная функция»*, *«функция распределения»*.

(10.33) выполнено для широкого класса гиббсовских распределений.

Особую роль в ходе дальнейшего изложения играют 1-моментная мера $K_P^{(1)}$ и 1-моментная функция $k_P^{(1)}$. Отметим в этой связи, что мера $K_P^{(1)}$ задает средние значения случайных величин $\nu_{\mathcal{D}}$ по отношению к распределению вероятностей P

$$K_P^{(1)}(\mathcal{D})=\int_M P(d\mathbf{x})\,\nu_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}). \qquad (10.34)$$

Функцию $k_P^{(1)}$ можно рассматривать как плотность распределения частиц в одночастичном фазовом пространстве $R^d\times R^d$.

Говоря о сходимости последовательности мер $K_s^{(1)}$, $s=1, 2, \ldots$, на $R^d\times R^d$ к мере $K^{(1)}$, мы имеем в виду, что для любой ограниченной непрерывной функции $f:R^d\times R^d\to R^1$ с носителем в $\mathcal{O}\times R^d$, где $\mathcal{O}$ — ограниченное подмножество R^d, интеграл $\int K_s^{(1)}(dq\times dp)\,f(q, p)$ сходится при $s\to\infty$ к интегралу $\int K^{(1)}(dq\times dp)\,f(q, p)$.

§ 3. Динамика системы взаимодействующих частиц

3.1. Постановка задачи. Будем предполагать, что взаимодействие частиц описывается парным потенциалом U, зависящим лишь от расстояния между частицами (см. п.п. 2.3, 2.4). Классические уравнения движения конечной системы одинаковых частиц единичной массы записываются в виде

$$\dot{q}_i(t)=p_i(t), \quad \dot{p}_i(t)=-\sum_{j:j\neq i}\operatorname{grad}U(\|q_j(t)-q_i(t)\|). \qquad (10.35)$$

Здесь i и j пробегают множество индексов, номерующих частицы, $q_i(t)\in R^d$ — вектор координат, $p_i(t)\in R^d$ — вектор импульса i-й частицы в момент времени $t\in R^d$. Система уравнений (10.35) является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H=\sum_i\frac{\|p_i\|^2}{2}+\sum_{j\neq i}U(\|q_j-q_i\|). \qquad (10.36)$$

На потенциал U накладываются условия, обсуждавшиеся в пункте 2.4. Если $U(\|q\|)$ — гладкая функция переменной $q\in R^d$, то решение задачи Коши для системы (10.35) существует и единственно на всей временной оси для любых начальных условий $\{(q_i(0), p_i(0))\}$. Если потенциал U имеет твердую сердцевину диаметра r_0 и $\lim\limits_{r\to r_0}U(r)=\infty$, то это же верно для таких начальных условий, что $\min\limits_{i_1\neq i_2}\|q_{i_1}(0)-q_{i_2}(0)\|>r_0$. Если же $\lim\limits_{r\to r_0+}U(r)<\infty$, то систему (10.35) надо дополнить граничными условиями, отвечающими моментам столкновений частиц, когда $\|q_{i_1}(t)-q_{i_2}(t)\|=r_0$ для некоторой пары индексов $i_1 \neq i_2$. Эти граничные условия вводятся так, чтобы столкновения были упругими (ср. с аналогичными условиями для систем биллиардного типа в гл. 8, § 1). Кратными столкновениями и другими вырождениями при этом пренебрегают, поскольку они происходят для подмножества начальных данных лебеговой меры нуль.

Иногда удобно рассматривать движение частиц в ограниченной области $\mathcal{O} \subset R^d$ с гладкой или кусочно гладкой границей $\partial\mathcal{O}$. Тогда уравнения движения дополняются граничными условиями при $q_i(t) \in \partial\mathcal{O}$. Обычно это условия упругого отражения частиц от границы $\partial\mathcal{O}$ (снова ср. с биллиардными системами из гл. 8, § 1).

Уравнения (10.35) можно формально написать и для бесконечных систем частиц. Однако, гамильтониан (10.36) будет теперь бесконечен, и здесь нужны специфические построения. Решением бесконечной системы (10.35) на временно́м интервале $I \subset R^1$ называется семейство гладких функций $\{(q_i(t)\ p_i(t)),\ t \in I\}$, для которых при всех i и $t \in I$ выполнены уравнения (10.35) (и, в частности, абсолютно сходится ряд в правой части этих уравнений).

Если это решение таково, что для любого ограниченного $\mathcal{O} \subset R^d$ и любого $t \in I$ число индексов i, для которых $q_i(t) \in \mathcal{O}$, конечно, то его можно интерпретировать как траекторию $\mathrm{x}(t)$ в пространстве M. Эти определения естественным образом распространяются и на случай движения с упругими столкновениями частиц.

В простейшем случае, когда $U \equiv 0$ (идеальный газ), траектория $\mathrm{x}(t)$ с начальным условием $\mathrm{x}(0)=\mathrm{x}$ может быть выписана в явной форме

$$\mathrm{x}(t) = \{(q, p) : (q - tp, p) \in \mathrm{x}\}. \tag{10.37}$$

Однако, уже здесь проявляются трудности, которые становятся гораздо более серьезными для систем со взаимодействием. Легко указать случаи, когда при $\mathrm{x} \in M$ за конечное время t в ограниченную область $\mathcal{O} \subset R^d$ слетается бесконечное число частиц (из-за того, что скорости далеких частиц достаточно велики и «направлены в область $\mathcal{O}$»), и $\mathrm{x}(t)$ выходит за пределы пространства M. Тем самым траектория $\mathrm{x}(t)$ не может быть определена для всех $\mathrm{x} \in \hat{M}$.

Для систем взаимодействующих частиц из аналогичных соображений можно построить примеры начальных условий $\mathrm{x} \in M$, для которых решение (10.35) вообще не существует, или же, наоборот, траектория, принадлежащая M, существует, но не единственна. Все это приводит к задаче выделения достаточно «массивного» измеримого подмножества $\hat{M} \subset M$ такого, что для всех точек $x \in \hat{M}$ траектория $x(t) \in \hat{M}$ существует и единственна на всей оси R^1. Имея такое подмножество, мы, полагая $S_t x = x(t)$, определяем однопараметрическую группу измеримых преобразований $S_t : \hat{M} \to \hat{M}$.

Определение 3.1. Пара $(\hat{M}, \{S_t, t \in R^1\})$ называется динамикой, обусловленной потенциалом взаимодействия U, на множестве $\hat{M}$.

Построение динамики $(\hat{M}, \{S_t\})$ — основная тема этого параграфа. Такое построение будет содержательным, если множество $\hat{M}$ окажется достаточно массивным в том смысле, что достаточно обширен класс вероятностных мер P, сосредоточенных на $\hat{M}$. Если мера P обладает таким свойством, то мы можем ввести семейство мер

$$P_t(A) = P(S_{-t}(A \cap \hat{M})), \quad A \in \mathcal{M}, \quad t \in R^1. \qquad (10.38)$$

Определение 3.2. Семейство вероятностных мер $\{P_t, t \in R^1\}$, определяемых равенством (10.38), называется временной эволюцией начальной меры $P_0 = P$, индуцированной динамикой $(\hat{M}, \{S_t\})$.

Естественно требовать, чтобы в класс мер, для которых определена эволюция, входили гиббсовские распределения, удовлетворяющие тем или иным ограничениям на потенциал (см. п.п. 2.3—2.6). В частности, если распределение Гиббса с потенциалом взаимодействия U и параметрами (z, β, p_0) сосредоточено на $\hat{M}$ и не меняется при пространственном сдвиге в направлении вектора p_0, то оно инвариантно относительно преобразований S_t (см. п. 4.1).

Отметим, что в отличие от конечномерной ситуации, где есть выделенный класс мер (меры, абсолютно непрерывные по мере Лебега), в «бесконечно частичной» ситуации естественные классы мер (например, гиббсовские меры с различными парными потенциалами, зависящими от расстояния между частицами) взаимно сингулярны. Поэтому построение траекторий для почти всех относительно отдельно взятой вероятностной меры начальных условий не дает полного решения интересующей нас задачи.

3.2. Построение динамики и временной эволюции. Естественный способ построения траектории $x(t)$ точки $x \in M$ состоит в переходе к пределу $\lim\limits_{\mathcal{J} \nearrow R^d} x^{\mathcal{J}}(t)$ (в топологии пространства M), где $x^{\mathcal{J}}(t)$ — траектория, задающая движение конечной системы частиц с начальным условием $x_{\mathcal{J} \times R^d}$ (т. е. движение частиц, находящихся в начальный момент времени внутри куба $\mathcal{J}$). Здесь есть несколько естественных возможностей. Во-первых, можно просто «игнорировать» частицы из $\mathrm{x}_{\mathcal{J}^c \times R^d}$, определяя $\mathrm{x}^{\mathcal{J}}(t)$ при помощи уравнений (10.35) с начальным условием $\mathrm{x}_{\mathcal{J} \times R^d}$. С другой стороны, можно ввести граничное условие упругого отражения от границы $\partial \mathcal{J}$ и рассматривать движение частиц $(q, p) \in \mathrm{x}_{\mathcal{J} \times R^d}$ в постоянном потенциальном поле, задаваемом «закрепленными» частицами из $\mathrm{x}_{\mathcal{J}^c \times R^d}$. Хотя общих результатов о независимости предела при $\mathcal{J} \nearrow R^d$ от выбора аппроксимирующего движения нет, такую независимость удается доказать для всех конкретных ситуаций, которые обсуждаются ниже.

Отметим, что при движении конечной системы частиц в R^d, определяемом уравнениями (10.35), выполнены хорошо известные законы сохранения:

$$|S_t \mathrm{x}| = |\mathrm{x}| \tag{10.39}$$

(*закон сохранения числа частиц*),

$$H(S_t \mathrm{x}) = H(\mathrm{x}) \tag{10.40}$$

(*закон сохранения энергии*) и, наконец,

$$\sum_{(q,p) \in S_t \mathrm{x}} p = \sum_{(q,p) \in \mathrm{x}} p \tag{10.41}$$

(*закон сохранения импульса*). При движении частиц в области $\mathcal{O}$ с упругими отражениями от границы $\partial \mathcal{O}$ нарушается закон сохранения импульса, а при движении в потенциальном поле в формулировке закона сохранения энергии необходимо учитывать взаимодействие частиц с этим полем.

Законы сохранения играют решающую роль при построении предельной траектории $\mathrm{x}(t)$. На них основано доказательство компактности семейства точек $\{\mathrm{x}^{\mathcal{J}}(t)\}$ при заданных x и t, что является ключевым моментом в доказательстве существования предела. В соответствии с определением топологии в пространстве M, достаточно контролировать при $\mathcal{J} \nearrow R^d$ сужения $\mathrm{x}^{\mathcal{J}}(t)_{\mathcal{O} \times R^d}$ на фиксированную ограниченную область $\mathcal{O} \subset R^d$. Возможные нарушения компактности обуславливаются двумя (взаимосвязанными) причинами: а) отдельные частицы становятся бесконечно быстрыми:

$$\max [\| p \| : p \in \mathrm{x}^{\mathcal{J}}(t)_{\mathcal{O} \times R^d}] \to \infty,$$

и б) возникают неограниченные скопления частиц («коллапсы»)

$$|\mathrm{x}^{\mathcal{J}}(t)_{\mathcal{O} \times R^d}| \to \infty.$$

Оценки, гарантирующие компактность, выводятся при помощи равномерных по $\mathcal{J}$ оценок для $|\mathrm{x}^{\mathcal{J}}(t)_{\mathcal{O} \times R^d}|$ и $H(\mathrm{x}^{\mathcal{J}}(t)_{\mathcal{O} \times R^d})$, получаемых с использованием законов сохранения для числа частиц и энергии. Дело в том, что увеличение числа частиц и энергии в области $\mathcal{O}$ может происходить лишь за счет их «притока» через границу области, и этот приток удается иногда оценить через соответствующие величины для несколько большей области.

Впервые эта идея была реализована в работах Лэнфорда [82], [83], [85], положивших начало математическому изучению бесконечно частичной динамики. В них рассматривался одномерный случай ($d=1$) и предполагалось, что $U(|q|)$ является гладкой функцией $q \in R^1$ с компактным носителем. При таких ограничениях на потенциал энергия может быть оценена через число частиц. Поэтому Лэнфорду удалось провести необходимые оценки, используя лишь закон сохранения числа частиц. Он построил динамику на подмножестве $\hat{M}^{(1)} \subset M$, выделяемом условиями

$$\sup_{(q,p)\in \mathrm{x}} \frac{|p|}{\ln_+ |q|} < \infty, \quad \sup_{y \in R^1} \frac{|\mathrm{x}_{\mathcal{J}(y,\, \ln_+|y|)\times R^1}|}{\ln_+ |y|} < \infty, \qquad (10.42)$$

где $\ln_+ r = \max[1, \ln r]$, $r > 0$. Нетрудно показать, что такое множество массивно в смысле, обсуждавшемся в пункте 3.1.

В серии работ [59], [69], [70], [94] построение динамики проведено для широкого класса потенциалов взаимодействия в размерностях $d=1, 2$. Здесь существенную роль играет закон сохранения энергии. Существование динамики доказывается для подмножества $\hat{M}^{(2)} \subset M$, выделяемого условием

$$\sup_{y \in R^d} \sup_{r > \ln_+ \|y\|} r^{-d} [H(\mathrm{x}_{\mathcal{J}_{(y,r)} \times R^d}) + A |\mathrm{x}_{\mathcal{J}_{(y,r)} \times R^d}|] < \infty, \quad (10.43)$$

где A — константа, зависящая от потенциала U. Множество $\hat{M}^{(2)}$ массивно в прежнем смысле.

Отметим также относящуюся к одномерному случаю заметку [13], где построена динамика для потенциалов U, допускающих упругое столкновение частиц (этот случай исключается условиями цитированных выше работ).

Вызывающим представляется то обстоятельство, что результаты подобного типа до сих пор не распространены на физически реальную размерность $d=3$. Объясним, на наглядном уровне, почему оценки, основанные на законе сохранения энергии, не применимы при $d=3$. Пусть выделена частица $(q, p) \in \mathrm{x}^{\mathcal{J}}(t)$. Пусть далее число $r(t) > 0$ таково, что в интервале времени от 0 до t эта частица непосредственно взаимодействовала лишь с частицами, находившимися в момент 0 в кубе $\mathcal{J}(q, 1/2r(t))$. Считая, что полная энергия частиц в $\mathcal{J}(q, 1/2r(t))$ в момент времени 0 пропорциональна $r(t)^d$ (т. е. объему этого куба), и предполагая, как оценку сверху, что вся эта энергия передана выделенной частице, видим, что модуль ее импульса оценивается сверху величиной $r(t)^{d/2}$. Считая, что та же оценка верна и для других частиц, заключаем, что скорость роста величины $r(t)$ не превосходит величины порядка $r(t)^{d/2}$. Таким образом мы приходим к дифференциальному неравенству

$$\dot{r}(t) \leqslant \text{const}\, r(t)^{d/2},$$

решения которого ограничены при $d \leqslant 2$ на любом конечном интервале времени, но могут быть неограничены при $d=3$. Это рассуждение лежит в основе всех доказательств в работах [59], [69], [70], [94].

Несколько иная идея построения временно́й эволюции вероятностной меры на фазовом пространстве $(M, \mathscr{M})$ была предложена недавно молодым математиком из ГДР Зигмундом-Шульце (R. Siegmund-Schultze). Он доказал следующий факт. Пусть размерность d произвольна, U — гладкая неотрицательная функция с компактным носителем, а P — произвольное трансляционно инвариантное распределение вероятностей на $(M, \mathscr{M})$, для которого конечна средняя энергия отдельной частицы. Тогда для начальных условий, образующих множество полной P-меры в M, существует траектория $x(t) \in M$. Перечисленные условия на потенциал, по-видимому, можно ослабить. Однако методы Зигмунда-Шульце не позволяют пока доказать единственность решения в каком-либо разумном смысле и тем более контролировать те или иные его свойства.

3.3. Цепочка уравнений Н. Н. Боголюбова. Как уже отмечалось в пункте 3.1, построение динамики позволяет определить временну́ю эволюцию $\{P_t, t \in R^1\}$ начальной меры $P_0 = P$ (см. (10.38)). В ряде случаев (например, при выводе кинетических уравнений; см. § 6) удобен иной, более явный, способ описания временно́й эволюции. Он особенно популярен в физической литературе. Этот способ основан на рассмотрении иерархической цепочки уравнений для моментных функций (см. п. 2.7) $k_P^{(n)}$, $n=1, 2, \ldots$, называемых уравнениями Н. Н. Боголюбова [1] (другое часто встречающееся название — цепочка уравнений ББГКИ (Боголюбова—Борна (M. Born)—Грина (H. S. Green)—Кирквуда (J. G. Kirkwood)—Ивона (J. Yvon)). В предположении, что потенциал взаимодействия U «не допускает» столкновения частиц, *цепочка уравнений Н. Н. Боголюбова* имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} k^{(n)}(t;\, (q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n)) = \\ = \{k^{(n)}(t;\, (q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n)),\ H((q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n))\} + \\ + \int dq_0 dp_0 \Big\{k^{(n+1)}(t;\, (q_0, p_0), (q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n)), \\ \sum_{j=1}^{n} U(\|q_0 - q_j\|)\Big\}\end{aligned} \qquad (10.44)$$

(при $n=1$ в уравнении остается лишь интегральный член). Здесь $k^{(n)}(t; \cdot)$ — это n-моментная функция в момент времени t.

Связь между двумя методами описания эволюции остается пока что малоисследованной. Естественно ожидать, что для широкого класса ситуаций моментные функции k_{P_t}, $t \in R^1$, дают решение уравнений (10.44) (по крайней мере — в слабом смысле). Здесь можно указать статью [71] и заметку [41], где этот факт доказан для одномерной динамики, построенной, соответственно, в [82] и в [13]. Ряд работ посвящен доказательству этого же факта в случае, когда начальная мера P абсолютно непрерывна или «почти» абсолютно непрерывна по отношению к распределению Гиббса с потенциалом U и параметрами z, β, ρ_0 (см. [111], [112], [118], а также [102]).

Отметим, что, наряду с изложенным выше подходом, интенсивно и плодотворно развивается и другой, альтернативный, подход, при котором вопросы о существовании и единственности решения цепочки уравнений Н. Н. Боголюбова решаются с позиций функционального анализа. При таком подходе цепочка уравнений Н. Н. Боголюбова рассматривается как абстрактное эволюционное уравнение. На первом этапе решение строится в банаховом пространстве последовательностей функций, описывающих состояния конечных систем частиц. Затем совершается термодинамический предельный переход к бесконечным системам. Существенную роль здесь, как и в пункте 3.2, играют свойства конечно частичной динамики. Функционально-аналитический подход развивается в работах киевских специалистов по математической физике [8], [9], [27], [32]. Детальный обзор этого направления содержится в недавней статье Д. Я. Петрины и В. И. Герасименко [33], к которому мы и отсылаем читателя за подробностями. Развернутое изложение всего круга вопросов, связанных с современным состоянием задачи о решениях цепочки уравнений Н. Н. Боголюбова, содержится в подготовленной к печати монографии Д. Я. Петрины, В. И. Герасименко и П. В. Малышева.

Отметим также работу [39], где с функционально-аналитических позиций исследуется цепочка диффузионных уравнений типа уравнений Н. Н. Боголюбова.

§ 4. Равновесная динамика

4.1. Определение и конструкция равновесной динамики. Рассмотрим гамильтонову систему (10.35) в ограниченной области $\mathcal{O} \subset R^d$ с упругим отражением от границы $\partial\mathcal{O}$. Из теоремы Лиувилля и законов сохранения числа частиц (10.39) и энергии (10.40) следует (при весьма слабых дополнительных предположениях), что эта динамика, ограниченная на гиперповерхность в пространстве $M_{\mathcal{O}}$, выделенную фиксацией числа частиц $|\mathrm{x}|$ и энергии $H(\mathrm{x})$, сохраняет меру на этой поверхности, индуцированную мерой Лебега — Пуассона $\bar{L}_{\mathcal{O}}$. Соответствующая нормированная мера называется микроканоническим распределением. Распределение Гиббса в объеме $\mathcal{O}$ с потенциалом U и параметрами z, β и $p_0=0$ представляет собой осреднение с некоторым весом микроканонических распределений и поэтому также инвариантно. Аналогичным образом, распределение Гиббса в объеме $\mathcal{O}$ с граничным условием $\bar{\mathrm{x}}$, потенциалом U и параметрами z, β и $p_0=0$ инвариантно относительно движения в потенциальном поле закрепленных частиц из $\bar{\mathrm{x}}$.

Пусть теперь P — вероятностная мера на фазовом пространстве $(M, \mathscr{M})$. Рассмотрим однопараметрическую группу автоморфизмов $\{S^t, t \in R^1\}$ пространства с мерой $(M, \mathscr{M}, P)$, которая порождается бесконечной системой дифференциальных уравнений (10.35). Формально это означает, что для любых гладких «локальных» функций f, g, зависящих от координат и импульсов частиц, находящихся в ограниченной области пространства R^d, выполнено соотношение

$$d/dt \int\limits_{\mathring{M}} P(d\mathrm{x})\, f(S^t\mathrm{x})\, \bar{g}(\mathrm{x})\Big|_{t=0} = \int\limits_{\mathring{M}} P(d\mathrm{x})\, \mathscr{L} f(\mathrm{x})\, \bar{g}(\mathrm{x}), \qquad (10.45)$$

где

$$\mathscr{L} f(\mathrm{x}) = \sum_{(q,\,p) \in \mathrm{x}} (\mathrm{grad}_q f(\mathrm{x}),\ p) -$$

$$- \sum_{(q,\,p) \in \mathrm{x}} (\mathrm{grad}_p f(\mathrm{x}), \sum_{\substack{(q',\,p') \in \mathrm{x}: \\ q \neq q'}} \mathrm{grad}\, U(\| q' - q \|)). \qquad (10.46)$$

Будем говорить, что мера P трансляционно инвариантна в направлении вектора p_0, если $P(T_{sp_0}A) = P(A)$ при всех $A \in \mathscr{M}$ и $s \in R^1$. Для распределений Гиббса это свойство заведомо имеет место в условиях единственности (см. теоремы 2.2 и 2.3).

