ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

ТОМ 27

РГАСНТИ 27.31, 27.33, 27.39

ISSN 0233—6723

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

Том 27

Научный редактор и составитель
член-корреспондент АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1985 г.

МОСКВА 1988

1—1 0018

УДК 517.968.2+517.956+517.98

Главный редактор информационных изданий ВИНИТИ
профессор *П. В. Нестеров*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

информационных изданий по математике

Главный редактор чл.-корр. АН СССР *Р. В. Гамкрелидзе*
Члены редколлегии: канд. физ.-мат. наук. *Д. Л. Келенджеридзе*,
канд. физ.-мат. наук. *М. К. Керимов*
чл.-корр. АН СССР *Л. Д. Кудрявцев*, профессор *В. Н. Латышев*,
академик *Е. Ф. Мищенко*, академик *С. М. Никольский*,
профессор *Н. М. Остиану* (ученый секретарь редколлегии),
академик *Л. С. Понтрягин*, профессор *В. К. Саульев*,
профессор *А. Г. Свешников*

Редакторы-составители серии
к. ф. м. н. *А. А. Аграчев*, академик *Е. Ф. Мищенко*
профессор *Н. М. Остиану*, академик *Л. С. Понтрягин*

Научный редактор серии *В. П. Сахарова*

Литературный редактор серии *З. А. Измайлова*

Научный консультант по вопросам полиграфии
Заслуженный деятель культуры *М. И. Левштейн*

© ВИНИТИ, 1988

АНАЛИЗ — 4

Консультирующие редакторы-составители тома
профессор *В. Г. Мазья*, академик *С. М. Никольский*

Редактор-составитель тома
С. А. Вахрамеев

Авторы
В. Г. Мазья, З. Прёсдорф

УДК 517.968.2+517.98

I. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

З. Прёсдорф

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Линейным интегральным уравнением называется уравнение вида

$$\lambda a(x)\varphi(x)-\int_X k(x, y)\varphi(y)\,d\nu(y)=f(x), \quad x\in X. \tag{1}$$

Здесь (X, ν) — некоторое пространство с σ-конечной мерой ν, λ — комплексный параметр; a, k, f — заданные (комплексно-значные) функции, причем k называется *ядром*, a — *коэффициентом*, f — *свободным членом* (или *правой частью*) уравнения

(1). Требуется определить параметр λ и искомую функцию φ так, чтобы уравнение (1) удовлетворялось для почти всех $x \in X$ (или для всех $x \in X$, если, например, интеграл рассматривается в смысле Римана). Если $f=0$, то уравнение (1) называется *однородным*, в противном случае *неоднородным*. Если a, k-матрицы-функции, φ, f — вектор-функции, то (1) называется *системой интегральных уравнений*.

К интегральным уравнениям вида (1) приводят многие краевые задачи и задачи на собственные значения, возникающие в математической физике.

Различают три типа линейных интегральных уравнений — *уравнение 1-го рода*, если $\lambda=0$; *уравнение 2-го рода*, если $\lambda a(x) \neq 0$ для всех $x \in X$; *уравнение 3-го рода*, если $a(x)=0$ для некоторого подмножества X и $\lambda \neq 0$.

Первые примеры интегральных уравнений появились в первой половине прошлого века, например, в работах Фурье (1811), Абеля (1826) и Лиувилля (1837). Интегральные уравнения стали предметом особого внимания математиков после того, как Нейману (1877) удалось свести задачу Дирихле для уравнения Лапласа к интегральному уравнению 2-го рода и решить это уравнение с помощью метода последовательных приближений. При изучении уравнения колеблющейся мембраны Пуанкаре (1896) пришел к идее введения комплексного параметра λ в уравнение (1).

Существенным моментом в развитии теории линейных интегральных уравнений явилась работа Вольтерра (1896), в которой он исследовал уравнение вида (см. [92])

$$\varphi(x) - \mu \int_a^x k(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x), \quad a \leqslant y \leqslant x \leqslant b. \tag{2}$$

Уравнение (2) можно рассматривать как частный случай уравнения (1), где $X=[a, b]$, $d\nu(y)=dy$ — мера Римана (мера Лебега) и ядро k обращается в нуль при $y>x$; его принято называть *уравнением Вольтерра*. Вольтерра доказал, что если k и f непрерывны, то (2) имеет при любом комплексном значении μ одно и только одно непрерывное решение, которое можно построить по методу последовательных приближений; при этом решение получается в виде ряда по степеням μ (*ряд Неймана*) и, следовательно, представляет собой целую функцию от μ.

