ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

ТОМ 25

РГАСНТИ 27.25.17; 27.39.23

ISSN 0233—6723

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

Том 25

Научный редактор и составитель
член-корреспондент АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1985 г.

МОСКВА 1988

1—8311 8

УДК 517.518+517.986.6

КОММУТАТИВНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — 2

Консультирующий редактор-составитель тома
доктор физико-математических наук *Н. К. Никольский*

Рецензенты:
член-корреспондент АН УССР *И. В. Островский*,
доктор физико-математических наук *В. А. Ткаченко*

Научный редактор тома *В. П. Сахарова*

Автор *В. П. Гурарий*

1*

УДК 517.518+517.986.6

ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ КОММУТАТИВНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В. П. Гурарий

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

С давних пор обладающее свойствами периодичности движение рассматривали как результат сложения более простых гармонических движений. Задачи выделения чистых гармоник, скрытых в сложном движении, получили название задач гармонического анализа, а задачи восстановления сложного движения по этим гармоникам были названы задачами гармонического синтеза.

Обнаруженное на рубеже XVIII—XIX веков свойство чистых гармоник подчиняться уравнение $f(x+y)=f(x)f(y)$, x, $y\in\mathbf{R}$, указывало на некоторые групповые принципы, лежащие в основе гармонического анализа. Приблизительно в то же время в арифметике появились так называемые мультипликативные числовые функции, удовлетворяющие для взаимно простых m и n уравнению $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$; рассмотрение этих функций на кольце вычетов по модулю m привело к определению числовых характеров по модулю m. Если ограничиться рассмотрением числового характера χ на группе $G_m{}^*$ обратимых элементов кольца вычетов по модулю m, то получится соотношение $\chi(a\cdot b)=\chi(a)\chi(b)$, a, $b\in G^*$, аналогичное уравнению для чистых гармоник. Эта аналогия не случайна.

Неявно групповая точка зрения сопутствовала гармоническому анализу (и теории чисел) на многих этапах его более чем двухсотлетней истории.

Решающий прорыв был результатом (хорошо подготовленным предществующими исследованиями) шквала работ, уложившихся в одно десятилетие: с середины 20-х до середины 30-х годов нашего века.

Быстрое развитие квантовой механики стимулировало исследования по теории операторов и теории представлений групп. Начатое с середины двадцатых годов интенсивное изучение топологических групп и их представлений привело к открытию Хааром фундаментальной конструкции инвариантного интеграла на топологической групе. Созданная Бором теория почти периодических функций оказала влияние на исследования Винера, Бохнера и многих других аналитиков, благодаря работе которых был расширен технический арсенал гармонического анализа и диапазон его применений (статистическая механика, эргодическая теория, временные ряды и т. д.). Появилось представление об обобщенном преобразовании Фурье, с позиций которого можно было одновременно рассматривать теорию Планшереля и теорию Бора, непрерывный и дискретный спектры. Теория двойственности Понтрягина—ван Кампена открыла дорогу беспрепятственному развитию анализа Фурье на локально компактных абелевых группах, позволяющего рассматривать ряды Фурье, интеграл Фурье и разложения по числовым характерам как объекты одной природы. Теория Петера—Вейля позволила фон Нейману дать анализ почти периодических функций на группах, связывая его с теорией представления групп. Эти и многие другие открытия этого периода привели к включению групповых методов в арсенал средств гармонического анализа.

В результате последующих интенсивных исследований сложилась обширная область — абстрактный гармонический анализ, для которого особенно характерно привлечение в первую очередь групповых методов.

Основные принципы, заложенные в этих методах, история их возникновения и воздействия на развитие многих разделов математики — от математической физики до арифметики, прослеженная до наших дней, отражены в захватывающем обзоре Макки [66], к которому мы неоднократно будем обращаться.

Перечислим некоторые направления исследований в современном гармоническом анализе. Положительно определенные функции и ядра; почти периодические функции и представления; спектральная теория функций и центральная в ней проблема — проблема спектрального синтеза; функции, периодические в среднем на группах и уравнения в свертках; гармонический анализ на вполне несвязных группах и нетригонометрические ряды Фурье (ряды типа Уолша); гармонический анализ на локальных полях и кольце аделей и его приложения в теории чисел и представлений; загадочная банахова алгебра конечных борелевских мер на локально компактных абелевых группах и «сюрпризы», в ней таящиеся, начиная с так называемого «эффекта скрытого спектра» Винера и Питта; тауберова теория и гармонический анализ; трансляционно-инвариантные операторы и инвариантные подпространства (этот перечень можно продолжить) — все это интенсивно развивающиеся темы, продвижение в которых не может обойтись без групповых точек зрения.

Ограниченный объем книги лишает нас возможности даже поверхностно отразить перечисленные выше темы. Однако стремясь достаточно близко подойти к ним и дать представление об общих для них принципах, пытаясь, кроме того, сохранить хотя бы некоторую цельность изложения, мы соединили в книге две независимые статьи.

Первая (глава 1) посвящена задачам гармонического анализа на вещественной оси $\mathbf{R}$. Постановка большинства из них продиктована групповой природой (и, следовательно, возможно их рассмотрение в более общей групповой ситуации), однако решение требует привлечения теоретико-функциональных методов. Иногда эти методы кажутся абсолютно необходимыми, иногда появляется надежда либо трансформировать их так, чтобы они могли быть применены в более общей групповой ситуации, либо найти альтернативный групповой подход.

Во второй (глава 2) мы рассказываем о тех фундаментальных понятиях и фактах, на которые опирается современный абстрактный гармонический анализ. Материал этой главы мы иллюстрируем многочисленными примерами, дающими выход к некоторым перечисленным выше темам.

Несмотря на независимость этих двух глав, пересечение содержащегося в них материала непусто, и если мы свободно оперируем с некоторым понятием и определением в одной из двух глав, не разъясняя его смысла, то соответствующее объяснение следует искать в другой главе, пользуясь, например, прилагаемым предметным указателем.

Поскольку мы часто, особенно во второй главе, будем обращаться к энциклопедической монографии Хьюитта и Росса (см. [51]), то в ссылке на нее будем пользоваться сокращением Х—Р; кроме того, на протяжении всей книги будем употреблять стандартную аббревиатуру — термин ЛКА группа означает локально компактную абелеву группу.

При ссылке на статью из серии «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления» мы указываем лишь автора статьи и номер тома.

Несколько слов о разбиении материала книги и внутренних ссылках на формулы, теоремы, определения и т. д. Каждая глава разбита на параграфы, параграфы — на пункты. Нумерация формул, теорем в пределах каждого пункта своя, если, например, мы ссылаемся в пределах пункта на формулу (2), то имеем ввиду формулу (2) именно из этого пункта. Если ссылка на формулу дается за пределами пункта, то нумерация следующая: например, ссылка на (8.4.1) означает ссылку на формулу 1 пункта 4 из § 8. Аналогично, ссылка на следствие 8.1.4 означает, что его следует искать в § 8 п. 1 под номером 4. Наконец, ссылка на утверждение 2.1.(7) означает, что его нужно искать в (7) п. 1 § 2.

В заключение я благодарю Н. К. Никольского, прочитавшего предварительную рукопись книги и сделавшего ряд критических замечаний, которые я старался учесть. Я благодарен также Ю. И. Любарскому, прочитавшему окончательный вариант рукописи и устранившему ряд имеющихся в ней неточностей.

С отдельными частями рукописи знакомились В. Я. Лин, И. В. Островский, Ю. Л. Родин, В. П. Хавин и Г. М. Хенкин; всем им автор признателен за советы и поддержку.

Глава 1

СВЕРТКА И СДВИГ В КЛАССИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

§ 1. Введение

Если задаться вопросом, какой объект коммутативного гармонического анализа оказывается самым важным, то приоритет придется отдать свертке.

В своей статье в томе 15 В. П. Хавин, усиливая известное высказывание Винера в [97], отмечает, что «... главным объектом и целью коммутативного гармонического анализа являются трансляционно инвариантные операторы».

Как известно (см. упомянутую статью В. П. Хавина или п. 7.9 главы 2), трансляционно инвариантные операторы реализуются в виде свертки и именно о свертке и связанных с ней проблемах и методах мы фактически будем рассказывать в большинстве параграфах этой главы.

Напомним кратко историю свертки (см. [32], [66]) и одновременно расскажем о содержании этой главы.

В появившихся в начале XIX в. работах по дифференциальным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами была замечена возможность записывать решение такого уравнения в виде

$$\int_{\mathbf{R}^n} F(x-y,\ t)\, f(y)\, dy,$$

где f — произвольная функция в $\mathbf{R}^n$, а $F(x,\ t)$ — решение того же уравнения, $x \in \mathbf{R}^n$.

Например, Пуассон (1812) представляет решение задачи электростатики

$$\Delta u = 4\pi\rho \tag{1}$$

в виде

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\rho(y)\, dy}{|x-y|}, \tag{2}$$

где $x \in \mathbf{R}^3$ и, как обычно, $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$ (заметим, что формулу (2) можно получить, применяя к (1) преобразование Фурье).

Позже, занимаясь уравнением теплопроводности $Lu \equiv \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$, $u|_{t=0} = \varphi$ в $\mathbf{R}^{n+1}$, $n=3$, Пуассон записывает его решение в виде

$$\frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}} \varphi(y)\, dy, \quad x^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2. \tag{3}$$

Так что (3) есть свертка на этот раз с регулярным ядром $K(x, t)=\frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^n}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$, которое представляет собой фундаментальное решение уравнения теплопроводности: $LK=\delta$ (δ — дельта-функция в $\mathbf{R}^n$).

Свертки (2) и (3) стали впоследствии главными объектами теории гармонического и параболического потенциалов.

Как регуляризация свертка появилась в мемуаре Дирихле (1829) для записи частной суммы ряда Фурье функции f в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-y)}{\sin\frac{x-y}{2}}f(y)\,dy,$$

и знакопеременность *ядра Дирихле*

$$K(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$$

явилась причиной трудностей, возникающих при попытке представить функцию, периодическую на $\mathbf{R}$, ее рядом Фурье, пути преодоления которых были намечены в знаменитом мемуаре Римана (1853) (см. [79]). Эта работа первоначально появилась в виде конкурсной на замещение вакантной должности доцента; она стала известной с 1867 г. после того, как Дедекинд опубликовал ее в трудах Геттингентского общества наук под названием «О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда»; она содержала строгое определение интеграла Римана, и впоследствии понятия тригонометрического ряда и интеграла развивались параллельно и каждому обобщению одного из этих понятий соответствовало обобщение другого.

Общий принцип регуляризации был рассмотрен Вейерштрассом (1885) (см. [211]) в связи с доказательством его теоремы об аппроксимации непрерывной функции на конечном интервале многочленами.

Вейерштрасс заметил, что интеграл (3) при $n=1$ с непрерывной финитной функцией φ допускает при $t\to 0$ представление в виде

$$\varphi(x)+o(1). \tag{4}$$

Далее, разлагая экспоненту под знаком интеграла (3) в ряд Тейлора и ограничиваясь n членами этого ряда, он получил при $n\to\infty$ и фиксированном t другое представление интеграла (3) в виде

$$p_n(x)+o(1), \quad (p_n(x) \text{ — многочлен}) \tag{5}$$

(соединение (2) и (3) доказывает теорему Вейерштрасса). Наконец, отмечая, что специальный вид ядра

$$K(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \tag{6}$$

получившего название *ядра Гаусса* или *Гаусса—Вейерштрасса*, не по существу, Вейерштрасс ввел более общие положительные регуляризующие ядра (рассматривая семейство функций вида $\frac{1}{\varepsilon}\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, где $\Phi(x)$ — неотрицательная функция из $L^1(\mathbf{R})$, для которой $\int\Phi(x)\,dx=1$) и установил общий принцип регуляризации.

Принцип регуляризации, однако, был положен в основу разнообразных методов суммирования после появления работы Фейера (1903) [169], где появилось следующее выражение для среднего арифметического первых n частных сумм ряда Фурье функции f

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}(x-y)}{\sin\frac{x-y}{2}}\right)^2 f(y)\,dy \tag{7}$$

и было доказано, что $\sigma_n(x)$ стремится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности функции f и сходимость равномерная на каждом интервале непрерывности функции f (теорема Фейера).

Ядро

$$K_n(x)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \tag{8}$$

получило название *ядра Фейера*, а метод суммирования тригонометрических рядов с этим ядром *методом суммирования Фейера*.

Для нас более важно еще одно представление функции $\sigma_n(x)$ в (7), на этот раз в виде интеграла на $\mathbf{R}$

$$\sigma_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n(x-y)}{2}}{n(x-y)^2}f(y)\,dy, \tag{9}$$

где $f(x)$ представляет собой 2π-периодическое продолжение функции f под знаком интеграла в (7) на всю вещественную ось. Это представление (9), дающее важный пример свертки с регулярным ядром на $\mathbf{R}$, было также указано Фейером, само ядро

$$K(x)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{nx^2} \tag{10}$$

называется *ядром Фейера на* $\mathbf{R}$, функция $\sigma_n(x)$ — *суммой Фейера*

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}(S_0+S_1(x)+\ldots+S_n(x)),$$

где $S_k(x)=\sum_{-k}^{k} f_k e^{ikx}$ есть частная сумма Фурье функции f с коэффициентами Фурье f_k, $k=0, \ldots, n$.

Наконец, обратим внимание еще на одну свертку

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_h(x-y)\,f(y)\,dy, \tag{11}$$

где

$$\chi_h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2h}, & x\in(-h, h),\\ 0, & x\notin(-h, h).\end{cases}$$

Это сглаживающее усреднение функции f иногда называют *стекловским усреднением*, а саму свертку (9) — *сверткой Стеклова*. Такие ядра использовались В. А. Стекловым, начиная с 1907 г. в его методе сглаживания при решении различных задач математической физики ([145], [206]).

В начале первой главы мы снова вернемся к регуляризационным ядрам и покажем, как с их помощью решаются вопросы, относящиеся к формулам обращения.

Если $K(x)$ — регуляризационное в указанном выше смысле ядро на $\mathbf{R}$, то $k(x_1)\cdot\ldots\cdot k(x_n)$ — соответствующее ядро на $\mathbf{R}^n$.

Как мы увидим позже, регуляризационные ядра, служащие аналогичным целям на произвольных локально компактных абелевых группах, в самом деле, удается построить с помощью операции свертки на группе. Класс ядер, построенный для групповых алгебр и связанных с ними пространств, получит название аппроксимативных единиц.

Представления (1), (4), (5) вида

$$K*f=\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\,f(y)\,dy \tag{12}$$

получили название *свертки на* $\mathbf{R}$, а операция $K*f$ была названа *операцией свертывания* или просто *сверткой*.

Поначалу роли «партнеров» K и f, участвующих в соединении $K*f$, были не равнозначны, с помощью ядра K подвергался регуляризации некоторый класс функций f.

По-видимому, свертку, как некоторый аналог умножения с «равными правами» для сомножителей, впервые рассматривал П. Л. Чебышев (1890) [146] при изучении композиции вероятностных законов.

В 1920 г. Даниэль [159] определяет свертку двух произвольных мер на $\mathbf{R}$ и указывает, что преобразование Фурье переводит эту операцию в обычное умножение.

И все же фундаментальная важность свертки как умножения в групповой алгебре компактной группы была по настоящему понята лишь в 1927 г. Г. Вейлем (см. [8]) в связи с созданием теории представлений компактных групп. Такое понимание с общих позиций абстрактного гармонического анализа нашло отражение в монографии А. Вейля (1940) [90], посвятившего свертке целую главу, в которой были синтезированы все ранние представления о свертке как умножении в групповой алгебре, как двойственной относительно преобразования Фурье операции к обычному умножению функций на абелевых группах, как структурной операции для образования положительно определенных функций на группе.

Следует сказать, что в классическом гармоническом анализе, в теории преобразования Фурье на $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^n$ значение алгебраического характера свертки было понято далеко не сразу, ибо аналитики, как замечает Бурбаки [33] «... обращаясь к интегралу Фурье, старались главным образом найти все более и более широкие условия справедливости различных формул «обращения» и несколько пренебрегали его алгебраическими свойствами».

То обстоятельство, что алгебраические стороны преобразования Фурье у аналитиков, скажем, первой трети XX в. были несколько затушеваны, отчетливо можно наблюдать в получивших большую известность монографиях Титчмарша «Введение в теорию интеграла Фурье» [87] и Н. Винера «Интеграл Фурье и некоторые его приложения» [97]. Но если у Титчмарша эти алгебраические аспекты возникают лишь тогда, когда речь идет о приложениях интеграла Фурье, то само содержание монографии Винера, главные ее результаты настолько близко затрагивают алгебраическую природу умножения-свертки, что сейчас можно удивляться тому, что на это обстоятельство немедленно не обратили внимания.

Центральное место в монографии Винера занимает его аппроксимационная теорема (дающая необходимое и достаточное условие полноты семейства всех сдвигов функции пространства $L^1(\mathbf{R})$) и равносильная ей тауберова теорема. Эту знаменитую теорему, лежащую у истоков спектральной теории ограниченных функций, оказалось возможным трактовать как теорему о непустоте спектра или как задачу гармонического анализа. Эта теорема, ее различные варианты и обобщения обсуждаются в §§ 6, 11, 12 этой главы, а также в § 7 главы 2 в связи с проблематикой теории банаховых алгебр.

В монографии Винера и Пэли [72] приводится вариант аппроксимационной теоремы, приспособленный для полуоси. Там же буквально рядом с этим результатом излагается знаменитый метод Винера—Хопфа нахождения решения сверточного уравнения на полуоси (см. п. 5.9). Синтез этих двух тем позволил впоследствии М. Г. Крейну рассмотреть факторизационные задачи для широкого и важного класса ядер и получить законченные результаты, что привело к созданию целого направления в теории сингулярных уравнений. И здесь можно удивляться тому, что Винер не соединил результаты двух тем.

Заметим, далее, что в основе операционного исчисления Хевисайда—Микусинского лежит известная теорема Титчмарша о свертке на полуоси: если функции f_1 и f_2 непрерывны на $[0, \infty)$ и их свертка

$$(f_1 * f_2)(\tau) = \int_0^\tau f_1(\tau - t) f_2(t)\, dt$$

тождественно равна нулю, то, по крайней мере, один из «сомножителей» есть тождественный нуль (см. [87, стр. 416]).

Эта теорема, в свою очередь, является следствием теоремы Титчмарша о носителях свертки: если функции f и g суммируемы на интервале $L(0, \gamma)$ и

$$\int_0^\tau f(t)\, g(\tau - t)\, dt = 0$$

для почти всех $\tau \in (0, \gamma)$, то $f(t) = 0$ для почти всех $t \in (0, \alpha)$, $g(t) = 0$ для почти всех $t \in (0, \beta)$ и $\alpha + \beta = \gamma$ (см. [87, стр. 415]).

Любопытно отметить, что последняя теорема является частным случаем теоремы о непустоте спектра в пространстве $L^\infty(\mathbf{R})$, приведенной в п. 12.5. Ей можно придать такую формулировку (см. [111], [112]). Если функция $g \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$ и обращается в нуль вне интервала $(0, \gamma)$, то слабое-* замыкание линейной оболочки всех ее левых сдвигов совпадает с $L^\infty(0, \gamma)$ тогда и только тогда, когда нет примыкающего к γ интервала, на котором g обращается в нуль почти всюду.

Аналогичная теорема справедлива для функций пространства L^2 и мы ее отметили в п. 6. 7. (1).

Оказывается, что на $\mathbf{R}^+$ имеются другие пространства функций, обладающие тем свойством, что левые сдвиги каждой функции из пространства порождают все пространство в указанном выше смысле.

Обозначим через $B_{\frac{1}{2}, \alpha}$ подпространство (замкнутое) пространства $L^\infty(\mathbf{R}^+)$, состоящее из всех функций, которые продолжаются на всю комплексную плоскость как целые функции порядка $\frac{1}{2}$ типа $\leqslant \alpha$, $\alpha \geqslant 0$.

В [111] доказано, что если $g \in B_{\frac{1}{2},\alpha}$ и тип g в точности равен α, то слабое-* замыкание линейной оболочки всех ее левых сдвигов совпадает с $B_{\frac{1}{2},\alpha}$.

Перечисленные факты оказались ключевыми при построении спектральной теории ограниченных функций

Заметим, в заключение, что в последнее время Домаром, И. В. Островским и А. А. Боричевым получены различные обобщения теоремы Титчмарша о носителях свертки. Однако мы не имеем возможности остановится более подробно ни на результатах автора, приведенных выше, ни на этих обобщениях.

Осталось сказать, что в §§ 1—3 мы имеем дело с регулизационными ядрами, в §§ 8—10 — с положительными ядрами, причем результаты § 10 можно трактовать как тонкие теоремы о сверточных композициях.

В § 4 мы имеем дело с оператором Фурье, собственными функциями этого оператора в $L^2(\mathbf{R})$ и уравнением для квантового гармонического осциллятора. В самое последнее время этими вопросами стали интересоваться для случая, когда $\mathbf{R}$ заменяется полем вычетов по простому модулю или полем $\mathbf{Q}_p$.

В заключение, несколько слов о § 7. Известно, что функцию $f \in L^2(\mathbf{R})$ можно представить в виде $f = f_1 + f_2$, где f_1, f_2 принадлежат классам Харди H^2 в верхней и соответственно нижней полуплоскости комплексной плоскости. Функции f_1 и f_2 оказываются пропорциональными интегралам Коши $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-z}\,dx$, когда z меняется в верхней или нижней полуплоскости, соответственно. Возникает вопрос, как ставить аналогичную задачу для случая растущих функций. Оказывается, что существует постановка, приводящая к любопытному обобщению преобразования Фурье и допускающая интересную интерпретацию на языке теории струны М. Г. Крейна.

§ 2. Преобразование Фурье в пространстве $L^1(\mathbf{R}^n)$

2.1. Простейшие свойства преобразования Фурье. В евклидовом n-мерном пространстве $\mathbf{R}^n$ рассматривается совокупность суммируемых (т. е. измеримых, абсолютно интегрируемых по Лебегу) комплексных функций $L^1(\mathbf{R}^n)$, образующих банахово пространство относительно нормы $\| f \| = \int\limits_{\mathbf{R}^n} | f(x) |\, dx$.

Мы будем заниматься также пространствами $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \leqslant \infty$, норма в которых определена как

$$\| f \|_p = \left(\int_{\mathbf{R}^n} | f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \tag{1}$$

$$\| f \|_\infty = \operatorname{esssup} | g(x) |, \quad p = \infty. \tag{2}$$

Пространство $L^p(\mathbf{R}^n)$ становится банаховым пространством относительно нормы $\|\cdot\|_p$, если отождествить функции этого пространства, совпадающие почти всюду (в действительности, элементами этого пространства следует считать соответствующие классы эквивалентности; говоря о функции $f \in L_p(\mathbf{R}^n)$, мы каждый раз будем иметь в виду какой-нибудь представитель класса эквивалентности). Как обычно, функция с конечной нормой $\|\cdot\|_\infty$ называется в существенном ограниченной ($\|g\|_\infty = \operatorname{esssup} |g| = \inf \sup |g|$, где supremum берется по всем $x \in \mathbf{R}^n \setminus N$, N — некоторое подмножество в $\mathbf{R}^n$ нулевой лебеговой меры, а infimum — по всем таким N).

Если $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, пространства $L^p(\mathbf{R}^n)$ и $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$ взаимно сопряжены как банаховы пространства, а билинейную форму

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \overline{g(x)}\, dx \tag{3}$$

при фиксированной $g \in L^{p'}(\mathbf{R}^n)$ (в этом месте мы не исключаем значения $p' = \infty$, считая тогда $p = 1$) можно рассматривать как ограниченный линейный функционал в $L^p(\mathbf{R}^n)$.

В случае, когда $p = 2$, пространство $L^2(\mathbf{R}^n)$ гильбертово и билинейная форма (3) является скалярным произведением.

Заметим, что $L^p \not\subset L^q$ при $p \neq q$. Полезно отметить, что совокупность простых финитных функций (с конечным множеством значений) образует плотное подмножество в $L^p = L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$. То же самое справедливо в отношении семейства всех финитных гладких или даже бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbf{R}^n$.

Для функции $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ определяется *преобразование Фурье*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(y)\, e^{-iyx} dy. \tag{4}$$

Здесь и далее $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $xy = x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, $|x| = \sqrt{(xx)}$. В случае, когда нужно подчеркнуть, что преобразование Фурье — это оператор Фурье, будем применять для него обозначение $\mathcal{F}$, так что $\mathcal{F} f = \hat{f}$.

Очевидны простейшие свойства преобразования Фурье:

(a) $\mathcal{F}$ — аддитивное и однородное преобразование $\mathcal{F}: L^1(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{F}L^1(\mathbf{R}^n) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{F}^1(\mathbf{R}^n)$.

(b) Функция $\hat{f}(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, ограничена, равномерно непрерывна и

$$\|\hat{f}(x)\|_\infty \leqslant \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \|f\|_1. \tag{5}$$

(c) Функция $\hat{f}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ (лемма Римана — Лебега). Ввиду особой важности свойства (c), несколько слов о доказательстве. Поскольку простые финитные функции плотны в $L^1(\mathbf{R}^n)$, а их преобразования Фурье образуют по равномерной норме плотное подмножество в $\mathcal{F}^1(\mathbf{R}^n)$, то остается проверить, что для простой функции выполняется (5).

Если ввести в рассмотрение банахово пространство $C_0(\mathbf{R}^n)$ непрерывных функций в $\mathbf{R}^n$, стремящихся к нулю на бесконечности, с нормой $\|f\|_\infty = \max\limits_{x \in \mathbf{R}^n} |f(x)|$, то, объединяя (a) — (c), видим, что $\mathcal{F}: f \to \hat{f}$ — ограниченный линейный оператор, действующий из $L^1(\mathbf{R}^n)$ в $C_0(\mathbf{R}^n)$.

Определение преобразования Фурье немедленно распространяется на конечные борелевские меры μ в $\mathbf{R}^n$

$$\hat{\mu}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-iyx} d\mu(y). \tag{6}$$

Но здесь можно лишь утверждать, что преобразование Фурье $\mathcal{F}: \mu \to \hat{\mu}$ действует как ограниченный оператор $\mathcal{F}: M(\mathbf{R}^n) \to CL^\infty(\mathbf{R}^n)$. (Мы обозначили через $M(\mathbf{R}^n)$ банахово пространство всех конечных комплексных борелевских мер, в котором норма определяется как полная вариация $|\mu|$ меры μ; напомним, что $M(\mathbf{R}^n)$ — сопряженное пространство к $C_0(\mathbf{R}^n)$.) Через $CL^\infty(\mathbf{R}^n)$ обозначается пространство всех ограниченных непрерывных функций в $\mathbf{R}^n$.

Без труда проверяются также следующие свойства преобразования Фурье:

(d) Если α — вещественное число, то $\mathcal{F} f(\alpha y) = \frac{1}{\alpha^n} \hat{f}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

(e) $(f_t(y))\hat{} = e^{-ixt} \hat{f}(x)$; функция $f_t(y)$, определенная формулой $f_t(y) = f(y - t)$, t — постоянный вектор из $\mathbf{R}^n$, называется сдвигом функции $f(y)$.

(f) $(f(y) e^{ity})\hat{} = \hat{f}(x - t)$.

(g) Если $f(y) = f_1(y_1) \ldots f_n(y_n)$, то $\hat{f}(x) = \hat{f}_1(x_1) \ldots \hat{f}_n(x_n)$.

(h) Если функция f радиальная, т. е. зависит лишь от $|x|$, то ее преобразование Фурье обладает тем же свойством (достаточно обратить внимание на то, что функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, радиальная тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно вращений пространства вокруг точки $x = 0$, т. е. когда $f(Tx)=f(x)$ для любого ортогонального преобразования T, и что для такого T $(Tx, y)=(x, T^{-1}y)$.

(i) Если функция $f(y)$ вместе с ее производной $\partial f/\partial y_k$ принадлежит $L^1(\mathbf{R}^n)$, то $\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)^{\wedge}=ix_k\hat{f}(x)$.

(j) Если $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$ и $y_k f(y)\in L^1(\mathbf{R}^n)$, то функция $\hat{f}(x)$ дифференцируема по x_k и

$$\left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}\right)=(-iy_k f(y))^{\wedge}.$$

Формулы (i) и (j) подчеркивают операционный характер преобразования Фурье и распространяются на дифференциальные операторы $P(D)$, ассоциированные с многочленами от n переменных $P(X)=P(X_1, \ldots, X_n)$. Не входя в детали, запишем их в виде

$$\begin{gathered} P(D)\hat{f}(x)=(P(-iy)f(y))^{\wedge}(x), \\ (P(D)f)^{\wedge}(x)=P(ix)\hat{f}(x). \end{gathered} \tag{7}$$

2.2. Свертка. Для функций f_1, $f_2\in L^1(\mathbf{R}^n)$ их *сверткой* называется функция f, записывающаяся в виде

$$f(x)=(f_1*f_2)(x)=\int\limits_{\mathbf{R}^n} f_1(x-y)f_2(y)\,dy. \tag{1}$$

Заметим, что функция $f(x)$ может не существовать при всех значениях x. (Легко построить соответствующий пример даже при $n=1$. Однако замечая, что функция $f_1(x-y)f_2(y)$ измерима в декартовом произведении $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$, легко показать, что f существует всюду в $\mathbf{R}^n$, принадлежит $L^1(\mathbf{R}^n)$ и L^1-норма f не превосходит произведения норм сворачиваемых функций.

Очевидные свойства умножения-свертки:

(a) $f_1*f_2=f_2*f_1$,

(b) $(\alpha f_1+\beta f_2)*f_3=\alpha f_1*f_3+\beta f_2*f_3$, $\alpha, \beta\in\mathbf{C}$,

(c) $\|f_1*f_2\|\leqslant\|f_1\|\cdot\|f_2\|$

означают, что пространство $L^1(\mathbf{R}^n)$ с операцией умножения (1) можно рассматривать как коммутативную банахову алгебру (коммутативное нормированное кольцо: из равенства $f_1*f_2=0$ отнюдь не следует, что один из сомножителей обращается в нуль).

О банаховых алгебрах, составляющих одну из ключевых тем абстрактного гармонического анализа, мы расскажем в главе 2. Однако уже сейчас мы будем пользоваться некоторыми важнейшими понятиями этой теории, стараясь, по возможности, не слишком часто ссылаться на еще не изложенную саму теорию.

Банахова алгебра $L^1(\mathbf{R}^n)$ не обладает единицей, т. е. функцией $\mathbf{1}(x)$ такой, что $(\mathbf{1}*f)(x)=f(x)$. Тем не менее, можно формально присоединить к $L^1(\mathbf{R}^n)$ элемент с таким свойством, рассматривая расширенную алгебру $V(\mathbf{R}^n)$, как совокупность элементов вида $\alpha 1+\beta f$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ и $\|\alpha 1+\beta f\|=|\alpha|+|\beta|\,\|f\|_1$, f пробегает $L^1(\mathbf{R}^n)$. Для алгебры $V(\mathbf{R}^n)$ свойства (a)—(c) сохраняются.

Отметим еще одно важное свойство свертки функций из $L^1(\mathbf{R}^n)$

(d) $(f_1 * f_2)\hat{}=\hat{f}_1\cdot\hat{f}_2$, которое распространяется на элементы банаховой алгебры $V(\mathbf{R}^n)$, если положить $(1(x))\hat{}=1$; так что для $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ и $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$

$$(\alpha 1+\beta f)\hat{}=\alpha+\beta\hat{f}.$$

Если свойство $(1*f)(x)=f(x)$ относить к функциям $f\in L^1(\mathbf{R}^n)\cap C_0(\mathbf{R}^n)$, то становится ясно, что элемент $1(x)$ заимствован из алгебры $M(\mathbf{R}^n)$ конечных борелевских мер и представляет собой меру, отвечающую единичной массе, сосредоточенной в точке $x=0$, или так называемую *δ-функцию*. Действительно, наряду со сверткой (1), можно определить свертку функции $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$ и меры $\mu\in M(\mathbf{R}^n)$

$$(f_1*\mu)(x)=\int_{\mathbf{R}^n} f_1(x-y)\,d\mu(y), \tag{2}$$

которая существует также для почти всех x и принадлежит $L^1(\mathbf{R}^n)$. Более того, можно определить свертку двух мер μ_1 и μ_2 из $M(\mathbf{R}^n)$, например, рассматривая ограниченный линейный функционал Φ в банаховом пространстве функций $f\in C_0(\mathbf{R}^n)$ вида

$$\Phi(f)=\int\int f(x+y)\,d\mu_1(x)\,d\mu_2(y). \tag{3}$$

Ясно, что $|\Phi(f)|\leqslant\|f\|_\infty\cdot\|\mu_1\|\cdot\|\mu_2\|$. Согласно теореме Рисса, существует единственная мера $\mu\in M(\mathbf{R}^n)$ такая, что

$$\Phi(f)=\int f(x)\,d\mu(x). \tag{4}$$

Эта мера называется *сверткой* мер μ_1 и μ_2 и обозначается

$$\mu=\mu_1*\mu_2. \tag{5}$$

Нетрудно дать непосредственное определение свертки мер. Для свертки мер также выполнены условия (a)—(c). Поэтому пространство $M(\mathbf{R}^n)$ можно рассматривать как банахову алгебру относительно умножения-свертки. Поскольку между всеми функциями из $L^1(\mathbf{R}^n)$ и всеми абсолютно непрерывными мерами из $M(\mathbf{R}^n)$, согласно теореме Радона—Никодима, существует взаимно однозначное соответствие, то, вкладывая $L^1(\mathbf{R}^n)$ в $M(\mathbf{R}^n)$, можно рассматривать $L^1(\mathbf{R}^n)$ как замкнутую подалгебру алгебры $M(\mathbf{R}^n)$.

Более того, $L^1(\mathbf{R}^n)$ — замкнутый идеал банаховой алгебры $M(\mathbf{R}^n)$ (ясно, что $f*\mu \in L^1(\mathbf{R}^n)$, когда $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $\mu \in M(\mathbf{R}^n)$, и вообще вложение

$$L^1(\mathbf{R}^n) \subset V(\mathbf{R}^n) \subset M(\mathbf{R}^n) —$$

это вложение замкнутых идеалов), $L^1(\mathbf{R}^n)$ является максимальным идеалом алгебры $V(\mathbf{R}^n)$ (как замкнутый идеал, который не содержится ни в одном другом собственном идеале). Аналогично формуле (d), имеем $(\mu_1 * \mu_2)^\wedge = \hat{\mu}_1 \cdot \hat{\mu}_2$. Впоследствии для локально компактной абелевой группы G мы введем в рассмотрение алгебры $L^1(G)$ и $M(G)$. Исследование структуры замкнутых идеалов групповой алгебры $L^1(G)$ позволяет глубоко проникать в природу и строение группы G. Эти исследования, далеко продвинутые для групповой алгебры $L^1(G)$, по сравнению с алгеброй $M(G)$, где еще остается много «белых пятен», составляют одно из центральных направлений гармонического анализа на группах. К ним мы еще вернемся.

2.3. Примеры ядер. 1) Пусть $f(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$. Тогда в силу 2.1 (g), $\hat{f}(\lambda) = \exp\left(-\frac{|\lambda|^2}{2}\right)$, так что эта функция — собственная функция преобразования Фурье в $L^1(\mathbf{R}^n)$ с собственным значением, равным 1.

Рассмотрим функцию $f(\sqrt{\tau}\, x) = e^{-\frac{\tau |x|^2}{2}}$. Преобразование Фурье этой функции пропорционально

$$W(\lambda, \tau) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\tau})^n} e^{-\frac{\lambda^2}{2\tau}}, \quad \tau > 0,$$

называемой, как мы уже отмечали в § 1, *ядром Гаусса — Вейерштрасса*, и свертка произвольной функции f из $L^1(\mathbf{R}^n)$ с этим ядром дает решение уравнения теплопроводности $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$, для которого $u(x, \tau)|_{\tau=0} = f(x)$.

Дальнейшие подробности об этом ядре можно найти в [53]. Выражение

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{\tau x^2}{2}} f(x)\, dx \tag{1}$$

называют *средним Гаусса—Вейерштрасса*; оно может быть определено и в тех случаях, когда f не суммируемая функция. Если предел в (1) существует при $\tau \to 0$ и конечен, то говорят, что *функция f суммируема по Гауссу*.

2) Пусть $f(x) = e^{-|x|}$. Тогда

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{a_n}{(1 + |\lambda|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \qquad (2)$$

и преобразование Фурье функции $f(\nu x)$ при $\nu > 0$ имеет вид

$$P(\lambda, \nu) = \frac{\alpha_n}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{\nu}{(\nu^2 + |\lambda|^2)^{n+1/2}}. \qquad (3)$$

Суммирование с ядром $e^{-\nu|x|}$, $\nu > 0$, называется *суммированием по Абелю*, ядро $P(\lambda, \nu)$ называется *ядром Пуассона*, а свертка функции $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ с ядром Пуассона называется *интегралом Пуассона для полупространства* $\{(x, \nu) : x \in \mathbf{R}^n, \nu > 0\}$ и имеет вид

$$u(x, \nu) = \frac{\alpha_n}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \frac{\nu}{|\nu^2 + (x-y)^2|^{\frac{n+1}{2}}} dy. \qquad (4)$$

3) Пусть $f(x) = f(x_1) \dots f(x_n)$, где

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{2\alpha}\right|, & |t| \leqslant 2\alpha, \\ 0, & |t| > 2\alpha. \end{cases} \qquad (5)$$

Тогда функция

$$\hat{f}(\lambda) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2(\alpha_k \lambda_k)}{\alpha_k \lambda_k^2}, \quad \alpha_j > 0, \ j = 1, \dots, n, \qquad (6)$$

в соответствии со сказанным в § 1, называется *ядром Фейера в* $\mathbf{R}^n$. *Ядром «треугольника»* (5) можно «гасить» любую локально (на каждом компакте в $\mathbf{R}^n$) интегрируемую функцию. С ним и с его преобразованием Фурье — ядром Фейера мы неоднократно будем встречаться. Иногда вместо ядра (5) рассматривают *ядро «трапеции»*, равное 1 на интервале $(-\alpha, \alpha)$, нулю — на интервалах $|x| > \beta$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, и линейной — на дополнительных интервалах.

4) Указанные в 1)—3) ядра принадлежат к введенному в рассмотрение Бохнером классу ядер *типа Фейера*, состоящему из измеримых функций $K(t)$, для которых при некотором $\gamma > 0$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in \mathbf{R}^n} (1 + |t|)^{n+\gamma} |K(t)| < \infty \quad \text{и} \quad \int_{\mathbf{R}^n} K(t)\, dt = 1. \qquad (7)$$

Для них справедлива (см., например, [4])

Теорема (Бохнер). Если K — ядро типа Фейера, а f — измеримая функция, для которой

$$\frac{f(x)}{1 + |x|^{n+\gamma}} \in L^1(\mathbf{R}^n), \qquad (8)$$

то в каждой точке Лебега функции f, а значит, почти всюду имеет место соотношение

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \frac{1}{\varepsilon^n} K\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy. \qquad (9)$$

(Напомним, что точка $x \in \mathbf{R}^n$ называется *точкой Лебега* функции f, если при $\delta \searrow 0$ выполняется следующее соотношение

$$\| \chi_{U_\delta}(y)(f(x+y) - f(x)) \|_1 = 0(\delta^n), \quad \delta \to 0, \qquad (10)$$

где U_δ — шар в $\mathbf{R}^n$ радиуса δ с центром в точке 0; χ_U — характеристическая функция множества U, равная 1 на U и 0 вне U. Согласно теореме Лебега, если функция f — измеримая в $\mathbf{R}^n$, то почти все точки $\mathbf{R}^n$ являются ее точками Лебега.)

Ядра типа Фейера, зависящие от $|x|$, получили название *радиальных*. Из ядер 1)—3) радиальными очевидно являются ядра 1)—2).

Замечание. Поскольку ядро Фейера (6) удовлетворяет условиям (7), то, пользуясь тем, что для периодической, суммируемой на интервале длиной в период, функции условие (8) выполняется автоматически, можно с помощью теоремы Бохнера доказать, что $\sigma_n(x) \to f(x)$ в каждой точке Лебега x функции $f(x)$.

2.4. Формула обращения для $L^1(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{F}^1(\mathbf{R}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Формула обращения для умеренных распределений. Если $f \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{F}^1(\mathbf{R}^n)$, то $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{F}^1(\mathbf{R}^n)$ и справедливы формулы

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \qquad (1)$$

которые показывают, что оператор Фурье $\mathcal{F}$ осуществляет изоморфизм пространства $L^1(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{F}^1(\mathbf{R}^n)$ на себя и что $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I$ (I — тождественный оператор). Вторая из формул (1) определяет так называемое *копреобразование Фурье* $\mathcal{F}^{-1}$, а формулы (1) называются *формулами обращения для копреобразования и преобразования Фурье*, соответственно.

Введем в рассмотрение еще один класс функций, образующий плотное подмножество в $L^1(\mathbf{R}^n)$, инвариантное относительно операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$, — класс $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций таких, что

$$\sup_x |P(x) Q(D) f(x)| < \infty \qquad (2)$$

для любых многочленов p и Q от n переменных.

Важность класса $\mathcal{S}$ объясняется тем, что он представляет собой естественную сферу действия формул (2.1.7). Если топологию в $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ задать полунормами, равными левым частям в (2) при всевозможных P и Q, то $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ превратится в пространство Фреше, а $\mathcal{F}$ окажется непрерывным отображением $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$.

Можно показать [55], что если линейное отображение $A:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ коммутирует с операторами умножения на P и дифференцирования $Q(D)$, где P и Q многочлены, то $A\varphi=c\varphi$, где c — некоторая постоянная, а $\varphi\in\mathcal{S}$.

Пользуясь формулами (2.1.7) и применяя вышесказанное к отображению $A=R\mathcal{F}^2$, где отображение R задается формулой $R\varphi(x)=\varphi(-x)$, заключаем, что $R\mathcal{F}^2=cI$. Осталось заметить, что $\mathcal{F}^{-1}=R\mathcal{F}$. Тогда, применяя отображение $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}=cI$ к функции $\varphi(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, преобразование Фурье которой указано в примере 2.3.1), находим, что $c=1$.

Таким образом (см. Хёрмандер [55]) доказывается теорема.

Теорема 1. Преобразование Фурье $\mathcal{F}:f\to\hat{f}$ — есть изоморфизм пространства $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ на себя; обратное преобразование $\mathcal{F}^{-1}$ задается формулой обращения (1).

Из формулы обращения (1) в $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ немедленно следует формула Парсеваля

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx=\int\limits_{\mathbf{R}^n}\hat{\varphi}(\lambda)\overline{\hat{\psi}(\lambda)}\,d\lambda,\quad \varphi,\psi\in\mathcal{S}. \tag{3}$$

Теперь мы можем определить преобразование Фурье для обобщенных функций, называемых умеренными распределениями.

Определение. Непрерывные линейные функционалы на $\mathcal{S}$ называются *умеренными распределениями*. Множество всех умеренных распределени йобозначается $\mathcal{S}'=\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Для всякого умеренного распределения T его преобразование Фурье $\hat{T}=\mathcal{F}T$ определяется формулой

$$\hat{T}(\varphi)=T(\hat{\varphi}),\quad \varphi\in\mathcal{S},\ T\in\mathcal{S}'. \tag{4}$$

Из формулы обращения для $\mathcal{S}$ следует

Теорема. Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ осуществляет изоморфизм пространства $\mathcal{S}'$ (со слабой-* топологией) на себя и для всякого элемента $T\in\mathcal{S}'$ имеет место формула обращения $T=\mathcal{F}^{1}\mathcal{F}T$.

В частности, если $f\in L^1(\mathbf{R}^n)\cup\mathcal{F}^1(\mathbf{R}^n)$, то $f\in\mathcal{S}$, и формула обращения (1) справедлива для почти всех x. Изменяя f на множестве меры нуль так, чтобы она стала непрерывной, заключаем, что формула обращения Фурье (1) справедлива всюду.

Еще одна возможность вывода формулы обращения (1), указанная И. М. Гельфандом[1] (или см., например, [9]), ос-

[1] Гельфанд И. М., О формуле преобразования Фурье. Матем. просвещение, 1960, 5, 155—159.

нована на представлении n-мерного тора $\mathbf{T}^n$ в виде

$$\mathbf{T}^n=\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$$

и на сведении формулы обращения для интегралов Фурье к формуле обращения для рядов Фурье.

Для простоты рассмотрим случай $n=1$. Имеем

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} f(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_k^{k+1} f(x)e^{-i\lambda x}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \Phi(x,\lambda)\,dx, \tag{5}$$

где

$$\Phi(x,\lambda)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} f(x+k)e^{-i\lambda k}e^{-i\lambda x}, \tag{6}$$

причем ряд в (6) сходится абсолютно и равномерно (даже после дифференцирования Φ по x и λ). Очевидно, что

$$\Phi(x+1,\lambda)=\Phi(x,\lambda). \tag{7}$$

Поэтому для $x\in\mathbf{R}$

$$\Phi(x,\lambda)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\Phi_k(\lambda)\,e^{-2\pi ikx}. \tag{8}$$

Применяя к представлению (8) формулу обращения для рядов Фурье

$$\Phi_k(\lambda)=\int_0^1 \Phi(x,\lambda)\,e^{2\pi ikx}dx,\quad k\in\mathbf{Z}, \tag{9}$$

и подставляя в (9) выражение для $\Phi(x,\lambda)$ из (6), находим, что

$$\Phi_k(\lambda)=\sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda-2\pi k),\quad k\in\mathbf{Z}. \tag{10}$$

Еще раз пользуясь формулой обращения для ряда Фурье (6) при $k=0$, получим равенство

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x,\lambda)\,e^{i\lambda x}d\lambda,$$

подставляя в которое выражение для $\Phi(x,\lambda)$ из (8) с коэффициентами Фурье Φ_k, определенными в (10), приходим к формуле обращения (1).

Связь между преобразованиями Фурье на группах $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Z}$ неоднократно будет обсуждаться особенно, в связи с формулами суммирования Пуассона.

2.5. Формула обращения для $L^1(\mathbf{R}^n)$.

1) Сейчас мы покажем, как по преобразованию Фурье $\hat{f}$ функции $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ восстановить саму эту функцию.

Теорема 1. Пусть k — ядро типа Фейера в $\mathbf{R}^n$ и пусть

$$k(x)=\int_{\mathbf{R}^n} \mathscr{K}(\lambda)\, e^{-i\lambda x} d\lambda, \tag{1}$$

где $\mathscr{K} \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Тогда в каждой точке Лебега функции f справедливо равенство

$$f(x)=\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\lambda)\, \mathscr{K}(\varepsilon\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{2}$$

Доказательство. Перепишем интеграл в правой части (2), пользуясь (1) и применяя теорему Фубини, следующим образом

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\lambda)\, \mathscr{K}(\varepsilon\lambda)\, e^{i\lambda x} dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(y)\, k\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \frac{dy}{\varepsilon^n} = f_\varepsilon(x). \tag{3}$$

Остается применить к функции $f_\varepsilon(x)$ теорему Бохнера (п. 2.3.).

В формулу обращения (2) мы можем подставить вместо $\mathscr{K}$ любое из ядер из 1)—3), получая тем самым конкретные варианты формулы обращения.

Если мы захотим ослабить ограничения на сходимость, потребовав чтобы «средние»

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\lambda)\, \mathscr{K}(\varepsilon\lambda)\, e^{i\lambda x} dx$$

сходились по L^1-норме при $\varepsilon \to 0$, то для этого достаточно предполагать, что обе функции k и $\mathscr{K}$ принадлежат $L^1(\mathbf{R}^n)$.

В рассмотренном в предыдущем пункте случае, когда $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$, мы сможем, пользуясь теоремой Лебега, перейти к пределу под знаком интеграла (2) и получить еще одно обоснование формулы обращения (2.4.1).

2) Из формулы (2) как следствие получается *теорема единственности для преобразования Фурье в* $L^1(\mathbf{R}^n)$. Если две функции из $L^1(\mathbf{R}^n)$ имеют одно и то же преобразование Фурье, то они совпадают почти всюду.

Теорема единственности делает осмысленной задачу восстановления функции по ее преобразованию Фурье.

Формулы обращения вместе с перечисленными выше свойствами преобразования Фурье дают так называемый операционный аппарат теории интеграла Фурье, который позволил в свое время получить точные решения важных для приложений задач математической физики.

Например, применяя сказанное выше, можно доказать следующую теорему, решающую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве.

Теорема 2. Пусть $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Тогда интеграл Пуассона (2.3.4) представляет собой гармоническую функцию u в полупространстве $\mathbf{R}_+^{n+1}$ $(\mathbf{R}_+^{n+1}=\{(x, \nu): x \in \mathbf{R}^n, \nu>0\})$ такую, что

(a) $\lim\limits_{\nu \searrow 0} u(x, \nu)=f(x)$ во всех точках Лебега x функции $f(x)$,

(b) $\int\limits_{\mathbf{R}^n} |u(x, \nu)|\, dx \leqslant \|f\|_1, \quad \nu>0,$

(c) $\lim\limits_{\nu \searrow 0} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |u(x, \nu)-f(x)|\, dx=0.$

Хотя это выходит за рамки нашей темы, стоит сказать, что теорема 2 допускает некоторое обращение, а именно, если $u(x, \nu)$ — гармоническая функция в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ такая, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |u(x, \nu)|\, dx<M<\infty$$

для каждого $\nu>0$,

то функция u допускает представление (2.3.4), в котором выражение $f(y)\,dy$ заменено на $d\mu$, $\mu \in M(\mathbf{R}^n)$. Если же дополнительно предполагается, что

$$\lim_{\nu', \nu'' \searrow 0} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |u(x, \nu')-u(x, \nu'')|\, dx=0,$$

то упомянутая мера μ абсолютно непрерывна, так что $d\mu= =f(y)\,dy$, $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ и для u выполняются условия (a) — (c).

Аналогичные результаты можно получить для уравнения теплопроводности, если рассмотреть ядро Гаусса—Вейерштрасса и так называемые тепловые потенциалы, соответствующие примеру 2.3.1) (см. [53]).

3) Сделаем несколько замечаний, относящихся к формулам суммирования. Из (3) при $x=0$ имеем равенство

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\lambda)\, \mathscr{K}(\varepsilon\lambda)\, d\lambda=\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\, k\left(-\frac{y}{\varepsilon}\right) \frac{dy}{\varepsilon^n},$$

пользуясь которым можно получить, например, следующий критерий суммируемости функции $\hat{f}$. Если функция f из $L^1(\mathbf{R}^n)$ ограничена в некоторой окрестности точки 0, а $\hat{f} \geqslant 0$, то $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$.

Вернемся еще раз к формуле (2.3.9). Если мы захотим ограничиться сходимостью по норме в $L^1(\mathbf{R}^n)$, т. е. сходимостью в среднем, то можно существенно ослабить ограничения на ядро k. Точное утверждение содержит следующая

Лемма[1]. Пусть f и k принадлежат $L^1(\mathbf{R}^n)$ и пусть для $\varepsilon>0$ $k_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left\|(k_\varepsilon * f)(x)-\left(\int_{\mathbf{R}^n} k(y)\,dy\right)f(x)\right\|_1=0. \tag{5}$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$\left\|(k_\varepsilon * f)(x)-\left(\int_{\mathbf{R}^n} k(y)\,dy\right)f(x)\right\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |k_\varepsilon(x)|\,\|f(x+y)-f(y)\|_1\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |k(x)|\,\|f(\varepsilon x+y)-f(y)\|_1\,dx. \tag{6}$$

Если бы функция f была непрерывной и имела компактный носитель, то можно было бы перейти к пределу в (6) при $\varepsilon\to 0$ и получить (5). Осталось заметить, что непрерывные функции с компактным носителем плотны в $L^1(\mathbf{R}^n)$. ◀

Замечание. Утверждение $\|f(\varepsilon x+y)-f(y)\|_1\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ носит название *леммы Лебега* и допускает формулировку, переносящуюся на абстрактную ситуацию, когда $\mathbf{R}^n$ заменяется локально компактной абелевой группой. Для любого $\delta>0$ существует такая окрестность U нуля в $\mathbf{R}^n$, что

$$\|f(x+y)-f(y)\|_1<\delta \text{ для всех } x\in U. \tag{7}$$

С другой стороны, для каждой $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$ существует постоянная δ_f такая, что $\|f(x+y)-f(y)\|_1\geqslant\delta_f|x|$.

Выбирая в формуле (5) функцию $k\in L^1(\mathbf{R}^n)$, для которой $\int k(x)\,dx=1$, мы для каждого $\varepsilon>0$ сможем указать функцию $k_\varepsilon\in L^1(\mathbf{R}^n)$, $\int k_\varepsilon(x)\,dx=1$, так, чтобы для любой $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$ выполнялось равенство

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\|k_\varepsilon * f-f\|_1=0. \tag{8}$$

Семейство таких функций $\{k_\varepsilon\}$ называется *аппроксимативной единицей для* $L^1(\mathbf{R}^n)$. Как мы позже увидим, аппроксимативные единицы очень важны в анализе групповых алгебр.

2.6. Абсолютно сходящиеся интегралы Фурье и ряды Фурье. В этом пункте мы ограничимся случаем $n=1$ и чуть подробнее рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$, состоящую из функций

[1] В [77] показано, как эта лемма применяется для доказательства теоремы Винера—Леви.

вида

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx \tag{1}$$

с нормой $\|\hat{f}\|=\|f\|_1$, оставляя более содержательный анализ до второй главы. $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$ является (незамкнутой) подалгеброй алгебры $C_0(\mathbf{R})$ (относительно обычного умножения).

Функции, представимые формулой (1), обладают некоторой, если можно так сказать, «гладкостью». Однако вопрос о природе этой гладкости вряд ли может быть решен в стандартных терминах модуля непрерывности функции $\hat{f}$. Функции из $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$ обладают некоторым (лемма Римана—Лебега) убыванием на бесконечности. Вопросу о том, каким должно быть это убывание, едва ли сопутствует точный ответ.

Вот некоторые факты, относящиеся к этим вопросам. Для простоты мы ограничиваемся случаем четных функций (см. [87]).

(а) Существует непрерывная функция $g(x)$, монотонно стремящаяся к нулю при $x\to+\infty$ и не принадлежащая $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$ (указать пример такой функции далеко не просто).

(b) Существует функция $g(x)$, имеющая производные сколь угодно высоких порядков, и даже бесконечно дифференцируемая, монотонно стремящаяся к нулю при $x\to+\infty$ и не принадлежащая $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$ (этот случай легко редуцируется к случаю (а)).

С другой стороны, существуют функции из $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$, сколь угодно медленно стремящиеся к нулю на бесконечности.

(с) Пусть $g(x)$ — ограниченная функция, монотонно убывающая к нулю при $x\to+\infty$ и выпуклая снизу. Тогда $g(x)\in\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$.

Наряду с абсолютно сходящимися интегралами Фурье вида (1), мы будем рассматривать абсолютно сходящиеся ряды Фурье.

Обозначим $\mathcal{F}^1(\mathbf{Z})=W$ класс функций, допускающих представление

$$\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi_k e^{-ikx}, \tag{2}$$

где $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\varphi_k|<\infty$, так что $\varphi_k=\varphi(k)\in L^1(\mathbf{Z})$.

Для создания общих концепций гармонического анализа аналогия между $L^1(\mathbf{R})$ и $L^1(\mathbf{Z})$ очень важна, ибо эти пространства дают примеры взаимодействия групповых алгебр локально компактной абелевой группы $\mathbf{R}$ и ее замкнутой подгруппы — локально компактной группы $\mathbf{Z}$.

Если в классе W ввести норму, полагая $\|\varphi\|=\|(\varphi_k)\|_1$, то относительно этой нормы класс W образует банахову алгебру с обычным умножением, которую можно рассматривать как (незамкнутую) подалгебру алгебры всех непрерывных периодических функций на **R** с непрерывной нормой, так что элементы этих алгебр можно считать непрерывными функциями $g(x)$, определенными на интервале $[0,2\pi]$ вещественной оси, такими, что $g(0)=g(2\pi)$. Отображая отрезок $[0,2\pi]$ со склеенными концами на единичную окружность π комплексной плоскости **C**, $x\to\zeta=e^{-ix}$, мы вместо представления (2) иногда будем пользоваться представлением

$$\varphi(\zeta)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi_k\zeta^k. \qquad (3)$$

Алгебру абсолютно сходящихся рядов Фурье иногда называют *винеровской алгеброй*; Винер [97] открыл замечательное свойство этой алгебры: если $f\in W$ и $f\neq 0$, то $\frac{1}{f}\in W$.

Это свойство — определяющее для целого класса так называемых винеровских алгебр — является частным случаем теоремы Винера—Леви, о которой будет рассказано во второй главе, п. 7.7.

Оказывается, что свойство функции g, определенной на **R**, принадлежать $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$ или $\mathcal{F}^1(\mathbf{Z})$ допускает следующую локализацию.

Скажем, что функция $g(x)$ принадлежит $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$ (соответственно, $\mathcal{F}^1(\mathbf{Z})$) в точке $x=x_0$, если существует функция $h(x)$, принадлежащая $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$ (соответственно, $\mathcal{F}^1(\mathbf{Z})$), такая, что

$$g(x)=h(x) \qquad (4)$$

в некоторой окрестности точки x_0.

Банаховы алгебры $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$ и $\mathcal{F}^1(\mathbf{Z})$ локально изоморфны и понятие принадлежности алгебре в точке позволяет этот изоморфизм легко реализовать.

Справедлива следующая теорема Винера [97].

Если функция $g(x)$, определенная на вещественной оси по $\mathrm{mod}\,2\pi$, принадлежит W в каждой точке, то $g\in W$.

Доказательство. Заметим, что по условию найдется совокупность $\{I_k\}$, $k=1,\dots n+1$, интервалов, объединение которых содержит **R** по $\mathrm{mod}\,2\pi$ таких, что $I_1=I_{n+1}$, каждый интервал I_k имеет непустое пересечение лишь с интервалами I_{k-1} и I_{k+1}, $k=2,\dots,n$, и, наконец, для каждого $k=1,\dots,n+1$ существует функция $g_k(x)\in W$, совпадающая с $g(x)$ на интервале I_k. Сопоставим каждому интервалу I_k функцию трапеции $h_k(x)$, равную 1 на $I_k\setminus(I_{k-1}\cup I_{k+1})$, нулю — вне I_k и линейную — на остальных частях I_k. Ясно, что $h_k\in W$ при каждом k и что $\sum_k h_k(x)=1$; другими словами, совокупность функций $\{h_k\}$ образует разбиение единицы (близкая конструкция будет позже рассматриваться на широком классе банаховых алгебр, удовлетворяющих условию Диткина). Осталось заметить, что

$$g(x)=\sum_k h_k(x)\,g(x)=\sum h_k(x)\,g_k(x)\in W.$$

Аналогично можно показать, что если финитная функция $g(x)$ принадлежит $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$ в каждой точке $x\in\mathbf{R}$, то $g\in\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$.

В заключение остановимся еще на одной полезной конструкции, связывающей ряды и интегралы Фурье. Пусть $f(x)\in\in L^1(\mathbf{R})$. Положим

$$\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t+2\pi k).$$

Ясно, что φ — суммируемая функция на $\mathbf{R}$ по $\operatorname{mod} 2\pi$ ($\varphi(t)=\varphi(t+2\pi)$), причем $\|\varphi\|/L^1(0,2\pi\leqslant\|f\|_1$. Для $n\in\mathbf{Z}$ определим коэффициенты Фурье $\hat{\varphi}_k$ функции φ

$$\hat{\varphi}_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,e^{-ikt}dt.$$

Тогда $\hat{\varphi}_k=\hat{f}(k)$, где $\hat{f}$ — преобразование Фурье f.

§ 3. Теорема Планшереля

Если функция f принадлежит пространству $L^2(\mathbf{R}^n)$, то определяющий преобразование Фурье интеграл (2.1.4), вообще говоря, не существует. Тем не менее, в этом случае имеется естественное определение преобразования Фурье и особенно элегантная теория — теория Планшереля.

3.1. Преобразование Фурье в $L^1\cap L^2=L^1(\mathbf{R}^n)\cap L^2(\mathbf{R}^n)$. Пусть $f\in L^1\cap L^2$. Введем в рассмотрение функцию

$$f^*(x)=\overline{f(-x)}. \tag{1}$$

В силу сказанного в 2. 5. 3) функция $f*f^*\in L^1\cap\mathcal{F}^1$ и для нее справедлива формула обращения

$$(f*f^*)(x)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y)\,\overline{f(y)}\,dy=\int_{\mathbf{R}^n}|\hat{f}(\lambda)|^2e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{2}$$

Полагая в (2) $x=0$, получаем для $f\in L^1\cap L^2$ равенство Парсеваля

$$\|f\|_2=\|\hat{f}\|_2, \tag{3}$$

из которого обычным путем следует, что для $f_1,\ f_2\in L^2(\mathbf{R}^n)$

$$\langle f_1, f_2\rangle=\langle \hat{f}_1, \hat{f}_2\rangle, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|_2$ — норма в $L^2(\mathbf{R}^n)$, а $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L^2(\mathbf{R}^n)$. (Для получения формул (3) и (4) разумеется можно было бы воспользоваться формулой Парсеваля (2.4.3) для $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ и плотностью $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ в $L^1 \cap L^2$. Пусть, связанный с формулой (2), сохраняется в том случае, когда $\mathbf{R}^n$ заменяется локально компактной абелевой группой.)

Итак, мы доказали, что преобразование Фурье $\mathscr{F}$ есть изометрический оператор, действующий из $L^1 \cap L^2$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$. Поскольку $L^1 \cap L^2$ плотно в $L^2(\mathbf{R}^n)$, то существует единственное продолжение изометрического оператора $\mathscr{F}$ до унитарного, определенного на всем пространстве $L^2(\mathbf{R}^n)$. Это продолжение $\mathscr{F}$ мы назовем *преобразованием Фурье на* $L^2(\mathbf{R}^n)$.

3.2. Теорема Планшереля. Для функции $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ положим

$$\hat{f} = \mathscr{F} f. \tag{1}$$

Возьмем какую-нибудь последовательность $\{f_k\} \in L^1 \in L^2$, для которой

$$\|f_k - f\|_2 \to 0, \quad k \to \infty. \tag{2}$$

В качестве такой последовательности можно, например, выбрать

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < k, \\ 0, & |x| > k. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда $\hat{f}$ есть предел последовательности $\hat{f}_k$, фундаментальной, в силу (3. 1. 3) и, значит, сходящейся по норме $\|\cdot\|_2$ к $\hat{f}$. Функция $\hat{f}$, определенная почти всюду в $\mathbf{R}^n$ независимо от выбора последовательности $\{f_k\}$, называется пределом в среднем (limes in medio) последовательности $\{\hat{f}_k\}$. Для этого предела мы вводим обозначение $\hat{f} = \underset{k\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, f_k$. Если в качестве $\{f_k\}$ выбрать последовательность вида (3), то (1) принимает вид

$$\hat{f}(\lambda) = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{|x|<m} f(x)\, e^{-i\lambda x} dx. \tag{4}$$

Теорема Планшереля. Преобразование Фурье $\mathscr{F}$ есть унитарный оператор на $L^2(\mathbf{R}^n)$. Обратный оператор можно получить, полагая $\mathscr{F}^{-1}\hat{f} = (\mathscr{F}\hat{f})(-x)$.

Таким образом, обратное преобразование Фурье также может быть представлено формулой

$$f(x) = \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{|\lambda|<m} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{5}$$

и формулы (4) и (5) дают решение задачи распространения преобразования Фурье на функции пространства $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Для завершения доказательства теоремы Планшереля остается показать, что оператор $\mathscr{F}$ унитарный, т. е. является линейным изометрическим оператором, отображающим $L^2(\mathbf{R}^n)$ на себя. Мы это сделаем, рассматривая аналогичную тему для $L^2(G)$, G — ЛКА группа.

Развитые в § 2 понятия суммируемости могут быть перенесены на функции из $L^2(\mathbf{R}^n)$. Обратим внимание на следующую пару формул, дающих поточечное представление для преобразований Фурье в $L^2(\mathbf{R}^n)$.

$$\hat{f}(\lambda)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,e^{-i\lambda x}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\varepsilon x_k}{\varepsilon x_k}\,dx, \tag{6}$$

$$f(x)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{R^n}\hat{f}(\lambda)\,e^{i\lambda x}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\varepsilon\lambda_k}{\varepsilon\lambda_k}\,d\lambda. \tag{7}$$

Формула (6) справедлива для почти всех $\lambda\in\mathbf{R}^n$, а формула (7) для почти всех $x\in\mathbf{R}^n$. (По существу здесь в качестве ядра применено n-мерное стекловское ядро, преобразование Фурье которого совпадает с $\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\varepsilon x_k}{\varepsilon x_k}$. Например, если $n=1$, то формула (7) может быть представлена в виде

$$f(x)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}\hat{f}(\lambda)\,e^{i\lambda x}\frac{\sin\varepsilon\lambda}{\varepsilon\lambda}\,d\lambda=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(t)\,dt\ .$$

Заметим в заключение, что формулы (6) и (7) дают явное выражение того факта, что $\mathcal{F}L^2(\mathbf{R}^n)=L^2(\mathbf{R}^n)$.

3.3. Преобразование Фурье в $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Поскольку $\bigcup_{1\leqslant p\leqslant\infty}L^p(\mathbf{R}^n)\subset\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$-пространству умеренных распределений, то для любого элемента $f\in\bigcup_{1\leqslant p\leqslant\infty}L^p(\mathbf{R}^n)$ определено преобразование Фурье $\hat{f}\in\mathfrak{S}'(\mathbf{R}^n)$. В этом пункте мы рассмотрим вопрос об интерпретации $\hat{f}$ как элемента L^q при некотором $q\in[1,\infty]$.

1) Мы определили преобразование Фурье $\mathcal{F}$ как ограниченные операторы, действующие из $L^1(\mathbf{R}^n)$ в $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ с нормой, не превосходящей единицы, и из $L^2(\mathbf{R}^n)$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$ с нормой, равной 1. На функциях из $L^1\cap L^2$, образующих плотное множество в каждом из этих пространств, действия этих операторов совпадают, и формула обращения, имеющая вид $(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x)=(\mathcal{F}\hat{f})(-x)$, позволяет распространить обратный оператор на все $L^1(\mathbf{R}^n)$ или $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Мы оказываемся в условиях интерполяционной теоремы Рисса—Торина, см. [52] или [56], согласно которой преобразование Фурье можно распространить на промежуточное пространство $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1<p<2$, функция $\hat{f}=\mathcal{F}f$, где $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$, принадлежит $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ и справедливо неравенство Хаусдорфа—Юнга

$$\|\hat{f}\|_{p'}\leqslant\|f\|_p. \tag{1}$$

В этом случае также применима техника «средних» и можно, например, показать, что если $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1<p<2$, то при $a\to\infty$

$$\left\| \hat{f}(\lambda) - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{|x|>a} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right\|_q \to 0. \tag{2}$$

2) В отличие от случая $p=2$, образом преобразования Фурье $\mathcal{F}$ в $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1<p<2$, не является все пространство $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$, так что обратный оператор определен не на всем пространстве $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$ и в этом случае к формуле обращения в ее конкретном варианте нужно относиться с известной осторожностью. Однако пользуясь тем, что функция из $L^q(\mathbf{R}^n)$, $q>2$, суммируема на каждом конечном интервале, можно с помощью ядра Фейера представить формулу обращения в виде (запишем ее для простоты для случая $n=1$)

$$\lim_{a\nearrow\infty} \left\| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} \left(1 - \frac{|\lambda|}{a}\right) \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} dx \right\|_p = 0. \tag{3}$$

Как следствие из (3) вытекает теорема единственности для преобразования Фурье в $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1<p<2$.

Пусть f_1, $f_2 \in L^p$ и $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ почти всюду. Тогда $f_1 = f_2$.

Приведем также двойственные соотношения, связывающие $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ и $\hat{f}\in L^{p'}(\mathbf{R}^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, см. [87];

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-i\lambda x}-1}{-ix} dx, \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) \frac{e^{ix\lambda}-1}{i\lambda} d\lambda. \end{aligned} \tag{4}$$

3) В 2) мы обратили внимание на то обстоятельство, что $\mathcal{F}L^p \neq L^p$ для $1<p<2$. Нетрудно видеть, что если бы преобразование Фурье $\mathcal{F}$ было бы взаимно однозначным, то нормы в L^p и $L^{p'}$ оказались бы эквивалентными. А это может быть лишь в том случае, когда $p=p'=2$.

Можно непосредственно указать пример функции f, принадлежащей каждому $L^q(\mathbf{R})$ при $q\geqslant 1$, но для которой $\hat{f}\notin L^p$, когда $1<p<2$.

Начнем с факта, который имеет много приложений в гармоническом анализе (см. [100, т. I]).

Лемма (ван дер Корпут). Пусть $k(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на интервале (a, b), для которой $k''(x)\geqslant\mu^2$, $x\in(a, b)$, μ — некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\left|\int_a^b e^{ik(x)}dx\right| \leqslant \frac{8}{\mu}$$

(так что оценка не зависит от длины интервала).

Пусть, далее, h — гладкая функция на $\mathbf{R}$, обращающаяся в нуль при $x \leqslant 0$, а при $x > 2$ равная

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\log x)^2} \exp(ix \log x).$$

Ясно, что $h \in L^q(\mathbf{R})$ только тогда, когда $q \geqslant 2$. В частности $\hat{h} \in L^2$. Пользуясь леммой ван дер Корпута, нетрудно показать, что функция $\hat{h}$ ограничена на $\mathbf{R}$. Поскольку производная $h'(x)$ при $x \to +\infty$ имеет асимптотику

$$h'(x) = \frac{i}{\sqrt{x}\log x} \exp(ix \log x)(1 + o(1)),$$

то $h' \in L^2(\mathbf{R})$. Значит, $\lambda\hat{h}(\lambda) \in L^2(\mathbf{R})$ и, в силу ограниченности $\hat{h}$, $\hat{h} \in L^1(\mathbf{R})$, так что $\hat{h} \in L^q(\mathbf{R})$ при каждом $q \geqslant 1$. Полагая $f(x) = \hat{h}(x)$, мы, таким образом, указываем функцию, принадлежащую L^q, $q \geqslant 1$, преобразование Фурье которой не принадлежит L^p ни при каком $p \in]1, 2[$.

Можно указать более изощренный пример (см. [38]) сингулярной положительной меры μ с носителем в $[0, 1]$, преобразование Фурье которой (являющейся сужением на $\mathbf{R}$ целой функции конечной степени) таково, что $\hat{\mu} \in L^q$ при некотором $q > 2$.

Точнее, для каждого $\alpha \in (0, 1)$ и $q > \frac{2}{\alpha}$ существует компактное множество $K \subset [0, 1]$, хаусдорфова размерность[1] которого равна α, несущее положительную борелевскую меру μ, для которой $\hat{\mu} \in L^q$. Поскольку K имеет хаусдорфову размерность, меньшую единицы, то K — множество лебеговой меры нуль и μ — сингулярная мера.

Далеко не простое доказательство этого факта опирается на следующую лемму [201], [57].

Лемма (Салем). Пусть $\{a_k\}_{k=1}^N$ — совокупность рационально независимых вещественных чисел (из того, что $\sum n_k a_k = 0$, n_k — целые, $k = 1, 2, \ldots, N$, вытекает, что $n_k = 0$, $k = 1, \ldots, N$)

---

[1] Определение хаусдорфовой размерности имеется в статье Я. Б. Песина, см. том 2 настоящей серии.

и многочлен $P(x)$ имеет вид

$$P(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-ixa_k}.$$

Пусть $r\geqslant 2$. Тогда существует постоянная T_0 такая, что для всех вещественных b и $T>T_0$

$$\frac{1}{T}\int_{b}^{b+T}|P(x)|^r dx<N^{-r/2}\left[\frac{r}{2}+1\right]^{r/2}.$$

4) По контрасту с предыдущим примером справедлив следующий факт (см. [51, (31.33)]).

Пусть $\mu\in M(\mathbf{R}^n)$ и $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ для $p\in[1, 2]$. Предположим, что $\hat{\mu}(\lambda)=\hat{f}(\lambda)$ для почти всех $\lambda\in\mathbf{R}^n$. Тогда $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$, мера μ абсолютно непрерывна, причём f является производной Радона—Никодима меры μ.

5) Укажем следующий полезный n-мерный вариант леммы ван дер Корпута, имеющий важные приложения в проблеме спектрального синтеза в $\mathbf{R}^n$ (см. [185], [164]).

Лемма (Литтман [185]). Пусть $\varphi\in D(\mathbf{R}^n)$—пространство бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbf{R}^n$ с компактным носителем, и носитель функции φ принадлежит некоторому открытому ограниченному множеству $U\subset\mathbf{R}^n$. Пусть, далее, ψ—вещественнозначная бесконечно дифференцируемая функция в U, гессиан которой, т. е. форма $\sum\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_k}\xi_i\xi_k$ строго отграничена от нуля положительной постоянной B, $|\psi|<M_0$, $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right|<M_k$, $M_0, M_1, \ldots, M_n$—положительные постоянные. Тогда для любого вещественного числа A существует положительная постоянная D такая, что

$$\left|\int_{\mathbf{R}^n} e^{i(xy+\psi(y)t)}\varphi(y)\,dy\right|<D(1+|t|)^{-\frac{n}{2}}\left(1+\frac{|x|}{1+|t|}\right)^{-A}$$

для каждого $x\in\mathbf{R}^n$, $t\in\mathbf{R}$. При фиксированных n, φ, U и A постоянная D зависит только от $M_0, M_1, \ldots, M_n$ (но не от функции ψ, удовлетворяющей перечисленным выше условиям).

6) Неравенство Хаусдорфа—Юнга показывает, что при каждом $p\in]1, 2[$ преобразование Фурье $\mathcal{F}$ действует как ограниченный оператор из L^p в $L^{p'}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$; с нормой, обозначим ее C_p, не превосходящей 1.

В 1961 г. К. И. Бабенко доказал [103], что в случае, когда $p=\frac{2k}{2k-1}$, k—целое число, большее 1, точное значение постоянной C_p равно

$$C_p=\left(p^{\frac{1}{p}}p'^{-\frac{1}{p'}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

и достигается оно только на функциях вида

$$f(x)=\alpha \exp(-\beta^2x^2+i\gamma x),$$

где α — комплексное число, β и γ — вещественные числа.

Долгое время оставался открытым вопрос о справедливости формулы (5) для точной постоянной при произвольном $p\in]1, 2[$. Положительный ответ на этот вопрос был получен Бекнером (см. [150]).

В случае, когда G — ЛКА группа, также можно воспользоваться теоремой Рисса—Торина и распространить преобразование Фурье на все пространства $L^p(G)$, $p\in]1, 2[$. При этом сохраняется форма (3.3.1) неравенства Хаусдорфа—Юнга. По-видимому, вопрос о точном значении этой постоянной для произвольной G остается открытым.

7) Здесь мы расскажем о распространении операции свертки на функции классов $L^p(\mathbf{R}^n)$.

(1) Пусть $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$ и $g\in L^p(\mathbf{R}^n)$, $p\in[1, 2]$. Тогда $h=f*g\in$ $\in L^p(\mathbf{R}^n)$ и $\hat{h}(\lambda)=\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$ для почти всех $\lambda\in\mathbf{R}^n$.

(2) Менее очевиден следующий факт

Теорема (Юнг). Пусть $p, q\in[1, \infty]$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\geqslant 0$. Пусть, далее, $h=f*g$. Тогда если $f\in L^p$, $g\in L^q$, то $h\in L^r$ и

$$\|h\|_r\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q. \tag{6}$$

Применяя соотношения Титчмарша (см. (3.3.4)), можно показать, что в условиях теоремы Юнга

$$f*g \text{ и } \hat{f}\cdot\hat{g}$$

есть двойственная пара преобразований Фурье из пространств L^r и $L^{r'}$ соответственно, $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. В частности, если $\frac{1}{p}+$ $+\frac{1}{q}\geqslant\frac{3}{2}$, то $r\in[1, 2]$ и $(f*g)^{\wedge}=\hat{f}\hat{g}$. Если же $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant\frac{3}{2}$, то

$$r'\in[1, 2] \text{ и } f*g=\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{g}).$$

Теорему Юнга проще всего доказать, опираясь на интерполяционную теорему Рисса—Торина, но возможна и непосредственная оценка. Здесь тоже возникает вопрос о точном неравенстве (6). Соответствующая постоянная $C_{p,q,r}$, в силу (6), $C_{p,q,r}\leqslant 1$, была также найдена Бекнером и оказалась равной $C_p\cdot C_q\cdot C_r$, где каждая из постоянных C_p, C_q, C_r имеет вид (5).

(3) Пусть $\mu\in M(\mathbf{R}^n)$ и $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1\leqslant p\leqslant 2$. Тогда $\mu*f\in L^p$ и $(\mu*f)^{\wedge}=\hat{\mu}\cdot\hat{f}$ почти всюду.

8) Только что приведенные факты можно рассматривать в ситуации, когда $\mathbf{R}^n$ заменяется локально компактной абелевой группой или компактной группой, где по-прежнему применяется интерполяционная теорема.

Однако не потерял интереса классический метод Юнга—Хаусдорфа и Харди—Литлвуда, опирающийся на следующую лемму (см. [87], [100]).

Лемма. Для любой совокупности комплексных чисел $\{c_k\}$, $-n\leqslant k\leqslant n$, справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\right|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \left(\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $1<p\leqslant 2$.

9) Обратим внимание еще на одно обобщение теоремы Планшереля, относящееся к пространству L^q, где $q>2$ [87].

Теорема Харди—Литлвуда. 1. Пусть $f(x)\,x^{1-\frac{2}{q}}\in L_q(\mathbf{R})$. Тогда $\hat{f}$ существует, принадлежит $L^q(\mathbf{R})$ и

$$\|\hat{f}\|_q\leqslant K(q)\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^q\,|x|^{q-2}dx.$$

Теорема показывает, что в «чуть-чуть» исправленном пространстве L^q $(q>2)$ преобразование Фурье уже можно определить. Доказательство опирается, в частности, на аналог этой теоремы для рядов Фурье, приведенный у Зигмунда (см. [100, том 2, стр. 165]. С помощью этой теоремы доказывается в некотором смысле двойственная к ней, также, принадлежащая Харди—Литлвуду.

Теорема Харди—Литлвуда. 2. Если $f(x)\in L^p$, $p\in]1, 2[$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\lambda)|^p\,|\lambda|^{p-2}d\lambda\leqslant K(p')\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Из этой теоремы в качестве побочного результата можно извлечь информацию, указывающую на отсутствие формулы, подобной (3.3.1), (неравенство Хаусдорфа—Юнга), для $p>2$ (подробности в [87]).

§ 4. Собственные функции преобразования Фурье

Среди локально компактных абелевых групп выделяются такие, которые изоморфны своим группам характеров. Такими группами, получившими название *самодвойственных*, являются (наряду с $\mathbf{R}$) локальные поля и их декартовы степени; вообще, если ЛКА-группа $\hat{G}$ двойственная к группе G, то декартово (или прямое) произведение $G\times\hat{G}$ является самодвойственной группой; с другой стороны, полная характеризация самодвойственных групп как будто бы отсутствует.

Если G — самодвойственная группа, то преобразование Фурье $\mathcal{F}$ на G можно рассматривать как унитарный оператор, действующий из $L^2(G)$ в $L^2(G)$, такой, что

$$\mathcal{F}^4=I. \tag{1}$$

(I — тождественный оператор в L^2).

Поэтому спектр оператора $\mathcal{F}$ состоит из четырех точек единичной окружности комплексной плоскости: 1, i, -1, $-i$. Обозначим через H_1, H_2, H_3, H_4 подпространства в $L^2(G)$, каждое из которых состоит из собственных функций оператора $\mathcal{F}$, отвечающих собственным значениям 1, i, $-i$, -1, соответственно. Ясно, что пространство $L^2(G)$ разлагается в прямую сумму

$$L^2(G)=H_1\oplus H_2\oplus H_3\oplus H_4 \tag{2}$$

взаимно ортогональных подпространств H_1, H_2, H_3, H_4, другими словами, каждую функцию $f\in L^2(G)$ можно представить в виде

$$f=f_1+f_2+f_3+f_4, \tag{3}$$

где f_k — собственная функция, отвечающая собственному значению $(i)^{k-1}$, $\langle f_k, f_l\rangle=0$, $k\neq l$.

Представляет интерес характеризация подпространств H_k $k=1,\ldots,4$, в частности, пространства H_1, состоящего из так называемых *самодвойственных функций*. Эта задача полностью решена лишь для случаев (по-видимому), когда $G=\mathbf{R}$ или когда G — конечное поле. Первый из этих случаев мы рассмотрим сейчас, второй — в § 9 гл. 2 в связи с формулами Рамануджана.

4.1. Функции Эрмита. Сепарабельное пространство $L^2(\mathbf{R})$ естественно обладает ортогональным базисом. Особо следует выделить базис, согласованный с представлением (2). Самым замечательным примером такого базиса являются *функции Эрмита*, т. е. функции вида

$$\varphi_n(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},\quad n=0,1,\ldots, \tag{1}$$

к изучению которых мы переходим.

1) С оператором $\mathcal{F}$ естественно связать операторы в $L^2(\mathbf{R})$, с ним коммутирующие. Обратим внимание на простейший (и важнейший) из таких операторов, определенный на плотном множестве $D(\mathbf{R})\subset L^2(\mathbf{R})$ (определение $D(\mathbf{R})$ в (3.3.5)) оператор

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}+x^2, \tag{2}$$

обладающий, очевидно, тем свойством, что

$$\mathcal{F}L=L\mathcal{F}. \tag{3}$$

Мы покажем, что собственные функции оператора L как раз являются функциями Эрмита. Поскольку, как мы чуть позже увидим, спектр оператора L простой, то, в силу (3), функции Эрмита являются собственными функциями и оператора $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}\varphi_n=-(i)^n\varphi_n. \tag{4}$$

Мы покажем, далее, что система функций Эрмита удовлетворяет соотношениям

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \begin{cases} \sqrt{\pi}\, 2^k k!, & l=k, \\ 0, & l\neq k \end{cases} \tag{5}$$

и полна в $L^2(\mathbf{R})$.

Формулы (4), (5) позволяют дать еще одно доказательство теоремы Планшереля (именно таким образом строил теорию Планшереля Винер в [97]). Действительно, любую $f\in L^2(\mathbf{R})$ можно представить в виде

$$f=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k$$

и, значит, в силу (4),

$$\hat{f}=\mathcal{F}f=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(-i)^k\varphi_k\in L^2(\mathbf{R})$$

и

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f}=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k=f.$$

Кроме того, $\|f\|_2^2=\|\hat{f}\|_2^2=\sum\sqrt{\pi}\,2^k k!\,|a_k|^2$.

2) Функции Эрмита часто встречаются в различных приложениях гармонического анализа. И все же главное свойство функций Эрмита заключается в том, что они появляются в квантовой механике как волновые функции гармонических осцилляторов и что с ними связан метод операторов рождения и уничтожения, широко применяемый при изучении систем многих частиц. Отсылая читателя, интересующегося физической стороной вопроса, например, к [48], [93], мы расскажем о простом формальном аппарате, лежащем в основе упомянутого метода.

Известно, что гамильтониан одномерного квантового гармонического осциллятора имеет вид

$$H=\frac{1}{2m}\mathrm{P}^2+\frac{m\omega^2}{2}\mathrm{X}^2, \tag{6}$$

где **x** и **p** — операторы «координаты» и «импульса» частицы, удовлетворяющие соотношению

$$[\mathbf{x}, \mathbf{p}] \equiv \mathbf{xp} - \mathbf{px} = i\hbar \cdot I, \qquad (7)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, ω — собственная частота.

Здесь нужно **x**, **p** и I понимать как эрмитовы операторы, действующие в $L^2(\mathbf{R})$ по формулам

$$\mathbf{x}: f \to xf, \quad \mathbf{p}: f \to -i\hbar\frac{d}{dx} f, \quad I: f \to f.$$

Вопрос об однозначном определении эрмитовых операторов **x** и **p**, связанных коммутационным соотношением (7), разумеется с точностью до унитарного преобразования пространства $L^2(\mathbf{R})$, мы рассмотрим в п. 6.4 в связи с трансляционно инвариантными подпространствами в $L^2(\mathbf{R})$.

Замечание 1. Квантовомеханическая задача о колебаниях системы с гамильтонианом (6), аналогичная задаче о классическом гармоническом осцилляторе: $m\ddot{x} = -m\omega^2 x$ (именно это уравнение находилось у истоков гармонического анализа; функция Лагранжа для классического осциллятора имеет вид $L = m\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2} x^2$), исторически была одной из первых решенных до конца проблем квантовой механики.

Замечание 2. В последние годы возник интерес к распространению теории классического и квантовомеханического осциллятора на случаи, когда фазовое пространство принадлежит полям, отличным от поля **R**, например, полю Галуа или полю p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$. Любопытные результаты в этом направлении имеются в препринте: Freund P. G. O., Olson M., p-adic dynamical systems. EFI 87—53: 1987, July, 1—24.

Замечание 3. Операторы H и L в (6) и (2), соответственно, легко преобразуются один в другой с помощью изменения масштаба: $H \to \alpha H$, $x \to \beta x$. Впрочем, для нас разница между H и L не существенна, мы можем формально положить $\hbar = 1$, $m = \frac{1}{2}$, $\omega = 2$ для получения из H оператора L.

3) Операторы рождения и уничтожения. Перейдем к изучению спектра оператора L в пространстве $L^2(\mathbf{R})$.

Введем в рассмотрение оператор $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)$ и сопряженный с ним оператор A^*: $\langle Af, g\rangle = \langle f, A^*g\rangle$, $f, g \in D(\mathbf{R})$.

Легко проверить, что $L = 2A^*A + I$ и что

$$[A, A^*] = I. \qquad (8)$$

Спектр оператора A^*A мы найдем, пользуясь только соотношением (8) и тождеством Якоби: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, приводящим к соотношениям

$$(A^*A)A = A(A^*A - 1), \qquad (9)$$

$$(A^*A)A^*=A^*(A^*A+1). \qquad (10)$$

Заметим, что оператор A^*A неотрицательный и, значит, его спектр расположен на правой полуоси. Пусть e — собственный вектор оператора A^*A, которому отвечает собственное значение λ. Тогда $A^*Ae=\lambda e$ и $\lambda=\|Ae\|^2$. Обратим внимание на то, что, если $\lambda>0$, то, в силу (9), Ae — нормированный собственный вектор оператора A^*A с собственным значением $\lambda-1$, а, в силу (10), A^*e — собственный вектор того же оператора с собственным значением $\lambda+1$, причем $\|Ae\|=\sqrt{\lambda}$, $\|A^*e\|=\sqrt{\lambda+1}$.

Мы утверждаем, что найдется собственный вектор $e_0\neq 0$ оператора A^*A такой, что $Ae_0=0$. (Действительно, предполагая противное ($A^*Ae_0=\lambda e_0$), мы рассмотрели бы последовательность собственных векторов Ae_0, $A^2e_0, \ldots, A^ne_0 \ldots$ оператора A^*A и в конце концов добрались бы до вектора с собственным значением, равным $\lambda-n$ и, значит, оказывающимся отрицательным, если n велико.)

Полагая

$$e_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}(A^*)^n e_0, \quad n=0, 1, \ldots, \qquad (11)$$

мы получим ортонормированную последовательность собственных векторов такую, что при $n=0, 1, \ldots$, $A^*Ae_n=ne_n$, $Ae_n=\sqrt{n}e_{n-1}$, $A^*e_n=\sqrt{n+1}\,e_{n+1}$.

Физики интерпретируют оператор A^*A как оператор физически наблюдаемой величины, представляющей число частиц определенного сорта. Тогда операторы A^* и A называются *операторами «рождения»* и *«уничтожения»*.

4) Итак, для нахождения e_0 следует решить уравнение $xe_0+\frac{de_0}{dx}=0$, $\|e_0\|_2=1$. Находим, $e_0=\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, а затем из (11)

$$e_n=e_n(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}\left(x-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n=1, 2, \ldots . \qquad (12)$$

Последовательность функций $e_0, e_1, \ldots$, образует ортонормированную систему собственных функций оператора L, отвечающих последовательности собственных значений $1, 3, 5, \ldots$, соответственно.

Осталось заметить, что функция Эрмита $\varphi_n(x)$ в (1) может быть переписана в виде

$$\varphi_n(x)=(-1)^n\left(x-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n=0, 1, \ldots,$$

и, значит, пропорциональна $e_n(x)$ из (12).

Итак, мы доказали, что $L\varphi_n=(2n+1)\varphi_n$ и $\mathcal{F}\varphi_n=(-i)^n\varphi_n$, $n=0, 1, \ldots$.

5) Докажем, что система $\{\varphi_n\}_0^\infty$ полна в $L^2(\mathbf{R})$[1].

Введем в рассмотрение многочлены

$$H_n(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\left(x-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n=0, 1, \ldots,$$

которые называются *многочленами Эрмита*; $H_n(x)$ — многочлен n-й степени со старшим коэффициентом, равным 2^n.

Пусть для $f \in L^2(\mathbf{R})$

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx=0, \quad n=0, 1, \ldots$$

Тогда, в силу связи между функцией Эрмита и многочленом Эрмита

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)\,dx=0, \quad n=0, 1, \ldots,$$

и, значит, поскольку система многочленов Эрмита $\{H_n(x)\}$ линейно независима, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} x^n\,dx=0, \quad n=0, 1, \ldots. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}-i\lambda x}\,dx.$$

Очевидно, что $\mathcal{F}(\lambda)$ — аналитическая во всей комплексной плоскости функция, для которой, в силу (13), все производные в нуле равны нулю. Следовательно, $\mathcal{F}(\lambda)\equiv 0$ и по теореме единственности для преобразования Фурье $f(x)=0$ почти всюду ◀.

6) Пользуясь представлением многочлена Эрмита в виде

$$H_n(x)=\frac{(-2i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^n e^{-u^2+2ixu}\,du.$$

легко получить аналог формулы Кристоффеля—Дарбу

$$\sum \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{2^n n!} t^n H_n(x)H_n(y)=\frac{\exp\left(\frac{x^2-y^2}{2}-\frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right)}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{14}$$

4.2. Преобразования и двойственности Меллина и Ханкеля.

1) Наряду с двойственностью Фурье, мы будем рассматри-

[1] Можно дать чисто групповое доказательство этого факта, см. [48, с. 462].

вать двойственность Меллина, выраженную парой формул

$$\mathcal{F}(s)=\int_0^\infty f(t)\, t^{s-1}\, dt, \tag{1}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{F}(s)\, t^{-s}\, ds. \tag{2}$$

Идея такой двойственности впервые встретилась в знаменитом мемуаре Римана о простых числах, который мы не однажды будем цитировать, но сформулирована явно в 1894 г. Кахеном[1]. Формулы (1) и (2) называются *формулами Меллина,* который в 1896 г. первым дал строгое обоснование (1) и (2) в [192].

Хорошо известен частный случай этих формул

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\, dx, \quad e^{-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)\, x^{-s}\, ds.$$

Формулы (1) и (2) естественно возникают в теории рядов Дирихле. Функции

$$f(t)=\sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-nx} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\, \Gamma(s)}{n^s}$$

связаны соотношениями (1) и (2).

Легко видеть, что функции $\sqrt{2\pi}e^{c\xi}f(e^{\xi})$ и $\mathcal{F}(c+i\eta)$ представляет собой двойственную пару преобразований Фурье, поэтому все сказанное до сих пор о преобразовании Фурье допускает переформулировку на языке преобразования Меллина.

Наиболее важная для нас трактовка преобразования Меллина заключается в следующем. Мы будем рассматривать преобразование Меллина (1), как преобразование Фурье на мультипликативной группе $\mathbf{R}^*$ положительных вещественных чисел, где инвариантная относительно сдвигов мера Хаара имет вид dx/x, а dx — мера Лебега на $\mathbf{R}$.

2) В классическом гармоническом анализе выделяется еще один класс преобразований, называемых *преобразованиями Ханкеля* $\mathcal{H}_\nu=\mathcal{H}$, которые определены формулой

$$g(x)=(\mathcal{H}f)(x)=\int_0^\infty f(y)\sqrt{xy}\, J_\nu(xy)\, dy,$$

[1] Cahehn E., Sur les fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur les fonctions analogues. Ann de l'Ec. Norm., 1894, *3*, № 11, 75—164.

где $J_\nu(x)$, $\nu > -1$, — функция Бесселя

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$f(y) = (\mathcal{H}g)(y) = \int_0^\infty g(x)\sqrt{xy}\,J_\nu(xy)\,dx.$$

Многие факты теории преобразований Фурье переносятся на преобразования Ханкеля. В частности, в пространстве $L^2(0, \infty)$ преобразование Ханкеля действует как унитарный самосопряженный оператор (см. [87]).

Существует тесная связь между преобразованиями Фурье и Ханкеля, проявляющаяся при изучении преобразования Фурье радиальных функций (см. [85]).

4.3. Самодвойственные функции. Функция f называется *самодвойственной*, если

$$\mathcal{F}f = f. \tag{1}$$

В частности, функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ самодвойственная тогда и только тогда, когда $f \in H_1$, H_1 определено в (4.2).

Мы уже видели, что функция $f = e^{-x^2/2}$ самодвойственная. Нет ничего проще, как указать и другие самодвойственные функции, поскольку f самодвойственна тогда и только тогда, когда она представляется в виде $f = g + \hat{g}$, $g \in L^2(\mathbf{R})$.

Однако хотелось бы иметь внутреннюю характеристику функций, например из H_1 или из более широкого класса самодвойственных функций, принадлежащих L^p, $p \in]1, 2[$.

Не ограничивая общности, можно рассмотреть случай четной функции f. Тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y)\cos xy\,dy. \tag{2}$$

Пусть $\mathcal{F}(s)$ — преобразование Меллина функции f. Тогда уравнение (2), переписанное для функции $\mathcal{F}(s)$, принимает вид

$$\mathcal{F}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(s)\cos\frac{1}{2}s\pi\,\mathcal{F}(1-s). \tag{3}$$

Если положить

$$\mathcal{F}(s) = 2^{s/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\psi(s), \tag{4}$$

то уравнение (3) попросту означает, что

$$\psi(s) = \psi(1-s), \tag{5}$$

а функция f, в силу формулы обращения Меллина (4.2.2), принимает вид

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^{\frac{1}{2}-s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\psi(s)\,x^{-s}ds. \tag{6}$$

Поэтому можно ожидать, что если ψ удовлетворяет уравнению (5), то формула (6) дает общий вид четных самодвойственных функций.

Пример. Если $\psi(s)=1$, то $f(x)=2e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Справедлива теорема (см. [87]).

Теорема 1 (Харди и Титчмарш). Для того чтобы четная функция f из $L^2(\mathbf{R})$ была самодвойственной, необходимо и достаточно, чтобы f представлялась в виде (6), $c=\frac{1}{2}$, где подынтегральная функция при $s=\frac{1}{2}+it$, t — вещественно, принадлежит $L^2(\mathbf{R})$, функция $\psi\left(\frac{1}{2}+it\right)$ — четная, а интеграл (6) понимается в смысле сходимости в $L^2(\mathbf{R})$.

Для функций из L^p, $p\in]1, 2[$, аналогичная теорема оказывается односторонней, поскольку для этих классов теория преобразования Фурье ассиметрична.

Теорема 2 (Титчмарш). Если четная функция из $L^p(\mathbf{R})$, $p\in]1, 2[$, самодвойственная, то она представима в виде (6), где функция $\mathscr{F}(s)$ из (4) аналитическая в полосе: $\frac{1}{p'}<\sigma<\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$, $s=\sigma+i\tau$, равномерно стремится к нулю при $|s|\to\infty$ в каждой внутренней полосе и удовлетворяет уравнению (3). При этом интеграл в (6) понимается в смысле сходимости в среднем.

Теорему 2 удается обратить, если чуть-чуть «исправить» пространство L^p, подобно тому, как это было сделано в 3.3.9).

Подробности в [87]; там же имеется много примеров самодвойственных функций.

Аналогично определяются самодвойственные функции относительно преобразования Ханкеля.

Интересные примеры на эту тему встречаются в теории чисел (см. [87]).

Пусть $r(n)$ — число представлений целого числа n в виде суммы p-квадратов и

$$\bar{P}_p(x)=\sum_{0<n<x}{}' r_p(n)-\frac{\pi^{\frac{1}{2}p}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}p\right)}x^{\frac{1}{2}p},$$

где штрих означает, что при x целом последний член суммы должен быть взят с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Тогда эту сумму можно представить в виде

$$\bar{P}_p(x)=x^{\frac{1}{4}-p}\sum_{1}^{\infty}\frac{r_p(n)}{n^{\frac{1}{4}-p}}J_{\frac{1}{2}-p}(2\pi\sqrt{nx}).$$

Пользуясь этим, можно показать, что функция f

$$f(x)=x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p}\left\{\bar{P}_p\left(\frac{x^2}{2\pi}\right)-1\right\}$$

самодвойственна относительно $\mathcal{H}_{1+\frac{p}{2}}$.

В частности, если $p=1$, то $f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}-\left[\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right]\right)$, и самодвойственность f относительно $\mathcal{H}_{3/2}$ может быть проверена непосредственно. (Заметим, что для функции f, самодвойственной относительно $\mathcal{H}_\nu$, преобразование Меллина $\mathcal{F}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{F}(s)=2^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}s+\frac{3}{4}\right)}\mathcal{F}(1-s).\Bigg)$$

Функцию $r(n)$ мы обсуждаем также в связи с теорией почти периодических функций и двойственностью Понтрягина (см. гл. 2).

§ 5. Интегральные преобразования в гармоническом анализе[1)]

С преобразованием Фурье связаны другие интегральные преобразования, образующие так называемый аппарат теории интеграла Фурье. Развитие этого аппарата стимулировало появление разнообразных методов теоретико-функционального характера, оказавшихся полезными в различных областях гармонического анализа и его приложениях. Разумеется, наиболее глубокие результаты были получены в одномерном случае, где можно было максимально использовать идеи и глубоко разработанные методы теории аналитических функций. Впечатляющие достижения 30-х гг., отраженные в монографиях Винера и Пэли (1934) «Преобразование Фурье в комплексной области» [72] и Левинсона (1940) «Теоремы о плотностях и лакунах» [62] явились блестящей демонстрацией возможностей комплексного анализа.

1) См. также статьи М. А. Евграфова, М. В. Федорюка в томе 13 настоящей серии.

Эти монографии вместе с ранее вышедшей монографией Винера «Интеграл Фурье и некоторые его приложения» (1933) [97] оказали, как теперь ясно, большое влияние на направление последующих исследований.

Однако, монография Винера (1933) сейчас представляет разве лишь исторический интерес, но не потому, что она забыта (она цитируется и до сих пор). Напротив, содержащиеся в ней идеи и результаты были досконально усвоены и впоследствии переосмыслены в теоретико-групповом и алгебраическом плане, что привело к широкому обобщению этих результатов и одновременному упрощению доказательств (см. гл. 2).

