# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

ВИНИТИ

## СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

### Фундаментальные направления

ТОМ 23

РГАСНТИ 27.17.33; 27.19.21

ISSN 0233—6723

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

## Фундаментальные направления

### Том 23

Научный редактор и составитель
член-корреспондент АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1985 г.

МОСКВА 1988

1—5834 4

УДК 512.7+512.772+515.17.32

# АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — 1

Консультирующий редактор-составитель
член-корреспондент АН СССР *И. Р. Шафаревич*

Рецензент
доктор физико-математических наук *А. Н. Тюрин*

Научный редактор тома *И. А. Сирмай*

Авторы
*В. И. Данилов, В. В. Шокуров*

УДК 512.772+515.173.2

# РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

*В. В. Шокуров*

## СОДЕРЖАНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ[1]

«Риманова поверхность» — редкий термин, полностью согласующийся с исторической справедливостью: все основные идеи, связанные с этим понятием, принадлежат Риману. Центральная из них заключается в том, что аналитическая функция комплексного переменного определяет некоторое естественное множество, на котором ее следует рассматривать и которое может не совпадать с областью плоскости комплексного переменного, где функция первоначально задана. Такое естественное множество определения функции может не вмещаться в плоскость комплексного переменного $\mathbf{C}$, но быть более сложной поверхностью, которую надо специально конструировать по функции: это и есть риманова поверхность функции. Только рассмотрение функции на всей ее римановой поверхности дает

[1] Автор выражает глубочайшую признательность И. Р. Шафаревичу за многочисленные замечания и предложения, способствовавшие улучшению текста, а также за написанное им введение — визитную карточку всей тематики алгебраической геометрии.

полную ее картину. В частности, риманова поверхность обладает нетривиальной геометрией, которая определяет некоторые фундаментальные характеристики функции.

Зародыш сформулированной точки зрения можно видеть во введении расширенной плоскости комплексного переменного путем присоединения бесконечно удаленной точки. Расширенная плоскость топологически является двумерной сферой и называется также римановой сферой. Уже на этом примере можно увидеть черты, характерные для общего понятия римановой поверхности. 1) Риманова сфера $\mathbf{CP}^1$ может быть определена путем склеивания двух дисков (т. е. кругов) в комплексной плоскости: например, дисков $|z|<2$ и $|w|<2$, в которых кольца $1/2<|z|<2$ и $1/2<|w|<2$ отождествляются при помощи соответствия $w=z^{-1}$ и дают заштрихованную область на рис. 1. 2). Соответствие $w=z^{-1}$ определяющее склеивание, является взаимно однозначным и аналитическим (конформным) соответствием отождествляемых областей. Именно благодаря этому свойство функции быть аналитической в некоторой точке, в обоих кругах $|z|<2$ и $|w|<2$ согласовано на

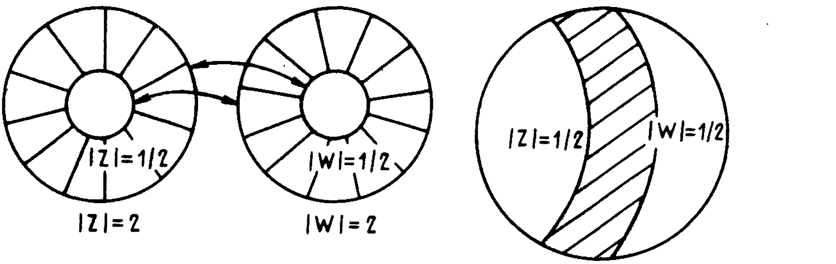



Рис. 1

отождествляемых областях и дает единое понятие аналитической функции на склеенной из них римановой сфере. Поэтому становится возможным сформулировать и доказать такие теоремы как: «функция, голоморфная на всей римановой сфере, является константой» или «функция, не имеющая на римановой сфере других особенностей кроме полюсов, является рациональной функцией».

На тех же принципах основывается и общее понятие римановой поверхности. Мы будем рассматривать только компактные римановы поверхности. По определению это замкнутая (компактная) поверхность $S$, склеенная из конечного числа дисков $U_1, \ldots, U_m$ в плоскости комплексного переменного, причем в дисках $U_i$ и $U_j$ отождествляются области $V_{ij} \subset U_i$ и $V_{ji} \subset U_j$ при помощи соответствия $\varphi_{ij} : V_{ij} \to V_{ji}$, которое взаимнооднозначно и аналитично.

Иными словами, риманова поверхность есть объединение множеств $U_1, \ldots, U_N$, в каждом из которых введена координата $z_i$ ($i=1, \ldots, N$), взаимно-однозначно отображающая $U_i$ на диск комплексной плоскости, а в пересечениях $V_{ij}=U_i \cap U_j$ координата $z_j$ выражается через $z_i$ как аналитическая функция и так же $z_i$ через $z_j$.

Как и в случае римановой сферы, это дает возможность непротиворечиво определить, когда непрерывная комплексно-значная функция, заданная в окрестности некоторой точки $p \in S$, называется аналитической и перенести на функции, заданные на поверхности $S$ такие понятия как полюс, мероморфность и т. д. Можно сказать, что риманова поверхность — это такое множество, на котором имеет смысл говорить об аналитичности функций, причем локально (в достаточно малой области) это понятие сводится к обычной аналитичности в области плоскости комплексного переменного. Детальное разъяснение этого определения содержится в § 1.

Таким образом, в понятии римановой поверхности мы сталкиваемся с объектом новой математической природы. Это понятие надо рассматривать в одной плоскости с такими, как риманово многообразие в геометрии или поле в алгебре. Как в римановом многообразии определены метрические понятия, а в поле — алгебраические операции, так на римановой поверхности — понятие аналитической функции. В частности, теперь можно сформулировать и доказать теорему о том, что функция, голоморфная на всей (компактной) римановой поверхности, — константа.

Вся нетривиальность понятия римановой поверхности проявляется в его связи с теорией многозначных аналитических функций — для каждой такой функции можно построить риманову поверхность, на которой функция будет однозначной. Мы ограничимся алгебраическими функциями — соответствующие им римановы поверхности компактны.

Самый простой случай функции $w=\sqrt[n]{z}$ еще не требует введения поверхности нового типа: в этом случае $z=w^n$, так что, хотя $w$ — многозначная функция $z$, но $z$ — однозначная функция $w$. Поэтому $w$ можно рассматривать как независимую переменную, меняющуюся на римановой сфере $S$ — она и будет римановой поверхностью функции $w$. Соотношения $z=w^n$ определяет отображение $w$-сферы $S$ на $z$-сферу $\mathbf{CP}^1$. При этом представляют себе, что сфера $S$ расположена «над» $\mathbf{CP}^1$ (в каком-то большем пространстве) так, что над каждой точкой $z=z_0$ расположены точки, отображающиеся в нее. Тогда при $z_0 \neq 0, \infty$ круг $U: |z-z_0|<\varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon$ имеет на $S$ в качестве прообраза $n$ непересекающихся областей $W_i$, $i=1, \ldots, n$; $w=w_i g(t)$, $|t|<\frac{\varepsilon}{|z_0|}$, $g(t)=\sqrt[n]{1+t}$, $g(0)=1$,

$t=\frac{z}{z_0}-1$, где $w_i$ — различные значения $\sqrt[n]{z_0}$ (рис. 2а). В окрестности же точки 0 (или $\infty$) прообраз диска $|z|<\varepsilon$ (или $|t|<\varepsilon$ при $t=z^{-1}$) составляет один круг $W:|w|<\sqrt[n]{\varepsilon}$, расположение которого над кругом имеет характер «винта» (рис. 2б) при $n=2$.

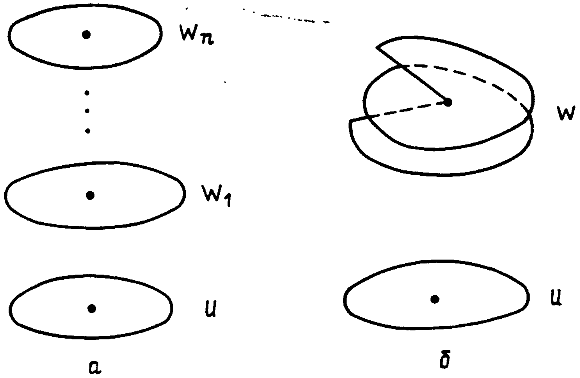



Рис. 2

В общем случае алгебраическая функция определяется уравнением $f(z, w)=0$, где $f(z, w)$ — многочлен $f(z, w)= =a_0(z)w^n+\ldots+a_n(z)$, $a_i(z)$ — многочлены от $z$. В качестве первого, грубого приближения к римановой поверхности функции $w$ рассмотрим множество $\tilde{S}$ всех решений $(z, w)$ уравнения $f(z, w)=0$. На нем $w$ тавтологически является функцией, принимающей в точке $(w_0, z_0)$ значение $w_0$. Однако такое определение потребует уточнения. Мы будем считать, что $\tilde{S}\subset\mathbf{C}^2$, где $\mathbf{C}^2$ — плоскость двух комплексных переменных $z$, $w$, и топология $\tilde{S}$ наследуется от $\mathbf{C}^2$. Иначе говоря, $\tilde{S}$ — это комплексная алгебраическая кривая, расположенная в плоскости $\mathbf{C}^2$.

Пусть сначала $z_0$ — таково, что уравнение $f(z_0, w)=0$ имеет $n$ различных корней: $w_1, \ldots, w_n$. Это значит, что $a_0(z_0)\neq 0$ и $f'_w(z, w)\neq 0$. Тогда, по теореме о неявных функциях, $w$ является аналитической функцией $g_i(z)$ от $z$ в окрестности $|z-z_0|<\varepsilon$ точки $z_0$. Точнее говоря, все решения уравнения $f(w, z)=0$, близкие к $(z_0, w_i)$, представляются в виде $(z, g_i(z))$, $i=1, \ldots, n$, т. е. решения, для которых $|z-z_0|<\varepsilon$ распадаются на $n$ дисков $W_i$; $i=1, \ldots, n$; $|z-z_0|<\varepsilon$, $w=g_i(z)$, так же, как на рис. 2а. Мы называем их дисками, т. к. они взаимно

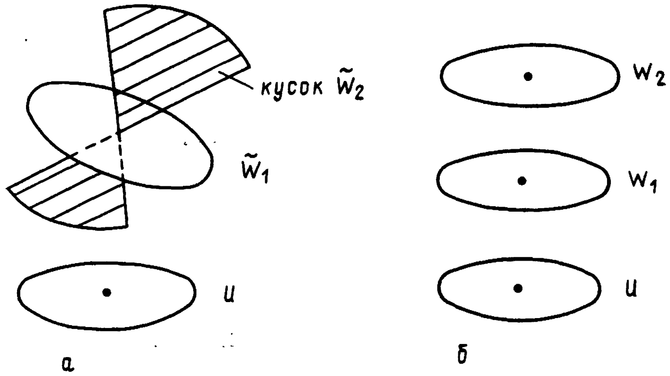



Рис. 3

однозначно, при помощи функции $z$, отображаются на диск $U:|z-z_0|<\varepsilon$.

Остается рассмотреть исключенные нами случаи, когда число решений уравнения $f(z_0, w)=0$ меньше $n$, а также случай $z_0=\infty$ на римановой сфере $\mathbf{CP}^1$. Во всех этих случаях существует такой круг $U:|z-z_0|<\varepsilon$ (при $z_0=\infty$, круг $|t|<\varepsilon$, $t=z^{-1}$), что для точек $z\in U$, $z\neq z_0$ имеет место ранее уже рассмотренный случай. Обозначим через $\tilde{U}$ проколотый круг $U:|z-z_0|<\varepsilon$, $z\neq z_0$, а через $\tilde{W}$ — его прообраз в $\tilde{S}$. Множество $\tilde{W}$ может оказаться не связным. Тривиальным образом, если уравнение $f(z_0, w)=0$ имеет два разных решения $w_i$ и $w_j$, то их маленькие окрестности в $\tilde{S}$ не пересекаются и дают разные связные компоненты множества $\tilde{W}$ — как множества $W_1, \ldots, W_n$ на рис. 2а. Но существуют менее тривиальные случаи, когда разные компоненты связности множества $\tilde{W}$ сходятся в одной и той же точке множества $\tilde{S}$. Идея и заключается в том, что на самом деле эти компоненты должны определять разные точки риманой поверхности $S$ функции $w$: в $S$ их надо «развести». Например, если $w^2=z^2+z^3$, то $w=z\sqrt{1+z}$ и в окрестности $z_0=0$ функция $\sqrt{1+z}$ имеет две ветви $g_1(z)$ и $g_2(z)=-g_1(z)$, так, что $\tilde{W}$ состоит из двух компонент: $\tilde{W}_1:\{|z|<\varepsilon,\ z\neq 0,\ w=zg_1(z)\}$ и $W_2=\{|z|<\varepsilon,\ z\neq 0,\ w=zg_2(z)\}$, сливающихся при $z=0$ (рис. 3а).

В общем случае обозначим через $\tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_r$ связные компоненты множества $\tilde{W}$. Риманова поверхность $S$ определяется так, что все $\tilde{W}_i$ (при $i\neq j$) лежат в ней «отдельно» — их замыкания при $z\to z_0$ не пересекаются. Теоретико-множественно $S$

отличается от $\tilde{S}$ тем, что над точкой $z_0$ лежит теперь $r$ разных точек — каждая соответствует своей компоненте $\tilde{W}_i$. Точнее говоря, каждое $\tilde{W}_i$ является связным неразветвленным накрытием проколотого диска $\tilde{U}$: над каждой точкой $z \in \tilde{U}$ лежит одно и то же число $n_i$ точек из $\tilde{W}_i$, причем $n_1 + \ldots + n_r = n$. Нетрудно доказать, что на каждом $\tilde{W}_i$ можно определить такую функцию $w_i$, что $\tilde{W}_i$ задается как проколотый диск $|w_i| < \varepsilon^{1/n_i}$, $w_i \neq 0$, и отображение $\tilde{W}_i \to \tilde{U}$ определяется как $z - z_0 = w_i^{n_i}$. Мы можем тогда рассмотреть непроколотый диск $W_i: |w_i| < \varepsilon^{1/n_i}$. Разные диски $W_i$ рассматриваются как непересекающиеся множества в римановой поверхности $S$ (см. рис. 3б). Каждый из них функцией $w_i$ отображается на диск комплексной плоскости, а над римановой $z$-сферой они располагаются как на рис. 2б.

Из всех построенных нами дисков $W_i$, лежащих над разными точками $z_0 \in \mathbf{CP}^1$ (включая $z_0 = \infty$) можно выбрать такое конечное число $W_1, \ldots, W_N$, что в объединении их все остальные уже содержатся. Из аналитичности всех встречавшихся отображений легко вывести, что склейка кругов $W_1, \ldots, W_N$ удовлетворяет условию, входящему в определение римановой поверхности, т. е. $S$ действительно является римановой поверхностью. Детальное обоснование этой конструкции содержится в § 2 гл. 1.

Произвольная риманова поверхность несет в себе громадную геометрическую информацию, которая, в частности, в случае римановой поверхности алгебраической функции, дает важные характеристики этой функции. Ввиду того, что склейки $\varphi_{ij}$ являются конформными, а значит, сохраняющими ориентацию преобразованиями, риманова поверхность ориентируема, поэтому с топологической точки зрения, такая поверхность обладает единственным инвариантом — родом. На рис. 4 изображены поверхности рода $g=0, 1, 2, 3, 4$.

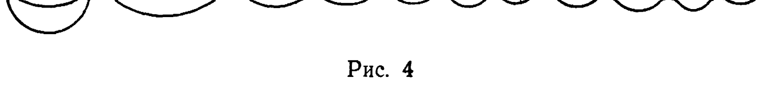


Рис. 4

Например, если многочлен $f(z)$ не имеет кратных корней, то риманова поверхность функции $w = \sqrt{f(z)}$ имеет род $n-1$, если степень многочлена $f$ равна $2n$ или $2n-1$. Но, более того, на римановой поверхности могут быть определены все понятия, инвариантные относительно конформных преобразований — она обладает «конформной геометрией». К числу таких понятий относится оператор Лапласа и гармоническая функция. В частности, вещественная и мнимая части функции, аналитической в некоторой области римановой поверхности — гармоничны. Это дает возможность применить к изучению функций на римановых поверхностях аппарат эллиптических дифференциальных операторов и даже некоторую физическую интуицию. Гармоническую функцию на римановой поверхности можно представлять себе как описание стационарного состояния некоторой физической системы: например, распределения температуры, если риманова поверхность является однородным проводником. Клейн (следуя Риману) представлял это себе очень наглядно:

«Это легко осуществить, обложив рассматриваемую риманову поверхность станиолем... Пусть в точках $A_1$ и $A_2$ будут помещены полюсы гальванической батареи определенного напряжения. Возникает ток, потенциал которого $u$ однозначен, непрерывен и удовлетворяет уравнению $\Delta u=0$ на всей поверхности, кроме точек $A_1$ и $A_2$, являющихся точками разрыва функции» (Лекции о развитии математики в XIX столетии. М., 1937, стр. 302).

Существование функций, которое подсказывает такие физические соображения, устанавливается на основе теории эллиптических уравнений в частных производных. Это дает совершенно новый метод конструирования аналитических функций на римановой поверхности: после того, как построена гармоническая функция $u$, к ней подбирается сопряженная функция $v$ так, чтобы $u+iv$ была аналитической.

Таким образом, удается, в частности, описать запас всех мероморфных функций на произвольной римановой поверхности $S$. Если $S$ является римановой поверхностью алгебраической функции $w$, определенной уравнением $f(z, w)=0$, то и $w$ и $z$ — мероморфные функции на $S$. Поэтому мероморфной является любая рациональная функция от $w$ и $z$. Нетрудно доказать, что так получаются все мероморфные функции на $S$ — это обобщение теоремы о том, что функция, мероморфная на римановой сфере, является рациональной функцией от $z$. Для произвольной же римановой поверхности совершенно не очевидно существование хоть одной непостоянной мероморфной функции. Такая функция строится методами теории эллиптических уравнений в частных производных, как было сказано выше. Более того, на том же пути удается построить такие две мероморфные функции $w$ и $z$ на $S$, связанные соотношением $f(z, w)=0$, где $f$ — многочлен, что $S$ совпадает с римановой поверхностью алгебраической функции $w$, определенной уравнением $f=0$, это так называемая «теорема существования Римана».

Таким образом, абстрактное понятие римановой поверхности (компактной) совпадает с понятием римановой поверхности алгебраической функции. Это очень нетривиальный результат, имеющий сильные применения, т. к. в ряде конкретных ситуаций возникает именно «абстрактная» риманова поверхность, и предшествующая теорема дает тогда ее очень явную реализацию. Простейший пример подобной ситуации, когда $S$ — факторгруппа $\mathbf{C}/\Lambda$ плоскости комплексного переменного $\mathbf{C}$ по решетке $\Lambda=\{\omega_1 n_1+\omega_2 n_2;\ n_1,\ n_2 \in \mathbf{Z}\}$, порожденной двумя комплексными числами $\omega_1$ и $\omega_2$. Любой круг $U$, достаточно малый, чтобы никакие две его разные точки не отличались на вектор из решетки $\Lambda$, отображается при помощи координаты $z$ на $\mathbf{C}$ взаимно однозначно на область в $S=\mathbf{C}/\Lambda$ (рис. 5). Такие круги покрывают $S$. Топологически $S$ является тором, т. е. имеет род 1. Теорема существования Римана показывает, в данной ситуации, что $S$ является римановой по-

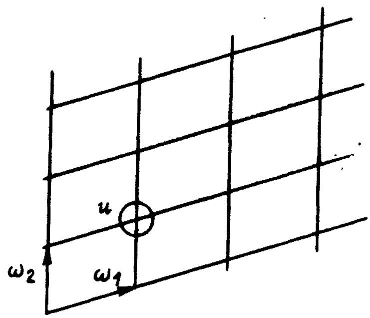



Рис. 5

верхностью алгебраической функции $w=\sqrt{z^3+az+b}$, где $a$ и $b$ — некоторые комплексные числа, а многочлен $z^3+az+b$ не имеет кратных корней. Можно показать, что любая риманова поверхность рода 1 может быть так получена. Мероморфные функции на $S$ при этом интерпретируются как мероморфные функции переменной $z$, инвариантные относительно сдвигов на векторы решетки $\Lambda$, т. е. эллиптические функции. Теорема существования Римана дает в этом случае очень явное описание поля эллиптических функций.

Подобное описание возможно и для римановых поверхностей рода $g>1$: надо рассматривать дискретные группы дробно-линейных преобразований, действующие в круге $|z|<1$, и отождествлять точки, переводящиеся друг в друга преобразованиями такой группы $\Gamma$. Таким образом, риманова поверхность представляется в виде фактора $\Gamma\backslash D$, где $D$ — единичный диск. Как плоскость $\mathbf{C}$ в случае поверхностей рода 1, так и единичный диск в случае поверхностей рода $g>1$ является универсальной накрывающей римановой поверхности $S$.

В случае $g=0$, $S$ совпадает с римановой сферой и является своей универсальной накрывающей. На плоскости $\mathbf{C}$ евклидова метрика $ds^2=|dz|^2$ инвариантна относительно преобразований группы $\Lambda$ и определяет метрику нулевой кривизны на поверхности $S$. Аналогично, в единичном круге метрика $ds^2=|dz|^2/(1-|z|^2)$ определяет геометрию Лобачевского постоянной отрицательной кривизны, а тем самым аналогичную метрику и на поверхности $S=\Gamma\diagdown D$. Наконец, на сфере $\mathbf{CP}^1$ существует метрика постоянной положительной кривизны. Во всех трех случаях эти метрики задают «конформную геометрию» римановой поверхности $S$. Таким образом, свойства римановых поверхностей в зависимости от их топологии можно свести в следующую таблицу:

| Род | Тип универсальной накрывающей | Метрика постоянной кривизны $k$ |
|---|---|---|
| 0 | Риманова сфера $\mathbf{CP}^1$ | $k>0$ |
| 1 | $\mathbf{C}$ | $k=0$ |
| $>1$ | $D=\{z, \lvert z\rvert<1\}$ | $k<0$ |

Из приведенной таблицы видно, что на любой римановой поверхности $S$ можно определить метрику $ds^2$ постоянной кривизны $K$, задающую конформную геометрию поверхности. Но и наоборот, произвольная метрика $ds^2=Edx^2+2Fdxdy+Gdy^2$ на компактной ориентируемой поверхности $S$ определяет на ней структуру римановой поверхности. Именно, как можно доказать, любая такая метрика в окрестности $U$ любой точки поверхности может быть в некоторой системе координат записана как $ds^2=\lambda(dx^2+dy^2)$ ($x$ и $y$ называются изотермическими координатами). Положив $z=x+iy$, мы запишем метрику в виде $ds^2=\lambda dzd\bar{z}$. Если в другой области $V$ аналогично $ds^2=\mu dwd\bar{w}$, то, как легко проверить, (ввиду ориентируемости поверхности) $dw=\varphi dz$, откуда следует, что $w$ — аналитическая функция $z$. Таким образом, области $U$ и координаты $z$ в них определяют на $S$ структуру римановой поверхности. Две метрики определяют одну и ту же риманову поверхность, если они отличаются множителем $\psi$, где $\psi$ — вещественная, всюду положительная функция на $S$. Умножение на такую функцию называется калибровочным преобразованием. Таким образом, риманова поверхность — это то же самое, что поверхность с дифференциально-геометрической метрикой, рассматриваемая с точностью до калибровочных преобразований. Именно таким образом римановы поверхности возникают в квантовой теории поля — в так называемой теории бозонной струны.

Выше мы использовали алгебраическую кривую $\tilde{S}\subset\mathbf{C}^2$, заданную уравнением $F(z, w)=0$, для построения римановой поверхности $S$. Когда риманова поверхность уже построена, можно использовать ее для исследования этой алгебраической кривой. Каждый многочлен $G(z, w)$, с одной стороны, можно рассматривать как уравнение другой алгебраической кривой $C$: $G(z, w)=0$, а совместные решения уравнений $F(z, w)=0$, $G(z, w)=0$ — как точки пересечения кривых $\tilde{S}$ и $C$. С другой стороны, $G(z, w)$ — мероморфная функция на римановой поверхности $S$, ее нули соответствуют точкам пересечения кривых $\tilde{S}$ и $C$, кратности нулей определяют порядки касания в точках пересечения и т. д. При этом чтобы придать геометрический смысл и тем точкам поверхности $S$, где $z$ или $w$ обращаются в бесконечность, надо рассматривать алгебраические кривые в проективной плоскости $\mathbf{CP}^2 \supset \mathbf{C}^2$.

Если, например, степень кривой $\tilde{S}$ равна 3, то, как нетрудно показать, в некоторой системе координат ее уравнение записывается в виде $w^2=z^3+az+b$. Согласно сказанному выше, соответствующая риманова поверхность имеет вид $\mathbf{C}/\Lambda$ (см. рис. 5). Таким образом, каждой точке $p \in \tilde{S}$ соответствует точка поверхности $S=\mathbf{C}/\Lambda$, т. е. комплексное число $z$, заданное с точностью до слагаемого $w \in \Lambda$. Мы приведем без доказательства «словарь», показывающий, как геометрические свойства точек $p \in \tilde{S}$ отражаются соответствующими им комплексными числами.

| | |
|---|---|
| Точки $p_1, p_2, p_3 \in \tilde{S}$ лежат на одной прямой | $z_1+z_2+z_3 \in \Lambda$ |
| Точки $p_1, \ldots, p_m$ являются точками пересечения $\tilde{S}$ с кривой $C$ степени $n$, | $m=3n$, $\sum_1^m z_i \in \Lambda$ |

При этом, например, $p_1=p_2$ для случая касания в точке $p_1$, $p_1=p_2=p_3$ для случая касания второго порядка (точка перегиба) и т. д.

Например, если мы хотим найти касательные к кривой $\tilde{S}$, проходящие через точку $p \in \tilde{S}$, то для комплексного числа $z'$, соответствующего точке касания $p'$, получаем соотношение $2z'+z \in \Lambda$ ($z$ соответствует точке $p$). Иначе говоря,

$$2z'+z=n_1\omega_1+n_2\omega_2, \quad n_i \in \mathbf{Z}$$

$$z'=-\frac{1}{2}z+\frac{\nu_1\omega_1+\nu_2\omega_2}{2}+\omega, \quad \nu_i=0,1; \quad \omega \in \Lambda.$$

Следовательно, таких касательных имеется 4 ($\nu_1=0,1$; $\nu_2=0,1$) (рис. 6).

Точно так же, точки перегиба кривой $\tilde{S}$ соответствуют тем комплексным числам $z$, для которых $3z \in \Lambda$. Отсюда $z=\frac{\nu_1\omega_1+\nu_2\omega_2}{3}+\omega$, $\nu_i=0, 1, 2$; $\omega \in \Lambda$, так что число их равно 9. Отсюда же следует, что прямая, проходящая через две точки перегиба, пересекает кривую $\tilde{S}$ опять в точке перегиба. Совершенно аналогично решается и более общая задача — о точках перегиба «$n$-го порядка», т. е. таких точках $p \in \tilde{S}$, что некоторая кривая степени $n$ пересекает $\tilde{S}$ только в этой точке: они соответствуют комплексным числам $z$, для которых $3nz \in \Lambda$ и число их равно $9n^2$. И для других кривых, соответствующих римановым поверхностям рода $g>1$, применение этих поверхностей дает лавину новых геометрических свойств кривых.

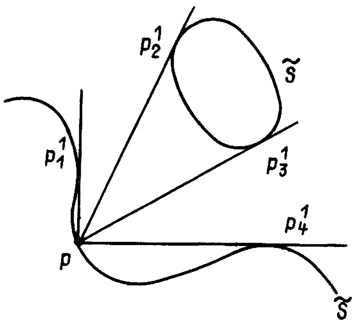



Рис. 6

Римановы поверхности оказались не просто одним из методов исследования свойств алгебраических кривых: обе теории фактически «изоморфны»; могут рассматриваться как два языка для описания одной и той же системы логических отношений. Однако выбор языка отнюдь не безразличен, ибо он несет с собой свою интуицию и свои постановки задач. В частности, можно взять за отправную точку не многозначные алгебраические функции и не абстрактные римановы поверхности, а алгебраические кривые. Так возникает ветвь «синтетической» геометрии, по духу являющаяся непосредственным продолжением теории конических сечений, но в то же время полностью адекватная теории римановых поверхностей. В частности, род римановой поверхности соответствующей алгебраической функции, определенной уравнением $f(z, w)=0$, может быть определен чисто геометрически как инвариант алгебраической кривой с тем же уравнением $f(z, w)=0$. Так возникает понятие рода алгебраической кривой. В частности, прямые и конические сечения — это кривые рода 0, кубические кривые имеют род 1. Конформной эквивалентности римановых поверхностей соответствует геометрически определяемое отношение между алгебраическими кривыми — бирациональная эквивалентность. Самое, пожалуй, удивительное — что даже результаты, связанные с интегрированием на римановых поверхностях («абелевы интегралы»), имеют алгебро-геометрический эквивалент.

Особенность этой точки зрения заключается в том, что геометрические конструкции всегда могут быть описаны как алгебраические операции над координатами входящих в них точек и коэффициентами уравнений прямых. Благодаря этому, мы можем считать, что эти величины принадлежат произвольному полю, а не обязательно полю комплексных чисел $\mathbf{C}$. Когда алгебраический геометр пишет: «... рассмотрим алгебраическую кривую, определенную над произвольным полем $k$», то этим он декларирует, что будет держаться в рамках синтетического, чисто геометрического изучения кривых. Если $k$ совпадает с полем комплексных чисел, то теорема существования Римана гарантирует, что такая теория в точности адекватна теории компактных римановых поверхностей. Привлечение других типов полей открывает совершенно новые возможности применения теории алгебраических кривых. Например, при изучении алгебраических поверхностей, заданных уравнением $f(x, y, z)=0$, где $f$ — многочлен, можно рассматривать $x$ как параметр, отнеся его к коэффициентам. Тогда $f$ будет многочленом от $y$ и $z$ с коэффициентами из поля $\mathbf{C}(x)$ рациональных функций, а алгебраическая поверхность — алгебраической кривой над полем $\mathbf{C}(x)$. Этот подход к изучению алгебраических поверхностей оказался очень плодотворным.

Другой пример — когда $k=\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел. В этом случае алгебраическая кривая расположена на вещественной плоскости и совпадает со стандартным объектом изучения аналитической геометрии. Как правило, она не связна, а состоит из нескольких кусков, называемых «овалами» (ср. рис. 6, где изображена кривая $y^2=x^3+ax+b$ в случае, когда многочлен $x^3+ax+b$ имеет три вещественных корня). Число и взаимное расположение овалов порождает массу вопросов, некоторые из которых могут быть исследованы методами теории алгебраических кривых, в то время, как ответы на другие — неизвестны. Простейший из наиболее известных здесь результатов заключается в том, что кривая рода $g$ распадается не более чем на $g+1$ овал. При этом кривая рассматривается на проективной плоскости, так что, например, обе ветви гиперболы составляют один овал. Рис. 6 иллюстрирует случай $g=1$.

Если $k=\mathbf{F}_p$ — поле из $p$ элементов (поле классов вычетов по простому модулю $p$), то уравнение алгебраической кривой $f(x, y)=0$ превращается в сравнение $f(x, y)\equiv 0 \pmod p$. Применение методов теории алгебраических кривых позволило получить наиболее глубокие результаты теории чисел, касающиеся сравнений. Мы имеем здесь дело со случаем, когда число точек на кривой (в поле $\mathbf{F}_p$) конечно и вопросы о топологии множества точек заменяются вопросами об их числе. Пусть $N$ — число точек на кривой $C$ с уравнением $f(x, y)=0$, включая и бесконечно удаленные точки (кривую опять надо рассматривать на проективной плоскости). Это число сравнивается с числом точек на прямой, которое (включая бесконечно удаленную) равно $p+1$. Утверждение заключается в том, что для кривой рода $g$

$$|N-(p+1)|\leqslant 2g\sqrt{p}$$

Особенно интересен для теории чисел случай, когда $k=\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел. Точки на алгебраической кривой в этом случае соответствуют решениям неопределенного уравнения $f(x, y)=0$ в рациональных числах (например, если $f(x, y)=x^n+y^n-1$, то речь идет о «теореме Ферма»). И здесь вся картина определяется родом кривой. Для кривых рода 0 существует явная рациональная параметризация всех решений, аналогичная классической параметризации $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{2t}{1+t^2}$ решений уравнения $x^2+y^2=1$. В случае кривых рода 1 приведенный на стр. 16 «словарь» позволяет перенести сложение элементов группы $\mathbf{C}/\Lambda$ на точки кривой и определить эту операцию чисто геометрически, так что если, в частности, коэффициенты уравнения кривой рациональны, то рациональные точки этой кривой образуют группу. Основная теорема здесь утверждает, что эта группа имеет конечное число образующих. Наконец, для кривых рода $g>1$ основная теорема утверждает, что число рациональных точек на такой кривой конечно. Эти результаты верны и для случая, когда $k$ — конечное расширение поля $\mathbf{Q}$. Таким образом, мы можем дополнить таблицу на стр. 15 еще одним столбцом, характеризующим алгебраические кривые с точки зрения их арифметики

| Род | Совокупность точек с координатами в поле $k$ — конечном расширении поля $\mathbf{Q}$ |
|---|---|
| 0 | Явная рациональная параметризация |
| 1 | Группа с конечным числом образующих |
| $>1$ | Конечное множество |

Интересно обратить внимание на то, как род алгебраической кривой во всех случаях оказывается основной характеристикой множества ее точек. В случае кривых над полем комплексных чисел он характеризует топологию этого множества, тип его универсальной накрывающей и его дифференциально-геометрические свойства. В случае поля **R** он дает оценку числа связных компонент или «овалов» этого множества (аналогично степени вещественного многочлена, которая указывает лишь на границу, но не число его вещественных корней). В случае конечного поля он характеризует отклонение числа точек от «среднего значения». В случае поля рациональных чисел определяет «тип» множества рациональных точек.

«... в применении алгебры к геометрии воображение неотделимо от расчетов и математика становится поэзией».

*В. Гюго* «Вильям Шекспир»

*Глава 1*

# РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Эта глава представляет собой обзор основных понятий и результатов теории римановых поверхностей. В центре внимания — компактный случай, непосредственно связанный с теорией алгебраических кривых. Подробное изложение и доказательства можно найти в книгах [18], [30], [69], [73].

## § 1. Исходные понятия

В настоящее время наиболее удобна точка зрения на римановы поверхности как на специальные комплексно аналитические многообразия. Поэтому параграф начинается с основных определений комплексно аналитической геометрии. Это оправдано также тем, что многие важные понятия и результаты теории римановых поверхностей трудно объяснить, не прибегая к некоторым более общим, чем римановы поверхности, комплексно аналитическим многообразиям. Более обстоятельно ознакомиться с основами теории комплексно аналитических многообразий можно по книгам [31], [58], [72].

**1.1. Комплексная карта. Комплексные координаты.** Рассмотрим топологическое пространство $M$. *Комплексной картой* на $M$ называется гомеоморфизм $\varphi\colon U \to \mathbf{C}^n$ открытого подмножества $U \subseteq M$ на открытое подмножество $\varphi(U) \subseteq \mathbf{C}^n$. Координаты комплексного линейного арифметического пространства $\mathbf{C}^n$ задают непрерывные комплекснозначные функции $z_1, \ldots, z_n$ на $U$, называемые *комплексными координатами* на $U$. Каждая точка $p \in U$ однозначно определяется упорядоченным набором своих координат $(z_1(p), \ldots, z_n(p))$, а карта $\varphi$ имеет следующее координатное представление: $\varphi(p) = (z_1(p), \ldots, z_n(p))$. Обратно, упорядоченный набор непрерывных комплекснозначных функций $(z_1, \ldots, z_n)$ на $U$ является комплексной системой координат на $U$, если отображение $\varphi: U \to \mathbf{C}^n$, определенное указанным представлением, будет картой, т. е. гомеоморфизмом на открытое подмножество в $\mathbf{C}^n$.

Пример. Пусть $\mathbf{CP}^n$ — комплексное проективное пространство размерности $n$ с обычной топологией. Рассмотрим на нем некоторую однородную систему координат $(x_0 : \ldots : x_n)$. Тогда определена комплексная карта

$$\varphi : U \to \mathbf{C}^n$$
$$(x_0 : \ldots : x_n) \mapsto (x_0/x_n, \ldots, x_{n-1}/x_n)$$

с координатами $z_1 = x_0/x_n, \ldots, z_n = x_{n-1}/x_n$, где $U = \{(x_0 : \ldots : x_n) \mid x_n \neq 0\}$. Такие *карты* и соответствующие им *координаты* называют *аффинными*. Всякая аффинная карта определена на открытом подмножестве, дополнительном к гиперплоскости в $\mathbf{CP}^n$, а ее образ совпадает с $\mathbf{C}^n$. В частности, на комплексной проективной прямой $\mathbf{CP}^1$ однородные координаты $(x_0 : x_1)$ задают одну аффинную координату $z = x_0/x_1$, не определенную лишь в точке $(1:0)$. Символ $\infty = 1/0$ естественно считать $z$-координатой этой точки.

**1.2. Комплексно аналитический атлас.** Отображение $f = (f_1, \ldots, f_m)$ из открытого подмножества $U \subseteq \mathbf{C}^n$ в открытое подмножество $V \subseteq \mathbf{C}^m$ называют голоморфным (или аналитическим), если таковы его составляющие $f_i(z_1, \ldots, z_n)$ в смысле теории функций многих комплексных переменных [12], [43].

*Комплексным атласом* топологического пространства $M$ называют (возможно бесконечный) набор комплексных карт $\Phi = \{\varphi_i : U_i \to \mathbf{C}^{n_i} \mid i \in I\}$, области определения которых $U_i$ покрывают все $M$. *Атлас* $\Phi$ называют *аналитическим*, если отображения перехода

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

голоморфны для всех $i, j \in I$. Составляющими отображения перехода $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ являются функции перехода от координат карты $\varphi_i$ к координатам карты $\varphi_j$ в их общей области определения $U_i \cap U_j$.

Пример. Атлас на $\mathbf{CP}^n$, составленный из аффинных карт, аналитичен. В частности, на $\mathbf{CP}^1$ имеется атлас из двух карт: $\mathbf{CP}^1 - \{\infty\} \xrightarrow{z} \mathbf{C}$ и $\mathbf{CP}^1 - \{0\} \xrightarrow{1/z} \mathbf{C}$. Голоморфность функции перехода $1/z$ на $\mathbf{C}^\times = \mathbf{C} - \{0\}$ очевидна.

**1.3. Комплексно аналитические многообразия.** Хаусдорфово топологическое пространство $M$ с заданным на нем комплексным аналитическим атласом $\Phi$ называют *комплексно аналитическим* или просто *комплексным многообразием*. Обычная договоренность — обозначать комплексное многообразие, как и множество его точек, через $M$, подразумевая топологию и атлас фиксированными.

Удобно с самого начала запастись максимально возможным набором координатных систем на $M$. *Комплексную карту* $\varphi: U \to \mathbf{C}^n$ на комплексном многообразии $M$ называют *аналитической*, если атлас после добавления этой карты сохраняет аналитичность. Это означает аналитичность отображений перехода между координатами карты $\varphi$ и координатами любой карты атласа $\Phi$. Всякий атлас, составленный из комплексных аналитических карт на $M$, аналитичен. Более того, атлас, составленный из всех комплексных аналитических карт на $M$, является максимальным аналитическим атласом на $M$, т. е. добавление любой новой карты нарушает его аналитичность. Этот максимальный аналитический атлас называют *комплексно аналитической структурой* многообразия $M$. Далее, если не оговорено противное, под локальной системой координат на $M$ понимается комплексная система координат, отвечающая комплексной аналитической карте на $M$.

Замечание. Идея, лежащая в основе определения комплексного многообразия, отражает их локальное устройство — такое же, как у шара в $\mathbf{C}^n$. В частности, координаты позволяют локально сводить вопросы о многообразиях к теории аналитических функций $n$ переменных. Для римановых поверхностей, как правило, достаточно функций одной переменной.

Пример. 1. Пространство $\mathbf{C}^n$ можно снабдить атласом из одной карты $\mathbf{C}^n \xrightarrow{(z_1, \ldots, z_n)} \mathbf{C}^n$. Соответствующая аналитическая структура состоит из биголоморфных гомеоморфизмов $\varphi: U \to \mathbf{C}^n$ открытых подмножеств $U \subseteq \mathbf{C}^n$ на открытые подмножества $V \subseteq \mathbf{C}^n$. Всегда предполагается, что комплексное многообразие $\mathbf{C}^n$ снабжено именно этой аналитической структурой.

Пример 2. Пространство $\mathbf{CP}^n$ будем предполагать снабженным аналитической структурой, соответствующей атласу из аффинных карт.

Пример 3. Пусть $\Lambda \subset \mathbf{C}^n$ — дискретная решетка. Топологическое факторпространство $\mathbf{C}^n/\Lambda$ обладает структурой комплексного многообразия, определяемой отображением факторизации $\pi: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n/\Lambda$. В качестве атласа $\mathbf{C}^n/\Lambda$ можно взять множество локальных сечений отображения $\pi$, т. е. непрерывных отображений $s: U \to \mathbf{C}^n$ открытых подмножеств $U \subseteq \mathbf{C}^n/\Lambda$ с $\pi \circ s(p) = p$ для всех $p \in U$. Это многообразие компактно тогда и только тогда, когда решетка $\Lambda$ имеет максимальный ранг $2n$. В этом случае $\mathbf{C}^n/\Lambda$ называют *комплексным тором*.

Пример 4. *Произведение* $M \times N$ двух *комплексных многообразий* имеет естественную структуру комплексного многообразия. В качестве атласа на $M \times N$ можно взять карты

$(\varphi, \psi): U \times V \to \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n$, где $\varphi$ и $\psi$ — комплексные аналитические карты на $M$ и $N$ соответственно.

Пример 5. Пусть $U \subseteq M$ — открытое подмножество. Комплексные аналитические карты на $M$, области определения которых попадают в $U$, задают естественную аналитическую структуру на $U$. Многообразие $U$ с этой структурой называют *открытым подмногообразием* в $M$. В дальнейшем всякое открытое подмножество в $M$ мы считаем многообразием в этом смысле.

Пример 6. В общем случае подмножество $N$ *комплексного многообразия* $M$ называют *подмногообразием*, если оно локально задается системой уравнений $f_1 = \ldots = f_n = 0$, где $f_1, \ldots, f_n$ — голоморфные функции координат $z_1, \ldots, z_m$ и ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)$ равен $n$. По комплексно аналитической версии теоремы об обратном отображении это эквивалентно локальной плоскости $N$ в $M$ в комплексно аналитическом смысле. Последнее означает, что любая точка $p \in N$ имеет открытую окрестность $U$ на $M$ с координатами $z_1, \ldots, z_m$, в которых $U \cap N = \{p \in U \mid z_1(p) = \ldots$ $\ldots = z_n(p) = 0\}$. Данное подмножество обладает естественной структурой комплексного многообразия такой, что в качестве координат на $U \cap N$ можно взять функции $z_{n+1}, \ldots, z_m$. Всякое комплексное проективное подпространство $\mathbf{CP}^n$ будет замкнутым подмногообразием.

**1.4. Отображения комплексных многообразий.** *Отображение* $f: M \to N$ комплексных многообразий называют *голоморфным*, если в локальных координатах оно задается голоморфными функциями. Последнее означает, что функции $w_i = f_i(z_1, \ldots$ $\ldots, z_m)$, задающие $f$ в локальных координатах $z_1, \ldots, z_m$ на $M$ и $w_1, \ldots, w_n$ на $N$, голоморфны в области определения. Следует отметить, что голоморфность $f$ можно проверять не для всех координатных представлений этого отображения, а лишь для некоторого множества таких представлений, область определения которых включает любую точку из $M$.

Обратимые отображения *комплексных многообразий*, обратные отображения к которым голоморфны, называют *изоморфизмами*. *Автоморфизмом* называют изоморфизмы многообразия на себя. Очевидно, комплексные многообразия и их голоморфные отображения образуют категорию (см. [14]) с так определенными изоморфизмами и автоморфизмами. Голоморфные отображения вида $f: M \to \mathbf{C}$ называют *голоморфными функциями* на комплексном многообразии $M$. Если $f: M \to N$ — голоморфное отображение, а $g: N \to \mathbf{C}$ — голоморфная функция, то голоморфную функцию $f^*(g) \overset{\mathrm{df}}{=} g \circ f: M \to \mathbf{C}$ называют *подъемом* функции $g$ относительно $f$.

Пример 1. Всякая комплексная аналитическая карта $\varphi: U \to \mathbf{C}^n$ на многообразии $M$ голоморфна, а ее координаты являются голоморфными функциями на $U$.

Пример 2. *Комплексной группой Ли* называют группу, заданную на комплексном многообразии $G$ с голоморфными групповой операцией $G\times G \xrightarrow{g_1\cdot g_2} G$ и операцией обращения $G \xrightarrow{g^{-1}} G$. Многообразия $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{C}^n/\Lambda$ являются комплексными группами Ли по сложению, а факторизация $\pi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n/\Lambda$ — голоморфным гомоморфизмом этих групп.

Пример 3. Пусть $\mathbf{CP}^n$ — проективное пространство с однородными координатами $(x_0: \ldots : x_n)$, а $M=(m_{ij})$ — обратимая $(n+1)\times(n+1)$-матрица. Тогда отображение

$$\mathbf{CP}^n \to \mathbf{CP}^n$$

$$(x_0: \ldots : x_n) \mapsto (m_{00}x_0+\cdots+m_{0n}x_n: \ldots : m_{n0}x_0+\cdots+m_{nn}x_n)$$

является голоморфным автоморфизмом. Такие *отображения* называют *дробно-линейными*, поскольку в аффинных координатах они задаются дробно-линейными функциями: $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto$

$$\mapsto \left(\frac{m_{00}z_1+\ldots+m_{0n-1}z_n+m_{0n}}{m_{n0}z_1+\ldots+m_{nn-1}z_n+m_{nn}}, \ldots, \frac{m_{n-10}z_1+\ldots+m_{n-1n-1}z_n+m_{n-1n}}{m_{n0}z_1+\ldots+m_{nn-1}z_n+m_{nn}}\right).$$

Пример 4. Пусть $p\in\mathbf{CP}^2$ — точка, а $\mathbf{CP}^1\subset\mathbf{CP}^2$ — прямая, не проходящая через $p$. *Отображение проектирования*

$$\pi : \mathbf{CP}^2 - \{p\} \to \mathbf{CP}^1$$

$$q \mapsto \overline{pq} \cap \mathbf{CP}^1$$

голоморфно; $\overline{pq}$ обозначает комплексную прямую, проходящую через $p$ и $q$.

**1.5. Размерность комплексного многообразия.** *Размерностью карты* $\varphi : U \to \mathbf{C}^n$ называют число $n$, т. е. число ее координат. Для связного *комплексного многообразия* $M$ это число не зависит от выбора карты $\varphi$ на $M$ и называется *размерностью* многообразия $M$. В дальнейшем все многообразия предполагаются связными. Размерность многообразия $M$ обозначается через $\dim_{\mathbf{C}} M$ или, короче, $\dim M$.

Пример. $\dim \mathbf{C}^n = \dim \mathbf{CP}^n = \dim \mathbf{C}^n/\Lambda = n$. В частности, комплексная линейная размерность пространств $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{CP}^n$ совпадает с комплексно аналитической.

**1.6. Римановы поверхности.**

Определение. *Римановой поверхностью* называется связное комплексно аналитическое многообразие размерности один.

Примеры. 1. $\mathbf{CP}^1$ — *риманова сфера*,
$\mathbf{C}$ — *гауссова плоскость*,
$\mathbf{H}=\{\operatorname{Im} z>0\}$ — *верхняя полуплоскость*,
$\mathbf{D}=\{|z|<1\}$ — *единичный диск*,
$\mathbf{D}^\times=\{0<|z|<1\}$ — *проколотый единичный диск*.

Верхняя полуплоскость изоморфна единичному диску. Изоморфизм можно задать дробно-линейной функцией:

$$\mathbf{H} \to \mathbf{D}$$

$$z \mapsto \frac{z-a}{z-\bar{a}},$$

где $a \in \mathbf{H}$.

2. Одномерный комплексный тор называют *комплексной эллиптической кривой.*

3. Пусть $\mathbf{CP}^2$ — проективная плоскость с однородными координатами $(x:y:z)$, а $f(x,y,z)$ — нетривиальный однородный многочлен. Множество нулей этого многочлена

$$C = \{(x:y:z) \mid f(x, y, z) = 0\}$$

будем называть *плоской комплексной алгебраической кривой.* Всякая такая кривая с топологией подпространства компактна и связна (см. следствие 5 пункта 2.11 в неприводимом случае и следствие 2 пункта 2.3 гл. 2 в общем случае). *Кривую* $C$ называют *неособой*, если она является комплексным подмногообразием в $\mathbf{CP}^2$. Это подмногообразие одномерно и называется *римановой поверхностью* (*ассоциированной с*) *кривой* $\mathbf{C}$. Чтобы проверить неособость $C$, обычно пользуются следующим достаточным признаком. Если $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p):\frac{\partial f}{\partial y}(p):\frac{\partial f}{\partial z}(p)\right) \neq (0:0:0)$ для всех $p \in C$, то кривая $C$ неособа. Этот признак легко вывести из комплексно аналитического варианта теоремы об обратном отображении.

4. Однородные квадрики $ax^2+bxy+cy^2+\ldots+dz^2$ ранга 3 задают на $\mathbf{CP}^2$ неособую алгебраическую кривую, называемую *коникой.* Проектирование коники из любой ее точки на риманову сферу $\mathbf{CP}^1$ (см. рис. 7) продолжается по непрерывности до изоморфизма римановой поверхности коники с $\mathbf{CP}^1$.

5. Уравнение $x^d+y^d=z^d$ задает на $\mathbf{CP}^2$ неособую алгебраическую кривую, называемую *кривой Ферма.*

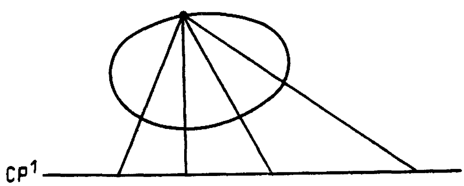



Рис. 7

6. Типичный пример римановой поверхности — риманова поверхность алгебраической функции. Для простоты предположим, что $F(z)$ — *алгебраическая функция* на $\mathbf{CP}^1$, т. е. $F$ — многозначная функция, удовлетворяющая уравнению $f(z, F) = 0$, где $f$ — комплексный многочлен от двух переменных (сте-

пени $n$ по $F$). Дополнительно предполагают, что $f$ неприводим. Утверждается существование римановой поверхности $S$, на которой функция $F$ становится однозначной. Точнее, существует голоморфное отображение $g: S \to \mathbf{CP}^1$ и мероморфная функция $\varphi$ на $S$ (см. пункт 2.2) такая, что $F = \varphi \circ g^{-1}$. Эта риманова поверхность называется *римановой поверхностью алгебраической функции* $F$. Дадим набросок ее конструкции. Почти для всех[1] $z \in \mathbf{C}$ алгебраическое уравнение $f(z, F) = 0$ от $F$ имеет одно и то же число $n$ корней $F_1, \ldots, F_n$. Соответствующие пары $(z, F_i)$, $f(z, F_i) = 0$ составляют открытое подмножество $U \subseteq S$ (дополнительное к конечному подмножеству в $S$). Близким значениям $z$ отвечают близкие корни $F_i$. Это позволяет ввести на $U$ топологию. Отображение $g$ на $U$ задается проектированием: $(z, F_i) \mapsto z$. Очевидно, $g$ на $U$ является конечным топологическим накрытием. Последнее означает, что любая точка $z \in g(U) \subseteq \mathbf{C}$ имеет окрестность $V$, прообраз которой $g^{-1}(V)$ представим в виде объединения открытых множеств $V_1, \ldots, V_n$ таких, что $g: V_i \to V \subseteq \mathbf{C}$ — гомеоморфизмы. Введем на $U$ аналитическую структуру, рассматривая данные изоморфизмы как карты на $U$; при этом проекция $g$ превращается в голоморфное отображение (ср. с предложением пункта 2.9). Для конструкции $S$ остается пополнить $U$ над $\mathbf{CP}^1 - g(U)$ конечным набором точек и продолжить $g$ по непрерывности. Итак, пусть $z_0 \in \mathbf{CP}^1 - g(U)$. Рассмотрим проколотый диск $D^{\times}_{\varepsilon, z_0} = \{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$, над которым поверхность $S$ уже определена. Нетрудно проверить, что каждая связная компонента $V \subseteq g^{-1}(D^{\times}_{\varepsilon, z_0})$ задает отображение $g_V: V \to D^{\times}_{\varepsilon, z_0}$, изоморфное стандартному $D^{\times}_{\sqrt[m]{\varepsilon}, 0} \xrightarrow{z^m} D^{\times}_{\varepsilon, 0}$, где $m$ — число точек в слое $g_V^{-1}(z)$, $z \in D^{\times}_{\varepsilon, z_0}$. Поэтому, добавляя по одной точке к каждой такой компоненте $V$, мы получаем $S$. Доказательство изоморфности основано на следующем факте: если следить за точками слоя $g^{-1}(z)$ при движении $z$ по окружности вокруг $z_0$, то после обхода происходит перестановка точек слоя $g^{-1}(z)$, называемая *монодромией* (см. также 3.6). Оказывается, что точки слоя $g_V^{-1}(z)$, лежащие в связной компоненте $V$, переставляются циклически при монодромии. То же самое верно для отображения $z^m$. Это позволяет построить требуемый изоморфизм топологически, а затем проверить его голоморфность (см. пример 3 в 2.9). Функция $\varphi$ (на $U$) определяется по правилу $\varphi(z, F_i) = F_i$. Как и в примере 3, основная сложность заключена в доказательстве связности $S$ или, эквивалентно, связности $U$. Если бы поверхность $U$ не была связна, то разложению $U$ на связные компоненты отвечало разложение $f$ на множители, что невозможно по неприводимости $f$. Подробнее

---

[1] Кроме конечного числа.

это обсуждается в пункте 2.11; где приводится более общая конструкция.

З а м е ч а н и е. Пусть теперь $f(x, y, z)$ — вещественный однородный многочлен степени $d$. Множество его нулей на вещественной проективной плоскости $\mathbf{RP}^2$ называют *плоской вещественной алгебраической кривой*. Эта кривая не всегда связна. Теорема Гарнака утверждает, что число ее связных компонент не превосходит $(d-1)(d-2)/2+1$ (см. [11]).

**1.7. Дифференцируемые многообразия.** Заменяя пространства $\mathbf{C}^n$ на $\mathbf{R}^n$, а голоморфность отображений перехода на их дифференцируемость, можно определить *дифференцируемые многообразия* и локальные *дифференцируемые координатные системы* на них. Координаты позволяют ввести понятие *диффецируемого отображения* дифференцируемых многообразий. Подробнее о дифференцируемых многообразиях можно узнать из книг [3], [42], [58]. Всякое комплексное многообразие $M$ можно рассматривать как дифференцируемое многообразие с тем же самым атласом. Для этого пространства $\mathbf{C}^n$ достаточно заменить их овеществлением $\mathbf{R}^{2n}$, а с координатной точки зрения каждую комплексную координату $z_i=x_i+\sqrt{-1}y_i$ заменить двумя *вещественными* $x_i$ и $y_i$. Голоморфность отображений перехода гарантирует дифференцируемость отображений перехода так овеществленного атласа. Очевидно,

$$\dim_{\mathbf{R}} M = 2 \dim_{\mathbf{C}} M,$$

где $\dim_{\mathbf{R}} M$ — *вещественная размерность* $M$, т. е. размерность $M$ как дифференцируемого многообразия. Дифференцируемые многообразия размерности два называют *поверхностями*. Риманова поверхность является поверхностью именно в этом смысле или в еще более слабом топологическом смысле.

## § 2. Отображения римановых поверхностей

Настоящий параграф начинается с обсуждения понятия мероморфной функции, простейших примеров таких функций и некоторых известных задач о нахождении мероморфных функций с определенными свойствами. Сразу оговоримся, что главная задача теории римановых поверхностей о нахождении хотя бы одной непостоянной мероморфной функции на римановой поверхности откладывается до § 4 (см. пункт 4.14). Пункты 2.1, 2.4 и 2.5 посвящены элементарным топологическим свойствам голоморфных отображений римановых поверхностей и их следствиям. С алгебраической точки зрения наибольший интерес представляют конечные отображения римановых поверхностей, которым предоставлена оставшаяся часть параграфа начиная с пункта 2.7. Такой интерес обусловлен их алгебраичностью, означающей конечность соответствующего расширения полей мероморфных функций (см. 2.11). Кроме того, один из важнейших примеров римановых поверхностей — риманова поверхность алгебраической функции — строится как конечное отображение римановой поверхности, на которой алгебраическая функция становится однозначной.

Отображения римановых поверхностей предполагаются голоморфными.

**2.1. Дискретность непостоянных отображений римановых поверхностей.** *Отображение* $f: X \to Y$ топологических пространств $X$ и $Y$ называют *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(p)$ каждой точки $p \in Y$ является дискретным подмножеством в $X$.

Теорема единственности. Пусть $f_1, f_2: S_1 \to S_2$ — отображения римановых поверхностей, которые совпадают на некотором недискретном подмножестве в $S_1$. Тогда они совпадают тождественно.

Эта теорема является простым обобщением теоремы единственности дрля голоморфных функций одной комплексной переменной.

Следствие. Всякое непостоянное отображение римановых поверхностей дискретно.

**2.2. Мероморфные функции на римановой поверхности.** Рассмотрим риманову поверхность $S$.

Определение. *Мероморфной функцией* на $S$ называется частично определенная функция $f$ на $S$, локально мероморфная в обычном смысле [12]. Таким образом, мероморфная функция $f$ на $S$ голоморфна на открытом подмножестве $U$, дополнение $S-U$ к которому дискретно в $S$ и состоит из полюсов функции $f$. *Полюс* $p \in S-U$ определяется одним из следующих эквивалентных способов:

(а) $\lim\limits_{q \to p} f(q) = \infty$,

(б) локально $f(z) = \sum\limits_{i=-n}^{+\infty} a_i z^i$ (ряд Лорана),

$a_{-n} \neq 0$ и $n > 0$, где $z$ — *локальный параметр* в точке $p$ (=локальная координата с $z(p) = 0$);

(в) локально $f = g/h$, где $g$, $h$ — голоморфные функции в окрестности точки $p$. $g(p) \neq 0$ и $h(p) = 0$. Множество всех мероморфных функций на $S$ обозначают через $\mathscr{M}(S)$.

По непрерывности мероморфную функцию $f$ можно продолжить до отображения $f: S \to \mathbf{CP}^1: f(p) = \infty$ в каждом полюсе $p$. Голоморфность $f$ вытекает из теоремы Римана об устранимой особенности. Обратно, если $f: S \to \mathbf{CP}^1$ — отображение римановых поверхностей, а $z$ — такая аффинная координата на $\mathbf{CP}^1$, что $f \not\equiv \infty$, то $f^*(z)$ — мероморфная функция на $S$ с множеством полюсов $f^{-1}(\infty)$. Поэтому мероморфные функции $f \in \mathscr{M}(S)$ отождествляются с голоморфными отображениями вида $f: S \to \mathbf{CP}^1$.

Пример 1. Всякий многочлен $f(z)$ задает мероморфную функцию на $\mathbf{CP}^1$. Точка $\infty$ — единственный полюс этой функции, если степень многочлена $\geqslant 1$. Аналогично, всякая рациональная функция $f(z)$ задает мероморфную функцию на $\mathbf{CP}^1$. Такая функция $f(z)$ не имеет полюса в $\infty$ в точности тогда, когда она является правильной дробью. Обратно, всякая мероморфная функция $f$ на $\mathbf{CP}^1$ рациональна. Одно из доказательств этого факта [30] использует выделение главных частей (см. пункт 2.3) и обычный принцип максимума [12] (ср. с предложением 3 пункта 2.5) или теорему Лиувилля. По пути получается теорема о существовании и единственности разложения правильной дроби на простейшие в комплексном смысле. Итак, $\mathcal{M}(\mathbf{CP}^1) \simeq \mathbf{C}(z)$, где $\mathbf{C}(z)$ — поле рациональных функций от одной переменной $z$. Поэтому понятие мероморфной функции является естественным обобщением понятия рациональной функции. Более того, эти понятия совпадают для любой компактной римановой поверхности при подходящем определении рациональности функции (см. 6.5).

Пример 2. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — непостоянное отображение римановых поверхностей. Подъем $f^*(g)$ любой мероморфной функции $g \in \mathcal{M}(S_2)$ будет мероморфной функцией на $S_1$.

Пример 3. Рассмотрим голоморфное отображение $f: S \to \mathbf{CP}^2$ римановой поверхности $S$ на комплексную проективную плоскость $\mathbf{CP}^2$ с финными координатами $z_1, z_2$. Предположим, что рациональная функция $g(z_1, z_2)$ определена хотя бы в одной точке $f(S)$. Это значит, что ее можно записать в виде отношения однородных многочленов одной степени $g(z_1, z_2) = \dfrac{p(x_0, x_1, x_2)}{q(x_0, x_1, x_2)}$, где $(x_0 : x_1 : x_2)$ — однородные координаты на $\mathbf{CP}^2$, соответствующие $z_1, z_2$, и множество нулей многочлена $q(x_0, x_1, x_2)$ не содержит $f(S)$. Подъем такой рациональной функции на $S$ будет мероморфной функцией.

Пример 4. $\wp$ — *функция Вейерштрасса* представляет собой мероморфную функцию на гауссовой плоскости $\mathbf{C}$, задаваемую сходящимся рядом

$$\wp(z) \overset{\mathrm{df}}{=} \wp(z, \Lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \left[\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right],$$

где $\Lambda \subset \mathbf{C}$ — решетка максимального ранга. Эта функция (а) четна: $\wp(-z) = \wp(z)$; (б) периодична: $\wp(z+\lambda) = \wp(z)$ для всех $\lambda \in \Lambda$; (в) имеет полюса лишь в точках решетки $\lambda \in \Lambda$. По периодичности $\wp$-функция корректно определяет мероморфную функцию на эллиптической кривой $\mathbf{C}/\Lambda$ с единственным полюсом в 0. В частности, на всякой такой кривой имеется непостоянная мероморфная функция.

Лемма. 1. Мероморфные функции на римановой поверхности $S$ образуют поле $\mathscr{M}(S)$ с естественными операциями сложения и умножения.

2. Непостоянное отображение $f: S_1 \to S_2$ римановых поверхностей задает расширение $f^*: \mathscr{M}(S_2) \hookrightarrow \mathscr{M}(S_1)$ полей мероморфных функций, т. е. гомоморфное вложение этих полей.

Замечание. Постоянные функции будем отождествлять с комплексными числами. Очевидно, $f^*: \mathscr{M}(S_2) \hookrightarrow \mathscr{M}(S_1)$, есть **C**-расширение в следующем смысле: $f^*(c) = c$ для всех $c \in \mathbf{C}$.

**2.3. Мероморфные функции с предписанным поведением в полюсах.** В общем случае вопрос о структуре поля мероморфных функций $\mathscr{M}(S)$ римановой поверхности $S$ и, в частности, доказательство того, что $\mathscr{M}(S) \neq \mathbf{C}$, очень важен и обсуждается в ряде мест этого обзора (см. п.п. 2.11, 4.8 и 4.14). Однако первые действительные трудные результаты о существовании нетривиальных мероморфных функций и дифференциалов нам встретятся лишь в конце § 4. Здесь приводится лишь постановка одной из известных задач о существовании мероморфной функции с заданными главными частями.

Фиксируем в точке $p_{+\infty}$ римановой поверхности $S$ локальный параметр $z$. Если $f = \sum\limits_{i=-n} a_i z^i$ — разложение Лорана мероморфной функции $f$ в окрестности точки $p$, то начальный отрезок $\sum\limits_{i=-n}^{-1} a_i z^i$ этого ряда называют *главной частью функции* $f$. Отметим, что главная часть с точностью до слагаемого, голоморфного в окрестности $p$, не зависит от выбора локального параметра $z$.

Задача Миттаг-Леффлера для мероморфных функций. Пусть $\left\{\sum\limits_{i=-n}^{-1} a_i z^i\right\}$ — множество главных частей, заданное на дискретном множестве точек $p$ римановой поверхности $S$. Найти мероморфную функцию $f \in \mathscr{M}(S)$, которая имеет полюса лишь в этих точках $p$ и заданные главные части.

Как установил Миттаг-Леффлер, эта задача всегда разрешима на гауссовой плоскости **C** [12]. Аналогичное верно для некомпактных римановых поверхностей в общем случае [30]. В компактном случае задача Миттаг-Леффлера разрешима, если коэффициенты главных частей $a_i$ удовлетворяют конечному числу линейных сотношений, зависящему от топологии римановой поверхности (см. замечание 1 в п. 4.9 и теорему 1 в п. 6.3).

**2.4. Кратность отображения. Порядок функции.** Рассмотрим непостоянное отображение римановых поверхностей $f: S_1 \to S_2$. Выберем локальные параметры $z$ и $w$ в точках $p \in S_1$ и $f(p) \in S_2$ соответственно. В этих координатах $f$ записывается в виде

$$w = z^n g(z), \qquad (1)$$

где $n$ — натуральное число, а $g(z)$ — функция, голоморфная в окрестности нуля, с $g(0) \neq 0$. Имеется более точное утверждение.

Лемма (о нормальной форме). Существуют локальные параметры $z$ и $w$ в точках $p \in S_1$ и $f(p) \in S_2$ соответственно, для которых отображение $f$ имеет вид $w = z^n$.

Определения. 1. *Кратностью* $\operatorname{mult}_p f$ *отображения* $f$ в точке $p$ называется число $n$ из соотношения (1).

2. Число $r_p(f) \overset{\mathrm{df}}{=} \operatorname{mult}_p f - 1$ — называют *индексом ветвления* отображения $f$ в точке $p \in S_1$. Точку $p \in S_1$ называют *точкой ветвления*, если $r_p(f) \geqslant 1$.

3. *Порядок* в точке $p \in S$ *мероморфной функции* $f: S \to \mathbf{CP}^1$ определяется формулой

$$\operatorname{ord}_p f = \begin{cases} \operatorname{mult}_p f, & \text{если } f(p) = 0, \text{ т. е. } p \text{ — нуль функции } f; \\ -\operatorname{mult}_p f, & \text{если } f(p) = \infty, \text{ т. е. } p \text{ — полюс функции } f; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Корректность определения кратности $\operatorname{mult}_p f$ получается из ее геометрической интерпретации. Полный прообраз $f^{-1}(q)$ точки $q \in S_2 - f(p)$, близкой к $f(p)$, имеет ровно $\operatorname{mult}_p f$ точек, близких к $p$.

Пример. 1. Отображение $\mathbf{D} \xrightarrow{z^n} \mathbf{D}$ имеет единственную точку ветвления 0 с индексом $n-1$.

Пример 2. Отображение $\mathbf{C} \xrightarrow{\exp} \mathbf{C}$ не имеет точек ветвления.

Пример 3. Пусть $f(z) \in \mathscr{M}(\mathbf{CP}^1)$ — многочлен степени $d$. Тогда $\operatorname{ord}_\infty f = -d$ и $\operatorname{ord}_p f$ равно кратности нуля, если $p$ — нуль многочлена $f$.

Пример 4. $\wp$-функция Вейерштрасса (см. пример 4 пункта 2.2) имеет полюса второго порядка в точках решетки: $\operatorname{ord}_\lambda \wp = -2$ для всех $\lambda \in \Lambda$ [44]. В общем случае говорят, что *$p$ — полюс порядка $n$*, если $\operatorname{ord}_p f = -n$.

Замечание 1. Точки ветвления отображения $f: S_1 \to S_2$ образуют дискретное множество на $S_1$. Действительно, если $w = f(z)$ — локальная запись $f$, то точки ветвления будут нулями производной $f'(x)$.

Замечание 2. Если $f \equiv c$ — постоянная функция, то $\operatorname{ord}_p f = 0$ при $c \neq 0$; удобно считать $\operatorname{ord}_p 0 = +\infty$.

**2.5. Топологические свойства отображений римановых поверхностей.** Все предложения этого пункта имеют локальную природу, а потому легко выводятся из соответствующих фактов теории аналитических функций одной переменной. (Например, первые два предложения очевидно следуют из леммы о нормальной форме предыдущего пункта.)

Предложение 1. Непостоянное отображение римановых поверхностей всегда открыто.

Следствие 1. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — непостоянное отображение римановых поверхностей и поверхность $S_1$ компактна. Тогда поверхность $S_2$ тоже компактна и отображение $f$ сюръективно.

Предложение 2. Если отображение римановых поверхностей инъективно, то оно — открытое вложение, т. е. изоморфизм на открытое подмножество.

Предложение 3 (принцип максимума). Пусть $f: S \to \mathbf{C}$ — непостоянная голоморфная функция на римановой поверхности $S$. Тогда $|f|$ не достигает максимума на $S$.

Следствие 2. На компактной римановой поверхности всякая голоморфная функция постоянна.

Это отчасти объясняет причину введения мероморфных функций, особенно в компактном случае.

Замечание. Большинство приведенных утверждений имеет многомерные обобщения [35]. Так, например, следствие 2 справедливо для компактного комплексного многообразия любой размерности.

**2.6. Дивизоры на римановых поверхностях.** Рассмотрение точек ветвления с учетом их кратностей, формализация задачи о нахождении функции с предписанными кратностями нулей и полюсов, да и многие другие вопросы теории римановых поверхностей естественно приводят к понятию дивизора.

Определения. 1. *Дивизором* $D$ римановой поверхности $S$ называют локально конечную формальную линейную комбинацию

$$D = \Sigma a_i p_i,$$

где $a_i \in \mathbf{Z}$ и $p_i \in S$. Локальная конечность означает, что *носитель дивизора* $D$

$$\operatorname{Supp} D \overset{\mathrm{df}}{=} \{p_i \mid a_i \neq 0\},$$

является дискретным подмножеством в $S$.

2. Дивизоры римановой поверхности $S$ образуют группу $\operatorname{Div} S$ по сложению, называемую *группой дивизоров*.

3. *Дивизор* $D = \Sigma a_i p_i$ называют *эффективным*, если все $a_i \geqslant 0$, и записывают это в виде $D \geqslant 0$.

4. Для конечных *дивизоров* $D = \Sigma a_i p_i$, т. е. для дивизоров с конечным носителем, определена *степень*

$$\deg D \overset{\mathrm{df}}{=} \sum a_i.$$

Пример. 1. Всякий дивизор на компактной римановой поверхности $S$ конечен, а степень задает эпиморфизм $\deg: \operatorname{Div} S \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$.

Пример 2. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — непостоянное отображение римановых поверхностей. Каждая точка $p \in S_2$ определяет эффективный *дивизор слоя* $f^*(p) = \sum\limits_{q \in f^{-1}(p)} \mathrm{mult}_q f \cdot q$, носителем которого является слой $f^{-1}(p)$. По аддитивности определяется гомоморфизм

$$f^*: \mathrm{Div}\, S_2 \to \mathrm{Div}\, S_1, \quad \sum a_i p_i \mapsto \sum a_i f^*(p_i).$$

Дивизор $R \overset{\mathrm{df}}{=} \sum r_p(f) \cdot p \in \mathrm{Div}\, S_1$, где $r_p(f)$ — индекс ветвления отображения $f$ в точке $p$, называют *дивизором ветвления* этого отображения.

Пример 3. Пусть теперь $f$ — непостоянная мероморфная функция на римановой поверхности $S$. Эффективные дивизоры $(f)_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \sum\limits_{f(p)=0} \mathrm{ord}_p f \cdot p$ и $(f)_\infty \overset{\mathrm{df}}{=} \sum\limits_{f(p)=\infty} -\mathrm{ord}_p f \cdot p$ называют соответственно *дивизором нулей* и *дивизором полюсов* функции $f$. Дивизор $(f) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum \mathrm{ord}_p f \cdot p = (f)_0 - (f)_\infty$ называют *дивизором функции* $f$. Дивизоры функций определяют гомоморфизм

$$(\ ): \mathcal{M}(S)^\times \to \mathrm{Div}\, S$$
$$f \mapsto (f).$$

*Дивизоры* вида $(f)$, составляющие его образ, называют *главными*. Ядро этого гомоморфизма состоит из голоморфных функций на $S$, всюду отличных от нуля. В частности, для компактной поверхности $S$ ядро состоит из ненулевых постоянных функций. Поэтому функция, задающая главный дивизор, на компактной римановой поверхности определяется этим дивизором однозначно с точностью до умножения на константу.

Пример 4. Дивизор $D = \Sigma a_i p_i$ римановой сферы $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ будет главным в том и только том случае, когда его степень равна нулю. Действительно, если $\deg D = 0$, то $D = (f)$, где $f = \Pi(z - p_i)^{a_i}$ и произведение берется по $p_i \neq \infty$. Обратное получается из основной теоремы алгебры (ср. со следствием 3 пункта 2.7), поскольку всякая мероморфная функция на $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ рациональна (см. пример 1 пункта 2.2). Согласно следующему пункту, главный дивизор в компактном случае всегда имеет степень 0. Однако для компактной римановой поверхности, не изоморфной $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$, не всякий такой дивизор является главным. Теорема Абеля (см. 2. 1. гл. 3) выясняет, какие из дивизоров степени 0 компактно римановой поверхности действительно являются главными.

Определение 5. *Дивизоры* $D_1$, $D_2$ римановой поверхности $S$ называют *линейно эквивалентными* и обозначают это через $D_1 \sim D_2$, если они отличаются на главный дивизор: $D_1 - D_2 = (f)$, $f \in \mathcal{M}^\times(S)$. Легко проверить, что это на самом деле отношение эквивалентности.

Пример 4 (продолжение). Дивизоры $D_1$, $D_2$ на $\mathbf{CP}^1$ линейно эквивалентны в точности тогда, когда их степени совпадают: $\deg D_1 = \deg D_2$.

**2.7. Конечные отображения римановых поверхностей.** *Отображение* топологических пространств $f: X \to Y$ называют *собственным*, если прообраз всякого компактного подмножества компактен. Это, например, всегда выполнено, когда $X$ компактно.

Определение. Непостоянное собственное *отображение* римановых поверхностей называют *конечным.*

Пример 1. Отображение $\mathbf{D} \xrightarrow{z^n} \mathbf{D}$ конечно.

Пример 2. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — конечное отображение римановых поверхностей, а $U$ — открытое подмножество в $S_2$. Тогда для всякой компоненты связности $S$ подмножества $f^{-1}(U)$ определено конечное отображение римановых поверхностей $f: S \to f(S)$.

Пример 3. Хотя слои включения $\mathbf{C} \to \mathbf{CP}^1$ конечны, оно не является конечным в определенном выше смысле.

Пример 4. Аналогично, не конечно отображение $\mathbf{C} - \{1\} \xrightarrow{z^2} \mathbf{C}$.

Лемма (численный критерий конечности). Отображение римановых поверхностей $f: S_1 \to S_2$ конечно тогда и только тогда, когда все его слои конечны и дивизоры $f^*(p)$ при всех $p \in S_2$ имеют одинаковую степень.

Степень дивизоров слоя $f^*(p)$ конечного отображения римановых поверхностей $f$ называют *степенью* этого *отображения* и обозначают ее через $\deg f$.

Следствие 1. Всякое конечное отображение римановых поверхностей сюръективно. В частности, непостоянная мероморфная функция на компактной римановой поверхности принимает все комплексные значения и $\infty$.

Следствие 2. Всякий главный дивизор компактной римановой поверхности $S$ имеет степень 0, т. е. $\deg(f) = 0$ для всех $f \in \mathcal{M}(S)^\times$.

Следствие 3. (основной теоремы алгебры). Комплексный многочлен степени $n$ имеет $n$ комплексных корней с учетом кратностей.

Ниже приводятся основные способы построения конечных отображений. По пути обсуждаются первые нетривиальные утверждения о римановых поверхностях и их мероморфных функциях.

**2.8. Неразветвленные накрытия римановых поверхностей.** Отображение топологических пространств $f: Y \to X$ называют *неразветвленным накрытием*, если каждая точка $p \in X$ имеет открытую окрестность $U$ такую, что $f^{-1}(U) = \cup U_i$, где $U_i$ — попарно непересекающиеся открытые подмножества в $Y$ и все $f: U_i \to U$ — гомеоморфизмы.

Определение 1. Непостоянное *отображение* римановых поверхностей без точек ветвления называют *неразветвленным*.

Определение 2. Отображение римановых поверхностей называют *неразветвленным* (и оно на самом деле таково) *накрытием*, если оно таково в топологическом смысле.

Пример. Очевидно, конечное неразветвленное отображение римановых поверхностей будет неразветвленным накрытием. С точностью до дискретного подмножества таким — локально «колода карт» — является всякое конечное отображение римановых поверхностей (см. начало п. 2.10)

**2.9. Универсальная накрывающая.** Далее предполагаются известными простейшие понятия и результаты, касающиеся фундаментальной группы $\pi(X)$ топологического пространства $X$ (группы петель = замкнутых путей с точностью до непрерывной деформации) и его универсальной накрывающей $\tilde{X}$. По определению последняя снабжена неразветвленным накрытием $\tilde{X}\to X$ со следующим свойством универсальности: для всякого неразветвленного накрытия $Y\to X$ существует такое непрерывное отображение $\tilde{X}\to Y$, что коммутативен треугольник

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Связное (комплексное или дифференцируемое) многообразие $X$ обладает универсальной накрывающей $\tilde{X}$. Она связна и односвязна. На $\tilde{X}$ свободно и дискретно действует фундаментальная группа $\pi(X)$, при этом $X\simeq\tilde{X}/\pi(X)$. Более того, взаимно однозначно соответствие

$$\tilde{X}/\Gamma\to\tilde{X}/\pi(X)\simeq X \;\leftarrow\; \Gamma$$

между множеством связных неразветвленных накрытий $Y\to X$ (с точностью до изоморфизма) и подгрупп $\Gamma\subseteq\pi(X)$ (с точностью до сопряжения). Если *накрытие* $Y\to X$ *n-листно* (т. е. прообраз точки $p\in X$ состоит из $n$ точек), то $n=(\pi(X):\Gamma)$. Специализация этих результатов на случай римановых поверхностей использует

Предложение. Пусть $S$ — риманова поверхность, а $f:M\to S$ — связное неразветвленное накрытие топологических пространств. На $M$ существует единственная комплексно аналитическая структура, превращающая $f$ в неразветвленное накрытие римановых поверхностей.

В качестве карт на $M$ берутся композиции $\varphi\circ f: U\to\mathbf{C}$, где $f:U\to V$ — гомеоморфизм на открытое подмножество $V\subseteq S$, а $\varphi: V\to\mathbf{C}$ — карта на $S$.

Следствие 1. Имеется взаимно однозначное соответствие между неразветвленными накрытиями $S_1 \to S$ римановой поверхности $S$ и подгруппами ее фундаментальной группы $\pi(S)$. При этом $n$-листному накрытию отвечает подгруппа индекса $n$.

Следствие 2. Универсальная накрывающая $\tilde{S}$ римановой поверхности $S$ является римановой поверхностью, на которой фундаментальная группа $\pi(S)$ действует голоморфными автоморфизмами.

Таким образом, описание всех римановых поверхностей сводится к описанию односвязных и групп автоморфизмов, действующих на них свободно и дискретно. Эта идея развивается в § 5.

Пример 1. Неразветвленное накрытие $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\Lambda$, где $\Lambda \subset \mathbf{C}$ — дискретная решетка, универсально и $\pi(\mathbf{C}/\Lambda) \simeq \Lambda$.

Пример 2. В частности, универсально накрытие $\mathbf{C} \xrightarrow{\exp} \mathbf{C}^\times$ и $\pi(\mathbf{C}^x) \simeq \mathbf{Z}$ с действием $z \mapsto z + 2\pi\sqrt{-1}\, n$, $n \in \mathbf{Z}$, на $\mathbf{C}$.

Пример 3. Аналогично, универсально накрытие $\mathbf{H} \xrightarrow{\exp(\sqrt{-1}z)} \mathbf{D}^\times$ и $\pi(\mathbf{D}^\times) \simeq \mathbf{Z}$ с действием $z \mapsto z + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, на $\mathbf{H}$. Поэтому для каждого $n > 0$ существует единственное неразветвленное $n$-листное накрытие $S \to \mathbf{D}^x$. Оно изоморфно $\mathbf{D}^\times \xrightarrow{z^n} \mathbf{D}^\times$.

**2.10. Продолжение отображений.** Фундаментальная группа пригодна и для описания конечных отображений. Если $f: S_1 \to S_2$ — конечное отображение римановых поверхностей, то $f: S_1 - f^{-1}(\Delta) \to S_2 - \Delta$ — конечное неразветвленное накрытие, где $\Delta \subset S_2$ — дискретное подмножество, над которым лежат точки ветвления. Обратно,

Предложение. Пусть $\Delta \subset S_2$ — дискретное подмножество. Конечное неразветвленное накрытие $U \to S_2 - \Delta$ однозначно продолжается до (возможно разветвленного) конечного отображения $S_1 \to S_2$, $S_1 \supseteq U$.

Это утверждение, очевидно, локально. Поэтому можно предполагать, что $S = \mathbf{D}$, $\Delta = \{0\}$. Но каждое связное неразветвленное накрытие $U \to \mathbf{D}^\times$ изоморфно $\mathbf{D}^\times \xrightarrow{z^n} \mathbf{D}^\times$ (см. пример 3 в п. 2.9), продолжаемому до конечного отображения $\mathbf{D} \xrightarrow{z^n} \mathbf{D}$.

Следствие 1. Имеется взаимно однозначное соответствие между конечными отображениями $S_1 \to S_2$ степени $n$, разветвленными лишь над $\Delta \subset S_2$, и подгруппами индекса $n$ в $\pi(S_2 - \Delta)$.

Если поверхность $S_2$ компактна, то $\Delta$ конечно и фундаментальная группа $\pi(S_2 - \Delta)$ может быть явно конечно представлена (см. п. 3.4).

Определение. *Отображение* римановых поверхностей $f: S_1 \to S_2$ называют *нормальным* или *Галуа*, когда группа

$$\operatorname{Aut} f \overset{\mathrm{df}}{=} \{g \in \operatorname{Aut} S_1 \mid f \circ g = f\}$$

его автоморфизмов действует транзитивно на слоях $f^{-1}(p)$, $p \in S_2$.

Следствие 2. Нормальные конечные отображения $f: S_1 \to S_2$ отвечают нормальным делителям $\Gamma \triangleright \pi(S_2 - \Delta)$, при этом $\operatorname{Aut} f \simeq \pi(S_2 - \Delta)/\Gamma$.

### 2.11 Риманова поверхность алгебраической функции.

Предложение 1. Пусть

$$P(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \ldots + c_n \in \mathscr{M}(S_2)[T]$$

— неприводимый многочлен. Тогда существует конечное отображение римановых поверхностей $f: S_1 \to S_2$ степени $n$ и мероморфная функция $F \in \mathscr{M}(S_1)$, удяовлетворяющая уравнению

$$F^n + f^*(c_1) F^{n-1} + \ldots + f^*(c_n) = 0. \qquad (2)$$

Функция $F$ алгебраична над полем $\mathscr{M}(S_2)$ и ее можно рассматривать как $n$-значную функцию на $S_2$. Ее значения составляют точки поверхности $S_1$, называемой поэтому *римановой поверхностью алгебраической функции* $F$. Точнее, пусть $\Delta \subset S_2$ — дискретное подмножество, включающее полюса функций $c_1, \ldots, c_n$ и точки $p \in S_2$, в которых многочлен

$$P_p(T) \overset{\mathrm{df}}{=} T^n + c_1(p) T^{n-1} + \ldots + c_n(p) \in \mathbf{C}[T]$$

имеет кратные корни. Последние точки суть нули дискриминанта многочлена $P$. Подмногообразие

$$U = \{(p, z) \in (S_2 - \Delta) \times \mathbf{C} \mid P_p(z) = 0\} \subset (S_2 - \Delta) \times \mathbf{C}$$

есть риманова поверхность. Связность $U$ — нетривиальный факт, вытекающий из результата, обратного к предложению 1.

Предложение 2. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — конечное отображение римановых поверхностей. Тогда каждая функция $F \in \mathscr{M}(S_1)$ алгебраична над $\mathscr{M}(S_2)$ и удовлетворяет уравнению (2) степени $n \leqslant \deg f$.

Удаляя точки ветвления и полюса функции $f$, получаем неразветвленное накрытие $S_2 - \Delta$. Пусть $V \subseteq S_2 - \Delta$ — такое (связное) открытое множество, что $f^{-1}(V) = \bigcup V_i$, $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $f: V_i \to V$ — изоморфизмы. Положим $F_i = \tau_i^*(F)$ и $c_i = (-1)^i s_i$, где $\tau_i = f^{-1}: V \to V_i$ и $s_i$ — элементарные симметрические функции от $F_1, \ldots, F_n$. Функции $c_i$ определены корректно и голоморфны на $S_2 - \Delta$, а $F$ удовлетворяет уравнению (2). По теореме Римана об устранимой особенности коэффициенты $c_i$ продолжаются до функций, мероморфных на $S_2$.

Возвращаясь к конструкции римановой поверхности алгебраической функции $F$, отметим, что эта функция голоморфна на $U$ и задается проекцией $(p, z) \mapsto z$. Проекция $(p, z) \mapsto p$ определяет неразветвленное накрытие $U \to S_2 - \Delta$. Снова по теореме Римана об устранимой особенности и по предложению пункта 2.10 получаем требуемое отображение $f: S_1 \to S_2$, $U \subseteq S_1$, и мероморфную функцию $F$ на $S_1$. Но, согласно предложению 2, разложение поверхности $S_1$ на компоненты связности задает разложение $P$ на множители, а потому поверхность $S_1$ (и $U$) связна.

Пример. Пусть $f(z) = (z-a_1) \ldots (z-a_n)$ — многочлен с попарно различными корнями $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$. Неприводимый над $\mathscr{M}(\mathbf{CP}^1) = \mathbf{C}(z)$ многочлен $P(T) = T^2 - f$ определяет алгебраическую функцию $\sqrt{f}$. Ее *риманова поверхность* $S$, называемая *гиперэллиптической,* компактна. Соответствующее *отображение* $\gamma: S \to \mathbf{CP}^1$ степени 2 и *инволюцию* $j: S \to S$, переставляющую точки слоев $\gamma$, также называют *гиперэллиптическими.* Точки ветвления $\gamma$ — неподвижные точки $j$ лежат над точками

$$a_1, \ldots, a_n, \infty \text{ при нечетном } n \text{ и}$$

$$a_1, \ldots, a_n \text{ при четном } n.$$

Было бы удобнее задавать гиперэллиптическую поверхность $S$ в виде плоской кривой $y^2 = f(z)$. Однако при $n \geqslant 4$ она имеет особую точку на бесконечности. Поэтому $S$ можно считать ее десингуляризацией (см. ниже следствие 4).

По теореме о примитивном элементе [14] из предложений вытекают

Теорема 1. Если $f: S_1 \to S_2$ — конечное отображение римановых поверхностей, то расширение $f^*: \mathscr{M}(S_2) \hookrightarrow \mathscr{M}(S_1)$ конечно и его степень $\leqslant \deg f$.

Теорема 2. Пусть $S_2$ — риманова поверхность, а $\varphi: \mathscr{M}(S_2) \hookrightarrow K$ — конечное $\mathbf{C}$-расширение степени $n$. Тогда существует конечное отображение римановых поверхностей $f: S_1 \to S_2$ степени n с расширением $f^*: \mathscr{M}(S_2) \hookrightarrow \mathscr{M}(S_1)$, изоморфным $\varphi$. Такое отображение $f$ единственно с точностью до изоморфизма.

Следствие 1. Поле мероморфных функций $\mathscr{M}(S)$ компактной римановой поверхности $S$ конечно порождено над $\mathbf{C}$ и имеет степень трансцендентности $\leqslant 1$.

Действительно, если на $S$ нет непостоянных мероморфных функций, то $\mathscr{M}(S) = \mathbf{C}$ и степень трансцендентности $\mathscr{M}(S)/\mathbf{C} = 0$. В противном случае, применяя теорему 1 к непостоянной мероморфной функции $f: S \to \mathbf{CP}^1$, получаем ст. тр. $\mathscr{M}(S)/\mathbf{C} =$ ст. тр. $\mathbf{C}(z)/\mathbf{C} = 1$.

Замечание 1. На самом деле, в теореме 1 и следствии 1 выполнены равенства (см. следствия 3 и 7 в 4.14).

Обратно, из теоремы 2 выводится

Следствие 2. Всякое конечно порожденное над $\mathbf{C}$ поле $K$ степени трансцендентности 1 изоморфно полю мероморфных функций $\mathscr{M}(S)$ компактной римановой поверхности $S$.

Такую поверхность называют *моделью поля* $K$. Например, риманова сфера $\mathbf{CP}^1$ является моделью чисто трансцендентного расширения $\mathbf{C}(z)$ поля $\mathbf{C}$.

Замечание 2. О единственности модели см. в следствии 12 пункта 4.14 (ср. с теоремой о модели для кривых в п. 1.7 гл. 2).

*Алгебраическую кривую* на $\mathbf{CP}^2$, заданную неприводимым однородным многочленом $F(x_0, x_1, x_2)$, называют *неприводимой* (ср. с п. 1.4 гл. 2).

Следствие 3. Пусть $f: S \to \mathbf{CP}^2$ — непостоянное голоморфное отображение компактной римановой поверхности $S$ в $\mathbf{CP}^2$. Тогда $f(S)$ — неприводимая алгебраическая кривая.

Уравнение кривой $f(S)$ находят следующим способом. Пусть $(x_0 : x_1 : x_2)$ — однородные координаты на $\mathbf{CP}^2$. По следствию 1 мероморфные функции $f^*(x_0/x_2)$, $f^*(x_1/x_2) \in \mathscr{M}(S)$ алгебраически зависимы над $\mathbf{C}$. Пусть $F(z_1, z_2)$ — комплексный многочлен, минимальной степени $d$, задающий алгебраическую зависимость $F(f^*(x_0/x_2), f^*(x_1/x_2)) = 0$. Тогда многочлен $x_2^d F(x_0/x_2, x_1/x_2)$ неприводим и задает кривую $f(S)$. Обратно,

Следствие 4. Пусть $C \subset \mathbf{CP}^2$ — неприводимая алгебраическая кривая. Тогда существует компактная риманова поверхность $S$ и голоморфное отображение $f: S \to \mathbf{CP}^2$, образ которого совпадает с $C$. При подходящем выборе поверхности $S$, отображение $f$ взаимно однозначно в общей точке; такое отображение $f$ называют *десингуляризацией* кривой $C$ (см. рис. 8 и ср. с п. 1.7 гл. 2).

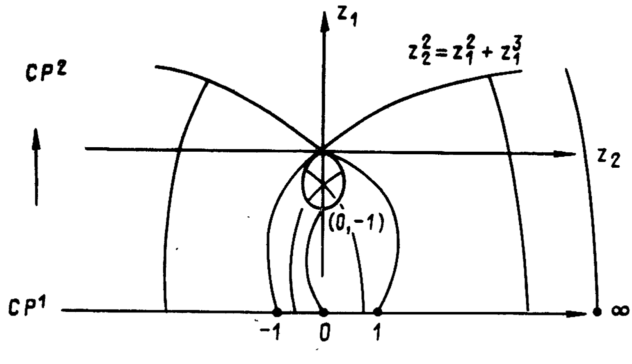



Рис. 8

Десингуляризация декартового листа:

кривой $x_2 x_1^2 = x_0^2 x_2 + x_0^3$ в аффинных координатах $z_1 = x_0/x_2$, $z_2 = x_1/x_2$; десингуляризация задается параметризацией $z_1 = z^2 - 1$, $z_2 = z(z^2 - 1)$; $\infty \to (0:1:0)$

Пусть $F(x_0, x_1, x_2)$ — неприводимый однородный многочлен, задающий $C$. В качестве римановой поверхности $S$ возьмем модель поля частных области целостности $\mathbf{C}[x_0, x_1, x_2]/(F(x_0, x_1, x_2), x_2 - 1)$, где $(F(x_0, x_1, x_2), x_2 - 1)$ — идеал, порожденный многочленами $F(x_0, x_1, x_2)$ и $x_2 - 1$. Отображение $f(p) = (x_0(p) : x_1(p) : 1)$, $p \in S$, продолжается по непрерывности до десингуляризации кривой $C$. В частности, если $C$ неособа, то $S$ — риманова поверхность кривой $C$ и $f=id$. Если же $C$ имеет особенности, то $f$ их разрешает, являясь изоморфизмом над неособыми точками. По связности римановых поверхностей получаем

Следствие 5. Плоская неприводимая комплексная кривая связна.

Следствие 6. Пусть $C \subset \mathbf{CP}^2$ — неособая алгебраическая кривая. Тогда всякая мероморфная функция на римановой поверхности кривой $C$ будет ограничением рациональной функции $\mathbf{CP}^2$ (см. пример 3 в п. 2.2).

## § 3. Топология римановых поверхностей

В этом параграфе римановы поверхности рассматриваются с точки зрения тополога. Естественно, это потребует привлечения некоторых понятий, методов и результатов из алгебраической топологии. Подробнее о топологии поверхностей можно прочитать в [51], а об алгебраической топологии в целом — в [4], [27].

**3.1. Ориентируемость.** Хотя понятие ориентируемости является чисто топологическим [27], для простоты мы ограничимся его гладким вариантом. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ — две вещественные координатные системы на дифференцируемом многообразии $M$. Говорят, что эти системы координат одинаково ориентированы, если якобиан перехода $\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ положителен всюду в области определения. Дифференцируемое или комплексное *многообразие* $M$ называют (гладко) *ориентируемым*, если оно обладает дифференцируемым атласом с одинаково ориентированными координатными системами.

Предложение. Всякое комплексное многообразие $M$ ориентируемо

Обычно в качестве ориентирующего атласа на $M$ берут овеществление аналитического атласа. Это значит, что комплексные координатные системы $(z_1, \ldots, z_n)$ этого атласа заменяют на вещественные координатные системы $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, где $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$. Доказательство одинаковой ориентированности последних систем сводится к следующему факту линейной алгебры. Пусть $A$ — комплексная $n \times n$-матрица $\mathbf{C}$-линейного отображения $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$. После овеществления отображение $f$ превращается в $\mathbf{R}$-линейное отображение $f_{\mathbf{R}}: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$. Если $A_{\mathbf{R}}$ — его вещественная $2n \times 2n$-матрица, то

$$\det A_{\mathbf{R}} = |\det A|^2$$

(см. [6]). Случай $n=1$ очевиден: $A = a + \sqrt{-1}\, b$, $A_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ и $\det A_{\mathbf{R}} = a^2 + b^2 = |a + \sqrt{-1}\, b|^2$.

Рассмотрим риманову поверхность $S$. Пусть $p\in S$ и $U$ — открытая окрестность точки $p$, гомеоморфная единичному диску. Тогда $\pi(U-p)\simeq \mathbf{Z}$ и эта фундаментальная группа имеет каноническую образующую — однократный положительный обход вокруг точки $p$. Действительно, локальный параметр $z$ в точке $p$ определяет малый однократный обход $z(t)=\varepsilon\cdot e^{2\pi\sqrt{-1}t}$, $t\in[0, 1]$ называемый положительным. Всякий другой обход на $U$ вокруг точки $p$ называют положительным, если он непрерывно деформируется в данный малый обход. (На гауссовой плоскости $\mathbf{C}$ это обходы против часовой стрелки.) Положительность обходов не зависит от выбора локального параметра. Действительно, все локальные параметры $z=x+\sqrt{-1}\,y$ непрерывно деформируются друг в друга в окрестности точки $p$, что соответствует положительности якобиана перехода их вещественных компонент $x$, $y$. Интуитивно, ориентируемость поверхности $S$ означает, что если малый диск с фиксированным направлением обхода его границы переместить вдоль любого замкнутого пути на $S$, то после возвращения направление обхода границы диска не изменится. Локальные координаты римановой поверхности позволяют контролировать направление обхода на всем пути перемещения диска.

Замечание. 1. Положительность однократных обходов зависит от выбора корня $\sqrt{-1}\in\mathbf{C}$, поэтому $\sqrt{-1}$ всегда считают фиксированным.

Замечание 2. Существуют неориентируемые поверхности, например, вещественная проективная плоскость $\mathbf{RP}^2$, лента Мёбиуса. По предложению такие поверхности не имеют аналитической структуры.

**3.2. Триангулируемость.** Треугольником на римановой поверхности $S$ называют гомеоморфный образ $T$ обычного евклидова треугольника с естественной топологией. Образы вершин называют вершинами треугольника $T$, образы ребер — ребрами. *Триангуляцией* римановой поверхности $S$ называют семейство $\{T_i\}$ треугольников на $S$ такое, что

(а) $S=\bigcup T_i$;

(б) любые два треугольника либо не пересекаются, либо пересекаются по одной общей вершине, либо пересекаются по одному общему ребру;

(в) если семейство $\{T_i\}$ не конечно, то требуется его локальная конечность, которая эквивалентна тому, что имеется лишь конечное число треугольников с общей вершиной и их объединение задает окрестность этой вершины (см. рис. 9).

Всякая триангуляция компактной римановой поверхности конечна.

Теорема (Радо, [18]). Всякая риманова поверхность триангулируема.

В гладкой ситуации, например, для римановой или дифференцируемой поверхности триангулируемость равносильна счетности базы топологии или счетности топологии в бесконечности [61]. В частности, теорема очевидна в компактном случае.

**3.3. Развертка. Топологический род.** По конечной триангулируемости компактная риманова поверхность $S$ получается

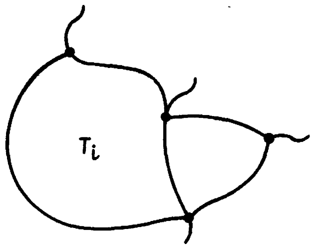



Рис. 9

склейкой пар ребер некоторого многоугольника $M$, называемого ее *разверткой*. Склейку ребер описывает символ развертки — последовательность букв, обозначающих ребра при обходе границы $M$. Склеиваемые пары ребер обозначаются при этом одной и той же буквой. Если направление склейки ребер совпадает с направлением обхода, то эти ребра пишут буквой без степени, в противном случае одной из букв приписывают степень —1. Имеется ряд стандартных операций с развертками, позволяющих построить развертку с достаточно простым символом [69].

Теорема. Компактная риманова поверхность $S$ имеет развертку с символом вида

(1) $aa^{-1}$ или

(2) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$.

Следствие. В случае (1) риманова поверхность $S$ гомеоморфна сфере, а в случае (2) — сфере с $g$ ручками.

Это показывает (хотя и не доказывает), что символы, указанные в теореме, являются топологическими инвариантами римановой поверхности.

Определение. Число 0 в случае (1) и число $g$ в случае (2) называют (*топологическим*) *родом* компактной *римановой поверхности* $S$. Иначе говоря, риманова поверхность $S$ рода $g$ гомеоморфна сфере с $g$ ручками. Род римановой поверхности $S$ обозначают через $g(S)$ или просто через $g$.

Пример. Эллиптическая кривая $\mathbf{C}/\Lambda$ обладает разверткой с символом $aba^{-1}b^{-1}$, откуда эллиптическая кривая гомеоморфна тору и $g(\mathbf{C}/\Lambda)=1$.

**3.4. Строение фундаментальной группы.**

Теорема 1. Фундаментальная группа компактной римановой поверхности $S$ рода $g$ изоморфна факторгруппе свободной группы с образующими $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ по нормальной подгруппе, порожденной элементом $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$.

Случай $g=0$ тривиален. При $g\geqslant 1$ рассматривается развертка с символом $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$. Все вершины этой развертки склеиваются в одну точку $p\in S$. Поэтому каждое ребро $a_i$, $b_i$ задает петлю на $S$, а ее гомотопический класс — элемент в $\pi(S)$. Петля символа $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$, очевидно, гомотопна тривиальной. Указанное сопоставление задает требуемый изоморфизм. Доказательство основано на теореме Зейферта—ван Кампена [51].

Пример. Для эллиптический кривой $\mathbf{C}/\Lambda$ фундаментальная группа $\pi(\mathbf{C}/\Lambda)$ изоморфна свободной группе с образующими $a$, $b$ и соотношением коммутации $aba^{-1}b^{-1}=1$. Следовательно, она изоморфна свободной абелевой группе с двумя образующими $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ (ср. с примером 1 в 2.9).

Для конструкции конечных отображений на компактные римановы поверхности полезно знать фундаментальную группу проколотых поверхностей (см. пункт 2.10).

Теорема 2. Пусть $S$ — компактная риманова поверхность рода $g$, на которой отмечено конечное множество точек $p_1, \ldots, p_n$. Тогда фундаментальная группа римановой поверхности $S - \{p_i\}$ изоморфна факторгруппе свободной группы с образующими $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, c_1, \ldots, c_n$ по нормальной подгруппе, порожденной элементом $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}c_1\ldots c_n$.

Доказывается также как теорема 1 (см. рис. 10).

Следствие 1. Для любой компактной римановой поверхности $S$ и любой конечной группы $G$ существует конечное нормальное отображение римановых поверхностей $f: S_1\to S_2$ с группой автоморфизмов $\operatorname{Aut} f\simeq G$.

Переходя к расширениям полей мероморфных функций (ср. со следствиями 9 и 11 в п. 4.14), получаем

Следствие 2. Любое конечное порожденное над $\mathbf{C}$ поле степени трансцендентности 1 имеет конечное нормальное расширение с любой наперед заданной конечной группой Галуа.

Замечание. Следствие 2 решает функциональный аналог обратной задачи Галуа. Этот по существу топологический подход к задаче Галуа не имеет полного аналога в случае полей алгебраических чисел.

**3.5. Эйлерова характеристика.** Рассмотрим компактную (риманову) поверхность $S$. Пусть $\{T_i\}$ — ее триангуляция. Обозначим через $v$ число вершин, через $e$ — число ребер, а через $t$ — число треугольников.

Лемма. Число

$$\chi(S)=v-e+t$$

не зависит от триангуляции.

Более того, лемма остается справедливой для любого конечного разбиения поверхности $S$ на многоугольники (гомеоморфные образы выпуклых многоугольников евклидовой плоскости); при этом под $t$ понимается число многоугольников этого разбиения.

Определение. Число $\chi(S)$ называют *эйлеровой характеристикой поверхности* $S$.

Следствие 1. Для компактной римановой поверхности $S$ рода $g$

$$\chi(S)=2-2g$$

В частности, эйлерова характеристика $\chi(S)$ четна и $\leqslant 2$.

Стандартная развертка поверхности $S$ (см. пункт 3.3) при $g \geqslant 1$ задает разбиение с одним многоугольником, одной вершиной и $2g$ ребрами.

Следствие 2 (Эйлер). Число вершин $B$, ребер $P$ и граней $\Gamma$ произвольного выпуклого многогранника связывает формула $B-P+\Gamma=2$.

**3.6. Формулы Гурвица.** Эйлерова характеристика позволяет контролировать поведение рода при отображениях римановых поверхностей.

Формула Гурвица для эйлеровой характеристики. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — непостоянное отображение компактных римановых поверхностей. Тогда

$$\chi(S_1)=\deg f \cdot \chi(S_2)-\deg R,$$

где $R$ — дивизор ветвления отображения $f$ (см. пример 2 в п. 2.6). В частности, число точек ветвления с учетом кратностей всегда четно, если под кратностью понимать индекс ветвления.

Для доказательства на $S_2$ выбирается достаточно мелкая триангуляция $\{T_i\}$, вершины которой включают образы точек ветвления. На $S_1$ берется триангуляция $f^{-1}\{T_i\}$; прообраз одного треугольника состоит из $\deg f$ треугольников. Подсчет числа вершин, ребер и треугольников приводит к требуемому соотношению [31].

Следствие 1 предыдущего пункта позволяет переписать соотношение для эйлеровых характеристик через роды римановых поверхностей.

Формула Гурвица для рода.

$$g(S_1)=\deg f \cdot g(S_2)+\frac{\deg R}{2}-\deg f+1.$$

Следствие. $g(S_1) \geqslant g(S_2)$.

Пример 1. Пусть $S$ — гиперэллиптическая риманова поверхность с проекцией $\gamma: S \to \mathbf{CP}^1$, имеющей $n$ точек ветвления. Тогда $g(S)=n/2-1$. Значит, на всякой ориентируемой компактной поверхности имеется структура римановой поверхности, например, гиперэллиптической.

Пример 2. Рассмотрим компактную риманову поверхность $S$ рода $g$ и ее непостоянное отображение $f:S\to\mathbf{CP}^1$ степени $n$. Из формулы Гурвица для рода вытекает неравенство

$$\deg R=2\,(n+g-1)\geqslant 2n-2,$$

где $R$ — дивизор ветвления $f$. Обратно, для всякого четного $b\geqslant 2n-2$ имеется конечное отображение $f:S\to\mathbf{CP}^1$ с $\deg f=n$ и $\deg R=b$. Более того, можно построить такое $f$, имеющее лишь простые (индекса 1) ветвления над $b$ различными точками $p_1,\ldots,p_b\in\mathbf{CP}^1$. Отождествим общий слой $f^{-1}(p)$ с множеством $\{1,\ldots,n\}$. Движение слоев $f$ над петлями, не задевающими $p_i$ определяет гомоморфизм $\mu:\pi(\mathbf{CP}^1-\{p_i\})\to S_n$, называемый *монодромией* $f$, где $S_n$ — группа перестановок $\{1,\ldots,n\}$. Итак, образующим $c_i$ группы $\pi(\mathbf{CP}^1-\{p_i\})$ (см. теорему 2 в п. 3.4. и рис. 10) отвечают перестановки $\sigma_i\in S_n$. При этом должны выполняться условия: (1) $\sigma_1\ldots\sigma_b=id$ по теореме 2 пункта 3.4,

(2) $\sigma_i$ действуют транзитивно на $\{1,\ldots,n\}$ по связности $S$,

(3) $\sigma_i$ — транспозиции, поскольку над каждой точкой $p_i$ лежит одно простое ветвление (ср. с примером 6 в п. 1.6). Этим условиям, например, удовлетворяют транспозиции $\sigma_1=\sigma_2=(1,\,2),\ldots,\ \sigma_{2n-3}=\sigma_{2n-2}=(1,\,n),\ \sigma_{2n-1}=\cdots=\sigma_b=(1,2)$. Остается установить существование требуемого отображения

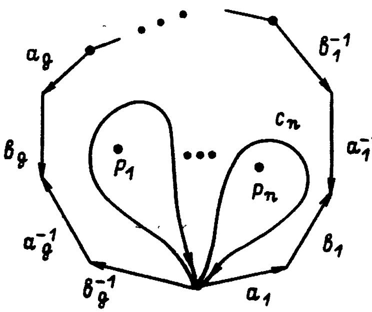



Рис. 10

$f:S\to\mathbf{CP}^1$ с заданной монодромией $\mu$, удовлетворяющей (2) и (3). Для этого можно применить следствие 1 пункта 2.10 с подгруппой $\Gamma=\{\sigma\in\pi(\mathbf{CP}^1-\{p_i\})\,|\,\mu(\sigma)\,1=1\}$ индекса $n$ в $\pi(\mathbf{CP}^1-\{p_i\})$. Точки слоя $f^{-1}(p)$ тогда отождествляются с левыми классами смежности $\pi(\mathbf{CP}^1-\{p_i\})/\Gamma$, а монодромия $\mu$ с естественным гомоморфизмом $\pi(\mathbf{CP}^1-\{p_i\})\to\mathrm{Aut}(\pi(\mathbf{CP}^1-\{p_i\})/\Gamma)$ действия на этих классах.

Более нагляден следующий способ построения $f:S\to\mathbf{CP}^1$ по монодромии $\mu$. Выберем конечное число непересекающихся дуг $\gamma_j$, соединяющих $p_i$, отбрасывание которых приводит к односвязной поверхности $\mathbf{CP}^1 - \bigcup\gamma_j$. Также предполагается, что $p \in \mathbf{CP}^1 - \bigcup\gamma_j$. Каждая дуга $\gamma_j$ определяет перестановку $\sigma_j \in S_n$, если условиться называть одну из сторон дуги $\gamma_j$ верхним краем, а другую — нижним; $\sigma_j$ есть монодромия $\mu(u)$ пути $u$, проходящего однократно через $\gamma_j$ сверху вниз. Возьмем непересекающиеся копии $T_1, \ldots, T_n$ поверхности $\mathbf{CP}^1 - \bigcup\gamma_j$. Для каждого $j$ добавим к $\bigcup T_l$ $n$ копий $\{\gamma_j^e\}$ дуги $\gamma_j$, отождествляя при этом $\gamma_j^e$ с границей копии $T_l$ вдоль верхнего края разреза $\gamma_j$, а также с границей $T_{\sigma_j(l)}$ вдоль нижнего края разреза $\gamma_j$ (см. рис. 11). В результате получаем требуемую поверхность $S$ с естественной проекцией $f: S \to \mathbf{CP}^1$. Указанная конструкция иллюстрирует *хирургию* на римановых поверхностях — метод построения римановой поверхности из заданных при помощи «ножниц и клея».

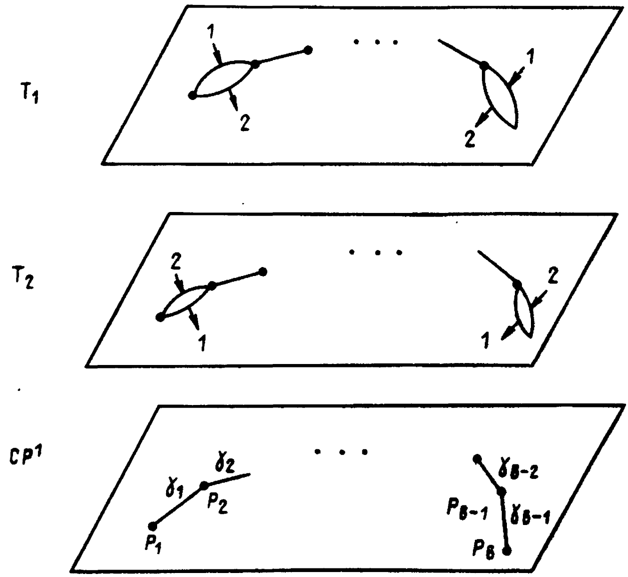



Рис. 11. Гиперэллиптическая проекция

Очевидно, число отображений $f: S \to \mathbf{CP}^1$ с $b$ простыми ветвлениями над фиксированными точками $p_i$ конечно. Гурвиц нашел формулу для числа таких отображений и установил их топологическую эквивалентность [45].

Замечание. *Группа монодромии* $\overset{\text{df}}{=}$ образ монодромии $\mu$ совпадает с полной группой перестановок $S_n$ для достаточно разветвленного отображения $f: S \to \mathbf{CP}^1$, например, при $b \geqslant$

$\geqslant n(n-1)$. Отсюда и из неразрешимости групп $S_n$ при $n \geqslant 5$ вытекает теорема Абеля о неразрешимости в радикалах общего комплексного многочлена степени $\geqslant 5$ [1].

Ниже предполагается знакомство с такими понятиями комбинаторной топологии как

**3.7. Гомологии. Когомологии. Числа Бетти.** Пусть $S$ — компактная риманова поверхность рода $g$.

Теорема. Имеется естественный изоморфизм

$$H_1(S, \mathbf{Z}) \rightleftarrows \pi(S)/[\pi(S), \pi(S)],$$

где $[\pi(S), \pi(S)]$ — коммутант фундаментальной группы $\pi(S)$.

Каждый путь гомотопически эквивалентен пути по ребрам триангуляции, а потому представим симплициальной 1-цепью. Соответственно петля представима 1-циклом. Это и задает изоморфизм [69]. В частности, ребра $a_i$, $b_i$ стандартной развертки (см. рис. 10 при $n=0$) определяют одномерные классы гомологий, также обозначаемые через $a_i$, $b_i$.

Пример. $H_1(\mathbf{C}/\Lambda, \mathbf{Z}) \simeq \Lambda/_{[\Lambda,\Lambda]} \simeq \Lambda$ для эллиптической кривой $\mathbf{C}/\Lambda$.