Определение 4.1. Пусть P есть распределение Гиббса с потенциалом взаимодействия U и параметрами (z, β, p_0), трансляционно инвариантное в направлении вектора p_0. Тогда $(M, \mathscr{M}, P, \{S^t\})$ называется равновесной динамической системой.

Связь определения 4.1 с конструкциями § 3 состоит в следующем. В описываемых ниже ситуациях, где построена равновесная динамика, для P-почти всех x траектория $S^t\mathrm{x}$ задает решение системы уравнений (10.35). С другой стороны, если динамика в смысле определения 3.1 построена на множестве $\hat{M}$, имеющем полную меру относительно распределения Гиббса P из описанного выше класса, то P будет *инвариантной мерой*, задающей равновесную динамическую систему в смысле определения 4.1.

Условие $P(\hat{M})=1$ легко проверяется в ситуациях, рассмотренных в пункте 3.2. Однако, равновесная динамическая система может быть построена иными методами в гораздо более широкой ситуации (см. работы [22], [35], где рассматривался одномерный случай, и [36], [101], посвященные многомерному случаю).

Главная идея построений, отличающая их от построений § 3, состоит в том, что из-за инвариантности распределения Гиббса с параметром $p_0=0$ относительно аппроксимирующего движения (см. п. 3.2), для любого фиксированного t удается получать равномерные оценки для траекторий $\mathrm{x}^{\mathcal{J}}(t)$. Переход к произвольному значению p_0 оказывается возможным из-за очевидного соотношения

$$S^t\Gamma_{p_0}\mathrm{x}=\Gamma_{p_0}T_{tp_0}S^t\mathrm{x}, \tag{10.47}$$

где

$$\Gamma_{p_0}\mathrm{x}=\{(q,\ p):(q,\ p-p_0)\in\mathrm{x}\}.$$

В случае, когда потенциал U имеет конечный радиус действия, удается проверить «кластерный» характер равновесной динамической системы. Точнее, в размерности $d=1$ [35] и в размерности $d\geqslant 2$ при малых значениях z [36] (ср. с теоремой 2.2) типичная (по отношению к соответствующему распределению Гиббса) точка x обладает следующим свойством. Частицы $(q, p)\in\mathrm{x}$ можно разбить на конечные попарно непересекающиеся группы (кластеры) таким образом, что при движении на заданном ограниченном интервале времени частицы из разных кластеров не вступают во взаимодействие друг с другом. Затем происходит перераспределение частиц по новым кластерам, которые снова движутся независимо, и т. д.

Распределения Гиббса, о которых говорится в определении 4.1, связаны с $(d+2)$-параметрическом семейством инвариантов $\mathbf{N}(P)$, $\mathbf{H}(P)$ и $\mathbf{J}(P)$ (см. п. 3.2). Нетрудно проверить, что для распределения Гиббса P с параметрами $(z,\ \beta,\ p_0)$ средний удельный импульс $\mathbf{J}(P)$ совпадает с p_0. Параметр z отвечает за среднюю удельную плотность $\mathbf{N}(P)$, а β — за среднюю удельную энергию $\mathbf{H}(P)$ в том смысле, что при фиксированных U, β и p_0 (U, z и p_0) $\mathbf{N}(P)$ монотонно зависит от z (соответственно, $\mathbf{H}(P)$ монотонно зависит от β). В области единственности распределения Гиббса (см. теоремы 2.2, 2.3) оно однозначно задается значениями $\mathbf{N}(P)$, $\mathbf{H}(P)$ и $\mathbf{J}(P)$.

К вопросу о существовании равновесной динамической системы идейно примыкает вопрос о существовании решения цепочки уравнений Н. Н. Боголюбова (10.44) для начальной моментной функции k_P, отвечающей «локальному возмущению» инвариантного распределения Гиббса (это означает, что мера P на $(M,\ \mathcal{M})$ абсолютно непрерывна по отношению к одному из инвариантных распределений Гиббса). С помощью функционально-аналитических методов результаты подобного типа получены в уже упоминавшейся серии работ [8], [9], [27], [32], [33]. С другой стороны, в цикле работ [111], [112], [118] этот вопрос исследуется с использованием свойств соответствующей равновесной динамики.

4.2. Постулат Гиббса. Основной постулат статистической механики утверждает, что в состоянии термодинамического равновесия системы с большим числом частиц описываются распределениями Гиббса. В плане математического обоснования статистической механики весьма важен вопрос о выделении класса распределений Гиббса при помощи каких-либо физически естественных априорных условий.

При традиционном «конечно частичном» подходе (ср. [48]) обычно ссылаются на эргодическую теорему Биркгофа—Хинчина и теорему об эквивалентности ансамблей, утверждающую, что микроканоническое распределение, рассматриваемое как вероятностная мера на $M\mathcal{J}$, сходится при $\mathcal{J}\nearrow R^d$ к распределению Гиббса с некоторыми значениями параметров z, β и с $p_0=0$. Этот подход основан на известной *гипотезе об эргодичности* динамической системы с микроканоническим распределением, описываемой уравнениями (10.35). Известный здесь результат — это теорема об эргодичности системы из двух упруго сталкивающихся твердых шаров (см. гл. 8, § 1). С другой стороны (хотя здесь пока нет явно сформулированных результатов), метод построения инвариантных мер, даваемый теорией А. Н. Колмогорова—В. И. Арнольда—Мозера (J. Moser), оставляет мало надежд, что такая эргодичность имеет место в общей ситуации.

В рамках развиваемого в этой статье бесконечно частичного подхода аналогом утверждения об эргодичности микроканонического распределения является гипотеза о том, что класс всех «достаточно хороших» инвариантных мер исчерпывается распределениями Гиббса, о которых говорится в определении 4.1. (Разумеется, нетрудно построить тривиальные примеры. Например, для потенциала взаимодействия с конечным радиусом r_1 инвариантна любая мера, для которой с вероятностью 1 все частицы отстоят друг от друга более, чем на r_1, и имеют нулевые импульсы). Представляется, что естественные априорные ограничения на класс мер, исключающие подобные контрпримеры, могут состоять из предположений следующего типа:

1) в сужении на $\mathscr{M}_{\mathcal{O}}$ при ограниченных $\mathcal{O}\subset R^d$ эти меры должны задаваться «достаточно хорошими» в аналитическом смысле плотностями по мере $\overline{L}_{\mathcal{O}}$,

2) должны выполняться некоторые условия «пространственного перемешивания» (ср. с (10.20), (10.21)), означающие «почти неза-

висимость» событий из σ-алгебр $\mathcal{M}_{\mathcal{O}_1}$ и $\mathcal{M}_{\mathcal{O}_2}$ для «далеких» областей $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2\subset R^d$.

Дальнейшее сужение априорного класса мер связано с предположением о том, что все меры являются гиббсовскими в смысле общего определения пункта 2.6 при возможных дальнейших ограничениях на их потенциалы Ф. В такой постановке эта задача изучена в цикле работ [12], [76].

В работах [12], [76] потенциал взаимодействия U предполагается финитным с твердой сердцевиной диаметра r_0, причем $\lim\limits_{r\to r_0+} U(r)=\infty$. В качестве априорного класса, в котором решается задача описания инвариантных мер, рассматривается класс гиббсовских распределений, отвечающих потенциалам $\Phi=(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)},\dots)$, удовлетворяющим некоторым качественным ограничениям. Среди этих ограничений принципиальный характер носят два: (а) существует $n_0=n_0(\Phi)\geqslant 2$ такое, что $\Phi^{(n)}\equiv 0$ при $n>n_0$, (б) при всех $n=2,\dots,n_0$ и $(q_1, p_1),\dots,(q_n, p_n)\in R^d\times R^d$

$$|\Phi^{(n)}((q_1, p_1),\dots,(q_n, p_n))|\leqslant\psi\left(\max_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant n}\|q_{j_1}-q_{j_2}\|\right), \qquad (10.48)$$

где ψ — монотонная достаточно быстро убывающая функция.

Задача нахождения инвариантных мер ставилась в [12], [76] как задача о нахождении стационарных по времени решений цепочки уравнений Боголюбова, т. е. о нахождении моментных функций, для которых обращается в нуль левая часть уравнений (10.44). Основная теорема [12], [76] утверждает, что внутри описанного класса мер каждое из таких стационарных решений задает моментные функции одного из распределений Гиббса, фигурирующих в определении 4.1.

Доказательство этой теоремы использует следующее важное понятие. Функция h^Φ вида

$$h^\Phi(\mathrm{x})=\sum_{n\geqslant 1}\sum_{\substack{\mathrm{x}'\subseteq\mathrm{x}:\\ |\mathrm{x}'|=n}}\Phi^{(n)}(\mathrm{x}'),\ \mathrm{x}\in M,\ |\mathrm{x}|<\infty, \qquad (10.49)$$

(ср. с (10.26)) называется первым интегралом движения в пространстве R^d, если

$$h^\Phi(S^t\mathrm{x})\equiv h^\Phi(\mathrm{x}),\ t\in R^1 \qquad (10.50)$$

(ср. с (10.39)—(10.41)). На первом этапе доказывается, что если моментная функция k_P гиббсовского распределения P с потенциалом Ф из указанного класса дает стационарное решение цепочки уравнений Боголюбова, то h^Φ является первым интегралом движения.

На втором этапе исследуются *сумматорные первые интегралы* движения вида (10.49). Оказывается, что при наложенных условиях они сводятся к линейным комбинациям «канонических

ких» первых интегралов (10.39)—(10.41). Это приводит к равенствам (10.29а, б), в силу которых P оказывается одним из распределений Гиббса с потенциалом U.

4.3. Вырожденные модели. Взаимосвязь между сумматорными первыми интегралами и классом инвариантных мер хорошо раскрывается на примере «вырожденных» моделей, где, кроме «канонических» первых интегралов (10.39)—(10.41), имеются другие сумматорные первые интегралы. Так, в случае идеального газа, где импульсы частиц при движении не меняются, имеются первые интегралы вида

$$h(\mathrm{x}) = \sum_{(q,p)\in\mathrm{x}} \varphi(p), \quad \mathrm{x}\in M, \quad |\mathrm{x}|<\infty, \qquad (10.51)$$

где φ — произвольная измеримая функция. В соответствии с этим здесь инвариантными являются все пуассоновские меры $P^0_{z,\sigma}$ (см. п. 2.5). Аналогичная ситуация имеет место и для модели одномерных ($d=1$) твердых стержней длины $r_0>0$, где частицы при столкновении обмениваются импульсами. Здесь инвариантными являются меры $P^{r_0}_{z,\sigma}$ (см. вновь п. 2.5). Из результатов § 5 (см. п. п. 5.2, 5.4) следует, что внутри широкого класса распределений вероятностей на $(M, \mathcal{M})$ других инвариантных мер для этих моделей нет.

Другой интересный пример дает одномерная система (3.1) с потенциалом взаимодействия

$$U(r) = (\operatorname{sh} r)^{-2}, \quad r>0. \qquad (10.52)$$

При любом заданном числе частиц $N<\infty$ эта система интегрируется методом обратной задачи теории рассеяния (см. [44]). Поэтому здесь есть бесконечная серия нетривиальных сумматорных первых интегралов. В работе [44] рассмотрен простейший из этих интегралов, заданный в виде (10.49), при некотором явно выписываемом Φ. Доказаны существование и инвариантность гиббсовского распределения с потенциалом вида $\beta\Phi$, $\beta>0$.

В заметке [75] анонсирован результат, обобщающий в одномерном случае построения пункта 4.2 на более широкий класс потенциалов, включающих потенциал (10.52). Оказалось, что потенциал (10.52) (и кратные ему) исчерпывают класс потенциалов, для которых есть дополнительные инвариантные гиббсовские меры.

4.4. Асимптотические свойства мер P_t. Очень важным представляется вопрос об асимптотическом поведении мер P_t, $t\in R^1$, задающих временнýю эволюцию меры $P_0=P$ (см. определение 3.2). Естественная гипотеза состоит в том, что в невырожденных моделях движения для «достаточно хороших» (в смысле п. 4.2) начальных мер P меры P_t сходятся при $t\to\pm\infty$ к инвариантному распределению Гиббса с потенциалом U, для которого значения средних удельных числа частиц, энергии и импульса те же, что и для P. Эту гипотезу можно рассматривать как аналог классической эргодической гипотезы Больцмана.

Аналогичную роль в рамках равновесной динамики играет гипотеза о том, что для невырожденных моделей равновесная динамическая система обладает свойствами перемешивания. Из этой гипотезы вытекала бы сходимость мер P_t для начальных мер P, абсолютно непрерывных относительно инвариантного распределения Гиббса с потенциалом U, что соответствует физически утверждению об асимптотическом «рассасывании» локальных флуктуаций в равновесных динамических системах.

Обе эти проблемы очень трудны, и результаты на математическом уровне получены здесь лишь для вырожденных моделей идеального газа и одномерных твердых стержней, которые обсуждаются в следующем параграфе.

§ 5. Идеальный газ и близкие системы

5.1. Пуассоновская надстройка. Начнем с изучения динамической системы на $(M, \mathcal{M})$, отвечающей потенциалу идеального газа $U \equiv 0$. Удобно привести общее определение, включающее пример идеального газа в качестве частного случая.

Пусть $(N^1, \mathcal{N}^1, \pi)$ — метрическое пространство с борелевской σ-конечной мерой π, $\{\tau_t^1, t \in R^1\}$ — однопараметрическая измеримая группа взаимно однозначных преобразований N^1, сохраняющих меру π. По аналогии с пространствами $(Q^0, \mathcal{Q}^0)$ и $(M, \mathcal{M})$ (см. п. п. 2.1, 2.5) введем измеримое пространство $(N, \mathcal{N})$, точками которого служат «локально конечные» подмножества N^1, Зафиксируем $z > 0$ и по аналогии с пуассоновскими мерами $P_z{}^0$ и $P_{z,\sigma}^0$ введем вероятностную меру $\mathbf{P}_{z,\pi}^0$ на $(N, \mathcal{N})$, определяемую теми же условиями 1), 2) (см. п. 2.2) с заменой R^d пространством N^1 и меры Лебега мерой π. Определим поток $\{\tau_t, t \in R^1\}$ в $(N, \mathcal{N}, \mathbf{P}_{z,\pi}^0)$, полагая

$$\tau_t X = \{x \in N^1 : \tau_{-t}^1 y \in X\}. \qquad (10.53)$$

Нетрудно проверить, что мера $\mathbf{P}_{z,\pi}^0$ инвариантна относительно потока $\{\tau_t\}$.

Определение 5.1. Динамическая система $(N, \mathcal{N}, \mathbf{P}_{z,\pi}^0, \{\tau_t\})$ называется пуассоновской надстройкой над $(N^1, \mathcal{N}^1, \pi, \{\tau_t{}^1\})$. При этом $(N^1, \mathcal{N}^1, \pi, \{\tau_t{}^1\})$ называется одночастичной динамической системой.

В частном случае, когда $N^1 = R^d \times R^d$, π есть мера $l \times \sigma$, где l — мера Лебега, а σ — распределение вероятностей на R^d, и $\tau_t{}^1(q, p) = (q + tp, p)$, $(q, p) \in R^d \times R^d$, мы получаем динамическую систему идеального газа. Здесь $\mathbf{P}_{z,\pi}^0$ совпадает с вероятностной мерой $P_{z,\sigma}^0$ (см. п. 2.5).

Естественно, что все эргодические свойства пуассоновской надстройки полностью определяются одночастичной динамической системой. Однако уже получение необходимых и достаточных условий эргодичности и перемешивания представляет собой в общем случае достаточно трудную задачу. Положение упрощается, если предположить дополнительно, что в одночастичной динамической системе $(N^1, \mathscr{N}^1, \pi, \{\tau_t\})$ происходит так называемый уход на бесконечность, т. е. найдутся множество $C \in \mathscr{N}^1$ с $\pi(C) < \infty$ и число $t_0 > 0$ такие, что $\pi\left(N^1 \setminus \bigcup_{t \in R^1} \tau_t{}^1 C\right) = 0$ и пересечение $C \cap \tau_t C = \varnothing$ при всех t с $|t| > t_0$. Для идеального газа это условие выполняется, если распределение вероятностей σ не имеет атома в 0.

Теорема 5.1 ([26]). Если в одночастичной динамической системе происходит уход на бесконечность, то пуассоновская надстройка является B-потоком.

Доказательство состоит в проверке B-свойства у разбиения, которое задается пересечением $X \cap C$, $X \in N$.

Наглядное объяснение, почему пуассоновская надстройка обладает столь сильными эргодическими свойствами, связано со спецификой бесконечно частичных систем. Всякая абсолютно непрерывная относительно $\mathbf{P}^0_{z,\pi}$ вероятностная мера задается плотностью $f(X)$, $X \in N$. Функция f либо является «локальной» (зависит от координат и импульсов частиц, находящихся в ограниченной области пространства R^d), либо может быть аппроксимирована локальными функциями в смысле L_1-сходимости. «Сдвинутая» функция $f(\tau_{-t}X)$ зависит в основном от координат и импульсов частиц, находящихся на расстоянии порядка $|t|$ от начала координат. Из определения меры $\mathbf{P}^0_{z,\pi}$ следует, что функции $f(\tau_{-t}X)$ и $f(X)$ при больших $|t|$ «почти» независимы, что и приводит к хорошим свойствам эргодичности.

Другой популярный пример пуассоновской надстройки — это так называемый *газ Лоренца* (см. также гл. 8). Пусть в пространстве R^d «разбросано» счетное число точек — «неподвижных рассеивателей». Каждый из них создает потенциальное поле, достаточно быстро убывающее при удалении от рассеивателя. В качестве одночастичной системы берется динамическая система, отвечающая движению частицы в потенциальном поле, заданном суммарным потенциалом рассеивателей. Пуассоновская надстройка над такой системой — это и есть общий газ Лоренца.

Исследованию поддается частный случай, когда потенциалы рассеивателей являются потенциалами твердых шаров (не обязательно постоянного радиуса). Этому случаю соответствует движение частицы с постоянной скоростью и упругим отражением от границ шаров. В этом случае газ Лоренца изучается методами теории рассеивающих биллиардов (см. [56], [57], гл. 8). Случай периодической конфигурации рассеивателей непосредственно сводится к рассеивающему биллиарду на торе. В работе [57] было показано, что при достаточно широких предположениях о конфигурации рассеивателей газ Лоренца является K-системой.

Отметим тесную взаимосвязь рассматриваемых в этом пункте моделей с бесконечными системами независимо движущихся частиц (см. гл. 7 книги [96] и имеющиеся там ссылки). В частности, инвариантность пуассоновской меры $P^0_{z,\sigma}$ относительно динамики идеального газа и свойство перемешивания следуют из результатов, полученных еще в 50-х годах (см. [14], [63]).

5.2. Асимптотическое поведение распределения P_t при $t\to\infty$. В этом пункте обсуждается вопрос об асимптотическом поведении вероятностных мер P_t, $t\in R^1$, описывающих временну́ю эволюцию начальной меры P (см. (10.38)), индуцированную динамикой идеального газа (10.37). Поскольку мы не предполагаем, что мера P абсолютно непрерывна по какой-либо из инвариантных мер $P^0_{z,\sigma}$, этот вопрос выходит за рамки построений предыдущего пункта.

Исследование асимптотических свойств вероятностных мер P_t было начато в упоминавшейся выше работе [14]. Детальному анализу этого вопроса посвящена статья [21], результаты которой излагаются ниже. Введем следующий коэффициент асимптотического перемешивания (ср. (10.20)):

$$\alpha_P(r, s) = \sup_{y\in R^d} \sup_{\substack{A_1\in\mathcal{M}_{\mathcal{J}(y,r)},\\ A_2\in\mathcal{M}_{\mathcal{J}(y,r+s)^c}}} |P(A_1\cap A_2) - P(A_1)P(A_2)|. \qquad (10.54)$$

На начальную меру P налагаются условия: (I) при любом $b>0$

$$\lim_{s\to\infty} \alpha_P(bs, s) = 0,$$

(II) 1-моментная мера $K_P^{(1)}(dq\times dp)$ абсолютно непрерывна по отношению к мере $\hat{K}_P^{(1)}(dq)\times dp$ на $R^d\times R^d$, где $\sup_{y\in R^d}\hat{K}_P^{(1)}(\mathcal{J}(y, b))<\infty$ при любом $b>0$, и обладает ограниченной плотностью по этой мере,

(III) 2-моментная мера $K_P^{(2)}\left(\prod_{j=1,2} dq_j\times dp_j\right)$ абсолютно непрерывна по отношению к мере $\hat{K}_P^{(2)}(dq_1\times dq_2)\times\prod_{j=1,2} dp_j$ на $(R^d\times R^d)^2$, где $\sup_{y_1, y_2\in R^d}\hat{K}_P^{(2)}\left(\times_{j=1,2}\mathcal{J}(y_j, b_j)\right)<\infty$ при любых b_1, $b_2>0$, и обладает ограниченной плотностью по этой мере.

Теорема 5.2([21]). Пусть распределение вероятностей P удовлетворяет условиям (I)—(III). Тогда распределения вероятностей P_t сходятся при $t\to\pm\infty$ к пуассоновской мере $P^0_{z,\sigma}$

в том и только том случае, если 1-моментные меры

$$K_{P_t}^{(1)}(A)=K_P^{(1)}(\{(q,p):(q-tp,p)\in A\})$$

сходятся к мере $z(l\times\sigma)$.

В свою очередь, сходимость мер $K_{P_t}^{(1)}$ можно доказать при широких предположениях об 1-моментной мере $K_P^{(1)}$. Например, если $K_P^{(1)}$ обладает свойством периодичности по отношению к пространственным сдвигам $(q,p)\mapsto(q+y,p)$, то меры $K_{P_t}^{(1)}$ сходятся к мере, имеющей вид $z(l\times\sigma)$, которая получается с помощью пространственного усреднения меры $K_P^{(1)}$.