В то же время многие рассмотрения двух других монографий сохраняют привлекательность и актуальность и в настоящее время, более того, среди них есть и такие (особенно во второй из них), которые до сих пор ждут истолкования и развития. Результаты в каждой из них существенно опираются на методы комплексного анализа и отсутствие адекватного теоретико-функционального аппарата остается существенным препятствием для получения многомерных аналогов. Развитие в последние десятилетия многомерного комплексного анализа позволяет надеяться на будущий прогресс и в многомерном гармоническом анализе, а быть может, и в анализе на группах.

Рассказ о важнейшем из интегральных преобразований — преобразовании Лапласа — мы начнем с абстрактной схемы, принадлежащей Макки [187], [188].

5.1. Преобразование Лапласа на локально компактной абелевой группе. Мы отмечали во введении, что преобразование Фурье конечной регулярной борелевской меры, т. е. меры $\mu \in M(G)$, на ЛКА-группе $\widehat{G}$ определяется формулой

$$\hat{\mu}(\chi) = \int_G \overline{\chi(x)}\, d\mu(x), \tag{1}$$

где χ — элемент группы характеров $\widehat{G}$, который отождествляется с функцией $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbf{T})$, $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{T})$ — группа всех непрерывных гомоморфизмов из G в $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}$ — группа окружности, с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в G.

Назовем *обобщенным характером* группы $\widehat{G}$ непрерывный гомоморфизм $\psi : G \to \mathbf{C}^*$, где $\mathbf{C}^*$ — мультипликативная группа комплексных чисел. Таким образом, $\psi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$ и если в $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$ ввести топологию равномерной сходимости на компактах в G, то $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$ превращается в топологическую группу. Поскольку группа $\mathbf{C}^*$ изоморфна прямому произведению $\mathbf{R}^* \times \mathbf{T}$ и, значит, произведению $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$, то $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$ топологически изоморфна прямому произведению $\widehat{G} \times \mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$.

Другими словами, каждой паре $(\chi, \lambda) \in \hat{G} \times \mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$ отвечает обобщенный характер

$$\psi(x) = \chi(x) e^{\lambda(x)}, \quad x \in G, \quad (\lambda(x_1 + x_2) = \lambda(x_1) + \lambda(x_2), \quad x_1 x_2 \in G). \tag{2}$$

Элементы группы $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$ называются *вещественными характерами группы* G. Заметим, что $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$ отделяет точки G (т. е. для любых $x_1 \neq x_2$ существует вещественный характер e^λ такой, что $e^{\lambda(x_1)} \neq e^{\lambda(x_2)}$) тогда и только тогда, когда G не содержит компактных подгрупп, отличных от $\{1_G\}$, 1_G—единица группы G (см. [51]).

Пусть $\mu \in M(G)$. Обозначим через X_μ множество всех вещественных характеров из $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$, которые интегрируемы по мере μ, так что $e^\lambda \in X_\mu$ тогда и только тогда, когда $e^\lambda \in L^1_\mu(G)$.

Заметим, что X_μ—выпуклое множество в $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$ (если $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, и если e^{λ_1}, e^{λ_2} из X_μ принадлежат L^1_μ, то $e^{\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2}$ также принадлежит $L^1_\mu(G)$).

Определение. *Преобразованием Лапласа меры* μ называется функция $L_\mu(\psi)$, определенная на произведении $X_\mu \times \hat{G}$ формулой

$$L_\mu(\psi) = \int \overline{\psi(x)}\, d\mu(x). \tag{3}$$

Ясно, что при фиксированном λ преобразование Лапласа сводится к преобразованию Фурье меры $e^\lambda d\mu$ и значит (гл. 2, п. 8.4, 254 с.) для преобразования Лапласа справедлива теорема единственности: если $L_\mu(\psi) = 0$, $\psi \in X_\mu \times \hat{G}$, то $\mu = 0$.

Функцию ψ в представлении (3) иногда записывают в виде $\psi = \exp \psi_1$, $\psi_1 \in \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C})$. Для ψ_1, $\eta_1 \in \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C})$ можно формально определить производную как предел

$$L(\psi, \eta) = \lim_{\delta \to 0} \frac{L(\psi_1 + \delta\eta_1) - L(\psi_1)}{\delta},$$

где δ — комплексное число, и назвать функцию $L(\psi)$ аналитической в точке ψ, если такая производная для нее существует при любом η.

Макки в [187] показал, что при надлежащем определении функции $L(\psi)$ на $\hat{G} \times \mathrm{Hom}(G, \mathbf{R})$ она аналитична тогда и только тогда, когда она является преобразованием Лапласа.

В настоящее время активно развивается теория преобразования Лапласа на топологических полугруппах, см. [210], [216].

Примеры. 1) $G = \mathbf{R}$. Поскольку $\widehat{\mathbf{R}}$ и $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ изоморфны $\mathbf{R}$, то группа $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}, \mathbf{C}^*)$ изоморфна $\mathbf{R}^2$ и ее можно отождествить с $\mathbf{C}$, сопоставляя каждому комплексному числу ζ

обобщенный характер

$$\psi(x)=e^{ix\zeta}=e^{ix\sigma-x\tau},\quad \zeta=\sigma+i\tau.$$

Таким образом, преобразование Лапласа меры $\mu\in M(\mathbf{R})$ имеет вид

$$L(\psi)=L(\zeta)=\int\limits_G e^{-ix\sigma-x\tau}\,d\mu(x), \tag{4}$$

и интегралу (4) можно придать смысл (при соответствующих значениях τ), если пересечение носителя меры μ с одним из интервалов $(-\infty, a)$ или $(b, +\infty)$ вещественной оси пусто. Замечая, что группа $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^*)$ топологически изоморфна $\mathbf{C}^n$, можно определить преобразование Лапласа на группе $\mathbf{R}^n$.

2) $G=\mathbf{Z}$. В этом случае $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{C}^*)$ отождествляется с $\mathbf{C}^*$, каждому элементу $z\in\mathbf{C}^*$ отвечает обобщенный характер z^n и преобразование Лапласа меры $\mu\in M(\mathbf{Z})$, представляющей собой элемент (μ_n), принадлежащий $l^1(\mathbf{Z})$, имеет вид

$$L(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\mu_n z^n. \tag{5}$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением преобразования Лапласа и связанных с ним преобразований на $\mathbf{R}$.

5.2. Преобразование Лапласа на R. Займемся вначале L^2-теорией преобразования Лапласа. Обозначим через $L^2(\mathbf{R}^+)$ подпространство в $L^2(\mathbf{R})$, состоящее из интегрируемых с квадратом функций, обращающихся в нуль на левой полуоси. Аналогично определяется подпространство $L^2(\mathbf{R}^-)$. Пространство $L^2(\mathbf{R})$ представляется тогда в виде прямой суммы

$$L^2(\mathbf{R})=L^2(\mathbf{R}^+)\oplus L^2(\mathbf{R}^-). \tag{1}$$

В соответствии с формулой (5.1.4) *преобразованием Лапласа функции* $g\in L^2(\mathbf{R}^+)$ будем называть функцию

$$G(\zeta)=\int\limits_0^\infty g(x)\,e^{ix\zeta}\,dx,\quad \operatorname{Im}\zeta>0. \tag{2}$$

Пусть $\zeta=\sigma+i\tau$. Тогда $G(\zeta)$ представляет собой функцию, аналитическую в верхней полуплоскости $\tau>0$, ограниченную в каждой замкнутой полуплоскости $\tau\geqslant\delta$, $\delta>0$, и при каждом фиксированном $\tau\geqslant0$ допускающую представление

$$G(\sigma+i\tau)=\mathcal{F}^{-1}(\sqrt{2\pi}\,g(x)\,e^{-x\tau}).$$

Поскольку $g(x)\,e^{-x\tau}\in L^2$ при каждом $\tau\geqslant0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|G(\sigma+i\tau)|^2\,d\sigma=2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2e^{-2x\tau}\,dx. \tag{3}$$

Таким образом, существует постоянная M, не зависящая от τ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(\sigma+i\tau)|^2 d\sigma \leqslant M, \quad \tau>0. \tag{4}$$

Определение. Функция $G(\zeta)$, $\zeta=\sigma+i\tau$, *принадлежит классу Харди* $H^2(\mathbf{C}_+)$, если она аналитична в полуплоскости $\mathbf{C}_+=\{\zeta\in\mathbf{C}:\tau>0\}$ и для нее выполняется неравенство (4) с постоянной M, не зависящей от τ.

Теорема 1. (1) Класс Харди $H^2(\mathbf{C}_+)$ исчерпывается функциями, представимыми интегралом Лапласа вида (2), где $g\in L^2(\mathbf{R}^+)$.

(2) Если $F\in H^2(\mathbf{C}_+)$, то существует $f\in L^2(\mathbf{R}^+)$ такая, что

$$F(\zeta)=\int_0^{\infty} f(x)e^{ix\zeta}dx, \quad \operatorname{Im}\zeta>0.$$

Функция $\hat{f}(\sigma)\in L^2(\mathbf{R})$ и

$$\lim_{\tau\searrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma+i\tau)-\hat{f}(\sigma)|^2 d\sigma=0.$$

(3) Справедлива интегральная формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\hat{f}(\xi)\,d\xi}{\xi-\zeta}=\begin{cases}F(\zeta), & \tau>0,\\ 0 & \tau<0.\end{cases}$$

(4) Если функция $\hat{f}\in L^2(\mathbf{R})$ и

$$\int\frac{\hat{f}(\xi)\,d\xi}{\xi-\zeta}=0, \quad \operatorname{Im}\zeta<0,$$

то она допускает продолжение в комплексную полуплоскость $\mathbf{C}_+$ как функция класса $H^2(\mathbf{C}_+)$.

Обозначая через $H^2_+(\mathbf{R})$ ($H^2_-(\mathbf{R})$) совокупность функций, являющихся предельными значениями функций из $H^2(\mathbf{C}_+)$ ($H^2(\mathbf{C}_-)$), соответственно, мы можем центральный результат теоремы 1 переформулировать следующим образом.

Теорема 1′. (1) Пространство $L^2(\mathbf{R})$ разлагается в прямую сумму своих ортогональных подпространств $H^2_+(\mathbf{R})$ и $H^2_-(\mathbf{R})$, так что

$$L^2(\mathbf{R})=H^2_+(\mathbf{R})\oplus H^2_-(\mathbf{R}), \tag{5}$$

и это разложение двойственно (относительно преобразования Фурье) к разложению (1).

(2) Пространство $H^2_+(\mathbf{R})$ совпадает с замыканием в $L^2(\mathbf{R})$ линейной оболочки всех функций вида $\frac{1}{\xi-\zeta}$, $\operatorname{Im}\zeta<0$.

(3) Пространство $H^2_-(\mathbf{R})$ совпадает с замыканием в $L^2(\mathbf{R})$ линейной оболочки всех функций вида $\frac{1}{\xi-\zeta}$, $\operatorname{Im}\zeta>0$,

Простые теоремы 1 и 1′, принадлежащие Винеру и Пэли, оказались полезными при распространении на комплексную плоскость преобразования Фурье, особенно в связи с различными обобщениями (см., например, § 7). Как мы увидим позже, изучение односторонних трансляционно инвариантных подпространств в $L^2(\mathbf{R})$, естественно приводит к рассмотрению классов Харди. Классы Харди $H^2(\mathbf{C}_\pm)$ (более общо, классы $H^p(\mathbf{C}_\pm)$), различные их обобщения составляют большую тему комплексного анализа, развитие которой в последние десятилетия было особенно интенсивным именно в связи с инвариантными подпространствами. Мы лишь слегка затрагиваем те вопросы теории классов Харди, которые наиболее существенны для анализа Фурье на классических группах и полугруппах, отсылая заинтересованного читателя, например, к [60][1].

5.3. Теорема Винера—Пэли в L^2-теории. Находящаяся на стыке комплексного и гармонического анализа теорема Винера—Пэли вместе с ее разнообразными вариациями получила большую известность, благодаря своему универсальному характеру и многочисленным приложениям, выходящим за рамки анализа Фурье.

Здесь мы дадим формулировку этой теоремы в ее классическом варианте вместе с доказательством, демонстрирующим специфические моменты работы с преобразованием Фурье в комплексной области.

Напомним, что целая функция f называется целой функцией конечной степени $\sigma\geqslant 0$, если неравенство

$$|f(\zeta)|<A\exp(B|\zeta|), \tag{1}$$

где A и B — положительные постоянные, выполняется для всех $\zeta\in\mathbf{C}$, и нижняя грань чисел B, для которых (1) имеет место, равна σ.

Теорема (Винер и Пэли). Класс целых функций f конечной степени $\sigma\geqslant 0$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|^2d\xi<\infty, \tag{2}$$

совпадает с классом функций, допускающих представление

$$f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\hat{f}(t)e^{it\xi}dt, \tag{3}$$

где $\hat{f}\in L^2(-\sigma,\sigma)$.

[1] См. также Garnett J. B., Bounded analytic functions. N. J.: Acad press., 1981, 467 яя. (Пер. на рус. яз.: Гарнетт Дж., Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984, 470 с.)

Доказательство. Разобьем его на несколько шагов. (1) Свертка Стеклова

$$f_h(\zeta)=\frac{1}{h}\int\limits_{\zeta}^{\zeta+h} f(u)\,du, \quad h>0, \tag{4}$$

также целая функция конечной степени, но ограниченная на $\mathbf{R}$. Действительно, поскольку на вещественной оси $f_h(\xi)=$ $=\frac{1}{h}(\chi_h * f)(\xi)$, где χ_h — характеристическая функция интервала $(0, h)\subset\mathbf{R}$, то $\hat{f}_h=\frac{1}{h}\hat{\chi}_h\cdot\hat{f}$, и имеет место цепочка неравенств

$$\|f_h(\xi)\|_\infty\leqslant\|\hat{f}_h\|_1\leqslant\frac{1}{h}\|\hat{\chi}_h\|_2\cdot\|\hat{f}\|_2=$$
$$=\frac{1}{h}\|\chi_h\|^2\cdot\|f\|_2=\frac{1}{\sqrt{h}}\|f\|_2<\infty. \tag{5}$$

В силу (2), $\|f\|_2$ конечна.

(2) Для гашения роста $f_h(\zeta)$ на положительном луче мнимой оси рассмотрим функцию

$$\Phi(\zeta)=e^{iB\zeta}f_h(\zeta), \quad B>\sigma. \tag{6}$$

В силу (1), эта функция ограничена на положительном луче мнимой оси, а в силу (5), — на вещественной оси. Применяя принцип Фрагмена—Линделёфа в каждой из четвертей, первой и второй, получаем неравенство, справедливое во всей замкнутой верхней полуплоскости

$$|\Phi(\zeta)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{h}}\|f\|_2. \tag{7}$$

(3) Согласно (6), (5),

$$\Phi(\xi)=\mathcal{F}(\hat{f}_h(t-B))\in\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}),$$

т. е.

$$\Phi(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,e^{i\xi t}dt, \quad \varphi(t)\in L^1(\mathbf{R}) \tag{8}$$

и, значит,

$$\int\limits_{-\infty}^{0}e^{i\xi t}\varphi(t)\,dt=\Phi(\xi)-\int\limits_{0}^{\infty}e^{i\xi t}\varphi(t)\,dt. \tag{9}$$

Функция в левой части (9) (это центральный момент доказательства!) есть сужение на вещественную ось функции, аналитической и ограниченной в нижней полуплоскости, продолжаемой в верхнюю полуплоскость как ограниченная аналитическая функция (мы воспользовались (7) и (8)). По теореме Лиувилля она тождественна постоянной, которая, в силу леммы Римана—Лебега, может быть только нулем. Следовательно, $\varphi(t)=0$ почти всюду при $t<0$ и, значит,

$$\hat{f}_h(t)=0 \text{ почти всюду при } t<-B. \tag{10}$$

(4) Аналогичное гашение роста в нижней полуплоскости позволяет заключить, что

$$\hat{f}_h(t)=0 \text{ почти всюду при } t>B. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что ($\sigma=\inf B$)

$$f_h(\xi)=\int_{-\sigma}^{\sigma}\hat{f}_h(t)\,e^{i\xi t}dt.$$

Для получения (3) осталось устремить h к нулю и воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. ◀

Замечание. Обычно (см. [72], [2]) теорема Винера—Пэли выводится из теоремы 1 п. 5.2. Приведенное здесь доказательство, демонстрирующее основные черты метода Винера—Пэли, не опирается на теорему 1, напротив, применяя аналогичные приемы, можно доказать теорему 1 или 1′. Винер и Пэли пользуются аналогичной техникой для решения разнообразных задач гармонического анализа.

Любопытный пример дает следующая теорема Харди (своеобразное введение к принципу неопределенности, определяющему взаимосвязь между скоростями убывания функции и ее преобразования Фурье на бесконечности).

Теорема Харди. Пусть $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f на $\mathbf{R}$ и пусть $f(t)=O\left(|t|^n e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$ при $|t|\to\infty$, $\hat{f}(\lambda)=O\left(|\lambda|^n e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\right)$ при $|\lambda|\to\infty$. Тогда $f(t)=P_n(t)\,e^{-\frac{t^2}{2}}$, P_n — многочлен степени, не большей n.

Предполагая, что функция f — четная (можно отдельно доказывать теорему для четной и нечетной компоненты функции f), с помощью формальной выкладки, пользуясь условиями теоремы, приходим к соотношению

$$F(z)=\frac{2^{-\frac{z}{2}}\int_0^\infty \hat{f}(\lambda)\,\lambda^{z-\frac{1}{2}}d\lambda}{\Gamma\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{2^{\frac{z}{2}}\int_0^\infty f(t)\,t^{-z-\frac{1}{2}}dt}{\Gamma\left(-\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\right)},$$

из которого следует, что функция $F(z)$ целая, удовлетворяющая всей комплексной плоскости оценке

$$|F(z)|\leqslant \text{const}\,|z|^{n/2}\exp\left(\pi\frac{|y|}{4}\right),\quad z=x+iy,$$

и имеющая на мнимой оси нулевой тип при экспоненциальном росте.

Применяя принцип Фрагмена — Линделёфа и теорему Винера — Пэли, находим, что $F(z)$ — многочлен степени, не превосходящей $n/2$. Остается применить формулу обращения для преобразования Меллина $F(z)\,\Gamma\left(-\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\right)$ функции f. ◀

5.4. Преобразование Бореля и теорема Пойа. Пусть $f(\zeta)$ — целая функция конечной степени σ. Тогда

$$f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\zeta^n \tag{1}$$

и

$$\sigma=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}. \tag{2}$$

Функция

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+1}} \tag{3}$$

аналитическая, в силу (2), вне круга $|z|>\sigma$, называется *преобразованием Бореля функции* f.

Нетрудно видеть, что при $\operatorname{Re} z>\sigma$

$$\varphi(z)=\int_0^{\infty} f(\xi)\,e^{-\xi z}\,d\xi, \tag{4}$$

так что $\varphi(z)$ есть преобразование Лапласа функции f и, значит, преобразование Бореля — это продолжение преобразования Лапласа с полуплоскости $\operatorname{Re} z>\sigma$ на внешность круга $|z|>\sigma$.

Формула обращения для преобразования Бореля имеет следующий вид

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\zeta z}\varphi(z)\,dz, \tag{5}$$

где замкнутый контур C охватывает окружность радиуса σ с центром в нуле.

Чтобы включить в представление (5) минимальное множество экспонент, желательно максимально стянуть контур C. В теореме Винера—Пэли нам удалось стянуть этот контур до отрезка $[-i\sigma, i\sigma]$.

Напомним некоторые определения из теории целых функций. *Индикатором целой функции* $f(\zeta)$ *конечной степени* называется функция $h_f(\theta)$, определенная формулой

$$h_f(\theta)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r}. \tag{6}$$

Эта функция является *опорной функцией* некоторой выпуклой области D_f, которую называют *индикаторной диаграммой функции* $f(\zeta)$. Это означает, что

$$h_f(\theta)=\sup_{\zeta\in D_f}\operatorname{Re}(\zeta e^{-i\theta}).$$

Наименьшая выпуклая оболочка, содержащая множество всех особенностей функции $\varphi(z)$, называется *сопряженной диаграммой* функции $f(\zeta)$.

Справедлива следующая

Теорема (Пойа). Сопряженная диаграмма целой функции конечной степени есть отражение относительно вещественной оси ее индикаторной диаграммы.

С представлением (5) и возможность «стянуть» контур C до сопряженной диаграммы $\bar{D}_f$ связаны различные красивые обобщения теоремы Винера—Пэли. Эти результаты вместе с подробной историей вопроса можно найти в монографии Б. Я. Левина [19], см. также Любарский Ю. И., Теорема Винера—Пэли для выпуклых множеств. Изв. АН Арм. ССР, 1988, XXIII, № 2, 163—171.

Аналоги преобразования Бореля и теоремы Винера—Пэли для классов целых функций конечного порядка роста можно найти в монографии М. М. Джрбашяна, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966, 672 с.

Обратим внимание на интересные приложения преобразования Бореля и его обобщений на целые функции конечного порядка, появившиеся в последние годы в связи с асимптотической теорией решений систем линейных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости в окрестности так называемых иррегулярных точек. (см. статью Ю. С. Ильяшенко в томе 1, а также статью М. В. Федорюка в томе 13).

5.5. Факторизация функций из H_+^2. Мы расскажем сейчас о так называемой внешне-внутренней факторизации функций из H_+^2. Термины «внешний» и «внутренний» были введены в 1949 г. Бёрлингом [155], но сама факторизация указанного ниже типа была впервые предложена в 1928 г. В. И. Смирновым [144], осознавшим роль внешних функций в задачах теории аппроксимации. То обстоятельство, что факторизация, которая будет сейчас описана, дает теоретико-функциональный аппарат для теории трансляционно инвариантных подпространств, прояснившееся в только что упомянутой работе Бёрлинга, стимулировало дальнейшие исследования по факторизации скалярных и векторно или операторно-значных функций и теории инвариантных подпространств; эти исследования отражены в книге Хелсона [50]. Желающего подробней познакомиться с этой тематикой мы отсылаем к монографии Н. К. Никольского [24], в которой рассказано о последних достижениях в теории инвариантных подпространств операторов «сдвига» и «умножения» и их универсальной роли «моделей» для спектральной теории операторов.

Для каждой функции $f \in H_+^2$ имеет место следующее каноническое представление

$$f = I_f \cdot E_f, \tag{1}$$

где E_f — *внешний множитель функции* f, равный

$$E_f(z) = \exp\left(-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{tz+1}{t-z}\,\frac{\ln|f(t)|}{1+t^2}\,dt\right), \tag{2}$$

обладающий тем свойством, что на вещественной оси

$$|E_f(x)| = |f(x)| \text{ почти всюду, } x = \operatorname{Re} z, \tag{3}$$

а I_f — *внутренний множитель функции* f, представляющий аналитическую функцию в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$, удовлетворяющую условиям

$$|I_f(z)| \leqslant 1,\ z \in \mathbf{C}_+,\ |I_f(x)| = 1 \text{ почти всюду на } \mathbf{R}. \tag{4}$$

В свою очередь, внутренний множитель факторизуется следующим образом

$$I_f(z) = e^{i\gamma} B_f(z) S_f(z), \tag{5}$$

где γ — вещественное число. $B_f(z)$ — *произведение Бляшке в полуплоскости* $\mathbf{C}_+$, построенное по всем нулям $\{z_k\}$ функции f в этой полуплоскости

$$B(z) = \prod_k e^{i\alpha_k}\frac{z-z_k}{z-\bar{z}_k}, \tag{6}$$

где $\alpha_k = \arg\dfrac{i-\bar{z}_k}{i-z_k}$; далее, $S_f(z)$ — *сингулярная функция*, допускающая представление

$$S_f(z) = \exp\left(\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{tz+1}{t-z}\,\frac{d\sigma(t)}{1+t^2} + i\alpha_f z\right), \tag{7}$$

где σ — положительная сингулярная мера, α_f — «масса» в бесконечно удаленной точке

$$\alpha_f = \overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{\ln|f(iy)|}{y}, \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{1+t^2} < \infty. \tag{9}$$

Произведение Бляшке (6) сходится тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\sum_{|z_k|<1} \operatorname{Im} z_k < \infty, \tag{10}$$

$$\sum_{|z_k|\geqslant 1} \left|\operatorname{Im} \frac{1}{z_k}\right| = \sum_{|z_k|\geqslant 1} \frac{\operatorname{Im} z_k}{|z_k|^2} < \infty. \tag{11}$$

Наконец, множители E_f и I_f в представлении (1) однозначно определяются функцией f.

Вообще, функция из H_+^2, у которой внутренний множитель в представлении (1) отсутствует, называется *внешней,* а аналитическая в верхней полуплоскости функция, удовлетворяющая условиям (5) и (6), называется *внутренней.* (Мы ограничиваемся рассмотрением внешних функций из классов Харди.)

Замечание 1. Всё сказанное здесь о классах Харди и о внутренне-внешней факторизации в полуплоскости в $\mathbf{C}$ допускает адаптацию на случай единичного круга в $\mathbf{C}$, при этом используются указанные ниже формулы (6.5.3) и (6.5.4).

Замечание 2. Если функция f, принадлежащая классу Харди в единичном круге или полуплоскости в $\mathbf{C}$, обладает некоторой гладкостью, то естественно ожидать, что это свойство функции наследует ее внешний множитель — функция E_f. Это действительно оказывается справедливым для многих подклассов класса Харди, состоящих из гладких функций. См. статью Н. А. Широкова в [63], содержащую ряд результатов в этом направлении. Однако, как показано в работе В. П. Гурария[1)] для функций, принадлежащих классу W^+ абсолютно сходящихся рядов Тейлора ($W^+=W\cap H^2$), или для функций из класса $\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}^+)$, представимых абсолютно сходящимися интегралами Фурье вида

$$\int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-itz} dt, \qquad f\in L^1(\mathbf{R}^+),$$

такое свойство может не выполняться.

Например, функция f,

$$f(z) = \frac{\pi}{2}\Gamma^2\left(\frac{3}{8}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+\frac{3}{8}} \frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{8}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{5}{8}\right)} z^{(8k+3)^2},$$

принадлежит W^+, представляется в виде $f=E_f\cdot I_f$, где I_f — внутренний множитель, но $E_f\notin W^+$.

---

1) О факторизации абсолютно сходящихся рядов Тейлора и интегралов Фурье. Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1972, *30*, 15—32.

В следующем параграфе мы расскажем о той роли, которую играет внешне-внутренняя факторизация в описании подпространств, инвариантных относительно сдвигов в $L^2(\mathbf{R})$, а также в спектральной теории функций из $L^2(\mathbf{R}^+)$.

5.6. Преобразование Гильберта. В этом пункте мы расскажем о простейших свойствах тесно связанного с преобразованием Фурье преобразования Гильберта, представляющего важный инструмент классического гармонического анализа.

1) Сопряженные функции. Мы снова будем заниматься функциями, аналитическими в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$.

Пусть функция f, определенная на $\mathbf{R}$, измерима и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{1+|t|}\,dt < \infty. \tag{1}$$

Этим свойством обладают все функции $f \in L^p(\mathbf{R})$, $1 \leqslant p < \infty$.

Вместе с функцией f мы будем рассматривать интегралы Коши

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbf{R}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt, \quad z \in \mathbf{C}_+, \\ \Phi^-(z) &= \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbf{R}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt, \quad z \in \mathbf{C}_-, \end{aligned} \tag{2}$$

представляющие собой функции, аналитические в $\mathbf{C}_+$ и в $\mathbf{C}_-$, соответственно.

Займемся функцией $\Phi(z) = \Phi^+(z)$, $z \in \mathbf{C}_+$, которую представим в виде $\Phi(z) = u(z) + iv(z)$, где $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^2+y^2}, \\ v(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t-x)}{(x-t)^2+y^2}\,dt. \end{aligned} \tag{3}$$

О функциях $u(z)$ и $v(z)$ говорят, что они образуют *сопряженную гармоническую пару*. Функция $u(z)$ представлена интегралом Пуассона и для нее (теорема 2 п. 2.5)

$$\lim_{y \searrow 0} u(z) = f(x) \text{ для почти всех } x \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Однако, как показал А. И. Плеснер[1)] (см. [4]), таким же свойством обладает и функция $v(z)$.

Теорема Плеснера. Если выполнено условие (1), то $\lim\limits_{y \searrow 0} v(z)$ существует для почти всех x и конечен.

[1)] Плеснер А. И., О сопряженном тригонометрическом ряде. Докл. АН СССР, 1935, *4*, 747—755.

Таким образом, сопряженная пара, порожденная функцией класса (1), допускает сужение на $\mathbf{R}$.

Полезно отметить, что функции вида

$$u(z)=\sum_{k=1}^{N}(a_k\cos\lambda_k z+b_k\sin\lambda_k z),$$

$$v(z)=\sum_{k=1}^{N}(b_k\cos\lambda_k z-a_k\sin\lambda_k z),$$

$\lambda_k>0$, образуют сопряженную гармоническую пару.

2) Пусть f принадлежит на $\mathbf{R}$ классу (1). Тогда для нее можно определить интеграл, существующий в смысле главного значения

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{f(t)}{x-t}\,dt \tag{5}$$

(штрих означает главное значение). Пользуясь теоремой Плеснера, можно показать, что интеграл в (5) существует почти всюду и конечен и что предел в теореме Плеснера совпадает почти всюду с функцией $\tilde{f}$.

Заметим, что из принадлежности f пространству $L^1(\mathbf{R})$ не следует суммируемость функции $\tilde{f}$. Это можно увидеть на элементарном примере $f(t)=\chi_h(t)$, где χ_h — характеристическая функция интервала $(0, h)$.

3) Теорема М. Рисса. Если $f\in L^p(\mathbf{R})$ и $1<p<\infty$, то $\tilde{f}\in L^p(\mathbf{R})$,

$$\|\tilde{f}\|_p\leqslant A_p\|f\|_p \tag{6}$$

и имеет место формула обращения

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{f}(t)}{t-x}\,dt. \tag{7}$$

Преобразование, определенное формулой (5) в $L^p(\mathbf{R})$, $1<p<\infty$, называется *преобразованием Гильберта.*

Таким образом, преобразование Гильберта $\mathscr{H}$ — ограниченный оператор в $L^p(\mathbf{R})$ такой, что $\mathscr{H}^2=-I$.

Долгое время оставалось неизвестным точное значение нормы этого оператора. В 1972 г. Пихоридес [194] показал, что

$$\|\mathscr{H}\|=A_p=\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2p}, & 1<p\leqslant 2,\\[2mm] \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2p}, & 2\leqslant p<\infty.\end{cases}$$

4) Преобразование Гильберта в $L^2(\mathbf{R})$. То, что преобразование Гильберта — изометрический, а стало быть,

унитарный оператор в $L^2(\mathbf{R})$, можно очень просто увидеть без ссылки на теорему Рисса.

Действительно, пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$ и пусть функция g определена формулой

$$g = Uf = \mathcal{F}^{-1}(\chi \mathcal{F} f), \tag{8}$$

где $\chi(x) = \frac{1}{i} \operatorname{sign} x$.

Отображение U, очевидно, является унитарным оператором в $L^2(\mathbf{R})$. Кроме того, из (8) следует, что $f = -\mathcal{F}^{-1}(\chi\mathcal{F})g$, так что $U^2 = -I$.

епочка очевидных равенств, $z = x + iy$, $y > 0$,

$$\Phi_f^+ = \frac{1}{\pi i} \left\langle f, \frac{1}{t - \bar{z}} \right\rangle = -\frac{1}{\pi i} \left\langle \mathcal{F}^{-1}\chi\mathcal{F}g, \frac{1}{t-\bar{z}} \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{\pi i} \left\langle g, (\mathcal{F}^{-1}\bar{\chi}\mathcal{F}) \frac{1}{t-\bar{z}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \left\langle f, \frac{1}{t-\bar{z}} \right\rangle = i\Phi_g^+$$

и сказанное в подпункте 1) позволяют заключить, что $U = \mathcal{H}$ ◀.

5.7. Пространство Харди в полосе. Определим пространство Харди в полосе как совокупность функций $H^2(\alpha, \beta)$, аналитических в полосе $C(\alpha, \beta) = \{z : \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$ и удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{\alpha < y < \beta} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 \, dx < \infty. \tag{1}$$

Свяжем с функцией F две функции

$$F^+(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x+i\gamma)}{z-x} \, dx, \quad \operatorname{Im} z > \gamma > \alpha,$$

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x+i\gamma)}{z-x} \, dx, \quad \operatorname{Im} z < \gamma < \beta. \tag{2}$$

Функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ принадлежат пространствам Харди H^2 в полуплоскостях $\mathbf{C}(\alpha, \infty)$ и $\mathbf{C}(-\infty, \beta)$, причем для $z \in \mathbf{C}(\alpha, \beta) = \mathbf{C}(\alpha, \infty) \cap \mathbf{C}(-\infty, \beta)$

$$F(z) = F^+(z) + F^-(z). \tag{3}$$

Из равенства (3) следует, что

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itz}, \tag{4}$$

где

$$\int_{-\infty}^{0} |f(t)|^2 e^{-2\beta t} dt < \infty, \quad \int_{0}^{\infty} |f(t)|^2 e^{-2\alpha t} dt < \infty. \tag{5}$$

Таким образом, мы пришли к гильбертову пространству функций $L^2(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$, для которых конечны интегралы (5), и, если f и F связаны формулой (4), то

$$f \in L^2(\mathbf{R}, \alpha, \beta) \Leftrightarrow F \in H^2(\alpha, \beta).$$

Удобно с помощью отображения $f \to f e^{\frac{\alpha+\beta}{2}t}$ перейти от пространства $L^2(\mathbf{R}, \alpha, \beta)$ к изоморфному пространству $L^2\left(\mathbf{R}; \frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ функций, для которых конечен интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 e^{(\beta-\alpha)|t|} dt < \infty. \tag{6}$$

В случае $\alpha<\beta$ получается пространство экспоненциально убывающих в среднем функций на $\mathbf{R}$, в случае $\alpha=\beta$ — пространство $L^2(\mathbf{R})$, а в случае $\alpha>\beta$ — пространство экспоненциально растущих в среднем функций на $\mathbf{R}$.

5.8. Преобразование Карлемана. Для функции $f \in L^2(\mathbf{R}, -\gamma, \gamma)$ определим обобщенное преобразование Фурье или *двухстороннее преобразование Фурье—Лапласа*

$$F^+(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{itz} dt, \quad z \in \mathbf{C}(\gamma, \infty), \tag{1}$$

$$F^-(z) = -\int_{-\infty}^{0} f(t) e^{itz} dt, \quad z \in \mathbf{C}(-\infty, -\gamma).$$

Ясно, что $F^+(z) \in H^2(\gamma, \infty)$, $F^-(z) \in H^2(-\infty, -\gamma)$ и что пара (F^+, F^-) всегда однозначно определяет функцию f, даже в том случае, когда $0<\gamma$, т. е. когда области аналитичности F^+ и F^-, вообще говоря, не перекрываются. Но даже и в этом случае функции F^+, F^- могут допускать аналитическое продолжение друг в друга, образуя однозначную аналитическую функцию. Условия такого продолжения в некоторых важных случаях были найдены Карлеманом (1935) (см. [36]) и поэтому двухстороннее преобразование Фурье (1) иногда называют *преобразованием Карлемана.*

Оказывается, что вопрос о продолжении преобразования Карлемана (F^+, F^-) связан с «орбитой» функции $f \in L^2(\mathbf{R}; -\gamma, \gamma)$, точнее с замыканием E_f в $L^2(\mathbf{R}, -\gamma, \gamma)$ линейной оболочки всех ее сдвигов, функций вида $f(t-\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$. В принципе могут появиться две возможности.

1) $E_f = L^2(\mathbf{R}; -\gamma, \gamma) = L^2_{(\gamma)}$. В этом случае об аналитическом продолжении пары (F^+, F^-), вообще говоря, ничего сказать нельзя. (Нетрудно построить пример непродолжимой пары (F^+, F^-).)

2) $E_f \neq L^2_{(\gamma)}$. В этом случае ситуация резко меняется. Именно,

существует ненулевая функция $g \in L^2_{(-\gamma)}$ с конечным интегралом

$$\|g\|^2_{L^2_{(-\gamma)}} = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 e^{2\gamma|t|} dt \tag{2}$$

такая, что для всех $\tau \in \mathbf{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t+\tau)\, dt = 0.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$h(\tau) = \int_0^{\infty} f(t)\, g(t+\tau)\, dt = -\int_{-\infty}^{0} f(t)\, g(t+\tau)\, dt, \tag{3}$$

которая оценивается на $\mathbf{R}$ следующим образом

$$|h(t)| \leqslant e^{-\gamma|t|} \|g\|_{L^2_{(-\gamma)}} \|f\|_{L^2_{(\gamma)}}$$

и, значит, функция

$$\mathscr{H}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{itz} dt \tag{4}$$

аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} z| < \gamma$, $\gamma > 0$.

Из (2) следует, что функция

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-itz} dt \tag{5}$$

принадлежит $H^2(-\gamma, \gamma)$. Образуем функцию

$$\hat{\mathscr{F}}(z) = \begin{cases} F^+(z), & \operatorname{Im} z > \gamma, \\ \dfrac{\mathscr{H}(z)}{G(z)}, & |\operatorname{Im} z| < \gamma, \\ F^-(z), & \operatorname{Im} z < -\gamma, \end{cases} \tag{6}$$

где F^+, F^-, $\mathscr{H}$ и G определены формулами (1), (4) и (5).

С помощью конформного отображения все сказанное в п. 5.5 о внешне-внутренней факторизации функций из H_+^2 легко переносится на функциии из $H^2(-\gamma, \gamma)$. Не входя в подробности, скажем лишь, что с функцией $G(z) \in H^2(-\gamma, \gamma)$ связывается дискретное множество ее нулей N_G в полосе $\mathbf{C}(-\gamma, \gamma)$, сингулярная мера σ с носителем на границе этой полосы и «массы» α_+ и α_- в точках $+\infty$ и $-\infty$.

Введем в рассмотрение множество

$$N_G U \operatorname{supp} \sigma \tag{7}$$

(его называют *коспектром* функции g). Из формулы (3) легко получить следующий результат:

Теорема. Функция $\hat{\mathcal{F}}(z)$, определенная формулой (6), является однозначной аналитической функцией во всей комплексной плоскости, исключая, быть может, коспектр (7) функции g.

(О теоремах такого вида, впервые установленных Карлеманом, мы более подробно расскажем в § 12.)

Замечание. Задача описания инвариантных относительно сдвигов подпространств в $L^2(\mathbf{R}^+)$ будет рассмотрена в следующем параграфе, результаты которого могут быть адаптированы для пространств функций с конечным интегралом (2).

5.9. Метод Винера—Хопфа (см. [217], [71]). Пример сверточного уравнения на аддитивной полугруппе $\mathbf{R}^+$ — уравнения Винера—Хопфа — показывает, что при рассмотрении наиболее интересных ситуаций, обойтись без теоретико-функциональных методов как будто не удается. Пользуясь введенным в предыдущем пункте преобразованием Карлемана, мы расскажем, ограничиваясь простой моделью, о существе техники Винера—Хопфа. (Скажем сразу, что аппроксимационная теорема Винера, которой мы займемся в следующей главе, откроет путь к содержательным обобщениям, вошедшим, как существенная часть в большую интенсивно развивающуюся в настоящее время область — теорию интегральных сингулярных уравнений.)

Рассмотрим однородное уравнение Винера—Хопфа

$$f(t) = \lambda \int_0^\infty k(t-s) f(s)\, ds, \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{1}$$

Относительно ядра $k(t)$ будем предполагать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|^2 e^{2|t|} dt < \infty,$$

а решение будем искать в классе функций, для которых

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-2c|t|} dt < \infty, \quad 0 < c < 1. \tag{2}$$

Заметим, что, если уравнение (1) решено, то мы получаем продолжение f на всю вещественную ось, причем продолженная функция, которую мы снова будем обозначать f, удовлетворяет следующей оценке

$$|f(t)| < Ce^{c|t|}$$

и значит $e^{-c'|t|} f(t)$ принадлежит $L^2(\mathbf{R})$ при любом c', $c < c' < 1$.

Рассмотрим преобразование Карлемана (F^+, F^-) функции f, определенное формулами (5.8.1), и принадлежащее H^2 в полуплоскостях $\mathbf{C}(c', \infty)$ и $\mathbf{C}(-\infty, -c')$, соответствено.

Пусть

$$\mathscr{K}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{itz}dt. \tag{3}$$

Ясно, что $\mathscr{K}(z)\in H^2(-1,\ 1)$. Уравнение (1) показывает, что функция $-F^-(z)$, первоначально аналитическая и принадлежащая H^2 в полуплоскости $\mathbf{C}(-\infty, -c')$, продолжается аналитически в более широкую полуплоскость $\mathbf{C}(-\infty,\ 1)$ как функция, принадлежащая H^2, причем в полосе $\mathbf{C}(c',\ 1)$ справедливо равенство

$$F^+(z)\,(1-\lambda\mathscr{K}(z))=-F^-(z). \tag{4}$$

Мы пришли к простому варианту задачи Римана для полосы, к решению которой приступим. Поскольку $\mathscr{K}(z)\in H^2(-1,\ 1)$, то функция $1-\lambda\mathscr{K}(z)$ стремится к 1 при $|z|\to\infty$ равномерно в каждой внутренней полосе $\mathbf{C}(-c',\ c')$, $0<c'<1$, и, значит, имеет в этой полосе конечное число нулей. Обозначим через $z_1, \ldots$ $\ldots, z_n$ — нули функции $1-\lambda\mathscr{K}(z)$ в полосе $\mathbf{C}(-c, c)$, где c такое, как в (2). Те же нули эта функция будет иметь и в полосе $\mathbf{C}(-c',\ c')$ при некотором c', $c<c'<1$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\psi(z)=\frac{(1-\lambda\mathscr{K}(z))\,(z+i)^n}{(z-z_1)\ldots(z-z_n)}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^m. \tag{5}$$

Функция ψ не обращается в нуль в полосе $\mathbf{C}(-c',\ c')$, равномерно по y стремится к 1 при $|x|\to\infty$. Кроме того, целое число m можно выбрать так, чтобы предельные значения $\log\psi(z)$ были одинаковы при $z\to\pm\infty$. В таком случае можно выбрать однозначную ветвь $\log\psi(z)$, принадлежащую H^2 в полосе $\mathbf{C}(-c'',\ c'')$.

Функция $\log\psi(z)$ определяет в соответствии с формулами (5.7.2) функции $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_1^-(z)$, принадлежащие H^2 в полуплоскостях $\mathbf{C}(-c'',\ \infty)$ и $\mathbf{C}(-\infty,\ c'')$, соответственно, такие, что $\log\psi(z)=\varphi_1^+(z)+\varphi_1^-(z)$.

Положим $\varphi^+(z)=\exp\varphi_1^+(z)$, $\varphi^-(z)=\exp\varphi_1^-(z)$. Тогда φ^+ и φ^- — аналитические, не обращающиеся в нуль и равномерно стремящиеся к единице функции, соответственно, в полуплоскостях $\mathbf{C}(-c',\ \infty)$ и $\mathbf{C}(-\infty,\ c')$. В силу (5),

$$1-\lambda\mathscr{K}(z)=\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_n)}{(z+i)^{n-m}(z-i)^m}\,\varphi^-(z)\,\varphi^+(z).$$

Пользуясь формулой (4), напишем соотношение

$$H(z)=F^+(z)\,\varphi^+(z)\,\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_n)}{(z+i)^{n-m}}=-\frac{F^-(z)}{\varphi^-(z)}\,(z-i)^m,$$

из которого заключаем, что функция $H(z)$ — аналитическая во всей комплексной плоскости и удовлетворяющая при $|z|\to\infty$

оценке $H(z)=o(|z|^m)$. Поэтому $H(z)$ — многочлен степени, не превосходящей $m-1$, который мы обозначим $P_{m-1}(z)$. (При $m\leqslant 0$ функция $H(z)\equiv 0$.)

Итак,

$$F^+(z)=\frac{P_{m-1}(z)(z+i)^{n-m}}{\varphi^+(z)(z-z_1)\dots(z-z_n)}$$

и, согласно формуле обращения, при некотором c'', $c'<c''<1$,

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{ic''-\infty}^{ic''+\infty}\frac{P_{m-1}(z)(z+i)^{n-m}}{\varphi^+(z)(z-z_1)\dots(z-z_n)}e^{-itz}dz, & (m>0),\\ 0 \quad (m\leqslant 0).\end{cases}\tag{6}$$

Формула (6) дает полное решение однородного уравнения Винера—Хопфа в рассматриваемом случае.

Замечание. В монографии Винера и Пэли (см. [72]) метод Винера—Хопфа соседствует с вариантом тауберовой теоремы Винера для функций, заданных на полуоси $\mathbf{R}^+$. Синтез этих двух тем позволил М. Г. Крейну (1958) далеко продвинуть теорию Винера—Хопфа, см. [125].

§ 6. Подпространства, инвариантные относительно сдвигов в $L^2(\mathbf{R})$

6.1. Группы сдвигов и инвариантные подпространства. Ключевую роль в большинстве тем нашей книги играет фундаментальное понятие сдвига на группе.

Пусть G — ЛКА группа с двойственной группой $\hat{G}$. Сдвиги на группе G или на двойственной группе $\hat{G}$ порождают два семейства унитарных операторов $\{T_t\}_{t\in G}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\hat{G}}$ в $L^2(G)$, действующих по формулам

$$(T_tf)(x)=f(x-t),\quad t\in G,\tag{1}$$

и

$$(S_\lambda f)(x)=\chi_\lambda(x)f(x),\quad \lambda\in\hat{G},\tag{2}$$

где $\chi_\lambda(x)$ — характер, отвечающий элементу $\lambda\in\hat{G}$. Ясно, что $\{T_t\}_{t\in G}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\hat{G}}$ — однопараметрические группы унитарных операторов, непрерывно зависящих от параметров t и λ, соответственно.

В случае, когда $G=\mathbf{R}$, можно рассматривать однопараметрические полугруппы $\{T_t\}$ или $\{S_\lambda\}$, отвечающие $t>0$ и $\lambda>0$, которые мы иногда будем обозначать, подчеркивая их отличие от групп $\{T_t\}$ и $\{S_\lambda\}$, через $\{T_t^+\}$ и $\{S_\lambda^+\}$.

Эти группы и полугруппы сдвигов играют существенную роль во многих областях, соприкасающихся с гармоническим анализом — от теории рассеяния до теории стационарных случайных процессов. Особенно важны случаи, когда f принимает значения в гильбертовом пространстве или когда f — операторнозначная функция. Но даже в последнем случае функцию f заменяют скалярным произведением $\langle f\varphi, \psi\rangle$, где φ и ψ пробегают гильбертово пространство H, в котором действует f. Поэтому информация об инвариантных подпространствах в пространствах скалярных функций представляет универсальный и первоочередной интерес.

Заметим, что в банаховой алгебре $L^1(G)$ подпространства, инвариантные относительно групы сдвигов $\{T_t\}_{t\in G}$, отождествляются с замкнутыми идеалами этой алгебры. В главе 2 мы увидим, сколь необозрима задача их описания даже в том случае, когда $G=\mathbf{R}$.

Зато, как мы вскоре увидим, задача описания всех инвариантных подпространств относительно группы сдвигов в $L^2(G)$, где G — ЛКА группа, решается без труда. Более содержательна задача характеризации всех подпространств в $L^2(\mathbf{R})$, инвариантных относительно полугрупп $\{T_t{}^+\}$ и $\{S_\lambda{}^+\}$, но и она допускает исчерпывающее решение, которое может служить моделью для решения аналогичных задач в других пространствах, например, в $L^p(\mathbf{R})$, $p\in]1, \infty[$.

Прежде, чем перейти к рассказу о ситуации в $L^2(\mathbf{R})$, несколько слов о возможном обобщении, когда вместо $L^2(\mathbf{R})$ или $L^2(\mathbf{R}^+)$ рассматривается пространство $L^2(\mathbf{R}^n)$ или его подпространство, состоящее из функций, обращающихся в нуль вне некоторого выпуклого конуса $K\subset\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле, и речь идет об описании подпространств, инвариантных относительно семейства сдвигов $\{T_t\}$, где t принадлежит K. Насколько известно, трудности, которые возникают при решении такого типа задач, очень принципиальны и пока еще не преодолены. (См., например, задачу Б. Я. Левина в [63].)

Итак, объектом нашего рассмотрения будет пространство $L^2(\mathbf{R})$ и его подпространство $L^2(\mathbf{R}^+)$, состоящее из функций, равных нулю на $\mathbf{R}^-$.

Подпространство L в $L^2(\mathbf{R})$ называется *инвариантным относительно группы сдвигов* $\{T_t\}_{t\in\mathbf{R}}$, если вместе с каждой $f\in L$ подпространство L содержит все функции T_tf, $t\in\mathbf{R}$. Аналогично определяются подпространства в $L^2(\mathbf{R})$, инвариантные относительно $\{T_t^+\}$, $\{S_\lambda\}$ и $\{S_\lambda^+\}$. В частности, $L^2(\mathbf{R}^+)$ является подпространством в $L^2(\mathbf{R})$, инвариантным относительно $\{T_t^+\}$, а H^2_+ — подпространством в $L^2(\mathbf{R})$, инвариантным относительно $\{S_\lambda^+\}$. Поэтому знание всех инвариантных подпространств в $L^2(\mathbf{R})$ относительно $\{T_t^+\}$ дает очевидную информацию об инвариантных подпространствах в $L^2(\mathbf{R}^+)$ относительно той же полугруппы. Наряду с оператором T_t^+, действующим в $L^2(\mathbf{R}^+)$, мы будем рассматривать сопряженный оператор $(T_t^+)^*$, $\langle T_t^+f, g\rangle =$

$= \langle f, (T_t^+)^* g \rangle$, $f, g \in L^2(\mathbf{R}^+)$, действующий по формуле

$$((T_t^+)^* f)(x) = \begin{cases} f(x+t), & x>0, \\ 0, & x<0 \end{cases} \qquad (3)$$

и инвариантные подпространства относительно семейства $\{(T_t^+)^*\}$, представляющие собой ортогональные дополнения подпространств в $L^2(\mathbf{R}^+)$, инвариантных относительно $\{T_t^+\}$. Примерами подпространств, инвариантных относительно $\{(T_t^+)^*\}$, могут служить подпространства в $L^2(\mathbf{R}^+)$, состоящие из функций, обращающихся в нуль вне некоторого фиксированного интервала $(0, \alpha) \subset \mathbf{R}^+$.

6.2. Теоремы Винера и Диткина. В монографии [97] Винер сообщает следующий простой факт. Замыкание E_f линейной оболочки всех сдвигов функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ совпадет с $L^2(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}f$ обращается в нуль лишь на множестве нулевой лебеговой меры на $\mathbf{R}$. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что каждая $g \in L^2(\mathbf{R}) \ominus E_f$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\overline{g(t)}\,dt = 0 \text{ для всех } \tau \in \mathbf{R}, \qquad (1)$$

и перейти в (1) к преобразованию Фурье, либо воспользоваться равенством Парсеваля и записать (1) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} (\mathcal{F}f)(\lambda)\overline{(\mathcal{F}g)(\lambda)}\,d\lambda = 0 \text{ для всех } t \in \mathbf{R}. \quad \blacktriangleleft \ (2)$$

Это доказательство полностью сохраняется в случае, когда $\mathbf{R}$ заменяется локально компактной абелевой группой. Любопытно отметить, что доказательство у Винера [97] этой теоремы заняло более 4-х страниц, поскольку Винер непосредственно аппроксимировал функцию из $L^2(\mathbf{R})$ сдвигами заданной функции f, не переходя к ортогональному функционалу.

Заметим, что если $f \in L^2(\mathbf{R}^+)$, то линейными комбинациями ее сдвигов можно аппроксимировать, в силу теоремы Винера, любую функцию из $L^2(\mathbf{R})$, поскольку преобразование Фурье $\mathcal{F}f$ принадлежит пространству H^2_- и, значит, не может обратиться в нуль на множестве положительной меры в $\mathbf{R}$. Последний факт, столь важный для теории инвариантных подпространств, традиционно доказывался теоретико-функциональными методами. Разумеется он является следствием результатов п. 1.5.5. Вместе с тем, как одним из первых заметил Хелсон [50], этот ключевой факт теории граничных значений аналитических функций может быть выведен из следующего геометрического принципа: каждое выпуклое замкнутое подмножество в гильбертовом пространстве содержит единственный элемент с минимальной нормой. В теории инвариантных подпространств редукции такого типа весьма важны, поскольку позволяют избегать применения аппарата теории аналитических функций и тех ограничений, которые этот аппарат налагает на возможные обобщения.

Задача описания всех инвариантных относительно группы сдвигов $\{T_t\}$ подпространств в $L^2(\mathbf{R})$ была решена В. А. Диткиным (1939, [115]), который доказал, что, если E — такое инвариантное подпространство в $L^2(\mathbf{R})$, то ему отвечает измеримое множество A на $\mathbf{R}$ положительной лебеговой меры такое, что

$$E=\mathscr{F}(\chi_A\cdot L^2(\mathbf{R})), \qquad (3)$$

где χ_A — характеристическая функция множества A и отображение $E\to A$, $\operatorname{mes} A>0$, определяемое формулой (3), взаимно однозначно.

Доказательство теоремы Диткина немногим сложнее доказательства теоремы Винера. Простой анализ формулы (2) приводит к (3). И этот результат без труда переносится на локально компактные абелевы группы, см. Л. Шварц [204].

6.3. Подпространства в $L^2(\mathbf{R})$, инвариантные относительно полугруппы сдвигов. Теорема Лакса. Менее тривиальная ситуация возникает, если рассматривать односторонние сдвиги в $L^2(\mathbf{R})$. Рассмотрение этого случая мы также начнем с теоремы полноты, простое доказательство которой основано на технике Винера—Пэли.

Теорема о полноте односторонних сдвигов в $L^2(\mathbf{R})$. Для того чтобы подпространство $E_f\subset L^2(\mathbf{R})$, порожденное всеми сдвигами $\{T_t^+ f\}$, совпадало с $L^2(\mathbf{R})$, необходимо и достаточно выполнение двух условий

(a) $\mathscr{F}f\neq 0$ почти всюду на $\mathbf{R}$,

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|(\mathscr{F}f)(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda=-\infty.$

Для доказательства этого утверждения следует еще раз взглянуть на формулу (6.2.2), на этот раз справедливую только тогда, когда $t>0$, т. е. когда функция

$$\varphi(\lambda)=\mathscr{F}f\cdot\overline{\mathscr{F}g}$$

продолжается на нижнюю полуплоскость как функция из H^2_-, для которой конечен, стало быть, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\varphi(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda,$$

и воспользоваться тем очевидным фактом, что для функции $h=\overline{\mathscr{F}}g\in L^2(\mathbf{R})$ выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|h(\lambda)|\,d\lambda}{1+\lambda^2}<+\infty. \qquad \blacktriangleleft$$

Теперь можно понять, как обстоит дело с описанием собственных подпространств в $L^2(\mathbf{R})$, инвариантных относительно полугруппы $\{T_t^+\}$ сдвигов $L^2(\mathbf{R})$. Пусть E — такое подпространство в $L^2(\mathbf{R})$ и $f \in E$. Тогда $E_f \subset E \neq L^2(\mathbf{R})$ и значит, согласно предыдущей теореме, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |(\mathcal{F} f)(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda$$

конечный. Поэтому по формуле (5.5.2) можно построить внешнюю функцию $E_{\mathcal{F} f}(\zeta)$, принадлежащую в полуплоскости $\mathbf{C}_-$ пространству H_-^2 и такую, что на вещественной оси при $\operatorname{Re} \zeta = \lambda$

$$|(\mathcal{F} f)(\lambda)| = |E_{\mathcal{F} f}(\lambda)| \text{ для почти всех } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Это означает, что существует такая функция $q(\lambda)$, $|q(\lambda)| = 1$, почти всюду на $\mathbf{R}$, что

$$(\mathcal{F} f)(\lambda) = q(\lambda)\, E_{\mathcal{F} f}(\lambda),$$

где $E_{\mathcal{F} f}(\lambda) \in H_-^2$. Мы вплотную приблизились к тому, чтобы установить теорему.

Теорема Лакса ([183]). Пусть E — подпространство в $L^2(\mathbf{R})$, инвариантное относительно правых сдвигов, т. е. относительно полугруппы $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$, но не являющееся инвариантным относительно всей группы $\{T_t\}_{t \in R}$. Тогда этому подпространству отвечает однозначно им определенная измеримая на $\mathbf{R}$ функция $q(t)$, $|q(t)| = 1$ почти всюду на $\mathbf{R}$ такая, что

$$E = \mathcal{F}^{-1} q \cdot \mathcal{F} L^2(\mathbf{R}^+).$$

(Напомним, что $\mathcal{F} L^2(\mathbf{R}^+) = H_-^2(\mathbf{R})$.)

Переход к преобразованию Фурье дает равносильную формулировку теоремы Лакса. Пусть $\mathcal{E}$ — собственное подпространство в $L^2(\mathbf{R})$ такое, что

$$S_\lambda \mathcal{E} \subset \mathcal{E} \tag{1}$$

для всех $\lambda > 0$ и только для таких λ. Тогда $\mathcal{E} = q \cdot H_-^2$, $|q| = 1$, почти всюду на $\mathbf{R}$ и подпространством $\mathcal{E}$ функция q определяется однозначно с точностью до постоянного множителя ($\mathcal{E} = \mathcal{F} E$).

Мы расскажем сейчас, следуя Хелсону [50], еще об одном подходе к теореме Лакса, основанном на коммутационном соотношении Вейля и теореме единственности Стоуна—Макки.

6.4. Односторонне инвариантные подпространства и теорема единственности Стоуна—Макки. Если от непрерывных унитарных групп операторов $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ и $\{T_t\}_{t \in \mathbf{R}}$, действующих в $L^2(\mathbf{R})$ по формулам (6.1.1), (6.1.2), перейти к унитарно эквивалентным группам

$$U_\lambda = RS_\lambda R^{-1}, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$V_t = RT_t R^{-1}, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

где R — фиксированный унитарный оператор, то, как легко проверить, группы $\{U_\lambda\}$ и $\{V_t\}$ связаны *коммутационным соотношением Вейля*

$$U_\lambda V_t = e^{i\lambda t} V_t U_\lambda, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Кроме того, группы $\{U_\lambda\}$ и $\{V_t\}$ не имеют общих собственных инвариантных подпространств, отличных от $\{0\}$ и $L^2(\mathbf{R})$.

Оказывается, что эти факты допускают обращение.

Теорема единственности Стоуна—Макки для коммутационного соотношения Вейля. Если $\{U_\lambda\}$ и $\{V_t\}$ — две непрерывные группы унитарных операторов в $L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющих коммутационному соотношению (3) и не имеющих нетривиальных общих собственных инвариантных подпространств, то существует унитарный оператор R, с помощью которого U_λ и V_t допускают представления (1) и (2), соответственно.

Прежде чем перейти к вопросу о связи этой теоремы с теоремой Лакса, обратим внимание на следующее обстоятельство. Теорема Стоуна—Макки имеет непосредственное отношение к вопросу об однозначном определении «оператора координаты» $\mathbf{x}$ и «оператора импульса» $\mathbf{p}$, связанных имеющим фундаментальное значение в квантовой механике *соотношением коммутации Гейзенберга* (4.1.7), о котором мы говорили в п. 1.4.1. Именно, если эрмитовы операторы P и X в $L^2(\mathbf{R})$ связаны коммутационным соотношением Гейзенберга, то построенные с их помощью группы операторов $\{U_\alpha\}$ и $\{V_\beta\}$

$$U_\alpha = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha P\right), \quad V_\beta = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\beta X\right)$$

удовлетворяют коммутационному соотношению Вейля

$$U_\alpha V_\beta = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\beta} V_\beta U_\alpha, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \tag{3'}$$

Наоборот, разлагая U_α и V_β в ряды Тейлора в окрестности $\alpha=0$ и $\beta=0$ и, ограничиваясь линейными членами разложения, мы от соотношения (3′) переходим к соотношению Гейзенберга (4.1.7). Если предположить, что операторы P и X не имеют общих нетривиальных инвариантных подпространств, то для групп $\{U_\alpha\}$ и $\{V_\beta\}$ Вейля окажутся выполненными условия теоремы Стоуна—Макки, в силу которой группы Вейля окажутся унитарно эквивалентными их специальному виду в шрёдингеровском представлении

$$U_\alpha : f(x) \to f(x+\alpha), \quad V_\beta : f \to e^{\frac{i}{\hbar}\beta x} f.$$

Преимущество унитарных групп Вейля в том, что их элементы, в отличие от эрмитовых операторов P и X, определены на всем пространстве $L^2(\mathbf{R})$.

Заметим, наконец, что теорема, которую мы назвали теоремой Стоуна—Макки, была открыта Стоуном и перенесена Макки на произвольные локально компактные абелевы группы (см. [207], [86], [189], [23], [93]).

Пусть теперь $\mathscr{E}$ — инвариантное подпространство в $L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющее условию (6.3.1), т. е. односторонне инвариантное. Введем в рассмотрение подпространства

$$\mathscr{E}_\lambda = S_\lambda \mathscr{E}, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Пусть P_λ — ортогональная проекция $L^2(\mathbf{R})$ на $\mathscr{E}_\lambda$. Из односторонней (не двусторонней) инвариантности $\mathscr{E}$ следует, что $\{I - P_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ — возрастающее семейство проекторов в $L^2(\mathbf{R})$, для которого

$$\lim_{\lambda \to -\infty} (I - P_\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} (I - P_\lambda) = I. \tag{5}$$

Можно показать, что условия (5) вытекают из необращаемости в нуль функции из H^2 на множестве положительной меры на $\mathbf{R}$.

Построим группу $\{V_t\}$ унитарных операторов с помощью формулы

$$V_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} d(I - P_\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} dP_\lambda. \tag{6}$$

Согласно теореме Стоуна [207][1], так можно представить любую непрерывную однопараметрическую группу унитарных операторов в $L^2(\mathbf{R})$, но в представлении (6) система проекторов P_λ обязана своим происхождением инвариантному подпространству $\mathscr{E}$.

Оказывается, что группы $\{V_t\}$ и $\{S_\lambda\}$ удовлетворяют коммутационному соотношению Вейля.

Обратно, если $\{V_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ — непрерывная группа унитарных операторов, то по теореме Стоуна для ее элементов имеет место представление (6), где P_λ — система проекторов, образующая разложение единицы. Если, к тому же, для $\{V_t\}$ и $\{S_\lambda\}$ справедливо коммутационное соотношение Вейля, то нетрудно понять, что $S_\lambda P_\lambda = P_\lambda S_\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Образуем $\mathscr{E}_\lambda = P_\lambda H^2_-$. Имеем

$$S_\lambda \mathscr{E}_\lambda = S_\lambda P_\lambda H^2_- = P_\lambda S_\lambda H^2_- \subset P_\lambda H^2_- = \mathscr{E}_\lambda, \quad \lambda > 0,$$

так что группа $\{V_t\}$ порождена в указанном выше смысле инвариантным подпространством $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0$.

---

[1] См. о ней статью В. П. Хавина в томе 15 настоящей серии.

Из того, что $\{V_t\}$ и $\{S_\lambda\}$ связаны коммутационным соотношением Вейля, вытекает, что оператор V_tT_{-t} коммутирует с S_λ при любых t, $\lambda \in \mathbf{R}$. Поэтому V_tT_{-t} — это оператор умножения на функцию $A_t(x)$, такую что $|A_t|=1$ почти всюду на $\mathbf{R}$, т. е. *унитарную* функцию.

Определение. Семейство измеримых функций $\{A_t(x)\}_{t\in\mathbf{R}}$ называется *коциклом*, если

(a) $A_t(x)$ — унитарная функция при каждом $t \in \mathbf{R}$,

(b) $A_t \cdot f$ непрерывно в $L^2(\mathbf{R})$ по t для каждой $f \in L^2(\mathbf{R})$,

(c) $A_{t+s}=A_tT_tA_s$, t, $s \in \mathbf{R}$.

В частности, семейство $\{A_t\}$, порожденное оператором V_tT_{-t}, является коциклом. Верно обратное, каждый коцикл порождается в указанном смысле некоторым семейством унитарных операторов $\{V_t\}$, связанным с $\{S_\lambda\}$ коммутационным соотношением Вейля.

Заметим, что если $\mathcal{E}=H^2_-$, то оператор V_t, определенный в (6), совпадает с T_t.

Пусть теперь $\mathcal{E}=q\cdot H^2_-$, где q — измеримая унитарная функция, и пусть P_λ — проектор на подпространство $S_\lambda H^2_-$. Тогда оператор проектирования на подпространство $S_\lambda\mathcal{E}$ имеет вид $q\cdot P_\lambda q^{-1}$ и, согласно формуле (6), для оператора V_t, ассоциированного с $\mathcal{E}$, имеет место представление

$$V_t=-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}d\,(qP_\lambda q^{-1})=q\cdot T_tq^{-1}, \tag{7}$$

так что $V_tT_{-t}f=(q\cdot T_tq^{-1})f$ для $L^2(\mathbf{R})$ и поэтому коцикл, отвечающий семейству операторов вида (7), принимает форму

$$A_t=q\cdot T_tq^{-1}. \tag{8}$$

Коцикл вида (8) называется *кограницей*. (Хелсон замечает, что терминология честная. Эти коциклы и кограницы и в самом деле являются коциклами и кограницами размерности один в некоторой алгебраической группе когомологий [168].)

Теперь ясно, в чем состоит заключительный шаг. Нужно показать, что каждый коцикл является кограницей. Это можно сделать, опираясь на приведенную теорему Стоуна—Макки. Действительно, пусть $\mathcal{E}$ — односторонне инвариантное подпространство в $L^2(\mathbf{R})$ и пусть V_t определено формулой (6). Пользуясь тем, что для V_t и S_λ справедливо коммутационное соотношение Вейля, можно показать, что у них нет общих нетривиальных инвариантных подпространств, и, значит, к ним можно применить теорему Стоуна—Макки, согласно которой существует унитарный оператор R такой, что

$$V_tR=RT_t,\ t\in\mathbf{R},\ \text{и}\ S_\lambda R=RS_\lambda,\ \lambda\in\mathbf{R}. \tag{9}$$

Вторая из этих формул показывает, что R — это оператор умножения на унитарную функцию q. Тогда первая формула в

(9) означает, что коцикл, порожденный операторами $V_t T_{-t}$, $t \in \mathbf{R}$, действительно является когранцей.

Для завершения характеризации инвариантных подпространств остаются некоторые детали (однозначность q), но с ними читатель легко справится.

Итак, теорема Лакса оказалась следствием глубоких теорем Стоуна и Стоуна—Макки, сфера действия которых не ограничивается рамками $\mathbf{R}$. Определение семейств $\{T_t\}$ и $\{S_\lambda\}$ сохраняется, когда t и λ пробегают взаимнодвойственные локально компактные абелевы группы G и $\hat{G}$, соответственно, кроме того, сохраняется вид коммутационного соотношения Вейля и теорема Стоуна—Макки оказывается справедливой в ее общей формулировке. Ясно, что о какой-либо односторонности сдвигов в ситуации общей ЛКА-группы говорить не приходится, так что теорема Лакса — весьма специальный случай этой теории. Все же мы еще раз обращаем внимание на инвариантные подпространства относительно конусов в $\mathbf{R}^n$, где продвижение является многообещающим.

В заключение, несколько слов о теоремах Стоуна и Стоуна—Макки. Появившаяся в начале 30-х гг. теорема Стоуна [207] сразу привлекла внимание и благодаря своим связям с квантовой механикой (ее основными принципами), и благодаря многочисленным применениям, которые эта теорема нашла в эргодической теории, здесь в первую очередь нужно упомянуть работы Хопфа [177], [54]. Появились различные варианты доказательства этой теоремы (фон Нейман, Бохнер, Ф. Рисс).

Наиболее прямой путь доказательства связан с теоремой Бохнера для положительно определенных функций, о которой вскоре мы будем рассказывать. Этот путь позволяет доказать теорему Стоуна в ее общей формулировке, когда $\mathbf{R}$ заменяется локально компактной абелевой группой (Амброуз [149], Годеман [172], М. А. Наймарк [136]).

Доказательства теоремы Стоуна и теоремы Стоуна—Макки в наиболее общих формулировках имеются у Хьюитта и Росса [51]. Там же можно найти дальнейшие литературные указания.

6.5. Инвариантные подпространства на окружности. Несколько слов о том случае, когда вещественная ось заменяется группой $\mathbf{Z}$. В этом случае сохраняются все утверждения пунктов 6.1—6.3 с соответствующей адаптацией:

$$\mathcal{F}L^2(\mathbf{Z}) = L^2(\hat{\mathbf{Z}}), \quad \hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}.$$

Подобно тому, как сдвигу T_t в пространстве $L^2(\mathbf{R})$ отвечал оператор S умножения, сдвигу в пространстве $L^2(\mathbf{Z})$, определенному формулой

$$T(f_n) = (f_{n+1}), \quad (f_n) \in L^2(\mathbf{Z}), \tag{1}$$

сопоставляется оператор S умножения на ζ в пространстве функций $L^2(\mathbf{T})$.

$$S: f \to \zeta f, \quad f(\zeta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n \zeta^n, \quad \zeta \in \mathbf{T}. \tag{2}$$

Теореме Лакса (1959) отвечает исторически более ранняя теорема Бёрлинга—Хелсона (1949), которая явилась основой для построения теории инвариантных подпространств. (По существу эта теорема была открыта Бёрлингом в его основополагающей работе [155]. Окончательная редакция появилась в монографии Хелсона [50].)

Теорема Бёрлинга — Хелсона. (1) Пусть $\mathscr{E}$ — подпространство в $L^2(\mathbf{T})$ и $S\mathscr{E} = \mathscr{E}$, тогда $\mathscr{E} = \chi_A L^2(\mathbf{T})$, где A — измеримое множество на $\mathbf{T}$, а χ_A — его характеристическая функция.

(2) Пусть $\mathscr{E}$ — подпространство в $L^2(\mathbf{T})$ и $S\mathscr{E} \subset \mathscr{E}$, $S\mathscr{E} \neq \mathscr{E}$. Тогда существует измеримая функция q на $\mathbf{T}$, $|q| \equiv 1$ почти всюду на $\mathbf{T}$ такая, что $\mathscr{E} = q \cdot H^2$, где H^2 — пространство Харди в единичном круге.

Эта теорема, лежащая в фундаменте теории инвариантных подпространств операторов сдвига или умножения, многократно переосмысливалась с различных позиций.

Заметим, что если

$$F(t) = f\left(\frac{i-t}{i+t}\right), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

то $f \in H^2$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{F(z)}{(z+i)^2} \in H^2 \quad (\operatorname{Im} z > 0). \tag{4}$$

Этот факт позволяет совершить пересадку из $L^2(\mathbf{R})$, $H_+^2(\mathbf{R})$ в $L^2(\mathbf{T})$, $H^2(\mathbf{T})$ и тем самым связать теоремы Лакса и Диткина с теоремой Бёрлинга—Хелсона.

Можно было бы предъявить коллекцию доказательств этих теорем, демонстрирующих их связи с другими темами, например, с классической формулой Сеге—Колмогорова (согласно которой

$$\inf \int_{\mathbf{T}} |1 - P(\zeta)|^2 \, d\mu = \exp\left(\int_{\mathbf{T}} \log \frac{d\mu_a}{dt} \, dt\right),$$

где μ — положительная мера на $\mathbf{T}$, μ_a — ее абсолютно непрерывная компонента относительно меры Лебега на $\mathbf{T}$, а inf распространяется на все тригонометрические многочлены вида $P(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} c_k \zeta^k$, $\zeta \in \mathbf{T}$) или открывающих пути к различным обобщениям. Однако это лежит за пределами нашего рассказа и поэтому желающему познакомиться с этой тематикой мы рекомендуем монографии Хелсона [50] и Н. К. Никольского [24], отражающие различные аспекты теории инвариантных подпространств.

Обратим внимание на «индивидуальную» теорему, имеющую непосредственное отношение к формуле Сеге—Колмогорова и аналогичную теореме о полноте односторонних сдвигов п. 6.3.

Пусть $f \in L^2(\mathbf{T})$, $\mathscr{E}_f$ — инвариантное подпространство в $L^2(\mathbf{T})$, порожденное функцией f, т. е. наименьшее содержащее f подпространство, инвариантное относительно S. Оказывается, что $S\mathscr{E}_f = \mathscr{E}_f$ тогда и только тогда, когда $\log f \notin L^1(\mathbf{T})$, причем $S\mathscr{E}_f = L^2(\mathbf{T})$ в том и только в том случае, когда $\log f \notin L^1(\mathbf{T})$ и f не обращается в нуль на множестве положительной лебеговой меры на $\mathbf{T}$.

6.6. Подпространства, инвариантные относительно сдвигов в $L^2(\mathbf{R}^+)$.

Грубую характеристику инвариантных подпространств в $L^2(\mathbf{R}^+)$ относительно полугрупп сдвигов $\{T_t^+\}$ и $\{S_\lambda^+\}$ дает, разумеется, теорема Лакса. При получении более точной информации об инвариантных подпространствах главную роль играет теорема о внутренне-внешней факторизации п. 1.5.5 и сопутствующая этой теореме «арифметика» внутренних функций.

Поскольку каждое подпространство E в $L^2(\mathbf{R}^+)$, инвариантное относительно полугруппы $\{T_t{}^+\}$ сдвигов является односторонне инвариантным подпространством в $L^2(\mathbf{R})$, то, согласно теореме Лакса, ему однозначно соответствует унитарная функция q, которая в этом случае оказывается внутренней функцией. Согласно факторизационной теореме п 1.5.5, каждая внутренняя функция I задается набором

$$I \to (\gamma, \{z_k\}, \sigma, \alpha), \tag{1}$$

где γ — вещественное число, $\{z_k\}$ — последовательность точек полуплоскости $\mathbf{C}^-$, удовлетворяющая условиям (5.5.10)—(5.5.11), σ — положительная сингулярная мера на $\mathbf{R}$, для которой выполняется условие (5.5.9), α — положительное число, представляющее так называемую «массу» на бесконечности. При этом

$$I = e^{i\gamma} B \cdot S, \tag{2}$$

где B — произведение Бляшке (5.5.6), построенное по нулям $\{z_k\}$, S — сингулярная функция, отвечающая, согласно формуле (5.5.7), паре (σ, α), и между всеми наборами (1) и всеми внутренними функциями в $\mathbf{C}_-$ формула (2) устанавливает взаимно однозначное соответствие.

Если $I(z)$ — внутренняя функция в $\mathbf{C}_-$, то $\bar{I}(z) = \overline{I(\bar{z})}$ — внутренняя функция в $\mathbf{C}_+$.

Совокупность J всех внутренних функций в $\mathbf{C}_-$ образует полугруппу относительно умножения.

Пусть I_1, $I_2 \in J$. Скажем, что I_1 *делит* I_2, если $I_2/I_1 \in J$, при этом будем называть I_2 *кратным* I_1. На языке наборов (1) высказывание «I_1 делит I_2» означает, что $(z_k^{(1)})$ является подпоследовательностью последовательности $(z_k^{(2)})$, $\sigma^{(1)} \leqslant \sigma^{(2)}$, $\alpha^{(1)} \leqslant \alpha^{(2)}$.

Как мы уже отметили, подпространству E в $L^2(\mathbf{R}^+)$, инвариантному относительно полугруппы $\{T_t^+\}$, однозначно отвечает внутренняя функция $I = I_E$ в $\mathbf{C}_-$ такая, что

$$E = \mathcal{F}^{-1}(I_E H_-^2). \tag{3}$$

Таким образом, I_E оказывается наибольшим общим делителем (НОД) совокупности внутренних множителей функций $\mathcal{F} f \in H_-^2$, где $f \in L^2(\mathbf{R}^+)$.

Пусть теперь E^* — подпространство в $L^2(\mathbf{R}^+)$, инвариантное относительно семейства операторов $\{(T_t^+)^*\}$, определенного формулой (6.1.3).

С помощью формулы

$$\langle T_t^+ f, g \rangle = \langle f, (T_t^+)^* g \rangle, (f, g \in L^2(\mathbf{R}^+)) \tag{4}$$

можно установить взаимно однозначное соответствие между подпространствами, инвариантными относительно полугруппы $\{(T_t^+)^*\}$, и подпространствами, инвариантными относительно полугруппы $\{T_t^+\}$, в силу которого

$$E^* = L^2(\mathbf{R}^+) \ominus E, \tag{5}$$

где E — подпространство в $L^2(\mathbf{R}^+)$, инвариантное относительно семейства $\{T_t^+\}$.

Пользуясь формулой (3), соотношение (5) можно переписать следующим образом

$$E^* = \{f : \langle f, \mathcal{F}^{-1} I_E \mathcal{F} g \rangle = 0,\ g \in L^2(\mathbf{R}^+)\},$$

где $I_E \in J(\mathbf{C}_-)$.

Поскольку

$$0 = \langle f, \mathcal{F}^{-1} I_E \mathcal{F} L^2(\mathbf{R}^+) \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1} \bar{I}_E \mathcal{F} f, L^2(\mathbf{R}^+) \rangle,$$

где $\bar{I}(z) = \overline{I(\bar{z})}$, то

$$E^* = \{f \in L^2(\mathbf{R}^+) : \mathcal{F} f \in \bar{I}_E^{-1} H_+^2\}.$$

Таким образом, функция $f \in E^*$ характеризуется следующим свойством:

$$f \in E^* \Leftrightarrow \mathcal{F} f = \begin{cases} F^-, & F^-(z) = \dfrac{H(z)}{\bar{I}_E(z)}, \quad H \in H_+^2, \quad \operatorname{Im} z > 0, \\ F^+, & F^+(z) \in H_-^2, \quad \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Образуем теперь множество $\operatorname{Sp} E^*$ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$, как объединение замкнутых множеств

$$\operatorname{Sp} E^* = N_E \cup \Sigma_\sigma \cup \{\infty\}, \tag{7}$$

где N_E — множество всех нулей внутренней функции $\bar{I}_E(z)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ с учетом кратностей, т. е. множество дивизоров, Σ_σ — носитель сингулярной меры σ, отвечающей, согласно формулам (1) и (3), подпространству E^*; точка $\{\infty\}$ присоединяется к $\operatorname{Sp} E^*$ тогда и только тогда, когда число α в наборе (1), характеризующем внутреннюю функцию $\bar{I}_E$, отлично от нуля.

Таким образом, представление (6) для $\mathcal{F}f$, $f \in E^* (\neq L^2(\mathbf{R}^+))$ есть формула, аналогичная представлению Карлемана для полуплоскости (см. п. 5.8), функция $\mathcal{F}f$ продолжается на всю комплексную плоскость как аналитическая функция в области

$$\mathbf{C}\setminus\operatorname{Sp} E^*. \tag{8}$$

Замкнутое множество $\operatorname{Sp} E^*$ получило название *спектра инвариантного* подпространства E^*, а множество особенностей индивидуальной функции $\mathcal{F}f$, $f \in E^*$, в представлении Карлемана (6), было названо *спектром функции* f. Поэтому если $f \in E^*$, то $\operatorname{Sp} f \subset \operatorname{Sp} E^*$, причем если $\overset{*}{E}_f$ — подпространство, порожденное f в указанном выше смысле и инвариантное относительно семейства $\{(T_t^+)^*\}$, то $\operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp} \overset{*}{E}_f$.

Заметим, что для функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ также можно было бы определить спектр как множество особенностей преобразования Карлемана, но польза такого определения невелика: в $L^2(\mathbf{R})$ отсутствуют функции с одноточечным спектром.

В контрасте с этим понятие спектра функций из $L^2(\mathbf{R}^+)$ более осмыслено, с ним связаны, хотя и очень простые, но содержательные результаты, о которых мы расскажем в следующем пункте. (Мы адаптируем для этого простого случая результаты статей автора [111], [112].)

6.7. Спектральная теория функций пространства $L^2(\mathbf{R}^+)$. Итак, если $f \in L^2(\mathbf{R}^+)$, то ее спектр либо заполняет всю комплексную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$, либо представляет собой множество комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ вида (6.6.7). Утверждение «спектр функции f пуст» равносильно утверждению «$I_{E_f} = e^{i\gamma}$, $\gamma \in \mathbf{R}$, E_f — подпространство, инвариантное относительно $\{(T_t^+)^*\}$, порожденное f».

Цепочка импликаций

$$\operatorname{Sp} f = \varnothing \Leftrightarrow \mathcal{F}f \begin{cases} \in H_+^2, & \operatorname{Im} z > 0, \\ \in H_-^2, & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f = 0 \text{ почти всюду на } \mathbf{R}$$

дает теорему о непустоте спектра функции из $L^2(\mathbf{R}^+)$.

Для индивидуального спектрального анализа в $L^2(\mathbf{R}^+)$ разумно выделять такие инвариантные подпространства в $L^2(\mathbf{R}^+)$, все собственные инвариантные подпространства которых образуют линейно упорядоченные по вложению цепочки. Назовем обладающие этим свойством инвариантные подпространства, *линейно приводимыми инвариантными подпространствами.*

Нетрудно видеть, что справедливо следующее утверждение. Инвариантное (относительно семейства $\{(T_t^+)^*\}$) подпространство E^* в $L^2(\mathbf{R}^+)$ линейно приводимо тогда и только тогда, когда его спектр одноточечный, т. е.

$$\operatorname{Sp} E^* = \{z\}, \qquad (1)$$

где z — точка расширенной полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Естественно рассмотреть три случая.

(1) $\operatorname{Sp} f = \{\infty\}$. В этом случае функция f финитная, $(0, \alpha)$ — наименьший интервал среди интервалов вида $(0, \beta)$, содержащий носитель функции f, $(-\alpha)$ — масса, сосредоточенная в точке $\{\infty\}$, в соответствии с формулой (6.6.7). Наконец, $E_f = L^2(0, \alpha)$.

Последнее утверждение представляет собой простейший вариант известной теоремы Титчмарша (леммы Титчмарша) о носителях свертки, о которой говорилось во введении.

(2) $\operatorname{Sp} f = \{z\}$, $\operatorname{Im} z > 0$. В этом случае функция f представляется в виде квазиполинома, $f(x) = P(x) e^{ixz}$, P — многочлен степени, на единицу большей кратности дивизора $\{z\}$[1].

(3) $\operatorname{Sp} f = \{z\}$, $\operatorname{Im} z = 0$, и, не ограничивая общности, можно считать, что $z = 0$. В этом случае, опять в соответствии с формулой (6.6.7), носитель меры σ состоит из единственной точки $z = 0$. Если масса, сосредоточенная в точке 0, равна α, то f продолжается на всю комплексную плоскость как целая функция порядка $\frac{1}{2}$ типа, равного $\alpha > 0$. Обозначим через $B^2_{\frac{1}{2}, \alpha}$ — подпространство в $L^2(\mathbf{R}^+)$, состоящее из функций, продолжающихся на всю комплексную плоскость как целые функции порядка $\frac{1}{2}$ типа, меньшего или равного α.

Тогда, снова обозначая через E_f^* инвариантное подпространство, порожденное f, можно утверждать, что

$$E_f^* = B^2_{\frac{1}{2}, \alpha}.$$

Скажем, что для функции f, $E_f \neq L^2(\mathbf{R}^+)$, *имеет место спектральный синтез,* если ее можно аппроксимировать в $L^2(\mathbf{R}^+)$ линейными комбинациями функций из E_f^*, спектр которых состоит из единственной точки. Справедлив следующий результат.

[1] Как обычно, под дивизором понимается точка в $\mathbf{C}$ с приписанным к ней целым числом (кратность дивизора).

Теорема. Следующие условия эквивалентны.

(1) Для функции $f \in L^2(\mathbf{R}^+)$, $E_f^* \neq L^2(\mathbf{R}^+)$, имеет место спектральный синтез.

(2) Множество $\operatorname{Sp} f$ не более чем счетное.

В § 12 мы расскажем об аналогичных результатах для функций из пространства $L^\infty(\mathbf{R}^+)$.

6.8. Инвариантные подпространства в $L^2(\mathbf{R}^+)$, обладающие свойством компактности. Следуя Кусису, мы расскажем в заключение об одной красивой задаче, непосредственно примыкающей к материалу пп. 6.6—6.7. Пусть $\Lambda = \{z_k, n_k\}$, $\operatorname{Im} z_k > 0$, n_k — кратность дивизора $\{z_k\}$. Обозначим через $L^2(\Lambda)$ инвариантное (относительно $(T_t^+)^*_{t>0}$) подпространство в $L^2(\mathbf{R}^+)$ такое, что

$$\operatorname{Sp} L^2(\Lambda) = \Lambda.$$

В своей диссертации Л. Шварц [84] изучал подпространства $L^2(\Lambda)$ для случая, когда точки $\{z_k\}$ расположены на положительном луче мнимой оси, и, в частности, рассматривал задачу характеризации множества Λ такой, чтобы операторы $(T_t^+)^*$ оказались вполне непрерывными (компактными) в $L^2(\Lambda)$. В случае Л. Шварца условием, обеспечивающим такую компактность, оказалось классическое условие Мюнца $\sum \frac{i}{z_k} = \infty$ (точки входят в сумму с учетом кратностей).

В работе [184] Лакс в связи с теорией эллиптических уравнений рассматривал инвариантные подпространства функций на $\mathbf{R}$ со значениями в банаховом пространстве B, обладающие свойством, которое Лакс назвал *внутренней компактностью* и которое заключается в следующем. Пусть норма в инвариантном подпространстве задается формулой

$$\| f \| = \left(\int_0^\infty | f(x) |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $|\cdot|$ — норма в B. Обозначим

$$\| f \|_a^b = \int_a^b | f(x) |^2 dx.$$

Тогда если последовательность функций ограничена по норме $\|\cdot\|_a^b$, то она содержит подпоследовательность, сходящуюся по норме $\|\cdot\|_c^d$, где $0 < a < c < d < b < \infty$.

Свойство внутренней компактности инвариантного подпространства в $L^2(\mathbf{R}^+)$ оказывается равносильным полной непрерывности операторов $(T_t^+)^*$. Таким образом, условие Мюнца обеспечивает внутреннюю компактность рассмотренного Л. Шварцем пространства $L^2(\Lambda)$. Это условие сохраняется в случае, когда точки $\{z_k\}$ расположены внутри угла $\left\{z: \left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \delta, \delta > 0\right\}$.

Полная характеристика инвариантных подпространств, обладающих свойством внутренней компактности, была дана Кусисом.

Теорема (Кусис [182]). Для внутренней компактности пространства $L^2(\Lambda)$ со спектром $\Lambda = \{z_k, n_k\}$ необходимо и достаточно, чтобы

(1) $\operatorname{Im} z_k \to \infty$, $k \to \infty$, $(\operatorname{Im} \lambda_k > 0)$,

(2) $\sum \frac{(n_k+1)\operatorname{Im} z_k}{|z_k - \sigma|^2} \to 0$, когда вещественное σ стремится к $\pm\infty$.

Как следствие, отсюда получается, что прямая сумма внутренних компактов в $L^2(\mathbf{R}^+)$ является внутренним компактом в $L^2(\mathbf{R}^+)$.

§ 7. Обобщение теорем Фурье — Планшереля и Винера — Пэли и теория струны М. Г. Крейна

Возвращаясь к формуле (5.2.5) $L^2 = H_+{}^2 + H_-{}^2$, естественно задаться вопросом о возможности такой декомпозиции для растущих функций, например, для функций, принадлежащих пространству с мерой $L^2(\mathbf{R}, \sigma)$, где σ — некоторая, не обязательно конечная, положительная мера на $\mathbf{R}$.

Оказывается, что такая возможность с необходимостью приводит к ограничению класса мер σ; для функций пространства $L^2(\mathbf{R}, \sigma)$ удается ввести обобщенное преобразование Фурье, для которого справедлив аналог формулы (5.2.5), и самое главное, это преобразование Фурье оказывается связанным с теорией бесконечной струны, построенной М. Г. Крейном и его сотрудниками.

Поскольку струна всегда была главным объектом гармонического анализа, нам не хотелось оставить в стороне эти вопросы.

7.1. Преобразование Фурье в пространстве $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$.

(1) Пусть $Q(z)$ — целая функция, не имеющая корней в замкнутой нижней полуплоскости и такая, что $Q(z)/\overline{Q}(z)$ есть произведение Бляшке в верхней полуплоскости. Положим

$$\varphi(z) = Q(z)\,\overline{Q}(z) \qquad (\overline{Q}(z) = \overline{Q(\bar{z})})$$

и образуем гильбертово пространство $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$, где $d\Omega = \frac{dx}{\varphi(x)}$ (dx — мера Лебега на $\mathbf{R}$).

Рассмотрим преобразование

$$\mathcal{F}_Q : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R}, d\Omega),$$

определенное формулой

$$f(\lambda)=\frac{Q(\lambda)}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{i\lambda x}h(x)\,dx+\frac{\overline{Q}(\lambda)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-i\lambda x}h(x)\,dx, \qquad (1)$$

где $h\in L^2(\mathbf{R})$, $f\in L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$.

Непосредственно проверяется, что $\mathcal{F}_Q$ — изометрическое отображение пространства $L^2(\mathbf{R})$ в $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$. Если рассмотреть принадлежащие $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$ семейства функций

$$\frac{Q(x)}{x-z}\,(\operatorname{Im} z<0) \text{ и } \frac{\overline{Q}(x)}{x-z}\,(\operatorname{Im} z>0)$$

и обозначить через $\mathfrak{R}^+$ и $\mathfrak{R}^-$, соответственно, их замыкания в $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$, то окажется, что каждая функция из $\mathfrak{R}^+$ представляется в виде первого интеграла в правой части (1), а каждая функция из $\mathfrak{R}^-$ допускает представление в виде второго интеграла. Если, кроме того, обозначить через $\mathfrak{R}$ образ $L^2(\mathbf{R})$ в $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$, то можно утверждать, что $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^+\oplus\mathfrak{R}^-$.

(2) Главным объектом дальнейшего исследования является пространство

$$\mathcal{L}L^2(\mathbf{R}, d\Omega)\ominus\mathfrak{R}.$$

Покажем, что элементами этого пространства будут целые функции.

Действительно, из того, что $f\in L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$ ортогональна $\mathfrak{R}^+$, следует, что

$$\frac{f(x)}{Q(x)}\in H^2_-,$$

а из того, что $f\in L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$ ортогональна $\mathfrak{R}^-$, следует

$$\frac{f(x)}{\overline{Q}(x)}\in H^2_+.$$

Таким образом, $\mathcal{L}$ — гильбертово пространство, состоящее из целых функций. Общая теория гильбертовых пространств целых функций развивалась де Бранжем, и пересечение между темой этого раздела и теорией де Бранжа имеется (см. [34]).

(3) Впервые представление $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)=\mathcal{L}\oplus\mathfrak{R}^+\oplus\mathfrak{R}^-$ изучал Н. И. Ахиезер [102], который рассмотрел случай, когда $\varphi(z)=Q(z)\overline{Q}(z)$ — целая функция нулевого рода, все корни которой расположены в полосе $|\operatorname{Re} z|<a$ при некотором $a>0$. Он доказал, что пространство $\mathcal{L}$ совпадает с замыканием в $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$ линейной оболочки степеней $\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$ и что, если $f(\lambda)\in L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$ — целая функция конечной степени k, то функция h, порожденная проекцией f на подпространство $\mathfrak{R}$ в соответствии с формулой (1), обращается в нуль вне интервала $(-k, k)$ (обобщение теоремы Винера—Пэли).

7.2. Обобщенное преобразование Фурье и гильбертовы пространства целых функций конечной степени (см. [110]).

(1) Пусть $\varphi(z)$ — целая функция конечной степени 2σ, $\sigma \geqslant 0$, класса A и положительная на $\mathbf{R}$. Напомним, что целая функция называется принадлежащей классу A, если последовательность всех ее корней удовлетворяет неравенству (5.5.11), т. е.

$$\sum \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_k} \right| < \infty .$$

Случай Н. И. Ахиезера, тем самым включается и получаются результаты, имеющие в некотором смысле законченный характер.

Согласно теореме М. Г. Крейна — Н. И. Ахиезера (см., например, [19]), целые функции конечной степени 2σ класса A, неотрицательные на $\mathbf{R}$, допускают представление вида

$$\varphi(z) = Q(z) \bar{Q}(z),$$

где $Q(z)$ — целая функция конечной степени σ, не имеющая корней в нижней полуплоскости $\mathbf{C}_-$.

В нашем случае, когда $\varphi(x) > 0$ на $\mathbf{R}$, $\frac{Q(z)}{\bar{Q}(z)}$ есть произведение Бляшке и, в соответствии со сказанным в п. 8.1,

$$L^2(\mathbf{R}, d\Omega) = \mathscr{L} \oplus \mathfrak{R}^+ \oplus \mathfrak{R}^-, \tag{1}$$

где $\mathfrak{R}^+ \oplus \mathfrak{R}^-$ состоит из функций вида (7.1.1), а функции из $\mathscr{L}$ продолжаются на всю комплексную плоскость как целые функции конечной степени.

Теорема (В. П. Гурарий [110]). I. Пространство $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$ разлагается в прямую сумму подпространств (1). Подпространство $\mathscr{L}$, состоящее из целых функций конечной степени, совпадает с замыканием в $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$ линейной оболочки функций вида $Q(\lambda)/\lambda - z_k$, где $\{z_k\}^\infty$ — последовательность всех корней функции $Q(z)$, $\operatorname{Im} z_k > 0$.

II. Справедливо следующее обобщение теоремы Винера — Пэли. Для того чтобы целая функция f конечной степени $\sigma + k$ принадлежала пространству $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(\lambda) = f_\sigma(\lambda) + \frac{Q(\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k h(t)\, e^{it\lambda} dt + \frac{\bar{Q}(\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^0 h(t)\, e^{it\lambda} dt, \tag{2}$$

где $f_\sigma \in \mathscr{L}$, $h \in L^2(-k, k)$, $\bar{Q}(z) = \overline{Q(\bar{z})}$.

Результаты I и II допускают следующее обращение.

III. Пусть функция φ, определенная только на $\mathbf{R}$, имеет вид

$$\varphi(x) = |Q(x)|^2, \text{ [1]}$$

где функция $Q(z)$ — аналитическая и не имеющая корней в ниж-

[1] Если $\int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{\log \varphi(x)}{1+x^2} dx < \infty$, то такое представление всегда возможно, а Q — внешняя функция, соответствующая функции φ.

ней полуплоскости, и каждая функция $f(\lambda)\in L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$, $d\Omega=\frac{dx}{\varphi}$, допускает представление (2), где

$$f_\sigma(\lambda)\in L^2(\mathbf{R}, d\Omega),\quad h\in L^2(\mathbf{R}),\quad \bar{Q}(z)=\overline{Q(\bar{z})},$$

причем

$$\|f\|^2=\|f_\sigma\|^2+\|h\|^2_{L^2(\mathbf{R})},\quad \|\cdot\| \text{— норма в } L^2(\mathbf{R}, d\Omega).$$

Пусть, кроме того, известно, что хотя бы для одной функции f соответствующая функция f_σ является целой функцией конечной степени. В таком случае все функции f_σ, фигурирующие в таких представлениях, будут целыми функциями конечной степени, верхняя грань этих степеней, назовем ее σ, конечна, и функция φ продолжается на всю комплексную плоскость как целая функция степени 2σ и класса A.

(2) Часть III этого результата, наиболее нетривиальная, потребовала некоторых оценок теоретико-функционального характера и, к сожалению, мы не имеем возможности их здесь воспроизвести.

Однако мы приведем простое доказательство части I, имея в виду еще одну (побочную) цель — продемонстрировать, как работает понятие индикатора роста целой функции, введенного формулой (5.4.6).

В доказательстве нуждается лишь следующее утверждение. Пусть f — целая функция конечной степени σ, принадлежащая $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$. Тогда из равенств $\langle f, Q/\lambda-z_k\rangle=0$, $k=1, 2, \ldots$, следует, что $f\equiv 0$. Действительно, в таком случае $f(\bar{z}_k)=0$, $k=1, 2, \ldots$, так что функция $\psi=f/\bar{Q}$ — целая и степень ее, очевидно, конечна. Функция ψ является целой функцией вполне регулярного роста как принадлежащая L^2 на $\mathbf{R}$. Поэтому $h_f=h_{\bar{Q}}+h_\psi$[1], так что индикаторная диаграмма I_f функции f равна сумме индикаторных диаграмм $I_{\bar{Q}}+I_\psi$ функций $\bar{Q}$ и ψ. Из равенства $h_Q=h_{\bar{Q}}$ следует, что $I_{\bar{Q}}$ симметрична относительно вещественной оси и, значит, она должна касаться внутренним образом окружности $|z|=\sigma$ в двух точках, комплексно сопряженных друг другу. Поскольку I_ψ — это отрезок (или точка) мнимой оси, то сумма $I_{\bar{Q}}+I_\psi$ непременно выйдет из круга $|z|\leqslant\sigma$, если только I_ψ не есть точка 0, и тогда степень функции f окажется большей σ, вопреки предположению. Остается лишь одна возможность: I_ψ есть точка 0, так что ψ — целая функция нулевой степени и ψ принадлежит L^2 на $\mathbf{R}$. По теореме Винера — Пэли $\psi\equiv 0$ и $f=\psi\bar{Q}\equiv 0$. ◀

[1] Это свойство целых функций вполне регулярного роста, теория которых была создана Б. Я. Левиным и Пфлюгером [19], находит применение в вопросах, связанных с преобразованием Фурье в комплексной области.

(3) Пользуясь только что доказанным фактом, нетрудно увидеть, что система функций $\{f_k\}^\infty$, из $\mathscr{L}$ образует ортонормированный базис в $\mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда справедлива формула ($z_1 z_2 \in \mathbb{C}$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_1)\, f_k(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\, \frac{Q(z_1)\,\overline{Q}(z_2) - Q(z_2)\,\overline{Q}(z_1)}{z_1 - z_2} \tag{3}$$

(аналог формулы Кристоффеля—Дарбу).

В случае, когда $\sigma=0$ и f растет при $|z|\to\infty$ быстрее любой степени, возникает вопрос о полноте системы многочленов. Условие (3), где $\{f_k\}$ — ортонормированная система многочленов, полученнная процессом ортогонализации степеней $1, \lambda, \lambda^2, \ldots$, необходимо и достаточно для такой полноты. В частном случае, когда φ — многочлен, формула (3) превращается в классическую формулу Кристоффеля—Дарбу из теории ортогональных многочленов. В [110] приводятся более эффективные достаточные условия полноты системы многочленов в $\mathscr{L}$, дающие обобщение результата Н. И. Ахиезера.

(4) После появления приведенных выше результатов М. Г. Крейн объяснил, как их можно интерпретировать на языке теории регулярной струны и высказал ряд соображений по поводу дальнейшего развития этой тематики в связи с теорией спектральных функций струны.

Соображения М. Г. Крейна действительно удалось реализовать и дать естественное объяснение результатам предыдущего подпункта с позиций теории спектральных функций струны класса $\mathfrak{C}$, развитой в ряде работ И. С. Каца (см. [116]). Класс $\mathfrak{C}$ был введем М. Г. Крейном при обобщении одного результата Стильтьеса. Теория спектральных функций регулярной струны оказалась недостаточной для получения результатов, излагаемых ниже.) Мы расскажем о сравнительно недавних общих результатах М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана, следуя их работе [128]. См. также [129].