В случае общего линейного интегрального уравнения 2-го рода (1) ряд Неймана сходится лишь тогда, если параметр $\mu=1/\lambda$ достаточно мал. Заслуга Фредгольма (1900—1903; [58]) состоит в том, что он изучил уравнение

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b k(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{3}$$

в предположении непрерывности ядра и правой части, при всевозможных значениях μ. Он заменил интеграл в (3) интегральной суммой и рассмотрел уравнение (3) как предельный случай системы линейных алгебраических уравнений

$$\varphi(x_i) - \mu \sum_{j=1}^{n} k(x_i, x_j)\, \varphi(x_j)\, \Delta x_j = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

с неизвестными $\varphi(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$, где $a \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant b$ — разбиение сегмента $[a, b]$. Решив систему (4) и подставив полученные значения $\varphi(x_j)$ в (3), с помощью формального перехода к пределу (при $\max \Delta x_j \to 0$) Фредгольм установил формулу

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b \Gamma(x, y; \mu) f(y)\, dy. \tag{5}$$

Здесь $\Gamma(x, y; \mu) = D(x, y; \mu)/d(\mu)$ — так называемое *резольвентное ядро Фредгольма*, d и D — некоторые целые функции от μ, причем d — предел определителя системы (4), называемый *определителем Фредгольма*. Формула (5) дает решение, и притом единственное, уравнения (3) при $d(\mu) \neq 0$. Корни функции d являются характеристическими числами уравнения (3), которые могут сгущаться только на бесконечности; для таких значений μ соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения, а уравнение (3) может не быть разрешимым. Более того, Фредгольм доказал, что для уравнения (3) с непрерывным ядром справедливы основные теоремы линейной алгебры. Построенную теорию уравнения (3) Фредгольм обобщил на системы интегральных уравнений, а также на случай ядра со слабой особенностью. Метод Фредгольма был распространен Карлеманом (1921) на случай квадратично суммируемого ядра.

Гильберт (1901—1904; см. [62]) построил общую теорию линейных интегральных уравнений на основе теории линейных и билинейных форм с бесконечным числом переменных и создал спектральную теорию интегральных уравнений с симметричным ядром $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$. Результаты Гильберта получили более простую форму и дальнейшее развитие в работах Шмидта (1905—1908). Им был предложен простой способ решения симметричного интегрального уравнения в случае, когда известны его характеристические числа и собственные функции. Более того, Шмидт нашел простое и красивое доказательство теорем Фредгольма, не использующее определителей, с помощью представления ядра в виде суммы вырожденного и малого ядра.

Теория линейных интегральных уравнений, построенная Фредгольмом и развитая в работах Гильберта, Шмидта, Карлемана и др., явилась отправным пунктом для теории линейных операторов в гильбертовых и банаховых пространствах. Благодаря исследованиям этих математиков, выяснилось, что основные свойства интегральных уравнений 2-го рода с непрерывным ядром (например, теорема Фредгольма о равенстве нулю индекса — разности чисел линейно независимых решений двух транспонированных однородных уравнений) вытекают из компактности соответствующего интегрального оператора и не связаны с его интегральной природой.

Если интегральный оператор в (1) компактен (в рассматриваемом функциональном пространстве), то он называется *интегральным оператором Фредгольма*, а уравнение (1) — *интегральным уравнением Фредгольма*. Обстоятельный обзор всех результатов по интегральным уравнениям Фредгольма, опубликованных до 1928 года, имеется в замечательной монографии [61].

Все результаты теории Фредгольма, не использующие определителей, были обобщены Ф. Риссом (1918) в рамках спектральной теории компактных операторов в банаховых пространствах. В дальнейшем результаты Ф. Рисса были существенно дополнены Шаудером (1930) и Растоном (1954). Проблема распространения теории определителей Фредгольма на операторы в абстрактных банаховых пространствах была независимо решена Гротендиком, Лежаньским и Растоном в начале пятидесятых годов. Новый подход к прямому построению определителей Фредгольма был предложен Пичем (1963).