Условия теоремы 5.2 можно проверить для гиббсовских распределений при условиях единственности (см. теоремы 2.2 и 2.3). Доказательство теоремы 5.2 основано на одном из вариантов предельной теоремы Пуассона для сумм слабозависимых случайных величин.

Недавно результат теоремы 5.2 был усилен Виллмсом (J. Willms) [117], предложившим несколько более общий вариант условия (I). Отметим также работу [43], где рассматриваются «абстрактные» теоремы о сходимости к пуассоновской мере $\mathbf{P}_{z,\pi}^0$ на пространстве $(N,\mathcal{N})$ (см. п. 5.1). Из результатов, доказанных в [43], вытекает, что свойство (I) достаточно требовать от условного распределения $P(\cdot|\mathcal{M}^Q)$, порожденного мерой P, относительно σ-алгебры $\mathcal{M}^Q$ (см. п. 2.5). Это позволяет существенно расширить класс гиббсовских распределений, для которых выполнены условия теоремы о сходимости.

5.3. Динамическая система одномерных твердых стержней. С динамикой идеального газа тесно связана динамика одномерных $(d=1)$ твердых стержней, отвечающая потенциалу (10.14). Связь этих динамик осуществляется с помощью специальных преобразований «растяжения» и «сжатия» в фазовом пространстве $(M,\mathcal{M})$. Пусть заданы $\mathbf{x}\in M$ и частица $(q,p)\in\mathbf{x}$. Занумеруем частицы $(\tilde{q},\tilde{p})\in\mathbf{x}$ целыми числами в порядке возрастания координат $\tilde{q}\in R^1$, присвоив частице (q,p) номер 0. При преобразовании «растяжения» $\mathbf{D}_q$ частица (q_j,p_j) «переходит» в (q_j+jr_0,p_j), $j\in Z^1$, где r_0 — диаметр твердого стержня. Преобразование «сжатия» $\mathbf{C}_q$ обратно преобразованию $\mathbf{D}_q$ (оно определено, лишь если $q_{j+1}-q_j>r_0$ при всех j). Если обозначить преобразование временного сдвига в динамике идеального газа через $S_t{}^0$, а в динамике твердых стержней — через $S_t^{r_0}$, то справедлива формула

$$S_t^{r_0}\mathbf{x}=T_{-r_0n_t}\mathbf{D}_{q+tp}S_t{}^0\mathbf{C}_q\mathbf{x},\quad t\in R^1,\tag{10.55}$$

где $n_t=n_t((q,p),\mathbf{C}_q\mathbf{x})$ — суммарное «алгебраическое» число пересечений траектории частицы (q,p) траекториями других частиц

$(\tilde{q}, \tilde{p}) \in \mathbf{C}_q x$ при свободном движении в промежутке времени от 0 до t.

На основе этого преобразования в работах [40], [45], [99] были исследованы эргодические свойства системы твердых стержней с инвариантной мерой $P^{r_0}_{z,\sigma}$ (см. п. 2.5). Наиболее общий результат приведен в работе Айзенмана (M. Aizenman), Голдстейна (S. Goldstein) и Лейбовица (J. Lebowitz) [45].

Теорема 5.3. Пусть σ — вероятностная мера на R^1 с конечным первым моментом $\left(\int\limits_{R^1} \sigma(dp)|p| < \infty\right)$ такая, что $\sigma(\{0\}) < 1$. Тогда при любом $z > 0$ динамическая система $(M, \mathscr{M}, P^{r_0}_{z,\sigma}, \{S^{r_0}_t\})$ является K-потоком. Если z и σ удовлетворяют дополнительному условию: $\sigma((p^0_{z,\sigma} - \varepsilon, p^0_{z,\sigma} + \varepsilon)) = 0$ при некотором $\varepsilon > 0$, где

$$p^0_{z,\sigma} = \frac{zr_0}{1 + zr_0} \int\limits_{R^1} \sigma(dp)\, p, \qquad (10.56)$$

то динамическая система $(M, \mathscr{M}, P^{r_0}_{z,\sigma}, \{S^{r_0}_t\})$ является B-потоком.

Вопрос о возможности снять это дополнительное условие остается открытым.

Формула (10.55) составила основу проведенного в [21] обобщения результатов пункта 5.2 на динамику твердых стержней. Предположим, что мера P трансляционно инвариантна и сосредоточена на множестве точек $x \in M$, обладающих свойством: $|q - q'| > r_0$ для любой пары различных частиц (q, p), $(q', p') \in x$. С помощью преобразований $\mathbf{D}_q$ и $\mathbf{C}_q$ мере P можно сопоставить трансляционно инвариантную меру $P^{(0)}$. Если мера $P^{(0)}$ удовлетворяет условиям (I) — (III) (см. п. 5.2), то меры $P^{(0)}_t$, полученные из $P^{(0)}$ с помощью динамики идеального газа, сходятся при $t \to \pm\infty$ к пуассоновской мере $P^0_{z,\sigma}$. Используя формулу (10.55), удается доказать, что меры P_t, полученные из P с помощью динамики твердых стержней, сходятся к соответствующей мере $P^{r_0}_{z,\sigma}$. Условия, накладываемые на начальную меру P, формулируются здесь в терминах меры $P^{(0)}$, связь которой с P не столь прозрачна. Тем не менее, удается проверить эти условия для широкого класса гиббсовских распределений (см. [21]).

§ 6. Кинетические уравнения

6.1. Постановка задачи. В соответствии с определением 3.2, временна́я эволюция вероятностной меры P на пространстве $(M, \mathscr{M})$ представляет собой семейство мер P_t, $t \in R^1$, определяемых формулой (10.38), или, что, по существу, эквивалентно, семейством моментных функций $k(t, \cdot)$, удовлетворяющих цепочже уравнений Боголюбова (10.44). Кинетические уравнения статистической механики предназначены для приближенного описания временно́й эволюции в более простых терминах. Задача начавшихся здесь в последние годы математически строгих исследований состоит в том, чтобы обосновать применяемые приближения и углубить наше понимание этого трудного круга проблем. Эти исследования находятся пока на начальном уровне, и многое из сказанного ниже нужно трактовать лишь как предварительные гипотезы.

Отметим содержательный обзор работ этого направления, принадлежащий Шпону (H. Spohn) [107], где детально обсуждается большинство из тем, затрагиваемых в данном параграфе. Вопросы кинетической теории газа Лоренца рассматриваются в обзоре ван Бейерена (H. van Bejeren) [49].

В этом пункте мы попытаемся описать, не претендуя на математическую точность, общие черты в постановке задач о выводе основных кинетических уравнений: *уравнений Больцмана* (L. Boltzmann), *А. А. Власова, Л. Д. Ландау, Л. Эйлера*, приняв за основу подход, развитый в § 3. После этого мы перейдем к последовательному обсуждению отдельных уравнений и формулировке немногочисленных имеющихся здесь математических результатов.

Пусть $F=F_P$ — функционал, определенный на некотором подмножестве пространства вероятностных мер на $(M, \mathscr{M})$ и принимающий значения в пространстве $\mathscr{F}$ (вообще говоря, векторных) функций от q, $p\in R^d$. Для уравнений Больцмана, А. А. Власова и Л. Д. Ландау $F_P=k_P^{(1)}$ (1-моментная функция меры P). Предположим, что в пространстве $\mathscr{F}$ задано семейство преобразований R_t, $t\in R^1$, обладающее полугрупповым (или групповым) свойством

$$\mathrm{R}_{t_1+t_2}=\mathrm{R}_{t_1}\mathrm{R}_{t_2},\quad t_1,\ t_2\geqslant 0 \text{ или } t_1,\ t_2\leqslant 0\ (t_1,\ t_2\in R^1). \qquad (10.57)$$

Допустим далее, что для некоторых классов потенциалов взаимодействия U и начальных мер P_0 на $(M, \mathscr{M})$, а также интервала $I\subseteq R^1$

1) имеет место приближенное равенство

$$F_{P_{t'}}\approx \mathrm{R}_t F_{P_0}, \text{ где } t'=\varkappa t,\ t\in I. \qquad (10.58)$$

Здесь $\varkappa>0$ — некоторая константа, задающая «масштаб изменения» времени;

2) отображение $P\mapsto F_P$ приближенно обратимо на некотором подмножестве в пространстве мер на $(M, \mathscr{M})$, включающем меры $P_{t'}$, $t'\in R^1$, так что мера $P_{\varkappa t}$ может быть «почти восстановлена» по значению функционала $F_{P_{\varkappa t}}$.

При этом естественно полагать, что преобразования R_t могут быть описаны с помощью решения дифференциального уравнения вида

$$d/dt(F(t))=AF(t), \qquad (10.59)$$

где A — некоторый оператор в $\mathscr{F}$, не зависящий от t. Уравнения такого типа и называются кинетическими.

В математических работах последнего времени приближенные соотношения в условиях 1) и 2) интерпретируются как асимптотические равенства по вспомогательному параметру $\varepsilon\to 0+$. Рассматривается система P_0^ε, $\varepsilon>0$, начальных мер на $(M, \mathscr{M})$, на которую накладываются дополнительные ограничения. Во-первых, предполагается, что 1-моментная функция $k_{P_0^\varepsilon}^{(1)}$ удовлетворяет соотношению

$$k_{P_0^\varepsilon}^{(1)}(q, p)=\varepsilon^{\alpha_1} f_0(\varepsilon^{\alpha_2} q, p), \tag{10.60}$$

где f_0 — фиксированная функция $R^d\times R^d\to[0, \infty)$, а α_j — некоторые константы (разумеется, можно рассматривать несколько более общую ситуацию, когда равенство (10.60) выполнено в пределе при $\varepsilon\to 0+$). Далее, предполагается, что константа $\varkappa=\varepsilon^{-\alpha_3}$ (см. (10.58)) и, наконец, что движение частиц обусловлено потенциалом взаимодействия U^ε вида

$$U^\varepsilon(r)=\varepsilon^{\alpha_4} U(\varepsilon^{\alpha_5} r), \quad r\geqslant 0, \tag{10.61}$$

где U — фиксированная функция $[0, \infty)\to R^1\cup\{\infty\}$, удовлетворяющая условиям пункта 2.4.

Отметим, что выбор констант α_j неоднозначен. Это по существу связано с тем, что при одновременном изменении масштабов $t=\varepsilon t'$, $q=\varepsilon q'$, $p=p'$ уравнения (10.35) переходят в уравнения того же вида с новым потенциалом $U_\varepsilon(r)=U(\varepsilon^{-1} r)$, и при этом 1-моментная функция приобретает вид $k^{(1)'}(t'; q', p')=$ $=\varepsilon^{-d} k_{P_{\varepsilon^{-1}t}^\varepsilon}^{(1)}(\varepsilon^{-1} q, p)$.

Для сопоставления мы приводим ниже таблицу выбора параметров для двух наиболее часто используемых ситуаций: $\alpha_2=\alpha_3=1$ и $\alpha_2=\alpha_3=0$. Эти две ситуации с физической точки зрения отвечают выбору масштабов измерения времени и расстояния в «микро-» и «макромире». В соответствии с этим мы будем говорить о «микро-» и «макропеременных». Параметр ε задает отношение этих масштабов, и поэтому его можно считать во многих приложениях малым.

Вторая половина таблицы получается из первой при помощи замены переменных $t=\varepsilon t'$, $q=\varepsilon q'$, $p=p'$.

Приведенные в таблице условия на 1-моментную функцию, конечно, не являются достаточными для наших целей. Дополнительные условия на меру P_0^ε в целом формулируются по-разному для разных задач и слишком конкретизировать их вид на данном этапе развития теории преждевременно. По-видимому, в микропеременных они должны качественно соответствовать общим условиям 1), 2), обсуждавшимся в пункте 4.2, и, в частности, выполняться для широкого класса гиббсовских мер.

тип предельного перехода	уравнение	микропеременные: $t'=\varepsilon^{-1}t$		макропеременные: $t'=t$	
		1-моментная функция $k^{(1)}_{P_0^\varepsilon}(q,p)$	потенциал	1-моментная функция $k^{(1)}_{P_0^\varepsilon}(q,p)$	потенциал
приближение малой плотности	Больцмана	$\varepsilon f_0(\varepsilon q,\ p)$	$U(r)$	$\varepsilon^{-(d-1)}f_0(q,p)$	$U(\varepsilon^{-1}r)$
приближение среднего поля	Власова	$f_0(\varepsilon q,\ p)$	$\varepsilon^d U(\varepsilon r)$	$\varepsilon^{-d}f_0(q,\ p)$	$\varepsilon^d U(r)$
приближение слабого взаимодействия	Ландау	$f_0(\varepsilon q,\ p)$	$\varepsilon^{1/2}U(r)$	$\varepsilon^{-d}f_0(q\ ,p)$	$\varepsilon^{1/2}U(\varepsilon^{-1}r)$
гидродинамическое приближение	Эйлера для сжимаемой жидкости	$f_0(\varepsilon q,\ p)$	$U(r)$	$\varepsilon^{-d}f_0(q,\ p)$	$U(\varepsilon^{-1}r)$

В макропеременных условие убывания корреляций иногда формулируют в терминах асимптотики старших моментных функций, подвергнутых масштабным преобразованиям:

$$f_0^{(n)}((q_1,p_1),\dots,(q_n,p_n))=\varepsilon^{n\rho}k^{(n)}_{P_0^\varepsilon}((q_1,p_1),\dots,(q_n,p_n)),\qquad(10.62)$$

где $\rho=d-1$, d, d и d для соответствующих строк таблицы. Это условие имеет вид

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_0^{(n)}((q_1,p_1),\dots,(q_n,p_n))=\prod_{j=1}^{n} f_0(q_j,p_j)\qquad(10.63)$$

и часто называется «гипотезой хаоса», поскольку оно означает (в макропеременных) асимптотически «полную независимость» событий, «происходящих» с различными частицами. В случае приближения малой плотности условие (10.63) приводит к известному больцмановскому правилу подсчета числа столкновений (Stoßzahlansatz). Можно ожидать, что в перечисленных выше ситуациях выполнение условий типа (10.63) в момент $t=0$ влечет за собой выполнение аналогичных условий при всех t.

Описанная выше схема приводит к кинетическим уравнениям во всем пространстве R^d. Без особых изменений в этом построении можно получить уравнения, описывающие движение в ограниченной области с гладкой или кусочно гладкой границей. В микропеременных можно, например, рассматривать семейство

$\{\mathcal{O}^\varepsilon, \varepsilon>0\}$ гомотетичных областей, линейные размеры которых растут как ε^{-1}. При любом заданном ε вероятностная мера P_0^ε предполагается сосредоточенной на множестве $M_{\mathcal{O}^\varepsilon}$, а временна́я эволюция $\{P_t^\varepsilon\}$ индуцируется движением частиц в $\mathcal{O}^\varepsilon$ с граничными условиями на $\partial\mathcal{O}^\varepsilon$. Для определенности мы всюду ниже имеем в виду граничные условия упругого отражения. Переходя к макропеременным, мы получаем движение в фиксированной области $\mathcal{O}\subset R^d$. Это же справедливо и для предельного кинетического уравнения.

6.2. Уравнение Больцмана. Это уравнение рассматривают в предположении, что размерность $d>1$. Оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(q, p) = -(p, \operatorname{grad}_q f_t(q, p)) + \int\limits_{(S^{d-1}\times R^d)_p^+} de\,dp_1\,|p-p_1|\,B(p-p_1, e)\,[f_t(q, p')\,f_t(q, p_1') - f_t(q, p)\,f_t(q, p_1)], \quad q,\ p\in R^d. \tag{10.64}$$

Здесь

$$(S^{d-1}\times R^d)_p^+ = \{(e, p_1)\in S^{d-1}\times R^d : (p-p_1, e)>0\},$$

S^{d-1} — единичная сфера в R^d. Векторы p', p_1' связаны с p, p_1 соотношением

$$p' = p-(p-p_1, e)\,e,$$
$$p_1' = p'-(p_1-p, e)\,e, \quad e\in S^{d-1},$$

а $B(\tilde{p}, e)$, $\tilde{p}\in R^d$, $e\in S^{d-1}$, — функция, называемая дифференциальным сечением рассеяния и определяемая потенциалом U. Физически p и p_1 соответствуют импульсам двух сталкивающихся частиц до их столкновения, а p' и p_1' — после их столкновения. Соотношение, связывающее их, эквивалентно естественным законам сохранения: $p+p_1=p'+p_1'$, $\|p\|^2+\|p_1\|^2=(\|p'\|)^2+(\|p_1'\|)^2$. Для функции B можно выписать явные выражения с помощью интегрирования уравнений движения системы двух частиц, взаимодействующих с потенциалом U. В случае потенциала твердых шаров (10.14) $B(\tilde{p}, e)=(\tilde{p}, e)$.

Вопросы существования и единственности решения уравнения Больцмана весьма нетривиальны. Обзору имеющихся здесь результатов посвящена глава 11.

Как уже указывалось выше, уравнение Больцмана получается при предельном переходе малой плотности, называемом также *предельным переходом Больцмана—Грэда* (H. Grad) (см. [73]). Наглядный физический смысл этого предельного перехода лучше всего раскрывается при рассмотрении его в микропеременных. При этом плотность частиц стремится к 0 пропорционально ε и тем самым (если мы предположим для простоты, что радиус действия потенциала U конечен) частицы подавляющую часть времени движутся с постоянными импульсами, меняя время от времени их значения в ходе относительно коротких промежутков взаимодействия типа столкновений. Длина временного промежутка между последовательными столкновениями выделенной частицы с остальными частицами (время свободного пробега) имеет порядок ε^{-1}, а время, занятое каждым из столкновений, имеет порядок константы. Большинство этих столкновений являются парными, а асимптотически при $\varepsilon\to 0$ кратными столкновениями можно пренебречь. Нормировка $t'=\varepsilon^{-1}t$ естественна, так как за время порядка ε^{-1} для каждой из частиц проходит конечное число отрезков свободного движения и конечное число столкновений. Первый член правой части в (10.64) описывает свободное движение частиц, а второй соответствует столкновениям.

В макропеременных рассматриваются частицы малого диаметра ε, их плотность, имеющая порядок $\varepsilon^{-(d-1)}$, стремится к ∞. Выбор макропеременных более удобен для изложения деталей обсуждаемого ниже вывода уравнения Больцмана.

Важный результат, касающийся вывода уравнения Больцмана, получен Лэнфордом [85]. Он рассматривал движение, обусловленное потенциалом твердых шаров диаметра $r_0=\varepsilon$ (см. (10.14)) в области $\mathcal{O}\subset R^d$. Предполагалось, что для начальных вероятностных мер P_0^ε существуют моментные функции $k_{P_0^\varepsilon}$, обладающие следующими свойствами:

1) при некоторых положительных константах z, β и всех ε и n

$$\varepsilon^{(d-1)n}k^{(n)}_{P_0^\varepsilon}((q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n))\leqslant z^n\exp\{-\beta(p_1^2+\ldots+p_n^2)\}, \quad (10.65)$$

2) можно указать $s>0$ такое, что при любом n равномерно на каждом компакте в $\Gamma^{(n)}_{\mathcal{O}}(s)$ имеет место сходимость

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\varepsilon^{(d-1)n}k^{(n)}_{P_0^\varepsilon}((q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n))=\prod_{j=1}^{n}f_0(q_j, p_j), \quad (10.66)$$

где f_0 — гладкая функция $\mathcal{O}\times R^d\to[0, \infty)$.

Здесь и далее через $\Gamma^{(n)}_{\mathcal{O}}(s)$, $s>0$, обозначается множество

$$\{(x_1, \ldots, x_n)\in(\mathcal{O}\times R^d)^n : \overset{0}{q}_{\mathcal{O}}(\tilde{s}, x_{j_1})\neq\overset{0}{q}_{\mathcal{O}}(\tilde{s}, x_{j_2})$$
$$\text{при любых } \tilde{s}\in[-s, 0] \text{ и } j_1\neq j_2\}, \quad (10.67)$$

где $\overset{0}{q}_{\mathcal{O}}(\tilde{s}, (q, p))$ — положение в момент времени $\tilde{s}$ частицы, имевшей в нулевой момент времени вектор координат $q\in\mathcal{O}$ и вектор импульса $p\in R^d$, при движении идеального газа в области $\mathcal{O}$ (с условием упругого отражения от границы).

Теорема 6.1 ([85]). Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда существует константа $t_0(z, \beta)>0$ такая, что при всех $t\in[0, t_0(z, \beta))$ моментные функции $k^{(n)}_{P^{\varepsilon}_{t}}((q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n))$ меры P^{ε}_{t} удовлетворяют соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{(d-1)n} k^{(n)}_{P^{\varepsilon}_{t}}((q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n)) = \prod_{j=1}^{n} f_t(p_j, q_j)$$

при любом n равномерно на каждом компакте $\Gamma^{(n)}_{\mathcal{O}}(t+s)$. Здесь $f_t(q, p)$ — решение уравнения Больцмана (10.64) в области $\mathcal{O}$ с начальным условием $f_0(q, p)$.

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для $t\in[-t_0(z, \beta), 0]$ (здесь в условии 2) предполагается, что $s<0$, а в определении (10.67) промежуток $[-s, 0]$ заменяется промежутком $[0, -s]$, где $s<0$). Вместо (10.64) возникает уравнение с противоположным знаком перед интегральным членом. Этот факт иллюстрирует хорошо известное свойство «необратимости» уравнения Больцмана.

Отметим, что допредельная система (10.35) обладает свойством обратимости: если в нулевой момент значения импульсов всех частиц изменить на противоположные, то движение в «положительном» направлении времени будет таким же, как движение в «отрицательном» направлении для частиц с исходными значениями импульсов. Парадокс необратимости, с которым мы столкнулись, объясняется тем, что множества $\Gamma_{\mathcal{O}}^{(n)}(s)$, $s>0$, не инвариантны при изменении направления времени. Из утверждения теоремы 6.1 отнюдь не вытекает условие 2) для моментных функций, получаемых при «обращении» значений импульсов частиц в момент $t\in(0, t_0(z, \beta))$.