7.3. Обобщенное преобразование Фурье и спектральные функции струны. Пусть последовательность $Z=\{z_k\}$ попарно различных комплексных чисел, удовлетворяющих условиям

1) $\operatorname{Im} z_k>0$. 2) $\overline{Z}=-Z$. 3) $\sum\limits_k \left(-\operatorname{Im}\dfrac{1}{z_k}\right)<\infty$. 4) $\sum\limits_k |z_k|^{-2}<\infty$.

Из этих условий следует, что функция, по-прежнему обозначаемая Q:

$$Q(z)=\prod_{\operatorname{Re} z_k>0}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\left(1+\frac{z}{\overline{z}_k}\right)\prod_{\operatorname{Re} z_k=0}\left(1-\frac{z}{z_k}\right),$$

является целой функцией порядка, меньшего или равного 2, и обладает свойствами $\overline{Q}(z)=Q(-z)$, $|Q(z)/\overline{Q}(z)|<1$ при $\operatorname{Im} z>0$, так что положительная на $\mathbf{R}$ функция $\psi=Q\cdot\overline{Q}$ четная и имеет порядок роста $\leqslant 2$. Снова рассмотрим $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$, где $d\Omega=\frac{dx}{\varphi(x)}$.

Оказывается (см. [128]), что условия 1)—4) необходимы и достаточны для того, чтобы последовательность Z была множеством частот диссипации некоторой *струны* S *класса* $\mathfrak{C}$. Это означает, что существуют число l $(0<l\leqslant\infty)$, неубывающая функция M, ограниченная на интервале $[0, l]$, $l\leqslant\infty$, и удовлетворяющая условию $\int\limits_0^l x dM(x)<\infty$ при $l=\infty$, для которых Z есть в точности спектр краевой задачи

$$dy'+\lambda^2 y dM(x)=0 \tag{1}$$

с граничными условиями $y(0)+iy'(0)/\lambda=0$, $y'(l)=0$.

Считается, что *струна* S *приведенная*, т. е. что нет такого интервала $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon>0$, на котором $dM(x)=dx$, и тогда S однозначно восстанавливается по Z. Обозначим через $\tilde{S}$ струну, простирающуюся от $-\infty$ до l, для которой

$$d\tilde{M}(x)=\begin{cases} dx, & -\infty<x<0,\\ dM(x), & 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Свяжем со струнами S и $\tilde{S}$ гильбертовы пространства $\mathfrak{H}_S$ и $\mathfrak{H}_{\tilde{S}}$ вектор-функций (f_1, f_2).

$$\mathfrak{H}_S=L^2([0, L], dM)\oplus L^2([0, l]),$$

$$\mathfrak{H}_{\tilde{S}}=L^2(]-\infty, l], d\tilde{M})\oplus L^2(]-\infty, l])$$

и пусть

$$\mathfrak{M}=L^2(-\infty, 0)\oplus L^2(-\infty, 0).$$

Ясно, что

$$\mathfrak{H}_{\tilde{S}}=\mathfrak{H}_S\oplus\mathfrak{M}. \tag{2}$$

Пусть $\varphi(x, \lambda^2)$ — решение задачи Коши

$$dy'+\lambda^2 y d\tilde{M}(x)=0, \quad y(l)=1, \quad y'(L)=0.$$

Из теории спектральной функции струны [116] (см. также [128]) следует, что тогда

$$\varphi(0, \lambda^2)=\frac{Q(\lambda)+Q(-\lambda)}{2},\ \varphi'(0, \lambda^2)/\lambda=\frac{Q(\lambda)-Q(-\lambda)}{2i}, \tag{3}$$

а при $x\leqslant 0$

$$\varphi(x, \lambda^2)=\varphi(0, \lambda^2)\cos\lambda x+\frac{\varphi'(0, \lambda^2)}{\lambda}\sin\lambda x=$$

$$=\frac{1}{2}\left(Q(\lambda)e^{-i\lambda x}+Q(-\lambda)e^{i\lambda x}\right). \tag{4}$$

Поэтому обобщенное преобразование Фурье

$$f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{l} f_1(x)\,\varphi(x,\lambda^2)\,d\tilde{M}(x)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{l} f_2(x)\,\frac{\varphi'(x,\lambda^2)}{\lambda}\,dx \tag{5}$$

есть изометрическое отображение $\mathcal{F}_{\tilde{S}}$ пространства $\mathfrak{H}_{\tilde{S}}$ на $L^2(\mathbf{R}, d\Omega)$, при котором разложение (2) порождает разложение $\mathcal{L}\oplus\mathfrak{N}$, где $\mathcal{L}=\mathcal{F}_{\tilde{S}}\mathfrak{H}_S$, а $\mathfrak{N}=\mathcal{F}_{\tilde{S}}\mathfrak{M}$.

Если положить для $(f_1, f_2)\in\mathfrak{M}$

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(f_1(-x)-if_2(-x)), & x>0,\\ \frac{1}{2}(f_1(x)+f_2(x)), & x\leqslant 0,\end{cases}$$

то, пользуясь соотношениями (3) и (4), легко проверить, что формула (5) превращается в формулу (7.1.1), где $h\in L^2(\mathbf{R})$.

Так как для приведенной струны S вектор-функции

$$\Phi_k(x)=(\varphi(x, z_k^2),\ \varphi'(x, z_k^2)/z_k)$$

образуют полную систему в $\mathfrak{H}_S$, то $\mathcal{L}=\mathcal{F}_{\tilde{S}}\mathfrak{H}_S$ совпадает с замыканием линейной оболочки семейства функций

$$Q_k=\mathcal{F}_{\tilde{S}}\Phi_k.$$

Простой подсчет показывает, что с точностью до постоянного множителя Q_k совпадает с $Q/\lambda - z_k$.

В случае, когда *струна регулярная*, т. е. $l<\infty$, функция Q оказывается целой функцией конечной степени и, таким образом, подчиняется условиям В. П. Гурария. Тем самым, результат этого пункта дает новое обоснование и одновременно обобщение (на случай четного веса) результата В. П. Гурария. В этом случае теорему Винера—Пэли также можно вывести из соответствующего аналога теоремы Винера—Пэли для обобщенного преобразования Фурье (5) (см. [116], [129]).

Как указано в [129], эту теорию можно развить дальше, если исходить из общих позиций теории спектральных функций канонических систем дифференциальных уравнений (де Бранж [34]).

§ 8. Положительно определенные функции

Одной из главных наших тем является теория положительно определенных функций, имеющая фундаментальное значение во многих конструкциях и приложениях гармонического анализа.

Изучение инвариантных относительно сдвигов подпространств в $L^2(\mathbf{R})$ привело нас в § 6 к унитарным представлениям группы $\mathbf{R}$ и к теореме Стоуна, характеризующей такие представления на языке преобразования Фурье. Как мы увидим позже, теорема Стоуна теснейшим образом связана с теоремой Бохнера, характеризующей положительно определенные функции. Такая связь позволит нам в будущем наоборот построить теорию преобразования Фурье на группах, исходя из представления Бохнера. Имея в виду такой подход к преобразованию Фурье, мы уже сейчас укажем на связь между положительно определенными функциями на произвольной группе и унитарными представлениями этой группы.

8.1. Положительно определенные функции на группе и унитарные представления группы. Пусть G — произвольная группа. Комплексная функция f на группе G называется *положительно определенной*[1], если

$$\sum_{k,l=1}^{n} f(x_l^{-1}x_k)\,\xi_k\bar{\xi}_l \geqslant 0 \tag{1}$$

для любых конечных наборов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbf{C}$.

Напомним, что *унитарным представлением* $x \to U_x$ *группы* G называется гомоморфизм группы G в группу унитарных операторов действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, которое называется *пространством представления*. Представление называется *циклическим*, если существует элемент $h \in \mathfrak{H}$, такой что линейная оболочка орбиты представления, т. е. множества $\{U_x h\}$, плотна в $\mathfrak{H}$. Этот вектор $h \in \mathfrak{H}$ называется *циклическим*.

Нетрудно доказать, что гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ разлагается в прямую сумму $\oplus \mathfrak{H}_\alpha$ ортогональных подпространств $\mathfrak{H}_\alpha$, инвариантных относительно представления $x \to U_x$, $U_x \mathfrak{H}_\alpha \subset \mathfrak{H}_\alpha$, $x \in G$, таких, что на каждом $\mathfrak{H}_\alpha$ представление $x \to U_x$ циклическое.

По заданному унитарному представлению $x \to U_x$ группы G можно построить положительно определенную функцию

$$f(x) = \langle U_x h_0, h_0 \rangle \quad (\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ — скалярное произведение в } \mathfrak{H}), \tag{2}$$

где h_0 — ненулевой фиксированный вектор из $\mathfrak{H}$. Действительно,

$$\sum_{k,l=1}^{n} f(x_l^{-1}x_k)\,\xi_k\bar{\xi}_l = \sum_{k,l=1}^{n} \langle U_{x_l^{-1}x_k} h_0, h_0 \rangle\,\xi_k\bar{\xi}_l =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \langle \xi_k U_{x_k} h_0, \xi_l U_{x_l} h_0 \rangle = \Big|\sum_{k=1}^{n} \xi_k U_{x_k} h_0\Big|^2.$$

Обратно, как показали И. М. Гельфанд и Д. А. Райков [109], каждая положительно определенная функция f на группе G порождает унитарное представление этой группы такое, что $(U_x h_0, h_0) = f(x)$ для некоторого h_0. В самом деле обозначим через $\mathcal{L}$ совокупность всех простых функций (с конечным множеством значений) на G и построим билинейную форму

[1] Употребительны также термины «*эрмитово-положительная функция*» и «*позитивная функция*».

$$\langle g, h \rangle = \sum f(x^{-1}y)\, g(y)\, \overline{h(x)}, \quad g, h \in \mathscr{L}.$$

Пусть $\mathfrak{N}$ — совокупность всех $\varphi \in \mathscr{L}$, для которых $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$. Образуем факторпространство $\mathfrak{H}' = \mathscr{L}/\mathfrak{N}$ и обозначим через $\mathfrak{H}$ его пополнение по норме $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$. Если каждому элементу $x_0 \in G$ поставить в соответствие *оператор сдвига* T_{x_0} (6.1.1), который в нашем случае (мы не предполагаем, что G коммутативна) определяется формулой $T_{x_0}h(x) = h(x_0^{-1}x)$, то легко проверить, что $\langle T_{x_0}g, T_{x_0}h \rangle = \langle g, h \rangle$, $g, h \in \mathfrak{H}$, и заключить, что оператор T_{x_0}, изометрический в $\mathfrak{H}'$, продолжается до унитарного оператора U_{x_0}, определенного в $\mathfrak{H}$, так что $x \to U_x$ — унитарное представление группы G.

Пусть δ — функция на G, равная 1 при $x = 1$ и 0 при $x \neq 1$ ($1 = 1_G$ — единица группы G). Пусть далее, h_0 — ее образ в пространстве $\mathfrak{H}'$. Тогда $(U_x h_0, h_0) = f(x)$, причем h_0 — циклический вектор представления.

Представление называется неприводимым, если в $\mathfrak{H}$ нет собственного подпространства, инвариантного относительно всех операторов U_x, $x \in G$.

Следующие условия эквивалентны:

(1) Представление $x \to U_x$ неприводимо.

(2) Каждый вектор $h \in \mathfrak{H}$ является циклическим.

(3) Если ограниченный оператор A коммутирует со всеми U_x, то он имеет вид $A = \alpha I$, α — постоянная.

Пусть теперь G — локально компактная группа. Тогда вместе с непрерывными и измеримыми (по мере Хаара на G) положительно определенными функциями на G можно рассматривать непрерывные (слабо непрерывные) и измеримые (слабо измеримые) представления группы.

Впрочем, для унитарных представлений локально компактной группы G из слабой непрерывности следует непрерывность представления.

Позже мы с локально компактной (абелевой) группой G свяжем так называемую групповую алгебру — банахову алгебру суммируемых на G функций и покажем, что каждой положительно определенной функции, непрерывной на G, однозначно сопоставляется положительный функционал групповой алгебры[1]. Это один из возможных путей для получения представления Бохнера.

В заключение мы сформулируем теорему, которой открывается теория унитарных представлений локально компактных неабелевых групп, одна из наиболее увлекательных и перспективных областей современного гармонического анализа.

Теорема Гельфанда — Райкова. Пусть G — произвольная локально компактная группа. Для каждого элемента

[1] И. М. Гельфанд и Д. А. Райков [109].

$x \in G$, $x \neq 1$, существует непрерывное неприводимое унитарное представление $x \rightarrow U_x$ группы G такое, что $U_x \neq I$.

Это утверждение означает, что группа G *допускает достаточно много представлений* указанного вида. Особо прозрачной эта теорема становится в двух случаях, когда группа G компактна или абелева.

В первом случае из-за того, что любое неприводимое непрерывное унитарное представление $x \rightarrow U_x$ компактной группы в гильбертовом пространстве конечномерно, а, стало быть, всякая компактная группа допускает достаточно много непрерывных неприводимых представлений унитарными матрицами. (Этот результат получен Г. Вейлем и Петером [214] для компактных групп Ли, Л. С. Понтрягиным [139] для компактных групп со счетной открытой базой и наконец, ван Кампеном [181] для произвольных компактных групп, причем последний, заметив, что любая непрерывная функция на компактной группе почти периодична, применил соображения фон Неймана (см. [23]), связавшего результаты Фробениуса—Шура и Вейля—Петера с теорией почти периодических функций).

Во втором случае из-за того, что любое неприводимое унитарное представление ЛКА группы одномерно и, значит, имеет вид $U_x h = \chi(x) h$, $h \in \mathfrak{H}$, где $\chi(x)$ — унитарная функция на группе, удовлетворяющая условию

$$\chi(x \cdot y) = \chi(x) \cdot \chi(y) \tag{3}$$

и называемая *унитарным характером* группы. Из теоремы Гельфанда—Райкова следует, что ЛКА группа допускает достаточно много непрерывных характеров. Мы еще вернемся к этому результату в гл. 2.

Возвращаясь к положительно определенным функциям, обозначим множество всех непрерывных положительно определенных функций на локально компактной группе G через $P(G)$. Если G — произвольная группа, то множество всех положительно определенных функций на G можно записать в виде $P(G_d)$, где G_d — группа G, наделенная дискретной топологией.

8.2. Свойства положительно определенных функций на группе.

(1) Пусть f — положительно определенная функция на группе G. Тогда (a) $f(1) \geqslant 0$, (b) $|f(x)| \leqslant f(1)$ для всех $x \in G$, (c) $f(x^{-1}) = \overline{f(x)}$ для всех $x \in G$, (d) $|f(x) - f(y)|^2 \leqslant 2f(1)(f(1) - \operatorname{Re} f(x^{-1}y))$, $x, y \in G$, (e) $|f(1) f(y^{-1}z) - f(y^{-1}x) f(x^{-1}z)|^2 \leqslant (f(1)^2 - |f(x^{-1}y)|^2)(f(e)^2 - |f(x^{-1}z)|^2)$, $x, y, z \in G$.

Эти свойства можно доказать, выбирая в (8.1.1) надлежащим образом x_k и ξ_k. (Например, для доказательства неравенства (d), замеченного М. Г. Крейном, достаточно положить в (8.1.1.) $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, $\xi_1 = \xi_3 = 1$, $\xi_2 = -1$, но можно воспользоваться представлением (2) для положительно определенной функции и непосредственно произвести оценку. Если G — локально компактная группа, то из (d) следует, что положительно определенная функция непрерывна тогда и только тогда, когда ее вещественная часть непрерывна в 1. Этот факт был впервые замечен А. П. Артеменко для $G=\mathbf{R}$. Мы увидим позже, что это свойство положительно определенных функций распространяется на ситуацию, когда непрерывность заменяется некоторой гладкостью.)

Из (b) следует, что если $f(1)=0$, то $f\equiv 0$, поэтому иногда полагают

$$f(1)=1. \tag{1}$$

(2) Пусть G — группа. Если f_1, f_2 — положительно определенные функции на G, то такими же являются $\overline{f_1}$, f_1^{Δ}[1] и $f_1 f_2$ и, наконец, $\alpha f_1+\beta f_2$ для всех $\alpha, \beta>0$. Эти свойства немедленно следуют из определения.

М. Г. Крейн [120], предполагая, что G — топологическая группа, ввел в рассмотрение алгебру $K(G)$ — комплексное линейное пространство, порожденное всеми функциями из $P(G)$. $K(G)$ — алгебра относительно поточечных операций, замкнутая относительно правых и левых сдвигов, а также инверсии. Для ЛКА группы вопрос о строении этой алгебры решается, как мы увидим, теоремой Бохнера (8.4.1), в общем же случае, о ней мало что известно. Хотя равномерный предел последовательности функций из $K(G)$ принадлежит $K(G)$, тем не менее, $K(G)$ не является, вообще говоря, равномерно замкнутой алгеброй функций.

Если G — компактная бесконечная группа, то $K(G)$ равномерно плотная собственная подалгебра алгебры $C(G)$ (в действительности, $K(G)=L^2(G)*L^2(G)$).

В своей фундаментальной работе [124] М. Г. Крейн (1950) в случае, когда G — компактная группа, применил алгебру $K(G)$ для изучения так называемой *алгебры Крейна,* которая для компактной (неабелевой) группы является в некотором смысле двойственным объектом, подобно тому, как дискретная абелева группа является двойственным объектом для абелевой компактной. Это явилось основой для построения теории двойственности для компактных групп, аналогичной теории двойственности Понтрягина—ван Кампена для компактных абелевых групп.

(3) Пусть G — локально компактная группа. Измеримая (по мере Хаара на G) функция f называется *интегрально положительно определенной,* если форма

$$\langle K_f\varphi, \varphi\rangle = \int\limits_{G\times G} f(x^{-1}y)\,\overline{\varphi(x)}\,\varphi(y)\,dx\,dy \geqslant 0 \tag{2}$$

для любых $\varphi\in L^1(G)$.

[1] $f^{\Delta}(x)=f(x^{-1})$.

Можно показать, что интегрально положительно определенная функция принадлежит $P(G)$ тогда и только тогда, когда она непрерывна.

Заметим, что справедлива теорема для случая $G=\mathbf{R}$, доказанная Ф. Риссом [197], а в общем случае — Сигалом и фон Нейманом [205].

Теорема. Измеримая (относительно меры Хаара) положительно определенная функция на локально компактной группе G представляется в виде суммы непрерывной положительно определенной функции на G и положительно определенной функции на G, локально почти всюду (по мере Хаара) равной нулю.

Заметим также, что если интегрально положительно определенная функция непрерывна, то в определяющем соотношении (2) функцию φ можно брать из $C_k(G)$ — пространства непрерывных на G функций с компактным носителем.

С другой стороны, применяя построения п. 8.1.1, можно получить следующий результат.

Теорема (И. М. Гельфанд и Д. А. Райков). Пусть f — положительно определенная функция на локально компактной группе G и пусть для формы $\langle K_f\varphi, \varphi\rangle$ в левой части (8.2.2) выполняется неравенство

$$\langle K_f\varphi, \varphi\rangle \leqslant K\|\varphi\|_1^2, \tag{3}$$

справедливое для всех функций $\varphi\in C_k(G)$, обращающихся в нуль вне некоторой фиксированной окрестности элемента $\mathbf{1}$ в G. Тогда f локально почти всюду совпадает с функцией из $P(G)$.

Отсюда как следствие получается, что если положительно определенная функция существенно ограничена в некоторой окрестности элемента $\mathbf{1}$ в G, то она почти всюду равна непрерывной положительно определенной функции.

Прежде чем рассказать о центральном результате теории положительно определенных функций — теореме Бохнера, мы напомним теоремы, которые исторически предшествовали теореме Бохнера, см. [3].

8.3. Класс Каратеодори. Теоремы Каратеодори, Тёплица, Ф. Рисса и Герглотца. Тема, которой мы сейчас занимаемся, была открыта работой Каратеодори, который ввел в рассмотрение класс C функций, аналитических в единичном круге с неотрицательной мнимой частью, и поставил задачу описания функций $f\in C$, $f(z)=c+\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k z^k$, $\bar{c}=c$.

Каратеодори показал, что эти функции характеризуются следующим свойством. Если $c_k=\alpha_k+i\beta_k$, то каждая точка $(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n)$ в $\mathbf{R}^{2n}$ принадлежит некоторому выпуклому множеству в $\mathbf{R}^{2n}$, $n=1, 2, \ldots$.

Тёплиц заметил, что условие Каратеодори можно сформулировать так. Для принадлежности функции f классу C необходимо и достаточно, чтобы форма

$$\sum_{k,l=0}^{n} c_{k-l}\xi_k\overline{\xi}_l \quad (c_0=c+\overline{c},\ c_{-k}=\overline{c},\ k>0), \qquad (1)$$

получившая название *тёплицевой формы,* была неотрицательной при любом n.

Таким образом, последовательность коэффициентов Тейлора функции $f\in C$ образует положительно определенную функцию на группе $\mathbf{Z}$. Ф. Рисс и Герглотц показали, что класс C характеризуется представлением

$$f(z)=i\nu+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\sigma(\theta), \qquad (2)$$

где $\nu=\operatorname{Im} f(0)$, σ — неотрицательная конечная мера, однозначно определяемая функцией f. Кроме того, каждый из них показал, что для неотрицательности формы (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}d\sigma(\theta), \qquad (3)$$

где σ — неотрицательная конечная мера на окружности, однозначно определяемая последовательностью коэффициентов. Представление (3) и есть так называемое представление Бохнера для случая группы $\mathbf{Z}$.

Интересно отметить, что все перечисленные результаты были обнаружены практически одновременно. Они были опубликованы в 1911 г.

Более подробная информация об этом круге вопросов имеется, например, в [3].

8.4. Теорема Бохнера. Хотя частные результаты о положительно определенных функциях на $\mathbf{R}$ были известны до Бохнера (Матиас в 1923 г. занимался вопросом распространения представления, аналогичного (8.3.3), на $\mathbf{R}$; Винер, занимаясь автокорреляционной функцией в [97], вплотную подошел к представлению Бохнера), Бохнер был первым, показавшим, что класс $P(\mathbf{R})$ непрерывных положительно определенных функций исчерпывается преобразованиями Фурье положительных конечных борелевских мер на $\mathbf{R}$ (1932), причем соответствие между функциями класса $P(\mathbf{R})$ и мерами из $M(\mathbf{R})$ взаимно однозначно. Одноврменно этот результат в ослабленной форме получен А. Я. Хинчиным и поэтому он иногда называется теоремой Бохнера—Хинчина.

После упомянутых исследований Гельфанда—Райкова и Годемана [174] стало ясно, что естественной сферой распространения теоремы Бохнера на $\mathbf{R}$ являются локально компактные абелевы группы (сферой распространения формулы Рисса—Герглотца (8.3.3) являются компактные группы).

Теорема Бохнера для ЛКА групп была доказана в 1940 г. практически одновременно А. Вейлем [90], Д. А. Райковым [140] и А. Я. Повзнером [137]. Вот ее формулировка.

Теорема Бохнера. Пусть $f \in P(G)$, G — ЛКА-группа. Тогда существует единственная мера $\mu \in M^+(\hat{G})$[1], где $\hat{G}$ — группа, двойственная G такая, что (ср. с (5.1.1))

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \chi(x)\, d\mu(\chi), \quad x \in G. \tag{1}$$

Сам Бохнер получил доказательство этой теоремы для $G = \mathbf{R}$, применяя развитый аппарат теории интеграла Фурье, который ему впоследствии удалось перенести на случай $G = \mathbf{R}^n$ [31]. Поскольку мы намерены построить интеграл Фурье на ЛКА группе, опираясь на теорему Бохнера, нас будет интересовать независимое доказательство.

Выделяются два возможно главных метода доказательства теоремы Бохнера. Один из них основан на теореме Крейна—Мильмана о крайних точках в локально выпуклых пространствах и о нем мы вкратце расскажем в следующем пункте. Другой метод опирается на теорию банаховых алгебр и мы расскажем об этом методе в главе 2 в разделе, посвященном банаховым алгебрам.

Как мы уже подчеркивали, теорема Бохнера имеет многочисленные приложения в гармоническом анализе. О различных таких приложениях, в частности, об уже упоминавшихся теоремах Стоуна и Стоуна—Макки рассказано у Хьюитта и Росса ([51, т. 2, гл. 8]).

Замечание. Теорема Бохнера означает, что для ЛКА группы G класс $P(G)$ совпадает с $\mathcal{F}^{-1}M^+(G)$ и, значит, алгебра $K(G) = L^2(G) * L^2(G)$ совпадает с $\mathcal{F}M(\hat{G})$, где $\mathcal{F}$ — оператор Фурье на G; $M(\hat{G}')$ — алгебра регулярных ограниченных (конечных) комплексных мер на $\hat{G}$, $M^+(\hat{G})$ — конус положительных мер из $M(G)$.

8.5. Классы С. Н. Бернштейна экспоненциально выпуклых и абсолютно монотонных функций. Классы функций, о которых будет идти речь в этом пункте, были введены С. Н. Бернштейном в связи с развитием им теории так называемых вещественно аналитических функций.

Интересно отметить, что работа С. Н. Бернштейна (см. [7]), посвященная функциям этого класса, появилась в 1928 г., так что «представление Бернштейна» предшествовало «представлению Бохнера».

[1] $M^+(G)$ — подкласс в $M(G)$, состоящий из неотрицательных мер.

В свою очередь, работе С. Н. Бернштейна предшествовали работы Хаусдорфа 1921 и 1923 гг. (см. о них в [3] и [42]), в которых, по существу, был введен в рассмотрение класс функций, получивший впоследствии название класса вполне монотонных функций. Хаусдорф нашел представление для функций этого класса и указанная ниже связь между абсолютно монотонными и вполне монотонными функциями позволяет представление для функций каждого из этих классов называть *представлением Хаусдорфа—Бернштейна.*

1) Определение. Вещественная функция f, определенная на интервале $(a, b)\subset\mathbf{R}$, называется *экспоненциальной выпуклой*, если неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i+x_j)\,\xi_i\xi_j\geqslant 0 \tag{1}$$

справедливо для любых натуральных n и наборов $(\xi_1, \ldots, \xi_n)\subset\subset\mathbf{R}$ и $(x_1, \ldots, x_n)\subset\mathbf{R}$ таких, что $x_i+x_j\in(a, b)$.

Легко видеть, что

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\sqrt{f(x_1)\,f(x_2)},$$

т. е., что f — логарифмически выпукла.

Теорема (С. Н. Бернштейн, Уиддер). Функция f экспоненциально выпуклая на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда для всех $x\in(a, b)$ для нее имеет место представление

$$f(x)=\int_{\mathbf{R}} e^{xu}d\sigma(u),\quad x\in(a, b), \tag{2}$$

где σ — положительная мера на $\mathbf{R}$, для которой интеграл (2) существует.

Вопрос единственности представления (2) связан с принадлежностью f квазианалитическому классу и, стало быть, с условием Карлемана

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(f^{(2n)}(0)\right)^{-\frac{1}{2n}}=\infty. \tag{3}$$

Определение экспоненциально выпуклой функции беспрепятственно переносится на ЛКА группы и даже полугруппы. Определения п. 1.5.1 позволяют для случая ЛКА группы придать смысл интегралу, аналогичному (2), и перенести на этот случай теорему Бернштейна—Уиддера.

2) Вещественная функция f, определенная на интервале $(a, b)\subset\mathbf{R}$, называется *абсолютно монотонной функцией* на (a, b), если для всех натуральных n и всех x и h, для которых $a<x<x+nh<b$, для нее справедливы неравенства

$$f(x)\geqslant 0,\quad (\Delta_h^n f)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}{}'(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+kx)\geqslant 0, \tag{4}$$

и *вполне монотонной*, если при тех же условиях $(-1)^n\Delta_h^n f\geqslant 0$.

Теорема Хаусдорфа—Бернштейна. Функция f абсолютно монотонная на интервале $(-\infty, 0)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$f(x)=\int_0^\infty e^{xt}d\sigma(t), \tag{5}$$

где σ — положительная мера на $\mathbf{R}^+$.

(Тем самым указывается представление для вполне монотонных функций, ибо, если $f(x)$ абсолютно монотонна, то $f(-x)$ вполне монотонная.)

Заметим, что функция f в (5) продолжается на левую полуплоскость $\mathbf{C}(-\infty,\alpha),\alpha<0$, в $\mathbf{C}$ как ограниченная аналитическая функция, непрерывная в замкнутой полуплоскости, причем на каждой прямой, параллельной мнимой оси, значения функции f представляют положительно определенную функцию на $\mathbf{R}$ и формула (5) превращается в представление Бохнера.

Отсюда следует, что мера σ в (5) определяется однозначно по f.

В первоначальную формулировку С. Н. Бернштейна входило требование $f(0)=f(-0)<\infty$, которое было впоследствии снято Уиддером, см. [96].

Из теоремы Хаусдорфа—Бернштейна следует, что абсолютно монотонная функция на $\mathbf{R}^-$ бесконечно дифференцируема при $x<0$, а в точке 0 может иметь скачок. Поэтому абсолютно монотонную функцию на $\mathbf{R}^-$ можно было бы определить как такую, у которой все производные существуют и

$$f^{(k)}(x)\geqslant 0 \quad (k=0,\ 1,\dots),\ x\in]-\infty,\ 0[.$$

Ясно, что определение абсолютно монотонной или вполне монотонной функций дословно сохраняется, если $\mathbf{R}^-$ заменить абелевой полугруппой T, единичный элемент которой записывается как $\mathbf{0}$. Для того, чтобы можно было бы говорить о представлении абсолютно монотонной функции на полугруппе, аналогичном (5), определим *«экспоненту»* на T как вещественную функцию $\lambda(x)$, для которой

$$\lambda(x+y)=\lambda(x)\cdot\lambda(y),\ x,\ y\in T,\ 0\leqslant\lambda(x)\leqslant 1. \tag{6}$$

Если ввести в рассмотрение множество M_0 всех абсолютно монотонных функций на T, для которых $f(0)\leqslant 1$, то нетрудно понять, что M — компактное выпуклое множество в векторном пространстве (хаусдорфовом, локально выпуклом) вещественных функций на T с топологией поточечной сходимости. Стало быть, можно говорить о крайних точках множества M, и экспоненты на T, определенные в (6), не только принадлежат M $((\Delta_h{}^n\lambda)(x)=\lambda(x)(1-\lambda(h))^n\geqslant 0,\ x,\ h\in T)$, но являются крайними точками в M.

8.6. Теорема Бохнера на ЛКА группе и теорема Хаусдорфа—

Бернштейна на полугруппе как специальные случаи теоремы Крейна—Мильмана. Пусть E — вещественное топологическое векторное пространство, M — выпуклое множество в E. Точка $x_0 \in M$ называется *крайней*, если из соотношения $x_0 = (1-\mu)a + \mu b$, $a, b \in M$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, следует, что либо $x_0 = a$ либо $x_0 = b$.

Теорема Крейна — Мильмана ([127]). Пусть E — вещественное хаусдорфово локально выпуклое пространство, M — непустое выпуклое компактное множество в E. Тогда M является замкнутой выпуклой оболочкой в E множества своих крайних точек.

Таким образом, теорема Крейна — Мильмана показывает, что каждая точка x из M является пределом в E выпуклых линейных комбинаций $\sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k$, где $x_k \in M_0$, $0 \leqslant \mu_k \leqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1$, а M_0 — множество крайних точек в M. Если M_0 компактно, то можно показать, что каждая точка множества M является центром масс некоторой положительной меры на M_0 с общей массой, равной единице. Вот точная формулировка соответствующей теоремы, которую можно доказать, опираясь на теорему Крейна—Мильмана [см. [40], [73]).

Теорема Шоке. Пусть E — хаусдорфово вещественное локально выпуклое пространство, квазиполное в топологии Макки $\tau(E, E')$, и M — непустое компактное выпуклое подмножество в E. Пусть, далее, M_0 — множество крайних точек в M. Тогда M совпадает с множеством точек $x_0 \in E$ вида

$$x_0 = \int_{\overline{M}_0} x d\mu(x),$$

где μ — положительная мера на $\overline{M}_0$ (замыкание в E) с общей массой, равной единице.

(Напомним, что топологическое векторное пространство называется *квазиполным*, если ограниченные замкнутые подмножества в нем полны.)

Пусть E — локально выпуклое пространство и E' — его топологическое сопряженное. На E можно ввести другие локально выпуклые топологии, относительно которых топологическое сопряженное к E совпадает с E'. Среди них существует слабейшая $\sigma(E, E')$ и сильнейшая (теорема Макки), которая обозначается $\tau(E, E')$ и называется *топологией Макки*. Роль топологии Макки в интегральном варианте теоремы Крейна—Мильмана проясняет следующая теорема, см. [118], [40].

Теорема Крейна. Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, A — компактное подмножество в E и M — замкнутая выпуклая оболочка A в E. Множество M компактно тогда и только тогда, когда оно полно в топологии $\tau(E, E')$.

Теперь ясно, что у нас все готово для формулировки следующей теоремы, доказанной Шоке (см. [40], [73]).

Теорема Хаусдорфа — Бернштейна — Шоке. Крайними для множества M абсолютно монотонных функций f на абелевой полугруппе T таких, что $f(0)\leqslant 1$, являются точка 0 и экспоненты на T, определенные формулой (8.6.6). Множество S экспонент на T компактно в топологии поточечной сходимости на E и каждая функция $f\in M$ допускает представление

$$f(x)=\int_S \lambda(x)\,d\mu(\lambda),$$

где μ — положительная мера на S.

Для применения интегрального варианта теоремы Крейна—Мильмана к представлению Бохнера функции из $P(G)$ на ЛКА группе G в качестве E можно выбрать пространство всех эрмитово симметрических функций на G, $f(-x)=\overline{f}(x)$, $x\in G$, в качестве M — множество тех функций из $P(G)$, для которых $f(0)\leqslant \leqslant 1$. Основная трудность тогда заключается в том, чтобы доказать, что 0 и унитарные непрерывные характеры на G являются крайними точками множества M. Для этой цели привлекается связь между функциями из $P(G)$ и унитарными представлениями группы, как впервые было сделано в уже отмеченной работе И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова. Эта связь была затем использована Картаном и Годеманом [158] для доказательства указанным способом теоремы Бохнера.

Доказательство всех фактов, приведенных в этом пункте, читатель может найти в [40].

8.7. Положительно определенные функции в $\mathbf{R}^n$. Радиальные положительно определенные функции и теоремы Шёнберга. Мы уже отмечали, что гладкость положительно определенной функции в окрестности нуля обеспечивает такую же гладкость всюду в области определения. Например, если $f\in P(\mathbf{R}^n)$ и в некоторой окрестности нуля f принадлежит классу C^{2k}, где k — целое положительное число, то f принадлежит этому классу в окрестности каждой точки $x\in\mathbf{R}^n$. (Для доказательства этого факта нужно рассмотреть $g(x)=(1-\Delta)^k f(x)$, где Δ — оператор Лапласа, перейти к преобразованию Фурье $\mathcal{F}g=(1+|\lambda|^2)^k\mathcal{F}f$ и регуляризовать его стандартным образом.)

В силу 8.2.(b), функция $f\in P(\mathbf{R}^n)$ достигает максимума в точке 0. Пусть $f\in P(\mathbf{R}^n)$ достигает максимума еще в одной точке пространства, например, в точке $x_0\neq 0$. Тогда легко видеть, что $f(x+x_0)=f(x)$, т. е. x_0 — период функции f.

Радиальная функция f, принадлежащая $P(\mathbf{R}^n)$, представляется в виде $f(x)=F(|x|)$; функция F называется *радиальной положительно определенной функцией в n-мерном пространстве*, а класс всех таких функций обозначается через $P_r(\mathbf{R}^n)$.

Нетрудно видеть, что каждая функция из $P_r(\mathbf{R}^n)$ вещественна и что

$$P_r(\mathbf{R}^1)\subset P_r(\mathbf{R}^2)\subset\ldots\subset P_r(\mathbf{R}^n)\subset\ldots.$$

(Напомним, что представление Бохнера для $f \in P(\mathbf{R}^n)$ имеет вид

$$f(x)=\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\lambda}d\sigma(\lambda),\quad x.\lambda=x_1\lambda_1+\ldots+x_n\lambda_n.) \tag{1}$$

Приведем результаты Шёнберга, характеризующие радиально положительно определенные функции (см. [202]).

Теорема 1. Класс $P_r(\mathbf{R}^n)$ совпадает с совокупностью функций вида

$$f(x)=\int\limits_0^\infty \Omega_n(|x|u)\,d\sigma(u),$$

где σ — положительная конечная мера на $\mathbf{R}^+$, а Ω_n определяется равенством

$$\Omega_n(r)=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{r}\right)^{\frac{1}{2}(n-2)} J_{\frac{n-2}{2}}(r),\quad |x|=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Для доказательства этой теоремы нужно записать представление Бохнера для функции f из $P_r(\mathbf{R}^n)$ и, считая функцию f радиальной, усреднить это представление по единичной сфере S_n в $\mathbf{R}^n$.

Рассмотрим пересечение всех классов $P_r(\mathbf{R}^\infty)=\bigcap\limits_n P_r(\mathbf{R}^n)$. Формула

$$e^{-\frac{r^2}{2}}=\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^\infty \Omega_n(ru)\,e^{-\frac{u^2}{2}}u^{n-1}du$$

показывает, что пересечение всех этих классов непусто.

Таким образом, $P_r(\mathbf{R}^\infty)$ — нетривиальный класс, который может быть охарактеризован также следующим образом. $P_r(\mathbf{R}^\infty)$ — это совокупность всех радиальных положительно определенных функций в гильбертовом пространстве $l^2=L^2(\mathbf{Z}^+)$.

Теорема 2. Для принадлежности функции f классу $P_r(\mathbf{R}^\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(r)=\int\limits_0^\infty e^{-ur^2}d\sigma(u), \tag{2}$$

где σ — положительная конечная мера на $\mathbf{R}^+$.

Сопоставление формул (8.5.5) и (1) показывает, что если f — абсолютно монотонная функция на $\mathbf{R}^-$, то $f(-r^2)\in P_r(\mathbf{R}^\infty)$.

В следующем параграфе мы расскажем о некоторых аспектах теории положительно определенных функций на $\mathbf{R}$, лежащих в круге идей, связанных с континуальными аналогами классической задачи Неванлинны—Пика. Мы расскажем также об операторных аспектах этой теории, позволяющих рассматривать, наряду с положительным ядром $K(x-y)$, другие ядра, обладающие некоторым свойством положительности и приводящие к некоторым родственным классам функций. Пользуясь операторным подходом М. Г. Крейна, мы укажем представления для функций этих классов, аналогичные представлению Бохнера.

Заметим, что многие постановки, о которых мы расскажем, представляют интерес в той более общей ситуации, когда $\mathbf{R}$ заменяется произвольной ЛКА группой. В первую очередь, это относится к так называемым отрицательно определенным функциям, в связи с той ролью, которую играет класс таких функций в теории вероятностей.

Однако мы встретимся здесь с кругом задач, где успешно работающие на $\mathbf{R}$ теоретико-функциональные методы, зачастую неприменимы при переходе к многомерной ситуации. Иногда невозможность соответствующего продвижения становится принципиальной. Так обстоит дело с задачей продолжения положительно определенной функции, заданной первоначально в некотором симметричном относительно точки 0 кубе в $\mathbf{R}^n$, на все $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 2$.

§ 9. Положительно определенные ядра и задачи продолжения положительно определенных функций

9.1. Задача продолжения положительно определенных функций. Операторный подход М. Г. Крейна. Функцию $f(x)$, $x\in(-a, a)$, будем называть положительно определенной на интервале $(-a, a)$, если неравенство $\sum_{k,l=1}^{n} f(x_k-x_l)\,\xi_k\bar{\xi}_l\geqslant 0$ имеет место для произвольных $0\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant a$. Класс всех непрерывных положительно определенных функций на интервале обозначим через $P_a=P_a(\mathbf{R})$. Он характеризуется также условием

$$\langle K_f\varphi, \varphi\rangle=\int_0^a\!\!\int f(x-y)\,\varphi(x)\,\overline{\varphi(y)}\,dx\,dy\geqslant 0 \tag{1}$$

для любых $\varphi\in L^1(0, a)$. (Ср. с (8.2.2.)).

Задача продолжения функции класса P_a до функции класса $P(\mathbf{R})$ была поставлена М. Г. Крейном в 1940 г. Он показал [119], что такое продолжение всегда возможно и, стало быть, существует положительная конечная мера, представляющая функцию класса P_a формулой (8.4.1) или (8.7.1), когда $n=1$.

Далеко нетривиальной оказалась задача, также поставленная М. Г. Крейном, нахождения критерия единственности такого продолжения и описания класса всех представляющих мер в случае неединственности.

В последующем М. Г. Крейн неоднократно возвращался к этой проблеме, применяя операторные методы, связанные с теорией расширения симметрических операторов до самосопряженных, или теоретико-функциональные.

В общих чертах операторный подход М. Г. Крейна (см. [123]) заключается в следующем. С функцией $f \in P_a$ связывается скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle_f = \langle K_f \varphi, \psi \rangle, \tag{2}$$

определенное для функций $\varphi, \psi \in L^2(0, a)$ и порождающее гильбертово пространство L_f^2. На плотном множестве D в L_f^2 финитных бесконечно дифференцируемых функций действует симметрический оператор

$$A' = -i \frac{d}{dx}. \tag{3}$$

(Легко проверить, что $\langle A'\varphi, \psi\rangle_f = \langle \varphi, A'\psi\rangle_f$, $\varphi, \psi \in D$.) Симметрический оператор A' допускает расширение до самосопряженного оператора A, которому отвечает разложение единицы

$$1 = \int_{\mathbf{R}} dE_\lambda = \int_{\mathbf{R}} P(\lambda)\, d\rho(\lambda), \tag{4}$$

где ρ — конечная положительная мера, а $P(\Delta)$ — проектор на подпространство, натянутое собственными функциями φ_λ, удовлетворяющими уравнению

$$-i \frac{d\varphi_\lambda}{d\lambda} = \lambda \varphi_\lambda, \tag{5}$$

так что $\varphi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \Delta \subset \mathbf{R}$. Тогда, в силу (2), (4),

$$\langle \varphi, \psi \rangle_f = \int_{\mathbf{R}} \langle P(\lambda) f, \psi \rangle_f d\rho(\lambda) =$$

$$= c(\lambda) \int_{\mathbf{R}} \int_0^a \int_0^a e^{i\lambda(x-y)} \varphi(x) \overline{\psi(y)}\, dx dy d\rho(\lambda),$$

откуда

$$f(x-y) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda(x-y)} d\sigma(\lambda), \tag{6}$$

где $\sigma(\lambda) = c(\lambda) d\rho(\lambda)$, $c(\lambda) \geqslant 0$. Таким образом, при $y=0$ в (6) мы получили представление Бохнера. Кроме того, мы установили, что каждому самосопряженному расширению оператора A' отвечает мера σ, дающее продолжение функции $f \in P_a$.

Для единственности продолжения необходимо и достаточно, чтобы замыкание оператора A' было самосопряженным в L_f^2.

Замечание. Интересно сопоставить подход И. М. Гельфанда с подходом М. Г. Крейна, подобно тому как сопоставлялись формулы (6.4.3) и (4.1.7). Недостаток места не позволяет нам это сделать.

Этот подход М. Г. Крейна оказался чрезвычайно плодотворным в соединении с методом направляющих функционалов в дальнейших исследованиях (см. [123], [6]).

Пользуясь этим методом мы получим сейчас представления, аналогичные представлению Бохнера для родственных положительно определенных ядер $K_f(x, y)$, связанных со сдвигами на группе $\mathbf{R}$, для которых

$$\langle K_f\varphi, \varphi \rangle = \iint K_f(x, y)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi(y)}\, dx dy \geqslant 0.$$

9.2. Экспоненциально выпуклые функции. Это функции, для которых выполняется условие (8.5.1). Поэтому ядро имеет вид

$K_f(x, y) = f(x+y)$ и положительно определено,

оператор $A' = \frac{d}{dx}$,

собственные функции $\varphi_\lambda(x) = e^{\lambda x}$,

представление $f(x+y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x+y)} d\sigma(\lambda)$.

Как мы уже отмечали, единственность здесь имеется, поскольку $f(x+iy)$ положительно определенная (по Бохнеру) функция, аналитическая в полосе комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и, значит, σ определяется однозначно.

9.3. Четно-положительные функции ([122]). Так называются непрерывные четные функции f, определенные на симметричном интервале в $\mathbf{R}$, для которых ядро $K_f(x, y) = f(x+y) + f(x-y)$ положительно определено. Другими словами

$$\iint f(x-y)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi(y)} dx dy \geqslant 0$$

для любой четной функции φ, $\varphi \in D$.

Применяя снова схему Крейна, находим:

оператор — $A' = \frac{d^2}{dx^2}$,

собственные функции (четные) — $\varphi_\lambda(x) = \cos\sqrt{\lambda}\, x$,

представление $K_f(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}\, x \cos\sqrt{\lambda}\, y d\sigma(\lambda)$.

Мы приходим к результату, полученному М. Г. Крейном [122] и при некоторых ограничениях А. Я. Повзнером [138].

Теорема. Любая четно-положительная функция на $\mathbf{R}$ представляется в виде

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} \cos \lambda x d\mu_1(\lambda) + \int\limits_0^{\infty} \operatorname{ch} \lambda x d\mu_2(\lambda), \tag{1}$$

где μ_1 — положительная конечная мера, μ_2 — положительная мера, для которой второй интеграл в (1) сходится при всех значениях $x \in \mathbf{R}$.

Однозначность продолжения или единственность пары (μ_1, μ_2) получается при условии $\int\limits_0^\infty e^{-cx^2} f(x)\, dx < \infty$ из принципа Фрагмена — Линделёфа.

9.4. Функции класса Крейна. Так называются четные непрерывные функции f на интервале $(-a, a)$, для которых ядро $K_f(x, y) = f(x+y) - f(x-y)$ положительно определено. Другими словами

$$\langle K_f\varphi, \varphi \rangle = \iint (f(x+y) - f(x-y))\, \varphi(x)\, \overline{\varphi(y)}\, dx dy \geqslant 0,$$

где φ — нечетные функции из D. Оператор здесь такой же, как в 9.3, а собственные функции имеют вид $\varphi_\lambda = \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda}$. Поэтому

$$K_f(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, x \sin \sqrt{\lambda}\, y}{\lambda}\, d\sigma(\lambda)$$

и мы приходим к теореме.

Теорема Крейна ([122]). Функция f принадлежит классу Крейна тогда и только тогда, когда она допускает представление

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda}\, d\sigma(\lambda), \tag{1}$$

где σ — положительная мера на $\mathbf{R}$.

Вначале эта теорема послужила М. Г. Крейну примером к методу направляющих функционалов, но впоследствии выяснилась ее роль в обратной задаче для уравнений Штурма—Лиувилля на полуоси. Кроме того, функции вида (1) допускают интерпретацию на языке теории струны Крейна, о которой мы рассказали в § 7.

Читателя, интересующегося другими приложениями этого метода, можно адресовать к монографиям [6], [12], [16].

9.5. Теоретико-функциональный подход к задаче продолжения. (М. Г. Крейн [126], А. П. Артеменко [101])[1] связан с систематическим изучением пары аналитических функций $w = (w^+(z), w^-(z))$, ассоциированных с мерой σ, представляющей продолжение функции $f_a \in P_a$.

[1] Обращаем внимание также на подход, предложенный Б. Я. Левиным в [130], использующий результат Винера из [218].

$$w_\sigma(z)=w(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda-z}=\begin{cases}w^+(z), & \operatorname{Im} z>0,\\ w^-(z), & \operatorname{Im} z<0,\end{cases} \tag{1}$$

так что пара (w^+, w^-) является преобразованием Карлемана функции if:

$$w^+(z)=i\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{itz}dt, \quad \operatorname{Im} z>0,$$

$$w^-(z)=-i\int\limits_{-\infty}^0 f(t)\,e^{itz}dt, \quad \operatorname{Im} z<0.$$

Иногда w^+ и w^-, являясь аналитическими продолжениями друг друга, образуют единую аналитическую функцию. (В §§ 5—6 мы называли эту функцию двухсторонним преобразованием Фурье или преобразованием Карлемана.) В общем же случае w^+ и w^- — различные аналитические функции, связанные лишь соотношением симметрии $w^-(z)=\overline{w^+(\bar z)}=\bar{w}^+(z)$, причем пара (w^+, w^-) однозначно определяет меру σ.

Рассмотрим одну из этих функций, например, $w=w^+$. Она обладает свойством «позитивности»

$$\frac{w(z)-\bar{w}(z)}{z-\bar z}\geqslant 0 \Rightarrow \frac{w(z)-\bar{w}(z)}{i}\geqslant 0. \tag{2}$$

Функции, аналитические в верхней полуплоскости в $\mathbf{C}$ и обладающие этим свойством, образуют так называемый *неванлинновский класс* (*класс* N), аналогичный классу C Каратеодори из п. 8.3, и функции неванлинновского класса характеризуются представлением

$$w(z)=\mu z+\nu+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+tz}{t-z}\,d\tau(t), \tag{3}$$

где числа $\mu\geqslant 0$, $\nu\in\mathbf{R}$, τ — конечная положительная мера на $\mathbf{R}$, однозначно определяются функцией w.

(Заметим, что решение классической проблемы моментов $s_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^k d\tau(\lambda)$, $k=0, 1, \ldots$, эквивалентно нахождению коэффициентов асимптотического разложения функции w на бесконечности $w\cong\frac{s_0}{z}+\frac{s_1}{z^2}+\ldots$)

Формула (3) легко выводится из представления Герглотца—Рисса (8.3.2).

Интересующие нас функции вида (1) образуют собственный подкласс N_0 класса N, и здесь аналогия с компактным случаем окружности обрывается.

Обозначим через Σ класс всех мер, отвечающих различным самосопряженным расширениям оператора A', (9.1.3). Пусть

$z_0 \in \mathbf{C}_+$. Рассмотрим очевидно выпуклое множество $K = \{w_\sigma(z_0) \in \mathbf{C}_+ : \sigma \in \Sigma\}$.

Оказывается, что в случае неединственности продолжения множество K есть круг, а в случае единственности круг вырождается в точку (так называемые *круг Вейля* и *точка Вейля*).

Обратим внимание на недавно появившуюся монографию В. Э. Кацнельсона [16], в которой охвачен широкий круг вопросов, возникающих в этой тематике, и прослежены разнообразные связи с другими теоретико-функциональными проблемами (факторизация матриц-функций, теория взвешенного приближения многочленами, теория квазианалитических классов функций и т. д.).

Сейчас перейдем к изложению результатов М. Г. Крейна по описанию всех продолжений функции класса $P_a(\mathbf{R})$.

9.6. Круг Вейля, точка Вейля и четверка целых функций Неванлинны—Крейна. Опишем в общих чертах схему М. Г. Крейна, дающую все продолжения $f \in P_a$. Пусть $0, x_1, x_2, \ldots$ — счетная всюду плотная последовательность точек на интервале $[-a, a]$.. Рассмотрим соответствующую последовательность экспонент $1, e^{ix_1\lambda}, e^{ix_2\lambda}, \ldots$ и ортогонализуем ее в пространстве $L^2(\mathbf{R}, \sigma)$, где $\sigma \in \Sigma$. Пусть $\{P_k(\lambda)\}_0^\infty$ — получающаяся ортонормированная последовательность, которая, заметим, не зависит от выбора $\sigma \in \Sigma$. Построим аналог «функций 2-го рода»

$$Q_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_k(\lambda') - P_k(\lambda)}{\lambda' - \lambda}\, d\sigma(\lambda'). \tag{1}$$

Оказывается, что для единственности продолжения необходима и достаточна расходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{P}_k(z)|^2 = \infty, \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

В случае, когда единственности нет, оба ряда $\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(z)|^2$ и $\sum_{k=0}^{\infty} |Q_k(z)|^2$ при невещественных z сходятся. Пусть K_z — круг Вейля.

Тогда центр $O(z)$ и радиус $R(z)$ круга Вейля определяются формулами

$$O(z) = \frac{\dfrac{1}{z - \bar{z}} + \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\bar{z})\bar{Q}_k(z)}{\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{P}_k(z)|^2}, \tag{2}$$

$$R(z)=\frac{1}{(z-\bar{z})\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\bar{P}_k(z)|^2}. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение *четверку целых функций Неванлинны — Крейна*

$$\begin{aligned}
A_1(\zeta, z) &= 1+(\zeta-z)\sum_{k=0}^{\infty}\bar{Q}_k(\zeta)\bar{P}_k(z),\\
A_0(\zeta, z) &= (\zeta-z)\sum_{k=0}^{\infty}\bar{Q}_k(\zeta)\bar{Q}_k(z),\\
B_1(\zeta, z) &= -(\zeta-z)\sum_{k=0}^{\infty}\bar{P}_k(\zeta)\bar{P}_k(z),\\
B_0(\zeta, z) &= 1-(\zeta-z)\sum_{k=0}^{\infty}\bar{P}_k(\zeta)\bar{Q}_k(z).
\end{aligned} \tag{4}$$

Выражения в (2)—(4) не зависят от выбора последовательности точек x_0, x_1 и от процедуры ортогонализации.

Теорема Крейна. Каждой представляющей мере $\sigma \in \Sigma$ отвечает и притом только одна точка круга Вейля $w \in K_z$. Обратно, каждой точке $w \in K_z$ отвечает мера σ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda-\zeta}=\frac{A_1(\zeta, z)w+A_0(\zeta, z)}{B_1(\zeta, z)w+B_0(\zeta, z)}. \tag{5}$$

Отметим, в заключение, что далеко идущему развитию идей и подходов М. Г. Крейна посвящена монография Ю. М. Березанского [6].

9.7. Простые примеры единственности и неединственности продолжения функций из P_a. Примеры функций класса $P(\mathbf{R})$.

Пример 1. Д. А. Райков заметил, что, если функция класса $P(\mathbf{R})$ аналитическая в окрестности точки O, например, в круге C_r радиуса r, то она аналитически продолжается в полосу $|\mathrm{Im}z|<r$ плоскости $\mathbf{C}$.

Пусть $f \in P_a$ и аналитична в C_r и пусть $f_1 \in P$ и $f_2 \in P$ — два продолжения функции f. Поскольку f_1 и f_2 аналитичны в полосе, содержащей вещественную ось, и совпадают на отрезке $(-a, a)$, то они совпадают всюду, так что в этом случае продолжение единственно.

Простые примеры показывают, что аналитичность не обязательна для единственности. Как показывает следующий пример, функции класса P могут не обладать никакой гладкостью.

Пример 2 (Вейерштрасс). Функция $f(x)=\Sigma a^n \cos b^n x$, $0 \leqslant a < 1$, — положительно определенная на $\mathbf{R}$, при некоторых соотношениях между a и b может, как известно каждому внимательному студенту, не иметь производной ни в одной точке $\mathbf{R}$.

Пример 3. Пусть функция f — непрерывная, положительная, четная на $\mathbf{R}$ и пусть на $\mathbf{R}^+$ она выпукла снизу и убывает. Тогда, согласно сказанному в 2.6 (с), существует функция $p \in L^1(\mathbf{R})$, $p \geqslant 0$, на $\mathbf{R}$ такая, что $f = \mathcal{F}^{-1}p$, т. е. $f \in P$.

Рассматривая сужение f_a функции f на интервал $(-a, a)$, мы можем указать много различных продолжений функции f_a на $\mathbf{R}$ с сохранением тех свойств, которыми обладала функция f_a.

Такие продолжения, получившие название *«карандашных»*, были известны М. Г. Крейну с 1939 г. и послужили начальным толчком к созданию этой теории (устное сообщение М. Г. Крейна).

Первый пример неединственности был указан в 1937 г. Б. В. Гнеденко

Пример 4. Функции f_1 и f_2

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 - 3|x| + 2|x|^3, & x \in [-1, 1], \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f_2(x) = f_1(x), \quad x \in [-1, 1], \\ f_2(x+2) = f_2(x), \quad x \in \mathbf{R}, \end{array}$$

положительно определенные на $\mathbf{R}$, совпадают на интервале $[-1, 1]$.

Следующий нетривиальный пример показывает, сколь непросто разрешить вопрос принадлежности классу $P(\mathbf{R})$ даже у элементарных функций.

Пример 5 (Пойа, П. Леви). Функция $f(x) = \exp(-|x|^\alpha)$ принадлежит классу $P(\mathbf{R})$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ и не принадлежит этому классу при $\alpha > 2$. (Стоит заметить, что $\mathcal{F}f$ не имеет нулей при $\alpha = 2$, имеет только вещественные нули при $\alpha = 4, 6, 8, \ldots$, имеет бесконечно много комплексных нулей и конечное число вещественных нулей при других $\alpha > 1$.) Информацию об этой классической задаче можно найти в [31].

9.8. Продолжение положительно определенных функций в $\mathbf{R}^n$. Рудин [199], опираясь на известный пример Гильберта положительного многочлена шестой степени двух переменных, который не представляется в виде суммы квадратов вещественных многочленов двух переменных, доказал, что в прямоугольнике $D_{a,b} = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x_1| \leqslant a, |x_2| \leqslant b\}$ существует непрерывная положительно определенная функция, которая не может быть продолжена на всю плоскость с сохранением положительной определенности.

Ранее аналогичный факт для положительно определенных последовательностей установили Кальдерон и Пепинский (1952).

Пусть S — некоторое множество в $\mathbf{R}^n$ и $\Delta = S - S$. Рассмотрим класс $P(\Delta)$ положительно определенных функций на Δ, для которых $\sum_{k,l=1}^{m} f(x_k-x_l)\xi_k\bar{\xi}_l\geqslant 0$, когда $x_1, \ldots, x_m\in S$. Ясно, что $P(\mathbf{R}^n)\subset P(\Delta)$. Пусть, далее, $N=(N_1,\ldots,N_n)$ — вектор в $\mathbf{R}^n$ с целочисленными координатами и $\Delta=\Delta(N_1,\ldots,N_n)=\{x=(x_k)^n, x_k$ — целое число, удовлетворяющее неравенству $|x_k|\leqslant N_k, k=1,\ldots,n$, $S=\{x\in\Delta: x_k>0, k=1,\ldots,n\}$. Класс $P(\Delta)$ будем обозначать $P(N_1,\ldots,N_n)$.

Теорема (Кальдерон, Пепинский, Рудин). Для того чтобы функция класса $P(N_1, N_2)$ допускала продолжения до функции класса $P(\mathbf{R}^2)$, необходимо и достаточно, чтобы любой неотрицательный многочлен вида

$$Q(x_1, x_2)=\sum_{0\leqslant k\leqslant 2N_1}\sum_{0\leqslant l\leqslant 2N_2} a_{kl}x_1^k x_2^l$$

представлялся как сумма квадратов конечного числа вещественных многочленов.

Первый конкретный пример был построен Л. А. Сахновичем [143], указавшим непродолжимые функции из $P(2,2)$ в $P(2,3)$ и из $P(1,1,1)$ в $P(1,1,2)$. Функции класса $P(1,2)$ всегда могут быть продолжены до $P(\mathbf{R}^2)$, и об этом мы расскажем ниже (см. п. 9.9).

Результаты для решеток могут переводиться в соответствующие результаты для прямоугольников с помощью следующей конструкции Рудина. Пусть D — квадрат с вершинами $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ и измеримая функция $\lambda(x_1, x_2)$ такова, что $\lambda(x_1, x_2)=0$ при $(x_1, x_2)\notin D$ и

$$\int_{\mathbf{R}^2}|\lambda(x_1, x_2)|^2\,dx_1dx_2=1.$$

Пусть

$$K(x, y)=\int_{\mathbf{R}^2}\lambda(x+x', y+y')\overline{\lambda(x', y')}\,dx'dy'.$$

Тогда если $g(x_1, x_2)\in P(N_1, N_2)$, то функция

$$f(x, y)=\sum_{|x_1|\leqslant N_1}\sum_{|x_2|\leqslant N_2} g(x_1, x_2)\,k(x-x_1, y-x_2)$$

принадлежит $P(D_{N_1N_2})$, причем на решетке $f(x_1, x_2)=g(x_1, x_2)$.

Пользуясь этой конструкцией, Л. А. Сахнович указал конкретные примеры функций из $P(D_{2,2})$, не продолжимых до функций класса $P(D_{2,3})$.

Из предыдущего ясно, что контрпримеры не затрагивают лишь одну область в $\mathbf{R}^2$, а именно, бесконечную полосу, к рассмотрению которой мы переходим в следующем пункте.

9.9 Продолжение положительно определенных функций, заданных в полосе. Каналовые функции. Эта задача имеет длинную историю. Еще в 1944 г. М. С. Лившиц доказал, что непрерывную положительно определенную функцию $f(x, y)$, заданную в полосе, можно продолжить на всю плоскость с сохранением положительной определенности. Позднее этот же результат был повторен Р. С. Исмагиловым, Г. И. Эскиным и Девинатцем.

После того, как возможность продолжения была установлена, естественно возник вопрос об аналитическом описании всех продолжений функций класса $P(D_a)$, где $D_a=\{(x, y)\in\mathbf{R}^2 : |y|\leqslant\leqslant 2a\}$, на $\mathbf{R}^2$ с сохранением положительной определенности. Б. Я. Левин и И. Е. Овчаренко [132] дали полное описание всех таких продолжений. Одновременно они получили независимое доказательство возможности такого продолжения.

Работе этих авторов предшествовали работы М. Л. Горбачука и Ю. М. Березанского [104], где описание всех продолжений было получено с помощью теоремы о продолжении операторнозначной положительно определенной функции в терминах коммутационных свойств некоторого семейства операторов (вариант реализации идеи М. Г. Крейна, описанной в 9.1.)

Построение Б. Я. Левина и И. Е. Овчаренко основано на понятии каналовых функций, введенном ранее одним из авторов при рассмотрении случая $f\in P(D_a)$, когда $f(x; 0)$ — почти периодическая функция.

Доказывается, что функция $f\in P(D_a)$ допускает интегральное представление

$$f(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\psi(\lambda, y)\, d\sigma(\lambda), \tag{1}$$

где $(x, y)\in D_a$, σ — положительная конечная мера на $\mathbf{R}$, а $\psi(\lambda, y)$ — *каналовые функции положительно определенной функции* f. Эти функции $\psi(\lambda, y)$ при каждом λ принадлежат $P(D_a)$ по y, а при каждом $y\in[-2a, 2a]$ σ измеримы по λ. Таким образом, задача продолжения функции $f\in P(D_a)$ сводится к задаче согласованного, в некотором смысле, продолжения каналовых функций.

Теорема (Б. Я. Левин, И. Е. Овчаренко). Пусть $f\in P(D_a)$, а σ — мера, задающая представление функции

$$f(x, 0)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\sigma(\lambda). \tag{2}$$

Пусть $\psi(\lambda, y)$ — каналовые функции положительно определенной функции f. Тогда функция f имеет представление (1). Обратно, если σ — положительная конечная мера, а $\psi(\lambda, y)$ — непрерывная положительно определенная функция по y, $y\in[-a, a]$, при каждом λ, и σ — измеримая по λ при каждом $y\in[-a, a]$, и если σ — почти всюду $\psi(\lambda, 0)=1$, то f в (1) принадлежит классу $P(D_a)$, а $\psi(\lambda, y)$ — ее каналовые функции.

Несколько слов о том, как определяются каналовые функции.

По функции $f\in P(D_a)$ строится функция

$$\sigma(\lambda, y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda x}-1}{-ix}f(x, y)\,dx.$$

Оказывается, что $\sigma(\lambda, y)$ абсолютно непрерывна по мере $\sigma=\sigma(\lambda, 0)$ и $\psi(\lambda, y)=\frac{\partial\sigma(\lambda, y)}{\partial\sigma(\lambda)}$. Функции $\psi(\lambda, y)$ и есть каналовые функции, фигурирующие в представлении (1). Можно показать, что они определены всюду при $\lambda\in\mathbf{R}$, $|y|\leqslant 2a$. Представим функцию $\psi(\lambda, y)$ в виде

$$\psi(\lambda, y)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ity}d\rho_\lambda(t).$$

Следуя конструкции М. Г. Крейна в 9.6, построим по мере ρ_λ четверку целых функций $A_0(z, \lambda)$, $A_1(z, \lambda)$, $B_0(z, \lambda)$, $B_1(z, \lambda)$ и положим

$$w(z, \lambda)=\frac{A_1(z, \lambda)\,\tau(z, \lambda)+A_0(z, \lambda)}{B_1(z, \lambda)\,\tau(z, \lambda)+B_0(z, \lambda)},$$

где $\tau(z,\lambda)$ — функция класса N_0 по z, измеримая относительно σ.

Функция $w(z,\lambda)$ также принадлежит классу N_0 по z и измерима относительно $\sigma(\lambda)$. Она может быть представлена интегралом

$$w(z, \lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t, \lambda)}{t-z}$$

и тогда функции

$$\tilde{\psi}(\lambda, y)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ity}d\rho(t, \lambda)$$

являются допустимыми продолжениями каналовых функций.

Непосредственно проверяется, что равенство

$$\tilde{f}(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}\tilde{\psi}(\lambda, y)\,d\sigma(\lambda)$$

определяет искомое продолжение функции $f\in P(D_a)$ и ясно, как мера Бохнера для $\tilde{f}$ связана с $\rho(t, \lambda)$ и $\sigma(\lambda)$.

Обращая рассуждение, убеждаемся в том, что приведенным выше способом могут быть получены все положительно определенные продолжения функции $f(x, y)$. ◀

Можно указать критерий единственности продолжения как на языке каналовых функций, так и в терминах самой функции.

Методы работ Б. Я. Левина и И. Е. Овчаренко, Ю. М. Березанского и М. Л. Горбачука получили дальнейшее развитие. Обратим внимание на недавний результат Фридриха и Клотца [171], которым удалось перенести приведенную выше схему на операторнозначные слабо непрерывные положительно определенные функции, заданные на $G\times[-2a, 2a]$, где G — произвольная абелева топологическая группа. При этом оказалось, что такие функции всегда имеют продолжение до положительно определенных функций на $G\times\mathbf{R}$. С помощью теоремы Надя об унитарных расширениях семейства сжатий было найдено условие единственности таких продолжений.

Стандартная конструкция, о которой мы рассказывали в п. 9.1, приводит к гильбертову пространству и семейству коммутирующих операторов, которое позволяет характеризовать все продолжения. Точнее, получен замкнутый симметрический оператор A', который можно рассматривать как дифференцирование в схеме 9.1 и который коммутирует с представлениями группы G в гильбертовом пространстве. Тогда все положительно определенные продолжения находятся во взаимно однозначном соответствии со всеми обобщенными резольвентами оператора A, коммутирующими с групповыми действиями G. (Тем самым, получено обобщение схемы Березанского—Горбачука.)

В случае, когда группа G локально компактна, удается обобщить понятие каналовых функций и с их помощью описать все продолжения.

§ 10. Отрицательно определенные функции и арифметика вероятностных мер

Если функцию $f\in P(\mathbf{R}^n)$ нормировать условием $f(0)=1$, то она окажется характеристической функцией вероятностного распределения. Среди характеристических функций $f\in P(\mathbf{R}^n)$ выделяются такие, которые обладают следующим свойством. Для любого натурального m существует характеристическая функция $g\in P(\mathbf{R}^n)$ такая, что $f=g^m$. Функции f, обладающие таким свойством, называются характеристическими функциями безгранично делимых законов. Оказывается, что совокупность таких элементов из $P(\mathbf{R}^n)$ исчерпывается функциями вида

$$e^{-tg},\quad g(0)=0,\quad t\geqslant 0,$$

где g принадлежит классу $N(\mathbf{R}^n)$ отрицательно определенных функций. К определению класса $N(\mathbf{R}^n)$ мы сейчас перейдем.

10.1. Отрицательно определенные функции.

Определение. Функция $f(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, называется *отрицательно определенной,* если для любого m и любых наборов

$x_1 \ldots x_m \in \mathbf{R}^n$, $\xi_1 \ldots \xi_m \in \mathbf{C}$ форма

$$\sum_{k,l=1}^{m} (f(x_k) + \overline{f(x_l)} - f(x_k - x_l))\, \xi_k \overline{\xi_l} \tag{1}$$

неотрицательна. Как мы уже отметили, эти функции играют важную роль в теории вероятностей; они появляются в других областях (алгебры Дирихле). Сам термин «отрицательно определенные» был введен Шёнбергом, который открыл простейшие свойства таких функций, перечисляемых ниже, и заметил, что теория отрицательно определенных функций беспрепятственно переносится на произвольные локально компактные абелевы группы.

Класс всех отрицательно определенных функций на $\mathbf{R}^n$ будем обозначать $N(\mathbf{R}^n)$.

Свойства функций класса $N(\mathbf{R}^n)$.

(a) Если $f \in N(\mathbf{R}^n)$, то $\overline{f}$, $\operatorname{Re} f$, $f(x) - f(0)$ также принадлежат $N(\mathbf{R}^n)$, при этом $\operatorname{Re} f(0) = f(0) \geqslant 0$, $f(x) = \overline{f(-x)}$.

(b) $N(\mathbf{R}^n)$ — замкнутый выпуклый конус в $C(\mathbf{R}^n)$ в топологии равномерной сходимости на каждом компакте.

(c) Если $g \in P(\mathbf{R}^n)$, то $f(x) = g(0) - g(x) \in N(\mathbf{R}^n)$.

(d) Следующие свойства эквивалентны: (I) $f \in N(\mathbf{R}^n)$. (II) $f(0) \geqslant 0$ и для каждого $t \geqslant 0$ $e^{-tf} \in P(\mathbf{R}^n)$. (III) $f(0) \geqslant 0$, $f(-x) = \overline{f(-x)}$ и

$$\sum_{i,j=1}^{m} f(x_i - x_j)\, \xi_i \overline{\xi_j} \leqslant 0 \tag{2}$$

для каждого $m \geqslant 1$ и любых наборов $x_1 \ldots x_m \in \mathbf{R}^m$, $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbf{C}$ таких, что $\sum_{1}^{m} \xi_i = 0$.

(e) Если $f \in N(\mathbf{R}^n)$, то функция $\sqrt{|f|}$ полуаддитивна, т. е.

$$|f(x-y)|^{\frac{1}{2}} \leqslant |f(x)|^{1/2} + |f(y)|^{\frac{1}{2}}, \quad x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Замечание 1. Неравенство (2) оправдывает название функций класса $N(\mathbf{R}^n)$; эквивалентность (I)$\Leftrightarrow$(II) носит название теоремы Шёнберга; пользуясь (e) легко доказать, что для $f \in N(\mathbf{R}^n)$ $|f(x)| = O(|x|^2)$, $|x| \to \infty$.

Замечание 2. Свойства (e) и (d) позволяют дать еще одну характеризацию функций из $N(\mathbf{R}^n)$. Функции класса $N(\mathbf{R}^n)$ совпадают с функциями, представимыми в виде

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (c + \varphi_n(0) - \varphi_n(x)), \tag{3}$$

где $\{\varphi_n\}$ — последовательность функций из $P(\mathbf{R}^n)$, $c \geqslant 0$, а сходимость равномерная на каждом компакте.

Замечание 3. Все перечисленные свойства сохраняются, когда $\mathbf{R}^n$ заменяется ЛКА группой.

Кульминационным пунктом теории функций класса $N(\mathbf{R}^n)$ явилась теорема Леви—Хинчина, которая первоначально была доказана для $n=1$, а затем перенесена на $N(\mathbf{R}^n)$ А. Н. Колмогоровым и Б. В. Гнеденко. Их доказательство, опирающееся на свойство (3), технически непростое. Элегантное доказательство предложил Бёрлинг. Оно воспроизведено в [198]. Почти одновременно с этой публикацией появились результаты Партасарати, Рао, Варадхана и В. В. Сазонова, в которых теорема Леви—Хиичина распространялась на абелевы группы. Разумеется, для получения представления Леви—Хинчина могут быть применены общие методы представления положительно определенных ядер, описанные в предыдущем параграфе, например теорема Крейна—Мильмана (см. [175]). Мы же покажем здесь, как просто доказывается эта теорема для случая $n=1$.

10.2. Теорема Леви—Хинчина. Каждая функция $f \in N(\mathbf{R}^n)$ допускает представление вида

$$f(x)=\alpha+iL(x)+Q(x)+$$
$$+\int\limits_{\mathbf{R}^n\setminus\{0\}}\left(1-e^{-ix\cdot t}-\frac{ix\cdot t}{1+|t|^2}\right)\frac{1+|t|^2}{|t|^2}\,d\sigma(t), \qquad (1)$$

где $\alpha \geqslant 0$, L — линейная вещественная форма в $\mathbf{R}^n$, $Q(x)$ — квадратичная неотрицательная форма в $\mathbf{R}^n$, σ — положительная конечная мера на $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, причем α, L, Q и σ однозначно определяются функцией f и каждое выражение в правой части (4) с указанными свойствами представляет некоторую функцию из $N(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство для $n=1$. В силу (10.1.3), $f(x)=$ $=0(|x|^2)$ и преобразование Лапласа $F(z)=z^2\int\limits_0^\infty f(x)\exp(ixz)\,dx$ — аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Имеем

$$\frac{F(z)+\overline{F(z)}}{2\operatorname{Im} z}=z\bar{z}\iint\limits_0^\infty (f(x-y)-f(x)-f(-y))\,e^{ixz}e^{-iy\bar{z}}\,dx\,dy. \qquad (2)$$

Так как $f \in N(\mathbf{R}^1)$, то правая часть в (2) неотрицательна, $\frac{1}{i}F(z)\in N$ и F допускает, в силу (9.5.3), представление

$$F(z)=-i\alpha+i\beta z-i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-uz}{u+z}\,\frac{d\sigma(u)}{1+u^2}. \qquad (3)$$

Объединяя (3) с формулой

$$\frac{1}{i}\,\frac{u^2(1-uz)}{(u+z)(1+u^2)}=z^2\int\limits_0^{\infty}\left(1+\frac{iux}{1+u^2}-e^{iux}\right)e^{ixz}dx,$$

получаем (1). ◀

10.3. Арифметика характеристических функций вероятностных распределений в $\mathbf{R}^n$. Пусть H_n — подкласс в $P(\mathbf{R}^n)$, состоящий из тех f, для которых $f(0)=1$, так что H_n — класс характеристических функций вероятностных распределений в $\mathbf{R}^n$; H_n можно рассматривать как мультипликативную полугруппу. Обозначим через $I(H_n)$ класс всех безгранично делимых элементов в H_n. О характеризации класса $I(H_n)$ мы уже говорили. В силу формулы (10.2.1) каждому элементу $h\in I(H_n)$ отвечает неотрицательная мера $\sigma=\sigma_h$. Класс всех безгранично делимых элементов, имеющих только безгранично делимые делители, обозначим через $I_0(H_n)$. Этот класс состоит из тех элементов $(h\in I(H_n))$, каждому делителю h_1 которых, в соответствии с представлением (10.2.1), сопоставляется мера σ_{h_1} такая что $\sigma_h-\sigma_{h_1}\geqslant 0$. Характеристика класса $I_0(H_n)$ в терминах соответствующих мер до сих пор неизвестна; как оказалось, задача описания элементов класса $I_0(H_n)$ связана с трудными проблемами теории целых функций. Функцию $f\in H_n$, обладающую тем свойством, что из $f=f_1\cdot f_2$, $f_{1,2}\in H_n$ следует, что один из сомножителей совпадает с характером $e^{i\lambda x}$, $\lambda\in\mathbf{R}^n$ называют *неразложимой*, а множество неразложимых функций обозначают через $N(H_n)$.

Важные в ряде разделов теории вероятностей исследования А. Я. Хинчина, П. Леви, Д. А. Райкова, Ю. В. Линника по арифметике полугруппы H_n стимулировали развитие этой области.

В 1937 г. А. Я. Хинчин доказал следующие фундаментальные теоремы.

I. Любой элемент $f\in H_n$ допускает (вообще говоря, не единственное) представление $f=f_0\cdot f_1$, где $f_0\in I_0(H_n)$, а f_1 разлагается в конечное или счетное произведение неразложимых элементов.

II. $I_0(H_n)$ — собственный подкласс в $I(H_n)$.

Далее выяснилось, что особую роль в такой арифметике играют характеристические функции гауссовских и пуассоновских распределений, обладающие теми свойствами, что они безгранично делимы и их делители являются гауссовскими и пуассоновскими, соответственно; первый результат был получен Крамером, второй — Д. А. Райковым.

Ю. В. Линник для случая $n=1$, а затем Куппенс и И. В. Островский для произвольных натуральных n доказали, что произведения характеристических функций гауссовского и пуассоновского распределений принадлежат $I_0(H_n)$. И. В. Островский доказал, кроме того, что класс $I_0(H_n)$ плотен в $I(H_n)$ и является в нем базисом в том смысле, что любой элемент $f \in I(H_n)$ представляется в виде конечного или счетного произведения элементов из $I_0(H_n)$.

Все перечисленные здесь результаты и многие другие факты этой теории отражены в [20].

В последние годы появился ряд исследований И. В. Островского и его сотрудников, посвященных развитию этой тематики на других мультипликативных полугруппах, имеющих также теоретико-вероятностное происхождение[1].

Г. М. Фельдман, продолжая исследования Партасарати, Рао, Варадхана и В. В. Сазонова, нашел полное описание тех ЛКА групп, в которых справедливы упомянутые обобщения теорем Крамера, Д. А. Райкова, Ю. В. Линника, И. В. Островского и Куппенса[2].

В заключение, обратим внимание на недавно вышедшую монографию [30], в которой отражено современное состояние теории положительно определенных функций на группах и полугруппах. О другом направлении исследований, связывающих понятие положительной определенности с распределениями, можно прочитать в [12, гл. 2], см. также [38], [76].

§ 11. Тауберова теорема Винера

В 1897 г. Таубер доказал что, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на интервале $0 \leqslant x < 1$ и при $x \to 1-0$ его сумма стремится к S и, кроме того, $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S.

В 1910 г. Литлвуд обнаружил, что условие $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ может быть заменено более слабым, $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, а в 1913 г. Э. Ландау еще более ослабил это условие, полагая, что $a_n > -\frac{k}{n}$, где k — некоторая постоянная.

После того, как Харди и Литлвуд указали на возможность применения теорем такого рода в теории чисел, интерес к ним начал расти. Расширялся диапазон применимости тауберовых теорем и актуальной стала задача создания общих методов их доказательства.

В 1928 г. Винер предложил общий групповой подход к до-

---

[1] Островский И. В., Арифметика вероятностных распределений. Теория вероятностей и ее применения, 1986. Том XXXI, № 1, 3—30.

[2] В ближайшее время в издательстве «Наукова Думка» появится монография Г. М. Фельдмана, посвященная этим вопросам.

казательству тауберовых теорем, опирающийся на новые теоремы аппроксимации, который позволил ему на единой основе рассмотреть разнообразные частные случаи. Метод Винера, изложенный в его монографии [97] (см. также [74]), вышел за рамки технического аппарата и послужил отправным моментом для создания большой области гармонического анализа.

Сама тауберова теория нашла многочисленные применения не только в теории чисел, но и в теории аналитических функций, в спектральной теории операторов, в частности, дифференциальных операторов, теории вероятностей. Последние достижения этой теории отражены в ряде монографий. Появилось новое направление этой теории, связанное с созданием тауберова аппарата для обобщенных функций многих переменных и вызванное к жизни актуальными задачами математической и теоретической физики. Этому направлению посвящена недавно вышедшая монография [10].

Нас будут интересовать прежде всего алгебраические аспекты тауберовой теории Винера и центральной в этой теории аппроксимационной теоремы, в которой речь идет о полноте линейной оболочки сдвигов суммируемых функций на $\mathbf{R}$.

11.1. Общая и специальные тауберовы теоремы. Мы расскажем сейчас об общей тауберовой теореме Винера и о некоторых непосредственных ярких применениях этой теоремы. Вот ее формулировка.

Теорема 1 (общая тауберова теорема). Пусть $f \in L^1(\mathbf{R})$ и преобразование Фурье $\hat{f}$ не обращается в нуль ни в одной точке вещественной оси. Тогда если $g \in L^\infty(\mathbf{R})$ и

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T)\,g(t)\,dt = A \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt, \tag{1}$$

где A — постоянная, то для любой функции $f_1 \in L^1(\mathbf{R})$ справедливо соотношение

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-T)\,g(t)\,dt = A \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\,dt. \tag{2}$$

Эта теорема эквивалентна следующей аппроксимационной теореме.

Теорема 2 (аппроксимационная теорема Винера). Для полноты в $L^1(\mathbf{R})$ линейной оболочки всех сдвигов на $\mathbf{R}$ функции $f \in L^1(\mathbf{R})$ необходимо и достаточно, чтобы $\hat{f}$, f-преобразование Фурье функции f, не обращалось в нуль на $\mathbf{R}$.

Мы приведем одно из наиболее прозрачных доказательств общей тауберовой теоремы, использующее идеологию теории банаховых алгебр[1].

Доказательство тауберовой теоремы. Множе-

---

[1] См. гл. 2, теоремы 8.8.2, 8.8.3.

ство функций $f_1(\in L^1(\mathbf{R}))$, удовлетворяющих условию (2), образует, очевидно, замкнутое подпространство I в $L^1(\mathbf{R})$, инвариантное относительно всех сдвигов в $\mathbf{R}$. Стало быть, I есть замкнутый идеал в $L^1(\mathbf{R})$. Условие (1) означает, что $f \in I$, так что идеал I не содержится ни в одном максимальном идеале банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R})$. Поскольку $\mathcal{F}^1(\mathbf{R}) \cap C_k(\mathbf{R})$ — плотно в $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$ и $\mathcal{F}^1(\mathbf{R}) \cap C_k(\mathbf{R}) \subset I$, то $I = L^1(\mathbf{R})$. ◀

Замечание 1. Посылку теоремы можно обобщить, если потребовать выполнения условия (1) для некоторого семейства функций из $L^1(\mathbf{R})$, преобразования Фурье которых одновременно не обращаются в нуль ни в одной точке вещественной оси. Тогда это семейство порождает замкнутый идеал, не содержащийся ни в одном максимальном, а значит, совпадающий с $L^1(\mathbf{R})$.

Из условия (2) можно пытаться извлечь дальнейшую информацию о поведении функции $g(t)$ при $t \to \infty$, например, следующим образом. Пусть $h > 0$. Выберем функцию f_1 равной

$$f_1(t) = \begin{cases} 1/h, & t \in [0, h], \\ 0, & t \notin [0, h]. \end{cases}$$

Тогда условие (2) перепишется в виде

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{h} \int_T^{T+h} g(t)\, dt = A. \tag{3}$$

Чтобы сделать напрашивающееся заключение о поведении самой функции g на бесконечности, нужно потребовать от g некоторой «регулярности» поведения на бесконечности.

Определение. Функция $g \in L^\infty(\mathbf{R})$ называется *слабо* (или *медленно*) *осциллирующей на бесконечности*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$ и такое $\delta > 0$, что для $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $|t_1| > N$, $|t_2| > N$ и $|t_1 - t_2| < \delta$ выполняется неравенство

$$|g(t_1) - g(t_2)| < \varepsilon. \tag{4}$$

(Можно дать определение слабо осциллирующей функции односторонне, либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.)

Дополнение к тауберовой теореме Винера (Питт). Если функция g в условии теоремы Винера слабо осциллирующая, то

$$g(T) \to A, \quad T \to \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть T и h в условии (3) такие, что $T > N$, $h < \delta$. Тогда интегральный член в правой части очевидного равенства

$$\frac{1}{h} \int_T^{T+h} g(t)\, dt = \frac{1}{h} \int_T^{T+h} (g(t) - g(T))\, dt + g(T)$$

в силу (4), меньше ε. Из условия (3) следует, что $g(T) \to A$, $T \to \infty$.

Замечание 2. Общая тауберова теорема Винера вместе с добавлением Питта почти дословно переносится на той случай, когда $\mathbf{R}$ заменяется локально компактной абелевой группой G, без существенных изменений в формулировке и доказательстве. (Разумеется речь идет о «двусторонней» формулировке.)

Например, для мультипликативной группы $G=\mathbf{R}^*$ формулировка теоремы Винера такова.

Если $f \in L^1(\mathbf{R}^*)$ и $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f на группе $\mathbf{R}^*$ (преобразование Меллина) — не обращается в нуль ни при каком значении $\lambda \in \mathbf{R}^*$, то из соотношения

$$\lim_{T \to \infty(0)} \int_0^\infty f\left(\frac{t}{T}\right) g(t) \frac{dt}{t} = A \int_0^\infty f(t) \frac{dt}{t}, \tag{5}$$

где $g \in L^\infty(\mathbf{R}^*)$, A — постоянная, следует, что

$$\lim_{T \to \infty(0)} \int_0^\infty f_1\left(\frac{t}{T}\right) g(t) \frac{dt}{t} = A \int_0^\infty f_1(t) \frac{dt}{t}$$

для любой функции $f_1 \in L^1(\mathbf{R}^*)$.

Ясно, как видоизменяется в этом случае условие Питта (4): Для $\varepsilon > 0$ существуют $N > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для t_1, $t_2 \in \mathbf{R}^*$, $t_1, t_2 \in \left[\frac{1}{N}, N\right]$, $\left|\log\frac{t_1}{t_2}\right| < \delta$, выполняется неравенство $|g(t_1) - g(t_2)| < \varepsilon$.

Рассмотрим несколько примеров, демонстрирующих достоинства и теневые стороны общего подхода Винера.

Пример 1 (Тауберова теорема Литлвуда). Пусть $\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \to S$ при $x \to 1$ и $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$. Тогда $\sum_{n=0}^\infty a_n = S$.

Доказательство. Положим для $t \in \mathbf{R}^*$

$$\sum_{n=0}^{[t]} a_n = g(t), \quad x = e^{-\frac{1}{T}}, \text{ так что } x \to 1 \Leftrightarrow T \to \infty, \quad f(t) = te^{-t}.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \int_0^\infty x^t dg(t) = -\int_0^\infty g(t)\, x^t \log x\, dt = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{T}\right) g(t) \frac{dt}{t}. \tag{6}$$

Поскольку

$$\int_0^\infty f(t)\,dt/t = 1;$$

то условие $\varphi(x) \to S$, $x \to 1-0$, равносильно посылке (5) тауберовой теоремы Винера, кроме того,

$$\varphi\left(e^{-\frac{1}{T}}\right) - g(T) = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{T}\right)(g(t) - g(T))\,dt/t. \tag{7}$$

Для обоснования справедливости соотношения $g(T) \to S$ при $T \to \infty$ остается проверить, что:

(а) $g(t)\,x^t \to 0$ при $t \to \infty$ (законность интегрирования по частям в (6)). Так как $|a_n| < \frac{k}{n}$ при некотором $k > 0$, то

$$|(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,x^n| < k_1 \log x^n \to 0, \quad n \to \infty, \quad k_1 > k;$$

(б) g — слабо осциллирующая функция. Действительно,

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leqslant \sum_{[t_1]+1}^{[t_2]} |a_n| < k_1 \log \frac{t_2}{t_1}, \quad t_1 < t_2, \quad k_1 > k; \tag{8}$$

в) $g \in L^\infty(\mathbf{R}^*)$. Для доказательства заметим, что в силу (8), интеграл в правой части (7) ограничен. Поэтому функция g ограничена вместе с функцией $\varphi(x)$, $0 < x < 1$;

(г) Преобразование Фурье функции f равно

$$\hat{f}(\lambda) = \Gamma(1 + i\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}^*.$$

Замечание 3. В рассмотренном только что случае условие (5), к сожалению, не обеспечивает свойства регулярности поведения g на бесконечности и даже ограниченности g. Нам пришлось наложить дополнительное условие $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, которое может быть ослаблено (уже упомянутая теорема Ландау), но без которого теорема перестает быть верной. Иногда условие, аналогичное (5), содержит информацию о регулярности поведения g, но извлечение этой информации требует дополнительных усилий. Винер, занимаясь законом распределения простых чисел и пытаясь теорему Адамара—Валле—Пуссена свести к общей тауберовой теореме, заметил, что тождество Эйлера для ζ-функции Римана имеет «тауберов» характер и ему нетрудно придать вид, аналогичный общей тауберовой теореме, где условие о нулях преобразования Фурье легко проверяется. Основные трудности возникли, когда понадобилось доказать ограниченность и регулярность поведения соответствующей функции g. Простое по идее доказательство Винера оказалось громоздким. Впоследствии оно было упрощено. Наиболее «экономный» вариант доказательства Винера теоремы о простых числах воспроизводится в [81].

Другой, пожалуй, более элементарный путь идет через тауберову теорему Икеара.

Теорема (Икеар). Пусть φ — неотрицательная неубывающая функция, A — постоянная. Пусть интеграл Лапласа

$$\Phi(s)=\int_0^\infty e^{-su}d\varphi(u), \quad s=\sigma+i\tau, \quad \sigma=\operatorname{Re} s,$$

сходится при $\sigma>1$ и $\Phi(s)-\frac{A}{s-1}$ стремится к конечному пределу $\psi(\tau)$, равномерно на каждом конечном интервале прямой $\sigma=1$ при условии $\sigma\to 1+0$. Тогда

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u)e^{-u}=A.$$

Доказательство. Положим

$$g(t)=\begin{cases}e^{-t}\varphi(t), & t>0,\\ 0, & t<0;\end{cases} \quad A(t)=\begin{cases}A, & t>0,\\ 0, & t<0\end{cases}$$

и для $\alpha\in(0,\infty)$

$$f_\alpha(t)=\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin\alpha t}{\alpha t}\right)^2, \quad \hat f_\alpha(\lambda)=\begin{cases}1-\left|\frac{\lambda}{2\alpha}\right|, & |\lambda|\leqslant 2\alpha,\\ 0, & |\lambda|>2\alpha.\end{cases} \tag{9}$$

Запишем равенство Парсеваля в следующем виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(T-t)(g(t)-A(t))e^{-\varepsilon t}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2\alpha}^{2\alpha}\hat f_\alpha(\lambda)e^{-iT\lambda}\left(\Phi(1+\varepsilon+i\lambda)-\frac{A}{\varepsilon+i\lambda}\right)d\lambda.$$

После перехода к пределу под знаком интеграла в этом равенстве при $\varepsilon\to 0$, законность которого легко проверяется, мы приходим к равенству, в правой части которого оказывается выражение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2\alpha}^{2\alpha}\left(1-\left|\frac{\lambda}{2\alpha}\right|\right)e^{-iT\lambda}\psi(\lambda)\,d\lambda.$$

Пользуясь тем, что это выражение, в силу леммы Римана—Лебега, при $T\to\infty$ стремится к нулю, получим равенство

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(T-t)g(t)\,dt=A. \tag{10}$$

Мы оказались в условиях тауберовой теоремы Винера в ее общей формулировке, в соответствии с замечанием 1, ибо, в силу формулы (9), преобразования Фурье функций семейства $\{f_\alpha\}$ одновременно не обращаются в нуль ни в одной точке вещественной оси. Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)\,dt=1 \text{ при любом } \alpha.$$

Теперь из тауберова условия (10) очень просто вытекает как ограниченность функции g, так и то, что она слабо осциллирует при $t \to +\infty$. Разумеется, при этом существенную роль играет то обстоятельство, что функция $g(t)e^t$ по условию монотонная. Таким образом, мы имеем возможность заключить, что $g(t) \to A$, $t \to +\infty$. ◀

Как мы вскоре увидим, с помощью теоремы Икеара легко доказывается знаменитый закон распределения простых чисел.

11.2. Тауберовы теоремы в спектральной теории дифференциальных операторов. Простым следствием теоремы Икеара является тауберова теорема Карлемана. С помощью этой теоремы Карлеман исследовал асимптотические свойства спектра дифференциальных операторов.

Результат Карлемана был первым в ряду глубоких исследований по асимптотике спектральной функции дифференциальных операторов.

Тауберова теорема Карлемана. Пусть σ — положительная мера на $[1, \infty]$ и пусть интеграл

$$h(x) = \int_1^\infty \frac{d\sigma(t)}{t(t+x)} \tag{1}$$

существует при $x > 0$; если $h(x) = \frac{H \log x}{x} + \frac{A}{x} + g(x)$, где H и A — суть постоянные, а g — суммируемая функция на интервале $[a, \infty[$ при некотором $a > 0$, то

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_1^T d\sigma = H.$$

Доказательство. Применяя к обеим частям (1) преобразование меллиновского типа на интервале $[a, \infty[$, с помощью прямой выкладки получаем, что

$$\int_1^\infty \frac{d\sigma(t)}{t^s} = \frac{H}{s-1} + \psi(s),$$

где ψ — функция, удовлетворяющая соответствующему условию теоремы Икеара. ◀

В монографии Титчмарша [89] имеются примеры того, как различные теоремы тауберова типа, многие из которых являются следствиями общей тауберовой теоремы Винера, применяются в исследованиях по распределению собственных значений для краевых задач, связанных с уравнением Шрёдингера в конечных или бесконечных областях в $\mathbf{R}^n$.

Замечание. Не следует думать, что общая тауберова теорема Винера является абсолютно универсальной. В одном из приложений упомянутой монографии Титчмарша [89] говорится о важной в спектральной теории дифференциальных операторов теореме тауберова типа М. В. Келдыша.

Тауберова теорема Келдыша. Пусть φ и ψ — положительные и возрастающие на полуоси $\lambda>0$ функции, причем φ — дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

1) $\varphi(\lambda)\to\infty$, $\lambda\to\infty$,

2) $\alpha\varphi(\lambda)<\lambda\varphi'(\lambda)<\beta\varphi(\lambda)$, где α и β — положительные постоянные.

Пусть

$$f(x)=\int\limits_0^\infty \frac{d\varphi(\lambda)}{(\lambda+x)^m};\quad g(x)=\int\limits_0^\infty \frac{d\psi(\lambda)}{(\lambda+x)^m};\quad m>\beta+1.$$

Тогда если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)}=1$.

Оказалось, что эту теорему также можно уложить в «русло» винеровской теории, связанной с проблемой полноты сдвигов. Однако схема Винера в прямом ее виде здесь оказалась недостаточной. Необходимо было распространить аппроксимационную теорему Винера на подалгебры алгебры $L^1(\mathbf{R})$, состоящие из экспоненциально убывающих на $\mathbf{R}$ функций.

Такие алгебры, в отличие от алгебры $L^1(\mathbf{R})$, не являются регулярными и для справедливости аппроксимационных теорем винеровского типа нужно преодолевать препятствие, связанное с «отсутствием спектрального синтеза на бесконечности», т. е. с появлением примарных идеалов, отвечающих бесконечно удаленным точкам пространства максимальных идеалов. Об этом мы расскажем в заключительном параграфе гл. 1.

11.3. ζ-функция и спектр эллиптического оператора. Вопросы асимптотики спектральной функции остаются актуальными и в настоящее время в связи с теорией *псевдодифференциальных операторов* (ПДО).

Расскажем кратко об одном ярком результате, принадлежащем Сили, касающемся *ζ-функции эллиптического оператора* и ее связи со спектром оператора. Подробности см. в [28].

Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор порядка m на замкнутом многообразии M размерности n.

Если

$$A=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha,\quad x\in M,\quad M\subset\mathbf{R}^n,$$

то под *символом оператора* A понимается функция

$$a(x,\xi)=\sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

На символ $a(x,\xi)$ оператора A налагаются условия, обеспечивающие дискретность спектра оператора A и позволяющие определить комплексную степень A^z оператора A, которая задается при $\operatorname{Re} z<0$ интегралом

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \lambda^z (A-\lambda I)^{-1} d\lambda,$$

где Γ — специально выбранный контур, охватывающий начало координат и идущий по двум «берегам» мнимой оси, а при $z\in\mathbf{Z}$ совпадает с обычной степенью оператора A.

По оператору A^z строится его символ $a(x, \xi, z)$, зависящий от z, а по символу — ядро

$$A_z(x, y)=\int e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi, z)\, d\xi,$$

которое при $x\neq y$ продолжается до целой функции от z, равной нулю при $z=0, 1, 2, \ldots$, а при $x=y$ — до мероморфной с полюсами лишь в точках арифметической прогрессии $z_j=\frac{j-n}{m}$, $j=0, 1, \ldots$, вычеты которой вычисляются явно по символу $a(x, \xi)$. Эти свойства наследует функция

$$\zeta_A(z)=\int_M A_z(x, x)\, dx, \tag{1}$$

которая называется *ζ-функцией оператора* A, она определена формулой (1) при $\operatorname{Re} z<-\frac{n}{m}$, и продолжается до мероморфной функции с простыми полюсами в указанных точках z, за исключением точек $z=0, 1, 2, \ldots$, причем для вычетов в точках z_j и значений в целых точках $0, 1, \ldots$ даются формулы.

Если A — самосопряженный положительный эллиптический оператор на M, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — его собственные значения, то справедлива формула

$$\zeta_A(z)=\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^z, \quad \operatorname{Re} z<-\frac{n}{m}, \tag{2}$$

причем ряд в правой части (2) сходится абсолютно. Эта сходимость равномерна в любой замкнутой полуплоскости комплексной плоскости $\operatorname{Re} z<-\frac{n}{m}$.

Сравнение формул (1) и (2) позволяет применить тауберову теорему Икеара и найти первый член асимптотики функции распределения собственных значений λ_j.

Но мы предпочитаем это сделать для *ζ-функции Римана*, которая получается как ζ-функция оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ для того случая, когда M — окружность $\mathbf{T}$ в $\mathbf{R}^2$.

11.4. Закон распределения простых чисел. Закономерности распределения простых чисел в последовательности натуральных были предметом исследования математиков со времен

Евклида, доказавшего бесконечность множества простых чисел. Если через $\pi(x)$ обозначить число простых, не превосходящих x, то эмпирически подмеченную еще в XVIII в. закономерность (Лежандр, Гаусс)[1] можно сейчас записать так

$$\pi(x)\frac{\log x}{x}=1+o(1), \quad x\to\infty. \tag{1}$$

В 1849 и 1852 гг. появились два мемуара П. Л. Чебышева, в которых получены первые теоретические результаты, связывающие $\pi(x)$ и $\frac{x}{\log x}$.

Чебышев доказал, что если функция

$$\log x-\frac{x}{\pi(x)}$$

имеет предел при $x\to\infty$, то этот предел равен 1. Он ввел в рассмотрение функцию $\int\limits_2^x \frac{dx'}{\log x'}$ и доказал, что она лучше аппроксимирует $\pi(x)$, чем любая рациональная функция от x и $\ln x$. Наконец, обозначая через M и m верхний и нижний, соответственно, пределы выражения в левой части (1), он показал, грубо говоря, что $M\leqslant 1{,}05\ldots$, $m\geqslant 0{,}921\ldots$. Далее он ввел в рассмотрение две функции

$$\theta(x)=\sum_{p<x}\log p \quad \text{и} \quad \psi(x)=\sum_{n<x}\Lambda(n)$$

($\Lambda(n)=\log p$, когда $n=p^\alpha$ при некотором целом $\alpha\geqslant 1$ и $\Lambda(n)=0$ в остальных случаях), связанные соотношением

$$\psi(x)=\theta(x)+\theta(\sqrt{x})+\theta(\sqrt[3]{x})+\ldots,$$

и показал, что формула (1) равносильна каждой из формул

$$\frac{\theta(x)}{x}=1+o(1); \quad \frac{\psi(x)}{x}=1+o(1), \quad x\to\infty.$$

Однако для доказательства (1) методы Чебышева оказались недостаточными, нужны были новые идеи.