Следствие.

$$H^1(S, \mathbf{Z}) \simeq H_1(S, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_{a_1} \oplus \mathbf{Z}_{b_1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_{a_g} \oplus \mathbf{Z}_{b_g},$$

$$H^0(S, \mathbf{Z}) \simeq H_0(S, \mathbf{Z}) \simeq H^2(S, \mathbf{Z}) \simeq H_2(S, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z},$$

откуда

$$b^1 = b_1 = 2g, \quad b^0 = b_0 = b^2 = b_2 = 1 \quad \text{и} \quad \chi(S) = 2 - 2g.$$

**3.8. Индекс пересечения. Двойственность Пуанкаре.** Пути $u(t)$ и $v(t)$ на $\mathbf{C}$ пересекаются трансверсально в точке $p = u(t_0) = v(t_0)$, если касательные векторы $\frac{du}{dt}(t_0)$ и $\frac{dv}{dt}(t_0)$ вещественно линейно независимы. При этом индекс пересечения $(u.v)_p$ в точке $p$ считают равным 1, когда $\frac{du}{dt}(t_0)$, $\frac{dv}{dt}(t_0)$ — положительный базис на $\mathbf{C}$, т. е. его координатная система одинаково ориентирована с системой $(x, y)$, где $z = x + \sqrt{-1}y$. В противном случае $(u, v)_p = -1$. Аналогично, с помощью локальных координат римановой поверхности $S$ определяется трансверсальность пересечения и индекс пересечения в точке на $S$.

Лемма. Любые две петли на $S$ с точностью до гомотопии пересекаются трансверсально.

Доказывается на основании теорем Арцела и Сарда [3].

Определение. *Индекс пересечения* двух трансверсально пересекающихся *петель* $u$ и $v$ на римановой поверхности $S$ определяется формулой

$$(u.v) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum (u.v)_p,$$

где $p$ пробегает (конечное) множество точек пересечения петель.

Следующий результат позволяет перенести понятие индекса пересечения на любую пару петель.

Предложение (о гомотопической инвариантности). Индекс пересечения $(u.v)$ зависит лишь от класса гомотопии петель $u$ и $v$.

Отметим, что учет не просто точек пересечения, а их вклада с определенным знаком существенен (см. рис. 12). Легко проверить следующие свойства индекса пересечения:

(1) $(u.v.w) = (u.w) + (v.w)$ и $(u^{-1}.w) = -(u.w)$, где $u.v$ — композиция петель $u$ и $v$, а $u^{-1}$ — петля, обратная к $u$;

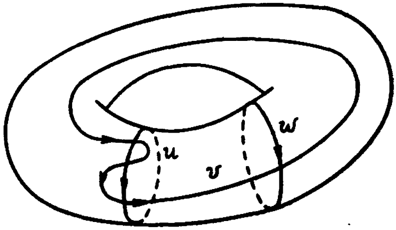



Рис. 12. Индексы пересечения $(u, v) = (w \cdot v) = 1$

(2) $(u.v) = -(v.u)$ (кососимметричность).

Отсюда и по теореме пункта 3.7 в компактном случае получаем билинейную кососимметрическую форму

$$(\,.\,) : H_1(S, \mathbf{Z}) \times H_1(S, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}. \qquad (3)$$

Предложение. Форма (3) унимодулярна.

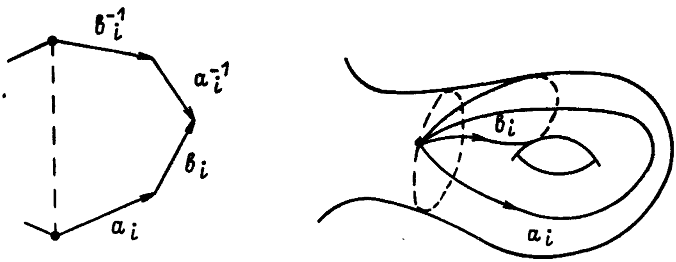



Рис. 13

Значит, группа $H_1(S, \mathbf{Z})$ обладает базисом $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, в котором

$$(a_i.a_j) = (b_i.b_j) = 0 \text{ и } (a_i.b_j) = \delta_{ij}.$$

Таков, например, базис, задаваемый ребрами развертки с символом $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ при положительном обходе ее границы (см. следствие в п. 3.7 и рис. 13).

Следствие. (ср. с. [4]). Унимодулярная форма (3) индуцирует так называемый изоморфизм двойственности Пуанкаре

$$H_1(S, \mathbf{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(H_1(S, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) = H^1(S, \mathbf{Z}).$$

## § 4. Анализ на римановых поверхностях

Параграф освещает три темы: анализ на гладких поверхностях (см. пп. 4.1—4.7), мероморфные дифференциалы на римановых поверхностях (пп. 4.8—4.10) и основные теоремы существования (пп. 4.11 по 4.15). Подробнее об анализе на дифференцируемых многообразиях можно ознакомиться по [31], [58], [68], [72]. Дифференцируемость всюду предполагается бесконечной.

**4.1. Касательные векторы. Дифференцирования.** Рассмотрим риманову поверхность $S$. Под дифференцируемой комплекснозначной функцией на $S$ понимаются дифференцируемые отображения вида $S\to\mathbf{C}$ (см. п. 1.7). Дифференцируемые комплекснозначные функции на $S$ образуют $\mathbf{C}$-алгебру $\mathscr{E}(S)$. *Дифференцированием* алгебры $\mathscr{E}(S)$ в точке $p\in S$ называют $\mathbf{C}$-линейное отображение $D:\mathscr{E}(S)\to\mathbf{C}$, удовлетворяющее соотношению Лейбница: $D(f\cdot g)=D(f)\cdot g(p)+f(p)\cdot D(g)$. Дифференцирования в точке $p$ образуют комплексное векторное пространство с естественными операциями сложения и умножения на константу. Это пространство обозначают через $T_p(S)$ и называют *касательным пространством* к $S$ в точке $p$.

Примеры. Пусть $z=x+\sqrt{-1}y$ — локальная координата в точке $p\in S$. Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ функций $f\in\mathscr{E}(S)$, предварительно записанных в локальных координатах $x$, $y$, определяют дифференцирования $\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p$, $\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$ в точке $p$. Дифференцирования задают также операторы исчисления Виртингера:

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p,\ \left.\frac{\partial}{\partial \bar z}\right|_p,\ \text{где}\ \frac{\partial}{\partial z}\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Отметим, что голоморфные функции на открытом множестве $U\subseteq\mathbf{C}$ суть дифференцируемые функции $f\in\mathscr{E}(U)$, удовлетворяющие уравнению Коши — Римана $\frac{\partial}{\partial \bar z}f=0$ [12].

Лемма. Вектора $\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p$, $\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$ $\left(\text{соответственно } \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial \bar z}\right|_p\right)$ составляют базис касательного пространства $T_p(S)$. Значит, $\dim_{\mathbf{C}} T_p(S)=2$.

Замечание. Алгебра $\mathscr{E}(S)$ огромна по запасу функций. Например, всякую дифференцируемую функцию, определенную в окрестности точки $p$, можно продолжить до дифференцируемой функции на $S$, не изменяя ее вблизи $p$. Этот и подобные факты получают с помощью теоремы о разбиении единицы [68].

**4.2. Дифференциальные формы.** Пусть $S$ — риманова поверхность. Комплекснозначная функция на семействе касательных пространств $\bigcup T_p(S)$, линейная на каждом пространстве $T_p(S)$ называется *дифференциальной* (1—) *формой* или просто *дифференциалом*.

Примеры. Пусть $z=x+\sqrt{-1}\,y$ — локальная координата на открытом множестве $U\subseteq S$. Тогда функция, сопоставляющая касательному вектору $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}$ его $\frac{\partial}{\partial x}$ — координату $a$ (соответственно $\frac{\partial}{\partial y}$ — координату $b$), будет дифференциалом на $U$, обозначаемым через $dx$ (соответственно $dy$). Аналогично определяются дифференциалы $dz$, $d\bar{z}$. Очевидно $dz=dx+\sqrt{-1}dy$, $d\bar{z}=dx-\sqrt{-1}dy$.

Лемма. Любая дифференциальная 1-форма $\omega$ на $S$ локально представима в виде

$$\omega\,|\,U=f\,dz+g\,d\bar{z}=(f+g)\,dx+(f-g)\sqrt{-1}\,dy,$$

где $f, g$ — комплекснозначные функции на $U$, а $z=x+\sqrt{-1}\,y$ — локальная координата на открытом множестве $U\subseteq S$.

*Дифференциал* $\omega$ называют *дифференцируемым*, если в каждом локальном представлении $\omega=fdz+gd\bar{z}$ функции $f$ и $g$ дифференцируемы. Дифференцируемые 1-формы на $S$ образуют комплексное (бесконечномерное) линейное пространство, обозначаемое через $A^1$. Форма $\omega$ имеет тип (1,0) (сответственно (0,1)), если локально $\omega=fdz$ (соответственно $\omega=fd\bar{z}$). Формы типа (1,0) (соответственно (0,1)) образуют комплексное линейное пространство $A^{1,0}$ (соответственно $A^{0,1}$). Имеет место разложение $A^1=A^{1,0}\oplus A^{0,1}$, т. е. всякая 1-форма $\omega$ однозначно раскладывается в сумму $\omega=\omega_1+\omega_2$ форм $\omega_1$, $\omega_2$ типа (1,0), (0,1) соответственно.

Заменяя в определении дифференциала касательные пространства $T_p(S)$ на их произведения $T_p(S)\times\ldots\times T_p(S)$, а условие линейности — на полилинейность, можно определить дифференциалы степени $\geqslant 2$. Форма $\omega_1\otimes\omega_2$, где $\omega_1$, $\omega_2$ — дифференциальные 1-формы, по определению сопоставляет паре касательных векторов $(t_1, t_2)\in T_p(S)\times T_p(S)$ значение $\omega_1\otimes\omega_2(t_1, t_2)=\omega_1(t_1)\cdot\omega_2(t_2)$. Эту форму называют тензорным произведением форм $\omega_1$, $\omega_2$. Аналогично определяется тензорное произведение любых дифференциалов. Локально каждый дифференциал $\omega$ представим в виде линейной комбинации тензорных произведений дифференциалов $dz$, $d\bar{z}$ с функциональными коэффициентами. Если при этом каждое произведение имеет $i$ сомножителей, то дифференциал $\omega$ называют $i$-формой. Если все функциональные коэффициенты дифференцируемы, то форму $\omega$ называют дифференцируемой. На дифференциалы, как и на всякие полилинейные функции, можно накладывать условия типа симметрии, кососимметрии, эрмитовой симметрии и т. п. Например, для 1-форм $\omega_1$, $\omega_2$ 2-форма $\omega_1\wedge\omega_2\overset{\mathrm{df}}{=}(\omega_1\otimes\omega_2-\omega_2\otimes\omega_1)/2$ кососимметрична. Ее называют внешним произведением форм $\omega_1$, $\omega_2$. Это произведение кососимметрично: $\omega_2\wedge\omega_1=-\omega_1\wedge\omega_2$. Особый интерес для дифференциальной геометрии представляют именно кососимметрические дифференциалы, называемые также внешними. Через $A^i$ будем обозначать комплексное линейное пространство внешних дифференцируемых $i$-форм на римановой поверхности $S$ (по определению $A^0=\mathscr{E}(S)$). Отметим сразу, что $A^i=0$ при $i\geqslant 3$, поскольку риманова поверхность локально имеет лишь две вещественные координаты. Всякая внешняя 2-форма $\omega$ на римановой поверхности локально представима в виде

$$\omega=f\,dz\wedge d\bar z=-2\sqrt{-1}\,dx\wedge dy$$

(т. е. имеет тип (1.1)). Например, если 1-формы $\omega_1$, $\omega_2$ локально представимы в виде $\omega_1=f_1dz+g_1d\bar z$, $\omega_2=f_2dz+g_2d\bar z$, то локально $\omega_1\wedge\omega_2=\begin{vmatrix} f_1 & g_1\\ f_2 & g_2\end{vmatrix}dz\wedge d\bar z$. Дальнейшие сведения о дифференциалах и вообще о тензорах можно почерпнуть в [3], [6], [68].

**4.3. Внешние дифференцирования. Когомологии де Рама.** В комплексном случае рассматривают три типа дифференцирований:

$$d: A^0\to A^1,\quad \partial: A^0\to A^{1,0}\ \text{и}\ \bar\partial: A^0\to A^{0,1}.$$

Локально

$$df\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

$$\partial f\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{\partial f}{\partial z}dz\ \text{и}\ \bar\partial f\overset{\mathrm{df}}{=}\overline{\partial\bar f}=\frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z.$$

Эти отображения С-линейны и естественно продолжаются до С-линейных отображений $d$, $\bar\partial$, $\partial: A^1\to A^2$. Локально

$$d(f\,dz+g\,d\bar z)\overset{\mathrm{df}}{=}df\wedge dz+dg\wedge d\bar z=\left(\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)dz\wedge d\bar z,$$

$$\partial(f\,dz+g\,d\bar z)\overset{\mathrm{df}}{=}\partial f\wedge dz+\partial g\wedge d\bar z=\frac{\partial g}{\partial z}dz\wedge d\bar z$$

и

$$\bar\partial(f\,dz+g\,d\bar z)=\bar\partial f\wedge dz+\bar\partial g\wedge d\bar z=-\frac{\partial f}{\partial \bar z}dz\wedge d\bar z.$$

Аналогично определяются отображения $d$, $\partial$, $\bar\partial: A^i\to A^{i+1}$ при $i\geqslant 2$. Однако для римановых поверхностей последние отображения тривиальны, ибо $A^i=0$ при $i\geqslant 3$. Отображения $d$, $\partial$, $\bar\partial$

являются внешними дифференцированиями, т. е. $d(f\omega) = df\wedge\omega + fd\omega$ (аналогично, для $\partial$ и $\bar\partial$). Отметим также следующие соотношения: $dd = \partial\partial = \bar\partial\bar\partial = 0$, $d = \partial + \bar\partial$ и $\partial\bar\partial = -\bar\partial\partial$.

*Дифференциал* $\omega\in A^i$ называют *замкнутым*, если $d\omega = 0$. *Дифференциалы* вида $d\omega$, $\omega\in A^i$, называют *точными* или *когомологичными нулю*. (По определению функция $f\in A^0$ точна, если $f\equiv 0$.) Всякая точная форма замкнута. Поэтому точные $i$-формы образуют комплексное линейное подпространство в пространстве замкнутых $i$-форм. Соответствующее факторпространство обозначают через $H^i_{DR}(S)$ и называют *группой когомологий де Рама.*

Пример 1. Функция $f\in A^0$ замкнута тогда и только тогда, когда она постоянна. Поэтому $H^0_{DR}(S)\simeq \mathbf{C}$. С другой стороны, $f$ $\bar\partial$-замкнута, т. е. $\bar\partial f = 0$, в том и только том случае, когда она голоморфна (см. пример п. 4.1).

Пример 2. Очевидно $H^i_{DR}(S) = 0$ при $i\geqslant 3$.

**4.4. Кэлеровы и римановы метрики.** Симметрическое произведение 1-форм определяется по правилу $\omega_1\omega_2 \overset{\text{df}}{=} \overset{\text{df}}{=} (\omega_1\otimes\omega_2 + \omega_2\otimes\omega_1)/2$. Эрмитово симметричная 2-форма на римановой поверхности $S$ локально представима в виде $\omega = f dz d\bar z = f(dx^2 + dy^2)$ (а потому имеет тип (1.1)), где $f$ — вещественнозначная функция. Если $f$ дифференцируема и положительна, форму $\omega$ называют *кэлеровой метрикой* на $S$.

Лемма. На всякой римановой поверхности $S$ существует кэлерова метрика.

Локально существование таких метрик очевидно; глобально надо воспользоваться теоремой о разбиении единицы. Другой подход к нахождению метрик намечен в замечании пункта 5.4.

Пример 1. $dzd\bar z = dx^2 + dy^2$ — *евклидова метрика* на $\mathbf{C}$. Она инвариантна относительно сдвигов, а потому задает кэлерову метрику на факторах $\mathbf{C}/\Lambda$, где $\Lambda\subset\mathbf{C}$ — дискретная решетка.

Пример 2. Пусть $z$ — аффинная координата на $\mathbf{CP}^1$. Тогда 2-форма $\frac{dzd\bar z}{(1+|z|^2)^2}$ по непрерывности продолжается до кэлеровой метрики на $\mathbf{CP}^1$. Это есть частный случай *метрики Фубини — Штуди* на $\mathbf{CP}^n$ [72].

Пример 3. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского на единичном диске имеет метрику $\frac{dzd\bar z}{(1-|z|^2)^2}$.

Рассмотрим теперь дифференцируемую поверхность $S$. Всякая вещественная симметричная 2-форма $\omega$ на $S$ локально представима в виде

$$\omega = f dx^2 + 2g dx dy + h dy^2.$$

Такую форму на $S$ называют *римановой метрикой*, если функции $f$, $g$, $h$ дифференцируемы, а сама форма $\omega$ положительно определена в каждой точке $p \in S$. Последнее локально эквивалентно неравенствам $f > 0$ и

$$\begin{vmatrix} f & g \\ g & h \end{vmatrix} > 0.$$

Теорема. Пусть $S$ — дифференцируемая, ориентированная поверхность с римановой метрикой $\omega$. Тогда на $S$ существует единственная структура римановой поверхности, для которой $\omega$ кэлерова.

Последнее означает, что если $z = x + \sqrt{-1}y$ — локальная координата, то $\omega = f(dx^2 + dy^2)$. *Координаты* $x$, $y$, для которых форма $\omega$ имеет указанный вид, называют *изотермическими* или *конформными*. По ориентированности на $S$ фиксирован максимальный атлас, координатные системы которого одинаково ориентированы. Изотермическая система координат $(x, y)$ этого атласа определяет аналитическую координату $z = x + \sqrt{-1}y$. Существование изотермических координат сводится к решению дифференциального уравнения Бельтрами [3]. Отображения перехода между введенными локальными координатами конформны (сохраняют углы и ориентацию), а потому голоморфны [12].

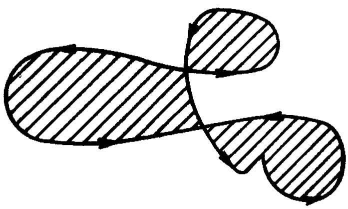


**Рис. 14. Регулярная область**

Пример 4. Обычная евклидова метрика на сфере радиуса 1 приводит к римановой сфере $\mathbf{C}P^1$ с метрикой Фубини—Штуди, умноженной на 4.

Замечание. Связь между римановой и комплексно аналитической геометрией гораздо сложнее, чем это указано в теореме. Риманова метрика на дифференцируемых многообразиях размерности $\geqslant 3$ не имеет хорошего локального представления.

**4.5. Интегрирование внешних дифференциалов. Формула Грина.** Простейший случай интегрирования есть значение функции $f$ в точке $p \in S : \int_p f \overset{\mathrm{df}}{=} f(p)$. Следующий случай — $\int_u \omega$, где $\omega \in A^1$, а $u : [0, 1] \to S$ — гладкий путь на римановой поверхности

$S$. Этот интеграл — линеен по $\omega$ и аддитивен по $u$. Аддитивность позволяет свести определение интегралов 1-форм по пути к обычным криволинейным интегралам на гауссовой плоскости $\mathbf{C}$ [69]. С помощью следующего результата определяется интеграл замкнутой 1-формы по любому пути.

Лемма. Пусть $u_1$, $u_2$ — гладкие гомотопные пути на римановой поверхности $S$, а $\omega \in A^1$ — замкнутая форма. Тогда

$$\int_{u_1} \omega = \int_{u_2} \omega.$$

Подъем формы $\omega$ относительно гладкой гомотопии сводит доказательство к аналогичному факту для замкнутых 1-форм на квадрате $[0,1] \times [0,1]$ (см. также [69]).

Пример 1. Точные формы $\omega = df$ можно интегрировать с помощью формулы Ньютона—Лейбница:

$$\int_u df = f(u(1)) - f(u(0)).$$

Пример 2. Пусть $f(z) = \sum_{i=-n}^{+\infty} a_i z^i$ — ряд Лорана мероморфной функции, определенной в окрестности нуля, а $u$ — однократный положительный обход вокруг нуля. Тогда

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_u f(z)\, dz = a_{-1}. \qquad [12]$$

Следствие (критерий точности). Замкнутая форма $\omega \in A^1$ на римановой поверхности $S$ точна тогда и только тогда, когда $\int_u \omega = 0$ для любой петли $u$ на $S$.

Чтобы установить точность $\omega$, надо найти *функцию* $f \in A^0$ с $df = \omega$, называемую *первообразной* для $\omega$. Фиксируем точку $p \in S$. Тогда $f(q) = \int_u \omega$, где $u$ — путь от $p$ до $q$. Это определение корректно именно тогда, когда для $\omega$ выполнены условия следствия.

Рассмотрим теперь интегралы вида $\int_G \omega$, где $\omega \in A^2$, а $G$ — регулярная область в $S$. Под *регулярной областью* римановой поверхности понимается открытое подмножество $G \subseteq S$, замыкание которого $\bar{G}$ в $S$ компактно, а граница $\partial G$ состоит из конечного числа гладких путей. Направление путей границы выбирается так, что внешняя нормаль к $G$ и касательный вектор к пути образуют положительный базис в комплексной карте на $S$. Иначе говоря, при обходе по $\partial G$ область $G$ лежит слева от касательного вектора, проведенного в направлении обхода (см. рис. 14). Замыкание регулярной области $G$ всегда имеет (конечную) триангуляцию $\{T_i\}$, все ребра которой являются гладкими путями. (Впервые этот факт строго доказал Кернс.) Триангуляцию можно выбрать достаточно мелкой, а именно такой, чтобы каждый треугольник $T_i$ лежал в области определения некоторой локальной координаты $z$. Тогда полагают

$$\int_{T_i} \omega \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{z(T_i)} f\,dz \wedge d\bar{z}$$

— обычный двойной интеграл по криволинейному треугольнику $z(T_i) \subseteq \mathbf{C}$ и

$$\int_G \omega \overset{\mathrm{df}}{=} \sum \int_{T_i} \omega.$$

Этот интеграл зависит лишь от области $G$ и 2-формы $\omega$ (ср. с [69]). Заметим также, что интеграл $\int_u \omega$, $\omega \in A^1$, по пути $u$ на самом деле (даже когда $\omega$ не замкнута) зависит лишь от 1-формы $\omega$, образа $u[0, 1]) \subset S$ и его ориентации.

Формула Грина. Для любой регулярной области $G$ римановой поверхности $S$ и любой формы $\omega \in A^1$

$$\int_G d\omega = \int_{\partial G} \omega.$$

Этот результат получается прямо по определению из формулы Грина для регулярных областей гауссовой плоскости $\mathbf{C}$ [69].

Говорят, что форма $\omega \in A^2$ имеет компактный носитель, если она равна нулю вне некоторого компактного подмножества в $S$. (Это же определение применимо к любым $i$-формам.) Более того, такая форма равна нулю вне некоторой регулярной области $G$. Поэтому определен интеграл

$$\int_S \omega \overset{\mathrm{df}}{=} \int_G \omega.$$

Другой подход к определению таких интегралов связан с теоремой о разбиении единицы [69].

Следствие. Если $\omega \in A^1$ — дифференциальная форма с компактным носителем, то $\int_S d\omega = 0$. В частности, это верно для любой формы $\omega \in A^1$ на компактной римановой поверхности $S$.

**4.6. Периоды. Изоморфизм де Рама.** Под *периодами замкнутой 1-формы* $\omega$ римановой поверхности $S$ понимают интегралы $\int_u \omega$, где $u$ — петля на $S$. Предположим, что $S$ компактна. По гомологической (соответственно гомотопической) инвариантности таких интегралов периоды задают гомоморфизм $\Pi_\omega$: $:H_1(S, \mathbf{Z})\to\mathbf{C}$, $c\mapsto\int\limits_c \omega$ (соответственно $\Pi_\omega:\pi(S)\to\mathbf{C}$), называемый *гомоморфизмом периодов*. Тем самым определено **C**-линейное отображение

$$H^1_{DR}(S)\to H^1(S, \mathbf{C})=\mathrm{Hom}\,(H_1(S, \mathbf{Z}), \mathbf{C}), \text{ класс } \omega\mapsto\Pi_\omega. \tag{4}$$

Теорема де Рама. Отображение (4) — изоморфизм.

Иначе говоря, всякий гомоморфизм $H_1(S, \mathbf{Z})\to\mathbf{C}$ есть гомоморфизм периодов замкнутой 1-формы $\omega$, определенной однозначно по модулю точной. Однозначность равносильна инъективности $H^1_{DR}\hookrightarrow H^1(S, \mathbf{C})$ и вытекает из критерия точности. Существование эквивалентно сюръективности и доказывается сложнее. Фиксируем образующие $a_i$, $b_i$ группы гомологий $H_1(S, \mathbf{Z})$, как и в следствии пункта 3.7. Интегралы по петлям $a_i$ называют *A-периодами*, а по петлям $b_i$ — *B-периодами*. Итак, требуется найти замкнутую 1-форму $\omega$ с любыми наперед заданным $A$-, $B$-периодами или, эквивалентно, найти $2g$ замкнутых форм $\omega_1, \ldots, \omega_{2g}\in A^1$ таких, что $\int\limits_{a_j}\omega_i=\int\limits_{b_j}\omega_{g+i}=\delta_{ij}$ и $\int\limits_{a_j}\omega_{g+i}=\int\limits_{b_j}\omega_i=0$, $i$, $j=1, \ldots, g$. В качестве таких форм можно взять формы вида $\omega_i=df_i$, $\omega_{g+i}=dg_i$, где $f_i$, $g_i$ — функции, имеющие скачок 1 вдоль петли $b_i$, $a_i$ соответственно, а в остальном дифференцируемые [69].

Следствие 1. Для компактной римановой поверхности $S$ рода $g$

$$\dim H^1_{DR}(S)=2g.$$

Следствие 2. Если $c$ — 1-цикл (например, петля) такой, что $\int\limits_c\omega=0$ для всех замкнутых форм $\omega$, то он гомологичен нулю.

Двойственность Пуанкаре (см. п. 3.8) определяет целочисленную унимодулярную билинейную форму

$$\smile\,: H^1(S, \mathbf{Z})\times H^1(S, \mathbf{Z})\to\mathbf{Z},$$

называемую $\cup$-*произведением*. По **C**-линейности $\cup$-произведение продолжается на пространство когомологий $H^1(S, \mathbf{C})$. С другой стороны, на когомологиях де Рама имеется естественная билинейная форма

$$(\,,\,)_{DR}:H^1_{DR}(S)\times H^1_{DR}(S)\to\mathbf{C}$$

$$(\omega_1, \omega_2)_{DR}\overset{\mathrm{df}}{=}\int\limits_S\omega_1\wedge\omega_2.$$

Предложение. Изоморфизм де Рама переводит $(\,,\,)_{DR}$ в $\cup$-произведение.

Это легко получить из вычисления $(\omega_1, \omega_2)_{DR}$ через периоды.

Лемма. Если $\Pi_i^j \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{a_i} \omega_j$, $\Pi_{g+i}^j \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{b_i} \omega_j$ — соответственно $A$-, $B$-периоды замкнутых форм $\omega_j$, $j=1, 2$, то

$$(\omega_1, \omega_2)_{DR} = \sum_{i=1}^{g} (\Pi_i^1 \Pi_{g+i}^2 - \Pi_{g+i}^1 \Pi_i^2).$$

Пусть $M$ — развертка поверхности $S$ с символом $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots$ $\ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Форма $\omega_1$ точна на $M$ в силу односвязности последней. Обозначим через $\pi(q)$ первообразную $\int\limits_p^q \omega_1$ формы $\omega_1$, где $p$ — начало, а $q$ — конец пути интегрирования на $M$. Тогда $\pi(q') - \pi(q) = \Pi_{g+i}^1$ (соответственно $\pi(q') - \pi(q) = -\Pi_i^1$) для точек $q \in a_i$ и $q' \in a_i^{-1}$ (соответственно $q \in b_i$ и $q \in b_i^{-1}$), склеивающихся в одну точку на $S$ (см. рис. 15). По формуле Грина

$$(\omega_1, \omega_2)_{DR} = \int\limits_M \omega_1 \wedge \omega_2 = \int\limits_{\partial M} \pi \omega_2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{g} \left( \Pi_{g+i}^1 \int\limits_{a_i^{-1}} \omega_2 - \Pi_i^1 \int\limits_{b_i^{-1}} \omega_2 \right) = \sum_{i=1}^{g} (\Pi_i^1 \Pi_{g+i}^2 - \Pi_{g+i}^1 \Pi_i^2).$$

Дальнейшие подробности см. в [31].

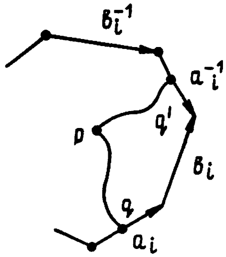



Рис. 15

**4.7. Голоморфные дифференциалы. Геометрический род. Билинейные соотношения Римана.**

Определение. *Дифференциал* $\omega \in A^1$ на римановой поверхности $S$ называют *голоморфным*, если локально $\omega = g dz$, где $g$ — голоморфная функция.

Голоморфные дифференциалы образуют комплексное пространство, обозначаемое через $\Omega_S$ или просто $\Omega$. Очевидно, всякая голоморфная форма имеет тип $(1,0)$ и замкнута (также $\bar\partial$-замкнута: $\bar\partial\omega = 0$). Верно и обратное [30]. С другой стороны, первообразная точной голоморфной формы (см. п. 4.5) голоморфна, а потому постоянна на компактной римановой поверхности. Следовательно, для компактной римановой поверхности $S$ естественное отображение $\Omega \to H_{DR}{}^1(S)$ инъективно, а пространство голоморфных дифференциалов $\Omega$ конечномерно. Его (комплексную) размерность называют (*геометрическим*) *родом*.

Пример 1. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — отображение римановых поверхностей, а $\omega$ — голоморфный дифференциал на $S_2$. Подъем $f^*\omega$ локально определяется подстановкой $f^*\omega = g(f(z))df(z)$, где $w = f(z)$ — локальная запись отображения $f$, а $\omega = g dw$. Форма $f^*\omega$ определена корректно и голоморфна. Поэтому подъем задает $\mathbf{C}$-линейное отображение $f^*: \Omega_{S_2} \to \Omega_{S_1}$, инъективное, когда $f$ непостоянно. Отсюда, в частности, получается аналог следствия пункта 3.6, для геометрических родов.

Пример 2. На эллиптической кривой $\mathbf{C}/\Lambda$ имеется единственная голоморфная форма с точностью до умножения на константу. Действительно, голоморфный дифференциал $dz$ на $\mathbf{C}$ инвариантен относительно сдвигов, а потому определяет голоморфный дифференциал $\omega$ на $\mathbf{C}/\Lambda$ с $\pi^*\omega = dz$, где $\pi: \mathbf{C} \to \mathbf{C}/\Lambda$ — факторизация. Всякий другой голоморфный дифференциал на $\mathbf{C}/\Lambda$ имеет вид $f\omega$, где $f$ — голоморфная функция на $\mathbf{C}/\Lambda$, а потому константа. Итак, геометрический род эллиптической кривой равен 1.

Последний пример замечателен в двух отношениях. Во-первых, он показывает, что даже на компактной римановой поверхности могут существовать ненулевые голоморфные дифференциалы. К сожалению, очевидный способ построения таких дифференциалов как полных дифференциалов голоморфных функций не годится из-за отсутствия непостоянных голоморфных функций на компактной римановой поверхности (ср. с рассуждением после леммы п. 4.8). Во-вторых, пример показывает, что геометрический и топологический род эллиптической кривой совпадают. То же самое верно для любой компактной римановой поверхности (ср. с примером 1 п. 4.8 и см. следствие 1 п. 4.13) и относится к трудным и глубоким результатам о существовании.

Пусть $S$ — компактная риманова поверхность (топологического) рода $g$, а $\Pi_i^*$, $\Pi_{g+i}^*$ — соответственно $A$-, $B$-периоды голоморфного дифференциала $\omega_*$. Из леммы пункта 4.6 получаем

Первое билинейное соотношение Римана.

$$\sum_{i=1}^{g} (\Pi_i^1 \Pi_{g+i}^2 - \Pi_{g+i}^1 \Pi_i^2) = 0.$$

Очевидно, $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$ для $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$.

Второе билинейное соотношение Римана.

$$\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{g}(\Pi_i\overline{\Pi}_{g+i}-\Pi_{g+i}\overline{\Pi}_i)\geqslant 0.$$

Локально $\sqrt{-1}\,\omega\wedge\overline{\omega}=2|f|^2dx\wedge dy$, если $\omega=fdz$. Более того, равенство нулю здесь имеет место лишь для $\omega=0$.

Следствие. Если все $A$-периоды голоморфной формы $\omega$ на $S$ равны нулю, то $\omega=0$.

Билинейные соотношения Римана играют важную роль в теории абелевых многообразий (см. пример 2 п. 1.3 гл. 3).

**4.8. Мероморфные дифференциалы. Канонические дивизоры.**

Определения. *Мероморфным дифференциалом* на римановой поверхности $S$ называют голоморфный дифференциал $\omega$ на открытом подмножестве $U\subseteq S$ такой, что дополнение $S-U$ дискретно в $S$ и локально $\omega=fdz$, где $f$ — мероморфная функция с полюсами в $S-U$. Точки множества $S-U$ называют *полюсами дифференциала* $\omega$. *Порядок* $\mathrm{ord}_p\omega$ ненулевого *мероморфного дифференциала* $\omega$ в точке $p\in S$ определяют локально формулой $\mathrm{ord}_p\omega\overset{\mathrm{df}}{=}\mathrm{ord}_pf$, где $\omega=fdz$. Дивизор $(\omega)\overset{\mathrm{df}}{=}$ $\overset{\mathrm{df}}{=}\sum\mathrm{ord}_p\omega\cdot p$ называют *дивизором мероморфного дифференциала* $\omega$. Дивизоры вида $(\omega)$, где $\omega$ — ненулевой мероморфный дифференциал на $S$, называют *каноническими дивизорами* римановой поверхности $S$ и обозначают через $K_S$ или просто $K$.

Например, $dz$ — мероморфный дифференциал на римановой сфере $\mathbf{CP}^1$, а $(dz)=-2\infty$ — ее канонический дивизор.

Мероморфные дифференциалы на римановой поверхности $S$ образуют комплексное пространство $\mathcal{M}^1(S)$. Умножение на мероморфные функции превращает $\mathcal{M}^1(S)$ в линейное пространство над полем мероморфных функций $\mathcal{M}(S)$.

Лемма. Размерность пространства $\mathcal{M}^1(\mathrm{S})$ над $\mathcal{M}(\mathrm{S})$ не превосходит 1. Точнее, если $\omega$ — ненулевой мероморфный дифференциал на $S$, то всякий другой мероморфный дифференциал на $S$ имеет вид $f\omega$, где $f\in\mathcal{M}(S)$ и размерность в этом случае равна 1.

На самом деле в лемме выполнено равенство (см. следствие 6 п. 4.14). Однако для доказательства этого необходимо установить существование хотя бы одной ненулевой мероморфной дифференциальной формы на римановой поверхности $S$. В качестве кандидата напрашивается полный дифференциал $df$ непостоянной мероморфной функции $f$ на $S$, если таковая имеется. Тем не менее, как будет видно из дальнейшего, мероморфные дифференциалы находить удобнее, чем функции.

Следствие 1. Всякий мероморфный дифференциал на $\mathbf{CP}^1$ рационален, т. е. $\mathcal{M}^1(\mathbf{CP}^1)=\mathbf{C}(z)dz$ (ср. с примером 1 п. 2.2).

Следствие 2. Для конечного нормального отображения римановых поверхностей $f: S_1 \to S_2$ имеем $f^*\mathscr{M}^1(S_2) = \mathscr{M}^1(S_1)^{\mathrm{Aut}\, f}$ — пространство мероморфных дифференциалов на $S_1$, инвариантных относительно $\mathrm{Aut}\, f$. Более того, $f^*\Omega_{S_2} = \Omega_{S_1}^{\mathrm{Aut}\, f}$, т. е. всякий голоморфный дифференциал на $S_1$, инвариантный относительно $\mathrm{Aut}\, f$, есть подъем голоморфного дифференциала на $S_2$.

Пример 1. Рассмотрим гиперэллиптическую риманову поверхность $S$ рода $g$ алгебраической функции $\sqrt{f}$, где $f$ — многочлен с попарно различными корнями (см. пример п. 2.11). Пусть $\gamma: S \to \mathbf{CP}^1$ — гиперэллиптическая проекция, а $j$ — инволюция. Многозначную функцию $\sqrt{f}$ рассмотрим как однозначную на $S$. По конструкции функция $\sqrt{f}$ антиинвариантна относительно $j: j^*\sqrt{f} = -\sqrt{f}$. Утверждается, что дифференциалы $\gamma^*(z^i dz)/\sqrt{f}$, $i=0, \ldots, g-1$, голоморфны на $S$ и составляют базис пространства $\Omega$; $z$ — аффинная координата на $\mathbf{CP}^1$. Действительно, всякий голоморфный дифференциал на $S$ антиинвариантен относительно $j$, а потому имеет вид $\gamma^*(g(z)\,dz)/\sqrt{f}$, где $g(z)$ — рациональная функция. Но дифференциалы указанного вида голоморфны в точности тогда, когда $g(z)$ — многочлен степени $\leqslant g-1$. Подробности см. в [31].

Пример 2. Пусть $C \subset \mathbf{CP}^2$ — неособая алгебраическая кривая, заданная неприводимым многочленом $f(x_0, x_1, x_2)$ степени $d$. В аффинных координатах $z_1 = x_0/x_2$, $z_2 = x_1/x_2$ она задается уравнением $F(z_1, z_2) = f(z_1, z_2, 1) = 0$. Из леммы и следствия 6 пункта 2.11 вытекает рациональность мероморфных дифференциалов на римановой поверхности кривой $C$. Это значит, что всякий такой дифференциал имеет вид $g(z_1, z_2)\,dz_1 + h(z_1, z_2)\,dz_2$, где $g, h$ — рациональные функции от $z_1, z_2$, а под $z_1, z_2$ понимаются ограничения координат $z_1, z_2$ соответственно на $C$. Более того, голоморфные формы представимы в виде

$$\omega = g(z_1, z_2)\frac{dz_2}{(\partial F/\partial z_1)(z_1, z_2)} = -g(z_1, z_2)\frac{dz_1}{(\partial F/\partial z_2)(z_1, z_2)},$$

где $g$ — многочлен степени $\leqslant d-3$ [31]. Дифференциалы $\omega$ очевидно голоморфны в области голоморфности функций $z_1, z_2$. При переходе к другим аффинным координатам вид дифференциалов $\omega$ сохраняется, а потому они голоморфны всюду на $C$. Итак, род римановой поверхности неособой кривой $C$ равен $(d-1)(d-2)/2$ — размерности пространства многочленов от двух переменных степени $\leqslant d-3$ (ср. с п. 3.12 гл. 2). В частности, *кубика* ($d=3$) имеет род 1.

Любые два канонических дивизора линейно эквивалентны (см. п. 2.6), а потому канонические дивизоры составляют *класс* линейной эквивалентности, называемый *каноническим*. Действительно: $(f\omega) = (f) + (\omega)$.

Формула Гурвица для канонических дивизоров. Если $f: S_1 \to S_2$ — непостоянное отображение римановых поверхностей, то $K_{S_1} \sim f^*K_{S_2} + R$, где $R$ — дивизор ветвления отображения $f$. Точнее, если $0 \neq \omega \in \mathcal{M}^1(S_2)$, то $(f^*\omega) = f^*(\omega) + R$.

Последняя формула локально (см. лемму пункта 2.4) сводится к соотношению $dz^n = nz^{n-1}dz$. В силу следствия 2 пункта 2.7 канонические дивизоры компактной римановой поверхности $S$ имеют одинаковую степень. Например, степень канонического дивизора римановой сферы $\mathbf{CP}^1$ равна —2, поскольку $(dz) = -2\infty$. Для общей компактной римановой поверхности степень канонического дивизора выражается через род: $\deg K = 2g - 2$ (см. следствие 8 п. 4.14), а потому является топологическим инвариантом поверхности. С точностью до трудного утверждения о существовании непостоянной мероморфной функции это легко получить из следующего численного факта.

Формула Гурвица для степени канонического дивизора. Если $f: S_1 \to S_2$ — непостоянное отображение компактных римановых поверхностей, то $\deg K_{S_1} = \deg f \cdot \deg K_{S_2} + \deg R$.

Очевидно по предыдущей формуле и соотношению $\deg f^*K_{S_2} = \deg f \cdot \deg K_{S_2}$.

Замечание 1. Существование канонического дивизора на произвольной римановой поверхности не очевидно даже в компактном случае (ср. с леммой выше и см. следствие 6 п. 4.14).

Замечание 2. Нахождение неопределенных интегралов вида $\int R(z, w(z))dz$, где $R$ — рациональная функция, $w$ — алгебраическая функция, одна из традиционных задач математического анализа. С точки зрения теории римановых поверхностей эта задача (точнее, ее комплексная версия) сводится к нахождению вообще говоря многозначной первообразной функции мероморфного дифференциала $R(z, w)dz$ на римановой поверхности $S$ алгебраической функции $w$. Если риманова поверхность $S$ изоморфна $\mathbf{CP}^1$, то по следствию 1 данный дифференциал рационален и его первообразная находится сведением к сумме простейших дробей. Все известные в математическом анализе методы рационализации интегралов с алгебраическими иррациональностями основаны на этом принципе. Например, подстановку Эйлера для интегралов с $w = \sqrt{az^2+bz+c}$ можно найти, используя изоморфизм замыкания коники $w^2 = az^2+bz+c$ в $\mathbf{CP}^2$ с $\mathbf{CP}^1$ (см. пример 4 п. 1.6).

**4.9. Мероморфные дифференциалы с предписанным поведением в полюсах. Вычеты.** *Дифференциальными главными частями* будем называть суммы вида $\omega_p = \sum_{i=-n}^{-1} a_i z^i dz$, где $z$ — локальный параметр в точке $p$ римановой поверхности $S$. Ряды Лорана позволяют определить главную часть мероморфного дифференциала в любой точке $p \in S$ (ср. с п. 2.3).

Задача Миттаг-Леффлера для мероморфных дифференциалов. Пусть $\{\omega_p\}$ — множество дифференциальных главных частей, заданное на дискретном множестве точек $p$ римановой поверхности $S$. Найти мероморфный дифференциал $\omega \in \mathcal{M}^1(S)$, который имеет полюса лишь в этих точках $p$ и заданные главные части.

Определение. Пусть $\sum_{i=-n}^{-1} a_i z^i dz$ — главная часть мероморфного дифференциала $\omega$ в точке $p \in S$. Коэффициент $a_{-1}$ называют *вычетом* дифференциала $\omega$ в $p$ и обозначают через $\operatorname{Res}_p \omega$.

Независимость вычета $\operatorname{Res}_p \omega$ от выбора локального параметра $z$ в $p$ можно доказать чисто алгебраическими методами [30]. Это видно также из интегрального представления вычета:

$$\operatorname{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_u \omega,$$

где $u$ — малый положительный обход вокруг точки $p \in S$.

Лемма (теорема о вычетах). Пусть $\omega$ — мероморфный дифференциал на компактной римановой поверхности $S$. Тогда $\Sigma \operatorname{Res}_p \omega = 0$.

Пример 1. Пусть $f$ — непостоянная мероморфная функция на компактной римановой поверхности $S$. Тогда $\operatorname{Res}_p(df/f) = \operatorname{ord}_p f$ и по лемме $\deg(f) = \Sigma \operatorname{ord}_p f = 0$ (ср. со следствием 2 п. 2.7).

Доказательство леммы получается непосредственно из формулы Грина и интегрального представления вычета.

Условия разрешимости задач Миттаг-Леффлера. Для компактной римановой поверхности

(а) задача Миттаг-Леффлера для дифференциальных главных частей $\{\omega_p\}$ разрешима только тогда, когда $\Sigma \operatorname{Res}_p \omega_p = 0$;

(б) задача Миттаг-Леффлера для функциональных главных частей $\{f_p\}$ разрешима только тогда, когда $\Sigma \operatorname{Res}_p (f_p \omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Замечание 1. Если $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис $\Omega$, то $\Sigma \operatorname{Res}_p (f_p \omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $\Sigma \operatorname{Res}_p (f_p \omega_i) = 0$ для $i = 1, \ldots, g$. Таким образом, условие (б) на систему $\{f_p\}$ эквивалентно выполнению $g$ линейных уравнений на коэффициенты главных частей, где $g$ — род $S$.

Пример 2. Аналоги задач Миттаг-Леффлера для многомерных комплексных многообразий (первая и вторая проблемы Кузена) сыграли важную роль в становлении и развитии когомологических методов [35].

**4.10. Периоды мероморфных дифференциалов.**

Определение. Мероморфный дифференциал $\omega$ на римановой поверхности $S$ называют

(1) *дифференциалом первого рода*, если он голоморфен;

(2) *дифференциалом второго рода*, если все его вычеты тривиальны;

(3) *дифференциалом третьего рода*, если все его полюса $p$ имеют первый порядок, т. е. $\mathrm{ord}_p\omega = -1$.

Мероморфные дифференциалы замкнуты в области голоморфности. Кроме того, интеграл по петле дифференциала (первого и) второго рода $\omega$ зависит от гомотопического класса этой петли на $S$, а не только на $S$—{полюса $\omega$}. Например, $\int \omega = 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{Res}_p\omega = 0$ для любого малого обхода $u$ вокруг полюса. Если дифференциал второго рода точен, то его первообразная функция мероморфна. Обратно, дифференциал $df$ мероморфной функции $f$ является дифференциалом второго рода. Вполне естественен вопрос о существовании дифференциала второго рода с заданными периодами. Ответ прост: такой дифференциал существует для любых наперед заданных периодов. Однако почему, выяснится лишь в п. 6.3.

**4.11. Гармонические дифференциалы.** Со времен Римана решение задач о существовании сводят к результатам теории дифференциальных уравнений в частных производных, в особенности, к результатам об уравнениях эллиптического типа, хотя часто это скрыто за «фасадом» когомологических конструкций. Это требует овеществления аргументов задач о существовании, что приводит к задачам о существовании гармонических функций и дифференциалов с предписанными особенностями или периодами. Для введения симметрии по вещественным координатам $x$, $y$, где $z = x + \sqrt{-1}y$ — локальная координата римановой поверхности $S$, удобен $\mathbf{C}$-линейный ператор сопряжения $*: A^1 \to A^1$. Локально $*(pdx + qdy) \overset{\mathrm{df}}{=} -qdx + pdy$ или, эквивалентно, $*(fdz + gd\bar{z}) \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{-1}\,(-fdz + gd\bar{z})$. Оператор $*$ определен корректно. Более того,

Лемма. Если $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in A^1$, где $\omega_1 \in A^{1,0}$ и $\omega_2 \in A^{0,1}$, то

$$*\omega = \sqrt{-1}\,(\omega_2 - \omega_1).$$

Определение. *Дифференциал* $\omega \in A^1$ называют *гармоническим*, если $d\omega = d{*}\omega = 0$. Оператор $d*$ называют козамыканием, так что равенство $d{*}\omega = 0$ означает *козамкнутость* $\omega$.

Локально замкнутость формы $\omega = fdz + gd\bar{z}$ равносильна соотношению $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, а козамкнутость $\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. Поэтому гармоничность $\omega$ равносильна соотношениям $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$, т. е. голоморфности $f$ и антиголоморфности $g$.

Предложение. $H^1=\Omega\oplus\overline{\Omega}$, где $H^1$ и $\overline{\Omega}=\{\overline{\omega}\,|\,\omega\in\Omega\}$, соответственно, — пространства гармонических и антиголоморфных дифференциалов на римановой поверхности $S$.

Замечание. Дифференцируемую функцию $f$ на римановой поверхности называют гармонической, если она такова локально, т. е. $\Delta f=0$, где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar z}$ — (локальный) оператор Лапласа. Легко проверить, что гармоничность функции не зависит от выбора локальной координаты $z=x+\sqrt{-1}y$. Имеется тесная связь между понятиями гармоничность функции и формы, а именно: функция $f$ гармонична тогда и только тогда, когда гармоничен полный дифференциал $df$. Более того, 1-форма $\omega$ гармонична тогда и только тогда, когда локально $\omega=df$ для гармонической функции $f$. Это существенно отличается от гармоничности функции как 0-формы. Всякая такая 0-форма постоянна, что и является причиной того, почему проще искать мероморфные (читай гармонические) дифференциалы, а не функции.

**4.12. Гильбертово пространство дифференциалов. Гармоническая проекция.** Гармонические формы строят методом ортогонального проектирования на гармоническую составляющую. Основной результат, используемый далее в решении задач о существовании, — теорема об ортогональном разложении.

Пусть $\omega_1$, $\omega_2$ — две формы с компактным носителем на римановой поверхности $S$. Эрмитово скалярное произведение таких форм определяется по правилу

$$(\omega_1, \omega_2)\overset{\mathrm{df}}{=}\int\limits_S \omega_1\wedge *\overline{\omega}_2.$$

Действительно, локально $\omega_1\wedge *\overline{\omega}_2=(p_1\bar p_2+q_1\bar q_2)\,dx\wedge dy$, где $\omega_i=p_i dx+q_i dy$, $i=1, 2$. Поэтому дифференцируемые 1-формы с компактным носителем образуют унитарное пространство с нормой $\|\omega\|=\sqrt{(\omega, \omega)}$. Для компактной поверхности $S$ это пространство содержит все дифференцируемые, а потому все гармонические формы. Напротив в некомпактном случае, хотя и имеется много форм с компактным носителем, всякая гармоническая и, в частности, голоморфная форма с компактным носителем тривиальна по теореме единственности. Однако некоторые гармонические формы приходится рассматривать и в некомпактном случае, например, при построении мероморфных дифференциалов с предписанными особенностями на компактной римановой поверхности (см. п. 4.14). Это ограниченные формы $\omega\in A^1$, для которых $\|\omega\|^2\overset{\mathrm{df}}{=}\int\limits_S\omega\wedge *\overline{\omega}<+\infty$. (Данный несобственный интеграл можно определить, например, следующим способом:

$\int\limits_S \overset{\mathrm{df}}{=} \sup\limits_U \int\limits_U$, где $U$ пробегают открытые подмножества в $S$ с компактным замыканием.) Ограниченные дифференцируемые 1-формы образуют унитарное пространство $B^1$, включающее 1-формы с компактным носителем. Для компактной римановой поверхности всякая дифференцируемая 1-форма ограничена и имеет компактный носитель. Обозначим через $E$ замыкание в $B^1$ пространства точных дифференциалов $d\varphi$ функций $\varphi$ на $S$ с компактным носителем.

Теорема (об ортогональном разложении). Пусть $\omega\in B^1$ — ограниченная дифференцируемая 1-форма на римановой поверхности S. Имеется и единственно разложение $\omega=\omega_h+df+{}*dg$, где $\omega_h$ — ограниченный гармонический дифференциал на $S$, $f$, $g\in A^0$ и $df$, $dg\in E$.

Заметим прежде всего, что пространства $E$ и $*E$ взаимно ортогональны. Действительно, достаточно проверить ортогональность дифференциалов $d\varphi$, $*d\bar{\psi}$ дифференцируемых функций $\varphi$, $\psi$ с компактным носителем: $(d\varphi, *d\bar{\psi})=\int\limits_S d\varphi\wedge **d\psi= -\int\limits_S d\varphi\wedge d\psi=-\int\limits_S \psi dd\varphi+\int\limits_S d(\psi d\varphi)=0$ по следствию пункта 4.5. Существенным моментом доказательства является ортогональность пространства ограниченных гармонических дифференциалов $H$ к $E$ и $*E$. Точнее, замкнутость дифференциала $\omega\in B^1$ равносильна его ортогональности к $*E$, а козамкнутость — к $E$. Например, утверждение о козамкнутости вытекает из сопряженности $d*$ к $d$:

$$(d*\omega, \varphi)\overset{\mathrm{df}}{=}\int\limits_S d*\omega\wedge\bar{\varphi}=\int\limits_S d\bar{\varphi}\wedge *\omega=(d\bar{\varphi}, \bar{\omega})=(\omega, d\varphi),$$

где $\omega\in B^1$, $\varphi$ — дифференцируемая функция с компактным носителем. Поэтому $H$ — ортогональное дополнение к $E\oplus *E$. Осталось показать, что $B^1=H\oplus E\oplus *E$ и получить отсюда требуемое ортогональное разложение $\omega\in B^1$. Однако здесь возникает принципиальная трудность, кажущаяся на первый взгляд всего лишь формальностью — неполнота пространства $B^1$. Для ее преодоления перейдем к пополнениям относительно $\|\ \|$: $L^1$ — пополнение $B^1$, $\check{E}$ — $E$, $*\check{E}$ — $*E$ (по ограниченности оператора $*$). По прежнему скалярное произведение на $L^1$ обозначаем через $(\ ,\ )$, а норму — через $\|\ \|$. Аналогично, для всякого открытого подмножества $U\subseteq S$ определяется пространство $L^1_U\supset B^1_U$, скалярное произведение $(\ ,\ )_U$ и норма $\|\ \|_U$. Элементы пространства $L^1$ можно интерпретировать как классы измеримых дифференциалов $\omega$ на $S$, для которых дифференциал $\omega\wedge *\bar{\omega}$ интегрируем по Лебегу и $\int\limits_S \omega\wedge*\bar{\omega}=\|\omega\|^2<+\infty$ [69]. Также их можно считать 1-потоками [31], т. е. локально $L^1_U\ni l|_U=f\,dz+g\,d\bar{z}$, где $z$ — локальная координата на $U$, а $f$, $g$ — комплекснозначные распределения (обобщенные функции) на $U$. Напомним, что подпространством гильбертова пространства называют замкнутое линейное подпространство. Конечная сумма подпространств и ортогональное дополнение подпространства есть снова подпространство. Ключевое место доказательства —

Теорема (о регулярности). $H=(\check{E}\oplus*\check{E})^\perp$.

Этот поистине замечательный факт означает, что пополнение не увеличивает пространства гармонических дифференциалов. Если элементы $L^1$ интерпретировать как классы измеримых 1-форм на $S$, то надо установить, что каждый элемент $h$ ортогонального дополнения $(\check{E}\oplus*\check{E})^\perp$ есть класс единственного гармонического дифференциала $\omega$ на $S$ с $\|\omega\|<+\infty$. (Включение $H\subseteq(\check{E}\oplus*\check{E})^\perp$ очевидно по конструкции!). С точки зрения потоков это значит, что $h$ — поток формы $\omega$. Утверждаемый факт локален. Поэтому можно предполагать, что $S=\mathbf{D}$ — единичный диск. В этом случае $h=f\,dz+g\,d\bar{z}$, где $f$, $g$ — распределения на $\mathbf{D}$. По предположению $(h, d\varphi)_{\mathbf{D}}=(h, *d\psi)_{\mathbf{D}}=0$ для любых дифференцируемых функций $\varphi$, $\psi$ с компактным носителем на $\mathbf{D}$. С помощью дифференцирований распределений (соответственно, потоков) первое равенство записывается в виде $\frac{\partial g}{\partial z}=-\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ (козамкнутость), а второе — в виде $\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ (замкнутость) (ср. с рассуждением выше об ортогональности гармонических форм $E$ и $*E$). Поэтому $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial g}{\partial z}=0$ в смысле теории распределений. Конечно, если бы функции $f$ и $g$ были дифференцируемы, отсюда следовала бы гармоничность $h=f\,dz+g\,d\bar{z}$. Однако в сравнении с предыдущим вопрос о дифференцируемости функций $f$ и $g$ не формален и составляет существо теоремы о регулярности. Решение этого вопроса включает общее свойство регулярности эллиптических дифференциальных операторов [31]. Первый и достаточный здесь результат в этом направлении

Лемма Вейля ([30]). Всякое распределение $T$, удовлетворяющее уравнению Лапласа $\Delta T=0$, есть распределение дифференцируемой функции.

Доказательство можно найти в стандартных курсах по теории дифференциальных уравнений в частных производных [9]. В силу соотношений $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial g}{\partial z}=0$ распределения $f$ и $g$ будут решениями уравнения Лапласа: $\Delta f=\Delta g=0$, а потому дифференцируемы, что завершает доказательство теоремы о регулярности.

Следствие. $L^1=H\oplus\check{E}\oplus*\check{E}$.

В частности, всякая ограниченная дифференцируемая форма $\omega\in B^1$ имеет единственное ортогональное разложение $\omega=\omega_h+\gamma+*\pi$, где $\omega_h\in H$, а $\gamma$, $\pi\in\check{E}$. Дифференциал $\omega_h$ ограничен и его называют *гармонической проекцией* $\omega$. Теорема об ортогональном разложении утверждает, что элементы $\gamma$, $\pi$ «являются» дифференцируемыми точными 1-формами. Дифференцируемость доказывается локально, как и теорема о регулярности (см. [69] для измеримых дифференциалов). (Предостережение: при ограничении ортогональное разложение не сохраняется, однако компоненты разложения отличаются на гармонические формы.) Проверка точности дифференциалов $\gamma$ и $\pi$ основана на следующем факте. Для каждой гладкой петли $u$ на $S$ существует (замкнутый) дифференциал $\eta_u\in A^1$ с компактным носителем (а потому $\eta_u B^1$) такой, что для любой формы $\gamma\in A^1$

$$\int_u \gamma=\int_S \gamma\wedge*\bar{\eta}_u=(\gamma,\eta_u).$$

Значит, по критерию точности точность дифференциалов сохраняется при предельных переходах в $L^1$. Дифференциал $\eta_u$ строится как точный дифференциал функции со скачком 1 вдоль $u$ (ср. с п. 4.6). Подробности см. в [69].

Основные трудности позади и теперь можно перейти к долгожданным приложениям.

**4.13. Разложение Ходжа.** Предположим, что риманова поверхность $S$ компактна. Тогда $A^1=B^1\subset L^1$ и $H=H^1$ — пространство гармонических форм на $S$. Согласно предыдущему пункту замкнутость формы эквивалентна ортогональности $*E$. Следовательно, по теореме об ортогональном разложении замкнутая форма $\omega\in A^1$ на $S$ однозначно представима в виде $\omega=\omega_h+df$, $\omega_h\in H^1$. Итак, всякий класс одномерных когомологий в смысле де Рама имеет единственный гармонический представитель. Это вместе с предложением пункта 4.11 дает следующий известный результат о разложении когомологий; для удобства берутся когомологии де Рама.

Теорема (Ходж). $H^1_{DR}(S)=\Omega\oplus\bar{\Omega}$.

Переходя к комбинаторному определению когомологий, согласно теореме де Рама, получаем

Следствие 1. Для компактной римановой поверхности $S$ топологического рода $g$ $\dim\Omega=g$, т. е. геометрический род всегда равен топологическому.

Другой, в сущности близкий, подход к этому равенству связан с формулой Римана—Роха (см. замечание 2 п. 6.2). Далее $g$ обозначает род $S$ в любом из введенных смыслов.

Следствие 2. Если $c$ такой целочисленный (или вещественный) 1—цикл (например, петля), что $\int_c \omega=0$ для всех $\omega\in\Omega$, то он гомологичен нулю.

(Ср. со следствием 2 п. 4.6.).

Следствие 3. Существует голоморфная форма $\omega$ на $S$ с любыми наперед заданными $A$-периодами $\Pi_i\in\mathbf{C}$.

**4.14. Существование мероморфных дифференциалов и функций.** Теорема о разбиении единицы или, проще, сглаживающие функции позволяют построить огромный запас дифференцируемых 1-форм с компактным носителем. Гармонические проекции таких форм гармоничны, а их (1,0)-компоненты голоморфны (см. пп. 4.2 и 4.11). Чтобы при этом не получить тривиальную форму, надо исходить из топологически нетривиальной 1-формы. В компактном случае берут форму из нетривиального класса когомологий де Рама (ср. с теоремой Ходжа). В некомпактном случае предписывают вид особенности дифференциала в точке, например, главную часть. Итак пусть $S$ — произвольная риманова поверхность, а $z$ — локальный параметр в точке $p\in S$.

Теорема (Римана о существовании гармонического дифференциала). Для любого $n\geqslant 1$ на $S-p$ существует гармонический и точный дифференциал $\omega$ такой, что

(а) дифференциал $\omega-d(^1/z^n)=\omega+(n/z^{n+1})dz$ гармоничен в некоторой окрестности $U$ точки $p$ и

(б) $\omega\in B^1_{S-\overline{U}}$, т. е. $\|\omega\|_{S-\overline{U}}<+\infty$.

Согласно предшествующим рассуждениям, рассмотрим на $S$ дифференцируемую функцию $\rho(z)$, которая $\equiv 0$ вне $U$ и $\equiv 1$ в некоторой меньшей окрестности точки $p$. Форма $\psi=d(\rho(z)/z^n)$ мероморфна в окрестности $p$ с единственным полюсом $p$. Однако форма $\psi-\sqrt{-1}*\psi$ дифференцируема и имеет компактный носитель на $S$ (при подходящем выборе окрестности $U$). По теореме об ортогональном разложении $\psi-\sqrt{-1}*\psi=\omega_h+df+*dg$, где $\omega_h$ — гармоническая форма на $S$, а $f$ и $g$ — дифференцируемые функции. Утверждается, что дифференциал $\omega=\psi-df=\sqrt{-1}*\psi+\omega_h+*dg$ удовлетворяет требованиям теоремы [69].

Следствие 1. На римановой поверхности $S$ существуют дифференциалы второго рода с любым наперед заданным конечным числом полюсов $p$ и любыми главными частями $\omega_p=$
$$=\sum_{i=-n}^{-2} a_i z^i dz,\quad n\geqslant 2.$$

Например, пусть $\omega$ — гармонический дифференциал, указанный в теореме. Тогда $(\omega+\sqrt{-1}*\omega)/2$ есть дифференциал второго рода с главной частью $(n/z^{n+1})dz$ в единственном полюсе $p$.

Беря отношения дифференциалов второго рода, можно установить существование разнообразных мероморфных функций. В частности,

Следствие 2. На римановой поверхности $S$ существует мероморфная функция, принимающая любые наперед заданные значения в конечном множестве точек.

Теперь можно усилить некоторые результаты пункта 2.11.

Следствие 3. Если $f: S_1 \to S_2$ — конечное отображение римановых поверхностей, то степень расширения $f^*: \mathcal{M}(S_2) \hookrightarrow \mathcal{M}(S_1)$ равна $\deg f$.

Чтобы показать это, достаточно найти функцию $g \in \mathcal{M}(S_1)$, принимающую попарно различные значения $a_i = g(y_i)$, $i = 1, \ldots, \deg f$, в точках общего слоя $f^{-1}(p) = \{y_i\}$. Поскольку мероморфные функции разделяют точки, также получаем.

Следствие 4. Сопоставление непостоянному отображению римановых поверхностей $f: S_1 \to S_2$ расширения полей мероморфных функций $f^*: \mathcal{M}(S_2) \hookrightarrow \mathcal{M}(S_1)$ взаимно однозначно.

Следствие 5. Пусть $S_2$ — риманова поверхность, а $\varphi: \mathcal{M}(S_2) \hookrightarrow K$ — конечное расширение. Тогда имеется единственное конечное отображение римановых поверхностей $f: S_1 \to S_2$ с расширением $f^*: \mathcal{M}(S_2) \hookrightarrow \mathcal{M}(S_1)$, изоморфным $\varphi$. (Ср. с теоремой 2 п. 2.11.)

Пример. Единственность, в частности, позволяет придать геометрический смысл гиперэллиптичности: компактная риманова поверхность $S$ с отображением $\gamma: S \to \mathbf{CP}^1$ степени 2 гиперэллиптична. Действительно, всякое расширение степени поля $\mathbf{C}(z)$ можно получить присоединением алгебраической функции $\sqrt{f}$, где $f \in \mathbf{C}(z)$ — многочлен с однократными корнями. Отсюда же вытекает, что гиперэллиптическая риманова поверхность однозначно определяется образами точек ветвления.

Следствие 6. На всякой римановой поверхности $S$ $\dim_{\mathcal{M}(S)} \mathcal{M}^1(S) = 1$ и существует канонический дивизор.

Для доказательства двух следующих важных результатов достаточно существования хотя бы одной непостоянной мероморфной функции.

Следствие 7. Поле мероморфных функций $\mathcal{M}(S)$ компактной римановой поверхности $S$ конечно порождено над $\mathbf{C}$ и имеет степень трансцендентности 1.

Следствие 8 (формула Римана—Гурвица). Пусть $S$ — компактная риманова поверхность (топологического) рода $g$. Тогда $\deg K = -\chi(S) = 2g - 2$.

Согласно пункту 4.8 это верно в случае римановой сферы. Общий случай получается с помощью формул Гурвица для степени канонического класса (см. п. 4.8) и эйлеровой характеристики (см. п. 3.6), примененных к непостоянному отображению (мероморфной функции) $f: S \to \mathbf{CP}^1$.

Замечание. Соотношение $\deg K = -\chi(S)$ двойственно теореме Хопфа об индексе векторного поля на поверхности

[3]. Другой подход к формуле Римана—Гурвица, при котором $g$ интерпретируется как геометрический род, обсуждается в замечании 2 пункта 6.2 (ср. с п. 2.9 гл. 2).

Доказательства оставшихся результатов не требуют привлечения новых идей.

Следствие 9. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — конечное отображение римановых поверхностей. Сопоставление $\sigma \mapsto \sigma^*$ задает инверсный[1] изоморфизм группы $\operatorname{Aut} f$ с группой автоморфизмов соответствующего расширения $\operatorname{Aut}(f^*: \mathscr{M}(S_2) \mapsto \mathscr{M}(S_1)) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathscr{M}(S_1)) \mid \varphi \circ f^* = f^*\}$.

Удобнее однако сначала доказать чуть более общее утверждение.

Следствие 10. Пусть $f_1, f_2: S_1, S_2 \to S$ — конечные отображения римановых поверхностей, а $\varphi: \mathscr{M}(S_2) \to \mathscr{M}(S_1)$ — изоморфизм полей над $\mathscr{M}(S)$, т. е. $\varphi \circ f_2^* = f_1^*$. Тогда имеется единственный изоморфизм $f: S_1 \to S_2$ над $S$, т. е. $f_2 \circ f = f_1$, с $f^* = \varphi$.

Следствие 11. Конечное отображение римановых поверхностей $f: S_1 \to S_2$ нормально в том и только том случае, когда нормально расширение $f^*: \mathscr{M}(S_2) \hookrightarrow \mathscr{M}(S_1)$. Более того, в случае нормальности $f^* \mathscr{M}(S_2) = \mathscr{M}(S_1)^{\operatorname{Aut} f}$ — поле мероморфных функций на $S_1$, инвариантных относительно $\operatorname{Auf} f$ (ср. со следствием 2 п. 4.8).

Следствие 12. Пусть $\varphi: \mathscr{M}(S_2) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}(S_1)$ — $\mathbf{C}$-изоморфизм полей мероморфных функций компактных римановых поверхностей $S_1$, $S_2$. Тогда имеется единственный изоморфизм $f: S_1 \to S_2$ с $f^* = \varphi$. В частности, риманова поверхность, являющаяся моделью конечно порожденного $\mathbf{C}$-поля степени трансцендентности 1, определена однозначна с точностью до изоморфизма.

Компактные *римановы поверхности*, поле мероморфных функций которых изоморфно чисто трансцендентному расширению $\mathbf{C}(z)$ поля $\mathbf{C}$, называют *рациональными*. Следствие 12 в частности показывает, что всякая рациональная риманова поверхность изоморфна римановой сфере $\mathbf{CP}^1$.

Следствие 13. Имеется естественный инверсный изоморфизм $\sigma \quad \sigma^*$ группы автоморфизмов $\operatorname{Ant} S$ компактной римановой поверхности $S$ с группой $\mathbf{C}$-автоморфизмов $\mathscr{M}(S)$ ее поля мероморфных функций.

**4.15. Принцип Дирихле.** В теореме Римана о существовании гармонического дифференциала легко добиться единственности. Для этого вводят еще одно условие:

(в) $(\omega, dh) = 0$ для любого точного дифференциала $dh \in A^1$ с $\|dh\| < +\infty$ и $\equiv 0$ в окрестности точки $p$.

При нахождении такого гармонического дифференциала $\omega$ разложение $H \oplus \check{E}$ заменяется на $\tilde{H} \oplus \check{\tilde{E}}$, где $\tilde{E}$ — пространство ограниченных точных дифференциалов $dh \in B^1$, а $\tilde{H} = (\check{\tilde{E}} \oplus * \check{\tilde{E}})^{\perp}$.

---

[1] Инверсность означает, что $(\sigma \circ \delta)^* = \delta^* \circ \sigma^*$.

Очевидно, $E \subseteq \tilde{E} \subseteq E+H$ и $\tilde{H} \subseteq H$. Тогда ортогональное разложение принимает вид $\psi - \sqrt{-1} * \psi = \tilde{\omega}_h + d\tilde{f} + *dg$, $\tilde{\omega}_h \in \tilde{H}$, $d\tilde{f} \in \tilde{E}$. Дифференциал $\omega = \psi - d\tilde{f}$ удовлетворяет всем условиям (а), (б), (в) и однозначно определяется ими [69]. Условие (в) допускает следующую эквивалентную переформулировку. Пусть $dh \equiv 0$ в окрестности $N$ точки $p$. Тогда

$$\|\omega + dh\|^2_{S-\bar{N}} = (\omega, \omega)_{S-\bar{N}} + (dh, dh) + (\omega, dh) + \overline{(\omega, dh)} =$$

$$= \|\omega\|^2_{S-\bar{N}} + \|dh\|^2 \geqslant \|\omega\|^2_{S-\bar{N}}.$$

Таким образом, гармонический дифференциал $\omega$ минимизирует $\| \ \|_{S-\bar{N}}$ в классе всех дифференциалов $\omega + dh$, где $dh \equiv 0$ в $N$.

Этот факт называют принципом Дирихле. Из него очевидно вытекает единственность $\omega$. Поэтому вся глубина кроется в существовании $\omega$, на что Риман не обращал должного внимания и был подвергнут за это критике со стороны Вейерштрасса. В компактном случае первые строгие решения задач о существовании принадлежат Шварцу и Нейману. В дальнейшем развитии методов приняли участие Пуанкаре, Гильберт, Клейн и Кебе. Метод ортогонального разложения предложен Вейлем в 1940 г., однако его основные идеи восходят к Риману.

## § 5. Классификация римановых поверхностей

По существу следствие пункта 3.3 есть топологическая классификация компактных ориентируемых поверхностей: всякая компактная риманова (читай ориентируемая) поверхность рода $g$ гомеоморфна сфере с $g$ ручками. Аналогично получается при классификации дифференцируемых поверхностей [42]. Вопрос о том, сколько имеется римановых поверхностей рода $g$ с точностью до изоморфизма или, эквивалентно, сколько аналитических структур можно ввести на сфере с $g$ ручками, гораздо тоньше. То что риманова сфера — единственная риманова поверхность рода 0, не типично для $g \geqslant 1$. Более того, существуют непрерывные семейства попарно неизоморфных римановых поверхностей рода $g \geqslant 1$. Это принципиально отличает геометрию аналитических многообразий от дифференциальной геометрии и топологии. Значит, помимо дискретных топологических инвариантов (род, степень канонического дивизора), римановы поверхности должны обладать непрерывными инвариантами или, в координатной форме, непрерывными параметрами, называемыми модулями. Универсальный пример — матрица периодов или, инвариантно, якобиан римановой поверхности — подробно обсуждается в главе 3. Подход к классификации римановых поверхностей, рассматриваемый в этом параграфе, использует универсальную накрывающую. Его идея сформулирована в пункте 2.9. Читателю, желающему глубже окунуться в классификационную проблематику, особенно некомпактных римановых поверхностей, рекомендуем монографию [63].

**5.1. Канонические области.** С точностью до гомеоморфизма и дефеоморфизма имеется два типа связных, односвязных поверхностей: вещественная плоскость — некомпактный случай, двумерная сфера — компактный случай. Классификация односвязных римановых поверхностей к удивлению не на много сложнее.

Теорема (Римана об отображении). Односвязная риманова поверхность изоморфна одной из следующих областей римановой сферы: $\mathbf{CP}^1$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$.

Указанные *области* называют *каноническими*, хотя выбор последней из них не совсем однозначен (ср. с [69]). Верхнюю полуплоскость иногда удобно заменить на изоморфный ей диск $\mathbf{D}$. Например, чтобы установить неизоморфность $\mathbf{C}$ и $\mathbf{H}$, удобнее перейти к $\mathbf{D}$ и воспользоваться теоремой Лиувилля.

Лемма. Канонические области $\mathbf{CP}^1$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ попарно не изоморфны.

Оставшиеся случаи очевидны по топологическим соображениям. Отсюда получается топологическая характеризация рациональности римановой поверхности (см. п. 4.14).

Следствие. Риманова поверхность рациональна тогда и только тогда, когда она гомеоморфна сфере или, эквивалентно, компактна и имеет род 0.

**5.2. Униформизация.** Пусть задана многозначная аналитическая функция $f(w)$ от одной комплексной переменной $w$. Задача об униформизации состоит в нахождении двух однозначных аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, мероморфных в некоторой области римановой сферы таких, что $\psi(z)=f(\varphi(z))$ и функция $\varphi(z)$ дает в образе всюду плотное подмножество области определения $f$.

Пример 1. Функция $w^\alpha$ при любом комплексном $\alpha$ униформизируется функциями $\varphi(z)=e^z$ и $\psi(z)=e^{\alpha z}$.

Пример 2. Функция $\sqrt{-z^2}$ униформизируется функциями $\varphi(z)=\sin z$ и $\psi(z)=\cos z$ или $\varphi(z)=2z/(1+z^2)$, $\psi(z)=(1-z^2)/(1+z^2)$.

Общая теорема об униформизации, восходящая к Клейну, Пуанкаре и Кебе, утверждает существование униформизации любой многозначной функции $f(w)$ с областью определения функций $\varphi$ и $\psi$, равной $\mathbf{CP}^1$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$. Действительно, с геометрической точки зрения функция $f$ есть подмножество $U=\{(w,f(w))\}\subset\mathbf{C}\times\mathbf{C}$, заданное локально одним аналитическим (для алгебраических функций глобально алгебраическим) соотношением $F(w,f)=0$. Исключая дискретное множество особых точек ($\partial F/\partial w=\partial F/\partial f=0$), можно считать $U$ подмногообразием, а потому римановой поверхностью. (В алгебраической ситуации можно воспользоваться десингуляризацией п. 2.11). Согласно существованию и односвязности универсальной накрывающей, а также теореме Римана об отображении имеется (неразветвленное) отображение некоторой односвязной канонической области на $U \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}$. Первая компонента этого отображения есть функция $\varphi$, а вторая — $\psi$.

Замечание. Проблема униформизации возникла в связи с интегрированием алгебраических функций (ср. с замечанием 2 п. 4.8). Униформизация алгебраических и аналитических функций произвольного числа переменных составляет содержание двадцать второй проблемы Гильберта [10]. Однако пока даже для двух переменных в решении этой проблемы нет существенных продвижений. К тому же ныне проблема униформизации, в связи с распространением абстрактных структур (римановы поверхности, комплексные и алгебраические многообразия), потеряла свое величие в старой формулировке. Однако все существенное в ней перешло в результаты и проблемы классификации комплексных и алгебраических многообразий, теорию автоморфных форм.

**5.3. Типы римановых поверхностей.** Всякая универсальная накрывающая односвязна, откуда по теореме Римана получаем:

Теорема. Каждая риманова поверхность изоморфна факторповерхности $S/\Gamma$, где $S$ — односвязная каноническая область, $\Gamma$ — подгруппа автоморфизмов, действующая свободно и дискретно на $S$.

Вид канонической области однозначно определяется римановой поверхностью, ибо ее универсальная накрывающая единственна.

Определение. *Канонические области* $\mathbf{CP}^1$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{H}$ называют соответственно *эллиптической, параболической* и *гиперболической*. В общем случае говорят, что риманова поверхность имеет *эллиптический, параболический* или *гиперболический тип,* если такова ее универсальная накрывающая.

Предостережение. Иногда слово тип опускают и говорят просто эллиптическая, параболическая поверхность, что может привести к путанице, так как эллиптическая кривая тогда параболична.

Следствие. В обозначениях теоремы группа автоморфизмов римановой поверхности $S/\Gamma$ изоморфна $N/\Gamma$, где $N$ — нормализатор $\Gamma$ в $\operatorname{Aut} S$.

Замечание. Деление римановых поверхностей на типы отвечает делению плоских метрических геометрий: риманова — нет параллельных, евклидова — одна параллельная, Лобачевского — две параллельных.

**5.4. Автоморфизмы канонических областей.**

Теорема. (а) Риманова сфера. Каждый автоморфизм $\mathbf{CP}^1$ является дробно-линейным преобразованием:

$$z\mapsto(az+b)/(cz+d),\quad \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbf{C}).$$

Эти преобразования образуют комплексную группу Ли $\mathrm{M\ddot{o}b}\overset{\mathrm{df}}{=}\mathrm{Aut}\,\mathbf{CP}^1\simeq SL(2,\mathbf{C})/\pm I$ размерности 3, называемую группой Мёбиуса.

(б) Гауссова плоскость. Каждый автоморфизм $\mathbf{C}$ является (комплексным) аффинным преобразованием:

$$z\mapsto az+b,\ a\in\mathbf{C}^{\times},\ b\in\mathbf{C}.$$

Эти преобразования образуют комплексную группу Ли размерности 2.

(в) Верхняя полуплоскость. Каждый автоморфизм $\mathbf{H}$ является вещественным дробно-линейным преобразованием:

$$z\mapsto(az+b)/(cz+d),\quad \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbf{R}).$$

Эти преобразования образуют вещественную группу Ли $SL(2,\mathbf{R})/\pm I$ размерности 3.

(г) Единичный диск. Каждый автоморфизм $\mathbf{D}$ является дробно-линейным преобразованием вида

$$z\mapsto e^{\sqrt{-1}\vartheta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ \vartheta\in\mathbf{R},\ a\in\mathbf{D}.$$

Группа автоморфизмов единичного диска изоморфна группе автоморфизмов верхней полуплоскости, поскольку эти области изморфны (см. п. 1.6). Доказательство теоремы можно найти в стандартных курсах по теории аналитических функций [12], [44]. То, что всякий автоморфизм римановой сферы дробно-линеен, есть соединение рациональности (см. пример 1 п. 2.2) и взаимно-однозначности. Случай других канонических областей сложнее и неожиданнее, в частности, тем, что всякий автоморфизм этих областей дробно-линеен, а потому продолжается на всю риманову сферу. Явное описание автоморфизмов позволяет проверить следующий замечательный факт, объясняющий выбор метрик различных моделей геометрии Лобачевского.

Следствие. (а) Модель Пуанкаре $\mathbf{H}$. $dzd\bar{z}/(\mathrm{Im}\,z)^2$ — единственная с точностью до пропорциональности (выбора масштаба) кэлерова метрика на верхней полуплоскости, инвариантная относительно всех автоморфизмов.

(б) Модель Пуанкаре $\mathbf{D}$. $dzd\bar{z}/(1-|z|^2)^2$ — единственная с точностью до пропорциональности кэлерова метрика на единичном диске, инвариантная относительно всех автоморфизмов.

Замечание. Более абстрактно, на всякой односвязной римановой поверхности гиперболического типа имеется единственная с точностью до пропорциональности кэлерова форма, инвариантная относительно автоморфизмов. В частности, она индуцирует кэлерову форму на любой римановой поверхности гиперболического типа. Эта метрика имеет постоянную гауссову кривизну $K<0$, чем и определяется однозначно [3]. В параболическом случае метрика кривизны 0 индуцирована евклидовой, в эллиптическом случае метрика постоянной положительной кривизны есть метрика Фубини—Штуди (см. [3] и пп. 5.5, 5.6 ниже). Сама терминология эллиптический, параболический, гиперболический тип происходит из деления метрик постоянной гауссовой кривизны по сигнатуре: $K>0$, $=0$, $<0$.

**5.5. Римановы поверхности эллиптического типа.**

Предложение. Риманова поверхность эллиптического типа изоморфна римановой сфере.

По теореме пункта 5.3 такая поверхность изоморфна $\mathbf{CP}^1/\Gamma$. При этом группа $\Gamma$ действует свободно. Но это возможно лишь для $\Gamma=\{id\}$, так как нетривиальное дробно-линейное преобразование всегда имеет неподвижную точку.

**5.6. Римановы поверхности параболического типа.** Также легко доказать

Предложение. Риманова поверхность параболического типа изоморфна либо $\mathbf{C}$, либо $\mathbf{C}^\times$, либо эллиптической кривой $\mathbf{C}/\Lambda$.

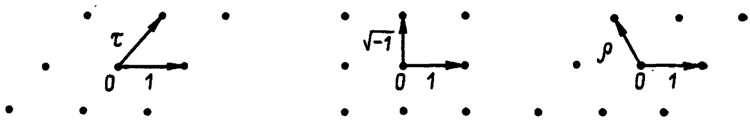
При подходящем выборе аффинной координаты на $\mathbf{C}$ можно считать решетку $\Lambda$, порожденной 1 и $\tau\in\mathbf{H}$. Соответствующую эллиптическую кривую $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})$ обозначают через $E_\tau$. (Формально, $\mathbf{C}^\times$ изоморфна $E_0$.) Параметр $\tau$ указывает на наличие модулей эллиптических кривых. Однако $\tau$ определяется не однозначно классом изоморфизма поверхности $E_\tau$, а с точностью до модулярных преобразований $\tau\mapsto(a\tau+b)/(c\tau+d)$, $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbf{Z})$. Действительно, модулярным преобразованиям $\tau'=(a\tau+b)/(c\tau+d)$ отвечают изоморфизмы $E_\tau \xrightarrow{\sim} E_{\tau'}$, индуцированные аффинными отображениями $z\mapsto z/(c\tau+d)+\mathrm{const}$ универсальной накрывающей $\mathbf{C}$. Используя свойства универсальных накрывающих и описание автоморфизмов $\mathbf{C}$, легко проверить, что других изоморфизмов нет. Аналогично описываются автоморфизмы эллиптических кривых. Имеются очевидные автоморфизмы — сдвиги на элементы $p\in E_\tau: q\mapsto q+p$ — добавление $p$ в смысле группового закона на $E_\tau$. Сдвиги образуют группу, изоморфную $E_\tau$. Гораздо интереснее факторгруппа $\mathrm{Aut}_0E_\tau \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Aut}\,E_\tau/E_\tau$, которую можно отождествить с автоморфизмами, сохраняющими $0\in E_\tau$.

Теорема. (а) $\mathrm{Aut}_0E_\tau=\{\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})\xrightarrow{\pm z}\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})\}=\mathbf{Z}_2$, если $E_\tau$ не изоморфна $E_{\sqrt{-1}}$ и $E_\rho$, где $\rho=e^{\pi\sqrt{-1}/3}\in\mathbf{H}$.

(б) $\mathrm{Aut}_0\,E_{\sqrt{-1}}=\left\{\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\sqrt{-1}\mathbf{Z})\xrightarrow{\sqrt[4]{1}\,z}\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\sqrt{-1}\mathbf{Z})\right\}=\mathbf{Z}_4$.

(в) $\operatorname{Aut}_0 E_\rho = \left\{ \mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\rho\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sqrt[6]{1}\,z} \mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\rho\mathbf{Z}) \right\} = \mathbf{Z}_6.$

Идея доказательства — отождествить группу $\operatorname{Aut}_0(\mathbf{C}/\Lambda)$ с группой вращений решетки $\Lambda$. В самом деле, каждый автоморфизм $\mathbf{C}/\Lambda$, сохраняющий 0, индуцирован линейным отображением $z \mapsto az$, $a \in \mathbf{C}^\times$, таким, что $a\Lambda = \Lambda$. Для общей решетки $\Lambda$ группа вращений состоит из поворотов на угол 0 и $\pi$, что приводит к (а). Кроме того, имеются лишь два исключения (б) и (в) (см. рис. 16). Несколько другой подход см. в [25].




а б в

Рис. 16. Плоские решетки: (а) общая, (б) квадратная и (в) шестиугольная

Замечания. 1. Отображение эллиптической кривой, сохраняющее нуль, является гомоморфизмом. Поэтому группу $\operatorname{Aut}_0(\mathbf{C}/\Lambda)$ можно интерпретировать как группу автоморфизмов группы Ли $\mathbf{C}/\Lambda$.

2. Сюръективный эндоморфизм эллиптической кривой $\mathbf{C}/\Lambda$ называют изогенией. Простейший пример — изогения умножения на натуральное число:

$$N : \mathbf{C}/\Lambda \xrightarrow{Nz} \mathbf{C}/\Lambda.$$

3. Согласно предложению, всякая компактная параболическая риманова поверхность имеет род 1. Обратное утверждает следствие 2 п. 5.7

**5.7. Римановы поверхности гиперболического типа.** Всякая такая поверхность изоморфна фактору $\mathbf{H}/\Gamma$, $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{R})/\pm I$ и группа $\Gamma$ действует свободно и дискретно на $\mathbf{H}$. Последнее эквивалентно дискретности $\Gamma$ как подгруппы группы Ли $SL(2, \mathbf{R})/\pm I$ [66]. Инвариантная метрика $dz d\bar{z}/(\operatorname{Im} z)^2$ задает расстояние $\rho(z_1, z_2)$ между точками $z_1$ и $z_2$ верхней полуплоскости $\mathbf{H}$, расстояние в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. Прямые этой модели суть вертикальные лучи и полуокружности с центром в вещественных точках (см. рис. 17). С внутренней точки зрения это — геодезические инвариантной метрики. Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{R})/\pm I$ — дискретная подгруппа. Фиксируем точку $z_0 \in \mathbf{H}$ с $g(z_0) \neq z_0$ для всех $g \in \Gamma - \{id\}$. (Если $\Gamma$ действует свободно, то $z_0$ — произвольная точка $\mathbf{H}$.) Положим

$$D = \{z \in \mathbf{H} \mid \rho(z, z_0) \leqslant \rho(gz, z_0),\ g \in \Gamma\}.$$

Теорема. Множество $D$ — выпуклый, возможно с бесконечным числом сторон, многоугольник в геометрии Лобачевского (см. рис. 17), а внутренность $D^0$ — фундаментальная область группы $\Gamma$.

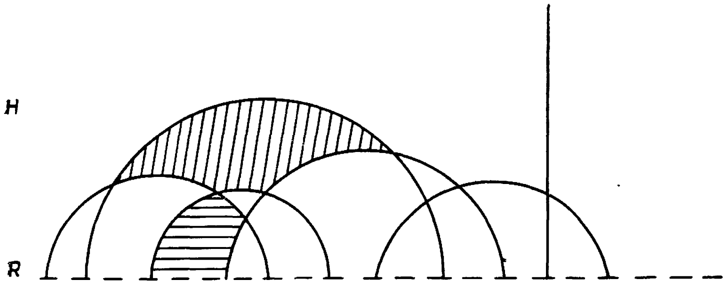



**Рис. 17. Прямые и выпуклые многоугольники в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского**

Многоугольник $D$ называют *нормальным многоугольником* группы $\Gamma$ с центром $z_0 \in \mathbf{H}$. Доказательство теоремы для модели Пуанкаре $\mathbf{D}$ имеется в [69].

Пример. Нормальный многоугольник полной модулярной группы $\Gamma_1 = SL(2, \mathbf{Z})/\pm I$ с центром $z_0 = a\sqrt{-1}, a \in \mathbf{R}, a > 1$, есть известная *модулярная фигура*: $\{z \in \mathbf{H} \mid |z| \geqslant 1, -1/2 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1/2\}$ (см. рис. 18).

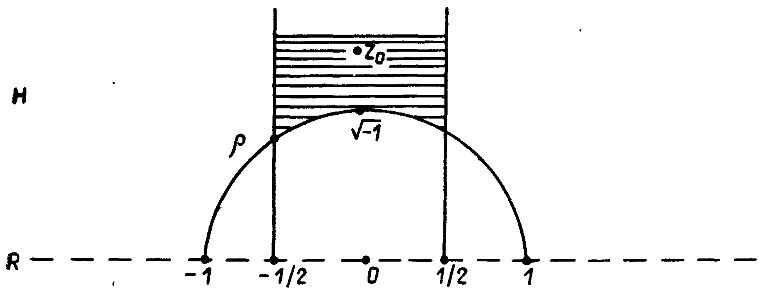



**Рис. 18. Модулярная фигура**

Следствие 1. Факторпространство $\mathbf{H}/\Gamma$ компактно тогда и только тогда, когда нормальный многоугольник $D$ ограничен.

Более того, в случае компактного фактора многоугольники $gD$, $g \in \Gamma$, замкнуты, имеют конечное число сторон и задают замощение плоскости Лобачевского. По фундаментальности каждая сторона $s$ многоугольника $D$ определяет ровно одно нетождественное преобразование $t_s \in \Gamma$, переводящее эту сторону в $\Gamma$-эквивалентную ей сторону $t_s(s)$ того же многоугольника $D$. Группа $\Gamma$ порождена такими элементами $t_s$ [69]. Возвращаясь к исходной ситуации, предположим дополнительно свободу действия $\Gamma$. Многоугольник $D$ можно рассматривать как развертку компактной римановой поверхности $\mathbf{H}/\Gamma$. Склейка сторон и вершин равносильна при этом $\Gamma$-эквивалентности. Эта развертка обладает следующими свойствами:

(а) склеиваемые стороны равны и противоположно ориентированы,

(б) сумма углов вершин, склеивающихся в одну точку, равна $2\pi$.

Обратно, внутренность развертки $D$ со свойствами (а) и (б) является фундаментальной областью дискретной группы $\Gamma$. Более того, $\Gamma$ действует свободно на $\mathbf{H}$, а ее фактор $\mathbf{H}/\Gamma$ является компактной римановой поверхностью с разверткой $D$.

Предостережение. Исходный многоугольник последней конструкции не обязательно нормален. Таковы, как правило, развертки Пуанкаре со стандартным символом $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots$ $\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$. Пусть $2e$ — число сторон развертки $D$, а $v$ — максимальное число $\Gamma$-неэквивилентных вершин развертки. Тогда эйлерова характеристика $\chi(\mathbf{H}/\Gamma)$ равна $\overset{}{\underset{\mathrm{df}}{v-e+1}}$ (см. п. 3.5). С другой стороны, площадь $D=$ дефект $=$ сумма углов $2e$-угольника в евклидовой геометрии — сумма углов многоугольника $D$ в геометрии Лобачевского $=(2e-2)\pi-v2\pi=-\chi(\mathbf{H}/\Gamma)2\pi$. Заметим теперь, что площади в указанной модели вычисляют с помощью формы $\sqrt{-1}\,dz\wedge d\bar{z}/2(\operatorname{Im} z)^2=\frac{dx\wedge dy}{y^2}$, $z=x+$ $+\sqrt{-1}\,y$, откуда получаем

Предложение. Пусть $\Gamma\subset SL(2,\ \mathbf{R})/\pm I$ — действующая свободно дискретная подгруппа с компактным фактором $\mathbf{H}/\Gamma$, а $D$ — ее фундаментальная область, например, нормальный многоугольник. Тогда

$$\chi(\mathbf{H}/\Gamma)=\frac{-\sqrt{-1}}{4\pi}\int\limits_D\frac{dz\wedge d\bar{z}}{(\operatorname{Im} z)^2}.$$

Это — частный случай формулы Гаусса—Бонне [28], [31], [66]. Теперь читателя не удивит топологическая инвариантность типа в компактном случае.

Следствие 2. Пусть $S$ — компактная риманова поверхность рода $g$. Она имеет: (а) эллиптический тип при $g=0$; (б) параболический тип при $g=1$; (в) гиперболический тип при $g\geqslant2$.

Доказательство использует результаты предыдущих пунктов и последнее предложение, по которому эйлерова характеристика гиперболической поверхности $\chi(S)=2-2g<0$.

Замечание 1. Из следствия 2 получаем, что риманова поверхность $S$ рода 1 изоморфна эллиптической кривой. В частности, это верно для плоской кубики. Явное описание изоморфизма дает теорема Абеля (см. п. 2.6 гл. 3). Однако как находить $\tau$ a posteriori ясно; $S \simeq E_\tau$ для $\tau = \int_{b_1} \omega \Big/ \int_{a_1} \omega$, где $\omega \neq 0$ — голоморфный дифференциал на $S$, а $a_1$, $b_1$ — стандартный базис группы гомологий $H_1(S, \mathbf{Z})$ (важно, что $(a_1, b_1) = +1$). Переход к другому такому базису задается матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z})$, чему отвечает дробно-линейное преобразование отношения периодов $\tau \mapsto (d\tau + c)/(b\tau + a)$ (ср. с п. 5.6).

Замечание 2. Классификация с точностью до изоморфизма римановых поверхностей эллиптического и параболического типа приводит к конечному числу (4) семейств: риманова сфера, гауссова плоскость, $\mathbf{C}^\times$ и семейство эллиптических кривых $E_\tau$. Гиперболический тип имеет бесконечную серию семейств даже в компактном случае: семейства римановых поверхностей рода $g \geqslant 2$ (см. п. 5.10). Поэтому его также называют *общим*.

Группа автоморфизмов римановых поверхностей гиперболического типа, как и они сами, не имеют полного описания. Приходится довольствоваться качественными результатами, что, впрочем, характерно для всякого общего случая. Именно эти *результаты* обычно относят к *фундаментальным*.

Теорема (Шварц). Компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 2$ или, эквивалентно, гиперболического типа имеет конечную группу автоморфизмов.

Доказательство использует описание гиперболических римановых поверхностей с недискретной группой автоморфизмов: $\mathbf{D}$, кольца $\{r < |z| < 1\}$, $0 \leqslant r < 1$ [69]. В противоположность этому, группа автоморфизмов римановой поверхности эллиптического или параболического типа (как комплексная группа Ли) всегда имеет положительную размерность.
Тем самым общий тип характеризует уменьшение симметрий.

Замечание 3. На самом деле, порядок группы автоморфизмов римановой поверхности рода $g \geqslant 2$ не превосходит $84(g-1)$ [47]. Это вытекает из следующего замечательного факта: площадь фундаментальной области, например, нормального многоугольника дискретной подгруппы $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{R})/\pm I$ не может быть менее абсолютной константы $\pi/21$ [66]. Другой более алгебраический подход связан с формулой Гурвица (см. [19] и п. 2.9 гл. 2). Отметим также, что достаточно произвольная риманова поверхность рода $g \geqslant 3$ не имеет автоморфизмов вообще (см. следствие п. 5.10).

**5.8. Автоморфные формы. Ряды Пуанкаре.** Исторически первый подход к теоремам о существовании мероморфных функций и дифференциалов на компактных римановых поверхностях использовал их универсальную накрывающую (см. теорему п. 5.3). Основная трудность при этом падала на доказательство теоремы Римана об отображении. Действительно, риманова сфера — единственная поверхность эллиптического типа и ее мероморфные функции и дифференциалы рациональны (см. пример 1 п. 2.2 и следствие 1 п. 4.8). Конструкции функций и дифференциалов на эллиптических кривых уже встречались в пунктах 2.2 и 4.7 (см. также п. 1.7 гл. 3). Остановимся теперь на компактном гиперболическом случае $\mathbf{D}/\Gamma$ и обратимся к более общей задаче нахождения мероморфных (симметрических) дифференциалов натуральной степени $m$. Она равносильна нахождению таких дифференциалов на накрывающей $\mathbf{D}$, инвариантных относительно $\Gamma$. Всякий дифференциал степени $m$ на $\mathbf{D}$ записывается в виде $f dz^m$. При этом мероморфность дифференциала означает мероморфность функции $f$ на $\mathbf{D}$, а инвариантность — выполнение соотношения

$$f(g(z)) = f(z)\left(\frac{dg(z)}{dz}\right)^{-m} \quad \text{для всех } g \in \Gamma. \tag{5}$$

Определение. Мероморфную функцию $f$ на $\mathbf{D}$ со свойством (5) называют *автоморфной формой* веса $2m$ относительно $\Gamma$. Автоморфные формы веса 0 называют *автоморфными функциями.*

Пример 1. Пусть $m \geqslant 2$, а $h$ — голоморфная и ограниченная функция на $\mathbf{D}$. Тогда ряд

$$f(z) = \sum_{g \in \Gamma} h(g(z))\left(\frac{dg(z)}{dz}\right)^m,$$

называемый *рядом Пуанкаре,* сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в $\mathbf{D}$. Поэтому он определяет голоморфную на $\mathbf{D}$ функцию $f$, которая, как легко проверить, удовлетворяет (5), а потому есть автоморфная форма веса $2m$ относительно $\Gamma$. Доказательство сходимости использует лишь дискретность $\Gamma$ и ограниченность $\mathbf{D}$ [13]. Последнее объясняет выбор $\mathbf{D}$, а не $\mathbf{H}$ в этом пункте.

Пример 2. Другие формы можно строить с помощью арифметических операций: сумма автоморфных форм одного веса — автоморфная форма того же веса, произведение автоморфных форм — автоморфная форма суммарного веса, а отношение — форма с весом, равным разности весов. В частности, отношение рядов Пуанкаре одного веса есть автоморфная функция.

Пусть $f_0, \ldots, f_n$ — ненулевые автоморфные формы одного и того же веса относительно $\Gamma$. Тогда определено голоморфное отображение

$$\begin{gathered} f: \mathbf{D}/\Gamma \to \mathbf{CP}^n \\ \Gamma\text{-орбита } z \mapsto (f_0(z) : \ldots : f_n(z)). \end{gathered} \tag{6}$$

Корректность очевидна по автоморфности, а голоморфность очевидна в общих точках $z_0$, в окрестности которых все функции $f_i$ голоморфны и одна из них отлична от нуля в $z_0$.

в остальных точках надо устранить неопределенность, поделив все $f_i$ на $(z-z_0)^{\min \operatorname{ord}_{z_0} f_i}$.

Теорема. Пусть $\Gamma$ — группа автоморфизмов, дискретно и свободно действующая на $\mathbf{D}$, с компактным фактором $\mathbf{D}/\Gamma$. Тогда существует конечное число автоморфных форм одного и того же веса, определяющих, согласно (6), вложение $\mathbf{D}/\Gamma$ в $\mathbf{CP}^n$.

Под вложением понимается изоморфизм на образ (ср. с предложением п. 6.1). При доказательстве, а потому и в формулировке теоремы можно обойтись рядами Пуанкаре [13]. Отсюда можно вывести, что любая автоморфная форма есть рациональная функция от рядов Пуанкаре (ср. с теоремой о рациональности п. 6.5), т. е. конструкции примеров достаточно общи. Более алгебраическая и более точная версия теоремы приводится в пункте 6.4.

Замечание. Подробности указанного подхода к теоремам о существовании см. в [48].

**5.9. Факторизация по дискретному действию. Абсолютный инвариант.** Начнем с общей конструкции. Пусть $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{R})/\pm I$ — дискретная группа преобразований верхней полуплоскости $\mathbf{H}$. Такие *группы* преобразований $\mathbf{H}$ называют *фуксовыми*. Как и в случае свободного действия, на фактор-пространстве $\mathbf{H}/\Gamma$ имеется единственная структура римановой поверхности такая, что отображение факторизации $\mathbf{H} \to \mathbf{H}/\Gamma$ голоморфно. Более того, $\mathbf{H}$ можно заменить на произвольную риманову поверхность $S$, а $\Gamma$ на группу, дискретно действующую на $S$. Трудность при введении аналитической структуры на $S/\Gamma$ связана с факторизацией окрестностей точек $p \in S$, обладающих нетривиальным стабилизатором $\Gamma_p \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{g \in \Gamma \mid g(p) = p\}$. По дискретности $\Gamma_p$ — конечная группа вращений точки $p$ в метрике постоянной кривизны (см. замечание п. 5.4), а потому при подходящем выборе локального параметра $z$ в окрестности точки $p$ имеем $\Gamma_p = \{z \mapsto \sqrt[n]{1}\, z\}$, где $n$ — порядок $\Gamma_p$. Функция $z^n$ берется в качестве локального параметра на $S/\Gamma$ в окрестности орбиты $\Gamma_p$. Нетождественное преобразование $g(z) = (az+b)/(cz+d)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$, имеет на $\mathbf{H}$ не более одной неподвижной точки (а на $\mathbf{CP}^1$ — не более двух). *Преобразование* $g(z)$, имеющее неподвижную точку $z \in \mathbf{H}$ (две точки $z$, $\bar{z} \in \mathbf{CP}^1$), называют *эллиптическим* [66]. Соответственно, точки $z \in \mathbf{H}$ с нетривиальным стабилизатором $\Gamma_z$ (и их образы на $\mathbf{H}/\Gamma$) называют *эллиптическими точками* группы $\Gamma$, а порядок группы $\Gamma_z$ — их *порядком*.

Пример. Важнейший пример фуксовой группы — полная модулярная группа $\Gamma_1$ (см. пример п. 5.7). Факторповерхность $\mathbf{H}/\Gamma_1$, имеет две эллиптические точки — орбиты $\Gamma_1 \sqrt{-1}$ и $\Gamma_1 \rho$ —

порядка 2 и 3 соответственно. Рассматривая модулярную фигуру (см. рис. 18) как развертку $\mathbf{H}/\Gamma_1$, легко убедиться, что поверхность $\mathbf{H}/\Gamma_1$ гомеоморфна плоскости. Более того, поверхность $\mathbf{H}/\Gamma_1$ изоморфна гауссовой плоскости $\mathbf{C}$. По теореме Римана об отображении это равносильно тому, что $\mathbf{H}/\Gamma_1$ компактифицируется одной точкой. Снова это легко усмотреть из модулярной фигуры. Локальный параметр в компактифицирующей точке $\Gamma_1\infty$ задается $\Gamma_1$-инвариантной функцией $e^{2\sqrt{-1}\pi z}$, $\operatorname{Im} z \gg 0$.

Этот пример замечателен, по крайней мере, в двух отношениях. Во-первых, из него вытекает существование неразветвленного накрытия ограниченной области гауссовой плоскости $\mathbf{C}$ на $\mathbf{C}-\{$две точки$\}$, что вытекает, впрочем, и из гиперболичности последней области. Этот факт является ключевым при доказательстве малой теоремы Пикара о том, что непостоянная голоморфная функция на $\mathbf{C}$ принимает все комплексные значения, за исключением, быть может, одного [12]. Во-вторых, на $\mathbf{H}/\Gamma_1 \simeq \mathbf{C}$ имеется единственная глобальная координата $z$ с $z(\Gamma_1\sqrt{-1})=1$ и $z(\Gamma_1\rho)=0$. Эквивалентно, на $\mathbf{H}$ имеется единственная $\Gamma_1$-инвариантная голоморфная функция $j(\tau)$, принимающая (каждое комплексное значение и) равные значения лишь в точках одной орбиты и такая, что $j(\sqrt{-1})=1$ и $j(\rho)=0$. Эту функцию называют *абсолютным инвариантом,* поскольку в отличие от $\tau\in\mathbf{H}$ ее значение $j(\tau)$ — действительно инвариант эллиптической кривой $E_\tau$ и всякий другой инвариант выражается через него. Последнее благодаря тому, что $j(\tau)$ определяет $E_\tau$ однозначно с точностью до изоморфизма.

**5.10. Модули римановых поверхностей.** Идея модулей как числовых параметров римановых поверхностей одного топологического типа проистекает из следующего примера.

Пример 1. Всякой римановой поверхности $S$ рода 1 можно сопоставить число — ее *абсолютный инвариант* $j(S)=j(\tau)$, где $S\simeq E_\tau$, $\tau\in\mathbf{H}$. Очевидно,

(а) две римановы поверхности $S_1$ и $S_2$ рода 1 изоморфны тогда и только тогда, когда равны их абсолютные инварианты: $j(S_1)=j(S_2)$;

(б) существует риманова поверхность рода 1 с любым наперед заданным комплексным значением абсолютного инварианта.

Однако этот пример не столько решает вопрос об описании римановых поверхностей рода 1 с точностью до изоморфизма, сколько подводит к другим. В каком смысле указанная параметризация естественна? Нет ли существенно других параметризаций? Например, с большим числом независимых комплексных параметров? Эти вопросы усугубляет отрицательное решение проблемы модулей: римановы поверхности достаточно большого рода ($\geqslant 40$) не имеют естественной (в пока еще не выясненном смысле) параметризации независимыми параметрами [37], [38]. Поэтому в общей ситуации риманова поверхность рода $g$ описывается набором числовых параметров с соотношениями и возможными отождествлениями по действию группы или отношению эквивалентности (ср. с п. 2.10 гл. 2). И даже в таких случаях, как, например, модули гиперэллиптических римановых поверхностей [7], где известно существование независимых параметров, сам выбор параметров чрезвычайно не эффективен. Все это подводит к мысли, что важна и доступна скорее всего не конкретная числовая реализация параметров, а их геометрия: число параметров с точностью до соотношений и отождествлений, «близость» римановых поверхностей с близкими параметрами, существование параметризации независимыми параметрами и т. п. Иначе говоря, надо a priori дискретное множество $\mathcal{M}_g$ классов изоморфизма римановых поверхностей рода $g$ снабдить топологией и комплексно аналитической или некоторой другой структурой. Координатные системы на $\mathcal{M}_g$ отвечают естественным параметрам — модулям. Существование глобальных координат равносильно существованию независимых параметров. Так появляется идея пространства модулей $\mathcal{M}_g$. Его комплексно аналитическая структура определяется и строится с помощью (аналитических) семейств римановых поверхностей.

Определение 1. Отображение комплексных многообразий $f:M\to B$ называют *семейством римановых поверхностей* рода $g$ с базой $B$, если слой $f^{-1}(b)$ над каждой точкой $b\in B$ есть риманова поверхность рода $g$.

Пример 2. Пусть $\Gamma\subset SL(2,\mathbf{Z})$. Имеется расширение $\Gamma\times\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ группы $\Gamma$ с помощью нормального делителя $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, действующее свободно и дискретно на произведении $\mathbf{H}'\times\mathbf{C}'$ по правилу

$$(\tau, z)\overset{(g,n,m)}{\longmapsto}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z+\tau n+m}{c\tau+d}\right),$$

где $g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$, $n$, $m\in\mathbf{Z}$, а $\mathbf{H}'=\mathbf{H}-$ {эллиптические точки группы $\Gamma/\pm I$}. Легко проверить, что

$$f_\Gamma:\mathbf{H}'\times\mathbf{C}/\Gamma\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{H}'/\Gamma$$

— семейство римановых поверхностей рода 1.

Семейство $f:M\to B$ римановых поверхностей рода $g$ индуцирует отображение базы $B\to\mathcal{M}_g$, переводящее точку $b\in B$ в класс изоморфизма слоя $f^{-1}(b)$.

Определение 2. Множество $\mathcal{M}_g$, снабженное такой комплексно аналитической структурой, что всякое индуцированное отображение $B\to\mathcal{M}_g$ голоморфно, называют *грубым пространством модулей* римановых поверхностей рода $g$.

Теорема. Пространство модулей $\mathcal{M}_1$ существует и канонически изоморфно $\mathbf{H}/\Gamma_1\simeq\mathbf{C}$.

Семейство $f_{SL(2,\mathbf{Z})}$ с базой $\mathbf{H}/\Gamma_1$ — {две эллиптические точки} индуцирует вложение, которое по непрерывности продолжается до изоморфизма $\mathbf{H}/\Gamma_1$ с $\mathcal{M}_1$. В координатной форме изоморфизм $\mathcal{M}_1 \simeq \mathbf{C}$ задается абсолютным инвариантом.

Для римановых поверхностей рода $g \geqslant 2$ грубое пространство модулей существует и именно как комплексно аналитическое пространство, а не как комплексное многообразие. Комплексное пространство от многообразия отличает появление особенностей. Точное определение см. в [31], [35], [57]. При некоторых естественных ограничениях на особенности грубое пространство модулей единственно и его обозначают через $\mathcal{M}_g$. Существование и единственность $\mathcal{M}_g$ доказываются довольно технично. Наиболее известен подход, использующий пространства Тейхмюллера [23]. Однако определить число параметров несложно. Всякая риманова поверхность рода $g \geqslant 2$ гиперболична, а потому с точностью до изоморфизма есть фактор $\mathbf{H}/\Gamma$, где $\Gamma$ — фуксова группа, свободно действующая на $\mathbf{H}$. Отметим теперь, что группа $\Gamma$ изоморфна фундаментальной группе римановой поверхности рода $g$ (см. п. 3.4). Поэтому $\Gamma$ имеет $2g$ образующих $A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g \in SL(2, \mathbf{R})/\pm I$, удовлетворяющих соотношению

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = \pm I. \tag{7}$$

Отсюда легко получить следующие утверждения.

Лемма ([17]). Последовательности $A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g \in SL(2, \mathbf{R})/\pm I$, удовлетворяющие (7), образуют вещественное аналитическое многообразие размерности $6g-3$. При этом последовательности, отвечающие римановым поверхностям рода $g$, составляют его открытое подмножество.

Предложение ([17]). $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{M}_g = 6g-6$ при $g \geqslant 2$.

В его доказательстве существенно используется теорема Шварца, из которой вытекает, что близкие последовательности образующих задают изоморфные римановы поверхности в том и только том случае, когда они получаются друг из друга внутренними автоморфизмами: $A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g \mapsto aA_1a^{-1}, aB_1a^{-1}, \ldots, aA_ga^{-1}, aB_ga^{-1}$, $a \in SL(2, \mathbf{R})/\pm I$. Вычитая $\dim_{\mathbf{R}} SL(2, \mathbf{R})/\pm I = 3$ из $6g-3$, получаем требуемое.

Одно из приложений существования пространства модулей — уточнение смысла фразы, что некоторое свойство $P$ выполнено для общей римановой поверхности рода $g$. Она означает, что все римановы поверхности рода $g$, для которых неверно $P$, составляют комплексно аналитическое подпространство размерности (например, в топологическом смысле) $<$размерности пространства модулей ($=6g-6$ при $g \geqslant 2$). (Ср. с п. 1.4 гл. 2). Иначе говоря, достаточно произвольная малая вариация римановой поверхности рода $g$ дает риманову поверхность рода $g$ со свойством $P$. Один из способов доказательства общих свойств в смысле модулей — счет параметров. Например, так доказывается

Следствие. Группа автоморфизмов общей римановой поверхности рода $g \geqslant 3$ тривиальна. В частности, общая риманова поверхность рода $g \geqslant 3$ негиперэллиптична.

Точнее, с помощью формулы Гурвица для рода проверяется, что римановы поверхности рода $g \geqslant 1$ с автоморфизмом порядка $\geqslant 2$ составляют подпространство вещественной размерности $\leqslant 4g-2$, что $< 6g-6$ при $g \geqslant 3$.

Замечание. Наличие аналитической структуры у пространства $\mathcal{M}_g$ существенно связано с компактностью классифицируемых римановых поверхностей. В некомпактном случае лучшее, на что можно надеяться, — вещественная аналитичность. Например, всякая риманова поверхность, гомеоморфная кольцу, изоморфна кольцу $\{r<|z|<1\}$ и вещественное число $0 \leqslant r < 1$ является ее абсолютным инвариантом, а потому полуинтервал $[0, 1)$ — пространство модулей таких поверхностей.

## § 6. Алгебраичность компактных римановых поверхностей

Под вложением римановой поверхности в комплексное многообразие понимается изоморфизм на одномерное подмногообразие последнего. Основная тема параграфа — конструкция вложений компактной римановой поверхности в проективные пространства. Сначала вводится необходимая техника: отображения, ассоциированные с дивизорами, и формула Римана—Роха. Решение некоторых поставленных выше задач о существовании предшествует обсуждению вложений. Заключительный пункт 6.6 играет иллюстративную роль.

Всюду в этом параграфе $S$ обозначает компактную риманову поверхность рода $g$, а $K$ — ее канонический дивизор (см. следствие 6 п. 4.14).

**6.1. Пространства функций и отображения, ассоциированные с дивизорами.** Ненулевая мероморфная функция на римановой поверхности $S$ задает ее отображение в $\mathbf{CP}^1$. Непосредственным обобщением этого является отображение вида

$$\begin{aligned} &S \to \mathbf{CP}^n \\ &p \mapsto (f_0(p) : \ldots : f_n(p)), \end{aligned} \tag{8}$$

где $f_0, \ldots, f_n$ — ненулевые мероморфные функции на $S$. Оно определено и голоморфно всюду на $S$ по тем же соображениям, что и отображение (6) в пункте 5.8. С точки зрения контроля наиболее удобно в качестве функции $f_i$ брать базис $\mathbf{C}$-линейного пространства

$$L(D)\overset{\mathrm{df}}{=}\{f\in\mathcal{M}(S)\mid f\equiv 0 \text{ или } (f)+D\geqslant 0,$$
$$=\{f\equiv 0 \text{ или } \operatorname{ord}_{p_i} f\geqslant -a_i \text{ для всех } p_i\},$$

где $D=\Sigma a_i p_i$ — дивизор на $S$.

Определение 1. Пространство $L(D)$ называют *пространством мероморфных функций* на $S$, *ассоциированным с дивизором* $D$.

Линейность пространства $L(D)$ очевидна. Чуть сложнее доказывается

Теорема. Пространство $L(D)$ конечномерно. Более того, $\dim L(D)\leqslant \deg D+1$, если $\deg D\geqslant -1$.