Таким образом, теорема 6.1 гарантирует сходимость к решению уравнения Больцмана на конечном отрезке времени. Это ограничение тесно связано с тем, что существование решения уравнения Больцмана доказано в общем случае лишь локально по времени (см. гл. 11). Условия 1), 2) (переформулированные в терминах микропеременных) можно проверить для широкого класса гиббсовских мер с зависящим от ε значением активности $z(\varepsilon)$.

В (неопубликованной) диссертации Кинга (F. King) результаты Лэнфорда обобщены на более широкий класс потенциалов взаимодействия.

Метод Лэнфорда основан на том, что моментная функция $k_\varepsilon(t) = k_{P^{\varepsilon}_{t}}$, дающая решение цепочки уравнений Н. Н. Боголюбова (10.44) для допредельной системы, разлагается в ряд теории возмущений, сходящийся при достаточно малых t. При этом главным членом разложения служит слагаемое, отвечающее свободному движению частиц, а в качестве «малого» возмущения — слагаемое, отвечающее взаимодействию. Затем делается почленный предельный переход, после которого возникает аналогичный ряд теории возмущений, задающий решение уравнения Больцмана.

Интересной представляется задача об изучении траектории отдельной частицы в условиях предельного перехода Больцмана—Грэда. Естественно ожидать, что это поведение описывается некоторым нелинейным марковским процессом, т. е. неоднородным марковским процессом, у которого производящий оператор в момент времени t определяется безусловным распределением вероятностей для состояния процесса в этот момент. Этот производящий оператор связан с оператором, описывающим линеаризованное уравнение Больцмана. Траектория процесса состоит из участков равномерного прямолинейного детерминированного движения, прерываемого моментами скачкообразного случайного изменения скорости.

Изучению таких процессов с теоретико-вероятностных позиций посвящены работы [113], [114], [116]. Как показал Шпон [107], в условиях теоремы 6.1 при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ распределение вероятностей для траектории отдельной частицы слабо сходится к соответствующему нелинейному марковскому процессу. Большой интерес представляет задача изучения временны́х флюктуаций в пределе Больцмана—Грэда. В терминах микропеременных задача ставится следующим образом. Пусть $\mathbf{x}^\varepsilon(t)$, $t \in [0, \infty)$, — траектория движения в области $\mathcal{O} \subset R^d$, обусловленного потенциалом взаимодействия U_ε. Начальное распределение вероятностей $P_0{}^\varepsilon$ для $x^\varepsilon(0)$ задает вероятностную меру на пространстве траекторий и, следовательно, определяет совместное распределение случайных величин

$$\xi_g^\varepsilon(t) = \sum_{(q,p) \in \mathbf{x}^\varepsilon(t)} g(\varepsilon q, p), \qquad (10.68)$$

где g — гладкая функция на $\mathcal{O} \times R^d$ с компактным носителем. Изменение среднего значения

$$E^\varepsilon(t, g) = \varepsilon^{d-1} E \xi_g^\varepsilon(t) = \varepsilon^{d-1} \int\limits_{R^d \times R^d} g(q, p)\, k_{P^\varepsilon_{\varepsilon^{-1}t}}(\varepsilon^{-1} q, p)\, dq dp \qquad (10.69)$$

описывается в пределе при $\varepsilon \to 0$ уравнением Больцмана. Квадратичное уклонение $\xi_g^\varepsilon(t)$ имеет порядок $\varepsilon^{-\frac{(d-1)}{2}}$, и поэтому естественно рассмотреть нормированную величину

$$\eta_g^\varepsilon(t) = \varepsilon^{\frac{d-1}{2}} (\xi_g^\varepsilon(t) - E^\varepsilon(t, g)). \qquad (10.70)$$

В работах [107], [108] доказано, что в условиях теоремы 6.1 и в предположении, что начальное распределение вероятностей P_0^ε есть распределение Гиббса в объеме $\mathcal{O}^\varepsilon$ с потенциалом U_ε, обратной температурой β и соответствующим образом подобранным значением активности $z(\varepsilon)$, существует предел при $\varepsilon\to0$ ковариации $\mathrm{Cov}(\eta^{\varepsilon}_{g_1}(t), \eta^{\varepsilon}_{g_2}(t))$. Эволюция предельных ковариаций может быть описана линеаризованным уравнением Больцмана. Естественная гипотеза о том, что величины $\eta^{\varepsilon}_{g}(t)$ имеют в пределе при $\varepsilon\to0$ гауссовское распределение, остается не доказанной.

В обзоре [107] отмечена возможность распространить построения Лэнфорда на модель газа Лоренца (см. п. 5.1), где в предельном переходе малой плотности возникает линейное уравнение типа уравнения А. Н. Колмогорова в теории марковских процессов.

6.3. Уравнение А. А. Власова. В предположении, что $U(\|q\|)$ — гладкая функция переменной $q\in R^d$, $d\geqslant1$, это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f_t(q,p)}{\partial t} = -(p, \operatorname{grad}_q f_t(q,p)) - \Bigl(\operatorname{grad}_p f_t\;(q,p), \int\limits_{R^d\times R^d} dq_1 dp_1 \operatorname{grad}_q U(\|q-q_1\|)\, f_t(q_1,p_1)\Bigr). \tag{10.71}$$

Если движение рассматривается в ограниченной области $\mathcal{O}\subset R^d$, то интегрирование проводится по множеству $\mathcal{O}\times R^d$ и вводится условие упругого отражения.

Физический смысл уравнения Власова раскрывается соответствующей строкой таблицы. В предельном переходе среднего поля в микропеременных радиус действия потенциала растет, а значение потенциала взаимодействия между фиксированными частицами стремится к 0 так, что сила, действующая на частицу со стороны всех других взаимодействующих с ней частиц, имеет порядок ε. Поэтому конечное изменение положения частицы происходит за время порядка ε. При переходе к макропеременным в пределе среднего поля траектория каждой отдельной частицы становится детерминированной и задается уравнениями

$$\dot q(t) = p(t),$$
$$\dot p(t) = -\int\limits_{R^d\times R^d} f_t(q,p) \operatorname{grad} U(\|q-q(t)\|)\, dq dp. \tag{10.72}$$

Уравнение Власова описывает изменение плотности $f_t(q,p)$, индуцируемое динамикой частиц вида (10.72).

В рассматриваемом сейчас случае гладкого потенциала U математически строгое проведение предельного перехода не очень сложно и требует введения лишь слабых дополнительных условий на начальное распределение типа выполнения закона больших чисел. Будем рассматривать для определенности движение в ограниченной области $\mathcal{O}\subset R^d$ (аналогичные утверждения справедливы для движения в пространстве R^d).

Теорема 6.2 ([28], [55]). Пусть фиксирована гладкая неотрицательная интегрируемая функция f_0 на $\mathcal{O}\times R^d$. Предположим, что начальное распределение вероятностей P_0^ε сосредоточено на множестве $M_{\mathcal{O}}$ и для любой гладкой функции $g:\mathcal{O}\times\times R^d\to R^1$ с компактным носителем случайная величина $\varepsilon^d\xi_g^\varepsilon(0)$ (см. (10.68)) сходится по распределению при $\varepsilon\to 0$ к

$$\int\limits_{\mathcal{O}\times R^d} dqdpg(q, p) f_0(q, p).$$

Тогда при любом $t\in[0, \infty)$ случайная величина $\varepsilon^d\xi_g^\varepsilon(t)$ сходится по распределению при $\varepsilon\to 0$ к

$$\int\limits_{\mathcal{O}\times R^d} dqdpg(q, p) f_t(q, p),$$

где f_t — решение уравнения Власова в области $\mathcal{O}$ с начальной функцией f_0.

Отметим, что из условия теоремы 6.2 вытекают соотношения (10.60), (10.62) и (10.63) в слабом смысле.

В этих же условиях доказывается сходимость траектории отдельной частицы к решению уравнения (10.72).

Существование решения уравнения Власова (10.71) для всех $t\in[0, \infty)$ следует из теоремы 6.2. Единственность решения доказана в работах [20], [98] на основе того, что уравнения (10.72) задают характеристики уравнения Власова, и с помощью некоторых вероятностных построений.

Задача исследования временны́х флюктуаций в пределе среднего поля ставится аналогично тому, как это было описано в пункте 6.2 для предела малой плотности. Отличие состоит в том, что в (10.70) и в (10.71) надо заменить $d-1$ на d и вместо линеаризованного уравнения Больцмана возникает линеаризованное уравнение Власова. Полное исследование этого вопроса, включающее доказательство асимптотической нормальности флюктуаций, проведено в работе Брауна (W. Brown) и Хеппа (K. Hepp) [55]. Результаты, связанные с выводом уравнения Власова, могут быть распространены и на газ Лоренца, где возникает его линеаризованный вариант.

Отметим однако, что введенное выше условие гладкости $U(\|q\|)$ весьма существенно, поскольку для потенциалов с особенностью при $q=0$ могут расходиться интегралы в правой части в (10.71). Однако именно такие потенциалы (например, кулоновский потенциал $U(r)=r^{-1}$ в размерности $d=3$) возникают в большинстве приложений уравнения Власова, и поэтому здесь требуются дальнейшие исследования.

6.4. Уравнение Л. Д. Ландау. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f_t(q, p)}{\partial t} = -(p, \operatorname{grad}_q f_t(q, p)) +$$

$$+\left[\int_{R^d} dp_1 f_t(q,\, p_1)\left(\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial p^j}\, a^j(p-p_1)\right)\right] f_t(q,\, p)+ \qquad (10.73)$$

$$+\left[\int_{R^d} dp_1 f_t(q,\, p_1)\left(\sum_{j_1,\, j_2=1}^{d}\frac{\partial}{\partial p^{j_1}}\, D_{j_1,j_2}(p-p_1)\frac{\partial}{\partial p^{j_2}}\right) f_t(q,\, p).\right.$$

Здесь $a(p)=(a^1(p),\, \ldots,\, a^d(p))$ — вектор сноса, $D(p)= =(D_{j_1,j_2}(p),\ j_1,\, j_2=1,\, \ldots,\, d)$ — диффузионная матрица в точке $p \in R^d$, определяемые по потенциалу U.

Физический смысл предельного перехода слабого взаимодействия, который приводит к уравнению Ландау, можно понять, рассматривая траекторию отдельной частицы в условиях, выписанных в соответствующей строке таблицы. В микропеременных плотность частиц имеет порядок константы, а радиус взаимодействия не зависит от ε. Поэтому естественно ожидать, что за время порядка ε^{-1} происходит примерно ε^{-1} «актов взаимодействия» (столкновений) данной частицы с другими. Поскольку потенциал умножен на малый множитель $\varepsilon^{1/2}$, то за время каждого из столкновений импульс частицы меняется мало, дисперсия этого изменения пропорциональна ε. Таким образом, дисперсия общего изменения импульса за время порядка ε^{-1} имеет порядок константы. Естественно ожидать, что в пределе импульс частицы будет описываться нелинейным марковским процессом диффузионного типа. Уравнение Ландау описывает изменение плотности распределения частиц, движение которых задается этим нелинейным марковским процессом.

Математических результатов, связанных с выводом уравнения Ландау, пока нет. Как отмечает Шпон [107], некоторые следствия из результатов Кестена (H. Kesten) и Папаниколау (G. Papanicolau) [80] могут быть интерпретированы как вывод линеаризованного уравнения Ландау для газа Лоренца.

6.5. Гидродинамические уравнения. Отличительная особенность гидродинамического предельного перехода состоит в том, что в микропеременных радиус действия потенциала и плотность частиц (по порядку величины) не зависят от ε. Это определяет как важность гидродинамических уравнений с точки зрения многочисленных приложений, так и трудность строгого исследования гидродинамического предельного перехода. Обсуждению возникающих здесь физических и математических проблем посвящена громадная литература, из которой отметим фундаментальные работы Н. Н. Боголюбова [1], [2] (см. также развитие этих идей в [23], [24]).

В рамках нашего изложения ограничимся кратким обсуждением постановки задачи. Относительно начального распределения вероятностей P_0^ε естественно, кроме условий общего характера (см. условия 1), 2) в п. 4.2), предполагать, что оно является локально трансляционно инвариантным, т. е. «мало меняется» при пространственных сдвигах порядка $o(\varepsilon^{-1})$, что согласовано с рассмотрением 1-моментной функции вида $f(\varepsilon q, p)$ (см. приведенную выше таблицу).

Можно ожидать, что свойство локальной трансляционной инвариантности сохраняется при временной эволюции и, более того, в соответствии с гипотезами, обсуждавшимися в п. 4.2, при $\varepsilon \to 0$ распределение вероятностей $P^{\varepsilon}_{\varepsilon^{-1}t}$ в окрестности точки $\varepsilon^{-1}q$ порядка $o(\varepsilon^{-1})$ близко к распределению Гиббса с потенциалом U и параметрами (z, β, p_0), зависящими от q и t. Поэтому (по крайней мере в области отсутствия фазовых переходов) распределение $P^{\varepsilon}_{\varepsilon^{-1}t}$ может быть приближенно описано заданием «локальных» значений параметров (z, β, p_0) или отвечающих им «локальных» значений инвариантов движения: средней удельной плотности, средней удельной энергии и среднего удельного импульса (см. п. 4.1).

В отличие от рассматривавшихся в предыдущих пунктах случаев теперь кинетические уравнения пишутся не для 1-моментной функции, а для описанного выше набора параметров распределения Гиббса. Более точно, сопоставим вероятностной мере P набор функций

$$G_P(q) = (\bar{n}_P(q), \bar{E}_P(q), \bar{p}_P(q)), \tag{10.74}$$

где

$$\bar{n}_P(q) = \int_{R^d} k_P^{(1)}(q, p)\, dp, \tag{10.75а}$$

$$\bar{p}_P(q) = \int_{R^d} p k_P^{(1)}(q, p)\, dp, \tag{10.75б}$$

$$\bar{E}_P(q) = \int_{R^d} \frac{\|p\|^2}{2} k_P^{(1)}(q, p)\, dp +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{(R^d)^3} U(\|q\|)\, k_P^{(2)}(q, p_1, q+\tilde{q}, p_2)\, d\tilde{q}\, dp_1\, dp_2, \tag{10.75в}$$

где $k_P^{(1)}$, $k_P^{(2)}$ — соответственно, 1- и 2-моментные функции меры P. В предположении, что для начального семейства распределений вероятностей P_0^{ε}, $\varepsilon > 0$, существует предел

$$G_0(q) = \lim_{\varepsilon \to 0} G_{P_0^{\varepsilon}}(q), \tag{10.76}$$

естественно ожидать существование при любом $t \in [0, \infty)$ предела

$$G_t(q) = \lim_{\varepsilon \to 0} G_{P^{\varepsilon}_{\varepsilon^{-1}t}}(q), \tag{10.77}$$

который служит решением уравнения Эйлера для сжимаемой жидкости с начальным условием G_0.

Отметим интересную работу Морри (C. Morrey) [97], где сделана попытка исследовать гидродинамический предельный переход в постановке, близкой к только что описанной. К сожалению, Морри ввел дополнительные сложные условия, накладываемые не только на начальное распределение $P_0{}^{\varepsilon}$, но и на распределения $P_t{}^{\varepsilon}$, получаемые в ходе временной эволюции, и вопрос о совместимости этих условий остается открытым. Ожидается, что в следующем асимптотическом (по ε) приближении гидродинамическое уравнение содержит дополнительный член порядка ε и описывает эволюцию системы вплоть до времени порядка $\varepsilon^{-2}t$ (уравнения типа *уравнения Навье—Стокса),* но этот круг вопросов пока что менее ясен.

Мы не будем входить в обсуждение вопросов о существовании и единственности решения гидродинамических уравнений, отослав читателя к имеющейся здесь обширной литературе (см. [115] и приведенную там библиографию).

Следует отметить важное направление исследований, в котором за исходную предпосылку при выводе уравнений гидродинамики берется уравнение Больцмана. Эти результаты описываются в § 5 главы 11. Мы отметим лишь, что хотя с точки зрения концепций, развиваемых в этом разделе, эти результаты можно считать важным этапом в обосновании гидродинамического предельного перехода для случая разреженного газа, здесь имеются и принципиальные трудности. Во-первых, как отмечалось в пункте 6.2, вывод уравнения Больцмана пока обоснован лишь при малых t, в то время как при гидродинамическом предельном переходе $t\to\infty$, и во-вторых, неясен вопрос о возможности перестановки порядка предельных переходов: малой плотности и гидродинамического.

Отметим также интересную попытку вывода гидродинамических уравнений из гамильтоновых уравнений так называемого движения вихрей [95].

Ситуация существенно упрощается для вырожденных моделей движения, рассматривавшихся в § 5. Простейшей моделью, для которой возникает нетривиальное гидродинамическое уравнение, служит модель одномерных твердых стержней. Поскольку здесь инвариантное состояние $P^{r_0}_{z,\sigma}$ задается 1-моментной функцией $k^{(1)}_{P^{r_0}_{z,\sigma}}$, то аналогом уравнения Эйлера оказывается следующее уравнение для функции $f_t(q, p)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} k^{(1)}_{P^{\varepsilon}_{\varepsilon^{-1}t}}(\varepsilon^{-1}q, p)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f_t(p, q) = -p\frac{\partial}{\partial q} f_t(q, p) + \\ + r_0\frac{\partial}{\partial q}\Bigg[f_t(q, p)\int\limits_{R^1} dp_1(p-p_1)\, f_t(q, p_1)\times \\ \times\left(1-r_0\int\limits_{R^1} dp_2 f_t(q, p_2)\right)^{-1}\Bigg].\end{aligned} \tag{10.78}$$

Это уравнение впервые было выписано в работе [100]. В работе [50] доказано, что при некоторых довольно широких предположениях о начальном состоянии функция $f_t(q, p)$ удовлетворяет уравнению (10.78). В [50] доказана также единственность решения уравнения (10.78). Метод, использованный в этой работе, основан на том, что описанное в пункте 5.3 преобразование, сводящее систему одномерных твердых стержней к идеальному газу, может быть распространено и на предельное уравнение (10.78).

ЛИТЕРАТУРА

В монографии [1] выписана и исследована цепочка уравнений, описывающих изменение во времени моментных функций вероятностной меры, эволюционирующей в ходе движения взаимодействующих частиц. На основании глубоких общих соображений развит новый метод вывода кинетических уравнений (Больцмана, Власова и Ландау) из цепочки уравнений для моментных функций. Впервые сформулирован ряд фундаментальных фактов, характеризующих процесс сходимости к равновесному состоянию. В работе [2] представлен первый в литературе вывод гидродинамических уравнений (уравнений Эйлера для сжимаемой идеальной жидкости) из цепочки уравнений для моментных функций. Идеи книги [1] и статьи [2] составили основу современных представлений о связи кинетических уравнений с уравнениями, описывающими движение большой системы частиц.

Работа [10] содержит обзор математических работ, относящихся к тематике данной главы и опубликованных, в основном, с 1968 по 1975 г. В монографии [23] изложены результаты, развивающие подход, который был предложен в [1], [2]. Обзор последующих результатов в этом направлении содержится в [24]. Работы [28], [29] посвящены результатам, связывающим кинетические уравнения с различными типами цепочек уравнений (аналогичных цепочке уравнений Боголюбова), возникающих при описании движения различных физических систем.

Статья [33] содержит систематизированный анализ результатов о существовании решения цепочки уравнений Боголюбова, полученных с помощью функционально-аналитического подхода.

Работы [46], [84], [85], близкие по методике и стилю к данной главе, посвящены подробному и последовательному изложению результатов, которые обсуждаются в §§ 3, 4, 5.

В работе [73] точно сформулирован предельный переход (предельный переход малой плотности), при котором из уравнений, описывающих движения системы частиц (в частности, из цепочки уравнений Боголюбова), получается уравнение Больцмана. В статье [85] приведен строгий вывод уравнения Больцмана из цепочки уравнений Боголюбова в ходе предельного перехода малой плотности.

Различные аспекты изложенного в главе 10 материала обсуждаются также в обзорах или работах авторов этой главы, носящих в той или иной степени обзорный характер [21], [61], [62], [106].

Наконец, в связи с последним параграфом данной главы отметим работы [50], [77] и особенно обзор [107], содержащий первый в литературе систематизированный анализ проблемы вывода кинетических уравнений на основе единого четко сформулированного подхода.