Существенным дополнением к теории Фредгольма является теорема о квадратичной суммируемости последовательности собственных значений интегрального оператора, доказанная Шуром (1909) в случае непрерывного ядра и Карлеманом (1921) в случае квадратично суммируемого ядра. Впоследствии, в связи с нуждами приложений, появилась необходимость в достаточно общих и точных оценках собственных значений интегрального оператора в зависимости от свойств интегрируемости и гладкости ядра. В этом направлении большие успехи были достигнуты за последние десятилетия. Более того, исследованы общие классы интегральных уравнений, для которых верна теория Фредгольма, а также интегральные уравнения первого и третьего рода (см. гл. 2). Указанные направления продолжают активно развиваться в настоящее время.

Среди нефредгольмовых линейных интегральных уравнений наиболее важными являются сингулярные интегральные уравнения и уравнения Винера—Хопфа. Первые появились еще у Пуанкаре в математической теории приливов. Вторые возникли в совместной работе Винера и Хопфа [93], посвященной исследованию радиационного равновесия звезд. В дальнейшем оба класса уравнений нашли многочисленные приложения к задачам теории упругости, гидро- и аэромеханики, прогнозирования, синтеза антенн, ядерной физики и др. По сравнению с уравнениями Фредгольма, эти уравнения отличаются той важной особенностью, что входящие в них сингулярные интегралы или интегралы типа свертки оказываются операторами ограниченными, но не компактными в соответствующих функциональных пространствах. Другая особенность сингулярных уравнений состоит в том, что для них приходится различать случаи одной и нескольких независимых переменных.

Одномерное сингулярное интегральное уравнение (с ядром Коши) имеет вид

$$A\varphi(t) := a(t)\varphi(t) + b(t) S_\Gamma\varphi(t) + T\varphi(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \qquad (6)$$

где a, b, f — заданные функции, T — интегральный оператор Фредгольма, Γ — плоская линия, а сингулярный интеграл

$$S_\Gamma\varphi(t) := \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

понимается в смысле главного значения по Коши.

Исследование уравнений (6) было начато почти одновременно с построением теории уравнений Фредгольма в работах Гильберта (1904—1905) и Пуанкаре (1910). В одном частном случае это уравнение было рассмотрено гораздо раньше в докторской диссертации Ю. В. Сохоцкого (1873). Первые основополагающие результаты по теории уравнений (6) были получены Нётером (1921) и Карлеманом (1922). Нётер [71] впервые доказал (при определенных ограничениях на гладкость известных и искомых функций в уравнении (6)), что если Γ — замкнутая гладкая кривая и если выполнено так называемое *условие эллиптичности* $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ $(t \in \Gamma)$, то уравнение (6) нормально разрешимо (т. е. оно имеет решение, если правая часть ортогональна ко всем решениям однородного транспонированного уравнения) и его индекс не зависит от T и равен приращению функции $(1/2\pi)\arg((a-b)/(a+b))$ вдоль кривой Γ. Метод, использованный Нётером, заключался в умножении оператора A на оператор B того же вида (6) и такой, что $BA = I + T_1$, где I — тождественный оператор и T_1 — интегральный оператор Фредгольма. Этот метод, называемый *методом левой регуляризации*, был раньше указан Пуанкаре и Гильбертом в различных частных случаях. Карлеман [48] предложил метод явного решения для некоторых частных классов уравнения (6). Этот метод состоит в приведении простейшего сингулярного уравнения (6) (т. е. при $T=0$) к так называемой *краевой задаче Римана—Гильберта* (см. гл. 3, п. 2.4) или, что эквивалентно, к задаче факторизации функции $(a-b)/(a+b)$ (см. гл. 3, § 4). С привлечением решения краевой задачи Карлеман построил общее решение простейшего сингулярного уравнения и одновременно решил задачу регуляризации полного уравнения (6).

Методы и результаты Нётера и Карлемана были широко использованы и существенно обобщены в работах Жиро, Ф. Д. Гахова, Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, Н. П. Векуа, В. Д. Купрадзе, С. Г. Михлина, Б. В. Хведелидзе и др. в 40-х гг. В этих работах, в основном, предполагалось, что Γ — гладкая линия, а известные и искомые функции в уравнении (6) удовлетворяют на Г (кроме, возможно, конечного числа точек разрыва) условию Гёльдера (см. [6], [8], [28], [31], [36], [37], [57]). Работа Нётера положила начало, с одной стороны, теории нормально разрешимых операторов с конечным индексом в абстрактных пространствах, называемых теперь *нётеровыми* или *фредгольмовыми*, и, с другой стороны, теории индекса оператора. Теория нётеровых операторов была построена, в основном, в 50-х гг. (см. гл. 1, § 3).