Наиболее интересен и показателен случай эффективного дивизора $D=\sum a_l d_l$. Тогда пространство $L(D)$ состоит из мероморфных функций с полюсами лишь в $p_l$ и главными частями $\sum\limits_{i=-a_l}^{-1} c_{li} z_l^i$, где $z_l$ — локальный параметр в $p_l$ (см. п. 2.3). Линейное отображение, сопоставляющее таким функциям последовательность коэффициентов $(c_{li})$, имеет в ядре лишь голоморфные, а потому постоянные функции на $S$. Поэтому $\dim L(D)\leqslant 1+$ $+\Sigma a_l=\deg D+1$. Общий случай можно получить из следующих свойств пространств $L(D)$.

Лемма. (а) Если дивизоры $D$ и $D'$ линейно эквивалентны, т. е. $D=D'+(g)$, $g\in\mathcal{M}(S)$, то $L(D)\to L(D')$, $f\mapsto g\cdot f$, — $\mathbf{C}$-линейный изоморфизм.

(б) $\dim L(D)>0$, если и только если дивизор $D$ линейно эквивалентен эффективному, в частности, если только $\deg D\geqslant$ $\geqslant 0$.

Размерность пространства $L(D)$ обозначают через $l(D)$.

Определение 2. Пусть $f_0,\ldots,f_n$ — базис пространства $L(D)$. Тогда *отображение* (8) называют *ассоциированным с дивизором* $D$ и обозначают через $\varphi_D$. Отметим, что $n=l(D)-1$ и $\varphi_D$ определено лишь при $l(D)\geqslant 1$.

Отображение $\varphi_D$ с точностью до изоморфизма не зависит от выбора базиса $L(D)$ и замены дивизора $D$ на линейно эквивалентный. Последнее вытекает из леммы.

Замечание. Если вместо базиса $f_i$ взять просто систему линейно независимых функций, то соответствующее отображение (8) будет композицией $\varphi_D$ и последующего проектирования с центром в подходящем подпространстве $\mathbf{CP}^n$. Этим по существу исчерпываются все отображения римановой поверхности $S$ в проективные пространства (ср. с п. 3.2 гл. 2).

Пример 1. Пусть $S=\mathbf{CP}^1$. Тогда $L(d\infty)$ — пространство многочленов от $z$ степени $\leqslant d$, откуда $l(d\infty)=d+1$ при $d\geqslant 0$ и

0 в противном случае. В качестве базиса $L(d\infty)$ при $d\geqslant 0$ можно взять одночлены $1,\ldots,z^d$. Соответствующее отображение $\varphi_{d\infty}\colon z\mapsto(1:z:\ldots:z^d)$ есть частный случай отображения Веронезе и его обозначают через $v_d$. Оно является вложением при $d\geqslant 1$. Всякий дивизор $D$ на $\mathbf{CP}^1$ линейно эквивалентен дивизору $d\infty$ с $d=\deg D$ (см. пример 4 п. 2.6). Поэтому $l(D)=\deg D+1$ при $\deg D\geqslant 0$ и 0 в противном случае. Обратно, если на римановой поверхности $S$ имеется дивизор $D$ такой, что $\deg D\geqslant 1$ и $l(D)=\deg D+1$, то она изоморфна $\mathbf{CP}^1$. По лемме можно предполагать, что такой дивизор $D$ эффективен. Тогда равенство $l(D)=\deg D+1$ эквивалентно разрешимости задачи Миттаг-Леффлера с любыми $(c_{li})$. В частности, имеется мероморфная функция $f$ с единственным полюсом первого порядка в $\operatorname{Supp} D$. Эта функция и задает изоморфизм $S$ с $\mathbf{CP}^1$. Итак, $l(D)\leqslant\deg D$ для всякого дивизора $D$ степени $\geqslant 1$ на римановой поверхности $S$ рода $\geqslant 1$. Этот результат отражает нетривиальность задачи Миттаг-Леффлера при $g\geqslant 1$, что не удивительно, согласно необходимому условию ее разрешимости (см. п. 4.9).

Пример 2. Пусть $\omega_0,\ldots,\omega_n$ — базис пространства $\Omega^d$ голоморфных (симметрических) дифференциалов степени $d\geqslant 1$. Соответствующее *отображение*

$$\begin{aligned}\varkappa_d\colon S&\to\mathbf{CP}^n\\ p&\mapsto(\omega_0(p):\ldots:\omega_n(p))\end{aligned}$$

ср. с (6) п. 5.8) называют *плюриканоническим*. Оно определено при $g\geqslant 1$. Наиболее важен его частный случай: *каноническое отображение* $\varkappa\overset{\mathrm{df}}{=}\varkappa_1\colon S\to\mathbf{CP}^{g-1}$ (Напомним, что $\dim\Omega=g$) Очевидно, $\omega_0/\omega^d,\ldots,\omega_n/\omega^d$ — базис $L(dK)$, где $K=(\omega)$ — канонический дивизор голоморфного или мероморфного дифференциала $\omega$ степени 1 (см. п. 4.8), и $\varkappa_d=\varphi_{dK}$. Однако задание этого отображения в виде отношения дифференциалов более канонично. Свойства плюриканонических отображений $\varkappa_d$ отражают внутренние свойства римановой поверхности $S$, а не свойства конкретного дивизора $dK$. Впрочем, $\varphi_{dK}$ канонично в том смысле, что с точностью до изоморфизма определяется классом линейной эквивалентности дивизора $dK$. (Ср. с примером 5 п. 2.9 гл. 2.)

Пример 3. Предположим, что $S$ — гиперэллиптическая риманова поверхность с гиперэллиптической проекцией $\gamma$. Используя базис $\Omega$ из примера 1 пункта 4.8, легко проверить, что каноническое отображение в этом случае имеет разложение

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\varkappa"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \mathbf{CP}^{g-1} \\ & \mathbf{CP}^1 \arrow[ur, "v_{g-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Отсюда следует единственность гиперэллиптической структуры — проекции или инволюции — при $g \geqslant 2$. Более того, наличие гиперэллиптической структуры при $g \geqslant 1$ характеризуется существованием на $S$ дивизора $D$ степени 2 с $l(D)=2: D=\gamma^* z$, а $\gamma=\varphi_D$ для такого дивизора $D$. В частности, риманова поверхность рода 2 всегда гиперэллиптична: $\gamma=\varkappa$ (ср. со следствием п. 5.10).

Удобство работы с отображениями $\varphi_D$ объясняет

Предложение. $\varphi_D$ — вложение, если

$$l(D-p-q)=l(D)-2 \text{ для любых } p, q \in S. \tag{9}$$

При $p \neq q$ из условия (9) вытекает, что $\varphi_D(p) \neq \varphi_D(q)$, а при $p=q$ — регулярность[1] $\varphi_D$ в точке $p$. Тем самым, $\varphi_D$ — взаимно однозначное отображение на одномерное подмногообразие $\varphi_D(S) \subseteq \mathbf{CP}^n$ [31], а потому изоморфизм на образ (см. предложение 2 п. 2.5). Итак, для нахождения вложений надо уметь вычислять размерность $l(D)$ в зависимости от $D$, ключом к чему является известная

**6.2. Формула Римана—Роха. Закон взаимности для дифференциалов первого и второго рода.**

Теорема (Риман, Рох). $l(D)-l(K-D)=\deg D-g+1$.

Это один из вариантов формулы Римана—Роха. На первый взгляд она кажется бесполезной, поскольку сводит вычисление $l(D)$ к вычислению $l(K-D)$. Однако $l(K-D)=0$ для дивизоров $D$ степени $>\deg K=2g-2$ (см. часть (б) леммы п. 6.1).

Следствие 1. $l(D)=\deg D-g+1$ при $\deg D \geqslant \deg K+1=$ $=2g-1$.

В общем случае выполнено

Следствие 2 (неравенство Римана). $l(D) \geqslant \deg D-g+1$.

К числу совершенств формулы Римана—Роха следует также отнести ее «симметричность»: формула Римана—Роха для $D$ равносильна формуле Римана—Роха для $K-D$, и топологическую инвариантность ее правой части: она зависит лишь от $\deg D$ и $g$, более того, линейно. Для доказательства удобна следующая запись формулы Римана—Роха:

$$\dim L(D)-\dim \Omega(-D)=\deg D-g+1, \tag{10}$$

где

$$\Omega(-D) \overset{\mathrm{df}}{=} \{\omega \in \mathcal{M}^1(S) \mid \omega \equiv 0 \text{ или } (\omega)-D \geqslant 0\}.$$

Ее равносильность предыдущей получается с помощью изоморфизма $\Omega(-D) \to L(K-D)$, $\eta \mapsto \eta/\omega$, где $(\omega)=K$. Трудную и наиболее интересную часть доказательства формулы Римана—Роха составляет доказательство формулы (10) в случае $D \geqslant 0$; его набросок приводится ниже. Разбор оставшихся случаев несложен и основан на симметрии формулы Римана—Роха [31], [69]. Однако и здесь имеется скрытый пласт, связанный с тео-

[1] В этом параграфе — максимальность ранга касательного отображения.

ремами о существовании, например, важна роль формулы Римана—Гурвица $\deg K = 2g - 2$.

Проверка формулы (10) для эффективного дивизора $D = \Sigma d_l p_l$ начинается с рассмотрения $\mathbf{C}$-линейного отображения $L(D) \to \mathcal{M}^1(S)$, $f \mapsto df$. Его ядро состоит из констант и потому одномерно, а образ $V$ — из дифференциалов второго рода с нулевыми периодами и полюсами лишь в $p_l$ порядка $\leqslant d_l + 1$. Фиксируем стандартный базис $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ группы $H_1(S, \mathbf{Z})$. Ключевым местом доказательства является утверждение о том, что для любой точки $p_l$ с локальным параметром $z_l$ существует единственный дифференциал второго рода $\omega_{lj}$ ($j \geqslant 2$) с главной частью $z_l^{-j} dz_l$ и нулевыми $A$-периодами. Существование получается из следствия 1 пункта 4.14 в сочетании со следствием 3 пункта 4.13, а единственность — из следствия пункта 4.7. Очевидно, пространство $V$ есть ядро $\mathbf{C}$-линейного отображения

$$\psi : \bigoplus_l (\mathbf{C}\omega_{l2} \oplus \ldots \oplus \mathbf{C}\omega_{l d_l + 1}) \to \mathbf{C}^g$$

$$\eta \mapsto \left( \int_{b_1} \eta, \ldots, \int_{b_g} \eta \right).$$

Уже отсюда получается неравенство Римана. Более точную оценку дает

Закон взаимности для дифференциалов первого и второго рода. Пусть $\omega$ — дифференциал первого, а $\eta$ — второго рода. Тогда

$$\sum_{i=1}^{g} (\Pi_i N_{g+i} - \Pi_{g+i} N_i) = 2\pi \sqrt{-1} \sum_{l,j} \frac{a_{lj} c_{lj+2}}{j+1},$$

где $\Pi_i$, $\Pi_{g+i}$, $N_i$, $N_{g+i}$ — $A$-, $B$-периоды форм $\omega$, $\eta$ соответственно; $c_{lj}$ — коэффициенты главных частей формы $\eta$ в $p_l$:

$$\eta(z_l) = (c_{l2} z_l^{-2} + \ldots) dz_l,$$

а $a_{lj}$ — коэффициенты разложений Тейлора формы $\omega$ в $p_l$:

$$\omega(z_l) = (a_{l0} + a_{l1} z_l + \ldots) dz_l.$$

Этот результат — простое обобщение леммы пункта 4.6, учитывающее вклад вычетов (сумма справа) [31]. В пространстве дифференциалов первого рода $\Omega$ можно выбрать такой *базис* $\omega_1, \ldots, \omega_g$, что $\Pi_j^i \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}$ при $1 \leqslant i, j \leqslant g$. Его называют *нормализованным* по отношению к базису $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$. Закон взаимности для форм $\omega_i$ и $\omega_{lj+2}$ приводит к элементам матрицы отображения $\psi$:

$$\int_{b_i} \omega_{lj+2} = 2\pi \sqrt{-1} \frac{a_{lji}}{j+1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant d_l - 1,$$

где $a_{lji}$ — коэффициенты Тейлора формы $\omega_i$ в точке $p_l$. Каждое соотношение между строками этой матрицы естественно интерпретируется как дифференциал первого рода $\omega = \Sigma\lambda_i\omega_i$, имеющий в точках $p_l$ нулевые коэффициенты Тейлора $a_{lj}$ при $j \leqslant \leqslant d_l - 1$, т. е. $\omega \in \Omega(-D)$. Подведем итог: $\dim L(D) = \dim V + 1 = = \dim \operatorname{Ker} \psi + 1 = (\Sigma d_l) - \operatorname{rank} \psi + 1 = \deg D - (g - \dim \Omega(-D)) + + 1 = \dim \Omega(-D) + \deg D - g + 1$.

Замечания. 1. Размерность $i(D) \overset{\mathrm{df}}{=} l(K-D)$ принято называть *иррегулярностью* дивизора $D$.

2. Более современные доказательства формулы Римана—Роха основаны на когомологической технике [30], [34]. При этом формула Римана—Роха записывается в виде

$$\dim H^0(D) - \dim H^1(D) = \deg D - g + 1, \tag{11}$$

где $H^i(D)$ — группа $i$-мерных когомологий (например, Чеха) с коэффициентами в пучке, ассоциированном с дивизором $D$, а $g \overset{\mathrm{df}}{=} \dim H^1(0)$ — *арифметический род* $S$. Трудным местом в доказательстве формулы (11) является конечномерность $H^1(0)$ (= конечность арифметического рода), из которой легко выводится конечномерность $H^1(D)$ для любых дивизоров $D$. При переходе от формулы (11) к формуле (10) используют следующие два факта. Один совершенно простой — изоморфизм пространств $H^0(D)$ и $L(D)$. Другой глубокий и трудный — *двойственность Серра* пространств $H^1(D)$ и $\Omega(-D)$, в частности, $H^1(0)$ и $\Omega$. В свою очередь, из формулы Римана—Роха (10) легко выводится формула Римана—Гурвица: $\deg K = 2g - 2$ и равенство родов во всех смыслах: $\dim H^1(0) = \dim \Omega = = \operatorname{rank} H_1(S, \mathbf{Z})/2$. А отсюда можно получить все известные результаты о существовании и их следствия (см. конец § 4 и следующий пункт) по крайней мере в компактном случае.

**6.3. Приложения формулы Римана—Роха к задачам о существовании мероморфных функций и дифференциалов.**

Теорема 1. Задача Миттаг-Леффлера в компактном случае разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия пункта 4.9.

Необходимость установлена в пункте 4.9. Достаточность в случае дифференциалов означает, что для любого эффективного дивизора $D = \Sigma d_l p_l \neq 0$ отображение

$$\Omega(D) \to \underset{l}{\oplus}(\mathbf{C} z_l^{-1} dz_l \oplus \ldots \oplus \mathbf{C} z_l^{-d_l} dz_l)$$

$$\omega \mapsto \sum_l (c_{l1} z_l^{-1} + \ldots + c_{ld_l} z_l^{-d_l})\, dz_l,$$

сопоставляющее дифференциалу его главные части в точках $p_l$, имеет образ коразмерности 1. Это легко проверяется с помощью формулы Римана — Роха. Более того, образ задается соотношением $\sum \mathrm{Res}_{p_l}\omega = \sum c_{l1} = 0$, которое и есть необходимое условие. Случай функций разбирается аналогично.

Теорема 2. Существует дифференциал второго рода с любыми наперед заданными периодами.

Любые $A$-периоды можно получить, добавляя голоморфные дифференциалы. Для нахождения дифференциалов второго рода с нулевыми $A$-периодами и любыми $B$-периодами достаточно проверить эпиморфность отображения $\psi$ пункта 6.2 для подходящего эффективного дивизора $D$. Это равносильно соотношению $\dim \Omega(-D) = l(K-D) = 0$, выполненному при $\deg D \geqslant 2g-1$. Более экономный выбор $D$ см. в [69].

Следствие. Имеется естественный изоморфизм $H_{DR}{}^1(S) \simeq \simeq \Omega_2/d\mathcal{M}(S)$, где $\Omega_2$ — пространство дифференциалов второго рода на $S$.

Этот изоморфизм замкнутой дифференцируемой 1-форме по модулю точного дифференциала сопоставляет дифференциал второго рода с теми же периодами, определенный с точностью до полного дифференциала мероморфной функции.

Замечание. Изоморфизм следствия подводит к алгебраической теории когомологий де Рама [33].

**6.4. Проективность компактных римановых поверхностей.** Из предложения пункта 6.1 и следствия 1 пункта 6.2 очевидно, что всякая компактная риманова поверхность может быть вложена в некоторое проективное пространство. Точнее,

Теорема. $\varphi_D$ — вложение, если $\deg D \geqslant 2g+1$.

Итак, всякая компактная риманова поверхность изоморфна замкнутому одномерному подмногообразию проективного пространства, называемому ее *проективной моделью.* Свойство существования проективной модели называют *проективностью.*

Замечание 1. Не всякое даже компактное комплексное многообразие размерности $\geqslant 2$ проективно (см. п. 1.3 г. 3).

Пример 1. Пользуясь теоремой, легко проверить, что плюриканоническое отображение $\varkappa_d$ будет вложением при $d \geqslant 3$ и $g \geqslant 2$ или $d \geqslant 2$ и $g \geqslant 3$. Соответствующую проективную *модель* называют *плюриканонической.*

Пример 2. С помощью формулы Римана — Роха также можно показать, что каноническое отображение $\varkappa$ является вложением когда поверхность негиперэллиптична, что верно для общей римановой поверхности рода $\geqslant 3$. Действительно, $l(K-p-q) = g-2$ в том и только том случае, когда $l(p+q) = 1$ (ср. с примером 3 п. 6. 1.). Соответствующую *модель* называют *канонической.*

Проектирования из общих точек позволяют усилить теорему.

Следствие. Всякая компактная риманова поверхность S вкладывается в $\mathbf{CP}^3$.

По теореме можно считать, что $S \subset \mathbf{CP}^n$. Проектирование поверхности $S$ из точки $p \in \mathbf{CP}^n$ на гиперплоскость $\mathbf{CP}^{n-1} \subset \mathbf{CP}^n$ (ср. с примером 5 п. 1. 2. гл. 2) будет вложением, если $p$ не лежит на хордах (комплексных прямых через пары точек $S$) и касательных к $S$ (ср. примером 5 п. 1.7 гл. 2). Простой счет параметров показывает, что такие точки р существуют при $n \geqslant 4$.

Замечание 2. Общая риманова поверхность не вкладывается в $\mathbf{CP}^2$. Первое препятствие этому — формула рода плоской кривой (см. пример 2 п. 4. 8). Однако всегда имеется иммерсия: регулярное отображение $S \to \mathbf{CP}^2$ взаимно однозначное почти всюду (ср. с примером п. 3. 11 гл. 2).

**6.5. Алгебраичность проективных моделей. Арифметические римановы поверхности.** Подмножество проективного пространства называют алгебраическим, если оно представляет собой множество нулей некоторого набора однородных многочленов от однородных координат пространства. Отметим, что хотя значения самих однородных многочленов на проективном пространстве корректно не определены, нули этим свойством обладают. По нётеровости кольца многочленов над полем, не ограничивая общности, набор многочленов, задающих алгебраическое множество, можно предполагать конечным.

Теорема (Чжоу). Вложенная риманова поверхность $S \subseteq \mathbf{CP}^n$ алгебраична, т. е. ее точки составляют алгебраическое подмножество.

Это — частный случай теоремы Чжоу (см. п. 1.4 гл. 3), но лишь по формулировке, а не по методу доказательства. Удобнее доказывать более общее утверждение, что образ голоморфного отображения компактной римановой поверхности в проективное пространство алгебраичен. Последовательные проекции сводят это утверждение к случаю отображений в $\mathbf{CP}^2$ (см. следствие 3 п. 2.11), который в свою очередь выводится из теоремы 1 пункта 2.11 об алгебраичности конечных отображений.

Итак, вложенные римановы поверхности $S \subseteq \mathbf{CP}^n$ имеют алгебраическое описание. Оказывается, что и мероморфные функции на $S$ можно описать чисто алгебраически. Хотя ненулевой однородный многочлен не задает корректно функцию на проективном пространстве, отношение таких многочленов одной степени является рациональной функцией, определенной вне нулей знаменателя. Легко проверить, что если поверхность $S$ не содержится в множестве точек неопределенности рациональной функции на $\mathbf{CP}^n$, то ее ограничение задает на $S$ мероморфную *функцию*, называемую *рациональной*. При этом под мероморфной функцией локально следует понимать отношение голоморфных функций; в этом же смысле мероморфна всякая рациональная функция на $\mathbf{CP}^n$.

Теорема (о рациональности). Мероморфная функция на вложенной римановой поверхности $S \subseteq \mathbf{CP}^n$ рациональна.

Проектирования сводят теорему к уже известному случаю $S=\mathbf{CP}^1$ (см. пример 1 п. 2.2 и ср. со следствием 6 п. 2.11).

Замечание. Топология римановой поверхности имеет однако трансцендентную природу, что препятствует полной алгебраизации понятия римановой поверхности и непосредственной алгебраизации многих методов исследования римановых поверхностей (ср. с п. 1.9 гл. 2).

С точки зрения арифметики интересны вложенные римановы поверхности $S\subseteq\mathbf{CP}^n$, задаваемые как множества нулей многочленов с рациональными коэффициентами или, общее, с коэффициентами в поле алгебраических чисел. Такие *римановы поверхности* называют *арифметическими.* Очевидна счетность множества арифметических римановых поверхностей с точностью до изоморфизма. Поэтому арифметичность довольно редкое явление. Более того, проверка арифметичности римановой поверхности дело кропотливое: во-первых, надо подобрать очень специальное вложение в проективное пространство, а во-вторых, выбрать в этом пространстве не менее специальную систему однородных координат. В этой связи топологическая характеризация арифметических римановых поверхностей кажется совершенно неожиданной.

Теорема (Г. Белый [2]). Риманова поверхность $S$ арифметична в том и только том случае, когда существует отображение $S\to\mathbf{CP}^1$ разветвленное над тремя точками.

Другой яркий пример зависимости арифметики от топологии — известная теорема Морделла—Фальтингса [5].

**6.6. Модели римановых поверхностей рода 1.** Нам встречались следующие конкретные примеры или модели римановых поверхностей рода 1:

(а) эллиптические кривые (см. пример 2 п. 1.6, п. 5.6 и замечание 1 п. 5.7);

(б) гиперэллиптические римановы поверхности с четырьмя точками ветвления (см. пример п. 2.11, пример 1 п. 3.6 и пример 1 п. 4.8);

(в) плоские кубики (см. пример 2 п. 4.8).

Риманова поверхность рода 1 имеет модель каждого из указанных типов. По следствию 2 пункта 5.7 $S\simeq E_\tau$. Поэтому гиперэллиптическая проекция $\varphi_{2p}: S\to\mathbf{CP}^1$ с точностью до сдвига не зависит от выбора точки $p\in S$. С другой стороны, она однозначно восстанавливается по образам $z_1, z_2, z_3, z_4\in\mathbf{CP}^1$ точек ветвления (см. пример п. 4.14). Значит, класс изоморфизма поверхности $S$ взаимно однозначно соответствует четверке точек $\{z_i\}$ по модулю дробно-линейных преобразований. Упорядоченные четверки $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ точек $\mathbf{CP}^1$ классифицирует двойное отношение

$$\lambda=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}.$$

Если $z$ — такая координата $\mathbf{CP}^1$, что $z_1=\infty$, $z_2=0$ и $z_3=1$, то $z_4=\lambda$. Тем самым, $S$ изоморфна римановой поверхности алгебраической функции $\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}$ или, эквивалентно, кубике $y^2=z(z-1)(z-\lambda)$ в аффинных координатах. Перестановкам точек $z_i$ отвечают преобразования $\lambda\mapsto\lambda$, $1/\lambda$, $1-\lambda$, $1/(1-\lambda)$, $\lambda/(\lambda-1)$, $(\lambda-1)/\lambda$. (Перестановке типа (2,2) отвечает тождественное преобразование $\lambda\mapsto\lambda$.) Нетрудно проверить, что

$$j(S)=\frac{4}{27}\,\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Пример 1. Эллиптической кривой $E_{\sqrt{-1}}$ соответствует $\lambda=-1$, $j=1$, и она изоморфна кубике $y^2=z(z^2-1)$ с автоморфизмом $(z, y)\mapsto(-z, \sqrt{-1}y)$ порядка 4 (ср. с теоремой п. 5.6).

Вложение $\varphi_{3p}: S\hookrightarrow \mathbf{CP}^2$ (см. теорему п. 6.4) дает в образе кубику. Для $S=E_\tau$ и $p=0$ используют его явное описание с помощью функции Вейерштрасса $\wp(z)=\wp(z, \mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})$. Функции $\wp'_z$, $\wp$ и 1 составляют базис $L(3p)$, а функции $(\wp'_z)^2$, $\wp^3$, $\wp'_z\cdot\wp$, $\wp^2$, $\wp'_z$, $\wp$, $1\in L(6p)$ линейно зависимы, поскольку $l(6p)=6$. Отсюда и получается соотношение третьей степени. Более того, пользуясь разложением Лорана $\wp(z)=1/z^2+$чл. четкого порядка $\geqslant 2$, устанавливают, что

$$(\wp'_z)^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3, g_2,\ g_3\in\mathbf{C},$$

— *кубика в вейерштрассовой нормальной форме*. Абсолютный инвариант такой кубики находят по формуле

$$j=\frac{g_2^3}{\Delta}=1+\frac{27g_3^2}{\Delta},$$

где $\Delta=g_2^3-27g_3=$(дискриминант $4z^3-g_2z-g_3)/4$.

Пример 2. Эллиптическая кривая $E_\rho$ с $j=0$ изоморфна кубике $y^2=4z^3-g_3$, $g_3\neq0$. Автоморфизм $(z, y)\to(\rho^2z, -y)$ соответствует образующей группы $\mathrm{Aut}_0 E_\rho$ (см. теорему п. 5.6).

Другие связи между рассмотренными моделями, в частности, введение групповой структуры на кубике, обсуждаются ниже в пунктах 1.7 и 2.6 гл. 3.

Замечание 1. Модели типа (б) и (в) имеют алгебраическую природу, что отражается в алгебраической зависимости абсолютного инварианта от естественных параметров этих моделей: $\lambda$, $g_2$ и $g_3$.

Замечание 2. Риманова поверхность рода 1 арифметична тогда и только тогда, когда ее абсолютный инвариант является алгебраическим числом.

Замечание 3. Указанные модели обладают естественными обобщениями: (а) комплексные торы и абелевы многообразия (см. § 1 гл. 3); (б) гиперэллиптические римановы поверхности и, общее, гиперэллиптические многообразия; (в) кубики — нули кубических форм в проективных пространствах [8].

# *Глава 2*

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Алгебраическая кривая рассматривается в этой главе как объект внешней геометрии. Главные результаты о проективных вложениях, их свойствах и конструкциях обсуждаются в § 3. Наибольший интерес здесь представляют вершины численной геометрии кривых: неравенство Кастельнуово, формулы Клебша и Плюккера. Необходимые понятия и техника вводятся в первых двух параграфах. Подробное изложение материала главы и доказательства см. в [19], [31], [40], [70].

### § 1. Необходимые понятия

Согласно § 6 гл. 1, компактная риманова поверхность отождествима с алгебраическим подмножеством $\mathbf{C}\mathbf{P}^n$. Точное описание таких подмножеств связано с понятием (комплексной) алгебраической кривой. Однако объяснение этого понятия volens nolens заставляет включить в обсуждение более общие объекты алгебраической геометрии: проективные и квазипроективные многообразия. Более того, некоторые из них, проективные пространства, понадобятся с самого начала. Основа параграфа — начальные понятия, примеры и результаты алгебраической геометрии. Подробнее об этом можно прочесть в [13], [40]. (См. также обзор В. И. Данилова «Алгебраические многообразия и схемы» в этом томе.) Завершает параграф сопоставление основных понятий, относящихся к римановым поверхностям и комплексным алгебраическим кривым.

**1.1. Алгебраические многообразия. Топология Зарисского.** Фиксируем произвольное алгебраически замкнутое поле $k$, называемое по отношению к последующим определениям и конструкциям основным. Через $\mathbf{P}^n$ будем обозначать $n$-мерное проективное пространство над $k$. Под *проективным алгебраическим многообразием* $V$ будем понимать алгебраическое множество в $\mathbf{P}^n$, т. е. множество нулей однородных многочленов $f_i$, $i \in I$, от однородных координат $(x_0 : \ldots : x_n)$ на $\mathbf{P}^n$:

$$V = \{(x_0 : \ldots : x_n) \mid f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0, \quad i \in I\}.$$

В силу однородности $f_i$ выполнение соотношения $f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0$ не зависит от выбора однородных координат точки. По нётеровости кольца многочленов над полем можно, не ограничивая общности, предполагать множество многочленов $f_i$, $i \in I$, задающих многообразие $V$, конечным.

Пример 1. Алгебраические многообразия вида $\{f=0\} \subset \mathbf{P}^n$, где $f$ — ненулевой однородный многочлен, называют *гиперповерхностями*. Гиперповерхности, отвечающие линейным многочленам $f$, являются *гиперплоскостями* — подпространствами коразмерности 1.

Легко проверить, что объединение двух алгебраических подмножеств $\mathbf{P}^n$ и пересечение любого их числа алгебраично. Поэтому подразумевая под замкнутыми множествами $\mathbf{P}^n$ алгебраические, можно ввести на $\mathbf{P}^n$ топологию. Она индуцирует топологию на проективных алгебраических многообразиях, называемую *топологией Зарисского*. Под *алгебраическими многообразиями* будем понимать квазипроективные многообразия — открытые подмножества проективных. Замкнутые подмножества *алгебраических многообразий* называют *подмногообразиями*.

Предостережение. Топология Зарисского сильно непохожа на топологии комплексных и дифференцируемых многообразий. Во-первых, она слабо отделима: как правило, не хаусдорфова. Например, открытыми подмножествами $\mathbf{CP}^1$ в топологии Зарисского (кроме пустого) будут дополнения до конечных подмножеств. Во-вторых, эта топология компактна в следующем смысле. Вложенная последовательность $V_0 \supset V_1 \supset \ldots$ $\ldots$ подмногообразий квазипроективного многообразия всегда обрывается (конечна). Однако, как будет видно позже, более правильным аналогом компактности комплексных многообразий является проективность. Указанную компактность называют *нётеровостью* тем более, что она имеет непосредственное отношение к нётеровости кольца многочленов над полем.

Пример 2. Дополнение гиперплоскости в $\mathbf{P}^n$ есть аффинное пространство $\mathbf{A}^n$ размерности $n$. Его подмногообразия называют *аффинными многообразиями*. Аффинное многообразие $V \subseteq \mathbf{A}^n$ алгебраично = квазипроективно, являясь открытым подмножеством замыкания $\bar{V} \subseteq \mathbf{P}^n$ в топологии Зарисского. Если $H \subset \mathbf{A}^n$ — аффинная гиперповерхность, задаваемая нулями многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ степени $d$, то ее замыкание $\bar{H} \subset \mathbf{P}^n$ будет гиперповерхностью, задаваемой нулями однородного многочлена $x_0^d f(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$.

3. Легко проверить, что произведение аффинных алгебраических многообразий является аффинным многообразием. Например, $\mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{n+m}$. Чтобы определить произведение проективных многообразий, можно воспользоваться вложением Сегре

$$\varphi : \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m \mapsto \mathbf{P}^{nm+n+m}$$
$$((x_0 : \ldots : x_n),\ (y_0 : \ldots : y_m)) \mapsto (w_{ij} = x_i y_j).$$

Действительно, его образ алгебраичен. Он задается квадратичными соотношениями

$$w_{ij} w_{hl} = w_{hj} w_{il} \quad i,\ h = 0, \ldots, n;\ \ j,\ l = 0, \ldots, m$$

[13]. Также легко проверить, что если $V \subseteq \mathbf{P}^n$, $W \subseteq \mathbf{P}^m$ — проективные многообразия, то $\varphi\ (V \times W)$ — тоже проективное многообразие. Его естественно считать *произведением многообразий* $V$ и $W$. Аналогично, вводится произведение квазипроективных многообразий.

**1.2. Регулярные функции и отображения.** Отношения $f/g$ однородных многочленов $f$ и $g \neq 0$ одной степени (если $f \neq 0$) от однородных координат $\mathbf{P}^n$ называют рациональными функциями на $\mathbf{P}^n$. Условие равенства степеней гарантирует их однозначность в естественной области определения: $\mathbf{P}^n - \{g=0\}$. Такие функции на открытых множествах $\mathbf{P}^n - \{g=0\}$ называют регулярными. В общем случае *функцию* $f: V \to k$ на квазипроективном многообразии $V \subseteq \mathbf{P}^n$ называют *регулярной*, если в окрестности каждой точки (в топологии Зарисского) она является ограничением регулярной функции, определенной на открытом подмножестве $\mathbf{P}^n$.

Пример 1. Если регулярные функции $f$ и $g$, определенные на открытых множествах $U$, $V \subseteq \mathbf{P}^n$ соответственно, совпадают на пересечении $U \cap V$, то они определяют регулярную функцию на $U \cup V$. Эта конструкция, как и общее определение, не приводит к появлению новых регулярных функций: всякая регулярная функция на открытом подмножестве $U \subseteq \mathbf{P}^n$ задается рациональной функцией $f/g$ такой, что $U \subseteq \mathbf{P}^n - \{g=0\}$. Доказательство этого факта существенно использует теорему Гильберта о нулях. Отсюда, в частности, легко вывести, что единственными регулярными функциями на $\mathbf{P}^n$ являются константы: $f \equiv c$, $c \in k$.

Пример 2. Аналогично доказывается, что всякую регулярную функцию на $\mathbf{A}^n$ можно задать многочленом от аффинных координат.

*Отображение* $f: V \to W$ квазипроективных многообразий $V \subseteq \mathbf{P}^n$ и $W \subseteq \mathbf{P}^m$ называют *регулярным*, если оно локально задается регулярными функциями. Последнее означает, что в некоторой окрестности $U$ любой точки $f$ можно записать в координатной форме: $y_1 = f_1(p), \ldots, y_m = f_m(p)$, $p \in U$, где $y_1, \ldots, y_m$ — аффинные координаты на $\mathbf{P}^m$, а $f_1, \ldots, f_m$ — регулярные функции на $U$. Алгебраические многообразия и их регулярные отображения образуют категорию. Обратимые отображения этой категории называют *изоморфизмами*, а изоморфизмы на себя — *автоморфизмами*. Регулярные функции $g: W \to k$ можно мыслить как регулярные отображения на аффинное арифметическое пространство $k$. Регулярную функцию $f^*(g) \overset{\mathrm{def}}{=} g \circ f: V \to k$ называют *подъемом* $g$ относительно $f$.

Пример 3. Чтобы проверить, что произведение $\varphi(V \times W)$ квазипроективных многообразий $V$ и $W$ (см. пример 3 п. 1.1) действительно таково с категорной точки зрения, надо проверить регулярность проекций на сомножители и отображений, возникающих по универсальности. Рассмотрим, например, проекцию $\varphi(V \times W) \to V$. На открытом множестве $\varphi(V \times W) \cap \{w_{ij} \neq 0\}$ эта проекция задается формулами: $x_0/x_i = w_{0j}/w_{ij}, \ldots, x_n/x_i = w_{nj}/w_{ij}$.

Пусть $G$ — конечная группа автоморфизмов, действующая на алгебраическом многообразии $V$. *Фактормногообразие* $V/G$

определяется как алгебраическое многообразие, отображение факторизации $V \to V/G$, которое регулярно и обладает стандартным свойством универсальности. Многообразие $V/G$ существует и соответственно проективно, квазипроективно или аффинно, если таково $V$ [53]. Локально $V/G$ строится как образ вложения в $\mathbf{A}^n$, задаваемого подходящим набором $G$-инвариантных функций.

Пример 4. Группа перестановок $S_d$ естественно действует на произведения $\underbrace{\mathbf{A}^1 \times \ldots \times \mathbf{A}^1}_{d}$ и $\underbrace{\mathbf{P}^1 \times \ldots \times \mathbf{P}^1}_{d}$. Это действие регулярно. Элементарные симметрические многочлены задают изоморфизм $(\underbrace{\mathbf{A}^1 \times \ldots \times \mathbf{A}^1}_{d})/S_d \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^d$, продолжающийся до изоморфизма $(\underbrace{\mathbf{P}^1 \times \ldots \times \mathbf{P}^1}_{d})/S_d \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^d$.

Пример 5. Пусть $L$ и $P \subset \mathbf{P}^n$ — два непересекающихся подпространства, сумма размерностей которых равна $n-1$. *Отображение проектирования*

$$\pi_L : \mathbf{P}^n - L \to P$$
$$p \mapsto \overline{Lp} \cap P$$

из $L$ на $P$ регулярно; $\overline{Lp}$ обозначает линейную оболочку $L \cup \{p\}$. Действительно, если $(x_0 : \ldots : x_n)$ — такие однородные координаты, что $L = \{x_m = \ldots = x_n = 0\}$ и $P = \{x_0 = \ldots = x_{m-1} = 0\}$, то $\pi_L(x_0 : \ldots : x_n) = (x_m : \ldots : x_n)$.

Пример 6. Изоморфизм линейных пространств $L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$ индуцирует изоморфизм соответствующих проективных пространств $\mathbf{P}(L_1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(L_2)$. Легко проверить, что таков всякий изоморфизм между проективными пространствами. В частности, всякий автоморфизм $\mathbf{P}^n$ дробно-линеен в аффинных координатах (ср. с примером 3 п. 1.4 гл. 1). Дважды двойственное пространство $\mathbf{P}^{n\vee\vee}$ канонически изоморфно $\mathbf{P}^{n\vee\vee}$, а $\mathbf{P}^{n\vee} \simeq \mathbf{P}^n$ не канонически. Изоморфизмы $\mathbf{P}^{n\vee} \simeq \mathbf{P}^n$ называют *корреляциями*.

Пример 7. Так как пропорциональные многочлены определяют одну и ту же гиперповерхность, то гиперповерхности $\mathbf{P}^n$, задаваемые однородными многочленами степени $m$, соответствуют точкам проективизации $\mathbf{P}^{\binom{n+m}{m}-1} = \mathbf{P}(L)$, где $L$ — пространство однородных многочленов степени $m$ от однородных координат $\mathbf{P}^n$. Мономы $x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}$, $i_0 + \ldots + i_n = m$, составляют базис этого пространства, а соответствующие коэффициенты $v_{i_0 \ldots i_n}$ — координаты. Легко проверить, что отображение $v_m : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{\binom{n+m}{m}-1}$, определяемое формулами $v_{i_0 \ldots i_n} = x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}$, $i_0 + \ldots + i_n = m$, регулярно. Его называют *отображением Веронезе*, а образ $v_m(\mathbf{P}^n)$ — *многообразием Веронезе*. Это многообразие задается уравнениями второго порядка

$$v_{i_0\ldots i_n}v_{j_0\ldots j_n}=v_{k_0\ldots k_n}v_{l_0\ldots l_n},$$

где $i_0+j_0=k_0+l_0, \ldots, i_n+j_n=k_n+l_n$. Более того, отображение Веронезе является изоморфизмом на образ. Если $H\subset\mathbf{P}^n$ — гиперповерхность, отвечающая однородному многочлену $f=\sum a_{i_0\ldots i_n}x_0^{i_0}\ldots x_n^{i_n}$ степени $m$, то ее образ $v_m(H)$ есть пересечение $v_m(\mathbf{P}^n)$ с гиперплоскостью $\left\{\sum a_{i_0\ldots i_n}v_{i_0\ldots i_n}=0\right\}$ в $\mathbf{P}^{\binom{n+m}{m}-1}$. Итак, гиперповерхность $H$ изоморфна проективному многообразию, определяемому уравнениями второго порядка. Аналогичное верно для любого проективного многообразия.

**1.3. Замкнутость образа проективного многообразия.** Замкнутость образа при непрерывном отображении — одно из характерных свойств компактов. Аналогичное свойство выделяет проективные многообразия.

Пример. По определению всякое квазипроективное многообразие $U$ имеет открытое включение $U\subseteq V$ в проективное многообразие $V$. Очевидно, его образ замкнут, лишь если $U=V$ проективно.

Теорема ([57]). Образ проективного многообразия при регулярном отображении замкнут.

Следствие. Регулярная функция на связном проективном многообразии постоянна (Ср. со следствием 2 п. 2.5 гл. 1 и см. пример 1 п. 1.2).

**1.4. Неприводимость. Размерность.** *Алгебраическое многообразие* называют *неприводимым*, если оно не представимо как объединение двух непустых собственных подмногообразий. По нётеровости топологии Зарисского всякое квазипроективное многообразие раскладывается в конечное объединение неприводимых подмногообразий. Это разложение единственно. Поэтому при изучении алгебраических многообразий особый интерес представляют неприводимые. *Алгебраическое многообразие* $V$ имеет *размерность* $n$, если максимальная убывающая последовательность его неприводимых подмногообразий

$$V\supseteq V_0\supset V_1\supset\ldots\supset V_n\neq\varnothing$$

имеет длину $n+1$. Размерность многообразия $V$ обозначают через $\dim V$.

Пример 1. $\dim\mathbf{P}^n=\dim\mathbf{A}^n=n$, т. е. алгебро-геометрическая размерность совпадает с линейной. Максимальную убывающую последовательность можно составить из подпространств: $\mathbf{P}^n\supset\mathbf{P}^{n-1}\supset\ldots\supset\mathbf{P}^0$ и $\mathbf{A}^n\supset\mathbf{A}^{n-1}\supset\ldots\supset\mathbf{A}^0$.

Пример 2. Неприводимое нульмерное многообразие есть точка.

Пример 3. Размерность гиперповерхности $H\subset\mathbf{P}^n$ и каждой ее неприводимой компоненты равна $n-1$. Легко доказывается и обратное, что подмногообразие $\mathbf{H}\subset\mathbf{P}^n$, каждая неприводимая компонента которого имеет размерность $n-1$, есть гиперповерхность. Разложение гиперповерхности $H$ на неприводимые компоненты отвечает разложению на неприводимые множители многочлена $f$, задающего $H$. Если $f=\Pi f_i^{p_i}$ — разложение на неприводимые множители $f_i$, то $H=\bigcup H_i$, где $H_i=\{f_i=0\}$, — разложение на неприводимые компоненты. Неприводимые многочлены $f_i$ определяются по $H$ однозначно с точностью до ассоциированности. Суммарную степень $d=\Sigma \deg f_i$ называют *степенью гиперповерхности* $H$. Геометрически степень можно определить как максимальное число точек пересечения гиперповерхности $H$ с прямой, не содержащейся в $H$. Гиперповерхности степени 1 есть гиперплоскости. Неприводимые гиперповерхности степени 2 называют *квадриками,* степени 3 — *кубиками,* степени 4 — *квартиками* и т. п. *Квадрики, кубики, квартики* и т. п. на $\mathbf{P}^2$ называют *плоскими,* плоские квадрики — *кониками.*

Говорят, что некоторое свойство выполнено в общей точке, если оно выполнено на непустом открытом (по Зарисскому) подмножестве. (В неприводимом случае последнее всюду плотно и дополнение имеет меньшую размерность.) Например, общая прямая пересекает гиперповерхность степени $d$ по $d$ различным точкам. При этом прямые рассматриваются как точки многообразия Грассмана прямых [31].

Многообразия размерности 2 называют *поверхностями,* а один — *кривыми.*

**1.5. Алгебраические кривые.** Под *алгебраической кривой* обычно понимают одно из следующих: связное квазипроективное или проективное многообразие размерности 1, либо неприводимое квазипроективное или проективное многообразие размерности 1 (не считая арифметических кривых и одномерных схем). Ниже, если не оговорено противное, под кривой понимается неприводимое проективное алгебраическое многообразие размерности 1. (Более того, мы будем интересоваться в основном неособыми кривыми (см. ниже п. 1.6).)

Пример. Гиперповерхности в $\mathbf{P}^2$ называют *плоскими кривыми.* Любые две плоские коники изоморфны. Точнее, имеется однородная система координат, в которой коника записывается уравнением $x_0^2=x_1x_2$, а при $\operatorname{char} k\neq 2$ — уравнением $x_0^2+x_1^2+$ $+x_2^2=0$.

Замечание. *Кривые* $C\subset\mathbf{P}^3$ называют *пространственными.* Очевидно, всякая пространственная кривая задается, по крайней мере, двумя уравнениями. Однако неизвестно, всегда ли она задается ровно двумя уравнениями.

**1.6. Особые и неособые точки многообразий.** Первым приближением многообразия является его касательное пространство. Пусть $p$ — точка квазипроективного многообразия $V\subseteq\mathbf{P}^n$. Выберем на $\mathbf{P}^n$ такую аффинную систему координат, что $p=(0, \ldots, 0)$. Всякий многочлен $f$, равный нулю на $V$, в этой системе координат имеет вид $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i +$ члены порядка $\geqslant 2$.

Линейную часть $\sum a_i x_i$ называют дифференциалом функции $f$ в $p$. Она выражается через (формальные) частные производные:

$$df(p) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, x_i.$$

Дифференциалы всех функций, определяющих $V$, задают подпространство

$$T_p = \{df(p) = 0 \mid f(V) = 0\},$$

называемое вложенным *касательным пространством* к $V$ в точке $p$. В проективном пространстве удобно работать с замыканием $\overline{T}_p = \{df(p) = 0 \mid f$ — однородные многочлены, равные нулю на $V\}$. *Точку* $p \in V$ называют *неособой*, если $\dim T_p = \dim_p V$, где $\dim_p V$ — размерность многообразия $V$ в точке $p$ = максимум размерностей неприводимых компонент $V$, проходящих через $p$. *Многообразие* $V$ называют *неособым*, если таковы все его точки. Множество особых точек $V$ обозначают через $\mathrm{Sing}\, V$.

Пример. 1. $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{P}^n$ неособы и $T_p = \mathbf{A}^n$, $\overline{T}_p = \mathbf{P}^n$, соответственно, в любой точке $p$.

Пример 2. Всякая коника неособа. Если коника задана уравнением $x_0^2 = x_1 x_2$, то касательная прямая $\overline{T}_p$ в точке $p = (a_0 : a_1 : a_2)$ имеет уравнение $2a_0 x_0 = a_2 x_1 + a_1 x_2$. Отметим, что при $\mathrm{char}\, k = 2$ все касательные $\overline{T}_p = \{a_2 x_1 + a_1 x_2 = 0\}$ проходят через точку $(1:0:0)$. Неособую *кривую* $C \subset \mathbf{P}^n$ называют *необыкновенной*, если все касательные к ней проходят через некоторую общую точку. (Она необыкновенная тем, что объект «движется» по ней всегда в одном направлении — к точке пересечения касательных.) Оказывается, что прямая и коника в характеристике 2 единственные (неособые) необыкновенные кривые [40].

Пример 3. Общая плоская кривая $C \subset \mathbf{P}^2$ степени $d$ неособа.

Пример 4. Пусть $C$ — неособая алгебраическая кривая. Группа перестановок $S_d$ естественно действует на произведении $C^d = \underbrace{C \times \ldots \times C}_{d}$. Фактормногообразие $C_d \overset{\mathrm{df}}{=} C^d / S_d$ называют $d$-кратной симметрической степенью $C$. С помощью основной теоремы о симметрических многочленах нетрудно установить неособость $C_d$ (ср. с примером 4 п. 1.2). Аналогично, симметрическая степень римановой поверхности будет комплексным многообразием.

Предложение. (а) $\dim T_p \geqslant \dim_p V$.

(б) $\operatorname{Sing} V$ — подмногообразие $V$ и общая точка каждой неприводимой компоненты $V$ неособа.

(в) Точки пересечения неприводимых компонент $V$ особы.

Неособые алгебраические кривые во многом аналогичны римановым поверхностям.

Лемма. В окрестности неособой точки $p$ кривой $C$ существует регулярная функция $t$ такая, что всякая другая функция $f$, регулярная в $p$, однозначно представима в виде

$$f=t^{\gamma}g, \tag{1}$$

где $g$ — функция, тоже регулярная в $p$, с $g(p)\neq 0$ (ср. с (1) гл. I.)

Если $C\subseteq \mathbf{A}^n$ и $p=0$, то в качестве $t$ можно взять ограничение линейной формы, задающей гиперплоскость через $p$, трансверсальную (= не содержащую) $T_p$.

Определение 1. Функцию $t$, удовлетворяющую лемме, называют *локальным параметром* в $p$.

Определение 2. Число $\gamma$ в (1) не зависит от выбора локального параметра $t$ и называется *кратностью* или *порядком нуля функции* $f$ в точке $p$. Его обозначают через $\operatorname{ord}_p f$.

При фиксированном локальном параметре $t$ функции $f$, регулярной в $p$, однозначно сопоставим ряд $\sum_{i\geqslant 0} a_i t^i \in k[[t]]$, называемый рядом Тейлора, такой, что для всех $j\geqslant 0$

$$\operatorname{ord}_p\left(f-\sum_{i=0}^{j} a_i t^i\right)\geqslant j+1.$$

Очевидно, $a_0=f(0)$, а $a_1=(f-a_0)/t\,(0)$ и т. п.

Пример 5. Если $x$ — аффинная координата на $\mathbf{A}^1$, то $t=x-x(p)$ — локальный параметр в точке $p\in\mathbf{A}^1$. Функция $1/(1-t)$ регулярна в окрестности $p$ и имеет ряд Тейлора $\sum_{i\geqslant 0} t^i$, так как

$$\frac{1}{1-t}-\sum_{i=0}^{j} t^i=\frac{t^{j+1}}{1-t}.$$

Регулярная функция локально однозначно определяется своим рядом Тейлора или, эквивалентно, равна нулю в окрестности $p$ при нулевом ряде Тейлора. (Это обстоятельство существенно отличает регулярные и аналитические функции от дифференцируемых функций с нулевым рядом Тейлора.) Тем самым, функцию $f$ можно отождествить с ее рядом Тейлора и записать это формальным равенством $f=\sum_{i\geqslant 0} a_i t^i$, которому можно придать содержательный смысл (ср. ниже с п. 1.9). Пример 5 тогда записывается равенством $1/(1-t)=\sum_{i\geqslant 0} t^i$.

**1.7. Рациональные функции, отображения и многообразия.** Всюду в этом пункте многообразия предполагаются неприводимыми. Необходимость такого предположения выяснится чуть позже. Под *рациональной функцией* на алгебраическом многообразии $V$ понимается регулярная функция $f: V \to k$, заданная на непустом открытом подмножестве $U \subseteq V$. Две такие функции считают одинаковыми, если они совпадают на непустом — открытом подмножестве. Как видно, понятие рациональной функции существенно отличается от теоретико-множественного понятия функции. Во-первых, рациональная функция, возможно, не всюду определена на $V$, а лишь в общей точке. Во-вторых, она есть класс эквивалентности функций. (Нечто вроде лебеговой функции математического анализа.) Последнее обстоятельство легко устранить, если класс эквивалентности рациональной функции заменить представителем с наибольшей областью определения, называемой *областью регулярности* рациональной функции.

Пример 1. Пусть $\mathbf{P}^n$ — проективное пространство с однородными координатами $(x_0: \ldots : x_n)$. По определению (см. начало п. 1.2) рациональные функции на $\mathbf{P}^n$ задаются отношениями $f/g$ однородных многочленов от $x_0, \ldots, x_n$ одной степени. Поэтому рациональные функции на $\mathbf{P}^n$ образуют поле $k(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$. Если многочлены $f$ и $g$ взаимно просты ($f/g$ — несократимая дробь), то множество $\{g(x_0, \ldots, x_n) \neq 0\}$ является областью регулярности функции $f/g$.

В общем случае рациональные функции на многообразии $V \subseteq \mathbf{P}^n$ суть ограничения рациональных функций $\mathbf{P}^n$, определенных в общей точке $V$. Отсюда легко получить, что рациональные функции на любом (неприводимом!) многообразии $V$ образуют поле, обозначаемое через $k(V)$. Поле $k(V)$ конечно порождено над $k$: в качестве образующих можно взять ограничения функций $x_i/x_0$ (если $V$ не содержится в гиперплоскости $\{x_0 = 0\}$). В частности, степень трансцендентности $k(V)$ над $k$ конечна.

Пример 2. Пусть $H \subset \mathbf{A}^n$ — гиперповерхность, задаваемая неприводимым многочленом $f(x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что переменная $x_n$ действительно входит в $f$. Тогда функции $x_1, \ldots, x_{n-1}$ алгебраически независимы в $k(H)$ и $k(H)$ получается расширением поля $k(x_1, \ldots, x_{n-1})$ функцией $x_n$, связанной с функциями $x_1, \ldots, x_{n-1}$ алгебраическим соотношением $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Поэтому степень трансцендентности поля $k(H)$ равна $n-1 = \dim H$.

Наоборот, если $k(x_1, \ldots, x_n)$ — конечно порожденное над $k$ поле, то оно является полем рациональных функций некоторого алгебраического многообразия, например, аффинного многообразия в $\mathbf{A}^n$, уравнения которого $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ суть алгебраические соотношения между элементами $x_i \in k(x_1, \ldots, x_n)$. Такие алгебраические многообразия называют *моделями поля* $k(x_1, \ldots$

$\ldots, x_n)$. В качестве модели поля $k(x_1, \ldots, x_n)$ можно взять даже гиперповерхность (аффинную или проективную — по желанию), поскольку всякое конечно порожденное над $k$ поле степени трансцендентности $m$ может быть порождено $(m+1)$-ой образующей. В случае $\operatorname{char} k=0$ это следует непосредственно из теоремы о примитивном элементе. Случай $\operatorname{char} k>0$ требует более утонченной техники — выбор сепарирующего базиса, использующий совершенность (алгебраически замкнутого) поля $k$ [75]. Геометрическая версия этого утверждения дается ниже в примере 6.

На аффинном многообразии всякая рациональная функция является отношением регулярных. Для проективных многообразий это неверно, поскольку регулярные функции на таких многообразиях постоянны. Тем не менее локально (в окрестности любой точки) рациональная функция есть отношение регулярных, откуда по лемме пункта 1.6 вытекает

Лемма. Пусть $p$ — неособая точка кривой $C$, а $t$ — локальный параметр в $p$. Всякая рациональная функция $f\neq 0 \in k(C)$ однозначно представима в виде

$$f=t^{\nu}g,$$

где $\nu \in \mathbf{Z}$, функция $g$ регулярна в $p$ и $g(p)\neq 0$.

Число $\nu$ в этом представлении не зависит от выбора локального параметра $t$. Его называют *порядком функции* $f$ в $p$ и обозначают через $\operatorname{ord}_p f$. Если $\operatorname{ord}_p f<0$, то говорят, что функция $f$ имеет в $p$ *полюс кратности* или *порядка* $-\operatorname{ord}_p f$. Умножая на $t^{\nu}$ разложение регулярной в $p$ функции $g$ в ряд Тейлора по $t$, получаем разложение $f$ в ряд Лорана по $t$: $f=\sum\limits_{i\geqslant \operatorname{ord}_p f} a_i t^i$, $a_{\operatorname{ord}_p f}\neq 0$.

*Рациональным отображением* многообразия $V$ в многообразие $W$ называют регулярное отображение $f: U\to W$, где $U$ — непустое открытое подмножество в $V$. Рациональные отображения из $V$ в $W$ считают одинаковыми, если они совпадают на непустом открытом подмножестве. Рациональное отображение $f$ из $V$ в $W$ обычно обозначают через $f: V \dashrightarrow W$. (Пунктирность стрелки отмечает частичную определенность $f$.) Как и рациональная функция, рациональное отображение имеет естественную область определения — *область регулярности*, дополнение к которой состоит из точек неопределенности. Под образом рационального отображения понимают образ его области регулярности. Рациональные функции суть рациональные отображения в $k$.

Пример 3. Отображение проектирования $\pi_L: \mathbf{P}^n \dashrightarrow P$ (см. пример 5 п. 1.2) рационально. Его точки неопределенности составляют центр проектирования $L$. Также рационально проектирование $\pi_L: V \dashrightarrow P$ любого подмногообразия $V\subseteq \mathbf{P}^n$, не лежащего в $L$. Точки неопределенности последнего отображения лежат в пересечении $L\cap V$, но не всегда совпадают с ним.

Теорема (о регулярности). Рациональное отображение $f: C \dashrightarrow V$ кривой $C$ в проективное многообразие $V$ регулярно в неособых точках $C$. В частности, такое отображение регулярно, когда кривая $C$ неособа.

Можно предполагать, что $V=\mathbf{P}^n$ и $f(C)$ не лежит в гиперплоскости $\{x_0=0\}$. Тогда $f=(1:f_1:\ldots:f_n)$, где $f_i=f^*(x_i/x_0)\in$ $\in k(C)$. Далее устраняем неопределенности, как и в пункте 5.8 гл. 1. Теорема позволяет рассматривать рациональные функции на неособой кривой $C$ как регулярные отображения $C\to\mathbf{P}^1$ (ср. с п. 2.2 главы 1).

Пример 4. Пусть $C\subseteq\mathbf{P}^n$ — кривая и $p$ — ее неособая точка. Тогда проектирование $\pi_p$ с центром в $p$ определяет регулярное отображение $C$. Нетрудно проверить, что $\pi_p(p)=\overline{T}_p\cap P$. В этом смысле касательная $\overline{T}_p$ к $C$ есть предел секущих $\overline{pq}$, $q\in C$.

Композиция рациональных отображений $f: V \dashrightarrow W$ и $g: W \dashrightarrow U$ определена, корректна и рациональна, если образ $f$ содержит открытое множество многообразия $W$. *Отображение* $f$, обладающее последним свойством, называют *доминантным*. *Бирациональным* называют рациональное *отображение* $f: V \dashrightarrow W$, обратимое в рациональном смысле, т. е. такое, для которого существует рациональное отображение $g: W \dashrightarrow V$, что $g\circ f=id_V$ и $f\circ g=id_W$ как рациональные отображения. Говорят, что многообразия $V$ и $W$ *бирационально эквивалентны*, если существует бирациональное отображение $f: V \dashrightarrow W$. Доминантное рациональное отображение $f: V \dashrightarrow W$ определяет $k$-расширение полей $f^*: k(W) \hookrightarrow k(V)$. Обратно, всякое $k$-расширение $\varphi: k(W) \hookrightarrow k(V)$ задается доминантным рациональным отображением $f=(1:f_1:\ldots: f_n): V \dashrightarrow W\subseteq\mathbf{P}^n$, где $f_i=$ $=\varphi(x_i/x_0)\in k(V)$.

Замечание 1. Функтор.

$$V\mapsto k(V),$$

$$f: V \dashrightarrow W \to f^*: k(W)\hookrightarrow k(V)$$

определяет двойственность между категорией алгебраических многообразий с доминантными рациональными отображениями и категорией полей, конечно порожденных над $k$, с $k$-расширениями в качестве морфизмов.

Тем самым, классификация алгебраических многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности равносильна классификации с точностью до $k$-изоморфизма полей, конечно порожденных над $k$. Простейший пример подобного поля — чисто трансцендентное расширение $k(x_1, \ldots, x_n)$ поля $k$ алгебраически независимыми элементами $x_1, \ldots, x_n$. Алгебраические *многообразия* с таким полем рациональных функций называют *рациональными*. Например, многообразия $\mathbf{P}^n$, $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m$ и квадрика рациональны. Рациональность многообразия имеет важные приложения не только в анализе (см. неопределенное интегрирование в замечании 2 п. 4.8), а следовательно, и в физике, но и в арифметике. Действительно, если $f=(1:f_1:\ldots:f_m)$: $\mathbf{P}^n \mapsto V\subseteq\mathbf{P}^m$ — бирациональное доминантное отображение в $V$, заданное рациональными функциями $f_1,\ldots,f_m$ с коэффициентами в $\mathbf{Q}$. Тогда «почти» все рациональные точки $(x_0:\ldots$ $\ldots: x_n)$, $x_i\in\mathbf{Q}$, на $V$ суть образы рациональных точек $\mathbf{P}^n$ относительно $f$; в частности, таковы точки $(1:f(y_0,\ldots,y_n):\ldots$ $\ldots: f_m(y_0,\ldots,y_n))$, $y_i\in\mathbf{Q}$. На этом основано описание рациональных и целых решений многих известных диофантовых уравнений.

Очевидно, размерность и степень трансцендентности поля рациональных функций инварианты бирациональных отображений. Отсюда, согласно примеру 2, выводится

Теорема. Степень трансцендентности над $k$ поля рациональных функций алгебраического многообразия равна его размерности. В частности, алгебраические кривые суть неприводимые алгебраические многообразия с полем рациональных функций степени трансцендентности 1 над $k$.

Следствие. Неособая проективная рациональная кривая изоморфна $\mathbf{P}^1$.

Пусть $f:V \mapsto W$ — рациональное, доминантное отображение алгебраических многообразий одной размерности. Таково, например, непостоянное отображение неприводимых кривых. По теореме $f^*:k(W)\hookrightarrow k(V)$ — конечное $k$-расширение. Степень расширения $f^*$ называют *степенью отображения* $f$ и обозначают через $\deg f$. Имеются понятия и результаты геометрии алгебраических кривых, не обладающие (существенными) аналогами для римановых поверхностей. Многие из них связаны с сепарабельностью. *Отображение* $f$ называют *сепарабельным*, *несепарабельным* или *чисто несепарабельным*, если соответственно таково, расширение $f^*$. В характеристике 0 отображение $f$ всегда сепарабельно. Геометрический смысл степени отображения состоит в том, что в сепарабельном случае слой $f^{-1}(p)$ над общей точкой $p\in W$ состоит ровно из $\deg f$ точек. Однако в несепарабельном случае число точек общего слоя $f^{-1}(p)$ менее чем $\deg f$ и даже равно 1 в чисто несепарабельном случае. Более точное утверждение для кривых см. ниже в пункте 2.1. Очевидно, $f$ бирационально, если и только если $\deg f=1$.

Пример 5. Проектирование $\pi:C\to P$ неособой кривой $C\subset\mathbf{P}^n$ из точки $p\in\mathbf{P}^n-C$ бирационально в точности тогда, когда для общей точки $q\in C$ прямая $\overline{pq}$ не касается $C$ и не пересекает $C$ еще в одной точке. Отображение $f$ будет изоморфным вложением, если это условие выполнено для всех точек $q\in C$. Счетом параметров легко показать, что при $n\geqslant 4$ проектирование из общей точки $p \in \mathbf{P}^n$ задает регулярное вложение $C$ в $P = \mathbf{P}^{n-1}$. Поэтому всякая неособая проективная кривая вкладывается в $\mathbf{P}^3$. Пользуясь последовательными проекциями из общих точек, можно построить бирациональное отображение проективной кривой $C \subset \mathbf{P}^n$ на возможно особую кривую в $\mathbf{P}^2$. Точка проектирования всякий раз берется вне поверхности, заметаемой хордами и касательной через неособую точку $C$.

Пример 6. Аналогично доказывается, что всякое алгебраическое многообразие бирационально эквивалентно гиперповерхности.

Пусть $V$ — проективное алгебраическое многообразие. Регулярное отображение $f: W \to V$ степени 1, где $W$ — неособое проективное многообразие, называют *разрешением особенностей* $V$ или *десингуляризацией* $V$. По проективности $W$ не возможны тривиальные «десингуляризации» $W \subseteq V$, где $W$ — открытое подмножество неособых точек $V$. Существование десингуляризации алгебраических многообразий размерности $\geqslant 2$ факт достаточно деликатный. Случай кривых проще и эквивалентен следующему утверждению.

Теорема (о модели). Конечно порожденное над $k$ поле степени трансцендентности 1 имеет в качестве модели неособую проективную кривую и она определена однозначно с точностью до изоморфизма.

Однозначность вытекает непосредственно из теоремы о регулярности. Один из наиболее простых подходов к доказательству существования связан с понятием нормализации алгебраических многообразий, которое в случае кривых равносильно десингуляризации (см. обзор В. И. Данилова в этом томе). В случае $k = \mathbf{C}$ можно воспользоваться аналитической десингуляризацией (см. следствие 4 п. 2.11 гл. 1) и алгебраичностью компактных римановых поверхностей.

Пример 7. Аффинная кривая $y^2 = f(x)$, где $\operatorname{char} k \neq 2$ и $f(x)$ — многочлен степени $n$ без кратных корней, есть неособая модель поля $k(x, \sqrt{f})$. Однако ее замыкание при $n \geqslant 4$ до проективной кривой в $\mathbf{P}^2$ особо в единственной добавляемой точке $(0:1:0)$. Неособую проективную модель $C$ поля $k(x, \sqrt{f})$ называют *гиперэллиптической кривой*. Вложение $k(x) \hookrightarrow k(x, \sqrt{f})$ индуцирует *гиперэллиптическую проекцию* $\gamma: C \to \mathbf{P}^1$ степени 2. Проекция $\gamma$ сепарабельна. Более того, $k(x) \hookrightarrow k(x, \sqrt{f})$ — расширение Галуа с единственным нетривиальным автоморфизмом, переводящим $\sqrt{f}$ в $-\sqrt{f}$. По теореме о регулярности он задает *гиперэллиптическую инволюцию* $j: C \to C$, переставляющую пары точек слоев $\gamma^{-1}(p)$, $p \in \mathbf{P}^1$. Правильнее под *гиперэллиптической кривой* понимать неособую проективную кривую $C$ с сепарабельной проекцией $\gamma: C \to \mathbf{P}^1$ степени 2. При $\operatorname{char} k \neq 2$ это по существу ничего не меняет. В случае $\operatorname{char} k = 2$ это означает, что надо рассматривать десингуляризацию замыкания кривой $y^2+yg(x)=f(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ — многочлены от $x$ (в характеристике 2 метод выделения полного квадрата не работает!).

Замечание 2. Двойственность замечания 1 задает двойственность категории неособых проективных кривых с непостоянными отображениями в качестве морфизмов и категории конечно порожденных полей над $k$ степени трансцендентности 1 с $k$-расширениями в качестве морфизмов. В частности, теория неособых проективных кривых может быть полностью изложена на языке теории полей [24], [49].

Пример 8. Пусть $C$ — неособая проективная кривая, на которой регулярно действует конечная группа автоморфизмов $G$. Тогда $G$ действует и на ее поле рациональных функций $k(C)$. Легко проверить, что подполе инвариантных функций $k(C)^G=\{f\in k(C) \mid g^*(f)=f,\ g\in G\}$ конечно порождено над $k$ и имеет степень трансцендентности 1. Неособая проективная модель $k(C)^G$ будет *факторкривой* $C/G$. Включение $k(C)^G\subseteq k(C)$ индуцирует отображение факторизации $C\to C/G$, которое сепарабельно и имеет степень, равную порядку группы $G$, а потому является *отображением Галуа*: $G$ действует транзитивно на слоях факторизации.

Пример 9. Пусть $C\subseteq \mathbf{P}^n$ — неособая проективная кривая и $p=\operatorname{char} k>0$. Кривая $C$ является моделью поля $k(C)$. Изменение действия констант на рациональные функции, как это не покажется на первый взгляд парадоксальным, может привести к новой кривой. Например, замена включения $k\subset k(C)$ на композицию с изоморфизмом (по совершенности $k$) Фробениуса $k\overset{a^p}{\rightleftarrows} k\subset k(C)$ дает в качестве неособой проективной модели кривую $C_p\subseteq \mathbf{P}^n$. Рациональные функции кривой $C_p$ и $C$ одни и те же, но в первом случае $k$ действует умножением на $p$-ю степень константы. Соответственно уравнения $C_p$ получаются из уравнений кривой $C$ извлечением корней $p$-й степени коэффициентов. При этом возведение координат $\mathbf{P}^n$ в $p$-ю степень задает регулярный гомеоморфизм $\varphi: C_p\to C$, называемый *отображением Фробениуса*. Хотя $\varphi$ и взаимно однозначно, $\deg\varphi=p$. Отображению Фробениуса отвечает чисто несепарабельное расширение $k(C)\overset{f^p}{\hookrightarrow} k(C_p)=k(C)$ степени $p$. Последний изоморфизм $f\mapsto f$ определен не над $k$, а над $k\overset{a^{1/p}}{\rightleftarrows} k$. Отображение Фробениуса и его степени $\varphi^m$ играют важную роль в арифметике алгебраических многообразий над конечными полями. Объясняется это тем, что если кривая $C\subseteq \mathbf{P}^n$ определена над $\mathbf{F}_p$, т. е. задается уравнениями с коэффициентами в $\mathbf{F}_p$, то $C_p=C$ и $\varphi^m: C\to C$ — эндоморфизм, неподвижные точки которого суть точки кривой $C$

над $\mathbf{F}_{p^m}: x_i^{p^m} = x_i \Leftrightarrow x_i \in \mathbf{F}_{p^m}$. Подсчет таких точек определяет $\zeta$-функцию кривой $C$ — аналог $\zeta$-функции Римана [71].

Теорема (о разложении). Непостоянное отображение неособых проективных кривых раскладывается в композицию сепарабельного отображения и отображений Фробениуса.

Доказательство — приложение теории полей [40].

**1.8. Дифференциалы.** Пусть $K$ — некоторое поле над $k$. Отображение $D: K \to L$ в линейное $K$-пространство $L$ называют *дифференцированием*, если $D(f+g) = D(f) + D(g)$ и $D(fg) = fD(g) + gD(f)$. В случае $d(k) = 0$ такое отображение называют дифференцированием над $k$. *Дифференцирование* $d: K \to K^1$ над $k$ *универсально*, когда для всякого дифференцирования $D: K \to L$ над $k$ имеется единственное $K$-линейное отображение $f: K^1 \to L$ такое, что $D = f \circ d$ или коммутативен треугольник

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{d} & K^1 \\ & {\scriptstyle D}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & L & \end{array}.$$

Очевидно, универсальное дифференцирование определено однозначно с точностью до изоморфизма. Для поля $K$, конечно порожденного над $k$, несложно установить существование такого дифференцирования и проверить, что $\dim_K K^1$ = степень трансцендентности $K/k$.

Теорема. Для любого неприводимого алгебраического многообразия $V$ существует универсальное дифференцирование $d: k(V) \to k(V)^1$ и $\dim_{K(V)} k(V)^1 = \dim V$.

Элементы пространства $k(V)$ называют *рациональными дифференциалами* степени 1 на $V$; при этом дифференциал вида $df$ называют *дифференциалом функции* $f \in k(V)$.

Пример. 1. Если $x_1, \ldots, x_n$ — аффинные координаты на $\mathbf{A}^n$, то $k(\mathbf{A}^n)$-пространство $k(\mathbf{A}^n)^1$ имеет базис $dx_1, \ldots, dx_n$ и $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, где $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ — формальная частная производная рациональной функции $f \in k(\mathbf{A}^n)$ по $x_i$.

Пример 2. Для гиперповерхности $H \subset \mathbf{A}^n$, заданной нулями неприводимого многочлена $f$, $k(H)$ — пространство $k(H)^1$ порождено дифференциалами $dx_1, \ldots, dx_n$ с единственным соотношением $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$ на $H$.

Пусть $p$ — неособая точка кривой $C$, а $t$ — локальный параметр в $p$. Нетрудно проверить, что $dt \neq 0$. Поэтому на $C$ всякий рациональный дифференциал $\omega$ степени 1 имеет вид $\omega = f dt$, где $f \in k(C)$. Если функция $f$ регулярна в $p$, то говорят, что дифференциал $\omega$ регулярен в $p$. *Дифференциалы*, регулярные всюду на неособой кривой $C$, называют *регулярными*. Они образуют линейное $k$-пространство, обозначаемое через $\Omega_C$ или просто $\Omega$. Рациональные дифференциалы степени $\geqslant 2$ определяются как тензорные (симметрические) степени дифференциалов степени 1. Регулярность таких дифференциалов определяется локально, как и для дифференциалов степени 1. Подъем рациональных функций относительно доминантного рационального отображения задает подъем рациональных дифференциалов. Соответственно, регулярное отображение определяет подъем регулярных дифференциалов. Ниже, если не оговорено противное, дифференциал означает дифференциал степени 1.

Пусть $f: C \to B$ — непостоянное регулярное отображение неособых кривых. Подъем дифференциалов (любой степени) тривиален в точности тогда, когда $f$ несепарабельно (что двойственно тривиальности касательного отображения во всех точках и паталогично с точки зрения комплексного и вещественного анализа). Напротив, в сепарабельном случае и, в частности, когда $\operatorname{char} k=0$, подъем дифференциалов (любой степени) инъективен: $f^*\omega=0$, если и только если $\omega=0$. Более того, если $f$ — отображение Галуа с группой $G$, то $f^*(k(B))=k(C)^G$ и $f^*(k(B)^1)=(k(C)^1)^G$, т. е. всякая инвариантная рациональная функция, дифференциал будут подъемом рациональной функции, дифференциала. Аналогичное утверждение для регулярных дифференциалов при $\operatorname{char} k>0$, вообще говоря, неверно (ср. со следствием 2 п. 4.8 и см. пример 4 ниже). С другой стороны, для чисто несепарабельного отображения $f$ (например, Фробениуса $\varphi$) имеется изоморфизм

$$k(B)^1 \xrightarrow{\sim} k(C)^1, \quad g\,dt \mapsto f^*(g)^{1/\deg f}\, d f^*(t)^{1/\deg f},$$

индуцирующий изоморфизм $\Omega_B \xrightarrow{\sim} \Omega_C$ в проективном случае. Однако эти изоморфизмы определены не над $k$, а над $k \xrightarrow[\sim]{a^{1/\deg f}} k$ (ср. с примером 9 п. 1.7).

Пример 3. Регулярные дифференциалы на плоской неособой кривой $C \subset \mathbf{P}^2$ описываются точно так же, как и голоморфные дифференциалы в примере 2 пункта 4.8. Поэтому $\dim \Omega = (d-1)(d-2)/2$, где $d$ — степень $C$.

Пример 4. Пусть $C \subset \mathbf{P}^2$ — неособая кубика, являющаяся замыканием аффинной кривой $y^2+y=x^3+x$. Гиперэллиптическая проекция $\gamma$: $(x, y) \mapsto x$ есть отображение Галуа степени 2. Пространство регулярных дифференциалов $\Omega$ одномерно и порождается дифференциалом

$$\omega = \frac{dy}{3x^2+x} = \frac{dx}{2y+1}.$$

Отметим, что при $\operatorname{char} k=2$ дифференциал $\omega=dx=\gamma^* dx$ инвариантен относительно гиперэллиптической инволюции, переставляющей точки слоев $\gamma$, и является подъемом нерегулярного дифференциала $dx$ с $\mathbf{P}^1$. Причина появления подобных примеров выясняется в п. 2.4.

Пусть $C$ — неособая кривая, а $\omega \neq 0$ — *рациональный дифференциал* на $C$. Тогда в каждой точке $p \in C$ корректно определен *порядок*

$$\mathrm{ord}_p \omega = \mathrm{ord}_p f,$$

где $\omega = f dt$ и $t$ — локальный параметр в $p$. Если $\mathrm{ord}_p \omega \geqslant 0$, то $\omega$ регулярен в $p$ и имеет *нуль порядка* $\mathrm{ord}_p \omega$. Наоборот, если $\mathrm{ord}_p \omega < 0$, то $\omega$ имеет в $p$ *полюс порядка* $-\mathrm{ord}_p \omega$.

**1.9. Теоремы сравнения.** Предположим теперь, что $k = \mathbf{C}$. Неособая комплексная алгебраическая *кривая* $C \subseteq \mathbf{CP}^n$ является комплексным подмногообразием размерности 1, а потому с ней *ассоциирована риманова поверхность* $C^{an}$. Связность следует из неприводимости, как и в конструкции римановой поверхности алгебраической функции (ср. со следствием 5 п. 2.11 гл. 1). Поверхность $C^{an}$ компактна в точности тогда, когда $C$ проективна. Из результатов пунктов 6.4 и 6.5 гл. 1 вытекает

Теорема. Всякая компактная риманова поверхность ассоциирована с единственной с точностью до изоморфизма комплексной алгебраической кривой.

Поэтому неудивительно, что многие понятия, относящиеся к римановым поверхностям, алгебраизуемы.

Теоремы сравнения. Пусть $C, B$ — неособые комплексные проективные кривые, а $C^{an}$, $B^{an}$ — ассоциированные римановы поверхности.

1. Регулярность отображения $f : C \to B$ равносильна голоморфности $f^{an} \overset{\mathrm{df}}{=} f : C^{an} \to B^{an}$.

2. $\mathrm{Aut}\, C^{an} = \mathrm{Aut}\, C$, а потому нормальность $f$ равносильна нормальности $f^{an}$.

3. $\mathcal{M}(C^{an}) = \mathbf{C}(C)$, т. е. рациональность функции равносильна ее мероморфности. Аналогично, для дифференциалов

4. $\mathcal{M}^1(C^{an}) = \mathbf{C}(C)^1$.

5. Порядок $\mathrm{ord}_p f$ и $\mathrm{ord}_p \omega$ функции $f$ и дифференциала $\omega$ в точке $p \in C$ не зависит от того, рассматриваются ли они как мероморфные или рациональные функция и дифференциал соответственно.

6. Голоморфность дифференциала любой степени на $C$ равносильна его регулярности; в частности, $\Omega_{C^{an}} = \Omega_C$. (Продолжение следует в п. 2.6.)

Ключевой здесь является теорема 3, переформулировка теоремы о рациональности пункта 6.5 гл. 1. По комплексной теореме об обратной функции локальный параметр кривой $C$ будет локальным параметром римановой поверхности $C^{an}$ (в той же точке), откуда получаем теорему 5. (Формальное разложение в ряд по локальному параметру приобретает при этом обычный смысл на $C^{an}$.) Теорема 6 подводит к алгебраизации рода (см. ниже п. 2.5). Однако ряд топологических и аналитических понятий теории римановых поверхностей (и общее комплексных многообразий) прямых алгебраических аналогов не имеет, что указывает на их трансцендентную природу. Таковы, например, универсальная накрывающая, фундаментальная группа, гомологии, интегрирование и т. п. Однако некий алгебраический эрзац для большинства из них все же существует. Так появляются алгебраическая фундаментальная группа, этальная топология, $l$-адические и кристаллические когомологии [52] и т. п.

Замечание. С неособым комплексным алгебраическим многообразием $V$ ассоциировано комплексное многообразие $V^{an}$ той же размерности (см., например, теорему п. 1.2 гл. 3). (С особым многообразием ассоциировано комплексно аналитическое пространство.) Соответствующие теоремы сравнения, например, совпадение регулярности и голоморфности для отображения проективных многообразий см. в [65].

**1.10. Принцип Лефшеца.** Применение трансцендентных методов при исследовании комплексных алгебраических многообразий вполне естественно, если они рассматриваются как комплексно аналитические пространства или многообразия в неособом случае (ср. с [31]). Принцип Лефшеца позволяет распространить область их применимости на алгебраические многообразия над произвольным алгебраически замкнутым полем $k$ характеристики 0. Точнее, всякое утверждение об алгебраических многообразиях и их отображениях, зависящее не более чем от конечного (и даже континуального) числа констант и справедливое над $\mathbf{C}$, верно над произвольным алгебраически замкнутым полем $k$ характеристики 0. Объясняется это тем, что всякое конечно порожденное (соответственно континуально порожденное) поле над $\mathbf{Q}$ включается в $\mathbf{C}$. Однако каждое конкретное применение принципа Лефшеца требует некоторые содержательные дополнения в зависимости от ситуации.

Пример 1. Регулярное отображение $f: C \to \mathbf{A}^1$ — алгебраических кривых, каждый слой которого состоит из $n$ различных точек, при $\operatorname{char} k=0$ имеет степень 1, а потому $n=1$ и $f$ является изоморфизмом. При $k=\mathbf{C}$ отображение $f$ есть конечное ($n$-листное) неразветвленное накрытие римановых поверхностей. Комплексное пространство ассоциированное с прямой $\mathbf{A}^1$ над $\mathbf{C}$, представляет гауссову комплексную плоскость. По ее односвязности $n=1$ и $f$ — изоморфизм. Случай $\operatorname{char} k=0$ тогда следует по принципу Лефшеца. Действительно, $f$ — ограничение рациональной функции на кривую $C \subset \mathbf{P}^n$, а задание $C$ и $f$ требует лишь конечное число констант: коэффициентов уравнений замыкания $\bar{C} \subseteq \mathbf{P}^n$, функции $f$ и координат точек дополнения $\bar{C}-C$. Однако аккуратное обоснование нуждается в дополнительных сведениях о кратностях отображений кривых (см. п. 2.1), например, что новые точки ветвления не появляются при расширении основного поля. Последнее легко вывести из теоремы Гильберта о нулях. Очевидно, отображение $f$ является алгебраическим аналогом неразветвленного накрытия аффинной прямой $\mathbf{A}^1$. Поэтому полученный результат можно интерпретировать как тривиальность алгебраической фундаментальной группы прямой $\mathbf{A}^1$ или ее односвязность при $\operatorname{char} k=0$. Последнее неверно при $\operatorname{char} k>0$ (ср. с примером 4 п. 1.8 при $\operatorname{char} k=2$).

Пример 2. Как и в случае римановых поверхностей, разложение функций по локальному параметру (см. п. 1.8) позволяет выделить главную часть рациональной функции и дифференциала; в частности, определить вычет. Это определение корректно. Более того, сумма вычетов рационального дифференциала на неособой проективной кривой равна 0. В нулевой характеристике этот результат можно доказать с помощью принципа Лефшеца. Общий случай получается отсюда по принципу продолжения алгебраических тождеств [64].

Лозунг. Принцип Лефшеца применяйте в результатах справедливых лишь в характеристике 0.

Как и всякий другой лозунг, его не следует абсолютизировать, что показывает пример 2.

## § 2. Формула Римана — Роха

Здесь вводится формула Римана—Роха для алгебраических кривых и сопутствующие понятия (ср. с § 6 гл. 1). Формула Римана—Роха — один из важнейших инструментов исследования алгебраических кривых. Параграф завершают ее первые приложения.

**2.1. Кратность отображения. Ветвления.** Рассмотрим непостоянное регулярное отображение $f: C \to B$ неособых алгебраических кривых.

Определение 1. *Кратностью отображения* $f$ в точке $p \in C$ называют число

$$\operatorname{mult}_p f \overset{\mathrm{df}}{=} \operatorname{ord}_p f^*(t),$$

где $t$ — локальный параметр в точке $f(p)$ кривой $B$.

Определение 2. Точка $p \in C$ с $\operatorname{mult}_p f \geqslant 2$ называется *точкой ветвления* $f$; при этом $\operatorname{mult}_p f$ называют *кратностью* или *порядком ветвления*. Точки ветвления кратности 2 называют *простыми*.

Пример 1. Если $f: C \to \mathbf{P}^1$ — рациональная функция, то $\operatorname{mult}_p f = \operatorname{ord}_p f$ при $f(p)=0$ и $\operatorname{mult}_p f = -\operatorname{ord}_p f$ при $f(p)=\infty$.

Пример 2. Если $p=\operatorname{char} k>0$ и $\varphi: C_p \to C$ — отображение Фробениуса. то всякая точка $q \in C$ будет точкой ветвления $\varphi$ кратности $p$. Значит, по теореме о разложении пункта 1.7 несепарабельное отображение разветвлено всюду. В противоположность этому сепарабельное отображение кривых имеет лишь конечное число точек ветвления.

Теорема. Пусть $f: C \to B$ — непостоянное отображение неособых проективных кривых. Тогда число точек любого слоя

$f^{-1}(q)$, $q \in B$, с учетом кратностей равно степени отображения, т. е. $\deg f = \sum\limits_{f(p)=q} \mathrm{mult}_p f$.

Следствие. Число точек слоя $f^{-1}(q)$ не превосходит $\deg f$ и равно $\deg f$ в точности тогда, когда $f$ неразветвлено над $q$.

Очевидно, требование проективности кривых в теореме существенно. Однако справедливость ее сохраняется и в непроективном случае, если при удалении точки $q \in B$ удалить весь слой $f^{-1}(q)$. Полученные *отображения* кривых называют *конечными*. Понятию конечности можно придать чисто алгебраический смысл, на чем и основано доказательство теоремы.

**2.2. Дивизоры.** Пусть $C$ — неособая кривая.

Определение 1. *Дивизор* $D$ на $C$ есть формальная конечная сумма

$$D = \Sigma a_i p_i,$$

где $a_i \in \mathbf{Z}$ и $p_i \in C$.

Определение 2. Дивизоры алгебраической кривой $C$ образуют по сложению так называемую *группу дивизоров* $\mathrm{Div}\, C$.

Определение 3. *Дивизор* $D = \Sigma a_i p_i$ называют *эффективным*, если все $a_i \geqslant 0$; это записывают в виде $D \geqslant 0$. Общее, $D_1 \geqslant D_2$, если дивизор $D_1 - D_2$ эффективен.

Определение 4. Число $\deg D \overset{\mathrm{df}}{=} \sum a_i$ называют *степенью дивизора* $D = \sum a_i p_i$.

Отображение степени $\deg : \mathrm{Div}\, C \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ — эпиморфизм.

Пример. 1. Если $f : C \to B$ — непостоянное отображение неособых кривых, то для каждой точки $p \in B$ определен *дивизор слоя* $f^* p \overset{\mathrm{df}}{=} \sum\limits_{f(q)=p} \mathrm{mult}_q f \cdot q$ над $p$. Это сопоставление продолжается до гомоморфизма подъема $f^* : \mathrm{Div}\, B \to \mathrm{Div}\, C$, $f^*\left(\sum a_i, p_i\right) = \sum a_i f^* p_i$. Если кривые $C$ и $B$ проективны (или отображение $f$ конечно), то по теореме пункта 2.1 $\deg f^* p = \deg f$ и $\deg f^* D = \deg f \cdot \deg D$ для всех $p \in B$ и $D \in \mathrm{Div}\, B$.

Пример 2. Ненулевая рациональная функция $f$ на неособой кривой $C$ определяет дивизор

$$(f) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum \mathrm{ord}_p f \cdot p,$$

называемый *дивизором функции* $f$. Это, в самом деле, дивизор, поскольку каждая ненулевая рациональная функция имеет конечное число нулей и полюсов. Рассматривая рациональную функцию $f$ как отображение $f : C \to \mathbf{P}^1$, получаем разложение $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$, где $(f)_0 \overset{\mathrm{df}}{=} f^* 0$ — так называемый *дивизор* *нулей* функции $f$, а $(f_\infty)\overset{df}{=}(1/f)_0=f^*\infty$ — *дивизор полюсов. Дивизоры* рациональных функций на $C$ называют *главными.* Они составляют подгруппу в $\operatorname{Div} C$. *Дивизоры* $D_1$ и $D_2$ на $C$, разность которых $D_1-D_2$ является главным дивизором, называют *линейно эквивалентными.* Линейная эквивалентность дивизоров $D_1$ и $D_2$ обозначается через $D_1\sim D_2$. Если кривая $C$ проективна, то степень всякого главного дивизора равна нулю: $\deg(f)=\deg f^*(0-\infty)=0$ и линейно эквивалентные дивизоры имеют одинаковую степень. В частности, степень дивизора, линейно эквивалентного эффективному, $\geqslant 0$. Например, многочлен $f(x)$ является рациональной функцией на $\mathbf{P}^1$ с $(f(x))=\Sigma a_i p_i - d\infty$, где $a_i$ — кратность корня $p_i$ и $d=\deg f$. В данном случае то, что степень дивизора $(f)$ равна 0, эквивалентно равенству степени многочлена числу его корней с учетом кратности. Всякий дивизор $D$ на $\mathbf{P}^1$ степени 0 будет главным и всякий дивизор $D$ на $\mathbf{P}^1$ степени $d$ линейно эквивалентен $dp$, где $p$ — любая точка $\mathbf{P}^1$. В общей ситуации классификация дивизоров степени 0 на алгебраической кривой с точностью до главных приводит к якобианам (см. п. 2.3 гл. 3).

Пример 3. Ненулевой рациональный дифференциал $\omega$ на неособой кривой $C$ определяет дивизор

$$(\omega)\overset{df}{=}\sum \operatorname{ord}_p \omega\cdot p.$$

*Дивизоры* такого вида называют *каноническими* и обозначают через $K_C$ или просто $K$. По теореме пункта 1.8 канонические дивизоры составляют полный *класс* линейной эквивалентности, называемый *каноническим.*

Под простым дивизором неприводимого многообразия $V$ понимается неприводимое подмногообразие $D\subset V$ коразмерности 1, а под дивизором — целочисленная конечная линейная комбинация $\Sigma a_i D_i$ простых дивизоров $D_i$. Эффективность и отношение порядка определяются как и для кривых. Также можно определить дивизор рациональной функции [13].

Пример 4. Простые дивизоры $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{P}^n$ суть неприводимые гиперповерхности, а дивизоры — их конечные целочисленные комбинации. Гиперповерхности при этом отождествляются с эффективными дивизорами $\Sigma D_i$, где $D_i$ — различные простые дивизоры. Степень дивизора $\Sigma a_i D_i$ на $\mathbf{P}^n$ определяется по правилу

$$\deg D=\sum a_i \deg D_i$$

(ср. с примером 3 п. 1.4). Всякий дивизор $\sum a_i D_i$ на $\mathbf{A}^n$ является главным: $(f)\overset{df}{=}\sum a_i D_i$, где $f=\Pi f_i^{a_i}$ и $f_i$ — неприводимый многочлен, задающий $D_i$. Аналогично, эффективный дивизор $\sum a_i D_i$ на $\mathbf{P}^n$ степени $d$ можно задать как дивизор нулей однородного многочлена $f=\Pi f_i^{a_i}$ степени $d$. Главные дивизоры на $\mathbf{P}^n$ суть дивизоры степени 0.

Пример 5. Пусть сначала $C\subseteq\mathbf{A}^n$ — неособая аффинная кривая, а $D=\sum a_i D_i$ — *дивизор* на $\mathbf{A}^n$, *носитель* которого $\operatorname{Supp} D \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{a_i\neq 0} D_i$ не содержит $C$. Ограничение дивизора $D$ на $C$ определяют соотношением

$$D|_C \overset{\mathrm{df}}{=} (f\,|\,C),$$

где $f$ — рациональная функция на $\mathbf{A}^n$ с $(f)=D$. Это определение корректно, поскольку функция $f$ определена однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу. Пользуясь аффинными картами, можно определить ограничение $D|_C$ дивизора $\mathbf{P}^n$ с $\operatorname{Supp} D\not\supseteq C$ на неособую проективную кривую $C\subseteq\mathbf{P}^n$. Ограничение эффективного дивизора $D$ степени $d$ на $C$ называют *дивизором гиперповерхностного сечения* степени $d$. При $d=1$ получаются так называемые *дивизоры гиперплоских сечений* $H|_C$, где $H\subset\mathbf{P}^n$ — гиперплоскость. Дивизоры гиперплоских сечений (соответственно гиперповерхностных сечений одной степени) линейно эквивалентны, а потому имеют одну и ту же степень. Степень дивизоров гиперплоских сечений $H|_C$ кривой $C\subseteq\mathbf{P}^n$ по определению есть *степень кривой* $C$: $\deg G\overset{\mathrm{df}}{=}\deg(H|_C)$. Общая гиперплоскость пересекает кривую $C$ по $\deg C$ точкам. Соответственно, степень дивизоров гиперповерхностных сечений степени $d$ равна $d\cdot\deg C$. Заменяя кривую $C$ непостоянным отображением $\varphi: C\to\mathbf{P}^n$ (или $\to\mathbf{A}^n$), можно определить подъем $\varphi^* D$ дивизора $D$ с носителем, не содержащим образ $\varphi(C)$: $\varphi^* D|\varphi^{-1}U=(\varphi^* f)\,|\varphi^{-1}U$ для любого (аффинного) открытого подмножества $U\subseteq\mathbf{P}^n$ и рациональной функции $f$ на $\mathbf{P}^n$ с $(f)|_U=D|_U$, где

$$\sum a_i D_i|_U \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{D_i\cap U\neq\varnothing} a_i D_i.$$

В частности, *степенью* возможно особой проективной *кривой* $B\subseteq\mathbf{P}^n$ называют степень дивизора $\varphi^* H$, где $\varphi: C\to B\subseteq\mathbf{P}^n$ — десингуляризация $B$, а $H$ — гиперплоскость в $\mathbf{P}^n$, не содержащая $B$.

Предложение. Пусть $f: C\to\mathbf{P}^n$ — непостоянное отображение проективной кривой $C$, а $H\subset\mathbf{P}^n$ — гиперплоскость, не содержащая $f(C)$. Тогда $\deg f^* H=\deg f\cdot\deg f(C)$.

Пример 6. Если $C\subset\mathbf{P}^2$ — неособая кривая степени $d$, то геометрическая версия формулы примера 2 в пункте 4.8 гл. 1 записывается в виде $K\sim(d-3)\,L|C$ для общей прямой $L\subset\mathbf{P}^2$, откуда $\deg K=d(d-3)$. Указанные соотношения связаны с формулой присоединения [40].

**2.3. Пересечение плоских кривых.** Согласно примеру 5 предыдущего пункта, число точек пересечения неприводимых кривых $C_1 \neq C_2 \subset \mathbf{P}^2$ не превосходит $\deg C_1 \cdot \deg C_2$. Общее,

Теорема (Безу). Если $C_1$, $C_2 \subset \mathbf{P}^2$ — возможно приводимые: кривые без общих неприводимых компонент, то они пересекаются не более чем по $\deg C_1 \cdot \deg C_2$ точкам.

Более классический вариант этого результата

Следствие 1. Пусть $f$, $g \in k[x, y]$ — два взаимно простых многочлена степени $n$ и $m$ соответственно. Система $f(x, y) = g(x, y) = 0$ имеет не более чем $nm$ решений.

Пример 1. Условие прохождения коники через фиксированную точку эквивалентно линейному соотношению на ее коэффициенты. Поэтому через пять точек $\mathbf{P}^2$, находящихся в общем положении (никакие три не лежат на одной прямой, ср. с п. 3.3), проходит по крайней мере одна коника. По теореме Безу такая коника единственна.

Пример 2. (Теорема Паскаля). Пусть $L_1, \ldots, L_6$ — продолжения сторон шестиугольника, вписанного в конику $Q$. Тогда кривые степени три $C_1 = L_1 + L_3 + L_5$ и $C_2 = L_2 + L_4 + L_6$ пересекаются по 9 точкам $p_{12}$, $p_{23}$, $p_{34}$, $p_{45}$, $p_{56}$, $p_{61}$, $p_{14}$, $p_{25}$, $p_{36}$, где $p_{ij} = L_i \cap L_j$ (см. рис. 19). Линейные условия прохождения кривой степени 3 через первые 8 точек независимы. Действительно, кривые степени 3 определяются формами степени 3 с 10-ю коэффициентами. При этом условие прохождения через 8 указанных точек и общую точку квадрики $Q$ задают единственную кривую степени три $C_3 = Q + L$, где $L$ — прямая через точки $p_{14}$ и $p_{25}$, ибо по теореме Безу кривая степени 3, пересекающая конику по 7 и более точкам, содержит ее. По конструкции условие прохождения кривой степени 3 через $p_{36}$ линейно зависимо от условий прохождения через первые 8 точек. Поэтому всякая кривая степени 3, проходящая через эти 8 точек, проходит и

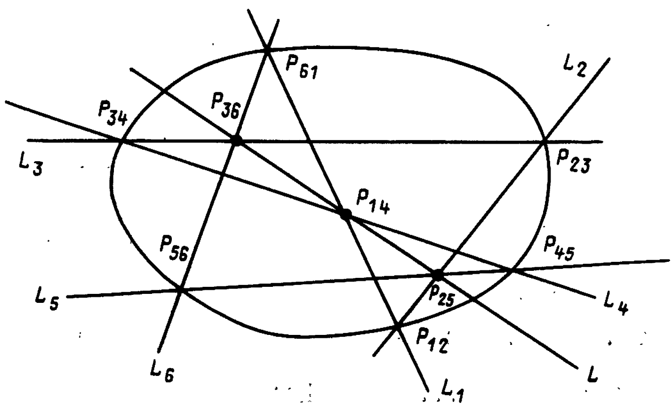



Рис. 19

через точку $p_{36}$. В частности, кривая $C_3$, а потому и прямая $L$ проходят через $p_{36}$, что доказывает теорему Паскаля.

Следствие 2. Комплексная возможно приводимая кривая $C\subset \mathbf{CP}^2$ связна.

Теорема Безу может быть превращена в равенство $\deg C_1\cdot\deg C_2$ числу общих точек кривых $C_1$ и $C_2$ с надлежащими кратностями (ср. с теоремой п. 2.1 и п. 3.11 ниже). Более того, точка $p\in C_1\cap C_2$ имеет кратность 1 ровно тогда, когда $C_1$ и $C_2$ неособы в $p$ и касательные к этим кривым в $p$ пересекаются лишь по $p$. Отсюда очевиден

Пример 3. Плоская кубика $C\subset \mathbf{P}^2$ имеет не более одной особой точки. Проектирование такой кубики из особой точки задает бирациональный изоморфизм с $\mathbf{P}^1$, а потому особые кубики рациональны.

Другие приложения теоремы Безу можно найти в [70], а обобщения в [13] и обзоре Данилова ниже.

**2.4. Формулы Гурвица.** Пусть $f: C\to B$ — сепарабельное отображение неособых кривых.

Определение 1. Назовем *индексом ветвления* отображения $f$ в точке $p\in C$ число $r_p(f)\overset{\mathrm{df}}{=}\mathrm{ord}_p(f^*dt)$, где $t$ — локальный параметр в $f(p)$. Дивизор $R=\Sigma r_p(f)p$ будем называть *дивизором ветвления.*

Нетрудно доказать следующие утверждения [40]; второе из них показывает, когда индекс ветвления вычисляется обычным способом через кратность (ср. с п. 2.4 гл. 1).

Предложение 1. Если $\omega\neq 0$ — рациональный дифференциал на $B$, то

$$(f^*\omega)=f^*(\omega)+R.$$

Предложение 2. $r_p(f)=\mathrm{mult}_p f-1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{mult}_p f$ не делится на $\mathrm{char}\,k$. В частности, это верно всегда при $\mathrm{char}\,k=0$.

Замечание. $r_p(f)\geqslant \mathrm{mult}_p f$, если $\mathrm{mult}_p f$ делится на $\mathrm{char}\,k$.

Определение 2. *Ветвление* в точке $p$ называют *слабым* или *ручным*, если $\mathrm{mult}_p f$ не делится на $\mathrm{char}\,k$. В случае $\mathrm{char}\,k=0$ все ветвления слабы. В этом же смысле слабы ветвления отображений римановых поверхностей.

Из предложения 1 получаются (ср. с п. 4.8 гл. 1).

Формула Гурвица для канонических дивизоров $K_C\sim f^*K_B+R$.

Формула Гурвица для степени канонического дивизора. Если кривые $C$ и $B$ проективны, то $\deg K_C=\deg f\deg K_B+\deg R$.

Пример. Если $\gamma: C\to\mathbf{P}^1$ — гиперэллиптическая проекция с точками ветвления $p_1,\ldots,p_r$ и $\mathrm{char}\,k\neq 2$, то $K_C\sim\left(\sum_{i=1}^{r-2}p_i\right)-p_{r-1}-p_r$ и $\deg K_C=r-4$. В этом случае все ветвления $p_i$ слабы.

Если же $\operatorname{char} k=2$, то во всех точках $p_i$ имеем не слабое (*сильное*) *ветвление* и $\deg K_C \geqslant 2r-4$. В частности, сепарабельное отображение степени два $\gamma: \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ в характеристике 2 имеет одну точку ветвления кратности и индекса 2.

**2.5. Пространства функций и дифференциалов, ассоциированные с дивизорами.** Пусть $D=\Sigma a_i p_i$ — дивизор на неособой проективной кривой $C$. По аналогии с § 6 гл. 1 положим

$$L(D)=\{f \in k(C) \mid f \equiv 0 \text{ или } (f)+D \geqslant 0\},$$
$$=\{f \equiv 0 \text{ или } \operatorname{ord}_{p_i} f \geqslant -a_i \text{ для всех } p_i\};$$

$$\Omega(D)=\{\omega \in k(C)^1 \mid \omega=0 \text{ или } (\omega)+D \geqslant 0\},$$
$$=\{\omega=0 \text{ или } \operatorname{ord}_{p_i} \omega \geqslant a_i \text{ для всех } p_i\},$$

$L(D)$ и $\Omega(D)$ — линейные пространства над $k$, называемые соответственно *пространством рациональных функций* и *дифференциалов, ассоциированным с* $D$. Как и в § 6, доказываются

Предложение. 1. Для линейно эквивалентных дивизоров $D_1$ и $D_2$ пространства $L(D_1)$ и $L(D_2)$ (соответственно $\Omega(D_1)$ и $\Omega(D_2)$) изоморфны.

2. Пространство $\Omega(D)$ изоморфно пространству $L(K+D)$.

Следствие 1. $L(D) \neq 0$, если и только если дивизор $D$ линейно эквивалентен эффективному.

Следствие 2. $L(D)=0$, когда $\deg D<0$.

Следствие 3. $\Omega(-D)=0$, когда $\deg D > \deg K$.

Теорема. Пространства $L(D)$ и $\Omega(D)$ конечномерны. Точнее, $\dim L(D) \leqslant \deg D+1$ при $\deg D \geqslant -1$.

Положим $l(D) \overset{\mathrm{df}}{=} \dim L(D)$ и $i(D) \overset{\mathrm{df}}{=} \dim \Omega(-D)=e(K-D)$. Число $i(D)$ называют *иррегулярностью* или *индексом специальности* дивизора $D$.

Определение. Размерность пространства регулярных дифференциалов $\Omega$ на кривой $C$ называют *родом кривой* $C$ и обозначают через $g(C)$ или короче $g$.

Пример. $g(\mathbf{P}^1)=0$. Если $x$ — аффинная координата на $\mathbf{P}^1$, то $L(d\infty)=\{$пространство многочленов от $x$ степени $\leqslant d\}$. Поэтому для всякого дивизора $D$ на $\mathbf{P}^1$ степени $d \geqslant -1$ имеем $l(D)=l(d\infty)=d+1$. Заметим, что если $C$ — кривая, не изоморфная $\mathbf{P}^1$, то для всякого дивизора $D$ степени $\geqslant 1$ верно более сильное неравенство $l(D) \leqslant \deg D$ (ср. с примером 1 п. 6.1 гл. 1).

**2.6. Теоремы сравнения (продолжение).** Пусть $C$ — неособая комплексная проективная кривая. Из результатов пункта 1.9 получаем

7. $\operatorname{Div} C^{an}=\operatorname{Div} C$.

8. Дивизор функции и дифференциала не зависит от того, рассматриваются ли они как мероморфные или рациональные функции и дифференциал. Поэтому главность дивизора и ли-

нейная эквивалентность дивизоров на $C$ и $C^{an}$ совпадают.

9. Пространства $L(D)$, $\Omega(D)$ и числа $l(D)$, $i(D)$ совпадают для $C$ и $C^{an}$.

10. Канонические дивизоры для $C$ и $C^{an}$ одни и те же.

11. $g(C)=g(C^{an})$.

**2.7. Формула Римана—Роха.** Пусть $C$ — неособая проективная кривая.

Теорема (Риман, Рох). $l(D)-l(K-D)=\deg D-g+1$.

Все варианты формулы Римана—Роха из § 6 при подходящем понимании остаются верными для алгебраической кривой $C$.

Пример 1. Если $C=\mathbf{P}^1$, то, согласно примеру пункта 2.5 и соотношению $\deg K_{\mathbf{P}^1}=-2$, получаем частный случай теоремы

$$l(D)-l(K_{\mathbf{P}^1}-D)=\deg D+1.$$

Пример 2. Теорема также очевидна для $D=0$, так как $l(0)=1$ и $l(K)=g$.

**2.8. Подходы к доказательству.** Если $k=\mathbf{C}$, то по теоремам сравнения формула Римана—Роха для кривой $C$ равносильна формуле Римана—Роха для римановой поверхности $C^{an}$. Тем самым, по принципу Лефшеца аналитическое доказательство формулы Римана—Роха из § 6 достаточно для алгебраических кривых в характеристике 0. Дополнительно надо проверить лишь факт независимости $l(D)$ от расширения основного поля $k$.

Также имеется когомологическое доказательство формулы Римана—Роха. Оно может быть проведено чисто алгебраическими методами и годится в любой характеристике. Когомологический подход для кривых несколько проще, чем для римановых поверхностей (см. замечание 2 п. 6.2 гл. 1). Дело не только в том, что топология Зарисского на римановой поверхности гораздо проще классической, но и в принципиальной разнице между рациональными и мероморфными функциями даже на открытых по Зарисскому подмножествах $U\subset S$ из-за возможных существенных особенностей мероморфных функций в точках дополнения $S-U$. Адельная интерпретация когомологий [64] связана с задачами Миттаг—Леффлера на алгебраической кривой, постановка которых и решение совершенно аналогично случаю римановых поверхностей (ср. с примером 2 п. 1.10).

**2.9. Первые приложения.** Формула Римана—Роха, примененная к каноническому дивизору $D=K$, дает следующий результат.

Формула Римана—Гурвица. $\deg K=2g-2$.

Следствие (формула Гурвица для рода). Если $f: C\to B$ — сепарабельное отображение неособых проективных кривых, то

$$g(C)=\deg f\cdot g(B)+\frac{\deg R}{2}-\deg f+1,$$

где $R$ — дивизор ветвления (ср. с п. 3.6 гл. 1).

С другой стороны, согласно пункту 1.8, имеем

Предложение 1. Род сохраняется при чисто несепарабельном отображении $f: C\to B$, т. е. $g(C)=g(B)$.

Пример 1. Если $C\subset\mathbf{P}^2$ — неособая плоская кривая, то формула Римана—Гурвица для $C$ по примеру 6 пункта 2.2 равносильна формуле рода плоской кривой (см. пример 3 п. 1.8).

Пример 2. Пусть $f: C\to B$ — непостоянное регулярное отображение неособых проективных кривых. Тогда $g(C)\geqslant g(B)$. Действительно, по предложению 1 и теореме о разложении пункта 1.7 можно предполагать, что $f$ сепарабельно. В этом случае имеем мономорфизм $f^*:\Omega_B\hookrightarrow\Omega_C$, откуда получаем требуемое. Более точный результат дает формула Гурвица для рода: равенство $g(C)=g(B)$ возможно лишь при чисто несепарабельном $f$, при $\deg f=1$, при $g(C)=0$ или $g(C)=1$ и неразветвленном $f$.

Идеи большинства последующих приложений обсуждены в § 6 гл. 1.

Формула Римана. $l(D)=\deg D-g+1$ при $\deg D\geqslant \geqslant\deg K+1=2g-1$.

Пусть $D$ — дивизор на неособой проективной кривой $C$ и $l(D)\geqslant 1$. Выбирая базис $f_0,\ldots,f_n$ пространства $L(D)$, можно определить регулярное отображение

$$\varphi_D: C\to\mathbf{P}^n$$
$$p\mapsto(f_0(p):\ldots:f_n(p)),$$

где $n=l(D)-1$. Рациональность $\varphi_D$ очевидна, а регулярность вытекает из теоремы о регулярности (см. п. 1.7).

Определение. *Отображение* $\varphi_D: C\to\mathbf{P}^n$ называют *ассоциированным с дивизором* $D$.

Теорема 1. $\varphi_D$ — вложение, если $\deg D\geqslant 2g+1$.

Пример 3. Если $C$ — кривая рода 0, то для любой точки $p\in C$ определен изоморфизм $\varphi_p: C\to\mathbf{P}^1$, откуда получаем

Следствие 1. Неособая проективная кривая изоморфна $\mathbf{P}^1$ или, эквивалентно, рациональна тогда и только тогда, когда ее род равен 0.

Следствие 2 (теорема Люрота). Если $L$ — подполе над $k$ чисто трансцендентного расширения $k(x)$ поля $k$, то $L$ — тоже чисто трансцендентное расширение $k$.

Не тривиален случай $L\neq k$, тогда степень трансцендентности $L/k=1$. Поэтому $L$ изоморфно полю рациональных функций на неособой проективной кривой $C$, а включению $L\subseteq k(x)$ соответствует регулярное непостоянное отображение $\mathbf{P}^1\to C$. По примеру 2 $g(C)=0$, откуда $C\simeq\mathbf{P}^1$ и $L\simeq k(C)\simeq k(x)$.

Пример 4. Если $C$ — кривая рода 1, то любая точка $p \in C$ определяет вложение $\varphi_{3_p}: C \hookrightarrow \mathbf{P}^2$. Степень образа $\varphi_{3_p}(C)$ равна трем, поскольку $\deg K = 0$. Отсюда нетрудно вывести

Следствие 3. Каждое из следующих свойств характеризует кривые рода 1.

(а) $\deg K = 0$,

(б) $K \sim 0$,

(в) $C$ изоморфна плоской кубике.

Замечание 1. Еще одна характеризация кривых рода 1 дана в пункте 1.2 гл. 3.

Из доказательства теоремы Люрота вытекает

Следствие 4. Регулярное отображение $\mathbf{P}^1$, а потому и $\mathbf{P}^n$ на кривую $C$ рода $\geqslant 1$ постоянно.

Отсюда, в частности, для неособой плоской кубики $C$ получаем, что ее 9-ая точка пересечения с кривой степени 3 однозначно определяется остальными 8-ью точками пересечения. Это дает ключ к пониманию теоремы Паскаля, поскольку общая кубика через первые восемь точек (см. пример 2 п. 2.3) неособа.

Пример 5. Пусть $C$ — кривая рода $g \geqslant 2$. Тогда для каждого $d \geqslant 1$ определено *плюриканоническое отображение*

$$\varkappa_d: C \to \mathbf{P}^n$$
$$p \mapsto (\omega_0(p): \ldots : \omega_n(p)),$$

где $\omega_0, \ldots, \omega_n$ — базис пространства регулярных дифференциалов $\Omega^d$ степени $d$. Нетрудно проверить, что это отображение изоморфно $\varphi_{dK}$. В частности, $\varkappa_d$ — вложение при $d \geqslant 3$. Однако оно более канонично, чем $\varphi_{dK}$. Например, всякий автоморфизм $\varkappa_d(C)$ индуцирует автоморфизм $\Omega^d$ и $\mathbf{P}^n$, при этом последний автоморфизм продолжает исходный. Тем самым группа $\operatorname{Aut} C \simeq \operatorname{Aut} \varkappa_d(C)$, $d \geqslant 3$, есть группа дробно-линейных преобразований (см. пример 6 п. 1.2), сохраняющих $\varkappa_d(C)$, а потому на ней имеется естественная структура алгебраического многообразия с регулярным действием $\operatorname{Aut} C$.

Теорема 2. Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} C$ кривой $C$ рода $\geqslant 2$ конечна.

По однородности многообразие $\operatorname{Aut} C$ гладко (ср. с п. 1.1 гл. 3) и все его компоненты одной размерности. Остается проверить, что размерность равна 0, ибо по нётеровости число компонент конечно. Для этого достаточно найти размерность касательного пространства в любой точке, например, точке $id$, отвечающей тождественному автоморфизму.

Лемма. $\dim T_{id} = l(-K)$.

Действительно, с инфинитезимальной точки зрения автоморфизм $C$ есть векторное поле на $C$, т. е. касательное пространство к $\operatorname{Aut} C$ в $id$ естественно отождествляется с пространством регулярных векторных полей на $C$. Последнее пространство изоморфно $L(-K)$.

Пример 6. Пусть по прежнему $C$ — кривая рода $g \geqslant 2$, а $\operatorname{char} k=0$. Степень отображения факторизации $f: C \to C/\operatorname{Aut} C$ равна $n$ — порядку $\operatorname{Aut} C$. Обозначим через $p_1, \ldots, p_s$ максимальное множество точек ветвления $f$, лежащих над разными точками $C/\operatorname{Aut} C$, а через $r_i$ — порядок ветвления $\operatorname{mult}_{p_i} f$. Слой $f^{-1}f(p_i)$ состоит из $n/r_i$ точек ветвления порядка $r_i$, откуда по формуле Гурвица для рода

$$(2g-2)/n = 2g(C/\operatorname{Aut} C) - 2 + \sum_{i=1}^{s} (1 - 1/r_i).$$

Нетрудно показать, что раз $g(C/\operatorname{Aut} C) \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $r_i \geqslant 2$, $i=1, \ldots, s$, — целые числа, удовлетворяющие неравенству

$$2g(C/\operatorname{Aut} C) - 2 + \sum_{i=1}^{s} (1 - 1/r_i) > 0,$$

то минимальное значение выражения слева равно $1/42$. Отсюда получаем теорему Гурвица: кривая рода $g \geqslant 2$ над полем характеристики 0 имеет не более чем $84(g-1)$ автоморфизмов.