Они появились, когда в 1859 г. был напечатан знаменитый мемуар Римана «О числе простых чисел, не превышающих данной величины», который сыграл ключевую роль в развитии аналитической теории чисел, да и вообще в теории аналитических функций (см. [79]). Основная идея Римана заключалась

---

[1] Отметим, что в наследии Гаусса, который просмотрел 3 000 000 первых чисел натурального ряда в поисках закономерностей в распределении простых, имеется асимптотическая формула $x(\log x)^{-k}(\log\log x)^{k-1}((k-1)!)^{-}$ для числа целых чисел, меньших x и содержащих k простых множителей, обоснованная в 1900 г. Э. Ландау. Последняя отражает современную точку зрения. Интересно отметить, что ни П. Л. Чебышев, ни Риман асимптотических формул не доказывали. В то время такая задача не ставилась.

в том, чтобы рассматривать ζ-функцию Римана (обозначение Римана)

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}; \quad s=\sigma+i\xi,$$

как функцию комплексной переменной s. (Эту функцию при вещественных s изучал в 1737 г. Эйлер.) Этот мемуар, свидетельствующий о высокой аналитической технике Римана, содержал ряд недоказанных утверждений, многие из которых были впоследствии обоснованы. Но одно из них: все невещественные нули $\zeta(s)$ расположены на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$, известное как «*гипотеза Римана* о нулях ζ-функции», не доказано до сих пор. Сам Риман пишет следующее «...было бы желательно найти строгое доказательство этого предложения; после нескольких напрасных, не очень настойчивых попыток разыскать таковое, я временно от них отказался, так как для ближайшей цели моего исследования в этом не представлялось надобности».

В 1896 г. Адамар и Валле-Пуссен независимо друг от друга и практически одновременно доказали справедливость соотношения (1), завершив тем самым, предпринимаемые усилия в этом направлении в течение чуть ли не ста лет.

Мы расскажем сейчас, как этот результат вытекает из тауберовой теоремы Икеара и некоторых элементарных свойств ζ-функции.

Будем исходить из тождества Эйлера

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

(а) Пользуясь первым представлением в (2), легко вывести формулу

$$\zeta(s)=\frac{1}{2}+\frac{1}{s-1}+s\int_1^{\infty}\left([x]-x-\frac{1}{2}\right)x^{-s-1}\,dx,$$

из которой следует, что $\zeta(s)$ — аналитическая функция во всей комплексной полуплоскости $\sigma>0$, исключая единственную точку $s=1$, где она имеет полюс первого порядка.

(б) Из второго представления в (1) для $\zeta(s)$ получается формула

$$\Phi(s)\overset{\text{def}}{=}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_p\frac{\log p}{p^s-1}=\int_2^{\infty}t^{-s}\log t\,d\pi(t)+\int_2^{\infty}\frac{\log t\,d\pi(t)}{t^s(t^s-1)}. \qquad (3)$$

Второй интеграл правой части (3) представляет собой функцию, аналитическую в полуплоскости $\sigma>1$, непрерывную в замкнутой полуплоскости.

(в) Покажем, что первый интеграл в (3) можно записать в виде

$$\Phi_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_2^\infty t^{-s} \log t \, d\pi(t) = \frac{1}{s-1} + \psi(s), \tag{4}$$

где ψ удовлетворяет условию теоремы Икеара.

Для этого, в силу (б), достаточно доказать, что $\zeta(1+i\xi) \neq 0$ при ξ вещественном. Пусть $\zeta(1+i\xi_0)=0$ для вещественного ξ_0. Функция $\Phi(\sigma+i\xi)$, будучи положительно определенной на каждой прямой $\sigma=\sigma_0>1$, имеет в точке $1+i\xi_0$ полюс в вычетом, равным -1. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\varepsilon(\xi) = \varepsilon\Phi_1(1+\varepsilon+i\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Эта функция положительно определенная при любом $\varepsilon>0$. Ясно, что

$$\varphi_\varepsilon(0) \to 1, \quad \varphi_\varepsilon(\xi_0) \to -1, \quad \varepsilon \to 0.$$

Положим $k = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(2\xi_0)$. Тогда в зависимоути от того, будет ли точка $1+2i\xi_0$ нулем $\zeta(s)$ или нет, число k равно -1 или 0.

Для точек $x_1=0$, $x_2=\xi_0$, $x_3=2\xi_0$ рассмотрим матрицу $A_\varepsilon = (\varphi_\varepsilon(x_i - x_j))$, $i, j = 1, \ldots, 3$, положительную при каждом $\varepsilon>0$. Матрица $A = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon$ также положительна. Однако $\det A = -(k-1)^2$, отрицателен, когда $k=0$ или -1. Противоречие. ◀

(г) Применяя теорему Икеара, находим, что

$$\frac{1}{t}\int_2^t \log\tau \, d\pi(\tau) \to 1, \quad t \to \infty. \tag{5}$$

Если предположить, что $\pi(t) = o(t), t\to\infty$, то после интегрирования по частям из (5) сразу вытекает (1).

(д) Докажем, что $\pi(t) = o(t), t\to\infty$. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — последовательность простых чисел, записанных в порядке возрастания. Пусть

$$p_1 p_2 \ldots p_k < x < p_1 \ldots p_{k+1}.$$

С помощью элементарных соображений можно доказать, что

$$\frac{\pi(x)}{x} < 2 \prod_{\nu=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p^\nu}\right), \tag{6}$$

и тогда утверждение следует из расходимости бесконечного произведения в (6). (Неравенство (6) следует из результата, приведенного П. Л. Чебышевым в его курсе «Теория сравнений» [27], как теорема 12: если разложение целого числа N на простые множители имеет вид $p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$, то в любом наборе из N последовательных чисел натурального ряда число чисел, взаимно простых с N, есть $N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$.)

11.5. Гипотеза Римана о нулях ζ-функции как теорема полноты сдвигов. Винер рассказывает в своей автобиографии, что после того, как применил свою теорему полноты или тауберову теорему к выводу закона распределения простых чисел, он пытался некоторое время атаковать гипотезу Римана о нулях ζ-функции, но с сожалением отмечает, что «все попытки справиться с ней привели меня к уверенности, что это не в моих силах».

Можно предполагать, что Винер пытался свести гипотезу Римана к некоторой задаче о полноте системы функций. Такую редукцию действительно можно осуществить. В подтверждение мы расскажем о впечатляющей теореме, найденной Бёрлингом.[1)]

Введем в рассмотрение функцию $h(x)=\{x\}$, где $x>0$ и $\{x\}=x-[x]$. Пусть $0<\theta\leqslant 1$. Тогда функция $h\left(\frac{\theta}{x}\right)$ совпадает с $\frac{\theta}{x}$ при $x>1$ и непрерывна на интервале $(0, \infty)$ всюду, за исключением стремящейся к нулю последовательности точек, в которых она имеет разрывы первого рода. Образуем линейное множество M функций вида

$$g(x)=\sum_{k=1}^{N} a_k h\left(\frac{\theta_k}{x}\right), \tag{1}$$

где $0<\theta_k\leqslant 1$, $k=1, \ldots, N$, а $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные комплексные числа, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\theta_k=0. \tag{2}$$

Множество M состоит из измеримых ограниченных функций на $\mathbf{R}^+$, обращающихся в нуль на интервале $1<x<\infty$, так что $M\subset L^p(0, 1)$ при любом p, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Теорема (Бёрлинг). Множество M плотно в $L^p(0, 1)$ тогда и только тогда, когда ζ-функция Римана не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s>\frac{1}{p}$.

Доказательство. Заметим сначала, что для функции $g\in M$ при $\sigma=\operatorname{Re} s>0$ справедлива формула

$$\int_0^1 g(x)\,x^{s-1}dx=-\frac{\zeta(s)}{s}\sum_{k=1}^{N} a_k\theta_k^s, \tag{3}$$

[1)] Возможно, что эта теорема была открыта также Ниманом, который доказывает ее в [193], но на Бёрлинга не ссылается.

которую можно установить путем несложных вычислений, используя соотношение (2).

Предположим, что M плотно в $L^p(0,1)$ и что $\sigma > \frac{1}{p}$. Тогда найдется функция $g \in M$ такая, что норма $\| 1+g \|_p$ произвольно мала. Поскольку $\sigma > 1 - \frac{1}{p'}$, где $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, то $x^{s-1} \in L^{p'}(0,1)$ и прямое вычисление дает формулу

$$\| x^{s-1} \|_{p'} = (1 + (\sigma - 1)\, p')^{-\frac{1}{p'}}. \tag{4}$$

Применяя неравенство Гёльдера и пользуясь (4), получим

$$\left| \int_0^1 (g(x)+1)\, x^{s-1} dx \right| \leqslant \| 1+g \|_p \cdot (1 + (\sigma - 1)\, p')^{-\frac{1}{p'}}. \tag{5}$$

За счет выбора функции $g \in M$ левую часть неравенства (5) можно сделать сколь угодно малой. Поэтому, в силу формулы (3), выражение

$$\frac{1}{s} \left(1 - \zeta(s) \sum_{k=1}^{N} a_k \theta_k^s \right)$$

тоже можно сделать сколь угодно малым, а это означает, что функция $\zeta(s)$ не может обратиться в нуль ни в одной точке полуплоскости $\sigma > \frac{1}{p}$,

Таким образом, первая часть теоремы Бёрлинга доказана.

Поскольку мы знаем, что на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ есть нули функции $\zeta(s)$, то, тем самым, мы доказали, что M не плотно ни в одном из пространств $L^p(0,1)$ для $2 < p \leqslant \infty$.

Перейдем ко второй части теоремы Бёрлинга. Предположим, что M не плотно в $L^p(0,1)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и покажем, что тогда функция $\zeta(s)$ имеет нули в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{p}$.

Пусть $g \in M$. Нетрудно убедиться, что тогда $g\left(\frac{x}{y}\right) \in M$ при любом $y \in (0,1)$. Из нашего предположения следует, что существует нетривиальная функция $f \in L^{p'}(0,1)$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ такая, что

$$\int_0^1 g\left(\frac{x}{y}\right) f(x)\, dx = 0 \text{ для всех } y \in (0,1). \tag{6}$$

Положим

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \begin{cases} 0; & t > 0, \\ g(e^t); & t < 0, \end{cases} \\ f_1(t) &= \begin{cases} f(e^{-t})\, e^{-t}, & t > 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

$$y=e^{-\tau},\quad \tau\in(0,\ \infty)$$

Тогда функция $g_1\in L^\infty(\mathbf{R})$, а $f_1\in L^1(\mathbf{R})$, причем

$$\|f_1\|_1=\int_0^1 |f(t)|\,dt<\infty. \tag{8}$$

Уравнение (6) можно переписать в виде

$$\int_{\mathbf{R}} g_1(\tau-t)\,f_1(t)\,dt=h_1(\tau), \tag{9}$$

где h_1 — ограниченная непрерывная на всей оси функция, обращающаяся в нуль на правой полуоси.

Можно доказать, что если функции $g_1\in L^\infty(\mathbf{R}^-)$, $f_1\in L^1(\mathbf{R}^+)$ и $h_1\in L^\infty(\mathbf{R}^-)$ связаны соотношением (9), то относительно их преобразований Фурье, функций $\hat g_1(s)$, $\hat f_1(s)$ и $\hat h_1(s)$, аналитических в полуплоскостях $\operatorname{Im} s>0$, $\operatorname{Im} s<0$ и $\operatorname{Im} s>0$, соответственно (преобразование Фурье функции или распределения определяется как обычно) справедлив следующий факт (см. п. 12.5):

$$\Phi(s)=\begin{cases}\hat f_1(s), & \operatorname{Im} s<0,\\ \hat h_1(s)/\hat g_1(s), & \operatorname{Im} s>0\end{cases} \tag{10}$$

аналитическая и однозначная в $\mathbf{C}$ всюду, за исключением множества нулей функции $\hat g_1$ в верхней полуплоскости, которая, как легко видеть, представляется в виде

$$\hat g_1(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\zeta(-is)}{is}\sum_{k=1}^{n} a_k\theta_k^{-is}. \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) показывают, что, в действительности, Φs мероморфная функция.

Для функций $\hat h_1$, $\hat g_1$ справедливы при $\nu=\operatorname{Im} s>0$ следующие оценки

$$\begin{gathered}\|\hat h_1(\sigma+i\nu)\|_\infty\leqslant\frac{\|g_1\|_\infty\cdot\|f\|_1}{\nu},\\ \|\hat g_1(\sigma+i\nu)\|_\infty\leqslant\frac{\|g_1\|_\infty}{\nu}.\end{gathered} \tag{12}$$

Что касается функции $\hat f_1$, то с помощью представления (7) можно получить дополнительную информацию о ее поведении. Имеем,

$$\hat f_1(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 f(x)\,x^{is}dx.$$

Применяя неравенство Гёльдера и формулу (4), получим оценку

$$|\hat{f}_1(s)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{p'} \|x^{is}\|_p = C\left(\frac{1}{p} - \nu\right)^{-\frac{1}{p}}, \tag{13}$$

C — постоянная, не зависящая от s, $\nu = \operatorname{Im} s$.

Неравенство (13) показывает, что, на самом деле, функция $\hat{f}_1$ аналитическая в полуплоскости $-\infty < \nu < \frac{1}{p}$, а оценка

$$|\hat{f}_1(s)| \leqslant C\left(\frac{1}{p} - \nu\right)^{-\frac{1}{p}} \tag{14}$$

позволяет заключить, что на прямой $\nu = \frac{1}{p}$ функция $\Phi(s)$ не может иметь полюсов. Если бы теперь оказалось, что в полуплоскости $\nu > \frac{1}{p}$ нет нулей функции $\zeta(s)$, то, учитывая произвол в выборе чисел θ_k, a_k, $k = 1, \ldots, N$, удовлетворяющих лишь условию (2), мы смогли бы утверждать, что $\Phi(s)$ — целая функция.

Тогда получилось бы, что целая функция Φ допускает представление (10), причем для аналитических в соответствующих плоскостях функций $\hat{g}_1$, $\hat{f}_1$, $\hat{h}_1$ справедливы оценки (12) и (14). Отсюда следует (см. также п. 12.5), что $\Phi(s) \equiv 0$, т. е. $f \equiv 0$, вопреки предположению. ◀

Итак, теорема Бёрлинга демонстрирует интересный факт. Одна из наиболее знаменитых проблем в математике — гипотеза Римана о нулях ζ-функции равносильна полноте специальной системы «сдвигов» в пространстве $L^2(0, 1)$.

§ 12. Введение в спектральную теорию ограниченных и растущих функций на R

12.1. Спектр Карлемана. В 1935 г. Карлеман в курсе лекций, прочитанных им в институте Миттаг—Лефлера, по существу ввел понятие спектра ограниченной функции и предложил подход к доказательству аппроксимационной теоремы Винера, позволяющий трактовать последнюю как теорему о непустоте спектра.

Пусть $g \in L^\infty(\mathbf{R})$. Двустороннее преобразование Фурье $G = (G^+, G^-)$ функции g по-прежнему определим формулой

$$G(z) = \begin{cases} G^+(z) = \int_0^\infty g(t)\, e^{itz} dt, & \operatorname{Im} z > 0, \\ G^-(z) = -\int_{-\infty}^0 g(t)\, e^{itz} dt, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Назовем *спектром* по *Карлеману* функции g наименьшее замкнутое множество вещественной оси, вне которого функция G оказывается однозначной аналитической. Спектр функции g будем обозначать символом $\mathrm{Sp}\, g$, а за представлением (1) сохраним название — преобразование Карлемана.

Например, если функция g представляется в виде

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}d\sigma(\lambda),$$

где σ — конечная мера на $\mathbf{R}$, то $\mathrm{Sp}\, g$ в точности совпадает с носителем $\mathrm{supp}\,\sigma$ меры σ.

Можно показать (и мы вскоре это увидим), что $\mathrm{Sp}\, g$ пуст тогда и только тогда, когда $g\equiv 0$ (этот факт называют теоремой о непустоте спектра), и что спектр $\mathrm{Sp}\, g$ состоит из единственной точки $\lambda\in\mathbf{R}$ в том и только в том случае, когда функция g пропорциональна экспоненте $\exp(-i\lambda t)$.

Задачи описания множества $\mathrm{Sp}\, g$ традиционно называются задачами спектрального анализа.

После того, как спектр функции определен, можно пытаться ставить вопрос о восстановлении функции g по множеству экспонент с показателями из спектра. Такие задачи традиционно называются задачами спектрального синтеза.

Каждую функцию $g\in L^\infty(\mathbf{R})$ можно считать элементом пространства $\mathcal{S}'$ умеренных распределений и, стало быть, с такой функцией g связан спектр σ_g умеренного распределения, определенный, напомним, как носитель преобразования Фурье $\hat{g}$, также принадлежащего пространству $\mathcal{S}'$. Нетрудно показать, что справедливо равенство $\sigma_g=\mathrm{Sp}\, g$, и значит, свойства σ_g переносятся на $\mathrm{Sp}\, g$. Поскольку в пространстве $\mathcal{S}'$ имеется аналог теоремы Винера—Пэли, то спектр $\mathrm{Sp}\, g$ функции $g\in L^\infty(\mathbf{R})$ компактный тогда и только тогда, когда g продолжается на всю комплексную плоскость как целая функция конечной степени. (Это можно доказать и непосредственно, используя формулу обращения для двустороннего преобразования Фурье. При этом преобразование Карлемана функции g совпадает с ее преобразованием Бореля, а выпуклая оболочка $\mathrm{Sp}\, g$ — с сопряженной диаграммой функции g.)

Поскольку в пространстве $\mathcal{S}'$ имеет место формула обращения для преобразования Фурье: $g=\mathcal{F}^{-1}\hat{g}$, то можно считать, что задача о спектральном синтезе для $g\in\mathcal{S}'$ этой формулой решается. Однако такое решение для функций $g\in L^\infty(\mathbf{R})$ слишком грубое, и следует думать об отыскании более адекватной постановки задачи о спектральном синтезе для функций из $L^\infty(\mathbf{R})$.

Оказывается, что существует другое (эквивалентное) определение спектра ограниченной функции, которое не только приводит к естественной формулировке задачи о спектральном синтезе в $L^\infty(\mathbf{R})$, но в отличие от первого определения допускает приспособление для функций, определенных и ограниченных на произвольной локально компактной абелевой группе.

12.2. **Спектр Бёрлинга.** Свяжем с функцией $g \in L^\infty(\mathbf{R})$ слабое-* замыкание (в топологии в $\sigma(L^1, L^\infty)$) B_g линейной оболочки всех ее сдвигов и определим ее спектр Λ_g как множество показателей всех экспонент вида $\exp(-i\lambda t)$, попавших в B_g). Этот спектр мы будем называть *спектром Берлинга* функции g. Хотя впервые именно это определение спектра появилось, по-видимому, у Годемана [173], но импульс к появлению такого (чисто группового) определения дала работа Бёрлинга [152] (1945 г.), который рассмотрел класс $UCL^\infty(\mathbf{R})$ равномерно непрерывных на $\mathbf{R}$ ограниченных функций и для функций этого класса ввел так называемую *узкую топологию*.

Будем говорить, что последовательность функций $\{g_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, принадлежащих пространству $UCL^\infty(\mathbf{R})$, сходится в узкой топологии к функции g, если $g_n(t) \to g(t)$ равномерно на компактных подмножествах в $\mathbf{R}$ и $\|g_n\|_\infty \to \|g\|_\infty$, (как обычно, $\|\cdot\|_\infty$ — равномерная норма).

Узкий спектр Бёрлинга $\Lambda' g$ определяется как множество показателей экспонент $\exp(-i\lambda t)$, которые можно аппроксимировать в узкой топологии последовательностями конечных линейных комбинаций сдвигов функции g. Ясно, что $\Lambda'_g \subset \Lambda_g$.

Основным результатом указанной статьи Бёрлинга была следующая теорема.

Теорема 1. (Бёрлинга о непустоте узкого спектра). Пусть $g \in UCL^\infty(\mathbf{R})$. Тогда спектр Λ'_g пуст в том и только в том случае, когда $g \equiv 0$.

Определение узкого спектра Бёрлинга и теорема о непустоте спектра были перенесены Домаром на произвольные ЛКА группы.

Обратим также внимание на равносильное определение спектра Бёрлинга Λ_g. Пусть $g \in L^\infty(\mathbf{R})$. Рассмотрим множество I_g всех функций $f \in L^1(\mathbf{R})$, удовлетворяющих сверточному уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, g(t)\, dt = 0 \text{ для всех } \tau \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

так что g *аннулирует* множество I_g.

Легко видеть, что I_g — замкнутый идеал банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R})$, а простое соображение, связанное с теоремой Хана — Банаха, показывает что Λ_g есть в точности множество общих нулей преобразований Фурье функций из I_g. Итак, аппроксимационная теорема Винера равносильна теореме о непустоте спектра Бёрлинга, которая, таким образом, ничего нового по сравнению с теоремой Винера не содержит.

Но вот действительно нетривиальный результат — это теорема 1, которая может быть усилена следующим образом.

Теорема 2. Для функции $f \in UCL^\infty(\mathbf{R})$ узкий спектр Бёрлинга совпадает со спектром Бёрлинга.

И эта теорема допускает перенесение на произвольные ЛКА группы.

Нетривиальность теоремы 2 может вскрыться, если провести детальное сравнение топологий (узкой и слабой-*), участвующих в определении узкого спектра Бёрлинга и спектра Бёрлинга. К сожалению, мы не имеем возможности остановиться на этом сколько-нибудь подробно.

Теперь ясно, что в задаче о спектральном синтезе в пространстве $L^\infty(\mathbf{R})$ (соответственно, пространстве $UCL^\infty(\mathbf{R})$) речь идет о принадлежности функции g слабому-* замыканию множества всех тригонометрических многочленов с показателями из ее спектра Бёрлинга. (Это отнюдь не означает, что функция g является слабым-* пределом последовательности тригонометрических многочленов с показателями из Λ_g[1]). В задаче о спектральном синтезе в пространстве $UCL^\infty(\mathbf{R})$ речь идет об аппроксимации функции g последовательностью многочленов с показателями из узкого спектра этой функции. (см. [153]).

Во второй главе п. 7.11. будет показано, что задача о спектральном синтезе в $L^\infty(\mathbf{R})$ равносильна задаче о спектральном синтезе идеалов банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R})$, т. е. представление замкнутого идеала I банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R})$ в виде пересечения максимальных идеалов этой алгебры, содержащих I. Эта очень нетривиальная задача долгое время оставалась нерешенной, пока в 1959 г. Маявен не показал, что в пространстве $L^\infty(\mathbf{R})$ существуют функции g, для которых спектральный синтез не осуществим (другими словами, замкнутый идеал I_g, порожденный такой функцией g в соответствии с формулой (2), не совпадает с пересечением тех максимальных идеалов, в которых I_g содержится). О теореме Маявена, одной из центральных в спектральной теории функций, можно прочитать, например, в [51], [80], [58].

Следующая теорема замыкает сказанное выше о спектре функций из пространства $L^\infty(\mathbf{R})$.

Теорема 3. Пусть $g \in L^\infty(\mathbf{R})$. Тогда $\Lambda_g = \mathrm{Sp}\,g$, (спектр Карлемана совпадает со спектром Бёрлинга).

Эта теорема открывалась и переоткрывалась многими математиками, но существенная часть ее основана на лемме Карлемана об аналитическом продолжении, о которой мы расскажем в следующем пункте.

12.3. Лемма Карлемана об аналитическом продолжении. Пусть $g \in L^\infty(\mathbf{R})$ и функция $f \in L^1(\mathbf{R})$ связана с g уравнением (12.2.1). Тогда, если преобразование Фурье $\hat{f}$ функции f не обращается в нуль ни в одной точке интервала $(a, b) \subset \mathbf{R}$, то преобразование Карлемана G функции g, определенное формулой (12.1.1), является однозначной аналитической функцией в обла-

---

[1] Koosis P., On the spectrale analysis of bounded functions. Pacif. J. Math., 1966, **16**, 121—128.

сти

$$\mathbf{C}_{a,b}=\mathbf{C}\setminus([-\infty,\ a]U[b,\ \infty]) \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ такое, что интервал $(a',\ b')=(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)\subset(a,\ b)$ не пуст. Если $x\in(a',\ b')$, то уравнение $(f*\varphi)(t)=K_\varepsilon(t)e^{ixt}$, где $K_\varepsilon(t)$ — ядро Фейера вида $K_\varepsilon(t)=\dfrac{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}t}{\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)^2}$, имеет решение $\varphi\in L^1(\mathbf{R})$, непрерывно зависящее от $x\in(a',b')$ в метрике $L^1(\mathbf{R})$ (см. теорему 3 п. 8.8 главы 2). Умножим обе части равенства (12.2.1) на $\varphi(\tau)$ и проинтегрируем по всем $\tau\in\mathbf{R}$. После перемены порядков интегрирования, законной в силу теоремы Фубини, получим равенство, справедливое для любого $x\in(a',b')$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)K_\varepsilon(t)e^{ixt}dt=0. \qquad (2)$$

Введем в рассмотрение преобразование Карлемана G_ε вида (12.1.1) функции $g\cdot K_\varepsilon\in(L^1\cap L^\infty)(\mathbf{R})$. Равенство (2) означает, что G_ε — однозначная аналитическая функция в области $\mathbf{C}_{a',b'}$ вида (1). Поскольку G_ε стремится к G при $\varepsilon\to0$ равномерно на каждом компакте, расположенном в одной из полуплоскостей $\mathbf{C}(-\infty,0)$ или $\mathbf{C}(0,\infty)$, то для доказательства леммы осталось сделать лишь один шаг.

Пусть $\mathbf{D}$ — круг в плоскости $\mathbf{C}$ с диаметром (a',b') и Q — квадрат, содержащийся в $\mathbf{D}$, одна из диагоналей которого совпадает с (a',b').

Замечая, что для функции G_ε справедлива оценка

$$|G_\varepsilon(z)|\leqslant\frac{\|g\|_\infty}{|y|},\quad y=\operatorname{Im} z,\quad y\neq0, \qquad (3)$$

рассмотрим функцию

$$G_1(z)=(z-a')(b'-z)G_\varepsilon(z). \qquad (4)$$

В силу (3), на границе квадрата Q для G_1 справедлива оценка $|G_1(z)|<M$, где M от ε не зависит, и, согласно принципу максимума модуля, эта же оценка сохраняется всюду внутри Q. Поэтому в каждом внутреннем квадрате в Q семейство $\{G_\varepsilon\}$ равномерно ограничено. ◀

Пользуясь леммой Карлемана, можно дать еще одно доказательство аппроксимационной теоремы Винера 11.1.2 в ее общей формулировке. Пусть I — замкнутый идеал, порожденный некоторым семейством функций из $L^1(\mathbf{R})$, преобразование Фурье которых одновременно не обращаются в нуль ни в одной точке R. Пусть функция $g\in L^\infty(\mathbf{R})$ аннулирует этот идеал I, так что для любой $f\in I$ справедливо соотношение (12.2.1). Тогда, в силу леммы Карлемана, преобразование аКрлемана G функции g

является целой функцией, подчиненной оценке $|G(z)|\leqslant\frac{\|g\|_\infty}{y}$.

К семейству $\{G(z+a)\}$, $a\in\mathbf{R}$, можно еще раз применить прием, связанный с введением функции (4), и показать, что оно равномерно ограниченно внутри некоторой полосы в $\mathbf{C}$, симметричной относительно вещественной оси. Осталось к целой функции применить теорему Лиувилля.◀

Подход, основанный на аналитическом продолжении, оказался особенно важным при распространении теоремы Винера на классы функций, интегрируемых с быстро растущим весом, например, с экспоненциально растущим весом.

Такое распространение теоремы Винера с одной стороны дает возможность получать новые более тонкие тауберовы теоремы, а с другой — открывает путь к построению спектральной теории экспоненциально растущих функций.

12.4. Аппроксимационная теорема винеровского типа для пространства функций, интегрируемых с экспоненциально растущим весом. Рассмотрим пространство $L^1(\mathbf{R}, d\Omega)$, где $d\Omega=\exp(\alpha|t|)dt$, $\alpha>0$. Ясно, что $L^1(\mathbf{R}, d\Omega)$ — банахова алгебра, относительно нормы.

$$\|f\|=\int_{\mathbf{R}}|f(t)|e^{\alpha|t|}dt$$

и умножения-свертки, пространство максимальных идеалов которой гомеоморфно полосе $\bar{\mathbf{C}}(-\alpha, \alpha)=\{z:|\operatorname{Im} z|\leqslant\alpha\}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторое семейство функций из $L^1(\mathbf{R}, d\Omega)$, а $I_{\mathfrak{F}}$ — замкнутый идеал банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R}, d\Omega)$, порожденный этим семейством.

Теорема. Для того чтобы $I_{\mathfrak{F}}=L^1(\mathbf{R}, d\Omega)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

(a) преобразование Фурье функции из $\mathfrak{F}$ одновременно не обращается в нуль ни в одной точке замкнутой полосы $\bar{\mathbf{C}}(-\alpha, \alpha)$;

(b)

$$\sup_{f\in\mathfrak{F}}\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\log|\hat f(x)|}{\exp\frac{\pi x}{2\alpha}}=\sup_{f\in\mathfrak{F}}\varlimsup\frac{\log|\hat f(x)|}{\exp\left(-\frac{\pi x}{2\alpha}\right)}=0,$$

где $\hat f$ — преобразование Фурье функции f.

Эта теорема была открыта Ниманом [193], работа которого, к сожалению, долгое время оставалась малоизвестной. Впоследствии, эта теорема была найдена независимо Б. И. Коренблюмом [117], который применил ее для доказательства тауберовой теоремы М. В. Келдыша, приведенной в п. 11.2. Заметим, что Б. И. Коренблюм полностью описал все примарные идеалы банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R}, d\Omega)$, отвечающие двум бесконечно удаленным точкам полосы $\mathbf{C}(-\alpha, \alpha)$ в $\mathbf{C}$.

Впоследствии, в [176] эти вопросы были исчерпывающе исследованы для случая банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R}, d\Omega)$, где $d\Omega = \varphi(t) e^{\alpha|t|} dt$, а φ удовлетворяет условию неквазианалитичности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \varphi(t)}{1+t^2} dt < \infty.$$

Несколько слов о доказательстве теоремы 1. Если $g \in L^\infty(\mathbf{R}, d\Omega)$ аннулирует идеал $I_{\mathfrak{F}}$ банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R}, d\Omega)$, порожденный семейством $\mathfrak{F}$, то любая функция $f \in \mathfrak{F}$ связана с g соотношением (12.2.1), которое можно переписать следующим образом

$$-\int_{-\infty}^{0} f(t-\tau) g(t) dt = \int_{0}^{\infty} f(t-\tau) g(t) dt = h(\tau).$$

Поскольку для функции h имеет место легко устанавливаемая оценка

$$|h(t)| \leqslant e^{-\alpha|t|} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbf{R}, d\Omega)} \cdot \|g\|_{L^\infty(\mathbf{R}, d\Omega)},$$

то преобразование Фурье $\hat{h}$ функции h распространяется на полосу $\mathbf{C}(-\alpha, \alpha)$ как аналитическая функция.

Применяя метод аналитического продолжения Карлемана, можно показать, что преобразование Карлемана $G = (G^+, G^-)$ функции g, представимое формулой

$$G(z) = \begin{cases} G^+(z), & \operatorname{Im} z > \alpha \\ \hat{h}(-z) / \hat{f}(z), & |\operatorname{Im} z| < \alpha \\ G^-(z), & \operatorname{Im} z < -\alpha, \end{cases}$$

не зависит от выбора функции $f \in \mathfrak{F}$ и, в силу условия (a) теоремы является целой функцией. Легко получаемые оценки для функций G^+, G^-, $\hat{h}$ и $\hat{f}$ в соответствующих областях позволяют далее, пользуясь условиями (b) теоремы, применить к G некоторый вариант принципа Фрагмена — Линделёфа и показать, что $G \equiv 0$. ◀

Можно показать, что условия (b) теоремы существенны. Более того, множества

$$I(\gamma^+) = \left\{ f \in L^1(\mathbf{R}, d\Omega) : \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\log |\hat{f}(x)|}{\exp \frac{\pi x}{2\alpha}} = -\gamma^+ < 0 \right\}$$

и (1)

$$I(\gamma^-) = \left\{ f \in L^1(\mathbf{R}, d\Omega) : \varlimsup_{x \to -\infty} \frac{\log |\hat{f}(x)|}{\exp\left(-\frac{\pi x}{2\alpha}\right)} = -\gamma^- < 0 \right\}$$

образуют упорядоченные по вложению цепочки собственных замкнутых идеалов банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R}, d\Omega)$ (если например, $\gamma_1^+ > \gamma_2^+$, то $I(\gamma_1^+) \subsetneqq I(\gamma_2^+)$), не содержащиеся ни в одном максимальном идеале (такие идеалы называются *примарными идеалами*, отвечающими *бесконечно удаленным точкам* полосы $\overline{\mathbf{C}}(-\alpha, \alpha)$), и каждый примарный идеал банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R}, d\Omega)$, отвечающий бесконечно удаленной точке полосы $\overline{\mathbf{C}}(-\alpha, \alpha)$, совпадает с одним из идеалов одной из двух цепочек вида (1).

Если спектр функции $g \in L^\infty(\mathbf{R}, d\Omega)$ определить по Бёрлингу, как множество общих нулей в замкнутой полосе $\overline{\mathbf{C}}(-\alpha, \alpha)$ преобразований Фурье всех функций $f \in L^1(\mathbf{R}, d\Omega)$, связанных с g соотношением (12.2.1), то нетрудно убедиться, что спектр Бёрлинга любой функции $g \in L^\infty(\mathbf{R}, d\Omega)$, аннулирующей один из идеалов вида (1), пуст.

12.5. Аппроксимационная теорема винеровского типа и спектр ограниченной функции на $\mathbf{R}^+$. Рассмотрим подалгебру $L^1(\mathbf{R}^+)$ банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R})$, состоящую из суммируемых функций, обращающихся в нуль на $\mathbf{R}^-$. Произведение в $L^1(\mathbf{R}^+)$ определяется как свертка

$$(f_1 * f_2)(\tau) = \int_0^\tau f_1(\tau - t)\, f_2(t)\, dt$$

(если $f_1, f_2 \in L^1\, \mathbf{R}^+$), то $f_1 * f_2 \in L^1(\mathbf{R}^+)$), преобразование Фурье $\hat{f}$ функции $f \in L^1(\mathbf{R}^+)$ продолжается в нижнюю полуплоскость $\mathbf{C}(-\infty, 0)$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$, как аналитическая функция, непрерывная в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbf{C}}(-\infty, 0)$. Пространство максимальных идеалов банаховой алгебры $L^1(\mathbf{R}^+)$ гомеоморфно $\overline{\mathbf{C}}(-\infty, 0) = \overline{\mathbf{C}}_-$.

Нетрудно показать, что подпространство в $L^1(\mathbf{R}^+)$ является замкнутым идеалом этой банаховой алгебры тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно полугруппы всех правых сдвигов $\{T_t^+\}$, определенной в п. 6.1.

Следующая теорема была также доказана Ниманом в [193].

Теорема. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторое семейство функций в $L^1(\mathbf{R}^+)$, а $I_{\mathfrak{F}}$ — замкнутый идеал в $L^1(\mathbf{R}^+)$, порожденный этим семейством. Для того чтобы $J_{\mathfrak{F}} = L^1(\mathbf{R}^+)$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

(a) преобразования Фурье функций из $\mathfrak{F}$ одновременно не обращаются в нуль ни в одной точке полуплоскости $\overline{\mathbf{C}}(-\infty, 0)$;

(b) нет примыкающего к нулю интервала $(0, \alpha)$, $\alpha > 0$, на котором все функции из $\mathfrak{F}$ тождественно обращаются в нуль.

Доказательство этой теоремы проводится приблизительно по той же схеме, что и доказательство теоремы 12.4.1. Именно, если функция $g \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$ аннулирует идеал $I_{\mathfrak{F}}$, то функция $h = h_f$, определенная формулой

$$\int\limits_{\max(\tau,0)}^{\infty} f(t-\tau)\, g(t)\, dt = h(\tau),$$

обращается в нуль на $\mathbf{R}^+$ для каждой $f \in \mathfrak{F}$.

Преобразование Карлемана G функции g можно определить формулой

$$G(z) = \begin{cases} G^+(z) = \int\limits_0^{\infty} g(t)\, e^{itz} dt, & \operatorname{Im} z > 0 \\ \dfrac{\mathcal{H}(z)}{\hat{f}(z)}, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

где $\mathcal{H}(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} h(t)\, e^{itz} dt$, а $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f.

Условие (a) означает, что G — целая функция. Условие (b), записанное в следующем эквивалентном виде

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}} \overline{\lim_{y \to -\infty}} \frac{\log |\hat{f}(iy)|}{|y|} = 0,$$

показывает, что индикатор функции G в нижней полуплоскости, определенный формулой (5.4.6), не может быть положительным. То же самое относится, очевидно, к индикатору функции G в верхней полуплоскости. Остается вещественная ось. Но здесь оказывается возможным применить прием, основанный на соображениях компактности семейства аналитических функций, использованный при доказательстве леммы Карлемана, и показать, что G — целая функция нулевой степени. Снова принцип Фрагмена — Линделёфа позволяет заключить, что $G \equiv 0$. ◀

Заметим, что теорема 1 также может быть источником новых тауберовых теорем. Кроме того, если с функцией $g \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$ связать слабое-* замыкание B_g^+ линейной оболочки всех ее левых сдвигов, т. е. функций вида

$$\begin{cases} g(t+\tau), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где $\tau > 0$, и определить ее спектр $\mathrm{Sp}^+ g$, как множество комплексных чисел λ, принадлежащих расширенной нижней полуплоскости $\overline{\mathbf{C}}_- \cup \{\infty\}$ таких, что $\exp(-i\lambda t) \in B_g^+$, присоединяя к этому множеству точку $\{\infty\}$ в том случае, если B_g^+ содержит ненулевую финитную функцию, то теорема 1 окажется равносильной теореме о непустоте спектра в $L^\infty(\mathbf{R}^+)$: $\mathrm{Sp}^+ g = \varnothing \Leftrightarrow \Leftrightarrow g \equiv 0$.

В статье [111] дается описание всех функций из $L^\infty(\mathbf{R}^+)$ с одноточечным спектром. В [112] ставится задача спектрального синтеза в $L^\infty(\mathbf{R}^+)$ и доказывается, что спектральный синтез для функции $g \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$, такой что $B_g^+ \neq L^\infty(\mathbf{R}^+)$, имеет место тогда и только тогда, когда $\mathrm{Sp}^+ g$ не более, чем счетный.

Заметим, что результаты по спектральному анализу и синтезу в пространстве $L^\infty(\mathbf{R}^+)$, полученные в [111], [112], могут быть легко приспособлены для рассмотренного в п. 12.5 пространства экспоненциально растущих функций.

12.6 Алгебры Бёрлинга. Дальнейшее продвижение в спектральной теории функций на $\mathbf{R}$ связано с рассмотрением *алгебр Бёрлинга.* Так называются подалгебры $L_\varphi^1(\mathbf{R})$ алгебры $L^1(\mathbf{R})$, состоящие из функций f с конечным интегралом

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|\,\varphi(t), \tag{1}$$

где вес φ удовлетворяет условиям: $\varphi(t) \geqslant 1$, $\varphi(t+\tau) \leqslant \varphi(t)\,\varphi(\tau)$ для всех t, $\tau \in \mathbf{R}$, (см. п. 7.10 главы 2). Норма элемента $f \in L_\varphi^1(\mathbf{R})$ задается формулой (1), а произведение — сверткой.

Ограничимся рассмотрением веса φ, для которого $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{\log\varphi(t)}{t} = 0$.

Бёрлинг, (см. [151]), рассматривая алгебру $L_\varphi^1(\mathbf{R})$ для веса φ, удовлетворяющего условию «неквазианалитичности»

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\varphi(t)}{1+t^2}\,dt < \infty, \tag{2}$$

показал, что для нее сохраняется формулировка классической аппроксимационной теоремы Винера 11.1.2. Поэтому в пространстве $L_\varphi^\infty(\mathbf{R})$ нет функций с пустым спектром по Бёрлингу. В. П. Гурарий и Б. Я. Левин переоткрыли и одновременно обобщили теорему 12.5.1; они показали, что формулировка этой теоремы полностью сохраняется для алгебры $L_\varphi^1(\mathbf{R}^+)$, где вес φ удовлетворяет условию (2). Это результат явился основой для построения спектральной теории функций из дуального пространства $L_\varphi^\infty(\mathbf{R}^+)$ (см. [113]).

Если вес φ удовлетворяет условию «квазианалитичности»

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\varphi(t)}{1+t^2}\,dt = \infty, \tag{3}$$

то, как было обнаружено в [193], в пространстве $L_\varphi^\infty(\mathbf{R})$ могут появиться функции с пустым спектром по Бёрлингу.

Однако вопрос о точной формулировке аппроксимационной теоремы винеровского типа для $L_\varphi^1(\mathbf{R})$ (или для $L_\varphi^1(\mathbf{R}^+)$) до сих пор остается открытым (см. [113], [176] и [63]).

Для функции $g \in L_\varphi^\infty(\mathbf{R})$ можно также определить спектр по

Карлеману. Вопрос о совпадении спектров по Бёрлингу и по Карлеману для случая веса, подчиненного условию (2), разрешался усовершенствованием приема, примененного в лемме Карлемана. (Например, в [113] применялась известная в теории аналитических функций теорема Левинсона из [62], дающая критерий компактности семейства аналитических функций, имеющего можоранту). Для случая веса, удовлетворяющего условию (3), дальнейшее усовершенствование метода Карлемана оказалось невозможным. Тем не менее вопрос о совпадении спектра по Карлеману со спектром по Бёрлингу для функций из $L_\varphi^\infty(\mathbf{R})$ или из $L^\infty(\mathbf{R}^+)$ был положительно решен Домаром [165], независимо от выполнения или невыполнения условий (2) или (3). Рассматривая коммутативную банахову алгебру B, удовлетворяющую некоторому дополнительному условию, Домар построил аналитическое преобразование для функционала, аннулирующего замкнутый идеал банаховой алгебры B, специальным случаем которого является преобразование Карлемана. Конструкция Домара позволила распространить лемму Карлемана на случай всех рассмотренных выше алгебр Бёрлинга и дуальных к ним пространств.

Заметим в заключение, что все результаты этого параграфа переносятся с соответствующими упрощениями на случай банаховой алгебры $L^1(\mathbf{Z})$ и ее подалгебр Бёрлинга $L_\varphi^1(\mathbf{Z})$ и $L_\varphi^1(\mathbf{Z}^+)$.

Глава 2

ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

§ 1. Ввведение

Два важных достижения математики XVIII века, одно из которых связано с возникновением гармонического анализа как теории тригонометрических рядов и интегралов, а другое — с распознованием роли мультипликативных характеров в теории чисел, оказались вариантами созданного в тридцатых годах XX в. гармонического анализа на ЛКА группах. Развитие этой теории было предопределено двумя открытиями, сделанными в эти годы, — факта существования и единственности инвариантной меры на произвольных локально компактных группах и теории двойственности для локально компактных абелевых групп. И одно и другое открытие имеют истоки в математике конца прошлого века, в первую очередь в работах Пуанкаре.

Поначалу, когда только складывалось представление об инвариантной мере (Пуанкаре, Э. Картан), группа преобразований была отделена от пространства, на котором имелась мера. Впервые инвариантная мера на самой группе рассматривалась Гурвицем в 1897 г. для ортогональной группы. Он же предположил факт существования инвариантной меры для любой группы Ли. Однако идеи Гурвица начали развиваться лишь в середине двадцатых годов, в связи с распространением теории Фробениуса представлений конечных групп на компактные группы Ли. Последующий быстрый прогресс (Г. Вейль (1925) явно указал инвариантные меры для некоторых компактных групп Ли) привел к знаменитой теореме Вейля — Петера и к доказательству ими теоремы существования инвариантной меры и инвариантного интеграла на любой компактной группе Ли (1927).

Почти одновременно с этим возникло понятие общей топологической группы (Шрейер (1925) (см. [203]) и становилось ясно, что те методы, которыми пользовались для нахождения инвариантных мер на группах Ли, вряд ли могут пригодиться в ситуации общей топологической группы.

Однако к этому времени уже была далеко продвинута теория абстрактного интегрирования, переносящая на топологические (и даже абстрактные) пространства теорию интеграла и меры Лебега. Конструкции и идеи этой теории неожиданно оказались применимыми для доказательства существования инвариантной меры на топологических группах.

Решающий шаг был сделан в 1933 г. Хааром для локально компактной группы со счетной базой открытых множеств. Это открытие Хаара получило большой резонанс, стимулирующий интенсивное развитие общей теории топологических групп. В том же году фон Нейман, пользуясь открытием Хаара, доказал, что всякая компактная локально евклидова группа есть группа Ли (уже это явилось решением 5-й проблемы Гильберта для компактных групп Ли), а годом позже Л. С. Понтрягин доказал это же для случая связных компактных групп, усилив, тем самым, результат фон Неймана. В 1936 г. ограничение, связанное с аксиомой счетности, было снято Какутани и А. Вейлем, причем Какутани использовал конструкцию Хаара, основанную на известном с древнейших времен методе исчерпывания, а А. Вейль пользовался положительными функционалами.

Стоит сказать, что для работы с интегралом Хаара конструкция не столь важна, достаточен лишь факт существования инвариантного интеграла или меры, а вот чтобы эффективно использовать этот факт, следовало знать, что мера Хаара единственна. Единственность меры Хаара была сначала доказана фон Нейманом для компактных групп с помощью так называемых инвариантных средних (1934), затем он же (1936), доказал это для локально компактных групп со второй аксиомой счетности, и, наконец, А. Вейль (1940), снял и это ограничение и одновременно показал, что если на полной топологической группе существует ненулевая левоинвариантная мера (регулярная и борелевская), то эта группа локально компактна (обратная теорема к теореме Хаара).

Тем самым, общая теория меры Хаара на локально компактных группах была в основном завершена.

Второе открытие, о котором говорили вначале, — открытие теоремы двойственности для локально компактных абелевых групп, было намечено Л. С. Понтрягиным в 1932 г., но изложение теории двойственности появилось в работе Л. С. Понтрягина лишь в 1934 г. В 1935 г. ван Кампен переоткрыл этот результат без ограничения, связанного со второй аксиомой счетности.

Теорема двойственности Понтрягина немедленно нашла применение в ряде областей. Одно из применений относится к 1936 г., когда Шевалле ввел понятие иделей и групп иделей в числовых полях, имея в виду дать метод описания бесконечных абелевых расширений числовых полей. Используя теорию топологических групп и теорию двойственности, Шевалле смог впоследствии (1940) заменить в теории полей классов многие усложнения, использующие ряды Дирихле и комплексный анализ, более ясными и простыми топологическими методами. Другое применение также началось немедленно и было связано с теорией почти периодических функций. Создание теории почти периодических функций связано с именем Бора (1926) и знаменовало новый этап в развитии гармонического анализа, в частности теории интеграла Фурье.

Вскоре после работ Бора появились исследования Винера и Бохнера по так называемому обобщенному гармоническому анализу, имевшие исключительно важное значение для различных приложений и предопределившие направление исследований последующих десятилетий.

Фундаментальные исследования по теории почти периодических функций Г. Вейля, В. В. Степанова, Бохнера и фон Неймана показали, что почти периодическая функция на **R** топологизирует вещественную ось, превращая ее в топологическую группу, плотную в некоторой компактной группе. Так что теория почти периодических функций на **R** укладывается в русло гармонического анализа на компактной группе. Точная формулировка соответствующего результата явилась следствием теоремы двойственности.

Наконец, теория двойственности послужила основой для построения гармонического анализа, включающего в себя теорию интеграла Фурье, на ЛКА группах. Основные факты теории интеграла Фурье — формулы обращения, теория Планшереля, теорема Бохнера о представлении положительно определенной функции и многие другие получили естественное распространение на локально компактные абелевы группы.

Следует сказать, что такое общее рассмотрение позволяет в ряде случаев добиться существенного прогресса даже при исследовании классических объектов гармонического анализа, поскольку групповой подход позволяет зачастую прояснить природу исследуемого явления, иногда же такой подход подсказывает адекватные методы.

План этой главы следующий. Мы сначала совершим короткий экскурс в топологические группы в основном для того, чтобы дать некоторые необходимые для дальнейшего определения и познакомить читателя с разнообразными имеющими приложения ЛКА группами, которые можно изготовить из классических групп с помощью основных операций над топологическими группами — образования подгрупп, факторгрупп и прямого произведения. (Мы прилагаем список групп, которые можно «изготовить» из $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Z}$ с помощью этих операций. Некоторые из них оказываются полезными в структурной теории ЛКА групп.) Затем мы раскажем о мере Хаара и о многочисленных приложениях теории инвариантного интегрирования, а также о тех следствиях этой теории, которые в совокупности являются платформой для построения гармонического анализа на ЛКА группах. Подробно остановимся на фундаментальных фактах гармонического анализа на группах и попытаемся подойти вплотную к направлениям современных исследований.

1.1. Локально компактные абелевы группы, кольца и поля[1].

$\mathbf{R}$ — аддитивная группа (поле) вещественных чисел.

$\mathbf{R}^*$ — мультипликативная группа ненулевых вещественных чисел.

$\mathbf{R}^+$ (соответственно, $\mathbf{R}^-$) — аддитивная полугруппа группы $\mathbf{R}$, состоящая из целых неотрицательных (соответственно, неположительных) чисел.

$\mathbf{Z}$ — аддитивная группа (кольцо) целых чисел.

$\mathbf{Z}^+$ (соответственно, $\mathbf{Z}^-$) — аддитивная полугруппа группы $\mathbf{Z}$, состоящая из неотрицательных (соответственно, неположительных) целых чисел.

$\mathbf{Z}^*$ — мультипликативная полугруппа ненулевых целых чисел.

$\mathbf{C}$ — аддитивная группа (поле) комплексных чисел.

$\mathbf{C}^*$ — мультипликативная группа ненулевых комплексных чисел.

---

[1] Аддитивная группа поля K, как правило, обозначается через K^+, иногда через K, мультипликативная — через K^*; те же обозначения сохраняются для аддитивной группы и мультипликативной полугруппы кольца K. Исключением являются поле $\mathbf{R}$ и кольцо $\mathbf{Z}$. Через $\mathbf{R}^+$ и $\mathbf{Z}^+$ обозначаются аддитивные полугруппы, состоящие из неотрицательных вещественных или целых чисел, соответственно. Символ $\cong$ означает (топологический) изоморфизм ЛКА групп.

Этот список можно дополнить (недискретными) группами из списка в дискретной топологии и соответствующими двойственными группами.

$\mathbf{T}$ — группа окружности — подгруппа группы $\mathbf{C}^*$, состоящая из комплексных чисел, абсолютная величина которых равна 1; $\mathbf{T}\cong\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

$\mathbf{Q}$ — аддитивная группа (поле) рациональных чисел.

$\mathbf{Q}^*$ — мультипликативная группа ненулевых рациональных чисел.

$a\mathbf{Z}$ — подгруппа группы $\mathbf{Z}$, состоящая из целых чисел, кратных натуральному a; $a>1$.

$\mathbf{Z}(a)$, a — натуральное число, большее 1, — кольцо вычетов по модулю a — циклическая группа $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$.

$\mathbf{Z}(p^n)$ — конечное поле, p — простое, n — натуральное число.

$\mathbf{T}(a)$ — подгруппа группы $\mathbf{T}$, состоящая из всех корней a-й степени из 1, a — натуральное число; $T(a)\cong\mathbf{Z}(a)$, $a>1$.

$\mathbf{Z}(\infty)$ — подгруппа группы $\mathbf{T}$, состоящая из всех элементов конечного порядка, т. е. всех комплексных чисел вида $\exp 2\pi ir$, $r\in\mathbf{Q}$.

$\mathbf{Z}(p^\infty)$ — квазициклическая группа, все собственные подгруппы которой циклические; иногда ее называют группой типа p^∞. Эта группа изоморфна подгруппе группы $\mathbf{T}$, состоящей из всех комплексных чисел вида $\exp\left(2\pi i\frac{m}{p^n}\right)$, где $m\in\mathbf{Z}$, n — любое натуральное число; она изоморфна также факторгруппе $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.

$\mathbf{Z}(\mathbf{a}^\infty)$ — подруппа группы $\mathbf{T}$, состоящая из всех комплексных чисел вида $\exp\left(\frac{2\pi im}{a_0a_1\ldots a_n}\right)$, $m\in\mathbf{Z}$, $\mathbf{a}=(a_0, a_0a_1, \ldots)$, $a_0, a_1, \ldots$, — натуральные числа, n — любое натуральное.

$\mathbf{D}(a)=(\mathbf{Z}(a))^{\aleph_0}$ — группа типа Кантора; может быть реализована как совокупность всех последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$, где $x_k\in\mathbf{Z}(a)$, а групповая операция определена как покоординатное сложение в $\mathbf{Z}(a)$.

$\mathbf{D}(2)$ — группа Кантора.

$\mathbf{Q}^t$ — кольцо t-ичных дробей, здесь и далее t — натуральное число, большее 1.

$\mathbf{Z}^t$ — кольцо $\mathbf{Z}$ в t-ичной записи.

$\mathbf{Q}_t$ — кольцо t-адических чисел, t — натуральное число.

$\mathbf{Z}_t$ — кольцо целых t-адических чисел, t — больше 1.

$\mathbf{Q}_p$ — поле p-адических чисел, здесь и далее p — простое.

$\mathbf{Q}_p^*$ — мультипликативная группа p-адических чисел.

$\mathbf{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел.

$\mathbf{Z}_p^*$ — мультипликативная полугруппа целых p-адических чисел.

$\mathbf{U}_p$ — группа обратимых элементов кольца $\mathbf{Z}_p$; группа p-адических единиц.

Ω_p — p-адический соленоид.

$\mathrm{K}_p(t)$ — поле формальных степенных рядов над полем вычетов по модулю p с локально компактной (недискретной) топологией.

$\mathbf{Q}_{\mathbf{a}}$ — кольцо а-адических чисел, здесь и далее $\mathbf{a}=(a_0, a_1, \ldots)$.

$\mathbf{Z}_{\mathbf{a}}$ — кольцо целых а-адических чисел.

$\mathbf{Z}_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a}=(1!, 2!, \ldots)$, — кольцо полиадических чисел.

$\Omega_{\mathbf{a}}$ — а-адический соленоид.

$A=A(\mathbf{Q})$ — кольцо аделей рационального поля.

$A_0=A_0(\mathbf{Q})$ — кольцо главных аделей рационального поля.

$I=I(\mathbf{Q})$ — группа иделей рационального поля.

$I=I_0(\mathbf{Q})$ — группа главных иделей рационального поля.

$A(F)$ — кольцо аделей алгебраического числового поля F; аналогично вводятся $A_0(F)$, $I(F)$, $I_0(F)$.

$\mathbf{R}^n\times\mathbf{Z}^m\times\mathbf{T}^q\times F$ — элементарные группы, n, m, q — натуральные числа, F — конечная группа.

G_d — (локально компактная) группа G, наделенная дискретной топологией.

$\hat{G}$ — группа (непрерывных) характеров группы G; двойственная группа для группы G.

$(\mathbf{R}_d)^\wedge$ — компакт Бора группы $\mathbf{R}$.

$(\mathbf{T}_d)^\wedge$ — компакт Бора группы $\mathbf{Z}$.

§ 2. Топологические группы (основные определения и факты)

2.1. Группы и абелевы группы. Одной из наших главных тем в будущем явится структурная теория ЛКА групп, о которой мы расскажем, опираясь на теорему двойственности Понтрягина (исторически первым был другой подход, когда теорема двойственности явилась следствием структурных теорем, этот подход отражен и в первой монографии, посвященной теории топологических групп [25], и в ряде последующих [90], [51]). В этом пункте мы напомним некоторые полезные в дальнейшем определения и приведем факты о структуре абелевых групп, которые могут подсказать их аналоги в структурной теории ЛКА групп. Особо выделим структурную теорему (см. 2.1 (8)) для конечно порожденных абелевых групп, которая явилась прототипом структурной теоремы для локально компактных абелевых групп (последнюю называют главной структурной теоремой).

Пусть G — группа и $a\in G$. Отображения группы G на себя $x\to ax$ и $x\to xa$ называются *левым сдвигом*, *правым сдвигом*, соответственно. Отображение $x\to x^{-1}$ группы G на себя называется *инверсией*. Единичный элемент группы G, как правило, обозначается $1=1_G$. Если группа G абелева в аддитивной записи, то для единичного элемента будет употребляться обозначение $\mathbf{0}=\mathbf{0}_G$.

Пусть H — подгруппа группы G. Множества xH, где x пробегает группу G, называются *левыми классами смежности* по H, а их совокупность — *пространством левых классов смежности*, которое будет всегда обозначаться G/H, так что $G/H=\{xH : x\in G\}$. Аналогично определяются правые классы смежности.

Мощность пространства G/H называется *индексом подгруппы*.

Подгруппа H группы G называется *нормальной* (нормальным делителем), если для любого x левые и правые классы смежности по H, отвечающие элементу x, совпадают. Другими словами, подгруппа H нормальна, если она инвариантна относительно так называемых *внутренних автоморфизмов*, т. е. отображений вида $G\to xGx^{-1}$. Отображение $\pi : x\to xH$ группы G на пространство G/H в том случае, когда подгруппа H нормальна, называется *каноническим отображением* или *каноническим гомоморфизмом*. Группа G/H называется тогда *факторгруппой* (группы G по подгруппе H).

Подгруппа H группы G называется *собственной*, если $H\neq G$, $H\neq\{1\}$.

Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — некоторое семейство групп. Если на декартовом произведении $G=\Pi G_\alpha$ с элементами $x=(x_\alpha)$, $x_\alpha\in G_\alpha$, ввести операцию умножения $xy=(x_\alpha)(y_\alpha)=(x_\alpha y_\alpha)$ для любых x, $y\in G$, то G становится группой, называемой *прямым произведением групп* G_α, с единицей, равной $1=\{1_\alpha\}$. Подгруппа группы G, состоящая из тех элементов $x=\{x_\alpha\}$, для которых x_α отличны от 1_α лишь для конечного подмножества индексов α, называется *слабым прямым произведением групп* G_α.

Пусть X — непустое множество. Образуем формальное конечное произведение $x_1^{\varepsilon_1}\dots x_n^{\varepsilon_n}$, где $x_k\in X$, $\varepsilon_k=\pm1$, $k=1,\dots,n$, которое назовем *словом*. Слово называется *приведенным* или *несократимым*, если либо оно пусто, либо $x_k^{\varepsilon_k}\neq x_{k+1}^{-\varepsilon_{k+1}}$. Множество несократимых слов образует группу относительно умножения-приписывания, которая называется *свободной группой, порожденной множеством* X. Множество X — это *алфавит свободной группы* или *система образующих*. Пусть $x\in X$ и G_x — свободная группа, порожденная элементом x. Слабое прямое произведение групп G_x по всем x — это *свободная абелева группа, порожденная множеством* X.

Предположим, что G — абелева группа. Если каждый элемент группы G имеет конечный порядок, то G называется *периодической группой*. Если порядок любого элемента периодической группы G есть степень p (p — простое число), то группа называется *p-примарной*. Если же в группе G нет элементов конечного порядка, исключая 1, то G называется *группой без кручения*.

Приведем некоторые факты из теории абелевых групп, полезные в структурной теории ЛКА групп. Доказательство их можно найти в [51].

(1) Теорема. Всякая периодическая группа распадается в слабое прямое произведение своих p-примарных подгрупп.

Рассмотрим гомоморфизм $f_n : x \to x^n$ группы G в себя. Обозначим $G^{(n)} = \operatorname{Im} f_n$, а $G_{(n)} = \operatorname{Ker} f_n$.

(2) Любая подгруппа содержит единственную максимальную периодическую подгруппу, именно, $\bigcup\limits_n G_{(n)}$.

Группа G называется *делимой*, если $G^{(n)} = G$ для любого натурального n, т. е. уравнение $x^n = y$ имеет решение для любого n и любого $y \in G$.

Если единственной делимой подгруппой группы G является $\{1_G\}$, то G называется *приведенной группой.*

(3) Прямое и слабое прямое произведение делимы, если делимы все сомножители; гомоморфные образы делимых групп делимы. Делимы группы Q и $\mathbf{Z}(p^\infty)$ из списка на стр. 144—146.

(4) Теорема. Любая делимая группа распадается в слабое прямое произведение групп Q и $\mathbf{Z}(p^\infty)$.

(5) Любая группа содержит единственную максимальную делимую подгруппу.

(6). Теорема. Пусть H — подгруппа группы G. Если D — делимая группа, то любой гомоморфизм $\varphi : H \to D$ продолжается до гомоморфизма $G \to D$.

Пользуясь этим, можно показать, что всякая делимая подгруппа абелевой группы является ее прямым сомножителем.

В теории ЛКА групп иногда абелеву группу G вкладывают в некоторую делимую группу E так, что группа G не вкладывается ни в какую делимую подгруппу группы E. Тогда E называется *минимальным делимым расширением группы* G. Такое E единственно с точностью до изоморфизма, тождественного на G.

(7) Пусть E — минимальное делимое расширение группы G. Тогда E/G — периодическая группа. Если группа G вкладывается в делимую группу D без кручения и при этом факторгруппа D/G периодична, то D — минимальное делимое расширение группы G.

Подгруппа H группы G называется *сервантной* в G, если из разрешимости уравнения $x^n = h$ в G для любого $h \in H$ следует его разрешимость в H (n — любое целое положительное число).

Конечная система $x_1, \ldots, x_n$ элементов группы G называется *независимой*, если она не содержит элемента 1, и из равенства $x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k} = 1$ следует, что $x_1^{n_1} = \ldots = x_k^{n_k} = 1$, $n_j \in \mathbf{Z}$. *Бесконечная система элементов называется независимой*, если каждая конечная ее подсистема независима.

Пусть M — некоторое подмножество группы G. Наименьшая подгруппа в G, содержащая множество M, называется *подгруппой, порожденной множеством* M. Независимая система группы G, ее порождающая, называется *базисом группы* G, а мощность базиса — *рангом группы*. Если группа G совпадает с подгруппой, порожденной одним элементом g, $g \in G$, то группа G называется *циклической*. Если порядок группы G бесконечный, то G называется *бесконечной циклической группой*. Если группа G порождена конечным множеством своих элементов, то она называется *конечно порожденной*.

(8) Теорема. Любая конечно порожденная группа G изоморфна прямому произведению конечного числа циклических групп, каждая из которых либо бесконечна, либо имеет порядком степень простого числа.

(9) Пусть G — p-примарная группа. Тогда G содержит такую подгруппу H, что a) H изоморфна слабому прямому произведению циклических групп, b) H сервантна в G, c) факторгруппа G/H делима.

2.2. Топология (Задание топологии. Аксиомы отделимости. Компактные и локально компактные пространства. Топологическое произведение).

(1) Задание топологии. Пусть X — множество, некоторые подмножества которого объявлены открытыми. Говорят, что система $\mathcal{U}$ открытых подмножеств в X *задает на* X *топологию*, если объединение и конечное пересечение любой совокупности подмножеств из $\mathcal{U}$ принадлежит $\mathcal{U}$. Множество X с топологией, т. е. пара $(X, \mathcal{U})$, называется *топологическим пространством*.

Замкнутые множества суть дополнения к открытым. Пусть $A \subset X$. Внутренность множества A обозначается $\mathring{A}$ ($\mathring{A}$ состоит из *внутренних точек подмножества* A, т. е. таких $x \in A$, для которых существует $U = U_x \in \mathcal{U}$ такое, что $U_x \in A$). Замыкание множества A обозначается $\bar{A}$, дополнение — A'. Семейство открытых подмножеств $\mathfrak{B}$ называет *базой топологии*, если для каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U_x[1] существует $V \in \mathfrak{B}$ такая, что $x \in V \subset U_x$. (Тогда U представляется в виде объединения элементов из $\mathfrak{B}$.) Аналогично определяется *база окрестностей точки* $x \in X$. Если на X заданы две топологии $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ и каждое открытое множество в первой открыто во второй, то говорят, что первая топология *слабее* второй или, что вторая — *сильнее первой*.

(2) *Первая аксиома счетности* — для каждой точки $x \in X$ существует счетная база окрестностей этой точки.

Вторая аксиома счетности — существует счетная база топологии.

[1] Окрестностью точки называется любое открытое множество, содержащее эту точку.

Базу окрестностей точки x называют также *фундаментальной системой окрестностей точки* $x \in X$. *Предбаза окрестностей* — это семейство окрестностей, объединение и конечное пересечение которых образуют базу топологии. (Иногда только пересечение.)

Индуцированная (или *относительная*) топология на подмножестве $Y \subset X$ определяется стандартно: открытыми множествами в Y объявляются всевозможные пересечения $Y \cap U$, где $U \in \mathcal{U}$.

(3) Аксиомы отделимости. Топологическое пространство $(X, \mathcal{U})$ является:

(a) T_0-*пространством*, если для любых $x \neq y$ из X существуют U_x, либо U_y из $\mathcal{U}$ такие, что $x \in U_x$, $y \notin U_x$, либо $x \notin U_y$, $y \in U_y$;

(в) T_1-*пространством*, если для любых $x \neq y$ из X существуют U_x и U_y из $\mathcal{U}$ такие, что $x \in U_x$, $y \notin U_y$ и $x \notin U_y$, $y \in U_y$ (это условие эквивалентно условию замкнутости одноточечных множеств);

(c) T_2-*пространством* (или *хаусдорфовым* или *отделимым*), если две любые различные точки x и g из X имеют непересекающиеся окрестности;

(d) T_3-*пространством*, если оно регулярно и является T_1-пространством (топологическое пространство называется *регулярным*, если для любого $x \in X$ и любой окрестности U_x точки x существует окрестность V_x такая, что $\overline{V_x} \subset U_x$);

(e) T_4-*пространством*, если оно *нормальное* пространство и является T_1-пространством (топологическое пространство называется *нормальным*, если любая пара его непересекающихся подмножеств обладает непересекающимися окрестностями).

Пусть X и Y — топологические пространства. Функция $f: X \to Y$ называется *непрерывной*, если прообраз $f^{-1}(U_y)$ каждого открытого подмножества U_y в пространстве Y открыт в X. Если f взаимно однозначна и обе функции f и f^{-1} непрерывны, то f называют *гомеоморфизмом топологических пространств* X и Y.

Топологическое пространство называется:

(f) *однородным*, если для любых точек $x, y \in X$ найдется такой гомеоморфизм $f: X \to X$, что $f(x) = y$;

(*д*) *вполне регулярным*, если для каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U_x существует непрерывная функция $f: X \to [0, 1]$ такая, что $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$ для любого $y \in X \setminus U_x$.

Лемма Урысона. Для каждых двух непересекающихся замкнутых подмножеств F_1 и F_2 нормального пространства X существует непрерывная функция $f: X \to [0, 1]$ такая, что $f = 0$ на F_1 и $f = 1$ на F_2.

Лемма Урысона позволяет получить следующую теорему о разбиении единицы.

Теорема Дьедонне. Пусть X — нормальное пространство и F — замкнутое подмножество в X. Пусть система открытых подмножеств $U_1, \ldots, U_n$ является *покрытием* F, так что $F \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. Тогда существуют непрерывные функции $f_1, \ldots, f_n$ на X со значениями в $[0, 1]$ такие, что $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 1$ для всех $x \in F$, и каждая функция f_k обращается в нуль вне U_k, $k = 1, \ldots, n$.

(4) Компактные и локально компактные пространства. Топологическое пространство называется компактным, если из любого покрытия его открытыми множествами можно извлечь конечное покрытие, и *локально компактным*, если для каждой его точки существует окрестность с компактным замыканием. Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждое центрированное семейство замкнутых подмножеств из X имеет непустое пересечение (семейство называется *центрированным*, если каждое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение). Компактное хаусдорфово пространство нормально.

Локально компактное пространство можно сделать компактным добавлением единственной точки x_∞, если объявить окрестностями точки x_∞ все множества вида $\{x_\infty\} \cup U$, где U — открытое подмножество в X с компактным дополнением. Получившееся пространство называется *одноточечным компактным расширением Александрова пространства* X.

Топологическое пространство называется *σ-компактным*, если оно представляется в виде счетного объединения компактных пространств.

Если топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_3 или регулярно, то замыкание любого компактного в нем множества компактно.

(5) Топологическое произведение и слабая топология. Пусть A — непустое множество индексов и каждому $\alpha \in A$ отвечает непустое топологическое пространство X_α. *Декартово произведение* $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ определяется как совокупность всех функций x с областью определения A, для которых $x(\alpha) \in X_\alpha$. В силу аксиомы выбора, X непусто. На множестве X можно ввести топологию, выбрав в качестве базы топологии все множества вида $x_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, где $x_\alpha : X \to X_\alpha$, а U_α — открытое подмножество в X_α. Это слабейшая топология, в которой все функции x_α: $X \to X_\alpha$ непрерывны. Наделенное такой *слабой топологией* декартово произведение X называется *топологическим произведением*

Теорема Тихонова. Топологическое произведение любого семейства компактных пространств компактно.

При доказательстве теоремы двойственности окажется полезной следующая

Теорема. Пусть X — локально компактное пространство, а $\mathfrak{F}$ — семейство непрерывных комплексных функций на X, *обращающихся в нуль на бесконечности* (т. е. для любых $\varepsilon > 0$ и $f \in \mathfrak{F}$ найдется компакт $K \subset X$ такой, что $|f(x)| < \varepsilon$, когда $x \notin K$) и *отделяющих точки* X (т. е. для любых $x_1 \neq x_2$ найдется f, $f \in \mathfrak{F}$, такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$) и не обращающихся одновременно в нуль ни в одной точке пространства X. Тогда *слабая топология* на X, *порожденная семейством* $\mathfrak{F}$ (открытыми множествами объявляются все множества вида $f^{-1}(U)$, где $f \in \mathfrak{F}$, U — открытое подмножество в X), совпадает с исходной топологией пространства X.

(6) Топологические пространства и связность. Топологическое пространство X *связно,* если оно не представимо в виде объединения двух непересекающихся одновременно открытых и замкнутых своих подмножеств. *Компонента* топологического пространства — это связное его подмножество, не содержащееся в бо́льшем связном подмножестве. Топологическое пространство называется *локально связным*, если оно обладает открытой базой из связных подмножеств, *вполне несвязным*, если все его компоненты суть точки, и *нульмерным*, если открыто замкнутые его подмножества образуют базу топологии. Топологическое пространство называют *линейно связным*, если для любой пары точек x, $y \in X$ существует непрерывное отображение $f:[0, 1] \to X$ такое, что $f(0) = x$, $f(1) = y$.

Теорема. Пусть X локально компактно, хаусдорфово и вполне несвязно. Тогда X нульмерно.

(7). ε-сети в метрических пространствах. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ и $\varepsilon > 0$. Конечное подмножество $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в X называется *ε-сетью*, если для любой точки $x \in X$ существует такой номер k, что $\rho(x, x_k) < \varepsilon$.

Если метрическое пространство содержит ε-сеть для любого $\varepsilon > 0$, то оно называется *вполне ограниченным*.

Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограничено.

(8) Направленности. Множество точек $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$ называют *направленным вниз* (относительно $<$), если индексы α образуют *направленную вниз систему*, т. е. A частично упорядочено и для любых α и β из A существует $\gamma \in A$ такое, что $\gamma < \alpha$, $\gamma < \beta$.

Аналогично определяется множество, направленное вверх. Говорят, что направленное вниз множество $\{x_\alpha\} \subset X$ сходится к $x \in X$, если для каждой окрестности U точки x существует индекс α такой, что $x_\beta \in U$ для всех $\beta < \alpha$.

На языке сходимости направленных множеств могут быть выражены все понятия топологии.

2.3. Топологические группы. Расскажем о наиболее важных первоначальных понятиях и фактах теории топологических групп.

Не имея возможности дать сколько-нибудь подробный очерк этой теории, мы отсылаем читателя к классической монографии Л. С. Понтрягина «Непрерывные группы» [25] и к энциклопедии Хьюитта—Росса «Абстрактный гармонический анализ» [51] за дальнейшей информацией.

(1) *Топологическая группа* — это группа, наделенная такой хаусдорфовой топологией, в которой групповые операции непрерывны, т. е. отображения $(x, y) \to xy$ декартова квадрата $G \times G$ (с топологией декартова произведения) в группу G, $x \to x^{-1}$, (инверсии) непрерывны. Заметим, что можно, не меняя запаса открытых множеств, ослабить ограничение на топологию, требуя лишь выполнения аксиомы отделимости T_0. Более того, все T_0-группы оказываются вполне регулярными T_2-T_3-группами. И все же существуют просто устроенные топологические T_0-группы, которые не являются нормальными группами, а именно T_4-группами. Примером такой группы может служить группа $\mathbf{Z}^m$, где m — любое несчетное кардинальное число, которая является T_0-T_3-группой, но не является нормальной группой. Однако все локально компактные группы (именно эти группы будут предметом нашего внимания) нормальны, поэтому в определении такой группы мы могли бы остановиться на любой из аксиом отделимости.

Если группа, рассматриваемая как топологическое пространство, компактна или локально компактна, или связна и т. д., то мы будем называть ее *компактной* или *локально компактной* и т. д., опуская термин топологическая. В частности, любая группа с дискретной топологией (окрестность точки — это любое подмножество, ее содержащее) в соответствии с определением является топологической группой и, стало быть, будет называться *дискретной группой*. (Единственным исключением является термин нормальная группа, который мы всегда будем относить к алгебраическому понятию нормальности.)

В дальнейшем слово «группа» будет всегда означать топологическую группу, а мы будем заниматься в основном локально компактным абелевыми (ЛКА) группами, рассматривая неабелев случай, если метод или конструкция допускают немедленное неабелево распространение.

(2) Из определения топологической группы следует, что левый и правый сдвиги, а также инверсия суть гомеоморфизмы группы на себя. Справедлива следующая теорема, согласно которой топология группы G может быть полностью описана в терминах открытой базы в точке 1_G.

Теорема. Пусть G — топологическая группа, $\mathcal{U}$ — база окрестностей точки 1. Тогда: 1) для любого $U \in \mathcal{U}$ существуют V_1, $V_2 \in \mathcal{U}$

такие, что $V_1^2 \subset U$, $V_2^{-1} \subset U$ и 2) для любых $U \in \mathcal{U}$ и $x \in G$ существуют V_1, $V_2 \in \mathcal{U}$ такие, что $xV_1 \subset U$ и $xV_2x^{-1} \subset U$.

Обратно, пусть G — группа и $\mathcal{U}$ — любое центрированное семейство подмножеств группы C, обладающее свойствами 1) и 2). Тогда системы подмножеств $\{xU\}$ и $\{Ux\}$, $U \in \mathcal{U}$, (x пробегает всю G) служат предбазами окрестностей одной и той же топологии на G, относительно которой G становится топологической группой, и образуют базы окрестностей той же топологии, если семейство $\mathcal{U}$ обладает также следующим свойством: для любых U, $V \in \mathcal{U}$ существует $w \in \mathcal{U}$ такое, что $w \subset U \cap V$.

(3) Если M и N — подмножества группы G и M открыто, то множества MN и NM открыты (например, $MN = \bigcup\limits_{y \in N} My$).

Если M и N — замкнутые подмножества группы G и N компактно, то MN и NM замкнуты. Требование компактности одного из этих множеств существенно. Действительно, $\mathbf{Z}$ и $\sqrt{2}\mathbf{Z}$ — замкнутые подмножества группы $\mathbf{R}$ (в обычной топологии). Очевидно, что $\mathbf{Z}+\sqrt{2}\mathbf{Z}$ плотно в $\mathbf{R}$ и не замкнуто.

(4) Инверсия любого открытого множества группы G также является открытым множеством в G. Поэтому если U — окрестность единицы $\mathbf{1}$, то $V = U \cap V^{-1}$ — также окрестность $\mathbf{1}$, которую называют *симметричной окрестностью единицы*, $V = V^{-1}$.

Если U — окрестность единицы и $x \in G$, то существует такая окрестность единицы V, что $xVx^{-1} \subset U$. Если группа G компактна, то окрестность V можно выбрать одну и ту же для всех x.

2.4. Подгруппы топологических групп. (1) Подгруппы топологической группы являются топологическими группами в индуцированной топологии.

Если H — открытая подгруппа топологической группы G, то ее дополнение H' также открыто[1], и поэтому H — одновременно замкнутая подгруппа G. Отсюда следует, что связная группа не содержит открытых подгрупп.

(2) Замыкание подгруппы есть подгруппа, замыкание абелевой группы есть абелева группа. Если U — симметричная окрестность единицы в G, то множество $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U^n$ является открыто-замкнутой подгруппой в G.

(3) Подгруппа топологической группы дискретна тогда и только тогда, когда она содержит изолированную точку. (Если x — изолированная точка в индуцированной топологии $H \subset G$, то существует окрестность единицы U в G такая, что $(xU) \cap \cap H = \{x\}$. Пусть $y \in H$. Тогда $(yU) \cap H = (yU) \cap (yx^{-1}H) = yx^{-1}((xU) \cap \cap H) = \{y\}$, так что y — изолированная точка и H — дискретная подгруппа.)

[1] $H' = U\{xH\colon x \notin H\}$.

Если H — дискретная подгруппа группы G, то все ее точки изолированные. Каждая дискретная подгруппа группы G замкнута.

(4) Топологическая группа G называется *компактно порожденной*, если она содержит компактное подмножество F такое, что

$$G=\{1\}\bigcup_{n=1}^{\infty}(F\cup F^{-1})^n.$$

Группа G является компактно порожденной тогда и только тогда, когда существует окрестность единицы группы G с компактным замыканием, порождающая группу G.

В теории ЛКА групп компактно порожденные группы являются аналогами конечно порожденных абелевых групп. Такие группы допускают полное описание (главная структурная теорема для ЛКА групп, см. п. 10.3). Из (2) следует, что в каждой локально компактной группе содержится компактно порожденная подгруппа.

2.5. Элементарные группы. Поскольку каждая группа может рассматриваться в дискретной топологии как топологическая локальной компактная группа, то каждая группа (см. список на стр. 144—146) дает пример дискретной ЛКА группы.

Группы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ являются локально компактными (недискретными) абелевыми группами. Группа окружности $\mathbf{T}$, как подгруппа мультипликативной группы $\mathbf{C}^*$, дает простейший пример компактной группы.

Все замкнутые собственные подгруппы группы $\mathbf{R}$ имеют вид $x\mathbf{Z}$, где $x\in\mathbf{R}$. Каждая подгруппа группы $\mathbf{Z}$ представляется в виде $n\mathbf{Z}$, где $n\in\mathbf{Z}$, а каждая замкнутая подгруппа группы $\mathbf{T}$ дискретна и представляется в виде $\mathbf{T}(n)\cong n^{-1}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$, где $n>1$, $n\in\mathbf{Z}$.

Группы $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ и даже $\mathbf{Z}$ допускают различные неэквивалентные топологии и структуры; изучение этих структур всегда тесно переплеталось с общей теорией топологических групп, снабжая последнюю прекрасным иллюстративным материалом. (Много разнообразных наблюдений такого рода имеется у Хьюитта и Росса [51].)

Позже с помощью простейших групп $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{T}$ мы построим так называемые *элементарные группы*

$$\mathbf{R}^n\times\mathbf{Z}^m\times T^p\times F \quad (F\text{ — конечная группа}),$$

играющие важную роль в структурной теории ЛКА групп.

2.6. Факторгруппы и канонический гомоморфизм. Пусть H — произвольная подгруппа группы G. На факторпространстве G/H левых классов смежности следующим образом вводится топология. Пусть π_H — каноническое отображение G в G/H: $\pi_H: x\to\pi_H(x)=\{xH\}=\dot{x}$ (элементы xH в G/H мы будем иногда обозначать $\dot{x}$). Множество $U \subset G/H$ объявляется открытым, если открыто множество $\pi_H^{-1}(U)$.

Топологическое пространство G/H сохраняет название *факторпространства* группы G по H.

(1) Каноническое отображение $\pi : G \to G/H$ непрерывно, а топология в G/H сильнейшая, обладающая этим свойством.

(2) Если подгруппа H в G нормальная, то пространство G/H оказывается топологической группой, которую мы будем называть *факторгруппой* G по H.

В этом случае каноническое отображение называется *каноническим гомоморфизмом.*

(3) Каноническое отображение является открытым отображением (т. е. образ открытого множества в G есть открытое множество в G/H), но замкнутым, вообще говоря, оно не является. Однако если H — компактная подгруппа в G, то каноническое отображение π_H замкнуто.

(4) Топология факторпространства G/H, вообще говоря, не обязана быть хаусдорфовой. Если $G=\mathbf{R}$, $H=\mathbf{Q}$, то любая окрестность в $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ есть все $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$.

Факторпространство G/H хаусдорфово тогда и только тогда, когда подгруппа H группы G замкнута.

(5) Факторпространство G/H дискретно тогда и только тогда, когда подгруппа H открыта.

(6) Пусть G — компактная (локально компактная) группа, а H — любая ее подгруппа. Тогда G/H — компактное (локально компактное) пространство. (Доказательство немедленно следует из непрерывности канонического отображения π_H. В случае локальной компактности следует использовать однородность пространства G/H.)

Если группа H и факторпространство G/H компактны (локально компактны), то и сама группа G компактна (локально компактна).

2.7. Изоморфизм и гомоморфизм топологических групп. Две топологические группы будем называть *изоморфными*, если существует биективное отображение G_1 на G_2, которое одновременно является алгебраическим изоморфизмом и гомеоморфизмом.

Непрерывное отображение φ топологической группы G_1 в топологическую группу G_2 такое, что $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ для любых x, $y \in G_1$ называется *гомоморфизмом. Гомоморфизм* $\varphi : G_1 \to G_2$ называется *точным*, если обратное отображение к гомоморфизму $\varphi' : G/\mathrm{Ker}\varphi \to \mathrm{Im}\varphi$ непрерывно (т. е. если φ—открытое отображение.)

Замечание. Бурбаки называет (как правило) гомоморфизм морфизмом, а точный морфизм — гомоморфизмом. В случаях, когда мы захотим подчеркнуть, что алгебраический гомоморфизм является гомоморфизмом топологических групп, мы употребим термин непрерывный гомоморфизм.

Если подгруппа H группы G нормальна, то каноническое отображение π является точным гомоморфизмом. Обратно, все образы точных гомоморфизмов топологической группы могут быть реализованы как факторгруппы G/H с естественной топологией факторпространства. У Х—Р [51] есть пример, показывающий, что группа $\mathbf{R}$ является образом точного гомоморфизма вполне несвязной топологической группы.

Если топологическая группа содержит плотный образ группы $\mathbf{Z}$, соответственно, $\mathbf{R}$, то она называется *монотетической*, соответственно, *соленоидальной*. В последнем параграфе этой главы мы расскажем о структуре ЛКА монотетических и соленоидальных групп, играющих существенную роль в общей структурной теории ЛКА групп.

2.8. Произведение топологических групп. Одним из основных методов конструирования топологических групп является образование прямого произведения. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — непустое семейство топологических групп. Группа $\prod\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ с топологией 2.2.(5) прямого произведения называется *прямым произведением топологических групп* G_α или *полным прямым произведением*, а элементы G_α — ее *сомножителями*. Мы будем рассматривать также подгруппу G^0 группы G, состоящую из тех элементов $x=(x_\alpha)\in G$, у которых $x_\alpha\neq 1_\alpha$, 1_α — единица группы G_α, лишь для конечного множества индексов α (своего для каждого x). Сохраним для группы G^0 название слабого прямого произведения. В случае, когда это не приводит к недоразумениям, группу G^0 мы будем также называть просто *прямым произведением*.

Отметим, что эта конструкция прямого произведения впервые появилась у Л. С. Понтрягина [196] для случая счетного числа топологических групп. Общая конструкция принадлежит А. Вейлю [90].

Легко доказать, что прямое произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ является топологической группой, а слабое прямое произведение $\prod\limits_{\alpha\in A}^{0} G_\alpha$ ее плотной подгруппой.

Если все сомножители в произведении $\prod G_\alpha$ или $\prod^0 G_\alpha$ одинаковы, т. е. $G_\alpha = G$ для всех $\alpha\in A$, а мощность A равна m, то это произведение записывают в виде G^m или $(G^m)^0$, соответственно.

Пример. Канторову группу $\mathbf{D}(2)$ мы определяем как полное прямое произведение счетного числа экземпляров $\mathbf{Z}(2)$, так что элементами группы $\mathbf{D}(2)$ можно считать последовательности $x=(x_1, x_2, \ldots)$, для которых x_k, $k=1, 2, \ldots$, принимают значения ± 1, а умножение определяется покоординатно. Подгруппа группы $\mathbf{D}(2)$, состоящая из тех элементов $x=(x_1, x_2, \ldots)$, координаты которых, начиная с некоторого места, принимают значение $+1$, и представляющая собой, таким образом, слабое прямое произведение счетного числа экземпляров $\mathbf{Z}(2)$, может быть реализована как система функций Уолша — полная ортонормированная система функций на конечном интервале, принимающих значения ± 1. Оказывается, что группа характеров этой подгруппы изоморфна группе $\mathbf{D}(2)$. (В последние годы в связи с развитием секвентного анализа и теории быстрого преобразования Фурье усилился интерес к системе функций Уолша и ее различным обобщениям, см., например, [1], [14].) Аналогично определяется группа $\mathbf{D}(\mathbf{a})$.

Конструкция прямого произведения позволила нам из простейших групп образовать элементарные группы (см. п. 2.5). Заметим, что все замкнутые подгруппы и все факторгруппы элементарных групп снова являются элементарными группами. Однако элементарными группами не исчерпываются важные случаи ЛКА групп. Например, канторова группа $\mathbf{D}(2)$, имеющая многочисленные применения в гармоническом анализе даже в классических его вариантах, не является элементарной группой. Об этой и о других важных для приложений ЛКА группах, которые не являются элементарными, мы расскажем чуть позже, а сейчас перечислим некоторые свойства прямого произведения.

(1) Если G — прямое произведение топологических групп, то G хаусдорфова (связная, компактная, абелева) тогда и только тогда, когда каждый из ее сомножителей хаусдорфов (связный, компактный, абелев), соответственно, и G локально компактна тогда и только тогда, когда каждый из ее сомножителей локально компактный и все сомножители, кроме, быть может, конечного числа, компактны. (Существенная часть этого утверждения легко следует из теоремы Тихонова.)

(2) Естественный вопрос о представлении топологической группы в виде полного прямого произведения ее подгрупп изучен далеко не полностью. Ответ на этот вопрос может быть дан в отдельных случаях, например, когда число подгрупп конечно. Следующая теорема об изоморфизме полезна при изучении структуры топологических групп.

Теорема (А. Вейль [90]). 1) Пусть H — нормальная замкнутая подгруппа группы G и $\varphi: G \to H$ — (непрерывный) гомоморфизм такой, что $\varphi(x)=x$ для любого $x \in H$. Тогда группа G (топологически) изоморфна группе $H \times G/H$. 2) Пусть G — абелева хаусдорфова группа, H — ее открытая делимая подгруппа. Тогда G топологически изоморфна группе $H \times G/H$.

(3) Пусть $G=\prod\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ — полное прямое произведение. Тогда отображение $\pi: G\to G_\alpha$, называемое *проекцией*, является точным (непрерывным) гомоморфизмом группы G на группу G_α.

2.9. Проективный предел. Пожалуй, один из главных методов конструирования топологических групп связан со следующей процедурой. Пусть A — частично упорядоченное множество относительно порядка $\prec$ и пусть каждому $\alpha\in A$ поставлена в соответствие топологическая группа G_α. Пусть для любой пары α, $\beta\in E$, $\alpha\prec\beta$, определен точный гомоморфизм $\pi_{\alpha\beta}: G_\beta\to G_\alpha$ такой, что для $\alpha\prec\beta\prec\gamma$ справедливо соотношение $\pi_{\alpha\gamma}=\pi_{\alpha\beta}\circ\pi_{\beta\gamma}$. Подмножество G_* группы $\prod\limits_\alpha G_\alpha$, состоящее из таких (g_α), $g_\alpha\in G_\alpha$, для которых $g_\alpha=\pi_{\alpha\beta}g_\beta$, $\alpha\prec\beta$, называется *проективным пределом групп* G_α *относительно гомоморфизмов* $\pi_{\alpha\beta}$, а система $(G_\alpha, \pi_{\alpha\beta})$ — *проективной системой*. Будем записывать

$$G_*=\varprojlim G_\alpha,\quad \alpha\in A.$$

В монографии А. Вейля [90] рассказывается об истории этого понятия, связанного с именами Эрбрана, П. С. Александрова, Л. С. Понтрягина, Фрейденталя и Шевалле, формирование которого происходило в период с 1933 по 1940 гг.

Ясно, что проективный предел групп G_α относительно $\pi_{\alpha\beta}$ является подгруппой прямого произведения, а в случае, когда все группы G_α хаусдорфовы, — замкнутой подгруппой прямого произведения.

На практике чаще всего возникает следующая ситуация. Рассматривается последовательность замкнутых нормальных подгрупп H_n, $n\geqslant 0$, локально компактной группы G такая, что

$$H_{n+1}\subset H_n \text{ и } H_n/H_{n+1} \text{ — компакт, } n\geqslant 0. \tag{1}$$

Тогда $\{G/H_n\}$ — *проективная последовательность* (т. е. такая, для которой существует последовательность точных гомоморфизмов $\pi_n: G/H_{n+1}\to G/H_n$), позволяющая образовать проективный предел

$$G_*=\varprojlim G/H_n,\quad n\geqslant 0. \tag{2}$$

Ясно, что элементами группы G_* являются последовательности (x_n), для которых $X_{n+1}=x_nh_n$, $h_n\in H_n$, $x_n\in G$.

Пример 1. Пусть p — простое число. Положим в ситуации (1) $G=\mathbf{Z}$ и $H_n=p^n\mathbf{Z}$. Факторгруппа $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ совпадает с группой (и даже кольцом) $\mathbf{Z}(p^n)$ вычетов по модулю p^n. Очевидным образом определяется гомоморфизм

$$\pi_n: \mathbf{Z}(p^n)-\mathbf{Z}(p^{n-1}),$$

который является сюръективным и $\operatorname{Ker}\pi_n=p^{n-1}\mathbf{Z}(p^n)$.

Поэтому последовательность

$$\ldots \to \mathbf{Z}(p^n) \xrightarrow{\pi_n} \mathbf{Z}(p^{n-1}) \xrightarrow{\pi_{n-1}} \ldots$$

образует проективную систему $(\mathbf{Z}(p^n), \pi_n)$ и значит можно образовать проективный предел этой системы, который называется *кольцом целых р-адических чисел* и обозначается $\mathbf{Z}_p$, так что

$$\mathbf{Z}_p = \varprojlim (\mathbf{Z}(p^n), \pi_n), \quad n \geqslant 0. \tag{3}$$

По определению проективного предела элементами группы и даже кольца $\mathbf{Z}_p$ являются последовательности $x=(x_n)$ такие, что

$$x_n \in \mathbf{Z}(p^n) \text{ и } \pi_n(x_n) = x_{n-1}, \quad n \geqslant 1. \tag{4}$$

Сложение и умножение в $\mathbf{Z}_p$ определены покоординатно, поскольку $\mathbf{Z}_p$ является подкольцом произведения $\Pi\mathbf{Z}(p^k)$ (мы одновременно рассматриваем две структуры на $\mathbf{Z}(p^k)$ относительно сложения и умножения). Наконец, $\mathbf{Z}_p$ как замкнутое подмножество в топологическом произведении конечных множеств, а значит, компактов в дискретной топологии, само компактно. Равенство (4) можно переписать в виде $x_n = x_{n-1} (\mathrm{mod}\, p^{n-1})$.

Аддитивные группы кольца $\mathbf{Z}_p$ и его поля частных — поля $\mathbf{Q}_p$ — p-адических чисел дают замечательные примеры компактной и локально компактной абелевой группы, каждая из которых не является элементарной группой.

Позже мы расскажем подробнее о поле $\mathbf{Q}_p$, а затем неоднократно будем к нему возвращаться. Заметим, что если ввести отображение $\varepsilon_n : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}(p^n)$ как проекцию $(x_n) \to x_n$, то можно утверждать, что последовательность

$$0 \to \mathbf{Z}_p \xrightarrow{p^n} \mathbf{Z}_p \xrightarrow{\varepsilon_n} \mathbf{Z}(p^n) \to 0, \tag{5}$$

где $p^n : \mathbf{Z}_p \to p^n\mathbf{Z}_p$ точна и

$$\mathbf{Z}_p / p^n\mathbf{Z}_p \cong \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(p^n).$$

Рассмотренная в примере 1 конструкция допускает важное обобщение.

Пример 2. Пусть $\mathbf{Q} = (a_n)$ — возрастающая бесконечная последовательность целых положительных чисел такая, что

$$a_n \text{ делит } a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда последовательности

$$\{\mathbf{R}/a_n\mathbf{Z}\} \text{ и } \{\mathbf{Z}/a_n\mathbf{Z}\}$$

также образуют проективные системы. Соображения, аналогичные приведенным в примере 1, позволяют заключить, что проективные пределы

$$\varprojlim \mathbf{R}/a_n\mathbf{Z}, \quad n\geqslant 0, \quad \text{и} \quad \varprojlim \mathbf{Z}/a_n\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_{\mathfrak{a}}, \quad n\geqslant 0,$$

приводят в каждом случае к компактной абелевой группе и даже к кольцу. Эти кольца играют замечательную роль в структурной теории компактных абелевых групп и они тоже отличны от элементарных групп.

Второй из этих двух проективных пределов называется *кольцом целых* $\mathfrak{a}$*-адических чисел.*

Выделим два случая: a) $a_n=n!$, в этом случае $\mathbf{Z}_{\mathfrak{a}}$ называется *кольцом полиадических чисел.* О роли этого кольца в аналитической теории чисел рассказано в [26]; b) $a_n=t^n$, t — целое. В этом случае получается кольцо $\mathbf{Z}_t$ целых t-адических чисел, которое, как мы позже увидим, не содержит делителей нуля лишь в том случае, когда t совпадает с некоторым простым числом, и тогда мы получаем кольцо предыдущего примера.

Возвратимся снова к ситуации проективной последовательности (1), предполагая дополнительно, что последовательность подгрупп $\{H_n\}$ удовлетворяет условию

$$\bigcap_n H_n=\mathbf{1}.$$

В этом случае существует инъективный гомоморфизм π локально компактной группы G в G_*, причем образ G плотный в G_*. Если хотя бы одна из групп H_n компактна, то компактны и остальные группы H_n и тогда π устанавливает изоморфизм между G_* и $\pi(G)\subset G_*$.

В частности, для случая в примере 1, когда $G=\mathbf{Z}$, $G_*=\mathbf{Z}_p$, кольцо $\mathbf{Z}$ можно рассматривать как плотное подкольцо в $\mathbf{Z}_p$.

Дополняя сказанное здесь, заметим, что локально компактная группа G допускает нетривиальное представление в виде проективного предела проективной последовательности вида (1) тогда и только тогда, когда G содержит последовательность $\{H_n\}_{n\geqslant 0}$ различных компактных нормальных подгрупп такую, что $H_n\supset H_{n+1}$ для всех $n\geqslant 0$ и $\bigcap H_n=\{1\}$.

2.10. Индуктивный предел. Пусть G — локально компактная группа и $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — направленное семейство замкнутых подгрупп в G по отношению к вложению $\subset$, т. е. операции $\subset$. Если объединение $\bigcup G_\alpha$ плотно в G, то говорят, что G — *индуктивный предел групп* и записывают

$$G=\varinjlim G_\alpha, \quad \alpha\in A \tag{1}$$

(В соответствии с определением п. 2.9, если это семейство направленное по отношению к операции $\supset$ и если пересечение $\bigcap G_\alpha$ сводится к $\{1\}$, то G — проективный предел системы G/G_α.)

И здесь чаще всего приходится иметь дело с локальной компактной группой G, содержащей последовательность замкнутых подгрупп $\{G_n\}_{n\geqslant 0}$ таких, что каждая G_n открыта в G_{n+1}. Тогда если группу UG_n наделить топологией, объявляя окрестностями элемент 1 окрестности 1 в G_0, то получится локально компактная группа, обозначаемая $\lim G_n$, $n\geqslant 0$, и содержащая G_0, а значит, G_n при каждом n как открытые подгруппы, причем топология G_n как подгруппы индуктивного предела та же, что и исходная как подгруппы в G.

Примеры. Пусть $\mathbf{a}=\{a_n\}$ — последовательность целых натуральных чисел, указанная в примере 2 п. 2.9. Рассмотрим индуктивные пределы:

$$1)\ \varinjlim a_n^{-1}\mathbf{Z},\ n\geqslant 0 \text{ и } \quad 2)\ \varinjlim a_n^{-1}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}\ n\geqslant 0.$$

Первый из них представляет собой подгруппу $\mathbf{Q}^{(\mathbf{a})}$ (и даже подкольцо) поля $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. В случае, когда

$$a_n=(n+1)!\ , \tag{2}$$

$\mathbf{Q}^{(\mathbf{a})}$ попросту совпадает с $\mathbf{Q}$. В случае, когда

$$a_n=t^n,\quad t\text{ — целое},\quad t\geqslant 2, \tag{3}$$

кольцо $\mathbf{Q}^{(\mathbf{a})}$ совпадает с кольцом $\mathbf{Q}^{(t)}$ всех t-ичных рациональных чисел.

Второй предел представляет собой дискретную мультипликативную подгруппу группы $\mathbf{T}$, состоящую из всех чисел вида $\exp\dfrac{2\pi i}{a_0a_1\ldots a_n}$ и обозначаемую $\mathbf{Z}(\mathbf{a}^\infty)$. В случае (2) группа $\mathbf{Z}(\mathbf{a}^\infty)$ совпадает с группой $\mathbf{Z}(\infty)$ — дискретной группой, состоящей из всех корней n-й степени из 1, когда n пробегает все натуральные числа. В случае (3) $\mathbf{Z}(\mathbf{a}^\infty)$ совпадает с группой $\mathbf{Z}(t^\infty)$, а если $t=p$, p — простое число, — с квазициклической группой $\mathbf{Z}(p^\infty)$.

2.11. Топологические группы и связность. Приведем некоторые интересные простые факты, относящиеся к связности топологических групп.

(1) Компонента G_0 топологической группы G есть замкнутая нормальная подгруппа в G. Факторгруппа G/G_0 вполне несвязна.

(2) Если в группе G существует связная окрестность единицы, то содержащая единицу связная компонента G_0 группы G порождается этой окрестностью и является связной открытой нормальной подгруппой. Факторгруппа G/G_0 дискретна.

(3) Пусть G — локально компактная группа. Тогда компонента единицы G_0 группы G есть пересечение открытых подгрупп в G.

В частности, следующие условия эквивалентны:

1) G связна.

2) G не содержит собственных открытых подгрупп.