При изучении уравнения (6) возникают, в первую очередь, следующие вопросы:

1) В каких функциональных пространствах и при каких предположениях относительно линии интегрирования Г оператор S_Γ ограничен?

2) При каких предположениях относительно коэффициентов a, b оператор A является нётеровым оператором в этих пространствах и как вычисляется его индекс? Каковы способы эффективного решения уравнения?

Для случая ляпуновской кривой Г ограниченность оператора S_Γ была доказана Племелем (1908) и И. И. Приваловым (1916) в пространстве Гёльдера $C^\alpha(\Gamma)$ $(0<\alpha<1)$, М. Риссом (1928) в пространстве $L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$ и Харди, Литлвудом (1936) в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ со степенным весом ρ.

Важным этапом в развитии исследований сингулярных операторов явилось введение Макенхауптом (1972) так называемого класса весов (A_p), что, в частности, позволило в дальнейшем дать полное описание пространств $L_p(\Gamma, \rho)$, в которых ограничен оператор S_Γ. В течение долгого времени оставался нерешенным вопрос: будет ли непрерывен в $L_p(\Gamma)$ оператор S_Γ на кривой класса C^1. Проблема была решена в положительном смысле Кальдероном (1977), который получил даже несколько более общий результат.

Упомянутые работы вызвали к жизни целый ряд глубоких исследований сингулярных операторов, как одномерных, так и многомерных, на негладких кривых и многообразиях, а также в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ с весьма общими весами (см. гл. 3 и гл. 4).

Начиная с конца 40-х гг., появились многочисленные работы, посвященные исследованию проблем нётеровости и индекса; эта тематика продолжает активно развиваться и в настоящее время (см. гл. 3, §§ 2—6; гл. 4, §§ 3—8). Характерным для этих работ является широкое использование идей и методов функционального анализа, в частности, теории банаховых алгебр, а также алгебраической топологии. Существенно, что вместе с операторами вида (6) рассматривается алгебра, порожденная этими операторами, и вопрос 2) изучается сразу для всех операторов из этой алгебры. Важнейшим понятием развитой теории является *символ* оператора, впервые введенный

С. Г. Михлиным [28] для сингулярного оператора (6) в случае непрерывных коэффициентов. Символ устанавливает изоморфизм между алгеброй функций и соответствующей алгеброй операторов.

В последнее время существенные результаты по теории одномерных сингулярных интегральных уравнений были получены также в следующих направлениях: неэллиптические уравнения, уравнения со сдвигом, уравнения с неподвижными особенностями, операторы с однородными ядрами, при исследовании которых роль преобразования Фурье переходит к преобразованию Меллина (см. гл. 3, §§ 3, 7, 8).

Уравнением Винера—Хопфа называется уравнение вида

$$\varphi(x)+\int_0^\infty k(x-y)\,\varphi(y)\,dy=f(x),\quad 0\leqslant x<\infty, \tag{7}$$

которое по своей природе весьма близко к уравнению (6). Первые значительные результаты по теории уравнения (7) были получены Винером и Хопфом (1931), которые разработали эффективный метод (называемый теперь *методом факторизации Винера—Хопфа*) решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (7), в предположении экспоненциального убывания ядра $k(x)$ при $|x|\to\infty$. Метод Винера—Хопфа оказался тесно связан с краевыми задачами теории аналитических функций. За последние 40 лет ему были посвящены многочисленные и весьма разнообразные исследования. Отметим лишь, что с помощью методов функционального анализа М. Г. Крейн (1958) изучил уравнение (7) и его дискретный аналог в различных классах банаховых пространств (в частности, в $L_p(0, \infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$) при условии $k\in L_1(-\infty, \infty)$. Им были установлены необходимые и достаточные условия для справедливости теорем Нётера для уравнения (7), а также асимптотика решений для специальных правых частей. В дальнейшем уравнение (7) было изучено в случае, когда $k\notin L_1(-\infty, \infty)$ и преобразование Фурье ядра k является почти-периодической функцией или же имеет разрывы 1-го рода (см. [12], [14]).