Замечание 2. Автоморфизмы любой неособой проективной кривой $C$ образуют группу с естественной структурой алгебраического многообразия, размерность которого можно опять вычислить по лемме. Если $g=0$, то $C \simeq \mathbf{P}^1$ и размерность группы дробно-линейных преобразований равна $l(-K_{\mathbf{P}^1}) = 3$. Если же $g=1$, то $C$ — плоская кубика, каждая точка $p$ которой определяет гиперэллиптическую инволюцию $C \to C$, переставляющую пару точек $L \cap C - \{p\}$, где $L$ — общая прямая через $p$ (см. рис. 20). Подробнее этот случай обсуждается в пункте 1.7 гл. 3.

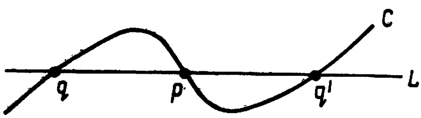



Рис. 20. Гиперэллиптическая инволюция кубики: $q \leftrightarrow q'$

Пример 7. *Кривую*, являющуюся образом канонического отображения, называют *канонической*. Если кривая $C$ не гиперэллиптична, то *каноническое отображение* $\varkappa \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varkappa_1 : C \to \mathbf{P}^{g-1}$ будет вложением. Каноническое отображение гиперэллиптической кривой $C$ раскладывается в композицию гиперэллиптической проекции $\gamma: C \to \mathbf{P}^1$ и отображения Веронезе $v_{g-1}: \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^{g-1}$ (ср. с примером 3 п. 6.1 гл. 1). Поэтому на гиперэллиптической кривой $C$ рода $g \geqslant 2$ имеется одна гиперэллиптическая проекция. Отметим также, что всякая кривая рода 2 гиперэллиптична. Как будет видно ниже, общая кривая рода $\geqslant 3$ не гиперэллиптична.

Поведение $l(D)$ при $0 \leqslant \deg D \leqslant 2g-2$ сильно зависит от кривой $C$ и класса линейной эквивалентности дивизора $D$.

Некоторую информацию все же можно получить с помощью формулы Римана—Роха.

Предложение 2. $l(D) \geqslant \min\{0, \deg D - g + 1\}$. В частности, $l(D) \geqslant 1$ при $\deg D \geqslant g$.

Предложение 3. $l(D) = 1$ для общего эффективного дивизора $D$ степени $d \leqslant g$.

Эффективные дивизоры кривой $C$ степени $d$ можно отождествить с точками симметрической степени $C_d$. Под общим эффективным дивизором степени $d$ понимается общая точка $C_d$. При доказательстве предложения 3 используется очевидный факт, что $l(D-p) \geqslant l(D) - 1$, если $l(D) \geqslant 1$, и равенство выполнено для общей точки $p \in C$. Поэтому $l(K-D) = g - \deg D$ для общего эффективного дивизора $D$ степени $d \leqslant g$.

Замечание 3. Формула Римана—Гурвица также используется в обосновании описания необыкновенных кривых [40] (см. пример 2 п. 1.6).

**2.10. Счет параметров по Риману.** Так же как и для римановых поверхностей, множество классов изоморфизма $\mathcal{M}_g$ неособых проективных кривых рода $g$ обладает естественной структурой алгебраического многообразия. Эта структура однозначно определяется следующим универсальным свойством. Всякое алгебраическое *семейство* $f: V \to B$ *кривых* рода $g$, т. е. регулярное отображение $f$, слои которого $f^{-1}(b)$ суть кривые рода $g$, задает регулярное отображение базы $B \to \mathcal{M}_g$, переводящее точку $b \in B$ в класс изоморфизма $f^{-1}(b)$. Многообразие $\mathcal{M}_g$ называют *грубым пространством модулей* кривых рода $g$.
*Каноническое отображение* $\varkappa \overset{\mathrm{df}}{=} \varkappa_1 : C \to \mathbf{P}^{g-1}$ будет вложением.

Теорема. $\mathcal{M}_g$ — квазипроективное неприводимое алгебраическое многообразие размерности $3g-3$ при $g \geqslant 2$.

Случай $g=0$, когда $\mathcal{M}_0$ — точка, очевиден. Пространство $\mathcal{M}_1 \simeq k$ (см. п. 1.7 гл. 3 и ср. с п. 5.10 гл. 1). Существование грубого пространства модулей $\mathcal{M}_g$ при $g \geqslant 2$ требует развития достаточно глубокой и трудоемкой техники. Это и свойства $\mathcal{M}_g$ будут подробно обсуждаться в соответствующем обзоре по теории модулей (см. также [26]). Здесь мы коснемся лишь вычисления размерности $\mathcal{M}_g$ при $g \geqslant 2$. Предлагаемый счет размерности или параметров удобен для $k = \mathbf{C}$. Тогда по теоремам сравнения и примеру 2 пункта 3.6 гл. 1 произвольному набору из $2n+2g-2$ точек на $\mathbf{P}^1$ соответствует конечный (непустой) набор алгебраических кривых $C$ рода $g$ с отображением $f$ степени $n$ на $\mathbf{P}^1$, имеющим по одной простой точке ветвления над выбранными $2n+2g-2$ точками $\mathbf{P}^1$. Чтобы найти размерность $\mathcal{M}_g$, остается узнать, сколько таких наборов соответствует одной алгебраической кривой $C$ рода $g$. Фиксируем аффинную координату на $\mathbf{P}^1$. Тогда отображения можно отождествить с рациональными функциями $f$ на $C$, для которых $\deg(f)_\infty = n$. При $n > 2g$ такие функции определяются выбором дивизора $D$ степени $n$ и общего элемента пространства $L(D)$ размерности $n-g+1$. Отображение определяется по функции с точностью до автоморфизма на $C$. Но при $g\geqslant 2$ имеется лишь конечная группа автоморфизмов. Поэтому

$$\dim \mathcal{M}_g = (2n+2g-2)-(n+n-g+1)=3g-3.$$

Из существования кривых рода $g\geqslant 3$ с тривиальной группой автоморфизмов и неприводимости $\mathcal{M}_g$ получаем

Следствие. Общая кривая рода $g\geqslant 3$ имеет тривиальную группу автоморфизмов и, в частности, не гиперэллиптична (ср. со следствием п. 5.10 гл. 1).

При $\operatorname{char} k\neq 2$ легко проверить, что гиперэллиптические кривые образуют в $\mathcal{M}_g$ неприводимое подмногообразие размерности $2g-1$.

Замечание 1. Многообразия $\mathcal{M}_g$ при $g\geqslant 3$ особы, особые точки отвечают кривым, имеющим нетривиальную группу автоморфизмов.

Замечание 2. Многообразие $\mathcal{M}_g$ неполно при $g\geqslant 1$. Его естественное пополнение $\overline{\mathcal{M}}_g$ описано в [26].

Замечание 3. Если $k=\mathbf{C}$, то $\mathcal{M}_g^{an}$ — грубое пространство модулей римановых поверхностей рода $g$. Упомянутый в 5.10 гл. 1 факт отсутствия независимых параметров означает нерациональность $\mathcal{M}_g$ при $g\geqslant 40$ [37], [38].

## § 3. Геометрия проективных кривых

Здесь обсуждаются свойства проективных вложений кривых: связь внешних и внутренних численных инвариантов, структура уравнений. Конец параграфа посвящен плоским кривым с простыми особенностями.

**3.1. Линейные системы.** Пусть $D$ — дивизор на неособой проективной кривой $C$. Множество эффективных дивизоров

$$|D|\overset{\mathrm{df}}{=}\{D'\in \operatorname{Div} C\mid D'\geqslant 0 \text{ и } D'\sim D\}$$

обладает естественной структурой проективного пространства. Действительно,

$$|D|=\{(f)+D\mid 0\neq f\in L(D)\}$$

и

$$(f)+D=(g)+D\Leftrightarrow g=\lambda f,\ \lambda\in k^{\times}.$$

Поэтому $|D|$ есть проективизация $L(D)$, т. е. $|D|=\mathbf{P}(L(D))$. Легко проверить, что структура проективного пространства на $|D|$ не зависит от замены $D$ на линейно эквивалентный дивизор: $|D|=|D'|$ для $D\sim D'$. По конструкции $\dim|D|=l(D)-1$.

Определение. *Линейной системой* или *рядом* дивизоров на кривой $C$ называют проективное подпространство $L$ в $|D|$. *Линейные системы* вида $|D|$ называют *полными*.

Линейная система составлена из эффективных дивизоров, линейно эквивалентных между собой. Поэтому для непустой *линейной системы* определена *степень* $\deg L$ как степень любого ее дивизора. Линейные системы степени $d$ и размерности $n$ традиционно обозначают через $g_d^n$.

Пример 1. Если $C \subseteq \mathbf{P}^n$, то дивизоры гиперплоских сечений (см. пример 5 п. 2.2) составляют линейную систему $L_C \overset{\mathrm{df}}{=} \{H \mid_C\}$ на $C$ степени $\deg C$.

Пример 2. Аналогично, отображение $\varphi: C \to \mathbf{P}^n$ определяет линейную систему $L_\varphi \overset{\mathrm{df}}{=} \{\varphi^* H\}$. Например, гиперэллиптическая проекция $\gamma: C \to \mathbf{P}^1$ задает систему $g_2^1 = L_\gamma = \{\gamma^* p \mid p \in \mathbf{P}^1\}$.

Пример 3. Соответственно, подъемы и ограничения эффективных дивизоров степени $d$ пространства $\mathbf{P}^n$ составляют линейные системы $L_\varphi^d$ и $L_C^d$.

Под *базисной точкой* линейной системы $L$ понимается точка $p \in C$, входящая с ненулевой кратностью в каждый дивизор $L$. *Линейную систему* без базисных точек называют *свободной*. Таковы линейные системы $L_C$, $L_\varphi$, $L_C^d$ и $L_\varphi^d$ предыдущих примеров. В общем случае верно

Предложение 1. Если $L \neq \varnothing$, то $L = B + L'$, где $B$ — эффективный дивизор на $C$, а $L'$ — свободная линейная система. Это разложение единственно.

*Дивизор $B$* называют *базисным* для $L$ и его находят из соотношения $B = \min\limits_{D \in L} D$, где min берется по отношению $\geqslant$ на дивизорах.

Пример 4. Множество дивизоров $L(-p) = \{D \geqslant 0 \mid D + p \in L\}$, $p \in C$, является линейной системой (ср. с леммой п. 3.2 ниже).

Предложение 2. Линейная система $L$ свободна тогда и только тогда, когда $\dim L(-p) = \dim L - 1$ для всех $p \in C$. В частности, полная линейная система $|D|$ свободна тогда и только тогда, когда $l(D-p) = l(D) - 1$ для всех $p \in C$.

Отсюда по формулам Римана—Роха и Римана получаем

Следствие. Полная линейная система $|D|$ на кривой $C$ рода $g$ свободна, если

(а) $D = K$ и $g \geqslant 1$ или

(б) $\deg D \geqslant 2g$.

**3.2. Отображение кривых в $\mathbf{P}^n$.** В этом пункте описываются отображения вида $\varphi: C \to \mathbf{P}^n$, где $C$ — неособая проективная кривая. Очевидно, удобно предполагать, что образ $\varphi(C)$ не лежит ни в каком подпространстве $\mathbf{P}^n$. *Отображение* с этим условием называют *невырожденным*. Соответственно *кривую* $C \subseteq \mathbf{P}^n$ называют *невырожденной*, если невырожденно ее включение в $\mathbf{P}^n$. Пусть $L$ — свободная линейная система на $C$.

Лемма. Множество эффективных дивизоров $p + L(-p) =$

$=\{D\in L \mid D\geqslant p\}$, проходящих через точку $p\in C$, есть гиперплоскость в $L$.

Это определяет регулярное отображение

$$\varphi_L : C \to L^\vee$$
$$p \mapsto p+L(-p),$$

где $L^\vee$ — проективное пространство, двойственное к $L$.

Регулярность видна из координатного представления. Фиксируем дивизор $D\in L$. Тогда $L\subseteq |D|$, система $L$ есть проективизация подпространства $L(D)$, $\varphi_L$ задается базисом $f_0, \ldots, f_n$ этого подпространства, т. е. $\varphi_L(p)=(f_0(p):\ldots:f_n(p))$ (ср. с замечанием в 6.1 гл. 1). *Отображение* $\varphi_L$ называют *ассоциированным со* свободной *линейной системой* $L$. Очевидно, $\varphi_L$ невырожденно. Обратно,

Теорема. Всякое невырожденное отображение $\varphi: C\to \mathbf{P}^n$ имеет вид $\varphi_L$, где $L=L_\varphi$ — свободная линейная система на $C$.

Пример 1. Для всякого дивизора $D$ отображение $\varphi_D$ изоморфно $\varphi_{|D-B|}$, где $B$ — базисный дивизор полной линейной системы $|D|$.

Пример 2. При $g\geqslant 1$ *линейная система* $|K|$, называемая *канонической*, свободна и задает каноническое отображение $\varkappa=\varphi_{|K|}$. Соответственно, *кратно каноническая система* $|dK|$, $d\geqslant 1$, определяет плюриканоническое отображение $\varkappa_d=\varphi_{|dK|}$.

Определение. *Отображение* $\varphi: C\to \mathbf{P}^n$ называют *линейно нормальным,* если линейная система гиперплоских сечений $L_\varphi$ полна. *Кривую* $C\subseteq \mathbf{P}^n$ называют *линейно нормальной,* если линейно нормально ее включение в $\mathbf{P}^n$.

Итак, отображения $\varphi_D$ суть невырожденные линейно нормальные отображения.

Пример 3. Отображение проектирования $\pi_p$ невырожденной кривой $C\subset \mathbf{P}^n$ из любой точки $p\in \mathbf{P}^n - C$ линейно не нормально, ибо задается подсистемой $L_{\pi_p}\subsetneq L$.

Замечание. Особую кривую $C\subset \mathbf{P}^n$ называют невырожденной и линейно нормальной, если такова ее десингуляризация $f:\tilde{C}\to C\subset \mathbf{P}^n$.

Из предложения пункта 2.2 вытекает

Следствие. $\deg L=\deg\varphi_L\cdot\deg\varphi_L(C)$, в частности, $\deg\varphi_L(C)=\deg L$, когда $\varphi_L$ — вложение.

Пример 4. Степень канонической негиперэллиптической кривой $C\subset \mathbf{P}^{g-1}$ равна $2g-2$. Обратно, невырожденная кривая $C\subset \mathbf{P}^{g-1}$ рода $g$ и степени $2g-2$ является негиперэллиптической канонической кривой.

Пример 5. Образ $v_d(\mathbf{P}^1)\subseteq \mathbf{P}^d$ вложения Веронезе $v_d=\varphi_{|dp|}$ степени $d\geqslant 1$ есть рациональная линейно нормальная кривая степени $d$, называемая *рациональной нормкривой* в $\mathbf{P}^d$. Обратно, всякая (возможно особая) невырожденная кривая

$C \subseteq \mathbf{P}^d$ степени $d$ будет рациональной нормкривой. Действительно, если $f: \tilde{C} \to C \subseteq \mathbf{P}^d$ ее десингуляризация, то $L_f$ — линейная система степени $d$ и размерности $d$, откуда, согласно примеру пункта 2.5, $f$ — вложение Веронезе. Используя это, можно показать, что гиперэллиптическая каноническая кривая $\varkappa(C) \subseteq \mathbf{P}^{g-1}$, $g \geqslant 2$, является рациональной нормкривой степени $g-1$. Действительно, кривая $\varkappa(C)$ невырождена и имеет степень $(2g-2)/2 = g-1$. Такой подход удобен при доказательстве существования разложения $\varkappa = v_{g-1} \circ \gamma$ в гиперэллиптическом случае (см. пример 7 п. 2.9), когда char $k=2$ и на $C$ нет описания регулярных дифференциалов, подобного описанию примера в пункте 4.8 гл. 1.

Пример 6. Пусть $\pi_p: C \to \mathbf{P}^{n-1}$ бирациональное проектирование из точки $p \in \mathbf{P}^n - C$. Тогда $\deg \pi_p(C) = \deg C$. Если же $p$ — неособая точка $C$, то $\deg \pi_p(C) = \deg C - 1$. Например, проекция рациональной нормкривой степени $d$ из ее точки будет рациональной нормкривой степени $d-1$ (ср. с примером 3 выше).

**3.3. Общие гиперплоские сечения.**

Предложение. Пусть $C \subseteq \mathbf{P}^n$ — невырожденная (возможно особая) кривая. Тогда $\deg C \geqslant n$ и равенство выполнено в точности тогда, когда $C$ — рациональная нормкривая.

Ему равносильно

Следствие. Для линейной системы $g_d^n$ на неособой кривой верно неравенство $n \leqslant d$ и равенство имеет место лишь, когда кривая изоморфна $\mathbf{P}^1$ и система $g_d^n$ полна.

Последний факт — переформулировка примера пункта 2.5. Другое более геометрическое доказательство предложения использует то, что общее гиперплоское сечение $H|C$ является дивизором, состоящим из $\deg C$ точек, линейно порождающих $H$, т. е. точки дивизора $H|_C$ не лежат в собственном проективном подпространстве $H$. Действительно, в противном случае по определению степени кривой гиперплоскость, проходящая через точки дивизора $H|_C$ и еще одну произвольную точку $C$, содержала бы $C$, что противоречит невырожденности $C$. На самом деле справедливо более сильное утверждение. Говорят, что точки подмножества $M \subseteq \mathbf{P}^n$ находятся в общем положении в $\mathbf{P}^n$, если любые $m$ из них при $m \leqslant n+1$ порождают проективное подпространство $\{\bigcap H \mid$ гиперплоскость $H$ содержит данные точки$\}$ размерности $m-1$.

Теорема. (Об общем положении). Пусть $C \subseteq \mathbf{P}^n$ — неособая невырожденная кривая. Тогда дивизор $H|_C$ общего гиперплоского сечения $H \subset \mathbf{P}^n$ состоит из $\deg C$ точек, находящихся в общем положении в $H$.

Общий случай легко свести к пространственному $C \subset \mathbf{P}^3$. Тогда теорема означает, что общая секущая кривой $C$ не кратна, т. е. прямая через две общие точки $p$, $q \in C$ проходит лишь через точки $p$ и $q$ кривой $C$ и не касается кривой в них. Более того, достаточно доказать существование хотя бы одной некратной секущей, поскольку некратные секущие образуют открытое по Зарисскому подмножество в многообразии секущих кривой $C$. Нетрудно показать, что все секущие $C$ кратны лишь для необыкновенных кривых $C$ [40]. Однако неособых, невырожденных, необыкновенных кривых $C \subset \mathbf{P}^3$ нет, что и доказывает теорему. Поэтому классификация необыкновенных кривых примера 2 в п. 1.6 — ключ к теореме.

Пример (Мамфорд). Пусть $p = \operatorname{char} k > 0$ и $n \geqslant 3$. Тогда отображение

$$\varphi: \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^n$$

$$(x_0 : x_1) \mapsto (x_0^{p^n} : x_0^{p^n - p} x_1^p : \ldots : x_0^{p^n - p^{n-1}} x_1^{p^{n-1}} : x_1^{p^n})$$

взаимно однозначно в общей точке $\mathbf{P}^1$ и кривая $\varphi(\mathbf{P}^1)$ не удовлетворяет теореме. Действительно, для общих точек $a = x_1/x_0$ и $b = y_1/y_0$ на $\mathbf{A}^1 \subset \mathbf{P}^1$ прямая, проходящая через $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$, содержит точки $\varphi(\alpha a + \beta b)$, $\alpha$, $\beta \in \mathbf{F}_p$, $\alpha + \beta = 1$, кривой $\varphi(\mathbf{P}^1) : \varphi(\alpha a + \beta b) = ((\alpha a + \beta b)^p, \ldots, (\alpha a + \beta b)^{p^n}) = \alpha (a^p, \ldots, a^{p^n}) + \beta (b^p, \ldots, b^{p^n}) = \alpha \varphi(a) + \beta \varphi(b)$ в подходящей карте $\mathbf{A}^n \subset \mathbf{P}^n$.

Замечание. Теорема верна для особых кривых в нулевой характеристике и доказательство в этом случае несколько проще. При этом устанавливается, что прямые суть единственные необыкновенные кривые (касательные в общих точках которых проходят через одну точку) даже среди особых. Последнее вытекает из сепарабельности отображений в характеристике 0. Аналитическая версия этого рассуждения имеется в [31].

**3.4. Геометрическая интерпретация формулы Римана—Роха.** Наличие линейных систем $g_d^n$ с определенными $n$ и $d$ тесно связано с геометрией кривой. Например, кривая $C$ гиперэллиптична, когда на ней есть линейные системы $g_2^1$. Поэтому прежде всего возникает вопрос о том, для каких $n$ и $d$ на кривой рода $g$ существуют линейные системы $g_d^n$. По следствию предыдущего пункта $n \leqslant d$ и $n = d$ лишь при $g = 0$. Более точное неравенство приводится в следующем пункте. Однако уже сейчас следует отметить, что при решении поставленного вопроса можно ограничиться полными линейными системами $g_d^n = |D|$, где $D$ — эффективный дивизор. Если, кроме того, $l(K-D) = 0$, то $n = \deg D - g$. Поэтому наиболее интересны системы $g_d^n = |D|$, для которых $l(K-D) \geqslant 1$ или, эквивалентно, $|K-D| \neq \varnothing$. Эти *линейные системы* и их *дивизоры* называют *специальными*. Согласно предложению 3 пункта 2.9, специальны, линейные системы $g_d^n \neq \varnothing$ с $d \leqslant g-1$ и для общих таких систем $n = 0$.

Последние *системы* и их *дивизоры* называют *обыкновенными-специальными*. Остальные *специальные системы* $g_d^n$ с $n > \max\{0, d-g\}$ и их *дивизоры* называют *исключительными*. Вопрос о существовании исключительных специальных систем решают прямая и обратная теоремы Брилля—Нётера (см. [19]), обсуждаемые в следующей части обзора. Чтобы понять геометрический смысл специальности и исключительности, рассмотрим негиперэллиптическую каноническую кривую $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$. Для эффективного дивизора $D$ $\overline{D}$ будет обозначать его линейную оболочку:

$$\overline{D} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\cap H \mid \mathbf{P}^{g-1} \supset H \text{ — гиперплоскость с } H|_C \geqslant D\}.$$

Теорема. $\dim \overline{D} = \deg D - \dim |D| - 1$. В частности, если дивизор $D$ состоит из различных точек, то размерность линейной системы $|D|$ равна числу линейно независимых соотношений между его точками.

Теорема равносильна формуле Римана—Роха для эффективных дивизоров $D$. В самом деле по каноничности кривой $C$ элементы канонической системы $|K|$ суть дивизоры гиперплоских сечений $C$. Поэтому для специального дивизора $D$ подпространство $\overline{D} \subset \mathbf{P}^{g-1}$ собственно. При этом отображение $H \mapsto H|_C - D$, $H \supseteq \overline{D}$, отождествляет пространство гиперплоскостей через $\overline{D}$ с $|K-D|$. Следовательно,

$$\dim \overline{D} = g - 1 - l(K-D) = \deg D - l(D) = \deg D - \dim |D| - 1,$$

где второе равенство — формула Римана—Роха. Если же $D$ не специален, то $\overline{D} = \mathbf{P}^{g-1}$ и снова по формуле Римана—Роха получаем требуемое.

Итак, дивизор $D \geqslant 0$ специален, в точности тогда, когда $\overline{D}$ — собственное подпространство $\mathbf{P}^{g-1}$, и $D$ обыкновенен, когда $\dim \overline{D} = \deg D - 1$. Последнее для $D$, состоящего из различных точек, означает общность расположения этих точек в $\overline{D}$.

Замечание 1. Геометрическая интерпретация формулы Римана—Роха остается справедливой и для гиперэллиптических кривых $C$, если в определении $\overline{D}$ дивизор $H|_C$ заменить на $\varkappa^* H$, где $\varkappa: C \to \mathbf{P}^{g-1}$ — каноническое отображение.

Замечание 2. Доказательство теоремы, непосредственно не использующее формулу Римана—Роха, приводится в [31].

Пример 1. Каноническая линейная система $|K|$ и ее дивизоры специальны при $g \geqslant 1$ и исключительны при $g \geqslant 2$. Других специальных (и исключительных) линейных систем и дивизоров степени $2g-2$ нет.

Пример 2. Пусть $C$ — гиперэллиптическая кривая рода $\geqslant 2$ с проекцией $\gamma$. Линейная система $g_2^1 = |\gamma^* p|$, $p \in \mathbf{P}^1$, специальна и исключительна.

Пример 3. *Кривую* $C$, допускающую отображение $C\to\mathbf{P}^1$ степени 3, называют *тригональной*. Очевидно, это эквивалентно существованию на $C$ свободной линейной системы $g_3^1$, полной при $g\geqslant 2$. Нетрудно показать, что на гиперэллиптической кривой рода $\geqslant 3$ $g_3^1=g_2^1+$базисная точка. Поэтому тригональная кривая $C$ рода $\geqslant 3$ не гиперэллиптична. С другой стороны, негиперэллиптическая, каноническая кривая $C\subset\mathbf{P}^{g-1}$ тригональна, если имеется одномерное семейство прямых $\{\overline{D}\,|\,D\in g_3^1\}$, пересекающих $C$ не менее чем в трех точках с учетом кратности соприкосновения (ср. с п. 3.11). Эти прямые заметают так называемую *линейчатую поверхность*, неособую и не имеющую других одномерных семейств прямых при $g\geqslant 5$. (Точнее, если $g\geqslant 5$, то еще одна прямая возможна лишь при $g=6$.) Поэтому при $g\geqslant 5$ тригональная кривая имеет единственное отображение $C\to\mathbf{P}^1$ степени 3 и единственную линейную систему $g_3^1$. Возможные типы линейчатых поверхностей и расположение на них $C$ можно найти в [15]. Счетом параметров легко показать, что общая кривая рода $g\geqslant 5$ не тригональна. В противоположность этому всякая негиперэллиптическая кривая рода 3, 4 тригональна. Действительно, такая кривая рода 3 изоморфна плоской квартике $C\subset\mathbf{P}^2$, ее канонической кривой. Все ее отображения $C\to\mathbf{P}^1$ степени 3 суть проектирования из точек $p\in C$ и соответствующие линейные системы $g_3^1$ имеют вид $\{L|_{C-p}\,|\,L$ — прямая через $p\}$. Случай $g=4$ обсуждается ниже в примере 6 пункта 3.10. Отметим также, что всякая кривая $C$ рода $\leqslant 2$ не только гиперэллиптична, но и тригональна.

### 3.5. Неравенство Клиффорда.

Лемма. Для любых двух эффективных дивизоров $D$ и $D'$

$$\dim|D|+\dim|D'|\leqslant\dim|D+D'|.$$

Это получается из конечности слоев регулярного отображения

$$|D|\times|D'|\to|D+D'|$$
$$(D_1, D_2)\mapsto D_1+D_2.$$

Теорема (Клиффорд). Если дивизор $D$ на кривой $C$ специален, то

$$\dim|D|\leqslant\deg D/2.$$

При этом равенство имеет место, лишь когда $D=0$, $D=K\geqslant 0$ или кривая $C$ гиперэллиптична и $D\in(\deg D/2)g_2^1=\underbrace{g_2^1+\ldots+g_2^1}_{\deg D/2}$, $\deg D\leqslant 2g-2$.

Действительно

$$\begin{array}{rl} & \dim|D|+\dim|K-D|\leqslant\dim|K|=g-1 \quad \text{(лемма)}\\ + & \dim|D|-\dim|K-D|=\deg D-g+1 \quad \text{(формула Римана — Роха)}\\ \hline & 2\dim|D|\leqslant\deg D.\end{array}$$

Описание возможных случаев равенства эквивалентно теореме об общем положении для канонической кривой. Более непосредственный подход предложен в [40]. Рисунок 21 резюмиру-

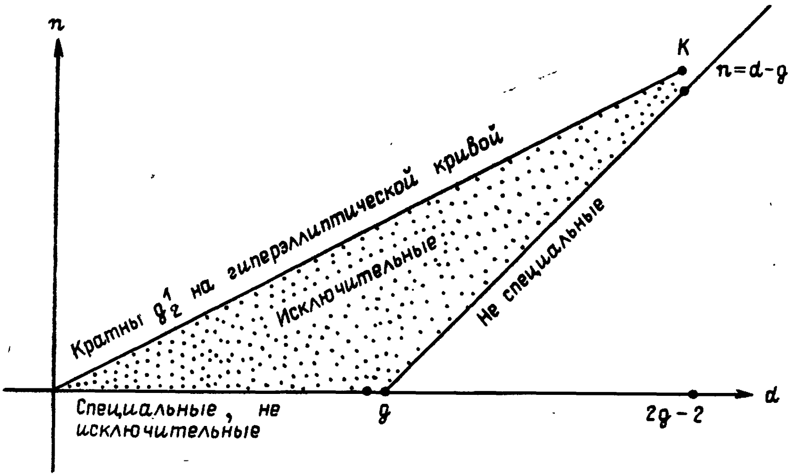



Рис. 21

ет то, что нам известно о возможных значениях $n$ и $d$ для полных линейных систем $g_d^n$ на кривой $C$ рода $g$. Кроме того, при одном дополнительном ограничении теорема Клиффорда усиливает предложение пункта 3.3.

Следствие. Пусть $C \subseteq \mathbf{P}^n$ — неособая, невырожденная кривая степени $d < 2n$ и рода $g$. Тогда

$$d \geqslant n+g$$

и равенство выполнено в точности тогда, когда кривая $C$ линейно нормальна.

Равенство в следствии достигается на любой кривой рода $g=d-n$, вложенной в $\mathbf{P}^n$ отображением, ассоциированным с произвольным дивизором степени $d$. В самом деле, степень такого дивизора $d \geqslant 2g+1$. Неравенство следствия также можно записать в виде $g \leqslant d-n$, что обобщает

**3.6. Неравенство Кастельнуово.** Пусть $C \subset \mathbf{P}^n$ — неособая, невырожденная кривая степени $d$ и рода $g$. Тогда

$$g \leqslant \frac{m(m-1)}{2}(n-1)+m\varepsilon, \tag{2}$$

где $m=\left[\frac{d-1}{n-1}\right]$, $d-1=m(n-1)+\varepsilon$, а $[\ ]$ — гауссова целая часть.

Пусть $D$ — дивизор общего гиперплоского сечения кривой $C$. По теореме об общем положении в $L(iD)$ можно построить достаточно много линейно независимых рациональных функций, а потому оценить $l(id)$ снизу. Точнее, получаются неравенства

$$l(D) \geqslant n+1$$
$$l(2D) \geqslant 3(n-1)+3$$
$$l(3D) \geqslant 6(n-1)+4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$l(mD) \geqslant \frac{m(m+1)}{2}(n-1)+m+1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$l((m+i)D) \geqslant \frac{m(m+1)}{2}(n-1)+m+1+id.$$

Однако при $i \gg 0$ дивизор $(m+i)\ D$ не специален и по формуле Римана—Роха

$$l((m+i)D) = (m+i)d - g + 1,$$

откуда получается требуемая оценка на род. *Кривые*, на которых оценка (2) достигается, называют *экстремальными*.

Замечание 1. Для каждой пары $d \geqslant n$ имеются экстремальные кривые $C \subset \mathbf{P}^n$ степени $d$ и их явное описание [19], [31].

Замечание 2. Следствие предыдущего пункта и неравенство Кастельнуово верны для особой кривой $C$, если она невырождена, $\mathrm{char}\, k=0$ и под $g$ понимается род десингуляризации кривой $C$. Экстремальные кривые при этом оказываются неособыми [19], [31].

Пример 1. Как нам уже известно, случай $d=n$ возможен лишь для рациональной нормкривой. Эта кривая экстремальна.

Пример 2. При $n<d<2n$ получается оценка на род из конца предыдущего пункта: $g \leqslant d-n$ и экстремальность кривой $C$ в этом случае равносильна ее линейной нормальности.

Пример 3. Если $n=2$, то $m=d-1$, $\varepsilon=0$ и $g \leqslant \leqslant \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Значит, по формуле рода (см. пример 3 п. 1.8) всякая неособая плоская кривая степени $d \geqslant 2$ экстремальна.

Пример 4. Если $d=2n$, то $m=2$, $\varepsilon=1$, $g \leqslant n+1$ и равенство имеет место в точности тогда, когда $C$ — негиперэллиптическая каноническая кривая. Поэтому всякая каноническая кривая экстремальна.

**3.7. Пространственные кривые.** В 1882 г. Берлинской академией наук была предложена денежная премия имени Штейнера за лучшую работу по классификации пространственных кривых. Она была вручена сразу двум геометрам: Нётеру [59] и Альфану [36]. Их достижения в данной области математики оставались непревзойденными вплоть до последнего времени.

Итак, пусть $C \subset \mathbf{P}^3$ — неособая пространственная кривая степени $d$ и рода $g$. Первый возникающий здесь вопрос — описать возможные $g$ и $d$. Наиболее интересен невырожденный случай. Действительно, в противном случае $C$ — плоская кривая с $g=(d-1)(d-2)/2$.

Теорема (Кастельнуово). Пусть $C\subset\mathbf{P}^3$ — неособая, невырожденная кривая. Тогда $d\geqslant 3$ и

$$g\leqslant\begin{cases}\dfrac{d^2}{4}-d+1, & \text{если } d \text{ четно,}\\ \dfrac{(d^2-1)}{4}-d+1, & \text{если } d \text{ нечетно.}\end{cases}$$

Равенство достигается для каждого $d\geqslant 3$, а кривая, на которой достигается равенство, экстремальна и лежит на квадрике в $\mathbf{P}^3$.

Это уточняет неравенство предыдущего пункта при $n=3$. Более того, $d=a+b$ и $g=(a-1)(b-1)$, $a$, $b\geqslant 1$, для кривой $C$, лежащей на квадрике, и

$$g\leqslant\frac{1}{6}d(d-3)+1 \tag{3}$$

в противном случае. Итак, возможные пробелы для рода при фиксированной степени $d$ лежат выше $\frac{1}{6}d(d-3)+1$, что было известно Альфану. Также он претендовал на обратное утверждение: существует неособая пространственная кривая с данными неотрицательными $d$ и $g$, когда выполнено неравенство (3). Сейчас имеется строгое доказательство этих фактов [41]. Проще получается их ослабление:

Предложение (Альфан). Всякая кривая $C$ рода $g\leqslant\leqslant d-3$ может быть вложена в $\mathbf{P}^3$ как кривая степени $d$.

Проверяется, что линейная система $|D|$ для общего эффективного дивизора $D$ степени $d\geqslant g+3$ свободна и определяет вложение кривой $C$ в $\mathbf{P}^{d-g}$. Последующие проектирования из общих точек задают вложение в $\mathbf{P}^3$ (см. пример 5 п. 1.7).

Используя конструкцию многообразия Чжоу или схему Гильберта, можно показать, что кривые заданной степени $d$ и рода $g$ в $\mathbf{P}^3$ параметризуются конечным объединением квазипроективных многообразий (см. [53]). Поэтому возникает более тонкий вопрос определить число и размерности этих многообразий для возможных $d$ и $g$. Нётер и Альфано дали исчерпывающий ответ для кривых малой степени (примерно до степени 20). В общем случае вопрос пока открыт. Проиллюстрируем возникающие здесь трудности.

Пример 1. Единственная кривая степени 1 в $\mathbf{P}^3$ — прямая.

Пример 2. Единственная кривая степени 2 в $\mathbf{P}^2$ — коника.

Пример 3. Если $d=3$, то $C\subset\mathbf{P}^3$ — либо плоская кубика с $g=1$, либо рациональная нормкривая степени 3.

Пример 4. Если $d=4$, то $C\subset\mathbf{P}^3$ — либо плоская квартика с $g=3$, либо рациональная кривая степени 4, либо кривая рода 1. Кривая последнего типа экстремальна.

Для обоснования первых трех примеров достаточно воспользоваться предложением пункта 3.3. В примере 4 также требуется следствие пункта 3.5. Гораздо сложнее

Пример 5. Пусть $Q \subset \mathbf{P}^3$ — квадрика ранга 4, а $L$ — одна из ее прямолинейных образующих. Общая квинтика через $L$ дает в пересечении с $Q$ прямую $L$ и неособую кривую степени 9. Последняя экстремальна и имеет род 12 ($a=5$, $b=5-1=4$). Оказывается, кривые $C \subset \mathbf{P}^3$ с $d=9$ и $g=11$ не существуют и $g \leqslant 10$ существуют. Более того, имеется два семейства кривых в $\mathbf{P}^3$ степени 9 и рода 10. Общий элемент первого семейства — пересечение двух общих кубик в $\mathbf{P}^3$. Чтобы описать общие элементы второго семейства, рассмотрим три образующие $L_1$, $L_2$, $L_3$ одного из двух семейств прямых на квадрике $Q \subset \mathbf{P}^3$ ранга 4. Общая сикстика через $L_1$, $L_2$, $L_3$ высекает на $Q$, кроме этих прямых, кривую степени 9 и рода 10, лежащую во втором семействе ($a=6$, $b=6-3=3$).

Подробнее об этом примере и другие примеры см. в [40].

**3.8. Проективная нормальность.** Рассмотрим неособую проективную кривую $C \subseteq \mathbf{P}^n$.

Определение 1. *Кривую $C$ называют $m$-нормальной,* $m \geqslant 1$, если линейная система $L_C^m$ на $C$ полна.

Пример 2. *Кривую $C$ называют проективно нормальной*, если она $m$-нормальна при всех $m \geqslant 1$.

Очевидно, 1-нормальность есть линейная нормальность. Если кривая $C \subseteq \mathbf{P}^n$ — линейно нормальна и $D$ — дивизор общего гиперплоского сечения, то $m$ — нормальность равносильна эпиморфности естественного отображения

$$\mathrm{Sym}^m L(D) \rightarrow L(mD), \tag{4}$$

переводящего многочлен степени $m$ с коэффициентами в $k$ от рациональных функций $L(D)$ в рациональную функцию $L(mD)$; $\mathrm{Sym}^m$ — симметрическое тензорное произведение степени $m$ над $k$.

Теорема. Экстремальная кривая проективно нормальна.

Действительно, для экстремальных кривых неравенства пункта 3.6 превращаются в равенства. С другой стороны, функции, конструируемые в $L(mD)$ при доказательстве неравенства Кастельнуово, лежат в образе (4), откуда получается проективная нормальность.

Пример 1. Рациональная нормкривая проективно нормальна.

Пример 2. Кривая в образе вложения $\varphi_D : C \rightarrow \mathbf{P}^{d-g}$, задаваемого дивизором $D$ степени $d \geqslant 2g+1$, проективно нормальна. В самом деле, она экстремальна, согласно примерам 1 и 2 пункта 3.6.

Пример 3. Всякая неособая плоская кривая $C \subset \mathbf{P}^2$ проективно нормальна. В частности, полна линейная система $g_d^2 = L_C$, $d = \deg C$, на $C$. Более того, пользуясь геометрической интерпретацией формулы Римана—Роха, нетрудно показать, что $g_d^2$ — единственная линейная система вида $g_d^2$ на плоской кривой $C$ степени $d\geqslant 4$. Поэтому вложение плоской кривой рода $\geqslant 3$ в $\mathbf{P}^2$ единственно (с точностью до изоморфизма $\mathbf{P}^2$).

Пример 4. Каноническая кривая проективно нормальна, что в негиперэллиптическом случае, согласно предыдущему, равносильно эпиморфности отображений

$$\mathrm{Sym}^m L(K)\to L(mK) \tag{5}$$

при $m\geqslant 1$. Но $L(mK)$ естественно изоморфно $\Omega^m$, откуда получается известная

Теорема (Нётер). Если $C$ — негиперэллиптическая кривая, то естественные отображения

$$\mathrm{Sym}^m\Omega\to\Omega^m$$

эпиморфны при всех $m\geqslant 1$. Иначе говоря, алгебра регулярных дифференциалов $\Omega^{\bullet}=\bigoplus\limits_{m\geqslant 1}\Omega^m$ негиперэллиптической кривой порождена дифференциалами степени 1 из $\Omega$.

Наоборот, для гиперэллиптической кривой рода $\geqslant 2$ отображения (5) при $m\geqslant 2$ не эпиморфны. При этом алгебра регулярных дифференциалов $\Omega^{\bullet}$ гиперэллиптической кривой рода $\geqslant 3$ порождается дифференциалами степени 1 и 2.

**3.9. Идеал кривой. Пересечения квадрик.** Рассмотрим проективную кривую $C$ в пространстве $\mathbf{P}^n$ с однородными координатами $(x_0:\ldots:x_n)$. Множество многочленов $I(C)=\{f\in k[x_0,\ldots,x_n]\,|\,f(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)=0$ для всех $(\alpha_0:\ldots:\alpha_n)\in C\}$ является однородным идеалом в $k[x_0,\ldots,x_n]$, называемым *идеалом кривой* $C$. Однородность означает, что

$$I(C)=\bigoplus_{m\geqslant 1} I_m(C),$$

где $I_m(C)$ — линейное пространство однородных многочленов степени $m$ от $x_0,\ldots,x_n$, равных нулю на $C$. Очевидно, $0\neq f\in I_m(C)$ тогда и только тогда, когда гиперповерхность $\{f=0\}$ содержит, как еще говорят, проходит через $C$. По определению всякая кривая представима в виде пересечения

$$C=\bigcap\{f_i=0\}, \tag{6}$$

где $f_i$ — однородные многочлены из $I(C)$, которые для неприводимой кривой $C$ можно предполагать неприводимыми. По теореме Гильберта о базисе можно также предполагать конечность числа гиперповерхностей $\{f_i=0\}$ в (6), поскольку для этого достаточно, чтобы многочлены $f_i$ порождали идеал $I(C)$. *Пересечения* (6), для которых выполнено последнее условие, называют *схемными*. Если кривая $C\subseteq\mathbf{P}^n$ невырождена, то $I_1(C)=0$ и схемное пересечение (6) содержит гиперповерхности $\{f_i=0\}$ степени $\geqslant 2$. Иногда, гиперповерхностей степени

2 или квадрик в неприводимом случае достаточно для задания схемного пересечения.

Предложение. Кривая в образе вложения $\varphi_D: C \to \mathbf{P}^n$, задаваемого дивизором $D$ степени $\geqslant 2g+2$, является схемным пересечением квадрик.

Доказательство существенно использует теорему об общем положении и вычисление размерностей пространств $I_m(C)$. Последнее удобнее объяснить в более общей ситуации, когда $C \subseteq \mathbf{P}^n$ — невырожденная проективно нормальная кривая. По линейной нормальности $C \subseteq \mathbf{P}^n$ подпространство линейных многочленов в $k[x_0, \ldots, x_n]$ отождествляется с пространством $L(D)$, где $D$ — дивизор гиперплоского сечения $C$. Оно естественно продолжается до отождествления

$$k[x_0, \ldots, x_n] = \operatorname{Sym} L(D) \overset{\mathrm{df}}{=} \bigoplus_{m \geqslant 0} \operatorname{Sym}^m L(D).$$

Имеется естественный гомоморфизм градуированных $k$-алгебр

$$\operatorname{Sym} L(D) \to \bigoplus_{m \geqslant 0} L(mD),$$

ядро которого является идеалом кривой $C$ при выбранном отождествлении. Отсюда по проективной нормальности $I_m(C)$ есть ядро эпиморфизма

$$\operatorname{Sym}^m L(D) \twoheadrightarrow L(mD).$$

Но $\dim \operatorname{Sym}^m L(D) = \binom{n+m}{m}$ (ср. с примером 7 п. 1.2), а потому верна

Лемма. $\dim I_m(C) = \binom{n+m}{m} - l(mD)$.

Пример 1. Рациональная нормкривая является схемным пересечением квадрик.

Каноническая гиперэллиптическая кривая, являясь рациональной нормкривой, есть схемное пересечение квадрик. Напротив, каноническая кривая $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ в негиперэллиптическом случае не всегда есть даже просто пересечение квадрик.

Пример 2. Тригональная, негиперэллиптическая, каноническая кривая $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ не является пересечением квадрик, поскольку всякая квадрика через $C$ содержит прямые $\bar{D}$, $D \in g_3^1$, а потому и линейчатую поверхность, заметаемую ими (см. пример 3 п. 3.4).

Пример 3. Пусть $C \subset \mathbf{P}^5$ — каноническая кривая плоской квинтики $q \subset \mathbf{P}^2$. По описанию канонических дивизоров плоской кривой (см. пример 6 п. 2.2) и проективной нормальности плоских кривых $|K_q| = L_C^2$. Значит, кривая $C$ есть образ Веронезе $v_2(q)$. Простой подсчет размерностей показывает, что $I_2(C) = I_2(v_2(\mathbf{P}^2))$. Поэтому пересечение квадрик через $C$ задает поверхность Веронезе $v_2(\mathbf{P}^2) \subset \mathbf{P}^5$.

Этим исчерпываются все исключения.

Теорема (Энриквес, Беббидж, Петри). Негиперэллиптическая, нетригональная каноническая кривая $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$, не изоморфная плоской квинтике (в частности, рода $g \neq 6$), является схемным пересечением квадрик.

Геометрическая часть теоремы о том, что квадрики через такую каноническую кривую высекают в точности ее, принадлежит Энриквесу [29] и Бэббиджу [22]. Более тонкий анализ идеала канонической кривой, называемый анализом Петри, восходит к его работе [60]. Современное изложение этого подхода имеется в [20], [56] и [62]. Другой подход найден независимо в работе автора [15].

С точки зрения структуры алгебры регулярных дифференциалов $\Omega^{\cdot}$ теорема означает, что эта алгебра, порожденная регулярными дифференциалами степени 1 в негиперэллиптическом случае (см. теорему Нётера п. 3.8), определяется квадратичными соотношениями таких дифференциалов, когда кривая не тригональна и не изоморфна плоской квинтике. В последних двух случаях алгебра $\Omega^{\cdot}$ определяется соотношениями степени 2 и 3. Геометрически это значит, что негиперэллиптическая каноническая кривая $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ есть схемное пересечение квадрик и кубик.

Замечание 1. Схемное пересечение (6) для произвольного подмногообразия $V \subseteq \mathbf{P}^n$ определяется в точности, как и для кривой. Согласно примеру 7 пункта 1.2, любое многообразие $V$ задается схемным пересечением квадрик в подходящем проективном вложении. Более того, достаточно квадрик ранга $\leqslant 4$. Последнее верно для кривых предложения и теоремы. Доказательство этого в случае канонических кривых совершенно не тривиально и получено недавно М. Грином [19]. Поверхности в примерах 2 и 3 являются схемными пересечениями квадрик, откуда легко вывести, что общая негиперэллиптическая каноническая кривая $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ рода $\geqslant 5$ есть схемное пересечение квадрик ранга $\leqslant 4$.

Замечание 2. Теорема имеет важные приложения в теории поверхностей и трехмерных алгебраических многообразий. Например, она используется в пока единственном подходе к доказательству существования прямых на определенных трехмерных многообразиях Фано [16].

**3.10. Полные пересечения.** Если кривая $C \subseteq \mathbf{P}^n$ задается как пересечение гиперповерхностей $H_i$, т. е. $C = \bigcap H_i$, то по размерностным соображениям число этих гиперповерхностей $\geqslant n-1$. Схемное *пересечение* (6) называют *полным*, если в нем участвует ровно $n-1$ гиперповерхностей $H_i = \{f_i = 0\}$.

Пример 1. Прямая $L \subset \mathbf{P}^3$ есть полное пересечение двух плоскостей. Прямую $L \subset \mathbf{P}^3$, являющуюся образующей квадрики

$Q \subset \mathbf{P}^3$ ранга 3, можно задать как пересечение этой квадрики и плоскости, касающейся квадрики вдоль $L$ (см. рис. 22). Однако это пересечение не схемно и не полно. Аналогично, рациональную нормкривую $C \subset \mathbf{P}^3$ степени 3 можно задать как пересечение квадрики ранга 3 и кубики, касающейся ее вдоль $C$, при этом кривая $C$ проходит через единственную особую точку квадрики. Данное пересечение также не схемно и не полно. Более того, указанная кривая не есть полное пересечение. Это вытекает, например, из следующего необходимого условия.

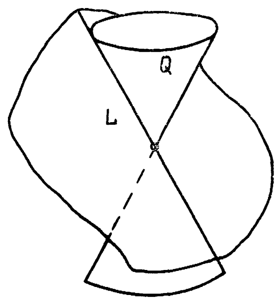



Рис. 22

Теорема. Если кривая $C = \bigcap \{f_i = 0\} \subset \mathbf{P}^n$ есть полное пересечение, то ее степень равна произведению степеней многочленов $f_i$.

Доказательство использует определение степени и тот факт, что гиперповерхности $\{f_i = 0\}$ неособы вдоль неособых точек $C$ и пересекаются в них трансверсально, т. е. пересечение их вложенных касательных пространств в неособой точке $p \in C$ совпадает с вложенным касательным пространством к $C$ в той же точке. (Для неособой кривой $C$ последнее верно во всех точках.) В заключение применяется теорема Безу для проективного пространства [13].

Пример 2. Из предложения пункта 3.9 можно вывести, что невырожденная проективная нормальная кривая степени 4 и рода 1 в $\mathbf{P}^2$ есть полное пересечение двух квадрик. Чуть сложнее доказывается обратное, что таковы все неособые полные пересечения двух квадрик в $\mathbf{P}^3$. В частности, неособая рациональная кривая в $\mathbf{P}^4$ степени 4 не есть полное пересечение, хотя $4 = 2 \cdot 2$.

Является ли кривая $C \subseteq \mathbf{P}^n$ полным пересечением, можно выяснить с помощью следующей процедуры. Для простоты пусть она неприводима и невырождена. Прежде всего в полное пересечение $C$ следует включить максимальный набор линейно независимых квадрик $\{f_i = 0\}$ через $C$, т. е. квадрик, отвечающих базису $(f_i)$ в $I_2(C)$. Затем включается максимальный набор линейно независимых кубик $\{f_i = 0\}$ через $C$, не выражающихся через квадрики, т. е. кубик, отвечающих многочленам $f_i$ степени 3, не порождаемым $I_2(C)$ в $I_3(C)$, и т. п. Кривая $C$ будет полным пересечением в точности тогда, когда в результате получится ровно $n-1$ гиперповерхность $\{f_i=0\}$. В частности, отсюда видно, что задание кривой полным пересечением в некотором смысле однозначно.

Пример 3. С помощью леммы пункта 3.9 легко показать, что через рациональную нормкривую $C\subseteq \mathbf{P}^d$ степени $d$ проходит $d(d-1)/2$ линейно независимых квадрик. Поэтому такая кривая является полным пересечением лишь при $d\leqslant 2$.

Пример 4. Аналогично для негиперэллиптической канонической кривой $C\subset \mathbf{P}^{g-1}$

$$\dim I_2(C)=\binom{g+1}{2}-l(2K)=(g-2)(g-3)/2.$$

Поэтому такая кривая не будет полным пересечением при $g\geqslant 6$.

Пример 5. С другой стороны, по теореме предыдущего пункта негиперэллиптическая, нетригональная каноническая кривая $C\subset \mathbf{P}^4$ рода 5 есть полное пересечение трех квадрик. Верно и обратное для неособого полного пересечения трех квадрик в $\mathbf{P}^4$ [31]. Наоборот, негиперэллиптическая, тригональная каноническая кривая $C\subset \mathbf{P}^4$ рода 5 не будет полным пересечением.

Пример 6. Рассмотрим теперь негиперэллиптическую каноническую кривую $C\subset \mathbf{P}^3$ рода 4. Через нее проходит ровно одна квадрика $Q\subset \mathbf{P}^3$. Снова по лемме предыдущего пункта $\dim I_3(C)=5$, откуда следует существование кубики $Q'\subset \mathbf{P}^3$ через $C$, не содержащей $Q$. Нетрудно проверить, что $Q'\cap Q=C$ и это пересечение полно. Обратно, неособое полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbf{P}^3$ будет негиперэллиптической канонической кривой. Отметим, что если ранг квадрики $Q$ равен 4, то на $C$ имеются две (полные, свободные) линейные системы вида $g_3^1$: они высекаются на $C$ двумя семействами прямолинейных образующих $Q$. Других систем вида $g_3^1$ на $C$ нет. Если ранг $Q$ равен 3, то на $C$ имеется одна линейная система вида $g_3^1$: она высекается единственным семейством прямолинейных образующих $Q$. Значит, всякая негиперэллиптическая кривая рода 4 тригональна.

Пример 7. Негиперэллиптическая каноническая кривая $C\subset \mathbf{P}^2$ рода 3 есть квартика, очевидно, полное пересечение.

**3.11. Простейшие особенности кривых.** Пусть $f:\tilde{C}\to C\subset \mathbf{P}^2$ — десингуляризация плоской кривой $C$. Кратностью пересечения прямой $L\subset \mathbf{P}^2$ с $C$ в точке $p\in C$ называют суммарную кратность $\sum\limits_{f(p_i)=p} a_i$ над $p$ подъема $f^*L=\sum a_i p_i$. *Точку* $p\in C$ называют *двойной*, когда общая прямая через $p$ пересекает $C$ в $p$ с кратностью 2. При этом возможны два случая.

1. Слой $f^{-1}(p)$ состоит из двух точек $q_1, q_2$. Каждой из этих точек $q_j$ отвечает соприкасающаяся прямая $\overline{T}_j$ с $f^*\overline{T}_j = \sum a_i p_i$, где $a_i \geqslant 2$ для $p_i = q_j$. При $\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 = p$ *точку* $p$ называют *обыкновенной двойной*. Интуитивно, можно представлять, что через такую точку проходят две неособые, трансверсальные ветви кривой $C$ (см. рис. 23).

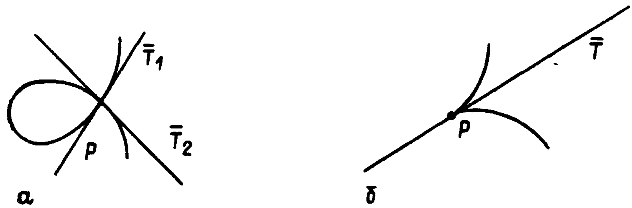



Рис. 23. Простейшие двойные особенности: (а) обыкновенная, (б) каспидальная

2. Слой $f^{-1}(p)$ состоит из одной точки $q$. Через $p$ проходит соприкасающаяся прямая $\overline{T}$, пересекающая $C$ в $p$ с кратностью $\geqslant 3$. Двойная *точка* $p \in C$ называется *каспидальной* или *точкой заострения*, если $\overline{T}$ пересекает $C$ в $p$ с кратностью 3 (см. рис. 23). С аналитической точки зрения это равносильно существованию аффинных координат $x$, $y$ на $\mathbf{P}^2$ таких, что

$$f^*(x) = t^2 + \text{члены порядка } \geqslant 3,$$
$$f^*(y) = t^3 + \text{члены порядка } \geqslant 4,$$

где $t$ — локальный параметр в $q$.

Пример. Если $C \subset \mathbf{P}^3$ — неособая пространственная кривая, то при проектировании $\pi: C \to \mathbf{P}^2$ из общей точки $\mathbf{P}^3$ кривая в образе $\pi(C)$ имеет лишь обыкновенные двойные особенности [31]. Если кривая $C$ невырождена; то, согласно примеру 3 из 3.8, такие особенности действительно имеются на $\pi(C)$. Кроме того, используя пример 5 пункта 1.7, можно показать, что общая проекция $\pi: C \to \mathbf{P}^2$ неособой кривой $C \subset \mathbf{P}^n$ бирациональна на образ и образ $\pi(C)$ имеет лишь обыкновенные двойные особенности. При этом степень кривой $\pi(C)$ равна степени кривой $C \subset \mathbf{P}^n$.

**3.12. Формула Клебша.**

Определение. *Геометрическим родом* неприводимой кривой $C$ называют род $g(\tilde{C})$ ее десингуляризации $\tilde{C} \to C$.

Пусть $C \subset \mathbf{P}^2$ — неприводимая, плоская кривая степени $d$ и геометрического рода $g$, имеющая лишь простейшие двойные особенности: $\delta$ обыкновенных двойных точек и $\varkappa$ каспидальных.

Теорема (Клебш, [31]). $g = (d-1)(d-2)/2 - \delta - \varkappa$.

Доказательство основано на технике присоединений. В частности, отсюда получается следующая формула для канонического дивизора кривой $\tilde{C}$:

$$K_{\tilde{C}} \sim (d-3) f^*L - \left(\sum q_1^i + q_2^i + \sum q^j\right),$$

где $L$ — общая прямая на $\mathbf{P}^2$ (ср. с примером 6 п. 2.2), $q_1^i$, $q_2^i$ — прообразы обыкновенных двойных точек, а $q^j$ — каспидальных. Вычисление степени $K_{\tilde{C}}$ приводит к формуле Клебша.

Пример 1. Если $C \subset \mathbf{P}^2$ — неприводимая, особая кубика, то она имеет единственную обыкновенную двойную или каспидальную особенность. Поэтому ее геометрический род равен 0, что впрочем вытекает из ее рациональности (см. пример 3 п. 2.3).

Пример 2. Проектируя негиперэллиптическую каноническую кривую рода $g$ на $\mathbf{P}^2$, можно получить бирационально изоморфную ей кривую $C \subset \mathbf{P}^2$ степени $2g-2$ с обыкновенными двойными точками. Поскольку ее геометрический род равен $g$, кривая $C$ имеет $(2g-3)(2g-4)/2-g$ обыкновенных двойных точек.

Пример 1 дополняет

Следствие. Число обыкновенных двойных и каспидальных точек на неприводимой кривой $C \subset \mathbf{P}^2$ степени $d$ не превосходит $(d-1)(d-2)/2$ и равно $(d-1)(d-2)/2$ на рациональной кривой $C$.

Замечание. Недавно доказана гипотеза Севери о существовании неприводимых кривых $C \subset \mathbf{P}^2$ степени $d$ с $\delta \leqslant (d-1)(d-2)/2$ обыкновенными двойными особенностями и о неприводимости семейства таких кривых при фиксированных $d$ и $\delta$ [39]. Это, в частности, подтверждает неприводимость пространства модулей $\mathcal{M}_g$ кривых рода $g$.

**3.13. Двойственные кривые.** Известная двойственность между прямыми и точками двойственных проективных плоскостей $\mathbf{P}^2$ и $\mathbf{P}^{2\vee}$ естественно продолжается на кривые. Пусть $C \subset \mathbf{P}^2$ — невырожденная кривая.

Определение. *Кривую* $C^\vee \subset \mathbf{P}^{2\vee}$, общие точки которой суть касательные кривой $C \subset \mathbf{P}^2$, называют *двойственной* к $C$.

Терминологию объясняет

Теорема бидвойственности. В нулевой характеристике $C^{\vee\vee} = C$.

Для $k = \mathbf{C}$ имеется следующее достаточно наглядное доказательство. Касательная прямая $\overline{T}_p \in \mathbf{P}^{2\vee}$ в неособой точке $p \in C$ является пределом секущей $\overline{pq}$ при $q \to p$ (см. рис. 24). Аналогично, точка $\mathbf{P}^2$, отвечающая касательной к $C^\vee \subset \mathbf{P}^{2\vee}$ в неособой точке $\overline{T}_p$, является пределом точки пересечения касательных $\overline{T}_p$ и $\overline{T}_q$ при $q \to p$, что, конечно, есть $p$ (см. рис. 25).

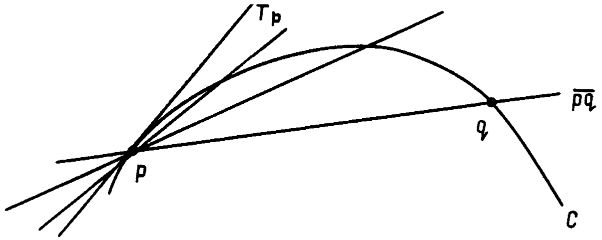



Рис. 24

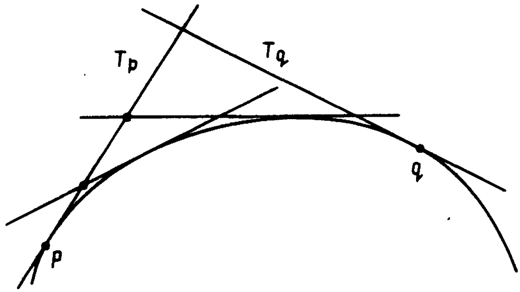



Рис. 25

При $\operatorname{char} k > 0$ теорема бидвойственности, вообще говоря, не верна. Это связано с возможной несепарабельностью отображения

$$\tau: C \dashrightarrow C^{\vee}$$
$$p \mapsto \bar{T}_p,$$

называемого *поляритетом*. Однако если поляритет $\tau$ сепарабелен, он бирационален на образ и теорема бидвойственности для $C$ верна [46].

Пример 1. При $\operatorname{char} k \neq 2$ конике двойственна коника. В частности, коника, двойственная конике примера 2 пункта 1.6, задается уравнением $a_0{}^2 = 4a_1a_2$. В характеристике 2 конике двойственна прямая, а соответствующий поляритет $\tau$ является чисто несепарабельным отображением степени 2.

Пример 2. Кривая, двойственная кривой $C = \{x_0^p x_1 + x_1^p x_2 + x_2^p x_0 = 0\} \subset \mathbf{P}^2$ над полем характеристики $p > 0$, изоморфна $C$ и отображение $\tau: C \to C^{\vee}$ чисто несепарабельно (степени $p$). Тем не менее $C^{\vee\vee} = C$.

**3.14 Формула Плюккера для класса.**

Определение. Степень двойственной кривой $C^{\vee} \subset \mathbf{P}^{2\vee}$ называют *классом кривой* $C \subset \mathbf{P}^2$.

Дополнительно к предположениям пункта 3.12 пусть $\operatorname{char} k=0$. Тогда класс $d^{\vee}$ кривой $C\subset \mathbf{P}^2$ вычисляется по формуле.

Теорема (Плюккер). $d^{\vee}=d(d-1)-2\delta-3\varkappa$.

Формула Гурвица для рода, примененная к композиции десингуляризации $f:\widetilde{C}\to C$ с последующим общим проектированием на прямую, приводит к частному случаю общих формул Плюккера [19], [31]:

$$\varkappa=-d^{\vee}+2d+2g-2.$$

При этом класс интерпретируют как число касательных к $C$, проходящих через общую точку $\mathbf{P}^2$. Далее, выражая геометрический род $g$ по формуле Клебша, получают требуемое. Плюккеров подход к доказательству, минующий понятие рода, можно найти в [31].

Замечание. Теорема также верна в любой характеристике $\neq 2$, если правильно определен класс: $d^{\vee}=\deg\tau\cdot\deg C^{\vee}$ (см. пример 2 п. 3.13)

**3.15. Соответствие ветвей. Двойственные формулы.** Даже, если кривая $C\subset \mathbf{P}^2$ не имеет особенностей, они могут появиться у двойственной кривой $C^{\vee}\subset \mathbf{P}^{2\vee}$. Как и в предыдущем пункте, характеристика основного поля $k$ предполагается нулевой.

Пример 1. Прямая $L$, касающаяся кривой $C\subset \mathbf{P}^2$ по крайней мере в двух точках, будет особой точкой двойственной кривой $C^{\vee}\subset \mathbf{P}^{2\vee}$. Такие касательные называют кратными. Если кратная касательная имеет ровно две точки касания с $C$ и в каждой из них кратность пересечения с $C$ равна 2, то ее называют *простой бикасательной*. Простые бикасательные отвечают обыкновенным двойным точкам кривой $C^{\vee}\subset \mathbf{P}^{2\vee}$.

Пример 2. Касательная $T_p$ в неособой точке $p\in C$, пересекающая $C$ в $p$ с кратностью $\geqslant 3$, будет особой точкой $C^{\vee}\subset \mathbf{P}^{2\vee}$. *Точку $p$* тогда называют *перегибом*. *Перегиб $p$* называют *обыкновенным*, если $\overline{T}_p$ пересекает $C$ в $p$ с кратностью 3 и не касается $C$ в других точках. Касательные обыкновенных точек перегиба отвечают каспидальным точкам $C^{\vee}\subset \mathbf{P}^{2\vee}$.

Пример 3. Кривая примера 2 пункта 3.13 замечательна также тем, что все ее точки являются точками перегиба.

Дополнительно к предположениям пункта 3.14 потребуем, чтобы и двойственная кривая удовлетворяла им, т. е. имела лишь простейшие двойные особенности. Согласно примерам, это равносильно тому, что $C\subset \mathbf{P}^2$ имеет лишь простейшие двойные особенности, обыкновенные перегибы и всякая кратная касательная к $C$ является простой бикасательной. Пусть $b$ — число бикасательных кривой $C$, а $f$ — число точек перегиба. Соответствующие численные инварианты двойственной кривой $C^{\vee}\subset \mathbf{P}^{2\vee}$ сверху помечают значком двойственности $^{\vee}$. Например, $\delta^{\vee}$ — число обыкновенных двойных точек $C^{\vee}$. По теореме бидвойственности получаем

Предложение. $b=\delta^{\vee}$, $f=\varkappa^{\vee}$ и $b^{\vee}=\delta$, $f^{\vee}=\varkappa$.

Поскольку геометрический род кривой $C^{v}$ равен геометрическому роду $g$ кривой $C$, формулы для рода и класса кривой $C^{\vee}\subset\mathbf{P}^{2\vee}$ приводят к формулам Клебша и Плюккера.

Теорема (Клебш, Плюккер).

$$g=(d^{\vee}-1)(d^{\vee}-2)/2-b-f,$$
$$d=d^{\vee}(d^{\vee}-1)-2b-3f.$$

Пример 4. Пусть $C\subset\mathbf{P}^{2}$ — неособая кубика, т. е. $d=3$ и $\varkappa=\delta=0$. Согласно формулам для рода и класса, $g=1$ и $d^{\vee}=6$. Очевидно, $b=0$ и все перегибы кубики обыкновенны. Поэтому к $C$ применима теорема, по любой формуле которой $f=9$. Значит, $C$ имеет 9 точек перегиба. Этот факт верен и в положительной характеристике $\neq 3$, однако совсем по другим соображениям (см. п. 2.6 гл. 3).

Пример 5. Общая квартика на $\mathbf{P}^{2}$ имеет 24 точки перегиба и 28 бикасательных. Действительно, для такой кривой $d=4$, $\varkappa=\delta=0$, $g=3, d^{\vee}=4(4-1)=12$, $3=11\cdot 10/2-b-f$ и $4=12\cdot 11-2b-3f$, откуда $f=24$ и $b=28$.

## *Глава 3*

## ЯКОБИАНЫ И АБЕЛЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Эти многообразия играют важную роль в теории алгебраических кривых, хотя, формально говоря, выходят за ее одномерные рамки. Их геометрия все же не сложнее геометрии кривых. Так, например, якобиан комплексной алгебраической кривой $C$ можно мыслить как комплексный тор с решеткой, определяемый матрицей периодов регулярных дифференциалов на $C$ (ср. с примером 2 п. 1. 3.). Этот тор алгебраичен, т. е. ассоциирован с (неособым) алгебраическим подмногообразием $\mathbf{CP}^{n}$ (ср. с п. 1.9 гл. 2). По теореме Абеля его точки отождествляются с классами линейной эквивалентности дивизоров степени 0 на $C$. Данная точка зрения на якобианы, удобная в приложениях и годящаяся для любого основного поля $k$, развивается в § 2. Как видно, якобиан обладает сразу двумя алгебраическими структурами: многообразия и группы. Так появляются алгебраические группы и

### § 1. Абелевы многообразия

Типичный пример — комплексные алгебраические торы $\mathbf{C}^{n}/\Lambda$. Основная тема параграфа — переформулировка условия алгебраичности тора $\mathbf{C}^{n}/\Lambda$ в терминах решетки $\Lambda$, что приводит к появлению такой важной дополнительной структуры абелева многообразия как поляризация. Заканчивается параграф обсуждением одномерных абелевых многообразий, известных как эллиптические кривые.

**1.1. Алгебраические группы.** *Группу,* заданную на точках алгебраического многообразия $G$, с регулярной операцией умножения $G\times G\to G$, $(g, h)\mapsto g\cdot h$ и регулярной операцией обращения $G\to G$, $g\mapsto g^{-1}$, называют *алгебраической.* В коммутативном случае обычно используют аддитивную терминологию и обозначения.

Пример 1. Конечномерное векторное пространство над $k$ является алгебраической группой по сложению.

Пример 2. Группа $GL(n, k)$ обратимых $n\times n$-матриц с элементами в $k$ является алгебраической группой по умножению. Аналогично имеется естественная структура алгебраической группы на группе $\mathrm{Aut}\ \mathbf{P}^n$ автоморфизмов проективного пространства $\mathbf{P}^n$, изоморфной $PGL(n+1, k)$.

Замечание. В том же смысле алгебраична группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\ V$ любого алгебраического многообразия $V$.

Пользуясь транзитивностью и регулярностью действия алгебраической группы $G$ на себе, получаем

Предложение. Алгебраическая группа $G$ (как многообразие) неособа.

**1.2. Абелевы многообразия.**

Определение. 1. Коммутативную алгебраическую группу $A$ на неприводимом проективном многообразии называют *абелевым многообразием.*

Замечание 1. Требование коммутативности излишне, поскольку алгебраическая группа на неприводимом проективном многообразии всегда коммутативна [55].

Замечание 2. Регулярное отображение абелевых многообразий будет гомоморфизмом, если сохраняет 0 [55]. В частности, групповая структура абелева многообразия однозначно определяется заданием 0.

Определение 2. Абелево многообразие размерности 1 называют *эллиптической кривой.*

Пример. На эллиптической кривой $C$ действует бесконечная группа автоморфизмов сдвига $q\mapsto q+p$, $p$, $q\in C$, без неподвижных точек при $p\neq 0$. Отсюда вытекает, что $g(C)=1$. Обратно, если $C$ — кривая рода 1 с фиксированной точкой $p$, то на $C$ имеется единственная структура эллиптической кривой с $0=p$. Сумма $p_3=p_1+p_2$, $p_1$, $p_2\in C$ определяется как элемент линейной системы $|p_1+p_2-p|$ нульмерной по формуле Римана (ср. с п. 2.6).

Относительную простоту получения многих результатов об абелевых многообразиях (см., например, замечания) над $k=\mathbf{C}$ (а по принципу Лефшеца в характеристике 0) объясняет

Теорема. С комплексным абелевым многообразием $A$ размерности $n$ ассоциирован $n$-мерный комплексный тор.

Действительно, $A^{an}$ — компактная, связная, комплексная группа Ли размерности $n$ (ср. с п. 1.9 гл. 2). В теории групп Ли доказывается, что такая группа является комплексным тором $\mathbf{C}^n/\Lambda$, при этом пространство $\mathbf{C}^n$ канонически отождествляется с касательным пространством $T$ к $A$ в 0, а факторизация $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n/\Lambda$ с экспоненциальным отображением $\exp: T \to A^{an}$ (см. [55]). Согласно теоремам сравнения (см. [65]), структура алгебраического многообразия на $A$ однозначно восстанавливается по аналитической структуре тора $\mathbf{C}^n/\Lambda$. Однако далеко не всякий комплексный тор размерности $\geqslant 2$ алгебраичен.

**1.3. Алгебраичность комплексных торов. Поляризованные торы.** Общий критерий алгебраичности, а точнее проективности, для компактных комплексных многообразий дает теорема Кодаиры [31]. Случай комплексных торов проще [31], [55], хотя и нетривиален.

Пример 1. Пусть $\mathbf{C}^2/\Lambda$ — двумерный комплексный тор с решеткой $\Lambda = \mathbf{Z}e_1 + \mathbf{Z}e_2 + \mathbf{Z}e_3 + \mathbf{Z}e_4$. Поскольку он гомеоморфен тору $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^4$, образующими его двумерной группы гомологий будут 6 циклов $e_{ij}$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ — образы плоскостей $\mathbf{R}e_i + \mathbf{R}e_j$ в $\mathbf{C}^2/\Lambda$. Если тор $\mathbf{C}^2/\Lambda$ алгебраичен, на нем имеется алгебраическая кривая $C$. Можно предполагать, что она неособа, например, — общее гиперплоское сечение тора при проективном вложении $\mathbf{C}^2/\Lambda \subset \mathbf{P}^n$. Риманова поверхность $C^{an}$ как двумерный топологический цикл гомологична

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} a_{ij} e_{ij}, \quad a_{ij} \in \mathbf{Z}.$$

Голоморфный дифференциал $dz_1 \wedge dz_2$ инвариантен относительно сдвигов, а потому определяет голоморфный дифференциал $\omega$ на $\mathbf{C}^2/\Lambda$. С одной стороны, по теореме Стокса

$$\int_{C^{an}} \omega = \sum a_{ij} \int_{e_{ij}} \omega,$$

причем $\int_{e_{ij}} \omega$ легко вычислить: если $e_i = (\Pi_{1i}, \Pi_{2i})$, то

$$\int_{e_{ij}} \omega = \Pi_{1i}\Pi_{2j} - \Pi_{1j}\Pi_{2i}.$$

С другой стороны, $\int_{C^{an}} \omega = 0$, поскольку на $C^{an}$ нет внешних голоморфных дифференциалов степени 2 ($dz \wedge dz = 0$). В результате получаем соотношение

$$\sum a_{ij} (\Pi_{1i}\Pi_{2j} - \Pi_{1j}\Pi_{2i}) = 0. \tag{1}$$

Однако чтобы соотношение действительно задавало некоторое условие на числа $\Pi_{1i}$, $\Pi_{2i}$, надо, чтобы не все $a_{ij}$ равнялись нулю. Для этого достаточно проверить, что $\int\limits_{C^{an}} \eta > 0$, где $\eta$ — дифференциал на $\mathbf{C}^2/\Lambda$, определяемый формой $\sqrt{-1}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + z_2 \wedge d\bar{z}_2)$. Это легко выводится из соотношения $\sqrt{-1}dz \wedge d\bar{z} = 2dx \wedge dy$ (ср. с доказательством второго билинейного соотношения Римана п. 4.7 гл. 1). Нетрудно подобрать числа $\Pi_{1i}$, $\Pi_{2i}$ так, чтобы произведения $\Pi_{1i}\Pi_{2j}$ были линейно независимы над $\mathbf{Z}$ [13]. Это противоречит (1), а потому соответствующий тор $\mathbf{C}^2/\Lambda$ неалгебраичен!

Запишем координаты векторов $e_i$ в виде матрицы

$$\Pi = (\Pi_{ji})$$

и рассмотрим кососимметрическую $4\times 4$-матрицу $A$ с элементами $a_{ij}$ при $i<j$. Тогда соотношение (1) можно переписать в виде

$$\Pi A \Pi^t = 0, \tag{2}$$

где $t$ — транспонирование матрицы. Как и выше, проверяется, что $\int\limits_{C^{an}} \omega \geqslant 0$ для дифференциалов $\omega = \sqrt{-1}(\lambda_1\bar{\lambda}_1 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \lambda_1\bar{\lambda}_2 \times \times dz_1 \wedge d\bar{z}_2 + \bar{\lambda}_1\lambda_2 dz_2 \wedge d\bar{z}_1 + \lambda_2\bar{\lambda}_2 dz_2 \wedge d\bar{z}_2)$. Более того, равенство нулю возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, если $C$ — гиперплоское сечение. Это можно записать в виде положительной определенности

$$\sqrt{-1}\,\Pi A \bar{\Pi}^t > 0. \tag{3}$$

В случае общего тора $\mathbf{C}^n/\Lambda$ с решеткой $\Lambda = \mathbf{Z}e_1 + \ldots + \mathbf{Z}e_{2n}$ через $\Pi$ обозначается $n\times 2n$-матрица, столбцы которой суть координаты векторов $e_i$. Матрицу $\Pi$ называют *матрицей периодов* тора $\mathbf{C}^n/\Lambda$, поскольку $\Pi_{ji} = \int\limits_{e_i} dz_j$.

Условия Фробениуса. Комплексный тор $\mathbf{C}^n/\Lambda$ алгебраичен в том и только том случае, когда существует целочисленная кососимметрическая $2n\times 2n$-матрица $A$, для которой

$$\Pi A \Pi^t = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{-1}\,\Pi A \bar{\Pi}^t > 0.$$

Необходимость устанавливается, как и условия (2) и (3) в примере, разобранном выше. При этом в качестве «кривой» $C$ можно взять сечение $\mathbf{C}^n/\Lambda$ $(n-1)$ общей гиперплоскостью, деленное на $(n-1)!$. Для читателей, знакомых с алгебраической топологией, можно предложить более функториальное объяснение. Рассмотрим эффективный дивизор $D \subset \mathbf{C}^n/\Lambda$ кратный гиперплоскому сечению. Такой дивизор называют *дивизором поляризации*. Дивизор $D$ определяет топологический цикл размерности $2n-2$, которому по двойственности Пуанкаре отвечает двумерный целочисленный класс когомологий тора

$\mathbf{C}^n/\Lambda$, называемый *фундаментальным классом* дивизора $D$. Такие классы когомологий на $\mathbf{C}^n/\Lambda$ отождествляются с целочисленными кососимметрическими билинейными формами решетки $\Lambda$. Кроме того, форма $E$, являющаяся фундаментальным классом некоторого дивизора $D$, есть мнимая часть единственной эрмитовой формы $H$ на $\mathbf{C}^n$. В координатной записи это дает первое из условий Фробениуса. Если же как у нас предполагается, что $D$ — дивизор поляризации, то форма Н положительно определена. В координатной записи это дает второе условие Фробениуса. При этом если $E$ — матрица формы $E$ в базисе $e_1, \ldots, e_{2n}$, то $A = -\det E \cdot E^{-1}$.

Определение 1. Матрицу $A$ или, более инвариантно, соответствующую кососимметрическую билинейную форму $E$ на $\Lambda$ (или ее эрмитову форму $H$ на $\mathbf{C}^n$) называют *поляризацией* тора $\mathbf{C}^n/\Lambda$.

Определение 2. *Поляризация* называется *главной*, если $\det A = 1$ или, эквивалентно, билинейная форма $E$ унимодулярна.

Определение 3. *Тор* с фиксированной поляризацией называют *поляризованным* и *главно поляризованным* для главной поляризации.

Таким образом, условия Фробениуса есть условия поляризуемости тора. Достаточность получается из явной конструкции проективного вложения поляризованного тора, задаваемой тета-функциями с характеристиками [55]. В следующем пункте подробно обсуждается случай главной поляризации, особенно важной для дальнейшего.

Меняя базис $e_1, \ldots, e_{2n}$ решетки $\Lambda$ и координатную систему $\mathbf{C}^n$, можно изменять матрицу периодов П.

Лемма. Тор $\mathbf{C}^n/\Lambda$ главно поляризуем тогда и только тогда, когда имеется целочисленный базис $e_1, \ldots, e_{2n}$ в $\Lambda$ и координатная система $\mathbf{C}^n$ такие, что матрица периодов представима в виде

$$\Pi = (I,\ Z),$$

где $I$ — единичная $n\times n$-матрица, а $Z$ — *зигелева* $n\times n$-*матрица*, т. е. матрица, для которой выполнены условия

$$Z^t = Z \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} Z \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - \bar{Z}^t) > 0. \tag{4}$$

В качестве базиса $e_1, \ldots, e_{2n}$ в $\Lambda$ берется базис, в котором

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда по второму условию Фробениуса векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы над $\mathbf{C}$. Они и задают подходящую координатную систему $\mathbf{C}^n$. При этом условия Фробениуса записываются в виде (4). *Матрицу* П называют *нормализованной.* В условиях Фробениуса, переписанных в виде (4), поляризация как бы теряется. Однако она все же присутствует в выборе базиса решетки $\Lambda$ и координат на $\mathbf{C}^n : E(e_i, e_{n+j}) = \delta_{ij}$ и $E(e_i, e_j) = E(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Пример 2. Пусть $S$ — компактная риманова поверхность рода $g$. Каждый цикл $c \in H_1(S, \mathbf{Z})$ определяет $\mathbf{C}$-линейное отображение интегрирования $\int_c \omega$ на пространстве регулярных дифференциалов $\Omega$. Тем самым задан гомоморфизм

$$H_1(S, \mathbf{Z}) \to \Omega^\vee$$
$$c \mapsto \int_c .$$

По следствию 2 пункта 4.13 гл. 1 это — включение и его образ — решетка максимального ранга $\Lambda \subset \Omega^\vee$. Индекс пересечения на $H_1(S, \mathbf{Z})$ (см. п. 3.8 гл. 1) определяет на $\Lambda$ кососимметрическую, унимодулярную билинейную форму $E$. Утверждается, что $E$ — главная поляризация $g$-мерного тора $\Omega^\vee/\Lambda$. Чтобы проверить это, воспользуемся стандартным базисом $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ группы $\Lambda = H_1(S, \mathbf{Z})$ и координатной системой на $\Omega^\vee$, отвечающей произвольному базису $\omega_1, \ldots, \omega_g$ в $\Omega$. В данной координатной системе строки матрицы периодов $\Pi$ суть $A$-, $B$-периоды форм $\omega_j : \Pi_{ji} = \Pi_i^j$. При этом билинейные соотношения Римана (см. п. 4.7 гл. 1) превращаются в соотношения Фробениуса для выбранной поляризации $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$.

Чтобы нормализовать матрицу периодов, необходимо выбрать нормализованный базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$ в $\Omega$, для которого

$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}.$$

Зигелева матрица $Z$ в этом случае будет состоять из $B$-периодов:

$$z_{ji} = \int_{b_i} \omega_j.$$

Отметим, что первое из соотношений (4) тогда приводит к следующему варианту первого соотношения Римана

$$\int_{b_i} \omega_j = \int_{b_j} \omega_i.$$

Определение 4. Главно поляризованный тор $\Omega^\vee/\Lambda$ называют *якобианом римановой поверхности* $S$ и обозначают через $J(S)$.

Нормализованные матрицы периодов $(I, Z)$ отождествляются с зигелевыми матрицами $Z$, образующими *верхнюю полуплоскость Зигеля*

$$\mathbf{H}_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{n \times n\text{-матрица } Z \mid Z^t = Z \text{ и } \operatorname{Im} Z > 0\}.$$

$\mathbf{H}_1=\mathbf{H}$ — верхняя полуплоскость. По лемме всякий главно поляризованный тор задается нормализованной матрицей периодов $(I, Z)$, а потому точкой $Z\in\mathbf{H}_n$. Поляризованные торы изоморфны, если существует их изоморфизм как групп Ли с сохранением поляризации.

Предложение. Две зигелевы матрицы задают изоморфные главно поляризованные торы тогда и только тогда, когда одна из них может быть получена из другой преобразованием

$$Z\mapsto(AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \tag{5}$$

где $A, B, C, D$ — четыре целочисленные $n\times n$-матрицы, удовлетворящие соотношению

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Доказательство использует то, что изоморфизмы торов поднимаются до линейных изоморфизмов накрывающих пространство $\mathbf{C}^n$, задающих изоморфизм решеток (ср. с п. 5.6 гл. 1). Сохранение поляризации выражает соотношение (6) [67]. Преобразования (5) образуют так называемую *зигелеву модулярную группу* $\Gamma_n$, дискретно действующую на $\mathbf{H}_n$. Таким образом, главно поляризованные торы размерности $n$ с точностью до изоморфизма параметризует комплексно аналитическое фактор-пространство $\mathbf{H}_n/\Gamma_n$. Точнее, $\mathbf{H}_n/\Gamma_n$ — грубое пространство модулей указанных торов (ср. с п. 5.10 гл. 1). В частности, $\mathbf{H}_1/\Gamma_1=\mathbf{H}/\Gamma$ — пространство модулей комплексных эллиптических кривых.

**1.4. Тета-функция и тета-дивизор Римана.** Алгебраичность поляризованных торов $\mathbf{C}^n/\Lambda$ устанавливается в два шага. Сначала строится проективное вложение $f: \mathbf{C}^n/\Lambda\hookrightarrow\mathbf{CP}^m$. Затем используется

Теорема Чжоу ([57]). Всякое компактное комплексное подмногообразие (и даже комплексно аналитическое подпространство) $\mathbf{CP}^m$ является проективным комплексным алгебраическим многообразием.

Одномерная версия теоремы обсуждалась в пункте 6.5 гл. 1. При конструкции вложения выбирается набор голоморфных функций $f_i(u)$ на $\mathbf{C}^n$, обладающих свойством автоморфности

$$f_i(u+e)=\mu_e(u)f_i(u),$$

где $e\in\Lambda$, а $\mu_e(u)$ — голоморфные множители, не зависящие от функций $f_i$. Для подходящих множителей автоморфности $\mu_e$, определяемых по поляризации, можно найти набор функций $f_i$, для которого сопоставление

$$u\mapsto(f_0(u):\ldots:f_m(u))$$

задает требуемое вложение $f$ [55] (ср. с (6) гл. 1).

Остановимся подробнее на этой конструкции в случае главно поляризованного тора $\mathbf{C}^n/\Lambda$. По лемме предыдущего пункта можно предполагать, что тор $\mathbf{C}^n/\Lambda$ задан нормализованной матрицей периодов $(I, Z)$, $Z \in \mathbf{H}_n$, т. е. его решетка $\Lambda$ порождена вектор-столбцами $e_i$ этой матрицы. *Тета-функция Римана* задается на $\mathbf{C}^n \times \mathbf{H}_n$ рядом Фурье:

$$\vartheta(u, Z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} e^{\pi\sqrt{-1}\langle m, mZ\rangle + 2\pi\sqrt{-1}\langle m, u\rangle},$$

где $\langle m, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i$ — стандартное скалярное произведение на $\mathbf{C}^n$. Из положительной определенности $\operatorname{Im} Z > 0$ вытекает абсолютная и равномерная на каждом компактном подмножестве $\mathbf{C}^n \times \mathbf{H}_n$ сходимость ряда. Поэтому тета-функция $\vartheta$ голоморфна на $\mathbf{C}^n \times \mathbf{H}_n$. Непосредственно проверяются

Предложения. 1. $\vartheta(u+e_i, Z) = \vartheta(u, Z)$,

$\vartheta(u+e_{n+i}, Z) = e^{-\pi\sqrt{-1}(2u_i + z_{ii})}\vartheta(u, Z)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$.

2. $\vartheta(-u, Z) = \vartheta(u, Z)$.

3. Тета-функция удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_i \partial u_j} = 2\pi\sqrt{-1}\,(1+\delta_{ij})\frac{\partial\vartheta}{\partial z_{ij}}.$$

При конструкции проективных вложений тора $\mathbf{C}^n/\Lambda$ автоморфность функций достаточно проверять на образующих решетки $e_i$, $e_{n+i}$. С этой точки зрения предложение 1 означает автоморфность функции $\vartheta(u) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \vartheta(u, Z)$ для множителей $\mu_i = 1$, $\mu_{n+i} = e^{-\pi\sqrt{-1}(2u_i + z_{ii})}$. Однако нетрудно проверить, что $\vartheta(u)$ — единственная с точностью до пропорциональности голоморфная функция на $\mathbf{C}^n$ с указанными множителями. Поэтому для конструкции вложения пользуются функциями, автоморфными относительно кратных множителей $\mu_i^N$, $\mu_{i+n}^N$, $N \in \mathbf{N}$. Обозначим через $L_N$ пространство таких функций.

Пример.

$$\vartheta(u+u_1)\ldots\vartheta(u+u_N) \in L_N,$$

где $u_1, \ldots, u_N \in \mathbf{C}^n$ и $u_1 + \ldots + u_N = 0$.

По разложениям Фурье функций пространства $L_N$, нетрудно вычислить его размерность: $\dim L_N = N^n$. Выбор базиса $(f_i)$ в $L_N$ определяет голоморфное отображение $f^N: \mathbf{C}^n/\Lambda \to \mathbf{P}^{N^n-1}$. Это действительно отображение, поскольку при $N \geqslant 2$ функции пространства $L_N$ не имеют общих нулей на $\mathbf{C}^n$ (см. пример). Труднее доказывается

Теорема Лефшеца ([55]). $f^N$ — вложение при $N \geqslant 3$. Поэтому в силу теоремы Чжоу тор $\mathbf{C}^n/\Lambda$ ассоциирован с комплексным проективным алгебраическим многообразием $A$. Согласно теоремам сравнения для отображений [65], групповая структура $\mathbf{C}^n/\Lambda$ превращает $A$ в абелево многообразие. Заметим теперь, что по предложению 1 множество нулей функции $\vartheta$ инвариантно относительно сдвигов на вектора решетки $\Lambda$. Поэтому на торе $\mathbf{C}^n/\Lambda$ корректно определено замкнутое аналитическое подмножество $\Theta = \{u \bmod \Lambda \mid \vartheta(u) = 0\}$ размерности $n-1$. Снова по теореме Чжоу $\Theta$ — дивизор на $A$, называемый *тета-дивизором Римана*.

Теорема 1. $\Theta$ — дивизор поляризации и его фундаментальный класс является исходной главной поляризацией тора $\mathbf{C}^n/\Lambda$.

Теорема 2. $-\Theta = \Theta$, где $-\Theta = \{-p \mid p \in \Theta\}$.

Последнее вытекает непосредственно из четности функции $\vartheta$ (см. предложение 2). По конструкции вложения $f^N$ дивизор $N\Theta$ является гиперплоским сечением образа $f_N(\mathbf{C}^n/\Lambda)$, а потому дивизором поляризации. Заключительное утверждение в теореме 1 — нетривиальный пример глубокой взаимосвязи геометрии и анализа, требующий для правильного понимания более инвариантной точки зрения: линейные расслоения и их классы Чжэня [31], [55], [72].

Замечание. Роль предложения 3 [19], приведенного здесь скорее для полноты, выяснится в следующей части.

**1.5. Главно поляризованные абелевы многообразия.** Под *дивизором поляризации* абелева многообразия $A$ в общем случае ($=$над $k$) понимается его эффективный дивизор $D$, кратный дивизору некоторого гиперплоского сечения $A \subset \mathbf{P}^m$, т. е. $ND = H|_A$, где $H$ — общая гиперплоскость в $\mathbf{P}^m$. Положим

$$D^n = (H|_A^n)/N^n,$$

где $H|_A{}^n$ — *степень многообразия* $A \subset \mathbf{P}^m$, равная по определению числу точек в пересечении $A$ с $n$-$\dim A$ общими гиперплоскостями (ср. с примером 5 п. 2.2 гл. 2). Как и в случае кривых, можно определить дивизор функции [13] и пространство

$$L(D) = \{f \in k(A) \mid f \equiv 0 \text{ или } (f) + D \geqslant 0\}.$$

Предложение. Следующие свойства дивизора поляризации $D$ на абелевом многообразии $A$ эквивалентны:

(а) $D^n = n!$,

(б) $\dim L(D) = 1$,

(в) в случае $k = \mathbf{C}$ фундаментальный класс дивизора $D$ на комплексном торе, ассоциированном с $A$, унимодулярен, т. е. является главной поляризацией.

Равносильность свойств (а) и (б) вытекает из формулы

$$\dim L(D) = D^n/n! \tag{7}$$

[55], представляющей в характеристике 0 частый случай формулы Римана — Роха — Хирцебруха, без высших когомологических членов по теореме Кодаиры об обращении в нуль. Свойства (а) и (в) эквивалентны по топологическому соотношению

$$D^n = \sqrt{\det E} \cdot n!,$$

где $E$ — кососимметрическая матрица фундаментального класса.

Пример. 1. Пусть $\Theta$ — тета-дивизор Римана на комплексном абелевом многообразии $A = \mathbf{C}^n/\Lambda$. Отображение

$$L_N \to L(N\Theta), \quad f \mapsto f/\vartheta^N$$

является изоморфизмом, откуда $\dim L(N\Theta) = \dim L_N = N^n = (N\Theta)^n/n!$.

Определение 1. В общем случае *дивизор поляризации* $\Theta$ на абелевом многообразии $A$ называют *главным* или, короче, *г. п. дивизором*, если он удовлетворяет свойствам предложения.

По теореме 1 предыдущего пункта тета — дивизор Римана есть г. п. дивизор. Всякий г. п. дивизор эллиптической кривой является точкой. Г. п. дивизоры $\Theta = \Sigma a_i D_i$ всегда приведены, т. е. все $a_i = 1$ [55]. Поэтому их можно рассматривать как подмногообразия $\Theta \subset A$.

Пример 2. Если $\Theta \subset A$ — г. п. дивизор, то для любой точки $p \in A$ его сдвиг $\Theta + p \overset{\text{df}}{=} \{q + p \mid q \in \Theta\}$ — тоже г. п. дивизор.

Определение 2. *Абелево многообразие $A$ называют главно поляризованным* или, короче, *г. п.*, если на нем задан г. п. дивизор $\Theta$ с точностью до сдвига.

Определение 3. *Г. п. абелевы многообразия изоморфны*, если имеется их изоморфизм, сохраняющий г. п. дивизоры с точностью до сдвига.

Тета-дивизор Римана на комплексном г. п. абелевом многообразии $A$ зависит от выбора нормализованной матрицы периодов ассоциированного с ним тора. Однако эти дивизоры отличаются на сдвиг [55], а потому корректно определяют поляризацию $A$. Их описание дается в следующем пункте.

**1.6. Точки конечного порядка абелевых многообразий.** Сюръективный регулярный гомоморфизм $f: A_1 \to A_2$ абелевых многообразий одной размерности называют *изогенией*. Очевидно, ядро изогении $\operatorname{Ker} f$ является конечной абелевой группой. Ее порядок $\#\operatorname{Ker} f \leqslant \deg f$ и равенство имеет место в случае сепарабельности $f$; в частности, когда $\operatorname{char} k = 0$.

Пример 1. Пусть $D \subset A$ — (приведенный) дивизор поляризации. Тогда группа $G = \{p \in A \mid D + p = D\}$ конечна. Факторизация по $G$ задает изогению $f: A \to A/G$. Очевидно, $D = f^{-1}(D/G)$ и $D^n = \#G \cdot (D/G)^n$. Следовательно, если $D$ —

г. п. дивизор, то по (7) и определению г. п. дивизоров $\# G=1$. Таким образом, верна

Лемма. Если $\Theta\subset A$ — г. п. дивизор, то $p+\Theta=\Theta$ лишь для $p=0$.

Пример 2. Умножение на $N\in\mathbf{N}$

$$N: A\to A$$
$$p\mapsto Np$$

является изогенией, сепарабельной при $N$, не делящемся на $\operatorname{char} k$. (Аналогичная изогения комплексного тора $\mathbf{C}^n/\Lambda$ задается умножением на $N$ для ее универсальной накрывающей $\mathbf{C}^n$, ср. с замечанием 2 п. 5.6 гл. 1.) Ядро изогении $N$, обозначаемое через $A_N$, состоит из точек $p\in A$ порядка $N: Np=0$.

Следствие. Абелево многообразие делимо, т. е. для любого натурального $N$ и любой точки $p\in A$ существует точка $q\in A$ такая, что $p=Nq$.

Теорема 1. Для абелева многообразия $A$ размерности $n$

$$A_N\simeq(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^{2n}$$

при $\operatorname{char} k\nmid N$, откуда $\# A_N=N^{2n}$.

Комплексный случай очевиден: $A=\mathbf{C}^n/\Lambda$ и $A_N=(\Lambda/N)/\Lambda\simeq\simeq(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^{2n}$, где $\Lambda/N=\{e/N\,|\,e\in\Lambda\}$ — решетка, деленная на $N$. В положительной характеристике $p=\operatorname{char} k$ имеется неравенство $\# A_p\leqslant p^n$ [55]. Тем не менее степень изогении $N$ всегда равна $N^{2n}$.

Пример 3. Если $C$ — эллиптическая кривая и $p=\operatorname{char} k>>0$, то $\# C_p=p$ или 1. В последнем случае *кривую* $C$ называют *суперсингулярной* [40]. При $\operatorname{char} k=2$ инволюция $q\mapsto -q$ имеет 1 или 2 неподвижные точки, в соответствии с тем суперсингулярна она или нет. Эти точки суть точки ветвления гиперэллиптической проекции $C\to C/-q\sim q$ (ср. с примером п. 2.4 и примером 4 п. 1.8 гл. 2).

Предположим теперь, что $\operatorname{char} k\neq 2$. Под точками симметрии или *тета-характеристиками* г. п. дивизора $\Theta$ понимаются точки $p\in A$, для которых $-\Theta+2p=\Theta$ (см. рис. 26).

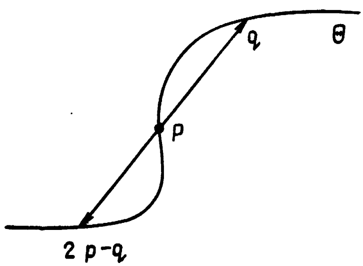



Рис. 26

Теорема 2. Г. п. дивизор $\Theta$ абелева многообразия $A$ размерности $n$ имеет $2^{2n}$ тета-характеристик.

С точностью до сдвига можно предполагать, что 0 — одна из тета-характеристик: $-\Theta=\Theta$. Тогда по лемме все тета-характеристики образуют подгруппу $A_2$ точек порядка 2. Существование по крайней мере одной тета-характеристики в комплексном случае гарантирует симметричность тета-дивизора Римана $\Theta$ (см. теорему 2 п. 1.4). Однако отсюда не следует спешить с заключением, что имеется $2^{2n}$ тета-дивизоров Римана, поскольку функционально симметрии делятся на четные и нечетные. В самом деле, если $f(z)=\sum_{m\geqslant 0} a_i z^m$ — четная или нечетная аналитическая функция, то первый ненулевой член ее разложения по $z$ имеет соответственно четную или нечетную степень. Аналогично, в общем случае *тета-характеристику* называют *четной* или *нечетной* в зависимости от четности кратности дивизора $\Theta$ в ней, т. е. в зависимости от четности степени первого ненулевого члена разложения (формального при $k\neq\mathbf{C}$) по локальным параметрам функции $f$, задающей дивизор $\Theta$ в окрестности тета-характеристики. Согласно предложению 2 пункта 1.4 0 — четная тета-характеристика дивизора Римана $\Theta$. Чтобы определить четность других тета-характеристик $p\in A_2=(\Lambda/2)/\Lambda$, запишем их в виде

$$p_\varepsilon^\delta\overset{\mathrm{df}}{=}(\varepsilon+\delta Z)/2 \bmod \Lambda,$$

где $\varepsilon$, $\delta$ — $n$-вектора из 0 и 1 (коды). Очевидно, дивизор $\Theta_\varepsilon^\delta\overset{\mathrm{df}}{=}\Theta+p_\varepsilon^\delta$ будет множеством нулей *тета-функции с характеристиками*

$$\vartheta\begin{bmatrix}\delta\\ \varepsilon\end{bmatrix}(u, Z)\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{m\in \mathbf{Z}^n} e^{\pi\sqrt{-1}\left\langle m+\frac{\delta}{2},\left(m+\frac{\delta}{2}\right)Z\right\rangle+2\pi\sqrt{-1}\left\langle m+\frac{\delta}{2},u+\frac{\varepsilon}{2}\right\rangle}=$$

$$=e^{\pi\sqrt{-1}\left\langle\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}Z\right\rangle+2\pi\sqrt{-1}\left\langle\frac{\delta}{2},u+\frac{\varepsilon}{2}\right\rangle}\vartheta\left(u+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\delta}{2}Z, Z\right);\quad \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\vartheta.$$

Непосредственно проверяется соотношение

$$\vartheta\begin{bmatrix}\delta\\ \varepsilon\end{bmatrix}(-u, Z)=(-1)^{\langle\delta,\varepsilon\rangle}\vartheta\begin{bmatrix}\delta\\ \varepsilon\end{bmatrix}(u, Z). \qquad (8)$$

Поэтому тета-характеристика $p_\varepsilon^\delta$ четна в том и только том случае, когда четно $\langle\delta, \varepsilon\rangle$. Простое комбинаторное вычисление приводит к следующему результату, справедливому и в общем случае.

Теорема 3. Г. п. дивизор $\Theta$ абелева многообразия $A$ размерности $n$ имеет $2^{n-1}(2^n+1)$ четных и $2^{n-1}(2^n-1)$ нечетных тета-характеристик.

Таким образом, на г. п. абелевом многообразии $A$ имеется $2^{n-1}(2^n+1)$ дивизоров поляризации $\Theta$, для которых $0$ — четная тета-характеристика. В комплексном случае они суть все возможные *тета-дивизоры Римана* с заданной поляризацией. В общем случае их называют так же.

**1.7. Эллиптические кривые.** Согласно пункту 1.2, эллиптическая кривая $C$ есть кривая рода 1 с фиксированной точкой 0. (Точка 0 также определяет единственную главную поляризацию.) В этом пункте предполагается, что $\operatorname{char} k \neq 2, 3$. Многие конструкции и утверждения тогда аналогичны комплексным. Инволюция $p \mapsto -p$ определяет гиперэллиптическую проекцию $\gamma: C \to C/_{-p\sim p} = \mathbf{P}^1$, четыре точки ветвления которой суть точки второго порядка на $C$. Выберем на $\mathbf{P}^1$ такую аффинную координату, что $\gamma(0) = \infty$, а образы остальных точек ветвления 0, 1 и $\lambda$. Параметр $\lambda$ определяет *абсолютный инвариант* кривой $C$ (даже без групповой структуры):

$$j(C) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Теорема 1 ([40]). Эллиптические кривые (или просто кривые рода 1) $C$ и $B$ изоморфны тогда и только тогда, когда $j(C) = j(B)$ (ср. с п. 6.6 гл. 1).

Вложение $\varphi_{3p}: C \to \mathbf{P}^2$ задает изоморфизм на кубику. Выбирая подходящий базис $L(3p)$ при $p=0$ кубику можно привести к достаточно простому виду (ср. с п. 2.6). Так получается

Теорема 2. Кривая $C$ рода 1 изоморфна *кубике в вейерштрассовой нормальной форме*

$$y^2 = 4x - g_2x - g_3, \quad g_2,\ g_3 \in k, \tag{9}$$

при этом $j(C) = g_2^3/\Delta = 1 + 27g_3^2/\Delta$, где $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$.

Рассмотрим полную группу $\operatorname{Aut} C$ автоморфизмов кривой $C$, возможно не сохраняющих групповую структуру. Таковы, например, сдвиги на точку $p \in C: q \mapsto q+p$. Они составляют нормальный делитель $\operatorname{Aut} C$, отождествляемый с $C$ как с эллиптической кривой. При этом $C$ неприводимая компонента 0, поскольку $\dim \operatorname{Aut} C = l(0) = 1$ (см. п. 2.9 гл. 2). Значит, $\operatorname{Aut} C$ раскладывается в полупрямую сумму $C$ и конечной группы $\operatorname{Aut}_0 C$ автоморфизмов, сохраняющих 0. Группа $\operatorname{Aut}_0 C$ также будет группой автоморфизмов эллиптической кривой $C$ как алгебраической группы (см. замечание 2 п. 1.2).

Теорема 3 ([40]). (а) $\operatorname{Aut}_0 C = \{p \mapsto \pm p\} = \mathbf{Z}_2$ при $j(C) \neq 0, 1$.

(б) $\operatorname{Aut}_0 C \simeq \mathbf{Z}_4$ при $j(C) = 1$.

(в) $\operatorname{Aut}_0 C \simeq \mathbf{Z}_6$ при $j(C) = 0$.

Задание кривых из (б) и (в) как плоских кубик и описание их автоморфизмов аналогично комплексному случаю (см. п. 6.6 гл. 1).

Предположим теперь, что $C=\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})$ — комплексная эллиптическая кривая. Тета-функция Римана $\vartheta$ в параллелограмме $\{\alpha+\beta\tau\,|\,0\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant 1\}$ имеет единственный простой нуль $1/2+$ $+\tau/2$ (см. рис. 27). Ему отвечает единственная нечетная

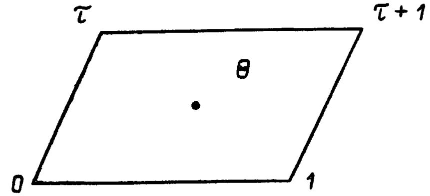



Рис. 27

тета-характеристика $p_1^1=\Theta$. Интегрируя $d\ln\vartheta$ по границе параллелограмма, можно установить это непосредственно [25]. Три оставшиеся точки второго порядка $p_0^0=0$, $p_1^0=1/2$ и $p_0^1=\tau/2 \bmod \mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z}$ суть четные тета-характеристики. Они не вырождены, т. е. функция $\vartheta$ не равна в них нулю. Поэтому четные *тета-константы* $\vartheta\begin{bmatrix}\delta\\ \varepsilon\end{bmatrix}(\tau)\overset{\mathrm{df}}{=}\vartheta\begin{bmatrix}\delta\\ \varepsilon\end{bmatrix}(0,\ \tau)$, $\delta\cdot\varepsilon=0$, не равны нулю всюду на $\mathbf{H}$.

Тета-функция с характеристиками

$$\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z,\ \tau)=e^{\pi\sqrt{-1}\,\tau/4+\pi\sqrt{-1}\,(z+1/2)}\,\vartheta\,(z+1/2+\tau/2,\ \tau)$$

имеет нуль порядка 1 в 0. Пользуясь автоморфными свойствами тета-функции Римана, нетрудно установить аналогичные свойства $\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z,\ \tau)$:

$$\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z+1,\ \tau)=-\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z,\ \tau)$$

и

$$\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z+\tau,\ \tau)=-e^{-\pi\sqrt{-1}\,(2z+\tau)}\,\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z,\ \tau).$$

Следовательно, функция $-\frac{d^2}{dz^2}\ln\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z,\ \tau)$ двоякопериодична по $z$ (с периодами 1 и $\tau$), а ее разложение Лорана в 0 имеет вид $1/z^2+$константа$+$члены положительной четной степени по $z$. Такая функция единственна с точностью до аддитивной константы, поскольку $l(2p)=2$. Сравнивая ее с $\wp$-функцией Вейерштрасса, получаем

Предложение. $\wp(z,\ \mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})=-\frac{d^2}{dz^2}\ln\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z,\ \tau)+c\,(\tau)$, где $c\,(\tau)$ — голоморфная функция на $\mathbf{H}$.

Из соотношений автоморфности для $\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z,\ \tau)$ также вытекает, что $\vartheta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z, \tau)\in L_2$, т. е. функция $\vartheta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z, \tau)$ имеет те же мультипликаторы, что и $\vartheta^2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(z, \tau)=\vartheta^2$. Аналогично, $\vartheta^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(z, \tau)$, $\vartheta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(z, \tau)\in L_2$. Однако поскольку $\dim L_2=2$, функции $\vartheta^2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(z, \tau)$ и $\vartheta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z, \tau)$ составляют базис $L_2$. Поэтому $\gamma=\varphi_{2\cdot 0}=f^2:\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})\to\mathbf{CP}^1$, $z \bmod \mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z}\mapsto\left(\vartheta^2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(z, \tau):\vartheta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z, \tau)\right)$. Нетрудно найти образы его точек ветвления: $f^2(p_0^0)=\infty$, $f^2(p_1^1)=0$, $f^2(p_1^0)=$ $=\vartheta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau)/\vartheta^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau)$ и $f^2(p_0^1)=-\vartheta^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau)/\vartheta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau)$. Значит,

$$\lambda=-\vartheta^4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau)/\vartheta^4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau)$$

для аффинной координаты на $\mathbf{CP}^1$ такой, что $f^2(p_0^0)=\infty$, $f^2(p_1^1)=0$, $f^2(p_1^0)=1$ и $f^2(p_0^1)=\lambda$. Отсюда также можно найти выражение для абсолютного инварианта $j$ через тета-константы $\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau)$ и $\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau)$.

Непосредственно проверяются модулярные свойства тета-констант:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\delta\\\varepsilon\end{bmatrix}(-1/\tau)=(\tau/\sqrt{-1})^{1/2}(-\sqrt{-1})^{\delta\varepsilon}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\\delta\end{bmatrix}(\tau),$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}1\\\varepsilon\end{bmatrix}(\tau+1)=e^{\pi\sqrt{-1}/4}\vartheta\begin{bmatrix}1\\\varepsilon\end{bmatrix}(\tau) \text{ и } \vartheta\begin{bmatrix}0\\\varepsilon\end{bmatrix}(\tau+1)=\vartheta\begin{bmatrix}0\\1-\varepsilon\end{bmatrix}(\tau).$$

Конгруэнц-подгруппа $\Gamma_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\bmod 2\right\}\Big/\pm I$ имеет образующие

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Из модулярных свойств тогда вытекает, что четвертые степени тета-констант $\vartheta^4\begin{bmatrix}\delta\\\varepsilon\end{bmatrix}(\tau)$ являются автоморфными формами веса 2 относительно $\Gamma_2$. Поэтому корректно определено отображение $\lambda:\mathbf{H}/\Gamma_2\to\mathbf{C}$ $\lambda(\tau)=-\vartheta^4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau)/\vartheta^4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau)$. Оказывается, $\lambda$ — координата римановой поверхности $\mathbf{H}/\Gamma_2\underset{\lambda}{\tilde{\to}}\mathbf{C}-\{0, 1\}$ [25]. При этом $\lambda(\Gamma_2 i\infty)=0$, $\lambda(\Gamma_2 0)=\infty$ и $\lambda(\Gamma_2 1)=1$. Аналогично, отображение $\mu(\tau)=\vartheta^4\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau)/\vartheta^4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau)$ определяет координату $\mu$ с $\mu(\Gamma_2 i\infty)=1$, $\mu(\Gamma_2 0)=\infty$ и $\mu(\Gamma_2 1)=0$. Поэтому $\mu=1-\lambda$, откуда вытекает *тета-соотношение Римана*

$$\vartheta^4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau)+\vartheta^4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau)=\vartheta^4\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau).$$

Наконец, можно ввести более общие тета-константы как значения производных тета-функций с характеристиками в 0. Однако по существу при этом новые константы не появляются. Это подтверждает следующее очень красивое соотношение, известное как *тождество Якоби*:

$$\frac{\partial}{\partial z}\vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z,\tau)\big|_{z=0}=(-\pi)\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\tau)\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(\tau)\,\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\tau).$$

Подробнее об этих и подобных формулах, а также об их происхождении можно прочитать в классическом учебнике [74].

## § 2. Якобианы кривых и римановых поверхностей

В этом параграфе $C$ обозначает неособую проективную кривую рода $g$. Если $k=\mathbf{C}$, то, согласно примеру 2 пункта 1.3, риманова поверхность $C^{an}$, ассоциированная с $C$, определяет г. п. тор $J(C^{an})$ — якобиан $C^{an}$. Он, в свою очередь, ассоциирован с г. п. абелевым многообразием, называемым якобианом кривой $C$ и обозначаемым через $J(C)$. Сразу же возникает вопрос: нельзя ли многообразие $J(C)$ и его поляризацию построить алгебро-геометрически по кривой $C$, минуя столь трансцендентные процедуры, как интегрирование и нахождение дивизоров как множества нулей функций, заданных рядами на универсальной накрывающей. Положительный ответ на него связан с теоремами Абеля и Якоби, а также теоремой Римана о нулях тета-функции, обсуждаемых ниже. По пути дается определение и выясняются простейшие свойства якобианов алгебраических кривых над произвольным алгебраически замкнутым полем $k$.

**2.1. Главные дивизоры на римановых поверхностях.** Пусть $S$ — компактная риманова поверхность рода $g$. Как мы уже знаем, всякий главный дивизор $D$ имеет степень 0. Поэтому главные дивизоры заведомо лежат в подгруппе $\mathrm{Div}^0 S\subset\subset\mathrm{Div}\, S$ дивизоров степени 0. С другой стороны, всякий дивизор $D=\Sigma p_i-q_i$ степени 0 определяет $\mathbf{C}$-линейное отображение интегрирования

$$\sum\int_{q_i}^{p_i}:\Omega\to\mathbf{C}$$

$$\omega\mapsto\sum\int_{q_i}^{p_i}\omega,$$

где интегралы $\int_{q_i}^{p_i}$ берутся по фиксированным путям, соединяющим точки $p_i$ и $q_i$. Очевидно, данные отображения при различном выборе порядка точек $p_i$, $q_i$ и путей, соединяющих их, отличаются на векторы $\int\limits_c$, $c\in H_1(S, \mathbf{Z})$, образующие решетку $\Lambda$ в $\Omega^\vee$. Поэтому корректно определен голоморфный гомоморфизм

$$a: \mathrm{Div}^0 S \to J(S) = \Omega^* / \Lambda,$$

$$\sum p_i - q_i \mapsto \sum \int\limits_{q_i}^{p_i} \mathrm{mod}\, \Lambda$$

Пример. Пусть $D=(f)$ — главный дивизор, где $f\in\mathcal{M}(S)$. Нетрудно проверить голоморфность отображения $\mathbf{CP}^1 \to J(S)$, $\varphi(z) = a((f-z))$ и $\varphi(\infty)=0$. Это отображение, как и всякое другое голоморфное отображение $\varphi: \mathbf{CP}^1 \to \mathbf{C}^g/\Lambda$ римановой сферы в тор, постоянно. Действительно, дифференциалы $dz_i$ задают на торе $\mathbf{C}^g/\Lambda$ голоморфные дифференциалы, порождающие кокасательное пространство в каждой его точке. Однако $\varphi^* dz_i = 0$, так как $g(\mathbf{CP}^1)=0$. Следовательно, $\varphi = \mathrm{const}$. В нашем случае $a(D) = \varphi(0) = \varphi(\infty) = 0$, откуда $a(D)=0$ для всякого главного дивизора $D$.