3) $\bigcup_{1}^{\infty} U^n = G$ для любой окрестности единицы U в G.

(4) Пусть C — вполне несвязная или нульмерная локально компактная (компактная) группа. Тогда любая окрестность единицы содержит компактную открытую (компактную открытую нормальную) подгруппу.

Как показывает пример нульмерной группы $\mathbf{Q}$, не содержащей ограниченных открытых подгрупп, условие локальной компактности существенно.

Таким образом, *топология вполне несвязной группы может определятся семейством ее компактных открытых подгрупп.*

(5) Пусть G — топологическая группа и H — ее подгруппа. Если H и G/H связны, то G связна.

Этим фактом можно воспользоваться для доказательства линейной связности унитарной группы $U(n)$ при любом n. То обстоятельство, что факторпространство $U(n)/U(n-1)$ гомеоморфно единичной сфере S^n, позволяет провести индукцию по n.

(6) Пусть G — локально компактная нульмерная группа, H — ее замкнутая подгруппа. Тогда группа G/H нульмерна.

2.12. Периодичность на группе. Пусть G — топологическая группа, H — ее замкнутая подгруппа. Комплексная функция f на G постоянна на левых классах смежности G по H, $f(xy) = f(x)$ для всех $x \in G$, $y \in H$, тогда и только тогда, когда она представляется в виде $f = f' \circ \pi_H$, где f' — функция, определенная на пространстве G/H, а π_H — канонический гомоморфизм $\pi_H : G/H$. При этом непрерывность функции f влечет за собой непрерывность функции f'. Если H — замкнутая нормальная подгруппа в G, то такая функция f называется *H-периодической.*

2.13. Равномерные структуры на топологических группах. Рассмотрим множество $L(U)$ $(R(U))$ всех пар $(x, y) \in G \times G$, для которых $x^{-1}y \in U$ $(yx^{-1} \in U)$, U пробегает множество всех окрестностей элемента 1_G. Семейство всех множеств $L(U)$ $(R(U))$ называется *левой* (*правой*) *равномерной структурой на* G. Обозначим эти структуры $S_L(G)$ $(S_R(G))$, соответственно.

Определение. Отображение $\varphi : G — H$ топологической группы G в топологическую группу H *равномерно непрерывно относительно пары* $(S_L(G), S_L(H))$, если для любой V из базы окрестностей 1_H существует U из базы окрестностей 1_G, так что $(\varphi(x), \varphi(y)) \in L(V)$, когда $(x, y) \in L(U)$. Аналогично определяется равномерная непрерывность относительно пар $(S_L(G), S_R(H))$, $(S_R(G), S_L(H))$, $(S_R(G), S_R(H))$. Равномерные структуры $S_L(G)$ и $S_R(G)$ *эквивалентны*, если тождественное отображение равномерно непрерывно для пар $(S_L(G), S_R(G))$ и $(S_R(G), S_L(G))$.

Теорема (А. Вейль). Любое непрерывное отображение компактной группы G в топологическую группу H равномерно непрерывно относительно любой пары равномерных структур. В частности левая и правая структуры на любой компактной группе эквивалентны (см. [90], [51]).

Одна из интерпретаций теоремы А. Вейля, как мы увидим позже, выражается в том, что левая почти периодическая функция на группе совпадает с правой.

§ 3. Специальные локально компактные абелевы группы. Локально компактные кольца и поля. Примеры

Пусть A — топологическое кольцо. Аддитивную группу кольца будем обозначать A^+, либо по-прежнему через A, а мультипликативную группу всех обратимых элементов A через A^*.

Относительно топологии мы будем предполагать, что она локально компактна. Если кольцо A не имеет делителей нуля, то его полем частных является локально компактное поле, на котором, таким образом, имеются две групповые структуры сложения и умножения.

Развитие теории локально компактных полей и построение гармонического анализа на таких полях, обобщающего те факты классического анализа на $\mathbf{R}$, которые явились следствием наличия двух групповых структур на $\mathbf{R}$ или $\mathbf{Z}$, позволило раздвинуть рамки классической теории числе и алгебраической теории чисел, нашло применение в современной теории представления групп.

Истоки этой теории восходят к Куммеру, выявившему глубокую аналогию между полями алгебраических чисел с соответствующей теорией делимости и теорией рациональных и алгебраических функций одной переменной. Мы знаем, что теория делимости целых чисел оказала воздействие на развитие теории аналитических функций (создавая свой аппарат разложения целых функций на множители, Вейерштрасс следовал именно этой программе). Здесь же произошло обратное. Развитые концепции теории функций, в частности, теории алгебраических функций и римановых поверхностей, оказали исключительно плодотворное влияние на теорию чисел. Продолжая исследования Куммера, Хензель[1] ввел в рассмотрение поле $\mathbf{Q}_p$ p-адических чисел, пользуясь привычной в теории функций конструкцией рядов Лорана, которое немедленно нашло многочисленные приложения в арифметике.

3.1. Поле Q рациональных чисел. Рассмотрим аддитивную группу $\mathbf{Q}$ и мультипликативную группу $\mathbf{Q}^*$ всех отличных от нуля рациональных чисел.

[1] Hensel K., Theorie der Algebraischen Zahlen. Leipzig. Teubner, 1908.

(1) Группа $\mathbf{Q}^*$. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — занумерованные в возрастающем порядке простые числа и $p_0 = -1$. Пусть Q_k — циклическая подгруппа группы $\mathbf{Q}^*$, порожденная элементом p_k, $k = 0, 1, \ldots$. Группы $\mathbf{Q}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, изоморфны $\mathbf{Z}$, а группа $\mathbf{Q}_0$ изоморфна $\mathbf{Z}(2)$. Ясно, что группа $\mathbf{Q}^*$ распадается в слабое прямое произведение своих подгрупп $\mathbf{Q}_k$, $\mathbf{Q}^* = \prod_{k=0}^{\infty}{}^* \mathbf{Q}_k$.

(2) Группа $\mathbf{Q}^+$ (пример 13 в [25]). Это группа ранга 1, все элементы которой, исключая $\mathbf{0}$, имеют бесконечный порядок. Группа $\mathbf{Q}^+$ не допускает конечной системы образующих. В противном случае к ней можно было бы применить структурную теорему 2.1(8) и доказать, что любое рациональное число представляется в виде $r = nr_0$, где n — целое, а r_0 — фиксированное рациональное. Группа $\mathbf{Q}^+$ имеет континуум неизоморфных подгрупп.

Пусть γ — функция, определенная на множестве всех простых чисел и принимающая конечное число значений в полуинтервале $[-\infty, \infty)$. Пусть

$$\mathbf{Q}(\gamma) = \{r \in \mathbf{Q};\ r = \pm p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

где $(p_1, \ldots, p_k)$ — произвольная конечная система различных простых чисел, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — целые числа, удовлетворяющие условию $\alpha_j \geqslant \gamma_j(p_j)$, $j = 1, \ldots, k\}$.

Тогда группами $\mathbf{Q}(\gamma)$ исчерпываются все подгруппы группы $\mathbf{Q}^+$ и группы $\mathbf{Q}(\gamma_1)$ и $\mathbf{Q}(\gamma_2)$ изоморфны между собой тогда и только тогда, когда функции γ_1 и γ_2 отличаются друг от друга лишь для конечного числа значений аргумента и для каждого значения аргумента лишь на конечное число. ◀

(3) Рассмотрим подгруппу $Q^{(t)}$ группы $\mathbf{Q}$, состоящую из рациональных чисел вида a/t^n, где a пробегает $\mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$, а t — фиксированное целое число, большее 1. Такие числа называются рациональными *t-ичными числами*; если $a > 0$, их удобно представить в виде t-ичного разложения

$$\frac{a}{t^n} = \sum_{k=-n}^{m} a_k t^k, \quad a > 0,$$

где $m \geqslant -n$, $n \geqslant 0$, $a_k \in \mathbf{Z}(t)$. Как показывает пример 1) из п. 2.10 $Q^{(t)}$ есть индуктивный предел возрастающей последовательности подгрупп, каждая из которых изоморфна группе $\mathbf{Z}$.

3.2. Кольцо t-адических чисел. Снабдим группу $Q^{(t)}$ так называемой t-адической топологией, выбирая в качестве базы окрестностей нуля конечные подмножества U_n, состоящие из целых чисел, кратных t^n, $n \geqslant 0$. Пополняя группу $Q^{(t)}$ в этой топологии, мы получим группу $\mathbf{Q}_t$, элементы которой x могут представляться формальными рядами вида

$$x = \sum_{n}^{m} x_k t^k, \qquad (1)$$

где целое число n, $n > -\infty$, может принимать и отрицательные значения, n зависит от x, x_k принимает значения $0, 1, \ldots, t-1$, а m может обращаться в бесконечность.

«Числа» $x \in \mathbf{Q}_t$ называются *t-адическими числами*, а представление (1) — *разложением Хензеля*, который первым ввел в рассмотрение эти числа в 1898 г. Историю и становление p-адического анализа любопытно проследить по монографиям [15], [94], [70], [59].

Множество всех элементов x, допускающих представление (1) с $n \geqslant 0$, образует открытую компактную подгруппу группы $\mathbf{Q}_t$, которая совпадает, очевидно, с кольцом $\mathbf{Z}_t$ целых t-адических чисел (пример 1 п. 2.9). Топология в $\mathbf{Q}_t$ задается последовательностью вложенных подгрупп

$$U_n = \{t^n \mathbf{Z}_t\}, \quad U_n \supset U_{n+1}. \qquad (2)$$

Относительно этой топологии группа $\mathbf{Q}_t$ локально компактна и вполне несвязна. Таким образом, t-адические числа x и y «близки» друг к другу, если $x - y \in U_n$ при достаточно большом n, и совпадают тогда и только тогда, когда совпадают все их t-ичные знаки в представлении (1). (Заметим, что для десятичных дробей такой единственности не было, $0{,}99\ldots = 1{,}00\ldots$.)

Аналога отрицательных чисел для $\mathbf{Q}_t$ не существует. Например, -1 допускает разложение Хензеля вида $-1 = t - 1 + (t-1)t + (t-1)t^2 + \ldots$, так что $(-1) \in \mathbf{Z}_t$ и все коэффициенты разложения Хензеля равны $t-1$.

Каждое t-адическое число x однозначно представляется в виде $x = t^n y$, где $y \in \mathbf{Z}_t$ и коэффициент $y_0 \neq 0$, n — целое число.

Поскольку $\mathbf{Z}_t$ — топологическое кольцо, то такое представление показывает, что $\mathbf{Q}_t$ также топологическое кольцо. Впрочем, на это указывает и «кольцевое происхождение» $\mathbf{Q}_t$ как замыкания $\mathbf{Q}^{(t)}$.

Нетрудно привести правила, позволяющие явно находить t-ичные знаки суммы или произведения t-адических чисел. Эти правила в основном соответствуют правилам для действий, например, с десятичными дробями с той лишь разницей, что операции «перенесения в другой разряд», «занимания единицы», «умножения в столбик» производятся не справа налево, а слева направо. Мы не будем указывать алгоритмы для операций «сложения», «вычитания» и «умножения», а ограничимся примерами, которые позволяют такие алгоритмы при желании восстановить.

Пример. Пусть $t=6$, $x = 2 + 3\cdot 6 + 5\cdot 6^2 + \ldots$, $y = 4 + 5\cdot 6^1 + 2\cdot 6^2 + \ldots$. Найдем $x+y$, $x-y$ и xy:

$$1)\quad \begin{array}{r} 2+3\cdot6+5\cdot6^2+\ldots \\ +\;4+5\cdot6+2\cdot6^2+\ldots \\ \hline 0+3\cdot6+2\cdot6^2+\ldots, \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{r} 2+3\cdot6+5\cdot6^2+\ldots \\ -\;4+5\cdot6+2\cdot6^2+\ldots \\ \hline 4+3\cdot6+2\cdot6^2+\ldots, \end{array}$$

$$3)\quad \begin{array}{r} 2+3\cdot6+5\cdot6^2+\ldots \\ \times\;4+5\cdot6+2\cdot6^2+\ldots \\ \hline 2+1\cdot6+4\cdot6^2+\ldots \\ 1\cdot6+4\cdot6^2+\ldots \\ +4\cdot6^2+\ldots \\ \hline 2+2\cdot6+0\cdot6^2+\ldots. \end{array}$$

Пользуясь тем, что в $\mathbf{Z}(6)$ существуют ненулевые элементы, произведение которых равно нулю, $2\cdot3\equiv0\ (\mathrm{mod}\,6)$, нетрудно построить ненулевые элементы x и y в $\mathbf{Z}_6$ такие, что $xy=0$. Кольцо $\mathbf{Q}_t$ является полем тогда и только тогда, когда t равно некоторой степени простого числа $t=p^n$. Если $t=p^n$, то $\mathbf{Q}_t$ изоморфно $\mathbf{Q}_p$.

Итак, если p — простое число, то $\mathbf{Q}_p$ — *локально компактное поле p-адических чисел*, содержащее кольцо $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел в качестве компактной открытой подгруппы. Топология в $\mathbf{Q}_p$ задается убывающей последовательностью открытых подгрупп $U_n=p^n\mathbf{Z}_p$, $n=0, 1, \ldots$. Поле $\mathbf{Q}$ инъективно вкладывается в $\mathbf{Q}_p$, образуя плотное в топологии $\mathbf{Q}_p$ подполе.

3.3. Группа p-адических единиц. Мы уже отмечали, что если определить проекцию $\varepsilon_n:\mathbf{Z}_p\to\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, которая каждому целому p-адическому числу x ставит в соответствие отрезок ряда Хензеля $\sum\limits_0^{n-1} x_kp^k$, где x_k — k-я координата числа x, и отображение p^n: $\mathbf{Z}_p\to\mathbf{Z}_p$, заданное формулой $p^n(x)=p^nx$ для $x\in\mathbf{Z}_p$, то последовательность (2.9.5) точная. Это означает, что отображение p^n — вложение и что $\mathbf{Z}_p/p^n\mathbf{Z}_p\cong\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, $n=0, 1, \ldots$. Поэтому элемент x обратим в $\mathbf{Z}_p$ в том и только в том случае, если его образ при отображении ε_n обратим в $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}=\mathbf{Z}(p^n)$ при каждом $n=0, 1, \ldots$. Но элемент $\varepsilon_n(x)=\sum\limits_0^{n-1} x_kp^k$, $x_k\in\mathbf{Z}(p)$, обратим в $\mathbf{Z}(p^n)$ тогда и только тогда, когда $x_0\neq0$. Таким образом, совокупность $\mathbf{U}_p$ всех обратимых элементов x кольца $\mathbf{Z}_p$ образована лишь теми $x\in\mathbf{Z}_p$, для которых координата $x_0\neq0$. $\mathbf{U}_p$ — мультипликативная группа, а ее элементы называются p-адическими единицами.

Сказанное в предыдущем пункте позволяет любой ненулевой элемент $x\in\mathbf{Q}^p$ однозначно представить в виде $x=p^ny$, где $y\in\mathbf{U}_p$, $n=n(x)\in\mathbf{Z}$. Поэтому элемент x обратим в $\mathbf{Q}_p$ и $x^{-1}=p^{-n}y^{-1}$. Тем самым, доказано, что $\mathbf{Q}_p$ — поле.

Множества $\{p^n\mathbf{U}_p\}_{n\geqslant0}$ с присоединенным элементом $\mathbf{O}$ образуют упорядоченную по вложению цепочку всех идеалов кольца $\mathbf{Z}_p$ и они же, как было замечено в п. 3.2, образуют базу окрестностей нуля в p-адической топологии.

Кольцо $\mathbf{Z}_p$ целостно (т. е. для x, $y \in \mathbf{Z}_p$ из $xy=0$ следует, что $x=0$ или $y=0$) и $\mathbf{Q}_p$ — поле частных кольца $\mathbf{Z}_p$.

3.4. Норма в $\mathbf{Q}_p$. Еще раз вернемся к представлению $x=p^n y$, $y \in \mathrm{U}_p$, p-адического числа. Целое число n в этом представлении называется *p-адическим показателем числа* x и обозначается $\mathrm{ord}_p x$. Положим $\mathrm{ord}_p 0=\infty$, $0=\mathbf{O}\ Q_p$. Тогда

$$\mathrm{ord}_p(xy)=\mathrm{ord}_p x+\mathrm{ord}_p y,$$

$$\mathrm{ord}_p(x+y)\geqslant \min(\mathrm{ord}_p x,\ \mathrm{ord}_p y).$$

Определим норму $|x|_p$ для $x \in \mathbf{Q}_p$ следующей формулой

$$|x|_p=\begin{cases} p^{-\mathrm{ord}_p(x)}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases} \qquad (1)$$

Это настоящая норма, так как она удовлетворяет условиям

a) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$,

b) $|xy|_p=|x|_p|y|_p$,

c) $|x+y|_p\leqslant |x|_p+|y|_p$, $\qquad (2)$

но последнее условие заменяется более жестким; оказывается, что

$$|x+y|_p\leqslant \max(|x|_p,\ |y|_p). \qquad (3)$$

Норма (3) называется *неархимедовой формой.* Архимедову норму на $\mathbf{Q}_p$, в отличие от нормы $|x|_p$, принято обозначать $|x|_\infty$. Отметим следующие свойства неархимедовости нормы.

(1) Все треугольники в $\mathbf{Q}_p$ равнобедренные.

Множества $a+p^n\mathbf{Z}_p$ называются *интервалами* или *дисками в* $\mathbf{Q}_p$.

(2) Каждая точка диска (круга) в $\mathbf{Q}_p$ является его центром.

(3) Пространство $\mathbf{Q}_p$ полно по $|\cdot|_p$. Более того, всякая фундаментальная последовательность элементов из $\mathbf{Q}_p$ имеет предел, принадлежащий $\mathbf{Q}_p$. Отсюда, в частности, следует, что ряд из элементов $\mathbf{Q}_p$ сходится тогда и только тогда, когда общий член его стремится к нулю.

(4) Исходная топология на $\mathbf{Q}_p$ и топология, задаваемая $|\cdot|_p$, равносильны. Поле $\mathbf{Q}$ и кольцо $\mathbf{Q}^{(p)}$ p-ичных конечных рациональных дробей плотны в $\mathbf{Q}_p$ по норме $|\cdot|_p$ и можно было бы с самого начала определить $\mathbf{Q}_p$ как замыкание поля рациональных чисел по норме $|\cdot|_p$.

Поскольку каждая бесконечная последовательность целых p-адических чисел содержит сходящуюся, то открытое подмножество в $\mathbf{Q}_p$ компактно тогда и только тогда, когда оно является объединением конечного числа интервалов.

Таким образом, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}_p$ представляют собой пополнение поля $\mathbf{Q}$ по архимедовой и неархимедовой нормам, соответственно. Оказывается, что этими нормами исчерпываются все нетривиальные нормы на $\mathbf{Q}$ (теорема Островского).

(5) В отличие от евклидовой нормы $|\cdot|_\infty$, принимающей все положительные вещественные значения, неархимедова норма принимает лишь дискретные значения.

При рассмотрении топологии, задаваемой нормой $|\cdot|_p$ на $\mathbf{Q}_p$, может создаться впечатление, что, по сравнению с полем $\mathbf{R}$, поля $\mathbf{Q}_p$ представляют собой унылую область для развития анализа или алгебраического анализа.

Однако, например, попытка построить аналог комплексного расширения поля $\mathbf{Q}_p$ встречает серьезные препятствия.

Если к полю $\mathbf{R}$ присоединить квадратные корни, то, как известно, полученное расширение поля $\mathbf{R}$ совпадает с $\mathbf{C}$, алгебраически замкнуто и полно по архимедовой норме.

Оказывается, что для получения из $\mathbf{Q}_p$ алгебраически замкнутого поля приходится произвести бесконечную серию расширений. Получающееся при этом поле (обозначим его $\tilde{\mathbf{Q}}_p$) не полно, и только пополнение Ω_p поля $\tilde{\mathbf{Q}}_p$ в топологии, индуцированной $\mathbf{Q}_p$, уже алгебраически замкнуто и полно. С этим полем Ω_p мы еще встретимся.

Поля $\mathbf{Q}_p$ явилось ареной развития так называемого p-адического анализа. На них существуют аналоги классических специальных функций: Г-функции, неполной Г-функции, B-функции, гипергеометрической функции, ζ-функции. Хотя в анализе на $\mathbf{Q}_p$ еще есть «белые пятна», но многое уже сделано и, в заключение, хотелось бы отметить, что поля $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}_p$ удачно дополняют друг друга в том смысле, что некоторые факты анализа иногда предпочтительней рассматривать на одном из полей, а затем перейти к их интерпретации для случая другого поля. Удобно ввести символ $\mathbf{Q}_v$, обозначающий $\mathbf{Q}_p$, когда $v=p$, p — простое число и $\mathbf{Q}_v=\mathbf{R}$, когда $v=\infty$.

3.5. Группы $\mathbf{Z}_\mathbf{a}$ и $\mathbf{Q}_\mathbf{a}$. В примере 2 п. 2.9 мы построили группу $\mathbf{Z}_\mathbf{a}$-**a**-адических целых чисел как проективный предел проективного семейства $\mathbf{Z}/a_n\mathbf{Z}$, где $\mathbf{a}=(a_0, a_1, \dots)$ — последовательность целых положительных чисел такая, что a_{n+1}/a_n — целое число для каждого $n=0, 1, \dots$ и $a_0=1$.

Элементы этой группы могут быть реализованы формальными рядами, обобщающими представление Хензеля

$$x=x_0+x_1a_1+\dots+x_na_n, \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbf{Z}(a_{k+1}/a_k)$, $k=0, 1, \dots$. Напомним, что, если $a_n=p^n$, то $\mathbf{Z}_\mathbf{a}=\mathbf{Z}_p$.

Можно показать, что каждое целое положительное число однозначно представляется в виде (1), так что $\mathbf{Z}$ — подгруппа $\mathbf{Z}_\mathbf{a}$. Ясно, что $\mathbf{Z}_\mathbf{a}$ обладает структурой кольца.

Для построения группы $\mathbf{Q_a}$ продолжим последовательность $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ на отрицательные n так, чтобы a_n/a_{n+1} было целым положительным числом для каждого $n=-1, -2, \ldots$, а элементами $\mathbf{Q_a}$ назовем «ряды Лорана»

$$x=\frac{x_{-k}}{a_{-k}}+\ldots+\frac{x_{-1}}{a_{-1}}+x_0+x_1a_1+\ldots+x_na_n+\ldots, \tag{1}$$

где

$$x_k\in\mathbf{Z}\,(a_{k+1}/a_k),\quad k\geqslant 0,$$
$$x_k\in\mathbf{Z}\,(a_k/a_{k+1}),\quad k<0.$$

Тогда $\mathbf{Q_a}$ — группа относительно сложения. Множества

$$U_k=\{x\in\mathbf{Q_a};\ x_n=0,\ n<k\}$$

образуют семейство вложенных подгрупп группы $\mathbf{Q_a}$, удовлетворяющее условиям теоремы 2.3.(2) и, следовательно, определяющее топологию на $\mathbf{Q}_p$. В этой топологии группа $\mathbf{Q}_p$ хаусдорфова, локально компактна, σ — компактна и нульмерна. Множества U_k являются компактными подгруппами в $\mathbf{Q}_p$, причем $U_0=\mathbf{Z_a}$. На группе $\mathbf{Q_a}$ имеется инвариантная метрика ρ, определенная формулой $\rho(x, y)=2^{-m}$, где m — наименьшее число, для которого в представлении (1) $x_m\neq y_m$, задающая эквивалентную топологию.

Группа $\mathbf{Q_a}$ получила название *группы* **a**-*адических чисел*. Группы $\mathbf{Q_a}$ и родственные обобщения конструкции Хензеля, играющие важную роль в структурной теории локально компактных и компактных абелевых групп, рассматривались в разное время Прюфером, фон Нейманом, ван Данцигом, Е. В. Новоселовым. Дальнейшие подробности о группах $\mathbf{Q_a}$ можно найти у Х—Р [51], где указаны все первоисточники. Там группы $\mathbf{Q_a}$ и $\mathbf{Z_a}$ обозначаются через $\Omega_\mathbf{a}$ и $\Delta_\mathbf{a}$, соответственно. См. также [1].

3.6. Группа $\Omega_\mathbf{a}$. Рассмотрим локально компактную абелеву группу $\mathbf{R}\times\mathbf{Z_a}$, записываемую аддитивно, где $\mathbf{a}$ — последовательность, указанная в п. 3.5. Обозначим через $\pi_\mathbf{R}$ и $\pi_{\mathbf{Z_a}}$ канонические вложения группы $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Z_a}$, соответственно. Тогда $B=\pi_\mathbf{R}(\mathbf{Z})\times\pi_{\mathbf{Z_a}}(\mathbf{Z})$ — дискретная плотная подгруппа в $\mathbf{R}\times\mathbf{Z_a}$. Факторгруппу

$$\Omega_\mathbf{a}=(\mathbf{R}\times\mathbf{Z_a})/B$$

назовем **a**-*адическим соленоидом*.

В случае, когда $\mathbf{a}=(a_n)$ и $a_n=p^n$, p — простое число,

$$\Omega_p=(\mathbf{R}\times\mathbf{Z}_p)/B$$

называется p-*адическим соленоидом*. Это именно та, упомянутая в конце п. 3.4 группа, которой завершаются расширения поля $\mathbf{Q}_p$.

Группа Ω_a является компактной связной абелевой группой, содержащей непрерывный гомоморфный образ группы $\mathbf{R}$ в качестве плотной подгруппы, и, стало быть, соленоидальной группой. (У Х—Р она обозначается Σ_a).

3.7. Вполне несвязные локально компактные абелевы группы со второй аксиомой счетности. Пусть G — ЛКА вполне несвязная группа со второй аксиомой счетности. Тогда топология в ней задается с помощью цепочки вложенных открытых подгрупп

$$\ldots U_{-n}\supset\ldots\supset U_{-1}\supset U_0\supset U_1\supset\ldots\supset U_n\supset\ldots \tag{1}$$

таких, что

$$\bigcap_n U_n=\{0\},\quad \bigcup_n U_n=G. \tag{2}$$

Поскольку каждая группа U_n компактна, то число классов смежности U_n по U_{n+1}, $n\in\mathbf{Z}$, конечно. Поэтому каждая компактная группа U_k представляется в виде проективного предела

$$U_k=\lim_{\leftarrow} U_k/U_{n,\, n\geqslant k} \tag{3}$$

и, значит, изоморфна $\mathbf{Z}(\mathbf{a})$ при некотором $\mathbf{a}$, которое мы сейчас укажем.

Уплотняя в случае необходимости цепочку подгрупп $\{U_n\}$, можно добиться выполнения условия

$$U_n/U_{n+1}=\mathbf{Z}(p_n), \tag{4}$$

где p_n — простое число, $n\in\mathbf{Z}$. Условием (4) не всегда пользуются (пример: полиадические числа, где $U_n/U_{n+1}=\mathbf{Z}(n+1)$, n—целое положительное), но все же его можно считать удобным.

Зафиксируем в каждой подгруппе U_n, $n\in\mathbf{Z}$, элемент $g_n\in U_{n+1}$. Тогда x единственным образом представляется в виде ряда Лорана

$$x=\sum_m^\infty x_n g_n, \tag{5}$$

где $x_n\in\mathbf{Z}(p_{n+1})$. Положим

$$a_k=p_1\ldots p_{k+1},\quad k\geqslant 1,\quad a_0=1,\quad a_k=\frac{1}{p_0\ldots p_{k+2}},\quad k<0, \tag{6}$$

и пусть $\mathbf{a}=(a_k)$. Мы приходим к утверждению.

Теорема. Всякая вполне несвязная ЛКА группа G, удовлетворяющая условиям (1), (2) и (4), изоморфна группе $\mathbf{Q}_a$, где $\mathbf{a}$ определяется соотношениями (6).

3.8. Идели и адели. «Представления конечных групп и компактных групп Ли, с одной стороны, и теорема двойственности с другой, представляют собой два раличающихся обобщения гармонического анализа XIX века. Первое нашло применение в теории чисел и физике середины 20 гг. Применение теоремы двойственности началось в 1936 г. введением Шевалле понятия иделей и группы иделей в числовых полях» (Макки [66]).

(1) Ограниченные прямые произведения. Пусть $\{G_v\}$ — последовательность локально компактных (абелевых) групп и пусть каждый элемент G_v этой последовательности содержит компактную подгруппу H_v. Рассмотрим подгруппу G прямого произведения $\prod_v G_v$, состоящую из тех $x=(x_v)\in\prod_v G_v$, для которых $x_v\in H_v$, исключая конечное число индексов v.

Пусть $K=\prod_v H_v$ — компактная подгруппа группы G. Объявляя подмножества группы G открытыми тогда и только тогда, когда открыты их пересечения с каждым левым классом смежности G по K, мы наделяем G топологией, относительно которой G становится локально компактной группой с открытой компактной подгруппой K.

Топологическая группа G называется *ограниченным прямым* произведением групп G_v относительно подгрупп H_v.

(2) *Группа иделей* I есть прямое произведение группы $\mathbf{R}^*$ и ограниченного прямого произведения по всем простым p групп $\mathbf{Q}_p^*$ относительно открытых компактных подгрупп $\mathbf{U}_p\subset\mathbf{Q}_p^*$.

Мультипликативная группа $\mathbf{Q}^*$ поля рациональных чисел канонически вкладывается в каждую из групп $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{Q}_p^*$ и, следовательно, существует каноническое вложение группы $\mathbf{Q}^*$ в полное произведение групп $\prod \mathbf{Q}_p^*\times\mathbf{R}^*$.

Легко видеть, что для почти всех p (кроме конечного числа) $\mathbf{Q}^*$ канонически вкладывается в $\mathbf{U}_p$. Поэтому имеется каноническое вложение $\mathbf{Q}^*$ как подгруппы I_0 в группу иделей I.

Можно проверить, что подгруппа I_0 замкнута в I. Элементы этой подгруппы называются *главными иделями*, а локально компактная группа I/I_0 — *группой классов иделей*.

Оказывается, что абелевы расширения конечной степени поля $\mathbf{Q}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с замкнутыми подгруппами в I/I_0 конечного индекса. Главное значение группы классов иделей состоит в том, что ее факторгруппа по связной компоненте единицы есть вполне несвязная компактная абелева группа, которая может быть отождествлена с группой Галуа (см. п. 3.8) максимального абелева расширения $\mathbf{Q}$ и чьи замкнутые подгруппы взаимно однозначно соответствуют конечным и бесконечным расширениям поля $\mathbf{Q}$. Для описания бесконечных расширений поля $\mathbf{Q}$ группы иделей незаменимы.

(3) *Группа аделей* A есть прямое произведение группы $\mathbf{R}$ и ограниченного прямого произведения групп $\mathbf{Q}_p$ относительно открытых компактных подгрупп $\mathbf{Z}_p$. Элементы группы A называются *аделями*. Относительно покомпонентного умножения адели образуют кольцо. Ясно, что группа I иделей представляет собой как раз группу обратимых элементов кольца A аде-

лей, но их топология как подмножества кольца аделей не та, что их топология как группы иделей.

Кольцо рациональных чисел изоморфно вкладывается в кольцо аделей. Образ этого вложения A_0 представляет собой дискретное подкольцо в A, которое называется *кольцом главных аделей* A_0. Фактогруппа A/A_0 компактна и (см. [12], [61], [66]) она изоморфна группе характеров группы $\mathbf{Q}$.

Группа аделей допускает и другое описание. Введем в аддитивной группе $\mathbf{Q}$ новую топологию, объявив окрестностями нуля всевозможные подгруппы группы $\mathbf{Q}$ (см. 3.1.2). Тогда пополнение $\tilde{\mathbf{Q}}$ группы $\mathbf{Q}$ в этой топологии есть ограниченное прямое произведение групп $\mathbf{Q}_p$ относительно подгрупп $\mathbf{Z}_p$, так что

$$A=\mathbf{R}\times\mathbf{Q}^{\cdot}|$$

Развивая гармонический анализ на группе аделей, Тейт получил далеко идущее обобщение хорошо известного функционального уравнения для ζ-функции Римана (см. 12], [61], [91]).

Здесь рассмотрены группы аделей и иделей над рациональным полем. На самом деле понятия аделей и иделей естественны для любого числового поля K и его пополнений по архимедовой и неархимедовым нормам, соответственно. Именно такая общая ситуация была у Шевалле.

Для приложения в теории представлений понятие аделей и иделей оказалось полезным обобщить на случай линейных алгебраических групп (групп матриц). Изложенная здесь схема почти дословно переносится на линейные группы (А. Вейль). Представления группы аделей линейных групп описаны в [12].

3.9. Конечные поля. Пусть K — поле (см. [15], [84]). Пересечение всех подполей поля K является наименьшим его подполем. Это пересечение содержит канонический образ кольца $\mathbf{Z}$, изоморфный $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, где p — простое число. Следовательно, оно изоморфно либо полю $\mathbf{Q}$, либо полю $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\cong\mathbf{Z}(p)$. Поля $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Z}(p)$, p — простое число, называют *простыми полями*.

Характеристикой поля K называется число $\mathrm{caract}\,(K)$, равное 0 или p в зависимости от того, является поле K расширением поля $\mathbf{Q}$ или $\mathbf{Z}(p)$.

Если $\mathrm{caract}\,(K)=p$, то отображение $\sigma: x\to x^p$ есть изоморфное отображение поля K на его подполе K^p (здесь K^p — совокупность p-х степеней элементов поля K). Действительно, σ — инъекция и $\sigma(xy)=\sigma(x)\sigma(y)$, $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$ — обобщение малой теоремы Ферма.

Число элементов конечного поля K равно всегда $q=p^f$, где $p=\mathrm{caract}(K)$, а $f=[K:\mathbf{Z}(p)]$ — степень расширения поля K, число q называют *порядком поля* K.

Пусть K_1 — некоторое алгебраически замкнутое поле характеристики p и $q=p^f$. Существует единственное подполе $\mathbf{F}_q=$

$=\mathbf{Z}(p^f)$ поля K_1, состоящее из q элементов — множества корней многочлена x^q-x. Любое конечное поле порядка q изоморфно полю $\mathbf{Z}(p^f)$.

Небезынтересно заметить, что конечные поля порядка $q=p^f$ указаны были впервые Галуа, который ввел в рассмотрение неприводимый над полем $\mathbf{Z}(p)$ многочлен $f(x)$ степени $q-1$ и в качестве элементов общего поля рассмотрел многочлены той же степени, где сумма многочленов определяется обычным образом, а произведением называется остаток от деления обычного произведения многочленов на f. Образованное таким образом поле получило название *поля Галуа*[1]. Это поле однозначно определяется заданием p и q, т. е. не зависит от выбора неприводимой функции f степени q и, значит, совпадает с полем $\mathbf{Z}(p^n)$.

Можно доказать таким образом, что всякое конечное поле изоморфно полю Галуа.

Заметим, наконец, что мультипликативная группа $\mathbf{F}_q^*=$ $=\mathbf{Z}^*(p^n)$ конечного поля $\mathbf{F}_q$ является циклической группой порядка $q-1$ с числом образующих, равным $\varphi(q-1)$, где $\varphi(d)$ — *функция Эйлера*, равная числу целых чисел, расположенных в интервале $[0, d]$ и взаимно простых с d.

3.10. Поле $\mathbf{K}_p(t)$ формальных степенных рядов над полем вычетов по модулю p, p — простое число. Элементами этого поля являются степенные ряды вида $x=\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k t^m$, содержащие конечное число членов с отрицательными степенями; коэффициенты этих рядов принадлежат полю вычетов $\mathbf{Z}(p)$ по модулю p. Сложение и умножение в $\mathbf{K}_p(t)$ определяются естественным образом. Если окрестностью элемента $x\in\mathbf{K}_p(t)$ объявить совокупность всех тех элементов из $\mathbf{K}_p(t)$, коэффициенты которых могут отличаться от коэффициентов элемента x, лишь начиная с некоторого фиксированного номера, то относительно соответствующей топологии $\mathbf{K}_p(t)$ становится локально компактным непрерывным (недискретным) полем. Характеристика поля $\mathbf{K}_p(t)$ равна p.

Аналогичным образом определяется непрерывное локально компактное поле $\mathbf{K}$ формальных степенных рядов, коэффициенты которого принадлежат некоторому фиксированному конечному полю характеристики p. Все такие поля $\mathbf{K}$ называются *p-полями* (см. [12], [91]).

Таким образом, мы завершили описание всех ЛКА групп из списка на стр. 144—146.

---

[1] Определение общего (бесконечного) поля Галуа см., например, в [94].

§ 4. Интегрирование на локально компактных хаусдорфовых пространствах

Основная задача теории меры заключается в расширении меры, первоначально заданной на некотором классе простых подмножеств множества X, до меры, определенной на достаточно «богатом» запасе подмножеств в X, образующем, например, σ-алгебру или σ-кольцо. Аналогичная по существу двойственная задача состоит в продолжении интеграла, первоначально заданного на классе «простых» функций, на более широкий класс (или классы) функций. В будущем мы будем иметь дело с подмножествами, которые можно перемещать в X и естественно захотим сохранить свойство меры оставаться инвариантной относительно таких перемещений при ее продолжениях. Оказывается, что, вообще говоря, нет надежды распространить обладающую таким свойством меру на все подмножества множества X. Препятствием является известный парадокс Банаха—Тарского.

Уточним постановку задачи продолжения. Будем исходить из определения элементарного интеграла как неотрицательного линейного функционала, непрерывного относительно монотонного перехода к пределу, на векторном пространстве L вещественных ограниченных функций на абстрактном пространстве X[1]. Пусть L замкнуто относительно структурных операций $\min(f, g)$ и $\max(f, g)$, $f, g \in L$ и содержит $f \equiv 1$. Ставится задача продолжения этого функционала на более широкий класс функций L^1, обладающий всеми свойствами класса L, кроме ограниченности входящих в него функций, и замкнутый относительно монотонного перехода к пределу. Класс L^1 называется классом суммируемых функций, продолженный функционал — интегралом Даниэля, а основной результат теории Даниэля, грубо говоря, заключается в следующем. Пусть A — подмножество в X и $\chi_A(x)$, $x \in X$, — характеристическая функция множества A. Множество A называется интегрируемым, если $\chi_A \in L^1$. Определяя меру μ интегрируемого множества A формулой $\mu(A) = I(\chi_A)$, где I — интеграл Даниэля, и обычным способом образуя интеграл $\int_X f d\mu$, $f \in L^1$, $f > 0$, (см. (4.2.1) ниже) можно тогда утверждать, что при этих условиях

$$I(f) = \int_X f d\mu. \tag{1}$$

Для получения этого результата не требуется никаких ограничений на множество X.

Если предположить, что X — локально компактное хаусдорфово пространство, а L — пространство всех непрерывных функций на X с компактным носителем, то окажется, что наимень-

[1] Например, можно взять L, состоящим из простых функций.

ший класс L^1, обладающий указанными выше свойствами, состоит из так называемых бэровских функций; если, дополнительно, X — компакт, то функционал $I(f)$, $f \in C(X)$, ограничен, а представление (1) есть формула Рисса, открытая им в 1909 г. (У Рисса $X = [0, 1]$, $L = C(0, 1)$, I — интеграл Лебега).

Другой вариант задачи продолжения заключается в непосредственном продолжении меры, первоначально заданной на кольце или алгебре подмножеств, на более широкий класс множеств и представляет собой развитие старинного метода исчерпывания. Мы вкратце расскажем об основных понятиях, связанных с соответствующими конструкциями ([46], [82]).

4.1. Мера и внешняя мера.

(1) Определение меры. Пусть X — абстрактное пространство, Σ — некоторое семейство подмножеств в X, замкнутое относительно операций счетного объединения и дополнения. Такое семейство подмножеств, к которому мы присоединяем пустое множество, обычно называют *σ-алгеброй* или *σ-кольцом* в зависимости от того, принадлежит или нет пространство X этому семейству.

Счетно-аддитивную функцию μ, определенную на Σ, принимающую значения в $[0, \infty]$ (такую, что $\mu(\varnothing)=0$), называют *мерой*.

Если $\mu(X)=1$, то говорят, что мера *нормированная*. Если $\mu(X)=\infty$, но X представляется в виде объединения счетного числа подмножеств из Σ конечной μ-меры, то говорят, что мера μ *σ=конечна*. Если любое подмножество множества нулевой μ-меры из Σ также принадлежит Σ, то меру μ называют *полной*.

Для решения задачи продолжения естественно привлечь внешнюю меру.

(2) Определение внешней меры. *Внешней мерой* на абстрактном пространстве X называется вещественная неотрицательная функция μ^*, определенная на *всех* подмножествах в X и такая, что 1) $\mu^*(\varnothing)=0$, 2) $A\subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$ для любых подмножеств A, $B\subset X$, (*монотонность*) и 3) для любого счетного набора подмножества $A_i \subset X$ $i=1, 2, \ldots$ $\ldots$, $\mu^*(\cup A_i) \leqslant \Sigma\mu^*(A)$, т. е. *$\mu^*$-счетно-полуаддитивна.*

Множество $A\subset X$ называется *μ^*-измеримым*, если для любого подмножества $T\subset X$

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap A'). \qquad (1)$$

Введение внешней меры оправдывается следующим результатом.

Класс Σ_{μ^*} всех μ^*-измеримых подмножеств в X образует σ-кольцо, всякое множество нулевой μ^*-меры принадлежит этому кольцу, и функция $\bar{\mu}$, определенная на Σ_{μ^*} формулой $\bar{\mu}(A)= =\mu^*(A)$, есть полная мера на Σ_{μ^*}.

О мере $\bar{\mu}$ говорят, что она *индуцирована внешней мерой* μ^*.

(3) Индуцированная внешняя мера. По неотрицательной счетно-аддитивной функции μ, определенной на некотором кольце (не обязательно σ-кольце) $\mathfrak{R}$ подмножеств из X, такой, что $\mu(\varnothing)=0$, можно построить внешнюю меру. Пусть A — любое подмножество в X. Определим

$$\mu^*(A)=\inf\{\Sigma\mu(A_n) : A_n\in\mathfrak{R},\ A\subset\cup A_p\}. \qquad (2)$$

Тогда μ^* — внешняя мера, совпадающая на $\mathfrak{R}$ с μ, σ-конечная, если σ-конечная мера μ, которая называется *внешней мерой, индуцированной мерой* μ.

Итак, по любой внешней мере μ^* можно построить индуцированную ею меру $\bar{\mu}$, а по мере $\bar{\mu}$ — индуцированную этой мерой внешнюю меру $\bar{\mu}^*$.

Мера μ^* называется *регулярной*, если $\mu^*=\bar{\mu}^*$.

Оказывается, что внешняя мера μ^*, индуцированная μ в соответствии с формулой (2), регулярна, так что понятия индуцированной внешней меры и регулярной внешней меры равнообъемны.

(4) Расширение меры. Итак, для σ-конечной неотрицательной счетно-аддитивной функции μ на кольце $\mathfrak{R}$ такой, что $\mu(\varnothing)=0$, существует единственная σ-конечная мера $\bar{\mu}$, заданная на σ-кольце $\Sigma\mathfrak{R}$, порожденном $\mathfrak{R}$, такая, что $\bar{\mu}(A)=\mu(A)$, $A\in\mathfrak{R}$. Мера $\bar{\mu}$ называется *расширением меры* μ. Более того, мера μ распространяется на класс Σ^* всех μ^*-измеримых подмножеств, который образует σ-алгебру, вообще говоря более широкую, нежели $\Sigma\mathfrak{R}$. Такое расширение оказывается уже полной мерой, так что Σ^* состоит из всех подмножеств вида $A\Delta N$, Δ — симметрическая разность ($A\Delta N=AN\setminus NA$), где $A\in\Sigma\mathfrak{R}$, N — подмножество множества $\bar{\mu}$-меры нуль на $\Sigma\mathfrak{R}$.

(5) Пространство с мерой. Назовем X *измеримым пространством*, если на нем выделена σ-алгебра Σ подмножеств, объединение которых совпадает с X. Когда важно подчеркнуть выделенную σ-алгебру, измеримое пространство обозначается (X, Σ). Измеримое пространство с заданной на нем мерой называется пространством с мерой и обозначается (X, Σ, μ). Говорят, что X — *пространство с σ-конечной, полной* мерой, если мера μ обладает этими свойствами.

4.2. Измеримые функции и интеграл Лебега. Функцию $f: X\to\mathbf{R}$, определенную на измеримом пространстве (X, Σ) назовем *измеримой*, если $f^{-1}(M)\subset\Sigma$ для любого борелевского множества M в $\mathbf{R}$. (Вся теория интегрирования, о которой мы расскажем, сохраняется с некоторыми поправками для функций f на X со значениями в банаховом и даже метрическом пространстве.) Для любой функции f со значениями в $[0, \infty]$ на пространстве с мерой (X, Σ, μ) определим *интеграл Лебега*

$$\int\limits_X f\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu(x), \tag{1}$$

как

$$\operatorname{Sup}\left(\sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in A_k} f(x)\,\mu(A_k)\right)$$

по всем разбиениям $(A_1, \ldots, A_n)$ пространства X таким, что $A_k \in \Sigma$, $k=1, \ldots, n$.

Функция f называется *интегрируемой* по мере, если интеграл Лебега (1) конечный. Например, характеристическая функция подмножества из Σ конечной μ-меры интегрируема. Интегрируемая функция измерима.

Если f принимает значения в $\mathbf{C}$, то ее можно представить в виде $f=(f_1-f_2)+i(f_3-f_4)$, где f_k принимают значения в $[0, \infty]$, и определить $\int\limits_X f\,d\mu = \int f_1\,d\mu - \int f_2\,d\mu + {}$ $+i\left(\int f_3\,d\mu - \int f_4\,d\mu\right)$.

Функция f называется *суммируемой* по мере μ, если функция $|f|$ интегрируемая по мере μ.

Справедливы следующие фундаментальные теоремы.

Теорема Фату. Если $\{f_n\}_1^\infty$ — последовательность (здесь и в следующих теоремах можно говорить о направленных семействах) неотрицательных измеримых функций на X, то $\int\limits_X \underline{\lim}\, f_n\,d\mu \leqslant \underline{\lim} \int\limits_X f_n\,d\mu$.

Теорема Б. Леви. Если выполняются условия теоремы Фату и $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ для всех x и n, то

$$\int\limits_X \lim f_n(x)\,dx = \lim \int\limits_X f_n(x)\,dx.$$

Теорема Лебега. Если последовательность $\{f_n\}$ суммируемых функций стремится к функции f почти всюду по мере μ и $|f_n(x)| \leqslant \Phi(x)$, где Φ — интегрируемая функция, то

$$\int\limits_X \lim f_n\,d\mu = \lim \int\limits_X f_n\,d\mu.$$

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, хотя некоторые факты, которые мы далее приводим, например, теоремы Радона—Никодима и Фубини, справедливы для абстрактных пространств с мерой.

Обозначим через $C_K(X)$ пространство непрерывных функций на X с компактным носителем.

4.3. Борелевские и бэровские меры. Пусть $\mathscr{K}$ — класс всех компактных множеств в локально компактном хаусдорфовом пространстве X.

Обозначим σ-алгебру, порожденную классом K через Σ. Подмножества σ-алгебры Σ называются *борелевскими множествами*. Они представляются наиболее естественным объектом для построения теории меры и интеграла на X. Тем не менее, полезно рассматривать σ-алгебру Σ_0, порожденную теми компактами из $\mathscr{K}$, которые являются множествами класса G_δ, т. е. представляются в виде счетного пересечения открытых подмножеств из X, так что $\Sigma_0 \subset \Sigma$. Подмножества из Σ_0 называются *бэровскими* подмножествами пространства X и существует ряд причин, оправдывающих их введение. О некоторых скажем сразу. Дело в том, что Σ_0 — наименьшая σ-алгебра, с помощью которой можно задать топологию в X и, кроме того, для каждой функции $f \in C_K(X)$ и любого открытого множества U в $\mathbf{C}$ $f^{-1}(U) \subset \Sigma_0$ (последнее свойство можно взять за определение Σ_0). Заметим, что в наиболее употребительных пространствах, например, когда $X = \mathbf{R}$ или когда X — компакт, Σ_0 совпадает с Σ.

Измеримая функция, определенная на измеримом пространстве (X, Σ), называется *борелевской функцией*, а на пространстве (X, Σ_0) — *бэровской функцией*. Мера μ в пространстве (X, Σ) называется *борелевской мерой*, а в пространстве (X, Σ_0) — *бэровской мерой*.

В дальнейшем мы будем рассматривать комплексные борелевские меры, представляя их в виде $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, где μ_k — борелевские меры. В случаях, когда не оговорено противное, мы будем называть борелевские меры и комплексные борелевские меры просто мерами и комплексными мерами, соответственно.

Для комплексной борелевской меры μ на X определим ее *полную вариацию* как функцию $|\mu|$ на Σ вида

$$|\mu|(A) = \sup \sum_k |\mu(A_k)|,$$

где sup берется по всем конечным разбиениям множества A в классе Σ.

Комплексная мера называется *конечной* на компакте K, если $|\mu|(K) < \infty$. Конечные на каждом компакте в X борелевские регулярные меры иногда называются *мерами Радона*.

Уточним понятие регулярности, введенное в 4.1(3). Множество $A \subset \Sigma$ (или Σ_0) называется *регулярным относительно борелевской* (или *бэровской*) *меры* μ, если

$$\mu(A) = \sup \mu(K) = \inf \mu(U), \tag{1}$$

где sup берется по всем компактным подмножествам $K \subset A$, а inf — по всем открытым подмножествам, содержащим A. В теории меры часто рассматривают порознь *внутреннюю* или *внешнюю регулярность* в зависимости от того, справедливо ли первое или второе из равенств в (1). Мера μ *регулярна*, если относительно μ регулярны все множества из $\Sigma(\Sigma_0)$. Оказывается, что борелевская мера μ регулярна тогда и только тогда, когда все множества из $\mathcal{K}$ внешне регулярны, т. е. регулярность борелевской меры означает, что она полностью определяется своими значениями на компактах. Что касается бэровской меры (и это еще один довод в пользу ее введения), то она всегда регулярна. Если две регулярные борелевские меры совпадают на произвольных бэровских множествах, то они совпадают на произвольных компактных, и, следовательно, на всех борелевских множествах. Поэтому хотя существует много расширений бэровской меры до борелевской, но есть лишь единственное расширение бэровской меры до регулярной борелевской.

Пусть X — топологическое хаусдорфово пространство, μ — борелевская мера. Расширим μ до полной меры, определенной на σ-алгебре $\overline{\Sigma}\supset\Sigma$, состоящей из множеств вида $A\Delta N$[1], где $A\in\Sigma$, а N — множество, для которого $\mu^*(N)=0$, μ^* — внешняя мера, индуцированная мерой μ. Такое множество называется *нулевым* или *пренебрежимым* относительно меры μ.

При расширении измеримого пространства (X, Σ) до измеримого пространства $(X, \overline{\Sigma})$, соответственно расширяется класс измеримых функций, и *мы всегда будем иметь дело с измеримыми функциями в этом расширенном смысле.*

В приложении удобен следующий критерий измеримости функции. Функция f на $(X, \overline{\Sigma}, \mu)$ измерима тогда и только тогда, когда для любого компактного множества $K\subset\mathcal{K}$ существует его разбиение на μ-нулевое множество и счетное семейство компактных множеств $K_n\subset\mathcal{K}$, $n=1, 2, \ldots$, такое, что сужение функции f на K_n непрерывно. (В классическом варианте этот критерий называется *теоремой Лузина.*)

Этот критерий показывает, что понятие измеримости носит локальный характер. В связи с этим полезно ввести следующее определение.

Множество N называется *локально нулевым* или *локально пренебрежимым относительно* μ, если для каждого компакта K множество $N\cap K$ μ-нулевое. Скажем, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* на X или *локально почти всюду*, если оно выполняется всюду на X за исключением пренебрежимого или локально пренебрежимого множества, соответственно. Если пространство X σ-компактно, то понятия нулевого или локально нулевого множества совпадают.

[1] Δ — *симметрическая разность,* $A\Delta B=AB\setminus BA$.

Всюду в дальнейшем под мерой, если не оговорено противное, мы всегда будем понимать регулярную борелевскую меру (меру Радона).

4.4. Положительные функционалы в пространствах непрерывных функций. Теорема Рисса. Пусть Φ — положительный линейный функционал в пространстве $C_K(X)$, X — локально компактное хаусдорфово пространство, т. е. $\Phi(f) \geqslant 0$ для $f \geqslant 0$, $f \in C_K(X)$.

Тогда существует регулярная борелевская мера μ (мера Радона), такая что

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu,$$

причем мера μ однозначно определяется функционалом Φ.

Обозначим через $C_0(X)$ пространство непрерывных функций на X, *обращающихся в нуль на бесконечности*. Это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $K \subset \mathscr{K}$ такой, что $|f(x)| < \varepsilon$ при $x \notin K$. Тогда $C_0(X)$ — банахово пространство относительно равномерной нормы, причем $C_K(X)$ — плотное подмножество в $C_0(X)$. Предыдущая теорема позволяет получить утверждение, являющееся одним из наиболее фундаментальных в анализе.

Теорема. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство. Пусть Φ — линейный функционал в пространстве $C_0(X)$ такой, что $\Phi(f) \geqslant 0$, когда $f \geqslant 0$. Тогда Φ — ограниченный функционал в $C_0(X)$ и, кроме того, существует единственная регулярная борелевская положительная мера (мера Радона) μ такая, что $\mu(X) < \infty$ и

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu(X) \qquad (1)$$

для всех $f \in C_0(X)$. При этом справедливо соотношение

$$\|\Phi\| = \mu(X).$$

4.5. Пространства $L^p(X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$[1].

(1) Пусть μ — неотрицательная мера в X. Обозначим через $L^1_\mu(X)$ множество измеримых, определенных почти всюду комплексных функций f, для которых конечно выражение

$$\| f \|_1 = \int | f | d\mu. \qquad (1)$$

Такие функции будем называть *суммируемыми по мере* μ. Для того, чтобы из множества L^1_μ получить банахово пространство, нужно, обозначая через $N(X)$ множество функций, равных нулю на X, почти всюду рассмотреть факторпространство $L^1_\mu(X)/N(X)$ ($N(X)$ — замкнутое подпространство в $L^1_\mu(X)$).

[1] Многие перечисленные ниже факты справедливы для пространств с мерой (X, Σ, μ), где X — абстрактное множество.

Для этого пространства мы сохраним обозначение $L^1_\mu(X)$, считая его элементами неэквивалентные классы совпадающих почти всюду суммируемых функций.

(2) Аналогично определяется пространство $L^p_\mu(X)$, $1<p<\infty$, состоящее из измеримых, определенных почти всюду на X функций, для которых конечно выражение

$$\| f \|_p = \left(\int\limits_X | f |^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

$L^p_\mu(X)$ — банахово пространство относительно нормы (2), элементами которого являются неэквивалентные классы функций из $L^p_\mu(X)$.

Множество непрерывных функций с компактным носителем плотно в каждом из пространств $L^p_\mu(X)$, $1 \leqslant p < \infty$, кроме того,

$$\| f \|_p = \sup \left(\left| \int\limits_X f\varphi d\mu \right|, \ \varphi \in C_K(X), \ \| \varphi \|_{p'} \leqslant 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right).$$

(3) Пусть $1<p<\infty$. Если $f \in L^p_\mu$ и $g \in L^{p'}_\mu$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, то $fg \in L^1_\mu$ и

$$\left| \int\limits_X fg d\mu \right| \leqslant \int\limits_X \| fg | d\mu \leqslant \| f \|_p \| g \|_{p'} \tag{3}$$

(неравенство Гёльдера).

Если $f, g \in L^p_\mu$, $1 \leqslant p < \infty$, то

$$\| f+g \|_p \leqslant \| f \|_p + \| g \|_p \tag{4}$$

(неравенство Минковского).

(4) Введем в рассмотрение множество функций $L^\infty_\mu(X)$, определенных локально почти всюду на X, для которых конечно выражение

$$\| f \|_\infty = \operatorname{ess\,sup} (| f(x) | : x \in X) \overset{\text{def}}{=} \inf_N \{ \sup | f(x) |, \ x \in X \setminus N,$$

$$N \text{ — локально нулевое относительно } \mu \text{ множество в } X.\} \tag{5}$$

Функции из $L^\infty_\mu(X)$ называются в *существенном ограниченными*.

Мы отождествим функции из $L^\infty_\mu(X)$, совпадающие локально почти всюду, а пространство $L^\infty_\mu(X)$ не станем отличать от соответствующего факторпространства $L^\infty_\mu(X)/N_1(X)$ ($N_1(X)$ — множество функций, равных нулю локально почти всюду). С этими оговорками $L^\infty_\mu(X)$ становится банаховым пространством с нормой (5).

Заметим, что если f_1, $f_2 \in L^1_\mu(X)$ совпадают почти всюду, а g_1, $g_2 \in L^\infty_\mu(X)$ совпадают локально почти всюду, то функции

$f_1 g_1$ и $f_2 g_2$ принадлежат $L^1_\mu(X)$ и совпадают почти всюду на X, так что произведение fg, $f\in L^1_\mu$, $g\in L^\infty_\mu$ определено корректно.

(5) Пространство, сопряженное банахову пространству $L^1_\mu(X)$, изоморфно пространству $L^\infty_\mu(X)$. Каждый непрерывный линейный функционал Φ в $L^1(X)$ может быть записан в виде

$$\Phi(f) = \langle f, g \rangle = \int f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x), \tag{6}$$

где $f\in L^1_\mu(X)$, а $g\in L^\infty_\mu(X)$, причем норма функционала в точности равна $\|g\|_\infty$ и g определяется функционалом Φ однозначно.

Этот фундаментальный факт является следствием теоремы Радона—Никодима, которую мы формулируем в следующем пункте.

Аналогично, пространство, сопряженное к $L^p_\mu(X)$, изоморфно $L^{p'}_\mu(X)$, $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, а каждый непрерывный линейный функционал в $L^p_\mu(X)$ задается формулой (6), где $f\in L^p_\mu(X)$, $g\in L^{p'}_\mu(X)$ и норма функционала в точности равна $\|g\|_{p'}$.

4.6 Пространство комплексных мер. Теорема Радона—Никодима.

Пусть μ — комплексная мера. *Сужением* меры μ на борелевское множество $A\subset\Sigma$ называется мера μ_A, определенная равенством $\mu_A(E)=\mu(A\cap E)$, где $E\subset\Sigma$. Если $\mu=\mu_A$, то говорят, что μ *сосредоточена* на A. Наименьшее замкнутое подмножество в X, на котором сосредоточена мера μ, называется *носителем меры* μ и обозначается $\operatorname{supp}\mu$.

Пусть μ_1 и μ_2 — комплексные меры на X. Если существует $A\in\Sigma$ такое, что $|\mu_1|(A)=0$ и $|\mu_2|(X\setminus A)=0$, то меры μ_1 и μ_2 называются *взаимно сингулярными*. Это свойство записывается в виде $\mu_1\perp\mu_2$.

Каждая мера единственным образом представляется в виде

$$\mu=\mu_1-\mu_2+i(\mu_3-\mu_4), \tag{1}$$

где все представляющие меры неотрицательны, причем меры в каждой из пар (μ_1, μ_2) и (μ_3, μ_4) взаимно сингулярны.

Пусть μ и ν — комплексные меры в измеримом пространстве (X, Σ). Если $\mu(A)=0$ влечет за собой $\nu(A)=0$, $A\in\Sigma$, то мера ν называется *абсолютно непрерывной относительной меры* μ; записывают $\nu\ll\mu$. Говорят, что меры μ и ν *эквивалентны*, если $\nu\ll\mu$ и $\mu\ll\nu$.

Следующая теорема, одна из основных в теории интегрирования, дает характеристику абсолютно непрерывных мер относительно некоторой меры.

Теорема Радона—Никодима. Пусть (X, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой μ. Пусть ν — комплексная мера, определенная на Σ. Мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ тогда и только тогда, когда существует измеримая функция f такая, что

$$\nu(A)=\int_A f d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f\chi_A d\mu \quad (2)$$

для любого $A\in\Sigma$. Функция f определена однозначно мерой μ.

Если μ, ν — σ-конечные меры на измеримом пространстве (X, Σ) и $\nu\ll\mu$, то функция f, определенная формулой (2), называется *производной Радона—Никодима меры* ν *относительно* μ и обозначается $\frac{d\nu}{d\mu}$. Если $g\in L_\nu^1$, то $gf\in L_\mu^1$ и

$$\int_X g d\nu=\int_X g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu. \quad (3)$$

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство. Обозначим через $M(X)$ класс конечных комплексных мер на X, т. е. таких, что $|\mu|(X)<\infty$. После введения на $M(X)$ нормы

$$\|\mu\|=|\mu|(X)$$

$M(X)$ становится банаховым пространством, сопряженным, в силу теоремы п. 4.4, пространству $C_0(X)$.

Если $\mu\in M(X)$, то все меры в представлении (1) также принадлежат $M(X)$. Если μ, $\nu\in M(X)$ и $\nu\ll\mu$, то, в силу (3), производная Радона—Никодима $\frac{d\nu}{d\mu}$ принадлежит $L_\mu^1(X)$. Если μ, $\nu\in M(X)$ и $\mu\perp\nu$, то $\|\mu+\nu\|=\|\mu\|+\|\nu\|$.

Комплексная мера μ называется *дискретной*, если ее носитель не более, чем счетен, *непрерывной*, если ее носитель не содержит изолированных точек.

Теорема Лебега (о разложении меры). Пусть μ — комплексная мера, а μ_0 — положительная мера. Мера μ единственным образом представляется в виде

$$\mu=\mu_d+\mu_a+\mu_s, \quad (4)$$

где μ_a — абсолютно непрерывная мера относительно μ_0, μ_d — дискретная мера, μ_s — сингулярная (относительно μ_0) непрерывная мера, причем $\mu_d+\mu_s$ сингулярна относительно μ_0. Если $\mu\in M(X)$, то все представляющие меры в (4) также принадлежат $M(X)$.

4.7 Мера на произведении пространств. Теорема Фубини. Пусть (X_1, Σ_1) и (X_2, Σ_2) — два измеримых пространства. Пусть X — декартово произведение $X_1\times X_2$ и пусть Σ — наименьшая σ-алгебра на X, содержащая все множества $A_1\times A_2$, $A_1\in\Sigma_1$, $A_2\in\Sigma_2$. Пусть μ_1 и μ_2 комплексные меры, определенные на (X_1, Σ_1) и (X_2, Σ_2), соответственно.

Определим на декартовом произведении $\Sigma_1\times\Sigma_2$ меру $\mu_1\times\mu_2$ равенством

$$(\mu_1\times\mu_2)(A_1\times A_2)=\mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \quad A_1\in\Sigma_1, \quad A_2\in\Sigma_2, \quad A_1\times A_2\in\Sigma_1\times\Sigma_2.$$

Тогда $\mu_1 \times \mu_2$ однозначно продолжается как регулярная мера на измеримое пространство X (если X_1 и X_2 — локально компактные хаусдорфовы пространства, а μ_1 и μ_2 меры Радона, то $\mu_1 \times \mu_2$ также мера Радона на (X, Σ)). Продолженную меру обозначают $\mu_1 \otimes \mu_2$ и называют *мерой-произведением*.

Теорема Фубини. Если f — измеримая функция на (X, Σ), μ_1, μ_2 — комплексные меры, описанные выше, такие, что

$$\int\limits_{X_1}\int\limits_{X_2} | f(X_1, X_2) | d | \mu_1 | (x_1) d\mu_2(x_2) < \infty ,$$

то справедливы равенства

$$\int\limits_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{X_1} \left(\int\limits_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) =$$

$$= \int\limits_{X_2} \left(\int\limits_{X_1} f(X_1, X_2) d\mu_1(X_1) \right) d\mu_2(X_2).$$

§ 5. Мера Хаара и интеграл Хаара

Из всего арсенала средств, которыми располагает гармонический анализ на группах, самыми необходимыми несомненно являются инвариантные функционалы, интегралы и меры. Тема инвариантного интегрирования, имеющая приложения в широком диапазоне областей, огромна и по существу именно этой теме посвящен ряд выпусков настоящей серии. Нас она будет интересовать в достаточно узком смысле, поскольку позволит рассматривать операторы сдвига и операции свертки на группе и заниматься спектральной теорией этих операторов и операций.

Почти все факты теории инвариантного интегрирования, о которых будет рассказано ниже, остаются справедливыми для функций со значениями в банаховом пространстве (см. [77]), а некоторые сохраняются для отображений со значениями в группе. В последнем случае удается развить теорию полуинвариантного интегрирования, имеющую интересные приложения (см., например, [133]).

5.1. Основные определения. Пусть G — группа, Σ — семейство подмножеств группы G, инвариантное относительно левых сдвигов, т. е. для каждого $a \in G$ и $A \in \Sigma$ множество $aA \in \Sigma$. Рассматриваются отображения $f: G \to E$ и $\mu: \Sigma \to E$, где E — непустое множество.

(1) Для $a \in G$ *левый сдвиг* ${}_af$, *правый сдвиг* f_a и *инверсия* f^Δ отображения f определяются формулами

$$L_af(x) = {}_af(x) = f(ax),\ R_af(x) = f_a(x) = f(xa),\ f^\Delta(x) = f(x^{-1}) \quad (1)$$

соответственно.

(2) Множество M функций на G со значениями в E называется *инвариантным относительно левых сдвигов* или *левоинвариантным множеством,* если M вместе с каждой функцией f содержит и все ее левые сдвиги. Аналогично определяются *правоинвариантное* и *инверсионно инвариантное* множества. Множество называется *инвариантным относительно сдвигов* или *двусторонне инвариантным,* если оно одновременно лево и правоинвариантно.

(3) Отображение $\mu : \Sigma \to E$, Σ — левоинвариантное семейство подмножеств в G, называется *левоинвариантным,* если

$$\mu(aA) = \mu(A) \tag{2}$$

для произвольных $a \in G$, $A \in \Sigma$. Аналогично определяются *правоинвариантное* и *инверсионно инвариантное отображения.*

(4) Пусть M — левоинвариантное множество комплексных функций на G. Функционал I, определенный на M, называется *левоинвариантным,* если

$$I({}_af) = I(f) \tag{3}$$

для всех $a \in G$ и $f \in M$. Аналогично определяются *правоинвариантный, двусторонне* или просто *инвариантный* и *инверсионно инвариантный* функционалы.

Пусть G — локально компактная группа

(5) Определение. Регулярную ненулевую борелевскую меру μ, левоинвариантную на G (и, значит, меру Радона), называют *левой мерой Хаара.* (Определение корректно, поскольку семейство Σ всех борелевских подмножеств в G инвариантно относительно левых и правых сдвигов.)

Пространства $C_K^+(G)$, $C_K(G)$ и $C_0(G)$, непрерывных неотрицательных функций с компактным носителем, непрерывных комплексных функций с компактным носителем и непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности, инвариантны относительно всех сдвигов.

Определение. Левоинвариантный функционал I на $C_K^+(G)$ называется *левым интегралом Хаара,* если

a) $I(f+g) = I(f) + I(g)$ для любых $f, g \in C_K^+(G)$;

b) $I(\alpha f) = \alpha I(f)$ для любых $\alpha \in [0, \infty[$, $f \in C_K^+(G)$;

c) $I(f) \geqslant 0$, если $f \in C_K^+(G)$ и $f \geqslant 0$, и $I(f) > 0$, если $f \in C_K^+(G)$ и $f \neq 0$.

Аналогично определяются *правый интеграл Хаара* и *правая мера Хаара.*

(6) По левому интегралу Хаара I на G можно построить правый I:

$$I(f) = I(f^\Delta), \quad f \in C_K^+(G).$$

Аналогично, по левой мере Хаара μ на G можно построить правую ν с помощью формулы

$$\nu(A)=\mu(A^{-1}),\ A^{-1}=\{x: x^{-1}\in A\in\Sigma\}.$$

Если существует двусторонне инвариантная регулярная борелевская мера на G, то ее называют просто *мерой Хаара* на G. Аналогично, двусторонне инвариантный функционал на $C_K^+(G)$, удовлетворяющий условиям а) — с), называется *интегралом Хаара.*

(7) В силу теоремы Рисса (п. 4.4), формула

$$I(f)=\int_G f\,d\mu,\quad f\in C_K^+(G), \tag{4}$$

каждой левой мере Хаара сопоставляет левый интеграл Хаара и, обратно, каждому левому интегралу Хаара сопоставляет ненулевую регулярную борелевскую меру μ, которая оказывается левой мерой Хаара ($I(\chi_A)=\mu(A)$, $A\in\Sigma$).

5.2. Примеры. (1) Пусть G — конечная группа и $[G]=n$. Мера μ, определенная формулой

$$\mu(A)=\frac{1}{n}[A] \tag{1}$$

для любого подмножества $A\subset G$, является инвариантной мерой Хаара, а функционал

$$I(f)=\frac{1}{n}\sum_{x\in G} f(x) \tag{2}$$

— инвариантным интегралом Хаара.

(2) Пусть G — локально компактная группа. Определим меру μ множества $A\subset G$ как число элементов этого множества, $\mu(A)=[A]$. Ясно, что μ инвариантна относительно сдвигов. Однако мера μ является мерой Хаара тогда и только тогда, когда группа G дискретна (если группа G содержит бесконечное компактное множество, то такая мера μ не является борелевской). Отвечающий этой мере μ интеграл Хаара имеет вид

$$I(f)=\sum_{x\in G} f(x),\quad f\in C_K(G) \tag{3}$$

(функция $f\in C_K(G)$ отлична от нуля лишь на конечном множестве точек). Так что для любого $x\in G$

$$\mu(\{x\})=1. \tag{4}$$

Эта мера Хаара для случая $[G]=n$ в n раз больше меры Хаара, определенной формулой (1).

(3) Мера Лебега на группе $G=\mathbf{R}^n$ является мерой Хаара, интеграл Хаара записывается в виде

$$I(f)=k\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx,\quad f\in C_K(\mathbf{R}^n). \tag{5}$$

Постоянную k в (5) обычно выбирают равной 1 или $\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}$.

(4) Мера Лебега на окружности $|\zeta|=1$ в $\mathbf{C}$ является мерой Хаара на группе $\mathbf{T}$. Интеграл Хаара обычно записывают в виде

$$I(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{6}$$

(5) (фон Нейман) Пусть G — мультипликативная группа матриц вида

$$x=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \alpha>0,\quad \beta\in\mathbf{R},$$

топологизированная как подмножество в $\mathbf{R}^2$. Пусть A — борелевское подмножество в G. Положим

$$\mu(A)=\iint_A \alpha^{-2}d\alpha d\beta,\qquad \nu(A)=\iint_A \alpha^{-1}d\alpha d\beta. \tag{7}$$

Можно проверить, что μ — левая мера Хаара, а ν — правая. Двусторонней меры Хаара здесь не существует и это следует из теоремы единственности меры Хаара, приводимой ниже.

(6) G — компактная группа. В этом случае инвариантное среднее для $C(G)$ (см. § 6) является интегралом Хаара на G; отвечающая ему мера Хаара — нормированная. Существование и единственность (с точностью до постоянного множителя) меры Хаара на G вытекает из существования и единственности инвариантного среднего на $C(G)$. Доказательство теоремы Хаара для этого случая существенно проще, оно является следствием некоторых теорем о неподвижных точках.

5.3. Теорема Хаара. На произвольной локально компактной группе существует левая мера Хаара. Эта мера пропорциональная любой другой левой мере Хаара.

Равносильная формулировка относится к левому интегралу Хаара. Мы уже говорили во введении, что для дальнейшего необходим лишь сам факт существования и теорема единственности. Конструкция меры Хаара по существу не используется. Может быть поэтому до сих пор многие учебники и монографии содержат доказательство существования, основанное на конструкции, которая по существу не менялась в течение полувека (см. [25], [46], [64], [22], [32], [51]. За этот период появились доказательства теоремы Хаара, основанные на других соображениях, иногда очень интересных, и все-таки технически теорема существования до сих пор остается непростой. Что касается теоремы единственности, то она доказывается просто и это доказательство обычно проводят отдельно от доказательства существования. В уже упомянутых доказательствах существования, основанных на теореме Тихонова, используется аксиома выбора. УХ—Р [51] изложено доказательство А. Картана, не использующее аксиомы выбора.

Мы кратко расскажем сейчас о некоторых других путях доказательства этой глубокой теоремы.

(1) Доказательство теоремы Хаара, опирающееся на понятие предела Банаха, было предложено Банахом. Это доказательство приведено в [82].

(2) В [40] приведено доказательство Какутани, основанное на теореме о неподвижной точке, но к сожалению лишь для случая компактной группы (см. также [76], I).

(3) Интересное доказательство, основанное на остроумной и прозрачной идее Глисона, предложил Бредон [157]. Конструкция Бредона одновременно устанавливает существование и единственность, например, правой меры Хаара, так что аксиома выбора не используется.

Расскажем, следуя Бредону, об идее конструкции.

Зафиксируем $g \in C_K^+(G)$, $g \neq 0$. Скажем, что g доминирует над $f \neq 0$, $f \in C_K^+(G)$, и запишем это свойство в виде $g \gtrsim f$, если можно найти такое представление g в виде $g = \sum_{i=1}^{n} g_i$ и такие точки $x_i \in G$, $i = 1, \ldots, n$, что $g_i \in C_K^+(G)$ и

$$\sum_{i=1}^{n} (g_i)_{x_i} \geqslant f. \tag{1}$$

Рассмотрим затем два множества вещественных чисел s

$$E^* = \{s \in \mathbb{R}\colon\ sg \gtrsim f\}, \quad E_* = \{s \in \mathbb{R}\colon\ sg \lesssim f\}. \tag{2}$$

В первое из них входят все достаточно большие числа, а во второе — достаточно малые. Оказывается, что 1) эти множества пересекаются максимум в одной точке и 2) между ними нет лакун, исключая, быть может одну точку. Утверждения 1) и 2) кажутся интуитивно правдоподобными, но их доказательства отнюдь не просты. Кроме того, интуиция здесь может подвести; если apriori известно, что G не обладает двусторонне инвариантной мерой, и если допустить в (1) одновременно левые и правые сдвиги, тогда можно показать, что каждое из множеств E^* и E_* в (2) состоит из всех положительных вещественных чисел. Имеет смысл рассмотреть этот эффект на мультипликативной группе матриц примера (5) п. 5.2.

Как только теоремы 1) и 2) установлены, то сразу получается, что множество $\overline{E^*} \cap \overline{E_*}$ состоит из единственной точки, которая определяет интеграл функции $f \in C_K^+(G)$, зависящий, разумеется, от выбора g, поскольку интеграл от g равен 1. То, что эта процедура в действительности определяет интеграл, единственный с точностью до постоянного множителя, легко затем проверяется.

Заметим, что доказательство использует полуфольклорную «marriage problem», но это совсем не центральное место в конструкции, в отличие от компактного случая, с которым мы еще встретимся.

(4) Примеры п. 5.2. показывают, что на группе $\mathbf{R}^n$ интеграл Хаара есть интеграл Лебега, на дискретной группе интеграл Хаара получается суммированием, а на компактной группе, как вскоре будет ясно, интеграл Хаара получается как инвариантное среднее. Хотя общая структурная теорема для локально компактных групп отсутствует, можно показать, что ничего существенно нового по сравнению с перечисленными конструкциями получить нельзя. Это сделал Дэвис [160], доказав следующую теорему.

Теорема. Для заданной локально компактной группы G существуют компактная подгруппа K, подпространство E, гомеоморфное $\mathbf{R}^n$ и дискретное подмножество D такие, что отображение

$$\theta : D\times E\times K\to G,\ \theta(a, b, c)=abc,\ a\in D,\ b\in E \text{ и } c\in K,$$

является гомеоморфизмом, переводящим произведение стандартно определяемых мер Хаара на D, E и K в левую меру Хаара μ_G на G. (Здесь E не обязательно должно быть подгруппой.)

Эта теорема сначала доказывается для локально компактной группы G, имеющей нормальную компактную подгруппу N такую, что G/N — связная группа Ли, а затем для произвольной G, используя открытый Ямабе факт, что любая локально компактная группа содержит открытую подгруппу, обладающую этим свойством.

5.4. Модулярная функция. Обозначим через μ левую меру Хаара на G. Пусть $\mu(f)$ отвечающий этой мере, в силу формулы (5.1.4), левый интеграл Хаара. Другой левый интеграл Хаара $\nu(f)=\mu(f_{x^{-1}})$, где $f\in C_K^+(G)$, пропорционален $\mu(f)$, так что

$$\mu(f_{x^{-1}})=\Delta(x)\mu(f). \tag{1}$$

Равенством (1) на группе G определена положительная функция Δ, которая называется *модулярной функцией* или *модулем группы* G.

Из представления (1) и из непрерывности $\mu(f_{x^{-1}})$ по x следует, что Δ — непрерывная функция на группе G, а цепочка равенств, где $f\in C_K(G)$ выбрана так, что $\mu(f)\neq 0$,

$$\Delta(yx)=\frac{\mu(f_{(yx)^{-1}})}{\mu(f)}=\frac{\mu((f_{x^{-1}})_{y^{-1}})}{\mu(f)}=\frac{\Delta(y)\mu(f_{x^{-1}})}{\mu(f)}=\Delta(y)\Delta(x) \tag{2}$$

показывает, что Δ — это гомоморфизм группы G в мультипликативную группу $\mathbf{R}^*$ положительных вещественных чисел.

Ясно, что левая мера Хаара является одновременно и правой тогда и только тогда, когда $\Delta(x)\equiv 1$. Группу G, обладающую таким свойством, называют *унимодулярной*.

Из формулы

$$\int_G f(x^{-1})\,\Delta(x^{-1})\,d\mu(x) = \int_G f(x)\,d\mu(x), \qquad (3)$$

где μ — левая мера Хаара, а $f \in C_K(G)$, немедленно вытекает, что группа G унимодулярна тогда и только тогда, когда мера μ инверсионно инвариантна.

Можно отметить другие критерии унимодулярности. a) Если в группе G существует компактная окрестность[1] V элемента 1, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов, то G унимодулярна ($\mu(V) = \mu(x^{-1}Vx) = \Delta(x)\mu(V)$). b) Подгруппа и факторгруппа унимодулярной группы не всегда унимодулярны, однако нормальная подгруппа унимодулярной группы унимодулярна.

Замечание 1. Группа G примера (5) п. 5.2 дает простейший пример нетривиальной модулярной функции, равной $\Delta(x) = \frac{1}{\alpha}$. В общем случае множество элементов $x \in G$, для которых $\Delta(x) = 1$, образует замкнутую нормальную подгруппу G_1 группы G. В примере (5) п. 5.2 группа G_1 состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и представляет собой открытую подгруппу группы G, изоморфную $\mathbf{R}$.

Замечание 2. Хотя семейства пренебрежимых, локально пренебрежимых и измеримых множеств для левой и правой мер Хаара совпадают, однако в любой немодулярной группе существуют открытые множества, интегрируемые относительно левой меры Хаара μ, но неинтегрируемые относительно правой меры Хаара ν. Продемонстрируем это на примере группы примера (5) п. 5.2. Пусть

$$U = \{x \in G : \alpha > 1,\ |\beta| < 1\}.$$

Тогда $U^{-1} = \{x \in G : 0 < \alpha < 1,\ |\beta| < \alpha\}$ и, пользуясь формулами (5.2.7), находим, что

$$\mu(U) = 2\int_1^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} = 2, \quad \mu(U^{-1}) = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^2}\int_{-\alpha}^{\alpha} d\beta = \infty,$$

так что $\mu(U) < \infty$, $\nu(U) = \infty$.

5.5. Случаи дискретной или компактной групп. Сказанное в п. 5.2 о мере Хаара дискретной группы можно выразить следующим утверждением. Для дискретности локально компактной группы G необходимо и достаточно, чтобы для левой меры Хаара μ на G выполнялось неравенство $\mu(\{1\}) > 0$. Таким образом, дискретная группа унимодулярна. Меру Хаара на G, нормированную условием $\mu(\{1\}) = 1$, называют нормированной мерой Хаара на группе G.

[1] Окрестность с компактным замыканием.

Легко показать, что условие конечности левой меры Хаара μ на локально компактной группе G, т. е. условие $\mu \in M(G)$, необходимо и достаточно для ее компактности. (Пусть G не компактна, V — какая-нибудь окрестность 1 с компактным замыканием. Существует бесконечная последовательность точек $\{x_n\}_1^\infty \in G$ такая, что $x_n \notin \bigcup\limits_k^{n-1} x_k V$. Если $U \subset V$ — симметричная окрестность 1, то открытые множества $x_n U$ попарно не пересекаются. Поскольку все они имеют одинаковую меру, то $\mu(G) = \infty$.)

Для компактной группы G множество значений функции $\Delta(x)$, $x \in G$, представляет собой компактную подгруппу в $\mathbf{R}^*$. Так как $\{1\}$ единственная такая подгруппа, то $\Delta \equiv 1$ и группа G унимодулярна.

5.6. Модуль автоморфизма. Пусть G — локально компактная группа с левой мерой Хаара μ. Обозначим через $\mathrm{Aut}G$ ее группу автоморфизмов. Каждый автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}G$ переводит измеримое множество A в измеримое. Полагая $\mu_\varphi(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$, мы определяем левоинвариантную борелевскую меру μ_φ, которая пропорциональна, согласно теореме единственности, исходной мере μ. Заметим, что коэффициент пропорциональности не зависит от меры μ (в силу теоремы единственности) и что, отправляясь от правой меры Хаара, мы пришли бы к тому же множителю, который получил название *модуля автоморфизма.*

Таким образом, справедлива формула

$$\mu(\varphi^{-1}A) = \mathrm{mod}_G\varphi \cdot \mu(A) \quad (A \text{ — измеримо}) \tag{1}$$

и если $f \in C_K(G)$, $\int f d\mu \neq 0$ и $\varphi \in \mathrm{Aut}G$, то

$$\int\limits_G f(\varphi^{-1}x)\, d\mu(x) = \mathrm{mod}_G\varphi \int\limits_G f(x)\, d\mu(x). \tag{2}$$

Вторую формулу можно было бы принять за определение модуля автоморфизма.

В частном случае, когда φ — внутренний автоморфизм, так что $\varphi: x \to a^{-1}xa$, $a \in G$, модуль автоморфизма совпадает с модулярной функцией, $\mathrm{mod}_G\varphi = \Delta_G(a)$.

Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Aut}\, G$, то

$$\mathrm{mod}_G(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \mathrm{mod}_G\varphi_1 \cdot \mathrm{mod}_G\varphi_2.$$

5.7. Модуль на локально компактном поле и строение ЛК полей. Модуль автоморфизма особенно важен в структурной теории локально компактных (непрерывных) полей. Прежде, чем это пояснить, обратим внимание на формулу, связывающую модуль автоморфизма на подгруппе и факторгруппе.

Пусть G — локально компактная группа, H — нормальная подгруппа в G и G_1 — факторгруппа G/H. Автоморфизм φ группы G индуцирует автоморфизмы φ_H и φ_G групп H и G_1, соответственно. Тогда справедлива формула (см., например, [91])

$$\mathrm{mod}_G \varphi = \mathrm{mod}_H \varphi_H \cdot \mathrm{mod}_{G_1} \varphi_{G_1}, \qquad (1)$$

которая легко следует из формулы Вейля, определяющей меру Хаара на факторгруппе. О формуле Вейля мы позже расскажем.

Пусть теперь K — произвольное локально компактное поле и $a \in K^*$. Тогда отображение $x \to ax$ есть автоморфизм поля K и можно определить его *модуль* mod_K, как функцию на K^*, которую можно распространить на все поле K, полагая

$$|a| = \begin{cases} \mathrm{mod}_K a, & a \in K^*, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

(Заметим, что если $K = \mathbf{R}$, то $|a|$ есть абсолютная величина числа a, если же $K = \mathbf{C}$, то $|a|$ — квадрат абсолютной величины.)

Вместо $|a|$ мы будем по-прежнему записывать $\mathrm{mod}_K a$.

Перечислим простейшие свойства функции $\mathrm{mod}_K a$:

1) Функция mod_K непрерывна на K (отсюда, в частности, следует, что поле K не может быть компактным. Если K — компакт, $\mathrm{mod}_K = \begin{cases} 1, & a \in K^*, \\ 0, & a = 0 \end{cases}$)

2) $\mathrm{mod}_K a > 0$ для $a \in K^*$ и $\mathrm{mod}_K 0 = 0$.

3) $\mathrm{mod}_K ab = \mathrm{mod}_K a \cdot \mathrm{mod}_K b$.

4) Множества $B_m = \{x \in K : \mathrm{mod}_K x \leqslant m\}$ компактны и их совокупность определяет топологию в K. Таким образом, модуль mod_K действительно имеет отношение к «расстоянию» в поле.

Известно, что расширение поля K можно рассматривать как векторное пространство V над K. Для $a \in K^*$ отображение $v \to av$ есть автоморфизм V, и если V локально компактно, то можно определить модуль этого автоморфизма $\mathrm{mod}_V a$.

Оказывается, что если $\dim V = n$, то

$$\mathrm{mod}_V a = (\mathrm{mod}_K a)^n. \qquad (2)$$

С другой стороны, любое локально компактное векторное пространство V над K непременно имеет конечную размерность d и равенство (2) выполняется для $n = d$. (Для доказательства достаточно выбрать $a \in K$ такое, что $0 < \mathrm{mod}_K a < 1$ и применить формулу (1) к подпространству L конечной размерности d' над K.)

Функция mod_K индуцирует открытый гомоморфизм группы K^* на замкнутую подгруппу Γ группы $\mathbf{R}^*$. Положим

$$A = \sup(\mathrm{mod}_K(1+x),\ x \in K,\ \mathrm{mod}_K x \leqslant 1).$$

Тогда справедливо неравенство, $x, y \in K$,

$$\mathrm{mod}_K(x+y) \leqslant A \sup(\mathrm{mod}_K x,\ \mathrm{mod}_K y). \qquad (3)$$

Неравенство (3) точное. Если $A=1$, то образ множества $1+B_{m/m=1}$ содержится в интервале $[0, 1]$. С другой стороны, этот образ содержит окрестность 1 и, значит, Γ — дискретная подгруппа в $\mathbf{R}^*$.

Определение. Неравенство (3) при $A=1$ называется *ультраметрическим*. Если оно выполняется, то говорят, что отображение mod_K и само поле K *ультраметричны*.

Таким образом, в случае связного поля $\Gamma=\mathbf{R}^*$ и mod_K принимает все положительные значения; в случае несвязного поля $\mathrm{mod}_K x (x\neq 0)$ пробегает дискретное множество значений q^n, где q — фиксированное число, а $n\in\mathbf{Z}$.

Теперь уже ясно, что если поле ультраметрическое, то mod_K является неархимедовой нормой (см. 3.4.3).

Для получения более точной информации о mod_K, которая оправдывает «претензии» этой функции на роль нормы в K, рассмотрим функцию $\varphi(m)=\mathrm{mod}_K(m\cdot 1_K)$, где 1_K — единица поля K. Можно показать, что либо $\varphi(m)\leqslant 1$ и тогда поле ультраметрично, либо $\varphi(m)=m^\lambda$, где $\lambda>0$.

Справедлива следующая теорема. (См. [91, гл. I].)

Теорема 1. Пусть K — недискретное локально компактное поле, а функция $\varphi(m)$ определена, как сказано выше. Тогда если $\mathrm{caract}\, K=p$, то $\varphi(m)=0$ при $m\equiv 0 \pmod p$ и $\varphi(m)=1$ при $(m, p)=1$. Если же $\mathrm{caract}\, K=0$, то K есть расширение поля $\mathbf{Q}_v$ конечной размерности l и $\varphi(m)=|m|_v^l$, если $x\in\mathbf{Q}_v$, то $\mathrm{mod}_K(x)=|x|_v^l$. (Определение $\mathbf{Q}_v$ см. в п. 3.4.) Эта теорема позволяет догадаться, как устроены локально компактные недискретные абелевы поля, и, разумеется, открывает дорогу к полной характеризации таких полей. Более подробную информацию можно найти в [25] или [91].

Сказанное о локально компактных недискретных полях, которые в дальнейшем будут называться *локальными полями*, мы завершим формулировкой теоремы Понтрягина—Ковальского, дающей полное их описание.

Теорема 2. Каждое локальное коммутативное поле характеристики нуль изоморфно либо $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$, этими полями исчерпываются все связные поля, либо конечному алгебраическому расширению поля $\mathbf{Q}_p$ для некоторого p. Каждое локальное коммутативное поле характеристики p изоморфно полю формальных степенных рядов с коэффициентами из некоторого конечного поля.

Расскажем как определяют меру Хаара на произведении локально компактных групп, на проективном пределе проективной системы групп, на подгруппах и факторгруппах.

5.8. Мера Хаара произведения. Пусть $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство локально компактных групп, причем все группы семейства, за исключением, быть может, конечного их числа, компактны. Тогда прямое произведение $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ — локально компактная группа, и если μ_α — левая мера Хаара на группе G_α, нормированная в том случае, когда G — компактна, то мера $\mu = \otimes \mu_\alpha$ есть левая мера Хаара на G.

Пример 1. Этот пример общего характера полезен для непосредственного построения меры Хаара на группах, которые как топологические пространства являются открытыми подмножествами в $\mathbf{R}^n$.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ и T — гомеоморфизм Ω: $Tx = (t_j(x))_{j=1}^n$, $x \in \Omega$.

Пусть, далее, функции $t_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы в Ω. Тогда если на Ω существует неотрицательная функция ρ, интегрируемая относительно меры Лебега на каждом компакте в Ω и удовлетворяющая равенству

$$\left| \det \left(\frac{\partial t_i}{\partial x_j} \right) \right| = \rho(x) \rho^{-1}(Tx) \tag{1}$$

для почти всех x по мере Лебега, то мера μ, заданная равенством

$$\mu(E) = \int_E \rho(x)\, dx, \tag{2}$$

где E — измеримое множество, инвариантна относительно T.

Пусть $\varphi \in C_\Omega^+$. Тогда, заменяя $Tx = y$ и учитывая (1) и (2), получим

$$\int \varphi(Tx)\, d\mu(x) = \int \varphi(y) \rho(y)\, dy = \int \varphi\, d\mu,$$

следовательно, $\mu = \mu T^{-1}$. ◀

Пример 2. Вернемся еще раз к примеру (5) п. 5.2 и отождествим группу G этого примера с $\Omega \subset \mathbf{R}^2$.

Отображения $(\alpha, \beta) \to (\alpha r, s\alpha + \beta)$, $(\alpha, \beta) \to (r\alpha, r\beta + s)$, где $(r, s) \in \Omega$ с якобианами r и r^2, соответственно, отвечают правому и левому сдвигам на элемент (r, s). Применяя результат предыдущего примера и замечая, что $\rho_r(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha}$ и $\rho_l(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha^2}$[1], находим, что левая и правая меры Хаара действительно определяются формулами (2.5.7).

5.9. Мера Хаара проективного предела и мера Хаара на вполне несвязных группах. Поскольку во всех интересующих нас случаях проективный предел является замкнутой подгруппой слабого прямого произведения, то меру Хаара на нем можно рассматривать, как сужение меры Хаара этого произведения. Рассмотрим несколько примеров.

---

[1] Индексы $(\ )_r$ и $(\ )_l$ означают действия правого и левого сдвигов, соответственно.

(1) Для $G=\mathbf{Q}_p$ существует единственная мера Хаара μ, нормированная условием $\mu(\mathbf{Z}_p)=1$. Тогда мера любой подгруппы вида $p^n\mathbf{Z}_p$ равна $\mu(p^n\mathbf{Z}_p)=p^{-n}$, $n\in\mathbf{Z}$. Это согласуется с тем, что $\mathbf{Z}_p/p^n\mathbf{Z}_p=\mathbf{Z}(p^n)$, а мера Хаара каждого элемента в $\mathbf{Z}(p^n)$ равна $\frac{1}{p^n}$.

Аналогично определяется мера Хаара на $\mathbf{Q}_a$.

(2) Интересна следующая ситуация, показывающая, как можно интерпретировать меру Хаара на вполне несвязных группах, гомеоморфных как топологические пространства счетному произведению конечных множеств (см. [77]).

Пусть $G=\prod\limits_n G_n$ и G_n — абелева группа порядка k_n. Тогда группа G допускает топологическое вложение в интервал $[0, 1]$ *как канторово множество C лебеговой меры нуль*; мера Хаара группы G может быть представлена как функция Кантора, ассоциированная с C.

Пусть $x=(x_n)$, $x_n\in\{0, 1, \ldots, k_n-1\}$. Положим $p_n=\prod\limits_{1<j<n}(2k_j-1)$ и обозначим

$$x'=\sum_{n>1}\frac{2x_n}{p_n}. \tag{1}$$

Образуем множество $C=\{x'\in[0,1]$, представимых в виде $(1)\}$. Легко проверить, что отображение $x\to x'$ есть топологическая биекция G в C, а C — *множество типа Кантора* на $[0, 1]$ лебеговой меры нуль.

Положим $Q_n=\prod\limits_{j=1}^{n}k_j$, $n\geqslant 1$, и определим функцию $F_C(x')$ на C формулой

$$F_C(x')=\sum_{n>1}\frac{x_n}{Q_n},\ x' \text{ имеет вид } (1).$$

Тогда $F_C(x')$ — мера Хаара открытого подмножества в G, являющегося прообразом множества $C\cap[0, x']$.

Функция $F_C(x')$ есть сужение на C положительной непрерывной функции на интервале $[0, 1]$, возрастающей от нуля до единицы и постоянной на каждом интервале смежности к C. Она называется *функцией Кантора, ассоциированной* с C.

В случае, когда $G=\mathbf{D}(2)$ (группе Кантора), множество C оказывается классическим множеством Кантора, а функция $F_C(x')$ — ассоциированной функцией Кантора.

(3) Пусть G — вполне несвязная абелева группа, топология в которой задается цепочкой вложенных открытых подгрупп (см. [170] или [1])

$$\ldots\supset U_{-n}\supset\ldots\supset U_{-1}\supset U_0\supset U_1\supset\ldots\supset U_n\supset\ldots$$

таких, что $\cap U_n=\{0\}$, $\bigcup\limits_{-\infty}^{\infty} U_n=G$ и $U_n/U_{n+1}=\mathbf{Z}(p_n)$, p_n — простое число. Согласно сказанному в п. 3.7, группа G изоморфна $\mathbf{Q}_{\mathbf{a}}$, где $\mathbf{Q}$ определяется формулой (3.7.6). В частности, когда $p_k=p$, мы приходим к группе $\mathbf{Q}_p$.

Такую группу G можно отобразить на луч $[0, \infty]$, если каждому $x=(x_n)$, имеющему вид (3.7.5), поставить в соответствие $x' \in [0, \infty]$

$$x'=\sum_{m}^{\infty} \frac{x_k}{a_k}, \quad m>-\infty. \tag{2}$$

При отображении $x \to x'$ каждая подгруппа U_n, $n \geqslant 0$, переходит в отрезок $\left[0, \frac{1}{p_1 \ldots p_{n+1}}\right]$, а каждый класс смежности по подгруппе U_n в один из интервалов $\left[\frac{k}{p_1 \ldots p_{n+1}}, \frac{k+1}{p_1 \ldots p_{n+1}}\right]$, $k=0, 1, \ldots, p_1 \ldots p_{n+1}-1$. Подгруппам U_n, $n<0$, отвечают отрезки, расположенные правее 1 и устроенные аналогично. Общие концы таких отрезков отвечают двум различным элементам групы G. Они называются $\mathbf{a}$-ично рациональными числами. Если «модифицировать» $[0, \infty]$, заменив каждое $\mathbf{a}$-ично рациональное число r двумя числами $r-0$ и $r+0$, и ввести на $\mathbf{R}^+$ соответствующую модифицированную топологию, индуцированную обычной топологией на $\mathbf{R}^+$, где в качестве базы топологии выбираются отрезки $]r'+0, r''-0[$, r' и r'' — $\mathbf{a}$-ично рациональные числа, то окажется, что относительно этой топологии числа модифицированной полуоси, допускающие представление (2), образуют ЛКА группу, изоморфную группе G.

После установления такого изоморфизма можно немедленно дать описание меры Хаара на G, которая, таким образом, индуцируется лебеговой мерой на луче. А именно, если μ — мера Хаара на G и $\mu(U_0)=1$, то при $n \geqslant 0$

$$\mu(U_n)=\frac{1}{p_1 \ldots p_{n+1}}.$$

После этого мера μ легко переносится на все борелевские множества.

В частности, если $G=\mathbf{Q}_p$, то отображение на луч задается формулой

$$x=\sum_{k=m}^{\infty} x_k p^k \to x'=\sum_{k=m}^{\infty} \frac{x_k}{p^{k+1}}, \quad m=m(x) \in \mathbf{Z},$$

и для нормированной меры Хаара на $\mathbf{Q}_p$ получается формула $\mu(p^n \mathbf{Z}_p)=p^{-n}$, согласованная с приведенной в (1).

5.10. Квазиинвариантные меры. Относительно инвариантные меры. В связи с необходимостью рассматривать меру на однородных пространствах и в связи с приложениями в теории представлений и в эргодической теории полезно ввести понятия квазиинвариантной меры и относительно инвариантной меры.

(1) Пусть G — локально компактная группа. Мера μ называется *квазиинвариантной относительно* G, если локально пренебрежимые множества для μ и ${}_a\mu$ одни и те же для каждого $a \in G$, другими словами, когда μ и ${}_a\mu$ эквивалентны.

Легко показать, что μ квазиинвариантна относительно G тогда и только тогда, когда она эквивалентна левой мере Хаара, и, следовательно, (см. замечание 2 п. 5.4.) понятия левой и правой квазиинвариантности совпадают.

Мы говорили во введении о теореме А. Вейля, согласно которой существование на произвольной группе G левоинвариантной меры, определенной на левоинвариантном σ-кольце Σ, обеспечивает группу G топологией, относительно которой G становится локально компактной группой.

Доказательство этой теоремы приведено, например, в [46]. Таким образом, топологические понятия в группе могут быть определены в терминах теории меры.

Макки [187] существенно улучшил этот результат А. Вейля, показав, что наличие на произвольной группе G как измеримом пространстве (G, Σ) квазиинвариантной меры μ приводит к локально компактной топологии на группе G и, следовательно, к левой мере Хаара, эквивалентной мере μ (теорема Макки).

Пусть (G, Σ, μ) — группа G с квазиинвариантной мерой μ на Σ такая, что при отображении $(x, y) \to xy^{-1}$ из $(G \times G, \Sigma \times \Sigma)$ в (G, Σ) прообраз измеримого множества измерим. Для $f \in L_\mu^2(G)$ определяется оператор L_x следующего вида

$$(L_x f)(y) = \sqrt{\frac{d\mu}{d\mu^x}(x^{-1}y)}\, f(x^{-1}y), \tag{1}$$

где $\frac{d\mu}{d\mu^x}$ — производная Радона—Никодима, $\mu^x(A) = \mu(xA)$.

Обозначим через $\mathfrak{U}$ унитарную группу на $L_\mu^2(G)$, состоящую из всех унитарных операторов на $L_\mu^2(G)$ и наделенную самой слабой топологией, относительно которой непрерывны отображения $T \to (Tf, g)$ для каждой пары $f, g \in L_\mu^2$, $T \in \mathfrak{U}$.