Первые значительные результаты *по многомерным сингулярным интегральным уравнениям* принадлежат Трикоми (1926—1928). В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ сингулярный интеграл имеет вид

$$Ku(x)=a(x)\,u(x)+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x, x-y)\,u(y)\,dy, \tag{8}$$

где

$$k(x, tz)=t^{-n}k(x, z),\quad t>0;\quad \int_{|z|=1} k(x, z)\,dz=0$$

и k удовлетворяет некоторым условиям интегрируемости или гладкости. Трикоми рассмотрел случай $n=2$ и ядра $k(x, z)$, не зависящего от x. С помощью найденной им формулы композиции двух сингулярных интегралом он свел решение уравнения $Ku=f$ к решению некоторого одномерного сингулярного уравнения; его анализом Трикоми не занимался. Следующая важная работа по многомерным сингулярным интегралам принадлежит Жиро (1934), который исследовал сингулярные интегралы по замкнутому ляпуновскому многообразию любой размерности. При весьма специальных предположениях относительно ядра k Жиро распространил теорему Племеля—Привалова об ограниченности оператора K в пространстве $C^\alpha(\Gamma)$ $(0<\alpha<1)$ и построил регуляризатор для K.

Как в исследованиях Трикоми, так и в работе Жиро отсутствовало условие эллиптичности — необходимое и достаточное условие, при котором сингулярный оператор допускает регуляризацию. Это условие появилось в работе С. Г. Михлина [27] (1936), который впервые ввел понятие символа оператора K (в случае $n=2$) с помощью разложения ядра k в ряд Фурье по сферическим функциям; в терминах символа $\mathscr{K}$ условие эллиптичности имеет простой вид $\inf|\mathscr{K}|>0$. Кальдерон и Зигмунд (1952, 1956) впервые применили к сингулярным интегралам аппарат преобразования Фурье. В работах этих авторов и С. Г. Михлина (1956) были установлены следующие важные формулы:

$$\mathscr{K}(x, \xi)=a(x)+\hat{k}(x, \xi); \quad K=F^{-1}_{\xi\to x}\mathscr{K}(x, \xi)F_{x\to\xi},$$

где $\hat{k}(x, \xi)$ — преобразование Фурье F ядра $k(x, z)$ по переменной z. Эти формулы послужили основой дальнейших многочисленных исследований в области многомерных сингулярных интегралов и интегральных уравнений. Более того, систематическое использование аппарата преобразования Фурье содействовало дальнейшему синтезу многомерных сингулярных интегральных уравнений и уравнений в частных производных, что привело, в конечном счете, к созданию теории псевдодифференциальных операторов (Кон, Ниренберг (1965); по этому поводу см. монографии [39], [40], [64], [88]).

В терминах символа С. Г. Михлин (1937—1938, 1953) дал простые достаточные условия ограниченности оператора (8) в пространстве L_2 и доказал, что если K — эллиптический оператор, то сингулярное уравнение $Ku=f$ можно свести к эквивалентному уравнению Фредгольма; в отличие от случая одного уравнения индекс системы многомерных сингулярных уравнений может быть отличным от нуля. Более общие теоремы об ограниченности сингулярного оператора (8) в пространстве $L_p(\mathbf{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ были установлены Кальдероном и Зигмундом (1952—1957, 1978). Начиная с этих основополагающих работ, проблематика условий ограниченности сингулярных интегралов в фунциональных пространствах интенсивно развивалась (см. обзоры [15], [64]).

Полное решение проблемы индекса для общего эллиптического оператора (содержащего в качестве частного случая эллиптический сингулярный интегральный оператор) приведено в работах Атьи, Зингера и Ботта (1963—1964).

В последние годы получены интересные результаты о многомерных сингулярных интегральных уравнениях на многообразиях с краем или с особенностями, о неэллиптических уравнениях и операторах с разрывными символами, о многомерных уравнениях Винера—Хопфа и бисингулярных уравнениях. В основе многих исследований в последних трех из перечисленных направлений лежит так называемый «локальный принцип», предложенный И. Б. Симоненко (1964—1965) и аналогичный, в известном смысле, методу «замораживания коэффициентов» в дифференциальных уравнениях.