Теорема Абеля ([31]). Дивизор $D\in\mathrm{Div}^0 S$ является главным в том и только том случае, когда $a(D) = 0 \in J(S)$.

**2.2. Проблема обращения.** Задачу о нахождении по точке $p\in J(S)$ дивизора $D\in\mathrm{Div}^0 S$ с $a(D)=p$ называют проблемой обращения.

Теорема об обращении Якоби. $a: \mathrm{Div}^0 S \to J(S)$ — эпиморфизм.

Поэтому проблема обращения всегда разрешима. В координатной форме это означает, что при фиксированном базисе $\omega_1, \ldots, \omega_g \in \Omega$ для любого вектора $(z_1, \ldots, z_g) \in \mathbf{C}^g$ имеются точки $p_i$, $q_i \in S$ такие, что

$$\left(\sum \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_1, \ldots, \sum \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_g\right) \equiv (z_1, \ldots, z_g) \,\mathrm{mod}\, \Lambda.$$

На самом деле, можно фиксировать любые $g$ точек $q_1, \ldots, q_g$ и подбирать точки $p_1, \ldots, p_g$. Последнее равносильно сюръективности отображения $f: S_g \to J(S)$, переводящего эффективный дивизор $\Sigma p_i$, рассматриваемый как точка симметрического произведения $S_g$, в точку $a(\Sigma p_i - \Sigma q_i)$. Это отображение является примером нормированного отображения Абеля (см. ниже п. 2.4). Оно голоморфно и даже регулярно, если якобиан $J(S)$ отождествить с соответствующим ему комплексным абелевым многообразием, а симметрическое произведение $S_g$ с $g$-кратным симметрическим произведением алгебраической кривой компактной римановой поверхности $S$. По теореме Абеля и предложению 3 пункта 2.9 гл. 2 $f$ взаимно однозначно в общей точке. Но $\dim S_g = \dim J(S)$. Значит, по теореме пункта 1.3, гл. 2 или по ее комплексному аналогу, теореме о собственном отображении, сюръективно. То же самое легко получить из непосредственной проверки отличия от нуля якобиана (в смысле математического анализа) отображения $f$ в общей точке $S_g$ [31]. Явное решение проблемы обращения обсуждается в пункте 2.5.

Из теорем Абеля и Якоби вытекает

Теорема. Отображение $a$ задает изоморфизм $\mathrm{Div}^0 S/_\sim \xrightarrow{\sim} J(S)$.

Тем самым, точки якобиана $J(S)$ отождествляются с классами линейной эквивалентности дивизоров степени 0 римановой поверхности $S$. Последнее служит отправной точкой при определении якобианов алгебраических кривых.

**2.3. Группа Пикара.** Группу

$$\mathrm{Pic}\, C = \mathrm{Div}\, C/\sim$$

классов дивизоров по линейной эквивалентности называют *группой Пикара* алгебраической кривой $C$. Она обладает естественной градуировкой

$$\mathrm{Pic}\, C = \bigoplus_d \mathrm{Pic}^d\, C,$$

где $\mathrm{Pic}^d\, C = \mathrm{Div}^d\, C/\sim$ — множество классов дивизоров степени $d$. Оказывается, на каждом из этих множеств $\mathrm{Pic}^d\, C$ имеется единственная естественная, в выясняемом ниже смысле, структура проективного алгебраического многообразия. При этом группа $\mathrm{Pic}^0\, C$ превращается в абелево многообразие, называемое *якобианом кривой* $C$. (Более полное определение приводится в п. 2.5)

**2.4. Многообразия Пикара и их универсальность.** Существование структуры алгебраического многообразия на $\mathrm{Pic}^d\, C$ связано с существованием структуры алгебраического многообразия на множестве эффективных дивизоров одной степени. Действительно, эффективные дивизоры степени $d$ на кривой $C$ можно отождествить с точками $d$-кратного симметрического произведения $C_d$. По предложению 3 пункта 2.9 гл. 2 эффективные дивизоры $D \in \mathrm{Div}^g\, C$ с $L(D)=1$ составляют открытое подмножество $U \subset C_g$. Оказывается, множество $\mathrm{Pic}^d\, C$ можно превратить в алгебраическое многообразие, склеивая несколько экземпляров (квазипроективных) многообразий $U$. Неканонический изоморфизм сдвига

$$\mathrm{Pic}^0\, C \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^d\, C, \quad D'/\sim \;\mapsto (D'+D)/\sim \tag{10}$$

на класс дивизора $D \in \mathrm{Div}^d\, C$ позволяет ограничиться случаем $\mathrm{Pic}^0\, C$. Обращая (10) при $d=g$, получаем вложение $U$ в $\mathrm{Pic}^0\, C$ на подмножество, открытое по определению. Тогда требование регулярности группового закона однозначно задает на $\mathrm{Pic}^0\, C$ структуру алгебраического многообразия. При этом $\mathrm{Pic}^0\, C$ превращается в коммутативную алгебраическую группу, а $\mathrm{Pic}^d\, C$ в главное однородное многообразие относительно естественного действия $\operatorname{Pic}^0 C$. Последнее, кроме регулярности и транзитивности, включает главность действия: $(D'+D)/\sim = D/\sim$, если и только если $D'/\sim = 0$ в $\operatorname{Pic}^0 C$.

Определение 1. Многообразие $\operatorname{Pic}^d C$ называют *многообразием Пикара* степени $d$ кривой $C$.

Многообразие $\operatorname{Pic}^d C$ неприводимо и его размерность равна $g$, роду кривой $C$. Более характерное свойство многообразия Пикара — его универсальность относительно алгебраических семейств дивизоров. Под *семейством дивизоров* на кривой $C$ с базой $T$ понимают отображение вида $f: T \to \operatorname{Div} C$, где $T$ — алгебраическое многообразие, предполагаемое здесь для простоты неособым. Семейство $f$ называют алгебраическим, если на произведении $C\times T$ имеется дивизор $D$, задающий $f$, т. е. $f(t) = D|_{C\times t}$, $t\in T$. (Ограничение $D|_{C\times t}$ определяется аналогично ограничению дивизоров $D$ в примере 5 п. 2.2 гл. 2.) Многообразие $\operatorname{Pic}^d C$ универсально в следующем смысле.

Теорема. Для всякого алгебраического семейства $f: T \to \operatorname{Div}^d C$ дивизоров степени $d$ индуцированное отображение $f/\sim: T \to \operatorname{Pic}^d C$, $t \mapsto f(t)/\sim$ регулярно.

Пример 1. Алгебраическое семейство $C_d \subset \operatorname{Div}^d C$ эффективных дивизоров степени $d$ определяет регулярное отображение

$$\mu_d: C_d \to \operatorname{Pic}^d C, \quad D \mapsto D/\sim,$$

называемое *отображением Абеля*. Слои $\mu_d^{-1}(D/\sim)$ отображения Абеля суть полные линейные системы $|D|$ степени $d$. Из предложений 2 и 3 пункта 2.9 гл. 2 вытекает

Предложение. Отображения Абеля

(а) сюръективны при $d \geqslant g$,

(б) взаимно однозначны в общей точке при $d \leqslant g$.

Следовательно, по теореме пункта 1.3 гл. 2 многообразие $\operatorname{Pic}^g C = \mu_g(C_g)$, а вместе с ним и всякое другое многообразие Пикара $\operatorname{Pic}^d C$ проективно. В частности, $\operatorname{Pic}^0 C$ — абелево многообразие.

Определение 2. Абелево многообразие $\operatorname{Pic}^0 C$, также обозначаемое через $J(C)$, называют *якобианом кривой* $C$.

Пример 2. Также регулярно *нормализованное отображение Абеля*

$$a_d: C_d \to J(C), \quad D \mapsto (D - D')/\sim,$$

где $D'$ — фиксированный дивизор степени $d$ на $C$. В качестве такого дивизора часто берут $D' = dp$, $p\in C$. Согласно примеру пункта 2.5 гл. 2, отображение $a_1: C \to J(C)$ при $g \geqslant 1$ взаимно однозначно. Более того, можно проверить, что $a_1$ — вложение.

Замечание 1. Отображение Абеля $a_1: C \to J(C)$ универсально в следующем смысле. Для всякого регулярного отображения $f: C \to A$ в абелево многообразие $A$ имеется единственный регулярный гомоморфизм $F: J(C) \to A$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "f"'] & J(C) \arrow[d, "F"] \\ & A \end{tikzcd}$$

коммутативна. Соответствующий подход к определению и описанию якобианов кривых, возможно особых, приведен в [64].

Остановимся подробнее на комплексном случае. По теореме пункта 2.2 якобиан $J(C)$ отождествим с $J(C^{an}) = \Omega^{\hat{}}/\Lambda$. Более того, нетрудно установить следующую теорему сравнения: $J(C)^{an} = J(C^{an})$. Ее дополняет традиционная интегральная запись отображения Абеля $a_d: C_d \to J(C)$, нормированного эффективным дивизором $D = \Sigma q_i$ степени $d$:

$$a_d\left(\sum p_i\right) = \sum \int_{q_i}^{p_i} \bmod \Lambda$$

или в координатной форме

$$a_d\left(\sum p_i\right) = \left(\sum \int_{q_i}^{p_i} \omega_1, \ldots, \sum \int_{q_i}^{p_i} \omega_g\right) \bmod \Lambda.$$

Замечание 2. Подробнее с универсальностью многообразий Пикара алгебраических кривых и многообразий более высокой размерности можно познакомиться в [21], [32], [54].

**2.5. Дивизоры поляризации якобиана кривой. Формулы Пуанкаре.** Согласно предложению предыдущего пункта, отображение Абеля $a_{g-1}: C_{g-1} \to J(C)$ бирационально на образ. Его образ $\Theta = a_{g-1}(C_{g-1})$ является неприводимыми подмногообразиями размерности $g-1$, а потому простым дивизором на $J(C)$. По конструкции дивизор $\Theta \subset J(C)$ определен однозначно с точностью до сдвига. Более того, он представляет дивизор главной поляризации. Это вытекает из определения главной поляризации и следующей формулы при $d=0$.

Теорема (Пуанкаре). $a_d(C_d) = \frac{1}{(g-d)!}\Theta^{g-d}$, $0 \leqslant d \leqslant g$.

Здесь «$=$» обозначает численную эквивалентность, т. е. для любых дивизоров $D_1, \ldots, D_d$ на $J(C)$ совпадают пересечения

$$a_d(C_d) D_1 \ldots D_d = \frac{1}{(g-d)!}\Theta^{g-d} D_1 \ldots D_d.$$

В комплексном случае «$=$» можно заменить на гомологичность. Топологическое доказательство теоремы в этом случае можно найти в [19]. Итак, якобиан $J(C)$ обладает вполне естественной главной поляризацией, что дает более полное представление о нем как о г. п. абелевом многообразии, ассоциированном с кривой. В комплексном случае возникает вопрос о согласованности данной поляризации с поляризацией, задаваемой тета-дивизором Римана. Оказывается, они совпадают.

Теорема Римана о тета-дивизоре. Пусть $C$ — комплексная кривая, Тета-дивизор Римана $\Theta$ совпадает с точностью до сдвига с дивизором поляризации $a_{g-1}(C_{g-1})\subset\subset J(C)$, т. е. $\Theta=a_{g-1}(C_{g-1})+\varkappa$ для некоторой точки $\varkappa\in J(C)$.

Отсюда снова получаем, что в комплексном случае $a_{g-1}(C_{g-1})$ — дивизор главной поляризации. Чисто топологическое доказательство теоремы основано на вычислении фундаментального класса дивизора $a_{g-1}(C_{g-1})$ [31]. Имеется и более прямое доказательство, восходящее к Риману (современное изложение см. в [31] и [50]). Фиксируя точку $q\in C$, рассмотрим отображение $a_1: C\to J(C)=\mathbf{C}^g/\Lambda$, $p\mapsto(p-q)/\sim=\left(\int\limits_q^p\omega_1,\ldots,\int\limits_q^p\omega_g\right)\operatorname{mod}\Lambda$. Заметим, что по формуле Пуанкаре при $d=1$

$$a_1(C)\cdot a_{g-1}(C_{g-1})=\frac{1}{(g-1)!}\,a_{g-1}(C_{g-1})^g=g.$$

(Это легко проверить и непосредственно!) Поэтому сдвиги $\Theta+t$ дивизора Римана на общие точки $t\in J(C)$ должны также пересекать $a_1(C)$ (кривую при $g\geqslant 1$) по $g$ точкам с учетом кратностей. Последнее можно установить, интегрируя по границе развертки $C^{an}$ дифференциал $d\ln\vartheta\left(\int\limits_q^p\omega_1-z_1,\ldots,\int\limits_q^p\omega_g-z_g\right)$ от переменной $p$, где $\vartheta$ — тета-функция Римана и $t=(z_1,\ldots,z_g)\operatorname{mod}\Lambda$. Следовательно, дивизор $\Theta+t$ задает на $C$ эффективный дивизор $a_1^*(\Theta+t)=\sum p_i(t)$ степени $g$. Снова с помощью интегрирования проверяется, что

$$a_g\left(\sum p_i\ (t)\right)\varkappa=\sum a_1(p_i(t))+\varkappa=t,$$

где $\varkappa$ не зависит от $t$. Отметим, что последнее соотношение дает обещанное ранее явное решение проблемы обращения для точки $t\in J(C)$, тогда $a_1(C)$ не лежит целиком в $\Theta+t$. В частности, общая точка $t$ определяет общий эффективный дивизор $\Sigma p_i(t)$ степени $g$. По конструкции $a_1(p_g(t))-t\in\Theta$, откуда в силу симметричности дивизора Римана (это решающий шаг)

$$a_{g-1}\left(\sum_{i=1}^{g-1}p_i(t)\right)+\varkappa=\sum_{i=1}^{g-1}a_1(p_i(t))+\varkappa=t-a_1(p_g(t))\in-\Theta=\Theta.$$

Значит, $a_{g-1}(C_{g-1})+\varkappa\subseteq\Theta$. Обратное включение выводится из общих свойств главной поляризации. Имеется и более прямое доказательство этого последнего шага [31], использующее алгебраический вариант теоремы об обращении Якоби: $a_g(C_g)=J(C)$. Возвращаясь к общему случаю кривой $C$ над полем $k$, рассмотрим

Пример 1. Пусть $g=2$. Тогда $a_1$ — вложение и дивизор поляризации $a_1(C)$ изоморфен самой кривой $C$. Тем самым, по г. п. якобиану $J(C)$ кривой $C$ рода 2 кривая $C$ восстанавливается однозначно с точностью до изоморфизма.

Замечание. Последний факт есть частный случай теоремы Торелли: кривая с точностью до изоморфизма определяется своим г. п. якобианом. (Подробнее об этом в обзоре В. С. Куликова и Вик. С. Куликова по структурам Ходжа, см. также [31], [19]).

Все дивизоры поляризации $a_{g-1}(C_{g-1})\subset J(C)$ могут быть получены с помощью изоморфизмов (10) из одного дивизора

$$\Theta=\mu_{g-1}(C_{g-1})\subset \mathrm{Pic}^{g-1}C,$$

называемого *каноническим дивизором поляризации*. Его точки суть классы линейной эквивалентности дивизоров $D\in\mathrm{Div}^{g-1}C$ с $l(D)\geqslant 1$. Отсюда по формуле Римана—Роха получается

Лемма. $K/\sim-\Theta=\Theta$, где $K/\sim\in\mathrm{Pic}^{2g-2}C$ — канонический класс.

Следствие. Класс линейной эквивалентности дивизора $D\in\mathrm{Div}^{g-1}C$ является точкой симметрии или тета-характеристикой канонического дивизора поляризации $\Theta\subset\mathrm{Pic}^{g-1}C$ в точности тогда, когда $2D\sim K$.

Определение. Класс линейной эквивалентности $D/\sim\in\in\mathrm{Pic}^{g-1}C\subset 2D\sim K$ называют *тета-характеристикой* $C$. Таким образом, тета-характеристики дивизора $\Theta\subset\mathrm{Pic}^{g-1}C$ есть тета-характеристики кривой $C$. При этом четность тета-характеристики кривой $C$ определяется соответственно ее четности как тета-характеристики $\Theta$. Имеется и более непосредственный способ определения четности.

Предложение. Четность тета-характеристики $D/\sim$ кривой $C$ совпадает с четностью $l(D)$.

Этот результат вытекает из теоремы Римана об особенностях тета-дивизора: кратность канонического дивизора поляризации $\Theta$ в точке $D/\sim\in\mathrm{Pic}^{g-1}C$ равна $l(D)$ (см. [19] и следующую часть обзора). Далее предполагается, что $\mathrm{char}\, k\neq 2$. Тогда по теореме 3 пункта 1.6 на $C$ имеется $2^{g-1}(2^g+1)$ четных и $2^{g-1}(2^g-1)$ нечетных тета-характеристик. Изоморфизмы (10) канонического дивизора поляризации $\Theta\subset\mathrm{Pic}^{g-1}C$ для четных тета-характеристик $D'/\sim$ задают все возможные тета-дивизоры Римана г. п. якобиана $J(C)$, т. е. все такие г. п. дивизоры имеют вид $\Theta-D'/\sim$.

Пример 2. Если $D/\sim$ — тета-характеристика, не лежащая на $\Theta$, то она четна и $l(D)=0$. Четные *тета-характеристики* $D/\sim\subset l(D)=0$ называют *невырожденными*. Аналогично, нечетная *тета-характеристика* $D/\sim$ *невырождена*, если $l(D)=1$. Невырожденная нечетная тета-характеристика содержит единственный эффективный дивизор. Все тета-характеристики общей кривой невырождены.

Пример 3. Пусть $C$ — гиперэллиптическая кривая, $p_1, \ldots, p_{2g+2}$ точки ветвления ее гиперэллиптической проекции, а $D$ — дивизор соответствующей гиперэллиптической линейной системы $g_2^1$. Тета-характеристики на $C$ имеют вид

$$(mD + p_{i_1} + \ldots + p_{i_{g-1}} - 2m)/\sim,$$

где $-1 \leqslant m \leqslant (g-1)/2$ и точки $p_{i_j}$ различны. Такие тета-характеристики совпадают лишь для $m=1$ и

$$-D + p_{i_1} + \ldots + p_{i_{g+1}} \sim -D + p_{j_1} + \ldots + p_{j_{g+1}},$$

когда $\{i_1, \ldots, i_{g+1}, j_1, \ldots, j_{g+1}\} = \{1, \ldots, 2g+2\}$. Четность указанных характеристик равна четности $m+1$. Они невырождены при $m \leqslant 0$.

Пример 4. Общая кривая рода 3 изоморфна общей плоской квартике $C \subset \mathbf{P}^2$, ее канонической кривой. На ней имеется $2^2(2^3-1) = 28$ нечетных тета-характеристик $D/\sim$, где $D$ — ее единственный эффективный представитель. По геометрической интерпретации формулы Римана—Роха имеется взаимно однозначное соответствие $D \mapsto \bar{D}$ между нечетными тета-характеристиками и бикасательными к $C$. Поэтому общая квартика имеет 28 бикасательных (ср. с примером 5 п. 3.15 гл. 2).

**2.6. Якобиан кривой рода 1.** Предположим теперь, что $C$ — кривая рода 1. Отображение Абеля $a_1 : C \to J(C)$, $q \mapsto (q-p)/\sim$ является изоморфизмом, превращающим $C$ в эллиптическую кривую с $0=p$ (ср. с примером п. 1.2). В частности, имеется канонический изоморфизм $a_1 : C \to J(C)$, $q \mapsto (q-0)/\sim$ эллиптической кривой $C$ с ее якобианом. Это значит, что для любого дивизора $\Sigma p_i$ степени 0 на эллиптической кривой

$$\Sigma p_i = \Sigma p_i/\sim,$$

где $\Sigma$ — слева в смысле групповой структуры $C$.

Пример. Рассмотрим неособую плоскую кубику $C \subset \mathbf{P}^2$. Дивизор $D$ ее гиперплоского сечения определяет класс $D/\sim \in \mathrm{Pic}^3 C$. Очевидно, отображение $\mathrm{Pic}^1 C \to \mathrm{Pic}^2 C$, $p \mapsto 3p$, изоморфно изогении $3 : J(C) \to J(C)$, а потому сюръективно. Значит, $D \sim 3p$, $p \in C$. Отсюда по линейной нормальности кривая $C$ есть образ вложения $\varphi_{3p} : C \hookrightarrow \mathbf{P}^2$. Пользуясь этим, нетрудно установить, что всякая неособая плоская кубика в характеристике $\neq 2$ при подходящем выборе координат задается уравнением степени 3 в вейерштрассовой нормальной форме (9) (см. теорему 2 п. 1.7). При этом бесконечно удаленная точка $p$ является точкой перегиба $C$; касательная в ней будет бесконечно удаленной прямой. Введем на $C$ структуру эллиптической кривой с $0=p$. Тогда по предыдущему для всякого дивизора гиперплоского сечения $p_1+p_2+p_3 = p_1+p_2+p_3-3\cdot 0 = (p_1+p_2+p_3-$

$-3\cdot 0)/\sim =0$, т. е. $p_1+p_2+p_3=0$, откуда получается известная геометрическая интерпретация групповой структуры $C$ (см. рис. 28). Поэтому все точки перегиба $p$ на $C$ удовлетворяют

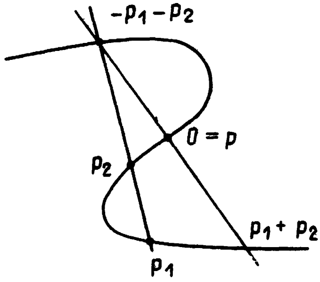



Рис. 28

соотношению $3p=0$ и по теореме 1 пункта 1.6 при $\operatorname{char} k \neq 3$ на $C$ имеется 9 точек перегиба. В случае $\operatorname{char} k=3$, имеются 3 точки перегиба для общей кубики $C$ и 1 для суперсингулярной. Геометрическую интерпретацию групповой структуры легко переписать в координатном виде. Если кубика $C$ задана в вейерштрассовой нормальной форме (9) с 0 на бесконечности, то для точек

$$p_1=(x_1, y_1), \quad p_2=(x_2, y_2),$$

$$p_1+p_2=\left(-x_1-x_2+\frac{1}{4}\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2, (x_1+x_2)\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^3-\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_2-x_1}\right)$$

и $-p_1=(x_1, -y_1)$. Отсюда очевидна рациональность, а потому и регулярность операций. Кроме того, в комплексном случае формула для $p_1+p_2$ непосредственно связана с теоремой сложения для $\wp$-функции [44].

Пока все. Другие вопросы теории алгебраических кривых будут обсуждаться в одном из следующих томов серии.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Алексеев В. Б.*, Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: Наука, 1976, 208 с.
2. *Белый Г. В.*, О расширениях Галуа максимального кругового поля. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, *43*, № 2, 267—276
3. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.*, Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1979, 760 с.
4. —, —, —, Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1984, 344 с.
5. *Зархин Ю. Г., Паршин А. Н.*, Проблемы конечности в диофантовой геометрии. Дополнение к книге С. Ленга «Основы диафантовой геометрии». М.: Мир, 1986, 369—438
6. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.*, Линейная алгебра и геометрия. М.: МГУ, 1980, 318 с.

7. *Коцило П. И.*, Рациональность пространств модулей гиперэллиптических кривых. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1984, *48*, № 4, 705—710
8. *Манин Ю. И.*, Кубические формы. М.: Наука, 1972, 304 с.
9. *Петровский И. Г.*, Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961, 400 с.
10. Проблемы Гильберта. М.: Наука; 1969, 225 с.
11. *Чеботарев Н. Г.*, Теория алгебраических функций. М. — Л.: Гостехиздат, 1948, 396 с.
12. *Шабат Б. В.*, Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 576 с.
13. *Шафаревич И. Р.*, Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972, 567 с.
14. —, Основные понятия алгебры. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1986, *11*, 5—288
15. *Шокуров В. В.*, Теорема Нетера — Энриквеса о канонических кривых. Мат. сб., 1971, *86*, № 3, 361—408
16. —, Существование прямой на многообразиях Фано. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, *43*, № 4, 922—964
17. *Ahlfors L.*, Lectures on quasiconformal mappings. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1966, 146 pp. (Пер. на рус. яз.: *Альфорс Л.*, Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969, 133 с.)
18. —, *Sario L.*, Riemann surfaces. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1960, 382 pp.
19. *Arbarello E., Cornalba M., Griffiths P., Harris J.*, Geometry of algebraic curves. V. *I*. New York e. a.: Springer, 1984, 386 pp.
20. —, *Sernesi E.*, Petri's approach to the study of ideals associated to a special divisor. Invent. math., 1978, *49*, № 1, 99—119
21. *Artin M.*, Algebraization of formal moduli: I. Global Analysis. Univ. of Tokyo Press, Princeton Univ. Press, 1969, 21—71
22. *Babbage D.*, A note on the quadrics through a canonical curve. J. London Math. Soc., 1939, *14*, 310—315
23. *Bers L.*, Quasiconformal mappings and Teichmuller's theorem. Analitic functions. Princeton, NJ.: Princeton Univ. Press, 1960, 89—120 (Пер на рус. яз. см. в кн. *Альфорс Л., Берс Л.*, Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М.: ИЛ, 1961, 178 с.)
24. *Chevalley C.*, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable. New Jersey: Waverly Press, 1951, 188 pp. (Пер. на рус. яз.: *Шевалле К.*, Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной. М.: Физматгиз, 1959, 334 с.)
25. *Clemens H.*, A scrapbook of complex curve theory. New York e. a., Plenum Press, 1980, 286 pp. (Пер на рус. яз.: *Клеменс Г.*, Мозаика теории комплексных кривых. М.: Мир, 1984, 160 с.)
26. *Deligne P., Mumford D.*, The irreducibility of the space of curves of given genus. Instit. Hautes Etudes Scientif., Publ. Math., 1969, № 36, 75—110 (Пер на рус. яз.: *Делинь П., Мамфорд Д.*, Неприводимость многообразия кривых заданного рода. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1972, *16*, № 3, 15—53)
27. *Dold A.*, Lectures on algebraic topology. Berlin e. a.: Springer, 1980, 377 pp. (Пер. на рус. яз.: *Дольд А.*, Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976, 463 с.)
28. *Eisenhart L. P.*, Differential geometry. Princeton, NJ.: Princeton Univ. Press, 1947
29. *Enriques F.*, Sulle curve canoniche di genere $p$ dello spazio a $p-1$ dimensioni. Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, 1919, *23*, 80—82
30. *Forster O.*, Riemannsche Flächen. Berlin e. a.: Springer, 1977, 223 S. (Пер. на рус. яз.: *Форстер О.*, Римановы поверхности. М.: Мир, 1980, 248 с.)
31. *Griffiths P., Harris J.*, Principles of algebraic geometry. New York: Wiley-Inter. Science, 1978, 813 pp. (Пер. на рус. яз.: *Гриффитс Ф., Харрис Дж.*, Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982, 862 с.)

32. *Grothendieck A.*, Technique de descente et théorèmes d'existence en géometrie algébrique. V. Les schémas de Picard: théorèmas d'existence. Sém. Bourbaki, 1961—62, année 14, 232/01—232/19.
33. —, On the de Rham cohomology of algebraic verieties. Instit. Hautes Etudes Scientif., Publ. Mathem., 1966, № 29, 95—103
34. *Gunning R. C.*, Lectures on Riemann surfaces, Jacobi varieties. Princeton, NJ.: Princeton Univ. Press, 1972, 189 pp.
35. —, *Rossi H.*, Analytic functions of several complex variables. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice—Hall, Inc., 1965, 317 pp. (Пер. на рус. яз.: *Ганнинг Р., Росси X.*, Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969, 396 с.)
36. *Halphen G.*, Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques. J. Ec. Polyt., 1882, *52*, 1—200
37. *Harris J.*, On the Kodaira dimension of the moduli space of curves. II: the even genus case. Invent. math., 1984, *75*, № 3, 437—466.
38. —, *Mumford D.*, On the Kodaira dimension of the moduli space of curves. Invent. math., 1982, *67*, № 1, 23—86
39. —, On the Severy problem. Invent. math. 1986, *84*, № 3, 445—461
40. *Hartshorne R.*, Algebraic geometry. New York e. a.: Springer, 1983, 496 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хартохорн Р.*, Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981, 599 с.)
41. —, Genre des courbes algébriques dans l'espace projectif (d'apres L. Gruson et C. Peskine). Astérisque, 1982, № 92—93, 301—313
42. *Hirsch M.*, Differential topology. New York e. a.: Springer, 1976, 221 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хирш М.*, Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979, 280 с.)
43. *Hörmander L.*, An introduction to complex analysis in several variables. D. Van Nostrand Company, 1966, 208 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хермандер Л.*, Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968, 280 с.)
44. *Hurwitz A.*, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. *Courant R.*, Hrsg. und ergänzt durch einen Abschnitt über geometrische Funktionentheorie. Berlin: Springer, 1964, 706 S. (Пер. на рус. яз.: *Гурвиц А., Курант Р.*, Теория функций. М.: Наука, 1968, 648 с.)
45. —, Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, Math. Ann., 1891, *39*, 1—61
46. *Kleiman S.*, The enumerative theory of real and complex singularities. Proceedings of the Nordic Summer School/NAVF, Oslo, 1976, 297—396 (Пер. на рус. яз.: *Клейман С.*, Численная теория особенностей. Успехи матем. наук: 1980, *35*, № 6, 69—148)
47. *Klein F., Fricke R.*, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, *I, II*. Leipzig — Berlin: Teubner, 1926, 634 S. 668 S.
48. *Kra I.*, Automorphic forms and Kleinian groups. Massachusetts: W. A. Benjamin, 1972 (Пер. на рус. яз.: *Кра И.*, Автоморфные формы и клейновы группы. М.: Мир, 1975, 296 с.)
49. *Lang S.*, Introduction to algebraic and Abelian functions. New York e. a.: Springer, 1982, 172 pp. (Пер. на рус. яз.: *Ленг С.*, Введение в алгебраические и абелевы функции. М.: Мир, 1976, 136 с.)
50. *Lewittes J.*, Riemann surfaces and the theta function. Acta math., 1964, *111*, 37—61
51. *Massey W.*, Algebraic topology: an introduction. New York e. a., Springer, 1984, 261 pp. (Пер на рус. яз.: см. в кн. *Масси У., Столлингс Дж.*, Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977, 7—278).
52. *Milne J.* Étale cohomology. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1980, 323 pp. (Пер. на рус. яз.: *Милн Дж.*, Этальные когомологии. М.: Мир, 1983, 392 с.)
53. *Mumford D.*, Geometric invariant theory. Berlin e. a., Springer, 1965, 146 pp. (Пер. на рус. яз.: см. в кн. *Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д.*, Геометрическая теория инвариантов. М.: Мир, 1974, 126—265).
54. —, Lectures on curves on an algebraic surface. Princeton, New Jersey:

Princeton Univ. Press, 1966, 200 pp. (Пер. на рус. яз.: *Мамфорд Д.*, Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир, 1968, 236 с.)
55. —, Abelian varieties. Oxford Univ. Press, 1970, 242 pp. (Пер. на рус. яз.: *Мамфорд Д.*, Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971, 300 с.)
56. —, Curves and their Jacobians. Ann Arbor, the Univ. of Michigan Press, 1975, 104 pp.
57. —, Algebraic geometry I. Complex projective varieties. New York e. a.: Springer, 1976, 186 pp. (Пер. на рус. яз.: *Мамфорд Д.*, Алгебраическая геометрия I. Комплексные проективные многообразия. М.: Мир, 1979, 256 с.)
58. *Narasimhan R.*, Analysis on real and complex manifolds. Univ. de Genéve, Switzerland, 1968, (Пер. на рус. яз.: *Нарасимхан Р.*, Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971, 232 с.)
59. *Noether M.*, Zur Grundlegung der theorie der Algebraischen Raumcurven. Berlin: Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften, 1883
60. *Petri K.*, Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veränderlichen. Math. Ann., 1922, *88*, 242—289
61. *Rado T.*, Über den Begriff der Riemannschen Flächen. Acta Szeged, 1925, *2*, 101—121
62. *Saint-Donat B.*, On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve. Math. Ann., 1973, *206*, 157—175
63. *Sario L., Nakai M.*, Classification theory of Riemann surfaces. Berlin e. a.: Springer, 1970, 446 pp.
64. *Serre J.-P.*, Groupes algébriques et corps de classes. Paris: Hermann, 1959, 202p. (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.*, Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968, 285 с.)
65. —, Géometrie algébrique et géometrie analitique. Ann. Inst. Fourier, 1956, *6*, 1—42
66. *Shimura G.*, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1971, (Пер. на рус. яз.: *Шимура Г.*, Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. М.: Мир, 1973, 326 с.)
67. *Siegel C.*, Analytic functions of several complex variables. Lectures delivered at the Institute for Advancer Study. Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1948—49, 200 pp. (Пер. на рус. яз.: *Зигель К.*, Автоморфные формы нескольких комплексных переменных. М.: ИЛ, 1954, 167 с.)
68. *Spivak M.*, Culculus on manifolds. Benjamin, Inc., 1965 (Пер. на рус. яз.: *Спивак М.*, Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968, 164 с.)
69. *Springer G.*, Introduction to Riemann surfaces. Reading, Mass: Addison — Wesley, 1957, 307 pp. (Пер. на рус. яз.: *Спрингер Дж.*, Введение в теорию римановых поверхностей. М.: ИЛ, 1960, 344 с.)
70. *Walker R.*, Algebraic curves. Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1950, 201 pp. (Пер. на рус. яз.: *Уокер Р.*, Алгебраические кривые. М.: ИЛ, 1952, 236 с.)
71. *Weil A.*, Number of solutions of equations over finite fields. Bull. Amer. Math. Soc., 1949, *55*, 497—508
72. *Wells R. O.*, Differential analysis on complex manifolds. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice — Hall, Inc., 1973, (Пер. на рус. яз.: *Уэллс Р.*, Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976, 286 с.)
73. *Weyl H.*, Die Idee der Riemannschen Flächen. Leipzig — Berlin: Tuebner, 1923, 183 S.
74. *Whittaker E. T., Watson G. N.*, A course modern analysis. Cambridge: Univ. Press, 1915, 560 pp. (Пер. на рус. яз.: *Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н.*, Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции. Л. — М. Гостехиздат, 1934, 468 с.)
75. *Zariski O., Samuel P.*, Commutative algebra. V. 1. D. Van Nostrand Company, 1958, 329 pp. (Пер. на рус. яз.: *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра Том. I. М.: ИЛ, 1963, 374 с.)

УДК 512.7

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И СХЕМЫ

*В. И. Данилов*

## СОДЕРЖАНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

Этот обзор посвящен основаниям алгебраической геометрии, т. е. введению основных ее объектов и изложению главных их свойств. Грубо говоря, алгебраическая геометрия имеет дело с системами алгебраических уравнений и их решениями. При этом она интересуется сразу всей совокупностью решений, рассматривая ее как единый геометрический объект, снабжает его топологией, пучком функций и т. д. Отображения между такими объектами соответствуют алгебраическим преобразованиям решений.

Первоначально алгебраические многообразия (в аффинном или проективном варианте) рассматривались над полями вещественных или комплексных чисел; при этом широко использовались трансцендентные методы (см. исторический очерк в [15]). Параллели между теорией алгебраических кривых над $\mathbf{C}$ (римановых поверхностей) и теорией алгебраических чисел стимулировали поиски общего алгебраического фундамента.

После нескольких предварительных попыток (эволюцию понятия алгебраического многообразия см. в [4], [15], [28]) было выработано понятие схемы, позволяющее говорить на геометрическом языке о системах алгебраических уравнений над любыми коммутативными кольцами. И хотя схемами не исчерпываются объекты алгебраической геометрии (есть еще формальные схемы, алгебраические пространства и т. д.), это основное, центральное понятие современной алгебраической геометрии.

Тем не менее главное внимание мы уделяем не понятию схемы, а интуитивно более понятному и наглядному понятию алгебраического многообразия над алгебраически замкнутым полем. Теория таких многообразий в своей элементарной части строится параллельно теории дифференцируемых или аналитических многообразий, и в главе 1 мы акцентируем эти аналоги (атласы, морфизмы, векторные расслоения, пучки, дифференциальное исчисление). Однако многие понятия алгебраической геометрии специфичны именно для алгебраических многообразий; это понятия неприводимости, полноты, рационального отображения, размерности, особых точек. О них, а также более глубоких свойствах алгебраических многообразий рассказывается в главе 2. В главе 3 больше внимания уделяется проективной геометрии (степень, линейные сечения и проекции, линейные системы дивизоров, многообразие Чжоу); там же излагается теория пересечений. И только глава 4 посвящена собственно схемам. Она содержит главным образом определения и обобщения на схемы понятий и результатов, знакомых по трем предыдущим главам. Теориям когомологий на алгебраических многообразиях, которые также следует отнести к основаниям, будет отведена отдельная статья.

Предполагается, что читатель знаком с общематематическими понятиями множества, топологического пространства, поля и алгебры, векторного пространства и многочлена, меньше — категории и функтора (см. [14]). Желательно, хотя и не обязательно, знакомство с дифференцируемыми и аналитическими многообразиями и пучками. Большинство основных результатов мы пытались снабдить эскизами доказательств, полагая это необходимым для понимания теории.

## *Глава 1*

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Цель этой главы — придать точный смысл словам: алгебраическое многообразие — это объект, локально задаваемый полиномиальными уравнениями. Главное отличие алгебраических многообразий от многообразий дифференцируемых или комплексно-аналитических (о которых см. [13], [25], [50]) заключается в выборе локальных моделей. В дифференцируемом и комплексно-аналитическом случаях это открытые подмножества в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$. Локальная модель алгебраического многообразия — это подмножество координатного пространства, заданное полиномиальными уравнениями. Чтобы придать этому смысл, нужно зафиксировать поле коэффициентов $K$, над которым будут рассматриваться и многочлены, и решения. Чтобы максимально упростить алгебраическую сторону дела и сосредоточиться на геометрии, мы в первых трех главах предполагаем, что поле $K$ алгебраически замкнуто. В этой главе мы обсудим также простейшие алгебро-геометрические понятия, имеющие прямые аналоги в дифференцируемом и аналитическом случаях.

## § 1. Аффинное пространство

**1.1. Основное поле.** При желании читатель может считать, что основное поле $K$ — это поле комплексных чисел $\mathbf{C}$. Однако даже к комплексным числам мы будем подходить чисто алгебраически, т. е. аппелировать к операциям сложения и умножения, но не пользоваться понятиями предела и т. п. По этой причине наши рассуждения будут пригодны для любого поля. Здесь уместно вспомнить деление А. Вейлем методов на классические (зависящие от свойств поля действительных или комплексных чисел и берущих свое начало в топологии, анализе, дифференциальных уравнениях или теории аналитических функций) и абстрактные, основанные на алгебре и применимые при произвольном основном поле.

Имеются и более веские причины развивать теорию над произвольными полями, в том числе над полями положительной характеристики. Во-первых, это нужно для применений к теории чисел. Во-вторых, даже при доказательстве утверждений над полем $\mathbf{C}$ часто удобно пользоваться свойствами многообразий над конечными полями.

Единственное важное свойство поля $\mathbf{C}$, которое мы будем предполагать выполненным для $K$, — алгебраическая замкнутость. Это значит, что для $K$ выполняется «основная теорема алгебры» — любой многочлен с коэффициентами в $K$ разлагается на линейные множители (многомерное обобщение см. в 1.5). Отметим, что алгебраически замкнутое поле всегда бесконечно. По аналоги с $\mathbf{C}$, элементы $K$ также называются числами, или константами.

**1.2. Аффинное пространство.** Пусть $n$ — натуральное число. $n$-мерным (координатным) *аффинным пространством* называется $K^n$ — $n$-я декартова степень $K$. Элементы $K^n$ — это наборы $(x_1, \ldots, x_n)$ из $n$ чисел $x_i \in K$. Такие наборы можно покоординатно складывать или умножать на константы, так что $K^n$ — векторное пространство над полем $K$. Однако алгебраическая геометрия снабжает $K^n$ более слабой структурой, которая состоит в том, что среди отображений $K^n \to K$ (функций) выделяются т. н. алгебраические или регулярные функции[1].

Какие же функции на $K^n$ естественно назвать алгебраическими? Прежде всего константы, отождествляемые с числами из $K$. Затем координатные функции, т. е. проекции $T_i: K^n \to K$, $T_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. И, наконец, функции, построенные из них в результате элементарных алгебраических операций сложения и умножения. Такие функции называются *регулярными* (чтобы отличать их от рациональных функций; рациональные функции обязательно появятся, но несколько позже). Таким образом, регулярные функции полиномиально выражаются через координатные функции $T_i$. Более того, в силу бесконечности поля $K$ кольцо регулярных функций на $K^n$ можно отождествить с кольцом многочленов $K[T_1, \ldots, T_n]$ от символов $T_1, \ldots, T_n$ с коэффициентами из $K$.

Можно было бы отнести к регулярным и функции вида $1/f$, где функция $f$ регулярна и нигде не обращается в нуль. Однако такая функция $f$ обязательно будет константой, и это ничего нового не дает. Здесь используется алгебраическая замкнутость $K$, ибо над $\mathbf{R}$ функция $1+t^2$ отлична от нуля при всех $t \in \mathbf{R}$.

**1.3. Алгебраические подмножества.** Алгебраические подмножества в $K^n$ задаются системами алгебраических уравнений. Алгебраическое уравнение — это выражение $f=0$, где $f$ — многочлен от $T_1, \ldots, T_n$. Если дано семейство $F=(f_r,\ r \in R)$ многочленов, *системой алгебраических уравнений* называется семейство уравнений $(f_r=0,\ r \in R)$ или коротко $F=0$. Решением (или нулем, или корнем) такой системы называется любая точка $x \in K^n$, для которой $f_r(x)=0$ при всех $r \in R$. Множество всех решений системы $F=0$ обозначается $V(F)$ или $[F=0]$.

Определение. Подмножество $K^n$ называется *алгебраическим*, если оно имеет вид $V(F)$ для некоторого семейства $F$ многочленов от $T_1, \ldots, T_n$.

Например, пустое подмножество, а также всё $K^n$ — алгебраические (взять $F=\{1\}$ или $F=\{0\}$). Пересечение алгебраических подмножеств в любом числе снова алгебраическое, т. к. $\bigcap V(F_j) = V(\bigcup F_j)$. Объединение *конечного* числа аглебраических подмножеств тоже алгебраическое. В самом деле, $V(F_1) \cup \cup V(F_2) = V(F_1 \cdot F_2)$, где $F_1 \cdot F_2$ состоит из произведений $f_1 f_2$, где

[1] Такой способ задания структуры довольно распространен в математике. Например, на множестве комплексных чисел $\mathbf{C}$ можно рассматривать все более общие множества функций: линейные, аффинные, полиномиальные, аналитические, дифференцируемые, непрерывные, измеримые и, наконец, произвольные. Соответственно $\mathbf{C}$ будет объектом линейной алгебры, аффинной геометрии, алгебраической или аналитической геометрии, гладким многообразием, топологическим или измеримым пространством и просто континуальным множеством.

$f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$. Напротив, дополнение к алгебраическому подмножеству $V \subset K_n$ не алгебраическое (кроме $V=\varnothing$. $K^n$).

Более конкретные примеры. Любая точка $x \in K_n$ является алгебраическим подмножеством. Множество нулей $V(f)$ одной (непостоянной) функции $f$ называется алгебраической *гиперповерхностью*. Гиперповерхности в $K^2$ называются плоскими аффинными кривыми. Довольно условно такие кривые изображаются рисунками вроде рис. 1.

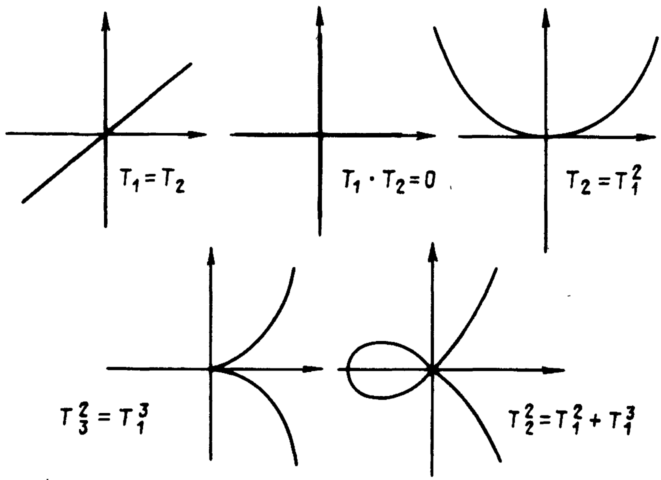



Рис. 1

**1.4. Системы алгебраических уравнений и идеалы.** Разные системы уравнений могут иметь одно и то же множество решений. В самом деле, если к системе $F$ добавить многочлен $\Sigma f_j g_j$, где $f_j \in F$, а $g_j \in K[T_1, \ldots, T_n]$, множество решений не изменится. Скажем, что $\Sigma f_j g_j$ алгебраически выражается через семейство $F$. Назовем семейства $F$ и $F'$ эквивалентными, если любой член $F$ алгебраически выражается через $F'$, и наоборот. Ясно, что $F$ и $F'$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они порождают один и тот же идеал в кольце $K[T_1, \ldots, T_n]$. Переход к идеалам полезен благодаря следующей *теореме Гильберта о базисе:*

Теорема. Любой идеал в кольце многочленов $K[T_1, \ldots, T_n]$ порождается конечным числом элементов.

Иначе говоря, кольцо многочленов над (любым) полем нётерово. Как следствие мы получаем, что любая система алгебраических уравнений эквивалентна *конечной* системе уравнений, или что любое алгебраическое подмножество является пересечением конечного числа гиперповерхностей.

Как уже говорилось, эквивалентные системы уравнений имеют одинаковые множества решений; однако и неэквивалентные системы могут давать одно и то же подмножество. Причина здесь крайне проста — нули у многочленов $f$, $f^2$, $f^3$ и т. д. одинаковы. Иначе говоря, извлечение корня также не меняет нулей. В этой связи скажем, что семейства $F$ и $F'$ слабо эквивалентны, если для любого элемента $f \in F$ некоторая его степень $f^r$ алгебраически выражается через $F'$, и наоборот. Слабо эквивалентные системы уравнений снова имеют одинаковые множества нулей. Как мы сейчас увидим, верно и обратное. В любом случае, для каждого алгебраического подмножества $V \subset K^n$ существует наибольший идеал, задающий $V$, — это идеал $I(V)$ всех регулярных функций, равных нулю во всех точках $V$.

**1.5. Теорема Гильберта о нулях.** Начнем с простейшего случая. Ясно, что единичный идеал $I = K[T_1, \ldots, T_n]$ задает пустое подмножество $V(I)$. Гораздо менее очевидно, что верно и обратное; это утверждение называется слабой *теоремой Гильберта о нулях.*

Теорема. *Если идеал $I \subset K[T_1, \ldots, T_n]$ отличен от единичного, подмножество $V(I)$ непусто.*

Здесь существенно, что поле $K$ алгебраически замкнуто, ибо $1 + t^2 \neq 0$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Так как эта теорема играет важную роль, наметим кратко ее доказательство. Можно считать, что идеал $I$ максимальный (среди неединичных, как обычно). В этом случае факторалгебра $K[T_1, \ldots, T_n]/I$ является полем, содержащим $K$. Если мы покажем, что эти два поля совпадают, то, обозначая через $t_i$ образы $T_i$ в $K$, мы получаем, что точка $t = (t_1, \ldots, t_n)$ принадлежит $V(I)$. Итак, остается показать, что поле $K[T_1, \ldots, T_n]/I$ изоморфно $K$ (это утверждение аналогично теореме И. М. Гельфанда и Мазура о максимальных идеалах банаховых алгебр). В силу алгебраической замкнутости $K$ это утверждение следует из чисто алгебраической леммы:

Лемма. *Пусть $K$ — произвольное поле, $L$ — $K$-алгебра конечного типа. Если $L$ является полем, то оно алгебраично над $K$.*

Доказательство леммы использует понятие целой зависимости, которое нам еще понадобится и с которым можно подробнее познакомиться в [19], [23], [65]. Пусть $A \subset B$ — два коммутативных кольца; элемент $b \in B$ называется *целым* над $A$, если он удовлетворяет уравнению целой зависимости $b^m + a_1 b^{m-1} + \ldots + a_m = 0$, $a_i \in A$. Здесь существенно, что старший коэффициент равен 1. Если все элементы $B$ — целые над $A$, алгебра $B$ называется *целой* над $A$. Суммы и произведения целых элементов снова целые, поэтому множество целых элементов в $B$ является подалгеброй в $B$, которая называется *целым замыканием* $A$ в $B$.

Перейдем к доказательству леммы. Пусть алгебра $L$ порождается элементами $x$, $x_1, \ldots, x_n$. Так как $L$ — поле, $L$ содержит поле $K(x)$. По индуктивному предположению, примененному к $K(x)\subset L$, элементы $x_1, \ldots, x_n$ алгебраичны над $K(x)$. Если $x$ алгебраичен над $K$, то все доказано. Предположим поэтому, что $x$ трансцендентен над $K$, т. е. кольцо $K[x]$ изоморфно кольцу многочленов от $x$. Так как $x_i$ алгебраичны над $K(x)$, существуют многочлены $f_i(T)$ с коэффициентами из $K[x]$, для которых $f_i(x_i)=0$. Обозначая через $g\in K[x]$ произведение старших коэффициентов $f_i$, мы получаем, что $x_i$ — целые над кольцом $A=K[x][g^{-1}]$. Но тогда все $L$ цело над $A$. Отсюда следует немедленно, что $A$ тоже поле. В самом деле, пусть $a$ — ненулевой элемент $A$; так как $a^{-1}\in L$, $a^{-1}$ цел над $A$. Это значит, что $a^{-m}+a_1a^{-m+1}+\ldots+a_m=0$, где $a_j\in A$, т. е. $1+a_1a+\ldots+a_ma^m=0$, откуда $a^{-1}=-(a_1+\ldots+a_ma^{m-1})\in A$. С другой стороны, ясно, что $A$ не поле, например, $1+g$ не обратимо в $A$. Это противоречие доказывает лемму и теорему.

Следствие (теорема Гильберта о нулях). Пусть $I$ — идеал в $K[T_1, \ldots, T_n]$, и многочлен $f$ обращается в нуль во всех точках множества $V(I)\subset K^n$. Тогда $f^r\in I$ для некоторого целого $r\geqslant 0$.

В пространстве $K^{n+1}$ с координатами $T_0, T_1, \ldots, T_n$ рассмотрим подмножество $V'=K\times V$ нулей многочленов из $I$. Функция $1-T_0\cdot f$ отлична от нуля во всех точках $V'$. По предыдущей теореме $1-T_0f$ и $I$ порождают единичный идеал в $K[T_0, T_1, \ldots, T_n]$. Записывая это и подставляя $1/f$ вместо $T_0$, мы и получим $f^r\in I$.

## § 2. Аффинные алгебраические многообразия

**2.1. Аффинные многообразия.** Идея алгебраических подстановок и преобразований решений алгебраических уравнений приводит к понятию отображений между алгебраическими множествами.

Пусть $V\subset K^n$ и $W\subset K^m$ — два алгебраических подмножества. Отображение $f: V\to W$ называется *регулярным* (или морфизмом), если оно задается $m$ регулярными функциями $f_1, \ldots, f_m\in K[T_1, \ldots, T_n]$, т. е. если оно продолжается до регулярного отображения объемлющих пространств $K^n\to K^m$. Композиция регулярных отображений снова регулярное отображение. Таким образом алгебраические множества вместе с регулярными отображениями образуют категорию. Объекты этой категории называются *аффинными алгебраическими многообразиями* (или просто аффинными многообразиями). Так координатное пространство $K^n$, рассматриваемое как аффинное многообразие, обозначается $\mathbf{A}^n$ и называется $n$-мерным *аффинным пространством* (прямой и плоскостью при $n=1$ и 2).

Различные алгебраические множества (и даже вложенные в разные $K^n$) могут при этом оказаться изоморфными, т. е. одинаковыми в определенном смысле. Так «прямая» $T_2=T_1$ и «парабола» $T_2=T_1^2$ в $K^2$ изоморфны между собой, а также изоморфны аффинной прямой $\mathbf{A}^1$.

Регулярные отображения алгебраического множества $V$ в $K$ называются *регулярными функциями* на $V$. Регулярные функции можно складывать и перемножать, так что они образуют кольцо (и даже $K$-алгебру) $K[V]$. Для алгебраического подмножества $V\subset K^n$ алгебра $K[V]$ отождествляется с факторалгеброй $K[T_1, \ldots, T_n]/I(V)$. Вложение $V\subset K^n$ также восстанавливается по образующим $t_i=T_i|V$ алгебры $K[V]$.

Понятие морфизма легко переписывается в терминах регулярных функций. Отображение $f: V\to W$ регулярно тогда и только тогда, когда для любой регулярной функции $g\in K[W]$ функция $f^*(g)=g\circ f$ регулярна на $V$. Отображение $f^*: K[W]\to K[V]$ является в этом случае гомоморфизмом $K$-алгебр. Обратно, любой такой гомоморфизм $K[W]\to K[V]$ индуцируется морфизмом $V\to W$.

Взгляд на аффинное многообразие как на множество $V$ с дополнительной структурой — алгеброй $K[V]$ регулярных функций на $V$ — оказывается очень полезным в концептуальном отношении. В стиле Г. Вейля можно сказать, что формулу-уравнение $F=0$, которая могла бы соблазнить на механические вычисления, мы заменяем кольцом $K[V]$; так мы отвлекаемся от несущественных характеристик и принимаем во внимание в равной мере все уравнения, получающиеся из исходного путем рационального преобразования переменных.

**2.2. Абстрактные аффинные многообразия.** $K$-алгебра $K[V]$ регулярных функций на алгебраическом множестве $V$ обладает двумя специфическими чертами. Во-первых, она порождается конечным числом образующих, т. е. имеет конечный тип. Во-вторых, будучи алгеброй функций со значениями в поле $K$, она не имеет нильпотентов (кроме 0), т. е. приведенная. Наконец, по теореме Гильберта о нулях сопоставление точке $x\in V$ максимального идеала $I(x)=\{f\in K[V],\ f(x)=0\}$ является биекцией между $V$ и множеством $\operatorname{Specm} K[V]$ максимальных идеалов кольца $K[V]$.

Эти свойства позволяют дать абстрактное определение *аффинного многообразия* над $K$ как тройки $(X, K[X], \varphi)$, где $X$ — множество, $K[X]$ — приведенная $K$-алгебра конечного типа, а $\varphi$ — биекция $X$ на $\operatorname{Specm} K[X]$.

Элементы $X$ называются при этом точками этого многообразия, а элементы $K[X]$ — регулярными функциями на нем. В самом деле, для $x\in X$ и $f\in K[X]$ имеет смысл $f(x)$ — значение $f$ в точке $x$. По определению это образ $f$ при композиции

$$K[X]\xrightarrow{\alpha}K[X]/\varphi(x)\xrightarrow[\sim]{\beta}K,$$

где $\alpha$ — проекция на факторалгебру, а $\beta$ — структурный гомоморфизм $K$-алгебр, биективный в силу теоремы Гильберта о нулях. Биективность $\varphi$ означает, что и точек, и функций достаточно много: функций — чтобы различать точки, точек — чтобы реализовывать все гомоморфизмы $K$-алгебр $K[X] \to K$. В дальнейшем мы не будем писать $\varphi$, подразумевая значения в точках.

В этих терминах *морфизмом* $(X, K[X])$ в $(Y, K[Y])$ называется пара $(f, f^*)$, состоящая из отображения $f: X \to Y$ и гомоморфизма $K$-алгебр $f^*: K[Y] \to K[X]$, таких что $f^*(g(x)) = g(f(x))$ для любых $g \in K[Y]$ и $x \in X$. Впрочем, $f$ и $f^*$ взаимно определяют друг друга.

Любое абстрактное аффинное многообразие $(X, K[X])$ изоморфно алгебраическому множеству в подходящем аффинном пространстве $K^n$. Для этого надо взять образующие $t_1, \ldots, t_n$ алгебры $K[X]$ и с их помощью вложить $X$ в $K^n$.

**2.3. Аффинные схемы.** Если в определении абстрактного аффинного многообразия отбросить требование приведенности кольца $K[X]$, мы получим объект, который будем называть *аффинной алгебраической $K$-схемой* (коротко — аффинной схемой). Элементы $K[X]$ определяют, как и в 2.2, отображения $X \to K$, однако их уже нельзя в общем случае отождествлять с функциями. Дело в том, что ненулевые элементы $K[X]$ могут давать функции, тождественно равные нулю на $X$. Впрочем, по теореме Гильберта о нулях это может случиться лишь для нильпотентных элементов $K[X]$.

Морфизмы аффинных схем определяются дословно так же, как для аффинных многообразий в п. 2.2; однако теперь отображение $f$ на точках уже не определяет $f^*$. Приведем несколько примеров схем.

Пример 1. Каждое аффинное многообразие является аффинной схемой. Обратно, с каждой аффинной схемой $X$ канонически связано аффинное многообразие $X_{\mathrm{red}} = (X, K[X]/I(X))$. Здесь $I(X)$ — идеал элементов $K[X]$, равных нулю во всех точках $X$, т. е. идеал нильпотентов.

Пример 2. Пусть $A$ — произвольная коммутативная $K$-алгебра конечного типа. С ней связана аффинная схема $(\mathrm{Specm} A, A)$, обозначаемая также $\mathrm{Specm}\, A$. Гомоморфизмы $K$-алгебр дают морфизмы (направленные в противоположную сторону) аффинных схем. Таким образом, категория аффинных схем антиэквивалентна категории $K$-алгебр конечного типа.

Пример 3. Пусть $(X, K[X])$ — аффинная схема, $I$ — идеал в $K[X]$. Тогда подмножество $V(I)$ нулей $I$, снабженное кольцом $K[X]/I$, является аффинной схемой. Она называется *подсхемой* в $X$, заданной идеалом $I$. Например, подсхема в $X$, заданная идеалом $I(X)$, есть ассоциированное многообразие $X_{\mathrm{red}}$.

Рассмотрим, например, подсхему прямой $\mathbf{A}^1$, заданную уравнением $T^2 = 0$ (или идеалом $(T^2)$). Ее кольцо $K[T]/(T^2)$ состоит из выражений $a + bT$, где $a, b \in K$. Эти выражения «помнят» не только значение функции в точке 0 (т. е. $a$), но и ее производную (т. е. $b$). Поэтому и в общем случае подсхему, заданную идеалом $I$, представляют как «инфинитезимальную окрестность» множества $V(I)\subset\mathbf{A}^n$.

Как и аффинные многообразия, аффинные схемы реализуются как подсхемы подходящих аффинных пространств $\mathbf{A}^n$. Мы не будем систематически пользоваться языком схем до главы 4, однако знать о нем надо. Многие естественные конструкции приводят именно к схемам, даже если мы исходим из многообразий. Конечно, всегда можно перейти к ассоциированному многообразию, но при этом может утеряться важная геометрическая информация. Недаром схемы появляются даже в таких далеких от них книгах, как [1] или [32].

Приведем несколько простых способов строить новые аффинные многообразия из уже имеющихся.

**2.4. Произведения аффинных многообразий.** Пусть $X$ и $Y$ — аффинные многообразия; тогда декартово произведение $X\times Y$ также обладает естественной структурой аффинного многообразия. Более точно, произведение естественно появляется как аффинная схема $(X\times Y,\ K[X]\otimes_K K[Y])$. И уже теоремой является утверждение, что эта схема — многообразие. Для этого надо проверить, что ненулевой элемент $\Sigma f_j\otimes g_j$ тензорного произведения $K[X]\otimes_K K[Y]$ дает ненулевую функцию $\Sigma f_j(x)g_j(y)$ на $X\times\times Y$. Функции $f_j$ можно считать линейно независимыми; тогда если $y\in Y$ — точка, где некоторое $g_j(y)\neq 0$, то функция $\Sigma f_j g_j(y)$ на $X$ отлична от нуля.

Например, $\mathbf{A}^n\times\mathbf{A}^m$ изоморфно $\mathbf{A}^{n+m}$.

Произведение $X\times Y$ обладает каноническими морфизмами — проекциями на $X$ и $Y$ и, вообще, является прямым произведением в категории аффинных многообразий. *Графиком морфизма* $f: X\to Y$ называется подмногообразие $\Gamma_f$ в $X\times Y$, заданное уравнениями $1\otimes g=f^*(g)\otimes 1$, $g\in K[Y]$. Как множество $\Gamma_f$ состоит из пар $(x, y)\in X\times Y$, для которых $f(x)=y$. В частности, *диагональ* $\Delta_X\subset X\times X$ (график тождественного морфизма $X\to X$) является подмногообразием в $X\times X$.

**2.5. Пересечение подмногообразий.** Пусть $Y$ и $Z$ — подмногообразия аффинного многообразия $X$; тогда пересечение $Y\cap Z$ также подмногообразие в $X$. Однако более естественно и правильно понимать это пересечение как *подсхему* в $X$, заданную идеалом $I(Y)+I(Z)$. При этом появление нильпотентов у схемы $Y\cap Z$ свидетельствует о нетрансверсальности $Y$ и $Z$.

Пример 1. Пусть $X=\mathbf{C}^2$ с координатами $T$ и $S$, $Y$ — «парабола» $[S=T^2]$, $Z$ — «горизонтальная» прямая $[S=0]$. Теоретико-множественное пересечение $Y$ и $Z$ состоит из одной точки. Схемное же пересечение устроено интереснее и задается идеалом $(S,\ S+T^2)=(S,\ T^2)$; в частности, оно изоморфно схеме из примера 3. Это связано с тем, что прямая $Z$ касается кривой $Y$ (см. рис. 2).

Если же вместо $\mathbf{Z}$ рассмотреть другую «горизонтальную» прямую $Z_y=[S=y]$, $y\in\mathbf{C}-\{0\}$, то пересечение $Y\cap Z_y$ состоит из двух точек $(\pm\sqrt{y}, y)$, даже в схемном смысле.

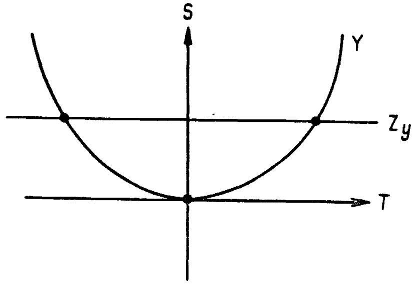



Рис. 2

Пример 2. Пусть $Y$ — подмногообразие в $X$, а $Y'$ — в $X'$. Пересечение $Y\times X'$ и $X\times Y'$ в $X\times X'$ является многообразием $Y\times Y'$. Это отвечает интуитивному чувству, что многообразия $Y\times X'$ и $X\times Y'$ расположены в $X\times X'$ трансверсально.

**2.6. Слои морфизма.** Пусть $f: X\to Y$ — морфизм аффинных многообразий. Образ $f(X)$ в общем случае не будет подмногообразием в $Y$. Пусть, например, $X=[T_1T_2=1]$ — «гипербола» в $K^2$, а $f$ — проекция на ось $T_1$. Тогда $f(X)=K-\{0\}$ и не является алгебраическим подмножеством в $K$.

С прообразами дело обстоит лучше. Для точки $y\in Y$ подмножество $f^{-1}(y)=\{x\in X,\ f(x)=y\}$ является алгебраическим подмногообразием в $X$. Однако его снова лучше рассматривать как *подсхему* в $X$, заданную идеалом $f^*(m_y)K[X]$, где $m_y$ — максимальный идеал точки $y\in Y$. Схема $f^{-1}(y)$ называется *слоем* морфизма $f$ над точкой $y$; она изоморфна пересечению графика $\Gamma_f$ с «горизонталью» $X\times\{y\}$ в $X\times Y$. Такая терминология вызвана тем, что многообразие $X$ как бы расслаивается на многообразия (или схемы) $f^{-1}(y)$, где $y$ пробегает точки $Y$.

Снова наличие нильпотентов в кольце схемы $f^{-1}(y)$ свидетельствует о какой-то особенности морфизма, ветвлении, кратных слоях и т. п. Так, на рис. 2 изображен график отображения $f: \mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $f(x)=x^2$. При $y\neq 0$ слой $f^{-1}(y)$ приведен и состоит из двух различных точек $\pm\sqrt{y}$; при $y=0$ эти две точки сливаются в одну «двойную» точку 0, из-за чего и появляются нильпотенты. Рассмотрим еще два примера.

Пример 1. Пусть $f: K\to K^2$ переводит точку $t$ в точку $(t^2, t^3)$. Его график $\Gamma_f$ — кривая в $K^3$, заданная параметрически $(t, t^2, t^3)$, $t\in K$, или уравнениями $T_1=T^2$. $T_2=T^3$. Образ $f$ — кривая $C\subset K^2$ с уравнением $T_1^3=T_2^2$. Хотя $f$ и задает биекцию между $K$ и $C$, он не является изоморфизмом аффинных многообразий. Дело в том, что слой $f^{-1}(p)$ содержит нильпотенты (график $\Gamma_f$ касается оси $T$); геометрически это проявляется в том, что точка $P$ особа на $C$ (см. рис. 3).

Пример 2. Еще более поразительный эффект бывает, когда поле $K$ имеет положительную характеристику $p>0$. Пусть отображение $F: K \to K$ задается формулой $F(x)=x^p$ (или $S=T^p$); оно называется *морфизмом Фробениуса.* Теоретико-множественно оно взаимно однозначно (если $x^p=x'^p$, то $(x-x')^p=x^p-x'^p=0$ и $x=x'$), однако снова не изоморфизм. Более того, для любой точки $y \in K$ слой $F^{-1}(y)$ задается идеалом $(T^p-y)=(T-\sqrt[p]{y})^p$ и поэтому неприведен. Отображение $F$ критическое во всех точках (это видно и из вычисления производной: $dT^p/dT=pT^{p-1}\equiv 0$); во всех точках график его касается горизонтали, и все же $F$ не постоянно!

Вообще, пусть $f: X \to Y$ — морфизм аффинных многообразий, и $Z \subset Y$ — подсхема, заданная идеалом $J \subset K[Y]$. Схемным прообразом $Z$ при $f$ называется подсхема $f^{-1}(Z)$ в $X$, задаваемая идеалом $f^*(J)K[X]$. Например, пересечение подмногообразий $Y$

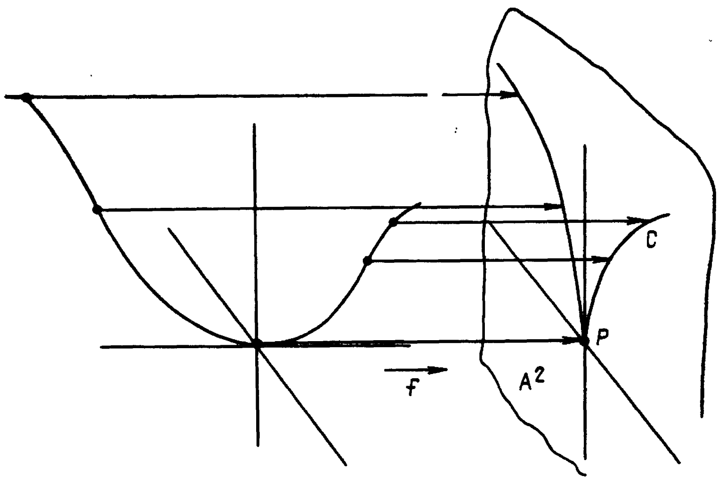



Рис. 3

и $Z$ в $X$ можно рассматривать как прообраз диагонали $\Delta_X \subset X \times X$ при вложении $Y \times Z \subset X \times X$, или как пересечение $Y \times Z$ с $\Delta_X$ в $X \times X$. Последний прием часто бывает полезен и называется *редукцией к диагонали.* График $\Gamma_f$ — прообраз диагонали при морфизме $id \times f: X \times Y \to X \times X$. Связь операций произведения, пересечения и прообраза не случайна — это все частные случаи более общей операции расслоенного произведения, см. п. 4.2.

**2.7. Топология Зарисского.** Как в п. 1.3, алгебраическим подмножеством (или подмногообразием) аффинного многообразия $X$ называется множество $Y(I)$ общих нулей функций из некоторого идеала $I\subset K[X]$. Как и раньше, алгебраические подмножества в $X$ замкнуты относительно пересечений и конечных объединений. Поэтому их можно объявить замкнутыми множествами некоторой топологии на $X$, называемой *топологией Зарисского.*

Пусть $f: X\to Y$ — морфизм аффинных многообразий. Как мы видели, прообраз $f^{-1}(V)$ любого алгебраического подмножества $V\subset Y$ алгебраичен в $X$. Это значит, что отображение $f$ непрерывно в топологии Зарисского. В частности, любая регулярная функция непрерывна. Обратно, топология Зарисского — слабейшая топология, в которой точки замкнуты, а регулярные функции непрерывны. Если $Y$ — подмногообразие в $X$, то топология на $Y$ совпадает с топологией, индуцированной с $X$.

Отметим, что образ аффинного многообразия не обязательно открыт или замкнут. В самом деле, рассмотрим пример морфизма $f: \mathbf{A}^2\to\mathbf{A}^2$, заданного формулой $f(x, y)=(x, xy)$ (см. рис. 4). Его образ состоит из точки (0, 0) и открытого множества $U=\{(x, y), x\neq 0\}$. Это множество $U\cup\{(0, 0)\}$ не замкнуто, даже локально. Однако оно состоит из (двух) локально замкнутых кусков — точки (0, 0) и $U$. Позже мы увидим, что похоже обстоит дело всегда: образ алгебраического многообразия является объединением конечного числа локально замкнутых кусков.

Топология Зарисского очень естественна, и в абстрактном случае трудно придумать что-то лучше. И все же во многих отношениях она выглядит непривычной по сравнению с обычной метрической топологией на $\mathbf{C}^n$. Полиномиальные функции

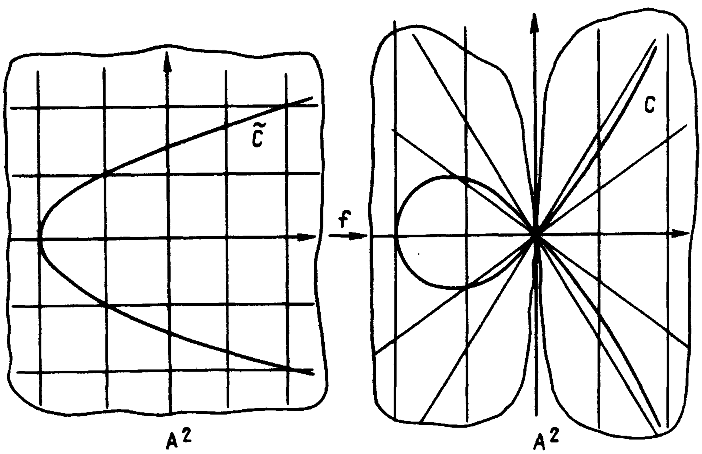



Рис. 4

на $\mathbf{C}^n$ конечно непрерывны в топологии, задаваемой евклидовой метрикой. Поэтому классическая топология на $\mathbf{C}^n$ сильнее, чем топология Зарисского. Иначе говоря, открытое (соответственно замкнутое) по Зарисскому подмножество будет открытым (соответственно замкнутым) в классической топологии. Обратное неверно; например, алгебраические подмножества в $\mathbf{C}$ исчерпываются конечными подмножествами (и всем $\mathbf{C}$). Таким образом, открытые по Зарисскому подмножества «очень большие», в частности, топология Зарисского сильно нехаусдорфова.

Другое отличие от классической топологии в том, что топология Зариского на произведении $X\times Y$ двух аффинных многообразий сильнее произведения топологий Зарисского на $X$ и $Y$. Так, в $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}^1\times\mathbf{A}^1$ есть много алгебраических подмножеств, отличных от вертикальных и горизонтальных прямых (например, диагональ).

Хотя классическая топология далека от топологии Зарисского, их не разделяет непроходимая пропасть. Вот простейший связывающий мостик: если открытое $U\subset X$ плотно в топологии Зарисского, оно плотно и в классической топологии. Более тонким фактом является теорема о связности: из связности в топологии Зарисского следует связность в классической топологии. Подробнее о результатах такого рода говорится в статье о когомологиях алгебраических многообразий. Это позволяет применять к комплексным алгебраическим многообразиям методы алгебраической топологии (гомотопии, когомологии и т. д.) и анализа (периоды интегралов, теория Ходжа); представление о них дает книга [32]. Трансцендентные методы служат мощным стимулом для поиска их алгебраических аналогов и способствуют дальнейшему развитию абстрактной алгебраической геометрии.

**2.8. Локализация.** Топология Зарисского позволяет более локально определить понятие регулярной функции. Пусть $U\subset X$ открытое подмножество аффинного многообразия $X$, и функция $f\in K[X]$ отлична от нуля во всех точках $U$. Тогда функция $1/f$ определена во всех точках $U$ и может считаться «регулярной» функцией на $U$ в силу ее алгебраического происхождения (см. 1.2). Регулярными надо считать тогда и функции вида $g/f$, где $g\in K[X]$.

Вообще, скажем, что функция $h: U\to K$ *регулярна в точке* $x\in U$, если существуют функции $f$, $g\in K[X]$, такие что $f(x)\neq 0$ и $h=g/f$ в некоторой окрестности точки $x$. Более точно можно сказать, что $h$ совпадает с $g/f$ на множестве $U\cap\mathcal{D}(f)$, где $\mathcal{D}(f)=X-V(f)=\{x'\in X,\ f(x')\neq 0\}$. Множества вида $\mathcal{D}(f)$ называются *главными открытыми подмножествами* в $X$ и образуют, очевидно, базу топологии Зариского на $X$.

Функции на $U$, регулярные во всех точках $U$, образуют кольцо, обозначаемое $\mathcal{O}_X(U)$. Если $U'\subset U$, то ограничение функций с $U$ на $U'$ дает гомоморфизм колец (или $K$-алгебр) $\mathcal{O}_X(U)\to\to\mathcal{O}_X(U')$. Такой объект $\mathcal{O}_X$ в дальнейшем будет играть важную роль и называться структурным пучком колец на $X$. Ясно, что $K[X]\subset\mathcal{O}_X(X)$; на самом деле здесь равенство.

Предложение. $K[X]=\mathcal{O}_X(X)$ для аффинного многообразия $X$.

Действительно, пусть функция $h: X\to K$ регулярна в каждой точке $x\in X$. Тогда $h=g_x/f_x$ в $\mathcal{D}(f_x)$ и $f_x(x)\neq0$. По теореме Гильберта о нулях функции $f_x$, $x\in X$, порождают единичный идеал в $K[X]$. Поэтому существует разложение $1=\Sigma a_xf_x$, где $a_x\in K[X]$. Но тогда $h=h\cdot1=\Sigma a_xhf_x=\Sigma a_xg_x\in K[X]$.

В силу этого предложения можно не опасаться двусмысленности, говоря о регулярных функциях. Представление $1=\Sigma a_xf_x$ играет роль, аналогичную разложению единицы в теории дифференцируемых многообразий.

**2.9. Квазиаффинные многообразия.** Пусть снова $U$ — открытое подмножество аффинного многообразия $X$. В общем случае пара $(U, \mathcal{O}_X(U))$ не является аффинным многообразием. Во-первых, $K$-алгебра $\mathcal{O}_X(U)$ может не порождаться конечным числом элементов. Во-вторых, в $U$ может оказаться «мало» точек, т. е. отображение $U\to\operatorname{Specm}\mathcal{O}_X(U)$ (см. п. 2.2) может быть не сюръективным.

Пример. Покажем, что $U=\mathbf{A}^n-\{0\}$ не аффинно при $n\geqslant2$. Для этого проверим, что $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^n}(U)$ совпадает с $K[\mathbf{A}^n]$. Иначе говоря, любая регулярная функция на $\mathbf{A}^n-\{0\}$ продолжается до регулярной функции на $\mathbf{A}^n$. Это свойство напоминает теорему Хартогса в теории аналитических функций и резко отличается от ситуации в дифференцируемом случае.

В самом деле, пусть функция $f$ регулярна на $U$. Покроем $U$ множествами $\mathcal{D}(T_i)$, где $T_i$ — координаты на $\mathbf{A}^n$. Тогда ограничение $f$ на $\mathcal{D}(T_i)$ имеет вид $g_i/T_i^{r_i}$, где $g_i\in K[T_1,\ldots,T_n]$, а $r_i\geqslant0$; можно также считать, что $g_i$ не делятся на $T_i$. Из совпадения на $\mathcal{D}(T_1)\cap\mathcal{D}(T_2)$ мы получаем $T_1^{r_1}g_2=T_2^{r_2}g_1$. Из однозначности разложения на простые множители в кольце многочленов $K[T_1,\ldots,T_n]$ заключаем, что $r_1=r_2=0$ и $g_1=g_2=f$.

Напротив, главные открытые множества $\mathcal{D}(f)\subset X$ являются аффинными многообразиями. Приведем еще два связанных с этим факта. Кольцо $\mathcal{O}_X(\mathcal{D}(f))$ регулярных функций на $\mathcal{D}(f)$ совпадает с кольцом $K[X][f^{-1}]$ дробей вида $g/f^r$, где $g\in K[X]$, $r\geqslant0$. Топология Зарисского на $\mathcal{D}(f)$ индуцируется топологией Зарисского на $X$.

В любом случае открытые подмножества аффинных многообразий локально устроены как аффинные многообразия. Они называются *квазиаффинными алгебраическими многообразиями*.

**2.10. Аффинная алгебраическая геометрия.** Хотя алгебраическая геометрия главным образом имеет дело с проективными многообразиями, стоит отметить, что и аффинная алгебраическая геометрия имеет свои задачи, зачастую неожиданно трудные. Трудности возникают уже для простейших аффинных многообразий — аффинных пространств $\mathbf{A}^n$. Упомянем проблему Серра о векторных расслоениях на $\mathbf{A}^n$, решенную лишь сравнительно недавно (см. [12, 57]). Другая известная проблема: пусть многообразие $X\times\mathbf{A}^m$ изоморфно $\mathbf{A}^{n+m}$; верно ли, что $X$ изоморфно $\mathbf{A}^n$? Утвердительный ответ очевиден при $n=1$ и лишь недавно был получен для $n=2$ (см. [51]); при $n>2$ вопрос открыт.

Возможно, причина затруднений состоит в том, что пространство $\mathbf{A}^n$ (во всяком случае при $n>1$) очень «гибкое». Как легко понять, автоморфизмы $\mathbf{A}^1$ имеют вид $T'=aT+b$, где $a$, $b\in K$ и $a\neq 0$. Автоморфизмов $\mathbf{A}^n$ при $n>1$ гораздо больше, как видно из примера треугольного преобразования

$$T_1'=T_1+f_0,$$
$$T_2'=T_2+f_1,(T_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$T_n'=T_n+f_{n-1}(T_1,\ldots,T_{n-1}),$$

где $f_i\in K[T_1,\ldots,T_i]$. В частности, любое конечное подмножество $\mathbf{A}^n$ при $n>1$ можно перевести автоморфизмом в любое другое конечное подмножество той же мощности. При $n=2$ любой автоморфизм $\mathbf{A}^n$ порождается треугольными и линейными автоморфизмами. При $n>2$ это неизвестно и, скорее всего, неверно. К этим задачам близка проблема линеаризации действия алгебраических групп на $\mathbf{A}^n$.

Наконец, надо упомянуть т. н. проблему якобиана. Пусть отображение $f:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ задается многочленами $f_1,\ldots,f_n$ из $\mathbf{C}[T_1,\ldots,T_n]$. Предположим, что якобиан $\det(\partial f_j/\partial T_i)$ нигде не обращается в нуль на $\mathbf{C}^n$ (можно считать, что он тождественно равен 1). Гипотеза якобиана состоит в том, что тогда $f$ является изоморфизмом. Обсуждение этой проблемы см. [21].

## § 3. Алгебраические многообразия

Уже довольно давно было понятно, что рассматривая только аффинные многообразия, мы получаем неполную картину происходящего, видим лишь как бы только часть настоящего многообразия. Связано это с некомпактностью аффинного пространства, с тем, что не контролируется поведение «на бесконечности». Например, за исключением параллельных, любые прямые на аффинной плоскости пересекаются. Удобно предположить тогда, что и параллельные пересекаются, но в «бесконечно удаленной точке». Добавление таких точек к аффинному пространству $\mathbf{A}^n$ превращает его в проективное пространство

$\mathbf{P}^n$. Другое удобство проективной точки зрения в том, что такие аффинно разные кривые, как эллипс, парабола и гипербола есть просто разные аффинные части коники. По этой причине алгебраическая геометрия была и есть по преимуществу геометрия проективная. И нам нужно от аффинных многообразий переходить к более общим алгебраическим многообразиям.

**3.1. Проективное пространство.** Проще всего $n$-мерное *проективное пространство* $\mathbf{P}^n$ определить как множество прямых в векторном пространстве $K^{n+1}$. Каждая прямая, т. е. одномерное векторное подпространство $L \subset K^{n+1}$, задается ненулевым вектором $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1}$, рассматриваемым с точностью до умножения на ненулевую константу $\lambda \in \mathbf{K}^* = \mathbf{K} - \{0\}$. Поэтому можно сказать, что $\mathbf{P}^n$ есть факторпространство $K^{n+1} - \{0\}/K^*$.

Координатные функции $T_0, \ldots, T_n$ на $K^{n+1}$ называются *однородными координатами* на $\mathbf{P}^n$. Стоит предостеречь, однако, что $T_i$ не являются функциями на $\mathbf{P}^n$, как и любые многочлены от $T_i$ (кроме констант, конечно). Выражения типа $T_j/T_i$ можно рассматривать как функции, но не на всем $\mathbf{P}^n$, а лишь на части $U_i = \mathbf{P}^i - H_i$, где $H_i$ состоит из точек $(x_0, \ldots, x_n)$ с $x_i = 0$. Иначе говоря, $U_i$ состоит из прямых $L \subset K^{n+1}$, изоморфно проектирующихся на $i$-ю координатную ось. При фиксированном $i$ функции $\xi_j^{(i)} = T_j T_i^{-1}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, задают взаимно однозначное соответствие $U_i$ с аффинным подпространством $T_i = 1$ в $K^{n+1}$.

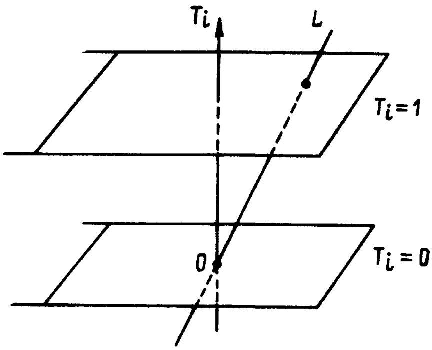



Рис. 5

При этом $H_i$ состоит из прямых $L$, лежащих в гиперплоскости $T_i = 0$ и отождествляется с $\mathbf{P}^{n-1}$. В этом смысле $\mathbf{P}^n$ получается из аффинного пространства $U_i \simeq K^n$ прибавлением бесконечно удаленной гиперплоскости $H_i \simeq \mathbf{P}^{n-1}$.

Множества $U_i$ образуют покрытие $\mathbf{P}^n$, и каждое $U_i$ обладает естественной структурой аффинного многообразия $\mathbf{A}^n$. При этом на пересечениях $U_i \cap U_j$ эти структуры согласованы. В самом деле, $U_i \cap U_j$ можно рассматривать как главное открытое множество $\mathcal{D}(\xi_j^{(i)})$ в $U_i$, а также как главное открытое множество $\mathcal{D}(\xi_i^{(j)})$ в $U_j$. В первом случае кольцо регулярных функций порождается $\xi_0^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}$, $\xi_j^{(i)-1}$, во втором — $\xi_0^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}$, $\xi_i^{(j)-1}$. Но эти кольца совпадают. Например,

$$\xi_k^{(i)} = T_k/T_i = (T_k/T_j)(T_i/T_j)^{-1} = \xi_k^{(j)} \cdot \xi_i^{(j)-1}$$

и

$$\xi_j^{(i)-1} = (T_j/T_i)^{-1} = T_i/T_j = \xi_i^{(j)}.$$

Обратно, $\xi^{(j)}$ выражаются через $\xi^{(i)}$.

Таким образом, $\mathbf{P}^n$ локально устроено как аффинное многообразие. Поэтому можно говорить о регулярных функциях на $\mathbf{P}^n$ (правда, их мало — только константы), об алгебраических подмногообразиях $\mathbf{P}^n$ (их уже много), топологии Зариского и т. д. Подобные понятия применимы не только к $\mathbf{P}^n$, но и к любому геометрическому объекту, локально устроенному как аффинное многообразие. Возникающая при этом теория алгебраических многообразий во многом параллельна теории дифференцируемых или аналитических многообразий.

**3.2. Атласы и многообразия.** Пусть $X$ — топологическое пространство. *Аффинной картой* в $X$ назовем открытое подмножество $U \subset X$, снабженное структурой аффинного многообразия; при этом требуется, чтобы топология $U$ совпадала с топологией Зариского. Карты $U$ и $U'$ в $X$ называются *согласованными*, если для любого открытого $V \subset U \cap U'$ выполняется $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_{U'}(V)$.

*Атласом* на $X$ называется семейство $\mathcal{A} = (U_i)_{i \in I}$ попарно согласованных аффинных карт, покрывающих $X$. Два атласа $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ *эквивалентны*, если их объединение снова атлас, т. е. если карты из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ согласованные.

Структурой *алгебраического многообразия* на $X$ называется класс эквивалентных атласов. В дальнейшем мы ограничимся только теми алгебраическими многообразиями, которые обладают *конечным* атласом. Картой на многообразии называется аффинная карта некоторого атласа, задающего структуру на $X$; у любой точки существует сколь угодно малая карта.

Любое аффинное многообразие является алгебраическим многообразием. Любое замкнутое подмножество $Y \subset X$ алгебраического многообразия снабжается канонической структурой алгебраического многообразия; говорят также, что $Y$ — *подмногообразие* (или замкнутое подмногообразие) в $X$. Если $U \subset X$ — открытое подмножество, оно также обладает очевидной структурой алгебраического многообразия.

Покрытие $U_i$ проективного пространства $\mathbf{P}^n$ является атласом и превращает $\mathbf{P}^n$ в алгебраическое многообразие. Вообще, если $V$ — конечномерное векторное пространство над $K$, обозначим через $\mathbf{P}(V)$ множество прямых в $V$, проходящих через

0. Если $l: V \to K$ — ненулевой линейный функционал, пусть $H_l \subset \subset \mathbf{P}(V)$ состоит из прямых $L \subset \operatorname{Ker} l$. Тогда $U_l = \mathbf{P}(V) - H_l$ состоит из таких прямых $L$, что $l(L) = K$ и может быть отождествлен с аффинным подпространством $l^{-1}(1) \subset V$. Структуры на разных $U_l$ согласованы и превращают $\mathbf{P}(V)$ в алгебраическое многообразие. Конечно, $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(K^{n+1})$.

**3.3. Склеивание.** Эта операция позволяет получать новые многообразия из уже известных. Пусть $(X_i)$ — конечное покрытие множества $X$, и на каждом $X_i$ задана структура алгебраического многообразия. Предположим, что: а) для любых $i$, $j$ $X_i \cap X_j$ открыто в $X_i$ и $X_j$, б) структуры алгебраического многообразия на $X_i \cap X_j$ индуцированные с $X_i$ и $X_j$, совпадают. Тогда на $X$ существует и единственна структура алгебраического многообразия, для которой $X_i$ — открытые подмногообразия. Говорят, что $X$ получено *склеиванием* многообразий $X_i$.

Можно, например, представлять, что проективное пространство $\mathbf{P}^n$ склеено из аффинных пространств $U_i$, $i=0, 1, \ldots, n$. Вот другой пример. Пусть $X_1$ и $X_2$ изоморфны аффинной прямой $\mathbf{A}^1$, $T_1$ и $T_2$ — координаты на $X_1$ и $X_2$. Отождествим $X_1 - \{0\}$ с $X_2 - \{0\}$ при помощи $T_1 = T_2$. В результате получится «аффинная прямая с раздвоенной точкой 0». Такое многообразие естественно возникает как множество орбит действия $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y)$ группы $K^*$ на плоскости $K^2$.

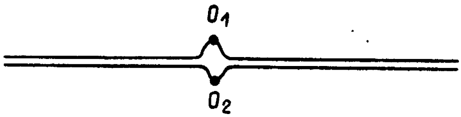



Рис. 6

Пример. Хорошее упражнение на тему склеивания представляет конструкция *торических многообразий*. Зафиксируем решетку $M$, т. е. свободную абелеву группу конечного типа (изоморфную $\mathbf{Z}^n$, но базис нам не нужен и даже отвлекает). Пусть $S \subset M$ — подмоноид, т. е. содержит 0 и замкнуто относительно сложения. Тогда можно образовать полугрупповую $K$-алгебру $K[S]$. Ее аддитивные образующие имеют вид $x^m$, где $m \in S$, а перемножаются они по правилу $x^m \cdot x^{m'} = x^{m+m'}$. Если моноид $S$ порожден конечным числом элементов, $K$-алгебра $K[S]$ имеет конечный тип и определено аффинное многообразие $\operatorname{Specm} K[S]$. Например, если $S = M$, мы получаем $n$-мерный тор $\mathbf{T} = \operatorname{Specm} K[M] = \operatorname{Specm}[T_1, \ldots, T_n, T_1^{-1}, \ldots, T_n^{-1}]$.

Пусть теперь в двойственной решетке $M^* = \operatorname{Hom}(M, \mathbf{Z})$ задано множество $B$, дополняемое до базиса группы $M^*$. С ним можно связать следующий моноид в $M$:

$$B^\perp = \{m \in M,\ b(m) \geq 0\ \forall b \in B\};$$

соответствующее аффинное торическое многообразие $\operatorname{Specm} K[B^\perp]$ обозначим $X_B$. (Оно называется торическим, потому что на нем естественно действует тор $\mathbf{T}$). Если $B' \subset B$, то $B'^\perp \supset B^\perp$ и мы имеем естественный гомоморфизм $K$-алгебр $K[B^\perp] \to K[B'^\perp]$ и противоположный морфизм многообразий $X_{B'} \to X_B$. Нетрудно проверить, что $X_{B'} \to X_B$ является открытым вложением.

Если теперь в $M^*$ задан набор $\Sigma$ таких подбазисов $B$, многообразия $X_B$ и $X_{B'}$ ($B$, $B' \in \Sigma$) можно склеить по их открытым кускам $X_{B \cap B'}$ и получить торическое многообразие $X_\Sigma$. Например, $\mathbf{P}^n$ получается при $\Sigma = \{B_0, \ldots, B_n\}$, где $B_0 = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $B_i = \{e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_n, -e_1 - \ldots - e_n\}$ при $i = 1, \ldots, n$.

Интерес торических многообразий связан с тем, что различные объекты на $X_\Sigma$ (обратимые пучки, их когомологии, формы и т. д.) удается описывать в комбинаторных терминах, связанных с $\Sigma$. Например, обратимые пучки изображаются многогранниками в $M \otimes \mathbf{R}$, а сечения их — целыми точками многогранников. Подробнее об этом см. [3].

**3.4. Многообразие Грассмана.** Пусть снова $V$ — векторное пространство над $K$. Обозначим через $G(k, V)$ (или $G(k, n)$. если $n = \dim V$) множество $k$-мерных подпространств $W \subset V$; при $k = 1$ получаем $\mathbf{P}(V)$. Обобщая конструкцию проективного пространства, снабдим $G(k, V)$ структурой алгебраического многообразия, называемого *многообразием Грассмана.*

Пусть $V = V' \oplus V''$ — прямое разложение, причем $\dim V' = k$. С каждым таким разложением свяжем множество $U(V', V'')$, состоящее из подпространств $W \subset V$, которые изоморфно проектируются на $V'$. Такие подпространства можно отождествить с графиками линейных отображений $V'$ в $V''$. Таким образом, $U(V', V'') \simeq \operatorname{Hom}_k(V', V'') \simeq V'' \otimes V'^*$ естественно отождествляется с векторным пространством размерности $k(n-k)$ и снабжается структурой аффинного многообразия. Можно непосредственно убедиться, что все эти карты $U(V', V'')$ согласованы и задают на $G(k, V)$ структуру алгебраического многообразия. Подробнее о грассманиане см. [32] и [33].

**3.5. Проективные многообразия.** Замкнутое подмножество проективного пространства называется *проективным многообразием.* Приведем общий способ задания таких многобразий.

Пусть $V$ — векторное пространство над $K$. *Конусом* в $V$ назовем алгебраическое подмногообразие $C \subset V$, инвариантное относительно гомотетий, т. е. умножений на константы. Свяжем с конусом $C$ подмножество $\mathbf{P}(C) \subset \mathbf{P}(V)$, состоящее из прямых $L \subset C$. Множество $\mathbf{P}(C)$ замкнуто в $\mathbf{P}(V)$. В самом деле, при отождествлении карты $U_l$ (где $l: V \to K$ линейный функционал) с аффинным подпространством $l^{-1}(1) \subset V$ множество $\mathbf{P}(C) \subset U_l$

отождествляется с пересечением $C\cap l^{-1}(1)$, очевидно замкнутым в $l^{-1}(1)$.

В координатах $T_0, \ldots, T_n$ на $V$ конус $C$ задается однородными уравнениями $f_j(T_0, \ldots, T_n)=0$, $j\in J$. Тогда $\mathbf{P}(C)\cap U_i$ задается уравнениями $f_j(T_0/T_i, \ldots, T_n/T_i)=0$. Уравнения $f_j=0$ называются *однородными уравнениями* $\mathbf{P}(C)$.

Обратно, любое проективное многообразие $X\subset\mathbf{P}(V)$ имеет вид $\mathbf{P}(C)$ для некоторого конуса $C\subset V$. В самом деле, пусть $(U_i)$ — стандартный атлас $\mathbf{P}^n$, и $X\cap U_i$ задается уравнениями $f_j^{(i)}(T_0/T_i, \ldots, T_n/T_i)=0$, $j\in J_i$. Тогда для большого $m$ $T_i^m f_j^{(i)}(T_0/T_i, \ldots, T_n/T_i)=g_j^{(i)}(T_0, \ldots, T_n)$ является однородной формой от $T_0, \ldots, T_n$, и уравнения $g_j^{(i)}=0$, $j\in J_i$, $i=0, 1, \ldots, n$, задают $X$ в $\mathbf{P}^n$.

Наиболее простые проективные многообразия — линейные. Если $W\subset V$ — векторное подпространство, подмногообразие $\mathbf{P}(W)\subset\mathbf{P}(V)$ называется *линейным*. Если $W$ — гиперплоскость в $V$, то $\mathbf{P}(W)$ называется *гиперплоскостью* в $\mathbf{P}(V)$. *Линейной оболочкой* множества называется пересечение всех линейных многообразий, содержащих множество; для двух разных точек $x$, $y$ это проективная прямая $\overline{xy}$ и т. д. Задать гиперплоскость $W\subset V$ — то же, что задать прямую $W^{\perp}$ в двойственном пространстве $V^*$ и обратно, поэтому множество гиперплоскостей в $\mathbf{P}(V)$ тоже является проективным пространством $\mathbf{P}(V^*)$.

Каждое векторное пространство $V$ можно рассматривать как аффинную часть проективного пространства $\mathbf{P}(V\oplus K)$, а именно, как дополнение к гиперплоскости $\mathbf{P}(V)\subset\mathbf{P}(V\oplus K)$. Если $X\subset V$ — алгебраическое многообразие, то замыкание $X$ в $\mathbf{P}(V\oplus K)$ является проективным многообразием. Это стандартный способ перехода от аффинных многообразий к проективным (зависящий, впрочем, от вложения $X\subset V$). В координатах $\xi_1, \ldots, \xi_n$ на $V$ проективизация выглядит так. Пусть $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — многочлен степени $d$; назовем его гомогенизацией однородный многочлен степени $d$ $\tilde{f}(T_0, \ldots, T_n)=T_0^d f(T_1/T_0, \ldots, T_n/T_0)$. Теперь если $X$ задается уравнениями $f_j=0$, то проективизация $\overline{X}$ задается уравнениями $\tilde{f}_j=0$.

## § 4. Морфизмы алгебраических многообразий

**4.1. Определения.** Пусть $X$ — алгебраическое многообразие с атласом $(X_i)$, $Y$ — аффинное многообразие. Отображение $f: X\to Y$ называется *регулярным*, если регулярно ограничение $f$ на каждую карту $X_i$. В частности, мы получаем понятие регулярной функции. Для открытого $U\subset X$ обозначим через $\mathcal{O}_X(U)$ $K$-алгебру регулярных функций на $U$. Если $U'\subset U$, мы имеем гомоморфизм ограничения $\mathcal{O}_X(U)\to\mathcal{O}_X(U')$.

Пусть теперь $Y$ — произвольное алгебраическое многообразие. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется *морфизмом* (или регулярным отображением) *алгебраических многообразий*, если для любой карты $V \subset Y$ индуцированное отображение $f^{-1}(V) \to V$ регулярно. Иначе говоря, для любой регулярной функции $g$ на открытом $V \subset Y$ функция $f^*(g) = g \circ f$ должна быть регулярной на $f^{-1}(V)$. Тем самым $f^*$ задает гомоморфизм алгебр $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

Композиция морфизмов снова морфизм, так что алгебраические многообразия образуют категорию. Каноническое вложение замкнутого подмногообразия является морфизмом; морфизм $Y \to X$ называется *замкнутым вложением*, если он осуществляет изоморфизм $Y$ с замкнутым подмногообразием в $X$. Если $f: X \to Y$ — морфизм, а $Y' \subset Y$ — замкнутое подмногообразие, то $f^{-1}(Y')$ — замкнутое подмногообразие в $X$ (см. п. 2.4). В частности, для точки $y \in Y$ многообразие $f^{-1}(y) \subset X$ называется *слоем морфизма* $f$ над $y$.

Многообразие $X$, снабженное морфизмом $f: X \to Y$, называют иногда многообразием над $Y$, или $Y$-многообразием. При этом $X$ представляют как семейство алгебраических многообразий $X_y = f^{-1}(y)$, параметризованное точками $y \in Y$. Морфизм $Y$-многообразий $f: X \to Y$ в $f': X' \to Y$ — это морфизм $\varphi: X \to X'$, такой что $f = f' \circ \varphi$. При этом слой $f^{-1}(y)$ отображается в слой $f'^{-1}(y)$, и мы получаем семейство морфизмов $\varphi_y: X_y \to X_y'$.

**4.2. Произведения многообразий.** Пусть $X$ и $Y$ — алгебраические многообразия с атласами $(X_i)$ и $(Y_j)$. Тогда $(X_i \times Y_j)$ является атласом для $X \times Y$, так что $X \times Y$ тоже алгебраическое многообразие. Легко проверить, что $X \times Y$ — прямое произведение $X$ и $Y$ в категории многообразий.

В частности, для любого многообразия $X$ диагональное вложение $\Delta: X \to X \times X$ $(\Delta(x) = (x, x))$ является морфизмом, хотя в общем случае не замкнутым вложением. Иначе говоря, диагональ в $X \times X$ может оказаться незамкнутой. Пример доставляет «аффинная прямая с раздвоенной точкой» из п. 3.3. Если все же диагональ в $X \times X$ замкнута, многообразие $X$ называется *отделимым* (не путать с хаусдорфовостью $X$ как топологического пространства!). Например, любое аффинное многообразие отделимо (см. п. 2.4). Класс отделимых многообразий замкнут относительно прямых произведений и перехода к подмногообразиям. Как мы проверим ниже, проективное пространство отделимо, откуда следует отделимость любых проективных многообразий. Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться исключительно отделимыми многообразиями.

Неотделимость многообразия связана с тем, что склеивая его из аффинных кусков, мы склеиваем эти куски не до конца. А именно, имеет место следующий *критерий отделимости*: многообразие $X$ с атласом $(X_i)$ отделимо тогда и только тогда, когда образ $X_i \cap X_j$ при каноническом вложении в $X_i \times X_j$ замкнут. Действительно, образ $X_i \cap X_j$ в $X_i \times X_j$ есть пересечение $X_i \times X_j$ с диагональю в $X \times X$.

Применим этот критерий к стандартному атласу $(U_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, проективного пространства $\mathbf{P}^n$ (см. п. 3.1). Как легко убедиться, образ $U_i \cap U_j$ в $U_i \times U_j$ задается уравнениями

$$\xi_k^{(i)} = \xi_j^{(i)} \xi_k^{(j)}, \quad \xi_k^{(j)} = \xi_k^{(i)} \xi_i^{(j)}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

откуда мы получаем отделимость $\mathbf{P}^n$.

Кроме прямых произведений, в категории алгебраических многообразий существуют расслоенные произведения, что выгодно отличает ее от категории дифференцируемых многообразий. Покажем это, ограничившись отделимыми многообразиями. Пусть $f: X \to Z$ и $g: Y \to Z$ — многообразия над $Z$; *расслоенным произведением* $X$ и $Y$ над $Z$ называется подмногообразие

$$X \underset{Z}{\times} Y = \{(x, y) \in X \times Y,\ f(x) = g(y)\}$$

в $X \times Y$. Более правильно определить его как прообраз диагонали $\Delta_Z$ при морфизме $f \times g: X \times Y \to Z \times Z$; это сразу дает схемную структуру на $X \underset{Z}{\times} Y$. Частными случаями расслоенного произведения является прямое произведение ($Z$ — точка), слой ($Y \to Z$ — вложение точки) и пересечение подмногообразий.

Коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \underset{Z}{\times} Y \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

называется *декартовым квадратом*. Глядя на него чуть несимметрично, можно сказать, что операция расслоенного произведения превращает $Z$-многообразие $X$ в $Y$-многообразие $X \underset{Z}{\times} Y$; такая операция называется *заменой базы*. Слой $f'$ над точкой $y \in Y$ изоморфен слою $f$ над точкой $g(y)$; замена базы — это прямой аналог понятия индуцированного расслоения в топологии.

В частном случае, когда $g: Y \to Z = Y$ — тождественный морфизм, расслоенное произведение состоит из $(x, y) \in X \times Y$, для которых $f(x) = y$, и по понятным причинам называется *графиком* $\Gamma_f$ морфизма $f: X \to Y$. $\Gamma_f$ — замкнутое подмножество в $X \times Y$, если $Y$ отделимо. Проекция $\Gamma_f \to X$ — изоморфизм, и любой морфизм $f: X \to Y$ разлагается на замкнутое вложение $X \xrightarrow{\sim} \Gamma_f \subset X \times Y$ и проекцию $X \times Y \to Y$.

**4.3. Отношения эквивалентности.** Двойственным к понятию расслоенного произведения является понятие амальгамированной суммы, т. е. универсальное дополнение диаграммы

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, dashed] \\ X \arrow[r, dashed] & X \coprod\limits_R Y \end{tikzcd} .$$

Оно существует довольно редко. Мы обсудим кратко частный случай — отношения эквивалентности. *Отношением эквивалентности* на многообразии $X$ называется замкнутое подмногообразие $R$ в $X \times X$, которое теоретико-множественно есть отношение эквивалентности (мы оставляем читателю формулировку схемного варианта определения). Вопрос о существовании фактормногообразия $X/R$ довольно деликатен и далек от решения; обсуждение его см. [18], [39], [52]. В одном простом случае ответ утвердителен — это когда обе проекции $R \rightrightarrows X$ являются локальными изоморфизмами; по существу, это склейка (см. п. 3.3).

Любое многообразие $X$ можно представить как фактормногообразие $U/R$, где $U$ — аффинное многообразие, а проекции $R \rightrightarrows U$ локальные изоморфизмы. Для этого надо взять атлас $(U_i)$ и положить $U = \coprod\limits_i U_i$, $R = U \times\limits_X U$. Вообще, мы могли бы определить любое многообразие как пару $(U, R)$, где $U$ — аффинное многообразие, $R \subset U \times U$ — отношение эквивалентности на $U$, и проекции $R \rightrightarrows U$ — локальные изоморфизмы. Морфизмом пары $(U, R)$ в пару $(U', R')$ естественно считать морфизм $f: U \to U'$, такой что $(f \times f)(R) \subset R'$. Однако такое «простое» решение вопроса об определении многообразия было бы неправильным. Ведь задание пары $(U, R)$ — это по существу задание атласа, а надо еще отождествить эквивалентные атласы (пп. 3.1 и 4.1). Оформление такого отождествления оставим заинтересованному читателю.

Если в определении многообразия как пары $(U, R)$ условие «проекции $R \rightrightarrows U$ — локальные изоморфизмы» заменить более слабым «проекции $R \rightrightarrows U$ — этальные морфизмы» (см. § 5 главы 2), мы получим очень интересное понятие *алгебраического пространства,* обобщающего понятие алгебраического многообразия. Интерес алгебраических пространств в том, что многие алгебро-геометрические конструкции (вроде фактормногообразий, стягиваний, схем модулей) реализуются именно как алгебраические пространства, см. [18].

Схематично генезис понятия многообразия выглядит так. В исходном пункте мы имеем точку и аффинную прямую $\mathbf{A}^1$. Расслоенные произведения приводят к аффинным пространствам $\mathbf{A}^n$ и их подмногообразиям — аффинным многообразиям. Факторы по (локально изоморфным) отношениям эквивалентности на аффинных многообразиях дают алгебраические многообразия, а по этальным — алгебраические пространства.

**4.4. Проектирование.** Важные классы морфизмов доставляют операции линейной и полилинейной алгебры. Начнем с линейных. Пусть $\pi : \mathbf{A}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{P}^n$ — отображение, которое ненулевой точке $x \in K^{n+1}$ сопоставляет прямую $Kx \subset K^{n+1}$, т. е. точку $\mathbf{P}^n$. Ясно, что оно регулярно. Если $f$ — регулярная функция на $\mathbf{P}^n$, то $\pi^*(f)$ регулярна на $\mathbf{A}^{n+1} - \{0\}$. Как мы видели в п. 2.9, такие функции отождествляются с многочленами от $T_0, \ldots, T_n$. Кроме того, $\pi^*(f)$ инвариантна относительно гомотетий, так что многочлен должен иметь нулевую степень, т. е. быть константой. Так мы получаем, что *любая регулярная функция на* $\mathbf{P}^n$ *постоянна*; этот простой результат — прообраз многочисленных теорем конечности для проективных многообразий.

Рассмотрим теперь проективный вариант проектирования. Пусть $H \simeq \mathbf{P}^n$ — гиперплоскость в $\mathbf{P}^{n+1}$ и $p$ — точка, не лежащая на $H$. Для любой точки $x \in \mathbf{P}^{n+1} - \{p\}$ прямая $\overline{px}$ в $\mathbf{P}^{n+1}$ пересекает $H$ в единственной точке $\pi_p(x)$. Так возникает отображение, очевидно, регулярное

$$\pi_p : \mathbf{P}^{n+1} - \{p\} \to H \simeq \mathbf{P}^n,$$

которое называется *линейной проекцией из точки* $p$. При отождествлении $\mathbf{P}^{n+1} - H$ с $\mathbf{A}^{n+1}$ мы получаем предыдущий пример.

Если подмногообразие $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$ не проходит через точку $p$, ограничение проекции на $X$ дает морфизм $X \to \mathbf{P}^n$. Позже мы обсудим и тот случай, когда $p \in X$. Проектирование из точки можно итерировать, или сразу проектировать из линейного подмногообразия. Вообще, если $f : V \to W$ — гомоморфизм векторных пространств над $K$, то возникает естественный морфизм $\mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(\operatorname{Ker} f) \to \mathbf{P}(W)$, называемый *коллинеацией*. В частности, автоморфизм $V$ дает автоморфизм $\mathbf{P}(V)$. Позже мы увидим, что любой автоморфизм $\mathbf{P}^n$ является коллинеацией.

Операции полилинейной алгебры приводят к трем знаменитым морфизмам — Веронезе, Сегре и Плюккера.

**4.5. Морфизм Веронезе.** Если $W \subset V$ — векторные пространства, то переход к $k$-й симметрической степени дает вложение $\operatorname{Sym}^k W \subset \operatorname{Sym}^k V$, что можно интерпретировать как отображение соответствующих грассманианов. Наиболее интересен случай, когда $W$ одномерно; в этом случае $\operatorname{Sym}^k W$ также одномерно и мы получаем *отображение Веронезе*

$$v_k : \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(\operatorname{Sym}^k V).$$

Чтобы убедиться в его регулярности, рассмотрим на $V$ координаты $T_0, \ldots, T_n$, а на $\operatorname{Sym}^k V$ — координаты $T^a = T_0^{a_0} \ldots T_n^{a_n}$, где $a = (a_0, \ldots, a_n)$ — вектор с целыми неотрицательными координатами, и $\sum a_i = k$. Тогда $v_k$ задается сопоставлением точке $x = (x_0, \ldots, x_n)$ точки $v_k(x)$ с координатами $(x^a = x_0^{a_0} \ldots x_n^{a_n})$.

Легко проверить, что $v_k$ является замкнутым вложением; образ его задается квадратичными уравнениями $T^a T^b = T^{a'} T^{b'}$, где $a+b=a'+b'$. Образ $\mathbf{P}^1$ при отображении Веронезе $v_k:\mathbf{P}^1\to\mathbf{P}^k$ называется *рациональной нормальной кривой* степени $k$. При $k=2$ это коника с уравнением $T_0T_2=T_1^2$; при $k=3$ — кривая в $\mathbf{P}^3$ с уравнениями $T_0T_3=T_1T_2$, $T_0T_2=T_1^2$, $T_1T_3=T_2^2$. Проектируя ее из точки $p=(0, 1, 0, 0)$ на плоскость $\mathbf{P}^2$, мы получаем, по существу, пример 2.6.

Образ вложения $v_2:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^5$ называется *поверхностью Веронезе.*

**4.6. Морфизм Сегре.** Если $W\subset V$ и $W'\subset V'$ — вложения векторных пространств, мы получаем вложение $W\otimes W'\subset V\otimes V'$, что опять дает отображение соответствующих грассманианов. В частности, если $W$ и $W'$ одномерны, то $W\otimes W'$ одномерно, и мы получаем *отображение Сегре*

$$s:\mathbf{P}(V)\times\mathbf{P}(V')\to\mathbf{P}(V\otimes V').$$

В координатах точкам $x=(x_0, \dots, x_n)$ и $y=(y_0, \dots, y_m)$ соответствует точка $s(x, y)$ с координатами $(x_iy_j)$, $i=0, \dots, n$, $j=0, \dots, m$. Образ $s$ задается в однородных координатах $R_{ij}$ на $\mathbf{P}(V\otimes V')$ квадратичными уравнениями $R_{ij}R_{kl}=R_{il}R_{kj}$. Легко проверить, что отображение Сегре — замкнутое вложение. В частности, *произведение проективных многообразий проективно.*

Простейший случай — вложение $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^3$; образ его — квадрика с уравнением $XY=ZT$. Так как при вложении Сегре слой $\mathbf{P}^1\times\{y\}$ переходит в прямую в $\mathbf{P}^3$, то квадрика $S(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$ заметается двумя семействами прямых, которое хорошо видно на однополостном гиперболоиде.

**4.7. Морфизм Плюккера.** Здесь используется внешняя степень. Если $W$ — $k$-мерное подпространство векторного пространства $V$, то $\Lambda^kW$ — прямая в $\Lambda^kV$, и мы получаем *морфизм Плюккера*

$$p: G(k, V)\to\mathbf{P}(\Lambda^kV).$$

Снова можно убедиться, что $p$ является замкнутым вложением, и что образ его задается квадратичными уравнениями (см. [32], [43]). Следствием этого является *проективность многообразий Грассмана.*

При $k=1$ мы получаем изоморфизм $G(1, V)\simeq\mathbf{P}(V)$. При $k=n-1$, благодаря изоморфизму $\Lambda^{n-1}V\simeq V^*\otimes\Lambda^nV\simeq V^*$, мы снова получаем изоморфизм $G(n-1, V)\simeq\mathbf{P}(V^*)$. Поэтому простейший нетривиальный пример — $G(2, 4)$, многообразие прямых в $\mathbf{P}^3$. Морфизм $p$ вкладывает $G(2, 4)$ в $\mathbf{P}(\Lambda^2K^4)\simeq\mathbf{P}^5$ как гиперповерхность с уравнением $T_{12}T_{34}-T_{13}T_{24}+T_{14}T_{23}=0$. Исследованию этого многообразия и его сечений посвящена глава 6 книги [32].

## § 5. Векторные расслоения

Алгебраические многообразия могут обладать дополнительной структурой, согласованной со структурой многообразия. Мы кратко обсудим понятие алгебраической группы и более подробно остановимся на векторных расслоениях.