1. *Боголюбов Н. Н.*, Проблемы динамической теории в статистической физике. М.—Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1946; см. также *Боголюбов Н. Н.*, Избранные труды, 2. Киев: Наукова думка, 1970, 99—196

2. —, Уравнения гидродинамики в статистической механике. Сб. трудов Ин-та математики АН УССР (на укр. яз.), 1948, *10*, 41—59; см. также *Боголюбов Н. Н.*, Избранные труды, 2. Киев: Наукова думка, 1970, 258—276
3. —, *Петрина Д. Я., Хацет Б. И.*, Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля. Теор. и мат. физ., 1969, *1*, № 2, 251—274
4. —, *Хацет Б. И.*, О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия. Докл. АН СССР, 1949, *66*, № 3, 321—324; см. также *Боголюбов Н. Н.*, Избранные труды, 2. Киев: Наукова думка, 1970, 494—498
5. *Болдригини К., Добрушин Р. Л., Сухов Ю. М.*, Гидродинамика одномерных твердых стержней. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 5, 252—253
6. *Бунимович Л. А.*, Динамические системы с упругими отражениями. Успехи мат. наук, 1984, *39*, № 1, 184—185
7. *Волковысский К. Л., Синай Я. Г.*, Эргодические свойства идеального газа с бесконечным числом степеней свободы. Функц. анализ и его прил., 1971, *5*, № 3, 19—21
8. *Герасименко В. И.*, Эволюция бесконечной системы частиц, взаимодействующих с ближайшими соседями. Докл. АН УССР, сер. А, 1982, № 5, 10—13
9. —, *Петрина Д. Я.*, Статистическая механика квантово-классических систем. Неравновесные системы. Теор. и мат. физ., 1980, *42*, № 1, 88—100
10. *Гуревич Б. М., Оселедец В. И.*, Некоторые математические задачи, связанные с неравновесной статистической механикой бесконечного числа частиц. В сб. «Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика». Т. 14. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1977, 5—39
11. —, *Синай Я. Г., Сухов Ю. М.*, Об инвариантных мерах динамических систем одномерной статистической механики. Успехи мат. наук, 1973, *28*, № 5, 45—82
12. —, *Сухов Ю. М.*, Стационарные решения цепочки уравнений Боголюбова в классической статистической механике. Докл. АН СССР, 1974, *223*, № 2, 276—279
13. —, —, Временная эволюция гиббсовских состояний в одномерной классической статистической механике. Докл. АН СССР, 1978, *242*, № 2, 276—279
14. *Добрушин Р. Л.*, О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве. Укр. мат. ж., 1956, *8*, № 2, 127—134
15. —, Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием. Функц. анализ и его прил., 1968, *2*, № 4, 31—43
16. —, Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов. Функц. анализ и его прил., 1968, *2*, № 4, 44—57
17. —, Гиббсовские случайные поля. Общий случай. Функц. анализ и его прил., 1969, *3*, № 1, 27—35
18. —, Гиббсовские случайные поля для частиц без твердой сердцевины. Теор. и мат. физ., 1970, *4*, № 1, 101—118
19. —, Условия отсутствия фазовых переходов в одномерных классических системах. Мат. сб., 1974, *93*, № 1, 29—49
20. —, Уравнения Власова. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 2, 48—58
21. —, *Сухов Ю. М.*, Временная асимптотика для некоторых вырожденных моделей временной эволюции систем с бесконечным числом частиц. В сб. «Современные проблемы математики». Т. 14. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1979, 147—254
22. *Земляков А. Н.*, Построение динамики в одномерных системах статистической физики в случае нефинитных потенциалов. Успехи мат. наук, 1973, *28*, № 1, 239—240
23. *Зубарев Д. Н.*, Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1973, 415 с.
24. —, Современные методы статистической теории неравновесных процессов. В сб. «Современные проблемы математики». Т. 15. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1980, 131—226

25. *Козлов О. К.*, Гиббсовское описание точечных случайных полей. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21*, № 2, 348—365
26. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.*, Эргодическая теория. М.: Наука, 1980, 383 с.
27. *Малышев П. В.*, Математическое описание эволюции классической бесконечной системы. Теор. и мат. физ., 1980, *44*, № 1, 63—74
28. *Маслов В. П.*, Уравнения самосогласованного поля. В сб. «Современные проблемы математики». Т. 11. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1978, 153—234
29. —, *Таривердиев С. Э.*, Асимптотика уравнений Колмогорова — Феллера для системы большого числа частиц. В сб. «Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика». Т. 19. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1982, 85—125
30. *Минлос Р. А.*, Предельное распределение Гиббса. Функц. анализ и его прил., 1967, *1*, № 2, 60—73
31. —, Регулярность предельного распределения Гиббса. Функц. анализ и его прил., 1967, *1*, № 3, 40—54
32. *Петрина Д. Я.*, Математическое описание эволюции бесконечных систем классической статистической физики. Локально возмущенные одномерные системы. Теор. и мат. физ., 1979, *38*, № 2, 230—250
33. —, *Герасименко В. И.*, Математическое описание эволюции состояния бесконечных систем классической статистической механики. Успехи мат. наук, 1983, *38*, № 5, 3—58
34. *Синай Я. Г.*, Эргодические свойства газа одномерных твердых шариков с бесконечным числом степеней свободы. Функц. анализ и его прил., 1972, *6*, № 1, 41—50
35. —, Построение динамики в одномерных системах статистической механики. Теор. и мат. физ., 1972, *11*, № 2, 248—258
36. —, Построение кластерной динамики для динамических систем статистической механики. Вестн. МГУ. Мат. Мех., 1974, *29*, № 3, 152—158
37. —, Эргодические свойства газа Лоренца. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 3, 46—59
38. —, Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980, 207 с.
39. *Скрипник В. И.*, Об обобщенных решениях гиббсовского типа диффузионной иерархии Боголюбова—Стрельцовой. Теор. и мат. физ., 1984, *58*, № 3, 398—420
40. *Сухов Ю. М.*, Матричный метод для непрерывных систем классической статистической механики. Труды Моск. мат. о-ва, 1971, *24*, 175—200
41. —, Сильное решение цепочки уравнений Боголюбова в одномерной классической статистической механике. Докл. АН СССР, *244*, № 5, 1081—1084
42. —, Стационарные решения цепочки уравнений Боголюбова и первые интегралы движения системы классических частиц. Теор. и мат. физ., 1983, *55*, № 1, 78—87
43. —, Сходимость к пуассоновскому распределению для некоторых моделей движения частиц. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1982, *46*, № 1, 135—153
44. *Чулаевский В. А.*, Метод обратной задачи теории рассеяния в статистической физике. Функц. анализ и его прил., 1983, *17*, № 1, 53—62
45. *Aizenman M., Goldstein S., Lebowitz J. L.*, Ergodic properties of an infinite one-dimensional hard rod system. Commun. Math. Phys., 1975, *39*, № 4, 289—301
46. —, —, —, Ergodic properties of infinite systems. Lect. Notes. Phys., 1975, *38*, 112—144
47. *Alexander R.*, Time evolution for infinitely many hard spheres. Commun. Math. Phys., 1976, *49*, № 3, 217—232
48. *Arnold V. I., Avez A.*, Ergodic problems of classical mechanics. New York—Amsterdam, Benjamin, 1968, 286 pp.
49. *Beieren H. van.* Transport properties of stochastic Lorentz models. Rev. Mod. Phys., 1982, *54*, № 1, 195—234
50. *Boldrighini C., Dobrushin R. L., Suhov Yu. M.*, One dimensional hard rod caricature of hydrodynamics. J. Stat. Phys., 1983, *31*, № 3, 577—615

51. —, *Pellegrinotti A., Triolo L.*, Convergence to stationary states for infinite harmonic systems. J. Stat. Phys., 1983, *30*, № 1, 123—155
52. *Botvich D. A., Malyshev V. A.*, Unitary equivalence of temperature dynamics for ideal and locally perturbed Fermi-gas. Commun. Math. Phys., 1983, *91*, № 4, 301—312
53. *Bratteli O., Robinson D. W.*, Operator algebras and quantum statistical mechanics. I. New York—Heidelberg—Berlin, Springer-Verlag, 1979, 500 pp. (Пер. на рус. яз.: *Браттели У., Робинсон Д.*, Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982, 511 с.)
54. —, —, Operator algebras and quantum statistical mechanics. II. New York—Heidelberg—Berlin, Springer-Verlag, 1981, 505 pp.
55. *Braun W., Hepp K.*, The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles. Commun. Math. Phys., 1977, 56, № 2, 101—113
56. *Bunimovich L. A., Sinai Ya. G.*, Markov partitions for dispersed billiards. Commun. Math. Phys., 1980, *78*, № 2, 247—280
57. —, —, Statistical properties of Lorentz gas with a periodic configuration of scatterers. Commun. Math. Phys., 1981, *78*, № 4, 479—497
58. *De Masi A., Ioniro N., Pellegrinotti A., Presutti E.*, A survey of the hydrodynamic behavior of many-particle systems. In: Nonequilibrium phenomena. II. Studies in Statistical Mechanics. Amsterdam—Oxford—New York, North-Holland, 1984, 2—169
59. *Dobrushin R. L., Fritz J.*, Nonequilibrium dynamics of one-dimensional infinite particle systems with a singular interaction. Commun. Math. Phys., 1977, *55*, № 3, 275—292
60. —, *Siegmund-Schultze R.*, The hydrodynamic limit for systems of particles with independent evolution. Math. Nachr., 1982, *105*, № 1, 199—224
61. —, *Sinai Ya. G.*, Mathematical problems in statistical mechanics. Math. Phys. Rev., 1980, *1*, 55—106
62. —, *Suhov Yu. M.*, On the problem of the mathematical foundation of the Gibbs postulate in classical statistical mechanics. Lect. Notes Phys., 1978, *80*, 325—340
63. *Doob J.*, Stochastic processes. Chichester—New York—Brisbane—Toronto, Wiley, 1953, 654 pp. (Пер. на рус. яз.: *Дуб. Дж.*, Вероятностные процессы. М., ИЛ, 1956, 602 с.)
64. *Durrett R.*, An introduction to infinite particle systems. Stochast. Process. and Appl., 1981, *11*, № 2, 109—150
65. *Fichtner K.-H., Freudenberg W.*, Asymptotic behavior of time evolution of infinite particle systems. Z. Wahrsheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 1980, *54*, № 2, 141—159
66. *Fritz J.*, An ergodic theorem for the stochastic dynamics of quasi-harmonic crystals. In: Random fields. Rigorous results in statistical mechanics and quantum field theory. I. Amsterdam—Oxford—New York, North-Holland, 1981, 373—386
67. —, Infinite lattice systems of interacting diffusion processes. Existence and regularity properties. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 1982, *59*, № 3, 291—309
68. —, Local stability and hydrodynamical limit of Spitzer's one-dimensional lattice model. Commun. Math. Phys., 1982, *86*, № 4, 363—373
69. —, Some remarks on nonequilibrium dynamics of infinite particle systems. J. Stat. Phys., 1984, *33*, № 4, 397—412
70. —, *Dobrushin R. L.*, Nonequilibrium dynamics of two-dimensional infinite particle systems with a singular interaction. Commun. Math. Phys., 1977, *57*, № 1, 67—81
71. *Gallavotti G., Lanford O. E., Lebowitz J. L.*, Thermodynamic limit of time dependent correlation functions for one dimensional systems. J. Math. Phys., 1972, *13*, № 11, 2898—2905
72. —, *Miracle-Sole S.*, Absence of phase transitions in hard-core one-dimensional systems with long-range interactions. J. Math. Phys., 1970, *11*, № 1, 147—155

73. *Grad H.*, Principles of the kinetic theory of gases. In: Handbuch der Physik, B. XII, Sekt. 26: Berlin, Springer-Verlag, 1958, 205—294 (Пер. на рус. яз.: *Грэд Г.*, Принципы кинетической теории газов. В кн. Термодинамика газов. М.: Машиностроение, 1970, 5—109)
74. *Griffeath D.*, Additive and cancellative interacting particles systems. Lect. Notes Math., 1979, *724*, 108 pp.
75. *Gurevich B. M.*, Additive integrals of motion of point particles in one dimension. Math. Forschungsber., 1982, *12*, 59—64
76. —, *Suhov Yu. M.*, Stationary solutions of the Bogoliubov hierarchy equations in classical statistical mechanics. 1—4. Commun. Math. Phys., 1976, *49*, № 1, 69—96; 1977, *54*, № 1, 81—96; 1977, *56*, № 3, 225—236; 1982, *84*, № 4, 333—376
77. *Hauge E. G.*, What can one learn from Lorentz models? Lect. Notes Phys., 1974, *31*, 337—353
78. *Kalenberg O.*, Random measures. London—New York—San Francisco, Acad. Press, 1976, 104 pp.
79. —, On the asymptotic behavior of line processes and systems of noninteracting particles. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 1978, *43*, № 1, 65—95
80. *Kesten H.*, *Papanicolau G.*, A limit theorem for turbulent diffusion. Commun. Math. Phys., 1979, *65*, № 2, 97—128
81. Kinetic theories and the Boltzmann equation. Lect. Notes Math., 1984, *1048*, 243 pp.
82. *Lanford O. E.*, The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles. I. An existence theorem. Commun. Math. Phys., 1968, *9*, № 3, 176—191
83. —, The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles. II. Kinetic theory. Commun. Math. Phys., 1969, *11*, № 4, 257—292
84. —, Ergodic theory and approach to equilibrium for finite and infinite systems. Acta Phys. Austr., Suppl., 1973, *10*, 619—639
85. —, Time evolution of large classical systems. Lect. Notes Phys., 1975, *38*, 1—97 (Пер. на рус. яз.: *Ланфорд О. Е.*, Эволюция во времени больших классических систем. В сб. «Гиббсовские состояния в статистической физике». М.: Мир, 1978, 159—218)
86. —, *Lebowitz J. L.*, Time evolution and ergodic properties of harmonic systems. Lect. Notes Phys., 1975, *38*, 144—177
87. —, —, *Lieb E.*, Time evolution of infinite anharmonic systems. J. Stat. Phys., 1977, *16*, № 6, 453—461
88. —, *Ruelle D.*, Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. Commun. Math. Phys., 1969, *13*, № 3, 194—215
89. *Lang R.*, On the asymptotic behavior of infinite gradient systems. Commun. Math. Phys., 1979, *65*, № 2, 129—148
90. *Lebowitz J. L.*, *Spohn H.*, Steady sefl-diffusion at low density. J. Stat. Phys., 1982, *29*, № 1, 39—55
91. *Lenard A.*, Correlation functions and the uniqueness of the state in classical statistical mechanics. Commun. Math. Phys., 1973, *30*, № 1, 35—44
92. —, States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. I, II. Arch. Rat. Mech. Anal., 1975, *50*, № 3, 219—239; 241—256
93. *Liggett T. M.*, The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles. Lect. Notes Math., 1977, *598*, 186—248
94. *Marchioro C.*, *Pellegrinotti A.*, *Presutti E.*, Remarks on the existence of nonequilibrium dynamics. In: Random fields. Rigorous results in statistical mechanics and quantum field theory, vol. II. Amsterdam—Oxford—New York, North-Holland, 1981, 733—746
95. —, *Pulvirenti M.*, Vortex methods in two-dimensional fluid dynamics. Roma, Edizione Klim, 1984, 137 pp.
96. *Matthes K.*, *Kerstan J.*, *Mecke J.*, Infinitely divisible point processes. Chichester—New York—Brisbane—Toronto, Wiley, 1978, 532 pp. (Пер. на рус. яз.: *Керстан Й.*, *Маттес К.*, *Мекке Й.*, Безгранично делимые точечные процессы. М.: Наука, 1982, 391 с.)

97. *Morrey C. B.*, On the derivation of the equations of hydrodynamics from statistical mechanics. Commun. Pure Appl. Math., 1955, *8*, № 2, 279—326
98. *Neunzert H.*, The Vlasov equation as a limit of Hamiltonian classical mechanical systems of interacting particles. Trans. Fluid Dynamics, 1977, *18*, 663—678
99. *de Pazzis O.*, Ergodic properties of a semi-infinite hard rods system. Commun. Math. Phys., 1971, *22*, № 2, 121—132
100. *Perkus J. K.*, Exact solution of kinetics of a model of classical fluid. Phys. Fluids, 1969, *12*, 1560—1563
101. *Presutti E., Pulvirenti M., Tirozzi B.*, Time evolution of infinite classical systems with singular, long range, two body interactions. Commun Math. Phys., 1976, *47*, № 1, 81—95 (Пер. на рус. яз.: *Презутти Э., Пульвиренти М., Тироцци Б.*, Эволюция во времени бесконечных классических систем с сингулярным дальнодействующим парным потенциалом. В сб. «Гиббсовские состояния в статистической физике». М.: Мир, 1978, 219—240)
102. *Pulvirenti M.*, On the time evolution of infinitely extended particle systems. J. Stat. Phys., 1982, *27*, № 4, 693—709
103. *Ruelle D.*, Correlation functions of classical gases. Ann. Phys., 1963, *25*, № 1, 109—120
104. —, Statistical mechanics. Rigorous results. New York—Amsterdam, Benjamin, 1969, 217 pp. (Пер. на рус. яз.: *Рюэль Д.*, Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971, 367 с.)
105. —, Superstable interactions in classical statistical mechanics. Commun. Math. Phys., 1970, *18*, № 2, 127—159
106. *Sinai Ya. G.*, Ergodic theory. Acta Phys. Austr., Suppl., 1973, *10*, 575—606
107. *Spohn H.*, Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits. Rev. Mod. Phys., 1980, *52*, № 3, 569—615
108. —, Fluctuation theory for the Boltzmann equation. In: Nonequilibrium phenomena. I. Studies in statistical mechanics. Amsterdam—Oxford—New York, North-Holland, 1983, 418—439
109. —, Hydrodynamical theory for equilibrium time correlation functions of hard rods. Ann. Phys., 1982, *141*, № 2, 353—364
110. *Suhov Yu. M.*, Random point processes and DLR equations. Commun. Math. Phys., 1976, *50*, № 2, 113—132
111. *Takahashi Y.*, A class of solutions of the Bogoliubov system of equations for classical statistical mechanics of hard core particles. Sci. Papers Coll. Gen. Educ., Univ. Tokyo, 1976, *26*, № 1, 15—26
112. —, On a class of Bogoliubov equations and the time evolution in classical statistical mechanics. In: Random fields. Rigorous results in statistical mechanics and quantum field theory, vol. II. Amsterdam—Oxford—New York, 1981, 1033—1056
113. *Tanaka H.*, On Markov processes corresponding to Boltzmann's equation of Maxwellian gas. Second Japan—USSR. Symp. Prob. Theory, Kyoto, 1972, vol. 2, 168—182
114. —, Stochastic differential equation associated with the Boltzmann equation of Maxwellian molecules in several dimensions. Stochastic analysis. London—New York—San Francisco, Acad. Press, 1978, 301
115. *Temam R.*, Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. Amsterdam—New York—Oxford, North-Holland P. C., 1977, X+550 pp. (Пер. на рус. яз.: *Темам Р.*, Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981, 408 с.)
116. *Ueno T.*, A stochastic model associated with Boltzmann equation. Second Japan—USSR Symp. Prob. Theory, Kyoto, 1972, vol. 2, 183—195
117. *Willms J.*, On the convergence of infinite particle systems to the Poisson process under the action of the free dynamics. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 1982, *60*, № 1, 69—74
118. *Zessin H.*, Stability of equilibria of infinite particle systems. III International Vilnius Conf. Prob. Theory Math. Stat., Vilnius, 1981, vol. III, 371—372

Глава 11

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Н. Б. Маслова

§ 1. Формулировка краевых задач. Свойства интегральных операторов

1.1. Уравнение Больцмана. В общих чертах положение с математическим исследованием уравнения Больцмана можно описать следующим образом. Имеется два хорошо изученных предельных режима. Первый из них — свободномолекулярное течение, при котором частицы не взаимодействуют между собой. Второй — термодинамическое равновесие, которое описывается распределением Максвелла. Почти все известные сейчас теоремы гарантируют разрешимость краевых задач в ситуациях, достаточно близких к какому-нибудь из указанных режимов. Единственная задача, для которой разрешимость в целом удается доказать без серьезных ограничений на данные задачи, — задача Коши для пространственно-однородного газа.

Течения, близкие к свободномолекулярным, описываются нелинейным уравнением Больцмана с малым параметром ε при интеграле столкновений (параметр ε^{-1} называется числом Кнудсена (M. Knudsen)). Теоремы о локальной разрешимости нестационарных задач (такие теоремы доказаны при очень общих условиях) естественно понимать как теоремы о решениях уравнения Больцмана при больших числах Кнудсена.

Более трудные и содержательные результаты связаны с изучением течений, близких к равновесным. Линеаризованное уравнение Больцмана дает первое приближение для описания таких течений. Краевые задачи для этого уравнения оказались достаточно сложными. Сейчас, однако, эти задачи изучены настолько полно, что стало возможным их эффективное применение при исследовании решений нелинейного уравнения. На этом пути получены теоремы, гарантирующие разрешимость стационарных задач и разрешимость нестационарных задач в целом.

Ниже рассматривается только простейший вариант уравнения Больцмана — кинетическое уравнение, описывающее движение в R^3 системы одинаковых частиц, взаимодействующих посредством парного потенциала, зависящего от расстояния между частицами (см. гл. 10, § 2). Включение в рассмотрение смеси частиц нескольких типов и движущихся под действием внешних силовых полей не связано с принципиальными трудностями.

Как отмечалось в § 6 главы 10, основной характеристикой газа в кинетической теории служит 1-я моментная функция (*больцмановская плотность распределения*), обозначаемая в дальнейшем[1] $F(t, \xi, x)$, которая описывает распределение частиц по координатам x ($x \in \Omega$, $\Omega \subseteq R^m$, $m=1, 2, 3$) и импульсам ξ ($\xi \in R^3$). Эта функция имеет смысл плотности распределения частиц в фазовом пространстве $R^3 \times \Omega$ в момент времени t. При предельном переходе малой плотности функция $F(t, \xi, x)$ должна удовлетворять уравнению Больцмана

$$\frac{\partial}{\partial t} F + DF = J(F, F).$$

Здесь $D = \sum_{\alpha=1}^{m} \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$, J — *интеграл столкновений*, задаваемый в точке t, ξ, x формулами:

$$J(F, F) = \int_{R^3 \times \Sigma} [F(t, \xi', x) F(t, \xi_1', x) -$$

$$- F(t, \xi, x) F(t, \xi_1, x)] B(|\xi - \xi_1|, \ |\xi - \xi_1|^{-1} | \langle \xi - \xi_1, \alpha \rangle | d\alpha d\xi,$$

$$\Sigma = \{\alpha \in R^3 \,|\, |\alpha| = 1\},$$

$$\xi' = \xi - \alpha \langle \xi - \xi_1, \alpha \rangle, \quad \xi_1' = \xi_1 + \alpha \langle \xi - \xi_1, \alpha \rangle.$$

Неотрицательная непрерывная на $(0, \infty) \times (0, 1)$ функция B однозначно определяется межчастичным потенциалом взаимодействия. Основные математические результаты получены для класса *«жестких» потенциалов*, выделенных Грэдом (H. Grad) [24]. Этот класс определяется следующими условиями на функцию B:

$$B(v, z) \leqslant b_1 z (v + v^{\beta-1}), \tag{11.1}$$

$$\int_0^1 B(v, z)\, dz \geqslant b_0 v (v+1)^{-1}, \tag{11.2}$$

где $\beta \in (0, 1)$, b_i ($i=0, 1$) — положительные постоянные. Потенциал твердых шаров (см. (10.14)), для которого $B = b_1 vz$, заведомо входит в этот класс. Для степенных потенциалов $U(r) = cr^{-s}$ классическая механика дает соотношение

$$B(v, z) = v^p z\, b(z) b_1, \quad p = 1 - 4/s, \tag{11.3}$$

с непрерывной на $[0, 1]$ функцией b и $b_1 = z^{p-3}$. Особенность функции b_1 в нуле с физической точки зрения связана с взаимодействием на далеких расстояниях. Если такое взаимодействие существенно, то уравнение Больцмана оказывается плохим

---

[1] Система обозначений, принятая в настоящей главе, несколько отличается от системы обозначений главы 10. Это обусловлено традициями, сложившимися в литературе по данному направлению.