Отметим еще, что в последнее время были получены интересные приложения теории многомерных сингулярных интегральных уравнений к краевым задачам для уравнений в частных производных; исследованы многомерные сингулярные уравнения, встречающиеся в теории упругости, термоупругости, моментной упругости и в других математических моделях твердой деформируемой среды и течения жидкости. Далее, получила существенное развитие теория приближенных методов решения интегральных уравнений (см. например, монографии [4], [7], [12], [17], [41], [56], [60], [70], [77]), а также теория нелинейных интегральных уравнений, основы которой были заложены трудами А. М. Ляпунова (1906), Шмидта (1908), П. С. Урысона (1922) и Гаммерштейна (1930) (см., например, обзоры [19], [94]). По причине ограниченного объема настоящей статьи мы не касаемся исследований в этих направлениях.

В заключение введения несколько слов общего характера о теории интегральных уравнений, ее месте в математике и основных направлениях ее развития.

На протяжении приблизительно 100-летней истории эта теория оставалась одной из центральных областей математического анализа. С одной стороны, ее развитие стимулировалось потребностями многочисленных приложений к механике, физике и другим дисциплинам, с другой — она оказалась на пересечении многих областей чистой математики — функционального анализа, теории функций, алгебры, топологии, теории вероятностей и др. Исследование в начальный период интегральных операторов Вольтерра и Фредгольма дало мощный толчок к созданию функционального анализа и привело к решению классических задач математической физики. Эти исследования, в существенном базировавшиеся на аналогии интегральных операторов и алгебраических систем, ограничивались компактными операторами. Следующий этап был связан с изучением сингулярных интегральных операторов. Он привел к появлению таких фундаментальных понятий как индекс оператора, символ, регуляризация.

Обнаружились тесные контакты с краевыми задачами теории аналитических функций. Понятие символа позволило выявить глубокие связи сингулярных интегральных уравнений с теорией банаховых алгебр, что привело к исследованию весьма общих классов интегральных операторов. Лишь при помощи современных средств алгебраической топологии удалось решить проблему вычисления индекса интегрального оператора. Необходимость ответить на основные вопросы об ограниченности операторов в функциональных пространствах потребовала привлечения и дальнейшего развития тонких средств «трудного анализа». Исчисление сингулярных интегральных операторов легло в основу такого полезного аппарата современной теории уравнений и краевых задач, как псевдодифференциальные операторы и интегральные операторы Фурье.

Многие из упомянутых выше направлений продолжают активно развиваться в наши дни. Именно характеристике современных исследований и тенденций в теории интегральных уравнений и посвящен, в основном, настоящий обзор.

Изложение ведется, по возможности, с единой теоретико-операторной точки зрения и с использованием единой терминологии. Базу для этого создает первая глава, которая содержит сведения из абстрактной теории операторов и банаховых алгебр. Общее представление о содержании статьи можно получить из оглавления и введений к главам.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность В. Г. Мазье и Зильберманну, которые прочитали обзор в рукописи и сделали ряд ценных замечаний, а также Бёттхеру за обсуждение гл. 4, § 8.

Глава 1

СВЕДЕНИЯ ИЗ АБСТРАКТНОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

Как уже отмечалось во введении, теория интегральных уравнений с непрерывным ядром, построенная Фредгольмом в начале этого столетия, явилась отправным пунктом для теории линейных операторов в гильбертовых и банаховых пространствах. Многие результаты теории интегральных уравнений в настоящее время представляют собой частные случаи более общих положений функционального анализа. Например, задача о собственных значениях и собственных функциях интегральных уравнений естественно рассматривается в терминах спектральной теории линейных операторов. Все результаты теории Фредгольма, не использующие определителей, были получены Ф. Риссом в общей теории компактных операторов. Понятия и методы функционального анализа настолько упрощают и расширяют теорию интегральных уравнений, что ее современное изложение без этих элементов немыслимо.

Мы начнем с краткого изложения основ теории банаховых алгебр и теории линейных непрерывных и компактных операторов. В существенном настоящая глава посвящена нётеровым и фредгольмовым операторам, теории операторов Рисса, теории Гротендика—Пича определителей Фредгольма для ядерных операторов в банаховых пространствах и спектральной теории компактных операторов в гильбертовом пространстве.