Нетрудно показать, что формулой (1) задается представление группы G в топологическую группу $\mathfrak{U}$, что прообраз борелевского множества при отображении $x \to L_x$ принадлежит Σ и что отображение $x \to L_x$ взаимно однозначно.

Если теперь доказать следующее вспомогательное утверждение технического характера (если $A \in \Sigma$ и $\mu(A) > 0$, то множество $\{x : \int |L_x \chi_A - \chi_A|^2 d\mu < \mu(A)\}$ принадлежит AA^{-1}), то из него получится, что $G_1=\{L_x : x\in G\}$ есть локально компактная подгруппа унитарной группы $\mathfrak{U}$, и дальнейшее можно считать ясным.

(2) Пусть G — локально компактная группа, V — открытое подмножество в G, μ — ненулевая положительная мера такая, что для любой $f\in CK(G)$, $\operatorname{supp} f\subset V$ справедливо равенство

$$\int_V {}_af(x)\,d\mu=\int_V f(x)\,d\mu,\quad a\in V,\ \operatorname{supp}{}_af\subset V.$$

Такую меру μ называют *локально левоинвариантной.* Если μ — локально левоинвариантна, то существует единственная левая мера Хаара на G, сужение которой на V совпадает с μ.

(3) Мера μ на локально компактной группе G называется *относительно левоинвариантной,* если существует функция $\chi: G\to\mathbf{C}$ такая, что ${}_a\mu(A)=\mu(aA)=\chi(a)\mu(A)$ для каждого борелевского подмножества A и каждого элемента $a\in A$. Аналогично определяется относительно правоинвариантная мера. Множитель $\chi(a)$ называется *мультипликатором меры* μ на G. Относительно правоинвариантная мера является относительно левоинвариантной и допускает следующее описание. Ненулевая мера μ на G относительно инвариантна на G тогда и только тогда, когда $\mu=\alpha\chi\cdot\mu$, где μ — левая мера Хаара на G, $\alpha\in\mathbf{C}^*$, а χ — непрерывное представление группы G в $\mathbf{C}^*$.

5.11. Мера Хаара на подгруппах и факторгруппах. Формула Вейля и ее непосредственные следствия. (1) Пусть H — замкнутая подгруппа группы G и пусть π_H — каноническое отображение (см. п. 2.6) $G\to G/H$. Пусть $f\in CK(G)$.

Рассмотрим функцию

$$x\to\int_H f(x\xi)\,d\mu_H(\xi)\overset{\text{def}}{=}\dot f(x). \tag{1}$$

Эта функция постоянна на каждом левом классе смежности подгруппы H. Если ввести в рассмотрение переменную $\dot x=xH\in G/H$ и отображение $T_H:(T_Hf)(\dot x)=\dot f(x)$, то можно показать, что линейный оператор T_H действует из $C_K(G)$ в $C_K(G/H)$.

Если H — замкнутая нормальная подгруппа ЛК группы G, то можно так нормировать левые меры Хаара μ_G, μ_H и $\mu_{G/H}$ (G/H — локально компактная группа), чтобы для любой $f\in C_K(G)$ выполнялось равенство

$$\int_{G/H}\left(\int_H f(x\xi)\,d\mu_H(\xi)\right)d\mu_{G/H}(\dot x)=\int_G f(x)\,d\mu(x). \tag{2}$$

Формула (2) называется *формулой Вейля.* Ее важность в теории интегрирования на локально компактных группах самоочевидна. Доказать эту формулу можно, например, так.

Пользуясь (1), интеграл в левой части (2) можно записать в виде

$$\Phi f = \int_{G/H} (T_H f)(\dot{x})\, d\mu_{G/H}(\dot{x})$$

и затем проверить, что положительный линейный функционал Φ левоинвариантный и, значит, является левоинвариантным интегралом.

(2) Из формулы Вейля нетрудно вывести, что если $f \in C_K(G)$, то $(T_H f \in C_K(G/H))$,

$$\| T_H f \|_1 \leqslant \| f \|_1,$$

кроме того, T_H сюръективно отображает $C_K(G)$ на $C_K(G/H)$ и если $\dot{f} \in C_K(G/H)$, то

$$\| \dot{f} \|_1 = \inf (\| f \|_1 : f \in C_K(G),\ T_H f = \dot{f}).$$

Обозначая через $J^1(G, H)$ замыкание ядра отображения T_H в $L^1(G)$, можно утверждать, что $L^1(G/H)$ изоморфно фактор-пространству $L^1(G)/J^1(G, H)$, а отображение T_H распространяется как сюръекция $L^1(G)$ на $L^1(G/H)$.

Сказанное позволяет продолжить оператор T_H по непрерывности на все пространство $L^1(G)$ и распространить формулу Вейля на суммируемые функции.

Позже мы более подробно рассмотрим варианты формулы Вейля в связи с формулой суммирования Пуассона.

(3) Следующий результат можно рассматривать как некоторый аналог формулы Вейля.

Теорема (Рейтер [77]). Пусть G — локально компактная, σ — компактная группа и H — замкнутая подгруппа группы G. Пусть $g \in L^\infty(G)$. Тогда справедлива формула

$$\operatorname*{esssup}_{\dot{x} \in G/H} (\operatorname*{esssup}_{\xi \in H} g(x\xi)) = \operatorname*{esssup}_{x \in G} g(x). \tag{3}$$

(4) Пусть H — замкнутая нормальная подгруппа ЛК группы G. Тогда модулярная функция Δ_H локально компактной группы H есть сужение на H модулярной функции Δ_G. Этот факт является простым следствием формулы Вейля. В частности, сужение Δ_G на компактную подгруппу равно 1 (ср. с п. 5.5).

(5) Вскоре мы увидим, что пространство $L^1(G)$ для ЛК группы G представляет собой банахову алгебру относительно операции свертки.

Пусть H — замкнутая нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение T_H есть гомоморфизм банаховой алгебры $L^1(G)$ на банахову алгебру $L^1(G/H)$. При этом ядро этого гомоморфизма — подпространство $J^1(G, H)$ есть замкнутый двусторонний идеал алгебры $L^1(G)$.

Поскольку T_H — сюръективный гомоморфизм, то он переводит идеал алгебры $L^1(G)$ в идеал алгебры $L^1(G/H)$. Неизвестно, будет ли образом замкнутого идеала замкнутый идеал?

Рейтер дает интересную характеристику ядра отображения T_H. $J^1(G, H)$ есть в точности замкнутое линейное подпространство в $L^1(G)$, порожденное семейством функций $L_y f - f$, где $f \in C_K(G)$, $y \in H$.

Покажем, как эта характеристика ядра отображения T_H может работать

Теорема (Рейтер [77]). Пусть H — замкнутая нормальная подгруппа ЛК группы G. Пусть $\varphi \in L^\infty(G)$ и $\varphi(\xi x) = \varphi(x)$ локально почти всюду на G для каждого $\xi \in H$. Тогда $\varphi = \varphi' \circ \pi_H$ локально почти всюду, причем $\varphi' \in L^\infty(G/H)$.

Доказательство. Имеем $\langle L_y f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ для любого $y \in H$ и любой $f \in L^1(G)$. Поэтому $\langle L_y f - f, \varphi \rangle = 0$ и, значит, $\varphi \perp J^1(G, H)$.

В силу сказанного в (2), φ порождает линейный функционал φ' в $L^1(G/H)$ и справедливо равенство

$$\int_G f(x) \overline{\varphi(x)}\, d\mu_G(x) = \int_{G/H} (T_H f)(\dot{x}) \overline{\varphi'(\dot{x})}\, d\mu_{G/H}(\dot{x}),$$

где $\varphi' \in L^\infty(G/H)$. Поскольку $\varphi' \in L^\infty(G/H)$, то $\varphi' \circ \pi_H \in L^\infty(G)$ и $f \cdot \overline{\varphi' \circ \pi_H} \in L^1(G)$.

Применяя расширенную формулу Вейля к функции $f \overline{\varphi' \circ \pi_H}$, получим

$$\int_G f(x) \overline{\varphi(x)}\, d\mu_G(x) = \int f(x) \overline{(\varphi' \circ \pi_H)(x)}\, d\mu_G(x),$$

после чего остается воспользоваться произвольным выбором функции $f \in L^1(G)$. ◀

Мы рассказали в этом параграфе о мере Хаара, т. е. о борелевской мере, определенной на σ-алгебре борелевских подмножеств в G.

Возникает вопрос о расширении меры Хаара с сохранением инвариантности.

5.12. Расширение инвариантных мер. Нетрудно показать, что любая недискретная локально компактная группа G содержит подмножество A, неизмеримое относительно каждой инвариантной относительно левых сдвигов на G меры μ_1, являющейся расширением левой меры Хаара μ. Поэтому не существует левоинвариантного расширения левой меры Хаара μ на G, определенной на семействе всех подмножеств в G.

И все же левую меру Хаара можно продолжить на гораздо большее пространство с мерой. Для описания такого расширения понадобится несколько определений.

Пусть (X, Σ, μ) — некоторое пространство с мерой. Рассмотрим некоторое подсемейство $S \subset \Sigma$, обладающее тем свойством, что для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $A \in \Sigma$ найдется множество $B \in S$

такое, что $\mu(A\Delta B)<\varepsilon$. (Определение Δ (см. на стр. 180, сноска.)

Такое подсемейство S в Σ называется *базисом для пространства с мерой* (X, Σ, μ), а наименьшая возможная мощность базиса в (X, Σ, μ) называется *характером пространства* с мерой (X, Σ, μ).

Пусть G — бесконечная компактная метрическая группа, μ — мера Хаара на G, определенная на классе Σ борелевских подмножеств группы G. Тогда характер пространства с мерой (G, Σ, μ) равен $\aleph$. (Такая группа G сепарабельна и, очевидно, что (G, Σ, μ) не может иметь конечный характер.)

Справедлива следующая

Теорема (Какутани и Окстоби). Существует такое расширение (G, Σ_1, μ_1) пространства с мерой (G, Σ, μ), μ — мера Хаара на G, что характер (G, Σ_1, μ_1) равен $2^{\mathfrak{c}}$, где $\mathfrak{c}$ — мощность континуума, а μ_1 — лево, право и инверсионно инвариантная мера.

Далеко не простое доказательство этой замечательной теоремы изложено у Х—Р [52].

5.13 Свертка на локально компактных группах. 1). Пусть G — локально компактная группа, $C_K(G)$ — пространство непрерывных на G функций с компактным носителем. Для пары функций f_1, $f_2 \in C_K(G)$ определим *свертку* $f_1 * f_2$ с помощью формулы

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_G f_1(y)\, f_2(y^{-1}x)\, d\mu(y), \tag{1}$$

где μ — левая мера Хаара.

Легко проверить, что $f_1 * f_2 \in C_K(G)$,

$$\| f_1 * f_2 \|_1 \leqslant \| f_1 \|_1 \cdot \| f_2 \|_1 \tag{2}$$

и что операция умножения-свертки на $C_K(G)$, обладая соответствующими алгебраическими свойствам, наделяет нормированное относительно нормы $\|\cdot\|_1$ пространство $C_K(G)$ структурой нормированной алгебры.

Можно показать, что эта нормированная алгебра коммутативна тогда и только тогда, когда группа G абелева.

Пополняя $C_K(G)$ по норме $\|\cdot\|_1$, мы естественно приходим к пространству $L^1(G)$ суммируемых функций на группе G; свертка по непрерывности продолжается на $L^1(G)$ с сохранением ее алгебраических свойств и $L^1(G)$ оказывается банаховой алгеброй относительно умножения-свертки, определенного той же самой формулой (1) для $f_1, f_2 \in L^1(G)$ и для почти всех $x \in G$ (относительно левой меры Хаара μ) и удовлетворяющего неравенству (2).

Определение. Банахова алгебра $L^1(G)$ называется *групповой алгеброй локально компактной группы* G.

$L^1(G)$ коммутативна тогда и только тогда, когда группа G абелева.

Свертку f_1*f_2 для $f_1, f_2 \in L^1(G)$ можно записать также следующим образом:

$$(f_1*f_2)(x)=\int_G f_1(xy)\, f_2(y^{-1})\, d\mu(y),$$

$$(f_1*f_2)(x)=\int_G f_1(xy^{-1})\,\Delta(y^{-1})\, f_2(y)\, d\mu(y), \tag{3}$$

$$(f_1*f_2)(x)=\int_{G'} f_1(y^{-1})\,\Delta(y^{-1})\, f_2(yx)\, d\mu(y).$$

На алгебре $C_K(G)$ можно определить *инволюцию* $f \to f^*$

$$f^*(x)=\overline{f(x^{-1})}\,\Delta(x^{-1}), \tag{4}$$

которая по непрерывности распространяется на групповую алгебру $L^1(G)$ как изометрический оператор, обладающий свойствами

$$\begin{gathered}(f^*)^*=f,\ (\alpha f_1+\beta f_2)^*=\bar{\alpha}_1 f_1^*+\bar{\beta} f_2^*(\alpha,\ \beta\in\mathbf{C}),\\ (f_1*f_2)^*=f_2^* * f_1^*,\ \|f^*\|_1=\|f\|_1.\end{gathered} \tag{5}$$

(Разумеется как свертку, так и инволюцию можно непосредственно определить на $L^1(G)$ без привлечения пространства $C_K(G)$.)

2) Свертка мер. Пусть $\mu_1, \mu_2 \in M(G)$, $M(G)$ — банахово пространство конечных (комплексных регулярных борелевских) мер на G с нормой — полной вариацией, $\|\mu\|=\|\mu\|_M$.

Определим функционал $(\mu_1*\mu_2)$ на $C_K(G)$ формулой

$$(\mu_1*\mu_2)(f)=\int_{G\times G} f(xy)\, d(\mu_1\otimes\mu_2)(x, y). \tag{6}$$

По теореме Рисса п. 4.4 этому функционалу однозначно соответствует мера $\mu_1*\mu_2 \in M(G)$, которая называется *сверткой мер* μ_1 и μ_2. При этом

$$\|\mu_1*\mu_2\| \leqslant \|\mu_1\|\cdot\|\mu_2\| \tag{7}$$

и $M(G)$ можно рассматривать как банахову алгебру относительно умножения $\mu_1*\mu_2$.

Пространство $L^1(G)$ вкладывается как подпространство в $M(G)$; его можно отождествить с подпространством $M_a(G) \subset M(G)$, состоящим из абсолютно непрерывных относительно левой меры Хаара конечных мер и совпадающим с $M(G)$ лишь тогда, когда группа G дискретная. Свертка в $L^1(G)$ согласуется при таком вложении со сверткой в $M(G)$, и если группа G не дискретная, то $L^1(G)$ является собственной подалгеброй (и даже собственным двусторонним идеалом) банаховой алгебры $M(G)$. Для почти всех $x \in G$ справедливы равенства, $f \in L^1(G)$, $\mu \in M(G)$,

$$(\mu * f)(x) = \int_G f(y^{-1}x)\, d\mu(y),$$
$$(f * \mu)(x) = \int_G f(xy^{-1})\, \Delta(y^{-1})\, d\mu(y). \tag{8}$$

Определенную на $L^1(G)$ инволюцию можно распространить на алгебру $M(G)$ с помощью формулы $\mu(f) \to \mu^*(f)$, $f \in C_K(G)$,

$$\mu^*(f) = \overline{\mu(\overline{f}^{\Delta})} \tag{9}$$

с сохранением свойств инволюции (5).

(3) Формулы сверток (1) и (8) можно распространить на $L^p(G)$, $1 < p < \infty$, $f_1 \in L^p(G)$, $f_2 \in L^{p'}(G)$ и $f \in L^p(G)$, $\mu \in M(G)$, соответственно. При этом почти дословно воспроизводится сказанное в 7) п. 3.3. главы 1. В частности мера $\mu \in M(G)$, как ядро в свертке, порождает ограниченный оператор, действующий из $L^1(G)$ в $L^p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Соответствующие формулы указаны у Х—Р [51]. Сохраняется формулировка теоремы Юнга из 7) п. 3.3. главы 1 (см. Х—Р, (20.18)).

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — множества функций на группе G. Обозначим $\mathfrak{A}^{\Delta} = \{f^{\Delta},\ f \in \mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{A} * \mathfrak{B} = \{f * g,\ f \in \mathfrak{A},\ g \in \mathfrak{B}\}$.

Тогда справедливы соотношения

(a) $M(G) * L^p(G) \subset L^p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

(b) $L^1(G) * L^p(G) \subset L^p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

(c) $L^p(G) * (L^{p'}(G))^{\Delta} \subset C_0(G)$, $1 < p < \infty$,

(d) $L^1(G) * L^{\infty}(G) \subset U_r C L^{\infty}(G)$,

(e) $L^{\infty}(G) * (L^1(G))^{\Delta} \subset U_l C L^{\infty}(G)$,

(f) $L^p(G) * (L^q(G) \cap (L^q(G))^{\Delta}) \subset L^r(G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$.

В случае, когда группа унимодулярна, к (a) — (f) можно добавить соотношения

$$L^p(G) * M(G) \subset L^p(G),\ L^p(G) * L^1(G) \subset L^p(G),$$

включения (b) (при $1 \leqslant p < \infty$), (d) и (e) являются равенствами, а соотношения (c) и (f) могут быть записаны в виде

$$L^p(G) * L^{p'}(G) \subset C_0(G),\ L^p(G) * L^q(G) \subset L^r(G),$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$, соответственно.

(4) Обратим внимание также на очевидные формулы, связывающие свертку, сдвиг и инволюцию

$$(L_x f) * g = L_x(f * g),$$
$$R_x(f * g) = f * (R_x g),$$
$$L_x(f^*) = (R_{x^{-1}} f)^*.$$

Кроме того, для операторов L_x и R_x левого и правого сдвигов, соответственно, справедливы соотношения

$$L_{xy}=L_xL_y, \quad R_{xy}=R_yR_x,$$

$$\|L_xf\|_1=\|f\|_1, \quad \|R_xf\|_1=\|f_1\|,$$

из которых в частности следует, что $x\to L_x$ есть представление группы G в группу изометрических линейных операторов, действующих в $L^1(G)$. Разумеется эти операторы можно рассматривать также в $L^p(G)$, $1<p<\infty$.

Наконец, для фиксированной $f\in L^1(G)$ и $\varepsilon>0$ существуют окрестности U, V элемента 1 такие, что

$$\|L_xf-f\|_1<\varepsilon \ (x\in U), \quad \|R_xf-f\|_1<\varepsilon \ (x\in V). \tag{10}$$

Из (10) немедленно получается, что алгебра $L^1(G)$ обладает *левой аппроксимативной единицей*. Это означает, что для заданной функции $f\in L^1(G)$ и $\varepsilon>0$ существует окрестность U элемента e такая, что для любой функции $u\in C_K^+(G)$, для которой $\int_G u d\mu=1$ и $\mathrm{Supp}\mu\subset U$, справедливо неравенство $\|u*f-f\|_1<\varepsilon$. Для доказательства нужно выбрать окрестность как в (10) и записать очевидное равенство

$$(u*f)(x)-f(x)=\int_G (L_yf-f)(x)\,u(y)\,d\mu(y). \blacktriangleleft$$

Аналогично доказывается, что алгебра $L^1(G)$ обладает *аппроксимативной правой единицей.*

Оказывается, что информация об алгебрах $L^1(G)$ и $M(G)$ (последняя не в меньшей степени чем $L^1(G)$, заслуживает названия групповой алгебры) проливает свет на многие проблемы гармонического анализа на группе G, позволяет выявлять не всегда лежащие на поверхности специальные структурные особенности рассматриваемой группы. Мы не погрешим против истины, если скажем, что многие достижения современного гармонического анализа так или иначе связаны с глубоким проникновением в природу групповой алгебры. К сожалению, результаты, сравнимые с полученными для классических групп или элементарных групп, пока имеются лишь в тех случаях, когда либо группа G компактна, либо абелева. Но даже в этих случаях все известное об алгебре $M(G)$ по-прежнему свидетельствует об ее фантастической сложности. Эта сделанная 25 лет тому назад оценка Хьюитта и Росса, несмотря на интенсивные последующие изучения, результаты которых частично подытожены в монографии [1], специально посвященной этой алгебре, остается неизменной. Многие, за редкими исключениями, результаты, относящиеся к алгебрам $M(G)$, носят отрицательный характер.

---

[1] Graham G., McGehee O. C., Essays in commutative harmonic analysis. Berlin: Springer, 1979, 464 pp.

Поскольку банаховы алгебры представляют собой один из важнейших инструментов гармонического анализа и одновременно один из возможных объектов гармонического анализа (многие факты классического гармонического анализа полезно рассматривать в контексте банаховых алгебр), мы в § 7 расскажем об основных понятиях и фактах этой замечательной теории.

Теорию же инвариантного интегрирования мы завершим рассказом об инвариантных средних на группах.

§ 6. Инвариантные средние на топологических группах

Среди инвариантных функционалов, определенных на множествах функций, заданных на группе, особо выделяются так называемые инвариантные средние, имеющие многочисленные связи с задачами гармонического анализа на группах и разнообразные приложения в теории представлений групп, теории почти периодических функций, в эргодической теории.

В этом параграфе мы расскажем об основных фактах теории инвариантных средних, о некоторых ее связях с гармоническим анализом, отсылая заинтересованного читателя к посвященной инвариантным средним монографии [44], а также к соответствующим разделам в [51] и в [21]. Обращаем внимание также на основополагающую статью фон Неймана и комментарии к ней в [23] А. М. Вершика.

6.1. Инвариантные средние на дискретных группах.

(1) Средние на множестве. Пусть X — некоторое множество, $B(X)$ — пространство всех ограниченных комплексных функций на X, наделенных равномерной нормой $\|f\|_\infty$, $\mathfrak{F}$ — замкнутое подмножество пространства $B(X)$, содержащее все постоянные и вместе с каждой функцией f комплексно сопряженную с ней функцию $\bar{f}$.

Определение. Линейный функционал M, определенный на $\mathfrak{F}$, называется *средним*, если

(a) $M(\bar{f})=\overline{M(f)}$,

(b) $\inf(f(x):x\in X)\leqslant M(f)\leqslant \sup(f(x):x\in X)$

для всех вещественных функций из $\mathfrak{F}$.

Условие (b равносильно положительности функционала M на $\mathfrak{F}$ и условию $M(1)=1$.

(2) Инвариантное среднее на группе. Рассмотрим случай, когда множество X совпадает с группой G, а подмножество $\mathfrak{F}$ представляет собой левоинвариантное подпространство в $B(G)$.

Определение. Среднее на $\mathfrak{F}$ называется *левоинвариантным средним*, если

$$M({}_xf)=M(f)$$

для всех $f\in\mathfrak{F}$ и всех $x\in G$.

Аналогично определяется правоинвариантное и двусторонне инвариантное среднее; последнее мы будем называть *инвариантным средним.*

(При рассмотрении этих средних естественно предполагать, что $\mathfrak{F}$ инвариантно относительно всех сдвигов.)[1]

Легко видеть, что инверсия переводит левоинвариантное среднее на $\mathfrak{F}$ в правоинвариантное на $\mathfrak{F}^{\Delta}=\{f : f^{\Delta}\in\mathfrak{F}\}$.

(3) Аменабельные дискретные группы. Ясно, что мера Хаара не всегда решает вопросы существования и единственности инвариантного среднего на подпространстве $\mathfrak{F}$ из $B(G)$, когда G — локально компактная группа. Исключение могут составить, например, случаи конечной или компактной группы, когда нормированная мера Хаара позволяет решать эти вопросы для некоторых подпространств в $B(G)$, состоящих из непрерывных функций.

Начнем со случая, когда $\mathfrak{F}=B(G)$, а G — дискретная группа. Понятие инвариантного среднего на измеримой группе было введено в 1929 г. фон Нейманом (см. [23]) в его работе, посвященной основным принципам теории меры и парадоксу Хаусдорфа—Банаха—Тарского.

Определение. Дискретная группа G называется *аменабельной*, если существует левоинвариантное среднее на $B(G)$.

Нетрудно показать, что аменабельность группы G влечет за собой существование правоинвариантного среднего и инвариантного среднего на $B(G)$.

Следует отметить, что в большинстве приложений теории важна не единственность инвариантного среднего, которую к тому же можно рассматривать как некоторое исключение, а факт существования. Известно, что в любой бесконечной аменабельной группе G существует много инвариантных средних на $B(G)$, а единственность имеет место лишь тогда, когда G конечна.

Вопрос о существовании левоинвариантного среднего (ЛИС) на $B(G)$ для абелевой группы G (и даже полугруппы) может быть решен с помощью следующего критерия Диксмье [162].

Обозначим через H подмножество в $B(G)$ функций вида

$$H=\left\{h=\sum_{k=1}^{n}(f_k-L_{x_k}f_k)\right\},$$

где $f_1,\dots,f_n$ — набор вещественных функций из $B(G)$, $x_1,\dots,x_n$ — произвольные элементы группы G.

Оказывается, что ЛИС существует на $B(G)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup\{h(x),\ x\in G\}\geqslant 0 \qquad (1)$$

для любой функции $h\in H$.

---

[1] Теория инвариантных средних развивается и на полугруппах, однако мы не будем здесь стремиться к максимальной общности.

Этот критерий показывает, что абелева группа (и даже полугруппа) аменабельна.

Нетрудно доказать, что гомоморфный образ аменабельной группы и подгруппа аменабельной группы суть аменабельные группы, что прямое произведение двух аменабельных групп — аменабельная группа. Если H — нормальная подгруппа группы G, то G аменабельна в том и только в том случае, если H и G/H аменабельны. Отсюда следует, что каждая разрешимая группа аменабельна.

Долгое время считалось правдоподобной гипотеза: Для того чтобы дискретная группа не была аменабельной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала свободную подгруппу с двумя образующими. (Достаточность легко следует из критерия (1). Действительно, можно считать, что сама группа G — свободная группа с двумя образующими, скажем, a и b. Пусть A — множество элементов из G, начинающихся с a или с a^{-1} в их записи в виде слова. Положим $f(x)=1$, $x\in A$, $f(x)=0$, $x\notin A$, и образуем функцию $h(x)=f(ba^{-1}x)+f(b^{-1}a^{-1}x)-f(ax)-f(x)$. Нетрудно проверить, что $\sup\{h(x),\ x\in G\}\leqslant -1$.) Что касается необходимости, то несмотря на ряд примеров, как будто бы говорящих в пользу гипотезы, она не подтвердилась. В 1980 г. А. Ю. Ольшанский [135] построил пример неаменабельной группы без свободных подгрупп.

(4) Аменабельные группы и конечно аддитивные меры. Пусть G — аменабельная группа и A — подмножество группы G. Замечая, что характеристическая функция $\chi_A(x)$ множества A принадлежит $B(G)$, определим меру любого множества $A\subset G$ формулой $\mu(A)=M(\chi_A)$, где M — инвариантное среднее на $B(G)$. Очевидно, что μ — инвариантная конечно аддитивная нормированная мера на G и задачи нахождения инвариантного среднего и инвариатной конечно аддитивной меры равносильны (именно это обстоятельство побудило фон Неймана ввести в рассмотрение инвариантные средние на группе). Если μ — конечно аддитивная инвариантная мера на G, то определяя сначала среднее на характеристических функциях подмножеств, мы сможем продолжить его на все $B(G)$.

Более общая задача, также рассмотренная фон Нейманом, возникает, когда группа G действует как группа преобразований множества X, μ — конечно аддитивная мера, определенная на всех подмножествах в X, нормированная на некотором непустом фиксированном множестве $A\subset X$. Такая мера называется *инвариантной для* (G, X, A), если $\mu(gB)=\mu(B)$ для любого $g\in G$ и любого подмножества $B\subset X$.

Пример. В частном случае, когда G — группа всех изометрий в $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 2$, оставляющих неподвижным единичный шар в $\mathbf{R}^n$, инвариантная мера для (G, K^n, K^n) существует лишь тогда, когда $n=1, 2$. При $n\geqslant 3$, как обнаружил фон Нейман (см. [23]), в группе G появляется свободная подгруппа с двумя образующими, что препятствует существованию инвариантной меры. (Упомянутый ранее парадокс Хаусдорфа—Банаха—Тарского как раз относится к случаю $n=3$. Шар K^3 может быть разбит на четыре множества, первое из которых имеет нулевую меру относительно любой инвариантной меры на K^3, можно далее указать поворот на 120° относительно некоторой оси, переводящий оставшиеся подмножества друг в друга, и, наконец, существует поворот на 180°, переводящий каждую из двух частей в объединение двух других.)

Если группа G аменабельна, то при некоторых естественных ограничениях на действие группы G в X, как указано в [162], существует инвариантная мера для (G, X, A). Представляет интерес обратная проблема, исследование которой было начато фон Нейманом в [23], см. также [44].

(5) Инвариантное среднее и банахов предел. Пусть $G=\mathbf{Z}$ (или $\mathbf{Z}^+$). Тогда $B(G)$ совпадает с пространством l^∞ всех ограниченных последовательностей, двусторонних (или односторонних).

Определение. Линейный функционал $\operatorname{Lim}(x)$, определенный для $x=(x_n)\in B(\mathbf{Z})$[1], называется *банаховым пределом*, если 1) он положительный, $\operatorname{Lim} x\geqslant 0$, когда $x_n\geqslant 0$, $n\in\mathbf{Z}$, 2) $\operatorname{Lim}\mathbf{1}=1$, где $\mathbf{1}=(1)$, 3) инвариантный, $\operatorname{Lim}(x_n)=\operatorname{Lim}(x_{n+1})$.

Нетрудно показать, что в $B^*(\mathbf{Z})$ существуют банаховы пределы. Для этого, замечая, что функционал Φ_n, $\Phi_n(x)=\frac{1}{n}\sum_1^n x_k$, принадлежит $B^*(\mathbf{Z})$, рассмотрим слабое замыкание F_n множества $(\Phi_k,\ k\geqslant n)$ в $B^*(\mathbf{Z})$. Пересечение $\bigcap_n F_n$ непусто и любой элемент этого пересечения является, очевидно, банаховым пределом.

С помощью банаховых пределов можно доказать теорему в (3) об аменабельности абелевых групп (или полугрупп) для $G=\mathbf{Z}$, а затем, пользуясь простыми свойствами аменабельности, распространить доказательство на случай произвольной абелевой группы.

6.2. Инвариантные средние на локально компактных группах. В случае, когда G — локально компактная недискретная группа, рассмотрение пространства $B(G)$ лишено смысла. Имеет смысл рассматривать инвариантное среднее на следующих функциональных пространствах:

$L^\infty(G)$ — существенно ограниченные измеримые функции на G,

$CL^\infty(G)$ — ограниченные непрерывные функции на G,

$U_rCL^\infty(G)$ — праворавномерно непрерывные ограниченные функции на G,

[1] $\mathbf{Z}$ можно заменить на $\mathbf{Z}^+$.

$UCL^\infty(G)$ — двусторонне равномерно непрерывные ограниченные функции на G.

Все эти пространства инвариантны относительно сдвигов и каждое из них есть замкнутое подпространство предыдущего в равномерной норме.

Средние и инвариантные средние на $L^\infty(G)$ и на всех вложенных подпространствах из приведенного выше списка определяются, как в п. 6.1 (1) с заменой inf и sup на essinf и esssup, а множество $\mathfrak{M}$ всех средних в $L^\infty(G)$ образует слабо-* компактное выпуклое подмножество в $(L^\infty(G))^*$.

Замечание. Левоинвариантное среднее на $B(G)$ индуцирует ЛИС на $CL^\infty(G)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В группе $G=O(3)$ не существует инвариантного среднего на $B(G)$. Однако если смотреть на группу $O(3)$ как на топологическую группу Ли со стандартной топологией, то на ней, как на компактной группе, существует инвариантное среднее на $CL^\infty(G)=C(G)$.

(1) Топологические инвариантные средние. Каждая функция $f\in L^1(G)$, $f\geqslant 0$, $\int\limits_G f\,d\mu=1$, μ — левая мера Хаара, порождает среднее $M_f^{(g)}=\int fg d\mu$ на G, а множество всех таких средних (обозначим его $\mathfrak{P}(G)$) образует слабо-* плотное выпуклое подмножество в $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — одно из перечисленных пространств, содержащихся в $L^\infty(G)$. Замечая, что $\varphi * f\in\mathfrak{F}$ для всех $f\in\mathfrak{F}$, $\varphi\in\mathfrak{P}(G)$, дадим следующее

Определение. Линейный функционал M на $\mathfrak{F}$ называется *топологическим левоинвариантным средним*, если M — среднее и $M(\varphi * f)=M(f)$ для всех $f\in\mathfrak{F}$, $\varphi\in\mathfrak{P}(G)$.

Формула $\varphi*({}_{x^{-1}}f)=(\Delta(x^{-1})\varphi_{x^{-1}})*f$ и (5.4.3) показывают, что топологическое ЛИС на $L^\infty(G)$ является обычным ЛИС на $L^\infty(G)$.

Очевидные модификации критерия Диксмье в 6.1 (3) позволяют приспособить его для топологического ЛИС.

Сформулируем основную теорему существования.

Теорема. Следующие условия эквивалентны:

(1) Существует ЛИС на каждом из пространств $L^\infty(G)$, $CL^\infty(G)$, $U_rCL^\infty(G)$, $UCL^\infty(G)$ порознь.

(2) Существует топологическое ЛИС на $UCL^\infty(G)$.

(3) Существует топологическое ЛИС на $L^\infty(G)$.

(Теорема была впервые сформулирована Рейтером. Одно из самых прозрачных доказательств этой теоремы приведено в [44].) Скажем несколько слов о доказательстве. Импликация (1) для $L^\infty(G)\Rightarrow$ (1) для $UCL^\infty(G)$ тривиальна. Импликация (1) для $UCL^\infty(G)\Rightarrow$ (2) следует из того, что для $f\in UCL^\infty(G)$ и $\varphi\in L^1(G)$ функционал $M(f*\varphi)$, где M — ЛИС на $UCL^\infty(G)$, левоинвариантный и ограниченный и следовательно является левоинвариантным интегралом Хаара

$$M(\varphi * f) = K(f) \int_G \varphi(t)\,dt$$

(K_f — постоянная).

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) использует аппроксимативную единицу в $L^1(G)$, состоящую из элементов $\mathfrak{P}(G)$, а импликацию (3) $\Rightarrow$ (1) для $L^\infty(G)$ мы пояснили раньше.

Определение. *Локально компактная группа* называется *аменабельной*, если для нее выполняется одно из условий (1)—(3).

Отмеченные в 6.1(3) факты могут быть приспособлены для локально компактных групп.

Можно показать, что существование ЛИС на перечисленных пространствах влечет за собой существование двусторонне инвариантных средних.

6.3. Инвариантные средние на почти периодических функциях. В теории почти периодических функций Бора на $\mathbf{R}$ фундаментальную роль играет так называемое среднее значение почти периодической функции f, которое определяется как

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt.$$

Оказалось, что это среднее значение можно рассматривать как инвариантное среднее в соответствующем пространстве на $\mathbf{R}$, что такие инвариантные средние можно рассматривать в пространствах почти периодических функций на произвольных группах и что такое инвариантное среднее всегда существует и единственно. Все эти результаты были получены фон Нейманом, посвятившим теории почти периодических функций на группах серию работ, в том числе ставшие классическими работы (см. [23]). В первой из них фон Нейман переносит практически все центральные результаты теории Бора на почти периодические функции, определенные на произвольной группе, вводя понятия и определения, сыгравшие важную роль в дальнейшем развитии этой теории.

Во второй, написанной совместно с Бохнером, теория почти периодических функций распространяется на функции, принимающие значения в общих линейных пространствах. Эта работа имела значение для дальнейшего развития понятия почти периодичности, приведшего к рассмотрению почти периодических операторов и представлений.

Пусть G — произвольная группа. Функция $f \in B(G)$ называется *левой почти периодической*, если замыкание в равномерной норме ее орбиты, т. е. множества $O(f, L) = \{L_x f,\ x \in G\}$, соответствующей действию левых сдвигов, компактно. Пространство левых почти периодических функций обозначается $LAP(G)$. Аналогично определяется пространство правых почти периодических функций $RAP(G)$ и просто почти периодических функций $AP(G)=LAP(G)\cap RAP(G)$.

Вскоре мы увидим, что на самом деле $AP(G)=LAP(G)=RAP(G)$.

Итак, теория почти периодических функций базируется на следующей теореме фон Неймана.[1]

Теорема. Для произвольной группы G существует единственное инвариантное среднее на $AP(G)$.

Мы расскажем кратко о найденном Мааком [65] доказательстве этой теоремы, отсылая за подробностями к [68], где изложен наиболее удачный вариант доказательства.

Определение. Пусть $\mathscr{F}$ — некоторое семейство функций, определенных на множестве X. Конечным *ε-делением множества X, отвечающим семейству $\mathscr{F}$*, называется такое его представление в виде суммы $X=\bigcup_{k=1}^{n} X_k$ конечного числа непересекающихся подмножеств X_k, $k=1,\ldots,n$, что для любых x', $x''\in X_k$, $k=1,\ldots,n$, и для каждой $f\in\mathscr{F}$ выполняется неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Выбирая по элементу в каждом из подмножеств ε-деления, мы получим конечную ε-сеть для семейства $\mathscr{F}$.

В терминах конечного ε-деления удобно формулировать критерий компактности семейства $\mathscr{F}$. А именно, компактность семейства $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}\subset B(X)$, по равномерной норме равносильна существованию для любого $\varepsilon>0$ конечного ε-деления множества X, соответствующего семейству $\mathscr{F}$.

Например, этот критерий позволяет немедленно показать, что пространства $LAP(G)$ и $RAP(G)$ совпадают. Для этого нужно, пользуясь компактностью семейства $\mathscr{F}=\overline{O(f,L)}$, $f\in LAP(G)$, построить конечное ε-деление группы G, отвечающее семейству $\mathscr{F}$, выбрать в каждой компоненте X_k этого деления элемент $x_k\in X_k$ и рассмотреть последовательность $f_{x_k}(x)$, которая окажется ε-сетью в $\mathscr{F}$, так что $f\in RAP(G)$.

Доказательству теоремы предпошлем комбинаторную лемму, известную как «marriage problem», «задача о сватовстве» (см. [68]).

Лемма 1. В компании из n женихов и n невест любые k женихов, $k\geqslant n$, знакомы в совокупности с по крайней мере k невестами, $k=1,\ldots,n$.

Тогда можно образовать в точности n пар из знакомых между собою женихов и невест.

Эта лемма допускает следующую переформулировку.

---

[1] В [99] приведено доказательство этой теоремы, основанное на статистической эргодической теореме.

Лемма 1'. Рассмотрим два разбиения множества X: $X=\bigcup_{k=1}^{n} X_k$, $X=\bigcup_{k=1}^{n} Y_k$ такие, что любые k частей второго разбиения не могут содержать более k частей первого разбиения. Тогда можно образовать в точности n пар из частей первого и второго разбиений таких, что части в каждой паре имеют непустое пересечение.

Доказательство теоремы. Пусть $f \in AP(G)$. Семейство $({}_af_b)$ компактно, когда a и b независимо пробегают G. Выберем два минимальных (по числу элементов) ε-деления группы G, отвечающих семейству $({}_af_b)$, $G=\bigcup_{k=1}^{n} X_k$, $G=\bigcup_{k=1}^{n} Y_k$. Пусть $a_k \in X_k$, $b_k \in Y_k$, $k=1, \ldots, n$, $A=(a_k)$, $B=(b_k)$. Обозначим два средних

$$M(A, f)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i),$$

$$M(B, f)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(b_i). \tag{1}$$

Минимальность ε-делений обеспечивает выполнение условий леммы 1 и можно так перенумеровать части первого и второго делений, что X_i и Y_i содержат общий элемент c_i, $i=1, 2, \ldots, n$. Поэтому, обозначая $C=(c_k)$, получим неравенство

$$|M(A, f)-M(B, f)|<|M(A, f)-M(C, f)|+ +|M(B, f)-M(C, f)|\leqslant 2\varepsilon. \tag{2}$$

Из (2) нетрудно вывести, что

$$\left|M(A, f)-\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f(a_0a_ib_0)\right|\leqslant 2\varepsilon \tag{3}$$

для произвольных элементов a_0 и b_0 группы G.

Пользуясь этим неравенством, можно перейти от $M(A, f)$ к предельному в некотором смысле функционалу $M(f)$ на $AP(G)$, для которого легко устанавливаются свойства однородности, положительности, инвариантности и единственности. При этом $|M(A, f)-M(f)|\leqslant 4\varepsilon$.

Покажем, что $M(f+g)=M(f)+M(g)$, $f, g \in AP(G)$.

Для этого запишем неравенства (3) отдельно для f и g

$$\left|M(f)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_0a_ib_0)\right|\leqslant \varepsilon,$$

$$\left|M(g)-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} g(a_0b_kb_0)\right|\leqslant \varepsilon.$$

Комбинируя эти неравенства и пользуясь произволом в выборе a_0 и b_0, найдем, что

$$\left| M(f) - \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} {}_{a_0}f_{b_0}(a_i b_j) \right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\left| M(g) - \frac{1}{mm} \sum_{i,j=1}^{n,m} {}_{a_0}g_{b_0}(a_i b_j) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Из последних неравенств следует, что

$$\left\| M(f) + M(g) - \frac{1}{m,\, n} \sum_{i,j=1}^{n,m} {}_{a_0}(f+g)_{b_0}(a_i b_j) \right\| \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Осталось воспользоваться произвольностью ε в (8).

Заметим, что группу G можно наделить топологией, относительно которой все функции из $AP(G)$ окажутся непрерывными, а G — топологической группой. Однако существуют группы, для которых пространство $AP(G)$ состоит из одних постоянных. (Примером такой группы является группа неособенных квадратных матриц порядка $n > 1$.)

В дальнейшем мы будем предполагать, что G — локально компактная группа, а за пространством непрерывных почти периодических функций на G сохраним обозначение $AP(G)$.

Итак, у нас выстроена цепочка вложенных друг в друга подпространств (стрелка обозначает включение)

$$AP(G) \to UCL^\infty(G) \to U_r CL^\infty(G) \to CL^\infty(G) \to L^\infty(G). \tag{9}$$

Самое узкое из них, $AP(G)$, вне зависимости от аменабельности локально компактной группы G, всегда обладает единственным ЛИС, которое, в действительности, является двусторонне инвариантным средним.

Если группа G аменабельна, то каждое из остальных подпространств в (9) обладает бо́льшим запасом инвариантных средних. Сужения всех таких средних на $AP(G)$ обязаны совпадать.

Естественно возникает вопрос о существовании более широкого подпространства, нежели $AP(G)$, обладающего этим свойством.

6.4. Средние на слабо почти периодических функциях.

Определение. *Функция* $f \in CL^\infty(G)$ называется *слабо почти периодической*, если ее «орбита» $O(f) = \{f_x,\ x \in G\}$ предкомпактна в слабой топологии пространства $CL^\infty(G)$.

Диаграмма ниже показывает место, которое занимает пространство $WAP(G)$ слабо почти периодических функций в шкале (6.3.9).

$$\begin{array}{c} C^0(G) \searrow \\ \qquad\qquad WAP(G) \to UCL^\infty(G). \\ AP(G) \nearrow \end{array}$$

Многие свойства функций класса $AP(G)$ остаются справедливыми и для класса $WAP(G)$. Перечислим некоторые из них:

1) Левая орбита функции $f \in WAP(G)$ предкомпактна в слабой топологии тогда и только тогда, когда предкомпактна правая орбита.

2) $WAP(G)$ — замкнутое подпространство в $CL^\infty(G)$, каждая функция из $WAP(G)$ двусторонне равномерно непрерывна, так что $WAP(G) \subset UC^\infty(G)$.

3) $WAP(G)$ — двусторонне инвариантное относительно сдвигов подпространство в $CL^\infty(G)$.

4) Левоинвариантное среднее на $WAP(G)$ единственно (если оно существует).

Оказалось, что существование ЛИС на $WAP(G)$ не зависит от аменабельности группы G. Этот факт удалось установить Рыль-Нарджевскому с помощью доказанной им глубокой теоремы о неподвижной точке [200].

Теорема о неподвижной точке. Пусть E — банахово пространство, G — любая (дискретная) полугруппа, действующая на некотором слабо компактном выпуклом множестве $K \subset E$. Предположим, что G *действует дистально* по отношению к норме в E (это означает, что замыкание по норме множества $G(x-y)$, $x, y \in K$, содержит нуль тогда и только тогда, когда $x=y$ в E). Тогда существует элемент $x \in K$ такой, что $Gx=x$.

Теорема существования ЛИС на $WAP(G)$. Для любой локально компактной группы G существует ЛИС на $WAP(G)$.

Доказательства этих теорем изложены в [44]. Мы поясним лишь, как применяется теорема о неподвижной точке.

Пусть $f \in WAP(G)$. Аффинное преобразование[1] $L_x : f \to {}_x f$ действует дистально. Орбита функции f предкомпактна в слабой топологии и поэтому слабо замкнутая выпуклая оболочка $C(f, L)$ этой орбиты слабо компактна. По теореме о неподвижной точке аффинное действие L_x имеет неподвижную точку $\lambda(f) \in C(f, L)$, которая, очевидно, представляет собой постоянную функцию на G. Аналогично, существует постоянная функция, обозначим ее $\rho(f)$, принадлежащая слабо замкнутой выпуклой оболочке $C(f, R)$ орбиты правых сдвигов функции f.

Замечая, что слабое замыкание и замыкание по норме совпадают для любых выпуклых подмножеств банахова пространства (теорема Мазура, см., например, [40]), и рассматривая конечные выпуклые суммы

$$Lf=\Sigma\alpha_x L_x f \text{ и } Rf=\Sigma\beta_x R_x f,$$

где $\alpha_x, \beta_x \geq 0$, $\Sigma\alpha_x=\Sigma\beta_x=1$, мы получаем возможность сколь угодно точно аппроксимировать по равномерной норме элемент $\lambda(f)$ сетью вида $(R \circ L)f$, а $\rho(f)$ — сетью вида $(L \circ R)f$.

---

[1] *Отображение* T выпуклого подмножества L векторного пространства X в векторное пространство Y называется *аффинным*, если $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$, $\alpha+\beta=1$, $\alpha>0$, $\beta>0$; $x, y \in L$.

Из очевидного соотношения

$$R_x L_x = L_x R_x$$

следует, что $\lambda(f)=\rho(f)$. Остается убедиться, что функционал $M(f)=\lambda(f)$ есть инвариантное среднее на $WAP(G)$. В доказательстве нуждается лишь аддитивность этого функционала, которая устанавливается по той же схеме, что и аддитивность функционала M на $AP(G)$, см. стр. 213—214.

6.5. Слабая и сильная инвариантность, условие Рейтера и аменабельность. Для приложений инвариантных средних в гармоническом анализе и теории представлений полезно понятие слабой и сильной инвариантности, введенное Дэем [161].

Определение 1. Сеть $\{\varphi_j\}\subset\mathfrak{P}(G)$ называется *слабо сходящейся к левоинвариантному,* если при любом $x\in G$ сеть $({}_x(\varphi_j)-\varphi_j)$ слабо-* сходится к нулю в $\sigma(L^1(G), L^\infty(G))$. Если для всех $\varphi\in\mathfrak{P}(G)$ сеть $(\varphi*\varphi_j-\varphi_j)$ слабо-* сходится к нулю в $\sigma(L^1, L^\infty)$, то говорят, что сеть $\{\varphi_j\}$ *слабо сходится к топологическому левоинвариантному.*

Аналогично определяется сеть $\{\varphi_j\}$, *сильно сходящаяся* (по норме $L^1(G)$) *к левоинвариантному*, и *сеть, сильно сходящаяся к топологическому левоинвариантному.*

Результаты ряда авторов, применявших это понятие (см. [44]), могут быть суммированы следующим образом.

Теорема 1. Следующие условия равносильны:

(a) Существует сеть в $\mathfrak{P}(G)$, слабо сходящаяся к (топологическому) левоинвариантному.

(b) Существует сеть в $\mathfrak{P}(G)$, сильно сходящаяся к (топологическому) левоинвариантному.

(c) Группа G аменабельная.

Замечание 1. Если сеть $\{\varphi_j\}\subset\mathfrak{P}(G)$ слабо сходится к (топологическому) левоинвариантному, то слабый-* предел сети $\{\varphi_j\}$ во множестве всех средних на $L^\infty(G)$ является (топологическим) ЛИС (обозначая предельную точку этого семейства через m, легко видеть, что m принадлежит слабо-* компактному выпуклому множеству всех средних на $L^\infty(G)$ и является ЛИС).

Сформулированный в замечании факт часто оказывается полезным.

Пример. Пусть $G=\mathbf{R}$, $T>0$, $E_T=[-T, T]$. Зададим $\varepsilon>0$ и компакт $K\subset\mathbf{R}$. Тогда для $T>T(\varepsilon, K)$ при всех $x\in K$ справедливо неравенство

$$|E_T|^{-1}\,|xE_T\Delta E_T|<\varepsilon, \tag{1}$$

где Δ — симметрическая разность, $|E|$ — мера Лебега множества E. Образуем сеть $\{\varphi_T\}$, где $\varphi_T=\frac{1}{2T}\chi_{E_T}$, χ_{E_T} — характеристическая функция множества E_T. Поскольку $\|{}_x(\varphi_T)-\varphi_T\|_1=$ $=\frac{1}{2T}|xE_T\Delta E_T|$, то сеть $\{\varphi_T\}$ сильно сходится к левоинвариантному, и в силу замечания, любая слабо-* предельная точка m этой сети является ЛИС на $L^\infty(G)$. Сужение m на $WAP(G)$ дает единственное инвариантное среднее M на $WAP(G)$. Таким образом, для $f\in WAP(G)$ получается формула Бора

$$M(f)=\lim_{T\to\infty}\langle \varphi_T, f\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt. \tag{2}$$

Заметим, что, пользуясь сетью $\{\varphi_T\}$, нетрудно показать, что на $L^\infty(\mathbf{R})$ существует по крайней мере континуум различных инвариантных средних.

Замечание 2. Формулу, аналогичную формуле Бора (2), можно распространить на аменабельные локально компактные группы. При этом интервал E_T заменяется компактным подмножеством группы, для которого выполняется условие, аналогичное (1). См. [133], [51].

В развитии гармонического анализа на локально компактных абелевых группах большую роль сыграло введенное в 1952 г. Рейтером так называемое *условие* (P_1) (см. [77]) или *условие Рейтера.*

Определение 2. Скажем, что для группы G *имеет место условие* (P_1), если для каждого $\varepsilon>0$ и любого компактного множества $K\subset G$ найдется $\varphi\in\mathfrak{P}(G)$ такая, что

$$\|{}_x\varphi-\varphi\|_1\leqslant\varepsilon \text{ для всех } x\in K.$$

Если условие (P_1) выполнено, то можно, частично упорядочив систему пар $I=(\varepsilon, K)$, выбрать φ_I согласно условию (P_1) и построить тем самым сеть $\{\varphi_I\}$, сильно сходящуюся к левоинвариантному. По теореме 1 группа G аменабельная.

Многие результаты по гармоническому анализу для ЛКА групп на самом деле использовали не коммутативность, а условие (P_1). После того, как Хуланицкий в 1966 г. [178] доказал, что условие (P_1) эквивалентно аменабельности, соответствующие результаты (см. о них в [44]) стали интерпретировать как следствие аменабельности.

При изучении операторов в $L^q(G)$, перестановочных со сдвигами, оказалось полезным условие Дьедонне или, как его называют иногда, *условие* (P_q).

Определение. Скажем, что группа G *подчинена условию* (P_q), $q\in[1,\infty]$, если для заданных $\varepsilon>0$ и компакта $K\subset G$ найдется $\varphi\in L^q(G)$ такая, что $\|\varphi\|_q=1$, $\varphi\geqslant 0$ и $\|{}_x\varphi-\varphi\|_q\leqslant\varepsilon$ для всех $x\in K$.

Оказалось, что условие (P_q), $1\leqslant q<\infty$, эквивалентно условию (P_1) (это простое обстоятельство отметил Стеджмен), а следовательно, и условию аменабельности.

У Дьедонне условие (P_q) возникло в связи со следующей задачей.

Пусть G — локально компактная группа, $M(G)$ — пространство конечных регулярных борелевских мер на G. Тогда отображение

$$\lambda_{\mu,p}: f(t) \to (\mu * f)(t) = \int f(s^{-1}t)\, d\mu(s)$$

задает ограниченный линейный оператор в $L^p(G)$, причем $\|\lambda_{\mu,p}\| \leqslant \|\mu\|$.

При $p=1$ и $p=\infty$ имеет место равенство $\|\lambda_{\mu,p}\| = \|\mu\|$. Если равенство $\|\lambda_{\mu,p}\| = \|\mu\|$ выполняется при некотором $p \in]1, \infty[$, то по теореме Рисса о выпуклости оно выполняется для всех $p \in [1, \infty]$, так как $\ln \|\lambda_{\mu,p}\|$ является выпуклой функцией от $\frac{1}{p}$.

Оказывается, что равенство $\|\lambda_{\mu,p}\| = \|\mu\|$ для всех $\mu \in M^+(G)$ эквивалентно условию (P_q), а следовательно, и аменабельности групы G.

§ 7. Коммутативные банаховы алгебры

7.1. Определение банаховой алгебры. Примеры. Векторное пространство B над полем комплексных чисел, в котором имеется умножение и которое является кольцом, называется *комплексной алгеброй.*

Если же на алгебре B к тому же определена норма $\|\cdot\|$, превращающая ее в банахово пространство, и если при фиксированном $k>0$ для любых $a, b \in B$ выполняется неравенство

$$\|ab\| \leqslant k\|a\| \cdot \|b\|, \tag{1}$$

то B называется *банаховой алгеброй*. Если банахова алгебра B обладает единичным элементом $\mathbf{1} = \mathbf{1}_B$, то мы полагаем $\|\mathbf{1}\| = 1$ (этого, а также перехода от неравенства (1) к неравенству $\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$, всегда можно достичь перенормировкой). Мы не исключаем рассмотрения банаховых алгебр без единицы. Примером таких алгебр являются групповые алгебры локально компактных (не дискретных) групп, в частности $L^1(\mathbf{R})$. Однако зачастую бывает полезно дополнить алгебру, не обладающую единицей, до алгебры с единицей. Это можно сделать, рассматривая вместо элементов алгебры B множество B_1 упорядоченных пар (a, α), где $a \in B$ и $\alpha \in \mathbf{C}$. Если линейные операции на B_1 определить покомпонентно, а умножение и норму определить формулами $(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$ и $\|(a, \alpha)\| = \|a\| + |\alpha|$, то B_1 становится банаховой алгеброй с единицей $(0, 1)$, а B изоморфно вкладывается в B_1 как некоторая подалгебра (и даже двусторонний идеал).

По существу, отличие между B и B_1 невелико. Однако в банаховой алгебре с единицей можно рассматривать обратимые элементы. Элемент $x \in B$ называется *обратимым*, если существует $y \in B$, такой, что $xy = yx = \mathbf{1}$. Этот элемент y однозначно определяется элементом x и обозначается x^{-1}. Немедленно проверяется, что открытый шар U в B с центром в единице и радиуса 1 состоит из обратимых элементов. Пользуясь этим, нетрудно показать, что множество обратимых элементов в B открыто. Действительно, если x — обратимый элемент, так что $xx^{-1}=1$, то, в силу непрерывности умножения, существует окрестность U_x элемента 1, для которой $U_x \subset U$, и элемент $z=(x+y)x^{-1}$ принадлежит U для всех $y \in U_x$. Тогда элемент z обратим и $x+y=zx$ также обратим.◀

Одним из важных инструментов исследования банаховых алгебр являются *гомоморфизмы* одной банаховой алгебры в другую, под которыми понимают линейные отображения h банаховой алгебры B в банахову алгебру B_1, обладающие свойством мультипликативности, т. е.

$$h(ab)=h(a)\cdot h(b), \quad a, b \in B.$$

Особо выделяется случай, когда $B_1=\mathbf{C}$. В этом случае *линейный мультипликативный функционал* h называется *комплексным гомоморфизмом.*

Замечание. Имеется ряд причин, приводящих к рассмотрению алгебры над комплексным полем. Может быть, главная из них заключается в том, что наиболее интересные для нас алгебры обладают естественной инволюцией, наличие которой приводит, как мы увидим, к ряду глубоких следствий.

Примеры. (a) Банахово пространство $C(K)$ непрерывных комплексных функций на непустом хаусдорфовом компакте K с равномерной нормой и обычным умножением функций является банаховой алгеброй с единичным элементом — функцией, тождественно равной единице. Эта алгебра дает наиболее естественный и, как мы позже увидим, в некотором отношении универсальный пример коммутативной банаховой алгебры.

Банахову алгебру B мы будем называть *коммутативной,* если умножение в ней коммутативно, т. е.

$$ab=ba, \quad a, b \in B.$$

(b) Пусть G — локально компактная группа, $L^1(G)$ — соответствующая этой группе групповая алгебра. Сказанное в п. 5.13 означает, что $L^1(G)$ — банахова алгебра с умножением-сверткой. Эта алгебра, вообще говоря, без единицы и обладает единицей лишь в том случае, если группа G дискретная. Однако алгебру $L^1(G)$ можно расширить до алгебры с единицей, причем описанной выше формальной процедуре можно придать конкретный смысл, если алгебру $L^1(G)$ погрузить в алгебру мер $M(G)$ и присоединить к L^1 *δ-меру Дирака,* т. е. единичную меру, сосредоточенную в единице группы G.

Для $G=\mathbf{R}^n$ эта процедура была описана в 1.2.2.

Групповая алгебра $L^1(G)$ коммутативна тогда и только тогда, когда группа G абелева.

Как мы вскоре увидим, изучение групповой алгебры ЛКА группы дает наиболее прозрачный подход к определению преобразования Фурье на ЛКА группе и установлению фундаментальных фактов гармонического анализа вплоть до теоремы двойственности.

(c) Пусть G — локально компактная группа. $M(G)$-алгебра всех конечных комплексных борелевских мер на G с умножением-сверткой (см. п. 5.13) является банаховой алгеброй с единицей — мерой Дирака, содержащей $L^1(G)$ в качестве двустороннего замкнутого идеала и совпадающей с $L^1(G)$, если группа G дискретная. Банахова алгебра $M(G)$ коммутативна тогда и только тогда, когда группа G абелева.

(d) Поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ является коммутативной банаховой алгеброй относительно евклидовой нормы — абсолютной величины.

(e) Поле p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$, p — простое число, является коммутативной алгеброй и банаховым пространством относительно неархимедовой нормы $\|\cdot\|_p$, однако не может рассматриваться как банахова алгебра, поскольку в нем нет умножений на комплексные числа.

(f) Пусть K — непустой компакт в $\mathbf{C}$ или $\mathbf{C}^n$. Подалгебра алгебры $C(K)$, состоящая из функций, аналитических во внутренних точках компакта K, является коммутативной банаховой алгеброй относительно равномерной нормы.

(g) Пусть U — область в $\mathbf{R}^n$ с компактным замыканием. Алгебра $C^{(k)}(U)$ непрерывно дифференцируемых комплексных функций до порядка k включительно в области U является коммутативной банаховой алгеброй относительно нормы

$$\|f\|_{C^{(k)}}=\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\|D^m f\|_\infty.$$

(h) Пусть X — банахово пространство. Алгебра всех ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X является банаховой алгеброй относительно обычной операторной нормы.

Много интересных примеров банаховых алгебр дают подалгебры классических алгебр $L^1(\mathbf{R})$ или $L^1(\mathbf{R}^n)$. Перечислим наиболее важные из них. (Умножение всюду определено как свертка.)

(i) Функции f из пространства $L^1(\mathbf{R})\cap C_0(\mathbf{R})$ образуют коммутативную банахову алгебру относительно нормы

$$\|f\|=\|f_1\|+\|f\|_\infty.$$

(j) Пусть $1<p<\infty$. Элементы $f\in L^1(\mathbf{R}^n)\cap L^p(\mathbf{R}^n)$ образуют банахову коммутативную алгебру относительно нормы

$$\|f\|=\|f\|_1+\|f\|_p.$$

(k) Пусть $K=\{x:x=(x_i)\in\mathbf{R}^n,\ 0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$. Пусть f — функция на $\mathbf{R}^n$ такая, что

$$\|f\|=\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\max_{x\in K}|f(y+x+k)|<\infty.$$

Класс всех таких функций образует коммутативную банахову алгебру, содержащуюся в $L^1(\mathbf{R}^n)$. Эта алгебра для случая $n=1$ была введена в рассмотрение Винером.

(l) Класс функций f из $L^1(\mathbf{R}^n)$ таких, что $\hat{f}\in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1\leqslant p<\infty$, образует коммутативную банахову алгебру относительно нормы

$$\|f\|=\|f\|_1+\|\hat{f}\|_p.$$

(m) Абсолютно непрерывные функции $f\in L^1(\mathbf{R})$ образуют коммутативную банахову алгебру относительно нормы

$$\|f\|=\|f\|_1+\|f'\|_1.$$

(n) Алгебры Бёрлинга. Пусть φ — положительная измеримая функция в $\mathbf{R}^n$, $\varphi(x)\geqslant 1$ и пусть

$$\varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)\varphi(y),\quad x,\ y\in\mathbf{R}^n. \tag{1}$$

Класс всех функций из $L^1(\mathbf{R}^n)$, для которых сходится интеграл

$$\|f\|=\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|\,\varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

образует коммутативную банахову алгебру относительно нормы (2), которая была введена в рассмотрение Бёрлингом в 1938 г. и получила название *алгебры Бёрлинга*. Алгебры Бёрлинга, с которыми мы знакомились в § 12, гл. 1, обозначались $L_\varphi^1(\mathbf{R}^n)$.

Вопросы структуры алгебр Бёрлинга оказались тесно переплетенными с классическими проблемами анализа, относящимися к теории квазианалитических классов и взвешенным приближениям многочленами.

Многие задачи гармонического анализа растущих функций допускают интерпретацию на языке алгебр Бёрлинга, см. [156], [113]. Алгебры Бёрлинга на группах детально изучались в [163] для случая ЛКА групп, информацию об этих алгебрах на локально компактных группах можно найти в [77].

(o) Алгебры Бёрлинга на $\mathbf{R}^+$. Обратим внимание на подалгебру $L_\varphi^1(\mathbf{R}^+)$ алгебры Бёрлинга $L_\varphi^1(\mathbf{R})$, состоящую из функций, равных нулю на $\mathbf{R}^-$, т. е. алгебру Бёрлинга, отвечающую весу φ, обращающемуся в ∞ на $\mathbf{R}^-$. Эти алгебры нашли приложение в теории уравнений Винера—Хопфа см. [125]. Они тесно связаны с проблематикой гармонического анализа на полуоси (см. [113]), интересен даже случай $\varphi=1$, $L_\varphi^1(\mathbf{R}^+)=L^1(\mathbf{R}^+)$.

В последнее время алгебры Бёрлинга нашли приложение в связи с развитием спектральной теории представлений ЛКА групп [21].

(р) Наконец, введем в рассмотрение подпространство $L^1(I)$, $I=[0, 1]$, $L^1(I)\subset L^1(\mathbf{R})$, состоящее из функций, обращающихся в нуль вне I. $L^1(I)$ представляет собой коммутативную банахову алгебру относительно умножения-свертки, записываемой в виде

$$(f_1*f_2)(t)=\int\limits_0^t f_1(t-s)\,f_2(s)\,ds, \quad t\in[0, 1].$$

Заметим, что банахова алгебра $L^1(I)$ не является подалгеброй в $L^1(\mathbf{R})$.

Это перечисление можно было бы продолжить, хотя уже пример (h) показывает, какая бездна информации может заключаться в этом коротком термине — банахова алгебра.

Теории банаховых алгебр, ее современному развитию посвящена обширная монографическая литература, один перечень которой мог бы занять изрядный объем. Наряду с монографией [13], принадлежащей создателям этой теории, мы укажем также следующие популярные монографии: [81], [78], [52], [39], [33], [64], [40].

Не имея возможности осветить различные направления этой теории, мы ограничимся лишь связанными с ней основными понятиями и теми фактами, которые находят непосредственное приложение в коммутативном гармоническом анализе.

7.2. Группа обратимых элементов. Обозначим множество обратимых элементов в банаховой алгебре B с единицей через $G(B)$. Если $x, y\in G(B)$, то элементы x^{-1}, y^{-1}, xy принадлежат $G(B)$. Поскольку операции умножения и перехода к обратному элементу непрерывны в относительной топологии $G(B)$, индуцированной банаховой алгеброй B, $G(B)$ — топологическая группа.

Обозначим компоненту топологической группы $G(B)$, содержащую единичный шар U с центром в $\mathbf{1}\in B$, через $G_1(B)$.

Заметим, что для любого элемента $x\in B$ можно определить функцию $\exp x=\sum \frac{x^n}{n!}\in B$, поскольку ряд сходится в B. Обычным образом проверяется, что $\exp(x+y)=(\exp x)\cdot(\exp y)$. Поэтому элемент $\exp x$ обратим и его обратный равен $\exp(-x)$. Обозначим множество всех элементов алгебры B вида $\exp x$, x пробегает B, через $\exp B$. Если B коммутативна, то $\exp B$ — подгруппа топологической группы $G(B)$, содержащая U. В некоммутативном случае множество $\exp B$ не обязательно образует группу.

Оказывается, что если B коммутативна, то $G_1(B)$ совпадает с $\exp B$ и факторгруппа $G(B)/G_1(B)$ не имеет элементов конечного порядка, за исключением единицы, т. е. является группой без кручения.

Если алгебра B некоммутативна, то можно лишь утверждать, что $G_1(B)$ — нормальная подгруппа в $G(B)$, порожденная множеством $\exp B$. (Существенная часть этого результата принадлежит Лорху (см. также 81]).)

Следующая характеризация обратимых элементов относится к наиболее употребительным фактам теории банаховых алгебр.

Пусть φ — комплексный гомоморфизм банаховой алгебры B с единицей. Тогда он непрерывен; $\varphi(\mathbf{1})=1$ и $\varphi(x)\neq 0$ тогда, когда $x\in G(B)$. (Доказательство второй части утверждения следует из определения комплексного гомоморфизма, что касается первой части, то можно утверждать даже больше, что $|\varphi(x)|<<1$, если $\|x\|<1$. Действительно, если $\lambda\in\mathbf{C}$, $|\lambda|>1$, то элемент $\mathbf{1}-\lambda^{-1}x$ обратим и $\varphi(\mathbf{1}-\lambda^{-1}x)=1-\lambda^{-1}\varphi(x)\neq 0$, так что $\varphi(x)\neq\lambda\neq\alpha$.)◀

Гораздо удивительней, что свойство не обращаться в нуль на множестве $G(B)$ является определяющим для комплексных гомоморфизмов.

Теорема (Глисон, Кахан, Желяско). Если φ — линейный функционал на банаховой алгебре B такой, что $\varphi(\mathbf{1})=1$ и $\varphi(x)\times 0$ для $x\in G(B)$, то $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$, x, $y\in B$. (Красивое доказательство этой теоремы приведено в [81].)

7.3 Спектр элемента банаховой алгебры. *Спектром* $\sigma(x)$ элемента x банаховой алгебры B называется множество комплексных чисел λ, для которых элемент $x-\lambda\cdot\mathbf{1}$ не обратим в B. Дополнение к спектру в $\mathbf{C}$ называется *резольвентным множеством*.

Теорема 1. Спектр $\sigma(x)$ не пуст для каждого элемента $x\in B$. (Доказательство легко следует из теоремы Лиувилля, ибо, если спектр пуст, то функция $(x-\lambda\cdot\mathbf{1})^{-1}$ аналитична и ограничена в $\mathbf{C}$.)◀

Эта теорема позволяет ввести в рассмотрение *спектральный радиус элемента* x; так называется положительное число, определенное формулой

$$\rho(x)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(x)\}. \tag{1}$$

Теорема 2. Спектральный радиус $\rho(x)$ элемента $x\in B$ определяется соотношением

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}=\inf_{n\geqslant 1}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

Заметим, что в формуле (2) формально содержится неравенство

$$\rho(x)\leqslant\|x\|, \tag{3}$$

которое легко следует из того, что при $\lambda\in\mathbf{C}$, $|\lambda|>\|x\|$ элемент $x-\lambda\cdot\mathbf{1}$ обратим, т. е. $\lambda\notin\sigma(x)$.

Для доказательства формулы (2) нужно спектральный радиус $\rho(x)$ связать с радиусом сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$ и воспользоваться тем, что $\lambda \in \sigma(x)$ влечет за собой $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Последнее, в силу (3), означает, что $|\lambda|^n \leqslant \|x^n\|$ для всех натуральных n.

Из того, что $G(B)$ открыто в B, следует, что резольвентное множество открыто в $\mathbf{C}$, а значит, $\sigma(x)$ замкнуто в $\mathbf{C}$. Неравенство (3) показывает, что $\sigma(x)$ — компактное множество в $\mathbf{C}$.

Замечание. Факты, о которых рассказано в этом пункте, были открыты И. М. Гельфандом [106]. Формула (2) впервые появилась несколько раньше в уже упоминавшейся статье Бёрлинга [151] и относилась к алгебрам Бёрлинга примера (n) п. 7.1.2). Замечательной особенностью формулы (2) является то, что она связывает две величины, одна из которых — спектральный радиус, определяется только лишь алгебраической структурой на B, свойством элемента принадлежать группе $G(B)$ обратимых элементов, другая — метрической структурой на алгебре B.

Из теоремы о непустоте спектра немедленно вытекает

Теорема Гельфанда — Мазура. Если B — банахово поле (каждый ненулевой элемент банаховой алгебры B обратим), то B изометрически изоморфно полю комплексных чисел.

Перечисленные здесь факты являются основой для построения так называемого функционального исчисления на банаховых алгебрах, не обязательно коммутативных. Они являются ключевыми для построения теории коммутативных банаховых алгебр, к изложению которой мы переходим.

Всюду далее, если не оговорено противное, мы предполагаем, что алгебра B коммутативна.

7.4. Идеалы и максимальные идеалы коммутативной банаховой алгебры. Подалгебра I в B называется *идеалом*, если $xa \in I$ для всех $x \in B$ и $a \in I$. Идеал называется *собственным*, если $I \neq B$, $I \neq \{0\}$.

Собственный идеал, не содержащийся ни в одном другом собственном идеале, называется *максимальным идеалом*.

Если элемент $x \in B$ обратим, то он не содержится ни в одном собственном идеале (в противном случае такой идеал содержал бы 1_B и совпадал бы с B). Если же x не обратим, то множество $\{xy\}$, где y пробегает B, есть собственный идеал алгебры B.

Любое линейно упорядоченное по вложению семейство идеалов назовем *цепочкой* идеалов.

Теорема 1. Любой собственный идеал коммутативной банаховой алгебры содержится в максимальном.

Доказательство. Пусть I — собственный идеал в B.

Рассмотрим какую-нибудь цепочку идеалов, содержащую I. Объединение идеалов этой цепочки есть собственный идеал, равно как замыкание этого объединения, которое является максимальным элементом в цепочке. Существование максимального идеала, содержащего I, следует тогда из леммы Цорна.

Следующая теорема, дающая еще одну характеризацию обратимых элементов, указывает на связь между комплексными гомоморфизмами банаховой алгебры и ее максимальными идеалами. Это обстоятельство оказывается решающим для построения последующей теории и является открытием, оказавшим большое влияние на развитие гармонического анализа.

Теорема 2. Элемент a алгебры B обратим тогда и только тогда, когда он не содержится ни в одном максимальном идеале. Если банахова алгебра не содержит ни одного собственного идеала, то B — поле.

Пусть I — замкнутый идеал алгебры B. Элементы x и y в B называются *сравнимыми по идеалу* I, если $x—y\in I$. Множество всех различных классов сравнимых элементов алгебры B естественно наследует структуру кольца $((x+I)+(y+I)=x+ +y+I,\ (x+I)(y+I)=xy+I,\ x,\ y\in B)$. Для класса X, содержащего элемент x, определим норму $\|X\|=\inf\limits_{x\in B}\|x+a\|$. В силу замкнутости I, кольцо классов сравнимых элементов оказывается банаховой алгеброй относительно такой нормы. Эта алгебра называется *факторалгеброй* B по I и обозначается через B/I. Пусть $x\in B$, $X\in B/I$ и $x\in X$. Каноническое отображение $\pi: B\to B/I$, ставящее в соответствие каждому $x\in B$ класс $X\in B/I$, содержащий x, называется *каноническим* (естественным) *гомоморфизмом* и является непрерывным открытым отображением. Каноническим образом каждого замкнутого идеала алгебры B, содержащего I, будет при таком отображении замкнутый идеал алгебры B/I. Обратно, прообраз каждого замкнутого идеала алгебры B/I есть замкнутый идеал алгебры B, содержащий I. В частности, если M — максимальный идеал алгебры B, то алгебра B/M оказывается банаховым полем, изоморфным, согласно теореме Гельфанда—Мазура, полю **C**. Итак, справедлива

Теорема 3. Факторалгебра B/I алгебры B по замкнутому идеалу I изоморфна **C** тогда и только тогда, когда I — максимальный идеал алгебры B.

Факторалгебра может быть определена и для того случая, когда алгебра B не содержит единицы.

Замкнутый идеал I алгебры B называется *регулярным*, если факторалгебра B/I обладает единицей.

Из сказанного выше следует, что каждый регулярный собственный идеал алгебры B содержится в регулярном максимальном идеале.

Пусть, в заключение, B — банахова алгебра без единицы, B' — банахова алгебра, полученная из B присоединением единицы. Тогда между замкнутыми идеалами I' алгебры B' и замкнутыми регулярными идеалами I алгебры B устанавливается соответствие $I' \to I = I' \cap B$, которое является, в частности, взаимно однозначным отображением множества максимальных идеалов алгебры B', не содержащихся в B, на множество регулярных максимальных идеалов алгебры B.

7.5. Радикал. Пересечение всех максимальных идеалов банаховой алгебры называется ее *радикалом* и обозначается символом $\mathfrak{R}$.

Ясно, что $\mathfrak{R}$ — замкнутый идеал банаховой алгебры B. Если $x_0 \in \mathfrak{R}$, то функция $(x_0 - \lambda \cdot \mathbf{1})^{-1}$ существует для всех $\lambda \in \mathbf{C}$ и представляет собой аналитическую функцию в $\mathbf{C}$, исключая точку $\lambda = 0$. Более общо, $x_0 \in \mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда $\sigma(x_0) = \{0\}$.

Обращаясь к формуле (7.2.2), мы видим, что $x \in \mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0$. Поэтому элементы, принадлежащие радикалу банаховой алгебры, получили название *обобщенных нильпотентных элементов*. (Напомним, что *нильпотентные элементы* алгебры — это такие элементы x, для которых $x^n = 0$ при некотором натуральном n.)

Банахова алгебра называется *полупростой*, если ее радикал состоит из нуля алгебры.

Чуть позже мы увидим, почему важно выделять класс полупростых алгебр. В частности, факторалгебра банаховой алгебры по ее радикалу является полупростой.

Банахова алгебра называется *радикальной*, если она совпадает со своим радикалом, *нерадикальной* — в противном случае.

Примером радикальной алгебры является банахова алгебра (см. п. 7.1 (р)). О возрастании интереса к радикальным алгебрам свидетельствуют статьи в [75], посвященные проблематике радикальных алгебр.

Ясно, что радикал можно рассматривать в банаховой алгебре без единицы. Если алгебра B' получается из B присоединением единицы, как в п. 7.3, и $\mathfrak{R}'$ — ее радикал, то $\mathfrak{R} = B \cap \mathfrak{R}'$, где $\mathfrak{R}$ — радикал алгебры B.

7.6. Пространство максимальных идеалов банаховой алгебры и преобразование Гельфанда. В силу теоремы 3 п. 7.3., каждый регулярный максимальный идеал M банаховой алгебры B порождает комплексный гомоморфизм $\varphi_M : B \to B/M \cong \mathbf{C}$ такой, что $|\varphi_M(x)| \geqslant \|x\|$, причем M является ядром этого гомоморфизма. Обратно, если φ — ненулевой комплексный гомоморфизм банаховой алгебры B, то ядро этого гомоморфизма представляет собой регулярный максимальный идеал M алгебры B, так что $\varphi_M = \varphi$. Таким образом, множество всех регулярных максимальных идеалов алгебры B находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех ненулевых комплексных гомоморфизмов этой алгебры.

Пусть алгебра B обладает единицей. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех максимальных идеалов алгебры B. Поскольку $\varphi_M(\mathbf{1})=1$ для каждого $M\in\mathfrak{M}$ и $\|\mathbf{1}\|=1$, то $\|\varphi_M\|=1$, так что φ_M принадлежит единичной сфере пространства B^*, сопряженного банахову пространству B.

Для каждого $M\in\mathfrak{M}$ определяется функция $\hat{x}(M)$,

$$\hat{x}(M)=\varphi_M(x). \tag{1}$$

На множестве $\mathfrak{M}$ можно ввести топологию, слабейшую топологию, относительно которой функции $\hat{x}$ непрерывны для каждого $x\in B$. Иногда такую топологию называют *топологией Гельфанда* на множестве максимальных идеалов, а само множество $\mathfrak{M}$ с такой топологией — *пространством максимальных идеалов банаховой алгебры B*.

Теорема 1. Пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов банаховой алгебры B с единицей есть компактное хаусдорфово пространство, рассматриваемое как подпространство пространства B^*, наделенного слабой-* топологией.

Доказательство. Вкладывая $\mathfrak{M}$ в B^*, определим топологию Гельфанда на $\mathfrak{M}$ как относительную топологию пространства B^* со слабой-* топологией. Известно, что единичный шар в B^* компактен в слабой-* топологии. С другой стороны, множество $\mathfrak{M}$, принадлежащее единичному шару в B^*, выделено условием $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$, $x, y\in B$, $\varphi=\varphi_M$. Поэтому $\mathfrak{M}$ замкнуто в B^* и поскольку принадлежит компакту, то само является компактом.

Замечание 1. Если алгебра B не содержит единицы, то пространство $\mathfrak{M}_B$ ее регулярных максимальных идеалов оказывается локально компактным. Если B' — расширение B до алгебры с единицей, то расширение локально компактного пространства $\mathfrak{M}_B$ до компакта $\mathfrak{M}_{B'}$ соответствует процедуре компактификации Александрова, описанной в 2.1.4). Функции $\hat{x}$, $x\in B$, обращаются в нуль на «бесконечности», а алгебра B оказывается максимальным идеалом алгебры B', отвечающим точке (∞). Регулярный максимальный идеал алгебры B продолжается до максимального идеала алгебры B'.

Таким образом, функция $\hat{x}$, определенная на пространстве $\mathfrak{M}_B$ регулярных максимальных идеалов алгебры B формулой (1), принадлежит пространству $C(\mathfrak{M})$, если B содержит единицу, и пространству $C_0(\mathfrak{M})$, если B единицы не содержит.

Отображение $x\to\hat{x}$ обладает следующими свойствами:

(а) $(xy)^\wedge(M)=\varphi_M(xy)=\varphi_M(x)\varphi_M(y)=\hat{x}(M)\cdot\hat{y}(M)$ (в частности, если B содержит единицу $\mathbf{1}=\mathbf{1}_B$, то $\mathbf{1}^\wedge=1$),

(b) $(x+y)^{\wedge}(M)=\varphi_M(x+y)=\varphi_M(x)+\varphi_M(y)=\hat{x}(M)+\hat{y}(M)$,

(c) $(\alpha x)^{\wedge}(M)=\varphi_M(\alpha x)=\alpha\varphi_M(x)=\alpha\hat{x}(M)$,

(d) $\|\hat{x}(M)\|_{\infty}\leqslant\|x\|$,

(e) если $M_1\neq M_2$, то $\varphi_{M_1}\neq\varphi_{M_2}$ и, значит, существует элемент $x\in B$, для которого $\hat{x}(M_1)\neq\hat{x}(M_2)$. Это означает, что множество функций $\hat{x}$, где x пробегает B, *разделяет точки пространства* $\mathfrak{M}$.

Функция $\hat{x}$ называется *преобразованием Гельфанда элемента* x.

Отображение $x\to\hat{x}$ называется *гельфандовским представлением алгебры* B, а его образ—*гельфандовским образом алгебры* B. Сказанное выше можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. Гельфандовское представление есть гомоморфизм банаховой алгебры B в банахову алгебру $C(\mathfrak{M}_B)$ с равномерной нормой. Ядро этого гомоморфизма совпадает с радикалом $\mathfrak{R}_B$ алгебры B, а образ является разделяющей точки пространства $\mathfrak{M}_B$ подалгеброй алгебры $C(\mathfrak{M}_B)$.

Гельфандовское представление является алгебраическим изоморфизмом в том и только в том случае, если алгебра B полупростая.

Пусть $\hat{B}$—гельфандовский образ алгебры B. Тогда алгебры $\hat{B}$ и $B/\mathfrak{R}_B$, где $\mathfrak{R}_B$—радикал алгебры B, изоморфны. В частности, если B—полупростая алгебра, то изоморфизм между B и $\hat{B}$ есть канонический изоморфизм.

Таким образом, полупростая коммутативная банахова алгебра с единицей может быть реализована как (не обязательно замкнутая) разделяющая точки подалгебра алгебры непрерывных функций на компакте.

Легко доказать, что спектр элемента банаховой алгебры совпадает с множеством значений его преобразования Гельфанда. Действительно, если $x\in B$ и $\lambda\in\sigma(x)$, то элемент $x-\lambda\cdot 1$ не обратим, так что $x-\lambda\cdot 1$ принадлежит M для некоторого $M\in\mathfrak{M}_B$. Равенство (1) показывает, что $\hat{x}(M)-\lambda=0$ и $\hat{x}(M)=\lambda$. Эту цепочку импликаций можно обратить.◀

Как следствие, из этого факта получается еще одно представление для спектрального радиуса. Имеет место формула

$$\rho(x)=\|\hat{x}\|_{\infty},\quad x\in B. \tag{2}$$

Замечание 2. Мы уже обратили внимание на взаимосвязь двух структур, определенных на банаховой алгебре: алгебраической и метрической (топологической). Часто алгебраические свойства, которыми обладают некоторые объекты банаховой алгебры, накладывают отпечаток на их топологические свойства. Например, максимальный идеал коммутативной банаховой алгебры определяется только алгебраической структурой. Однако, он автоматически обладает топологическим свойством — замкнут в топологии банаховой алгебры. Как мы видели, то же самое относится к комплексному гомоморфизму банаховой алгебры (даже в некоммутативном случае), который автоматически оказывается непрерывным. В коммутативном случае этот результат допускает следующее усиление (по существу лишь формальное).

Теорема 3. Пусть B и B_1 — коммутативные банаховы алгебры, причем алгебра B_1 полупростая. Пусть φ — ненулевой гомоморфизм B в B_1. Тогда φ непрерывен и $\|\varphi\| \geqslant 1$. (Доказательство этой теоремы легко сводится к рассмотренному в п. 7.2 случаю, когда $B_1 = \mathbf{C}$ и к теореме о замкнутом графике.)

Следствие 1. Алгебраический изоморфизм полупростых банаховых алгебр является также топологическим изоморфизмом.

Следствие 2. Всякий автоморфизм полупростой банаховой алгебры непрерывен. (Это означает, что топология такой алгебры полностью определяется ее алгебраической структурой.)

Замечание 3. Не представляет труда дать описание максимальных идеалов в коммутативных банаховых алгебрах большинства примеров, указанных в п. 7.1. Обратим внимание лишь на два из них. Если $B = C(K)$, пример (а), то $\mathfrak{M}_B$ топологически изоморфно и гомеоморфно K, а алгебра $\hat{B}$ изоморфна алгебре $B = C(K)$. *Ключевым является пример* (b) *для случая, когда* $G = \mathbf{R}$. *В этом случае* $B^* = L^\infty(\mathbf{R})$. *Комплексный гомоморфизм алгебры* B *представляет собой элемент пространства* $L_\infty(\mathbf{R})$, *порожденный измеримой функцией* φ, *для которой* $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \in \mathbf{R}$. *Поэтому* $\varphi(x) = \exp(i\lambda x)$ *при некотором* $\lambda \in \mathbf{R}$, *преобразование Гельфанда оказывается преобразованием Фурье, а образ Гельфанда* $\hat{B}$ *совпадает с пространством* $\mathcal{F}^1(\mathbf{R})$.

Аналогичным образом, если $G = \mathbf{Z}$, то преобразованием Гельфанда на групповой алгебре $L^1(\mathbf{Z})$ является преобразование Фурье, а гельфандовским образом алгебры $L^1(\mathbf{Z})$ является алгебра Винера абсолютно сходящихся рядов Фурье, которую мы ввели в рассмотрение в главе 1 и обозначили W. Это обстоятельство дало поначалу дополнительный стимул для систематического изучения коммутативных банаховых алгебр и преобразования Гельфанда на них, которое оказалось возможным рассматривать как расширение понятия преобразования Фурье.

Теорема Винера о том, что если $f \in W$ и $f \neq 0$ на $\mathbf{R}$, то $\frac{1}{f} \in W$, которая привела Винера, как мы уже отмечали в § 12 главы 1, к аппроксимационной теореме и затем к общей тауберовой теореме, оказывается совершенно прозрачным фактом с точки зрения гельфандовской теории.

Действительно, то обстоятельство, что $f \in W$ и $f \neq 0$, означает, что f не принадлежит ни одному максимальному идеалу алгебры с единицей W и элемент f имеет обратный в W, так что $\frac{1}{f} \in W$.

Теперь уже ясно, что теория коммутативных банаховых алгебр дает возможность ввести в рассмотрение преобразование Фурье на локально компактной абелевой группе как преобразование Гельфанда. Такой путь реализован Д. А. Райковым в 1945 г. (см. [141]) и позже мы увидим как на этом пути получаются основные теоремы гармонического анализа на ЛКА группах, включая теорему двойственности.

По-настоящему трудной оказалась задача характеризации пространства максимальных идеалов банаховой алгебры $M(G)$, пример (c), где G — ЛКА группа. Для $G = \mathbf{R}$ эта задача была решена Ю. А. Шрейдером в 1950 г. (см. [148]).

7.7. Аналитические функции от элементов банаховой алгебры и теорема Винера—Леви. Здесь излагается важное обобщение теоремы Винера, упоминавшейся в предыдущем пункте.

Пусть B — коммутативная банахова алгебра, $x \in B$ и P — многочлен. Тогда $P(x) \in B$ и преобразование Гельфанда элемента $P(x)$ равно $P(\hat{x})$.

Поэтому если мы хотим определить аналитическую функцию f от элемента $x \in B$, то естественно позаботиться о том, чтобы множество значений функции $\hat{x}$ содержалось в области определения функции f.

Справедлива

Теорема Винера — Леви. Пусть B — полупростая банахова алгебра, $x \in B$ и f — аналитическая комплексная функция в области Ω, содержащей спектр $\sigma(x)$, элемента x. Тогда существует единственный элемент $y \in B$ такой, что $\hat{y} = f(\hat{x})$.

Пусть Γ — спрямляемый замкнутый контур, расположенный в Ω, и пусть $\sigma(x)$ находится внутри области, охватываемой контуром Γ.

Указанный в теореме элемент y строится с помощью интеграла Коши

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Легко видеть, что этот интеграл существует как элемент алгебры B. С помощью интегральной формулы Коши убеждаемся в том, что

$$\hat{y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\lambda - \hat{x}} = f(\hat{x}).$$

С распространением этого результата на аналитические функции нескольких переменных связано построение специального аналитического аппарата, который получил название функционального исчисления на элементах банаховой алгебры. Об этом аппарате, основанном на понятии совместного спектра системы элементов коммутативной банаховой алгебры, см., например [43]. Там же рассказано о различных приложениях функционального исчисления, например, к так называемой проблеме Кузена.

7.8. Симметричные банаховы алгебры. Пусть, по-прежнему, B — коммутативная банахова алгебра. Мы уже видели, что функции подалгебры $\hat{B}$ алгебры $C(\mathfrak{M}_B)$ разделяют точки компакта $\mathfrak{M}_B$. Возникает вопрос, при каких условиях подалгебра $\hat{B}$ плотна в $C(\mathfrak{M}_B)$?

Нетрудно привести пример алгебры B, для которой $(\hat{B})^- \neq C(\mathfrak{M}_B)$. Для этого рассмотрим частный случай в (f), п. 7.1, когда компакт $\bar{K}$ представляет собой замыкание единичного круга $K = D$ в $\mathbf{C}$. Обозначим через $A(\bar{K})$ алгебру функций, аналитических в K, непрерывных в $\bar{K}$. Ясно, что $(A(\bar{K}))^{\wedge}$ можно отождествлять с $A(\bar{K})$ и что $A(\bar{K})$ — замкнутая подалгебра в $C(\bar{K})$. Поэтому $A(\bar{K}) \neq C(\bar{K})$.

Ответ на поставленный вопрос можно дать, опираясь на известную теорему Стоуна—Вейерштрасса (см., например, [64]).

Мы дадим здесь две формулировки этой теоремы: вещественную и комплексную.

Теорема Стоуна-Вейерштрасса (вещественный вариант). *Пусть K — непустой хаусдорфов компакт. Тогда любая подалгебра алгебры $C_R(K)$, разделяющая точки и состоящая из функций, одновременно не обращающихся в нуль ни в одной точке K, плотна в $C_R(K)$.*

Теорема Стоуна-Вейерштрасса (комплексный вариант). *Пусть K — непустой хаусдорфов компакт. Тогда любая подалгебра алгебры $\mathbf{C}(K)$, разделяющая точки, состоящая из функций, одновременно не обращающихся в нуль ни в одной точке K, и замкнутая относительно операции комплексного сопряжения, плотна в $C(K)$.*

Назовем банахову алгебру B *симметричной*, если ее гельфандовский образ $\hat{B}$ симметричен, т. е. вместе с каждой функцией $\hat{x} \in \hat{B}$ содержит комплексно сопряженную с ней функцию $(\overline{\hat{x}})$, которая является преобразованием Гельфанда некоторого элемента банаховой алгебры B, обозначаемого x^*.

Тем самым, в симметричной банаховой алгебре определено отображение $x \to x^*$, дающее пример так называемой инволюции, о которой мы расскажем чуть позже.

Пусть коммутативная банахова алгебра B симметрична. Тогда к ее гельфандовскому образу $\hat{B}$ применим комплексный вариант теоремы Стоуна—Вейерштрасса и, значит, подалгебра $\hat{B}$ алгебры $C(\mathfrak{M}_B)$ плотна в $C(\mathfrak{M}_B)$, так что каждая непрерывная на $\mathfrak{M}_B$ функция является равномерным пределом последовательности функций из $\hat{B}$.

Коммутативная банахова алгебра B без единицы называется *симметричной,* если симметрична банахова алгебра B', полученная из B присоединением единицы.

Как следствие предыдущего результата получается, что если коммутативная банахова алгебра B без единицы симметрична, то ее гельфандовский образ есть плотная подалгебра в алгебре $C(\mathfrak{M}_B)$ непрерывных на $\mathfrak{M}_B$ функций, обращающихся в нуль на бесконечности.

Обратим внимание также еще на два следствия предыдущего результата.

Следствие 1. Если в симметричной банаховой алгебре B

$$\|x\| = \sup_{M \in \mathfrak{M}_B} |\hat{x}(M)|,$$

то B изометрически изоморфна алгебре $C(\mathfrak{M}_B)$. (Доказательство очевидно.)

Следствие 2. Если банахова алгебра B симметрична и для любого элемента x выполняется равенство $\|x^2\| = \|x\|^2$, то B изометрически изоморфна алгебре $C(\mathfrak{M}_B)$.

Доказательство. Из (7.5.2) и (7.3.2) следует, что

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\|x\|^{2^n}} = \|x\|. \blacktriangleleft \quad (1)$$

Пусть D — единичный круг в $\mathbf{C}$. Приведенный выше пример несимметричной алгебры $A(D)$ интересен еще и тем, что для любой функции $f \in A(D)$ ее максимум модуля достигается на границе круга D.

В теории равномерных алгебр важную роль играет понятие границы для пространства максимальных идеалов.

Подмножество Γ пространства максимальных идеалов $\mathfrak{M}_B$ банаховой алгеброй B называется *границей для алгебры* B, если для любой функции $\hat{x} \in \hat{B}$ ее максимум модуля достигается на Γ. Как показал Г. Е. Шилов (см. [148]), пересечение всех замкнутых границ для алгебры B является границей для B. Это обстоятельство позволяет дать следующее

Определение. Пересечение всех замкнутых границ для B называется *границей Шилова алгебры* B и обозначается через ∂B.

Для случая алгебры $A(D)$ граница Шилова совпадает с топологической границей круга — единичной окружностью и отлична от пространства максимальных идеалов алгебры $A(D)$.

Одно из важных свойств симметричной банаховой алгебры состоит в том, что граница Шилова пространства его максимальных идеалов совпадает со всем пространством максимальных идеалов.

7.9. Алгебры регулярных борелевских мер и эффект Винера—Питта. Одним из содержательных примеров несимметричной коммутативной банаховой алгебры является алгебра примера (c) п. 7.1 регулярных борелевских мер на локально компактной недискретной абелевой группе G. Формула (5.13.9) показывает, что банахова алгебра $M(G)$ обладает инволюцией $\mu \to \mu^*$ (здесь μ^* определена как в формуле (5.13.9)). Тем не менее (см. [80]), в алгебре $M(G)$ существует мера μ такая, что $\mu = \mu^*$, преобразование Гельфанда которой не является вещественнозначной функцией (например, преобразование Гельфанда меры μ^2 в некоторой точке пространства максимальных идеалов банаховой алгебры $M(G)$ равно -1). Отсюда немедленно следует несимметричность алгебры $M(G)$. Еще одним легким следствием этого результата является *эффект Винера—Питта,* иногда называемый *эффектом «скрытого спектра»*, суть которого заключается в теореме.

Теорема (Винер—Питт [218]).[1] На $\mathbf{R}$ существует мера μ, $\mu \in M(\mathbf{R})$, преобразование Фурье которой

$$\hat{\mu}(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\lambda}\, d\mu(\lambda)$$

отделено от нуля

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} |\hat{\mu}(x)| > 0,$$

но $(\hat{\mu})^{-1}$ не является преобразованием Фурье никакой меры, принадлежащей $M(\mathbf{R})$.

Этот результат допускает различные толкования и говорит о том, насколько трудно охарактеризовать функции, являющиеся преобразованиями Фурье мер.

На языке банаховых алгебр этот результат допускает следующую интерпретацию. Пусть Δ — пространство максимальных идеалов банаховой алгебры $M(\mathbf{R})$, наделенное гельфандовской топологией. Тогда $\mathbf{R}$ вкладывается в Δ с помощью отображения $x \to \hat{\mu}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $\mu \in M(\mathbf{R})$, и в силу теоремы Винера—Питта образ $\mathbf{R}$ не плотен в Δ. Отождествляя образ $\mathbf{R}$ с $\mathbf{R}$, мы видим, что множество $\Delta \setminus \mathbf{R}$ непусто (на самом деле, велико).

В таких случаях принято говорить что *пространство максимальных идеалов имеет корону.* В данном случае существует *«сильная» корона,* ибо для справедливости неравенства $\Delta \setminus \mathbf{R} \neq \varnothing$ было бы достаточно существования конечного числа

[1] В доказательстве Винера и Питта имелся изъян, который впоследствии был выправлен.

мер $\mu_1, \ldots, \mu_n$, порождающих собственный идеал в $M(\mathbf{R})$ и «отделенных от нуля» в совокупности

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} (|\hat{\mu}_1(x)| + \ldots + |\hat{\mu}_n(x)|) > 0.$$

У нас же $n=1$.

Язык операторов свертки объясняет, почему об эффекте Винера—Питта говорят как об *эффекте скрытого спектра*. Мера $\mu \in M(\mathbf{R})$ позволяет определить оператор T_μ, действующий в пространстве $L^1(\mathbf{R})$ по формуле

$$(T_\mu f)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\, d\mu(y), \quad f \in L^1(\mathbf{R}).$$

Нетрудно видеть, что отображение $\mu \to T_\mu$ является изометрическим изоморфизмом алгебры мер $M(\mathbf{R})$ на алгебру коммутирующих операторов (T_μ). (Действительно, $\|\mu\| = \|T_\mu\|$ и $T_{\mu * \nu} = T_\mu T_\nu = T_\nu T_\mu, \mu, \nu \in M(\mathbf{R})$.)

Эта алгебра допускает инвариантное описание в пространстве всех ограниченных операторов в $L^1(\mathbf{R})$.

Теорема (Вендель [212]). Класс операторов в $L^1(\mathbf{R})$, коммутирующих со сдвигами $L_x = R_x$ на $\mathbf{R}$, — это в точности алгебра операторов (T_μ), $\mu \in M(\mathbf{R})$.

Заметим, что в действительности Вендель доказал эту теорему для групповых алгебр локально компактных групп.

Пользуясь теоремой Венделя и тем, что мере Дирака $\delta \in M(\mathbf{R})$ отвечает единичный оператор $T_\delta = I$, можно показать, что спектр оператора T_μ совпадает со спектром меры μ в банаховой алгебре $M(\mathbf{R})$, т. е. $\operatorname{Sp} T_\mu = \sigma(\mu)$.

Результат Винера—Питта на операторном языке означает, что спектр оператора T_μ не исчерпывается множеством $\overline{\{\hat{\mu}(\mathbf{R})\}}$.

Заметим, что сказанное здесь остается справедливым, когда $\mathbf{R}$ заменяется произвольной локально компактной абелевой группой. Более общей является ситуация, когда алгебра мер рассматривается на полугруппах. Впечатляющий подход к этой ситуации был развит Тейлором [209], [210].

В заключение мы ограничимся специальным случаем, относящимся к уравнению Винера—Хопфа на $\mathbf{R}^+$.

С мерой $\mu \in M(\mathbf{R})$ свяжем оператор

$$(W_\mu f)(x) = \int_{\mathbf{R}^+} f(y)\, d\mu(x-y), \quad x \geqslant 0,$$

который называется *оператором Винера—Хопфа* и действует из $L^p(\mathbf{R}^+)$ в $L^p(\mathbf{R}^+)$ для $p \in [1, +\infty]$. Нетрудно выразить оператор W_μ через T_μ, $W_\mu = PT_\mu$, где P — естественная проекция, действующая из $L^p(\mathbf{R})$ в $L^p(\mathbf{R}^+)$.

Отображение $\mu \to W_\mu$ не является гомоморфизмом и поэтому W_μ^{-1} не обязан существовать, даже если μ^{-1} существует.

Несложно доказать, что если мера $\mu \in M(\mathbf{R})$ допускает факторизацию вида

$$\mu = \mu_- * \mu_+,$$

где μ_- — обратимый элемент алгебры $M(\mathbf{R}^-)$, а μ_+ — обратимый элемент алгебры $M(\mathbf{R}^+)$, то оператор W_μ обратим.

Один из способов получения указанной факторизации состоит в следующем. Пусть $\mu \in M(\mathbf{R})$ *имеет логарифм*, т. е. представляется в виде $\mu = e^\nu$, где $\nu \in M(\mathbf{R})$, и пусть $\nu_+ = \nu / \mathbf{R}^+$, а $\nu_- = \nu - \nu_+$. Тогда $\mu_+ = e^{\nu_+}$ и $\mu_- = e^{\nu_-}$ — обратимые элементы в $M(\mathbf{R}^+)$ и $M(\mathbf{R}^-)$, соответственно, и $\mu = \mu_- * \mu_+$. Поэтому если $\mu \in M(\mathbf{R})$ имеет логарифм, то оператор Винера—Хопфа обратим в $L^p(\mathbf{R}^+)$ для всех p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Тейлор показал, что для $p=1$ верно обратное.