приближением. Замена b_1 на постоянную (так называемое «угловое обрезание») гарантирует выполнение условий Грэда при $s \geqslant 4$.

Для медленно убывающих потенциалов ($s<4$) нарушается второе условие Грэда, гарантирующее ограниченность частоты столкновений снизу. Эти потенциалы входят в выделенный Грэдом класс *«мягких» потенциалов*, — класс, определяемый соотношением (11.1) и условием

$$\int\limits_0^1 B(v,\ z)\,dz \leqslant b_1(1+v^{\beta-1}),\quad \beta \in (0,\ 1), \tag{11.4}$$

которое гарантирует ограниченность частоты столкновений сверху. Особое место в кинетической теории занимают «максвелловские молекулы», определяемые соотношением (11.3) при $s=4$. Этот класс потенциалов выделен Максвеллом в связи с простотой структуры соответствующих моментных уравнений. В этом классе найдены нетривиальные точные решения уравнения Больцмана (см. [1]).

Для большинства потенциалов взаимодействия частиц в нейтральном газе (см. гл. 10, п. 2.4) выполняются условия (11.1), (11.2). В частности, этим условиям удовлетворяют функции B, полученные при квантовомеханических расчетах столкновений. Ниже, если не оговорено противное, условия (11.1), (11.2) предполагаются выполненными.

Максвелловское распределение

$$\omega(\xi) = \omega(\rho,\ h,\ V,\ \xi) = \rho\,(h/2\pi)^{3/2}\exp\,\{-h/2\,|\xi-V|^2\}$$
$$(\rho>0,\ h>0,\ V \in R^3)$$

при любых постоянных значениях параметров ρ, h, V является точным решением уравнения Больцмана. Широкий круг физических приложений и математических исследований связан с изучением возмущений состояния $\omega=\omega(1,\ 1,\ 0,\ \xi)$. Возмущение f, определяемое равенством $F=\omega(1+f)$, должно находиться из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f + Df = Lf + \Gamma(f,\ f). \tag{11.5}$$

Линеаризованный оператор столкновений L и оператор Γ задаются формулами

$$\omega Lf = J(\omega(1+f),\ \omega(1+f)) - J(\omega f,\ \omega f),\ \Gamma(f, f) = J(\omega f,\ \omega f). \tag{11.6}$$

Отбрасывание в (11.5) нелинейного члена Γ приводит к линеаризованному уравнению Больцмана.

Пусть S — граница области Ω в R^m, $n(x)$ — внутренняя нормаль к S в точке x. Условимся через F^- и F^+ обозначать плотности распределения падающих и отраженных молекул на S:

$$F^+=F\chi(\langle\xi,\ n(x)\rangle),\quad F^-=F-F^+,\quad x\in S,$$

χ — характеристическая функция множества $(0,\ \infty)$.

Граничные условия на поверхности S задают связь между плотностями распределения падающих и отраженных молекул:

$$F^+=\mathcal{R}F^-+\Phi^+,\quad x\in S,$$

$$(\mathcal{R}F^-)(t,\ \xi,\ x)=\int\limits_{R^3} r(t,\ x,\ \xi,\ \eta)F^-(t,\ \eta,\ x)\,d\eta.$$

Функции Φ^+, r предполагаются заданными.

При исследовании линейных задач обычно предполагается, что оператор $\mathcal{R}$ допускает представление $\mathcal{R}=\mathcal{R}_0+\mathcal{R}_1$, причем $\omega^+=\mathcal{R}_0\omega^-$, а функция $\mathcal{R}_1\omega^-f^-$ пренебрежимо мала. Граничное условие приобретает тогда вид

$$f^+=Rf^-+\Phi^+,\quad x\in S,$$

где $R=(\omega^+)^{-1}\mathcal{R}_0\omega^-$, а функция Φ^+ задана.

Если область Ω неограничена, то к условиям на S присоединяется условие на бесконечности

$$F\to F_\infty \text{ при } |x|\to\infty. \tag{11.7}$$

Таким образом, с уравнением Больцмана связан следующий набор краевых задач:

1) *внутренняя стационарная задача* (рассматриваемая для ограниченной области Ω)

$$DF=J(F,\ F),\quad x\in\Omega,\quad F^+=\mathcal{R}F^-+\Phi^+,\quad x\in S; \tag{11.8}$$

2) *внешняя стационарная задача* (рассматриваемая обычно в случае, когда Ω — дополнение к замыканию ограниченной области в R), состоящая в отыскании функций, удовлетворяющих соотношениям (11.8), (11.7);

3) *нестационарная краевая задача*

$$\frac{\partial}{\partial t}F+DF=J(F,\ F),\quad x\in\Omega,\quad t\in(0,\ T), \tag{11.9}$$

$$F^+=\mathcal{R}F^-+\Phi^+,\quad x\in S,\quad t\in(0,\ T), \tag{11.10}$$

$$F=F_0,\quad x\in\Omega,\quad t=0; \tag{11.11}$$

4) *задача Коши* (11.9), (11.11) с $\Omega=R^m$.

Аналогичным образом формулируются задачи для линеаризованного уравнения.

Особую роль в приложениях играют задачи о начальном и граничном слоях Кнудсена. Первая из них состоит в отыскании решения задачи Коши (A. L. Cauchy), не зависящего от координат x. Решения этой задачи описывают «быстрый» процесс установления локального термодинамического равновесия (т. е. максвелловского распределения с переменными параметрами

ρ, h, V) и дают возможность найти асимптотически точные начальные условия для уравнений гидродинамики. Вторая задача является обобщением *задачи Крамерса* (H. Kramers) и состоит в описании течения газа над плоскостью под действием заданных потоков импульса B_α ($\alpha=1, 2, 3$) и энергии B_4. В линейной стационарной постановке эта задача сводится к отысканию функции $f(\xi, x)$, удовлетворяющей условиям:

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial x} f = Lf + g, \quad x > 0, \quad f^+ = Rf^- + \Phi^+; \quad x = 0, \qquad (11.12)$$

$$\lim_{x\to\infty} \int_{R^3} (\psi_j - \delta_{j4} (2/3)^{1/2} \psi_0) f \omega d\xi = B_j, \quad j = 1, \ldots, 4; \qquad (11.13)$$

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_\alpha = \xi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \psi_4 = (|\xi|^2 - 3) 6^{-1/2}. \qquad (11.14)$$

В рамках асимптотического подхода решение задачи (11.12), (11.13) определяет скорость скольжения и температурный скачок на границе обтекаемого тела и, тем самым, правильные граничные условия для уравнений гидродинамики.

1.2. Формулировка краевых задач. Решение краевых задач и свойства интеграла столкновений описываются ниже в терминах пространств $L_p(X)$ и $L_p(X, \varphi) = \{f | \varphi f \in L_p(X)\}$, где φ — неотрицательная весовая функция. При исследовании линейных задач существенную роль играют пространства $\mathrm{H} = L_2(R^3, \omega^{1/2})$, $\mathscr{H} = L_2(R^3 \times \Omega, \omega^{1/2})$,

$$\mathscr{H}(S) = L_2(R^3 \times S, \omega^{1/2}\varphi), \quad \varphi = |\langle \xi, n(x) \rangle|^{1/2}.$$

Для скалярного произведения и нормы в пространстве X ниже применяются обозначения $\langle f, g | X \rangle$ и $\|f | X\|$.

Уточним определение решения сформулированных краевых задач. При фиксированных ξ, x положим

$$\hat{F}(\tau) = F(\xi, x + \xi^{(m)}\tau), \quad \tau \in R^1, \quad \xi^{(m)} = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}.$$

Свяжем с пространством $X = L_p(R^3 \times \Omega, \varphi)$ класс функций $\mathscr{B}(X)$, состоящий из функций F, которые удовлетворяют условиям: 1) $F \in X$, 2) $F^+ \in L_p(R^3 \times S, \varphi_1)$, $\varphi_1 = \varphi |\langle \xi, n \rangle|^{1/p}$, 3) для почти всех ξ, x функция $\hat{F}$ имеет обобщенную производную первого порядка, причем $(1 + |\xi|)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{F} \in X$. Функции F из $\mathscr{B}(X)$ не обязаны иметь все производные, входящие в уравнение Больцмана. Однако для них определен оператор D $\left(DF = \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{F}\right)$ и след F^-. Условимся решением стационарной задачи (11.8) в $L_p(R^3 \times \Omega, \varphi)$ называть функцию F из соответствующего класса $\mathscr{B}$, удовлетворяющую соотношениям (11.8) почти всюду. Аналогичным образом определяется решение нестационарных задач в $L_p([0, T] \times R^3 \times \Omega, \varphi)$. Эти решения не имеют в общем случае производных по t и x_α, но для них определен оператор $\frac{\partial}{\partial t} + D$.

При построении решений краевых задач существенно используются интегральные формы кинетических уравнений. Для их описания рассмотрим вспомогательную задачу

$$Df=g_1-fg_2,\quad x\in\Omega,\quad f^+=\Phi^+,\quad x\in S, \tag{11.15}$$

где g_i $(i=1,2)$, Φ^+ — заданные функции, $g_2\geqslant 0$. Если луч $\{y\in\Omega \mid y=x-\xi^{(m)}\tau,\ \tau>0\}$ не пересекается с границей S, то к соотношениям (11.15) присоединяется условие

$$f(\xi, x-\xi^{(m)}\tau)\to 0,\quad \tau\to+\infty.$$

Решение $f=U(g_1, g_2)+E(\Phi^+, g_2)$ задачи (11.15) приводит к следующей интегральной форме задачи (11.8);

$$\begin{gathered} f=VF,\quad x\in\Omega,\quad F^+=\mathcal{R}F^-+\Phi^+,\quad x\in S, \\ VF=U(\Phi(F,F), Q(F))+E(F^+, Q(F)), \\ \Phi(F,F)=J(F,F)+FQ(F), \end{gathered} \tag{11.16}$$

$$Q(F)=2\pi\int\limits_{R^3} F(\eta, x)\left[\int\limits_0^1 B(|\xi-\eta|, z)\,dz\right]d\eta.$$

Полагая

$$\nu=Q(\omega),\quad Kf=Lf+\nu f,$$

получим интегральную форму стационарной линейной задачи

$$f=UKf+Ef^+,\quad x\in\Omega,\quad f^+=Rf^-+\Phi^+,\quad x\in S. \tag{11.17}$$

Аналогично строятся интегральные кинетические уравнения, связанные с нестационарными задачами.

Задача построения решения интегро-дифференциального уравнения в $\mathcal{B}(X)$ при подходящим образом выбранном пространстве X эквивалентна задаче построения решения соответствующего интегрального уравнения в X.

1.3. Свойства интеграла столкновений. Исследование свойств интеграла столкновений J для газа из упругих шаров проведено в работах Карлемана (T. Y. T. Carleman). Ниже приводятся оценки, обобщающие результаты Карлемана.

Положим

$$\varphi=\exp\{s|\xi|^2\}(1+|\xi|^2)^{r/2}. \tag{11.18}$$

Если $r=0$, $s>0$, то оценка $\Phi(F,F)$ получается совсем просто: в силу равенства $\Phi(\varphi^{-1}, \varphi^{-1})=\varphi^{-1}Q(\varphi^{-1})$,

$$|\varphi\Phi(F,F)|\leqslant Q(\varphi^{-1})\,\|F\,|L_\infty(R^3, \varphi)\|^2. \tag{11.19}$$

Для мягких потенциалов из этой оценки следует ограниченность Φ в $L_\infty(R^3, \varphi)$. Для жестких потенциалов эта оценка мало полезна из-за неограниченности $Q(\varphi^{-1})$ при больших $|\xi|$.

Лемма 1.1. Если $s>0$, $r>2$, то оператор Φ ограничен в $L_\infty(R^3, \varphi)$ (см. [5]).

Лемма 1.1 позволяет доказать локальную разрешимость начально-краевых задач. Однако глобальной разрешимости в классе экспоненциально убывающих по ξ функций доказать не удается. Поэтому, следуя Карлеману, рассмотрим функции распределения со степенным убыванием.

Лемма 1.2 ([17], [18]). Пусть φ определено равенством (11.18), $s=0$, $r>5$, $B(v, z) \leqslant z\ (b_0 v^{1-\gamma}+b_2 v^{\varepsilon-1})$, $\gamma \in [0, 1]$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда существует положительная постоянная C такая, что для всех F из $L_\infty(R^3, \varphi)$

$$|\varphi \Phi(F, F)| \leqslant C \| F | L_\infty(R^3, \varphi) \|^2 +$$

$$+4\pi b_0 (r-2)^{-1} (1+|\xi|)^{1-\gamma} \| F | L_\infty(R^3, \varphi) \| \, \| F | L_1(R^3) \|.$$

Оценку, содержащуюся в лемме, нельзя улучшить, так что оператор Φ неограничен в $L_\infty(R^3, \varphi)$. Однако, если $\int\limits_0^1 B(v, z)\, dz \geqslant b_1 (v^{1-\gamma}+1)$, то оператор $\Phi [Q+\alpha]^{-1}$ при достаточно больших α и r не только ограничен, но имеет малую норму. Этот факт лежит в основе доказательства глобальной разрешимости задачи Коши для пространственно-однородного газа и локальной разрешимости ряда начально-краевых задач.

Функции ψ_j, задаваемые равенствами (11.14), называются *инвариантами столкновений*. Законы сохранения массы, импульса и энергии гарантируют выполнение соотношений

$$\int\limits_{R^3} \psi_j J(F, F)\, d\xi = 0 \quad (j=0, 1, \ldots, 4) \tag{11.20}$$

для всех достаточно хороших функций F. Положим

$$P_0 f = \sum_{j=0}^{4} \psi_j \langle \psi_j, f | H \rangle, \quad Pf = f - P_0 f \tag{11.21}$$

и обозначим через $P_0 H$ и PH соответствующие подпространства пространства H. Пусть $\varphi_r = \omega^{1/2} (1+|\xi|)^r$. Следующая лемма содержит описание свойств интеграла столкновений, которые обеспечивают затухание малых возмущений.

Лемма 1.3. 1) При любом вещественном r оператор $K=L+\nu I$ непрерывен как оператор из $L_2(R^3, \varphi_r)$ в $L_2(R^3, \varphi_{r+1/2})$ и вполне непрерывен в H. 2) Существует постоянная $l>0$ такая, что

$$\langle f, Lf | H \rangle \leqslant -l \| \nu^{1/2} P f | H \|^2$$

для всех f из $L_2(R^3, (\omega \nu)^{1/2})$. 3) $\langle f, Lg | H \rangle = \langle g, Lf | H \rangle$, $P_0 L = L P_0 = 0$.

2.1. Асимптотика. При исследовании краевых задач существенно используется информация о решениях неоднородного линеаризированного уравнения

$$Df=\varepsilon^{-1}Lf+\varepsilon g,\quad x\in R^m,\quad \varepsilon\in(0,1].\tag{11.22}$$

Исследование асимптотики f при $|x|\to\infty$ и при $\varepsilon\to 0$ тесно связано с исследованием связи уравнения Больцмана с уравнениями гидродинамики. Давление, скорость и температура газа определяются функциями $A_j=\langle\psi_j,\ f\,|\,H\rangle$, так что подпространство P_0H содержит, в определенном смысле, всю гидродинамическую информацию о газе. Традиционный путь извлечения этой информации из кинетических уравнений состоит в (достаточно произвольном) обрыве бесконечной цепочки уравнений моментов. Первые уравнения этой цепочки (законы сохранения) получаются проектированием (11.22) на подпространство P_0H. Наряду с функциями A_j в систему законов сохранения входят старшие моменты — тензор напряжений $\tau_{\alpha\beta}=\langle P\psi_\alpha\psi_\beta,\ f\,|\,H\rangle$ и вектор теплового потока $q_\alpha=\langle P\psi_\alpha\psi_4,\ f\,|\,H\rangle$. Определим функции $\varphi_{\alpha j}$ соотношениями

$$\varphi_{\alpha j}=L^{-1}(P\psi_\alpha\psi_j),\quad P_0\varphi_{\alpha j}=0.\tag{11.23}$$

Умножая (11.22) скалярно в H на функции $\varphi_{\alpha j}$, получим

$$\varepsilon^{-1}\tau_{\alpha\beta}=-\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}A_\beta+\frac{\partial}{\partial x_\beta}A_\alpha\right)+2/3\mu\delta_{\alpha\beta}\sum_{\gamma=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}A_\gamma+$$
$$+\sum_{\gamma=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\langle\varphi_{\alpha\beta}\xi_\gamma,\ Pf\,|\,H\rangle-\varepsilon\langle\varphi_{\alpha\beta},\ g\,|\,H\rangle,\tag{11.24}$$

$$\varepsilon^{-1}q_\alpha=-\lambda\frac{\partial}{\partial x_\alpha}A_4+\sum_{\gamma=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\langle\varphi_{\alpha 4}\xi_\gamma,\ Pf\,|\,H\rangle-$$
$$-\varepsilon\langle\varphi_{\alpha 4},\ g\,|\,H\rangle,\tag{11.25}$$

где μ, λ — положительные коэффициенты, имеющие смысл коэффициентов вязкости и теплопроводности.

Если в (11.25), (11.24) отбросить два последних члена в правой части, то эти формулы дают законы Ньютона и Фурье. Система законов сохранения, дополненная формулами (11.25), (11.24), дает возможность получить точную оценку P_0f через данные задачи и описать асимптотические свойства f. (Заметим, что функции $\varphi_{\alpha j}$ являются полиномами по ξ только для максвелловских молекул. В общем случае соотношения (11.25), (11.24) не входят в систему уравнений моментов.)

Основной результат удобно сформулировать для преобразования Фурье $\tilde{f}$ функции f по переменным x. Функция $\tilde{f}$ должна удовлетворять уравнению

$$\tilde{D}\tilde{f}=\varepsilon^{-1}L\tilde{f}+\varepsilon\tilde{g},\quad \tilde{D}=i\sum_{\alpha=1}^{m}k_\alpha\xi_\alpha,\quad \varepsilon\in(0,\,1]. \tag{11.26}$$

Структура степенного разложения по ε

$$\tilde{f}=\sum_{n\geqslant 0}\varepsilon^n\tilde{f}_n \tag{11.27}$$

в нелинейной нестационарной задаче исследовалась Гильбертом. Формальная подстановка *ряда Гильберта* (11.27) в (11.22) дает уравнения

$$Lf_0=0,\quad Lf_{n+1}=Df_n-g\delta_{n1}. \tag{11.28}$$

Условия разрешимости уравнения (11.28) $P_0(Df_n-g\delta_{n1})=0$ эквивалентны уравнениям линейной гидродинамики. Нетрудно также проверить, что $\tilde{f}_n=O(|k|^{n-2})$ при фиксированном ξ и $k\to 0$.

Теорема 2.1 ([13], [14]). Если $\tilde{g}\in H$, то уравнение (11.26) при $k\neq 0$ имеет единственное решение в H. Если $(1+|\xi|)^{n-1}g\in \in H$, то при $n\geqslant 1$ это решение допускает представление

$$\tilde{f}=\sum_{l=0}^{n}\varepsilon^l\tilde{f}_l+\varepsilon^{n+1}\tilde{F}_n,$$

$$\|\tilde{F}_n\,|\,H\|\leqslant C(1+|k|)^{n-1}\|(1+|\xi|)^{n-1}\tilde{g}\,|\,H\|,$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от k и ε.

2.2. Внутренние задачи. Рассмотрим задачу об отыскании функции f, удовлетворяющей условиям

$$Df=Lf,\quad x\in\Omega,\quad f^+=Rf^-+\Phi^+,\quad x\in S \tag{11.29}$$

в ограниченной области Ω. Первый результат о решении задачи (11.29) был получен Грэдом [23]. Грэд доказал однозначную разрешимость задачи (11.29) при $m=1$, $R=0$, $\Omega=(0,d)$ и достаточно малых d. Гиро [26] исследовал условия разрешимости задачи (11.29) для газа из упругих шаров.

Лемма 1.3 и теорема 2.1 дают возможность получить следующие априорные оценки решения задачи (11.29) в $\mathscr{H}$:

$$1/2\,\|f^-\,|\,\mathscr{H}(S)\|^2+l\,\|\nu^{1/2}Pf\,|\,\mathscr{H}\|^2\leqslant 1/2\,\|f^+\,|\,\mathscr{H}(S)\|^2,$$

$$\|P_0f\,|\,\mathscr{H}\|\leqslant C\,[\|Pf\,|\,\mathscr{H}\|+\|f\,|\,\mathscr{H}(S)\|].$$

Эти оценки гарантируют единственность решения задачи в $\mathscr{H}$, если $\|R\,|\,\mathscr{H}(S)\|<1$. Для доказательства существования решения рассмотрим систему (11.17).

Лемма 2.1. Оператор UK вполне непрерывен в $\mathscr{H}$.

Из леммы 2.1 легко выводится результат Грэда и следующая гораздо более общая

Теорема 2.2. Если $\Phi^{+}\in\mathscr{H}(S)$, $\|R|\mathscr{H}(S)\|<1$, то задача (11.29) имеет единственное решение в $\mathscr{H}$.