**5.1. Алгебраические группы.** Пусть на множестве $G$ заданы структура алгебраического многообразия и структура группы. Скажем, что эти две структуры согласованы (и задают на $G$ структуру *алгебраической группы*), если отображение умножения $\mu : G \times G \to G$ и отображение обратного элемента $\iota : G \to G$ регулярны.

Например, множество невырожденных матриц $GL(n, K)$ является алгебраической группой, и даже аффинной как многообразие. В частности, $GL(1, K) = K^*$ называется *мультипликативной группой* и обозначается иногда $G_m$. Другой пример аффинной группы — *аддитивная группа* $K$ со сложением в качестве группового закона; она обозначается иногда $G_a$. Совершенно другой пример доставляет групповой закон на плоской кривой третьей степени, который мы обсудим в главе 3; это частный случай т. н. *абелевых многообразий* (см. [54]).

Гомоморфизмом алгебраических групп называется гомоморфизм групп $f : G \to H$, одновременно являющийся морфизмом алгебраических многообразий. Его ядро $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(e)$ снова является алгебраической группой. Например, умножение на константу задает гомоморфизм $G_a$ в $G_a$. Если поле $K$ имеет положительную характеристику $p$, морфизм Фробениуса $x \mapsto x^p$ также является гомоморфизмом алгебраических групп, причем инъективным. Гомоморфизмом будет и отображение Артина—Шрайера $x \mapsto x - x^p$, ядро которого отождествляется с простым подполем $\mathbf{F}_p \subset K$. Возведение в $n$-ю степень, $x \mapsto x^n$, является сюръективным гомоморфизмом $G_m \to G_m$. Ядро его, обозначаемое $\mu_n$, изоморфно группе корней $n$-й степени из 1 в поле $K$.

В нашу задачу не входит изложение красивой и далеко продвинутой теории алгебраических групп (см. [22], [44], [62]). Два понятия все же надо упомянуть. Первое — понятие действия алгебраической группы $G$ на алгебраическом многообразии $X$. Оно задается морфизмом многообразий $\rho : G \times X \to X$, удовлетворяющим двум требованиям: $\rho(e, x) = x$ и $\rho(g, \rho(g', x)) = \rho(gg', x)$. Замечательно, что их можно записать как коммутативность некоторых диаграмм; например, второе требование выглядит как коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "\mu \times id"] \arrow[d, "id \times \rho"] & G \times X \arrow[d, "\rho"] \\ G \times X \arrow[r, "\rho"] & X \end{tikzcd}$$

Второе понятие — алгебраическое семейство групп $(G_x)$, параметризованное точками многообразия $X$, или «группа» в категории $X$-многообразия. Нас больше будет интересовать понятие семейства векторных пространств.

**5.2. Векторные расслоения.** *Векторным расслоением* над многобразием $X$ называется $X$-многообразие $p: E \to X$, снабженное «нулевым» сечением $0: X \to E$, операцией «сложения», т. е. $X$-морфизмом $+: E \times E \to E$ и операцией «умножения на константы» $K \times E \to E^X$, тоже являющейся $X$-морфизмом. При этом сложение должно быть коммутативным и ассоциативным, умножение — дистрибутивным и т. д., как при определении векторного пространства. Для каждой точки $x \in X$ слой $E_x = p^{-1}(x)$ обладает структурой векторного пространства над $K$, поэтому векторное расслоение $E$ можно понимать как семейство векторных пространств $E_x$, каждое растет над своей точкой $x \in X$.

Гомоморфизмом векторных расслоений называется морфизм $X$-многообразий, коммутирующий с операциями «нуля», «сложения» и «умножения». Иначе говоря, слой переходит в слой, и при этом является гомоморфизмом векторных пространств. Так возникает категория $\mathrm{Vect}_X$ векторных расслоений над $X$. Замена базы $f: X \to Y$ дает функтор $f^*: \mathrm{Vect}_Y \to \mathrm{Vect}_X$.

Приведем некоторые примеры. Каждое (конечномерное) векторное пространство $V$ можно рассматривать как векторное расслоение над точкой. Для любого многообразия $X$ расслоение $X \times V \to X$ называется *тривиальным* векторным расслоением (типа $V$, или ранга $\dim V$). Векторное расслоение $p: E \to X$ называется *локально тривиальным*, если существует атлас $(X_i)$, такой что индуцированные расслоения $p^{-1}(X_i) \to X_i$ тривиальны. Такие расслоения известным способом задаются коциклами $g_{ij}: X_i \cap X_j \to \mathrm{Aut}\, V$. Для локально тривиального расслоения размерность слоя $E_x$ локально постоянно зависит от $x$; для произвольного векторного расслоения это не так и размерность отдельных слоев может подскакивать.

Можно показать, что локально по базе любое векторное расслоение устроено как векторное подрасслоение тривиального векторного расслоения. Если $\varphi: E \to F$ — гомоморфизм векторных расслоений, то существует расслоение ядер $\mathrm{Ker}\, \varphi = \varphi^{-1}(0_F)$, где $0_F$ — нулевое сечение $F$. К сожалению, для коядер $\varphi$ это уже не так, и факторрасслоение $F/E$ можно определить не всегда. В этом одна из причин широкого привлечения когерентных пучков вместо векторных расслоений. Однако если $E$ — локально тривиальное векторное подрасслоение в $F$, факторрасслоение $F/E$ существует.

**5.3. Тавтологические расслоения.** Пусть $G(k, V)$ — многообразие Грассмана $k$-мерных векторных подпространств векторного пространства $V$. Рассмотрим подмножество $S$ в

$G(k, V) \times V$, состоящее из пар $(W, v)$, таких что $v \in W$. Легко понять, что это будет векторное подрасслоение тривиального векторного расслоения $V_{G(k, V)} = G(k, V) \times V$ над $G(k, V)$. Это расслоение называется *тавтологическим*, или *универсальным подрасслоением* над $G(k, V)$. Оно локально тривиальное ранга $k$. Факторрасслоение $Q = V_{G(k, V)}/S$ называется *универсальным факторрасслоением* над $G(k, V)$.

В частности, над проективным пространством $\mathbf{P}(V)$ имеется тавтологическое линейное расслоение $S$.

Позже мы с каждым многообразием свяжем касательное расслоение, играющее важную роль при исследовании многообразия.

**5.4. Конструкции с расслоениями.** Если $E$ и $F$ — векторные расслоения над $X$, их расслоенное произведение $E \underset{X}{\times} F$ как $X$-многообразие также будет векторным расслоением. Оно обозначается $E \oplus F$ и называется *прямой суммой* расслоений; послойно это действительно прямая сумма слоев $E_x \oplus F_x$. Я не знаю других общих конструкций для векторных расслоений. Однако для локально тривиальных расслоений проходят все естественные векторные конструкции: тензорные произведения $E \otimes F$, симметрические $\mathrm{Sym}^k E$ и внешние степени $\Lambda^p E$, двойственное расслоение $E^\vee$ и т. п. Подробнее см. [25], [50].

Имитируя конструкцию проективного пространства, для векторного расслоения $E \to X$, можно построить соответствующее проективное расслоение $\mathbf{P}_X(E) \to X$, слоями которого будут проективные пространства $\mathbf{P}(E_x)$. Можно также говорить о конических подрасслоениях в $E$, т. е. о подмногообразиях $C \subset E$, инвариантных относительно действия $K$ на $E$. Такие конуса $C \subset E$ приводят к подмногообразиям $\mathbf{P}_X(C) \subset \mathbf{P}_X(E)$, как в 3.5.

## § 6. Когерентные пучки

Альтернативный и более удобный способ задания линейных объектов доставляют когерентные пучки модулей. Ввиду их важности, скажем о них несколько слов, хотя это и отвлекает нас от геометрии. Подробнее о пучках см. [31], [41], [60].

**6.1. Предпучки.** Пусть $X$ — произвольное топологическое пространство и $\mathrm{O}_p(X)$ — категория открытых подмножеств $X$. *Предпучком* множеств (групп, модулей или колец) называется контравариантный функтор $F$ из категории $\mathrm{O}_p(X)$ в категорию множеств (групп, модулей или колец). Иначе говоря, для каждого открытого $U \subset X$ должно быть задано множество $F(U)$, а для каждого включения открытых множеств $V \subset U$ — отображение $\rho_{U,V} : F(U) \to F(V)$. При этом $\rho_{U,U}$ должно быть тождественным отображением, а $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} = \rho_{U,V}$.

Элементы $F(U)$ называют также сечениями $F$ над $U$, а отображения $\rho$ — отображениями ограничения и обозначают $\rho_{U,V}(s)=s/U$. Использование такой терминологии объясняет следующий пример. Пусть $f:Y\to X$ — некоторое многообразие над $X$; для открытого $U\subset X$ сечением $f$ над $U$ назовем морфизм $g:U\to Y$, такой что композиция $f\circ g$ есть каноническое вложение $U$ в $X$. Множество всех сечений $f$ над $U$ обозначим $\widetilde{Y}(U)$; так мы получаем некоторый предпучок. В частности, предпучком является $\mathcal{O}_X$, построенный в 4.1.

*Морфизмом предпучков* $\varphi:F\to G$ называется набор отображений $\varphi_U:F(U)\to G(U)$, где $U$ пробегает $O_p(X)$, согласованных с ограничениями. В частности, если $\varphi:Y\to Z$ — морфизм $X$-многообразий, мы получаем морфизм предпучков $\widetilde{\varphi}:\widetilde{Y}\to\widetilde{Z}$. Такой взгляд на многообразия как на предпучки оказывается полезным при поисках обобщений понятия алгебраического многообразия.

**6.2. Пучки.** Предпучок $F$ на $X$ называется *пучком*, если он удовлетворяет следующей аксиоме:

Пусть дано семейство $(U_i)$ открытых подмножеств $X$ и сечения $s_i\in F(U_i)$, согласованные на пересечениях (т. е. $s_i|U_i\cap U_j=s_j|(U_i\cap U_j)$ для любых $i$ и $j$). Тогда существует, и при том единственное, сечение $s\in F(\bigcup U_i)$, такое что $s_i=s|U_i$ для всех $i$.

Например, построенный в п. 6.1 по $X$-многообразию $Y$ предпучок $\widetilde{Y}$ является пучком. Пучком будет и предпучок $\mathcal{O}_x$ регулярных функций на алгебраическом многообразии $X$, а также предпучки гладких функций на дифференцируемом многообразии, непрерывных функций на топологическом пространстве и т. д. Можно сказать, что пучки возникают там, где сечения задаются локальными условиями.

Конечно, не каждый предпучок является пучком. Например, постоянный предпучок, которы йкаждому $U$ сопоставляет фиксированное множество $A$, очень редко бывает пучком. Однако с каждым предпучком $F$ можно связать в некотором смысле ближайший к нему пучок $F^+$. Строится он так. Для открытого $U\subset X$ обозначим через $\mathrm{Cov}(U)$ множество всех открытых покрытий $U$. Для покрытия $\mathcal{U}=(U_i)\in\mathrm{Cov}(U)$ определим $F(\mathcal{U})$ как множество согласованных на пересечениях $U_i\cap U_j$ наборов $s_i\in F(U_i)$. Если покрытие $\mathcal{U}'$ вписано в $\mathcal{U}$, имеется каноническое отображение $F(\mathcal{U})\to F(\mathcal{U}')$, и так возникает индуктивная система $F(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}\in\mathrm{Cov}(U)$. Определим теперь $F^+(U)$ как индуктивный предел этой системы. Легко проверить, что: а) $F^+$ является пучком, б) предпучок $F$ естественно отображается в $F^+$, в) любой морфизм $F$ в пучок $G$ пропускается через $F^+$.

Эта операция позволяет переносить на пучки все операции с предпучками: надо сначала сделать операцию в категории предпучков, а затем применить переход к ассоциированному пучку. В частности, с пучками множеств можно делать все, что можно делать с множествами. Таким образом пучки множеств служат хорошей моделью для теории множеств, формализуя понятие «переменного множества». Нас, впрочем, больше будут интересовать пучки модулей.

**6.3. Пучки модулей.** Напомним, что структурный пучок $\mathcal{O}_X$ на алгебраическом многообразии $X$ является пучком колец и даже $K$-алгебр. Поэтому можно рассматривать пучки модулей над $\mathcal{O}_X$. Некоторое время нам будет несущественно, что $X$ — алгебраическое многообразие, и можно считать, что речь идет о любом топологическом пространстве $X$, снабженном пучком коммутативных колец $\mathcal{A}$. Такой объект называется *окольцованным пространством*. Прежде чем переходить к пучкам модулей, остановимся на пучковом определении алгебраического многообразия. В п. 2.8 аффинное многообразие было снабжено пучком $K$-алгебр; алгебраическое многообразие можно теперь определить как окольцованное пространство, локально изоморфное аффинному многообразию. Аналогичным образом можно определять дифференцируемые и аналитические многообразия, супермногообразия и т. п.

Ита, пусть $(X, \mathcal{A})$ — окольцованное пространство. Пучок $F$ на $X$ называется *пучком $\mathcal{A}$-модулей,* если для каждого открытого $U \subset X$ множество $F(U)$ снабжено структурой модуля над кольцом $\mathcal{A}(U)$, согласованой с отображениями ограничения. Все понятия теории модулей (гомоморфизмы, ядра, коядра, точные последовательности, прямые суммы, тензорные произведения и т. д.) переносятся на пучки модулей. Например, $F \otimes_A G$ есть пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto F(U) \otimes_{A(U)} G(U)$. Известная тонкость связана и с понятием коядра гомоморфизма пучков модулей $\varphi: F \to G$ — это снова пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto G(U)/\varphi(F(U))$. Поэтому точность последовательности пучков

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

означает лишь точность последовательности

$$0 \to F(X) \to G(X) \to H(X),$$

тогда как в общем случае $G(X) \to H(X)$ не эпиморфно. Отклонение от эпиморфности контролируется когомологиями пучка $F$.

Пучок $\mathcal{A}$-модулей $\mathcal{A}^{(I)}$, где $I$ — произвольное множество, называется *свободным* ранга $\operatorname{Card}(I)$. *Локально свободным* называется пучок модулей, локально изоморфный свободному. Важную роль играют локально свободные пучки ранга один, т. е. пучки, локально изоморфные $\mathcal{A}$; они называются *обратимыми*. Тензорное произведение обратимых пучков $F \otimes_{\mathcal{A}} G$ снова обратимо, и $F\otimes_{\mathscr{A}}F^*\subset\mathscr{A}$, где $F^*=\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F,\mathscr{A})$ — двойственный пучок. Поэтому множество $\mathrm{Pic}(X)$ классов обратимых $\mathscr{A}$-модулей с точностью до изоморфизма является абелевой группой и называется *группой Пикара* $X$.

Пусть теперь $f:X\to Y$ — морфизм многообразий, а $F$ — пучок модулей на $X$. *Прямым образом* $F$ при $f$ называется пучок $f_*F$ модулей на $Y$, который открытому $V\subset Y$ сопоставляет $F(f^{-1}(V))$. Чуть сложнее определить *обратный образ* $f^*G$ для пучка $\mathcal{O}_Y$-модулей $G$. Предварительно определим предпучок $f^{\cdot}G$ на $X$. Для открытого $U\subset X$ положим $(f^{\cdot}G)(U)=\varinjlim G(V)$, где индуктивный предел берется по открытым $V\subset Y$, содержащим $f(U)$. Это предпучок моделей над $f^{\cdot}\mathcal{O}_Y$. Тогда $f^*G$ — пучок модулей, ассоциированный с предпучком $f^{\cdot}G\otimes_{f^{\cdot}\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_X$. Локальная свободность, ранг обратимость сохраняются при $f^*$, в частности, $f^*$ дает гомоморфизм групп Пикара $\mathrm{Pic}\,Y\to\mathrm{Pic}\,X$.

**6.4. Когерентные пучки модулей.** Вернемся теперь к алгебраическим многообразиям. Пучок модулей на многообразии называется *квазикогерентным* (соответственно *когерентным*), если локально он изоморфен коядру гомоморфизма свободных пучков (соответственно свободных пучков конечного ранга).

Пример 1. Пусть $X$ — аффинное многообразие, $M$ — модуль над кольцом $K[X]$. Полагая для открытого $U\subset X$ $\tilde{M}(U)=M\otimes_{K[X]}\mathcal{O}_X(U)$, мы получаем пучок модулей $\tilde{M}$ на $X$. Сопоставление $M\mapsto\tilde{M}$ сохраняет тензорное произведение, точность и т. п. В частности, $\tilde{M}$ квазикогерентный (и когерентный, если $M$ конечного типа); более того, любой квазикогеренттой (когерентный) пучок модулей имеет такой вид.

Пример 2. Пусть $p:E\to X$ — векторное расслоение. Свяжем с ним пучок $\mathscr{L}_X(E)$ линейных форм на $E$; более точно, для открытого $U\subset X$ сечения этого пучка над $U$ — это регулярные функции на $p^{-1}(U)$, линейные на слоях $p$. Получается когерентный пучок модулей, свободный (соответственно локально свободный, обратимый), если векторное расслоение $E$ тривиальное (соответственно локально тривиальное, линейное).

В частности, для тавтологического линейного расслоения $S$ над проективным пространством $\mathbf{P}=\mathbf{P}(V)$ обратимый пучок $\mathscr{L}_{\mathbf{P}}(S)$ обозначается $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ и называется *тавтологическим*, фундаментальным или скручивающим обратимым пучком на $\mathbf{P}$. Пространство его глобальных сечений $H^0(\mathbf{P},\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1))$ канонически изоморфно пространству $V^*$ линейных форм на $V$. $m$-я тензоная степень $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ также обратима и обозначается $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(m)$.

Квазикогерентность и когерентность сохраняются при переходе к ядрам и коядрам гомоморфизмов пучков модулей, тензорном произведении, обратном образе. Прямой образ квазикогерентного пучка квазикогерентный. Однако прямой образ когерентного пучка вообще говоря не когерентен. Вот два типичных примера.

Пример 3. Пусть $f$ — морфизм $\mathbf{A}^1$ в точку. Тогда $f_*\mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}$ есть по существу пространство $H^0(\mathbf{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}) = K[T]$, которое бесконечно над $K$; поэтому $f_*\mathcal{O}_X$ в данном случае некогерентен.

Пример 4. Возьмем вложение $\mathbf{A}^1 - \{0\}$ в $\mathbf{A}^1$. Прямой образ структурного пучка приводит к $K[T]$-модулю $K[T, T^{-1}]$, который также не имеет конечного типа.

В главе 2 мы познакомися с важным классом собственных морфизмов, сохраняющих когерентность при прямом образе. В следующем параграфе мы познакомимся еще с одним примером когерентных пучков — пучками дифференциальных форм.

**6.5. Пучки идеалов.** Еще один важный пример когерентных пучков доставляют пучки идеалов. Пусть $Y$ — подмногообразие в $X$, а $J(Y)$ — подпучок в $\mathcal{O}_X$, состоящий из сечений, обращающихся в нуль на $Y$. Это когерентный пучок идеалов $\mathcal{O}_X$, причем факторпучок $\mathcal{O}_X/J(Y)$ изоморфен $\mathcal{O}_Y$.

Обратно, пусть $J \subset \mathcal{O}_X$ — когерентный пучок идеалов. Носитель факторпучка $\mathcal{O}_X/J$ (т. е. множество точек $x \in X$, где $J_x \neq \mathcal{O}_{X,x}$; здесь и далее $F_x$ обозначает, как всегда, *слой пучка* $F$ в точке $x$, т. е. $\varinjlim F(U)$ по всем окрестностям $U$ точки $x$) является замкнутым подмножеством в $X$. В духе § 2 окольцованное пространство $(\mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/J), \mathcal{O}_X/J)$ можно назвать *подсхемой* в $X$, заданной пучком идеалов $J \subset \mathcal{O}_X$.

Вообще, *алгебраической схемой* можно назвать окольцованное пространство, локально изоморфное подсхеме аффинного пространства. Откладывая систематическое рассмотрение схем до главы 4, скажем о них несколько слов. Алгебраические схемы отличаются от многообразий лишь тем, что могут иметь нильпотенты в структурном пучке. Поэтому их можно представлять как «инфинитезимальные утолщения» алгебраических многообразий. Уничтожая нильпотенты, т. е. редуцируя схему $X$, мы получаем алгебраическое многообразие $X_{\mathrm{red}}$ с тем же множеством точек. Как мы видели и еще увидим, многие естественные конструкции приводят именно к схемам и проходят для любых схем.

**6.6. Конструкции многообразий.** Одно из применений когерентных пучков относится к глобализации рассмотренных ранее локальных конструкций. Пусть дано алгебраическое многообразие $X$ и квазикогерентный пучок $\mathcal{A}$ $\mathcal{O}_X$-алгебр конечного типа. Последнее означает, что локально $\mathcal{A}$ порождается конечным числом сечений. Глобализуя конструкцию аффинного многообразия Specm из § 2, мы построим схему $\mathrm{Specm}_X(\mathcal{A})$-$S$ вместе с морфизмом $\pi: \mathrm{Specm}_X(\mathcal{A}) \to X$. Делается это так. Предположим сначала, что $X$ аффинное; тогда $\mathrm{Specm}_X(\mathcal{A}) =$

$=\mathrm{Specm}\mathcal{A}(X)$, а морфизм $\pi$ дуален структурному гомоморфизму $K$-алгебр $K[X]\to\mathcal{A}(X)$. Если $\mathcal{D}(f)$ — главное открытое подмножество в $X$, то в силу квазикогерентности $\mathcal{A}$ имеем $\mathcal{A}(\mathcal{D}(f))=\mathcal{A}(X)\otimes_{K[X]}K[\mathcal{D}(f)]=\mathcal{A}(X)(f^{-1})$. Поэтому $\mathrm{Specm}\mathcal{A}(\mathcal{D}(f))$ отождествляется с открытым подмножеством $\pi^{-1}(\mathcal{D}(f))$. В общем случае надо взять атлас $(X_i)$ многообразия $X$ и склеить $S$ из схем $\mathrm{Specm}\mathcal{A}(X_i)$. Заметим, что $\pi_*(\mathcal{O}_S)=$ $=\mathcal{A}$, так что сечения $\mathcal{A}$ реализуются регулярные функции на $S$. Морфизмы вида $\mathrm{Specm}_X(\mathcal{A})\to X$ называются *аффинными*.

Два частных случая этой конструкции особенно важны. Первый — построение векторного расслоения $\mathbf{V}(F)$ по когерентному пучку модулей $F$. Для этого в качестве $\mathcal{A}$ надо взять пучок симметрических алгебр $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(F)$ пучка $F$. Эта конструкция коммутирует с заменой базы. В частности, для любой точки $x\in X$ слой $\mathbf{V}(F)$ над $x$ отождествляется с векторным пространством $F(x)^*$, двойственным к $F(x)=F_x/\mathfrak{m}_xF_x$, где $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал $\mathcal{O}_{X,x}$. При этом сечения $F$ реализуются как функции на $\mathbf{V}(F)$, линейные послойно, и более того, $F$ изоморфен пучку $\mathcal{L}_X(\mathbf{V}(F))$ линейных форм на $\mathbf{V}(F)$ (см. § 5).

Другой частный случай полезен для конструирования проективных расслоений. Пусть пучок алгебр $\mathcal{A}$ градуированный, $\mathcal{A}=\bigoplus_{k\geqslant 0}A_k$, причем а) $\mathcal{A}_0=\mathcal{O}_X$, б) пучок $\mathcal{A}_1$ когерентный, в) $\mathcal{A}_1$ порождает $\mathcal{A}$ над $\mathcal{A}_0$. Канонический гомоморфизм пучков $\mathcal{O}_X$ — алгебр $\mathrm{Sym}(\mathcal{A}_1)\to\mathcal{A}$ сюръективен, что дает замкнутое вложение $X$-схем $C=\mathrm{Specm}_X(\mathcal{A})\hookrightarrow\mathbf{V}(\mathcal{A}_1)$. В силу градуированности $\mathcal{A}$ подсхема $C$ инвариантна при действии $K$ гомотетиями на векторном расслоении $\mathbf{V}(\mathcal{A}_1)$, так что $C$ представляет расслоение на конусы. Соответствующее проективное расслоение $\mathbf{P}_X(C)\to X$ (см. § 5) называется *проективным спектром* градуированого пучка алгебр $\mathcal{A}$ и обозначается $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})$. Конструкция проективного спектра также коммутирует с заменой базы. Морфизмы вида $\mathrm{Proj}(\mathcal{A})\to X$ называются *проективными*. Подробнее см. [28], [34], [41], [53].

## § 7. Дифференциальное исчисление на алгебраических многообразиях

Понятия дифференциала отображения и касательного пространства — центральные в любой теории многообразий. Они служат инструментом линеаризации различных задач.

**7.1. Дифференциал регулярной функции.** Пусть $f(T_1,\ldots$ $\ldots, T_n)$ — многочлен (или регулярная функция на $\mathbf{A}^n$); пользуясь обычными правилами дифференцирования суммы и произведения, можно без предельных переходов, чисто формально определить частные производные $\partial f/\partial T_i$. Это снова будут многочлены. *Дифференциалом* $f$ в точке $x\in\mathbf{A}^n$ называется линейное отображение

$$d_x f : K^n \to K,$$

которое точку $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ переводит в число $(d_x f)(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (\partial f / \partial T_i)(x)\, \xi_i$. Можно также сказать, что $d_x f$ — это линейная часть функции $f$ в точке $x$, так как

$$f(x+\xi) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} (\partial f / \partial T_i)(x)\, \xi_i + \ldots$$

где ... означает члены порядка $\geqslant 2$ по $\xi$. В силу полиномиальности $\partial f / \partial T_i$ отображения $d_x f$ склеиваются в одно регулярное отображение $df : K^n \times \mathbf{A}^n \to K$, $df(\xi, x) = (d_x f)(\xi)$.

Строение слоя $f^{-1}(f(x))$ вблизи точки $x$ зависит от того, отличен от нуля дифференциал $d_x f$ или нет. Если $d_x f \neq 0$, многообразие $f^{-1}(f(x))$ устроено «похоже» на многообразие нулей дифференциала $d_x f$ и является «гладким» вблизи $x$. Линейное пространство нулей $d_x f$ естественно считать «касательным» к $f^{-1}(f(x))$ в $x$. Если же $d_x f = 0$, картина усложняется. Ниже нарисован график функции $f = T_1^2 + T_1^3 - T_2^2$ и его сечение нулевого уровня $f^{-1}(0)$. Дифференциал обращается в нуль лишь в начале координат, и в нем кривая $f^{-1}(0) = [T_2^2 = T_1^2 + T_1^3]$ имеет «особенность»; все остальные кривые равного уровня $f^{-1}(c)$ «гладкие».

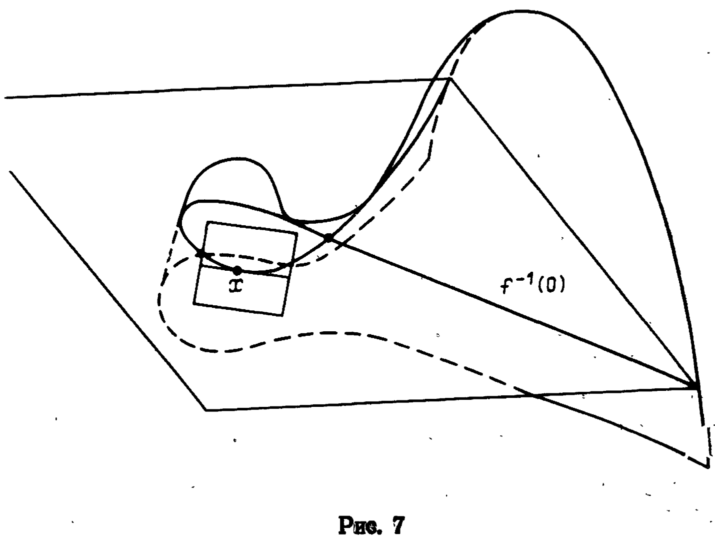



Рис. 7

Заметим сразу, что дифференциал может равняться нулю во всех точках, даже если $f$ непостоянна (см. морфизм Фробениуса из § 2). Однако это бывает в очень специальных случаях:

Предложение. Пусть $f$ — непостоянный многочлен и дифференциалы $d_x f$ равны нулю во всех точках $x \in f^{-1}(0)$. Тогда $f$ есть $p$-я степень некоторого многочлена, где $p$ — характеристика поля $K$. В частности, $f$ приводим.

В самом деле, пусть $f$ неприводим, и $\partial f / \partial T_i$ обращается в нуль в точках $f^{-1}(0)$. Из теоремы Гильберта о нулях $\partial f / \partial T_i$ делится на $f$. Но степень $\partial f / \partial T_i$ меньше степени $f$, так что многочлен $\partial f / \partial T_i$ нулевой. В нулевой характеристике отсюда следует постоянство $f$. В характеристике $p>0$ можно утверждать лишь, что $f$ зависит от $T_1^p, \ldots, T_n^p$. Но тогда $f = g^p$ для некоторого многочлена $g$.

**7.2. Касательное пространство.** Пусть теперь $X$ — подмногообразие (или лучше подсхема) в $\mathbf{A}^n$, заданная идеалом $I \subset K[T_1, \ldots, T_n]$, и $x \in X$. Скажем, что вектор $\xi \in K^n$ касается $X$ в точке $x$, если $(d_x g)(\xi) = 0$ для любой функции $g$ из $I$ (или только для образующих идеала $I$). Множество всех таких векторов образует векторное подпространство в $K^n$, которое обозначается $T_x X$ и называется *касательным пространством* к $X$ в $x$.

Ясно, что каждая регулярная функция $f$ на $X$ имеет дифференциал $d_x f : T_x X \to K$. Вообще, если $f : X \to Y$ — морфизм аффинных многообразий, то определен дифференциал $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$, который $K$-линеен.

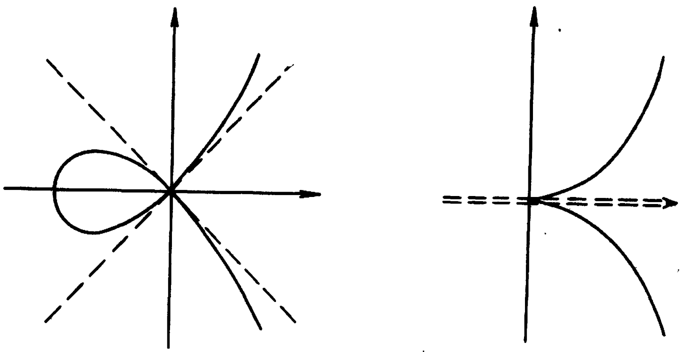
Приведенное определение касательного пространства довольно наглядно, однако аппелирует к вложению $X \subset \mathbf{A}^n$. Легко понять, как от этого избавиться. Пусть $\mathfrak{m}_x \subset K[X]$ — максимальный идеал функций, нулевых в точке $x \in X$. Сопоставляя функции ее дифференциал, мы получаем $K$-линейный гомоморфизм $\delta : \mathfrak{m}_x \to (T_x X)^*$. Легко понять, что он сюръективен, а его ядро совпадает с $\mathfrak{m}_x^2$. Это позволяет дать инвариантное определение $T_x X$ как пространства, двойственного к $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ (Зариский), а также «склеить» все касательные пространства $T_x X$ в одно касательное расслоение $TX$. Однако стоит немного задержаться еще на одном полезном понятии.

**7.3. Касательный конус.** С точкой $x$ многообразия $X \subset \mathbf{A}^n$ можно связать т. н. касательный конус $C_x X$, лежащий в касательном пространстве $T_x X$. Интуитивно его можно представлять как предельные положения секущих $\overline{xx'}$, когда $x' \in X$ и стремится к $x$.

Снова надо начать с одной функции. Пусть $f = \sum_d f_d$ — разложение на однородные формы; ненулевая форма наименьшей степени $f_d$ называется *начальной*, или ведущей формой.

Ясно, что поведение $f$ вблизи начала координат определяется главным образом ее начальной формой. Подмногообразие (а точнее, подсхема) нулей $f_{d_0}$ называется касательным конусом к гиперповерхности $[f=0]$.

Примеры. Пусть $X$ — нулевая линия уровня функции $f=T_1^2+T_1^3-T_2^2$, как (на рис. 8a). Касательный конус в начале координат задается уравнением $T_1^2=T_2^2$ и распадается на две прямые $T_1=T_2$ и $T_1=-T_2$. Аналогично для кривой $T_2^2=T_1^3$ касательный конус задается уравнением $T_2^2=0$ и представляет удвоенную прямую $T_2=0$ (рис. 8b)).



a b

Рис. 8

Дадим теперь определение. Пусть подсхема $X\subset\mathbf{A}^n$ задается идеалом $I$ и $x$ — точка $X$, которую без ущерба для общности можно считать 0. *Касательный конус* $C_xX$ — подсхема в $K^n$, заданная нулями начальных форм всех $g\in I$ (в общем случае одних образующих $I$ уже недостаточно). Ясно, что $C_xX$ лежит в касательном пространстве $T_xX$ и порождает последнее как векторное пространство (точнее, касательное пространство к $C_xX$ в нуле совпадает с $T_xX$). В каком-то смысле многообразие $X$ вблизи $x$ «похоже» на $C_xX$, хотя это и нельзя понимать буквально, как локальный изоморфизм (см. рис. 8b).

Для более инвариантного определения касательного конуса понадобится следующее алгебраическое понятие. Пусть $\mathfrak{A}$ — идеал в кольце $A$; градуированным кольцом пары $(A,\mathfrak{A})$ называется градуированное кольцо

$$\mathrm{gr}\,(A,\mathfrak{A})=\bigoplus_{k\geq 0}(\mathfrak{A}^k/\mathfrak{A}^{k+1}).$$

Подробнее об этом образовании см. [19], [23], [63], [65]. Можно показать, что в предыдущих обозначениях факторкольцо $K[T_1,\ldots,T_n]$ по идеалу ведущих форм $I$ изоморфно

$\mathrm{gr}(K[X], \mathfrak{m}_x)$. Поэтому для произвольного многообразия $X$ конус $C_xX$ можно определить как $\mathrm{Specm}(\mathrm{gr}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x))$.

Касательный конус, как и касательное пространство — образования функториальные. Если $f: X \to Y$ морфизм, $x \in X$, то при линейном отображении $d_xf: T_xX \to T_{f(x)}Y$ конус $C_xX$ отображается в конус $C_{f(x)}Y$.

**7.4. Гладкие многообразия и морфизмы.** Наиболее просто многообразия устроены в точках, где они похожи на касательное пространство.

Определение. Точка $x$ на многообразии $X$ называется *гладкой* (или неособой; или регулярной; говорят также, что $X$ гладко в $x$), если $C_xX = T_xX$. В противном случае, точка $x$ называется *особой*.

Как мы видели в п. 7.1, почти все точки гиперповерхности в $\mathbf{A}^n$ гладкие. Позже мы увидим, что это верно для любого многообразия, так что множество $\mathrm{Sing}\, X$ особых точек многообразия $X$ замкнуто и нигде не плотно. Если $\mathrm{Sing}\, X$ пусто, то $X$ называется *гладким*. Гладкие многообразия наиболее похожи на дифференцируемые или аналитические многообразия, гладкие по определению. Конечно, $\mathbf{A}^n$ — гладкое, как и $\mathbf{P}^n$, и многообразия Грассмана. Если $X$ — гладкое многообразие и $f: X \to K$ — регулярная функция, то многообразие $f^{-1}(f(x))$ гладкое в тех точках $x$, где $d_xf \neq 0$. Понятно, как это обобщается на морфизмы гладких многообразий. Мы же дадим относительный вариант понятия гладкости для семейства многообразий.

Определение. Морфизм $f: X \to Y$ называется *гладким в точке* $x \in X$, если дифференциал $d_xf: C_xX \to C_{f(x)}Y$ устроен как проекция $V \times C_{f(x)}Y$ на второй сомножитель, где $V$ — векторное пространство. В противном случае говорят, что $f$ *вырождается* в $x$. Нигде не вырожденный морфизм называется *гладким*.

Приведем несколько простых свойств гладких морфизмов:

а) Если $X$ и $Y$ — гладкие, то гладкость $f$ сводится к сюръективности отображений касательных пространств.

б) Многообразие $X$ гладкое тогда и только тогда, когда гладко отображение $X$ в точку.

в) Если $Y$ — гладкое многообразие, а $f: X \to Y$ — гладкий морфизм, то многообразие $X$ тоже гладкое.

г) Если $f: X \to Y$ — гладкий, то его слой $f^{-1}(y)$ гладкий. Утверждения в) и г) — частные случае более общего.

д) Гладкость сохраняется при композициях и замене базы.

**7.5. Нормальное расслоение.** Пусть $Y \subset X$ и оба многообразия гладкие и аффинные. Нормальным пространством к $Y$ в $X$ в точке $y \in Y$ естественно назвать факторпространство $N_{Y/X,y} = T_yX/T_yY$. Дифференциалы функций из идеала $I(Y)$ дают линейные функционалы на $N_{Y/X,y}$, нулевые для функций из $I(Y)^2$. Поэтому $N_{Y/X,y}$ двойственно к пространству $I(Y)/(I(Y)^2 + \mathfrak{m}_y)$. Это подсказывает способ склейки таких нормальных пространств в одно нормальное расслоение.

Пусть $Y$ — уже произвольное подмногообразие (или подсхема) $X$, заданная пучком идеалов $J\subset\mathcal{O}_X$. Факторпучок $J/J^2=J\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_Y$ сосредоточен на $Y$ и его можно рассматривать как когерентный пучок на $Y$; он называется *конормальным*. Векторное расслоение $\mathbf{V}(J/J^2)$ над $Y$, связанное с этим пучком (см. § 6), называется *нормальным* к $Y$ в $X$ и обозначается $N_{Y/X}$.

В духе п. 7.3 можно определить *расслоение нормальных конусов* $C_{Y/X}$ как $\mathrm{Specm}_Y(\mathrm{gr}(\mathcal{O}_X, J))=\mathrm{Specm}_Y(\bigoplus_{k\geq 0} J^k/J^{k+1})$. Это замкнутая подсхема в $N_{Y/X}$.

**7.6. Касательное расслоение.** *Касательное расслоение* $TX\to X$ к многообразию $X$ проще всего определить как нормальное расслоение к диагонали в $X\times X$. Слой этого расслоения $TX$ над точкой $x$ изоморфен $N_{x|X}$, т. е. $T_xX$. Если $f: X\to Y$ — морфизм, то $f\times f: X\times X\to Y\times Y$ переводит диагональ в диагональ и по функториальности дает гомоморфизм касательных расслоений $Tf: TX\to TY$, согласованный с $f$ и послойно совпадающий с $d_xf: T_xX\to T_{f(x)}Y$.

Примеры. а) $T(X\times Y)\simeq TX\times TY$.

б) Если $Y\subset X$, то имеется каноническая точная последовательность векторных расслоений над $Y$

$$0\to TY\to TX|_Y\to N_{Y|X}.$$

в) Касательное расслоение $TG(k, V)$ к многообразию Грассмана $G(k, V)$ отождествляется с расслоением $S^*\otimes Q$, где $S$ и $Q$ — универсальные под- и факторрасслоения на $G(k, V)$.

В частности, подкручивая на $S^*$ последовательность

$$0\to S\to V_{\mathbf{P}(V)}\to Q\to 0$$

на проективном пространстве $\mathbf{P}(V)$, мы получаем точную последовательность

$$0\to K_{\mathbf{P}(V)}\to V_{\mathbf{P}(V)}\otimes S^*\to T\mathbf{P}(V)\to 0.$$

**7.7. Пучки дифференциалов.** Конормальный пучок к диагонали в $X\times X$, рассматриваемый как $\mathcal{O}_X$-модуль, называется *кокасательным*, или *пучком дифференциальных 1-форм* на $X$ и обозначается $\Omega_X^1$. Его сечения реализуются как (послойно) линейные функции на $TX$ и называются *дифференциальными 1-формами*. Примерами 1-форм являются дифференциалы $df$ функций на $X$. Для $x\in X$ дифференциал $d$ дает изоморфизм $m_x/m_x^2\simeq\Omega_X^1(x)$. Дифференциалы функториальны в том смысле, что морфизм многообразий $f: X\to Y$ дает гомоморфизм пучков $f^*: \Omega_Y^1\to\Omega_X^1$. Подробнее о пучках и модулях дифференциалов см. [8], [9], [36], [41].

Пример 1. Пучок $\Omega^1_{\mathbf{A}^n}$ свободный с образующими $dT_1, \ldots, dT_n$.

Пример 2. Для $\mathbf{P}^n$ есть точная последовательность пучков

$$0 \to \Omega^1_{\mathbf{P}^n} \to K^{n+1} \underset{K}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \to 0,$$

двойственная к последовательности расслоений из примера 8.6в).

Пример 3. Если $Y \subset X$ — подсхема с пучком идеалов $J \subset \mathcal{O}_X$, имеется двойственная к примеру б) п. 7.6 точная последовательность *присоединения*

$$J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \to \Omega^1_Y \to 0.$$

Гомоморфизм $\delta$ индуцирован дифференцированием $d$ и часто бывает инъективен (например, если $X$ и $Y$ гладкие).

Пример 4. Пусть $X \subset \mathbf{P}^2$ — гладкая кривая третьей степени. Тогда пучок идеалов $J$ в $X$ в $\mathbf{P}^2$ изоморфен $\mathcal{O}_P(-3)$, а $J/J^2 \simeq \mathcal{O}_X(-3)$. Поэтому $\Omega^1_X \otimes \mathcal{O}(-3)$ изоморфен второй внешней степени $\Omega^1_P \otimes \mathcal{O}_X$, т. е. ограничению $\Lambda^2\Omega^1_{P^2}$ на $X$. Из примера 2 видно, что $\Lambda^2\Omega^1_{P^2} \simeq \mathcal{O}_{P^2}(-3)$. Отсюда $\Omega^1_X \simeq \mathcal{O}_X$, так что на $X$ есть нетривиальная регулярная дифференциальная 1-форма.

Конечно, эту форму можно написать явно. Рассмотрим в $\mathbf{A}^3$ три (рациональные) 1-формы

$$\omega_0 = \frac{T_1dT_2 - T_2dT_1}{\partial F/\partial T_0}, \quad \omega_1 = \frac{T_2dT_0 - T_0dT_2}{\partial F/\partial T_1}, \quad \omega_2 = \frac{T_0dT_1 - T_1dT_0}{\partial F/\partial T_2},$$

где $F(T_0, T_1, T_2)$ — однородный многочлен 3-й степени задающий $X$. Так как степени числителей и знаменателей $\omega_i$ равны 2, формы $\omega_i$ однородны и определяют 1-формы на $\mathbf{P}^2$, регулярные вне кривых $\mathcal{D}_i = [\partial F/\partial T_i = 0]$. Главное — формы $\omega_i$ совпадают при ограничении на $X$; это следует из того, что при ограничении на $X$ обращаются в нуль

$$3F = \sum \frac{\partial F}{\partial T_i} T_i \text{ и } dF = \sum \frac{\partial F_i}{\partial T_i} dT_i.$$

Поэтому формы $\omega_i|X$ задают одну форму $\omega$ на $X$, регулярную так как $D_i$ не пересекаются в точках $X$ в силу гладкости $X$,

Заметим, что если степень $d$ многочлена $F$ будет $\geqslant 3$, формы $\omega_i$ можно умножить на любой однородный многочлен степени $d-3$ и по тем же причинам получить регулярную 1-форму на кривой $[F=0] \subset \mathbf{P}^2$. Поэтому на гладкой кривой степени $d$ в $\mathbf{P}^2$ есть $\frac{(d-2)(d-1)}{2}$ регулярных дифференциальных форм.

Внешние степени $\Lambda^p(\Omega^1_X)$ пучка $\mathcal{O}_X$-модулей $\Omega^1_X$ обозначаются $\Omega^p_X$ и называются *пучками p-дифференциалов* на $X$. Как и пучки 1-дифференциалов, они ведут себя контравариантно. С ними можно делать обычные операции [25], [26]: а) операции внешнего умножения, б) сворачивания с векторными полями (т. е. сечениями касательного расслоения $TX \to X$), в) внешнего дифференцирования, $d: \Omega_X^p \to \Omega_X^{p+1}$.

Для алгебраических многообразий можно также рассматривать векторные поля, дифференциальные операторы, дифференциальные уравнения, связности и остальные дифференциально-геометрические понятия [25], [32], [64].

## *Глава 2*

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

В главе 1 теория алгебраических многообразий развивалась параллельно теории дифференцируемых многообразий. В этой главе мы рассмотрим понятия и свойства, специфические именно для алгебраических многообразий и либо не имеющие дифференцируемых аналогов, либо требующие существенно иного подхода. К первым относятся понятия неприводимости, нормальности, рациональные отображения, раздутия. Ко вторым — понятия полноты, размерности, гладкости. Здесь же устанавливаются фундаментальные свойства алгебраических многообразий — теорема о размерности слоев, теорема о конструктивности образа, теорема о связности, основная теорема Зариского, полнота проективных многообразий, теорема конечности и т. д. Это требует чуть большего привлечения алгебры, нежели в главе 1.

### § 1. Рациональные отображения

**1.1. Неприводимые многообразия.** Начнем с плоской кривой $[T_1T_2=0] \subset \mathrm{A}^2$. Она явно состоит из двух кусков — прямых $[T_1=0]$ и $[T_2=0]$, пересекающихся в точке 0 (см. рис. 1). В свою очередь, эти прямые уже не разлагаются на более простые замкнутые подмножества. Оказывается, что и любое алгебраическое многообразие разлагается в объединение конечного числа неприводимых компонент.

Начнем с общего определения. Топологическое пространство $X$ называется *неприводимым*, если оно не является объединением двух собственных замкнутых подмножеств. Или, что то же самое, любое непустое открытое подмножество плотно в $X$. В частности, неприводимое пространство связно, хотя обратное неверно, как видно из приведенного выше примера. Замыкание неприводимого подмножества неприводимо. Образ неприводимого множества при непрерывном отображении неприводим.

Алгебраическое многообразие называется *неприводимым*, если оно неприводимо в топологии Зариского.

Пример 1. Аффинное пространство $\mathbf{A}^n$ (а значит и $\mathbf{P}^n$) неприводимо. В самом деле, пусть $\mathbf{A}^n = V(f) \cup V(g)$; тогда $f \cdot g = 0$. Но кольцо многочленов $K[T_1, \ldots, T_n]$ целостно, поэтому либо $f$, либо $g$ равно 0, т. е. либо $V(f)$, либо $V(g)$ совпадает с $\mathbf{A}^n$. Вообще, аффинное многообразие $X$ неприводимо тогда и только тогда, когда кольцо $K[X]$ целостно.

Пример 2. Если многообразия $X$ и $Y$ неприводимы, то неприводимо и $X \times Y$. Для этого заметим, что образ любого открытого $U \subset X \times Y$ при проекции на $Y$ открыт. В самом деле, проекция $U$ совпадает с объединением открытых $V_x \subset Y$, $x \in X$, таких что $U \cap (\{x\} \times Y) = \{x\} \times V_x$.

Пример 3. Пусть $f \in K[T_1, \ldots, T_n]$ — неприводимый многочлен. Из теоремы Гаусса об однозначном разложении на множители в кольце $K[T_1, \ldots, T_n]$ легко получить, что гиперповерхность $V(f) \subset \mathrm{A}^n$ неприводима. Вообще, если $f = f_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{m_r}$ — разложение на неприводимые множители, то $V(f) = V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_r)$ — разложение $V(f)$ на неприводимые компоненты.

Определение. *Неприводимой компонентой* многообразия $X$ называется максимальное неприводимое подмножество $X$; ясно, что оно замкнуто.

Любое алгебраическое многообразие разлагается на конечное число неприводимых компонент. В самом деле, если $X$ приводимо, разложим его на два меньших подмногообразия и т. д. То, что процесс закончится через конечное число шагов, гарантирует специфическое свойство топологии Зарисского — нётеровость.

**1.2. Нётеровы пространства.** Топологическое пространство $X$ называется *нётеровым*, если любая убывающая последовательность замкнутых подмножеств $Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$ в $X$ стабилизируется, т. е. найдется $r$, что $Y_r = Y_{r+1} = \ldots$ . Имеют место следующие простые факты (см., например, [23]):

а) Любое подпространство нётерова пространства нётерово.

б) Пространство $X$ нётерово т. и т. т., когда любое его открытое подмножество $U$ квазикомпактно (т. е. из любого открытого покрытия $U$ можно выбрать конечное подпокрытие).

в) $X$ нётерово, если оно покрывается конечнем числом нётеровых пространств.

Предложение. Алгебраическое многообразие нётерово.

Напомним, что мы ограничились многообразиями с конечным атласом. Поэтому в силу а) и в) достаточно проверить нётеровость аффинного пространства $\mathrm{A}^n$. Пусть $Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$ — убывающая последовательность подмногообразий $\mathbf{A}^n$ и $I(Y_1) \subset \subset I(Y_2) \subset \ldots$ соответствующая возрастающая последовательность идеалов в $K[T_1, \ldots, T_n]$. По теореме Гильберта о базисе идеал $\bigcup\limits_i I(Y_i)$ конечно порожден. Его образующие лежат в некотором $I(Y_r)$; тогда $I(Y_r) = I(Y_{r+1}) = \ldots$ и $Y_r = Y_{r+1} = \ldots$ .

**1.3. Рациональные функции.** Рациональной функцией от переменных $T_1, \ldots, T_n$ называется отношение $f/g$ двух многочленов $f$, $g$ от $T_1, \ldots, T_n$, причем $g \neq 0$. Отметим, что она является функцией не на всем $\mathbf{A}^n$, а лишь на открытом подмножестве $\mathscr{D}(g) \subset \mathbf{A}^n$, где $g$ отлично от нуля. При этом она однозначно определяется своим ограничением на любое непустое открытое $U \subset \mathscr{D}(g)$. Обратно, любая регулярная функция на открытом $U \subset \mathbf{A}^n$ представляется рациональной функцией.

Это подсказывает следующее обобщение на любое алгебраическое многообразие $X$. *Рациональной функцией* на $X$ называется класс эквивалентности регулярных отображений $f: U \to K$, где $U$ — открытое плотное подмножество в $X$. Два таких отображения $f: U \to K$ и $f': U' \to K$ считаются эквивалентными, если они совпадают на $U \cap U'$. Это действительно будет отношением эквивалентности, так как $U \cap U'$ также плотно в $X$. (Наивное определение рациональной функции как отношения двух регулярных функций мало интересно, так как на $\mathbf{P}^n$ мало регулярных функций.)

Рациональные функции можно складывать и перемножать, так что множество $K(X)$ всех рациональных функций на многообразии $X$ является кольцом. Ясно, что $K(X)$ есть индуктивный предел $\varinjlim \mathcal{O}_X(U)$ колец $\mathcal{O}_X(U)$, когда $U$ пробегает открытые плотные подмножества в $X$. Если $X$ неприводимо, $K(X)$ является даже полем. В самом деле, если $f: U \to K$ — ненулевая функция, она обратима на непустом (следовательно, плотном) открытом подмножестве $U - f^{-1}(0)$. Далее, для неприводимого $X$ поле $K(X)$ совпадает с полем частных целостного кольца $K[U]$, где $U$ — любая аффинная карта $X$. Для произвольного $X$ кольцо $K(X)$ есть прямая сумма полей $K(X_i)$, где $X_i$ — неприводимые компоненты $X$.

**1.4. Рациональные отображения.** Совершенно аналогично определяется *рациональное отображение* многообразия $X$ в *отделимое* многообразие $Y$ как класс эквивалентности морфизмов $U \to Y$, где $U$ открыто и плотно в $X$. Среди таких $U$ существует наибольшее, которое называется *областью определения* рационального отображения $f$.

Пример. Рассмотрим преобразование $\mathbf{P}^n$ в себя, которое точку с однородными координатами $(x_0, \ldots, x_n)$ переводит в точку $(x_0^{-1}, \ldots, x_0^{-1})$. Оно определено, если все $x_i \neq 0$. Однако область его определения шире и включает точки, для которых лишь одно из $x_i$ равно нулю; такая точка $(0, x_1, \ldots, x_n)$ переходит в $(1, 0, \ldots, 0)$. В частности, при $n = 1$ это отображение определено всюду (и совпадает с $(x, y) \mapsto (y, x)$). При $n = 2$ оно неопределено лишь в трех точках $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Известный недостаток рациональных отображений в том, что их композиция определена не всегда; в самом деле, образ предыдущего отображения может оказаться целиком вне области определения последующего. Этого не случится, если образ любой компоненты плотен; такие отображения называются *доминантными.* Если $f: X \dashrightarrow Y$ доминантное рациональное отображение неприводимых многообразий, то поле $K(Y)$ вкладывается в поле $K(X)$.

Рациональное отображение $f: X \dashrightarrow Y$ неприводимых многообразий называется *бирациональным*, если оно обладает рациональным обратным $f^{-1}: Y \dashrightarrow X$; эквивалентно можно сказать, что $f^*$ устанавливает изоморфизм полей $K(Y)$ и $K(X)$. Например, отображение $x \mapsto (x^2, x^3)$ устанавливает бирациональный изоморфизм прямой $\mathbf{A}^1$ и плоской кривой $C=[T_1^3=T_2^2]$. Другой

Пример. Пусть $C \subset \mathbf{P}^2$ — неприводимая коника. Тогда стереографическая проекция (см. рис. 9), т. е. линейная проекция

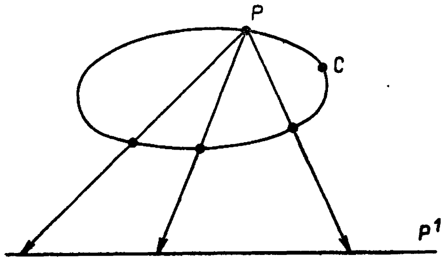



Рис. 9

из точки $p \in C$ задает бирациональный изоморфизм коники $C$ и прямой $\mathbf{P}^1$. Вообще, если $X \subset \mathbf{P}^n$ — неприводимая гиперповерхность степени два, то линейная проекция из гладкой точки $p \in X$ задает бирациональный изоморфизм $X \dashrightarrow \mathbf{P}^{n-1}$. Как мы увидим позже, гладкая кубическая кривая в $\mathbf{P}^2$ уже бирационально не эквивалентна $\mathbf{P}^1$.

Бирациональная эквивалентность доставляет более слабое понятие эквивалентности, чем изоморфизм; в этом также специфика алгебраической геометрии. Изучение алгебраических многообразий с точностью до бирациональных преобразований и нахождение бирациональных инвариантов составляет предмет бирациональной геометрии.

**1.5. График рационального отображения.** Рациональное отображение $f: X \dashrightarrow Y$ можно еще одним способом представить морфизмом. Пусть $f$ определено на открытом плотном $U \subset X$ и $\Gamma \subset U \times Y$ — его график (см. п. 4.3 главы 1). Замыкание $\Gamma$ в $X \times Y$ называется *графиком рационального отображения* $f$ и обозначается $\Gamma_f$. Проекция $p: \Gamma_f \to X$ является морфизмом, причем бирациональным, т. к. $p$ изоморфизм над $U$. Если $q$ — вторая проекция $\Gamma_f \to Y$, то $f$ представляется как композиция

$p^{-1}$ и морфизма $q$. Рациональное отображение $f$ можно понимать как многозначное отображение, сопоставляющее точке $x$ множество $f(x)=q(p^{-1}(x))$ (и однозначное почти всюду).

Вообще, алгебраическим *соответствием* между многообразиями $X$ и $Y$ называется замкнутое подмножество $T\subset X\times Y$; образом точки $x\in X$ при $T$ называется подмножество $T(x)=$ $=q(p^{-1}(x))$ в $Y$, где $p$, $q$ — проекции $T$ в $X$ и $Y$.

Пример. Рассмотрим график отображения проектирования $\pi:\mathbf{A}^{n+1}--\to\mathbf{P}^n$ из п. 4.4 главы 1; оно определено вне начала координат $0\in\mathbf{A}^{n+1}$. График ограничения его на $\mathbf{A}^{n+1}-\{0\}$ состоит из пар $(x, l)$, где $x$ — ненулевая точка $K^{n+1}$, а $l$ — прямая в $K^{n+1}$, проходящая через $x$, т. е. $l=Kx$. Замыкание его в $\mathbf{A}^{n+1}\times\mathbf{P}^n$ состоит из таких же пар $(x, l)$, $x\in l$, только теперь $x$ может и равняться 0. Оно задается уравнениями

$$T_iT'_j=T_jT'_i,\quad i, j=0, 1,\ldots, n, \tag{$*$}$$

где $T_i$ — координаты на $\mathbf{A}^{n+1}$, а $T'_i$ — однородные координаты на $\mathbf{P}^n$.

Обозначим получившееся многообразие (т. е. график $\pi$) через $\tilde{\mathbf{A}}^{n+1}$ и посмотрим, как выглядит его проекция $\sigma$ на $\mathbf{A}^{n+1}$. Для этого покроем $\tilde{\mathbf{A}}^{n+1}$ картами $\tilde{U}_i$, $i=0, 1,\ldots, n$, заданными условиями $T'_i\neq 0$ (иначе говоря, это прообразы карт $U_i$ на $\mathbf{P}^n$, см. п. 3.1 главы 1). Пользуясь $(*)$, выразим $T_j$ как $T_i\xi_j^{(i)}$, где $\xi_j^{(i)}=$ $=T'_j/T'_i$. Поэтому координатами на $\tilde{U}_i$ служат $T_i$, а также $\xi_j^{(i)}$, $j\neq i$, и они задают изоморфизм $\tilde{U}_i$ с $\mathbf{A}^{n+1}$. Отображение $\sigma$ в этих координатах имеет вид

$$\sigma^*(T_i)=T_i,\quad \sigma^*(T_j)=T_i\xi_j^{(i)} \text{ при } j\neq i.$$

Отсюда видно, что $\sigma$ устанавливает изоморфизм $\tilde{\mathbf{A}}^{n+1}-\sigma^{-1}(0)$ с $\mathbf{A}^{n+1}-\{0\}$ (впрочем, это следует из определения графика). Более важно, что $\sigma^{-1}(0)$ на карте $\tilde{U}_i$ задается одним уравнением $T_i=0$.

Вообще, слой $\sigma^{-1}(0)$ состоит из пар $(0, l)$, где $l$ — любая прямая $l\subset K^{n+1}$. Поэтому $\sigma^{-1}(0)$ изоморфен $\mathbf{P}^n$ и называется *исключительным подмногообразием* в $\tilde{\mathbf{A}}^{n+1}$. Точка $0\in\mathbf{A}^{n+1}$ при $\sigma^{-1}$ как бы раздувается, взрывается по всем направлениям, и каждому касательному направлению соответствует своя точка на исключительном многообразии $\sigma^{-1}(0)$ (см. рис. 10). По этой причине морфизм $\sigma$ (а также многообразие $\tilde{\mathbf{A}}^{n+1}$) называется *раздутием* $\mathbf{A}^{n+1}$, или *$\sigma$-процессом* с центром в точке 0.

Обратимся теперь ко второй проекции $\tilde{\pi}:\tilde{\mathbf{A}}^{n+1}\to\mathbf{P}^n$. Слой $\tilde{\pi}$ над точкой $l\in\mathbf{P}^n$, т. е. над прямой $l\subset K^{n+1}$, состоит из точек $x$, лежащих на $l$, т. е. отождествляется с самой прямой $l$. Поэтому $\tilde{\pi}$ может быть отождествлено с универсальным линейным рас-

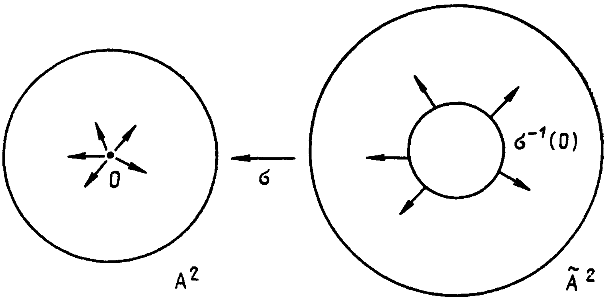



Рис. 10

слоением $S \to \mathbf{P}^n$ из п. 5.3 главы 1. Исключительное многообразие $E$ отождествляется при этом с нулевым сечением $S$.

**1.6. Раздутие точки.** Обобщением предыдущей конструкции будет раздутие точки на любом многообразии. Предположим сначала, что $X$ вложено в $\mathbf{A}^{n+1}$ и проходит через 0. Ограничим проектирование $\pi: \mathbf{A}^{n+1} \to \mathbf{P}^n$ на $X$ и рассмотрим его график. Он называется снова *раздутием* $X$ в точке 0 и обозначается $\tilde{X}$. Его можно понимать как замыкание в $\tilde{\mathbf{A}}^{n+1}$ множества $\sigma^{-1}(X - \{0\})$. Проекция $\sigma_X: \tilde{X} \to X$ задает поэтому изоморфизм $\tilde{X} - \sigma_X^{-1}(0)$ и $X - \{0\}$.

Посмотрим теперь, что происходит над точкой 0. Мы утверждаем, что слой $\sigma_X^{-1}(0)$ отождествляется с проективизацией $\mathbf{P}(C_0X)$ касательного конуса $C_0X$ к $X$ в точке 0. Это отвечает интуитивному представлению, что раздутие разводит касательные направления. Ограничимся случаем, когда $X$ задается в $\mathbf{A}^{n+1}$ одним уравнением $f=0$, где $f \in K[T_0, \ldots, T_n]$. Пусть разложение $f = \sum\limits_d f_d$ на однородные формы степени $d$ начинается с $f_{d_0}$. Тогда на карте $\tilde{U}_i$ в $\tilde{\mathbf{A}}^{n+1}$ многообразие $\sigma^{-1}(X)$ задается нулями многочлена

$$\sigma^*(f) = f(T_i\xi_0^{(i)}, \ldots, T_i\xi_n^{(i)}) = T_i^{d_0}(\tilde{f}_{d_0} + T_i\tilde{f}_{d_0+1} + \ldots).$$

Поэтому полный прообраз $\sigma^{-1}(X)$ состоит из исключительного многообразия $E = \sigma^{-1}(0)$ (с кратностью $d_0$) и $\tilde{X}$, которое на карте $\tilde{U}_i$ задается уравнением

$$\tilde{f}_{d_0} + T_i\tilde{f}_{d_0+1} + \ldots = 0.$$

Видно также, что слой $\sigma_X^{-1}(0) = \tilde{X} \cap E$ задается на карте $\tilde{U}_i$ уравнениями $T_i = 0$ и $\tilde{f}_{d_0} = 0$, а на $E \simeq \mathbf{P}^n$ — начальной формой $f_{d_0} = 0$.

Рассмотрим, например, раздутие плоской кривой $C \subset \mathbf{A}^2$ с уравнением $Y^2 = X^2 + X^3$ (см. рис. 8а). Подставляя вместо $Y$ выражение $X\xi$, мы получаем уравнение $X^2\xi^2 = X^2 + X^3$. Сокращая на $X^2$, (получаем уравнение $\xi^2 = 1 + X$, задающее $\tilde{C}$ на одной из карт усм. рис. 4). Аналогично раздутие кривой $Y^2 = X^3$ задается зравнением $\xi^2 = X$.

Чтобы раздуть теперь точку $x$ на произвольном многообразии $X$, надо некоторую окрестность $U$ точки $x$ вложить в $\mathbf{A}^{n+1}$ так, чтобы $x$ попала в 0, и склеить $X - \{x\}$ с $\tilde{U}$ по открытым $U - \{x\}$ и $\tilde{U} - \sigma_U^{-1}(0)$. Получается $X$-многообразие $\sigma: \tilde{X}_x \to X$. При этом возникает вопрос о том, не будет ли конструкция зависеть от выбора $U$ и вложения $U$ в $\mathbf{A}^{n+1}$. Мы приведем другую конструкцию, инвариантную и более общую.

**1.7. Раздутие подсхемы.** Пусть $Y \subset X$ — подсхема, заданная пучком идеалов $I \subset \mathcal{O}_X$. Образуем градуированный пучок $\mathcal{O}_X$-алгебр $\mathcal{A} = \bigoplus_{k \geqslant 0} I^k$. Проективный спектр этой алгебры $\sigma: \mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \to X$ (см. п. 6.6 главы 1) называется *раздутием* многообразия $X$ вдоль подсхемы $Y$. В оправдание такого определения раздутия приведем три довода.

а) Пусть точка $x \in X$ не лежит на $Y$. Тогда вблизи $x$ идеал $I$ совпадает с $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X[T]$ и его Proj изоморфен $X$. Поэтому $\sigma$ является изоморфизмом над $X - Y$.

б) Посмотрим, что происходит над $Y$. В силу функториальности Proj подсхема $\sigma^{-1}(Y)$ устроена как Proj алгебры $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y = \bigoplus_{k \geqslant 0} (I^k/I^{k+1}) = gr(\mathcal{O}_X, I)$. Таким образом $\sigma^{-1}(Y) \to Y$ устроено как проективизация нормального конуса $C_{Y/X}$. Важно отметить, что подсхема $\sigma^{-1}(Y) \subset \tilde{X}$ локально задается одним уравнением, как в п. 1.6; это свойство на самом деле характеризует раздутия (см. [41]).

в) В частном случае $X = \mathbf{A}^{n+1}$, $Y = \{0\}$, эта конструкция совпадает с рассмотренной в п. 1.6. В самом деле, пусть $T_0, \ldots, T_n$ — координаты на $\mathbf{A}^{n+1}$, а $T_0', \ldots, T_n'$ — образующие идеала $\mathfrak{m}_0$, рассматриваемые как элементы степени 1 в градуированном кольце $A = \bigoplus_k \mathfrak{m}_0^k$. Эти элементы связаны соотношениями $T_i T_j' = T_j T_i'$, и мы приходим к (*).

Раздутия служат средством изучения локального строения многообразия $X$ вблизи подмногообразия $Y$, позволяя как под увеличительным стеклом рассматривать особенности. Раздутия используются также для разрешения особенностей и устранения точек неопределенности рациональных отображений. Например, рациональное отображение $\mathbf{P}^2$ в себя, заданное формулой $(x, y, z) \mapsto (x^{-1}, y^{-1}, z^{-1})$, становится регулярным после раздутия трех точек $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

## § 2. Конечные морфизмы

**2.1. Квазиконечные морфизмы.** Простейшие многообразия — конечные. Прежде чем переходить к более глубокому изучению бесконечных многообразий, полезно остановиться на семействах конечных многообразий, т. е. на морфизмах с конечными слоями. Вопреки ожиданию, такие морфизмы называются *квазиконечными*. Термин «конечный морфизм» резервируется для морфизмов, удовлетворяющих дополнительному свойству замкнутости.

Пусть $f: X \to Y$ квазиконечный морфизм. Число элементов слоя $f^{-1}(y)$ может зависеть от точки $y \in Y$. Рассмотрим, к примеру, две плоские кривые $C_1$ и $C_2$ в $\mathbf{A}^2$, заданные уравнениями $Y^2 - XY = 0$ и $XY^2 - Y = 0$, и спроектируем их на ось $x$ (см. рис. 11). При фиксированном $x$ мы имеем квадратичное уравне-

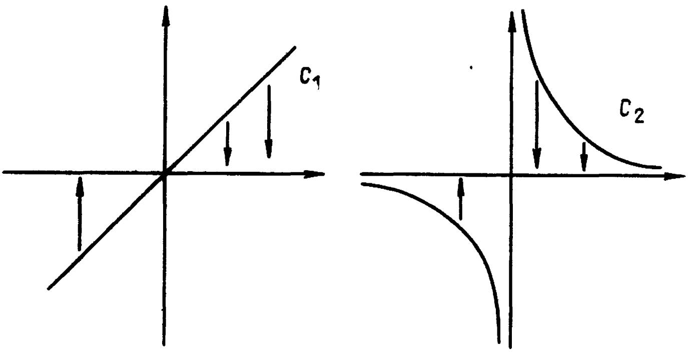



Рис. 11

ние относительно $y$, поэтому каждый слой содержит не более двух точек. Их действительно две, если $x \neq 0$. При $x = 0$ слой в обоих случаях состоит из одной точки, но по совершенно различным причинам. В первом случае при $x \to 0$ обе точки слоя сливаются в одну. Во втором случае одна из точек слоя «уходит на бесконечность». В первом случае морфизм считается конечным, во втором — нет. Чтобы дать общее определение, приходится прибегнуть к алгебраической терминологии.

**2.2. Конечные морфизмы.** Морфизм аффинных многообразий $f: X \to Y$ называется *конечным*, если кольцо $K[X]$ конечно порождено не только как алгебра над $K[Y]$, но и как $K[Y]$ — модуль (в этом случае говорят, что $K[X]$ является конечной $K[Y]$-алгеброй). По-другому можно сказать, что алгебра $K[X]$ целая над $K[Y]$ (см. § 1 главы 1). В самом деле, пусть $g \in K[X]$ и $M_n$ — $K[Y]$-подмодуль в $K[X]$, порожденный $1, g, \ldots, g^{n-1}$. В силу конечности $K[X]$ над $K[Y]$ возрастающая последовательность модулей $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ стабилизируется, $M_r = M_{r+1}$ и

$g^r$ выражается через $1, \ldots, g^{r-1}$ с коэффициентами из $K[Y]$. Поэтому $g$ цел над $K[Y]$; обратное тоже очевидно.

Морфизм $f: X \to Y$ произвольных многообразий называется *конечным*, если для любой карты $V \subset Y$ многообразие $f^{-1}(V)$ аффинно, а морфизм $f^{-1}(V) \to V$ конечен. В этом случае пучок $\mathcal{O}_Y$-алгебр $\mathcal{A} = f_*(\mathcal{O}_X)$ когерентен, а $Y$-многообразие $X$ совпадает с $\operatorname{Specm}(\mathcal{A})$. Обратно, для любого когерентного пучка $\mathcal{O}_Y$-алгебр $\mathcal{A}$ морфизм $\operatorname{Specm}_Y(\mathcal{A}) \to Y$ конечен.

Свойство конечности морфизма сохраняется при композиции и замене базы. Конечный морфизм квазиконечен: легко проверить, что конечная $K$-алгебра имеет лишь конечное число максимальных идеалов.

**2.3. Замкнутость конечных морфизмов.** Морфизм $f: X \to Y$ называется *замкнутым*, если для любого замкнутого подмножества $Z \subset X$ его образ $f(Z)$ замкнут в $Y$.

Теорема. Любой конечный морфизм замкнут.

При доказательстве можно считать $Y$ аффинным, а $Z = X$. Покажем, что если $y \notin f(X)$, то найдется функция $g \in K[Y]$, такая что $g(y) = 1$ и $f(X)$ содержится в нулях $g$, т. е. $K[X]$ аннулируется умножением на $f^*(g)$. Пусть $A = K[Y]$, $B = K[X]$ и $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в $A$, соответствующий точке $y$. По теореме Гильберта о нулях $y \notin f(X)$ тогда и только тогда, когда $f^*(\mathfrak{m})B = B$. В силу конечности $B$ как модуля над $A$ нужное нам утверждение следует из т. н. *леммы Накаямы*:

Лемма. Пусть $M$ — модуль конечного типа над кольцом $A$, $\mathfrak{a} \subset A$ идеал. Если $\mathfrak{a}M = M$, то $M$ аннулируется умножением на некоторый элемент из $1 + \mathfrak{a}$.

Индукцией по числу образующих $M$ доказательство леммы сводится к случаю, когда $M$ порождается одним элементом $m$. Но тогда $m = am$ для некоторого $a \in \mathfrak{a}$ и $(1 - a)m = 0$.

Обычно эта лемма применяется в ситуации, когда $A$ — локальное кольцо, а $\mathfrak{a} \subset A$ — максимальный идеал. Тогда $\mathfrak{a}M = M$ (или $M \otimes_A (A/\mathfrak{a}) = 0$) влечет $M = 0$.

**2.4. Применение к линейным проекциям.** Пусть $X \subset \mathbf{P}^n$ — проективное многообразие, не проходящее через точку $p \in \mathbf{P}^n$. Тогда линейная проекция $\pi: X \to \mathbf{P}^{n-1}$ с центром в точке $p$ будет конечным морфизмом.

Чтобы убедиться в этом, раздуем $\mathbf{P}^n$ в точке $p$ и рассмотрим соответствующий морфизм $\tilde{\pi}: \tilde{\mathbf{P}}^n \to \mathbf{P}^{n-1}$. Можно считать, что $X$ — подмногообразие в $\tilde{\mathbf{P}}^n$ и оно не пересекает исключительное многообразие $E \subset \tilde{\mathbf{P}}^n$. Мы уже видели в § 1, что $\tilde{\pi}$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbf{P}^1$. Покажем вообще, что если $Z \to Y$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbf{P}^1$ и замкнутое подмногобразие $X \subset Z$ не пересекается с каким-либо сечением $E$ этого расслоения, то $X$ конечно над $Y$.

Так как утверждение локально по $Y$, можно считать $Y$ аффинным, $Z = \mathbf{P}^1 \times Y$ и $E = \{\infty\} \times Y$. Наше многообразие $X$ лежит в $\mathbf{A}^1 \times Y = (\mathbf{P} \times Y) - E$ и задается некоторым идеалом $I \subset A[T]$, где $A = K[Y]$. Для многочлена $a_0 T^n + \ldots + a_n$ из $A[T]$ назовем $a_0$ старшим коэффициентом. Образуем идеал $I_0 \subset A$ старших коэффициентов многочленов из $I$. Легко понять, что идеал $I_0$ задает многообразие $X \cap (\{\infty\} \times Y)$, и так как последнее пусто, $I_0 = A$. Это значит, что $I$ содержит многочлен вида $T^n + \ldots + a_n$. Но тогда $A$-модуль $K[X] = A[T]/I$ порождается элементами $1, T, \ldots, T^{n-1}$ и конечен над $A$. Это доказывает конечность $X$ над $Y$.

**2.5. Теоремы о нормализации.** По теореме 2.3 множество $\pi(X)$ замкнуто в $\mathbf{P}^{n-1}$. Если оно отлично от $\mathbf{P}^{n-1}$, его снова можно спроектировать в $\mathbf{P}^{n-2}$ и т. д. В результате мы получим конечное и сюръективное отображение $X \to \mathbf{P}^m$ для некоторого $m$. Иначе говоря, любое проективное многообразие конечным образом отображается на некоторое проективное пространство. Например, любая проективная кривая может рассматриваться как конечное накрытие $\mathbf{P}^1$. Для нас более важен будет аффинный вариант:

Предложение. Для любого аффинного многобразия существует конечный сюръективный морфизм на аффинное пространство.

В самом деле, пусть $X \subset \mathbf{A}^n$ — аффинное многообразие Вложим стандартно $\mathbf{A}^n$ в $\mathbf{P}^n$, и пусть $\overline{X}$ — замыкание $X$ в $\mathbf{P}^n$. Если $X \neq \mathbf{A}^n$, $\overline{X}$ не содержит бесконечно удаленную гиперплоскость $H = \mathbf{P}^n - \mathbf{A}^n$. Возьмем теперь центр проектирования на $H$, но вне $\overline{X}$. Тогда проектирование $\pi: X \to \mathbf{P}^{n-1}$ будет конечным морфизмом, причем $\pi^{-1}(\mathbf{P}^{n-1} - H) = X$. Поэтому конечным будет и $X \to \mathbf{P}^{n-1} - H = \mathbf{A}^{n-1}$. Образ его замкнут в $\mathbf{A}^{n-1}$, и процесс можно продолжить до тех пор, пока образ $X$ не совпадет с $\mathbf{A}^m$.

Это предложение служит основным средством локального исследования алгебраических многообразий. Полезен также относительный вариант: для замкнутого подмногообразия $X \subset \mathbf{A}^n \times Y$ существует морфизм $Y$-многообразий $X \to \mathbf{A}^m \times Y$, конечный и сюръективный над некоторым непустым открытым $V \subset Y$. Для этого мы снова замкнем $X$ в $\mathbf{P}^n \times Y \supset \mathbf{A}^n \times Y$, и в качестве центра проекции возьмем точку $p \in H$, для которой $\{p\} \times Y$ не лежит целиком в $\overline{X}$. Проекция получится конечной, но не всюду, а лишь над открытым множеством $V = \{y \in Y,\ (p, y) \notin \overline{X}\}$.

**2.6. Теорема о конструктивности.** В частности, из этого замечания видно, что образ $f(X)$ при доминантном морфизме $f: X \to Y$ содержит открытое непустое подмножество $V \subset Y$. Индукцией отсюда легко получить *теорему Шевалле о конструктивности*:

Теорема. Если $f: X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий, то образ $f(X)$ конструктивен в $Y$.

*Конструктивным* называется множество, полученное из открытых или замкнутых подмножеств при помощи конечного числа операций пересечения, объединения и дополнения; см. рис. 4.

**2.7. Нормальные многообразия.** Аффинное пространство $\mathbf{A}^n$ обладает следующим важным качественным свойством. Если $X \to \mathbf{A}^n$ — конечный бирациональный морфизм, то он изоморфизм. В самом деле, покажем, что $K[X] = K[\mathbf{A}^n]$. В силу бирациональности любой элемент $r \in K[X]$ можно представить несократимой дробью $f/g$, где $f, g \in K[T_1, \ldots, T_n]$. В силу конечности $r$ удовлетворяет уравнению $r^m + a_1 r^{m-1} + \ldots + a_m = 0$, где $a_i \in K[T_1, \ldots, T_n]$, или $f^m + a_1 f^{m-1} g + \ldots + a_m g^m = 0$. Если $h$ — неприводимый множитель для $g$, то $f^m$ делится на $h$, откуда (в силу однозначности разложения на множители в кольце многочленов) $f$ делится на $h$. Это противоречит несократимости $f/g$. Значит, $g$ — константа и $r \in K[\mathbf{A}^n]$.

Вообще, алгебраическое многообразие $X$ называется *нормальным*, если любой конечный бирациональный морфизм $X' \to X$ является изоморфизмом. Нормальность — локальное свойство, и как мы увидим дальше, нормальные многообразия обладают рядом хороших свойств. Для аффинного многообразия $X$ нормальность в точности означает целозамкнутость кольца $K[X]$ в поле частных $K(X)$ (говорят также, что кольцо $K[X]$ *нормально*). Приведенные выше аргументы показывают нормальность любого кольца с однозначным разложением на множители.

Кривая $C$ из примера 1 п. 2.6 главы 1, ненормальна; именно приведенная там параметризация $\mathbf{A}^1 \to \mathbf{C}$ конечна и бирациональна, но не изоморфизм. Так как прямая $\mathbf{A}^1$ нормальна, морфизм $\mathbf{A}^1 \to C$ является нормализацией кривой $C$. Конечный бирациональный морфизм $X^н \to X$ называется *нормализацией*, если многообразие $X^н$ нормально. Ясно, что нормализация определена с точностью до изоморфизма; более важно, что она всегда существует. Конструкция нормализации основана на двух фактах коммутативной алгебры. Первый — простой — состоит в том, что целое замыкание коммутирует с локализацией. Поэтому можно нормализовать аффинные карты $X$ и склеить затем получившиеся куски. Второй — более деликатный (см. [23, гл. V, § 3]): пусть $A$ — целостная $K$-алгебра конечного типа с полем частных $L$, и $L \subset L'$ конечное расширение полей; тогда целое замыкание $A$ в $L'$ конечно над $A$.

**2.8. Открытость конечных морфизмов.** Морфизм $f: X \to Y$ называется *открытым*, если он переводит открытые подмножества $X$ в открытые подмножества $Y$.

Теорема. Пусть $f: X \to Y$ — конечный доминантный морфизм, причем многообразие $Y$ нормально. Тогда $f$ открыт.

Уменьшая $Y$, можно считать $Y$ и $X$ аффинными. Пусть $\mathcal{D}(g) \subset X$ — главная окрестность точки $x_0 \in X$, где $g \in K[X]$; надо показать, что $f(\mathcal{D}(g))$ содержит окрестность точки $y = f(x_0)$.

Пусть $P(T)=T^m+a_1T^{m-1}+\ldots+a_m=0$ — минимальное уравнение для $g$ над полем $K(Y)$. Мы утверждаем, что $a_i \in K[Y]$. Для этого используется

Лемма. Пусть $A$ — целостное кольцо и элемент $g$ — целый над $A$. Пусть $T^m+a_1T^{m-1}+\ldots+a_m=0$ — минимальный многочлен $g$ над полем частных $A$. Тогда его коэффициенты $a_1,\ldots$ $\ldots, a_m$ целые над $A$.

(В самом деле, если $g_1,\ldots,g_m$ — корни минимального многочлена, то они, как и $g$, целые над $A$. Но $a_i$ представляются как симметрические многочлены от $g_1,\ldots,g_m$ и потому тоже целые над $A$.)

Пусть $Z$ — подмногообразие в $Y\times\mathbf{A}^1$, заданное нулями $P(T)$. Конечный морфизм $(f, g): X\to Y\times\mathbf{A}^1$ пропускается через $Z$. В силу минимальности $P(T)$ многообразие $X$ доминирует $Z$, поэтому согласно п. 2.3 $X$ отображается на $Z$. Так как $g(x_0)\neq\neq 0$, один из коэффициентов $a_i$ отличен от нуля в точке $y_0$. Но тогда для любой точки $y\in Y$, где $a_i(y)\neq 0$, существует ненулевой корень уравнения $T+a_1(y)T^{m-1}+\ldots+a_m(y)=0$, а значит и $x\in X$ с $g(x)\neq 0$. Теорема доказана.

Нормальность $Y$ существенна, как видно из нормализации «креста» $[T_1T_2=0]$. Впрочем, нормальность $Y$ можно заменить однолистностью. Многообразие $Y$ называется *однолистным*, если морфизм нормализации $Y^н\to Y$ биективен; тогда по теореме п. 2.3 он гомеоморфизм. Например, кривая на рис. 8*b*) однолистна, тогда как кривая рис. 8а) имеет две ветви в начале координат. Теоремы пп. 2.3 и 2.8 верны в общих алгебраических рамках и известны как теоремы Коэна—Зайденберга о подъеме и спуске простых идеалов (см. [23], [19], [65]).

## § 3. Полные многообразия и собственные морфизмы

**3.1. Определения.** Начнем с наводящих соображений. Над полем $\mathbf{C}$ проективное пространство $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ отличается от аффинного пространства $\mathbf{C}^n$ компактностью в классической топологии. Интуитивно чувствуется, что и в абстрактной ситуации $\mathbf{P}^n$ «более компактно», чем $\mathbf{A}^n$; можно ли придать этому точный смысл? В топологии Зариского любое многообразие квазикомпактно, поэтому здесь нужен другой подход. Основан он на понятии пополнения. Вложение $X\subset\bar{X}$ назовем пополнением, если $X$ открыто и плотно в $\bar{X}$. Тогда $\mathbf{A}^n$ обладает нетривиальными пополнениями, например, $\mathbf{A}^n\subset\mathbf{P}^n$, тогда как $\mathbf{P}^n$ уже нельзя пополнить, по крайней мере, отделимым многообразием. Еще более сильное ограничение на $X$ состоит в требовании замкнутости образа $X$ при любом морфизме, или при любом алгебраическом соответствии $Z\subset X\times Y$. Так мы приходим к окончательному определению.

Определение. Многообразие $X$ называется *полным*, если оно отделимо, и если для любого многообразия $Y$ проекция $X\times Y\to Y$ является замкнутым морфизмом.

Здесь чувствуется некая аналогия со свойством замкнутости конечных морфизмов. Имеется более общее понятие, включающее как частные случаи понятия полного многообразия и конечного морфизма. Морфизм многообразий $f: X\to Y$ называется *собственным*, если он отделим (т. е. диагональное вложение $X\to X\times_Y X$ замкнуто) и универсально замкнут (т. е. при любой замене базы $Y'\to Y$ морфизм $f': X\times_Y Y'\to Y'$ замкнут). Отметим параллель такого определения со свойствами собственных отображений топологических пространств.

**3.2. Свойства полных многообразий.** В основном мы сделаем акцент на свойствах полных многообразий, так как перенесение их на собственные морфизмы проходит бесхитростно.

а) Замкнутое подмногообразие полного многообразия полное. Если $X\to Y$ — собственный морфизм, а $Y$ — полное многообразие, то и $X$ полное.

б) Прямое произведение полных многообразий полно. Собственность сохраняется при композиции и замене базы.

в) Образ полного многообразия при регулярном отображении является полным многообразием. В частности, регулярная функция на полном связном многообразии постоянна. В самом деле, ее образ — связное замкнутое подмножество в $\mathbf{A}^1$, отличное от $\mathbf{A}^1$ (ибо последнее не полно), т. е. одна точка. Над комплексным полем это можно получить из принципа максимума модуля.

г) Многообразие полно тогда и только тогда, когда полны все его неприводимые компоненты.

д) Над полем $\mathbf{C}$ многообразие полно тогда и только тогда, когда оно компактно в классической топологии.

Менее простым фактом является теорема Нагаты:

Теорема. Любое отделимое многообразие реализуется как открытое подмногообразие полного многообразия.

**3.3. Полнота проективных многообразий.** Наиболее важные примеры полных многообразий дают проективные многообразия.

Теорема. Любое проективное многообразие полно.

Следствие. Регулярная функция на связном проективном многообразии постоянна.

В силу свойства а) достаточно установить полноту $\mathbf{P}^n$. Раздувая точку на $\mathrm{P}_n$, мы сводим дело к полноте $\mathbf{P}^n$. Оно же расслоено над $\mathbf{P}^{n-1}$ со слоем $\mathbf{P}^1$, поэтому все сводится к проверке полноты $\mathbf{P}^1$.

Пусть $Z$ — замкнутое подмножество $\mathbf{P}'\times Y$; надо показать что $p(Z)$ замкнуто, где $p$ — проекция на $Y$. Заменяя $Y$ на $\overline{p(Z)}$, можно считать, что $Z$ доминирует $Y$. Пересечение $Z$ с сечением $\{\infty\}\times Y$ имеет вид $\{\infty\}\times F$, где $F$ замкнуто в $Y$. Заменяя $Y$ на

$Y-F$, можно считать, что $Z$ не пересекается с сечением $\{\infty\}\times\times Y$. Но тогда морфизм $Z\to Y$ конечен (см. п. 2.4), следовательно, $p(Z)=Y$ (теорема п. 2.3). Теорема доказана.

Мы воспользовались здесь свойствами конечных морфизмов из § 2. По другому полноту $\mathbf{P}^n$ можно установить, пользуясь теоремой Гильберта о нулях ([15], [56]) или теорией результантов. Аналогично можно показать, что проективные морфизмы собственны. В частности, раздутия из п. 1.8 являются собственными морфизмами.

**3.4. Пример полного непроективного многообразия.** Хотя большинство встречающихся на практике полных многообразий проективны, существуют и непроективные полные многообразия. Приведем простейший пример такого многообразия, опуская детали. Возьмем сначала $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ и раздуем на нем точку $(0, 0)$. Получается линейчатая поверхность $\varphi: Y\to\mathbf{P}^1$ с одним вырожденным слоем над 0, который состоит из двух изоморфных $\mathbf{P}^1$ компонент $F$ и $G$ (см. рис. 12).

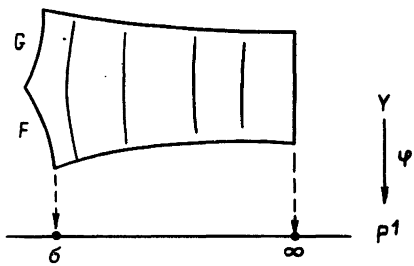



Рис. 12

Теперь возьмем еще один экземпляр такой поверхности $\varphi': Y'\to\mathbf{P}^1$ с вырожденным слоем $\varphi'^{-1}(0)=F'\cup G'$ и склеим $Y$ с $Y'$, отождествляя кривую $F$ со слоем $\varphi'^{-1}(\infty)$ и $F'$ со слоем $\varphi^{-1}(\infty)$. Полученная поверхность $X$, схематично изображена на рис. 13.

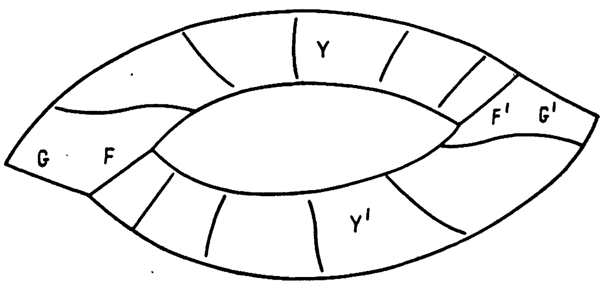



Рис. 13

Она состоит из двух компонент $Y$ и $Y'$, каждая из которых проективна, поэтому $X$ полное. Однако $X$ нельзя вложить в $\mathbf{P}^n$. В противном случае, возьмем гиперплоскость $H$ в $\mathbf{P}^n$, которая трансверсально пересекает $F$, $G$, $F'$ и $G'$ соответственно в $\nu$, $\mu$, $\nu'$ и $\mu'$ точках. Так как слой $\varphi^{-1}(0)=F+G$ «непрерывно деформируется» в слой $\varphi^{-1}(\infty)=F'$, мы получаем $\nu+\mu=\nu'$. Аналогично $\nu'+\mu'=\nu$, откуда $\mu+\mu'=0$. Это значит, что гиперплоскость $H$ не пересекается с кривыми $G$, $G'$, т. е. они лежат в $\mathbf{P}^n-H$. Но $\mathbf{P}^n-H=\mathbf{A}^n$ — аффинное многообразие и оно не может содержать полных кривых.

Отметим, что поверхность $X$ имеет особенности вдоль кривых $F$ и $F'$, и это не случайно. Можно показать, что любая гладкая полная поверхность проективна, как и любая полная кривая. В размерности три бывают гладкие полные непроективные многообразия. Интересно отметить следующее. Допустим, что мы отождествим кривую $F$ на $Y$ со слоем $\varphi^{-1}(\infty)$, например, в категории аналитических пространств. Получится объект, который не будет даже алгебраическим многообразием, а лишь алгебраическим пространством в смысле Артина и Б. Г. Мойшезона (см. п. 2.9 главы 1).

Все же полные многообразия близки к проективным, как показывает следующая *теорема Чжоу*.

Теорема. Полное многообразие есть образ проективного многообразия при собственном бирациональном морфизме.

Так, поверхность $X$ из примера п. 3.4 есть образ несвязного объединения проективных поверхностей $Y$ и $Y'$. Эта теорема Чжоу позволяет сводить многие вопросы о полных многообразиях к проективным многообразиям.

**3.5. Теорема конечности.** Сюжет, который естественно обсудить в связи с полнотой, — *теорема конечности* Серра.

Теорема. Пусть $F$ — когерентный пучок на полном многообразии $X$. Тогда пространство $H^0(X, F)=F(X)$ глобальных сечений $F$ конечномерно.

Для краткости обозначим $\mathcal{K}$ класс когерентных пучков с конечномерным пространством глобальных сечений. Следующее замечание тривиально: если $G$ — подпучок $F$ и $G$, $F/G\in\mathcal{K}$, то $F\in\mathcal{K}$.

По индукции можно считать, что теорема верна для любого подмногообразия в $X$, отличного от $X$. Из этого легко следует, что теорема верна для любого пучка с носителем, отличным от $X$. В самом деле, пусть $Y$ — носитель $F$ и $I=I(Y)$ — пучок идеалов $Y$ в $X$. Тогда убывающая цепочка пучков $F\supset IF\supset I^2F\supset\ldots$ обрывается; действительно, локальное сечение $F$ равно 0 вне $Y$ и аннулируется умножением на $I^r$ при большом $r$. Фактор-пучки $I^kF/I^{k+1}F$ аннулируются умножением на $I$ и поэтому могут рассматриваться как когерентные пучки на $Y$. По индукции эти пучки попадают в $\mathcal{K}$, так что и $F\in\mathcal{K}$.

Что касается пучков с носителем $X$, то легко привести один такой пучок из $\mathscr{K}$. А именно, $F=\mathcal{O}_X$. В самом деле, сечения $\mathcal{O}_X$ — регулярные функции, а они постоянны на связных компонентах $X$ (см. п. 3.2в). Поэтому $H^0(X, \mathcal{O}_X)\simeq K^{\pi_0(X)}$, где $\pi_0(X)$ обозначает, как обычно, множество связных компонент $X$. Оказывается, что этого уже достаточно для доказательства теоремы, ибо любой пучок отличается от свободного $\mathcal{O}_X^m$ на пучки с меньшим носителем. В самом деле, над некоторым открытым $U\subset X$ пучок $F$ изоморфен $\mathcal{O}_X^m$. И хотя этот изоморфизм не всегда можно продолжить до вложения $\mathcal{O}_X^m$ в $F$, всегда найдется когерентный подпучок $G\subset\mathcal{O}_X^m$, совпадающий с $\mathcal{O}_X^m$ над $U$, который вкладывается в $F$. Так как очевидно $G\in\mathscr{K}$, а факторпучок $F/G$ сосредоточен вне $U$, то $F/G\in\mathscr{K}$ и $F\in\mathscr{K}$. Теорема доказана.

Стоит сделать два дополнения. Во-первых, теорема конечности верна не только для глобальных сечений когерентных пучков, но и для любых когомологий. Во-вторых, она обобщается на любые собственные морфизмы $f: X\to Y$ и утверждает когерентность $f_*F$ (а также пучков высших прямых образов $R^qf_*F$).

**3.6. Теорема о связности.** Следующая теорема лежит в основе многих дальнейших утверждений о связности.

Теорема. Пусть $f: X\to Y$ — собственный морфизм и $f_*\mathcal{O}_X=\mathcal{O}_Y$. Тогда слои $f$ связны.

В самом деле, предположим, что слой $f^{-1}(y)$ над точкой $y\in Y$ несвязен и разбит на два замкнутых непересекающихся множества $A$ и $B$. Рассмотрим на $f^{-1}(y)$ функцию $s_0$, равную 0 на $A$ и 1 на $B$. Предположим, что нам удалось продолжить ее до регулярной функции $s$ на некоторой окрестности слоя $f^{-1}(y)$. По условию $s$ имеет вид $f^*(s')$, где $s'$ — регулярная функция в окрестности $y$, и такая функция не может принимать разные значения в слое. Противоречие.

Чтобы проверить продолжаемость функции $s_0$ до функции $s$, воспользуемся следующим фундаментальным результатом Гротендика. Он утверждает, в частности, что для продолжаемости $s_0$ на окрестность Зариского слоя $f^{-1}(y)$ необходимо и достаточно, чтобы $s_0$ продолжалась на любую инфинитезимальную окрестность слоя $f^{-1}(y)$. Последнее означает следующее. Пусть $I$ — пучок идеалов подсхемы $f^{-1}(y)$ в $X$; требуется существование сечений $s_k$ пучка $\mathcal{O}_X/I^{k+1}$, согласованных при гомоморфизмах $\mathcal{O}_X/I^m\to\mathcal{O}_X/I^n\,(m\geqslant n)$. Так как для нашей функции $s_0$ условие инфинитезимальной продолжаемости очевидно выполнено, ее продолжение $s$ существует. К сожалению, мы лишены возможности сказать подробнее о доказательстве теоремы Гротендика, ибо оно существенно опирается на когомологии, и отсылаем к [35], [41] или к обзору о когомологиях.

**3.7. Разложение Штейна.** Пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм. Пучок $\mathcal{O}_Y$-алгебр $f_* \mathcal{O}_X$ когерентен, поэтому $Y$-схема $Y' = \mathrm{Specm}_Y (f_* \mathcal{O}_X) \to Y$ конечна над $Y$. Ясно, что $f$ разлагается в композицию

$$X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$$

и $f'_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{Y'}$. По теореме п. 3.6 слои морфизма $f'$ связны и непусты. Такое разложение собственного морфизма называется *разложением Штейна*; слой $g^{-1}(y)$ состоит из связных компонент слоя $f^{-1}(y)$.

Следствием предыдущего является *теорема Зарисского о связности,* доказанная им без привлечения когомологий:

Теорема. Пусть $f: X \to Y$ — собственный доминантный морфизм, причем $Y$ нормально, а слои $f$ над некоторым непустым открытым подмножеством $U \subset Y$ связны. Тогда все слои $f$ связны.

Пользуясь разложением Штейна, можно считать дополнительно, что $f$ — конечный и бирациональный; тогда утверждение теоремы следует из определения нормальности. Как и в п. 2.8, вместо нормальности $Y$ можно потребовать однолистность. Приведенная теорема представляет современную формулировку классического принципа Энриквеса, утверждающего, что при вариации связное многообразие специализируется в связное (см. [20]).

## § 4. Теория размерности

**4.1. Комбинаторное определение размерности.** Размерность многообразия — первый грубый численный инвариант многообразия. Очевидное как в дифференцируемом, так и в аналитическом случаях, это понятие менее тривиально для алгебраических многообразий. Конечно, естественно считать пространство $A^n$ $n$-мерным, однако надо приписать размерность и каждому замкнутому подмножеству $X \subset \mathbf{A}^n$. Проще всего сделать это через степень трансцендентности поля $K(X)$ над $K$. Однако этот способ аппелирует к алгебре, скрывая геометрический смысл происходящего. Поэтому мы положим в основу комбинаторное определение через цепочки подобъектов. В этом стиле размерность векторного пространства есть длина наибольшего флага подпространств.

*Размерностью многообразия $X$ в точке $x \in X$* называется целое число $\dim_x X$, равное длине $r$ наибольшей цепочки $\{x\} = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_r$ различных замкнутых неприводимых подмножеств $X$. Ясно, что $\dim_x X$ зависит лишь от локального строения $X$ вблизи $x$. Кроме того, $\dim_x X$ есть максимум размерностей неприводимых компонент $X$, проходящих через $x$. По этой причине при изучении размерности часто ограничиваются неприводимыми аффинными многообразиями.

Из приведенного определения видно, что размерность $\mathbf{A}^n$ одинакова во всех точках в силу однородности $\mathbf{A}^n$ и $\geqslant n$, но совсем не видно почему она $\leqslant n$.

**4.2. Размерность и конечные морфизмы.**

Предложение. Пусть $f: X \to Y$ — конечный морфизм неприводимых многообразий, $x \in X$ и $y=f(x)$. Тогда $\dim_x X \leqslant \dim_y Y$, причем здесь равенство, если $f$ доминантный.

Покажем сначала, что для неприводимого подмногообразия $X' \subset X$, отличного от $X$, $f(X') \neq Y$; утверждение $\dim X \leqslant \dim Y$ вытекает отсюда по индукции. Будем считать $Y$ (значит, $X$ и $X'$) аффинными, и пусть $g$ — ненулевая функция на $X$, обращающаяся в нуль на $X'$. В силу конечности $X$ над $Y$ мы имеем уравнение целой зависимости $g_n + a_1 g^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, где $a_i \in K[Y]$. Если $f(X') = Y$, то над любой точкой $y' \in Y$ найдется точка $x' \in X'$, откуда $a_n = 0$. Сокращая уравнение на $g$, мы получаем уравнение меньшей степени и в конце концов получаем $g=0$. Противоречие.

Предположим теперь, что $f$ доминантный морфизм. Проектируя $Y$ на аффинное пространство (см. п. 2.5), можно считать $Y = \mathbf{A}^n$. Пусть $Y'$ — неприводимое подмножество в $Y$, проходящее через $y$; в силу теоремы п. 2.8 любая неприводимая компонента $X'$ многообразия $f^{-1}(Y')$, проходящая через $x$, доминирует $Y'$. Утверждение $\dim_x X = \dim_y Y$ следует отсюда по индукции.

Как следствие мы получаем, что размерность неприводимого многообразия $X$ в любой его точке одинакова (обозначается $\dim X$). Для этого надо считать $X$ аффинным и спроектировать его конечным образом на $\mathbf{A}^n$.

Следствие. $\dim \mathbf{A}^n = n$.

Надо проверить неравенство $\dim \mathbf{A}^n \leqslant n$; по индукции можно считать это доказанным для $\mathbf{A}^k$ при $k < n$. Пусть $Y \subset \mathbf{A}^n$ — неприводимое подмногообразие, отличное от $\mathbf{A}^n$. Подходящая линейная проекция дает конечный морфизм $Y \to \mathbf{A}^{n-1}$, так что мы получаем $\dim Y \leqslant n-1$ и $\dim \mathbf{A}_n \leqslant n$.

Следствие. Размерность неприводимого многообразия $X$ равна степени трансцендентности поля $K(X)$ над $K$.

Следствие. $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

**4.3. Размерность гиперповерхности.** Пусть $Y = V(f) \subset \mathbf{A}^n$ — гиперповерхность; мы утверждаем, что размерность любой неприводимой компоненты $Y$ равна $n-1$. Разлагая многочлен $f$ на множители, можно считать $f$ неприводимым. Пусть $\mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^{n-1}$ — линейная проекция, ограничение которой на $Y$ конечно. Очевидно, что $Y \to \mathbf{A}^{n-1}$ доминантный морфизм, поэтому $\dim Y = n-1$.

Аналогичное утверждение верно для любых многообразий. Назовем *гиперповерхностью* в многообразии $X$ множество нулей $V(f)$ регулярной функции $f: X \to K$. При переходе к гиперповерхности размерность может только уменьшиться, однако не более чем на единицу.

Теорема. Пусть $Y$ — гиперповерхность в $X$. Тогда $\dim_y Y \geqslant \dim_y X - 1$ для любой точки $y \in Y$.

Можно считать $X$ и $Y$ неприводимыми и аффинными. Пусть $\pi: X \to \mathbf{A}^n$ — конечный сюръективный морфизм (см. п. 2.5) и $Y = V(f)$. Пусть $\varphi = (\pi, f): X \to \mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^1$; как мы видели в п. 2.8, образ $\varphi(X)$ задается в $\mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^1$ минимальным многочленом $T^m + a_1 T^{m-1} + \ldots + a_m$ для $f$; причем $a_i \in K[T_1, \ldots, T_n]$. Тогда $Y$ есть прообраз гиперплоскости $[T=0]$. Поэтому $\dim Y \geqslant \dim \varphi(X) \cap [T=0]$. Последнее множество задается в $\mathbf{A}^n$ уравнением $a_m = 0$, и по предыдущему его размерность $\geqslant n-1$.

По индукции отсюда следует, что если подмногообразие $Y \subset X$ задается $n$ уравнениями, то $\dim_y Y \geqslant \dim_y X - n$. Подытожим результаты теории размерности в следующем утверждении, обобщающим классический *принцип счета констант*.

**4.4. Теорема о размерности слоев.** Пусть $f: X \to Y$ — доминантный морфизм неприводимых многообразий. Интуитивно следует ожидать, что слои $f$ имеют размерность $\dim X - \dim Y$, если и не все (см. отображение раздутия точки из п. 1.6), то хотя бы типичные. И это верно.

Теорема. Пусть $f: X \to Y$ как выше. Тогда

а) $\dim_x f^{-1}(f(x)) \geqslant \dim X - \dim Y$ для любой точки $x \in X$;

б) существует открытое непустое $V \subset Y$, для любой точки $y$ которого $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$.

При доказательстве а) можно считать $Y$ аффинным. Проектируя $Y$ конечно на $\mathbf{A}^n$, мы сводим а) к репетиции теоремы из п. 4.3. При доказательстве б) можно считать аффинным и $X$. Пользуясь относительным вариантом теоремы о нормализации п. 2.5 (и уменьшая $Y$, если нужно), мы получаем разложение $X \xrightarrow{g} \mathbf{A}^d \times Y \to Y$ морфизма $f$, где $g$ — конечный и сюръективный. Отсюда видно, что слои $f$ имеют размерность $d = \dim X - \dim Y$.

**4.5. Теорема Шевалле о полунепрерывности.**

Теорема. Для любого морфизма $f: X \to Y$ и целого числа $k$ множество $X_k = \{x \in X, \dim_x f^{-1}(f(x)) \geqslant k\}$ замкнуто в $X$.

При доказательстве можно считать $X$ и $Y$ неприводимыми, а $f$ доминантным. Пусть $d = \dim X - \dim Y$. Если $k \leqslant d$, то из а) теоремы п. 4.4 имеем $X_k = X$. Пусть теперь $k > d$ и $V \subset Y$, как в б) теоремы п. 4.4. Если обозначить $Y' = Y - V$, то $X_k \subset f^{-1}(Y')$ и замкнутость его следует по индукции из аналогичного утверждения о морфизме $f^{-1}(Y') \to Y'$.

Отметим три полезных следствия.

1. Множество точек $x \in X$, изолированных в слое $f^{-1}(f(x))$ (т. е. точек квазиконечности морфизма $f$), открыто в $X$.

2. Если морфизм $f$ собственный, множества $Y_k = \{y \in Y, \dim f^{-1}(y) \geqslant k\}$ замкнуты в $Y$. В самом деле, $Y_k = f(X_k)$.

3. Пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм, все слои которого неприводимы и имеют одну размерность; тогда если $Y$ неприводимо, то неприводимо и $X$.

Приведем еще два следствия теории размерности.

**4.6. Размерность пересечений в аффинном пространстве.** Пусть $X$ и $X'$ — подмногообразия в $\mathbf{A}^n$ и $x \in X \cap X'$. Тогда

$$\dim_x (X \cap X') \geqslant \dim_x X + \dim_x X' - n.$$

Согласно редукции к диагонали, $X \cap X'$ изоморфно пересечению $X \times X'$ с диагональю $\Delta$ в $\mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^n$. Но диагональ задается $n$ уравнениями $T_i = T_i'$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому это неравенство следует из п. 4.3 и формулы для размерности $X \times X'$.

Следствие. Пусть $X$, $X' \subset \mathbf{P}^n$, причем $\dim X + \dim X' \geqslant n$. Тогда $X \cap X' \neq \varnothing$.

В самом деле, пусть $X = \mathbf{P}(C)$, $X' = \mathbf{P}(C')$, где $C$, $C'$ — конусы в $K^{n+1}$ (см. п. 3.5 главы 1). $C$ и $C'$ пересекаются в 0 и

$$\dim_0 (C \cap C') \geqslant \dim_0 C + \dim_0 C' - (n+1) =$$
$$= \dim X + 1 + \dim X' + 1 - (n+1) \geqslant 1.$$

Поэтому $C \cap C' \neq \{0\}$ и $X \cap X' \neq \varnothing$.

В частности, если $\dim X \geqslant 1$, то $X$ пересекается с любой гиперплоскостью $H \subset \mathbf{P}^n$. Мы знаем это из другого соображения: $\mathbf{P}^n - H \simeq \mathbf{A}^n$ аффинно и потому любое полное подмногообразие в нем нульмерно. Другой полезный частный случай: при $k < n$ система из $k$ однородных уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$ от $n$ переменных всегда имеет ненулевое решение.

**4.7. Теорема об общей гладкости.** Гладкость многообразия $X$ в точке $x$ определялась в главе 1 через совпадение касательного конуса $C_x X$ с касательным пространством $T_x X$. Это определение эквивалентно более привычному, аппелирующему к понятию размерности:

Предложение. Точка $x$ на многообразии $X$ гладкая тогда и только тогда, когда $\dim T_x X = \dim_x X$.

Предложение тривиально следует из более общего равенства $\dim C_x X = \dim_x X$. Чтобы установить его, рассмотрим раздутие $\sigma: \widetilde{X} \to X$ в точке $x$. Так как $\sigma^{-1}(x)$ локально задается в $\widetilde{X}$ одним уравнением (см. п. 1.8), то $\dim \sigma^{-1}(x) = \dim \widetilde{X} - 1$. Кроме того, $\sigma^{-1}(x) = \mathbf{P}(C_x X)$, так что $\dim C_x X = \dim \sigma^{-1}(x) + 1 = \dim \widetilde{X} = \dim X$.

Теорема. Множество гладких точек любого алгебраического многообразия открыто и плотно.

Иначе говоря, «общая» точка на многообразии гладкая. При доказательстве многообразие $X$ можно считать неприводимым и аффинным. Применяя теорему о размерности слоев к $TX \to X$, мы видим, что множество гладких точек открыто. Остается показать, что оно непусто. Здесь мы впервые серьезно воспользуемся тем, что $X$ — многообразие, а не произвольная алгебраическая схема. Пусть $X \subset \mathbf{A}^N$ и для любой точки $x \in X$ размерность $T_xX$ больше $n=\dim X$. Применяя общую линейную проекцию $\mathbf{A}^N\to\mathbf{A}^{n+1}$, можно считать, что $X$ — гиперповерхность в $\mathbf{A}^{n+1}$. Но это противоречит предложению п. 7.1 главы 1.

Следствие. Любое однородное многообразие гладко.

## § 5. Неразветвленные и этальные морфизмы

**5.1. Теорема о неявной функции.** В дифференциальной и аналитической ситуации важную роль играет теорема о неявной функции. Простейшая ее форма такова. Пусть $f$ — функция на $\mathbf{C}^n$, $f(0)=0$ и $(\partial f/\partial T_n)(0)\neq 0$; тогда существует окрестность нуля $U\subset\mathbf{C}^{n-1}$ и функция $g:U\to\mathbf{C}$ соответствующей гладкости, такая что $g(0,\ldots,0)=0$ и $f(T_1,\ldots,T_{n-1}, g(T_1,\ldots,T_{n-1}))=0$. В более общей форме она утверждает, что отображение многообразий $f:X\to Y$, индуцирующее изоморфизм касательных пространств $T_xX\to T_{f(x)}Y$, локально является изоморфизмом.

Ничего похожего нет для алгебраических многообразий и топологии Зарисского. Возьмем простейшую функцию $f=T^2$ на $\mathbf{A}^1$. В точке 1 производная $df/dT=2T$ равна 2, однако никакое открытое по Зарисскому подмножество $\mathbf{A}^1$ не отображается инъективно при $f$.

И вообще, очень редко изоморфизм касательных пространств влечет локальный изоморфизм многообразий — слишком уж велики окрестности по Зарисскому. Тем не менее чувствуется, что это важный класс морфизмов, заслуживающий наименования. Их назвали этальными, или стелющимися. Гротендик пошел дальше и предложил объявить этальные морфизмы $U\to X$ «открытыми подмножествами» многообразия $X$ в этальной топологии и таким образом восстановить справедливость теоремы о неявной функции в алгебраической ситуации. Этальная топология (см. обзор о когомологиях) является алгебраическим суррогатом классической топологии и позволяет в абстрактной ситуации говорить о гомотопических группах, когомологиях, числах Бетти, формуле Лефшеца и т. п.

**5.2. Неразветвленные морфизмы.** В приведенном выше примере функции $f=T^2$ две точки $\pm\sqrt{y}$ слоя $f^{-1}(y)$ сливаются в одну при $y\to 0$. Говорят также, что функция $T^2$ ветвится над 0. Неразветвленность означает отсутствие ветвлений. Дадим точное определение.

Пусть $f:X\to Y$ — морфизм алгебраических многообразий, $x\in X$, $y=f(x)$, $\mathfrak{m}_x$ и $\mathfrak{m}_y$ — максимальные идеалы локальных колец $\mathcal{O}_{X,x}$ и $\mathcal{O}_{Y,y}$ соответственно. Легко показать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) $d_xf: T_xX\to T_yY$ инъективен,

а') $d_xf$ индуцирует вложение $C_xX$ в $C_yY$,

б) $f^*:\Omega^1_Y(y)\to\Omega^1_X(x)$ сюръективно,

б) $f^*(\mathfrak{m}_y)$ порождает идеал $\mathfrak{m}_x$ в $\mathcal{O}_{X,x}$, в′) слой $f^{-1}(y)$ как схема совпадает с точкой $x$ в окрестности $x$. Например, при импликации б)$\Rightarrow$в) используется лемма Накаямы.

В этом случае говорят, что морфизм $f$ *неразветвлен в точке* $x$. Например, функция $f=T^2$ неразветвлена в точках, отличных от 0, и ветвится в 0 (если, конечно, характеристика $K$ отлична от 2; если же характеристика равна 2, эта функция ветвится всюду). Морфизм $f$ *неразветвлен*, если он неразветвлен во всех точках $X$.

Открытое вложение неразветвлено. Замкнутое вложение также неразветвленное; кроме того, оно инъективное и конечное. Оказывается, что эти три свойства характеризуют замкнутые вложения.

Предложение. Пусть морфизм $f: X\to Y$ инъективный, конечный и неразветвленный. Тогда это замкнутое вложение.

Вообще, если $f$ — конечный, а слой $f^{-1}(y)$ как схема совпадает с $x$, то $f$ является замкнутым вложением в некоторой окрестности $y$. При доказательстве $Y$ и $X$ можно считать аффинными с кольцами регулярных функций $A$ и $B$ соответственно. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал точки $y$. Совпадение $f^{-1}(y)$ и $x$ как схем означает, что $B/f^*(\mathfrak{m})B\cong A/\mathfrak{m}$. Так как $B$ конечно над $A$, то по лемме Накаямы $f^*: A\to B$ сюръективно (быть может, $Y$ придется заменить окрестностью $y$), т. е. $f: X\to Y$ замкнутое вложение.