7.10. Оболочки идеалов и ядра. Регулярные банаховы алгебры. *Оболочкой* или *коспектром идеала* I коммутативной банаховой алгебры B называется пересечение всех максимальных идеалов алгебры B, содержащих I. Оболочку идеала I обычно обозначают символами $h(I)$ или $\operatorname{cosp} I$.

Ясно, что оболочка идеала есть замкнутое подмножество пространства максимальных идеалов и что оболочка замкнутого идеала I совпадает с множеством всех максимальных идеалов факторалгебры B/I.

Пусть E — некоторое подмножество в $\mathfrak{M}_B$. *Ядром* множества E называется пересечение всех максимальных идеалов алгебры B, отвечающим точкам из E. Это ядро обозначается $\ker E$ и является замкнутым идеалом алгебры B. Если $E = \varnothing$, то $\ker E \overset{\text{def}}{=} B$.

Подмножество E в $\mathfrak{M}_B$ называется *оболочкой,* если E есть оболочка некоторого идеала алгебры B. В этом случае E — оболочка идеала $\ker E$.

Поскольку конечное объединение оболочек и произвольное пересечение оболочек есть снова оболочка, то семейство оболочек можно рассматривать как семейство замкнутых подмножеств некоторой топологии на $\mathfrak{M}_B$. Эта топология называется *ядерно-оболочной* (ср. с топологией Зарисского—Джекобсона на аффинном пространстве). Замыкание $\overline{F}$ множества $F \subset \mathfrak{M}_B$ в ядерно-оболочной топологии есть оболочка идеала $\ker F$, так что $M \in \mathfrak{M}_B$ принадлежит $\overline{F}$ в том и только в том случае, если из $\hat{x}(F) = 0$ следует $\hat{x}(M) = 0$ для любого $x \in B$. Поэтому ядерно-оболочная топология совпадает с обычной топологией тогда и только тогда, когда она хаусдорфова. Это бывает не всегда, а лишь в тех случаях, когда любое замкнутое подмножество в $\mathfrak{M}_B$ в обычной топологии является оболочкой; т. е. когда для любого замкнутого подмножества $F \subset \mathfrak{M}_B$ и любой точки

$M \in \mathfrak{M}_B \setminus F$ существует элемент $x \in B$ такой, что $\hat{x}(M) \neq 0$, а $\hat{x}(F) = 0$.

Банахова алгебра, обладающая таким свойством, называется *регулярной банаховой алгеброй* (см. [147]).

Замечание. Нетрудно показать, что если B — банахова алгебра без единицы, а B' — банахова алгебра, полученная из алгебры B присоединением единицы, то регулярность одной из них влечет за собой регулярность другой.

Позже мы увидим, что групповые алгебры ЛКА групп являются регулярными банаховыми алгебрами.

Если банахова алгебра B регулярна, то для нее справедлив следующий вариант леммы Урысона, см. п. 2.1.

Теорема. Если B — регулярная банахова алгебра, то семейство $\hat{B}$ нормально, т. е. для любой пары E и F непересекающихся подмножеств в $\mathfrak{M}_B$ найдется элемент $x \in B$ такой, что $\hat{x}(E) = 1$, $\hat{x}(F) = 0$. Если B к тому же симметрична, то тогда элемент x можно выбрать таким, что $0 \leqslant \hat{x} \leqslant 1$ на $\mathfrak{M}_B$.

Из этой теоремы вытекает вариант теоремы Дьедонне (там же).

Пусть B — регулярная коммутативная банахова алгебра с единицей. Пусть, далее, $U_1, \ldots, U_n$ — какое-нибудь открытое покрытие пространства $\mathfrak{M}_B$. Тогда существуют элементы $x_1, \ldots, x_n \in B$, сумма которых равна 1_B, такие, что $0 \leqslant \hat{x}_i \leqslant 1$ и $\operatorname{supp} \hat{x}_i \subset U_i$ $i = 1, \ldots, n$.

Пусть B — регулярная коммутативная банахова алгебра с единицей, J — идеал алгебры B. Имеет смысл следующее определение.

Скажем, что элемент x *принадлежит идеалу J в точке* $M_0 \in \mathfrak{M}_B$, если существует элемент $y \in J$ такой, что $\hat{x} = \hat{y}$ в некоторой окрестности точки M_0. Из теоремы Дьедонне следует, что если x принадлежит идеалу J в каждой точке $\mathfrak{M}_B$, то $x \in J$. Аналогично можно сказать относительно непрерывной функции на компакте $\mathfrak{M}_B$[1].

Заметим, что с этим свойством регулярной алгебры мы уже встречались в главе 1 для случая, когда B есть алгебра Винера, см. 1.2.6.

Ясно, что алгебры примера (f) в п. 7.1, состоящие из аналитических функций, равно как их подалгебры, нерегулярны. Таким образом, алгебра W^+ абсолютно сходящихся рядов Тейлора, пространство максимальных идеалов которой состоит из всех точек замкнутого единичного круга, а элементы образуют подалгебру в $A(D)$, нерегулярна. То же самое можно сказать о банаховой алгебре $L^1(\mathbf{R}^+)$, которая является подал-

[1] Если $f \in C(\mathfrak{M}_B)$ и для каждой точки $M_0 \in \mathfrak{M}_B$ существует элемент $y \in J$ такой, что $f = \hat{y}$ в некоторой окрестности точки M_0, то $f \in J$.

геброй групповой алгебры $L^1(\mathbf{R})$. Пространство максимальных идеалов алгебры $L^1(\mathbf{R}^+)$ может быть отождествленно с множеством всех точек в $\mathbf{C}$, расположенных, например, в нижней полуплоскости, преобразование Гельфанда совпадает с преобразованием Фурье и имеет вид

$$\hat{f}(\lambda)=\int_{\mathbf{R}^+} f(x)\, e^{-i\lambda x}dx$$

для $f \in L^1(\mathbf{R}^+)$. Функция $\hat{f}$ продолжается как аналитическая в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и, поскольку она не может обратиться в нуль на множестве положительной меры на $\mathbf{R}$, алгебра $L^1(\mathbf{R}^+)$ не является регулярной.

Еще более интересный переход от регулярности к нерегулярности можно видеть на примере (n) п. 7.1 алгебр Бёрлинга $L_\varphi(\mathbf{R})$, состоящих из функций f, для которых, напомним, сходится интеграл (7.1.2), а вес φ удовлетворяет условиям $\varphi \geqslant 1$ и (7.2.1). Из условия (7.2.1) следует, что существуют пределы

$$\alpha^- = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log\varphi(x)}{x}, \quad \alpha^+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\varphi(x)}{x} \tag{1}$$

и пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов алгебры $L_\varphi(\mathbf{R})$ может быть отождествлено со всеми точками замкнутой полосы

$$\alpha^- \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \alpha^+$$

в $\mathbf{C}$, а преобразование Фурье функции $f \in L_\varphi(\mathbf{R})$ есть аналитическая функция в этой полосе, непрерывная в замкнутой полосе. Поэтому если хотя бы одно из чисел α^-, α^+, определенных в (1), отлично от нуля, то алгебра Бёрлинга $L_\varphi(\mathbf{R})$ нерегулярна.

Предположим теперь, что оба предела в (1) равны нулю. Тогда пространство максимальных идеалов алгебры $L_\varphi(\mathbf{R})$ отождествляется с $\mathbf{R}$, а регулярность или нерегулярность алгебры Бёрлинга $L_\varphi(\mathbf{R})$ зависит от сходимости или расходимости интеграла

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\log\varphi(x)}{1+x^2}\,dx. \tag{2}$$

Если интеграл (2) расходится, то совокупность всех элементов алгебры $L_\varphi(\mathbf{R})$ образует так называемый *квазианалитический класс.*

Если функция из этого класса обращается в нуль на некотором интервале в $\mathbf{R}$, то она тождественно равна нулю и, значит, алгебра Бёрлинга в квазианалитическом случае не может быть регулярной.

Если интеграл (2) сходится, то алгебра Бёрлинга $L_\varphi(\mathbf{R})$ регулярна. (Доказательство этого факта со всеми комментариями можно найти, например, в [113].) Поэтому, в частности, в алгебре $L_\varphi(\mathbf{R})$ существуют функции, преобразования Фурье которых финитны. Это обстоятельство выражает крайнюю сторону принципа неопределенности Гейзенберга: если функция убывает на бесконечности не очень быстро, т. е., например, принадлежит $L_\varphi(\mathbf{R})$ и интеграл (2) сходится, то ее преобразование Фурье может убывать максимально быстро вплоть до обращения в нуль в окрестности бесконечно удаленной точки ∞. (О «среднем» положении принципа неопределенности мы упоминали в п. 1.5.3.) Заметим, что алгебры Бёрлинга представляют собой удобный объект для точного выражения принципа неопределенности в квазианалитическом случае (интеграл (2) расходится), когда ограничение на возможную максимальную скорость убывания преобразования Фурье функции $f \in L_\varphi(\mathbf{R})$ связано с так называемым преобразованием Лежандра веса φ. (О других вариантах принципа неопределенности см. в статье В. П. Хавина в томе 15 настоящей серии.)

Заметим, что рассмотрение алгебр Бёрлинга допустимо на произвольной ЛКА группе. В случае, когда $\mathbf{R}^n$ заменяется такой группой, определение в примере (п) п. 7.1 дословно повторяется с заменой $\mathbf{R}^n$ на G.

Найденное Домаром [163] условие регулярности банаховой алгебры $L_\varphi^1(G)$ или, что то же самое, *условие неквазианалитичности веса* φ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log \varphi(x^n)}{1+n^2} < \infty \quad \text{для всех } x \in G. \tag{3}$$

Разумеется, для случая $G=\mathbf{R}$ условие (3) равносильно условию сходимости интеграла (2). Это условие обсуждается в [54]. Доказательство результата Домара и приложение этого результата к представлениям ЛКА групп с отделимым спектром имеется в недавно вышедшей монографии Ю. И. Любича [21].

В заключение обратим внимание на важное свойство регулярных банаховых алгебр — граница Шилова таких алгебр совпадает с их пространством максимальных идеалов.

7.11. Спектральный синтез идеалов. Пусть B — регулярная полупростая банахова алгебра с единицей или без нее, $\mathfrak{M}_B$ — пространство максимальных идеалов алгебры B и E — замкнутое подмножество и, стало быть, оболочка в $\mathfrak{M}_B$. Рассмотрим совокупность J_E всех идеалов I алгебры B, оболочка которых совпадает с E, т. е. таких, что $h(I)=E$. Множество J_E обладает максимальным элементом (им, очевидно, является идеал $I(E)=\ker E$) и минимальным элементом, который может быть описан как множество

$$J(E)=\{x \in B : \hat{x} \in C_K(\mathfrak{M}_B),\ \operatorname{supp} \hat{x} \cap E=\varnothing\}. \tag{1}$$

Действительно, если обозначить через $I_0(E)$ замыкание идеала $J(E)$, то нетрудно показать, что для любого замкнутого идеала I из $J(E)$ выполняется соотношение

$$I_0(E) \subset I \subset I(E). \qquad (2)$$

Замечание. Из формулы (2) и теоремы Винера—Леви вытекает следующий факт, имеющий многочисленные приложения в спектральной теории функций.

Пусть B — регулярная полупростая банахова алгебра и $x, y \in A$. Если $\hat{x} \in C_K(\mathfrak{M}_B)$ и $\hat{y}$ не обращается в нуль на множестве $\operatorname{supp} \hat{x}$, то уравнение $yz = x$ имеет решение $z \in B$.

Определение 1. Множество $E \subset \mathfrak{M}_B$ называется *множеством спектрального синтеза* или *спектральным*, если $I(E) = I_0(E)$, другими словами, если замыкание любого идеала I, для которого $h(I) \subset E$, совпадает с $\ker E$. Замкнутый идеал I банаховой алгебры B называется *спектральным*, если его оболочка есть спектральное множество.

Проблема описания спектральных идеалов — одна из самых глубоких и трудных в теории банаховых алгебр, в гармоническом анализе. Особенно принципиальным является случай, когда банахова алгебра есть групповая алгебра $L^1(G)$ локально компактной абелевой группы G. В этом случае указанная проблема и в самом деле есть проблема спектрального синтеза, проблема восстановления сложного колебательного движения по его спектру.

Для того, чтобы в этом убедиться, свяжем с функцией $g \in L^\infty(G)$ наибольший идеал I_g алгебры $L^1(G)$, обладающий тем свойством, что

$$\langle f, \bar{g} \rangle = 0 \quad \text{для всех } f \in I_g.$$

Тогда *спектром элемента* $g \in L^\infty(G)$ естественно назвать оболочку или коспектр идеала I_g. То обстоятельство, что I_g — спектральный идеал алгебры $L^1(G)$, означает, что для элемента g *имеет место спектральный синтез*, т. е. элемент g можно аппроксимировать в слабой-* топологии «тригонометрическими многочленами» — конечными линейными комбинациями характеров вида

$$\sum_{k=1}^{n} C_K \bar{\chi}_k,$$

где $c_k \in \mathbf{C}$, $\chi_k \in \operatorname{Cosp} I_g \subset \hat{G}$, $k = 1, \ldots, n$, $\hat{G}$ — группа, двойственная группе G.

На глубину проблемы спектрального синтеза указывает ее нетривиальность даже в простейших случаях, которые мы сейчас рассмотрим.

(а) $E = \varnothing$. В этом случае, интересном лишь тогда, когда алгебра B не содержит единицы, $\ker E = B$, а $J(E)$ — множество всех тех элементов алгебры B, преобразование Гельфанда которых имеет компактный носитель. Таким образом, пустое множество E спектрально тогда и только тогда, когда $J(E)$ плотно в B, и если последний факт имеет место, то о банаховой алгебре B говорят, что она *допускает спектральный синтез на бесконечности*. Например, пустое множество является спектральным для алгебры $L^1(\mathbf{R})$ (и, вообще, для алгебры $L^1(G)$, где G — ЛКА группа) и этот факт представляет собой переформулировку аппроксимационной теоремы Винера (см. также гл. 1, п. 11.1 и гл. 2, п. 8.8) и можно интерпретировать так же, как *теорему о непустоте спектра* нетривиальной функции из пространства $L^\infty(G)$: спектр элемента $g \in L^\infty(G)$ пуст тогда и только тогда, когда $g=0$.

(b) $E=\{M_0\}$, $M_0 \in \mathfrak{M}_B$. В этом случае $\ker E$ совпадает с максимальным идеалом M_0. Замкнутый идеал I алгебры B, принадлежащий $J(E)$ и отличный от $\ker E$, называют *примарным идеалом*, а одноточечное множество E спектрально тогда и только тогда, когда в алгебре B отсутствуют примарные идеалы, принадлежащие $\ker E$. Например, для алгебры $L^1(G)$, G — ЛКА группа, одноточечное множество в $\hat{G}$ спектрально, т. е. в $L^1(G)$ примарные идеалы отсутствуют. На языке спектральной теории функций из $L^\infty(G)$ это означает, что спектр элемента $g \in L^\infty(G)$ одноточечный тогда и только тогда, когда g пропорционален характеру.

Определение 2. Пусть B — коммутативная банахова алгебра с пространством максимальных идеалов $\mathfrak{M}_B$. Пусть, далее, для каждой точки $M \in \mathfrak{M}_B$ и каждого элемента $x \in \operatorname{Ker}(\{M\})$ существует последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ элементов из B такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n x - x \| = 0$$

и каждая функция $\hat{x}_n$ обращается в нуль вне некоторой окрестности U_n точки M $(\bigcap U_n=\{M\})$. В таком случае говорят, что алгебра *B удовлетворяет условию Диткина*.

Можно показать (см., например, гл. 2, § 3), что алгебра $L^1(G)$, G — ЛКА группа, удовлетворяет условию Диткина.

Для алгебры, удовлетворяющей условию Диткина, справедлива следующая теорема о спектральном синтезе.

Теорема Диткина. Пусть B — регулярная полупростая банахова алгебра, удовлетворяющая условию Диткина. Пусть I — замкнутый идеал алгебры B и граница множества $h(I)$ не содержит непустых совершенных множеств. Тогда I — спектральный идеал, а $h(I)$ — спектральное множество.

В применении к пространству $L^\infty(G)$, где G — ЛКА группа, теорема Диткина означает, что если граница элемента $g \in L_\infty(G)$ не содержит непустых совершенных подмножеств, то для g имеет место спектральный синтез.

Из теоремы Диткина, в частности, следует, что одноточечное и пустое множества являются спектральными для групповой алгебры $L^1(G)$, G — ЛКА группа. Поэтому, в силу сказанного выше, теорема Винера есть частный случай теоремы Диткина. Любопытно, что В. А. Диткин, доказавший эту теорему для $L^1(\mathbf{R})$ и для других классических групповых алгебр, в своей статье 1939 г. упускает это обстоятельство. Что касается связи проблематики строения идеалов групповых алгебр с гармоническим анализом и синтезом, то она была вполне осознана в конце 40-х г. после появления упоминавшихся в § 12, гл. 1 работ Бёрлинга по спектральной теории функций, где проблема спектрального синтеза оказалась центральной.

7.12. Инволютивные банаховы алгебры. Операция комплексного сопряжения в симметричной банаховой алгебре допускает следующее важное обобщение.

Инволюцией комплексной алгебры A называют отображение $x \to x^*$, действующее из A в A и обладающее следующими свойствами

$$(x^*)^* = x, \quad (x+y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*, \quad (xy)^* = y^* x^*,$$

$$x, y \in A, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

Элемент x^* алгебры A называют *сопряженным* элементу x, а элемент $x \in A$ такой, что $x^* = x$, называют *самосопряженным.*

Комплексная алгебра A с инволюцией называется *инволютивной.*

Если алгебра A содержит единицу, то $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$ и алгебру A называют *инволютивной алгеброй с единицей.* В инволютивной алгебре с единицей можно определить *унитарный* элемент x такой, что $x^* = x^{-1}$. Если A — инволютивная алгебра без единицы, A' — алгебра, полученная из A присоединением единицы, то на A' можно ввести инволюцию, полагая $(\lambda\mathbf{1} + a)^* = \bar{\lambda}\mathbf{1} + a^*$, $a \in A$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

Если φ — линейный функционал на инволютивной алгебре A, то отображение $x \to \overline{\varphi(x^*)}$, $x \in A$, тоже является линейным функционалом на A. Этот функционал обозначается φ^* и называется *сопряженным* с φ.

Если $\varphi = \varphi^*$, то функционал φ называют *эрмитовым. Инволютивной банаховой алгеброй* называют банахову алгебру B, снабженную инволюцией $x \to x^*$ такой, что $\|x\| = \|x^*\|$ для всех $x \in B$.

Замечание. Иногда инволютивной банаховой алгеброй называют банахову алгебру, снабженную непрерывной инволюцией. Такую алгебру всегда можно перенормировать так, чтобы инволюция оказалась изометрической.

Инволютивная коммутативная банахова алгебра B называется *симметричной*, если $(x^*)\hat{} = \overline{(\hat{x})}$ для каждого элемента $x \in B$ (черта означает комплексное сопряжение). В этом случае *инволюция* также называется *симметричной.*

Для полупростой банаховой алгебры это определение может быть согласовано (после перенормировки) с определением п. 7.7.

Примеры. (a) $B=C(K)$. Отображение $f \to \bar{f}$ является инволюцией. B — инволютивная банахова алгебра с симметричной инволюцией.

(b) $B=\mathscr{L}(H)$ — алгебра всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H. Отображение $A \to A^*$, A^* — сопряженный оператор, есть инволюция.

(c) $B=A(D)$ (пример (f), п. 7.1); отображение, определенное формулой $f(z) \to \overline{f(\bar{z})}$, является инволюцией коммутативной банаховой алгебры $A(D)$, однако эта алгебра не является симметричной: если $f(x) \in A(D)$ и $\overline{f(z)} \in A(D)$, то $f=\text{Const}$.

(d) Отображение $\mu \to \overline{\mu(x^{-1})} = \overline{\mu \circ \Delta}$ в алгебре мер $M(G)$ есть изометрическая инволюция. Алгебра $M(G)$ не является симметричной.

7.13. C^*-алгебры. 1) *C^*-алгеброй* называется инволютивная банахова алгебра B такая, что

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \text{для всех } x \in B. \tag{1}$$

Алгебра $C(K)$ в примере (a) дает простейший пример C^*-алгебры.

Главной причиной выделения класса C^*-алгебр из инволютивных является то обстоятельство, что важнейший пример инволютивной алгебры — алгебра примера (b) ограниченных операторов $\mathscr{L}(H)$ в гильбертовом пространстве H является C^*-алгеброй.

Инволютивная алгебра примера (c), элементы которой напомним, суть функции, аналитические в единичном круге D в $\mathbf{C}$, непрерывные в замкнутом круге $\bar{D}$, а инволюция означает переход к комплексно сопряженным коэффициентам Тейлора, C^*-алгеброй не является.

Действительно, если $f=1+iz$, то $f^*=1-iz$, $f^*f=1+z^2$. Имеем

$$\|f\|^2 = \left(\max_{z \in D} |1+iz|\right)^2 = 4, \quad \|f^*f\| = \max_{z \in D} |1+z^2| = 2,$$

так что (1) не выполняется.

Инволютивная алгебра примера (d), вообще говоря, не является C^*-алгеброй.

Банахова алгебра $\mathbf{C}$, разумеется, является C^*-алгеброй и в следующей теореме дается усиленный вариант теоремы о непрерывности комплексного гомоморфизма, упомянутой в п. 7.2.

Теорема 1. Если π — гомоморфизм инволютивной банаховой алгебры A в C^*-алгебру B такой, что $\pi(x^*)=\pi(x)^*$, то для всех $x \in A$ справедливо неравенство $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$.

Доказательство. Если y — эрмитов элемент из A, то $\|y^2\|=\|y\|^2$, и в силу (7.7.1), $\rho(y)=\|y\|$.

Если $x\in A$, то $\sigma_B(\pi(x))\subset\sigma_A(x)$, следовательно, $\rho(\pi(x))\leqslant\rho(x)\leqslant\|x\|$ и

$$\|\pi(x)\|^2=\|\pi(x^*x)\|=\rho(\pi(x^*x))\leqslant\|x^*x\|=\|x\|^2. ◀$$

Пусть B — C^*-алгебра, B' — инволютивная алгебра, полученная из B присоединением единицы. Тогда на B' существует и притом единственная норма, относительно которой B' становится C^*-алгеброй.

Алгебру B' называют *C^*-алгеброй, полученной из B присоединением единицы.*

Свойства эрмитовых и унитарных элементов C^*-алгебр подобны свойствам эрмитовых и унитарных операторов из $\mathscr{L}(H)$.

Пусть B — C^*-алгебра. Если h — эрмитов элемент, то $\sigma(h)\subset\mathbf{R}$. Если u — унитарный элемент, то $\sigma(u)\subset\mathbf{T}$.

Отметим, наконец, что если B — C^*-подалгебра в A и $x\in B$, то $\sigma_A(x)=\sigma_B(x)$.

2) Коммутативные C^*-алгебры. Пусть B — коммутативная C^*-алгебра. Если x — эрмитов элемент в B, то $\hat{x}$ — вещественная функция на $\mathfrak{M}_B$. Поэтому если $x\in B$, то $(x^*)^\wedge=\overline{(x^\wedge)}$, т. е. функционал $\hat{x}(M)$ при каждом $M\in\mathfrak{M}_B$ эрмитов. По теореме Стоуна—Вейерштрасса из п. 7.7 образ Гельфанда алгебры B — плотный в C^*-алгебре $C_0(\mathfrak{M}_B)$. Покажем, что преобразование Гельфанда алгебры B есть изометрическое отображение. Действительно,

$$\|x\|^2=\|xx^*\|=\|\hat{x}\cdot\overline{(x^\wedge)}\|_\infty=\|\hat{x}\|^2_\infty \tag{2}$$

и мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Преобразование Гельфанда есть изометрический изоморфизм коммутативной C^*-алгебры на алгебру $C_0(\mathfrak{M}_B)$.

Следствие 1. Коммутативная C^*-алгебра полупростая.

Следствие 2. Если x — *нормальный элемент* C^*-алгебры, т. е. такой, что $x^*x=xx^*$, то $\|x\|=\rho(x)$. (Доказательство немедленно следует из теоремы, так как x и x^* порождают коммутативную алгебру.)

Следствие 3. Пусть x — неотрицательный эрмитов элемент в B, так что спектр $\sigma(x)\subset\mathbf{R}^+$. Если $\alpha>0$, то существует единственный элемент y, $\sigma(y)\subset\mathbf{R}^+$, такой, что $y^\alpha=x$. Этот элемент обозначается x^α.

3. C^*-алгебра, обертывающая инволютивную банахову алгебру. Пусть A — инволютивная банахова алгебра. Пусть $\pi: A\to B$ — гомоморфизм алгебры A в C^*-алгебру B. Согласно теореме 1, нормы всех таких гомоморфизмов π равномерно ограничены. Введем в рассмотрение в A полунорму $\|\ \|_*$, определенную равенством

$$\|x\|_*=\sup\|\pi(x)\|,$$

где sup берется по всем таким C^*-алгебрам B. Полунорма $\|\cdot\|_*$ — самая сильная C^*-полунорма вида $\|\pi(x)\|$. Обозначим через N множество элементов $x \in A$ таких, что $\|x\|_*=0$. Полезно ввести следующее определение.

Пополнение факторалгебры A/N по норме, индуцированной полунормой $\|\cdot\|_*$ называется *C^*-алгеброй, обертывающей инволютивную банахову алгебру A*. Эта обертывающая алгебра обозначается $\mathrm{St}\, A$.

Возвращаясь к ситуации теоремы 1, мы видим, что гомоморфизм π инволютивной банаховой алгебры A в C^*-алгебру B однозначно продолжается как гомоморфизм $\pi' : \mathrm{St}\, A \to B$. Причем если $j: A \to \mathrm{St}\, A$, то $\pi = \pi' \circ j$.

Если A — коммутативная алгебра, то $\mathrm{St}\, A$ также коммутативна.

Если A содержит единицу, то $\mathrm{St}\, A$ также содержит единицу.

Пусть A — коммутативная инволютивная банахова алгебра. Обозначим через H множество всех эрмитовых точек пространства $\mathfrak{M}_A$ (точка $M \in \mathfrak{M}$ *эрмитова*, если ей отвечает эрмитов мультипликативный функционал). Ясно, что все точки пространства $\mathfrak{M}_{\mathrm{St}A}$ эрмитовы. Пусть $\mathfrak{R}$ — радикал алгебры A. Если $x \in \mathfrak{R}$, то

$$xx^* \in \mathfrak{R} \Rightarrow \rho(xx^*)=0 \Rightarrow \rho(j(x)\, j^*(x))=0 \Rightarrow \|j(x)\, j^*(x)\|=0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. Каноническое вложение инволютивной коммутативной банаховой алгебры B в C^*-алгебру $\mathrm{St}\, B$ индуцирует гомеоморфизм $\mathfrak{M}_{\mathrm{St}B}$ на множество всех эрмитовых точек из $\mathfrak{M}_B$. Канонический образ радикала алгебры B в $\mathrm{St}\, B$ есть нуль.

Замечание. C^*-алгебры под названием вполне регулярных колец были впервые введены в рассмотрение И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком в 1943 г. [107]. С тех пор эта теория интенсивно развивалась и развивается. Она нашла многочисленные применения в теории представлений групп и алгебр, теории операторов в гильбертовом пространстве, теории динамических систем, в статистической физике и квантовой теории поля. Ей посвящена обширная литература (см. например, [37]).

7.14. Положительные функционалы на инволютивной банаховой алгебре. Представление Райкова—Бохнера. Наш экскурс в теорию банаховых алгебр мы завершим рассказом об одном из наиболее общих вариантов теоремы Бохнера.

Линейный функционал Φ, определенный на инволютивной банаховой алгебре B, называется *положительным*, если $\Phi(xx^*) \geqslant 0$ для $x \in B$.

Положительный функционал Φ, определенный на инволютивной банаховой алгебре B без единицы, можно продолжить с сохранением положительности на банахову алгебру B', полученную из B присоединением единицы. При этом

$$\Phi((x+\lambda 1)(x+\lambda 1)^*)=\Phi(xx^*)+\lambda\Phi(x^*)+\bar{\lambda}\Phi(x)+|\lambda|^2\Phi(1),$$

откуда обычным путем получается, что

$$\Phi(x^*)=\overline{\Phi(x)}, \quad |\Phi(x)|^2\leqslant\Phi(1)\Phi(xx^*). \tag{1}$$

Из (1) можно вывести следующее неравенство, см., например,

$$\Phi(xx^*)\leqslant\Phi(1)\rho(xx^*)=\Phi(1)\|(xx^*)^\wedge\|_\infty. \tag{2}$$

По теореме Хана—Банаха функционал Φ продолжается на C^*-алгебру $\mathrm{St}\, B$ и остается применить теорему Рисса для получения интегрального представления функционала в виде

$$\Phi(x)=\int\limits_{H=\mathfrak{M}_{\mathrm{St}\, B}}\hat{x}(M)\,d\mu(M), \tag{3}$$

где μ — неотрицательная мера с нормой, равной $\Phi(1)$. Интеграл распространен по пространству H в $\mathfrak{M}_B$, состоящему из эрмитовых элементов.

Если, в частности, инволюция в B симметричная, то каждый элемент пространства $\mathfrak{M}_B$ эрмитов и интеграл (3) распространен по пространству $\mathfrak{M}_B$.

Обозначим через K множество всех положительных функционалов Φ на B (B — коммутативная банахова алгебра с симметричной инволюцией), удовлетворяющих условию $\Phi(1)\leqslant 1$. Пусть M^+ — множество всех положительных регулярных борелевских мер на $\mathfrak{M}_B$, для которых $\mu(\mathfrak{M}_B)=1$. Тогда формула (3), где $H=\mathfrak{M}_B$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между выпуклыми множествами K и M^+, причем крайним точкам соответствуют крайние точки.

В частности мультипликативные линейные функционалы на B суть в точности крайние точки множества K.

В заключение сформулируем результат Люмера, обобщающий и одновременно упрощающий предыдущую конструкцию.

Теорема (Люмер [186]). Пусть B — коммутативная банахова алгебра с единицей. Пусть Γ — конечная группа сохраняющих норму преобразований алгебры B, удовлетворяющих условию

$$\gamma xy=\gamma x\cdot\gamma y \text{ для всех } \gamma\in\Gamma,\ x, y\in B.$$

Пусть Φ — линейный функционал на B с нормой, равной 1, причем $\Phi(1)=1$, по отношению к каждой эквивалентной исходной норме на B, обладающей свойством Γ-инвариантности: $\|\gamma x\|=\|x\|$, $\gamma\in\Gamma$, $x\in B$. Тогда этот функционал представляется в виде

$$\Phi(x)=\int\limits_{\mathfrak{M}_B}\hat{x}\,d\mu, \tag{4}$$

где μ — вероятностная мера на $\mathfrak{M}_B$.

Доказательство основано на следующем соображении. Для фиксированного элемента $x \in B$ такого, что $\rho(x) < 1$, строится норма $|||\cdot|||$, эквивалентная исходной, обладающая свойством Γ-инвариантности и такая, что $|||x||| \leqslant 1$. Для такой нормы по условию имеем

$$|\Phi(x)| \leqslant |||x||| \leqslant 1. \tag{5}$$

Из (5) получается, что для любого $y \in B$ справедливо неравенство

$$|\Phi(y)| \leqslant \|\hat{y}\|_\infty = \rho(y),$$

из которого уже обычным образом выводится часть теоремы, обозначенная словом «тогда». Вторая часть теоремы проверяется без труда.

Остается конструкция нормы $|||\cdot|||$. Сначала строится промежуточная норма $\|\ \|'$

$$\|y\|' = \sup(\|(\gamma_1 x^{j_1} \ldots \gamma_n x^{j_n})\, y\|),$$

где $y \in B$, а sup берется по всем $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ и по всем наборам неотрицательных целых чисел $j_1, \ldots, j_n$. После чего

$$|||y||| = \sup_{z \neq 0} \frac{\|yz\|'}{\|z\|'}. \blacktriangleleft$$

Случай инволютивной коммутативной банаховой алгебры — частный случай ситуации, рассмотренной Люмером, когда группа преобразований состоит из двух элементов — тождественного и инволюции.

§ 8. Элементы гармонического анализа на локально компактных абелевых группах

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что G — локально компактная абелева (ЛКА) группа. Меру Хаара на ЛКА группе, нормированную, если группа дискретная или компактная как в п. 5.2, мы будем обозначать dx, а интеграл по мере Хаара от измеримой функции f записывать в виде

$$\int_G f(x)\, dx,$$

обеспечивающем по аналогии с интегралом Лебега большую гибкость относительно операций сдвига и инверсии.

Ближайшая наша цель — определение преобразования Фурье на ЛКА группе, а вопрос о нормировке меры Хаара, определенной с точностью до постоянного множителя, мы намерены обсудить несколько позже в связи с формулой обращения для преобразования Фурье.

Групповую операцию на ЛКА группе G мы будем, если не оговорено противное, интерпретировать как сложение, а единицу группы G обозначать через $\mathbf{0} = \mathbf{0}_G$.

8.1. Характеры и двойственная группа для ЛКА группы G. Комплексный гомоморфизм $\chi: G \to \mathbf{T}$ ЛКА группы G в мультипликативную групу $\mathbf{T}$ называется *характером* группы G.

Таким образом, $\chi(x)$ — комплексная функция, для которой

(a) $\chi(x+y)=\chi(x)\chi(y)$, $x, y \in G$,

(b) $|\chi(x)|=1$, $x \in G$.

Множество всех характеров группы G можно наделить структурой абелевой группы, если суммой двух характеров χ_1 и χ_2 объявить характер $\chi_1+\chi_2$, определенный формулой

$$(\chi_1+\chi_2)(x)=\chi_1(x)\cdot\chi_2(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

единицей группы всех характеров считать характер $\mathbf{O}$ такой, что $\mathbf{O}(x)=1$ для $x \in G$, а обратный к χ характер $(-\chi)$ определить формулой

$$(-\chi)(x)=\chi^{-1}(x)=\overline{\chi}(x). \tag{2}$$

Ясно, что множество всех непрерывных характеров ЛКА группы G также является абелевой группой относительно определенных формулами (1) и (2) групповых операций. Эту группу называют *группой харакеров* группы G или *двойственной группой для ЛКА группы* G и обозначают $\hat{G}$.

Каждую ЛКА группу G мы иногда будем одновременно рассматривать в дискретной топологии, обозначая ее символом G_d. Тогда множество всех, в том числе неизмеримых характеров группы G, образует группу $(G_d)\hat{}$, двойственную группе G_d. (Легко показать, что измеримый характер непрерывен).

8.2. Эквивалентные топологии на $\hat{G}$. Попытаемся ввести на группе характеров $\hat{G}$ ЛКА группы G топологию. Для этого мы обратимся к групповой алгебре $L^1(G)$ и выразим характер χ через преобразование Гельфанда элемента $f \in L^1(G)$.

Как мы знаем, множество максимальных идеалов банаховой алгебры $L^1(G)$ можно отождествить с множеством ненулевых комплексных гомоморфизмов этой алгебры. Если Φ — ненулевой комплексный гомоморфизм алгебры $L^1(G)$, то для функции $f \in L^1(G)$ имеет место представление

$$\Phi(f)=\int_G f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in L^\infty(G). \tag{3}$$

Записывая $\Phi(f*g)$ для f, $g \in L^1(G)$ двумя способами

$$\Phi(f*g)=\iint_{G\times G}\varphi(x+y)f(x)g(y)\,dxdy \tag{4}$$

и

$$\Phi(f*g)=\Phi(f)\cdot\Phi(g)=\iint_G \varphi(x)\varphi(y)f(x)g(y)\,dxdy, \tag{5}$$

мы, сравнивая (4) и (5), приходим к равенству

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y). \tag{6}$$

Из (6) и (3) вытекает, что для любой $f \in L^1(G)$, $\Phi(f) \neq 0$,

$$\Phi(f_x) = \varphi(x)\,\Phi(f), \tag{7}$$

а из (7) и нетривиальности Φ немедленно следует, что функция $\varphi(x) = \frac{\Phi(f_x)}{\Phi(f)}$ непрерывна, поскольку непрерывна операция сдвига на группе в $L^1(G)$ (см. п. 5.13). Поэтому φ можно записать в виде $\varphi = (-\chi)$, $\chi \in \hat{G}$. Если теперь определить отображение $f \to \hat{f}(\chi)$, $\chi \in \hat{G}$ с помощью формулы

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\,(-\chi)(x)\,dx, \tag{8}$$

то легко видеть, что это отображение есть комплексный гомоморфизм алгебры $L^1(G)$ и (8) можно отождествить с преобразованием Гельфанда элемента $f \in L^1(G)$. Сказанное выше означает, что формулой (8) исчерпываются все комплексные гомоморфизмы алгебры $L^1(G)$ и, таким образом, справедлива

Теорема 1. Между всеми характерами из двойственной группы $\hat{G}$ и всеми регулярными максимальными идеалами банаховой алгебры $L^1(G)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. При этом

$$\chi(x) = \frac{\hat{f}(\chi)}{\hat{f}_x(\chi)}, \tag{9}$$

где $\hat{f}$ — преобразование Гельфанда элемента $f \in L^1(G)$.

Ясно, что правая часть в (9) не зависит от $f \in L^1(G)$, для которой $\hat{f}(\chi) \neq 0$.

В соответствии с теоремой, мы в дальнейшем отождествляем $\hat{G}$ и $\mathfrak{M}_{L^1}$ и наделяем группу $\hat{G}$ топологией, перенесенной из пространства максимальных идеалов $\mathfrak{M}_{L^1}$ банаховой алгебры $L^1(G)$, т. е. гельфандовской топологией, базу окрестностей элемента $\chi_0 \in \hat{G}$ которой составляют, напомним, окрестности, образованные совокупностью всех характеров $\chi \in \hat{G}$, удовлетворяющих неравенству

$$|\hat{f}(\chi) - \hat{f}(\chi_0)| < \varepsilon \tag{10}$$

при фиксированных $f \in L^1(G)$, $\varepsilon > 0$. Окрестность вида (10) обозначается $V(\chi_0, f, \varepsilon)$. Перечислим простые свойства, которыми обладает банахова алгебра $L^1(G)$. Некоторые из них вытекают из теоремы 1, некоторые проверяются непосредственно.

Следствие 1. Банахова алгебра $L^1(G)$ обладает симметричной инволюцией: $\hat{f}^*(\chi) = (\overline{\hat{f}(-\chi)})$. (Это следует из того, что $(-\chi) = \bar{\chi}$, так что каждый максимальный идеал эрмитов.)

Следствие 2. Групповая алгебра $L^1(G)$ полупростая. Действительно, элементы $f \in L^1(G)$ действуют в $H = L^2(G)$ как ограниченные линейные операторы f_T из $\mathscr{L}(H)$, так что $f \to f_T$ гомоморфизм $L^1(G)$ в $\mathscr{L}(H)$, $f_T: h \to h*f$, $h \in L^2(G)$ и $\|f_T\| \leqslant \|f\|_1$. Из нормальности оператора f_T получается $\|f_T\|^n = \|f_T{}^n\| \leqslant \|f^n\|_1$ или $\rho(f) \geqslant \|f_T\| > 0$ при $f \neq 0$.◀

Впрочем можно, пополняя $L^1(G)$ по операторной норме, получить $\mathrm{St}\, L^1(G)$ — обертывающую C^*-алгебру инволютивной алгебры $L^1(G)$ и воспользоваться теоремой 7.11.3.)

Следствие 3. Если $\hat{f}(\chi_1) = \hat{f}(\chi_2)$ для всех $f \in L^1(G)$ $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$, то $\chi_1 = \chi_2$.

Следствие 4. Если $x_1, x_2 \in G$, $x_1 \neq x_2$, то существует характер $\chi \in \hat{G}$ такой, что $\chi(x_1) \neq \chi(x_2)$. Другими словами *каждая ЛКА группа обладает достаточным множеством характеров* ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_{x_1} \neq f_{x_2}$ для некоторой $f \in L^1(G) \Rightarrow$ $\Rightarrow \hat{f}_{x_1}(\chi) \neq \hat{f}_{x_2}(\chi)$ для некоторого $\chi \in \hat{G}$ (следствие 2) $\Rightarrow \chi(x_1) \neq$ $\neq \chi(x_2)$ (формула (9))).

Следствие 5. Алгебра преобразований Гельфанда $(L^1(\hat{G}))$ плотна в $C_0(\hat{G})$.

Следствие 6. Любая непрерывная функция на ЛКА группе аппроксимируется конечными линейными комбинациями характеров (см. п. 7.7).

Доказательство того, что относительно гельфандовской топологии двойственную группу $\hat{G}$ можно рассматривать как ЛКА группу, удобно разбить на три шага.

1-й шаг. Характер $\chi(x)$, $x \in G$, $\chi \in \hat{G}$, непрерывен на декартовом произведении $G \times \hat{G}$ по совокупности переменных. Это немедленно следует из (9).

2-й шаг. На группе $\hat{G}$ вводится еще одна топология — топология равномерной сходимости на компактах в G. Базу окрестностей элемента $\chi_0 \in \hat{G}$ образуют множества $U(\chi_0, K, \delta)$ характеров $\chi \in \hat{G}$ таких, что $|\chi(x) - \chi_0(x)| < \delta$, когда $x \in K$, K — компакт в G, $\delta > 0$. Пользуясь тем, что $C_K(G)$ плотно в $L^1(G)$, и представлением Гельфанда (8), нетрудно показать, что эта топология эквивалентна топологии Гельфанда.

3-й шаг. Если $\chi \in U\left(\chi_0, K, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $\chi' \in U_0\left(\chi_0', K, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, то при $x \in K$

$$|(\chi + \chi')(x) - (\chi_0 + \chi_0')(x)| = |\chi(x)\chi'(x) - \chi_0(x)\chi_0'(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |\chi(x)(\chi'(x) - \chi_0'(x))| + |\chi_0'(x)(\chi(x) - \chi_0(x))| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и групповая операция непрерывна во второй топологии. Непрерывность обратного элемента следует из того, что характер $\in \chi \hat{G}$ эрмитов: $(-\chi)(x) = \overline{\chi(x)}$. Тем самым, доказана теорема.

Теорема 2. Относительно каждой из указанных выше эквивалентных топологий $\hat{G}$ является ЛКА группой.

Прежде чем сделать естественный шаг и ввести в рассмотрение ЛКА группу $\hat{\hat{G}}$, обратимся к элементарным примерам.

8.3. Примеры двойственности.

Пример 1. Группа $\hat{\mathbf{R}}$, двойственная группе $\mathbf{R}$. Пусть $\chi\in\hat{\mathbf{R}}$. Положим $\chi(10^{-n})=\exp ia_n$, где $0\leqslant a_n\leqslant 2\pi$, $n\geqslant 0$. В силу непрерывности χ, $a_n\to 0$ при $n\to\infty$. С другой стороны, легко видеть, что $10a_{n+1}-a_n$ кратно 2π. Поэтому существует n_0 такое, что $a_{n+1}=10^{-1}a_n$ при $n>n_0$. Полагая $10^{n_0}a_{n_0}=a$, находим, что $a_n=10^{-n}a$ для $n>n_0$. Из равенства $\chi(10^{-n})=\exp(i10^{-n}a)$ получаем, что для $r\in\mathbf{Z}$

$$\chi(r10^{-n})=\exp(ir10^{-n}a).$$

Поэтому равенство $\chi(x)=\exp(ixa)$, справедливое для всех $x=r\cdot 10^{-n}$, по непрерывности продолжается на все $x\in\mathbf{R}$. Осталось заметить, что $\chi:x\to\exp(ixa)$ есть непрерывный характер. Итак, ЛКА группа $\hat{\mathbf{R}}$ изоморфна $\mathbf{R}$.

Пример 2. Группа $\hat{\mathbf{T}}$, двойственная $\mathbf{T}$. Так как $\mathbf{T}\cong\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ [1], то каждый непрерывный характер группы $\mathbf{T}$ можно отождествить с непрерывным характером группы $\mathbf{R}$, равным 1 на $\mathbf{Z}$, т. е. таким, для которого $a=2\pi\mathbf{Z}$ (a из примера 1). Поэтому ЛКА группа $\hat{\mathbf{T}}$ изоморфна $\mathbf{Z}$, и если $\chi\in\hat{\mathbf{T}}$, то χ имеет вид $\chi=\exp(2\pi inx)$, $n\in\mathbf{Z}$, $x\in\mathbf{R} \bmod 1$ или $\chi:\zeta\to\zeta^n$, $\zeta\in\mathbf{T}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 3. Группа $\hat{\mathbf{Z}}$, двойственная $\mathbf{Z}$. Каждый характер χ группы $\mathbf{Z}$ имеет вид $\chi(n)=\zeta^n$, где $\zeta\in\mathbf{T}$, и каждый элемент $\zeta\in\mathbf{T}$ порождает характер по той же формуле. Поэтому $\hat{\mathbf{Z}}=\mathbf{T}$.

Пример 4. ЛКА группа, двойственная к конечному прямому произведению ЛКА групп, изоморфна прямому произведению двойственных групп, так как каждому элементу $(\chi_i)\in\prod_i \hat{G}_i$ однозначно сопоставляется характер χ, действующий по формуле $\chi:(x_i)\to\prod_i\chi_i(x_i)$.

В частности, группа характеров группы $\mathbf{R}^n$ может быть отождествлена с $\mathbf{R}^n$, а функция $\chi(x)$ имеет вид $\exp(i\chi\cdot x)$, где

$$\chi=(\chi_i)_1^n,\quad x=(x_i)_1^n,\quad \chi\cdot x=\sum_1^n\chi_i\cdot x_i.$$

Более общо, группа характеров элементарной группы, т. е. группа вида

$$\mathbf{R}^n\times\mathbf{Z}^m\times\mathbf{T}^k\times F\quad (F\text{ — конечная группа})$$

также является элементарной группой. Это непосредственно следует из сказанного выше и того элементарного факта, что

---

[1] $\cong$ означает изоморфизм.

группа, двойственная конечной группе, сама является конечной группой.

Пример 5. Группа, двойственная $\mathbf{Z}(n)$. Непосредственно ясно, что элементы $(\mathbf{Z}(n))^{\wedge}$ суть все корни n-й степени из 1, так что $(\mathbf{Z}(n))^{\wedge}$ изоморфна $\mathbf{Z}(n)$.

Следующий пример играет фундаментальную роль в теории ЛКА групп.

Пример 6. Двойственность компактных и дискретных групп.

Теорема. Двойственная группа дискретной группы компактна. Двойственная группа компактной группы дискретна.

Доказательство. Если G дискретна, то $L^1(G)$ содержит единицу. Согласно теореме 8.1.1, $\hat{G}$ — компактная группа.

Пусть G — компактная группа и пусть $\chi \in \hat{G}$. Из равенств

$$\int_G \chi(x)\,dx = \int_G \chi(x+x_0)\,dx = \chi(x_0)\int_G \chi(x)\,dx$$

следует, что либо $\chi(x_0)=1$, т. е. $\chi=0$, либо $\int_G \chi(x)\,dx=0$.

Принимая во внимание нормировку меры Хаара для компактной группы G, находим, что если $f\equiv 1$, $\hat{f}$ — преобразование Гельфанда элемента f, то

$$\hat{f}(\chi)=\begin{cases}0, & \chi\neq 0,\\ 1, & \chi=0.\end{cases}$$

Так как функция $\hat{f}$ непрерывна, то топология на $\hat{G}$ дискретна. ◀

Пример 7. Группа, двойственная полному (соответственно, слабому) прямому произведению ЛКА групп, изоморфна слабому (соответственно, полному) прямому произведению групп, двойственных к сомножителям исходной группы. (В качестве иллюстрации стоит еще раз обратить внимание на пример п. 2.8.)

Пример 8. Группа, двойственная проективному (соответственно, инъективному) пределу ЛКА групп, изоморфна инъективному (соответственно, проективному) пределу соответствующих двойственных групп.

В частности, в соответствии с формулой (2.9.3),

$$\mathbf{Z}_p = \varprojlim_n \mathbf{Z}(p^n), \quad p \text{ — простое число},$$

в то время как двойственная к группе $\mathbf{Z}_p$ группа $\mathbf{Z}(p^\infty)$ — квазициклическая группа — представляется в виде индуктивного предела групп $\mathbf{Z}(p^n)$.

Пример 9. Группа, двойственная аддитивной группе локально компактного непрерывного поля (локального поля). Пусть

K — локальное поле и пусть χ — какой-нибудь нетривиальный характер аддитивной группы K^+ поля K, $\chi \in (K^+)^\wedge$. Тогда при любом $a \in K$ функция $\chi(ax)$ также принадлежит $(K^+)^\wedge$. Можно показать, что характерами $\chi(ax)$ исчерпываются все характеры группы $(K^+)^\wedge$ и $(K^+)^\wedge \cong K^+$.

В частности, аддитивная группа $(\mathbf{Q}_p)^\wedge$ изоморфна аддитивной группе поля $\mathbf{Q}_p$.

Заметим, что требование непрерывности (недискретности) поля существенно, ибо если поле K дискретно, то $\hat{K}$ — компактная группа, и, стало быть, изоморфна K лишь в том случае, когда K — конечное поле.

Группу характеров аддитивной группы поля $\mathbf{Q}_p$ можно вычислить и непосредственно. Проще всего это сделать, рассмотрев предварительно группу $\mathbf{Q}^{(p)}$ рациональных p-ичных чисел и указывая ее группу характеров (эта группа характеров и есть p-адический соленоид, Ω_p, определенный в п. 3.6). Выделяя после этого те характеры из Ω_p, которые непрерывны в p-адической топологии, и замечая, что $\mathbf{Q}^{(p)}$ — плотная подгруппа в $\mathbf{Q}_p$, мы сможем получить явный вид для характера $\chi(ax)$, а именно

$$\chi(ax) = \exp(2\pi i a x), \qquad (1)$$

причем целую часть p-адического числа ax можно в (1) отбросить.

(Более подробную информацию о двойственности для локальных полей можно найти, например, в [91]. Двойственные группы для групп $\mathbf{Q}_\mathbf{a}$, $\mathbf{Z}_\mathbf{a}$ и $\Omega_\mathbf{a}$ вычислены в [51].)

Завершая рассмотрение этих простых примеров, обратим внимание на следующее обстоятельство. Каждый раз вторая двойственная группа для группы G оказывается изоморфной самой группе G. Этот факт имеет универсальный характер и получил в мировой литературе название теоремы Понтрягина или теоремы Понтрягина-ван Кампена.

8.4. Преобразование Фурье на ЛКА группе. Для функции $f \in L^1(G)$ определим *преобразование Фурье* той же формулой, что и преобразование Гельфанда

$$(\mathcal{F} f)(\chi) = \hat{f}(\chi) = \int_G \overline{\chi(x)}\, f(x)\, dx, \quad \chi \in \hat{G}. \qquad (1)$$

Вместе с преобразованием Фурье мы будем рассматривать также *копреобразование Фурье*

$$(\overline{\mathcal{F}} f)(\chi) = \int_G \chi(x)\, f(x)\, dx, \quad \chi \in \hat{G}. \qquad (2)$$

Аналогичным образом *преобразование Фурье* и *копреобразование Фурье* определяются для *мер* $\mu \in M(G)$

$$(\mathcal{F}\mu)(\chi)=\hat{\mu}(\chi)=\int_G \overline{\chi(x)}\,d\mu(x), \quad \chi\in\hat{G},$$
$$(\overline{\mathcal{F}}\mu)(\chi)=\int_G \chi(x)\,d\mu(x), \quad \chi\in\hat{G}. \tag{3}$$

Класс всех функций на $\hat{G}$ вида (1) обозначается $\mathcal{F}^1(\hat{G})$, а класс всех функций на $\hat{G}$ вида (3) будем обозначать $(\mathcal{F}M)(\hat{G})$. Таким образом, $\mathcal{F}^1(G)$ можно рассматривать как подкласс $(\mathcal{F}M)(\hat{G})$, отвечающий абсолютно непрерывным мерам.

Перечислим алгебраические свойства преобразования Фурье в $L^1(G)$:

(a) $(\alpha f+\beta g)^\wedge=\alpha\hat{f}+\beta\hat{g}$, α, $\beta\in\mathbf{C}$, f, $g\in L^1(G)$;
(b) $(f*g)^\wedge=\hat{f}\cdot\hat{g}$;
(c) $({}_af)^\wedge=\overline{\chi(a)}\,\hat{f}$;
(d) $(\chi(a)\,f)^\wedge=(\hat{f}_{(-a)})^\wedge$;
(e) $(f^*)^\wedge=\overline{\mathcal{F}f}$.

Кроме того, из свойств преобразования Гельфанда следует что элементы из $\mathcal{F}^1(\hat{G})$ представляют собой непрерывные функции, образующиеся в нуль на бесконечности в $\hat{G}$ (лемма Римана — Лебега), для которых

(f) $\|\hat{f}\|_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}(\|f^n\|)^{\frac{1}{n}}\leqslant\|f\|_1$.

Аналогичным образом для преобразования Фурье мер имеют место соотношения:

(a) $(\alpha\mu+\beta\nu)^\wedge=\alpha\hat{\mu}+\beta\hat{\nu}$, μ, $\nu\in M(G)$, α, $\beta\in\mathbf{C}$;
(b) $(\mu*\nu)^\wedge=\hat{\mu}\cdot\hat{\nu}$, μ, $\nu\in M(G)$;
(c) $\mathcal{F}(\mu^*)=\overline{(\mathcal{F}\mu)}$, $\mu\in M(G)$;
(d) $\mathcal{F}(\delta_x)(\chi)=\overline{\chi(x)}$, $x\in G$, $\chi\in\hat{G}$, в частности, $\mathcal{F}\delta=1$;
(e) $(\mathcal{F}(\delta_x*\mu))(\chi)=\overline{\chi(x)}\,(\mathcal{F}\mu)(\chi)$, $\mu\in M(G)$, $x\in G$, $\chi\in\hat{G}$;
(f) $\mathcal{F}(\chi\cdot\mu)=\delta_\chi*(\mathcal{F}\mu)=(\mathcal{F}\mu)_\chi$, $\mu\in M(G)$, $\chi\in\hat{G}$.

Кроме того, если $\mu\in M(G)$, то функция $\hat{\mu}$ непрерывна и

$$\|\hat{\mu}\|_\infty\leqslant\|\mu\|_{M(G)}.$$

Следовательно, преобразование Фурье есть гомоморфизм инволютивных алгебр $L^1(G)$ и $M(G)$ в инволютивные алгебры $C_0(\hat{G})$, $C(\hat{G})$, соответственно.

Замечание. Для функций из $L^1(G)$ (в отличие от мер из $M(G)$) преобразование Фурье зависит от нормировки меры Хаара. Это обстоятельство будет учтено, когда мы расскажем о формулах обращения.

Заметим также, что преобразование Фурье, определенное на $L^1(G)$, продолжается по непрерывности на C^*-алгебру $\mathrm{St}\,L^1(G)$, изоморфно ее отображая на $C_0(\hat{G})$.

Из того, что банахова алгебра $L^1(G)$ полупростая (следствие 8.2.2), немедленно вытекает *теорема единственности для преобразования Фурье в* $L^1(G)$: если $f \in L^1(G)$ и $\mathcal{F}f=0$ на $\hat{G}$, то $f=0$ почти всюду.

Позже мы увидим, что алгебра $M(G)$ также полупростая, более того, аналогичная теорема единственности имеет место для преобразований Фурье мер из $M(G)$. Однако двойственную теорему легко доказать уже сейчас.

Если $\mu \in M(\hat{G})$ и $\overline{\mathcal{F}}\mu=0$ на G, то $\mu=0$. (Из равенства $\int\limits_{\hat{G}} \chi(x)\, d\mu(\chi)=0$ следует, что $\int\limits_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\, d\mu(\chi)=0$ для всех $f \in L^1(G)$, а значит, в силу плотности $\mathcal{F}^1(\hat{G})$ в $C_0(\hat{G})$ (следствие 8.2.5) получается $\int\limits_{\hat{G}} g(\chi)\, d\mu(\chi)=0$ для всех $g \in C_0(\hat{G})$, т. е. что $\mu=0$.◀)

Наша ближайшая задача — вывод формулы обращения для преобразования Фурье, которую мы получим с помощью представления Бохнера для положительно определенных функций на G.

8.5. Положительно определенные функции на ЛКА группе и представление Бохнера. Класс всех непрерывных положительно определенных функций на ЛКА группе G по-прежнему, как в § 8, главы 1, будем обозначать через $P(G)$.

Примеры. 1. Пусть $f \in L^2(G)$. Тогда $\varphi=f*f^* \in P(G)$. Действительно

$$\sum_{k,l} \xi_k \bar{\xi}_l \varphi(x_k-x_l)=\int\limits_G \sum_k |\xi_k f(x_k-x)|^2\, dx \geqslant 0.$$

2) Каждый характер χ принадлежит $P(G)$. Если $\varphi=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_k$ и $c_k \geqslant 0$, $k=1, \ldots n$, то $\varphi \in P(G)$.

3. Если μ — положительная мера из $M(\hat{G})$ и

$$\varphi(x)=\int\limits_{\hat{G}} \chi(x)\, d\mu(\chi), \tag{1}$$

то $\varphi \in P(G)$ (φ непрерывна и $\Sigma \xi_k \bar{\xi}_l \varphi(x_k-x_l)=\int\limits_G |\Sigma \xi_k \chi(x_k)|^2\, d\mu(\chi)$).

Пользуясь представлением Бохнера—Райкова положительного функционала на банаховой алгебре $L^1(G)$, мы дадим сейчас еще одно доказательство теоремы Бохнера, согласно которой класс $P(G)$ совпадает с классом всех функций на G, представимых формулой (1), где μ — положительная мера из $M(G)$.

Пусть $\varphi \in P(G)$ и, не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi(0)=1$. Тогда функция φ порождает положительный функционал в инволютивной банаховой алгебре $L^1(G)$, действующий по формуле

$$\Phi(f)=\int_G f(x)\varphi(x)\,dx, \quad f\in L^1(G). \tag{2}$$

Действительно, если $f\in L^1(G)$, то

$$\Phi(f*f^*)=\int_G f(x)\overline{f(y)}\varphi(x-y)\,dxdy$$

и легко видеть, что $\Phi(f*f^*)\geqslant 0$.

Положительный функционал Φ на $L^1(G)$ может быть продолжен на алгебру $V(G)$, полученную из $L^1(G)$ присоединением единицы, δ-функции Дирака. Условие $\varphi(0)=1$ показывает, что $\Phi(\delta)$ можно выбрать равным 1. Поскольку мы находимся в условиях п. 7.13, и инволюция в банаховой алгебре $V(G)$ симметрична, то формула (7.13.3) позволяет функционал Φ, заданный формулой (2), переписать в виде

$$\Phi(f)=\int_{\hat G}\hat f(\chi)\,d\mu(\chi), \tag{3}$$

где μ — вероятностная мера на $\hat G$. Объединяя (2) и (3), приходим к равенству, справедливому для всех $f\in L^1(G)$,

$$\int_G f(x)\varphi(x)\,dx=\int_{\hat G}\hat f(\chi)\,d\mu(\chi). \tag{4}$$

Доказательство можно завершить, выбирая в качестве f в (4) сдвиг аппроксимативной единицы (если $f\to\delta_x$, то $\hat f\to\chi(x)$).

Законность перехода к пределу следует из непрерывности функционала Φ.

Заметим, что каждая функция из $\mathcal{F}M(G)$ представляется в виде линейной комбинации четырех функций из $P(G)$. Таким образом, $\mathcal{F}M(G)$ содержится в линейной оболочке множества $P(G)$.

8.6. Формула обращения. Введем в рассмотрение класс $B^1=B^1(G)=L^1(G)\cap\mathcal{F}M(G)$ функций, определенных на G. Ясно, что B^1 — подалгебра в $L^1(G)$. Кроме того, для функции $f\in B^1$ имеет место представление

$$f(x)=\int_{\hat G}\chi(x)\,d\mu_f(\chi), \tag{1}$$

где $\mu_f=\mu\in M(\hat G)$.

Теорема. Если $f\in B^1(G)$, то $\hat f\in L^1(\hat G)$, и при фиксированной мере Хаара на G можно так нормировать меру Хаара на $\hat G$, чтобы была справедлива формула обращения

$$f(x)=\int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x)\,d\chi. \tag{2}$$

Доказательство Пусть $h \in L^1(G)$, $f, g \in B^1(G)$. Непосредственно проверяется, что

$$\int_{\hat{G}} \hat{h}\hat{g}\,d\mu_f=((h*g)*f)(0)=((h*f)*g)(0)=\int_{\hat{G}} \hat{h}\hat{f}\,d\mu_g.$$

Из этого равенства, учитывая, что $\hat{h} \in \mathcal{F}^1(\hat{G})$ и $\mathcal{F}^1(\hat{G})$ плотно в $C_0(\hat{G})$, получаем соотношение

$$\hat{g}\,d\mu_f=\hat{f}\,d\mu_g.$$

Определим на пространстве $C_K(\hat{G})$ функционал Φ с помощью формулы

$$\Phi(\psi)=\int \frac{\psi}{\hat{g}}\,d\mu_g=\int \frac{\psi}{\hat{f}}\,d\mu_f, \tag{3}$$

где $\psi \in C_K(\hat{G})$, f и g из $L^1(G)$ выбираются так, чтобы их преобразования Фурье не обращались в нуль на $\operatorname{supp}\psi$. Линейный функционал Φ по непрерывности продолжается на $C_0(\hat{G})$. Он положительный, потому что функцию g можно выбрать из $P(G)$ и ненулевой $\left(\text{если } \psi \in C_0(\hat{G}) \text{ и } f \in B^1(G) \text{ таковы, что } \int \psi\,d\mu_f \neq 0,\right.$ $\left.\text{то } \Phi(\psi\hat{\mu}_f) \neq 0\right)$.

Немедленно проверяется, что Φ инвариантен относительно сдвигов, т. е., что $\Phi(\psi_\chi)=\Phi(\psi)$ для всех $\chi \in \hat{G}$.

По теореме Хаара существует мера Хаара $d\chi$ на $\hat{G}$ такая, что

$$\Phi(\psi)=\int_{\hat{G}} \psi(\chi)\,d\chi. \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), заключаем, что

$$d\mu_f=\hat{f}(\chi)\,d\chi, \tag{5}$$

откуда, в силу конечности меры μ_f, следует, что $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$.

Подстановка (5) в (1) дает формулу обращения. ◀

Обратим внимание на следующее следствие формулы обращения.

Следствие. Класс $B^1(G)$ является подалгеброй алгебры $L^1(G)$ относительно свертки и подалгеброй алгебры $C_0(G)$ относительно поточечного умножения, образ Фурье которой совпадает с $B^1(\hat{G})$. Это обстоятельство окажется решающим в нашем доказательстве теоремы двойственности.

8.7. Нормировка меры Хаара. Теорема 8.6 показывает, что мера Хаара на G однозначно определяет такую нормировку меры Хаара на $\hat{G}$, для которой справедлива формула обращения (8.6.2).

Убедимся, что такая нормировка не противоречит уже произведенному выбору меры Хаара на компактных и дискретных группах. Для этого выберем функцию f в формуле обращения, равную 1 в случае, когда группа G компактна, и равную δ в том случае, когда группа дискретна.

Пример. Вспомним взаимную пару формул обращения для случая $G=\mathbf{R}$

$$f,\ \hat{f}\in(L^1\cap\mathcal{F}^1)(\mathbf{R})$$

$$\hat{f}(\chi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} f(x)\,e^{-i\chi x}\,dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\chi)\,e^{i\chi x}\,d\chi.$$

Если меры Лебега dx на G и $d\chi$ на $\hat{G}$ увеличить соответственно в α и в β раз, то для справедливости формулы обращения нужно требовать, чтобы $\alpha\beta=1$.

Обычно нормировку мер Хаара на G и на $\hat{G}$ согласуют таким образом, чтобы была справедлива формула обращения (8.6.2).

8.8. Теорема Планшереля. Введем в рассмотрение класс

$$L^{1,2}(G)=(L^1\cap L^2)(G)*(L^1\cap L^2)(G),$$

состоящий из непрерывных ограниченных функций на G.

Лемма 1. Класс $L^{1,2}$ — плотный в банаховых пространствах $L^1(G)$, $C_0(G)$ и разделяет точки G.

Легко видеть, что класс $L^{1,2}(G)$ содержится в $B^1(G)$ и справедлива

Лемма 2. $B^1(G)$ является плотной подалгеброй алгебры $C_0(G)$, разделяющей точки G.

Теорема Планшереля. Преобразование Фурье $\mathcal{F}\ f\to\hat{f}$ есть линейное изометрическое отображение множества, плотного в $L^2(G)$, на множество, плотное в $L^2(\hat{G})$, и поэтому продолжается однозначно до унитарного оператора $\mathcal{F}$, отображающего $L^2(G)$ на $L^2(\hat{G})$.

Доказательство. Очевидно, что класс $A=(L^1\cap L^2)(G)$, плотный в $L^1(G)$, а его образ Фурье $\mathcal{F}A$, вместе с каждой функцией $\hat{g}$ содержащий все функции вида $(g_x)^\wedge$, $x\in G$, образует множество, плотное в $C_0(\hat{G})$.

Покажем, что если $f\in A$, то $\hat{f}\in L^2(\hat{G})$ и $\|f\|_2=\|\hat{f}\|_2$.

Положим $g=f*f^*$. Тогда (пример 8.5.1) $g\in P(G)\subset\mathcal{F}M(G)$ и для g применима формула обращения (8.6.2), из которой следует, что $\hat{g}\in L^1(\hat{G})$ и что

$$\int_G |f(x)|^2\,dx=\int_G f(x)\,f^*(-x)\,dx=g(0)=$$

$$=\int_{\hat{G}}\hat{g}(\chi)\,d\chi=\int_{\hat{G}}|\hat{f}(\chi)|^2\,d\chi.$$

Таким образом, $\mathcal{F}$ — изометрия $A\subset L^2(G)$ на $\mathcal{F}A\subset L^2(\hat{G})$.

Поскольку $C_0(\hat{G})$ плотно в $L^2(\hat{G})$, то $\mathcal{F}$ распространяется на все пространство $L^2(G)$ как унитарный оператор, сохраняющий, стало быть, скалярное произведение. Если $f, g\in L^2(G)$, то $\hat{f}, \hat{g}\in L^2(\hat{G})$ и имеет место *равенство Парсеваля* или *формула Парсеваля*.

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}\,dx=\int_{\hat{G}}\hat{f}(\chi)\overline{\hat{g}(\chi)}\,d\chi. \tag{1}$$

Формула Парсеваля (1) дает следующую полезную характеризацию класса $\mathcal{F}^1(\hat{G})$, а именно

$$\mathcal{F}^1(\hat{G})=L^2(\hat{G})*L^2(\hat{G}). \tag{2}$$

Пользуясь формулой (2), для любого непустого открытого множества E в $\hat{G}$ легко построить $\hat{f}\in\mathcal{F}^1(\hat{G})$ такую, что $\hat{f}\neq 0$ и $\hat{f}=0$ вне E.

Таким образом справедлива

Теорема 1. Групповая алгебра $L^1(G)$ — регулярная банахова алгебра.

В частности, в алгебре $\mathcal{F}^1(G)$ имеются ненулевые финитные функции, т. е. функции с компактным носителем. То обстоятельство, что таких функций достаточно много, подчеркивается следующей теоремой.

Теорема 2. Множество функций из $L^1(G)$, преобразования Фурье которых финитны, образует идеал I_0 алгебры $L^1(G)$, замыкание которого совпадает с $L^1(G)$.

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна. Вторая следует из того, что вместе с функцией f идеал I_0 содержит все функции вида $f\cdot\chi$, где χ пробегает $\hat{G}$. Множество таких функций плотно в $L^1(G)$ (в противном случае нашлась бы ненулевая функция $g\in L^\infty(G)$ такая, что

$$\int_G f(x)\,g(x)\,\chi(x)\,dx=0 \quad \text{для всех } \chi\in\hat{G},$$

что невозможно).

Для финитных функций из $\mathcal{F}^1(\hat{G})$ справедлив также следующий результат, легко вытекающий из теоремы Винера — Леви для банаховой алгебры $L^1(G)$.

Теорема 3. Пусть $h \in L^1(G)$ и функция $\hat{h}$ финитна. Пусть $f \in L^1(G)$ и $\hat{f}$ не обращается в нуль ни в одной точке множества $\operatorname{supp}\hat{h}$. Тогда сверточное уравнение

$$f * g = h$$

имеет решение $g \in L^1(G)$, непрерывно (в метрике $L^1(G)$) зависящее от f и h такое, что $\hat{g} = \hat{h}/\hat{f}$.

Замечание. Из теорем 2 и 3 немедленно вытекает *аппроксимационная теорема Винера* или *общая тауберова теорема Винера для групповой алгебры* $L^1(G)$. Теорему 2 мы фактически применили при доказательстве общей тауберовой теоремы Винера в § 11 гл. 1. Иногда теорему 2 интерпретируют, говоря, что банахова алгебра $L^1(G)$ *допускает спектральный синтез на бесконечности.*

8.9. Теорема двойственности Понтрягина. Мы видели, что характер $\chi(x)$ непрерывен по совокупности аргументов $x \in G$ и и $\chi \in \hat{G}$ в $G \times \hat{G}$ (8.1.3), 1-й шаг). Поэтому каждый элемент $x \in G$ определяет характер группы $\hat{G}$. Тем самым определено каноническое отображение π группы G в группу $\hat{\hat{G}}$, двойственную группе $\hat{G}$. Рассмотренные ранее примеры позволяют предположить, что $G = \hat{\hat{G}}$. Этот факт действительно справедлив и составляет содержание знаменитой *теоремы двойственности.*

Теорема. Каноническое отображение $\pi: G \to \hat{\hat{G}}$ есть изоморфное и гомеоморфное отображение группы G на $\hat{\hat{G}}$ (позволяющее отождествить G и $\hat{\hat{G}}$).

Доказательство. Пусть G — ЛКА группа и $\hat{\hat{G}}$ — ее вторая двойственная. Каноническое отображение π позволяет вложить группу G в группу $\hat{\hat{G}}$. Мы знаем, что образом Фурье алгебры $B^1(G)$ является алгебра $B^1(\hat{G})$, а образом Фурье алгебры $B^1(\hat{G})$ — алгебра $B^1(\hat{\hat{G}})$.

Поэтому преобразование Фурье (примененное дважды) позволяет установить изоморфизм между алгебрами $B^1(G)$ и $B^1(\hat{\hat{G}})$ (следствие 8.6.1), так как каждая функция $f \in B^1(G)$ однозначно продолжается до функции из $B^1(\hat{\hat{G}})$. Согласно лемме 8.8.2 и теореме 2.1.5), слабые топологии на G и $\hat{\hat{G}}$, порожденные семействами $B^1(G)$ и $B^1(\hat{\hat{G}})$, соответственно, совпадают с исходными топологиями на G и $\hat{\hat{G}}$. Поэтому топология на G есть относительная топология, индуцированная топологией $\hat{\hat{G}}$. Кроме того, легко видеть, что G плотна в $\hat{\hat{G}}$. (В противном случае существовала бы ненулевая функция из $L^{1,2}(\hat{\hat{G}})$,равная нулю на G, что противоречило бы изоморфизму). Осталось заметить, что G, будучи локально компактной, замкнута в $\hat{\hat{G}}'$ и заключить, что $G=\hat{\hat{G}}$. ◀

Для того, чтобы подчеркнуть двойственный смысл непрерывного по совокупности переменных отображения $\chi(x)$: $G\times\hat{G}\Rightarrow\mathbf{T}$, мы в дальнейшем перейдем к обозначению

$$\chi(x)=\langle \chi, x\rangle=\langle x, \chi\rangle, \quad \chi\in\hat{G}, \quad x\in G. \tag{1}$$

Тогда $\chi^{-1}(x)=(-\chi)(x)=\langle\overline{\chi, x}\rangle=\langle\overline{x, \chi}\rangle$; $\langle 0, x\rangle=\langle\chi, 0\rangle=1$, $x\in G$, $\chi\in\hat{G}$ и формулы (8.4.1)—(8.4.3) для преобразования и копреобразования Фурье переписываются следующим образом

$$\mathcal{F}\mu=\int_G\langle\overline{x, \chi}\rangle d\mu(x), \quad \chi\in\hat{G},$$

$$\overline{\mathcal{F}}\mu=\int_G\langle x, \chi\rangle d\mu(x), \quad \chi\in\hat{G}, \tag{2}$$

$$\mathcal{F}^{-1}=\overline{\mathcal{F}}.$$

Аналогичным образом переписываются остальные соотношения п. 8.4, в которые явно входит выражение $\chi(x)$.

8.10 Замечания к теории двойственности. 1) Выбор группы $\mathbf{T}$ для определения характеров (см. [25], пример 72). Пусть A — ЛКА группа. Попробуем назвать «характером» ЛКА группы G элемент $\chi\in\mathrm{Hom}(G, A)$, так что χ — непрерывный гомоморфизм из G в A. Тогда если мы захотим иметь для этого случая теорему двойственности, нам с необходимостью придется положить $A=\mathbf{T}$.

2) Преобразование Фурье на ЛКА группе было введено А. Вейлем в [90]. Связь между преобразованием Фурье на ЛКА группе G и преобразованием Гельфанда на соответствующей групповой алгебре была указана Д. А. Райковым [141] (см. также [108]), который первым предложил изложенный здесь подход к фундаментальным фактам гармонического анализа на ЛКА группах, приведший к наиболее прозрачному доказательству теоремы двойственности. Некоторое усовершенствование метода Д. А. Райкова было указано в [215]. Оно связано с простым устройством C^*-алгебры $\mathrm{St}(L^1(G))$, обертывающей групповую алгебру $L^1(G)$ ЛКА группы G, и возможностью использовать то обстоятельство, что пространство максимальных идеалов C^*-алгебры $\mathrm{St}(L^1(G))$ совпадает с двойственной группой $\hat{G}$, а образ Гельфанда алгебры $\mathrm{St}(L^1(G))$ изометрически гомеоморфен алгебре $C_0(\hat{G})$.

По поводу теоремы Планшереля на ЛКА группах укажем также работу М. Г. Крейна [121], который, наряду с А. Вейлем, рассматривал преобразование Фурье на ЛКА группах и, опираясь на теорему двойственности Понтрягина, доказал теорему Планшереля.

8.11. Компактные и дискретные группы. Заметим, что если $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbf{T})$ и если $\sup\limits_{x \in G} |\chi(x) - 1| \leqslant \frac{1}{2}$, то подгруппа $\chi(G)$ группы $\mathbf{T}$ сводится к элементу $\{1\}$ и $\chi = 1$. Пользуясь этим фактом и теоремой двойственности, легко показать, что двойственная к компактной группе дискретна и двойственная к дискретной группе компактна. Впрочем, это можно сделать непосредственно, как в п. 8. 3, пример 6.

Для компактных и дискретных групп факты общей теории существенно упрощаются.

Посмотрим, как выглядит теория Фурье—Планшереля для компактной группы G. В этом случае $L^2(G) \subset L^1(G)$. Меры Дирака δ_χ на $\hat{G}$ образуют полную ортонормированную систему в $L^2(\hat{G})$ и в силу теоремы Планшереля и равенства Парсеваля, характеры $\chi(x)$, $\chi \in \hat{G}$, образуют полную ортонормированную систему или базис в $L^2(G)$, при этом $\hat{\chi} = \delta_\chi$.

Если $f \in L^2(G)$, то имеют место равенства

$$\hat{f}(\chi) = \int_G \overline{\langle \chi, x \rangle} f(x)\, dx, \quad \chi \in \hat{G}, \tag{1}$$

$$\int_{\hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2 d\chi = \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2 = \int_G |f(x)|^2 dx. \tag{2}$$

Из (2) следует, что $\hat{f}$ отлично от нуля только на счетном множестве элементов $\hat{G}$ и формула обращения принимает вид

$$f(x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle \chi, x \rangle \hat{f}(\chi). \tag{3}$$

Формула (3) показывает, что обратное преобразование Фурье совпадает с разложением функции f, принадлежащей пространству $L^2(G)$ по базису из характеров.

Итак, если G — компактная группа, то ее характеры образуют базис в $L^2(G)$, а разложение элемента $f \in L^2(G)$ по этому базису есть преобразование Фурье—Планшереля (ряд Фурье), коэффициенты которого вычисляются по формулам (1) и отличны от нуля на счетном подмножестве в $\hat{G}$.

Замечание. Поскольку любую абелеву группу можно превратить в топологическую, наделив ее дискретной топологией, то, в силу теоремы двойственности, топологическая структура любой компактной абелевой группы полностью определяется алгебраической структурой абелевой группы без топологии (дискретной группы, двойственной к исходной компактной). Отметим, однако, что общая структурная теория абелевых групп далека от завершения.

8.12. Теорема единственности для преобразований Фурье мер. Прежде всего заметим, что любая теорема, доказанная для упорядоченной пары $(G, \hat{G})$, справедлива также для пары $(\hat{G}, G)$, так что топологические группы G и $\hat{G}$ находятся в симметричных отношениях одна к другой. Поэтому теорема единственности для преобразования Фурье мер из $M(\hat{G})$, доказанная в п. 8.4, справедлива для мер из $M(G)$ и справедлива

Теорема. Алгебра $M(G)$ для ЛКА группы G полупростая. Таким образом, $\hat{G}$ плотно вкладывается в пространство $\Delta(G)$ максимальных идеалов банаховой алгебры $M(G)$, совпадая с этим пространством тогда и только тогда, когда группа G дискретна, т. е. когда $M(G)=L^1(G)$ (см. также п. 7.8).

Отметим естественное соответствие между преобразованиями Фурье на G и $\hat{G}$.

Пусть $\mu \in M(G)$, $\nu \in M(\hat{G})$. Тогда

$$\int_G \hat{\nu}(x)\, d\mu(x) = \int_{\hat{G}} \hat{\mu}(\chi)\, d\nu(\chi), \qquad (1)$$

$$\mathcal{F}((\mathcal{F}^{-1}\nu)\cdot\mu) = \nu * \mathcal{F}\mu. \qquad (2)$$

Завершая этот параграф, обратим еще раз внимание на следующие формулы:

$$\mathcal{F}L^2(G) = L^2(\hat{G})$$

$$\overline{\mathcal{F}}L^2(\hat{G}) = L^2(G)$$

Можно привести много примеров пространств и даже алгебр, обладающих аналогичным свойством. Например, таковыми являются алгебры $L^1(G) \cap \mathcal{F}^1(G)$ и $L^1(\hat{G}) \cap \mathcal{F}^1(\hat{G})$, $B^1(G)$ и $B^1(\hat{G})$, которые оказались особенно полезными при доказательстве теоремы двойственности и т. д.

§ 9. Свойства двойственности и формула Пуассона

В этом параграфе мы расскажем, как теория двойственности применяется к взаимоотношениям между группами и их подгруппами, факторгруппами, гомоморфными образами и двойственными к ним объектами. Ярким примером таких взаимоотношений является так называемая компактификация Бора, позволяющая вкладывать локально компактную абелеву группу как некоторую плотную подгруппу в компактную группу (компакт Бора) и рассматривать почти периодические функции на исходной группе как непрерывные функции на этом компакте. Другой пример дает формула Пуассона и мы подробно остановимся на различных приложениях этой формулы в анализе.

9.1. Аннулятор. Ортогональные подгруппы.

Определение 1. Пусть G, $\hat{G}$ — пара взаимно двойственных ЛКА групп, $x \in G$, $\chi \in \hat{G}$. Если $\langle \chi, x \rangle = 1$, то говорят, что χ и x *ортогональны* и факт ортогональности записывают обычным образом: $\chi \perp x$.

В частности, $0_{\hat{G}} \perp G$ и $0_G \perp \hat{G}$.

Определение 2. Если A — некоторое подмножество группы G, то множество всех $\chi \in \hat{G}$, ортогональных A, называется *аннулятором* A и обозначается через $A^{\perp}$.

Ясно, что аннулятор подмножества $A \subset G$ есть замкнутая подгруппа группы $\hat{G}$.

Пример. Пусть $G = \mathbf{R}$, тогда $\hat{G} = \mathbf{R}$ и $\langle \chi, x \rangle = \exp(i\chi x)$. Если $A = \mathbf{Z}$, то $A^{\perp}$ состоит из тех элементов $\chi \in \mathbf{R}$, для которых $\exp(i\chi n) = 1$ при всех $n \in \mathbf{Z}$. Поэтому $A^{\perp} = 2\pi\mathbf{Z}$. Ясно также, что $(A^{\perp})^{\perp} = A^{\perp\perp} = \mathbf{Z}$.

Пусть A — подмножество в G. Если $\bar{A}$ — замкнутая подгруппа группы G, порожденная множеством A, то очевидно вложение $\bar{A} \subset A^{\perp\perp}$. Применяя теорему о достаточности множества характеров для факторгруппы $G/\bar{A}$ (следствие 8.1.4), нетрудно убедиться в том, что обратное включение $A^{\perp\perp} \subset \bar{A}$ также справедливо. Поэтому $A^{\perp\perp} = \bar{A}$.

Определение 3. Если A — замкнутая подгруппа группы G, то подгруппы A и $A^{\perp}$ ($A^{\perp}$ — аннулятор A) называются *ортогональными*.

Следующая теорема, характеризующая взаимоотношения между аннуляторами и двойственными к ним группами, часто бывает полезна.

Теорема. Пусть H — замкнутая подгруппа ЛКА группы G. Тогда

(a) $(G/H)^{\wedge} = H^{\perp}$,

(b) $\hat{H} = \hat{G}/H^{\perp}$.

(Пусть π — канонический гомоморфизм: $G \to G/H$. Очевидно, что отображение $\chi \to \chi \circ \pi$ есть непрерывный изоморфизм $(G/H)^{\wedge}$ на $H^{\perp}$. Остается показать, что это отображение является топологическим изоморфизмом, т. е. непрерывно обратное отображение. Это легко сделать, применяя топологию, введенную в п. 8.1. Формула (b) дающая равносильную запись формулы (a), означает, что отображение $\chi \to \chi/H$ группы $\hat{G}$ в группу $\hat{H}$ индуцирует топологический изоморфизм группы $\hat{G}/H^{\perp}$ на группу $\hat{H}$.)

9.2. Двойственный гомоморфизм. Пусть G и H — ЛКА группы и $\varphi: G \to H$ — непрерывный гомоморфизм. Если $\chi \in \hat{H}$, то функция $\chi \circ \varphi$ является непрерывным характером группы G. Этот характер будем обозначать $\hat{\varphi}(\chi)$. Таким образом, для любых $x \in G$, $\chi \in \hat{H}$ справедлива формула

$$\langle \chi, \varphi(x) \rangle = \langle \hat{\varphi}(\chi), x \rangle . \tag{1}$$

Определенный формулой (1) непрерывный гомоморфизм $\hat{\varphi}$ группы $\hat{H}$ в группу $\hat{G}$ называют *двойственным гомоморфизму* φ.

Формула (1) показывает, что $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$. Если к тому же имеется другой непрерывный гомоморфизм $\psi: H \to K$, то $(\psi \circ \varphi)^{\wedge} = \hat{\varphi} \circ \hat{\psi}$.

Теорема. Справедливы следующие соотношения

$$\operatorname{Ker} \varphi = (\operatorname{Im} \hat{\varphi})^{\perp}, \quad \overline{\operatorname{Im} \hat{\varphi}} = (\operatorname{Ker} \varphi)^{\perp}. \tag{2}$$

(Ввиду формулы (1), эти соотношения непосредственно следуют из теоремы п. 9.1.)

Следствие. Пусть сохраняются условия теоремы. φ — инъективный гомоморфизм тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} \hat{\varphi}$ плотно в $\hat{G}$.

9.3. Компактификация Бора и теорема Кронекера. Важное применение результатов пп. 9.1—9.2 описывается следующей ситуацией.

Пусть G — ЛКА группа, G_d — та же самая группа с дискретной топологией. Рассмотрим отображения

$$i: G_d \to G, \tag{1}$$

$$\hat{i}: \hat{G} \to (G_d)^{\wedge}. \tag{2.}$$

Гомоморфизм i, очевидно, инъективен и имеет плотный образ. Согласно следствию п. 9.2, двойственный гомоморфизм $\hat{i}$ имеет плотный образ и инъективен.

Таким образом, ЛКА группа $\hat{G}$ плотно вкладывается в компактную абелеву группу $(\hat{G}_d)$, которая называется *боровской компактификацией группы* $\hat{G}$ или *компактом Бора*.

Замечание. Боровская почти периодическая функция на ЛКА группе $\hat{G}$ однозначно продолжается до функции, непрерывной на компактной группе $(\hat{G}_d)$. Обратно, сужение любой непрерывной функции на $(\hat{G}_d)$ на плотную подгруппу $\hat{G}$ является боровской почти периодической функцией, т. е. функцией класса $AP(\hat{G})$.

Инвариантное среднее на пространстве $AP(\hat{G})$ очевидным образом связывается с интегралом Хаара на компактной группе $(G_d)^{\wedge}$ и все основные результаты теории почти периодических функций Бора следуют из фундаментальных фактов гармонического анализа для компактной группы $G_d^{\wedge}$ (см. п. 8.11).

Перечислим наиболее важные результаты боровской теории:

1) $AP(\hat{G})$ — C^*-алгебра.

2) Пусть M — инвариантное среднее на $\hat{G}$. Относительно скалярного произведения $(f, g) = M(f\bar{g})$ пространством $AP(\hat{G})$ является предгильбертовым. Множество всех функций $x(\chi)$, $x \in G$, образует ортонормированный базис в $AP(\hat{G})$. Каждой функции из $AP(\hat{G})$ сопоставляется ее «ряд Фурье»

$$f(\chi) = \sum_x \hat{f}(x)\, x(\chi), \tag{3}$$

где «коэффициенты Фурье» определяются формулой

$$\hat{f}(x) = M(f(\chi)\overline{x(\chi)}).$$

При этом существует лишь счетное множество таких x, для которых $\hat{f}(x) \neq 0$. Множество $\sigma(f) = \{x : \hat{f}(x) \neq 0\}$ называется *спектром Бора почти периодической функции* f.

4) Для каждой функции $f \in AP(\hat{G})$ имеет место равенство Парсеваля

$$\| f \|^2 = (f, f) = \sum_{x \in \sigma(f)} | \hat{f}(x) |^2,$$

которое формально содержит теорему о непустоте спектра Бора: $\sigma(f) = \varnothing \Leftrightarrow f \equiv 0$.

5) Справедлива так называемая *теорема аппроксимации*, согласно которой каждая $f \in AP(\hat{G})$ является равномерным пределом «тригонометрических многочленов», показатели которых можно выбрать из спектра, т. е. конечных сумм вида $\sum_k a_k x_k(\chi)$, $x_k \in \sigma(f)$.

В частности, теорема аппроксимации является следствием теоремы Стоуна — Вейерштрасса для $C(G_d)^{\wedge}$.

Другим важным применением двойственного гомоморфизма является *теорема Кронекера*, играющая существенную роль при изучении арифметических свойств почти периодических функций.

Поскольку топология на $(G_d)^{\wedge}$ является топологией равномерной сходимости на конечных подмножествах группы G, то сказанное выше о двойственном гомоморфизме $\hat{i}$ допускает переформулировку в виде следующей теоремы.

Теорема Кронекера. Пусть $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное подмножество элементов группы G. Пусть φ — функция, определенная на F со значениями в $\mathbf{T}$. Если эта функция такова, что каждое соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i = 0, \quad k_i \in \mathbf{Z}, \tag{4}$$

влечет за собой соотношение

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i)^{k_i}=1, \qquad (5)$$

то для каждого $\varepsilon>0$ существует характер $\chi \in \hat{G}$ такой, что $|\chi(x_i)-\varphi(x_i)|<\varepsilon$, $i=1, \ldots, n$. Обратно, если для каждого $\varepsilon>0$ существует $\chi \in \hat{G}$ так, что для любого конечного набора $x_1, \ldots, x_n$ выполняется последнее неравенство, то из (4) следует (5).

Доказательство. Обозначим через H подгруппу группы G_d, порожденную множеством F. Условие теоремы Кронекера позволяет рассматривать φ как сужение на множество F характера χ, принадлежащего группе $\hat{H}$, который, в силу теоремы 9.1, может быть поднят до характера группы $(G_d)\hat{}$. Осталось воспользоваться тем, что образ двойственнного гомоморфизма $\hat{i}$, определенного в (2), плотный в $(G_d)\hat{}$. ◀

В классическом варианте $G=\mathbf{R}$ теорема Кронекера является частью так называемой *теоремы Кронекера—Вейля*, в которой утверждается, что при исключении легко характеризуемого множества винтовых линий каждая винтовая линия на n-мерном торе $\mathbf{T}^n$ пробегает тор таким образом, что к любой точке тора $\mathbf{T}^n$ она подходит сколь угодно близко и в любых областях тора $\mathbf{T}^n$ с одинаковыми объемами находится в среднем одинаковое время.

Вот один из вариантов классической формулировки теоремы Кронекера.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — произвольные вещественные числа и $\delta>0$. Для того чтобы система неравенств

$$|\lambda_k t-\theta_k|<\delta \pmod{2\pi} \qquad (6)$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы из равенства $l_1\lambda_1+\ldots+l_n\lambda_n=0$, где $l_1, \ldots, l_n$ — целые числа, следовало $l_1\theta_1+\ldots+l_n\theta_n=0$.

В частности, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ независимы, т. е. из соотношения $l_1\lambda_1+\ldots+l_n\lambda_n$, $l_1, \ldots, l_n$ — целые числа, следует, что $l_1=0, \ldots, l_n=0$, то система неравенств (6) разрешима при любых вещественных $\theta_1, \ldots, \theta_n$ и $\delta>0$.

Различные варианты теоремы Кронекера—Вейля приводятся в оригинальной статье Г. Вейля и комментариях к ней [8]. Там же содержатся сведения, касающиеся задачи Лагранжа о вековых возмущениях долготы перигелия планетных орбит, попытка решить которую привела Г. Вейля к теореме Кронекера—Вейля.

Замечание. Теорема Кронекера имеет интересные приложения в теории чисел, в частности в теории ζ-функции Римана. Например, с ее помощью можно доказать, что если $\frac{1}{2}<\sigma_0\leqslant 1$, то значения, принимаемые функцией $\log\zeta(s)$, на прямой $\operatorname{Re} s=\sigma_0$ расположены всюду плотно в $\mathbf{C}$, см. [88].

9.4. Множества Кронекера и гармонические множества. Попытка распространить теорему Кронекера на бесконечные линейно независимые множества приводит к проблемам, некоторые из которых еще ждут своего решения. Вот один из вопросов, ответ на который получается с помощью теоремы Кронекера. Можно ли каждую функцию, определенную на подмножестве E ЛКА группы G со значениями в $\mathbf{T}$ аппроксимировать равномерно на E характерами $\chi(x)$, $\chi\in\hat{G}$.? Если предполагать, что E — компактное независимое множество группы G, то ответ на этот вопрос положительный тогда и только тогда, когда E — конечное множество. Очевидно, что вопрос будет более содержательным, если речь в нем будет идти не о произвольной, а о непрерывной функции на E. Мы приходим к следующему естественному определению.

Компактное множество $E\subset G$ называется *множеством Кронекера,* если каждую непрерывную на E функцию, равную по абсолютной величине единице, можно аппроксимировать равномерно на E характерами.

Очевидно, что множество Кронекера независимо. Однако нетрудно построить пример независимого множества, которое не является множеством Кронекера. Из условия независимости следует, что любое множество Кронекера имеет меру нуль и является вполне несвязным.

Эффективные построения совершенных множеств Кронекера были предложены Хьюиттом и Какутани, Рудиным, Виком (см. [29], [81]). Первое независимое совершенное множество было построено фон Нейманом. Кауфман привлек категорные соображения, позволяющие установить существование большого запаса множеств Кронекера (см. [58]).

Множествам Кронекера и другим так называемым тонким множествам, обладающим определенными свойствами независимости, посвящена обширная литература (см. [29], [81], [58], [51], [69]). Они играют важную роль в гармоническом анализе, в частности в проблеме спектрального синтеза, находят приложения в спектральной теории динамических систем (см. теорему, принадлежащую Я. Г. Синаю, в [17], стр 309).

Наряду с множествами Кронекера, рассматривают также так называемые гармонические множества.

Пусть Λ — подмножество ЛКА группы G, H — подгруппа (с дискретной топологией), порожденная множеством Λ. Назовем Λ *гармоническим множеством,* если для каждого $\psi\in\operatorname{Hom}(H,\mathbf{T})$ и каждого $\varepsilon>0$ существует $\chi\in\operatorname{Hom}(G,\mathbf{T})$ такой, что

$$\sup_{x\in\Lambda}|\psi(x)-\chi(x)|<\varepsilon.$$

Теорема Кронекера 9.3 показывает, что каждое конечное множество гармоническое. Кроме того, каждое подмножество гармонического множества гармоническое. Множества Кронекера таким свойством могут не обладать.

Изучению гармонических множеств посвящена большая часть монографии [69], где рассказано о многих замечательных свойствах этих множеств. Мы остановимся на одном важном свойстве, связанном с характеризацией замкнутых подпространств в $AP(G)$, инвариантных относительно сдвигов. Такие подпространства рассматривал еще в 1934 г. фон Нейман и назвал их классами.

Определение. Пусть $\mathscr{C}$ — линейное подпространство пространства $AP(G)$. Назовем $\mathscr{C}$ *классом почти периодических функций*, если выполнены следующие условия:

(a) $\mathscr{C}$ замкнуто в $AP(G)$,

(b) для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество $M(\varepsilon)$ в G такое, что для каждого x в $M(\varepsilon)$ и каждой $f \in \mathscr{C}$

$$\|f_x - f\|_\infty \leqslant \varepsilon \|f\|_\infty.$$

(Множество M называется *относительно плотным* в G, если существует компакт $K \subset G$ такой, что $M + K = G$.)

(c) $\mathscr{C}$ инвариантно относительно сдвигов.

Теорема. Пусть Λ — гармоническое подмножество ЛКА группы $\hat{G}$, двойственной к G. Обозначим через $\mathscr{C}(\Lambda)$ линейное подпространство всех почти периодических функций из $AP(G)$ со спектром, содержащимся в Λ. Тогда $\mathscr{C}(\Lambda)$ есть класс почти периодических функций и каждый класс почти периодических функций совпадает с $\mathscr{C}(\Lambda)$ для подходяще выбранного гармонического подмножества Λ.

9.5. Точный гомоморфизм и его двойственный. Пусть G и H — ЛКА группы. Непрерывный гомоморфизм $\varphi: G \to H$ называется *точным*, если отображение $\varphi': G/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ есть топологический изоморфизм.

Замечание. Образ точного гомоморфизма есть замкнутая подгруппа, так как он топологически изоморфен факторгруппе $G/\operatorname{Ker}\varphi$, которая локально компактна.

Пример. Канонический гомоморфизм $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_d$ является изоморфизмом ($\operatorname{Ker}\varphi = \varnothing$) и непрерывным гомоморфизмом, но φ не есть топологический изоморфизм. Стало быть, гомоморфизм φ не является точным.

Теорема. Гомоморфизм, двойственный к точному гомоморфизму, является точным.

Следствие. Пусть H — замкнутая подгруппа группы G, i — каноническое вложение H в G и π — каноническое отображение $G \to G/H$, так что

$$H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/H \quad \text{(точная последовательность)},$$

$$\hat{H} \xleftarrow{\hat{i}} \hat{G} \xleftarrow{\hat{\pi}} (G/H)^{\wedge} \quad \text{(точная последовательность).}$$

Тогда $\hat{\pi}$ — изоморфизм $(G/H)^{\wedge}$ на $H^{\perp}$, а $\hat{i}$ — точный гомоморфизм $\hat{G}$ на $\hat{H}$, причем $\operatorname{Ker} \hat{i} = H^{\perp}$.

9.6. Функториальные свойства преобразования Фурье. Непрерывный гомоморфизм $\varphi: G \to H$ ЛКА групп G и H можно интерпретировать как непрерывный гомоморфизм подмножества всех одноатомных мер (δ-мер) в $M(G)$ в подмножество всех одноатомных мер в $M(H)$. Этот гомоморфизм однозначно продолжается как гомоморфизм из $M(G)$ в $M(H)$, который по-прежнему обозначается через φ. Пусть $\hat{\varphi}$ — двойственный к φ гомоморфизм $\hat{\varphi}: \hat{H} \to \hat{G}$ и пусть гомоморфизм $\psi: (\mathcal{F}M)(\hat{G}) \to \mathcal{F}M(\hat{H})$. Тогда для каждой меры $\mu \in M(G)$ и любого $\chi \in \hat{H}$ справедливы соотношения

$$\hat{\varphi}(\mu)(\chi) = \int_H \overline{\langle \chi, y \rangle}\, d(\varphi(\mu))(y) = \int_G \overline{\langle \chi, \varphi(x) \rangle}\, d\mu(x) =$$
$$= \int_G \overline{\langle \hat{\varphi}(\chi), x \rangle}\, d\mu(x) = \hat{\mu}(\hat{\varphi}(\chi)) = \psi(\hat{\mu})(\chi).$$

Другими словами, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & (\mathcal{F}M)(\hat{G}) \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ M(H) & \xrightarrow[\mathcal{F}]{} & (\mathcal{F}M)(\hat{H}) \end{array}$$

является коммутативной.

В таком случае говорят, что преобразование Фурье определяет *функториальный изоморфизм* функтора M на функтор $\mathcal{F}M \circ \hat{}$.

9.7. Преобразование Фурье на подгруппах и факторгруппах. Пусть H — замкнутая подгруппа ЛКА группы G. Сформулируем утверждения, дополняющие сказанное в предыдущем пункте.

1) Пусть $\mu \in M(G)$. Тогда $\operatorname{supp} \mu \subset H$ в том и только в том случае, если $\hat{\mu}$ постоянна на классах смежности группы $\hat{G}$ по $H^{\perp}$.

2) $(\mathcal{F}M)(H^{\perp})$ совпадает с множеством сужений функций из $)\mathcal{F}M)(\hat{G})$ на $H^{\perp}$.

3) $\mathcal{F}^1(H^{\perp})$ совпадает с множеством сужений функций из $\mathcal{F}^1(\hat{G})$ на $H^{\perp}$.

Замечание. Поскольку $H^{\perp} = (G/H)^{\wedge}$, то для справедливости 3) нужно соответствующим образом согласовать меры

Хаара на H, G и G/H, которые мы обозначаем, как в п. 5.10, через m_H, m_G, $m_{G/H}$, соответственно. Напомним, что нормировка меры $m_{G/H}$ при заданных мерах m_G и m_H выбирается такой, чтобы для всех $f \in C_K(G)$ выполнялось равенство (5.10.2) (формула Вейля), тогда так выбранная мера $m_{G/H}$ называется *фактормерой* m_G по отношению к m_H. Иногда она обозначается через m_G/m_H.