Отсутствие законов сохранения при взаимодействии молекул с границей гарантируется условием $\|R|\mathscr{H}(S)\|<1$. Однако, в приложениях часто встречаются ситуации, когда это условие не выполнено. Положим при $x\in S$, $\varphi=|(\xi,\ n(x))|$

$$\Pi_0 f^{\pm}=(\varphi,\ f^{\pm}\,|\,H)(\varphi,\ 1^{\pm}\,|\,H)^{-1},\ \Pi f^{\pm}=f^{\pm}-1^{\pm}\Pi_0 f^{\pm}.$$

Предположим, что оператор R удовлетворяет условиям (см. [5], [26], [28]):

$$R1^{-}=1^{+},\ R\Pi=\Pi R,\ \|R\Pi\,|\,\mathscr{H}(S)\|<1. \qquad (11.30)$$

С физической точки зрения эти условия означают, что при взаимодействии с границей выполняется закон сохранения массы, но не выполнены другие законы сохранения.

Теорема 2.3 ([5]). Пусть $\Phi^{+}\in\mathscr{H}(S)$ и выполнены условия (11.30). Для разрешимости задачи (11.29) в $\mathscr{H}$ необходимо и достаточно выполнение условия $\langle\Phi^{+},\ 1|\mathscr{H}(S)\rangle=0$. Разность любых двух решений постоянна.

2.3. Внешние задачи. Внешняя задача обычно формулируется как задача об отыскании функции f, удовлетворяющей условиям (11.29) и соотношению

$$f\to f_{\infty},\ |x|\to\infty. \qquad (11.31)$$

Предполагается, что область $R^{m}\setminus\bar{\Omega}$ ограничена, $m\geqslant 2$. Механики обычно весьма единодушны в вопросах однозначной разрешимости сформулированных ими задач. С внешними стационарными задачами для уравнения Больцмана ситуация иная. Обзор [28] показывает, сколь противоречивый набор мнений был высказан по этому поводу на основе физических соображений.

Удобно сначала отказаться от традиционной постановки и рассмотреть задачу о построении функции f, удовлетворяющей условиям (11.29) и соотношению $f\in\mathscr{H}_k$, где

$$\mathscr{H}_k=\{f\,|\,(1+|x|)^{-k}f\in\mathscr{H}\}.$$

Условие $f\in\mathscr{H}_k$ накладывает ограничение на рост функции f при $|x|\to\infty$. В частности, при $k\leqslant m/2$ это условие означает, что f в определенном смысле стремится к нулю при $|x|\to\infty$. Положим $\hat{\psi}_j=\psi_j-\delta_{j4}(2/3)^{1/2}$,

$$Q_j=\langle\hat{\psi}_j\operatorname{sgn}\langle\xi,n(x)\rangle,\ f\,|\,\mathscr{H}(S)\rangle,$$

$$p=\langle\psi_0+\psi_4(2/3)^{1/2},\ f\,|\,H\rangle,$$

$$f_0=\sum_{j=0}^{4}a_j(x)\,\hat{\psi}_j,\quad a_0=C_0,$$

$$a_{\alpha}=C_{\alpha}+\sum_{\beta=1}^{3}Q_{\beta}H_{\alpha\beta},\quad a_4=C_4+Q_4H,$$

где C_j — постоянные, $\{H_{\alpha\beta}\}$ — матрица фундаментальных решений системы Стокса, H — фундаментальное решение уравнения Лапласа (P. S. Laplace). Постоянные Q_j определяют силу и тепловой поток, действующие на «тело» $R^m\setminus\Omega$, функция p определяет давление, соответствующее распределению f.

При достаточно общих предположениях относительно оператора R верна следующая

Теорема 2.4 ([9], [14]). Если $\Phi^+\in\mathscr{H}(S)$, то при любых заданных постоянных B_j задача (11.29) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$p-B_0\in\mathscr{H}_1,\quad Q_j=B_j,\quad j\geqslant 1.$$

Это решение допускает представление $f=f_0+f_1$, где $f_1\in\mathscr{H}_\varepsilon$ при любом положительном ε.

Теорема 2.4 дает возможность выяснить условия разрешимости внешних задач в традиционной постановке. Если $m=3$, то, в силу теоремы, $f-f_0\in\mathscr{H}_1$ при любых Q_j. Следовательно, единственное возможное условие на бесконечности:

$$f_\infty=\sum_{j=0}^{4}C_j\hat{\psi}_j. \tag{11.32}$$

Гарантируемый теоремой 2.4 произвол в выборе постоянных B_j обеспечивает возможность задать произвольным образом постоянные C_j (т. е. давление, скорость и температуру газа на бесконечности). Этот факт позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2.5 ([9], [13]). Если $m=3$, $\Phi^+\in\mathscr{H}(S)$, то задача (11.29), (11.32) при любых постоянных C_j имеет единственное решение в $\mathscr{H}_2$.

В плоском случае ситуация меняется. Если сила и тепловой поток (Q_j, $j\geqslant 1$) отличны от нуля, то решение задачи (11.29) растет как $\ln|x|$ при $|x|\to\infty$. Для того, чтобы выполнить условие (11.32) и даже просто условие ограниченности решения, необходимо положить $Q_j=0$. В силу теоремы 2.4, отсюда следует, что в плоской задаче имеет место явление, вполне аналогичное парадоксу Стокса в гидродинамике: скорость и температуру газа на бесконечности нельзя задать произвольно, они однозначно определяются требованием ограниченности решения.

2.4. Задача Крамерса. Задача (11.12)—(11.13) широко обсуждалась ([25], [28]) в связи с упомянутыми выше приложениями. В частности, Грэд [25] сформулировал гипотезы об условиях однозначной разрешимости этой задачи и асимптотических свойствах ее решений. Положим

$$f_0=\sum_{j=0}^{4}C_j\hat{\psi}_j+\sum_{j=2}^{4}B_j(\varphi_{1j}+x\hat{\psi}_j)\,\langle\varphi_{1j},\ L\varphi_{1j}|H\rangle^{-1}, \tag{11.33}$$

где φ_{1j} — функции, определяемые соотношениями (11.23).

Теорема 2.6 ([8], [12]). Если $g=0$, $R=0$, $|\xi_1|^{1/2}\Phi^+ \in H$, то при любом k из $[2, +\infty)$ задача (11.12)—(11.13) имеет единственное решение в $\mathscr{H}_k$. Это решение допускает представление $f=f_0+f_1$, где $f_1 \in \mathscr{H}$, а f_0 определяется формулой (11.33) с $B_0=C_0$.

Постоянные C_j $(j \geqslant 2)$ определяют скорость скольжения и температурный скачок. Теорема 2.6 остается справедливой при достаточно общих ограничениях на функцию g и оператор R ([8], [12]). Эту теорему естественно рассматривать как подтверждение и уточнение гипотез Грэда.

§ 3. Нелинейные стационарные задачи

В ситуациях, близких к равновесным, решение стационарной задачи (11.8) для ограниченной области Ω можно строить методом итераций, взяв в качестве нулевого приближения соответствующее решение линеаризированного уравнения. Гиро [26] доказал таким способом однозначную разрешимость задачи (11.8) для газа из упругих шаров. Теоремы 2.2 и 2.3 дают возможность получить аналогичный результат для всех жестких потенциалов при более общих, чем в работе Гиро, условиях о форме границы и законе взаимодействия молекул с ней ([4]).

Более трудной является внешняя стационарная задача, в частности, задача описания обтекания тела. Рассмотрим задачу (11.7), (11.8) с $F_\infty=\omega(1, 1, V, \xi)$, $V=\{|V|, 0, 0\}$. Число Маха (E. Mach) M связано с V равенством $M=(3/5)^{1/2}|V|$. Полагая $f=\omega^{-1}(F-\omega)$, $\omega=F_\infty$, $v=\xi-V$ и считая функцию F^+ заданной, получим следующую переформулировку задачи (11.7), (11.8)

$$\sum_{\alpha=1}^{3}(|V|\delta_{\alpha_1}+v_\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}f=Lf+\Gamma(f, f),\ x\in\Omega, \tag{11.34}$$

$$f^+=\Phi^+,\ x\in S,\ f\to 0,\ |x|\to\infty. \tag{11.35}$$

В ситуациях, близких к равновесным, скорость V и нелинейный член в (11.34) малы. Их отбрасывание приводит к задаче, решение которой, в силу теоремы 2.4, имеет стоксовскую асимптотику при $|x|\to\infty$. Однако оказывается, что как и в задачах гидродинамики, соответствующий метод итераций приводит к появлению секулярных членов при больших $|x|$.

Положим

$$\|f\,|\,B_p(\Omega)\|=\sup(1+|\xi|)^3\omega^{1/2}\|f\,|\,L_p(\Omega)\|,$$

$$\|f\,|\,B_p(S)\|=\sup(1+|\xi|)^4\omega^{1/2}\|f\,|\,L_p(S)\|$$

и обозначим через $B_p(\Omega)$, $B_p(S)$ соответствующие банаховы пространства функций.

Пусть $\Phi^+ \in B_\infty(S)$, $B_{p,\infty} = B_p(\Omega) \cap B_\infty(\Omega)$. Поскольку функции f из $B_{p,\infty}$ ограничены, показатель p является мерой скорости убывания f при $|x| \to \infty$ (чем меньше p, тем быстрее убывание).

Теорема 3.1 ([10]). Пусть f — решение задачи (11.34), (11.35) в $B_{p,\infty}$, $p < 12/5$. Тогда f допускает представление

$$f(\xi, x) = \sum_{j=0}^{4} a_j(x) \hat{\psi}_j(v) + \hat{f}(\xi, x) \quad (v = \xi - V),$$

$$\hat{f} \in B_2(\Omega), \quad a_j \in L_\beta(\Omega), \quad \beta > 2.$$

Функции a_j дают главные члены асимптотики гидродинамических параметров (давления, скорости, температуры) на больших расстояниях от границы. Явные формулы для преобразования Фурье a_j показывают, что эти функции убывают при $|x| \to \infty$ заведомо медленнее, чем функции из L_2. Вычисление функций a_j требует информации только о потоках Q_j. В частности, при $M < 1$

$$a_\alpha(x) = \sum_{\beta=1}^{3} Q_\beta \hat{H}_{\alpha\beta}(x), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

где $\{\hat{H}_{\alpha\beta}\}$ — матрица фундаментальных решений системы уравнений Озина (C. W. Oseen). В дозвуковых течениях функции a_j убывают как $|x|^{-2}$ вне следа за телом. При $M > 1$ наряду со следом появляются новые области медленного убывания функций a_j, связанные с конусом Маха.

Теорема 3.1 имеет условный характер: в ней предполагается существование решения задачи (11.34), (11.35) из $B_{p,\infty}$. Следующая теорема показывает, что задача (11.34), (11.35) при малых Φ^+ действительно разрешима.

Теорема 3.2 ([10]). Существует положительное число δ такое, что если $\|\Phi^+ | B_\infty(S)\| < \delta$, то задача (11.34), (11.35) имеет единственное решение в $B_{p,\infty}$, $p \in (2, 12/5)$, удовлетворяющее условию $\|f | B_{p,\infty}\| \leqslant C\delta$.

Из теоремы 3.2 следует, что задача (11.34), (11.35) однозначно разрешима при диффузном отражении, если число Маха мало.

Однозначная разрешимость стационарных задач может быть доказана и в другом предельном случае — для сильно разреженного газа ([6], [7]). Интегральный оператор, определенный равенством (11.16), является в этом случае оператором сжатия в подходящим образом выбранном функциональном пространстве. Скорость сходимости метода итераций $F^{(n)} = VF^{(n-1)}$ зависит от размерности пространства. В частности, при $m = 3$ $\|F - F^{(n)}\| = O(\varepsilon^n)$, а при $m = 1$ $\|F - F^{(n)}\| = O((\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon})^n)$.

§ 4. Нестационарные задачи

4.1. Релаксация в однородном газе. Задача описания релаксации состоит в отыскании функции $F(t, \xi)$, удовлетворяющей условиям

$$\frac{\partial}{\partial t}F=J(F, F),\quad t\in(0, T),\quad F=F_0,\quad t=0. \qquad (11.36)$$

Первые результаты о решении задачи (11.36) получены Карлеманом для газа из упругих шаров.

Следующие ниже теоремы ([17], [19]) являются обобщением теорем Карлемана на класс потенциалов, удовлетворяющих условиям

$$B(v, z)\leqslant b_1 z(v^{1-\nu}+1),\quad \int_0^1 B(v, z)\,dz\geqslant b_0 v^{1-\nu},\quad \gamma\in[0, 1). \qquad (11.37)$$

Пусть

$$\varphi=(1+|\xi|)^r,\quad r\geqslant r_0,\quad r_0=2+\max\{3,\ 8b_1b_0^{-1}\}. \qquad (11.38)$$

Теорема 4.1. Если $F_0\in L_\infty(R^3, \varphi)$, то задача (11.36) при всех T имеет единственное решение в $L_\infty([0, T]\times R^3, \varphi)$. Это решение удовлетворяет условию $\sup\limits_t \| F \,|\, L_\infty(R^3, \varphi)\| < \infty$.

Обозначим через ω максвелловское распределение, параметры которого удовлетворяют условиям $\langle \psi_j, F_0-\omega \,|\, L_2(R^3)\rangle=0$.

Теорема 4.2. Пусть выполнено условие теоремы 4.1 и $F_0\in C(R^3)$. Решение задачи (11.36) непрерывно по ξ равномерно по t и удовлетворяет соотношению $\sup\limits_\xi |F(t, \xi)-\omega|\to 0,\ t\to\infty$.

Для приложений важна оценка скорости установления равновесного состояния ω. При достаточно общих начальных условиях такие оценки есть сейчас только для случая максвелловских молекул ([2], [3]).

Резко сузив класс начальных распределений, Грэд доказал экспоненциально быструю сходимость решений задачи (11.36) к равновесию. Положим $F=\omega(1+f)$,

$$\varphi=(1+|\xi|)^3\omega^{1/2},\quad N(f)=\| f \,|\, L_\infty(R^3, \varphi)\|.$$

Теорема Грэда утверждает, что существует положительная постоянная β такая, что $\sup\limits_t N(f)\exp(\beta t)<\infty$, если норма $N(f$ достаточно мала при $t=0$. Однако нет основания надеяться снять в теореме Грэда условие на $N(f)$ при $t=0$. Более того, результаты А. В. Бобылева [2] показывают, что для максвелловских молекул при финитных начальных данных за конечное время возмущение f может выйти из пространства H.

Отметим еще, что из результатов А. Я. Повзнера [21], [5] вытекает, что глобальная однозначная разрешимость задачи (11.36) сохраняется для гораздо более широкого класса начальных распределений. Однако в условиях теоремы Повзнера не удается показать даже ограниченность F при больших t.

4.2. Задача Коши. Рассмотрим теперь задачу Коши в общем случае:

$$\frac{\partial}{\partial t}F+DF=J(F,F),\quad t\in(0,T),\quad F=F_0,\quad t=0.\qquad(11.39)$$

При слабых ограничениях на начальное распределение можно доказать однозначную разрешимость задачи (11.39) на промежутке времени $(0,T)$, величина которого зависит от начальных условий [5]. В частности, верна

Теорема 4.3 ([20]). Если $F_0\in L_\infty(R^6,\varphi)$, $F_0\geqslant 0$, и выполнены условия (11.38), (11.37), то существует положительное число T_1 такое, что при $T\leqslant T_1$ задача (11.39) имеет единственное решение в $L_\infty([0,T]\times R^6,\varphi)$.

Если φ определяется формулой (11.18), то при $s>0$, $r>2$ локальная однозначная разрешимость задачи (11.39) в $L_\infty(R^6,\varphi)$ имеет место для всех потенциалов, удовлетворяющих первому условию Грэда (11.1) [5]. Для потенциалов, удовлетворяющих условию (11.4), задача (11.39) локально однозначно разрешима в

$$L_\infty([0,T]\times R^6,\varphi)\ \text{при}\ s>0,\ r=0.$$

В каждом из упомянутых случаев решение может быть получено как предел последовательности итераций в интегральном кинетическом уравнении. Доказательство сходимости метода итераций основано на оценках, содержащихся в леммах 1.1, 1.2. Нетрудно доказать, что решение неотрицательно при неотрицательных F_0 и имеет ту же гладкость по x, ξ, что и начальное распределение.

Рассмотрим теперь задачу (11.39), предполагая, что начальное распределение близко к максвелловскому распределению $\omega=\omega(1,1,0,\xi)$. В этой ситуации можно доказать однозначную разрешимость задачи на бесконечном промежутке времени. Положим

$$\|f\,|\,B_{p,\infty}\|=\|f\,|\,B_p(R^3)\|+\|f\,|\,B_\infty(R^3)\|,$$

$$\|f\,|\,\hat{B}_p\|=\sup_{t\in[0,T]}\|f\,|\,B_{p,\infty}\|.$$

Теорема 4.4 ([11], [15], [16]). Существует положительное число δ такое, что если $\|f_0\,|\,B_{2,\infty}\|<\delta$, то задача (11.39) при всех T имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\omega^{-1}(F-\omega)\in\hat{B}_2$. Верна оценка

$$\sup_{t\geqslant 0}\|\omega^{-1}(F-\omega)\,|\,B_{2,\infty}\|<\infty.$$

Функция F является столь же гладкой по x, сколь и начальное распределение. При дополнительных предположениях о гладкости F_0 и скорости убывания f_0 при $|x|\to\infty$ можно получить оценки скорости установления равновесия ω. В частности, если f_0 и ее производные по x до второго порядка принадлежат $B_{1,\infty}$, то (см. [5])

$$\|f\,|\,B_{2,\infty}\| \leqslant C(1+t)^{-3/4}, \quad \|f\,|\,H\| \leqslant C(1+t)^{-3/2}.$$

Разность h решений нелинейного и линеаризованного уравнений Больцмана удовлетворяет условию $\|h\,|\,B_{2,\infty}\| \leqslant C(1+t)^{-5/4}$. В работе [29] получена аналогичная оценка для разности между моментами (ψ_j, f) и решениями уравнений Навье—Стокса. Аналогичная теорема для мягких потенциалов получена в работе [31].

4.3. Краевые задачи. Локальную однозначную разрешимость нестационарных краевых задач можно доказать при достаточно общих предположениях о начальных и граничных условиях ([5], [20]).

Глобальные теоремы, как и в задаче Коши, удается получить только в ситуациях, близких к равновесным. Первые результаты в этом направлении получены в работах [22], [30] для случая, когда область Ω есть куб с зеркально отражающими стенками. Краевая задача в этом случае сводится к задаче Коши с периодическими начальными условиями.

В общем случае такое сведение, конечно, невозможно, но при однородных граничных условиях решение нестационарной задачи, как и решение задачи Коши, можно свести к исследованию уравнения

$$f(t) = T(t)\,f_0 + \int_0^t T(t-\tau)\,\Gamma(f(\tau),\, f(\tau))\,d\tau,$$

где $T(t)f_0$ — решение нестационарной краевой задачи для линеаризованного уравнения Больцмана.

Решение этого уравнения требует информации о свойствах полугруппы $T(t)$. Гиро [27] исследовал ее свойства для газа из упругих шаров, находящегося в ограниченной области с гладкой границей. Используя ряд дополнительных предположений технического характера, он доказал экспоненциальные оценки убывания $T(t)$ с ростом t и однозначную разрешимость начально-краевой задачи (11.9)—(11.11). В доказательстве Гиро существенно используется его неопубликованный результат о полной непрерывности десятой степени оператора UK, входящего в интегральное уравнение Больцмана (11.17). Из леммы 2.1 следует компактность первой степени этого оператора для всех жестких потенциалов. Этот факт и сформулированные выше теоремы о решениях линейных стационарных задач позволяют получить оценки полугруппы $T(t)$ и применить их к исследованию нелинейных задач. В качестве примера такого применения рассмотрим задачу (11.9)—(11.11) при $\Phi^+ = \omega(1, 1, 0, \xi)$, $\mathscr{R}=0$. Полагая $f=\omega^{-1}(F-\omega)$, получаем следующую формулировку этой задачи

$$\frac{\partial}{\partial t} f = -Df + Lf + \Gamma(f, f), \quad t\in(0, T), \quad x\in\Omega, \qquad (11.40)$$

$$f^+ = 0, \quad t\in(0, T), \quad x\in S, \quad f = f_0, \quad t = 0, \quad x\in\Omega. \qquad (11.41)$$

Если Ω — ограниченная область с гладкой границей S, то следующая теорема верна для всех потенциалов, удовлетворяющих условиям (11.1), (11.2).

Теорема 4.5 ([11]). Существует положительная постоянная δ такая, что если $\|f_0|B_\infty(\Omega)\|<\delta$, то задача (11.40), (11.41) при всех T имеет единственное решение в $\hat{B}_\infty$. Это решение удовлетворяет условию

$$\sup_t \|f\,|\,B_\infty(\Omega)\|\exp\{\sigma t\}\leqslant C\|f_0\,|\,B_\infty(\Omega)\|$$

при некоторой положительной постоянной σ.

§ 5. О связи уравнения Больцмана с уравнениями гидродинамики

5.1. Постановка задачи. Исследование связи уравнения Больцмана с уравнениями гидродинамики — одна из классических проблем статистической физики. В работах Максвелла впервые появилась бесконечная цепочка уравнений для моментов больцмановской функции распределения и проблема обоснования уравнений гидродинамики была сформулирована как проблема замыкания этой цепочки. Из уравнения Больцмана и равенства (11.20) следует, что моменты $M_j = \int\limits_{R_3} \psi_j F d\xi$ ($j=0, 1, \ldots, 4$) должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} M_j = -\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} T_{\alpha j}, \quad T_{\alpha j} = \int\limits_{R^3} \xi_\alpha \psi_j F d\xi. \qquad (11.42)$$

Уравнения (11.42) — первые пять уравнений упомянутой выше цепочки. В гидродинамике эта цепочка уравнений замыкается с помощью законов Ньютона и Фурье, выражающих моменты $T_{\alpha j}$ через функции M_j и их пространственные производные. Следует ожидать, что в ситуациях, близких к равновесным, быстро происходит «приспособление» старших моментов, обеспечивающее возможность упрощенного описания. Однако, физическая и математическая природа этого процесса до сих пор не вполне ясна.