**5.3. Вложение проективных многообразий.** В § 2 мы строили конечные морфизмы $\pi: X\to \mathbf{P}^{n-1}$, проектируя $X\subset\mathbf{P}^n$ из точки $p\in\mathbf{P}^n-X$. Пользуясь предыдущим критерием, можно проверить, будет ли $\pi$ вложением, т. е. будет ли $X$ изоморфно своему образу $\pi(X)$. Касательные пространства к $X\subset\mathbf{P}^n$ удобно при этом реализовывать как линейные подмногообразия в $\mathbf{P}^n$. Точнее, обозначим через $\overline{T}_xX$ то единственное линейное многообразие $L\subset\mathbf{P}^n$, для которого $T_xL$ совпадает с $T_xX$ в $T_x\mathbf{P}^n$. $\overline{T}_xX$ называется вложенным проективным касательным пространством.

Займемся сначала локальными вложениями. Пусть $x\in X$ и $n>\max(\dim_x X+1, \dim T_xX)$. Тогда найдется точка $p\in\mathbf{P}^n$, проекция из которой $\pi: X\to\mathbf{P}^{n-1}$ будет замкнутым вложением некоторой окрестности точки $x$. В самом деле, множество хорд $\overline{xx'}$, когда $x'$ пробегает $X-\{x\}$, заметает многообразие $S_x$ размерности $\leqslant\dim X+1$. Поэтому $S_x\cup\overline{T}_xX$ имеет размерность меньшую, чем $\mathbf{P}^n$. Если взять центр проекции $p$ вне $S_x\cup\overline{T}_xX$, то слой проекции $\pi^{-1}(\pi(x))\cong\overline{px}\cap X$ состоит из одной точки $x$ ($p\notin S_x$) и совпадает с ней как схема ($p\notin\overline{T}_xX$). Остается применить предыдущий критерий.

В частности, окрестность точки $x$ произвольного многообразия $X$ можно реализовать как подмногообразие в $\mathbf{A}^r$, где $r=$

$=\max(\dim_x X+1,\ \dim T_x X)$. Если $x$ — гладкая точка $X$, то локально $X$ вкладывается в $\mathbf{A}^{n+1}$, $n=\dim X$. Любое неприводимое многообразие размерности $n$ бирационально изоморфно гиперповерхности в $\mathbf{A}^{n+1}$.

Перейдем теперь к глобальным вложениям.

Предложение. Гладкое проективное многообразие размерности $n$ можно вложить в $\mathbf{P}^{2n+1}$.

Пусть $X\subset\mathbf{P}^N$. Рассмотрим в $\mathbf{P}^N$ два подмножества, связанных с $X$. Первое — *многообразие секущих* $\operatorname{Sec} X$; это замыкание множества точек, лежащих на секущих или хордах $\overline{xx'}$, где $x, x'$ — различные точки $X$. Второе — $\operatorname{Tan} X$ — объединение проективных касательных $\overline{T}_x X$, $x\in X$. Ясно, что $\dim \operatorname{Sec} X\leqslant 2n+1$, а $\dim \operatorname{Tan} X\leqslant 2n$. Поэтому при $N>2n+1$ найдется точка, не лежащая на $\operatorname{Sec} X\cup\operatorname{Tan} X$. Проекция $\pi: X\to\mathbf{P}^{N-1}$ из этой точки будет конечным неразветвленным инъективным морфизмом, т. е. замкнутым вложением.

Например, любая гладкая кривая вкладывается в $\mathbf{P}^3$, поверхность — в $\mathbf{P}^5$ и т. д. Если $\dim \operatorname{Sec} X\leqslant 2n$, можно вложить $X$ в $\mathbf{P}^{2n}$, однако это бывает редко. Можно проектировать $X$ и дальше, стараясь получать по возможности более простые особенности (см. [32, гл. 4, § 6]).

**5.4. Этальные морфизмы.**

Определение. Морфизм $f: X\to Y$ называется *этальным в точке* $x\in X$, если $d_x f$ индуцирует изоморфизм $C_x X\to C_{f(x)} Y$ касательных конусов как схем.

Можно также сказать, что этальный — это гладкий и неразветвленный морфизм.

Например, открытое вложение этально. Напротив, если замкнутое вложение этально в точке $x$, оно локально является изоморфизмом. Размерность, как и гладкость, сохраняются при этальных морфизмах.

Типичный пример. Пусть $Y$ — аффинное многообразие, а $X\subset\mathbf{A}^1\times Y$ задается нулями многочлена $P\in K[Y][T]$. Если для точки $x\in X$ производная $(dP/dT)(x)\neq 0$, то $X$ этален над $Y$ в точке $x$.

На самом деле любой этальный морфизм локально устроен так же как в этом примере. Мы покажем это, предполагая $X$ конечным над $Y$ (что, впрочем, не умаляет общности в силу п. 7.2). Пусть $X$ вложено в $\mathbf{A}^n\times Y$. Выбирая подходящую проекцию $\mathbf{A}^n\to\mathbf{A}^1$ и пользуясь неразветвленностью в $x$, можно считать, что $X$ лежит в $\mathbf{A}^1\times Y$.

Рассмотрим теперь слой над точкой $y=f(x)$. Как подсхема в $\mathbf{A}^1=\mathbf{A}^1\times\{y\}$ он задается нулями многочлена $T^m+\bar{a}_1T^{m-1}+\ldots$ $\ldots+\bar{a}_m$ с коэффициентами из $K[Y]/\mathfrak{m}_y$. Значит, $1, T, \ldots, T^{m-1}$ порождают $K[X]$ по модулю $\mathfrak{m}_y$. По лемме Накаями они порождают $K[X]$ над $K[Y]$. Значит, в $K[X]$ выполняется соотношение $P(T)=T^m+a_1T^{m-1}+\ldots+a_m=0$, где $a_i\in K[Y]$, т. е. $X$ лежит в многообразии $X' \subset \mathbf{A}' \times Y$ нулей многочлена $P$. В силу неразветвленности $x$ — простой корень $\bar{P}$, так что $(dP/dT)(x) \neq 0$ и $X'$ этально над $Y$ в $x$. Но тогда этально и замкнутое вложение $X \subset X'$ и является изоморфизмом в окрестности $x$.

Как следствие мы получаем, что множество точек этальности морфизма $f: X \to Y$ открыто в $X$. Кроме того, видно, что этальность сохраняется при замене базы.

**5.5. Этальные накрытия.** Конечный этальный морфизм называется *этальным накрытием*. Над комплексным полем и в классической топологии такие морфизмы являются неразветвленными накрытиями, т. е. локально тривиальными расслоениями с конечными слоями. В частности, число точек слоя $f^{-1}(y)$ не зависит от $y \in Y$. Покажем, что последнее верно и в абстрактной ситуации.

Теорема о постоянстве. Пусть $f: X \to Y$ — этальное накрытие связного $Y$. Тогда число точек слоя $f^{-1}(y)$ не зависит от $y \in Y$.

В самом деле, рассуждая как в п. 5.4, мы получаем, что локально по $Y$ многообразие $X$ может быть задано в $\mathbf{A}^1 \times Y$ одним уравнением $T^m + a_1 T^{m-1} + \ldots + a_m = 0$, где $a_i \in K[Y]$. В силу этальности все корни уравнения $T^m + a^1(y) T^{m-1} + \ldots + a_m(y) = 0$ простые и их ровно $m$.

Аналогия этальных накрытий с неразветвленными накрытиями из топологии позволяет построить чисто алгебраическую теорию фундаментальной группы, тесно связанную с теорией Галуа. Отсылая за подробностями к [37], мы ограничимся одним определением. Связное многообразие $X$ называется *односвязным*, если любое этальное накрытие $X' \to X$ со связным $X'$ является изоморфизмом.

Например, как мы увидим позже, $\mathbf{P}^n$ односвязно.

**5.6. Степень конечного морфизма.** Из доказательства теоремы о постоянстве видно, что число точек в слоях этального накрытия $f: X \to Y$, которое естественно называть степенью $f$, равно размерности кольца $K(X)$ над полем $K(Y)$. Это подсказывает более общее определение степени.

Определение. Пусть $f: X \to Y$ — конечный доминантный морфизм. Размерность $[K(X) : K(Y)]$ кольца рациональных функций $K(X)$ над полем $K(Y)$ называется *степенью* $f$ и обозначается $\deg f$.

Естественно задать вопрос — как связано число точек в слоях конечного морфизма $f$ с $\deg f$.

Теорема. Пусть $f: X \to Y$ — конечный доминантный морфизм и $Y$ нормально. Тогда $|f^{-1}(y)| \leqslant \deg(f)$ для любой точки $y \in Y$.

Это утверждение очевидно, если $X$ задается в $\mathbf{A}^1 \times Y$ как множество нулей многочлена $T^m + a_1 T^{m-1} + \ldots + a_m \in K[Y][T]$. Общий случай сводится к этому при помощи линейных проекций и леммы из п. 2.8. Предположение о нормальности $Y$ существеннс, как показывает пример нормализации плоской кривой $C=[T_2^2=T_1^3+T_1^2]$ (см. рис. 16 или 4).

**5.7. Принцип постоянства.** Уменьшение числа точек в слое $f^{-1}(y)$, по сравнению с $\deg f$, можно объяснять тем, что они получаются в результате слияния или слипания нескольких точек, что их нужно считать с некоторой кратностью, подобно тому, как это делают с корнями многочлена от одной переменной. Число корней многочлена с учетом кратностей равно степени многочлена. Аналогичный *принцип постоянства*, или непрерывности, состоит в том, что если правильно определить кратность или локальную степень $\deg_x(f)$ конечного морфизма $f$, то верна формула

$$\deg(f)=\sum_{x\in f^{-1}(y)}\deg_x(f),$$

которая обобщает теорему п. 5.5. Откладывая обсуждение общего случая до следующей главы, мы рассмотрим здесь один важный класс конечных морфизмов.

Определение. Конечный морфизм $f\colon X\to Y$ называется *локально свободным*, если пучок $f_*\mathcal{O}_X$ локально свободен над $\mathcal{O}_Y$. *Локальной степенью* такого морфизма $f$ в точке $x$ назовем

$$\deg_x(f)=\dim_K(\mathcal{O}_{X,x}/f^*(\mathfrak{m}_y)\mathcal{O}_{X,x}).$$

Принцип постоянства верен в этой ситуации. В самом деле, заменяя $Y$ окрестностью $y$, можно считать $Y$ аффинным, а $K[X]$ свободным $K[Y]$-модулем ранга $d=\deg f$. Поэтому и $K[Y]/\mathfrak{m}_y$-модуль $K[X]/\mathfrak{m}_yK[X]$ имеет ранг (или размерность) $d$. Но $K[X]/\mathfrak{m}_yK[X]=\bigoplus_{x\in f^{-1}(y)}\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$, так что $d=\sum_{x\in f^{-1}(y)}\deg_x(f)$.

Пример 1. Этальное накрытие — локально свободный морфизм, причем все $\deg_x f$ равны 1. Мы снова получаем теорему п. 5.5. Обратно, если $f$ локально свободен и $\deg_x(f)=1$, то $f$ этален в точке $x$.

Пример 2. Пусть $f\colon X\to Y$ — конечный доминантный морфизм, а $Y$ — гладкая кривая. Тогда $f$ локально свободный морфизм.

В самом деле, пусть $u\in K[Y]$ — образующая максимального идеала точки $y\in Y$. Пусть $s_1,\ldots,s_m$ — элементы $K[X]$, дающие базис $K[X]$ по модулю $u$. По лемме Накаямы можно считать, что $s_1,\ldots,s_m$ порождают $K[Y]$-модуль $K[X]$; покажем, что они независимы над $K[Y]$. Пусть $\sum a_js_j=0$; из независимости $s_j$ по модулю $u$ все $a_j$ делятся на $u$, $a_j=ua'_j$. Значит, и $\sum a'_j s_j = 0$, откуда $\sum a'_j s_j = 0$, $a'_j$ делятся на $u$ и т. д. Получается, что $a_j$ делятся на любую степень $u$, т. е. равны 0.

Пример 3. Приведем пример, где наше наивное определение кратности не работает. Пусть $V$ — плоскость в $\mathbf{A}^4$ с уравнениями $T_1 = T_3 = 0$, $V'$ — плоскость с уравнениями $T_2 = T_4 = 0$ и $X = V \cup V'$. Пусть отображение $f: X \to \mathbf{A}^2$ задается функциями $T_1 + T_2$ и $T_3 + T_4$. Ограничение $f$ на $V$ или $V'$ является изоморфизмом, так что степень $f$ равна 2, как и мощность почти всех слоев. Однако $\deg_0(f) = 3$.

В самом деле, $X$ задается в $\mathbf{A}^4$ идеалом $(T_1T_2, T_1T_4, T_3T_2, T_3T_4)$, подсхема $f^{-1}(0)$ — идеалом $(T_1T_2, T_1T_4, T_3T_2, T_3T_4, T_1 + T_2, T_3 + T_4)$, поэтому соответствующее факторкольцо 3-мерно с базисом 1, $T_1$ и $T_3$.

## § 6. Локальные свойства гладких многообразий

**6.1. Гладкие точки.** В главе 1 мы определили гладкие точки на многообразии $X$ условием $C_xX = T_xX$, где $C_xX$ — касательный конус, а $T_xX$ — касательное пространство к $X$ в точке $x$. В силу п. 4.7 это требование эквивалентно тому, чтобы размерность $T_xX$ (или двойственного к нему векторного пространства $\Omega_X^1(x)$) равнялась $\dim_x X$. Наконец, гладкость $X$ в $x$ эквивалентна существованию окрестности $U \subset X$ точки $x$ и этального морфизма $U \to \mathbf{A}^n$. В самом деле, если $u_1, \ldots, u_n$ — функции в окрестности точки $x$, для которых $du_1, \ldots, du_n$ образуют базис $\Omega_X^1(x)$, то $du: T_xX \to T_{u(x)} \mathbf{A}^n$ изоморфизм, так что $u: U \to \mathbf{A}^n$ этально в окрестности $x$.

Ясно, что множество гладких точек многообразия $X$ открыто; согласно п. 4.7, оно всюду плотно. Таким образом, типичная или «общая» точка $X$ гладкая, и естественно задаться простейшим вопросом — как устроено многообразие в окрестности гладкой точки. Интуитивно следует ожидать, что оно «похоже» на аффинное пространство $T_xX$. Конечно, как объяснялось в п. 5.1, похожесть нельзя понимать как локальный изоморфизм. Смысл ее в том, что локально гладкое многообразие обладает некоторыми важными качественными свойствами аффинного пространства.

**6.2. Локальная неприводимость.** Простейшее из свойств $\mathbf{A}^n$ — неприводимость. Покажем, что у гладкой точки $x \in X$ существует неприводимая окрестность $U \subset X$. Для этого возьмем две функции $a$ и $b$ на $X$, такие что $ab = 0$. Пусть $a \in \mathfrak{m}^i$ и $b \in \mathfrak{m}^j$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал точки $x$ в кольце $K[X]$ и $\bar{a}$, $\bar{b}$ — их образы в $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ и $\mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$. Раз $ab = 0$, то $\bar{a}\bar{b} = 0$ в кольце $\mathbf{gr}(K[X], \mathfrak{m})$. Но для гладкой точки $\mathbf{gr}(K[X], \mathfrak{m})$ — кольцо многочленов и не имеет делителей нуля. Значит, скажем, $\bar{a} = 0$ и $a \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Повторяя это рассуждение, мы получим, что $a \in \mathfrak{m}^\infty =$

$=\bigcap\limits_{i\geqslant 0} \mathfrak{m}^i$. Остается показать, что $\mathfrak{m}^\infty=(0)$. Но идеал $\mathfrak{m}^\infty$ имеет конечный тип, и $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}^\infty=\mathfrak{m}^\infty$. Поэтому из леммы Накаямы $\mathfrak{m}^\infty=(0)$.

**6.3. Факториальные многообразия.** Есть более тонкое свойство аффинного пространства. А именно, если $Y$ — подмногообразие $\mathbf{A}^n$ размерности $n-1$ (говорят также, что *коразмерность* $Y$ равна 1; вообще, *коразмерностью* подмногообразия $Y$ в $X$ называют $\dim X-\dim Y$), то $Y$ — гиперповерхность в $\mathbf{A}^n$. Более того, идеал $I(Y)$ — главный в кольце $K[\mathbf{A}^n]$.

В самом деле, можно считать $Y$ неприводимым. Тогда существует неприводимый многочлен $f$, равный нулю на $Y$; покажем, что идеал $I(Y)$ порождается $f$. Пусть другой многочлен $g$ нулевой на $Y$; тогда некоторая его степень делится на $f$. В силу однозначности разложения на множители в кольце многочленов $g$ делится на $f$, что и требовалось доказать.

Аналогичное свойство выполнено для любого аффинного многообразия $X$, кольцо которого $K[X]$ факториально, т. е. обладает свойством однозначности разложения на неприводимые множители (подробнее о таких кольцах см. [23]), но отнюдь не для любого многообразия. Однако если $X$ — гладкое, это свойство выполняется локально. Это значит, что для любого подмногообразия $Y\subset X$ коразмерности 1 найдется аффинная окрестность $U$ точки $x$, такая что идеал $I(Y\cap U)$ — главный в кольце $K[U]$. В таком случае будем говорить, что многообразие $X$ — *факториально* в окрестности $x$.

Теорема. Любое многообразие факториально в окрестности гладкой точки.

При доказательстве можно считать (см. п. 5.3), что многообразие $X$ вложено в $\mathbf{P}^{n+1}$, где $n=\dim X$. Кроме того, можно считать, что $Y$ неприводимо и проходит через точку $x$, гладкую на $X$. Возьмем теперь точку $p\in\mathbf{P}^{n+1}$, чтобы: а) $p\notin X$, б) $p\notin \overline{T}_xX$, в) прямая $\overline{px}$ пересекала $Y$ лишь в $x$; ясно, что такая точка найдется. Спроектируем из нее все на $\overline{T}_xX$. Переходя к аффинной карте $\mathbf{A}^{n+1}\subset\mathbf{P}^{n+1}$, мы получаем конечный сюръективный морфизм $\pi: X\to\mathbf{A}^n$, этальный в точке $x$. При этом $Y$ проектируется на замкнутое подмножество $\pi(Y)\subset\mathbf{A}^n$ коразмерности 1, причем (см. п. 5.3) изоморфно в окрестности точки $x$. В силу факториальности $\mathbf{A}^n$ многообразие $\pi(Y)$ задается одним неприводимым многочленом $f\in K[T_1,\ldots,T_n]$. Остается показать, что $\pi^*(f)\in K[X]$ задает $Y$ в окрестности $x$. Пусть $Y_1,\ldots,Y_k$ — компоненты $\pi^{-1}(\pi(Y))$, отличные от $Y$. Если мы покажем, что $Y_i$ не проходят через $x$, то $X-\bigcup\limits_{i=1}^{k}Y_i$ — окрестность точки $x$, в которой $Y$ задается функцией $\pi^*(f)$.

Именно в этом месте мы и воспользуемся гладкостью $X$. В координатах $T_1,\ldots,T_n$, $T$ на $\mathbf{A}^{n+1}$ многообразие $X$ задается нулями неприводимого многочлена $F=T^m+a_1T^{m-1}+\ldots+a_m$,

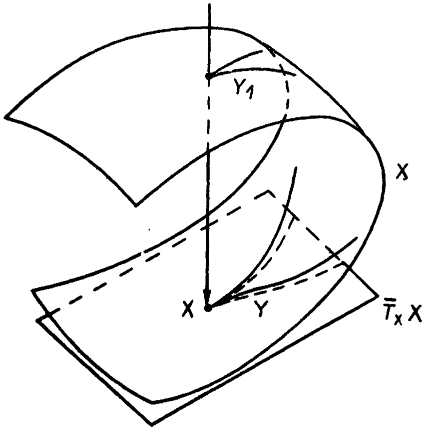


Рис. 14

$a_i \in K[T_1, \ldots, T_n]$, причем $\partial F/\partial T(x) \neq 0$. Будем считать, что $x$ есть начало координат; тогда $a_m(0) = 0$ и $a_{m-1}(0) \neq 0$. Пусть $A = K[T_1, \ldots, T_n]/(f)$ — кольцо функций на $\pi(Y)$; тогда $\pi^{-1}(\pi(Y))$ задается нулями многочлена $\overline{F} = T^m + \overline{a}_1 T^{m-1} + \ldots + \overline{a}_m$, где $\overline{a}_i$ — образы $a_i$ в $A$. Так как $Y \to \pi(Y)$ локальный изоморфизм, существует окрестность $U$ точки 0 в $\pi(Y)$ и регулярная функция $g$ на $U$, такая что $(t, g(t)) \in Y$ для любых $t \in U$. Тогда $\overline{F}(g) = 0$ и $\overline{F}(T) = \overline{G}(T)(T - g)$, где $\overline{G} \in K[U]$. Так как $a_{m-1}(0) \neq 0$, то $\overline{G}(0) \neq 0$; но $\overline{G}$ обращается в нуль на $\bigcup Y_i$. Поэтому $Y_i$ не проходят через $x = 0$.

В частности мы видим, что гладкое многообразие нормально (см. п. 2.7).

**6.4. Подмногообразия большей коразмерности.** Пусть теперь $Y \subset X$ — подмногообразие коразмерности $p > 1$; можно ли локально задать $Y$ $p$ уравнениями? (Если да, то говорят, что $Y$ — *полное пересечение*). При этом задание уравнениями можно понимать теоретико-множественно, как $Y = V(f_1, \ldots, f_p)$, или схемно, как $I(Y) = (f_1, \ldots, f_p)$. Второй вариант более тонкий и из него следует первый. Однако бывают подмногообразия, не являющиеся полными пересечениями даже теоретико-множественно. Пусть например, $Y \subset \mathbf{A}^4$ — плоскость с уравнениями $T_1 = T_3 = 0$, а $Y' \supset \mathbf{A}^4$ — уравнениями $T_2 = T_4 = 0$. Тогда $Y \cup Y'$ нельзя задать двумя уравнениями в $\mathbf{A}^4$ (см. § 1 главы 3, а также [41, гл. III, упр. 4.9]).

Однако если подмногообразие $Y \subset X$ — гладкое, то локально оно является полным пересечением в схемном смысле. Это утверждает *якобиев критерий гладкости*:

Предложение. Подмногообразие $Y$ коразмерности $p$ на гладком многообразии $X$ гладко в точке $x \in Y$ тогда и только тогда, когда в окрестности $x$ оно может быть задано как множество нулей $p$ функций $f_1, \ldots, f_p$, дифференциалы которых $d_x f_i$ линейно независимы.

Проверим сначала, что для одной функции $f$ на $X$ с $f(x)=0$ и $d_x f \neq 0$ подсхема $Y=f^{-1}(0)$ гладкая в точке $x$. В самом деле, $T_xY$ задается как ядро ненулевого линейного функционала $d_xf: T_xX \to K$, так что его размерность равна $\dim T_xX-1$. С другой стороны, $\dim_x Y=\dim_x X-1$. Поэтому $\dim T_xY=\dim_x Y$ и $Y$ гладко. То, что $Y$ является многообразием в окрестности $x$, устанавливается также, как в п. 6.2.

Гладкость $Y$ в общем случае устанавливается с помощью индукции. Обратно, пусть $Y$ гладко в $x$. Так как пространство $\Omega_Y{}^1(x)$ получается из $\Omega_X{}^1(x)$ факторизацией по подпространству, порожденному дифференциалами функций из $I(Y)$ (см. п. 7.6 главы 1), в $I(Y)$ найдутся $p$ функций $f_1, \ldots, f_p$ с линейно независимыми дифференциалами в $x$. По предыдущему многообразие $Y'=V(f_1, \ldots, f_p)$ гладкое в $x$, неприводимое и коразмерность его равна $p$. Так как $Y \subset Y'$ и тоже коразмерности $p$, $Y=Y'$.

**6.5. Пересечения на гладком многообразии.**

Предложение. Пусть $X$ гладкое $n$-мерное многообразие, $Y$ и $Y'$ — его подмногообразия. Тогда для любой точки $x \in Y \cap Y'$

$$\dim_x Y \cap Y' \geqslant \dim_x Y + \dim_x Y' - n. \qquad (*)$$

Как в п. 4.6, воспользуемся редукцией к диагонали. Так как диагональ $\Delta$ в $X \times X$ является гладким подмногообразием, то локально она задается $n$ уравнениями.

Если в соотношении $(*)$ имеет место равенство, то говорят, что подмногообразия $Y$ и $Y'$ *пересекаются собственно* (или *правильно*) в точке $x$. Неправильность пересечения свидетельствует о специальном расположении $Y$ и $Y'$ друг относительно друга (например, $Y=Y'$). Еще более жесткое требование на расположение подмногообразий — трансверсальность. Говорят, что $Y$ и $Y'$ *пересекаются трансверсально* в точке $x \in X$, если они гладкие в точке $x$ и векторные подпространства $T_xY$ и $T_xY'$ находятся в общем положении в $T_xX$. В этом случае многообразие $Y \cap Y'$ также гладкое и коразмерность его равна сумме коразмерностей $Y$ и $Y'$.

Отметим, что утверждение п. 6.5 не выполняется для произвольных многообразий. Пусть $Y$ и $Y'$ — плоскости в $\mathbf{A}^4$, как в п. 6.4. Обе они лежат на трехмерном многообразии $X \subset \mathbf{A}^4$, заданном уравнением $T_1T_2=T_3T_4$. Однако пересекаются $Y$ и $Y'$ лишь в начале координат.

**6.6. Свойство Коэна—Маколея.** Локальное кольцо гладкой точки обладает еще одним важным свойством, установленным

Маколеем для колец многочленов и Коэном для произвольных регулярных колец (подробнее см. [63], [65]).

Пусть $A=\mathcal{O}_{X,x}$ — локальное кольцо гладкой точки $x\in X$. Последовательность его элементов $a_1, \ldots, a_n$ (из максимального идеала) называется *регулярной*, если $a_i$ не делит нуль в $A/(a_1, \ldots, a_{i-1})$ при $i=1, \ldots, n$ (при $i=1$ это означает, что $a_1$ не делитель нуля в $A$). Для такой последовательности $\dim_x V(a_1, \ldots, a_i) = \dim_x X - i$. В самом деле, $a_i$ не обращается в нуль ни на какой компоненте $V(a_1, \ldots, a_{i-1})$, и поэтому размерность $V(a_1, \ldots, a_i)$ понижается ровно на единицу (см. п. 4.3). Замечательное свойство гладких точек состоит в том, что верно и обратное.

Теорема. При этих предположениях эквивалентны утверждения:

а) $\dim_x V(a_1, \ldots, a_n) = \dim_x X - n$,

б) $\dim_x V(a_1, \ldots, a_i) = \dim_x X - i$ при $i=1, \ldots, n$,

в) последовательность $(a_1, \ldots, a_n)$ регулярна в $A$.

Мы уже показали в)$\Rightarrow$б); эквивалентность а) и б) следует из теории размерности. Главное — показать а)$\Rightarrow$в); при этом мы можем считать $n=\dim X$. Размерность многообразия $V(a_1, \ldots, a_{n-1})$ равна 1, поэтому найдется функция $f$ с $d_x f \neq 0$, такая что $V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cap V(f) = \{x\}$. Согласно п. 6.4, многообразие $V(f)$ гладкое и меньшей размерности; по индукции последовательность $a_1, \ldots, a_{n-1}$ регулярна в $A/(f)$, т. е. $(f, a_1, \ldots$ $\ldots, a_{n-1})$ регулярна в $A$. Бесхитростно проверяется, что в любом нётеровом локальном кольце регулярность последовательности $(a, b)$ эквивалентна регулярности $(b, a)$. Отсюда следует регулярность $(a_1, f, \ldots, a_{n-1})$, и так далее, и в конце концов регулярность $(a_1, \ldots, a_{n-1}, f)$.

Пусть теперь $\bar{A}=A/(a_1, \ldots, a_{n-1})$; надо показать, что умножение на $a_n$ в $\bar{A}$ инъективно. Дано, что $V(a_1, \ldots, a_n) = \{x\}$. Так как $f(x)=0$, то некоторая степень $f$ попадает в идеал $(a_1, \ldots$ $\ldots, a_n)$, так что $f^r = g a_n$ по модулю $(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Так как умножение на $f$ (а значит и на $f^r$) инъективно в $\bar{A}$, то инъективно и умножение на $a_n$. Теорема доказана.

*Свойство Коэна—Маколея* предыдущей теоремы выполняется не только для гладких точек. Например, любая гиперповерхность (или схемное полное пересечение) в гладком многообразии обладает им. А вот пара плоскостей $Y \cup Y'$ из примера п. 6.4 не обладает свойством Коэна—Маколея. Приведем также следующий факт (ср. с примером 2 из п. 5.7).

Предложение. Пусть $f: X \to Y$ — конечный доминантный морфизм, причем многообразие $Y$ гладкое. Эквивалентны утверждения:

а) морфизм $f$ локально свободен (см. п. 5.7),

б) многообразие $X$ обладает свойством Коэна—Маколея.

## § 7. Применение к бирациональной геометрии

**7.1. Фундаментальные точки.** Рассмотрим вопрос о том, как устроено множество точек неопределенности рационального отображения $f: X \to Y$. Мы будем отождествлять отображение $f$ с его графиком (см. п. 1.5), замкнутым подмножеством $\Gamma \subset X \times Y$, проекция которого $p: \Gamma \to X$ является бирациональным морфизмом. Отображение $f$ определено в точке $x \in X$, если $p$ является изоморфизмом над окрестностью $x$; в противном случае говорят, что $x$ — *точка неопределенности* или *фундаментальная* точка $f$.

Ограничимся случаем нормального $X$. Строение множества фундаментальных точек $f$ сильно различается в случае аффинного $Y$ и в случае полного $Y$. Начнем с первого случая, где утверждение напоминает принцип продолжения Хартогса из главы 1 § 2.

Предложение. Пусть $X$ — нормальное многообразие, $F \subset X$ — замкнутое подмножество коразмерности $\geqslant 2$ и $Y$ — аффинное многообразие. Тогда любой морфизм $f: (X - F) \to Y$ продолжается до морфизма $\bar{f}: X \to Y$.

При доказательстве можно считать $Y = \mathbf{A}^1$. Рассмотрим $f$ как рациональное отображение $X$ в $\mathbf{P}^1$ и пусть $\Gamma \subset X \times \mathbf{P}^1$ — его график. Множество $\Gamma \cap (X \times \{\infty\})$ содержится в $F \times \{\infty\}$, поэтому его размерность меньше $\dim X - 1$. С другой стороны, $X \times \{\infty\}$ локально задается одним уравнением в $X \times \mathbf{P}^1$, поэтому $\dim(\Gamma \cap (X \times \{\infty\})) \geqslant \dim \Gamma - 1 = \dim X - 1$. Значит, $\Gamma$ не пересекается с $X \times \{\infty\}$, морфизм $\Gamma \to X$ конечный. Так как он бирациональный, то в силу нормальности $X$ он изоморфизм.

**7.2. Основная теорема Зарисского.** Множество точек неопределенности при отображении в аффинное многообразие имеет коразмерность 1. Напротив, отображение в полное многообразие неопределено лишь в коразмерности $\geqslant 2$.

Теорема. Пусть $f: X \dashrightarrow Y$ — рациональное отображение нормального многообразия $X$ в полное многообразие $Y$. Если $x$, над которой морфизм $\Gamma \to X$ конечен, значит, изоморфизм. Но тельную размерность.

Образно говоря, при рациональном отображении точка неопределенности раздувается в многообразие размерности $\geqslant 1$. Мы проверим теорему для проективного $Y$ и даже для $Y = \mathbf{P}^n$. Предположим противное, что $f(x)$ конечно, и пусть $H \subset \mathbf{P}^n$ — гиперплоскость, не пересекающая $f(x)$. Множество $p(\Gamma \cap (X \times H))$ замкнуто и не содержит $x$. Дополнение к нему — окрестность $x$, над которой морфизм $\Gamma \to X$ конечен, значит, изоморфизм. Но тогда $f$ определен в точке $x$.

Напомним, что к тому же $f(x)$ связно (см. § 3). На самом деле, Зариский доказал более тонкий факт, которому Гротендик придал следующий вид: для любого отделимого квазиконечного морфизма $X \to Y$ существует разложение $X \to X' \to Y$, где $X \to X'$ — открытое вложение, а $X' \to Y$ — конечный морфизм.

Следствие. В предположениях теоремы множество $F$ точек неопределенности $f$ имеет коразмерность $\geqslant 2$ в $X$.

В самом деле, с одной стороны, в силу теоремы $\dim p^{-1}(F) > \dim F$. С другой стороны, $p^{-1}(F)$ — собственное подмножество $\Gamma$.

**7.3. Поведение дифференциальных форм при рациональных отображениях.** Пусть $\omega \in H^0(Y, \Omega_Y{}^p)$ — регулярная дифференциальная форма на $Y$ и $f: X \dashrightarrow Y$ — рациональное отображение, удовлетворяющее условиям теоремы п. 7.2. Поразительный факт состоит в том, что форма $f^*(\omega)$ также регулярна!

В самом деле, пусть $\Gamma$ — график $f$, а $p$ и $q$ — проекции $\Gamma$ на $X$ и $Y$. Тогда форма $\omega' = q^*(\omega)$ регулярна на $\Gamma$. По теореме п. 7.2 $p$ является изоморфизмом вне некоторого подмножества $F \subset X$ коразмерности $\geqslant 2$, так что $f^*(\omega) = (p^{-1})^*\omega'$ регулярна на $X - F$. Но тогда по принципу продолжения п. 7.1 она регулярна всюду на $X$.

Как следствие мы получаем, что для полного гладкого многообразия $X$ размерность пространства $H^0(X, \Omega_X{}^p)$ регулярных дифференциальных $p$-форм является бирациональным инвариантом. Это же верно для любых пучков, построенных из $\Omega_X{}^p$ ковариантными тензорными операциями. Один случай наиболее важен.

Пусть $X$ — гладкое $n$-мерное многообразие. Тогда пучок $\Omega_X{}^1$ локально свободный ранга $n$. Его $n$-я внешняя степень $\Omega_X{}^n = \Lambda^n \Omega_X{}^1$ будет обратимым пучком; он называется *каноническим пучком* на $X$ и обозначается $\omega_X$. Размерность $H^0(X, \omega_X)$ называется *геометрическим родом* $X$ и обозначается $p_g(X)$. Как мы видели в § 7 главы 1, $p_g(\mathbf{P}^n) = 0$; там же было показано, что для плоской гладкой кубической кривой род $\geqslant 1$, откуда следует ее нерациональность.

**7.4. Исключительное многообразие бирационального морфизма.** Пусть $p: \Gamma \to X$ — собственный бирациональный морфизм, $X$ нормально и $F$ — множество точек неопределенности $p^{-1}$. *Исключительным подмногообразием* $p$ называется $p^{-1}(F)$. Как показано в п. 7.2, его размерность больше, чем размерность его образа $F$. Иначе говоря, при бирациональном морфизме некоторое подмногообразие «стягивается» в многообразие меньшей размерности. Если $X$ — гладкое, то это утверждение можно уточнить:

Теорема (ван дер Варден). Пусть многообразие $X$ — локально факториальное (например, гладкое), а $p: \Gamma \to X$ — бирациональный морфизм. Тогда любая компонента исключительного многообразия $p$ имеет коразмерность 1 в $\Gamma$.

Пусть $x \in X$ — точка неопределенности $p$ и $z \in p^{-1}(x)$. Регулярные функции на $\Gamma$ можно рассматривать как рациональные функции на $X$. Так как $x$ — точка неопределенности, то найдется регулярная функция $u$ на $\Gamma$, $u(z)=0$, которая не регулярна в точке $x$. Пусть $u=a/b$ — несократимое представление, где $a$ и $b$ регулярны в $x$. Пусть $Z\subset\Gamma$ задается нулями функции $p^*(b)$; его коразмерность равна 1. Так как $p^*(a)=up^*(b)$, она тоже равна нулю на $Z$. Значит, $p(Z)$ лежит в нулях $a$ и $b$ и имеет коразмерность $>1$. Поэтому многообразие $Z$ исключительное.

Пример. Если $X$ — не гладкое, то исключительное многообразие может иметь коразмерность $>1$. Пусть $X$ — конус в $\mathbf{A}^4$, заданный уравнением $T_1T_2=T_3T_4$. Это нормальное многообразие; это видно из того, что кольцо $K[X]$ есть пересечение двух нормальных колец $K[T_1, T_4/T_1, T_3/T_1]$ и $K[T_2, T_4/T_2, T_3/T_2]$ в поле $K(X)$. С другой стороны, пусть $f=T_1/T_3=T_4/T_2$ — рациональная функция на $X$ и $p:\Gamma\to X$ ее график. В однородных координатах $U$ и $V$ на $\mathbf{P}^1$ график задается уравнениями $UT_3=VT_1$ и $UT_2=VT_1$. Проекция $p:\Gamma\to X$ является изморфизмом над $X-\{0\}$, тогда как исключительное многообразие $p^{-1}(0)=$ $=\{0\}\times\mathbf{P}^1$ имеет коразмерность 2 в $\Gamma$.

В частности, многообразие $X$ не факториально.

**7.5. Разрешение особенностей.** *Разрешением особенностей* многообразия $X$ называется собственный бирациональный морфизм $X'\to X$ с гладким $X'$. Например, морфизм $\Gamma\to X$ из предыдущего примера разрешает особенность конуса $X$. В связи с этим понятием встают два вопроса — существование и единственность разрешения. Первый более принципиален и, видимо, ответ на него утвердительный. Во всяком случае это так, если характеристика $K$ равна 0 (теорема Хиронаки) или если $\dim X\leqslant 2$ ([16]).

Что касается единственности, ответ зависит от размерности. Если $X$ — кривая, ее десингуляризация однозначна с точностью до изоморфизма (см. п. 7.2) и совпадает с нормализацией. В размерности $\geqslant 2$ гладкая модель не единственна. Дело в том, что, раздув на гладком многообразии точку, мы снова получим гладкое многообразие.

Предложение. Пусть $\sigma:\widetilde{X}\to X$ — раздутие гладкого многообразия вдоль гладкого подмногообразия $Y$. Тогда $\widetilde{X}$ — гладкое.

Действительно, в этом случае $C_{Y/X}=N_{Y/X}$ является локально тривиальным векторным расслоением над $Y$. Исключительное многообразие $E=\sigma^{-1}(Y)=\mathbf{P}_Y(N_{Y/X})$ тоже гладкое. С другой стороны, $E$ локально задается одним уравнением. Отсюда легко следует гладкость $\widetilde{X}$ в точах $E$; в остальных точках $\widetilde{X}$ изоморфно $X$ и тоже гладкое.

Все же для поверхностей однозначно определено минимальное разрешение особенностей (см. [15], [32], [41], [56]). В размерности 3 и выше уже и это не так. Пусть снова $X$ — конус в $\mathbf{A}^4$, заданный уравнением $T_1T_2=T_3T_4$. Десингуляризация $p:\Gamma\to X$ (график $T_1/T_3$) минимальна; однако минимальна и

$p' : \Gamma' \to X$ (график $T_1/T_4$), заданная в $X \times \mathbf{P}^1$ уравнениями $U'T_4 = V'T_1$, $U'T_2 = V'T_3$. Модели $\Gamma$ и $\Gamma'$ не изоморнфы как $X$-многообразия. В самом деле, плоскость $\mathbf{A}^2 \subset \Gamma$ с уравнениями $U=0$, $V=1$, $T_1 = T_4 = 0$ переходит в поверхность $\widetilde{\mathbf{A}}_2 \subset \Gamma'$ с уравнениями $U'T^2 = V'T_3$, $T_1 = T_4 = 0$. Картина тут такая:

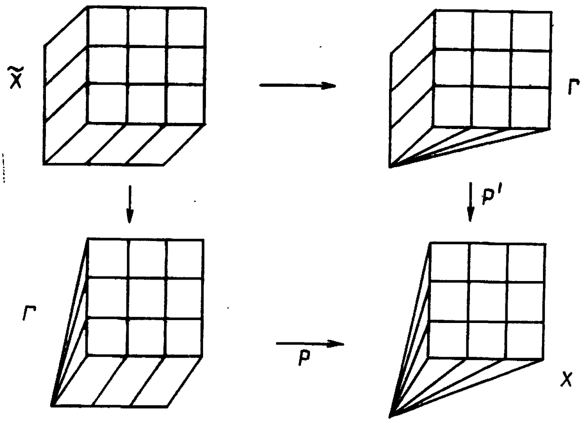



Рис. 15

Верхняя левая фигура $\widetilde{X}$ — еще одна десингуляризация $X$, изоморфная $\Gamma \times \Gamma'$. Ее можно получить, раздув на $X$ точку 0.

**7.6. Критерий нормальности.** Начнем со следующего свойства нормального многообразия:

Предложение. Множество $\operatorname{Sing} X$ особых точек нормального многообразия $X$ имеет коразмерность $\geqslant 2$.

Уменьшая $X$, можно считать подмногообразие $\operatorname{Sing} X$ гладким. Раз $X$ не гладко в точках $\operatorname{Sing} X$, последнее не задается одним уравнением (даже локально) в $X$. Поэтому раздутие $\sigma : \widetilde{X} \to X$ вдоль $\operatorname{Sing} X$ не изоморфизм, $\operatorname{Sing} X$ фундаментально для $\sigma^{-1}$ и, в соответствии с п. 7.2, имеет коразмерность $\geqslant 2$.

Следствие. Нормальная кривая гладкая.

Итак мы видим, что нормальное многообразие обладает двумя важными свойствами: свойством Хартогса (п. 7.1) и гладкостью в коразмерности 1. Мы утверждаем, что верно и обратное. В самом деле, пусть $f$ — рациональная функция на $X$, целая над $X$. Так как $X - \operatorname{Sing} X$ нормально, $f$ регулярна вне $\operatorname{Sing} X$. Но коразмерность $\operatorname{Sing} X$ больше 1, и по свойству Хартогса $f$ регулярна всюду.

В связи с этим отметим, что свойство Коэна—Маколея влечет свойство продолжения Хартогса. Действительно, пусть коразмерность $F$ в $X$ больше 1, и рациональная функция $a/b$ регулярна вне $F$. Пусть $g$ — функция на $X$, такая что $V(g) \supset F$ и $V(g) \cap V(b)$ имеет коразмерность 2 в $X$. Так как на $X - V(g)$

функция $a/b$ регулярна, $g^r a$ делится на $b$ при некотором $r$. По свойству Коэна—Маколея $g$ не делит нуль по модулю $b$. Значит, $a$ делится на $b$ и функция $a/b$ регулярна всюду.

В частности, если $X$ гиперповерхность в гладком многообразии и $\operatorname{Sing} X$ имеет коразмерность $\geqslant 2$, то $X$ нормально. Это дает другое доказательство нормальности квадратичного конуса $X$ из примера п. 7.5. Подобным образом можно проверить, что пара плоскостей $V \cup V'$ из примера 3 § 5 не является полным пересечением даже теоретико-множественно.

*Глава 3*

# ГЕОМЕТРИЯ НА АЛГЕБРАИЧЕСКОМ МНОГООБРАЗИИ

Геометрия изучает свойства геометрических фигур и их взаиморасположение. Фигуры алгебраической геометрии — подмногообразия (или *алгебраические циклы*) фиксированного алгебраического многообразия, чаще всего проективного пространства. Обычно такие фигуры допускают непрерывные вариации, и центральным понятием этой главы будет понятие алгебраического семейства фигур. Простейшие фигуры — *дивизоры* (подмногообразия коразмерности 1) — локально задаются одним уравнением. *Линейные системы* дивизоров дают важнейшие примеры алгебраических семейств. Более сложные фигуры можно образовывать из более простых при помощи операций вроде пересечения или объединения; это предмет *теории пересечений.*

Некоторые инварианты фигур не меняются при непрерывных вариациях. Пример такого инварианта — *степень* проективной фигуры. Все фигуры данной размерности и степени параметризуются точками алгебраического многообразия — т. н. *многообразия Чжоу*.

## § 1. Линейные сечения проективного многообразия

**1.1. Внешняя геометрия многообразия.** Простейшее проективное многообразие — проективное пространство $\mathbf{P}^n$. Простейшие подмногообразия в $\mathbf{P}^n$ — линейные подмногообразия, т. е. подмногообразия вида $\mathbf{P}(\lambda)$, где $\lambda$ — векторное подпространство в $K^{n+1}$. Вопросы о таких многообразиях элементарны и относятся скорее к линейной алгебре, чем к проективной геометрии. Напомним, что они параметризуются многообразиями Грассмана.

Пусть теперь $X \subset \mathbf{P}^n$ — произвольное проективное многообразие. До сих пор мы интересовались внутренними свойствами $X$, такими как размерность, особые точки и т. д. Теперь нас больше будет интересовать внешняя геометрия $X$, т. е. свойства $X$, связанные с вложением $X \subset \mathbf{P}^n$, или свойства пары $(X, \mathbf{P}^n)$. Можно сказать, что это свойства конуса $C \subset K^{n+1}$ такого, что $X = \mathbf{P}(C)$. Естественно начать внешнюю геометрию с изучения взаимодействия $X$ с линейными подмногообразиями $\mathbf{P}^n$. Такая деятельность полезна даже в том случае, если нас интересуют внутренние свойства $X$. Например, при доказательстве нерациональности гладкой кубической гиперповерхности в $\mathbf{P}^4$ важную роль играет 2-мерное семейство прямых, лежащих на кубике ([12]). См. также более элементарный пример из § 3, где устанавливается нерациональность гладкой кубической кривой в $\mathbf{P}^2$.

Пересечение $X$ с «общими» или типичными линейными подмногообразиями используется для построения проективных инвариантов, важнейшим из которых является степень. Здесь и далее в главе 3 термин «общее» линейное подпространство означает элемент из открытого плотного подмножества соответствующего грассманиана. Линейные подмногообразия, специальным образом расположенные относительно $X$ (касательные, секущие, лежащие на $X$), также несут важную информацию и позволяют связывать с $X$ новые многообразия. Здесь мы обсудим некоторые общие факты о пересечениях с линейными многообразиями; общая идеология заключается в том, что многие свойства многообразия $X$ наследуются его линейным сечением $X \cap L$. Условно такие утверждения можно разделить на теоремы типа Бертини про общие сечения и теоремы типа Лефшеца о произвольных сечениях. Например, как мы видели в главе 2, если $\dim L = n - \dim X$, то $X \cap L$ не пусто; для общего $L$ оно еще и конечно.

**1.2. Универсальное линейное сечение.** Часто полезно бывает иметь дело сразу со всеми линейными сечениями. Для этого мы зафиксируем целое число $m \geqslant 0$; пусть $G$ обозначает многообразие Грассмана $G(n+1-m, n+1)$ векторных подпространств коразмерности $m$ в $K^{n+1}$ (или линейных подмногообразий коразмерности $m$ в $\mathbf{P}^n$). Над $G$ есть универсальное векторное (под)расслоение $S \subset K^{n+1} \times G$ (глава 1); проективизация его над $G$ дает проективное подрасслоение $\mathbf{P}(S) \subset \mathbf{P}^n \times G$. Слой $\mathbf{P}(S)$ над точкой $\lambda \in G$ (т. е. векторным подпространством $\lambda \subset K^{n+1}$) есть линейное $\mathbf{P}(\lambda) \subset \mathbf{P}^n$.

Пусть теперь $X \subset \mathbf{P}^n$ — проективное многообразие (обычно неприводимое). Образуем многообразие инциденции $IX$ как пересечение $X \times G$ и $\mathbf{P}(S)$ в $\mathbf{P}^n \times G$. Оно состоит из пар $(x, L) \in X \times G$, таких что $x \in L$. Пусть $p$ и $q$ — проекции $IX$ на $X$ и $G$. Расслоение $q: IX \to G$ назовем *универсальным линейным сечением* $X$ коразмерности $m$. Слой его над точкой $L \in G$ изоморфен (схемно) $X \cap L$. Проекция $p: IX \to X$ играет вспомогательную роль. Для $x \in X$ слой $p^{-1}(x)$ состоит из линейных $L \in G$, проходящих через $x$, и изоморфен $G(n-m, n)$. В частности, слои $p$ неприводимы и имеют размерность $m(n-m)$.

Обсудим подробнее случай $m=r=\dim X$, т. е. пересечения $X$ с линейными пространствами дополнительной размерности. Обозначим через $U$ (соответственно $U_0$) подмножество в $G$, состоящее из тех $L$, которые пересекают $X$ в конечном числе точек (соответственно трансверсально пересекают $X$); ясно, что $U_0 \subset U$.

Теорема. Множества $U$ и $U_0$ открыты и плотны в $G$. Для любого $L \in U$ число $|X \cap L|$ точек множества $X \cap L$ не превосходит $\deg(q)$ и равно $\deg(q)$ для $L \in U_0$.

В самом деле, в этом случае $\dim IX = \dim X + \dim G(n-m, n) = r + r(n-r) = \dim G$. Кроме того, как уже отмечалось, $X \cap L \neq \varnothing$ для любого $L \in G$, так что $q: IX \to G$ сюръективен. Из теоремы п. 4.5 главы 2 следует открытость и плотность $U$, а из теоремы п. 5.7 главы 2 неравенство $|X \cap L| \leqslant \deg q$. Перейдем теперь к трансверсальности. Пусть $F \subset IX$ состоит из пар $(x, L)$, таких что $L$ не трансверсально пересекает $X$ в точке $x$. Это подмножество замкнуто в силу теоремы о размерности слоев и нигде не плотное из-за существования гладких точек на $X$. Поэтому $q(F)$ замкнуто в $G$ и $\dim q(F) \leqslant \dim F < \dim IX = \dim G$. Это доказывает открытость и плотность $U_0 = G - q(E)$. Так как $q$ этальный над $U_0$, то из теоремы о постоянстве $|X \cap L| = \deg q$ для $L \in U_0$.

Точно так же можно показать, что общее $L \subset \mathbf{P}^n$ коразмерности $m > r = \dim X$ не пересекается с $X$. Более точно, в этом случае проекция $q: IX \to G$ является (бирационально) вложением и $q(IX)$ имеет коразмерность $m-r$ в $G$.

Аналогично, если $L$ — общее линейное коразмерности $m < \dim X$, то $L$ трансверсально пересекает $X$ во всех гладких точках $X$. Один частный случай мы рассмотрим подробнее.

**1.3. Гиперплоские сечения.** Пусть $m=1$; в этом случае $G = \mathbf{P}^*$ — проективное пространство, двойственное к $\mathbf{P} = \mathbf{P}^n$. Предположим, кроме того, что $X$ — гладкое $r$-мерное. Тогда $IX$ — тоже гладкое, размерности $r+n-1$ и $q: IX \to \mathbf{P}^*$ — морфизм гладких многообразий. Как уже говорилось, общий слой $q$, т. е. пересечение $X$ с общей гиперплоскостью $H$, гладкий. Рассмотрим вырождения $q$.

Точки $IX$, в которых морфизм $q$ не гладкий, — это пары $(x, H)$, такие что гиперплоскость $H$ касается $X$ в точке $x$, т. е. $H \supset \overline{T}_x X$. Множество таких точек $CX$ называется *конормальным* к $X$, а его образ $q(CX) = X^* \subset \mathbf{P}^*$ — многообразием, *двойственным* к $X$.

Эта терминология подразумевает, что двойственным к $X^*$ снова будет $X$. Это почти всегда так, хотя надо сделать две оговорки. Первая: как правило, $X^*$ имеет особенности, так что определения нужно слегка обобщить. Вторая: даже если $X^*$ гладкое, то рефлексивность может нарушиться.

Пример 1. Пусть характеристика $K$ равна 2 и $C = [T_0 T_2 = T_1^2]$ гладкая коника в $\mathbf{P}^2$. Тогда все касательные к $C$

проходят через одну точку $P=(0, 1, 0)$ (ср. с примером 2 § 2 главы 1). Получаем, что $C^*$ — прямая в $\mathbf{P}^{2*}$, и $C^{**}=P$.

Этот пример интересен еще вот чем: $q: IC \to \mathbf{P}^{2*}$ является двулистным накрытием, разветвленным над прямой $C^*$. Ограничение $q$ на $\mathbf{P}^{2*} - C^*$ дает неразветвленное накрытие $\mathbf{A}^2$, так что $\mathbf{A}^2$ не односвязно!

Впрочем, в нулевой характеристике всегда $X^{**}=X$ ([47]).

Обращаясь к первой проекции $p: CX \to X$, легко понять, что $CX$ — гладкое многообразие размерности $n-1$.

Пример 2. Пусть $X$ — гиперповерхность в $\mathbf{P}$; тогда $CX$ и $X$ изоморфны. Отображение $q \circ p^{-1}: X \to \mathbf{P}^*$ называется *отображением Гаусса*. Если $X$ задается формой $F(T_0, \ldots, T_n)$, то отображение Гаусса сопоставляет точке $x$ точку $(\partial F/\partial T_0(x), \ldots, \partial F/\partial T_n(x))$.

Так как $CX$ имеет меньшую размерность, чем $\mathbf{P}^*$, следует ожидать, что в типичном случае $CX \to X^*$ — бирациональный изоморфизм и $\dim X^*=n-1$. Отсылая за подробностями к [40], [47], приведем несколько фактов:

Предложение. а) Морфизм $CX \to \mathbf{P}^*$ неразветвлен в точке $(x, H)$ тогда и только тогда, когда $x$ — невырожденная квадратичная особенность $X \cap H$.

Если $X$ — кривая, то морфизм $q: IX \to P^*$ конечен, так что так, если характеристика равна нулю и $\dim X^*=n-1$), то $CX \to X^*$ является изоморфизмом над $X^* - \operatorname{Sing} X^*$; для любой точки $H$, гладкой на $X^*$, $X \cap H$ имеет одну (невырожденную квадратичную) особую точку.

Если $X$ — кривая, то морфизм $q: IX \to \mathbf{P}^*$ конечен, так что $X^*$ имеет коразмерность 1 в $\mathbf{P}^*$. Это частный случай *теоремы Зарисского—Нагаты о чистоте ветвления* ([38]):

Теорема. Пусть $f: Y \to Z$ — конечный доминантный морфизм, $Z$ гладкое, $Y$ нормальное. Тогда множество ветвления $f$ имеет коразмерность 1 в $Z$.

Полезно сравнить это утверждение с примером 3 § 5 главы 2, где ветвление происходит в коразмерности 2.

Пример 3. Бывает, что коразмерность $X^*$ больше 1; в этом случае $H \in X^*$ касается $X$ вдоль подмногообразия (в общем случае линейного) положительной размерности. Простейший нетривиальный пример — $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$, вложенное по Сегре в $\mathbf{P}^5$; оно самодвойственное.

**1.4. Теорема о связности.** Если коразмерность $L$ меньше $\dim X$, то пересечение $X \cap L$ связно. Удобнее доказывать чуть более общее утверждение.

Теорема. Пусть $f: X \to \mathbf{P}^n$ — собственный морфизм, $X$ — неприводимое многообразие, $L \subset \mathbf{P}^n$ — линейное подмногообразие коразмерности $< \dim X$. Тогда $X \cap L$ связно.

Наметим доказательство. Пользуясь разложением Штейна, можно считать $f$ конечным. Пользуясь принципом связности Энриквеса—Зарисского, можно считать $L$ общим. Проектируя линейно $f(X)$, можно считать $f$ сюръективным. Наконец, можно считать $\dim L=1$. Возьмем точку $p\in\mathbf{P}^n$ и покажем, что для любой прямой $L$, проходящей через $p$, кривая $f^{-1}(L)$ связна. Пусть $\pi:\mathbf{P}^n \longrightarrow \mathbf{P}^{n-1}$ проекция из $p$; мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & \tilde{X} \arrow[l, "\sigma_X"'] \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi_X"] & \\
\mathbf{P}^n & \tilde{\mathbf{P}}^n \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[r, "\pi"] & \mathbf{P}^{n-1}
\end{tikzcd}$$

где $\sigma$ (соответственно $\sigma_X$) — раздутие $\mathbf{P}^n$ в точке $p$ (соответственно $X$ в $f^{-1}(p)$). Надо показать связность кривых $\pi_X{}^{-1}(y)$, $y\in\mathbf{P}^{n-1}$. Фокус в том, что морфизм $\pi_X$ обладает сечениями; а именно, для точки $x\in f^{-1}(p)$ сечением будет $\sigma_X{}^{-1}(x)=\{x\}\times\sigma^{-1}(p)$. Поэтому если разложить по Штейну морфизм $\pi_X:\tilde{X}\to Z\to\mathbf{P}^{n-1}$, то $Z$ также будет обладать сечением над $\mathbf{P}^{n-1}$. С другой стороны, $Z$ неприводимо как образ неприводимого $\tilde{X}$, так что $Z\to\mathbf{P}^{n-1}$ изоморфизм и слои $\pi_X{}^{-1}(y)$ связны.

Фултон и Хансен придали теореме о связности более мощную форму:

Теорема. Пусть $X$ — полное неприводимое многообразие и $f:X\to\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^n$ — морфизм, такой что $\dim f(X)>n$. Тогда $f^{-1}(\Delta)$ связно, где $\Delta$ — диагональ в $\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^n$.

Она сводится к предыдущей теореме при помощи следующей простой, но полезной конструкции.

**1.5. Линейное соединение.** Пусть $V$, $V'$ — векторные пространства над $K$, вложенные в $V\times V'$ как $V\times\{0\}$ и $\{0\}\times V'$. Тогда $\mathbf{P}(V)$ и $\mathbf{P}(V')$ — непересекающиеся линейные подмногообразия в $\mathbf{P}(V\times V')$, и любая точка из дополнения к ним лежит на единственной прямой, пересекающей $\mathbf{P}(V)$ и $\mathbf{P}(V')$.

Вообще, если $X$ и $X'$ — многообразия в $\mathbf{P}(V)$ и $\mathbf{P}(V')$ соответственно, то, соединяя прямыми точки $X$ и $X'$, мы заметаем некоторое подмногообразие в $\mathbf{P}(V\times V')$, которое можно назвать *линейным соединением* $X$ и $X'$ и обозначить $X*X'$. Например, соединение $X$ с точкой есть конус с вершиной в этой точке и основанием $X$. Если $X=\mathbf{P}(C)$, $X'=\mathbf{P}(C')$, где $C$, $C'$ — конусы в $V$, $V'$, то $X*X'=\mathbf{P}(C\times C')$.

Как уже говорилось, $\mathbf{P}(V\times V')-(\mathbf{P}(V)\cup\mathbf{P}(V'))$ обладает естественной проекцией на $\mathbf{P}(V)\times\mathbf{P}(V')$ со слоем $\mathbf{A}^1-\{0\}$. Раздувая $\mathbf{P}(V)$ и $\mathbf{P}(V')$, мы получим настоящий морфизм

$$\rho:\widetilde{\mathbf{P}(V\times V')}\to\mathbf{P}(V)\times\mathbf{P}(V')$$

со слоем $\mathbf{P}^1$ и двумя каноническими сечениями.

Вернемся к теореме Фултона—Хансена. Пусть $V=V'=K^{n+1}$ и $\delta$ — диагональ в $K^{n+1}\times K^{n+1}$. Тогда $\mathbf{P}(\delta)\subset\mathbf{P}^{2n+1}=\mathbf{P}^n*\mathbf{P}^n$ изоморфно проектируется на диагональ $\Delta\subset\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^n$ при $\rho$. Образуем декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{P}^{2n+1} \arrow[r, "\rho"] & \mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^n \end{tikzcd}.$$

Так как $f^{-1}(\Delta)=\tilde{f}^{-1}(\mathbf{P}(\delta))$, то все следует из первой версии теоремы о связности.

**1.6. Применения теоремы о связности.**

Теорема (Бертини). Пусть $X$ — неприводимое подмногообразие в $\mathbf{P}^n$. Тогда для общего линейного $L\subset\mathbf{P}^n$ коразмерности $<\dim X$ пересечение $X\cap L$ неприводимо. Так, если $\dim X\geqslant 2$, общее гиперплоское сечение неприводимо.

Мы проверим это в крайнем случае, когда коразмерность $L$ равна $\dim X-1$. Применяя теорему о связности к нормализации $f: X^H\to\mathbf{P}^n$, мы получаем связность кривой $f^{-1}(L)$ для общего $L$. С другой стороны, $X^H$ гладко в коразмерности 1 (глава 2, § 7), поэтому для общего $L$ кривая $f^{-1}(L)$ гладкая, следовательно неприводимая. Значит, неприводима и $X\cap L$ как образ $f^{-1}(L)$.

Теорема. Пусть $X, Y\subset\mathbf{P}^n$ неприводимы и $\dim X+\dim Y>n$. Тогда $X\cap Y$ связно.

Действительно, $X\cap Y$ есть пересечение диагонали с вложением $X\times Y\subset\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^n$.

Теорема. Пусть $X$ — неприводимое многообразие, $f: X\to\mathbf{P}^n$ конечный неразветвленный морфизм. Если $2\dim X>n$, то $f$ является замкнутым вложением.

В самом деле, неразветвленность $f$ означает, что диагональ $\Delta_X\subset X\times X$ открыта и замкнута в $X\underset{\mathbf{P}^n}{\times}X=(f\times f)^{-1}(\Delta_{\mathbf{P}^n})$, связном по теореме Фултона — Хансена. Значит, $\Delta_X=X\underset{\mathbf{P}^n}{\times}X$, $f$ инъективно и остается применить критерий из § 5 главы 2.

Следствие. Любое многообразие в $\mathbf{P}^n$ размерности $>n/2$ односвязно. В частности, односвязно $\mathbf{P}^n$.

Отметим, что $\mathbf{A}^n$ односвязно лишь в нулевой характеристике!

Теорема. Пусть $X$ — нормальное проективное многообразие размерности $\geqslant 2$. Если гиперплоское сечение $X$ односвязно, то односвязно и $X$.

В самом деле, пусть $f: X'\to X$ — этальное накрытие со связным $X'$. Из-за нормальности $X$ многообразие $X'$ неприводимо. По теореме о связности $f^{-1}(H)$ тоже связно; в силу односвязности $X\cap H$ степень $X'$ над $X$ равна 1.

Теорема (Ф. Л. Зак [5]). Пусть неприводимое многообразие $X\subset\mathbf{P}^n$ не содержится ни в какой гиперплоскости. Пусть

$L\subset\mathbf{P}^n$ — собственное линейное подмногообразие, касающееся $X$ вдоль $Y$ (так что для $y\in Y$ имеем $\overline{T}_yX\subset L$). Тогда $\dim Y\leqslant\leqslant\dim L-\dim X$.

Для доказательства возьмем линейное подмногообразие $M\subset\mathbf{P}^n$ размерности $n-1-\dim L$, не пересекающее $L$, и пусть $\pi_M: X\to L$ — линейная проекция с центром в $M$. В силу касания $X$ и $L$ вдоль $Y$ эта проекция неразветвлена в точках $M$. Отсюда следует, что $Y$ — связная компонента множества $\pi_M^{-1}(Y)=X\cap(Y*M)$. Предположим теперь, что $\dim Y>\dim L-\dim X$. Тогда $\dim(Y*M)+\dim X>n$, и по теореме о связности $X\cap(Y*M)$ связно. Поэтому $Y=X\cap(Y*M)$. А так как $M$ произвольно, то $X=Y\subset L$. Противоречие!

Следствие. Если $X$ гладкое, то $\dim X^*\geqslant\dim X$.

Следствие. Пусть $X$ — гладкое подмногообразие в $\mathbf{P}^n$. Тогда любое гиперплоское сечение $X$ приведено при $2\dim X>n$ и нормально при $2\dim X>n+1$.

(Воспользоваться критерием нормальности § 7 главы 2.)

Другие применения теоремы о связности и ссылки на литературу о наследовании свойств при переходе к гиперплоским сечениям можно найти в обзоре [30].

## § 2. Степень проективного многообразия

**2.1. Определение степени.** Степень проективного многообразия $X\subset\mathbf{P}^n$ — вторая по важности (после размерности) численная характеристика $X$, отражающая его расположение в $\mathbf{P}^n$. Если $r=\dim X$ (как правило, предполагается, что все компоненты $X$ $r$-мерны), то *степень* $\deg X$ — это число точек пересечения $X$ с общим линейным многообразием $L$ размерности $n-r$ (см. теорему п. 1.2). Если $X$ пересекается с $(n-r)$-плоскостью $L$ более чем в $\deg X$ точках, то $X\cap L$ бесконечно.

Пример 1. Пусть $X$ — линейное многообразие в $\mathbf{P}^n$; тогда $\deg X=1$. Верно и обратное.

Пример 2. Пусть $X$ — гиперповерхность, заданная неприводимым однородным многочленом $F(T_0, \ldots, T_n)$. Тогда $\deg X=\deg F$.

Пример 3. Пусть $C\subset\mathbf{P}^n$ — неприводимая кривая степени два. Тогда она лежит в некоторой плоскости. В самом деле, возьмем на $C$ три общие точки $x$, $y$, $z$ и проведем через них плоскость $L=\overline{xyz}$. Так как $L\cap C$ бесконечно, $C\subset L$. Отметим, что неприводимость $C$ существенна, как видно на примере двух скрещивающихся прямых в $\mathbf{P}^3$.

Пример 4. Степень пересечения $X$ с гиперплоскостью $H$ $\leqslant\deg X$ и равна $\deg X$, если $H$ общая.

Пример 5. Пусть $X*Y$ — линейное соединение $X$ и $Y$. Тогда $\deg X*Y=\deg X\cdot\deg Y$. В самом деле, пусть $L=\mathbf{P}(\lambda)$ — общее линейное многообразие, пересекающее $X$ в $\deg X$ точках; аналогично $L'=\mathbf{P}(\lambda')$. Тогда линейное многообразие $L*L'=\mathbf{P}(\lambda\times\lambda')$

пересекает $X*X'$ по одномерному многообразию $(X\cap L)*(X'\cap L')$, состоящему из $\deg X\cdot\deg X'$ прямых. Теперь все должно быть ясным.

Над $K=\mathbf{C}$ степень можно интепретировать как объем, см. [32], [56].

**2.2. Теорема Безу.** Если все неприводимые компоненты $X_1$, ... $X_s$ многообразия $X$ имеют одну размерность, то $\deg X = \deg X_1 + \ldots + \deg X_s$. Это можно рассматривать как аддитивность степени при объединении. Наиболее знаменитая теорема о степени — *теорема Безу* — утверждает мультипликативность степени при пересечении. Конечное, при этом надо предполагать, что пересекаемые многообразия расположены трансверсально или приписывать пересечениям некоторые кратности. Проблему кратностей мы обсудим в параграфе, посвященном общей теории пересечений, а сейчас приведем теорему Безу в той форме, которую ей придали Фултон и Макферсон [29].

Теорема. Пусть $X_1, \ldots, X_s$ — равноразмерные многообразия в $\mathbf{P}^n$ и $Z_1, \ldots, Z_t$ — неприводимые компоненты $X_1\cap\ldots\cap X_s$. Тогда $\sum\limits_j \deg Z_j \leqslant \prod\limits_i \deg X_i$.

Например, если пересечение $n$ гиперповерхностей $x_1 \ldots x_n$ в $\mathbf{P}^n$ конечно, оно содержит $\leqslant d_1 \ldots d_n$ точек, где $d_i = \deg X_i$. Собственно это и установил Безу.

При доказательстве можно считать $X_i$ неприводимыми; кроме того, для простоты мы ограничимся пересечением двух многообразий. Воспользуемся проективным вариантом редукции к диагонали. Пусть $\delta$ — диагональ в $K^{n+1}\times K^{n+1}$. Линейное многообразие $\mathbf{P}(\delta)$ в $\mathbf{P}^n*\mathbf{P}^n=\mathbf{P}^{2n+1}$ пересекает линейное соединение $X_1*X_2$ как раз по $X_1\cap X_2$. Пользуясь примером 5, мы видим, что $X_2$ можно считать линейным. Представляя линейное многообразие как пересечение гиперплоскостей, можно считать $X_2$ гиперплоскостью. Теперь все очевидно (см. пример 5).

Когда пересечения трансверсальные, можно утверждать больше. Скажем, что многообразия $X$, $Y\subset\mathbf{P}^n$ *пересекаются просто* (или с кратностью 1). Если на каждой компоненте $X\cap Y$ найдется точка, в которой $X$ и $Y$ пересекаются трансверсально. В этом случае $X$ и $Y$ пересекаются правильно в смысле размерностей (см. § 6 главы 2). Предыдущее рассуждение в случае простого пересечения дает равенство

$$\deg(X\cap Y) = \deg X\cdot\deg Y.$$

Пример. Пусть $C\subset\mathbf{P}^3$ — нормальная рациональная кривая степени 3. Тогда она не является полным пересечением, т. е. простым пересечением двух поверхностей. В самом деле, одна из них по теореме Безу должна быть плоскостью, а $C$ не лежит ни в какой плоскости.

Другой простой факт, следующий из теоремы Безу, может удивить лишь тем, что не появился раньше.

Следствие. Автоморфизмы $\mathbf{P}^n$ переводят гиперплоскости в гиперплоскости и индуцируются линейными автоморфизмами $K^{n+1}$.

В самом деле, пусть $H$ — гиперплоскость в $\mathbf{P}$, а $L$ — трансверсальная ей прямая. Если $\varphi$ — автоморфизм $\mathbf{P}^n$, то $\varphi(H)$ и $\varphi(L)$ снова трансверсально пересекаются в единственной точке, откуда $\deg\varphi(H)=1$ и $\varphi(H)$ гиперплоскость.

**2.3. Степень и коразмерность.** Степень многообразия накладывает ограничения на размерность линейной оболочки многообразия. Пусть, к примеру, $C$ — неприводимая кривая. Возьмем на $C$ $\deg C+1$ точку и проведем через них линейное пространство L размерности $\leqslant\deg C$. Так как $C$ и $L$ пересекаются в этих точках, $C$ лежит в $L$. Таким образом, любая неприводимая кривая лежит в пространстве размерности $\leqslant\deg C$. Пользуясь гиперплоскими сечениями, легко отсюда получить

Предложение. *Любое неприводимое проективное многообразие $X$ лежит в пространстве размерности $<\dim X+\deg X$.*

Например, многообразие степени 2 лежит в пространстве размерности $\dim X+1$; для коники мы это уже видели. Можно также сказать, что коразмерность неприводимого многообразия в своей линейной оболочке меньше степени.

Пример 1. Пусть $C=v_n(\mathbf{P}^1)\subset\mathbf{P}^n$ — рациональная нормальная кривая степени $n$. Ясно, что $\langle C\rangle=\mathbf{P}^n$, так что оценка предложения точная. Напротив, пусть $C$ — невырожденная (т. е. не лежащая в гиперплоскости) кривая в $\mathbf{P}^n$ степени $n$. Возьмем на ней $n-1$ точку $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Любая гиперплоскость $H$, проходящая через $x_1, \ldots, x_{n-1}$, пересекает $C$ еще в одной точке $x_H\in C$. Это устанавливает изоморфизм $\mathbf{P}^1$ и $C$. Можно показать, что $C$ имеет вид $v_n(\mathbf{P}^1)$.

Пример 2. Пусть $S\subset\mathbf{P}^5$ — поверхность Веронезе, т. е. образ плоскости $\mathbf{P}^2$ при вложении Веронезе $v:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^5$. Представим общую 3-плоскость в $\mathbf{P}^5$ как пересечение двух гиперплоскостей $H$, $H'$. Прообразы $H$ и $H'$ при $v$ — две коники на $\mathbf{P}^2$, и они пересекаются в 4 точках. Поэтому степень $S$ равна 4 и тоже минимально возможная для поверхности в $\mathbf{P}^5$.

Поверхность Веронезе $S$ обладает еще одним интересным свойством — ее многообразие секущих $\mathrm{Sec}S$ имеет размерность 4 вопреки ожидаемой 5. Дело в том, что любая прямая $l\subset\mathbf{P}^2$ при $v$ переходит в кривую степени 2. Поэтому линейная оболочка $\langle v(l)\rangle$ является 2 — плоскостью. Так как $\mathrm{Sec}S$ заметается плоскостями $\langle v(l)\rangle$, когда $l$ пробегает 2 — мерное семейство прямых в $\mathbf{P}^2$, то $\dim\mathrm{Sec}\,S=4$. С $S$ можно связать еще одно 2-мерное семейство плоскостей — касательные к $S$; они заметают 4-мерное многообразие $\mathrm{Tan}S$. Так как $\mathrm{Tan}S$ содержится в $\mathrm{Sec}S$, то они совпадают.

Многообразия минимально возможной степени имеют довольно специальный вид и могут быть полностью описаны

[6], [59]. Многообразиям малой степени и коразмерности посвящена [42].

**2.4. Степень линейной проекции.** Многообразия большой коразмерности можно упрощать, пользуясь линейными проекциями в пространство меньшей размерности. Как ведет себя при этом степень? Например, если $X \subset \mathbf{P}^n$ и $X$ не гиперповерхность, то при общей проекции степень сохраняется. Вообще, если $X$ неприводимо и центр проекции не лежит на $X$, то проекция $\pi: X \to \pi(X)$ конечна и $\deg X = \deg(\pi) \deg \pi(X)$.

Более интересные вещи происходят, когда центр проекции лежит на $X$. Образ проекции $\pi(X)$ надо понимать тогда как $\widetilde{\pi}(\widetilde{X})$, где $\widetilde{X}$ — раздутие $X$ в точке $p$. Степень образа при этом уменьшается!

Пример. Пусть $C \subset \mathbf{P}^3$ — рациональная нормальная кубическая кривая, заданная параметрически $\{(1, t, t^2, t^3)\}$, $t \in \mathbf{P}^1$. Если мы проектируем ее из точки $p \notin C$, то образом будет плоская кубическая кривая, причем непременно особая (см. рис. 16), так как неособая кубика нерациональна. Однако проекция из точки $p = (1, 0, 0, 0) \in C$ дает плоскую конику $\{(1, t, t^2)\}$, $t \in \mathbf{P}^1$.

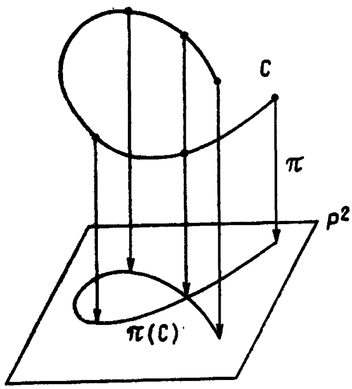



Рис. 16

Интуитивно ясно, что если $p$ — гладкая точка $X$, то степень при проекции должна понижаться на единицу. В общем случае степень уменьшается на целое число $\mathrm{mult}_p X > 0$, называемое *кратностью* точки $p$ на $X$. Интуитивно $\mathrm{mult}_p X$ — это кратность пересечения в точке $p$ многообразия $X$ с общим линейным многообразием дополнительной размерности, проходящим через $p$. Точный смысл этому можно придать, пользуясь универсальным линейным сечением и понятием локальной степени конечного морфизма из п. 5.8 главы 2. Имеет место (детали см. [56])

Предложение. Пусть неприводимое многообразие $X$ не есть конус с вершиной в $p$ и $\pi$ — проекция из точки $p$. Тогда

$$\deg X = \mathrm{mult}_p X + \deg(\pi) \deg \pi(X).$$

**2.5. Многочлен Гильберта.** В принципе все проективные инварианты вложения $X \subset \mathbf{P}^n$ определяются конусом $C \subset K^{n+1}$, для которого $X = \mathbf{P}(C)$, или его координатным кольцом $R = K[C]$. Что при этом отвечает степени $X$?

Кольцо $R$ обладает естественной градуировкой $R = \bigoplus_{k \geqslant 0} R_k$ как факторкольцо кольца многочленов $K[T_0, \ldots, T_n]$ по однородному идеалу $I(C)$. Простейшие инварианты, связанные с такой структурой, — размерности однородных компонент $R_k$ как векторных пространств над $K$. Оказывается, что при больших $k$ эти числа ведут себя достаточно регулярно.

Теорема (Гильберт). Существует многочлен $P_R \in \mathbf{Q}[T]$ степени $\leqslant n$, такой что для достаточно больших целых $k$

$$\dim R_k = P_R(k).$$

Аналогичное утверждение верно для любого градуированного $K[T_0, \ldots, T_n]$-модуля конечного типа и доказывается довольно просто индукцией по $n$ [8], [41], [56], [63], [65]. Этот многочлен $P_R$ (или $P_X$) называется *многочленом Гильберта* градуированного кольца $R$ (или проективного многообразия $X$).

Пример. Пусть $R = K[T_0, \ldots, T_n]$. Тогда при $k > 0$ $\dim R_k$ = число мономов степени $k$ от $T_0, \ldots, T_n = \binom{k+n}{n}$. Поэтому $P_{\mathbf{P}^n} = \frac{1}{n!}(T+n) \cdot \ldots \cdot (T+1) = \frac{T^n}{n!} + \ldots$.

Если $X \subset \mathbf{P}^n$ — гиперповерхность, задаваемая однородным многочленом $F$ степени $d$, то при $k \geqslant d$

$$\dim (K[T_0, \ldots, T_n]/(F))_k = \binom{k+n}{n} - \binom{k+n-d}{n},$$

откуда $P_X = \frac{d}{(n-1)!} T^{n-1} + \ldots$.

В обоих случаях степень многочлена $P_X$ совпадает с $\dim X$, а $\deg X$ входит в старший коэффициент $P_X$. Это не случайно.

Теорема. Пусть $X \subset \mathbf{P}^n$ — многообразие размерности $r$ и степени $d$. Тогда $P_X = \frac{d}{r!} T^r + o(T^r)$.

Устанавливается это переходом к гиперплоскому сечению (см., например, [56] § 6В). Пользуясь тем, что $K[C \times C'] = K[C] \otimes K[C']$, отсюда можно еще раз получить формулу для степени линейного соединения, а тем самым и теорему Безу.

**2.6. Арифметический род.** Конечно, все коэффициенты многочлена $P_X$, а не только старший, являются проективными инвариантами $X \subset \mathbf{P}^n$ и допускают геометрическую интерпретацию (см. [20]). Однако наиболее важным из них является постоянный член $P_X$, т. е. $P_X(0)$. По историческим причинам чаще употребляется число

$$P_a(X)=(-1)^{\dim X}(P_X(0)-1),$$

которое называется *арифметическим родом* $X$. Оно всегда целое и зависит только от $X$, а не от вложения $X$ в $\mathbf{P}^n$; это следует из когомологической интерпретации $P_X(0)$. На самом деле для гладкого многообразия над полем характеристики 0 арифметический род является даже бирациональным инвариантом [20], [41], [56].

Например, арифметический род $\mathbf{P}^n$ равен 0, как и род гиперповерхностей степени $d$ в $\mathbf{P}^n$ при $d\leqslant n$. Род плоской кубической кривой равен 1, поэтому гладкая кубическая кривая нерациональна, что мы уже видели.

## § 3. Дивизоры

**3.1. Дивизоры Картье.** В предыдущих двух параграфах мы занимались геометрией на $\mathbf{P}^n$. Обратимся теперь к общим многообразиям и начнем с простейших его фигур, задаваемых (локально) одним уравнением.

Предположим, что $X$ — гладкое многообразие, а $Y$ — подмногообразие в $X$ коразмерности 1. Как мы знаем из § 6 главы 2, локально $Y$ задается одним уравнением. То есть существует открытое покрытие $(U_i)$ многообразия $X$ и регулярные функции $g_i$ на $U_i$, такие что $Y\cap U_i$ (как подсхема $U_i$) задается уравнением $g_i=0$. На пересечениях $U_i\cap U_j$ функции $g_i$ и $g_j$ задают одну и ту же подсхему и поэтому $g_i/g_j$ и $g_j/g_i$ регулярны на $U_i\cap U_j$. Это приводит к общему

Определению. *Дивизором Картье* на многообразии $X$ называется семейство $(U_i, g_i)$, $i\in I$, где $U_i$ — открытые в $X$, покрывающие $X$, а $g_i$ — рациональные функции на $U_i$, такие что на пересечениях $U_i\cap U_0$ $g_i/g_j$ регулярны. Функции $g_i$ называются *локальными уравнениями* дивизора.

Точнее, дивизором Картье называется класс эквивалентности таких данных; два набора $(U_i, g_i)$ и $(U_j', g_j')$ эквивалентны, если объединение их снова дивизор. Дивизоры Картье можно складывать, перемножая локальные уравнения; они образуют группу, обозначаемую $\mathrm{Div}(X)$.

Пример 1. Если локальные уравнения $g_i$ регулярны на $U_i$, то дивизор $\mathscr{D}$ называется *эффективным*, $\mathscr{D}\geqslant 0$. Подсхемы $[g_i=0]$ в $U_i$ склеиваются в одну подсхему в $X$, которая также обозначается $\mathscr{D}$. Тем самым эффективные дивизоры Картье отождествляются с подсхемами в $X$, локально задаваемыми одним уравнением.

Пример 2. Ненулевая рациональная функция $f\in K(X)^*$ определяет дивизор Картье $(X, f)$, который называется *глав-*

*ным* и обозначается $\operatorname{div}(f)$. Главные дивизоры образуют подгруппу в $\operatorname{Div}(X)$.

**3.2. Дивизоры Вейля.** *Носителем* дивизора Картье $(U_i, g_i)$, $i \in I$, называется множество точек $x$, в которых локальные уравнения $g_i$ обращаются в нуль или бесконечность. Это замкнутое подмножество коразмерности 1 позволяет более геометрично представить дивизор. Однако можно пойти дальше и приписать компонентам носителя некоторые кратности, отражающие кратность нуля или полюса локального уравнения.

Определение. *Дивизором Вейля* на $X$ называется конечная целочисленная комбинация $\Sigma n_i F_i$, где $F_i$ — неприводимые подмногообразия $X$ коразмерности 1; группа таких дивизоров обозначается $\mathscr{Z}(X)$.

Таким образом, мы хотим сопоставить дивизору Картье $\mathscr{D}$ дивизор Вейля $[\mathscr{D}] = \Sigma \operatorname{ord}_F(\mathscr{D}) \cdot F$. Для этого надо определить порядок $\operatorname{ord}_F(\mathscr{D})$ дивизора $\mathscr{D}$ вдоль неприводимого $F \subset X$ коразмерности 1. Делается это в случае нормального $X$ так. Пусть $g$ — локальное уравнение $\mathscr{D}$ в общей точке $F$. Уменьшая $X$, можно считать, что идеал $I(F)$ — главный (§ 6 главы 2) и порождается функцией $u_F$. Поэтому $g = \alpha \cdot u_F{}^m$, где $\alpha$ обратимо вдоль $F$. Тогда $\operatorname{ord}_F(\mathscr{D}) = m$. Легко проверить, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора локального уравнения $g$, окрестности общей точки $F$ и образующей $u_F$ идеала $I(F)$. Получившийся гомоморфизм групп

$$\operatorname{Div}(X) \to \mathscr{Z}(X)$$

инъективен (для нормального $X$). В самом деле, на нормальном многообразии функция регулярна, если она регулярна вне подмножества коразмерности $\geqslant 2$ (см. § 7 главы 2). Если $X$ локально факториально (например, гладкое), то группы $\operatorname{Div}(X)$ и $\mathscr{Z}(X)$ канонически изоморфны, и мы не будем делать различия между дивизорами Картье и Вейля. В общем случае они различны, однако дело даже не в этом. Дивизоры Картье контравариантны, тогда как дивизоры Вейля ковариантны. Дивизорам Вейля и их обобщениям на высшие коразмерности мы посвятим отдельный параграф, а пока продолжим изучение дивизоров Картье.

**3.3. Дивизоры и обратимые пучки.** Пусть $\mathscr{K}_X$ обозначает пучок рациональных функций на $X$; для открытого $U \subset X$ $\mathscr{K}_X(U) = K(U)$. Свяжем с дивизором Картье $\mathscr{D} = (U_i, g_i)_{i \in I}$ подпучок $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})$ пучка $\mathscr{K}_X$; над $U_i$ он равен $g_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$. Так как на пересечениях $g_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$ и $g_j^{-1}\mathcal{O}_{U_j}$ совпадают в силу обратимости $g_i/g_j$, эти пучки склеиваются в один пучок $\mathcal{O}_X(\mathscr{D}) \subset \mathscr{K}_X$. Например, $\mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_X(\mathscr{D} + \mathscr{D}') = \mathcal{O}_X(\mathscr{D}) \cdot \mathcal{O}_X(\mathscr{D}')$.

Ненулевые сечения $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})$ — это такие рациональные функции $f$ на $X$, что функции $f \cdot g_i$ регулярны на $U_i$, т. е. дивизор

$\mathrm{dif}(f)+\mathscr{D}$ эффективен. Если сам $\mathscr{D}$ эффективен, пучок $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})$ обладает каноническим сечением $s_D$, которое соответствует постоянной функции 1. Напротив, пучок $\mathcal{O}_X(-\mathscr{D})$ для эффективного $\mathscr{D}$ является пучком идеалов $\mathcal{O}_X$; задаваемая им подсхема в $X$ и будет $\mathscr{D}$.

Пучки $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})$ обратимы; умножение на $f_i$ задает изоморфизм $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$. Сложению дивизоров соответствует тензорное произведение обратимых пучков. Это дает гомоморфизм

$$\delta : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X).$$

Ядро $\delta$ состоит из дивизоров $\mathscr{D}$, для которых пучок $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})$ изоморфен $\mathcal{O}_X$, т. е. из главных дивизоров. Гомоморфизм $\delta$ сюръективен. В самом деле, пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на $X$ и $U$ — открытое плотное подмножество, такое что $\mathscr{L}|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$. Тогда этот изоморфизм продолжается до вложения $\mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{K}_X$. Этот факт специфичен для алгебраических многообразий; на комплексно-аналитических многообразиях дивизоров может оказаться существенно меньше, чем обратимых пучков (см. [15, гл. VIII]).

Сечения обратимых пучков задают дивизоры. Пусть $s \in H^0(X, \mathscr{L})$ — глобальное сечение обратимого пучка $\mathscr{L}$, не равное тождественно нулю на компонентах $X$. Выбрав тривиализации $\varphi_i : \mathscr{L}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$ на покрытии $(U_i)$, мы получаем эффективный дивизор $(U_i, \varphi_i(s_i))$, который обозначается $\mathrm{div}(s, \mathscr{L})$. Например, каноническое сечение $s_D$ пучка $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})$ для эффективного $\mathscr{D}$ задает $\mathscr{D}$. Так мы получаем возможность задавать одним уравнением $s=0$ любой эффективный дивизор глобально, но за счет того, что $s$ не функция, а сечение обратимого пучка. Если $s'$ — другое ненулевое сечение $\mathscr{L}$, дивизоры $\mathrm{div}(s', \mathscr{L})$ и $\mathrm{div}(s, \mathscr{L})$ различаются на дивизор рациональной функции $s'/s$; говорят также, что они *линейно эквивалентны*. Подробнее об этом мы поговорим в следующем параграфе.

**3.4. Функториальность.** Пусть $f : X \to Y$ — морфизм многообразий, $\mathscr{D}$ — дивизор на $Y$. Предположим, что никакая компонента $f(X)$ не содержится в носителе $\mathscr{D}$. Тогда на $X$ определен дивизор $f^*(\mathscr{D})$, называемый *обратным образом* $\mathscr{D}$ при $f$. Делается это очевидным способом: если $g_i$ — локальные уравнения $\mathscr{D}$ на покрытии $V_i$, то $f^*(\mathscr{D})$ задается уравнениями $f^*(g_i)$ (определенными и ненулевыми в силу $f(X) \not\subset \mathrm{supp}\, \mathscr{D}$) на покрытии $f^{-1}(V_i)$. В частности, если $f : X \to Y$ — доминатный, $f^*(\mathscr{D})$ определен для любого $\mathscr{D}$, и мы получаем гомоморфизм $f^* : \mathrm{Div}\,(Y) \to \mathrm{Div}\,(X)$, согласованный с обратным образом на группах Пикара Pic. Заметим, что на уровне Pic обратный образ всегда определен, и в этом еще одно из преимуществ обратимых пучков перед дивизорами.

**3.5. Теорема о вырезании.** При вычислении групп Пикара полезно следующее простое

Предложение. Пусть $Y$ замкнуто в $X$ и $X$ факториально в точках из $Y$. Тогда точна последовательность

$$\mathbf{Z}^k \to \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(X-Y) \to 0,$$

где $\mathbf{Z}^k$ порождается неприводимыми компонентами Y, имеющими коразмерность 1 в $X$.

Пример 1. Группа Пикара $\mathbf{A}^n$ равна 0; это просто переформулировка факториальности кольца многочленов $K[T_1, \ldots, T_n]$. Позже мы дадим более геометрическое объяснение.

Пример 2. Найдем группу Пикара проективного пространства $\mathbf{P} = \mathbf{P}(V)$. Пусть $H$ — гиперплоскость в $\mathbf{P}$; пользуясь тем, что $\mathbf{P} - H \simeq \mathbf{A}^n$, мы получаем, что группа $\operatorname{Pic}(\mathbf{P})$ порождается классом дивизора $H$. Гомоморфизм $\mathbf{Z} \to \operatorname{Pic}(\mathbf{P})$ инъективен. Это следует из теории степени или из общего замечания: на полном многообразии лишь нулевой дивизор может быть эффективным и главным. В самом деле, если $\operatorname{div}(g) \geqslant 0$, функция $g$ регулярна, следовательно, постоянна.

Для любой гиперплоскости $H \subset \mathbf{P}$ обратимый пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(H)$ изоморфен тавтологическому пучку $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ из § 7 главы 1. Сечения $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(H)$ имеют вид $l/l_0$, где $l \in V^*$, а $l_0 = 0$ — однородное уравнение гиперплоскости $H$. Сечения $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ отождествляются с $V^*$. Вообще, для любого $m \in \mathbf{Z}$

$$H^\circ(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(m)) = \begin{cases} 0 & \text{при } m < 0, \\ \operatorname{Sym}^m(V^*) & \text{при } m \geqslant 0. \end{cases}$$

Как следствие этих вычислений мы снова получаем, что автоморфизмы $\mathbf{P}$ индуцируются автоморфизмами $V$. В самом деле, автоморфизм $\mathbf{P}$ индуцирует автоморфизм $\operatorname{Pic}(\mathbf{P}) \simeq \mathbf{Z}$. Поэтому образующая $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ переходит в $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ (ибо $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)$ не имеет сечений), а гиперплоскости в гиперплоскости.

Пример 3. Аналогично легко показать, что группа Пикара произведения $\mathbf{P}(V) \times \mathbf{P}(W)$ изоморфна $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, а любой обратимый пучок на этом произведении имеет вид $\mathcal{O}(m_1, m_2) = p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(m_1) \otimes \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(m_2)$. Пара целых чисел $(m_1, m_2)$ называется *типом пучка*. Например, если $s: \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m \to \mathbf{P}^N$ — вложение Сегре, то $s^*\mathcal{O}(1)$ имеет тип (1, 1). Диагональ на $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ тоже типа (1, 1).

Пример 4. Многообразие Грассмана $G = G(k, n)$. Зафиксируем разложение $K^n = V \oplus W$, $\dim V = k$. Обозначим через $\Sigma$ множество тех линейных пространств $L \in G$, для которых $L \cap W \neq \neq (0)$. Дополнение к $\Sigma$ в $G$ — это «клетка» $U(V, W)$ (см. 3.4 главы 1), изоморфная $V^* \otimes W \simeq \mathbf{A}^{k(n-k)}$. Легко показать, что $\Sigma$ бирационально изоморфно $\mathbf{P}(W) \times G(k-1, n-1)$, поэтому неприводимо и имеет коразмерность 1 в $G$. Из точной последовательности вырезания мы заключаем, что $\operatorname{Pic}(G)$ изоморфен $\mathbf{Z}$ и порождается классом $\Sigma$. Отметим, что $\mathcal{O}_G(\Sigma) \simeq p^*\mathcal{O}(1)$, где $p: G \to \mathbf{P}^N$ — вложение Плюккера.

**3.6. Дивизоры на кривых.** Конечно, вычислять группу Пикара при помощи вырезания можно только для простых многообразий вроде $\mathbf{P}^n$ или грассманианов. Для менее рациональных многообразий она устроена более сложно и может содержать «непрерывную» часть. Покажем это на примере эллиптической кривой. Пусть сначала $C$ — полная гладкая неприводимая кривая; дивизор на $C$ — это линейная комбинация точек $\Sigma n_i[x_i]$ с целыми $n_i$. *Степень* такого дивизора есть $\Sigma n_i$. Из теоремы о постоянстве легко получить, что линейно эквивалентные дивизоры имеют одну степень. Поэтому гомоморфизм степени $\operatorname{Div}(C) \to \mathbf{Z}$ пропускается через $\operatorname{Pic}(C)$. Обозначим $\operatorname{Pic}^0(C)$ ядро $\operatorname{Pic}(C) \to \mathbf{Z}$ т. е. группу дивизоров степени 0 по модулю главных.

Пусть теперь $C$ — гладкая кубика в $\mathbf{P}^2$. Зафиксируем на ней точку $p$ и произвольной точке $x \in C$ сопоставим дивизор нулевой степени $[x]-[p]$. Получается отображение $\varphi: C \to \operatorname{Pic}^0(C)$. Мы утверждаем, что $\varphi$ биективно; этот факт можно истолковывать двумя различными способами.

Во-первых, справа стоит группа $\operatorname{Pic}^0(C)$, поэтому и $C$ снабжается структурой группы. Этот факт специфичен для кривой третьей степени, хотя в ослабленной форме проявляется и для кубических гиперповерхностей.

Во-вторых, слева стоит алгебраическое многообразие $C$, поэтому группа $\operatorname{Pic}^0(C)$ снабжается структурой алгебраического многообразия. Этот факт верен уже для любой кривой (по существу, с этого наблюдения и берет начало алгебраическая геометрия, см. исторический очерк в [15]) и приводит к понятию *якобиева многообразия* кривой. Размерность $\operatorname{Pic}^0(C)$ как алгебраического многообразия совпадает с родом кривой $C$ (см. п. 7.3 главы 2), однако якобиан является гораздо более тонким инвариантом кривой, чем род (см. [55], [62]).

Вернемся, однако, к отображению $\varphi: C \to \operatorname{Pic}^0(C)$. Начнем с явного закона сложения точек $C$. Пусть $x, y \in C$; прямая $\overline{xy} \subset \mathbf{P}^2$ пересекает $C$ в точках $x, y$ и еще одной точке $w$. Теперь проведем прямую $\overline{pw}$ и пусть $z$ — третья точка пересечения ее с $C$. Точка $z$ и называется суммой $x$ и $y$.

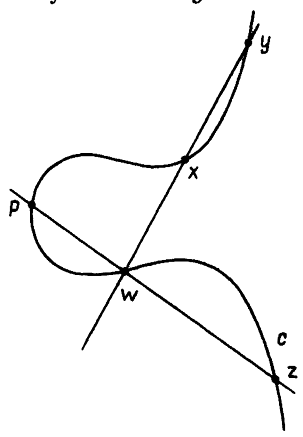



Рис. 17

Согласованность этой операции со сложением в $\mathrm{Pic}^0(C)$ видна из того, что дивизор $[x]+[y]+[w]$ линейно эквивалентен дивизору $[p]+[w]+[z]$, ибо оба они высекаются на $C$ прямыми из $\mathbf{P}^2$. Поэтому $([x]-[p])+([y[-[p])\sim([z]-[p])$. Можно написать и явные формулы для операции сложения (см. [15, стр. 206]), откуда будет видна регулярность закона сложения.

Таким образом, $\varphi: C\to\mathrm{Pic}^0(C)$ — гомоморфизм групп, очевидно, сюръективный. Инъективность его следует из нерациональности $C$ (§ 7 главы 2). В самом деле, если точки $x$ и $y$ переходят в одну, дивизор $[x]-[y]$ — главный и существует рациональная функция $f$ на $C$ с нулем в $x$ и полюсом в $y$. Но тогда $f$ задает изоморфизм $C\xrightarrow{\sim}\mathbf{P}^1$.

Аналогично можно поступать и для особой кубики $C$, задавая групповой закон на множестве гладких точек $C-\mathrm{Sing}(C)$.

## § 4. Линейные системы дивизоров

**4.1. Семейства дивизоров.** В предыдущем параграфе дивизор рассматривался как индивидуальный объект. Теперь мы перейдем к «непрерывным» семействам дивизоров.

Определение. *Семейством дивизоров Картье* на многообразии $X$ с базой $S$ (где $S$ тоже многообразие) называется дивизор Картье $\mathscr{D}$ на $X\times S$, носитель которого не содержит слоев проекции $X\times S\to S$.

Ограничивая $\mathscr{D}$ на каждый слой $X\times\{s\}$, мы получаем дивизор $\mathscr{D}_s$ на этом слое, или на $X$. Таким образом, $\mathscr{D}$ дает семейство $(\mathscr{D}_s)$, $s\in S$. Далее в основном нас будут интересовать эффективные семейства, когда $\mathscr{D}$ или все $\mathscr{D}_s$ эффективны.

С семействами дивизоров можно делать две вещи. Первая — ограничивать их на подмногообразие $Y\subset X$; это возможно, если $Y$ не содержится в $\mathscr{D}_s$. Вторая — делать замену базы. Если $\varphi: T\to S$ — морфизм, то можно образовать индуцированное семейство $(\mathscr{D}_{\varphi(t)})$, $t\in T$, задающееся дивизором $(\mathrm{id}\times\varphi)^*\mathscr{D}$ на $X\times T$.

Пример. Вот наиболее важный и простой пример семейства дивизоров. Пусть $V$ — векторное пространство, $V^*$ — сопряженное к $V$. Пусть $\mathscr{H}\subset\mathbf{P}(V)\times\mathbf{P}(V^*)$ — дивизор нулей естественного спаривания $V\times V^*\to K$, $(v, l)\mapsto l(v)$. Для каждой точки $l\in\mathbf{P}(V^*)$ уравнение $l=0$ задает гиперплоскость $H_l$ в $\mathbf{P}(V)$. Поэтому $\mathscr{H}$ — семейство гиперплоскостей на $\mathbf{P}(V)$, параметризованное точками $\mathbf{P}(V^*)$ (сравните с п. 1.2). Это семейство универсально в том смысле, что если $\mathscr{D}=(\mathscr{D}_s)$, $s\in S$, — любое семейство гиперплоскостей на $\mathbf{P}(V)$, то существует единственный морфизм $\varphi: S\to\mathbf{P}(V^*)$, такой что $\mathscr{D}=\varphi^*(\mathscr{H})$ (или $\mathscr{D}_s=H_{\varphi(s)}$). Впрочем, $\mathscr{H}$ можно рассматривать и как семейство гиперплоскостей на $\mathbf{P}(V^*)$, параметризованное $\mathbf{P}(V)$.

**4.2. Линейные системы дивизоров.** Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на неприводимом многообразии $X$. Как объяснялось в § 3, ненулевое сечение $s$ пучка $\mathscr{L}$ дает эффективный дивизор $\operatorname{div}(s, \mathscr{L})$ на $X$. Если $V \subset H^0(X, \mathscr{L})$ — некоторое конечномерное подпространство сечений $\mathscr{L}$, то мы получаем «семейство» дивизоров $(\operatorname{div}(s, \mathscr{L}))$, $s \in V - \{0\}$. Так как при умножении $s$ на константу $\operatorname{div}(s, \mathscr{L})$ не меняется, можно считать, что наше «семейство» параметризовано точками $\mathbf{P}(V)$.

Построенное семейство является таковым и в смысле п. 4.1. Укажем дивизор на $X \times \mathbf{P}(V)$, задающий это семейство. Для этого выберем базис $s_0, \ldots, s_n$ пространства $V$ и зададим дивизор $\mathscr{D}$ уравнением $\sum\limits_i s_i T_i = 0$, где $T_0, \ldots, T_n$ — однородные координаты на $\mathbf{P}(V)$. Такие семейства дивизоров называются *линейными системами*. Иначе говоря, линейная система в качестве базы имеет проективное пространство $\mathbf{P}^n$, но этого мало — она должна задаваться сечением обратимого пучка $\mathscr{L} \otimes q^* \mathscr{O}(1)$ на $X \times \mathbf{P}^n$.

Когда многообразие $X$ полное, в качестве $V$ можно взять все пространство $H^0(X, \mathscr{L})$ и получить так называемую *полную линейную систему*, которая обозначается $|\mathscr{L}|$ или $|\mathscr{D}|$, если $\mathscr{L} \cong \mathscr{O}(\mathscr{D})$. Любой эффективный дивизор, линейно эквивалентный $\mathscr{D}$, встречается в полной системе $|\mathscr{D}|$, причем один раз.

Приведенная в примере 4.1 система гиперплоскостей $\mathscr{H}$ является полной линейной системой как на $\mathbf{P}(V)$, так и на $\mathbf{P}(V^*)$. Если $X$ — подмногообразие в $\mathbf{P}(V^*)$, то, ограничивая на $X$ гиперплоскости, мы получим линейную систему на $X$. Оказывается, что в некотором смысле любая линейная система устроена так.

**4.3. Свободные линейные системы.** Пусть $\mathscr{D}$ — линейная система на $X$, соответствующая пространству $V \subset H^0(X, \mathscr{L})$. *Базисным множеством* (или подсхемой) называется пересечение $B(\mathscr{D}) = \bigcap\limits_{s \in \mathbf{P}(V)} \mathscr{D}_s$ всех дивизоров из семейства $(\mathscr{D}_s)$, $s \in \mathbf{P}(V)$. Иначе говоря, точка $x$ базисная, если $s(x) = 0$ для всех $s \in V$. Если базисное множество пусто, то говорят, что линейная система $\mathscr{D}$ *свободна*, или не имеет базисных точек; это эквивалентно тому, что $V$ порождает $\mathscr{L}$. Например, система $|mH|$ на $\mathbf{P}$ свободна при $m \geqslant 0$.

Базисное множество $B(D)$ можно описать так же, как множество точек $x \in X$, для которых слой $\{x\} \times \mathbf{P}(V)$ содержится в дивизоре $D \subset X \times \mathbf{P}(V)$. Поэтому если $B(D)$ пусто, $D$ можно понимать как семейство гиперплоскостей на $\mathbf{P}(V)$ с базой $X$. Но тогда оно индуцируется из универсального семейства $\mathscr{H} \subset \subset \mathbf{P}(V) \times \mathbf{P}(V^*)$ при помощи морфизма $\varphi_D : X \to \mathbf{P}(V^*)$. Так получается

Предложение. Если линейная система $D = (D_s)$, $s \in \mathbf{P}(V)$, свободна, то существует единственный морфизм $\varphi_D : X \to \mathbf{P}(V^*)$, такой, что система $(D_s)$ индуцирована гиперплоскостями на $\mathbf{P}(V^*)$.

В этом главный смысл линейных систем — они задают отображения в проективные пространства. Приведем еще одно описание $\varphi_{\mathcal{D}}$. Отождествляя слой $\mathcal{L}(x)$ с $K$, мы получаем линейное отображение $V\to K$, $s\mapsto s(x)$, т. е. точку $V^*$. Эта точка отлична от нуля в силу свободы $\mathcal{D}$ и определена с точностью до умножения на константу. Поэтому корректно определено отображение $X\to(V^*-\{0\})/K^*=\mathbf{P}(V^*)$, которое и есть $\varphi_{\mathcal{D}}$. Если $s_0, \ldots, s_n$ — базис $V$, то $\varphi_{\mathcal{D}}(x)=(s_0(x), \ldots, s_n(x))$.

Примеры. а) Полная линейная система $|mH|$ гиперповерхностей (а точнее, эффективных дивизоров) степени $m$ на проективном пространстве $\mathbf{P}(V)$ параметризуется точками пространства $\mathbf{P}(\mathrm{Sym}^m V^*)$. Отображение $\varphi_{|mH|}: \mathbf{P}(V)\to\mathbf{P}(\mathrm{Sym}^m V)$ есть не что иное, как отображение Веронезе (см. § 5 главы 1).

б) Вложение Сегре задается полной линейной системой дивизоров типа (1, 1) на $\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m$.

в) Вложение Плюккера $G(k, V)\to\mathbf{P}(\Lambda^k V)$ задается полной линейной системой $|\Sigma|$ (см. пример 4 из п. 3.5).

**4.4. Обильные системы.** Линейная система $D$ называется *очень обильной*, если она свободна и задает вложение $X$ в $\mathbf{P}^n$. Обратимый пучок $L$ называется *очень обильным*, если такова полная линейная система $|L|$. Таким образом, очень обильная система состоит из всех гиперплоских сечений $X$ при некотором вложении $X\hookrightarrow\mathbf{P}^n$. Гиперплоскостей в каком-то смысле действительно много; во всяком случае, они разделяют точки (в том числе бесконечно близкие). Обратно, если линейная система $D=(D_s)$ разделяет точки, то $\varphi_D$ вложение. В самом деле, $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ есть не что иное, как базисная подсхема линейной системы $D-x$ (т. е. подсистемы тех $D_s$, что $x\in D_s$), а она по предположению совпадает с $\{x\}$. Теперь можно применить п. 5.2 главы 2.

Дивизор $D$ называется *обильным*, если при некотором $m>0$ очень обильна система $|mD|$. Имеется численный критерий *обильности Накаи — Мойшезона*.

Теорема. Дивизор $D$ на полном многообразии $X$ обилен тогда и только тогда, когда для любого неприводимого подмногообразия $Y\subset X$ выполнено $(D^r\cdot Y)>0$, где $r=\dim Y$.

Определение индексов пересечения $(D^r\cdot Y)$ будет дано в § 6; доказательство теоремы можно найти в [41], [45], [46]. В частности, на кривой дивизор обилен, если его степень положительна. На полной гладкой поверхности $S$ дивизор $D$ обилен, если $(D^2)>0$ и для любой кривой $C\subset S$ $(D.C)>0$.

**4.5. Линейные системы и рациональные отображения.** Даже если линейная система $D$ имеет базисные точки, она задает отображение $X-B(D)$ в $\mathbf{P}(V^*)$, которое можно рассматривать как рациональное отображение $X$ в $\mathbf{P}(V^*)$ (если, конечно, $B(D)\neq$

$\neq X$, т. е. система $D$ непуста).

Пример 1. Пусть $D=|H-p|$ — линейная система гиперплоскостей в $\mathbf{P}^n$, проходящих через точку $p\in\mathbf{P}^n$. Отображение $\varphi_D:\mathbf{P}^n-\{p\}\to\mathbf{P}^{n-1}$ есть не что иное, как линейная проекция с центром в $p$.

Пример 2. Рассмотрим линейные системы коник на $\mathbf{P}^2$.

а) Пусть $D=|2H-a|$ — система коник, проходящих через точку $a$. Ее размерность равна 4 (всех коник — пятимерное семейство, прохождение через точку накладывает одно условие), поэтому $\varphi_D$ отображает $\mathbf{P}^2-\{a\}$ (или раздутие $\widetilde{\mathbf{P}}_a^2$) в $\mathbf{P}^4$. Легко понять, что это вложение и что степень образа равна $2\cdot 2-1=3$. Это отображение можно понимать как композицию вложения Веронезе $v:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^5$ и линейной проекции $\mathbf{P}^5\to\mathbf{P}^4$ с центром в точке $v(a)$. Это еще раз показывает, что многообразие секущих к $v(\mathbf{P}^2)$ отлично от $\mathbf{P}^5$ (см. п. 2.3).

б) Пусть $\mathscr{D}=|2H-a-b|$ — система коник, проходящи через точки $a$ и $b$. Она отображает $\mathbf{P}^2-\{a, b\}$ в $\mathbf{P}^3$, и в общем инъективно. В самом деле, если точка $x\in\mathbf{P}^2$ не лежит на прямой $\overline{ab}$, то базисное множество (подсхема) системы $|2H-a-b-x|$ есть $\{a, b, x\}$. Поэтому $\varphi_{\mathscr{D}}$ инъективно в точке $x$. Однако если точка $x$ лежит на прямой $\overline{ab}$, то базисное множество системы $|2H-a-b-x|$ есть $\overline{ab}$, и вся эта прямая отображается в одну точку $p$. Легко понять, что образом $\varphi_{\mathscr{D}}$ будет гладкая квадрика в $\mathbf{P}^3$, и на ней лежат два трансверсальных друг другу семейства прямых, произошедших из пучков прямых $|H-a|$ и $|H-b|$ на $\mathbf{P}^2$. Можно показать, что обратное к $\varphi_{\mathscr{D}}$ отображение — это линейная проекция из точки $p$ и что любая гладкая квадрика в $\mathbf{P}^3$ получается таким образом.

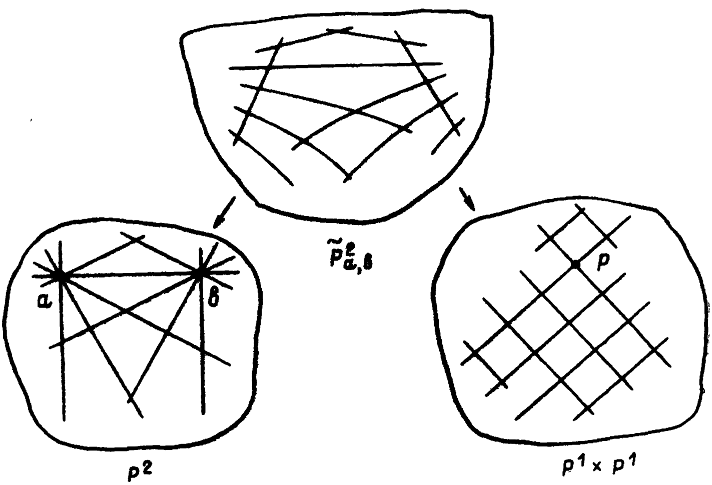



Рис. 18

в) Рассмотрим систему $|2H-a-b-c|$; размерность ее равна двум, а степень — единице. Поэтому она задает бирациональное отображение $\mathbf{P}^2$ в $\mathbf{P}^2$, неопределенное лишь в точках $a$, $b$ и $c$.

Пример 3. Рассмотрим теперь системы кубик на $\mathbf{P}^2$. Размерность системы $|3H|$ всех кубик равна 9. Если взять систему $|3H-a_1-\ldots-a_6|$ кубик, проходящих через шестерку точек $a_1, \ldots, a_6$, находящихся в мало-мальски общем положении, она задает вложение $\tilde{\mathbf{P}}^2_{a_1,\ldots,a_6}$ — раздутия $\mathbf{P}^2$ в этих точках — в $\mathbf{P}^3$ как поверхности 3-й степени. Более детальный анализ дает, что любая гладкая поверхность в $\mathbf{P}^3$ третьей степени получается таким образом.

Пусть $C$ — кубическая кривая в $\mathbf{P}^2$; зафиксируем на ней восемь точек. Линейная система кубик, проходящих через эти точки, имеет размерность $9-8=1$; поэтому все эти кубики пересекаются еще в одной, девятой точке. Так мы приходим к классическому утверждению: если кубика $C''$ проходит через 8 точек пересечения кубик $C$ и $C'$, то она проходит и через девятую точку пересечения $C$ и $C'$.

Следствие (теорема Паскаля). Пары противоположных сторон шестиугольника, вписанного в конику, пересекаются в трех коллинеарных точках.

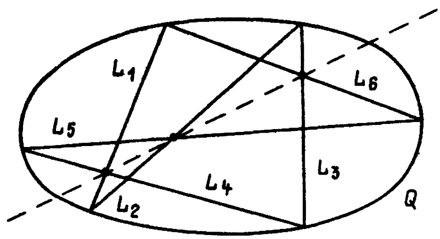



Рис. 19

В самом деле, пусть $Q$ — коника, а $L_1, \ldots, L_6$ — стороны вписанного шестиугольника. Пусть $C=L_1+L_3+L_5$, $C'=L_2+L_4+L_6$ и $C''=Q+L$, где $L$ — прямая, проходящая через точки $p_{14}$ и $p_{36}$, где $p_{ij}=L_i\cap L_j$. Так как $C''$ проходит через 8 точек пересечения $C$ и $C'$, она проходит и через девятую точку $p_{25}$.

В качестве другого применения можно получить ассоциативность группового закона на кубике (см. п. 3.6). Многочисленные примеры линейных систем можно найти в [32, гл. 4 и 5.] Классический прием изучения алгебраических многообразий и их классификации состоит в использовании т. н. плюриканонических (рациональных) отображений $X \dashrightarrow \mathbf{P}^N$, заданных кратностями канонической линейной системы $|\omega_X^{\otimes n}|$ (см. [45]). Среди спектра возможных ситуаций приведем лишь крайние — многообразия общего типа ($\omega_X$ обилен) и многообразия Фано ($\omega_X^{-1}$ обилен).

**4.6. Пучки.** *Размерностью линейной системы* $(\mathcal{D}_s)$, $s \in \mathbf{P}(V)$, называется размерность ее базы $\mathbf{P}(V)$. Линейная система размерности один называется *пучком* (pencil); она задается отображениями на $\mathbf{P}^1$. Слои этого отображения можно отождествить с дивизорами $\mathcal{D}_s$.

Пучками издавна пользовались, чтобы расслаивать многообразия на подмногообразия на единицу меньшей размерности и изучать их индуктивно. Простейший способ построения пучка на проективном многообразии $X \subset \mathbf{P}$ такой. Возьмем прямую $l$ в двойственном пространстве $\mathbf{P}^*$; она и задает пучок гиперплоских сечений на $X$. Обычно стараются пучок выбрать так, чтобы его члены $X \cap H_s$, $s \in l$, были попроще.