Теорема. Пусть $f \in L^1(G)$. Обозначим через $\hat{m}_{G/H}$ меру Хаара на $(G/H)^{\wedge}=H^{\perp}$, ассоциированную с фактормерой $m_{G/H}$. Предположим, что сужение функции $\mathcal{F}f$ на $H^{\perp}$ интегрируемо по мере $\hat{m}_{G/H}$. Тогда для почти всех $x \in G$ функция $f(x+y)$ интегрируема по мере m_H на H и справедливо равенство

$$\int_H f(x+y)\,dm_H(y)=\int_{H^{\perp}} \langle \gamma, x \rangle (\mathcal{F}f)(\gamma)\,d\hat{m}_{G/H}(\gamma). \tag{1}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$F(\dot{x})=\int_H f(x+y)\,dm_H(y) \tag{2}$$

($\dot{x}$ — канонический образ x при отображении $\pi: G \to G/H$).

Функция $F \in L^1(G/H)$. Ее преобразование Фурье, рассматриваемое как функция на $H^{\perp}$, есть сужение $\mathcal{F}f$ на $H^{\perp}$ (ср. с 3)), так как

$$(\mathcal{F}F)(\gamma)=\int_{G/H} \overline{\langle \gamma, \dot{x} \rangle}\,dm_{G/H}(\dot{x})\int_H f(x+y)\,dm_H(y)=$$

$$=\int_G \overline{\langle \gamma, x \rangle}\,f(x)\,dm_G(x)=(\mathcal{F}f)(\gamma), \quad \gamma \in H^{\perp}.$$

Так как сужение $\mathcal{F}f$ на $H^{\perp}$ интегрируемо, то $\mathcal{F}F \in L^1(\hat{G}/H)$ и в силу (8.12.1), почти всюду на G/H справедливо равенство

$$F(\dot{x})=\int_{H^{\perp}} \langle \gamma, x \rangle (\mathcal{F}F)(\gamma)\,d\hat{m}_{G/H}(\gamma). \tag{3}$$

Для получения (1) осталось объединить (2) и (3). ▶

9.8. Меры и фактормеры на двойственных группах. Сохраняются обозначения п. 9.7. Обозначим через $\hat{m}_H$, $\hat{m}_G$ и $\hat{m}_{G/H}$ меры Хаара на группах $\hat{H}$, $\hat{C}$ и $(G/H)^{\wedge}=H^{\perp}$, соответственно, ассоциированные с мерами Хаара m_H, m_G и $m_{G/H}$ так, чтобы для каждой пары ассоциированных мер оставалось справедливым равенство Парсеваля в форме (8.8.1).

Для функции $f \in C_K(G)$ нетрудно с помощью формулы Парсеваля установить равенство

$$\int_{\hat{G}} |(\mathcal{F}^{-1}f)(\chi)|^2 d\hat{m}_G(\chi) =$$
$$= \int_{\hat{G}/H^\perp} d\hat{m}_H(\dot{\chi}) \int_{H^\perp} |(\mathcal{F}^{-1}f)(\chi+\gamma)|^2 d\hat{m}_{G/H}(\gamma), \qquad (1)$$

где $\dot{\chi}$ — канонический образ χ при гомоморфизме $\hat{G} \to \hat{G}/H^\perp$.

Теорема. Для мер Хаара $\hat{m}_H$, $\hat{m}_G$ и $\hat{m}_{G/H}$ справедливо соотношение

$$\hat{m}_H = \hat{m}_G / \hat{m}_{H^\perp},$$

другими словами, мера Хаара $\hat{m}_H$ является фактормерой меры $\hat{m}_G$ по мере $\hat{m}_{H^\perp}$. Доказательство немедленно следует из формулы (1).

9.9. Формула Пуассона. Сохраняются обозначения предыдущего пункта. Предположим, что $f \in L^1(G)$ и что

1) сужение функции $\mathcal{F}f$ на $H^\perp$ интегрируемо,

2) функция f_x на H интегрируема при всех $x \in G$,

3) функция $F(\dot{x})$, определенная формулой (9.7.2), непрерывна по $\dot{x}$.

Тогда имеет место равенство (*формула Пуассона*)

$$\int_H f(y)\, dm_H(y) = \int_{H^\perp} (\mathcal{F}f)(\gamma)\, d\hat{m}_{H^\perp}(\gamma). \qquad (1)$$

Для доказательства достаточно воспользоваться непрерывностью левой и правой частей в формуле (9.7.1) и положить в ней $x=0$.

Следствие. Если группа H дискретна, то $H^\perp$ тоже дискретна и формула Пуассона может быть записана в виде

$$\sum_{y \in H} f(y) = \sum_{\gamma \in H^\perp} (\mathcal{F}f)(\gamma). \qquad (2)$$

Поскольку в случае конечной группы возникает некоторая несимметричность в выборе нормировок мер Хаара на взаимно двойственных группах, целесообразно формулу Пуассона записать отдельно для этого случая. Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа. Согласуем меры Хаара на G/H и $H^\perp$ так, чтобы меры одноточечных множеств на каждой из этих групп были равны $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $n = \dim H^\perp$. Справедлива формула

$$\sum_{y \in H} f(y) = \sum_{\gamma \in H^\perp} \hat{f}(\gamma). \qquad (3)$$

Чаще всего именно формулу (2) называют *формулой Пуассона*, а метод суммирования, основанный на этой формуле, *мето-*

дом суммирования Пуассона.[1)]

Формула Пуассона является мощным инструментом анализа, в частности гармонического анализа. Обозреть достаточно полно разнообразные случаи ее применения непросто. Мы рассмотрим в следующем параграфе некоторые, существенные с нашей точки зрения приложения этой формулы.

В заключение, заметим, что формула (1) может явиться основой для определения преобразования Фурье неограниченной меры. Если развить теорию обобщенных функций на ЛКА группах, то законность такого определения может быть обоснована.

9.10. Примеры к формуле Пуассона. 1) Пусть $G=\mathbf{R}$, $H=\mathbf{Z}$. Тогда $H^{\perp}=2\pi\mathbf{Z}$. Пусть $f\in L^1(\mathbf{R})$ и $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Тогда формулу Пуассона (9.9.2) можно записать в виде

$$\sqrt{\alpha}\sum_{k\in\mathbf{Z}} f(k\alpha)=\sqrt{\beta}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{f}(k\beta), \tag{1}$$

где $\alpha\beta=2\pi$. Для справедливости формулы (1) достаточно, чтобы функция $f(\in L^1(\mathbf{R}))$ имела на $\mathbf{R}$ ограниченную вариацию, а в точках разрыва удовлетворяла соотношению

$$f(t)=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}.$$

(Другие варианты записи формулы (1), допускающие ослабление ограничений на функцию f, разнообразные примеры и приложения читатель может найти в [87].)

2) Предположим, что функция $f\in L^1(\mathbf{R})$ обращается в нуль вне интервала $(-A, A)$. Если $f(-t)=f(t)$, $t\in\mathbf{R}$, то формуле (1) можно придать следующий вид

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} f(k\alpha)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^A f(t)\,dt+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^A f(t)\cos\frac{2\pi kt}{\alpha}\,dt, \tag{2}$$

где $n=\left[\frac{A}{\alpha}\right]$. Эту формулу можно рассматривать как приближенную для вычисления конечной суммы в левой части (2), если второе слагаемое в правой части считать погрешностью. Более общие формулы такого рода, указывающие на связь с формулой Эйлера—Маклорена, приведены в работе Риекстыньша Э. А., Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 3-е изд., 1981 г., 370 с.

(3) Формула Котельникова. Приведем еще одну форму, в которой удобно записывать соотношение (1)

---

1) Не следует смешивать метод суммирования Пуассона с методом суммирования Абеля—Пуассона, который часто называют также методом суммирования Пуассона. Впрочем, между вторым методом (более элементарным) и первым некоторая связь имеется. (А. Вейль в [92, стр. 65], сообщает, что в действительности этот метод был открыт Коши).

$$\sqrt{\alpha}\sum_{k\in Z} f(k\alpha+y)=\sqrt{\beta}\sum_{k\in Z}\hat{f}(k\beta)e^{ik\beta y},\quad y\in R,\quad \alpha\beta=2\pi. \tag{3}$$

Полагая $\alpha=2\lambda$, $\beta=\frac{\pi}{\lambda}$, приведем формулу (3) к виду

$$\sum_{k\in Z} f(2\lambda k+y)=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k\in Z}\hat{f}\left(\frac{k\pi}{\lambda}\right)e^{ik\frac{\pi}{\lambda}y}. \tag{4}$$

Рассмотрим тот частный случай, когда f равна нулю вне интервала $(-a, a)$, причем $a<\lambda$. Тогда при $y\in(-\lambda, \lambda)$ левая часть в (4) сводится к $f(y)$. Имеем

$$f(y)=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k\in Z}\hat{f}\left(\frac{k\pi}{\lambda}\right)e^{ik\frac{\pi}{\lambda}y}, \tag{5}$$

откуда

$$\int_R \hat{f}(x)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k\in Z}\hat{f}\left(\frac{k\pi}{\lambda}\right). \tag{6}$$

Формула (6) используется в теории информации под названием «sampling theorem» и приписывается иногда Найквисту, иногда Шеннону, но, по-видимому, ранее была применена В. А. Котельниковым в 1933 г.[1)] в связи с его работами по радиотехнике. По существу им была установлена

Теорема. Если преобразование Фурье функции $\hat{f}$ обращается в нуль вне интервала $(-a, a)$, то при любом фиксированном $\lambda>a$ функция $\hat{f}$ однозначно определяется своими значениями в точках $\frac{k\pi}{\lambda}$, $k\in Z$.

Доказательство теоремы следует из представления (5) и формулы обращения

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} f(y)e^{-ixy}dy. \tag{7}$$

Если подставить (5) в (7) и произвести вычисления, то получится явное выражение, дающее представление функции $\hat{f}$ по ее значениям в точках $\frac{k\pi}{\lambda}$, которое называется *формулой Котельникова*. Более подробную информацию о различных вариантах формулы Котельникова и о дальнейшем развитии индуцированных ею проблем можно найти, например, в [131]. Далеко идущее обобщение результатов этого подпункта, связанное с рассмотрением ПДО на группах, содержится в работах [114].

---

1) Еще ранее в 1915 г. эта формула была найдена Уиттекером (Whittaker E. T., Proc. Roy. Soc. Edinburg. Sec. A35, 181).

4) Формулу (4) можно переписать в еще формально более общем виде

$$\sum_{k\in Z} f(2\lambda k+y)\, e^{-iz(2\lambda k+y)}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k\in Z}\hat{f}\left(\frac{k\pi}{\lambda}+z\right)e^{ik\frac{\pi}{\lambda}y}. \qquad (8)$$

Если теперь в формулу (8) подставить $f=e^{-\frac{t^2}{2}}$ (тогда $\hat{f}(x)=$ $=e^{-\frac{x^2}{2}}$), то получится тождество для θ-функций Якоби (см. [95]).

5) Подставляя функцию $f(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$ в формулу (1), мы получим следующее эффектное равенство

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{\alpha^2k^2}{2}}\right)=\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{\beta^2k^2}{2}}\right),\quad \alpha\beta=2\pi. \qquad (9)$$

При $\alpha\to 0$ ($\beta\to\infty$) формула (9) дает возможность немедленно указать асимптотику ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{\alpha^2k^2}{2}},\quad \alpha\to 0.$$

Таким образом, формула Пуассона входит в арсенал средств, применяемых в теории асимптотических разложений (см. [18], [35]).

6) Одно из самых замечательных приложений формулы Пуассона связано с выводом функциональных уравнений для ζ-функции Римана и L-рядов Дирихле.

Если записать формулу Пуассона (1) в виде

$$\sum_{k\in Z} f(k)=\sqrt{2\pi}\sum_{k\in Z}\hat{f}(2\pi k) \qquad (10)$$

и формально подставить в (10) функцию $f(x)=|x|^{-s}$, отвлекаясь от вопроса о законности такой процедуры, то получится функциональное уравнение

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s), \qquad (11)$$

играющее фундаментальную роль в теории ζ-функции.

Строгое доказательство сводится к некоторой регуляризации указанной процедуры, которая может быть проведена различными путями (см., например, [88]). Мы остановимся здесь на варианте доказательства, основанном на формуле (9) и принадлежащем Риману. Начнем с очевидного тождества, справедливого при $\mathrm{Re}\, s>1$

$$\frac{1}{\pi^{s/2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\int_0^{\infty}x^{s/2-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}dx=\int_0^1+\int_1^{\infty}. \qquad (12)$$

Формула (9) при надлежащем выборе α позволяет написать соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi/x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в первый интеграл в правой части (12), приводим после элементарных преобразований правую часть в (12) к виду

$$-\frac{1}{s(1-s)}+\int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}dx. \tag{14}$$

Интеграл в (14) сходится при всех $s\in\mathbf{C}$, а выражение в (14) не меняется при замене s на $(1-s)$. Поэтому и левая часть в (12) не меняется при такой замене. Последний факт равносилен соотношению (11).

Интересны дальнейшие арифметические приложения формулы Пуассона, когда $\mathbf{R}$ заменяется группой аделей (см., например, [61], [91]). ◀

7) Много разнообразных приложений формулы Пуассона связано с рассмотрением решеток в $\mathbf{R}^n$. Пусть $G=\mathbf{R}^n$, $H=\mathbf{Z}^n$. Запишем преобразование Фурье функции $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$ в виде

$$\hat{f}(x)=\int_{\mathbf{R}^n} f(t)\, e^{-2\pi i x\cdot t}dt,$$

где $x\cdot t$ — скалярное произведение векторов $x\in\hat{\mathbf{R}}^n$ и $t\in\mathbf{R}^n$. Тогда формулу Пуассона (9.9.2) можно записать для этого случая в следующей симметричной форме:

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}^n} f(x+m)\, e^{-2\pi i\left(\frac{x}{2}+m,\, y\right)}=\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\hat{f}(y+k)\, e^{2\pi i\left(x,\, k+\frac{y}{2}\right)},$$
$$x,\ y\in\mathbf{R}^n. \tag{15}$$

Формула (15) допускает следующее простое обобщение. Пусть T — невырожденное линейное преобразование в $\mathbf{R}^n$. Тогда справедливо равенство

$$|\det T|^{\frac{1}{2}}\sum_{m\in\mathbf{Z}^n} f(T(x+m))\, e^{-2\pi i\left(\frac{x}{2}+m,\, y\right)}=$$
$$=|\det T_1|^{\frac{1}{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\hat{f}(T_1(y+k))\, e^{2\pi i\left(x,\, k+\frac{y}{2}\right)}, \tag{16}$$

где

$$T_1=(T')^{-1},\quad x,\ y\in\mathbf{R}^n,\quad k,\ m\in\mathbf{Z}^n.$$

Формула (16) имеет разнообразные приложения в широком диапазоне областей от теоретической физики до арифметики.

Не имея возможности даже вкратце перечислить такие приложения, мы все же остановимся на одном из них — на геометрической теореме Минковского, которая применяется в теории чисел, в частности, в теории диафантовых уравнений, и приведем доказательство этой теоремы, найденное Зигелем.

Теорема Минковского. Пусть V — параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ с центром в начале координат, объем которого равен $|V|$. Тогда если V не содержит отличных от начала координат точек с целочисленными координатами, то $|V| \leqslant 2^n$.

Доказательство. Если выбрать в качестве T преобразование, переводящее параллелепипед V в $\mathbf{R}^n$ в гиперкуб $|x_i| < 1$, $i=1, \ldots, n$, в $\mathbf{R}^n$, то легко видеть, что $\det T = \frac{2^n}{V}$ и что $T = T'$.

Полагая в формуле (16) $x = y = 0$, приведем ее к виду

$$|\det T| \sum_m f(T_m) = \sum_k \hat{f}(T^{-1}k). \tag{17}$$

Если выбрать функцию f такой, чтобы ее носитель принадлежал к единичному кубу в $\mathbf{R}^n$, то в левой части (17) останется одно слагаемое и это даст возможность оценить $|\det T|$.

Выберем в качестве f функцию «треугольника» $f = \prod\limits_{k=1}^{n} h(x_k)$, где

$$h(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тогда левая часть в (17) сведется к $\frac{2^n}{V}$, а правая — к сумме, все слагаемые в которой положительны, а слагаемое, отвечающее $k=0$, равно 1.

Замечание к теореме Минковского. Мы ограничились в 7) простейшим вариантом теоремы Минковского, который допускает такое усиление.[1]

Пусть K — компактное выпуклое подмножество в $\mathbf{R}^n$, симметричное относительно 0. Если $\mu(K) \geqslant 2^n$, где μ — мера Лебега в $\mathbf{R}^n$, нормированная стандартно — мера единичного гиперкуба равна единице, то K содержит целую точку $x \in \mathbf{Z}^n$, $x \neq 0$.

Этот результат является следствием теоремы, также принадлежащей Минковскому.

Пусть K — компактное подмножество в $\mathbf{R}^n$, симметричное относительно 0. Если $\mu(K) > 1$, то существуют две точки x и y, $x \neq y$ принадлежащие K такие, что $y - x \in \mathbf{Z}^n$.

Другим следствием этой общей теоремы Минковского является следующий результат

Пусть $L_1, \ldots, L_n$ — линейные формы над $\mathbf{R}^n$. Пусть D — опре-

[1] Теорема может быть распространена на ЛКА группы, см [33].

делитель $L_1, \ldots, L_n$ и $c_1, \ldots, c_n$ — положительные числа такие, что $c_1 \cdot \ldots \cdot c_n \geqslant D$. Тогда существует точка $x \in \mathbf{Z}^n$ такая, что

$$|L_1(x)| \leqslant c_1, \ldots, |L_n(x)| \leqslant c_n.$$

Этот последний вариант, который разумеется является следствием варианта в 7), представляет собой обобщение хорошо известной теоремы Дирихле из теории диафантовых неравенств.

8) *Формулы Рамануджана.* В 1915 г. Рамануджан открыл серию формул.

Пусть f удовлетворяет условиям в 1) и $f(-t)=f(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Тогда справедливы соотношения

$$\sqrt{\alpha}\,(f(\alpha)-f(3\alpha)-f(5\alpha)+f(7\alpha)+\ldots)=$$
$$=\sqrt{\beta}\,(\hat{f}(\alpha)-\hat{f}(3\alpha)-\hat{f}(5\alpha)+\hat{f}(7\alpha)+\ldots),$$

$\alpha\beta=\frac{\pi}{4}$, а $1, 3, 5, 7 \ldots$ — суть числа, взаимно простые с 4.

$$\sqrt{\alpha}\,(f(\alpha)-f(5\alpha)-f(7\alpha)+f(11\alpha)+\ldots)=$$
$$=\sqrt{\beta}\,(\hat{f}(\alpha)-\hat{f}(5\alpha)-\hat{f}(7\alpha)+\hat{f}(11\alpha)+\ldots),$$

$\alpha\beta=\frac{\pi}{6}$, а $1, 5, 7, 11 \ldots$ суть числа взаимно простые с 6 и т. д.

Хотя формулы Рамануджана допускают непосредственную проверку, все же интересно их интерпретировать как некоторый специальный случай формулы Пуассона общего вида (9.9.2). Оказалось, что такая интерпретация действительно возможна и в приложении 1 к этому параграфу мы о ней расскажем.

9) В заключение заметим, что формула суммирования Пуассона допускает обобщение на случай локально компактной (неабелевой) группы и ее подгруппы конечного индекса. Это обобщение является одним из вариантов формулы следа Сельберга, дающей подход к изучению функции распределения для квантовых статистических систем, связанных с потоком геодезических на плоскости Лобачевского. Подробное изложение этих вопросов, различные варианты формулы следа Сельберга и ее частного случая — формулы суммирования Пуассона — можно найти в [56, гл. 18].

Обратим внимание, кроме того, на цикл работ Джеймса, посвященный инвариантной формуле следа и ее связям с арифметикой (см., например, [179]).

Приложение 1. Числовые характеры кольца вычетов $\mathbf{Z}(m)$ и формулы Рамануджана. (Это приложение помещено здесь с любезного разрешения В. Я. Лина, который, откликнувшись на просьбу автора, нашел подход к выводу формул Рамануджана, основанный на формуле суммирования Пуассона (9.9.2).)

1) Фиксируем некоторое натуральное $m>1$ и рассмотрим кольцо вычетов $\mathbf{Z}(m)=\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Для дальнейшего удобно отож-

дествить его с множеством $G_m=\{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{m-1}\}$ корней степени m из 1, $\varepsilon=\exp\frac{2\pi i}{m}$, с операциями сложения $\varepsilon^k \dot{+} \varepsilon^l=\varepsilon^{k+l}$ и умножения $\varepsilon^k \dot{\times} \varepsilon^l=\varepsilon^{kl}$.

Группу характеров $\hat{\mathbf{Z}}(m)$ аддитивной группы $\mathbf{Z}(m)$ отождествим с тем же множеством корней $G_m=\{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{m-1}\}$, сопоставляя каждому характеру его значение на единице кольца $\mathbf{Z}(m)$, т. е. на ε. Группе $\mathbf{Z}^*(m)$ обратимых элементов кольца $\mathbf{Z}(m)$ отвечает множество всех тех элементов ε^k, для которых $(k, m)=1$. Меру Хаара dq на $G_m=\mathbf{Z}(m)=\hat{\mathbf{Z}}(m)$ нормируем, как сказано в (9.9.3), —мера точки равна $\frac{1}{\sqrt{m}}$. Преобразование Фурье на группе G_m, $\mathcal{F}: h\to\hat{h}$, $h: G_m\to\mathbf{C}$, можно записать в виде

$$\hat{h}(\varepsilon^l)=\int_{G_m}\varepsilon^{-ql}h(\varepsilon^q)\,dq=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{q=0}^{m-1}\varepsilon^{-ql}h(\varepsilon^q).$$

Прямое произведение $\mathbf{R}\times G_m$ снабдим мерой Хаара $d\mu=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx\times dq$ и преобразование Фурье $\mathcal{F}: F\to\hat{F}$ на $\mathbf{R}\times G_m$ запишем в виде

$$\hat{F}(\xi, \varepsilon^l)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}\int_{G_m}e^{-i\xi x}\varepsilon^{-ql}F(x, \varepsilon^q)\,dx\,dq.$$

Если взять в $\mathbf{R}\times G_m$ решетку $H=\mathbf{Z}\times G_m$, то двойственная к ней решетка есть $H^\perp=(2\pi\mathbf{Z})\times\{1\}\subset\mathbf{R}\times G_m$ и соответствующая формула суммирования Пуассона, в силу (9.9.2), имеет вид

$$\sum_{q\in\mathbf{Z}}\sum_{l=0}^{m-1}F(q, \varepsilon^l)=\sqrt{2\pi m}\sum_{q\in\mathbf{Z}}\hat{F}(2\pi q, 1). \tag{1}$$

Фиксируем какую-нибудь функцию $h: G_m\to\mathbf{C}$ и каждой функции $f: \mathbf{R}\to\mathbf{C}$ сопоставим функцию $F_h: \mathbf{R}\times G_m\to\mathbf{C}$, полагая

$$F_h(x, \varepsilon^s)=e^{-\frac{2\pi i s x}{m}}h(\varepsilon^s)f(x). \tag{2}$$

Тогда при $q\in\mathbf{Z}$

$$F_h(q, \varepsilon^s)=\varepsilon^{-sq}h(\varepsilon^s)f(q). \tag{3}$$

Преобразование Фурье функции F_h выглядит так:

$$\hat{F}_h(\xi, \varepsilon^r)=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{s=0}^{m-1}\varepsilon^{-sr}h(\varepsilon^s)\hat{f}\left(\xi+\frac{2\pi s}{m}\right). \tag{4}$$

Подставляя (4) в правую часть (1), а (3) — в левую, и производя необходимые вычисления, приходим к следующей формуле суммирования для функции $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$:

$$\sqrt{m} \sum_{q \in \mathbf{Z}} \hat{h}(\varepsilon^q) f(q) = \sqrt{2\pi} \sum_{q \in \mathbf{Z}} h(\varepsilon^q) \hat{f}\left(\frac{2\pi q}{m}\right). \tag{5}$$

Выбирая различные конкретные функции h и пользуясь формулой (5), можно получать формулы суммирования для функций $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$. Особенно удобно в качестве h брать какую-нибудь собственную функцию преобразования Фурье. Действительно, если h_λ — такая функция с собственным значением $\lambda, \lambda^4 = 1$, то (5) принимает вид

$$\lambda \sqrt{m} \sum_{q \in \mathbf{Z}} h_\lambda(\varepsilon^q) f(q) = \sqrt{2\pi} \sum_{q \in \mathbf{Z}} h_\lambda(\varepsilon^q) \hat{f}\left(\frac{2\pi q}{m}\right). \tag{6}$$

2) На кольце $\mathbf{Z}(m) = G_m$ есть замечательные функции, которые в теории чисел называются числовыми характерами по модулю m. Пусть, как и выше, $\mathbf{Z}^*(m) = G_m^* = \{\varepsilon^l : (l, m) = 1\}$ — группа обратимых элементов кольца $\mathbf{Z}(m) = G_m$, и пусть $\chi: G_m^* \to \mathbf{T}$ — какой-нибудь характер этой группы. В силу сказанного в 1), $\chi(\varepsilon^{kl}) = \chi(\varepsilon^k \dot{\times} \varepsilon^l) = \chi(\varepsilon^k)\chi(\varepsilon^l)$ для всех k, l, взаимно простых с m. Продолжим функцию χ нулем с G_m^* на все G_m. Полученная функция мультипликативна и $\chi(\varepsilon) = 1$; она называется *числовым характером по модулю m*.

Пусть $\chi: \mathbf{Z}(m) = G_m \to \mathbf{C}$ — какой-нибудь числовой характер $\operatorname{mod} m$ и пусть $\hat{\chi}$ — его преобразование Фурье. Вычислим $\hat{\chi}(\varepsilon^l)$ при l, взаимно простом с m. В этом случае существует лишь один вычет l' по модулю m, для которого $l'l = 1 \operatorname{mod} m$; при этом $\chi(\varepsilon^{l'}) \cdot \chi(\varepsilon^l) = 1$. Кроме того, если s пробегает $0, 1, \ldots$ $\ldots, m-1$, то вычет $\operatorname{mod} m$ числа $s' = sl$ тоже пробегает $0, 1, \ldots, m-1$ (в другом порядке). Поэтому

$$\hat{\chi}(\varepsilon^l) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{s=0}^{m-1} \varepsilon^{-sl}\chi(\varepsilon^s) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{s=0}^{m-1} \varepsilon^{-sl}\chi(\varepsilon^{sll'}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{s'=0}^{m-1} \varepsilon^{-s'}\chi(\varepsilon^{s'l'}) = \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{s'=0}^{m-1} \varepsilon^{-s'}\chi(\varepsilon^{s'})\right)\chi(\varepsilon^{l'}) = \hat{\chi}(\varepsilon)\chi(\varepsilon^l)^{-1},$$

т. е.

$$\hat{\chi}(\varepsilon^l) = \hat{\chi}(\varepsilon)\chi(\varepsilon^l)^{-1}, \quad \text{если} \quad (l, m) = 1. \tag{7}$$

Выясним, когда числовой характер является собственной функцией преобразования Фурье с собственным значением λ, ($\lambda^4 = 1$). Формула (7) показывает, что это возможно лишь в том случае, когда для всех l, взаимно простых с m, выполняется сооотношение

$$\lambda\chi(\varepsilon^l)=\hat{\chi}(\varepsilon^l)=\hat{\chi}(\varepsilon)\,\chi(\varepsilon^l)^{-1},$$

т. е.

$$\chi(\varepsilon^l)^2=\lambda^{-1}\chi(\varepsilon). \tag{8}$$

В частности, (8) должно выполняться при $l=1$, что приводит к условию $\lambda^{-1}\chi(\varepsilon)=\chi(\varepsilon)^2=1$. Для того чтобы числовой характер $\chi(\mathrm{mod}\,m)$ был собственной функцией преобразования Фурье, необходимо выполнение соотношения

$$\chi(\varepsilon^l)^2=1 \text{ для всех } l:\ (l,m)=1 \tag{9}$$

(соответствующее собственное значение в этом случае равно $\hat{\chi}(\varepsilon)$). Числовые характеры $\chi(\mathrm{mod}\,m)$, удовлетворяющие условию (9), называются *квадратичными*; ясно, что сужение такого χ на группу обратимых элементов кольца $\mathbf{Z}(m)=G_m$ представляет собой гомоморфизм этой группы в группу $\{\pm 1\}$.

К сожалению, одного условия (9) недостаточно еще для того, чтобы функция χ оказалась собственной: поскольку $\chi(\varepsilon^l)=0$ при $(l,m)>1$, нужно еще потребовать чтобы

$$\hat{\chi}(\varepsilon^l)=0 \quad \text{при} \quad (l,m)>1. \tag{10}$$

Посмотрим, что означает последнее условие. Пусть $1<l<m$. Если характер χ не единичный (а только такие χ имеют шанс оказаться собственными функциями), то $\hat{\chi}(\varepsilon^0)=\sum_{s=0}^{m-1}\chi(\varepsilon^s)=$ $=\sum_{\omega\in G_m^*}\chi(\omega)$ и, поскольку правая часть этого равенства пропорциональна $(\chi,1)_{L^2(G_m^*)}=0$, то случай $l=0$ можно не рассматривать. Пусть, далее, $1<d=(l,m)<m$; тогда $m=rd$, $l=$ $=qd$, где r — собственный, т. е. отличный от 1 и m, делитель числа m и $(r,q)=1$. Возьмем какое-нибудь натуральное t, удовлетворяющее условиям $t\equiv 1\,\mathrm{mod}\,r$ и $(t,m)=1$. Так как $(\varepsilon^l)^r=\varepsilon^{lr}=\varepsilon^{qdr}=\varepsilon^{qm}=1$, то ε^l — корень степени r из единицы и, поскольку $t\equiv 1\,\mathrm{mod}\,r$, то $\varepsilon^{tl}=\varepsilon^l$. Когда s пробегает $0,1,\ldots,m-1$, то ts тоже пробегает $0,1,\ldots,m-1$. Стало быть,

$$\hat{\chi}(\varepsilon^l)=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{s=0}^{m-1}\varepsilon^{-sl}\chi(\varepsilon^s)=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{s=0}^{m-1}\varepsilon^{-tsl}\chi(\varepsilon^{ts})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{s=0}^{m-1}\varepsilon^{-sl}\chi(\varepsilon^s)\,\chi(\varepsilon^t)=\hat{\chi}(\varepsilon^l)\,\chi(\varepsilon^t)$$

и

$$\hat{\chi}(\varepsilon^l)\,(1-\chi(\varepsilon^t))=0. \tag{11}$$

Если $\chi(\varepsilon^t)\neq 1$, то $\hat\chi(\varepsilon^l)=0$. Допустим, что характер удовлетворяет следующему условию:

(*) для каждого собственного делителя r числа m найдется такое t, что

$$t\equiv 1 \bmod r,\quad (t, m)=1,\quad \chi(\varepsilon^t)\neq 1; \tag{12}$$

тогда $\hat\chi(\varepsilon^l)=0$ для всех l, не взаимно простых с m.

Числовые характеры по $\bmod m$, удовлетворяющие условию (*), называются *примитивными*.

Примитивные характеры $\bmod m$ существуют тогда и только тогда, когда m либо нечетно, либо имеет вид $m=4r$, где r нечетно.[1]

Для каждого примитивного числового характера χ по модулю m (не обязательно квадратичного) имеем следующую формулу суммирования (см. (5), (6)):

$$\sqrt{m}\,\hat\chi(\varepsilon)\sum_q{}^{(m)}\chi(\varepsilon^q)^{-1}f(q)=\sqrt{2\pi}\sum_q{}^{(m)}\chi(\varepsilon^q)\,\hat f\left(\frac{2\pi q}{m}\right) \tag{13}$$

(здесь и далее знак $\sum\limits_q{}^{(m)}$ означает суммирование по всем целым q, взаимно простым с m).

Если же χ — примитивный квадратичный характер $\bmod m$, то формула (13) принимает вид

$$\sqrt{m}\,\hat\chi(\varepsilon)\sum_q{}^{(m)}\chi(\varepsilon^q)f(q)=\sqrt{2\pi}\sum_q{}^{(m)}\chi(\varepsilon^q)\,\hat f\left(\frac{2\pi q}{m}\right), \tag{14}$$

поскольку $\chi(\varepsilon^q)^2=1$ при $(q, m)=1$.

Таким образом, «хорошие» формулы суммирования получаются, если в качестве χ брать примитивные квадратичные характеры; к вопросу об их существовании мы переходим.

3) Напомним два определения.

Определение 1. *Символом Лежандра* $\left(\frac{q}{p}\right)$ для каждого простого p и каждого целого q называется число:

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\begin{cases}0, & \text{если } q \text{ делится на } p,\\ 1, & \text{если } q \text{ не делится на } p, \text{ но является}\\ & \text{квадратичным вычетом } \bmod p,\\ -1, & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

Определение 2. Пусть $r=p_1,\dots,p_k$, где $p_1,\dots,p_k$ — нечетные простые числа, не обязательно различные, и q — целое число. *Символом Якоби* $\left(\frac{q}{r}\right)$ называется число, определенное формулой

$$\left(\frac{q}{r}\right)=\left(\frac{q}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{q}{p_k}\right),$$

[1] См. Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел. М.: Наука, 1964, 566 с.

в правой части которой стоят символы Лежандра.

Оказывается, что примитивные квадратичные характеры существуют только в следующих трех случаях (см. ссылку на стр. 281):

(a) m нечетно и свободно от квадратов (т. е. $m=p_1\ldots p_k$, где p_i, $i=1,\ldots,k$, — попарно различные нечетные простые числа); имеется лишь один примитивный квадратичный характер

$$\chi(\varepsilon^q)=\left(\frac{q}{m}\right),$$

причем

$$\hat{\chi}(\varepsilon)=\begin{cases}1, & m\equiv 1 \bmod 4,\\ -i, & m\equiv 3 \bmod 4.\end{cases}$$

Поэтому для таких m имеем формулу

$$i^{\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}-1}{2}}\cdot\sqrt{m}\sum_q^{(m)}\left(\frac{q}{m}\right)f(q)=\sqrt{2\pi}\sum_q^{(m)}\left(\frac{q}{m}\right)\hat{f}\left(\frac{2\pi q}{m}\right). \tag{15}$$

(b) $m=4r$, где r нечетно и свободно от квадратов; в этом случае тоже есть лишь один нужный нам характер

$$\chi(\varepsilon^q)=(-1)^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{r}\right),$$

причем

$$\chi(\varepsilon)=\left\{\begin{matrix}-i, & \text{если } r\equiv 1 \bmod 4,\\ 1, & \text{если } r\equiv 3 \bmod 4\end{matrix}\right\}=i^{-\frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}+1}{2}}.$$

Соответствующая формула выглядит так

$$i^{-\frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}+1}{2}}\sqrt{m}\sum_q^{(m)}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{r}\right)f(q)=$$

$$=\sum_q^{(m)}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{r}\right)\hat{f}\left(\frac{2\pi q}{m}\right). \tag{16}$$

(c) $m=8r$, где r также нечетно и свободно от квадратов; тут есть два примитивных характера

$$\chi_1(\varepsilon^q)=(-1)^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{r}\right),$$

$$\hat{\chi}_1(\varepsilon)=\left\{\begin{matrix}1, & r\equiv 1 \bmod 4\\ -i, & r\equiv 3 \bmod 4\end{matrix}\right\}=i^{\frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}-1}{2}}$$

и

$$\chi_2(\varepsilon^q)=(-1)^{\frac{q^2-1}{8}+\frac{q-1}{2}}\cdot\left(\frac{q}{r}\right),$$

$$\hat{\chi}_2(\varepsilon)=\begin{Bmatrix}-i & r\equiv 1 \bmod 4\\ 1 & r\equiv 3 \bmod 4\end{Bmatrix}=i^{-\frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}+1}{2}}.$$

Соответствующие формулы имеют следующий вид

$$i^{\frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}-1}{2}}\sqrt{m}\sum_q{}^{(m)}(-1)^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{r}\right)f(q)= \tag{17}$$

$$=\sqrt{2\pi}\sum_q{}^{(m)}(-1)^{\frac{q^2-1}{2}}\left(\frac{q}{r}\right)\hat{f}\left(\frac{2\pi q}{m}\right),$$

$$i^{-\frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}+1}{2}}\sqrt{m}\sum_q{}^{(m)}(-1)^{\frac{q^2-1}{8}+\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{r}\right)f(q)=$$

$$=\sqrt{2\pi}\sum_q{}^{(m)}(-1)^{\frac{q^2-1}{8}+\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{r}\right)\hat{f}\left(\frac{2\pi q}{m}\right). \tag{18}$$

Формулы (15)—(18) дают ответ на вопрос, поставленный в (9.10.8))

Замечание. При получении формул (15)—(18) формула Пуассона действительно сыграла свою роль, но главное—явное описание примитивных квадратичных характеров и вычисление значения $\hat{\chi}(\varepsilon)$. В классической теории чисел вычисляется связанная с $\hat{\chi}(\varepsilon)$ формулой $\tau(x)=\sqrt{m}\,\chi(\varepsilon^{-1})^{-1}\hat{\chi}(\varepsilon)$ величина

$$\tau(x)=\sum_{l:(l,m)=1}\varepsilon^l\chi(\varepsilon^l)=\sqrt{m}\,\hat{\chi}(\varepsilon^{-1}),$$

которая получила название *гауссовой суммы характера* χ. Ее вычисление связано с именами Гаусса, Кронекера, Шура.

Приложение 2. Почти периодические функции на группе $\mathbf{Z}$. 1) Теория почти периодических функций на группе $\mathbf{Z}$ всех целых чисел оказалась тесно связанной с разнообразными задачами теории чисел. Расскажем об опирающихся на теорию двойственности источниках этой связи. Рассмотрим в дискретной топологии плотную счетную подгруппу Λ группы $\hat{\mathbf{Z}}\cong\mathbf{T}$, состоящую из всех элементов конечного порядка. Пусть $\theta:\Lambda\to\mathbf{T}$ — изоморфное вложение. Тогда двойственное отображение

$\hat{\theta}: \mathbf{Z} \to \hat{\Lambda}$ представляет собой каноническое вложение группы $\mathbf{Z}$ в плотную подгруппу компактной сепарабельной группы $\hat{\Lambda}$.

Выясним, как устроено это вложение и что из себя представляет топология компакта $\hat{\Lambda}$. Пусть p — простое число. Обозначим через Λ_p подгруппу группы Λ, состоящую из всех элементов порядка p^k при некотором k. Группа Λ_p является плотной подгруппой группы $\hat{\mathbf{Z}}$ при каждом простом p. Поэтому сказанное о $\mathbf{Z}$ и $\hat{\Lambda}$ переносится на взаимоотношение между $\mathbf{Z}$ и $\hat{\Lambda}_p$, а именно $\mathbf{Z}$ канонически вкладывается в каждую из компактных групп $\hat{\Lambda}_p$, как плотная подгруппа.

Вспомним теперь, что группа Λ_p изоморфна группе $\mathbf{Z}(p^\infty)$, а значит, компактная группа $\hat{\Lambda}_p$ алгебраически и топологически изоморфна группе (в действительности, кольцу) $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел, полем частных которого является поле p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$. Таким образом, компактная группа $\hat{\Lambda}$ изоморфна полному прямому произведению компактных групп $\mathbf{Z}_p$, так что $\hat{\Lambda}$ есть открытая компактная подгруппа в неархимедовой компоненте группы аделей A рационального поля $\mathbf{Q}$. Сужения на $\mathbf{Z}$ непрерывных функций на $\hat{\Lambda}$ есть в точности почти периодические (по Бору) функции на группе $\mathbf{Z}$, боровский спектр которых (отвечающий характерам из Λ) содержится во множестве $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел. Аналогичные соображения распространяются на другие классы почти периодических функций, например, на почти периодические функции на $\mathbf{Z}$ в смысле Безиковича из класса B^1 (так называются функции, сдвиги которых образуют предкомпактное семейство в L^1-топологии).

Мы покажем, далее, как такая точка зрения позволяет интерпретировать формальные разложения Рамануджана и так называемые «сингулярные ряды», введенные в рассмотрение Харди и Литлвудом в их исследовании по проблеме Варинга.

2) Среднее на группе $\mathbf{Z}$. Формула для среднего на группе $\mathbf{Z}$ в соответствии со сказанным в п. 6.3, имеет вид

$$M(f) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m+1} \sum_{-m}^{m} f(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} f(n). \qquad (1)$$

Иногда удобно пользоваться другими представлениями для среднего на группе $\mathbf{Z}$. В качестве примера приведем известную в теории чисел теорему Винтнера (см., например, [26]). Предварительно заметим, что каждую функцию $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ можно представить в виде

$$f(n) = \sum_{d\mid n} \Phi(d) \quad \text{(сумма распространена на все делители } n\text{)}, \qquad (2)$$

где функция Φ определяется на $\mathbf{Z}$ *формулой обращения Мёбиуса — Чебышева*

$$\Phi(n)=\sum_{d/n}\mu(d)\,f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f(d), \tag{3}$$

а μ — функция Мёбиуса (напомним, что μ — мультипликательная функция такая, что $\mu(p)=-1$, $\mu(p^\alpha)=0$, $\alpha=2, 3, \ldots$, p — простое число).

Теорема. Если ряд $\sum\limits_1^\infty \frac{\Phi(d)}{d}$ абсолютно сходится, то для функции f, связанной с Φ формулой (1),

1) справедливо соотношение $M(f)=\sum\limits_1^\infty \frac{\Phi(d)}{d}$,

2) функция f почти периодическая в смысле Безиковича из класса $\mathcal{B}^1$.

Доказательство первого утверждения теоремы следует из формулы

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n^s}=\zeta(s)\sum_{n=1}^\infty \frac{\Phi(n)}{n^s},\quad \zeta - \zeta\text{-функция Римана,}$$

и теоремы Икеара (см. п. 11.1 главы 1), а доказательство второго из того, что функция f аппроксимируется в среднем функциями вида

$$f_l(n)=\sum_{d/n}\Phi(d),$$

где суммирование распространено на все d, имеющие вид $d=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_l^{\alpha_l}$, $0\leqslant\alpha_i\leqslant l$, $i=1, \ldots, l$, а функции f_l периодические с периодом $p_1^l \ldots p_l^l$.

Пример. Пусть $f(n)=\sum\limits_{d/n}\frac{1}{2^d}$. Тогда

$$M(f)=\sum_1^\infty \frac{1}{d2^d}=\ln 2.$$

В условиях теоремы Винтнера можно указать коэффициенты Бора—Фурье функции f и, следовательно, сопоставить этой функции ее ряд Бора—Фурье.

Оказывается, что $M(f(n)e^{2\pi i\lambda n})=0$ для иррациональных λ.

Если же $\lambda=\frac{m}{q}$, где $(m, q)=1$, то

$$M\left(f(n)\, e^{2\pi i \frac{m}{q} n}\right)=\frac{1}{q} \sum_{1}^{\infty} \frac{\Phi(qt)}{t}.$$

3) Суммы Рамануджана. В работе Эрдёша, М. Каца, ван Кампена и Винтнера[1] рассматриваются формальные разложения Рамануджана, относящиеся к тригонометрическим рядам с рациональными показателями, которые интерпретируются как представления Бора — Безиковича.

Рассматриваются мультипликативные функции f натурального аргумента, для которых

$$f(n)=\prod_{p \mid n} f(p),$$

т. е. для каждого простого p при $k>1$ справедливо равенство $f(p^k)=f(p)$. Такие функции называются *строго мультипликативными*. Строго мультипликативная функция распространяется на $\mathbf{Z}$, если положить $f(0)=1$ и $f(-n)=f(n)$.

Пример. Пусть φ — функция Эйлера, сопоставляющая каждому натуральному n число целых чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Тогда функция $f(n)=\frac{\varphi(n)}{n}$ — строго мультипликативна, причем

$$f(n)=\prod_{p \mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\prod_{p \mid n} f(p).$$

Оказывается, что если строго мультипликативная положительная функция f удовлетворяет условию

$$\sum_{p} \frac{|1-f(p)|}{p}<\infty,$$

то:

1) для нее существует среднее

$$M(f)=\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k)=\prod_{p}\left(1-\frac{1-f(p)}{p}\right),$$

2) «коэффициенты Фурье» функции f, определяемые формулой

$$c_\lambda=M\left(f(n)\, e^{2\pi i\lambda}\right)^n,$$

существуют для всех вещественных λ и равны нулю для всех иррациональных λ,

3) функция f является почти периодически в смысле Безико-

[1] См. Kac M., Selected papers. Cambridge: MIT Press, 1979, *38*, 529 pp.

вича (B^1) и ее «ряд Фурье» представляется в виде

$$f(n) \cong M(f) + M(f) \sum_{q>1} \sum_{m} \sum_{p/q} \frac{f(p)-1}{f(p)-1+p} \cos\left(2\pi \frac{m}{q} n\right),$$

где первое суммирование распространяется на все $q>1$, не имеющие квадратов в своем разложении на множители, целое число m во второй сумме пробегает $\varphi(q)$ значений, взаимно простых с q, удовлетворяющих неравенству $1 \leqslant m < q$. С помощью функции Мёбиуса последнюю формулу можно записать в виде

$$f(n) \cong M(f) \sum_{r=1}^{\infty} \mu(r)\, c_r(n) \prod_{p/r} \frac{1-f(p)}{f(p)-1+p}, \tag{4}$$

$$c_r(n) = \sum_{m} \cos\left(2\pi \frac{m}{r} n\right), \quad \text{где} \quad (m, r) = 1, \quad 1 \leqslant m < r, \quad c_1(n) = 1;$$

функции $c_r()n$ называются *суммами Рамануджана* (см. [88]).

Так что, 4) есть формальный ряд Фурье для f, который можно представить в виде

$$f(n) \cong \sum a_r c_r(n),$$

$$a_r = a_r(f) = M(f)\, \mu(r) \prod_{p/r} \frac{1-p}{f(p)-1+p}, \quad r = 1, 2, \ldots.$$

Заметим, что строго мультипликативная функция f является почти периодической функцией в смысле Бора тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{p} |1 - f(p)| < \infty.$$

4) Еще более интересна интерпретация результатов Харди и Литлвуда по проблеме Варинга в свете теории почти периодических функций и в связи с групповой двойственностью, заимствованная из обзора Макки [66].

Для каждого положительного целого n и натуральных k, s обозначим через $\varphi_{s,k}(n)$ число целых решений уравнения $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k = n$. Тогда

$$1 + \sum_{n} \varphi_{s,k}(n)\, q^n = \left(1 + \sum_{n \neq 0} q^{n^k}\right)^s. \tag{5}$$

Анализируя формулу (5), Харди и Литлвуд получили представление для функции $\varphi_{s,k}(n)$ в виде так называемых «сингулярных рядов» и, далее, нашли асимптотику $\varphi_{s,k}(n)$ при больших n.

Если заметить, что $\varphi_{s,k}(1) + \ldots + \varphi_{s,k}(n)$ есть число целых точек в области ограниченной гиперповерхностью $x_1^k + \ldots$ $\ldots + x_s^k = n$, которое, как показывают элементарные соображения, равно асимптотически Cn_s^k при больших n, то понятна целесообразность следующей нормировки $\varphi_{s,k}(n)$. Положим

$$f(n)=f_{s,k}(n)=\frac{\varphi_{s,k}(n)}{n^{\frac{s}{k}-1}}.$$

Легко доказать, что существует среднее

$$M(f)=\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Это приводит к мысли, как в предыдущем примере, исследовать существование «коэффициентов Фурье»

$$c_\lambda=M(fe^{-2\pi i n\lambda})$$

для различных вещественных значений λ.

Пусть $s\geqslant 2^k(2k+1)$. Тогда, как показали Харди и Литлвуд,

(1) c_λ существует для всех вещественных λ, при этом $c_\lambda=0$ когда λ иррационально, если же $\lambda=\frac{p}{q}$, где $(p, q)=1$, то

$$c_\lambda=\frac{1}{M(f)}\,\frac{1}{q^s}\sum_{m=0}^{q-1} e^{2\pi i m^k\left(\frac{p}{q}\right)^s}.$$

(2) Ряд $\sum\limits_{\lambda\in\mathbf{Q}} c_\lambda e^{2\pi i h\lambda}$ равномерно сходится на $\mathbf{Z}$ к некоторой функции s.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(f(n)-s(n))=0$.

В частности, $f(n)$ асимптотически равно $s(n)$, где $s(n)$ — почти периодическая функция в смысле Бора, ряд Бора—Фурье которой и является тем, что Харди и Литлвуд назвали сингулярным рядом.

М. Кац, который в 1940 г. впервые обратил внимание на такую интерпретацию результатов Харди для $k=2$, указал, что в случае, когда $5\leqslant s\leqslant 8$ и когда, как показал Харди, сумма сингулярного ряда в точности равна $f(n)=n^{1-\frac{s}{2}}\varphi_{s,2}(n)$, функция $f(n)$ есть равномерная почти периодическая функция. В случае $s=3, 4$ функция f оказывается почти периодической функцией в смысле Безиковича класса B^1. Случай $s=2$ особенно интересен тем, что f перестает быть даже функцией класса (B), хотя ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю. Наконец, когда $s>8$ почти периодичность исчезает.

Вернемся к интерпретации Макки формул

$$\varphi_{s,k}(n)=\frac{n^{\frac{s}{k}-1}}{M(f)}f_0(n),\quad f_0(n)\sim\sum_{\lambda\in\mathbf{Q}}c_\lambda e^{2\pi i\lambda n}.$$

Учитывая сказанное в начале этого пункта, мы можем интерпретировать $f(n)$ как сужение на $\mathbf{Z}$ непрерывной функции на группе $\hat{\Lambda}=\prod\limits_p\hat{\Lambda}_p$, где $\hat{\Lambda}_p$, напоминаем, можно отождествить с $\mathbf{Z}_p$, а значит, группу $\hat{\Lambda}$ с открытой компактной подгруппой неархимедовой компоненты группы аделей поля $\mathbf{Q}$. Перенося функцию f на группу $\hat{\Lambda}$, можно факторизовать ее, представляя в виде произведения функций, заданных на $\hat{\Lambda}_p\cong\mathbf{Z}_p$ при различных p. Такую p-адическую компоненту функции f можно интерпретировать тогда, как число целых p-адических решений уравнения

$$x_1^k+\ldots+x_s^k=n. \tag{6}$$

Наконец, множитель $\frac{1}{M(f)}\left(n^{\frac{s}{k}}-1\right)$ также допускает интерпретацию в виде числа вещественных решений уравнения (6).

Таким образом, функцию $\varphi_{s,k}(n)$ можно интерпретировать как заданную на всей группе A аделей рационального поля, а ее факторизацию как соответствующую факторизацию группы аделей.

§ 10. Общие и специальные структурные теоремы

Поскольку алгебраическая структура абелевых групп (без топологии) еще далека от прояснения и поскольку любая абелева группа в дискретной топологии может рассматриваться как ЛКА группа, то общую структурную теорию для ЛКА групп можно будет до известной степени считать завершенной, если она охватит ЛКА недискретные группы, двойственные группы для которых тоже недискретны.

Наша оговорка в предыдущем абзаце связана со следующим обстоятельством. В теории абелевых групп есть случай, допускающий полное структурное описание. А именно, любая конечно порожденная группа изоморфна прямому произведению конечного числа циклических групп, каждая из которых либо бесконечна, либо имеет порядком степень простого числа. Этот фундаментальный факт теории абелевых групп имеет замечательный аналог в структурной теории ЛКА групп (когда конечно порожденные группы заменяются компактно порожденными группами), с помощью которого могут быть установлены так называемые главные структурные теоремы теории.

Наверное, самый короткий путь построения структурной теории проходит через теорию двойственности Понтрягина—ван Кампена, хотя сами создатели теории двойственности, напротив, теорему двойственности выводили из структурных теорем (см. [25]).

Мы расскажем в этом параграфе о той роли, которую теорема двойственности играет в общих и специальных структурных теоремах.

10.1. Монотетические и соленоидные группы. Топологическая группа называется монотетической (соленоидной), если она содержит как плотную подгруппу гомоморфный образ группы $\mathbf{Z}(\mathbf{R})$.

Примеры. (a) Боровская компактификация $\mathbf{T}_d$, в которую плотно вкладывается группа $\mathbf{Z}$, — монотетическая группа по определению.

(b) Пусть H — подгруппа группы $\mathbf{T}_d$. Тогда $\hat{H}$, $\hat{H}=\hat{\mathbf{T}}_d/H^{\perp}$, является монотетической группой как гомоморфный образ монотетической группы.

Поскольку в компактную монотетическую группу G группа $\mathbf{Z}$ с необходимостью вкладывается плотно, то $\hat{G}$ изоморфна дискретной подгруппе группы $\mathbf{T}_d$ и, следовательно, примерами (a)—(b) исчерпываются все компактные монотетические группы. Некомпактные же монотетические группы изоморфны группе $\mathbf{Z}$.

(c) Пусть H — подгруппа группы $\mathbf{R}_d$. Тогда $\hat{H}$ — соленоидальная компактная группа.

Оказывается, что такими группами $\hat{H}$ исчерпываются все компактные соленоидальные группы.

10.2. Компактно порожденные группы. Строение таких групп полностью характеризуется следующей теоремой.

Теорема 1. Каждая компактно порожденная ЛКА группа изоморфна прямому произведению

$$\mathbf{R}^m\times\mathbf{Z}^n\times K, \tag{1}$$

где K — компактная группа, m и n — некоторые неотрицательные целые числа.

Доказательство этой теоремы представляет собой эффектное упражнение на применение теоремы двойственности. Сначала с помощью результата п. 10.1 доказывается, что компактно порожденная ЛКА группа G содержит дискретную подгруппу D, изоморфную $\mathbf{Z}^p$ при некотором $p\in\mathbf{Z}^+$ такую, что G/D — компакт. Поскольку группа $D^{\perp}=(G/D)^{\wedge}$ дискретна, то $\hat{G}$ локально изоморфна группе $\hat{G}/D^{\perp}$, совпадающей с $\hat{D}$, т. е. группе $\mathbf{T}^p$ и стало быть группе $\mathbf{R}^p$.

Но тогда связная компонента H единицы в $\hat{G}$ является открытой подгруппой, изоморфной $\mathbf{R}^m\times\mathbf{T}^{p-m}$, т. е. делимой группой; при этом факторгруппа $\hat{G}/H$ дискретна. К делимой группе H и к тождественному гомоморфизму $H \to H$ можно применить 2.1.(6) и получить непрерывный гомоморфизм $\hat{G} \to H$, поскольку таковым был гомоморфизм $H \to H$. Поэтому группа $\hat{G}$ изоморфна прямому произведению $\mathbf{R}^m \times \mathbf{Z}^{p-m} \times \hat{G}/H$ и осталось заметить, что $\hat{G}/H$ — компакт. ◀

Замечание 1. Компактная группа K в (1) является наибольшей компактной группой, содержащейся в G, и группой G определяется однозначно. Ясно, что m и n в (1) также определяются однозначно группой G.

Замечание 2. Если G и $\hat{G}$ порождены компактными окрестностями своих единичных элементов, то G изоморфна произведению

$$\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times F,$$

где F — конечная группа, т. е. G — элементарная группа. Целые неотрицательные числа p, q и r группой G определяются однозначно, а конечная группа F с точностью до изоморфизма. В частности, каждая абелева компактная или связная группа Ли является элементарной группой.

10.3. Главные структурные теоремы.

Теорема 1. Каждая ЛКА группа представляется в виде прямого произведения подгруппы, изоморфной $\mathbf{R}^m$ при некотором m и подгруппы, обладающей компактной открытой подгруппой.

Доказательство. Пусть H — открытая подгруппа группы G, порожденная компактной окрестностью элемента $\mathbf{O}_H$. Согласно теореме 10.2.1, $H = \mathbf{R}^m \times \mathbf{Z} \times K$. Канонический гомоморфизм из H в делимую группу $\mathbf{R}^m$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $\pi: G \to \mathbf{R}^m$. Поэтому $G = \mathbf{R}^m \times \operatorname{Ker} \pi$, причем $\operatorname{Ker} \pi \cap H = \mathbf{Z}^n \times K$. Поэтому $\mathbf{Z}^n \times K$ — открытая подгруппа в $\operatorname{Ker} \pi$, а K — открытая подгруппа в $\mathbf{Z}^n \times K$, т. е. $\operatorname{Ker} \pi / K$ — дискретна. ◀

Замечание. Теорема 1 сводит классификацию ЛКА групп к классификации дискретных абелевых групп и к классификации «расширений» групп дискретных до групп компактных (что является проблемой теории когомологий групп, см. [67]).

Отметим следующие факты, иллюстрирующие структурную теорему 1, которые часто оказываются полезными. Некоторые из них являются следствием структурной теоремы 1, некоторые выводятся из свойств двойственного гомоморфизма (см. п. 9.2).

Определение. Элемент топологической группы, порождающий относительно компактную подгруппу, называется *компактным*.

Следствие 1. Множество всех компактных элементов

ЛКА группы G есть замкнутая подгруппа в G, аннулятор которой представляет собой связную компоненту единицы группы $\hat{G}$.

Следствие 2. Пусть G — ЛКА группа, B — замкнутая подгруппа компактных элементов в G. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) Группа G допускает достаточно много вещественных характеров (непрерывных гомоморфизмов группы G в $\mathbf{R}$, см. п. 5.1 главы 1),

(b) $B=\{1_G\}$,

(c) группа G связна,

(d) группа G изоморфна прямому произведению $\mathbf{R}^n \times D$, где n — неотрицательное целое число, а D — дискретная абелева группа без кручения.

Следствие 3. (a) Если ЛКА группа G делима, то $\hat{G}$ — группа без кручения.

(b) Если ЛКА группа G без кручения, то $(\hat{G})^{(n)}$ плотна в $\hat{G}$ для каждого натурального n. (Для доказательства достаточно заметить, что $(G^{(n)})^{\perp}$ и $(G_{(n)})^{\perp}$ в $\hat{G}$ совпадают, соответственно, с $(\hat{G})_{(n)}$ и с замыканием $(\hat{G})^{(n)}$ в $\hat{G}$.)

Следствие 4. Для компактной группы G следующие условия эквивалентны:

(a) G — связная группа,

(b) $\hat{G}$ — группа без кручения,

(c) G — делимая группа.

Следствие 5. Для компактной группы G следующие условия эквивалентны:

(a) G — нульмерная группа,

(b) $\hat{G}$ — периодическая группа (напомним, состоящая из элементов конечного порядка).

(c) для любого характера $\chi \in \hat{G}$ образ $\chi(G)$ группы G есть конечная подгруппа в $\mathbf{T}$.

Общую структурную теорию мы завершим еще одной так называемой *главной структурной теоремой.*

Теорема 2. Каждая ЛКА группа есть объединение возрастающего направленного семейства открытых подгрупп, которые являются проективными пределами групп, изоморфных группам вида $\mathbf{R}^m \times \mathbf{Z}^n \times \mathbf{T}^l \times F$, где F — конечная группа, m, n, $l \in \mathbf{Z}^+$.

Доказательство. Заметим сначала, что каждая дискретная абелева группа есть индуктивный предел подгрупп, изоморфных $\mathbf{Z}^n \times F$, где F — конечная группа. В силу теоремы двойственности, каждая компактная группа представляется как проективный предел групп, топологически изоморфных $\mathbf{T}^n \times \hat{F}$, где $\hat{F}$ — конечная группа. Осталось заметить, что каждая

ЛКА группа G может быть представлена как объединение возрастающего направленного семейства открытых подгрупп, порожденных компактными окрестностями элемента 1_G, и воспользоваться теоремой 10.2.1.

10.4. Специальные структурные теоремы и построение группы аделей алгебраического числового поля на основе теории двойственности. (1) Можно уточнить сказанное в п. 10.1 о структуре соленоидальных и монотетических групп (см. Х—Р, [51, § 25.]). Именно, топологическая группа G соленоидальна тогда и только тогда, когда G является гомоморфным образом группы $(\Omega_{\mathbf{a}})^{\mathfrak{c}}$, где $\mathbf{a}=(2!, 3!, 4!, \ldots)$, а $\mathfrak{c}$ — мощность континуума. Таким образом, наибольшая компактная соленоидальная группа $(\Omega_{\mathbf{a}})^{\mathfrak{c}}$, $\mathbf{a}=(2!, 3!, 4! \ldots)$, изоморфна группе $(\mathbf{R}_d)^{\wedge}$.

Аналогичным образом, любая компактная монотетическая группа является гомоморфным образом группы $(\mathbf{T}_d)^{\wedge}$ и каждый гомоморфный образ группы $(\mathbf{T}_d)^{\wedge}$ является компактной монотетической группой. В свою очередь группа $(\mathbf{T}_d)^{\wedge}$ изоморфна группе $(\Sigma_{\mathbf{a}})^{\mathfrak{c}} \times \prod_p \mathbf{Z}_p$, где $\mathbf{a}=(2!, 3!, 4!, \ldots)$, а $\prod$ — полное произведение групп целых p-адических чисел по всем простым p.

Пользуясь 2.1 (4), можно описать алгебраическую структуру произвольной связной компактной абелевой группы (см. [51, § 25]).

(2) Пусть G — топологическая абелева группа, а E — минимальное делимое расширение группы G. Если $\mathcal{U}$ — открытая база 1_G, то, взяв это семейство в качестве открытой базы $1_E=1_G$, нетрудно показать, что E — топологическая группа, содержащая G в качестве открытой подгруппы. В частности, минимальное делимое расширение $\mathbf{Z}_p$ есть $\mathbf{Q}_p$. Это дает основу для следующего (заимствованного у Макки [66]) определения группы аделей произвольного алгебраического числового поля, исходя из теории двойственности: «Пусть R — кольцо алгебраических целых в числовом алгебраическом поле F, степень (рациональности) которого над полем $\mathbf{Q}$ равна n. Тогда $\hat{R}^+$ — компакт, в действительности, изоморфный $\mathbf{T}^n$. Обозначим через $\hat{R}_f^+$ счетную плотную подгруппу в $\hat{R}^+$, состоящую из всех элементов конечного порядка, и через θ: $\hat{R}_f^+ \to \hat{R}^+$ — инъективный гомоморфизм. В силу следствия 9.2.1, двойственный гомоморфизм $\hat{\theta}: \hat{\hat{R}}^+=R^+ \to \hat{\hat{R}}_f^+$ также инъективен и имеет плотный образ, так что (см. следствие 10.3.5) R^+ можно считать плотной подгруппой компактной вполне несвязной группы $\hat{\hat{R}}_f^+$. Поскольку $\hat{R}_f^+$ делима, то (следствие 10.3.3 (а)) $\hat{\hat{R}}_f^+$ — группа без кручения и у нее есть единственное минимальное делимое расширение E, в котором она имеет счетный индекс

(см. 2.1 (7)). Расширение E может быть превращено в локально компактную группу, если каждый класс смежности подгруппы $\hat{R}_f^+$ в E наделить топологией $\hat{\hat{R}}_f^+$ и объявить подмножество в E открытым, если открыты его пересечения с каждым классом смежности. Локально компактная группа E содержит плотно в нее вложенную аддитивную группу F^+ поля F. Она и называется *неархимедовой компонентой группы аделей* поля F. Пусть $\bar{R}^+$ — векторное пространство всех гомоморфизмов группы R^+ в мультипликативную группу всех положительных вещественных чисел. Тогда векторное пространство $(\bar{R}^+)^\wedge$, содержащее R^+, как решетку и F, как плотную подгруппу, называется *архимедовой компонентой группы аделей поля* F. Плотные вложения $\varphi_1: F^+ \to E$ и $\varphi_2: F^+ \to (\bar{R}^+)^\wedge$ могут быть объединены для получения вложения $f \to (\varphi_1(f), \varphi_2(f))$, $f \in F$, группы F^+ в группу прямого произведения $E \times (\bar{R}^+)^\wedge$, т. е. в *группу аделей поля* F. Образ этого вложения замкнут и называется *группой главных аделей поля* F».

ЛИТЕРАТУРА

а) Монографии

1. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.,* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: ЭЛМ, 1981, 180 с.
2. *Ахиезер Н. И.,* Лекции по теории аппроксимации. М.: ГИТТЛ, 1947, 323 с.
3. —, Классическая проблема моментов. М.: Физматгиз, 1961, 310 с.
4. —, Лекции об интегральных преобразованиях. Харьков: Харьк. у-т, 1984, 120 с.
5. *Глазман И. М.,* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Изд. 2-е. М.: Наука, 1966, 543 с. (см. также 3-е изд. Харьков: Вища школа. Т. 2, 1978, 288 с.)
6. *Березанский Ю. М.,* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965, 800 с.
7. *Бернштейн С. Н.,* Собрание сочинений. Т. I, М.: Из-во АН СССР, 1952, 581 с.
8. *Вейль Г.,* Избранные труды. М.: Наука, 1984, 511 с.
9. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965, 588 с.
10. *Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.,* Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986, 304 с.
11. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.,* Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физматгиз, 1961, 472 с.
12. —, *Граев М. И.,* Пятецкий-Шапиро И. И., Обобщенные функции. Вып. 6. Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966, 512 с.
13. —, *Райков Д. А., Шилов Г. Е.,* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960, 316 с.
14. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.,* Ряды и преобразование Уолша. Теория и применение. М.: Наука, 1987, 344 с.

15. *Граве Д. А.*, Трактат по алгебраическому анализу. Киев: Из-во АН УССР, 1939, 411 с.
16. *Кацнельсон В. Э.*, Методы *J*-теории в континуальных интерполяционных задачах анализа. Ч. I. Харьк. ун-т. Харьков, 1982, 249 с. Библ. 63 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 11 января 1983 г., № 171—83 Деп.)
17. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.*, Эргодическая теория. М.: Наука, 1980, 384 с.
18. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Статистическая физика. Ч. I. М.: Наука, 1976, 584 с.
19. *Левин Б. Я.*, Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956, 632 с. (См. также: Levin B. Ja., Distributions of zeros of entire functions. Revised Edition, Providence: AMS, Transl. Math. Monogr., 1972, 5, 523 pp.)
20. *Линник Ю. В., Островский И. В.*, Разложения случайных величин и векторов. М.: Наука, 1972, 480 с.
21. *Любич Ю. И.*, Введение в теорию банаховых представлений групп. Харьков: Вища школа, 1985, 143 с.
22. *Наймарк М. А.*, Нормированные кольца. М.: Наука, 1968, 664 с.
23. *Нейман Джон фон*, Избранные труды по функциональному анализу. I, II. М.: Наука, 1987, 376 с., 370 с.
24. *Никольский Н. К.*, Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980, 383 с.
25. *Понтрягин Л. С.*, Непрерывные группы. М. — Л.: Ред. техн.-теор. лит., 1938, 316 с. 4-е изд. М.: Наука, 1984, 520 с.
26. *Постников А. Г.*, Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971, 416 с.
27. *Чебышев П. Л.*, Теория сравнений. С — П.: 1901, 3-е изд., 279 с.
28. *Шубин М. А.*, Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978, 280 с.
29. *Benedetto J.*, Harmonic analysis on totally disconnected sets. Lect. Notes Math., 1971, *202*, 261 pp.
30. *Berg C., Christensen J., Ressel P.*, Harmonic analysis on semigroups. Theory of positive definite and related function. Berlin: Springer, 1984, 289 pp.
31. *Bochner S.*, Lectures on Fourier integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1959, 333 pp. (Пер. на рус. яз.: *Бохнер С.*, Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962, 360 с.)
32. *Bourbaki N.*, Eléments de mathématique, Première partie. Livre VI. Intégration. Paris: Hermann, 1962, 341 p. (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.*, Интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. М.: Наука, 1970, 320 с.)
33. —, Théories spectrales. Paris: Hermann, 1967, 97 p. (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.*, Спектральная теория. М.: Мир, 1972, 184 с.)
34. *Branges L. de*, Hilbert spaces of entire functions, N.-Y.: Prentice-Hall, 1968, 326 pp.
35. *Bruijn N. C. de*, Asimptotic method in analysis. Amsterdam: North. Holl. Publ., 1958, 200 pp. (Пер. на рус. яз.: *де Брейн Н.*, Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ, 1961, 247 с.)
36. *Carleman T.*, L'intégrale de Fourier et question qui s'y rattachent. Uppsala: Almqvist und Wiksels boktr., 1944, 119 p.
37. *Dixmier J.*, Les algèbras C^* et leur représentation. Paris: Gauthier-Villars, 1964, XVI, 390 p. (Пер. на рус. яз.: *Диксмье Ж.*, C^*-алгебры и их представления. М.: Наука, 1974, 399 с.)
38. *Donoghue W. F.*, Jr, Distribution and Fourier transforms. N.-Y.: Acad. Press, 1969, 316 pp.
39. *Dunford N., Shwartz J. T.*, Linear operators. Part II. N-Y.: Intersci. Publ., 1963, 1065 pp. (1923/858 pp.) (Пер. на рус. яз.: *Данфорд Н. Шварц Дж. Т.*, Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966, 1063 с.)
40. *Edwards R. E.*, Functional analysis. N. Y.: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1965, 781 pp. (Пер. на рус. яз.: *Эдвардс Р. Э.*, Функциональный анализ. М.: Мир, 1969, 1071 с.)

41. —, Fourier series. A modern introduction. Berlin.: Springer, I — 1979, 211 pp.; II — 1982, 369 pp. (Пер. на рус. яз.: *Эдвардс Р. Э.*, Ряды Фурье в современном изложении. I, II. М.: Мир, 1985, I — 260 с., II — 399 с.)
42. *Feller W.*, An introduction to probability theory and its application. N. Y.: Wiley, 1971, 461 pp.; 626 pp. (Пер. на рус. яз.: *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1—2. М.: Мир, 1984, 530 с. 752 с.)
43. *Gamelin T.*, Uniform algebras. Engleweed Cliffs, N. Y.: Prentice Hall Inc., 1969, 242 pp. (Пер. на рус. яз.: *Гамелин Т.*, Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973, 334 с.)
44. *Greenleaf F.*, Invariant means on topological groups and their application. N. Y.: Van Nostr. Reinhold Co., 1969, 136 pp. (Пер. на рус. яз.: *Гринлиф Ф.*, Инвариантные средние на топологических группах. М.: Мир, 1973, 136 с.)
45. *Guichardet A.*, Analyse harmonique commutative. Paris, 1968, 127 p.
46. *Halmos P. R.*, Measure theory. N. Y.: Van Nostrand, 1950, 304 pp. (Пер. на рус. яз.: *Халмош П.*, Теория меры. М.: ИЛ, 1953, 291 с.)
47. *Harmuth H.*, Sequency theory. N. Y.: Acad Press., 1977, 505 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хармут Г.*, Теория секвентного анализа. М.: Мир, 1980, 754 с.)
48. *Heine V.*, Group theory in quantum mechanics. London: Pergamon Press, 1960, 468 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хейне В.*, Теория групп в квантовой механике. М.: ИЛ, 1963, 522 с.)
49. *Helgason S.*, Groups and geometric analysis. N. Y.: Acad. Press, 1984, 654 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хелгасон С.*, Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987, 735 с.)
50. *Helson H.*, Lectures on invariant subspaces. N. Y.: Acad Press, 1964, 130 pp.
51. *Hewitt E.*, *Ross K.*, Abstract harmonic analysis. I, II. Berlin: Springer, I — 1963, 519pp.; II — 1970, 771 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хьюитт Э.*, *Росс К.*, Абстрактный гармонический анализ. Т. 1 — М.: Наука, 1975, 656 с.; Т. 2 — М.: Мир, 1975, 904 с.)
52. *Hille E.*, *Phillips R.*, Functional analysis and semigroups. Providence: AMS Coll. Publ., 1957, XXXI, 808 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хилле Э.*, *Филлипс Р.*, Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962, 829 с.)
53. *Hirschman I.*, *Widder D.*, The convolution transform. Princeton: Princeton Univ. Press, Princeton Math. Ser., 1955, № 20, 268 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хиршман И.*, *Уиддер Д.*, Преобразования типа свертки. М.: ИЛ, 1958, 312 с.)
54. *Hopf E.*, Ergodentheorie. Berlin: Springer, 1937, 88 S. (Пер. на рус. яз.: *Хопф Э.*, Эргодическая теория. Успехи мат. наук, 1949, 4, вып. 1 (29), 113—182)
55. *Hörmander L.*, The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis. Berlin: Springer, 1983, 391 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.*, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986, 462 с.)
56. *Hurt N.*, Geometric quantization in action. Dordrecht: Reidel Publ. Co., 1983, 336 pp. (Пер. на рус. яз.: *Харт Н.*, Геометрическое квантование в действии. М.: Мир, 1985, 343 с.)
57. *Kahane J.-P.*, *Salem R.*, Ensembles parfaits et sèries trigonométriques. Paris: Hermann, 1963, 192 p.
58. *Katznelson Y.*, An introduction to harmonic analysis. Second corrected edition. N. Y.: Dower, 1976, 264 pp.
59. *Koblitz N.*, p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-functions. Graduate Text Math., 58. N. Y.: Springer, 1977, 150 pp. (Пер. на рус. яз.: *Коблиц Н.*, p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функция. М.: Мир, 1982, 192 с.)
60. *Koosis P.*, Introduction to H^p-spaces. Cambridge Univ. Press, 1980, 376 pp.

(Пер. на рус. яз.: *Кусис П.*, Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984, 366 с.)
61. *Lang S.*, Algebraic numbers. Addison-Wesley. Publ. Co., 1964, 163 pp. (Пер. на рус. яз.: *Ленг С.*, Алгебраические числа. М.: Мир, 1966, 225 с.)
62. *Levinson N.*, Gap and density theorems. N. Y.: AMS Coll. Publ., 1940, XXVI, 385 pp.
63. Linear and complex analysis. Problem book. 199 research problems. Ed. Havin V. P., Hruščëv S. V., Nikol'skii N. K., Lect. Notes Math., 1984, *1043,* 719 pp.; Lect. Notes Math., 1981. *864,* 480 pp.
64. *Loomis L. N.*, An introduction to abstract analysis. Toronto—N. Y.—London: D. van. Nostr. Co., 1953, 190 pp. (Пер. на рус. яз.: *Люмис Л.*, Введение в абстрактный гармонический анализ. М.: ИЛ, 1953, 251 с.)
65. *Maak W.*, Fastperiodische Functionen. Berlin: Springer, 1950, 240 S.
66. *MacKey G. W.*, Harmonic analysis at the exploitation of symmetry — a historical survey. Rice Univ. Stud., 1978, *64,* № 2—3, 73—228
67. *MacLane S.*, Homology. Berlin: Springer, 1963, 422 pp. (Пер. на рус. яз.: *Маклейн С.*, Гомология. М.: Мир, 1966, 543 с.)
68. *Maurin K.*, Metody przestrzeni Hilberta. Warszawa, 1969, 363 s. (Пер. на рус. яз.: *Морен К.*, Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965, 570 с.) (2-nd revised ed., 1972, 553 s.)
69. *Meyer Y.*, Algebraic numbers and harmonic analysis. Amsterdam—London: North-Holl. Publ. Co., 1972, 273 pp.
70. *Monna A. F.*, Analysen non-archimedienne. Berlin: Springer, 1970, 118 pp.
71. *Noble B.*, Method based on the Wiener-Hopf technique. London—N. Y.: Pergamon Press, 1958, 246 pp. (Пер. на рус. яз.: *Нобл Б.*, Метод Винера—Хопфа. М.: ИЛ, 1962, 279 с.)
72. *Paley R. E. A. C.*, *Wiener N.*, Fourier transforms in complex domain (AMS Colloq. Publ. XIX). Providence: AMS, 1934, 184 pp. (Пер. на рус. яз.: *Винер Н.*, *Пэли Р.*, Преобразование Фурье в комплексной плоскости. М.: Наука, 1964, 267 с.)
73. *Phelps R.*, Lectures on Choquet's theorem. Univ. Wash., D. van. Nostr. Co., Princeton, 1966, 130 pp. (Пер. на рус яз.: *Фелпс Р.*, Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968, 112 с.)
74. *Pitt H. R.*, Tauberian theorems. Publ. for the Tata inst. of fund. research. Bombey. London: Oxford Univ. Press, 1958, 174 pp.
75. Radical Banach algebras and automatic continuity. Eds Bacher J. M. and oth., VIII. Lect. Notes Math. 1983, *975,* 470 pp.
76. *Reed M.*, *Simon B.*, Methods of modern mathematical phisycs. I, II. N. Y.: Acad. Press. I — 1972, 325 pp.; II — 1975, 361 pp. (пер. на рус. яз.: *Рид М.*, *Саймон Б.*, Методы современной математической физики. I, II. М.: Мир, I — 1977, 357 с.; II — 1978, 395 с.)
77. *Reiter H.*, Classical harmonic analysis and locally compact group. Oxford: Clarenden Press, 1968, 200 pp.
78. *Rickart Ch. E.*, General theory of Banach algebras. Princeton — N. Y.: D. van Nostr. Co., 1960, 394 pp.
79. *Riemann B.*, Gesammelte Mathematische Werke. Leipzig: Teubner, 1982, 558 S. (Пер. на рус. яз.: *Риман Б.*, Сочинения. М.—Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1958, 543 с.)
80. *Rudin W.*, Fourier analysis on groups. N. Y.: Intersci., 1962, 285 pp.
81. —, Functional analysis. N. Y.: McGraw-Hill Book Co, 1973, 397 pp. (Пер. на рус. яз.: *Рудин У.*, Функциональный анализ. М.: Мир, 1975, 443 с.)
82. *Saks S.*, Theory of integral. 2nd rev. ed. N. Y.: Dover, 1964, 343 pp. (Пер. на рус. яз.: *Сакс С.*, Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949, 494 с.)
83. *Schwartz L.*, Etude des sommes d'exponentielles réeles. Paris: Hermann, 1943, 89 p.; см. также: Etúde des sommes d'exponentielles. Paris: Act. Sci. et Ind., 1959, 959, 131 p.
84. *Serre J.-P.*, Cours d'arithmétique. Paris: Press. Univ. France, 1970, 115 p. (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.*, Курс арифметики. М.: Мир, 1972, 184 с.)
85. *Stein E. M.*, *Weiss G.*, Introduction to Fourier analysis on Euclidian spa-

ces. Princeton: Univ. Press, 1971, 297 pp. (Пер. на рус. яз.: *Стейн Э., Вейс Г.,* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974, 332 с.
86. *Stone M. H.,* Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. AMS Coll. Publ., 1932, XV, 622 pp.
87. *Titchmarsh E.,* Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford: Clarendon Press, 1937, 390 pp. (Пер. на рус. яз.: *Титчмарш Э.,* Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л.: Гостехиздат, 1948, 479 с.)
88. —, The theory of the Zeta-function. Oxford: Clarendon, 1951, 346 pp. (Пер. на рус. яз.: *Титчмарш Э.,* Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953, 407 с.)
89. —, Eigenfunction expansions associated with second order differential equation. II, Oxford, 1958, 404 pp. (Пер. на рус. яз.: *Титчмарш Э.,* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М.: ИЛ, 1961, 555 с.)
90. *Weil A.,* L'integration dans les groupes topologiques et ses applications. Paris: Hermann, Act. Sci. et Ind., 1940, 869, 158 p. (Пер. на рус. яз.: *Вейль А.,* Интегрирование в топологических группах и его применение. М.: ИЛ, 1950, 222 с.)
91. —, Basic numbers theory. Berlin: Springer, 1976, 93 pp. (Пер. на рус. яз.: *Вейль А.,* Основы теории чисел. М.: Мир, 1972, 408 с.)
92. —, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker. Berlin—Heidelberg—N. Y.: Springer, 1976, 93 pp. (Пер. на рус. яз.: *Вейль А.,* Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. М.: Мир, 1978, 112 с.)
93. *Weyl H.* Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig, 1928, 366 S., 2-th ed., Dover Publ., 1931 (Пер. на рус. яз.: *Вейль Г.,* Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986, 495 с.)
94. —, Algebraic theory of numbers. Princeton, 1940, 223 pp. (Пер. на рус. яз.: *Вейль Г.,* Алгебраическая теория чисел. М.: ИЛ, 1947, 226 с.)
95. *Whittaker E. T., Watson G. H.,* A course of modern analysis. Cambridge, 1945, 608 pp. (Пер. на рус. яз.: *Уиттекер Э., Ватсон Дж.,* Курс современного анализа. Ч. 1—2. М.: Физматгиз, 1963, 342 с., 516 с.)
96. *Widder D.,* The Laplace transform. Princeton, 1946, 406 pp.
97. *Wiener N.,* The Fourier integral and certain of its application. N. Y.: Dover Publ., 1933, 201 pp. (Пер. на рус. яз.: *Винер Н.,* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматгиз, 1963, 256 с.)
98. —, Collected works. Cambridge: MIT Press, 1979. Vol 2, 969 pp.
99. *Yosida K.,* Functional analysis. Berlin: Springer, 1965, 458 pp. (Пер. на рус. яз.: *Иосида К.,* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967, 64 с.)
100. *Zygmund A.,* Trigonometric series. Vol I, II. Cambridge: Univ. Press, 1959, I — 383 pp.; II — 354 pp. (Пер. на рус. яз.: *Зигмунд А.,* Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965, 615 с.; 537 с.)

б) Статьи

101. *Артеменко А. П.,* Эрмитово-положительные функции и позитивные функционалы. I, II. Теория функций, функц. анализ и их прил., 1984, вып. 41, 3—16; 1984, вып. 42, 3—20
102. *Ахиезер Н. И.,* Об одном обобщении преобразования Фурье и теоремы Винера—Пэли. Докл. АН СССР, 1954, *96,* № 5, 889—892
103. *Бабенко К. И.,* Об одном неравенстве в теории интегралов Фурье. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, *25,* 531—542
104. *Березанский Ю. М., Горбачук М. Л.,* О продолжении положительно определенных ядер двух переменных. Укр. мат. ж., 1965, *17,* № 5, 96—102
105. *Гельфанд И. М.,* О нормированных кольцах. Докл. АН СССР, 1939, 430—432
106. —, Normierte Ringe. Мат. сб., 1941, *9,* 3—24

107. —, *Наймарк М. А.*, Кольца с инволюцией и их представления. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, 445—480
108. —, *Райков Д. А.*, К теории характеров коммутативных топологических групп. Докл. АН СССР, 1940, *28*, 195—198
109. —, Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп. Мат. сб., 1943, *13*, 301—316
110. *Гурарий В. П.*, Преобразование Фурье в $L^2(-\infty, \infty)$ с весом. Мат. сб., 1962, *58*, № 4, 439—452
111. —, Спектральный анализ ограниченных функций на полуоси. Теория функций, функц. анализ и их прил., 1967, *5*, 210—231
112. —, Спектральный синтез ограниченных функций на полуоси. Функц. анализ и его прил., 1969, *9*, вып. 4, 34—48
113. —, Гармонический анализ в пространствах с весом. Тр. Моск. мат. об-ва, 1976, *35*, 21—76
114. *Данилов В. Г., Маслов В. П.*, Принцип двойственности Понтрягина для вычисления эффекта типа Черенкова в кристаллах и разностных схемах. I, II. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1984, *166*, 130—160; 1985, *167*, 24—45
115. *Диткин В. А.*, Исследование строения идеалов в некоторых нормированных кольцах. Уч. зап. Моск. ун-та, 1939, 83—130
116. *Кац И. С., Крейн М. Г.*, Дополнение II к книге Ф. Аткинсона «Дискретные и непрерывные граничные задачи». М.: Мир, 1968
117. *Коренблюм Б. И.*, Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстрорастущих функций. Тр. Моск. мат. об-ва, 1958, *7*, 121—148
118. *Крейн М. Г.*, О некоторых вопросах геометрии выпуклых ансамблей, принадлежащих линейному нормированному и полному пространству. Докл. АН СССР, 1937, *14*, 5—8
119. —, О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций. Докл. АН СССР, 1940, *26*, 17—21
120. Об одном специальном кольце функций. Докл. АН СССР, 1940, *29*, 355—359
121. —, Об одном обобщении теоремы Планшереля на случай интегралов Фурье на коммутативной топологической группе. Докл. АН СССР, 1941, 482—486
122. —, Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения. Докл. АН СССР, 1946, *53*, 3—6
123. Основные положения теории представлений эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m). Укр. мат. ж., 1949, *1*, *2*, 3—66
124. —, Эрмитово положительные ядра на однородных пространствах. I, II. Укр. мат. ж., 1949, *1*, № 4, 64—98; 1950, *2*, № 1, 10—59
125. —, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Успехи мат. наук, 1958, *13*, № 5, 3—120
126. —, О некоторых новых банаховых алгебрах и теоремах типа Винера—Леви для рядов и интегралов Фурье. Мат. исследования. Кишинев, 1966, *1*, № 1, 82—109
127. —, *Мильман Д. П.*, On extreme points of regularle convex sets. Stud. Math., 1940, *9*, 123—138
128. —, *Нудельман А. А.*, О прямых и обратных задачах для частот граничной диссипации неоднородной струны. Докл. АН СССР, 1979, *247*, № 5, 1046—1049
129. —, О некоторых предложениях типа теорем Фурье—Планшереля и Винера—Пэли, получаемых методами теории спектральных функций. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, вып. 4, 79—80
130. *Левин Б. Я.*, Об одном обобщении теоремы Фейера—Рисса. Докл. АН СССР, 1946, *52*, 291—294
131. —, *Любарский Ю. И.*, Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, *39*, № 3, 657—702
132. —, *Овчаренко И. Е.*, Продолжение эрмитово положительных функций,

заданных в полосе. Теория функций, функц. анализ и их прил., 1967, 5, 68—83
133. *Лин В. Я.*, Полуинвариантное интегрирование со значениями в группе и некоторые его применения. Мат. сб., 1970, 82(124), 233—259
134. *Любарский Г. Я.*, Интегрирование в среднем почти периодических функций на топологической группе. Успехи мат. наук, 1948, *3*, № 3(25), 195—201
135. *Ольшанский А. Ю.*, К вопросу о существовании инвариантного среднего на группе. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 4, 199—200
136. *Наймарк М. А.*, Положительно определенные операторные функции на коммутативной группе. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1943, *7*, 237—244
137. *Повзнер А. Я.*, О позитивных функциях на абелевой группе. Докл. АН СССР, 1940, *28*, 294—295
138. —, Об уравнениях Штурма—Лиувилля и позитивных функциях. Докл. АН СССР, 1944, 43, 387—391
139. *Понтрягин Л. С.*, Линейные представления компактных топологических групп. Мат. сб., 1936, 1, (43), 267—272
140. *Райков Д. А.*, Положительно определенные функции на коммутативных группах с инвариантной мерой. Докл. АН СССР, 1940, 28, 296—300
141. —, Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1945, *14*, 1—86
142. —, К теории нормированных колец с инволюцией. Докл. АН СССР, *54*, 1946, № 5, 391—394
143. *Сахнович Л. А.*, Эффективное построение непродолжаемых эрмитово положительных функций нескольких переменных. Функц. анализ и его прил., 1980, 14, вып. 4, 55—60
144. *Смирнов В. И.*, Sur la théorie des polynôhes orthogonaux à une variable complexe. Ж. Ленингр. ф.-м. об-ва, 1928, *2*, № 1, 155—179
145. *Стеклов В. А.*, Sur le problème d'approximation des fonctions arbitrairs à l'aide des polynômes de Tchébycheff. Изв. АН СССР, 1926, (6), *20*, 857—862
146. *Чебышев П. Л.*, Sur deux théorèmes, relatifs aux probabilites. Полное собр. соч. Т. 3, 1948, 229—239
147. *Шилов Г. Е.*, О регулярных нормированных кольцах. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1947, 1—118
148. *Шрейдер Ю. А.*, Строение максимальных идеалов в кольцах мер со сверткой. Мат. сб., 1950, 27, 297—318
149. *Ambrose W.*, Spectral resolution of groups of unitary operators. Duke Math. J., 1944, *11*, 589—595
150. *Beckner W.*, Inequalities in Fourier analysis. Ann. Math., 1975, *102*, № 1, 159—182
151. *Beurling A.*, Sur les intgrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionelle. Neuvième Congr. Math. Scand., Helsingfors, 1938, 345—366
152. —, Un théorème sur les fonctions bornées et uniformement continues sur l'axe réel. Acta math., 1945, *77*, 127—136
153. —, On the spectral synthesis of bounded functions. Acta math., 1949, *81*, 225—238
154. —, Sur les spectres des fonctions. Colloque internationaux du centre national de recherche scient, XV, Analyse harmonique, Nancy, 1947, 9—29
155. —, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta math., 1949, *81*, 1—2, 79—93
156. —, On quasi-analyticity and general distribution. Mim. L. N., Princeton, 1961
157. *Bredon G. E.*, A new treatment of the Haar integral. Mich. Math. J., 1963, *10*, № 4, 365—373
158. *Cartan H., Godement R.*, Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groups Abeliens localement compacts. Ann. sci. École norm supér, 1947, (3), *64*, 79—99

159. *Daniell P.*, Stieltjes-Volterra products. Congr. Int. Math., Stasbourg, 1920, 130—136
160. *Davis H. S.*, A note on Haar measure. Proc. Amer. Math. Soc., 1955, *6*, 318—321
161. *Day M. M.*, Amenable semigroups. Ill. J. Math., 1957, *1*, 509—544
162. *Dixmier J.*, Les moyennes invariantes dans les semigroups et leur application. Acta sci. math., 1950, *12*, 213—227
163. *Domar Y.*, Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras. Acta math., 1956, *96*, 1—66
164. —, On the spectrale synthesis problem for $(n-1)$-dimensional subsets of $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 2$. Ark. Math., 1971, *9*, № 1, 23—37
165. —, On the analytic transform of bounded linear functionals on certain Banach algebras. Stud. math., 1975, *53*, 203—224
166. —, Bilaterally translation invariant subspaces of weighted $L^p(\mathbf{R})$. Lect. Notes Math., 1983, *975*, 210—213
167. *Douglas R. G., Taylor J. L.*, Wiener-Hopf operators with measure kernels. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 5 (Hilbert Space Operators), 1970. Amsterdam: North Holland 1972
168. *Eilenberg S.*, Topological method in abstract algebra. Comology theory of the groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1949, *55*, 3—37
169. *Fejer L.*, Untersuchunger über Fouriersche Reihe. Math. Ann., 1904, *58*, 501—569
170. *Freudenthal H.*, Die Haarischen Orthogonalsysteme von Gruppencharakteren im Lichte der Pontrjaginschen Dualitätstheorie. Compos. math., 1938, *5*, 354—356
171. *Friedrich J., Klotz L.*, On extensions of positive definite operator-valued functions, to be printed
172. *Godement R.*, Sur une généralisations d'un théorème de Stone. C. r. Acad. Sci., 1944, *218*, 901—903
173. —, Théorèmes taubériens et théorie spectrale. Ann. Sci. École norm. super., 1947, (3), *64*, 119—138
174. —, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Amer. Math. Soc., 1948, *63*, 1—84
175. *Harzallah Kh.*, Fonctions opérant sur les fonctions définiesnégative. Ann. Inst. Fourier, 1967, *17*, № 1, 443—468
176. *Hedenmalm H.*, On the primary ideal structure at infinity for analytic Beurling algebras. Ark. math., 1985, *23*, № 1, 129—158
177. *Hopf E.*, Über lineare Gruppen unitärer Operatoren im Zusammenhange mit den Bewegungen dynamisher Systeme. Sitzungsber. Prees. Akad. Wiss., 1932, 189—190
178. *Hulanicki A.*, Means and Folner conditions on locally compact groups. Stud. math., 1966, *27*, 87—104
179. *James A.*, The invariant trace formula. I. Local theory. J. Amer. Math. Soc., 1988, *1*, № 2
180. *Kakutani Shizuo, Oxtoby J. C.*, Construction of a non-separable invariant extension of the Lebesque measure space. Ann. Math., 1950, (2) *52*, 580—590
181. *Kampen E. R. van*, Locally bicompact Abelian groups and their character groups. Ann. Math., 1935, (2), *36*, 448—463
182. *Koosis P.*, Interior compact spaces of functions on a halfline. Communs Pure and Appl. Math., 1957, *10*, № 4, 583—615
183. *Lax P. D.*, Translation invariant spaces. Acta math., 1959, *101*, № 3—4, 163—178
184. —, A Phragmen-Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations. Communs Pure and Appl. Math. 1957, *10*, 132—149
185. *Littman W.*, Fourier transforms of surface carried measures an differentiability of surface averages. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, *69*, 766—770

186. *Lumer G.*, Bochner's theorem, states and Fourier transforms of measures. Stud. math., 1973, *46*, 135—140
187. *MacKey G.*, Laplace transform for locally compact Abelian groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1948, *34*, 156—162
188. —, Functions on locally compact groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1950, *56*, 385—412 (Пер. на рус. яз.: *Макки Дж.*, Функции на локально компактных группах. Успехи мат. наук, 1953, *8*, № 4, 95—129)
189. —, A theorem of Stone and von Neumann. Duke Math. J., 1949, *16*, 313—326
190. —, Induced representation of locally compact groups. I. Ann. Math., 1952, *55*, 101—139
191. —, Borel structures in groups and their duals. Trans. Amer. Math. Soc., 1957, *85*, 134—165
192. *Mellin H.*, Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma und der hypergeometrischen Functionen. Acta Soc. sci. fenn., 1896, *21*, № 1, 1—115
193. *Nyman B.*, On the one-dimentional translation groups in certain function spaces. Thesis. Uppsala, 1950, 1—54
194. *Pichorides S. K.*, On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmynd and Kolmogorov. Stud. math., 1972, *44*, № 2, 165—169
195. *Pontrjagin L. S.*, Sur les groupes abéliens continus. C. r. Acad. Sci., 1934, *198*, 328—330
196. —, The theory of topological commutative groups. Ann. Math., 1934, (2), *35*, 361—388
197. *Riesz F.*, Über Sätze von Stone and Bochner. Acta Univ. Szeged, 1933, *6*, 184—198
198. *Rogalski M.*, Le théorème de Lévy-Khincin. Séminaire. Choquet, 3-e annee 1963/64, *2*, 1—18
199. *Rudin W.*, The extension problem for positive definite functions. Ill. J. Math., 1963, *3*, 532—539
200. *Ryll-Nardzewski C.*, On fixed points of semi-groups of endomorphisms of linear spaces. Proc. Fifth Berkeley, Symp. Math. Statistics and Probability. V. II., Berkeley, 1966
201. *Salem R.*, On singular monotonic functions whose spectrum has a given dimension. Ark. math., 1952, *1*, 353—365
202. *Schoenberg J.*, Metric spaces and positive definite functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1938, *44*, 522—536
203. *Schreier O.*, Abstrakte kontinuierliche Gruppen. Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1925, *4*, 15—32
204. *Schwartz L.*, Théorie génèrale des fonctions moyenne-périodiques. Ann. Math., 1947, (2) *48*, 857—929
205. *Segal I. E.*, *Neumann J. van*, A theorem of unitary representations of semisimple Lie groups. Ann. Math., 1950, *52*, 509—517
206. *Steklov V. A.*, Sur une méthode nouvell, pour résoudre plusieurs problémes sur le developpement d'une fonction arbitraire en series infinies. Compt. rendus. Paris, 1907, *144*, 1329—1332
207. *Stone M. H.*, On the one-parameter unitary groups in Hilbert space. Ann. Math., 1932, (2) *33*, 643—648
208. —, The generalized Weierstrass approximation theorem. Mag., 1948, *21*, 167—184, 237—254
209. *Taylor J. I.*, The structure on convolutin measure algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, *119*, 150—166
210. —, Ideal theory Laplace transforms for a class of measure algebras on a group. Acta math., 1968, *121*, 251—292
211. *Weierstrass K.*, Über die analytische sogenannter willkürlicher Funktionen reeler Argumente. Sitzungsber. Press Akad. Wiss., 1985, 633—640, 789—906
212. *Wendel J. G.*, Left centralizers and isomorphisms of group algebras. Pacif. J. Math., 1952, *2*, 251—261

213. *Weyl H.*, Theorie der Darstellung kontinuerlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformation. Math. Z., 1925, XXIII, 271—309; 1926, XXIV, 328—395, 789—791 (Пер. на рус. яз.: см. [8] в разделе Монографии)
214. —, *Peter F.*, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. Math. Ann., 1927, XCVII, 737—755 (Пер. на рус. яз.: *Вейль Г., Петер Ф.*, Успехи мат. наук, 1936, *2*, 144—160
215. *Williamson J. H.*, Remarks on the Plancherell and Pontryagin theorems. Topology. Vol. 1. Pergamon Press, 1961, 73—80
216. —, Harmonic analysis on semigroups. London Math. Soc., 1967, *42*, № 1, 1—41
217. *Wiener N., Hopf E.*, Über eine klasse singulärer Integralgleichungen. S. B. Preuss. Akad. Wiss., 1931, 696—706
218. —, *Pitt H. R.*, On absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms. Duke Math. J., 1938, *4*, 420—436

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Технический редактор *Л. И. Хоченкова*

Сдано в набор 26.10.88 Подписано в печать 26.12.88
Формат бумаги 60×90$^1/_{16}$. Бум. тип. № 2 Литературная гарнитура.
Высокая печать. Усл. печ. л. 19,5 Усл. кр.-отт. 19,5 Уч.-изд. л. 19,35
Тираж 1000 экз. Заказ 8311 Цена 1 р. 80 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, Балтийская ул., 14. Тел. 155-42-41

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

ISSN 0233—6723. ИНТ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 25, 1988, 1—312

Индекс 56863

ОПЕЧАТКИ

Современные проблемы математики. Фунд. направления. Том 25, 1988 г.

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
42	7 снизу	$f, g \in D(\mathbf{R})$ —	$f, g \in D(\mathbf{R})$,
49	2 снизу	$\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$	$\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$
168	9 сверху	$0 = O\ Q_p$.	$0 = O_{Q_p}$
171	16 сверху	$U_k = \varprojlim U_k/U\ n, n \geqslant k$	$U_k = \varprojlim U_k/U_n,\ n \geqslant k,$
192	1 снизу	φ_G	φ_{G_1}
199	6 сверху	$f \in CK(G)$,	$f \in C_K(G)$,
199	16 снизу	$f \in CK(G)$.	$f \in C_K(G)$.
205	15 сверху	e такая,	1 такая,
205	19 сверху	$\ldots (x)$ и $(y) d\mu(g)$.	$\ldots (x) u(y) d\mu(y)$.
239	11 снизу	$\sum_{k=1}^{n} C_K \overline{\chi_k}$,	$\sum_{k=1}^{n} c_k \overline{\chi_k}$,
257	10 снизу	$\mathcal{F}\ f \mapsto \hat{f}$	$\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$
265	4 сверху	пространством	пространство
291	12 сверху	то G изоморфна	то $\hat{G}$ изоморфна
294	21 снизу	5. Глазман И. М.,	—, Глазман И. М.,
301	20 снизу	Press	Press
308 левая кол-ка	24 сверху	топологического пространства	— топологического пространства 152
310 левая кол-ка	12 сверху	Струна класса С 87	Струна класса $\mathcal{S}$ 8.
311 левая кол-ка	1 сверху	фломулы Мельлина 45	Формулы Меллина 45

Зак. 8311

Ц. 90 к.