Одно из направлений исследований связано с изучением асимптотики решений уравнения Больцмана

$$\frac{\partial}{\partial t} F^\varepsilon + DF^\varepsilon = \varepsilon^{-1} J(F^\varepsilon, F^\varepsilon) \qquad (11.43)$$

с большим параметром ε^{-1} при интеграле столкновений, что соответствует гидродинамическому предельному переходу, описанному в главе 10, § 6. Если $F^\varepsilon \to F^0$ при $\varepsilon\to 0$, а левая часть уравнения (11.43) остается при этом предельном переходе ограниченной, то

$$J(F^0, F^0) = 0. \qquad (11.44)$$

При достаточно общих предположениях, из (11.44) следует, что F^0 — локальное максвелловское распределение. Параметры этого распределения однозначно определяются моментами M_j. Подстановка $F=F^0$ в уравнения (11.42) дает уравнения Эйлера.

Гильберт исследовал формальные степенные разложения $F^\varepsilon = \sum\limits_{i \geqslant 0} \varepsilon^n F_n$ решений уравнения (11.43). Оказывается, что любое решение, допускающее такое разложение, однозначно определяется моментами M_j. Плотности распределения, обладающие этим свойством, называются в физике нормальными решениями уравнения Больцмана. Грэд дал формальное описание связи нормальных решений с уравнениями гидродинамики и сформулировал ряд гипотез о связи произвольных решений задачи Коши с нормальными. В ситуациях, близких к равновесным, понятие нормального решения и гипотезы Грэда допускают уточнение (см. ниже).

5.2. Задача Коши. Исследуем задачу Коши для уравнения (11.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \varepsilon^{-1} B(f). \qquad (11,45)$$

$$B(f) = -\varepsilon D f + L f + \Gamma(f, f). \qquad (11.46)$$

При фиксированных x, t будем рассматривать f как элемент гильбертова пространства H, описанного в § 1. Пусть $P_0 f$ и Pf — проекции f, определенные равенствами (11.21). Гидродинамические параметры M_j однозначно определяются функцией $P_0 f$: $M_j = \delta_{j0} + (\psi_j, P_0 f)$. Следовательно, задачу «вывода» уравнений гидродинамики из уравнения Больцмана (и задачу замыкания моментных уравнений) можно сформулировать как задачу построения функции Pf при заданной функции $P_0 f$. Покажем, что эта задача действительно разрешима и опишем свойства ее решений.

Уравнение Больцмана эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_0 f &= -P_0 D P_0 f - P_0 D P f; \\ \frac{\partial}{\partial t} P f &= \varepsilon^{-1} P B (P_0 f + P f). \end{aligned} \qquad (11.47)$$

Сформулированная выше задача сводится к решению второго уравнения системы (11.47). Однако, удобней иметь дело с другим уравнением. Обозначим через $\tilde{f} \equiv \mathcal{F} f$ преобразование Фурье функции f по переменным x:

$$\tilde{f}(t, \xi, k) = \mathcal{F} f = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{R^m} \exp\{-ik \cdot x\} f(t, \xi, x)\, dx.$$

Зафиксируем достаточно малое число k_0 и обозначим через $\tilde{\chi}$ характеристическую функцию множества $\{k \in R^m \mid |k| \leqslant \varepsilon^{-1} k_0\}$. Положим

$$\chi f = \mathcal{F} \tilde{\chi} \tilde{f}, \quad \Pi_0 f = \chi P_0 f,$$
$$\Pi_1 f = f - \Pi_0 f, \quad f_j = \Pi_j f \quad (j = 0,1).$$

Система (11.47) эквивалентна системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0 = -\Pi_0 D f_0 - \Pi_0 D P f_1, \tag{11.48}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1 = \varepsilon^{-1} \mathcal{L} f_1 + \varepsilon^{-1} \Gamma (f_0 + f_1, f_0 + f_1) - \chi P_1 D f_0. \tag{11.49}$$

Оператор $\mathcal{L}$ определяется равенством

$$\mathcal{L} = L - \varepsilon \Pi_1 D.$$

Доказательство разрешимости уравнения (11.49) и более общего уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = \varepsilon^{-1} \mathcal{L} \varphi + \varepsilon^{-1} \Gamma (g + \varphi, g + \varphi) + \varepsilon^{-1} \Pi_1 (h - \varepsilon D g) \tag{11.50}$$

основано на следующей лемме. Положим

$$\hat{\mathcal{L}} = L - \varepsilon \hat{\Pi}_1 \hat{D}, \quad \hat{D} = i k \cdot \zeta, \quad \hat{\Pi}_1 = P + (1 - \tilde{\chi}) P_0.$$

Лемма 5.1. Оператор $\hat{\mathcal{L}}$ при каждом k порождает в H сильно непрерывную полугруппу, обладающую следующими свойствами:

$$\| \exp (t \varepsilon^{-1} \hat{\mathcal{L}}) | H \| \leqslant C \exp \{ -c t \varepsilon^{-1} \},$$
$$\| \exp (t \varepsilon^{-1} \hat{\mathcal{L}}) f - \exp \{ t \varepsilon^{-1} \hat{A} \} f \mid L_\infty (R^3, \varphi_r) \| \leqslant$$
$$\leqslant C \exp \{ -c_1 \varepsilon^{-1} t \} \| f \mid L_\infty (R^3, \varphi_{r-1}) \|.$$

Здесь C, c, c_1 — положительные постоянные, не зависящие от k, ε,

$$\varphi_r = \omega^{-1/2} (1 + |\xi|)^r, \quad \hat{A} = -\nu - \varepsilon \hat{D},$$

функция ν определяется равенством $\nu = Q(\omega)$ (см. § 1).

Обозначим через $X \equiv X_{r,l}$ банахово пространство функций с нормой

$$\| f \mid X \| = \sup_{\xi} \varphi_r (\xi) \| f (\xi, \cdot) | W_2^l \| \quad (l \geqslant 2, r > 3),$$

через $Y \equiv C([0, T], X)$ — пространство непрерывных на $[0, T]$ функций со значениями в X. Будем искать решения уравнения (11.50) в шаре

$$S_1 = \{ \varphi \in Y \mid \| \varphi | Y \| \leqslant a_1 \}$$

при заданных значениях $\varphi(0)$, g, h из шара

$$S_0 = \{ (\varphi(0), g, h) \in X \times Y \times Y \mid \| \varphi(0) | X \|^2 + \| g | Y \|^2 + \| h | Y \|^2 \leqslant a_0^2 \}.$$

Через V будем обозначать оператор, сопоставляющий точке $(\varphi(0), g, h)$ решение уравнения (11.50) $\varphi = V(\varphi(0), g, h)$.

Теорема 5.1. Существуют положительные числа a_0, a_1 такие, что при любых ε и T уравнение (11.50) имеет единственное решение в шаре S_1. Оператор V удовлетворяет следующим условиям равномерно по ε, T:

$$\begin{gathered} \| V(u_1, g, h) - V(u_2, g, h) \,|\, X \| \leqslant \\ \leqslant C_1 \exp\{-c_1 \varepsilon^{-1} t\} \| u_1 - u_2 \,|\, X \|, \qquad (11.51) \\ \| V(u, g_1, h_1) - V(u, g_2, h_2) | Y \| \leqslant C_2 \| g_1 - g_2 \,|\, Y \| + C_3 \| h_1 - h_2 \,|\, Y \| \\ ((u_j, g, h) \in S_0;\ (u, g_j, h_j) \in S_0). \end{gathered}$$

Здесь C_j — положительные постоянные, зависящие от a_0, причем $C_2 \to 0$ при $a_0 \to 0$.

Из оценки (11.51) следует, что решения уравнения (11.49) при любых начальных данных экспоненциально быстро приближаются к решению $V(0, f_0, 0)$, зависящему только от длинноволновой компоненты гидродинамических функций. Решения уравнения Больцмана $f \equiv f(f_0) = f_0 + V(0, f_0, 0)$ естественно считать нормальными. Их отличие от обычно рассматриваемых нормальных решений состоит в том, что оператор V нелокален: для вычисления $f(f_0)$ в точке x, t нужно знать значения f_0 в $R^3 \times [0, t]$. Однако при малых ε вне «начального слоя» оператор PV хорошо аппроксимируется локальным. Действительно, рассмотрим формальное разложение

$$Pf = \sum_{n \geqslant 0} \varepsilon^j g^{(j)}, \quad P_0 g^{(j)} = 0. \qquad (11.52)$$

Функции $g^{(j)}$ должны удовлетворять уравнениям

$$Lg^{(0)} + \Gamma(P_0 f + g^{(0)},\ P_0 f + g^{(0)}) = 0, \qquad (11.53)$$

$$\bar{L} g^{(1)} = \frac{d}{dt} g^{(0)} + PDP_0 f, \qquad (11.54)$$

$$\bar{L} g^{(m)} = \frac{d}{dt} g^{(m-1)} + \sum_{j=1}^{m-1} \Gamma(g^{(j)},\ g^{(m-j)})\,(m > 1). \qquad (11.55)$$

Входящие в эти уравнения операторы $\bar{L}$ и $\frac{d}{dt}$ определяются равенствами

$$\bar{L} f = Lf + 2\Gamma(P_0 f + g^{(0)},\ f),\ \frac{d}{dt} f = \frac{\partial}{\partial t} Pf + PDf.$$

Уравнение (11.53) отличается только обозначениями от уравнения (11.44) с $F^0 = \omega(1 + P_0 f + g^{(0)})$. Следовательно, F^0 — локальное максвелловское распределение с параметрами $M_j = \delta_{j0} + (\psi_j, P_0 f)$. Линейные интегральные уравнения для функций $g^{(m)}$ $(m \geqslant 1)$ при достаточно хороших правых частях однозначно разрешимы в PH (эти уравнения легко сводятся к уравнениям вида $2J(F^0, F^0 g) = h$, подробно исследованным в работах Гильберта, Карлемана и Грэда).

Положим

$$G^{(m)} = \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon^j g^{(j)}.$$

Функция $\varphi = G^{(m)} + \Pi_1 P_0 f$ является решением уравнения (11.50) при $g = f_0$, $h = h_1 + \varepsilon P_0 D(G^{(m)} - Pf)$,

$$h_1 = \varepsilon^m \left\{ Lg^{(m)} + 2\Gamma(f_0, g^{(m)}) - \sum_{j=m+1}^{2m-2} \sum_{l=j+1-m}^{m-1} \Gamma(g^{(l)}, g^{(j-l)}) \right\}.$$

Следовательно, функция Pf допускает представление

$$Pf = G^{(m)} + \Phi^{(m)} + R^{(m)}, \tag{11.56}$$

$$\Phi^{(m)} = P[V(f_1(0), f_0, 0) - V(G^{(m)}(0), f_0, 0)],$$

$$R^{(m)} = P[V(G^{(m)}(0), f_0, 0) - V(G^{(m)}(0), f_0, h)].$$

В силу теоремы 5.1 имеем

$$\|\Phi^{(m)} \mid X\| \leqslant C \exp\{-c_1 \varepsilon^{-1} t\} \|f_1(0) - G^{(m)}(0) \mid X\|, \tag{11.57}$$

$$\|R^{(m)} \mid Y\| \leqslant \varepsilon^m Z, \tag{11.58}$$

$$Z = \sum_{j=0}^{m} \left\| |k|^{m-j} (1 + |\xi|)^{m-j} \frac{\partial^j}{\partial t^j} \tilde{f}_0 \mid Y \right\| + \\ + \|(1 + |k|)^m (1 + |\xi|)^m \tilde{f}_1(0) \mid X\|.$$

Уравнение (11.48) вместе с соотношением $f_1 = V(f_1(0), f_0, 0)$ дает систему уравнений для гидродинамических функций χM_j, эквивалентную уравнению Больцмана:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0 = -\Pi_0 D f_0 - \Pi_0 D P_1 V(f_1(0), f_0, 0).$$

Соотношение (11.56) позволяет записать эту систему в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0 = -\Pi_0 D(f_0 + G^{(m)}) - \Pi_0 D \Phi^{(m)} - \Pi_0 D R^{(m)}. \tag{11.59}$$

В силу оценок (11.57) и (11.58) третий член правой части этих уравнений имеет порядок ε^m, а второй убывает со скоростью $\exp\{-c_1 \varepsilon^{-1} t\}$. Отбросив эти два члена и заменяя Π_0 на P_0, мы получим из (11.59) при $m = 1$ уравнения Эйлера, а при $m = 2$ — уравнения Навье—Стокса.

Пусть f — решение задачи Коши для уравнения (11.45) с начальными данными из X. Из приведенных оценок следует, в частности, что моменты $\langle \psi_j, P_0 f \rangle$ сходятся слабо в $L_2([0, T], W_2^l)$ к решению уравнений Эйлера, если

$$\sup_{\varepsilon} \|f \mid Y\| < \infty. \tag{11.60}$$

Однако, теоремы, сформулированные в § 4, гарантируют выполнение условия (11.60) только для малых возмущений $\|f(0)\,|X\| \leqslant C\varepsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

Результаты о существовании, единственности и свойствах решений различных задач для уравнения Больцмана, полученные к 1978 году, отражены в работе [5]. Новые результаты содержатся в статьях отечественных [2]—[4], [8]—[14], [20] и зарубежных [29], [31] авторов. Особо отметим классические работы Грэда [23]—[25], послужившие отправной точкой многих современных исследований.

1. *Бобылев А. В.*, О точных решениях уравнения Больцмана. Докл. АН СССР, 1975, *225*, № 6, 1296—1299
2. —, Асимптотические свойства решений уравнения Больцмана. Докл. АН СССР, 1981, *261*, № 5, 1099—1104
3. *Веденяпин В. В.*, Анизотропные решения нелинейного уравнения Больцмана для максвелловских молекул. Докл. АН СССР, 1981, *256*, № 2, 338—342
4. *Гейнц А. Г.*, О разрешимости граничной задачи для нелинейного уравнения Больцмана. Аэродинамика разреж. газов, 1980, *10*, 16—24
5. *Маслова Н. Б.*, Теоремы о разрешимости нелинейного уравнения Больцмана. Дополнение II к кн.: Черчиньяни К., Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978, 461—480; русский перевод книги: *Cercignani C.*, Theory and applications of the Boltzmann equation. Edinburgh—London, Scottish Academic Press, 1975, 450 pp.
6. —, Стационарные задачи для уравнения Больцмана при больших числах Кнудсена. Докл. АН СССР, 1976, *229*, № 3, 593—596
7. —, Разрешимость стационарных задач для уравнения Больцмана при больших числах Кнудсена. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1977, *17*, № 4, 1020—1030
8. —, Стационарные решения уравнения Больцмана и граничный слой Кнудсена. Аэродинамика разреж. газов, 1980, *10*, 5—15
9. —, Стационарные решения уравнения Больцмана в неограниченных областях. Докл. АН СССР, 1981, *260*, № 4, 844—848
10. —, Стационарные краевые задачи для нелинейного уравнения Больцмана. Зап. научн. семинаров ЛОМИ. Л., Наука, 1981, *110*, 100—104
11. —, Глобальные решения нестационарных кинетических уравнений. Зап. научн. семинаров ЛОМИ. Л., Наука, 1982, *115*, 169—177
12. —, Задача Крамерса в кинетической теории газов. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1982, *22*, № 3, 700—709
13. —, Стационарные решения линеаризированного уравнения Больцмана. Труды Мат. ин-та АН СССР, 1983, *16*, 41—60
14. —, Внешние стационарные задачи для линеаризированного уравнения Больцмана. Аэродинамика разреж. газов, 1983, *11*, 143—165
15. —, *Фирсов А. И.*, Решение задачи Коши для уравнения Больцмана. I. Теорема существования и единственности. Вестн. ЛГУ, 1975, № 19, 83—88
16. —, —, Решение задачи Коши для уравнения Больцмана. II. Оценки решений неоднородного линеаризированного уравнения. Вестн. ЛГУ, 1976, № 1, 109—113
17. —, *Чубенко Р. П.*, Предельные свойства решений уравнения Больцмана. Докл. АН СССР, 1972, *202*, № 4, 800—803
18. —, —, Оценки интеграла столкновений. Вестн. ЛГУ, 1973, № 13, 130—137
19. —, —, Релаксация в одноатомном пространственно-однородном газе. Вестн. ЛГУ, 1976, № 13, 90—97
20. —, —, О решениях нестационарного уравнения Больцмана. Вестн. ЛГУ, 1973, № 19, 100—103
21. *Повзнер А. Я.*, Об уравнении Больцмана в кинетической теории газов. Мат. сб., 1962, *58*, № 1, 62—86

22. *Фирсов А. Н.*, Об одной задаче Коши для нелинейного уравнения Больцмана. Аэродинамика разреж. газов, 1976, *8*, 22—36
23. *Grad H.*, High frequency sound according to the Boltzmann equation. SIAM J. Appl. Math., 1966, *14*, № 4, 935—955
24. —, Asymptotic theory of the Boltzmann equation. II. Rariefied Gas Dynamics, 1969, *1*, 25—59
25. —, Singular and nonuniform limits of solutions of the Boltzmann equation. SIAM AMS Proc., 1969, *1*, 269—308
26. *Guiraud J. P.*, Probleme aux limites interieur pour l'equation de Boltzmann en regime stationnaire, faiblement non lineaire. J. Mech., 1972, *11*, № 2, 183—231
27. —, An *H*-theorem for a gas of rigid spheres in a bounded domain. Colloq. in CNRS, 1975, № 236, 23—56
28. —, The Boltzmann equation in kinetic theory. A survey of mathematical results. Fluid Dynamic Transactions, 1976, 7, Part II, 37—84
29. *Kawashima S.*, *Matsumura A.*, *Nishida T.*, On the fluid dynamical approximation to the Boltzmann equation at the level of the Navier-Stokes equation. Commun. Math. Phys., 1979, *70*, № 2, 97—124
30. *Ukai S.*, On the existence of global solutions of mixed problem for nonlinear Boltzmann equation. Proc. Jap. Acad., 1974, Ser. A, *50*, 179—184
31. —, *Asano K.*, On the Cauchy problem of the Boltzmann equation with a soft potential. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 1982, *18*, 57—99

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОПЕЧАТКИ

Соврем. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 2, 1985 г.

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
9	20 сверху	$(M, \mathfrak{M}, \mu)$	$(M, \mathscr{M}, \mu)$
38	24 снизу	$L^2(M, \mathfrak{M}, \mu)$	$L^2(M, \mathscr{M}, \mu)$
83	6 снизу	$(M, \mathfrak{M}, \mu)$	$(M, \mathscr{M}, \mu)$
109	25 снизу	Classifcation	Classification
135	10 снизу	(см. [13]),	(см. [13])),
160	11 сверху	$\ldots \|v_y\|^{-1}$	$\ldots \|v_y\|)^{-1}$
187	9 снизу	что рассеивающих	что для рассеивающих
301	17 снизу	$\int\limits_{R_3}$	$\int\limits_{R^3}$
303	15 сверху	$\ldots = ik \cdot \dot{\xi}$	$\ldots = ik \cdot \xi$

Зак. 8951

УДК 517.987+519.218.84

А. М. Вишик, И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, **Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой. I.** «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 2. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1985, 5—111

Изложение начинается с выделения основных понятий и наиболее распространенных примеров эргодической теории. Дальше следуют спектральная и энтропийная теория динамических систем. В двух последних главах рассматриваются эргодическая теория динамических систем с многомерным временем и теория неизмеримых разбиений, порожденных эргодическими действиями групп.

Подробная библиография (110 наименований) поможет читателю получить полное представление по заинтересовавшим его вопросам.

УДК 517.938+517.987

Л. А. Бунимович, Я. Б. Песин, Я. Г. Синай, М. В. Якобсон, **Эргодическая теория гладких динамических систем. II.** «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том. 2. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1985, 113—231

Вначале кратко излагается иерархия стохастических свойств динамических систем. Затем следует подробная теория динамических систем со свойствами гиперболичности, включая термодинамический формализм и размерностные характеристики аттракторов. Подробно описываются системы с разрывами такие, как биллиарды, аттрактор Лоренца и др. В последней главе рассматривается теория динамических систем, порожденных одномерными отображениями и рациональными отображениями сферы Римана. Библ. 103.

УДК 519.248.2

Р. Л. Добрушин, Н. Б. Маслова, Я. Г. Синай, Ю. М. Сухов, **Динамические системы статистической механики и кинетические уравнения. III.** «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том. 2. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1985, 233—307

В главе 10 рассматривается своеобразный класс динамических систем, возникающих при изучении временной эволюции статистической механики. Специфика этого класса связана с бесконечным числом «равноправных» степеней свободы в фазовом пространстве.

Для таких систем нетривиальна уже задача их построения. Для обоснования статистической механики чрезвычайно важен вопрос о естественных инвариантных мерах и эргодических свойствах соответствующих динамических систем. Обсуждается также вопрос о связи динамических систем статистической механики с кинетическими и гидродинамическими уравнениями. Библ. 118.

Глава 11 посвящена обзору современных результатов о разрешимости краевых задач для уравнения Больцмана. Библ. 31.

ОГЛАВЛЕНИЕ

(соответствует рубрикам 27.29.17.19; 27.39.25; 27.43.51.17 Рубрикатора ГАСНТИ)

Технический редактор *А. М. Мартынова*

Сдано в набор 23.11.84 Подписано в печать 12.04.85
Формат бумаги 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 1 Литературная гарнитура
Высокая печать. Усл. печ. л. 19,5 Усл. кр.-отт. 19,75 Уч.-изд. л. 19,83
Тираж 3500 Заказ 8951 Цена 2 р. 60 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-42-41

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

Индекс 56848

НТИ «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», т. 2, 1985, 1—312

2р. 60к.