Пусть, например, $X$ — гладкое и $X^* \subset \mathbf{P}^*$ — многообразие, двойственное к $X$ (см. § 1). Если прямая $l$ не пересекает $X^*$, то все члены $X \cap H_s$ гладкие. Как мы знаем из § 1, такая идеальная ситуация бывает редко; как правило, $X^*$ — гиперповерхность, $l$ пересекает $X^*$ и среди слоев пучка встречаются особые. Однако если прямая $l$ трансверсально пересекает $X^*$, особенности $X \cap H_s$ будут простейшие (см. п. 1.3). Такие пучки называются *пучками Лефшеца* и издавна служат мощным средством индуктивного исследования многообразий (см. [27], [40]); можно сказать, что это аналог теории Морса.

**4.7. Линейная и проективная нормальность.** Пусть $X \subset \mathbf{P}$ — проективное многообразие. Ограничивая на $X$ линейную систему $|mH| = |\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(m)|$, мы получаем на $X$ линейную систему $L_X(m)$. Более точно, эта система задается образом гомоморфизма ограничения

$$H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(m)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(m)).$$

В общем случае этот гомоморфизм не сюръективный, т. е. система $L_X(m)$ не полна. Однако при больших $m$ система $L_X(m)$ полна (см., например, [41], [53], [56]).

Заметим, что предложение п. 2.3 дает оценку сверху на размерность $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$: она не превосходит $\dim X + \deg X$. Аналогично можно оценить размерность $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$, получив заодно другое доказательство конечномерности этого пространства.

Определение. Проективное многообразие $X \subset \mathbf{P}$ называется *линейно нормальным,* если система $L_X(1)$ полна.

Например, любая гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$ $(n \geqslant 2)$ линейно нормальна. Линейно нормальна и рациональная нормальная кривая $v_n(\mathbf{P}^1) \subset \mathbf{P}^n$ (она потому и называется нормальной). Проектируя многообразие в проективное пространство меньшей размерности, мы получаем линейно ненормальное многообразие. Таким образом линейная нормальность означает, что многообразие лежит в $\mathbf{P}$ наиболее свободным образом. Отвечая на вопрос Хартсхорна [42], Ф. Л. Зак [5] получил следующий факт:

Теорема. Пусть $X\subset\mathbf{P}^n$ — гладкое многообразие и $3\dim X>2(n-1)$. Тогда $X$ линейно нормально.

Более сильное ограничение накладывает требование проективной нормальности. Пусть $X=\mathbf{P}(C)$, где $C$ — конус в $K^{n+1}$. Многообразие $X$ называется *проективно нормальным*, если конус $C$ является нормальным многообразием (т. е. кольцо $K[C]$ нормально). Если многообразие $X$ нормально, это эквивалентно полноте всех систем $L_X(m)$ (или линейной нормальности всех образов Веронезе $v_m(X)\subset\mathbf{P}_m^N$). Снова гладкая гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$ проективно нормальна. Вот еще интересный

Пример. Пусть $G$ — полупростая алгебраическая группа, $V$ — неприводимое линейное представление группы $G$ со старшим весом $\Lambda$, $v\in V$ — старший вектор. Тогда множество $Gv\cup\{0\}=C$ — замыкание орбиты старшего вектора — является конусом. В [2] показано, что конус $C$ нормален, так что многообразие $\mathbf{P}(C)\subset\mathbf{P}(V)$ проективно нормально. В частности, проективно нормально многообразие Грассмана при вложении Плюккера.

## § 5. Алгебраические циклы

**5.1. Определения.** Перейдем теперь к фигурам коразмерности больше 1. Уже на примере дивизоров мы видели, что часто удобно иметь дело с подмногообразиями, снабженными «кратностями». Классики называли такие объекты виртуальными многообразиями; сейчас говорят об алгебраических циклах, подчеркивая аналогию с гомологиями.

*Алгебраическим циклом* размерности $k$ (или $k$-циклом) на многообразии $X$ называется конечная сумма $\alpha=\sum n_i[V_i]$, где $n_i\in\mathbf{Z}$, а $V_i$ — неприводимые $k$-мерные подмногообразия в $X$. Цикл $\alpha$ *эффективен*, если все $n_i\geqslant 0$. *Носитель цикла* $\alpha$ — объединение $V_i$ с ненулевыми $n_i$. Циклы можно складывать, и группа $k$-циклов на $X$ обозначается $\mathscr{Z}_k(X)$.

Как правило, мы будем считать, что $X$ неприводимо. Если $n=\dim X$, то группа $\mathscr{Z}_n(X)$ изоморфна $\mathbf{Z}$ и порождается $[X]$; $\mathscr{Z}_{n-1}(X)$ совпадает с группой $\mathscr{Z}(X)$ дивизоров Вейля.

**5.2. Прямой образ цикла.** Циклы — ковариантные объекты. Точнее, если $f:X\to Y$ собственный морфизм, то определен гомоморфизм прямого образа

$$f_*:\mathscr{Z}_k(X)\to\mathscr{Z}_k(Y).$$

По аддитивности, достаточно определить $f_*[V]$ для неприводимого $k$-мерного подмногообразия $V\subset X$. Если $\dim f(V)<k$, то $f_*[V]=0$. Если же $\dim f(V)=k$, то $f_*[V]=d\cdot[f(V)]$, где $d=[K(V):K(f(V))]$ — степень $V$ над $f(V)$. Разумеется, если $g:Y\to Z$ также собственный, то $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$.

Напомним, что в п. 3.2 с каждым дивизором Картье $\mathscr{D}$ на нормальном $n$-мерном многообразии $X$ был связан $(n-1)$-цикл $[\mathscr{D}]$. Теперь это можно сделать для любого многообразия $X$, полагая $[\mathscr{D}]=\pi_*[\pi^*(\mathscr{D})]$, где $\pi: X^н \to X$ — морфизм нормализации.

**5.3. Рациональная эквивалентность циклов.** Пусть $S$ — гладкая неприводимая кривая. *Семейством $k$-циклов* на $X$ с базой $S$ называется $(k+1)$-цикл $\alpha$ на $X\times S$, носитель которого доминантно проектируется на $S$.

Такой цикл $\alpha$ на $X\times S$ называется семейством, потому что для каждой точки $s\in S$ он определяет $k$-цикл $\alpha_s$ на $X$ (называемый *специализацией* $\alpha$ в точке $s$), который зависит от $s$ «непрерывным образом». При определении специализации можно считать $\alpha=[V]$, где $V$ — неприводимое подмногообразие в $X\times S$, доминирующее $S$. Рассмотрим точку $s\in S$ как дивизор Картье на $S$ и положим $[V]_s=p_*[q^*(s)]$, где $p$ и $q$ — проекции $V$ на $X$ и $S$. Отметим, что если $\alpha$ эффективен, то специализации $\alpha_s$ тоже эффективны.

Циклы называются *алгебраически эквивалентными,* если они включаются в семейство циклов; если при этом базисная кривая $S$ рациональна (обычно это $\mathbf{A}^1$ или $\mathbf{P}^1$), говорят, что циклы *рационально эквивалентны.* Легко убедиться, что рациональная эквивалентность $\sim$ действительно отношение эквивалентности и согласована со сложением в $\mathscr{Z}_k(X)$. Фактор-группа $\mathscr{Z}_k(X)/\sim$ называется *группой классов $k$-циклов* на $X$ и обозначается $A_k(X)$.

Пример. Покажем, что $A_k(\mathbf{A}^n)=0$ при $k<n$ (ср. с примером 1 из п. 3.5). Пусть $V$ — подмногообразие в $\mathbf{A}^n$ размерности $<n$. Сдвигая $V$, можно считать, что $0\notin V$. Гомотетия $V_t=t^{-1}V$ при $t\to 0$ вытесняет $V_t$ на бесконечность, так что $[V]\sim 0$.

Предложение. Гомоморфизм прямого образа согласуется с рациональной эквивалентностью и задает $f_*: A_k(X)\to A_k(Y)$.

В самом деле, пусть $f: X\to Y$ — собственный морфизм, и $\alpha$-семейство циклов на $X$ с базой $S$. Тогда $\beta=(f\times id)_*\alpha$-семейство циклов на $Y$ с той же базой, и остается проверить, что $\beta_s=f_*(\alpha_s)$ для любой точки $s\in S$. Вспоминая определение специализации цикла, мы сводим все к так называемой формуле проекции.

Формула проекции. Пусть $g: V\to W$ — доминантный морфизм многообразий одной размерности, $\mathscr{D}$ — дивизор Картье на $W$. Тогда

$$g_*[g^*(\mathscr{D})]=\deg(g)\cdot[\mathscr{D}].$$

При доказательтве можно выбрасывать из $W$ подмножества коразмерности $\geqslant 2$, поэтому $g$ можно считать конечным. Нормализуя $V$ и $W$, можно считать их нормальными и даже гладкими. Но тогда $g$ локально свободный морфизм (см. предложение п. 6.6 главы 2) и формула проекции следует из принципа постоянства.

Степенью 0-цикла $\alpha=\Sigma n_i[x_i]$ называется целое число $\deg(\alpha)=\Sigma n_i$ (ср. с п. 3.6). Как следствие предыдущего предложения или из теоремы о постоянстве мы получаем, что на полном многообразии степень 0-цикла сохраняется при рациональной или алгебраической эквивалентности.

**5.4. Теорема о вырезании.** Пусть $Y$ — подмногообразие в $X$. Тогда точна последовательность

$$A_k(Y)\xrightarrow{i_*}A_k(X)\xrightarrow{j^*}A_k(X-Y)\to 0,$$

где $i$ — вложение $Y\subset X$, а $j^*$ — ограничение цикла на $X-Y$.

Эта последовательность (ср. с п. 3.5) позволяет находить $A_*$ для некоторых простых многообразий. Например, по индукции легко показать, что $A_k(\mathbf{P}^n)$ — свободная абелева группа, порожденная классом $k$-плоскости $L^k$. Нетривиальность $m[L^k]$ следует из теории степени.

Аналогично можно вычислять $A_*$ для произведений проективных пространств, и, вообще, для многообразий, обладающих «клеточным разложением». Последнее означает наличие фильтрации

$$X=X_n\supset X_{n-1}\supset\ldots\supset X_0=\varnothing$$

замкнутыми подмножествами, причем каждое $X_i-X_{i-1}$ представляет объединение нескольких экземпляров $\mathbf{A}^i$ («клеток»). Тогда $A_k(X)$ порождается замыканиями $k$-мерных клеток. Вот наиболее важный

Пример. Пусть $G=G(k,V)$ — многообразие Грассмана $k$-мерных векторных подпространств $n$-мерного пространства $V$. Для построения клеточного разложения $G$ зафиксируем флаг подпространств $0=V_0\subset V_1\subset\ldots\subset V_n=V$, $\dim V_i=i$. Для каждой последовательности целых чисел $a=(a_1,\ldots,a_k)$, такой, что $n-k\geqslant a_1\geqslant\ldots\geqslant a_k\geqslant 0$, положим

$$W_a=\{L\in G,\ \dim(L\cap V_{n-k+i-a_i})=i\}.$$

Можно проверить, что $W_a$ изоморфно аффинному пространству размерности $k(n-k)-(a_1+\ldots+a_k)$; его замыкание в $G$

$$\overline{W}_a=\{L\in G,\ \dim(L\cap V_{n-k+i-a_i})\geqslant i\}$$

называется *многообразием Шуберта* типа $a$. Клетки $W_a$ покрывают $G$ и $A_*(G)$ порождается (причем свободно) *циклами Шуберта* $\sigma_a=[\overline{W}_a]$ (см. [29], [32]).

Например, цикл $\overline{W}_{(1,0,\ldots,0)}$ имеет коразмерность 1 в $G$ и состоит из тех $L$, для которых $L\cap V_{n-k}\neq 0$, так что это просто дивизор $\Sigma$ из примера 4 § 3.

**5.5. Пересечения циклов с дивизорами.** Важнейшей структурой на циклах является операция пересечения с дивизорами и действие $\mathrm{Pic}(X)$ на $A_*(X)$. Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на $X$, а $[V]$ — простой $k$-цикл на $X$. Ограничение $\mathscr{L}|_V$ пучка $\mathscr{L}$ на $V$ является обратимым пучком на $V$ и потому определяет класс дивизоров Вейля $[\mathscr{L}|_V]$ на $V$, который обозначается $\mathscr{L}\cap[V]$.

Продолжая по линейности, получаем билинейное действие

$$\cap : \mathrm{Pic}(X)\times\mathscr{Z}_k(X)\to A_{k-1}(X).$$

Для дивизора $\mathscr{D}$ на $X$ мы пишем также $\mathscr{D}\cap[V]$. вместо $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})\cap[V]$.

Более точно, если подмногообразие $V$ не содержится в носителе $\mathscr{D}$, можно указать конкретный цикл $\mathscr{D}\cdot[V]=[\mathscr{D}|_V]$ в группе $\mathscr{Z}_{k-1}(V\cap\mathrm{supp}\mathscr{D})$. Если же $V\subset\mathrm{supp}\mathscr{D}$, $\mathscr{D}\cdot[V]$ определен лишь с точностью до рациональной эквивалентности.

Вот важнейшие свойства действия $\mathrm{Pic}(X)$ на циклы:

а) если $\alpha\sim 0$, то $\mathscr{L}\cap\alpha=0$; поэтому определено действие $\mathrm{Pic}(X)\times A_k(X)\to A_{k-1}(X)$;

б) если $f: X\to Y$ — собственный морфизм, а $\mathscr{L}\in\mathrm{Pic}(Y)$, то $f_*(f^*\mathscr{L}\cap\alpha)=\mathscr{L}\cap f_*(\alpha)$ **(формула проекции)**;

в) $\mathscr{L}\cap(\mathscr{L}'\cap\alpha)=\mathscr{L}'\cap(\mathscr{L}\cap\alpha)$ для $\mathscr{L},\mathscr{L}'\in\mathrm{Pic}(X)$.

Главную роль при их выводе играет утверждение $\mathscr{D}\cdot[\mathscr{D}']=\mathscr{D}'\cdot[\mathscr{D}]$ для дивизоров $\mathscr{D},\mathscr{D}'$ на $X$. Эта формула непосредственно проверяется, когда $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ пересекаются просто, и очевидна при $\mathscr{D}=\mathscr{D}'$. Общий случай сводится к этим двум посредством раздутия $\mathscr{D}\cap\mathscr{D}'$ на $X$.

**5.6. Классы Сегре векторных расслоений.** Не только линейные, но и любые локально свободные векторные расслоения порождают серию операторов на $A_*(X)$. Пусть $p: E\to X$ — векторное расслоение ранга $e+1$, $q: \mathbf{P}_X(E)\to X$ — соответствующее проективное расслоение с тавтологическим пучком $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}_X(E)$. Морфизм $q$ локально тривиальный со слоем $\mathbf{P}^e$, и можно определить гомоморфизм

$$q^* : A_k(X)\to A_{k+e}(\mathbf{P}_X(E)),$$

полагая $q^*[V]=[q^{-1}(V)]$ для подмногообразий $V\subset X$. Определим теперь для целого $i\geqslant -e$ операторы

$$s_i(E) : A_k(X)\to A_{k-i}(X),$$

полагая $s_i(E)\cap\alpha=q_*(\mathcal{O}(1)^{e+i}\cap q^*(\alpha))$, где $\mathcal{O}(1)^{e+i}$ означает итерированное действие обратимого пучка $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}_X(E)$. Операторы $s_i(E)$ называются *классами Сегре* $E$. Подробнее об их свойствах и о построении на их основе классов Чжэня см. [29]; нам же понадобятся следующие простые замечания.

Из соображений размерности $s_i(E)=0$ при $i<0$; почти столь же очевидно, что $s_0(E)$ — тождественный оператор на $A_*(X)$. Делается это так. Надо проверить, что $s_0(E)\cap[V]=[V]$; ограничивая $E$ на $V$, можно считать $X=V$. Заменяя $X$ открытым подмножеством, можно считать расслоение $E$ тривиальным. Остается заметить, что $e$-кратное пересечение гиперплоскости в $\mathbf{P}^e$ есть точка.

Следствие. Гомоморфизм $q^*: A_k(X) \to A_{k+e}(\mathbf{P}_X(E))$ инъективен.

**5.7. Принцип расщепления.** Этот принцип позволяет сводить вопросы о векторных расслоениях к линейным расслоениям. Из § 5 главы 1 мы знаем, что на $\mathbf{P}_X(E)$ существует точная последовательность векторных расслоений $0 \to S \to q^*E \to Q \to 0$. Поднимаясь на $P_{\mathbf{P}_X(E)}(Q)$, мы получаем линейное подрасслоение у $Q$ и т. д. В конце концов мы получаем морфизм $f: X' \to X$ такой, что:

а) гомоморфизм $f^*: A_*X \to A_*X'$ инъективен (см. предыдущее следствие),

б) векторное расслоение $f^*E$ обладает флагом подрасслоений $f^*E = E_{e+1} \supset E_e \supset \ldots \supset E_1 \supset E_0 = 0$ с линейными факторами $E_i/E_{i-1}$.

Теорема. Пусть $p: E \to X$ — векторное расслоение ранга $e+1$. Тогда гомоморфизм $p^*: A_k(X) \to A_{k+e+1}(E)$ биективен.

Инъективность $p^*$ устанавливается в три шага. Если $E$ — линейное расслоение, то пересечение $p^*(\alpha)$ с нулевым сечением (которое является дивизором на $E$) возвращает нас к $\alpha$. Если $E$ обладает флагом подрасслоений, рассуждаем по индукции. Наконец в общем случае используется принцип расщепления.

Установим теперь сюръективность $p^*$, т. е. что любой цикл $[V]$ на $E$ эквивалентен $p^*(\alpha)$. Пользуясь вырезанием (и уменьшая, если надо, $X$), можно считать, что $V$ не пересекается с некоторым сечением $E$. Тогда рассуждая как в случае $\mathbf{A}^n$ (см. п. 5.3), мы выталкиваем $V$ на бесконечность.

Гомоморфизм, обратный к $p^*$, естественно трактовать как пересечение цикла $\beta$ на $E$ с нулевым сечением $E$; это частный случай гомоморфизма Гизина.

## § 6. Теория пересечений

**6.1. Пересечение циклов.** Пусть для простоты $X$ — гладкое $n$-мерное многообразие, $Y$ и $Z$ — подмногообразия $X$. Как было показано в § 6 главы 2, $\dim(Y \cap Z) \geqslant \dim Y + \dim Z - n$. Если здесь равенство, т. е. многообразия $Y$ и $Z$ пересекаются правильно, теория пересечений приписывает каждой компоненте $W$ пересечения $Y \cap Z$ некоторую кратность $i(W; Y, Z)$ и называет пересечением $Y$ и $Z$ цикл $Y \cdot Z = \sum_W i(W; Y, Z) \cdot [W]$. В общем случае, когда $Y$ и $Z$ пересекаются неправильно, предлагается «пошевелить» их, заменив рационально эквивалентными циклами $Y'$ и $Z'$, которые пересекаются уже правильно. В этом случае $Y \cdot Z$ определено уже как класс циклов. Такое пересечение превращает $A_*(X)$ в кольцо, называемое кольцом Чжоу.

До недавнего времени эти два шага делались отдельно и выглядели достаточно громоздко. Фултону в [29] удалось добиться замечательного упрощения в основах теории пересечения, и мы следуем ему в этом и предыдущем параграфах. Ключевая идея состоит в том, что многообразие $X$ в «окрестности» своего подмногообразия $Y$ устроено как нормальный конус $C_{Y/X}$ (§ 7 главы 1).

**6.2. Деформация к нормальному конусу.** Предположим сначала, что $Y$ — точка, а $X$ вложено в аффинное пространство $\mathbf{A}^n$ так, что $Y$ помещается в начале координат. Для каждого $t \in K^*$ положим $X_t = t^{-1} \cdot X$, т. е. $X_t$ получено в результате растяжения $X$ в $t^{-1}$ раз. Так получается семейство подмногообразий $X_t$, $t \in K - \{0\}$. Оказывается, что при $t \to 0$ это семейство имеет предел $X_0$, который есть в точности касательный конус $C_0 X$.

Эта конструкция может быть глобализована и в результате дает семейство вложений $(Y_t \subset X_t)$, $t \in \mathbf{A}^1$, такое что при $t \neq 0$ пара $(Y_t, X_t)$, изоморфна $(Y, X)$, а при $t = 0$ изоморфна вложению нулевого сечения в нормальный конус $C_{Y/X}$. Делается это крайне просто.

Пусть $X \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1$ — тривиальное семейство и $\widetilde{X \times \mathbf{A}^1}$ — раздутие $X \times \mathbf{A}^1$ вдоль подмногообразия $Y \times \{0\}$. Слой $\widetilde{X \times \mathbf{A}^1}$ над $t = 0$ состоит из двух компонент: $\widetilde{X}$ — раздутия $X$ вдоль $Y$ и замыкания нормального конуса $\overline{C}_{Y/X}$. Положим теперь $\mathscr{X} = \widetilde{X * \mathbf{A}^1} - \widetilde{X}$ и пусть $\rho: \mathscr{X} \to \mathbf{A}^1$ — проекция на $\mathbf{A}^1$. Слои $\rho$ над $t \neq 0$ изоморфны $X$, в то время как слой $\mathscr{X}_0 \simeq C_{Y/X}$. Подмногообразие $Y$ вкладывается в каждый слой $\mathscr{X}_t$, причем вложение $Y$ в $\mathscr{X}_0 = C_{Y/X}$ есть вложение нулевого сечения (см. рис. 20).

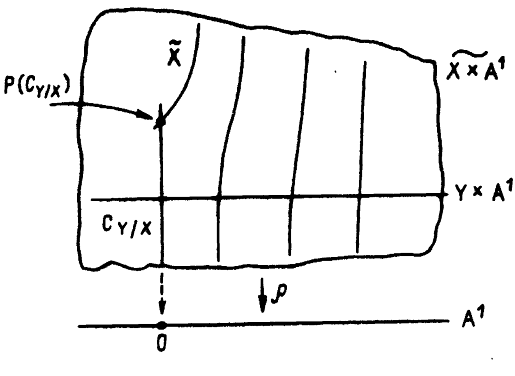



Рис. 20

Вообще, пусть $V$ — подмногообразие в $X$; проделывая с парой $(V, V\cap Y)$ ту же операцию, мы получаем подмногообразие $\mathscr{V}\subset\mathscr{X}$; если угодно, это замыкание $V\times(\mathbf{A}^1-\{0\})$ в $\mathscr{X}$. Пусть $\rho_V:\mathscr{V}\to\mathbf{A}^1$ — индуцированный морфизм; слой $\rho_V$ над 0 изоморфен $C_{V\cap Y/V}$. Для нас важно, что его можно понимать как цикл $[\rho_V^*(0)]$ на $\mathscr{X}_0\cap\mathscr{V}$; этот цикл называется *специализацией* $V$ в нормальный конус $C_{Y/X}$ и обозначается $\sigma[V]$. Отметим, что $\sigma[V]$ — эффективный цикл.

Продолжая по линейности, мы получаем гомоморфизм специализации $\sigma: Z_k(X)\to Z_k(C_{Y/X})$. Специализация согласована с рациональной эквивалентностью и дает $\sigma: A_k(X)\to A_k(C_{Y/X})$.

**6.3. Гомоморфизм Гизина.** Предположим теперь, что $Y$ — гладкое подмногообразие гладкого многообразия $X$. Тогда расслоение нормальных конусов $C_{Y/X}$ превращается в нормальное расслоение $N=N_{Y/X}$. Вспоминая изоморфизм $p^*: A_k(Y)\to A_{k+r}(N)$ п. 5.7, где $r$ — коразмерность $Y$ в $X$, мы можем определить гомоморфизм

$$A_k(X)\xrightarrow{\sigma} A_k(N_{Y/X})\xrightarrow{(p^*)^{-1}} A_{k-r}(Y).$$

Он называется *гомоморфизмом Гизина* вложения $i: Y\to X$ и обозначается $i^*: A_k(X)\to A_{k-r}(Y)$; его действие интерпретируется как пересечение цикла на $X$ с $Y$.

Отметим, что, хотя цикл $\sigma[V]$ эффективен на $N$, его пересечение с нулевым сечением $N$ может оказаться неэффективным (см. доказательство теоремы п. 5.7). Однако если $V$ правильно пересекает $Y$, пересечение $Y\cdot[V]$ определено как эффективный цикл на $Y\cap V$. Это значит, что $Y\cdot[V]$ имеет вид $\Sigma m_W[W]$, где $W$ пробегает неприводимые компоненты $Y\cap V$. Целые положительные числа $m_W$ и называются *кратностями пересечения* $Y$ и $V$ вдоль $W$.

**6.4. Кольцо Чжоу.** Перейдем теперь к пересечению произвольных циклов, но на гладком $n$-мерном многообразии $X$; мы ограничимся пересечением двух циклов $\alpha$ и $\beta$. Здесь снова используется редукция к диагонали. Пусть $\delta: X\to X\times X$ — диагональное вложение, и диагональ гладкая на гладком $X\times X$. Поэтому определен гомоморфизм Гизина $\delta^*$, и можно положить $\alpha\cdot\beta=\delta^*(\alpha\times\beta)$.

Здесь удобно перейти к коразмерностям, положив $A^p=A_{n-p}$ и $A^*(X)=\bigoplus_p A^p(X)$. При пересечении циклов коразмерности складываются, и $A^*(X)$ является градуированым коммутативным ассоциативным кольцом, называемым *кольцом Чжоу*. В каком-то смысле оно аналогично кольцу когомологий и обладает похожими функциональными свойствами.

Пусть $f: X\to Y$ — морфизм гладких многообразий. Для класса циклов $\alpha\in A^p(Y)$ можно пересечь $X\times\alpha$ с графиком $f$ в $X\times Y$;

полученный класс циклов $f^*(\alpha)\in A^p(X)$ называется *обратным образом* $\alpha$ при $f$. Обратный образ коммутирует с пересечениями, т. е. является гомоморфизмом градуированных колец

$$f^*: A^*(Y)\to A^*(X).$$

Формула проекции связывает $f^*$ с $f_*$: если $f$ — собственный, то $f_*(f^*(\alpha)\cdot\beta)=\alpha\cdot f(\beta)$. В частности, если многообразие $X$ полное и гладкое, а циклы $\alpha$ и $\beta$ имеют дополнительную размерность, то степень 0-цикла $\alpha\cdot\beta$ называется *индексом пересечения* $\alpha$ и $\beta$ на $X$ и обозначается $(\alpha\cdot\beta)_X$ или $(\alpha\cdot\beta)$.

Важный частный случай представляют пересечения дивизоров. Если $n$ эффективных дивизоров $\mathscr{D}_1,\ldots,\mathscr{D}_n$ на $X$ имеют точку $P$ изолированной точкой $\mathscr{D}_1\cap\ldots\cap\mathscr{D}_n$, то кратность пересечения $\mathscr{D}_1,\ldots,\mathscr{D}_n$ в $P$ равна $\dim\mathcal{O}_{X,P}/(f_1,\ldots,f_n)$, где $f_i$ — локальные уравнения $\mathscr{D}_i$ в точке $P$. Надо сказать, что пересечение $n$ дивизоров можно определить на любом (не обязательно главном) многообразии $X$ как пересечение диагонали в $X^n$ с произведением $\mathscr{D}_1\times\ldots\times\mathscr{D}_n$. В самом деле, $\Pi\mathscr{D}_i$ — локально полное пересечение в $X^n$ и нормальный конус снова будет нормальным расслоением, так что можно рассуждать как в п. 6.3. Заметим, впрочем, что если $X$ не обладает свойством Коэна—Маколея, кратность пересечения $\mathscr{D}_1,\ldots,\mathscr{D}_n$ в точке $P$ уже отличается от размерности $\mathcal{O}_{X,P}/(f_1,\ldots,f_n)$.

Приведем два примера вычисления кольца Чжоу.

**6.5. Кольцо Чжоу проективного пространства.** *Степенью* $k$-цикла $\alpha$ на $\mathbf{P}^n$ назовем индекс пересечения его с $[H]^k$; это определение согласуется с определением степени § 2. Из п. 5.4 видно, что $\alpha\sim\deg(\alpha)[L^k]$, так что кольцо Чжоу $A^*(\mathbf{P}^n)$ изоморфно $\mathbf{Z}[\zeta]/(\zeta^{n+1})$, где $\zeta\in\mathbf{A}^1(\mathbf{P}^n)$ — класс гиперплоскости $[H]$. В частности, мы получаем общую формулировку *теоремы Безу*: если $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ — циклы коразмерности $p_1,\ldots,p_r$ и $\Sigma p_i\leqslant n$, то

$$\deg(\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_r)=\deg(\alpha_1)\cdot\ldots\cdot\deg(\alpha_r).$$

Аналогично легко показать, что

$$A^*(\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^m)=\mathbf{Z}[\zeta,\xi]/(\zeta^{n+1},\ \xi^{m+1}),$$

где $\zeta,\xi$ — классы гиперплоскости в $\mathbf{P}^n$ и $\mathbf{P}^m$. Например, диагональ $\Delta$ в $\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^n$ записывается как $\zeta^n+\zeta^{n-1}\xi+\ldots+\xi^n$, откуда $(\Delta.\Delta)=n+1$. Или пусть $I\subset\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^{n*}$ — дивизор инциденции, $I=\{(x,H),\ x\in H\}$. Тогда в кольце Чжоу на $\mathbf{P}\times\mathbf{P}^*$ мы имеем $[I]\sim\zeta+\xi$, так что $(I^{2n})=\binom{2n}{n}$.

Вычисления колец Чжоу проективизированных расслоений и раздутий гладких многообразий см. в [9], [29].

**6.6. Кольцо Чжоу грассманиана.** Пусть $G=G(k,n)$ — многообразие Грассмана. Как показано в п. 5.4, $A^*(G)$ порождается классами циклов Шуберта $\sigma_a$. Имеются изящные формулы умножения циклов $\sigma_a$ (см. [29], [32], [43]). В частности, $\sigma_a$ полиномиально выражаются через циклы $\sigma_{(a,0,\ldots,0)}$, которые называются специальными. Мы приведем здесь лишь простейшую формулу пересечения циклов дополнительной размерности. Для набора $a=(a_1,\ldots,a_k)$, как в п. 5.4, обозначим через $a^*$ набор $(n-k-a_k,\ldots,n-k-a_1)$. Тогда цикл $\sigma_{a^*}$ имеет дополнительную к $\sigma_a$ размерность, и для двух циклов дополнительной размерности имеем $(\sigma_a, \sigma_b)=\delta_{a,b^*}$.

Остановимся подробнее на простейшем грассманиане $G(2,4)$ — грассманиане прямых в $\mathbf{P}^3$. Здесь есть такие циклы Шуберта:

$\sigma_{1,0}=\sigma_{1,0}(L)=\{l,\ l\cap L\neq\varnothing\}$ состоит из прямых, пересекающих фиксированную прямую $L$; $\dim\sigma_{1,0}=3$.

$\sigma_{2,0}=\sigma_{2,0}(P)=\{l,\ P\in l\}$ состоит из прямых, проходящих через фиксированную точку $P$, $\dim\sigma_{2,0}=2$.

$\sigma_{1,1}=\sigma_{1,1}(H)=\{l,\ l\subset H\}$ состоит из прямых, лежащих в фиксированной плоскости $H$; $\dim\sigma_{1,1}=2$.

$\sigma_{2,1}=\sigma_{2,1}(P, H)=\{l,\ P\in l\subset H\}$ состоит из прямых, лежащих в плоскости $H$ и проходящих через точку $P\in H$; $\dim\sigma_{2,1}=1$.

Пересечения находятся тут легко. Например, если плоскости $H$ и $H'$ различны, циклы $\sigma_{1,1}(H)$ и $\sigma_{1,1}(H')$ трансверсально пересекаются в одной точке — прямой $H\cap H'$, и поэтому $(\sigma_{1,1}^2)=1$. Аналогично $(\sigma_{2,0}^2)=1$ и $(\sigma_{2,0}, \sigma_{1,1})=0$. Найдем теперь $\sigma_{1,0}^2$. Для этого возьмем две прямые $L$ и $L'$, пересекающиеся в точке $P$. Тогда $\sigma_{1,0}(L)\cap\sigma_{1,0}(L')$ состоит из прямых $l$, пересекающих как $L$, так и $L'$. Такая прямая либо лежит в плоскости $\overline{LL'}$, либо проходит через точку $P$. Поэтому $\sigma_{1,0}^2=\sigma_{2,0}+\sigma_{1,1}$ и $(\sigma_{1,0}^4)=2$. Последнее видно также из того, что $G$ — квадрика в $\mathbf{P}^5$ (см. п. 5.7 главы 1), а $\sigma_{1,0}=\Sigma$ — гиперплоское сечение $G$.

**6.7. Пересечения на поверхностях.** Пусть $S$ — гладкая проективная поверхность. Индекс пересечения $A^1(S)\times A^1(S)\to\mathbf{Z}$ является симметричным билинейным спариванием на $A^1(S)$.

Пусть $H$ — класс гиперплоского сечения $S$; тогда $(H\cdot H)=(H^2)>0$. Если кривая $C$ на $S$ достаточно подвижна (т. е. существует эффективный цикл $C'\sim C$, правильно пересекающий $C$), то $(C^2)\geqslant 0$. Однако бывают и такие кривые $C$, для которых $(C^2)<0$. Такими являются, например, исключительные кривые раздутий. Скажем об этом подробнее.

Пусть $\sigma\colon\tilde{S}\to S$ — раздутие поверхности $S$ в точке $p\in S$. Мы знаем, что $\tilde{S}$ — снова гладкая поверхность, и что кривая $E=\sigma^{-1}(p)$ изоморфна $\mathbf{P}^1$. Найдем индекс самопересечения $(E^2)_{\tilde{S}}$. Для этого возьмем кривую $C\subset S$, проходящую через $p$ и гладкую в $p$. Ясно, что $\sigma^*(C)=\tilde{C}+E$, где $\tilde{C}$ — собственный прообраз $C$ (т. е. замыкание в $\tilde{S}$ кривой $\sigma^{-1}(C-\{p\})$). Кривая $\tilde{C}$ трансверсально пересекает $E$ в одной точке (соответствующей касательному направлению $T_pC \subset T_pS$). Так как $\sigma_*(E)=0$, по формуле проекции получаем

$$0=(\sigma_*(E)C)_S=(E\sigma^*(C))_{\tilde{S}}=(E^2)_{\tilde{S}}+(E\tilde{C})_{\tilde{S}},$$

откуда $(E^2)=-1$. В частности, кривую $E$ (или ее кратность) нельзя пошевелить в эффективную кривую на $\tilde{S}$, почему она и называется исключительной. Попутно получаем, что $(\tilde{C}^2)_{\tilde{S}}=$ $=(C^2)_S-1$, так, что при раздутии точки на кривой ее индекс самопересечения уменьшается на единицу (если раздувается гладкая точка на $C$; в общем случае он уменьшается на $\operatorname{mult}_p C$). Поэтому любую кривую можно сделать исключительной, раздувая на ней достаточно много точек.

Можно показать, что если $E$ — кривая на поверхности $S'$, изоморфная $\mathbf{P}^1$ и $(E^2)=-1$, то $E$ можно стянуть в гладкую точку (теорема Кастельнуово). Точнее, существует поверхность $S$, гладкая точка $p$ на ней и изоморфизм $S'$ с $\tilde{S}$ — раздутием $S$ в точке $p$, такой, что $E\simeq\sigma^{-1}(p)$. Например, раздувая две точки на прямой $L$ в $\mathbf{P}^2$, мы получаем кривую $\tilde{L}$ в $\tilde{\mathbf{P}}_{xy}$ с индексом самопересечения $-1$. Стягивая $\tilde{L}$ в точку $p$, мы получаем поверхность $S$, изоморфную квадрике $Q\subset\mathbf{P}^3$. Построенное отображение $\mathbf{P}^2 \dashrightarrow Q$ обратно к линейной проекции $Q \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ из точки $p\in Q$.

Наиболее глубоким фактом о пересечениях на поверхностях является *теорема Ходжа об индексе*. Пусть $\mathcal{D}$ — дивизор на $S$, имеющий нулевой индекс пересечения с гиперплоским сечением $S$. Тогда $(\mathcal{D},\mathcal{D})\leqslant 0$, причем если $(\mathcal{D},\mathcal{D})=0$, то $\mathcal{D}$ принадлежит ядру спаривания. Доказательство можно найти в [32], [41], [45], [53]. Различные следствия этой теоремы, включая доказательство гипотезы А. Вейля для кривых, можно найти в любом курсе, посвященном алгебраическим поверхностям; см. также обзор о когомологиях в 37 томе серии.

## § 7. Многообразие Чжоу

**7.1. Циклы на $\mathbf{P}^n$.** Мы покажем в этом параграфе, что эффективные циклы на $\mathbf{P}^n$ фиксированной размерности и степени параметризуются точками некоторого алгебраического многообразия. Мы уже видели это для многообразий степени 1, которые по определению параметризуются многообразиями Грассмана. По существу, мы видели это для циклов коразмерности 1, которые параметризуются полными линейными системами. Скажем об этом подробнее.

Эффективные дивизоры степени $m$ на проективном пространстве $\mathbf{P}(V)$ образуют линейную систему $S_m=|mH|$, параметризованную точками проективного пространства $\mathbf{P}(\mathrm{Sym}^m V^*)$. Соответствующий дивизор $S_m\subset\mathbf{P}(V)\times\mathbf{P}(\mathrm{Sym}^m V^*)$ задается как дивизор нулей функции $\Phi: V \times \mathrm{Sym}^m V^* \to K$, которая точке $v \in V$ и форме $F \in \mathrm{Sym}^m V^*$ сопоставляет $F(V)$. Эта система универсальна в том смысле, что для любого семейства эффективных дивизоров $(\mathscr{D}_t)$, $t \in T$, на $\mathbf{P}(V)$ степени $m$ существует единственный морфизм $\varphi: T \to \mathbf{P}(\mathrm{Sym}^m V^*)$, такой что $\mathscr{D}_t = (S_m)\varphi(t)$. Конечно, «общий» дивизор из нашей системы будет простой и даже гладкий, однако при $m \geqslant 2$ будут встречаться и дивизоры с кратными компонентами.

Пример 1. Дивизоры степени 2 на прямой $\mathbf{P}^1$ параметризуются точками плоскости $\mathbf{P}^2$. В координатах $T_0$, $T_1$ на $\mathbf{P}^1$ форма степени 2 имеет вид $aT_0^2 + bT_0T_1 + cT_1^2$, и $a$, $b$ и $c$ надо понимать как однородные координаты на $\mathbf{P}^2$. Слившиеся (двойные) точки соответствуют формам с нулевым дискриминантом $b^2 - 4ac$; такие точки в $\mathbf{P}^2$ образуют кривую $C$ второй степени, двойственную к кривой Веронезе. Универсальное семейство $S_2 \to \mathbf{P}^2$ — двулистное накрытие с ветвлением над кривой $\mathbf{C}$. Несложно убедиться, что $S_2 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ и что над $C$ лежит ровно диагональ.

Отметим, что в характеристике 2 уравнение кривой $C$ приобретает вид $b^2 = 0$ и поэтому она является двойной прямой. Это имеет два геометрических следствия. Во-первых, все касательные к конике пересекаются в одной точке. Во-вторых, существует этальное накрытие аффинной плоскости $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 - \Delta) \to (\mathbf{P}^2 - C) = \mathbf{A}^2$ (сравни с примером из п. 1.3).

Пример 2. Дивизоры третьей степени на $\mathbf{P}^1$ параметризуются пространством $\mathbf{P}^3$ форм $aT_0^3 + bT_0^2T_1 + cT_0T_1^2 + dT_1^3$. Накрытие третьей степени $S_3 \to \mathbf{P}^3$ ветвится над поверхностью $W \subset \mathbf{P}^3$, отвечающей дивизорам вида $2P + Q$. Явное уравнение для $W$ такое: $b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd = 0$, откуда $\deg W = 4$. Дивизоры вида $3P$ образуют кривую $C \subset W$ степени 3. Можно показать, что $W$ заметается касательными к $C$.

Пример 3. Дивизоры степени 2 на плоскости $\mathbf{P}^2$, т. е. плоские коники. Они параметризуются точками $\mathbf{P}^5$. Вырожденные коники — это пары прямых, они параметризуются некоторым 4-мерным подмногообразием $W \subset \mathbf{P}^5$. В самом деле, $W$ — это фактормногообразие $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ по действию группы второго порядка, переставляющей сомножители, ибо пары прямых неразличимы между собой. Найдем степень $W$. Для этого возьмем «общий» пучок коник $\overline{QQ'} \subset \mathbf{P}^5$. Коники $Q$ и $Q'$ пересекаются в четырех точках $p$, $q$, $r$ и $s$, и пучок $\overline{QQ'}$ состоит из коник, проходящих через эти четыре точки. Степень $W$ — это число вырожденных коник в этом пучке. Но их ровно три: $\overline{pq} + \overline{rs}$, $\overline{pr} + \overline{qs}$ и $\overline{ps} + \overline{qr}$. Поэтому $\deg W = 3$.

Приведенные коники, т. е. двойные прямые в $\mathbf{P}^2$, параметризуются поверхностью Веронезе $S \subset \mathbf{P}^5$; конечно, $S \subset W$. Более того, как легко видеть, любая хорда к $S$ также целиком лежит в $W$. Это согласуется с примером 2 из п. 2.3.

**7.2. От циклов к дивизорам.** Перейдем теперь к циклам на $\mathbf{P}^n$, степень и коразмерность которых больше 1. Оказывается, их можно превращать в дивизоры на многообразии Грассмана и последние можно параметризовать подмножеством соответствующей полной линейной системы.

Пусть $G=G(k, n+1)$ — многообразие Грассмана, состоящее из $(k-1)$-мерных линейных подмногообразий в $\mathbf{P}^n$, обозначаемых $L$. Обозначим через $\Psi=\{(x, L), x\in L\}$ множество инциденций в $\mathbf{P}^n\times G$. Мы будем понимать $\Psi$ как соответствие из $\mathbf{P}^n$ в $G$, которое точке $x\in\mathbf{P}^n$ сопоставляет множество $\Psi(x)= =\{L, x\in L\}\cong G(k-1, n)$. В частности, любому подмножеству $Z\subset\mathbf{P}^n$ можно сопоставить множество

$$\Psi(Z)=\bigcup_{x\in Z}\Psi(x)=\{L\in G, L\cap Z\neq\varnothing\}.$$

$\Psi(Z)$ замкнуто, если замкнуто $Z$, неприводимо, если таково $Z$, и коразмерность его в $G$ равна 1, если $\operatorname{codim}(Z, \mathbf{P}^n)=k$. Заметим, наконец, что и «степень» $\Psi(Z)$ в $G$ равна $d=\deg Z$. Под «степенью» мы понимаем здесь индекс пересечения $\Psi(Z)$ с 1-мерным циклом Шуберта $\sigma=\sigma_{(n+1-k, \dots, n-k)}$; в этом случае $\Psi(Z)$ линейно эквивалентен $d[\Sigma]$ (см. п. 6.6). В самом деле, пусть $M$ — $k$-мерное линейное многообразие в $\mathbf{P}^n$, трансверсально пересекающее $Z$ в $\deg Z$ точках. Если теперь $\sigma$ — пучок подпространств $L\subset M$, то ровно $\deg Z$ из них пересекается с $Z$ и поэтому $(\Psi(Z)\sigma)_G=d$.

Продолжая по линейности, мы получаем отображение

$$\Psi:\mathscr{Z}_+^r(\mathbf{P}^n)\to\operatorname{Div}_+(G),$$

сохраняющее степень. Мы утверждаем, что $\Psi$ инъективно, т. е. $Z$ восстанавливается по дивизору $\Psi(Z)$. Для этого есть явная формула: $Z=\{x\in\mathbf{P}^n, \Psi(x)\subset\Psi(Z)\}$. Включение $\subset$ очевидно, а включение $\supset$ следует из того, что для каждой точки $x\notin Z$ существует $L\in G$, содержащее $x$ и не пересекающее $Z$.

**7.3. От дивизоров к циклам.** Нам осталось описать образ $\mathfrak{u}$ и показать, что он замкнут в пространстве $\mathbf{P}(H^0(G, \mathcal{O}_G(d)))$, параметризующем все эффективные дивизоры на $G$ степени $d$. Для этого мы с любым эффективным дивизором $\mathscr{D}\subset G$ свяжем множество $Z_{\mathscr{D}}=\{x\in\mathbf{P}^n, \mathfrak{u}(x)\subset\mathscr{D}\}$. Мы утверждаем, что оно замкнуто в $\mathbf{P}^n$. Для этого мы рассмотрим в $\mathbf{P}^n\times G$ многообразие $\Phi=\mathfrak{u}\cap(\mathbf{P}^n\times\mathscr{D})$. Слой $\Phi$ над точкой $x\in\mathbf{P}^n$ изоморфен $\mathfrak{u}(x)\cap\mathscr{D}$, и размерность его $\leqslant\dim\mathfrak{u}(x)=(k-1)(n+1-k)$, причем равна $\dim\mathfrak{u}(x)$ в точности тогда, когда $\mathfrak{u}(x)\subset\mathscr{D}$. По теореме о размерности слоев, примененной к морфизму $\Phi\to\mathbf{P}^n$, мы получаем замкнутость $Z_{\mathscr{D}}=\{x, \dim\Phi(x)\geqslant(k-1)(n+1-k)\}$.

Ясно, что $\mathscr{D}\supset\Psi(Z_{\mathscr{D}})$, и $\mathscr{D}$ принадлежит образу $\Psi$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{D}\doteq\Psi(Z_{\mathscr{D}})$, ибо в этом случае $Z_{\mathscr{D}}$ имеет коразмерность $k$. Так как условие принадлежности образу $\Psi$ носит характер совпадения двух соответствий, это условие выделяет замкнутое подмножество в пространстве всех дивизоров. Детали мы опускаем. Полученное многообразие $S_d^k$, параметризующее циклы степени $d$ и коразмерности $k$ в $\mathbf{P}^n$, называется *многообразием Чжоу*. Вычисление его в некоторых простейших случаях приведено в [15].

**7.4. Циклы на произвольных многообразиях.** Предыдущая конструкция позволяет дать параметризацию эффективных циклов на любом проективном многообразии $X\subset\mathbf{P}^n$. В самом деле, $k$-мерный цикл $Z$ на $X$ можно рассматривать как цикл на $\mathbf{P}^n$. Обратно, если $Z\subset X$, его можно рассматривать как цикл на $X$. Условие $Z\subset X$ можно переписать как $\dim(Z\cap X)\geqslant k$, поэтому циклы, лежащие в $X$, параметризуются замкнутым подмножеством многообразия Чжоу циклов в $\mathbf{P}^n$.

Это очень важное качественное свойство. Получается, что все подмногообразия заданной степени в $X$ параметризуются конечным числом алгебраических многообразий. Эта теорема конечности играет важную роль в арифметической теории многообразий.

Более удовлетворительная и современная конструкция многообразия Чжоу дана в [17]. Близко к нему и понятие схемы Гильберта [4].

**7.5. Исчислительная геометрия.** Она занимается нахождением числа геометрических фигур, удовлетворяющих заданным геометрическим условиям [7]. Обычно такие задачи сводятся к вычислению индексов пересечений на многообразиях, параметризующих такие фигуры. Проиллюстрируем ее задачи и методы на трех примерах: бесчисленное количество других примеров можно найти в [32], [43], [47], [59].

Первый пример совсем простой: даны четыре прямые в $\mathbf{P}^3$, находящиеся в «общем» положении; сколько прямых пересекает их? Прямые в $\mathbf{P}^3$ параметризуются многообразием Грассмана $G(2, 4)$. Прямые, пересекающие заданную прямую $L_4$, образуют цикл Шуберта $\sigma_1(L)$. Интересующее нас множество $\bigcap_{i=1}^{4}\sigma_1(L_i)$ имеет поэтому мощность $(\sigma_1^4)=2$. Вообще, если даны 4 кривые $C_1, \ldots, C_4$ в $\mathbf{P}^3$ в «общем положении», их пересекает $2\cdot\deg(C_1)\cdot\ldots\cdot\deg(C_4)$ прямых.

**7.6. Прямые на кубике.** Сколько прямых лежит на кубической поверхности в $\mathbf{P}^3$? Пусть $X\subset\mathbf{P}^3$ — наша кубика и $H_1, \ldots$ $\ldots, H_4$ — четыре «общих» плоскости в $\mathbf{P}^3$; $C_i=X\cap H_i$. Степени $C_i$ равны 3, поэтому существует $2\cdot3^4$ прямых в $\mathbf{P}^3$, проходящих через $C_1, \ldots, C_4$. Найдем число прямых, пересекающих $\bigcup C_i$ в четырех точках; так как эти четыре точки принадлежат $X$, такая прямая обязана лежать на кубике $X$. Заметим, что $C_1$ пересекается с $C_2$ в трех точках, аналогично $C_3$ и $C_4$. Соединяя первые три точки со вторыми, мы получаем 9 прямых. Аналогично, соединяя $C_1 \cap C_3$ с $C_2 \cap C_4$, или $C_1 \cap C_4$ с $C_2 \cap C_3$, мы получаем, что 27 из наших прямых пересекают $\bigcup C_i$ в двух точках. Снова возьмем точку пересечения $C_1 \cap C_2$; проектируя из нее на $\mathbf{P}^2$, мы получаем кривые третьей степени $\pi(C_3)$ и $\pi(C_4)$, которые пересекаются в 9 точках. Три из них нас не интересуют, ибо они произошли из $C_3 \cap C_4$, а остальные дают 6 прямых. Можно шестью способами выбрать пару кривых $C_i$, $C_j$, тремя способами — точку их пересечения, поэтому мы имеем $6 \cdot 3 \cdot 9$ прямых, пересекающих $\bigcup C_i$ в трех точках. Вычитая теперь из $2 \cdot 3^4$ $27 + 6 \cdot 27$, мы получаем 27 прямых, пересекающих $X$ в четырех точках. Подробнее о них см. [32], [56].

**7.7. Задача о пяти кониках.** Даны пять коник $C_1, \ldots, C_5$ на $\mathbf{P}^2$ в «общем» положении; сколько коник касается этих пяти?

Все коники образуют $\mathbf{P}^5$, коники, касающиеся заданной коники $C$, образуют гиперповерхность $W_C$ в $\mathbf{P}^5$. Довольно легко понять, что $\deg W_C = 6$. Казалось бы, теперь ясно, что $6^5$ коник касаются $C_1, \ldots, C_5$. Однако это заключение ошибочно, ибо гиперповерхности $W_{C_i}$ пересекаются неправильно. В самом деле, любая $W_C$ содержит поверхность Веронезе $S \subset \mathbf{P}^5$ двойных прямых. Двойная прямая, геометрически никак не касаясь $C$, пересекает $C$ в двух двойных точках и считается «касающейся». Надо исключить двойные прямые.

Правильный ответ получится, если перейти на $\widetilde{\mathbf{P}}^5$—раздутие $\mathbf{P}^5$ вдоль $S$. Геометрически это означает, что вместо двойной прямой $2l$ мы рассматриваем более тонкий объект — двойную прямую $2l$ с парой точек $p$, $p'$ на ней. Считается, что такой объект касается коники $C$, если либо $l$ касается $C$, либо $p$ или $p'$ лежит на $C$. Если $\widetilde{W}_{C_i}$ — собственные прообразы $W_{C_i}$, то остается найти индекс пересечения $\widetilde{W}_{C_1}, \ldots, \widetilde{W}_{C_5}$ на $\widetilde{\mathbf{P}}^5$.

Здесь снова используется трюк. Представим, что коника $C$ вырождается в пару прямых $l$ и $l'$, пересекающихся в точке $P$. Тогда гиперповерхность $W_C$ вырождается в гиперповерхность $W_l + W_{l'} + 2W_P$, где $W_l$ — множество коник, касающихся прямой $l$, а $W_P$ — множество коник, проходящих через точку $P$. Конечно, $W_P$ — гиперплоскость в $\mathbf{P}^5$, а $W_l$ — гиперповерхность степени два. На $\widetilde{\mathbf{P}}^5$ дивизор $\widetilde{W}_C$ эквивалентен $2\widetilde{W}_l + 2\widetilde{W}_P$, и мы приходим к вычислению индекса пересечения

$$(2W_l + 2W_p)^5 = 32(\widetilde{W}_p^5 + 5\widetilde{W}_p^4\widetilde{W}_l + 10\widetilde{W}_p^3\widetilde{W}_l^2 + \\ + 10\widetilde{W}_p^2\widetilde{W}_l^3 + 5\widetilde{W}_p\widetilde{W}_l^4 + \widetilde{W}_l^5).$$

Индексы пересечения $\widetilde{W}_p^i\widetilde{W}_l^{5-i}$ интерпретируются как числа коник, проходящих через $i$ «общих» точек и касающихся $5-i$ «общих» прямых. Ясно, что $\tilde{W}_p^5=1$ и $\tilde{W}_p^4\tilde{W}_l=2$. $\tilde{W}_p^3\tilde{W}_l^2=W_p^3W_l^2=4$. Остальные индексы находятся по двойственности $\tilde{W}_p^2\tilde{W}_l^3=\tilde{W}_p^3\tilde{W}_l^2=4$, $\tilde{W}_p\tilde{W}_l^4=2$ и $\tilde{W}_l^5=1$. Окончательный ответ

$$32\ (1+5\cdot 2+10\cdot 4+10\cdot 4+5\cdot 2+1)=32\cdot 102=3264$$

был получен Шалем еще в 1864 г. Здесь предполагалось, что характеристика $K$ отлична от 2. Подробнее см. [29], [32].

Мы закончили изложение общей теории алгебраических многообразий и хотели бы отметить поразительную вещь. Мы узнали много тонких и глубоких фактов о многообразиях над полем $K$, по существу ничего не зная о самом поле $K$. В следующей главе, посвященной схемам, мы увидим, что во многих вопросах не нужно и поле $K$, не говоря уже о его алгебраической замкнутости.

# *Глава 4*

# СХЕМЫ

В этой главе мы займемся распространением геометрического языка на алгебраические уравнения над произвольными полями и кольцами. Соответствующий геометрический объект, обобщающий алгебраическое многообразие, называется схемой. Подобно многообразиям, схемы склеиваются из локальных кусков, называемых аффинными схемами. Поэтому основное внимание мы уделим локальным вопросам, так как в остальном все делается так или почти так, как в случае многообразий.

Теория схем объединяет Геометрию и Арифметику и реализует цель, намеченную Кронекером [48]: «...задача здесь заключается в том, чтобы для образов самого общего типа, принадлежащих одновременно арифметике и теории функций, т. е. зависящих от любых заданных алгебраических чисел и алгебраических функций от каких угодно параметров, достигнуть в общем случае такой же степени законченности и полноты, какой в той или иной степени обладают простейшие полученные результаты.

Перед нами здесь открывается необъятный простор в области чистой теории; царящая здесь всеобъемлющая закономерность придает ей высшую степень стройности и красоты. Следует заметить, впрочем, что эта область пока далека от практических применений, хотя в будущем положение может измениться».

## § 1. Алгебраические уравнения

Этот параграф носит вводный характер. Его задача — подготовить и мотивировать понятие аффинной схемы.

**1.1. Вещественные уравнения.** Главу 1 мы начинали с алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем $K$. Теперь мы рассмотрим уравнения над произвольным полем $K$ и начнем с простейшего (или наиболее привычного) поля $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Пусть $X=(F_j=0,\ j\in J)$ — система алгебраических уравнений над $\mathbf{R}$, т. е. $F_j$ — многочлены от $T_1, \ldots, T_n$ с вещественными коэффициентами.

Обозначим через $X(\mathbf{R})$ множество вещественных решений нашей системы, т. е. таких наборов $(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbf{R}^n$, что $F_j(x_1, \ldots, x_n)=0$ для любых $j\in J$. Однако даже если нас интересуют лишь вещественные решения, полезно знать о том, что существуют комплексные решения и представлять строение множества $X(\mathbf{C})$ всех комплексных решений системы $X$. Прежде всего потому, что именно многообразие $X(\mathbf{C})$ дает правильную картину происходящего. Понимание того, что корни уравнения $T^2+a=0$ при $a>0$ не исчезают, но переходят в комплексную область, — одно из величайших достижений математики.

Вещественные точки (или решения) выделяются среди комплексных тем, что они инвариантны при комплексном сопряжении. В частности, невещественные решения встречаются парами. Уже это тривиальное замечание позволяет иногда устанавливать существование вещественных решений. Например, по теореме Безу число решений системы однородных уравнений нечетной степени нечетно, и значит, обязательно содержит вещественное решение. Отсюда можно получить, что размерность алгебры с делением над $\mathbf{R}$ есть степень двойки (см. [15, стр. 273]). Другой пример на эту тему доставляет теорема Харнака о максимальном числе овалов вещественной кривой (см. [15, гл. VII, § 4]).

**1.2. Уравнения над полем.** Аналогично обстоит дело для любого поля $K$. Если $X=(F_j=0)$ — система алгебраических уравнений над $K$, то главную роль играет множество $X(\bar{K})$ всех $\bar{K}$-значных решений этой системы, где $\bar{K}$ — алгебраическое замыкание поля $K$. Это множество является алгебраическим многообразием над $\bar{K}$, т. е. объектом изучения предыдущих глав. Однако то обстоятельство, что уравнения заданы над $K$, дает дополнительную структуру: для каждого промежуточного поля $K\subset K'\subset\bar{K}$ выделяется подмножество $X(K')\subset X(\bar{K})$ решений со значениями в $K'$. Образно говоря, точки многообразия $X(\bar{K})$ различаются по своей „близости“ к основному полю $K$, как звезды на небе по своей яркости. По другому дополнительная структура задается действием группы Галуа $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ на множестве $X(\bar{K})$ (но не на $\bar{K}$-многообразии $X(\bar{K})$), и снова точки различаются величиной своих стабилизаторов. Получающиеся объекты мы временно будем называть $K$-многообразиями.

**1.3. Уравнения над кольцами.** Пусть теперь $K$ — кольцо, коммутативное и с единицей, например, кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$. Для любой $K$-алгебры $L$, т. е. коммутативного кольца $L$, снабженного кольцевым гомоморфизмом $\varphi: K \to L$, обозначим через $X(L)$ множество $L$-значных решений системы $X = (F_j = 0,\ j \in J)$, т. е. наборов $(x_1, \ldots, x_n) \in L^n$, таких что $F_j(x_1, \ldots, x_n) = 0$ для любых $j \in J$. Заметим, что любой гомоморфизм $K$-алгебр $\psi: L \to L'$ индуцирует отображение $X(L) \to X(L')$.

Вкладывая кольцо $\mathbf{Z}$ в поле $\mathbf{R}$ мы видим, что если $X(\mathbf{R}) = \varnothing$, то и $X(\mathbf{Z}) = \varnothing$. На самом деле для подобных целей годится любой гомоморфизм $\mathbf{Z} \to L$; чаще всего в качестве $L$ берут кольцо вычетов $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ по целому модулю $m$. Например, уравнение $y^2 = 3x^2 + 3$ не имеет решений по модулю 4, поэтому не имеет и целых решений.

Так и в общем случае уравнения над кольцом $K$ естественно пощупать всевозможными гомоморфизмами $\varphi: K \to L$, где $L$ — поле. Заменяя коэффициенты уравнений $F_j$ при помощи $\varphi$, мы получаем систему $X_\varphi = (\varphi(F_j) = 0)$ алгебраических уравнений над полем $L$, а значит, и соответствующее $L$-многообразие, которое мы также обозначим $X_\varphi$. Итак, для каждого гомоморфизма $\varphi: K \to L$ в поле $L$ (мы их будем называть точками кольца $K$) мы получаем алгебраическое многообразие $X_\varphi$. Это наводит на мысль связать с системой $X$ геометрический объект, слой которого над точкой $\varphi$ будет многообразием $X_\varphi$. В таком случае решения $X(K)$ представлялись бы как сечения этого расслоения.

Предварительно сделаем одно замечание. Не все точки кольца $K$ представляют одинаковый интерес. Если точка $\varphi': K \to L'$ пропускается через точку $\varphi: K \to L$, т. е. индуцируется вложением полей $L \subset L'$, многообразие $X_{\varphi'}$ не несет новой информации, по сравнению с $X_\varphi$. Существенными являются лишь минимальные, или простые в указанном смысле точки $K$. Простота точки $\varphi: K \to L$ означает, что $L$ как поле порождается $\varphi(K)$. Отсюда видно, что каждая точка пропускается через единственную простую точку. В терминах кольца $K$ простая точка $\varphi: K \to L$ задается своим ядром $\varphi^{-1}(0)$, который является простым идеалом. Обратно, любой простой идеал $\mathfrak{p} \subset K$ (отличный от $K$) задает простую точку $K \to k(\mathfrak{p})$, где $k(\mathfrak{p})$ — поле частных целостного кольца $K/\mathfrak{p}$ (т. н. поле вычетов точки $\mathfrak{p}$).

**1.4. Простой спектр.** *Простым спектром* кольца $K$ называется множество простых точек, или простых идеалов $K$; обозначается оно $\operatorname{Spec}(K)$. Оправдание терминологии и связь с понятием спектра оператора можно найти в [24]. Например, $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ состоит из точки $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ (идеала $(0)$) и точек $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (идеалов $(p)$) для простых чисел $p$. Конечно, спектр поля $K$ состоит из единственной точки $K \xrightarrow{\mathrm{id}} K$.

Конструкция Spec функториальна: с каждым гомоморфизмом колец $\varphi: A \to B$ связано отображение в обратную сторону

$\operatorname{Spec}(\varphi):\operatorname{Spec}(B)\to\operatorname{Spec}(A)$. Устроено оно так. Если $\psi: B\to L$ — простая точка $B$, то $\operatorname{Spec}(\varphi)(\psi)$ — та единственная простая точка $A$, через которую пропускается точка $A\xrightarrow{\varphi}B\xrightarrow{\psi}L$. В терминах простых идеалов все выглядит еще проще: $\operatorname{Spec}(\varphi)$ переводит простой идеал $\mathfrak{a}\subset B$ в простой идеал $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})\subset A$.

Теперь уже очень просто связать с системой уравнений $X=(F_j=0,\ j\in J)$ геометрический объект. Для этого надо взять $\operatorname{Spec}(A_X)$, где $A_X=K[T_1,\dots,T_n]/(F_j)_{j\in J}$. Структурный гомоморфизм $K\to A_X=K[T]/(F)$ приводит к отображению $\operatorname{Spec}(A_X)\to\operatorname{Spec}(K)$, слои которого в некотором смысле есть многообразия $X_\varphi$. Мы еще вернемся к этому.

Видно, что конечность числа неизвестных $T_1,\dots,T_n$ тут ни при чем, как и сами неизвестные. Важно лишь то, что с каждым коммутативным кольцом $A$ можно связать множество $\operatorname{Spec} A$. В следующем параграфе мы снабдим его топологией и пучком колец, как в главе 1 было сделано для многообразий. Однако предварительно стоит обсудить, как конструкция Spec связана с многообразием, когда $K$ — алгебраически замкнутое поле.

**1.5. Сравнение с многообразиями.** Пусть $K$ — алгебраически замкнутое поле, $X$ — система уравнений над $K$, которую мы будем отождествлять с соответствующим аффинным многообразием. Как же множество $X$ связано со $\operatorname{Spec}(K[X])$?

Конечно, каждая точка $x\in X$ определяет простую точку $\varphi_x: K[X]\to K$, $\varphi_x(f)=f(x)$. Однако $\operatorname{Spec} K[X]$ содержит много других точек. А именно, каждое неприводимое подмногообразие $Y\subset X$ дает точку $K[X]$ либо как простой идеал $I(Y)$, либо как гомоморфизм $K[X]\to K[Y]\to K(Y)$. Так получаются уже все точки $\operatorname{Spec}(K[X])$. В самом деле, простой идеал $\mathfrak{p}\subset K[X]$ имеет вид $I(Y)$ для неприводимого $Y=V(\mathfrak{p})$. Точки $X$ соответствуют при этом максимальным идеалам кольца $K[X]$.

Возникает вопрос — почему в общем случае нельзя обойтись лишь максимальными идеалами вместо простых? Этому есть несколько причин. Первая — зачем при исследовании уравнений над кольцом $K$ игнорировать точки типа $\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$? Вторая — функториальность: прообраз максимального идеала может оказаться немаксимальным даже в столь простом случае, как вложение $\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$. Третья — в общем случае максимальных идеалов «мало», чтобы по значениям в них судить о поведении функций. Для алгебраических многообразий их хватало благодаря теореме Гильберта о нулях, факту, специфическому для колец конечного типа над полем. Наконец, даже в случае алгебраических многообразий новые точки естественно интерпретируются как общие точки неприводимых подмногообразий и это часто бывает удобно.

## § 2. Аффинные схемы

**2.1. Функции на спектре.** В предыдущем параграфе с каждым кольцом $A$ было связано множество $\operatorname{Spec}(A)$ его простых точек $\varphi: A \to k(\varphi)$. Элементы кольца $A$ при этом интерпретируются как функции на $\operatorname{Spec}(A)$. Единственная новость здесь в том, что значение функции $a \in A$ в точке $\varphi$ принимается не в фиксированном поле $K$, а в поле $k(\varphi)$, своем для каждой точки $\varphi$. При этом значение $a$ в точке $\varphi$ есть просто $\varphi(a)$. Вот как выглядят числа 3, 5 и 6 как «функции» на $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$:

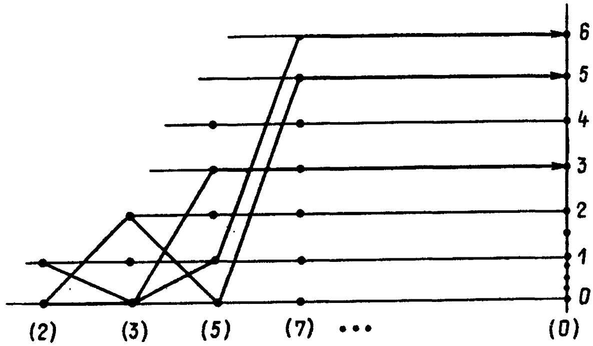



Рис. 21

Впрочем, как и в п. 2.3 главы 1, представление элементов $A$ функциями на $\operatorname{Spec} A$ страдает одним недостатком: ненулевые элементы кольца $A$ могут приводить к нулевым функциям. Однако как и для многообразий, это может случиться лишь для нильпотентных элементов. Причем если в случае многообразий мы извлекали это из теоремы Гильберта о нулях, то теперь это почти тавтологичный факт, что нильрадикал кольца есть пересечение всех его простых идеалов (см. [19, гл. 1]). Все это показывает, что более правильно элементы кольца $A$ представлять как сечения некоторого пучка колец на $\operatorname{Spec} A$, а для этого нужна топология.

**2.2. Топология на спектре.** Как и в случае многообразий, замкнутыми подмножествами $\operatorname{Spec} A$ объявляются «нули функций» $a \in A$. Иначе говоря, замкнутые множества *топологии Зарисского* на $\operatorname{Spec} A$ имеют вид $V(I)$, где $I$ — подмножество $A$, а $V(I)$ состоит из точек $\varphi$, таких что $\varphi(a) = 0$ для всех $a \in I$.

Как и в случае многообразий, топология $\operatorname{Spec} A$ в общем случае нехаусдорфова. Более того, некоторые точки могут оказаться незамкнутыми. Например, если точка соответствует неприводимому подмногообразию $Y$ многообразия $X$, то замыкание ее содержит все точки $Y$. По этой причине ее называют общей точкой подмногообразия $Y$. Вообще, если некоторая точка $\xi$ всюду плотна в $\operatorname{Spec} A$, она называется *общей точкой.* Например, точка $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$, соответствующая нулевому идеалу $\mathbf{Z}$, общая. Замкнутые точки, напротив, соответствуют максимальным идеалам кольца $A$. Вообще, если точка $x$ принадлежит замыканию точки $y$, говорят, что $x$ — *специализация* $y$ и изображают это стрелкой $y \to x$.

**2.3. Структурный пучок.** Строится он по существу так же, как для многообразий в п. 2.8 главы 1. Для открытого $U$ в $\operatorname{Spec} A$ положим

$$S[U] = \{a \in A,\ \varphi(a) \neq 0\ \forall \varphi \in U\}.$$

Очевидно, подмножество $S[U]$ в $A$ мультипликативно. Положим $\tilde{A}(U)$ равным кольцу частных $A$ относительно $S[U]$. Иначе говоря, $\tilde{A}(U)$ состоит из дробей вида $a/s$, где $a \in A$, а $s \in S[U]$. Если $U \subset U'$, то $S[U'] \subset S[U]$ и мы получаем гомоморфизм колец $\tilde{A}(U') \to \tilde{A}(U)$. Тем самым мы получаем предпучок колец $\tilde{A}$ на $\operatorname{Spec}(A)$. Как в предположении п. 2.8 главы 1 показывается, что $\tilde{A}$ является пучком; он обозначается также $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$ или просто $\mathcal{O}$ и называется *структурным пучком* на $\operatorname{Spec}(A)$.

Окольцованное пространство $(\operatorname{Spec}(A), \tilde{A})$ называется *аффинной схемой*, соответствующей кольцу $A$, и также обозначается $\operatorname{Spec}(A)$. Эта схема уже несет всю информацию о кольце $A$, так как $A = \tilde{A}(\operatorname{Spec} A)$. Таким образом мы можем работать не с кольцом, а с более геометрическим объектом — аффинной схемой.

Модуль $M$ над кольцом $A$ приводит, как в п. 6.4 главы 1, к пучку $\tilde{M}$ модулей на $\operatorname{Spec} A$. Таким образом теория модулей над кольцами превращается в теорию квазикогерентных пучков. Отметим еще, что пучок колец $\tilde{A}$ обладает тем свойством, что его слой $\tilde{A}_\varphi$ в любой точке $\varphi \in \operatorname{Spec} A$ является локальным кольцом. В самом деле, это кольцо дробей вида $a/b$, где $b(\varphi) \neq 0$; его единственный максимальный идеал $\mathfrak{m}_\varphi$ состоит из таких дробей, у которых $a(\varphi) = 0$. Поле вычетов локального кольца $\tilde{A}_\varphi$ есть в точности $k(\varphi)$.

**2.4. Функториальность.** Пусть $\psi: A \to B$ — гомоморфизм колец. Как легко проверить, отображение $\operatorname{Spec}(\psi): \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ непрерывно. Более того, $\psi$ индуцирует естественный гомоморфизм пучков колец $\psi^{\#}: \tilde{A} \to (\operatorname{Spec} \psi)_* \tilde{B}$, так что $f = \operatorname{Spec}(\psi)$ является морфизмом окольцованных пространств и даже локально окольцованных пространств. Последнее означает, что гомоморфизмы локальных колец $\tilde{A}_{f(\varphi)} \to \tilde{B}_\varphi$ локальны, т. е. переводят максимальные идеалы в максимальные. Оказывается, верно и обратное, т. е. любой морфизм локально окольцованных пространств $f: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ имеет вид $\operatorname{Spec}(\psi)$ для некоторого гомоморфизма колец $\psi: A \to B$. Таким образом, категория коммутативных колец двойственна к категории аффинных схем, и любое утверждение о кольцах и модулях получает геометрическое истолкование в терминах аффинных схем и пучков модулей над ними.

**2.5. Пример—аффинная прямая.** Для любого кольца $R$ спектр кольца многочленов $R[T]$ называется *аффинной прямой* над $R$ и обозначается $\mathbf{A}^1_R$. Во всяком случае эта терминология согласуется с прежней, когда $R=K$ — алгебраически замкнутое поле. Пусть теперь $K$ — произвольное поле; посмотрим, как прямая $\mathbf{A}^1_K$ устроена как множество. Прежде всего она содержит общую точку, соответствующую нулевому идеалу кольца $K[T]$. Далее, $K[T]$ является кольцом главных идеалов, поэтому остальные простые идеалы максимальны и имеют вид $(f)$, где $f$ — неприводимый многочлен. Рассматривая корни $f$ в алгебраическом замыкании $\bar{K}$ поля $K$, мы видим, что замкнутые точки $\mathbf{A}^1_K$ отождествляются с орбитами действия группы Галуа $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ на $\bar{K}$. См. также п. 4.2.

В случае общего кольца $R$ воспользуемся структурным морфизмом $p:\mathbf{A}^1_R\to\mathrm{Spec}\,R$, соответствующим вложению колец $R\to R[T]$. Для каждой простой точки $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,R$ слой $p$ над ней изоморфен аффинной прямой $\mathbf{A}^1_{k(\mathfrak{p})}$ над полем $k(\mathfrak{p})$. Таким образом, $\mathbf{A}^1_R$ представляет семейство прямых $\mathbf{A}^1_{k(\mathfrak{p})}$, где $\mathfrak{p}$ пробегает $\mathrm{Spec}\,R$. Главное, что все эти прямые не разрознены, а сцеплены в единое целое. Рассмотрим, например, прямую над $\mathbf{Z}$ (см. рис. 21). Над каждым простым числом $p$ расположена прямая $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}$. Однако есть еще и прямая $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ над общей точкой $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$; точки этой прямой и связывают все предыдущие слои. В самом деле, замыкание в $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}}$ точки из прямой $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ — это подмножество в $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}}$, конечнократно накрывающее базу $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$. Читателю рекомендуется самому нарисовать, как выглядит замыкание точек $1/2$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{-1}$.

Спектр кольца многочленов $R[T_1, \ldots, T_n]$ называется *$n$-мерным аффинным пространством* над $R$ и обозначается $\mathbf{A}^n_R$.

**2.6. Пример — абстрактный вектор.** Даже если $\mathrm{Spec}\,A$ состоит из одной точки, наличие нильпотентов в кольце $A$ (или структурном пучке, что в данном случае по существу то же самое) сказывается на морфизмах этой схемы в другие схемы. Рассмотрим простейший, но очень важный пример.

Простейшая алгебра с нильпотентами — алгебра дуальных чисел $K[\varepsilon]$, где $K$ — поле, а $\varepsilon^2=0$. Иначе говоря, ее элементы имеют вид $a+b\varepsilon$, где $a, b\in K$. Теоретико-множественно $\mathrm{Spec}\,K[\varepsilon]$ состоит из одной точки * (соответствующей простому идеалу $(\varepsilon)$ или гомоморфизму колец $\delta: K[\varepsilon]\to K$,

$\delta(a+b\varepsilon)=a$). Пусть теперь $X$ — аффинное многообразие над $K$. Задать морфизм схем $f:\operatorname{Spec} K[\varepsilon]\to X$ (точнее, морфизм $K$-схем, см. 3.3) — значит задать гомоморфизм $K$-алгебр $\psi: K[X]\to K[\delta]$. Последний определяется максимальным идеалом $\mathfrak{m}=\operatorname{Ker}(\delta\circ\psi)$ (т. е. точкой $f(*)=x\in X$) и $K$-линейным отображением векторных пространств $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to K\varepsilon\cong K$ (т. е. касательным вектором к $X$ в точке $x$, см. п. 7.2 главы 1). Таким образом, $\operatorname{Spec} K[\varepsilon]$ надо представлять себе как точку, снабженную торчащим из нее вектором.

Другой тип нильпотентов дает кольцо $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, у которого нильпотенты идут в «арифметическом направлении».

## § 3. Схемы

**3.1. Определения.** *Схемой* называется окольцованное пространство $X=(\operatorname{sp} X, \mathcal{O}_X)$, локально изоморфное аффинной схеме.

Иначе говоря, схема $X$ состоит из топологического пространства $\operatorname{sp} X$ (часто обозначаемого просто $X$) и пучка коммутативных колец $\mathcal{O}_X$ на нем. При этом каждая точка $X$ обладает открытой окрестностью $U$, такой что пара $(U, \mathcal{O}_X|U)$ изоморфна аффинной схеме (а именно, $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_X(U)$). Пучок $\mathcal{O}_X$ называется *структурным пучком* схемы; слой его $\mathcal{O}_{X,x}$ в любой точке $x\in X$ является, как видно из п. 2.3, локальным кольцом.

*Морфизмом схем* называется морфизм их как локально окольцованных пространств. Иначе говоря, морфизм $f: X\to Y$ схемы $X$ в схему $Y$ состоит из непрерывного отображения $\operatorname{sp} f: \operatorname{sp} X\to\operatorname{sp} Y$ и гомоморфизма пучков колец $f^{\#}: \mathcal{O}_Y\to\to(\operatorname{sp} f)_*\mathcal{O}_X$. При этом для любой точки $x\in X$ и сечения $s$ пучка $\mathcal{O}_Y$ в окрестности точки $f(x)$ соотношение $s(f(x))=0$ влечет $(f^{\#}s)(x)=0$. Локально любой морфизм схем имеет вид $\operatorname{Spec}(\varphi): \operatorname{Spec} B\to\operatorname{Spec} A$ для гомоморфизма колец $\varphi: A\to B$. Вообще, для любой схемы $X$ и кольца $A$ морфизмы $X\to\operatorname{Spec} A$ находятся во взаимно однозначном соответствии с кольцевыми гомоморфизмами кольца $A$ в $\mathcal{O}_X(X)$.

**3.2. Примеры.** а) Каждая аффинная схема является схемой.

б) Если $U$ — открытое подмножество схемы $X$, то пара $(U, \mathcal{O}_X|U)$ также схема и называется *открытой подсхемой* схемы $X$. Морфизм схем $Y\to X$ называется *открытым вложением,* если он осуществляет изоморфизм $Y$ с открытой подсхемой $\widetilde{X}$. Например, для любого элемента $a\in A$ схема $\operatorname{Spec} A[a^{-1}]$ отождествляется с открытой подсхемой $\operatorname{Spec} A$, индуцированной на дополнении к замкнутому подмножеству $V(a)$.

в) Морфизм $f: Y\to X$ называется *замкнутым вложением,* если $\operatorname{sp} f$ отождествляет $Y$ с замкнутым подмножеством $X$, а гомоморфизм пучков $\mathcal{O}_X\to f_*\mathcal{O}_Y$ сюръективен. Например, если

$\mathfrak{A}$ — идеал в кольце $A$, то сюръекция $A \to A/\mathfrak{A}$ дает замкнутое вложение $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$.

Квазикогерентный пучок идеалов $J \subset \mathcal{O}_X$ задает замкнутую подсхему $(\mathrm{supp}\, \mathcal{O}_X/J,\ \mathcal{O}_X/J)$, и такое сопоставление осуществляет биекцию между идеалами $\mathcal{O}_X$ и замкнутыми подсхемами $X$. В частности, убывающая цепочка пучков идеалов $J \supset \supset J^2 \subset \ldots \subset J^{n+1}$ приводит к возрастающей цепочке замкнутых подсхем $Y \supset Y^{(2)} \supset \ldots \supset Y^{(n)}$. Хотя пространство $\mathrm{sp}\, Y^{(n)}$ у всех этих подсхем одно и то же, с ростом $n$ подсхема $Y^{(n)}$ все более точно отражает строение $X$ в инфинитезимальной окрестности $Y$. Индуктивный предел $Y^{(\infty)} = \lim Y^{(n)}$ играет ту же роль, что и ряд Тейлора дифференцируемой функции. Строго говоря, $Y^{(\infty)}$ — уже не схема, а т. н. формальная схема; в каком-то смысле она заменяет понятие трубчатой окрестности $Y$ в $X$.

г) Обычно более сложные схемы склеивают из более простых в духе п. 3.3 главы 1. Так можно получить относительное аффинное пространство $\mathbf{A}^n_X$ над любой схемой $X$ или относительное проективное пространство $\mathbf{P}^n_X$. В духе п. 6.7 главы 1 для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{O}_X$-алгебр $\mathcal{A}$ можно построить схему $\mathrm{Spec}\, \mathcal{A} \to X$. Аналогично, для градуированного пучка $\mathcal{O}_X$-алгебр $\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \mathcal{A}_i$ можно построить проективный спектр $\mathrm{Proj}\,(\mathcal{A}) \to X$ и, в частности, говорить о раздутиях схем вдоль подсхем.

**3.3. Относительные схемы.** Теорию схем, как и теорию алгебраических многообразий, отличает широкое использование относительных понятий. Зафиксируем схему $S$; *$S$-схемой,* или схемой над $S$, называется схема $X$, снабженная (т. н. структурным) морфизмом $f: X \to S$. Морфизмом $S$-схемы $X$ в $S$-схему $Y$ называется морфизм $X \to Y$, коммутирующий со структурными морфизмами. Такой морфизм $S$-схем называют также $X$-значной точкой $S$-схемы $Y$; множество всех таких точек обозначается $Y(X)$ (ср. с п. 1.3).

Как для многообразий, для схем существуют расслоенные произведения. Для $S$-схем $X$ и $Y$ их произведением называется $S$-схема $X \underset{S}{\times} Y$ вместе с проекциями на $X$ и $Y$, такая что

$$(X \underset{S}{\times} Y)(Z) = X(Z) \times Y(Z)$$

для любой $S$-схемы $Z$. В случае аффинных схем такое произведение двойственно тензорному произведению колец, т. е.

$$\mathrm{Spec}\, A \underset{\mathrm{Spec}\, C}{\times} \mathrm{Spec}\, B = \mathrm{Spec}\,(A \underset{C}{\otimes} B).$$

Как для многообразий, расслоенные произведения позволяют делать замены базы. В частности, для точки $s \in S$ расслоенное произведение $X \underset{S}{\times} \mathrm{Spec}(k(s)) = X_s$ называется *слоем* морфизма $f: X \to S$ над $s$. Такое название оправдано тем, что теоретико-множественно $X_s$ совпадает с $f^{-1}(s)$. Тем самым относительную схему $X \to S$ можно представлять как семейство $k(s)$-схем $X_s$, параметризованное точками $s \in S$.

Любую схему $X$ можно рассматривать как схему над $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$. Это позволяет рассматривать семейства многообразий (или схем) $X_p$ $(p=0, 2, 3, 5, \ldots)$, определенных над полями различной характеристики $p$, переходить от положительной характеристики к нулевой и обратно. В этом главная польза схем.

**3.4. Свойства схем.** В основном это те же свойства, что и для многообразий. Так, схема $X$ называется *неприводимой,* если неприводимо топологическое пространство $\mathrm{sp}\,X$. Схема $X$ *приведенная,* если структурный пучок $\mathcal{O}_X$ не содержит нильпотентов. Для любой схемы $X$ существует приведенная замкнутая подсхема с тем же пространством $\mathrm{sp}\,X$; она обозначается $X_{\mathrm{red}}$ и задается пучком идеалов $J \subset \mathcal{O}_X$, состоящим из сечений, нулевых во всех точках $X$.

Понятия *нормальной схемы* и *нормализации* приведенной схемы вводятся также как для многообразий. Например, схема $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ ненормальна и ее нормализацией будет $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$.

*Размерностью* схемы $X$ в точке $x \in X$ называется максимум длин цепочек $x = x_0 \leftarrow x_1 \leftarrow \ldots \leftarrow x_n$ различных точек; обозначается он $\dim_x X$. По существу, это определение использовалось длин многообразий. Например, размерность $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ равна 1 и поэтому $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ следует рассматривать как «кривую». Аффинную прямую $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}}$ над $\mathbf{Z}$ следует рассматривать как «арифметическую поверхность», ибо размерность ее в замкнутых точках равна 2. Следует предостеречь, что для общих схем размерность ведет себя не так идеально, как в случае многообразий.

В случае многообразий мы часто пользовались теоремой Гильберта о базисе, т. е. нётеровостью колец конечного типа над полем. В случае схем это надо специально требовать. Схема $X$ называется *нётеровой,* если существует *конечное* открытое покрытие $X$ спектрами нётеровых колец. Топологическое пространство $\mathrm{sp}\,X$ нётеровой схемы $X$ нётерово, так что нётерова схема квазикомпактна и разлагается на конечное число неприводимых компонент. Однако существует более тонкое, чисто схемное разложение нётеровой схемы на примарные компоненты, учитывающее нильпотенты (см. [8]).

В дальнейшем мы ограничимся в основном нётеровыми схемами; помимо многообразий, к ним относится спектр $\mathbf{Z}$ и, вообще, спектр кольца целых алгебраических чисел. Для любой точки $x$ нётеровой схемы $X$ размерность $\dim_x X$ конечна. Если функция $f$ не делит нуль в кольце $\mathcal{O}_{X,x}$, то $\dim_x V(f) = \dim_x X - 1$, как и для многообразий (п. 4.3 главы 2).

**3.5. Свойства морфизмов.** Как правило, каждое свойство схем имеет свой относительный аналог, свойство морфизма. Грубо говоря, этим свойством должны обладать все слои морфизма.

Например, морфизм $f: X \to S$ называется *аффинным*, если для любой аффинной карты $U \subset S$ схема $f^{-1}(U)$ аффинна. Любой такой морфизм имеет вид $\operatorname{Spec}(\mathcal{A}) \to S$, где $\mathcal{A} = f_*(\mathcal{O}_X)$ — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_S$-алгебр. Аффинный морфизм $f: X \to S$ называется *конечным*, если пучок $f_*(\mathcal{O}_X)$ когерентен над $\mathcal{O}_S$. Все, что говорилось о конечных морфизмах в § 2 главы 2, переносится на схемы.

Наиболее важно понятие морфизма конечного типа. Предположим сначала, что база $S = \operatorname{Spec} A$ аффинна. В этом случае $S$-схема $X$ имеет конечный тип, если существует *конечное* открытое покрытие $X$ аффинными картами $\operatorname{Spec} B_i$, такое что $A$-алгебры $B_i$ порождаются конечным числом элементов. В общем случае морфизм $f: X \to S$ (или $S$-схема $X$) имеет *конечный тип*, если для любой аффинной карты $U \subset S$ морфизм $f^{-1}(U) \to U$ имеет конечный тип. Например, конечный тип имеют такие $S$-схемы, так аффинное пространство $\mathbf{A}_S^n$ или проективное пространство $\mathbf{P}_S^n$ а также их замкнутые подсхемы. Как правило, все действия в алгебраической геометрии происходят в рамках схем конечного типа над нётеровой базой.

Морфизм конечного типа называется *собственным*, если он отделим и универсально замкнут; все, что говорилось о собственных морфизмах в § 3 главы 2, переносится на схемы.

**3.6. Регулярные схемы.** Понятие гладкого многообразия имеет два обобщения — на схемы и на морфизмы. Сейчас мы остановимся на первом, а о втором скажем в следующем параграфе. Нётерова схема $X$ называется *регулярной в точке* $x$, если размерность векторного пространства $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ над полем вычетов $k(x)$ равна $\dim_x X$ (здесь $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$). Нётерова схема называется *регулярной*, если она такова во всех (или только в замкнутых) точках. Подробнее о свойствах регулярных схем и колец см. [36], [63], [65].

Для многообразий над алгебраически замкнутым полем регулярность совпадает с гладкостью. Как и для многообразий, регулярность схемы влечет ее приведенность, нормальность, факториальность и свойство Коэна—Маколея. Для одномерных схем регулярность совпадает с нормальностью, снова как для многообразий. Однако есть и различия. Так схема может быть нерегулярной во всех точках, как $\operatorname{Spec} K[\varepsilon]$; конечно, это связано с нильпотентами. Кроме того, множество точек регулярности нётеровой схемы не всегда открыто.

**3.7. Плоские морфизмы.** Это новое для нас понятие, не встречавшееся ранее, хотя очень важное и для многообразий.

Несмотря на довольно алгебраическое определение, плоские морфизмы играют важную роль в алгебраической геометрии, позволяя формализовать интуитивное представление о «непрерывных» алгебраических семействах схем и многообразий (см. п. 4.4).

Алгебра $B$ над кольцом $A$ называется *плоской*, если для любой точной последовательности $A$-модулей $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ точна последовательность $0 \to M' \otimes_A B \to M \otimes_A B \to M'' \otimes_A B \to 0$. Достаточно, впрочем, потребовать инъективность отображения $\mathfrak{A} \otimes_A B \to B$ для любого идеала $\mathfrak{A} \subset A$. Подробнее о плоских кольцах и модулях см. в [23].

Морфизм схем $f: X \to S$ называется *плоским в точке* $x \in X$, если кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ плоско над $\mathcal{O}_{S,f(x)}$. Морфизм $f$ называется *плоским,* если он таков во всех точках $X$. Например, морфизм $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ плоский тогда и только тогда, когда $A$-алгебра $B$ плоская. В частности, открытые вложения являются плоскими морфизмами; напротив, замкнутые вложения очень редко бывают плоскими (только если они еще и открытые). Плоский и структурный морфизм $\mathbf{A}^n_S \to S$. Плоскостность морфизма сохраняется при композициях и заменах базы.

Конечный морфизм $X \to S$ плоский тогда и только тогда, когда он локально свободен (см. п. 5.7 главы 2); для таких морфизмов остается верен принцип постоянства.

## § 4. Алгебраические схемы и их семейства

**4.1. Алгебраические схемы.** *Алгебраической схемой* называется схема конечного типа над полем. Такие схемы наиболее близки к алгебраическим многообразиям. Можно даже сказать, что алгебраическое многообразие — это приведенная алгебраическая схема над алгебраически замкнутым полем. Системы алгебраических уравнений над $K$ с конечным числом неизвестных приводят к алгебраическим схемам, и поэтому стоит остановиться на них подробнее.

Стоит сразу сказать, что топологическое пространство $\operatorname{sp} X$ алгебраической схемы $X$ не всегда дает о ней правильное представление. Например, для любого конечного расширения полей $K \subset K'$ $K$-схема $\operatorname{Spec} K'$ состоит из одной точки, но как они различны! Понять, что за объект перед нами, помогает операция *геометризации.*

**4.2. Геометризация.** Под этим мы понимаем переход от алгебраической $K$-схемы $X$ к $\overline{K}$-схеме $\overline{X} = X \underset{\operatorname{Spec} K}{\times} \operatorname{Spec} \overline{K}$, где $\overline{K}$ — алгебраическое замыкание поля $K$. Если забыть про нильпотенты $\bar{X}$, мы получаем многообразие над $\bar{K}$, т. е. объект, хорошо понятый из предыдущих глав. Схемы $X$ и $\bar{X}$ связаны морфизмом проекции $\pi:\bar{X}\to X$. Для каждой точки $x\in X$ слой $\pi^{-1}(x)=\operatorname{Spec}(k(x)\otimes_K \bar{K})$ — непустая нульмерная схема. В частности, $\pi$ сюръективен, и $X$ надо представлять как фактор-пространство $\bar{X}$ (сравни с п. 1.2).

Кроме того, морфизм $\pi:\bar{X}\to X$ — плоский и по существу конечный; поэтому размерности $X$ и $\bar{X}$ совпадают и теория размерности для алгебраических схем выглядит как для многообразий. Так, если схема $X$ неприводима, размерность ее во всех *замкнутых* точках одинакова и равна степени трансцендентности поля $k(\xi)$ над $K$, где $\xi$ — общая точка $X$.

Стоит сделать одно предостережение. Мы говорили об алгебраическом замыкании $\bar{K}$ как будто это каноническая конструкция. Конечно, все замыкания поля $K$ изоморфны, но не канонически! Например, нет способа выделить один из корней $\sqrt{-1}$ в $\mathbf{C}$. Это сказывается в том, что при геометризации неизоморфные схемы могут стать изоморфными (говорят тогда, что они — *формы* друг друга). Например, $\mathbf{R}$-схемы, заданные уравнениями $T^2=1$ и $T^2=-1$, различны, но становятся изоморфными над $\mathbf{C}$. Аналогично обстоит дело с вещественными кониками $X^2+Y^2+Z^2=0$ и $X^2+Y^2-Z^2=0$.

**4.3. Геометрические свойства алгебраических схем.** При геометризации неприводимая и приведенная схема может стать приводимой и (или) неприведенной. Вот простейший пример. Рассмотрим $\mathbf{R}$-схему $X=\operatorname{Spec}(\mathbf{C})$, это точка. Однако, $\bar{X}=\operatorname{Spec}(\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})$ состоит из двух точек. Впрочем, здесь схема $\bar{X}$ приведена; в характеристике $p>0$ могут появиться и нильпотенты. Пусть $\alpha\in K$ не является $p$-й степенью, $K'=K(\alpha^{1/p})$ и $X=\operatorname{Spec} K'$. Тогда $\bar{X}$—спектр кольца $K'\otimes_K \bar{K}=\bar{K}[T]/(T^p-\alpha)=$ $=\bar{K}[T]/(T-\alpha^{1/p})^p\simeq\bar{K}[S]/(S^p)$, где $S=T-\alpha^{1/p}$.

Если все же некоторое свойство схем верно для геометризации $\bar{X}$, говорят, что $K$-схема $X$ обладает этим свойством *геометрически*. Так $X$ называется *геометрически неприводимой* (соответственно *геометрически приведенной*, *геометрически нормальной*, *геометрически регулярной*), если $\bar{X}=X\otimes_K \bar{K}$ неприводима (соответственно приведенная, нормальная, регулярная); в этом случае $X$ также неприводима (приведена и т. д.). Обратное, как мы видели, верно не всегда; однако если поле $K$ совершенное, а $X$ приведенная (соответственно нормальная или регулярная) $K$-схема, то такой же будет и ее геометризация $\bar{X}$.

Отметим, что геометрически регулярная $K$-схема $X$ называется также *гладкой*, ибо это эквивалентно гладкости многообразия $\overline{X}$.

**4.4. Семейство алгебраических схем.** Пусть $f: X \to S$ — морфизм конечного типа. Тогда для каждой точки $s \in S k(s)$-схема $X_s = f^{-1}(s) = X \times_S \operatorname{Spec} k(s)$ алгебраическая. Поэтому морфизмы конечного типа можно представлять себе как семейства алгебраических схем, параметризованные точками $S$. При этом специальные члены такого семейства могут довольно сильно отличаться от «общих». Заметим, что теперь понятию «общий» слой можно придать смысл слоя над общей точкой базы $S$ (когда $S$ неприводима, что часто молчаливо предполагается). Как правило, свойства общего слоя наследуются для слоев над точками из некоторой окрестности общей точки $S$, особенно если речь идет о геометрических свойствах. Например, если общий слой геометрически неприводим, то и «близкие» слои геометрически неприводимы и имеют ту же размерность; размерность «далеких» слоев может при этом подскакивать, как мы видели в главе 2.

Таких скачков размерности не происходит, если морфизм $f: X \to S$ плоский; в этом случае все слои $X_s$ имеют одинаковую размерность, которая обозначается $\dim(f)$ и называется относительной размерностью $f$. Если морфизм $f$ вдобавок проективный, то от $s \in S$ не зависит степень $X_s$, а также другие численные инварианты типа многочлена Гильберта, арифметического рода и т. п. Все это дает основания считать, что слои плоского морфизма конечного типа варьируются «непрерывно». Важно отметить, что такое понимание «непрерывности» имеет смысл и хорошо работает и в том случае, когда база $S$ имеет нильпотенты (например, когда $S$ — спектр локального артинова кольца, что позволяет построить теорию деформации схем и многообразий).

Даже при анализе одного конкретного многообразия его полезно бывает включать в семейство. Так, включая особенность в версальное семейство деформаций, мы как бы расправляем эту особенность, что позволяет более детально проследить ее генезис и строение [1]. Другой пример: пусть дано многообразие $X_{\mathbf{Q}}$ над полем $\mathbf{Q}$; тогда существует схема конечного типа $X$ над $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$, слой которой над общей точкой изоморфен $X_{\mathbf{Q}}$. Здесь многообразие $X_{\mathbf{Q}}$ раздвигается в арифметическом направлении. Применение к такой арифметической схеме $X$ понятий и методов алгебраической геометрии, особенно теории пересечений и теории когомологий, приводит к различным интересным теоретико-числовым следствиям.

**4.5. Гладкие семейства.** Морфизм конечного типа $f: X \to S$ называется *гладким*, если он плоский и если все слои его — гладкие алгебраические схемы. Гладкий морфизм относительной размерности 0 называется *этальным*. Если схема $S$ регулярна, а морфизм $X \to S$ гладкий, то схема $X$ также регулярна.

Гладкие морфизмы обладают следующим свойством инфинитезимального подъема. Пусть дана $S$-схема $Y$ и ее замкнутая подсхема $Y_0$ с тем же топологическим пространством, что и $Y$. Тогда если морфизм $f: X \to S$ гладкий, то любой $S$-морфизм $Y_0 \to X$ продолжается локально до $S$ — морфизма $Y \to X$). Более точно, если схема $Y$ аффинна, любой $Y_0 \to X$ продолжается до $Y \to X$. Такое продолжение единственно, если $f: X \to S$ этальный.

Как и в случае многообразий, гладкость морфизма тесно связана с его дифференциальными свойствами. Видимо нельзя сказать, что такое дифференциальная форма (или касательное расслоение) на произвольной схеме. Однако для относительных схем эти понятия имеют смысл и вводятся так же, как для многообразий (см. п. 7.7 главы 1). Пусть дана $S$-схема конечного типа $X$; *пучком относительных дифференциалов* $X$ над $S$ называется конормальный пучок к диагонали в $X \times_S X$. Обозначается он как $\Omega^1_{X/S}$; при естественном отождествлении диагонали с $X$ пучок $\Omega^1_{X/S}$ — когерентный пучок на $X$. Конструкция $\Omega^1$ коммутирует с заменой базы и контравариантна. Пучки высших дифференциалов $\Omega^p_{X/S}$ строятся, как обычно, с помощью внешних степеней.

Для алгебраической $K$-схемы $X$ гладкость ее над $\operatorname{Spec} K$ эквивалентна тому, что пучок $\Omega^1_{X|K}$ как $\mathcal{O}_X$-модуль локально свободен ранга $\dim X$. Поэтому гладкость морфизма $f: X \to S$ равносильна выполнению двух свойств: $f$ плоский и $\Omega^1_{X|S}$ — локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль ранга $\dim(f)$.

## ЛИТЕРАТУРА

В настоящее время имеется несколько современных изложений основ алгебраической геометрии, и каждое из них по своему хорошо. Прежде всего надо назвать грандиозный по замыслу, но так и оставшийся незавершенным труд Гротендика «Элементы алгебраической геометрии», или EGA [33]—[36]; из запланированных 13 глав вышли лишь 4, заняв при этом 8 книг. Впрочем, многие не вошедшие в EGA темы, разбираются в SGA (см. [37]—[40], а также библиографию к [41]). В EGA изложение ведется на языке схем и в максимальной общности. Более облегченные введения в теорию схем представляют [8], [28], [45], [53].

Изложение алгебраической геометрии с большим акцентом на алгебраические многообразия и классические вопросы имеется в [15], [41]. Алгебраическим многообразиям над полем комплексных чисел и применению, наряду с алгебраическими, аналитических и трансцендентных методов посвящены книги [32], [56]. Близко к ним стоит [13], где рассказывается о комплексно-аналитических множествах. Как примеры книг догротендиковского периода приведем [20], [43], [49], [58], [59].

Некоторые книги из списка литературы посвящены более специальным вопросам. По теории пересечений появилась книга [29]; близкая к ней $K$-теория излагается в [9]. С уклоном в бирациональную геометрию написана [45]. В [22], [44], [62] рассказывается про алгебраические группы, в [54],

[55] — про абелевы многообразия. Книги [19, 23, 65] содержат все нужные сведения из коммутативной алгебры. Дифференциальное исчисление на многообразиях излагается в [25], [26], [50], [64].


1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.,* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982, 302 с.
2. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.,* Об одном классе квазиоднородных аффинных многобразий. Изв. АН СССР, сер. мат., 1972, *36,* № 4, 749—764
3. *Данилов В. И.,* Геометрия торических многообразий. Успехи мат. наук, 1978, *33,* № 2, 85—135
4. *Долгачев И. В.,* Абстрактная алгебраическая геометрия. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. 1972, *10,* 46—112
5. *Зак Ф. Л.,* Проекции алгебраических многообразий. Мат. сб., 1981, *116,* № 4, 593—602
6. *Исковских В. А.,* Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат.: 1979, *12,* 59—157
7. *Манин Ю. И.,* К пятнадцатой проблеме Гильберта. В кн. «Проблемы Гильберта». М.: Наука, 1969, 175—181
8. —, Лекции по алгебраической геометрии. Ч. I, Аффинные схемы. М.: МГУ, 1970, 133 с.
9. —, Лекции по алгебраической геометрии. Ч. 2, К-функтор в алгебраической геометрии. М.: МГУ, 1971, 86 с.
10. —, Новые размерности в геометрии. Успехи мат. наук, 1984, *39,* № 6, 47—74
11. *Суслин А. А.,* Проективные модули над кольцом многочленов свободны. Докл. АН СССР, 1976, *229,* № 5, 1063—1066
12. *Тюрин А. Н.,* Средний якобиан трехмерных многообразий. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат.: 1979, *12,* 5—57
13. *Чирка Е. М.,* Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985, 272 с.
14. *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат.: Фундам. направления, 1986, *11,* 290 с.
15. —, Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972, 567 с.
16. *Abhyankar S. S.,* On the problem of resolution of singularities. В кн. «Труды международного конгресса математиков, 1966». М. 1968, стр. 469—480
17. *Angéniol B.,* Familles de Cycles Algébriques—Schema de how. Berlin; Springer, 1981, 140 p.
18. *Artin M.,* Algebraic Spaces. Yale Math. Monographs 3, New Haven: Yale Univ. Press, 1971 (Пер. на рус. яз.; *Артин Ж.,* Алгебраические пространства. Успехи мат. наук, 1980, *26,* № 1, 181—205)
19. *Atiyah M., Macdonald I.,* Introduction to Commutative Algebra, Mass.: Addison—Wesley, 1969 (Пер. на рус. яз.: *Атья М., Макдональд И.,* Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972, 160 с.)
20. *Baldassarry M.,* Algebraic varieties. Berlin: Springer, 1956, 195 p. (Пер. на рус. яз.: *Бальдассарри М.,* Алгебраические многообразия. М.: ИЛ, 1961, 315 с.)
21. *Bass H., Connell E. H., Wright D.,* The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse. Bull. Amer. Math. Soc., 1982, *7,* 287—330
22. *Borel A.,* Linear algebraic groups. N.-Y.: Benjamin, 1969, 398 p. (Пер. на рус. яз.: *Борель А.,* Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972, 269 с.)
23. *Bourbaki N.,* Algèbre Commutative. Paris: Hermann, 1961—1965 (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.,* Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971, 707 с.)
24. —, Theory spectrales. Paris: Hermann, 1967, 166 p. (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.,* Спектральная теория. М.: Мир, 1972, 183 с.)

25. —, Variétés différentielles et analytiques. Paris: Hermann, 1967—1971 (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки М.*, Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. М.: Мир, 1975, 220 с.)
26. *Cartan H.*, Calcul différentiel. Formes différentielles. Paris, 1967, 178 p. (Пер. на рус. яз.: *Картан А.*, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971, 392 с.)
27. *Deligne P.*, La conjecture de Weil, *1*. Publ. Math. IHES, 1974, *43*, 273—307 (Пер. на рус. яз.: *Делинь П.*, Гипотеза Вейля, *1*. Успехи мат. наук, 1976, *30*, вып. 5, 157—190)
28. *Dieudonne J.*, Algebraic geometry. Adv. Math., 1969, 3, 233—321 (Пер. на рус. яз.: *Дьедонне Ж.*, Алгебраическая геометрия. Математика, Сб. перев. ин. статей, 1962, *9*, № 1, 54—126)
29. *Fulton W.*, Intersection theory. Berlin; Springer, 1984, 470 p.
30. —, *Lazarsfeld R.*, Connectivity and its applications in algebraic geometry. In «Algebraic Geometry», Berlin: Springer, 1981, 26—92
31. *Godement R.*, Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann, 1958, 283 p. (Пер. на рус. яз.: *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961).
32. *Griffiths Ph., Harris J.*, Principles of algebraic geometry. N.-Y.: Interscience, 1978, 813 p. (Пер. на рус. яз.: *Гриффитс Ф., Харрис Дж.*, Принципы алгебраической геометрии, М.: Мир, 1982)
33. *Grothendieck A., Dieudonne J.*, Eléments de géometrie algébrique. I. Heidelberg: Springer, 1971, 466 p. (Пер. на рус. яз. Успехи мат. наук., 1972, *27*, № 2, 135—148)
34. —, —, Eléments de géometrie Algébrique. II. Publ. Math. IHES, 1961, *8*, 222 p.
35. —, —, Eléments de geométrie algébrique. III. Publ. Math. IHES, 1961—1963, *11, 17*.
36. —, —, Elements de geométrie algébrique. IV. Publ. Math. IHES, 1964, *20*, 1965, *24*; 1966, *28*; 1967, *32*.
37. —, *SGA 1*, Revetements étale et groupe fondamental. Berlin: Springer, 1971, 447 p.
38. —, *SGA 2*, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théoremes de Lefschetz locaux et globaux. Amstr.: North-Holland, 1968, 287 p.
39. —, *Demazure M., SGA 3*, Schémas en groupes. I. Berlin: Springer, 1977, 562 p.
40. —, *Deligne P., Katz M., SGA 7*, Groupes de Monodromie en Geométrie Algébrique. Berlin: Springer, 1973, 438 p.
41. *Hartshorne R.*, Algebraic geometry. N.-Y.: Springer, 1977, 496 c. (Пер. на рус. яз.: *Хартсхорн Р.*, Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981, 599 с.)
42. —, Varieties of small codimension in projective space. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, *80*, 1017—1032.
43. *Hodge W. V. D., Pedoe D.*, Methods of algebraic geometry, *V. 2*. Cambr. Univ. Press, 1952 (Пер. на рус. яз.: *Ходж В., Пидо Д.*, Методы алгебраической геометрии. Т. *2*. М.: ИЛ, 1954)
44. *Humphreys J. E.*, Linear algebraic groups. N.-Y.: Springer, 1975, 248 p. (Пер. на рус. яз.: *Хамфри Дж.*, Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980)
45. *Iitaka S.*, Algebraic geometry. An introduction to birational geometry of algebraic varieties, N.-Y.: Springer, 1982, 357 p.
46. *Kleiman S. L.*, Towards a numerical theory of ampleness. Ann. Math., 1966, *84*, 293—344
47. —, The enumerative theory of singularities. In «Real and Complex Singularities», Oslo: Sijthoff and Noordhoff, 1977, 297—396 (Пер. на рус. яз.: *Клейман С. Л.*, Численная теория особенностей, Успехи мат. наук, 1980, *35*, вып. 6, 69—148)
48. *Klein F.*, Vorlesungen über die Sntwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil 1. Berlin, 1926, 385 p. (Пер. на рус. яз.: *Клейн Ф.*, Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: Гостехиздат, 1937)

49. *Lang S.,* Introduction to algebraic geometry. N.-Y.: Interscience publ., 1958, 260 p.
50. —, Introduction to differentiable manifold. N.-Y.: Interscience, 1962, 126 p. (Пер на рус яз.: *Ленг С.,* Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М.: Мир, 1967, 203 с.)
51. *Miyanishi M.,* Non-complete algebraic surfaces. Berlin: Springer, 1981, 244 p.
52. *Mumford D.* Geometric invariant theory. Heidelberg: Springer, 1965, 146 p. (Пер. на рус. яз. в книге: *Дьедонне Ж., Кэролл Дж., Мамфорд Д.,* Геометрическая теория инвариантов. М.: Мир, 1974, 125—256)
53. —, Lectures on curves on an algebraic surface. Princeton; Univ. Press, 1966, 200 p. (Пер. на рус. яз.: *Мамфорд Д.,* Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир,1968, 236 с.)
54. —, Abelian varieties. Oxford: Univ. Press, 1970, 300 p. (Пер. на рус. яз.: *Мамфорд Д.,* Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971, 299 с.)
55. —, Curves and their Jacobians. Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 1975
56. —, Algebraic geometry. *1.* Complex projective varieties. Berlin: Springer, 1976, 186 c. (Пер. на рус. яз. *Мамфорд Д.,* Алгебраическая геометрия, *1.* Комплексные проективные многообразия. М.: Мир, 1979, 256 с.)
57. *Quillen D.,* Projective modules over polynomial rings. Invent. math., 1976, *36,* 167—171
58. *Samuel P.,* Méthodes d'algebre abstraite en géometrie algebrique. Heidelberg: Springer, 1955, 133 p.
59. *Semple J. G., Roth L.,* Introduction to algebraic geometry. Oxford: Univ. Press, 1949
60. *Serre J.-P.,* Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math., 1955, *61,* 197—278 (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.,* Когерентные алгебраические пучки. В сб. «Расслоенные пространства и их приложения», М.: ИЛ, 1958, стр. 372—458)
61. —, Geométrie algébrique et géometrie analytique. Ann. Inst. Fourier, 1956, *6,* 1—42
62. —, Groupes algébriques et corps de classes. Paris: Hermann, 1959, 202 p. (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.,* Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968, 285 с.)
63. —, Algebre locale. Multiplicités. Berlin: Springer, 1965, 190 p. (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.,* Локальная алгебра и теория кратностей. Сб. перев. ин. статей «Математика», 1963, *7,* № 5, 3—93)
64. *Wells R. O.,* Differential analysis on complex manifolds. N.-Y.: Prentice-Holl, 1973, (Пер. на рус. яз.: *Уэллс Р.,* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976, 284 с.)
65. *Zariski O., Samuel P.,* Commutative algebra. V. *1, 2.* Princeton: van Nostrand, 1958, 1960 (Пер. на рус. яз.: *Зарисский О., Самюэль П.,* Коммутативная алгебра. Т. *1, 2.* М.: ИЛ, 1963, 373, 438 с.)

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

## ОГЛАВЛЕНИЕ



Технический редактор *Г. И. Репкина*

Сдано в набор 14.07.88 Подписано в печать 06.12.88
Формат бумаги 60×90[1]/16. Бум. тип. № 2 Литературная гарнитура.
Высокая печать Усл. печ. л. 19,5 Усл. кр.-отт. 19,5 Уч.-изд. л. 20,11
Тираж 1200 экз. Заказ 5834 Цена 1 р. 80 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, Балтийская ул., 14. Тел. 155-43-20

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

**Индекс 56861**

ISSN 0233—6723. ИНТ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 23, 1988, 3—312

УДК 512.772+515.17.32

**В. В. Шокуров, Римановы поверхности и алгебраические кривые (с предисловием И. Р. Шафаревича).** «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 23 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 5—171

**Обзор посвящен вводным идеям, примерам, основным понятиям и результатам теории римановых поверхностей и теории алгебраических кривых. Обсуждаются теоремы существования, численная геометрия кривых, абелевы многообразия и якобианы, тэта-функции. Библ. 75.**

УДК 512.7

**В. И. Данилов.** Алгебраические многообразия и схемы. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 23 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 172—302

Вводятся основные понятия алгебраической геометрии: алгебраического многообразия, морфизма, рационального отображения, гладкости, полноты. Для проективных многообразий излагаются степень многообразия, линейные системы, теория пересечений, многообразия Чжоу. В последней главе предыдущие понятия и результаты переносятся на схемы. Библ. 65.

# ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В 1989 г. ВИНИТИ выпустит в свет

**«АННОТИРОВАННЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ ПО УДК, МКИ И РУБРИКАТОРАМ**

**за период 1971—1985 гг.»**

Структура каждой из трех частей (по УДК, МКИ и рубрикаторам) Указателя включает основной библиографический список, авторский указатель и систематический указатель.

Общее количество наименований составляет более 1500 единиц.

**Цена 1 руб. 40 к.**

**Указатель высылается наложенным платежом.**

Заказы принимаются по адресу: *140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403. Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, отдел распространения. Телефон 553-56-29.*

# ОПЕЧАТКИ

**СПМ, Фундаментальные направления том 23, 1988 г.**

| Страница | Строка | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|
| 41 | 26 снизу | Замечание. 1. | Замечание 1. |
| 70 | 19 сверху | $\mathscr{M}(S_2)\hookrightarrow\mathscr{M}(S_1)$ | $\mathscr{M}(S_2)\rightarrow\mathscr{M}(S_1)$ |
| 114 | 16 снизу | Пример. | Пример |
| 127 | 15 снизу | $\subsetneq$ | $\subseteq$ |
| 154 | 9 снизу | $A_1\rightarrowtail A_2$ | $A_1 \twoheadrightarrow A_2$ |
| 171 | 25 снизу | 1954, 167 с.) | 1954.) |
| 202 | 3 сверху | $X$-многообразия | $X$-многообразий |
| 237 | 10 сверху | $\bar{x}x'$ | $\overline{xx'}$ |
| 252 | 20 снизу | Зарис ского | Зарисского |
| 293 | 7 снизу | произве- | произве- |
| 297 | 8 сверху | $\bar{X}$ | $\tilde{X}$ |
| 299 | 6 сверху | $S$ — морфизма | $S$-морфизма |
| 306 | 24 снизу | — Оболочка линейная | Оболочка линейная |
| 310 | 1 снизу | 3—312 | 3—310 |
| 311 | 1 снизу | схемы | схемы |

Зак. 5834

Ц. 80 к.