§ 1. Банаховы алгебры

Большинство классов линейных интегральных операторов, рассматриваемых в следующих главах, порождают банаховы алгебры. Проблема обратимости или нётеровости этих операторов, как правило, решается с помощью теории максимальных идеалов И. М. Гельфанда. Для удобства читателя в этом параграфе дается краткое изложение теории И. М. Гельфанда (более подробно см., например, [32]).

1.1. Определения и примеры.

1.1.1. Комплексное банахово пространство $\mathfrak{A}$ с нормой $\|\cdot\|$ называется *банаховой алгеброй*, если для любых его элементов A, B определена операция умножения $AB\in\mathfrak{A}$, ассоциативная и дистрибутивная относительно сложения, перестановочная с умножением на комплексные числа и удовлетворяющая условию $\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|$.

Линейное подпространство $\mathfrak{L}$ банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *подалгеброй*, если $AB\in\mathfrak{L}$ для всех A, $B\in\mathfrak{L}$.

Банахова алгебра $\mathfrak{A}$ называется *коммутативной*, если $AB=BA$ для всех A, $B\in\mathfrak{A}$. Если в $\mathfrak{A}$ существует элемент I такой, что $AI=IA=A$ для любого $A\in\mathfrak{A}$ и $\|I\|=1$, то $\mathfrak{A}$ называется *банаховой алгеброй с единицей I*.

Если в банаховой алгебре $\mathfrak{A}$ нет единицы, то ее можно присоединить, причем так, что расширение будет банаховой алгеброй с единицей, содержащей $\mathfrak{A}$ в качестве замкнутой подалгебры коразмерности 1.

Если в банаховой алгебре последовательности (A_n) и (B_n) сходятся к элементам A и B, соответственно, то, очевидно, $A_nB_n\to AB$.

1.1.2. Примеры коммутативных банаховых алгебр с единицей.

1°. Алгебра $C(X)$ всех комплекснозначных функций f, непрерывных и ограниченных на метрическом пространстве X с нормой

$$\|f\|_{C(X)}:=\sup_{t\in X}|f(t)|.$$

2°. *Алгебра (пространство) Гёльдера* $C^\alpha(x)$ $(0<\alpha\leqslant1)$ всех функций $f\in C(X)$ таких, что

$$\|f\|_\alpha:=\|f\|_{C(X)}+\sup_{x,y\in X}\frac{|f(x)-f(y)|}{d^\alpha(x,y)}<\infty,$$

где d — метрика в X. О функциях $f \in C^\alpha(X)$ говорят, что они удовлетворяют *условию Гёльдера* с показателем α.

3^0. *Винеровская алгебра* W всех комплекснозначных функций A на единичной окружности комплексной плоскости $\mathbf{C}$, разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд Фурье:

$$A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (|z|=1), \quad \|A\|_W := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

4°. Алгебра $W(\mathbf{R})$ всех функций вида

$$F(x) = c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\,dt \quad (c \in \mathbf{C},\ x \in \mathbf{R}),$$

где $f \in L_1(\mathbf{R})$, с нормой $\|F\| = |c| + \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$.

1.2. Регулярные элементы. Резольвента. Спектр. Пусть $\mathfrak{A}$ — банахова алгебра с единицей.

1.2.1. Элемент $A \in \mathfrak{A}$ называется *регулярным* или *обратимым*, если существует $B \in \mathfrak{A}$ такой, что $AB = BA = I$. Однозначно определенный элемент B называется *обратным* к элементу A и обозначается через A^{-1}. Необратимый элемент называется *сингулярным.*

1.2.2. Множество $G\mathfrak{A}$ всех регулярных элементов из $\mathfrak{A}$ есть группа. Если $\|A\| < 1$, то $I - A \in G\mathfrak{A}$ и

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad (A^0 = I), \tag{1.1}$$

причем последний ряд, называемый *рядом Неймана* элемента A, сходится по норме $\mathfrak{A}$. Отсюда следует, что $G\mathfrak{A}$ образует открытое множество в $\mathfrak{A}$. Кроме того, отображение $A \to A^{-1}$, определенное на $G\mathfrak{A}$, является непрерывным.

1.2.3. Множество $\rho(A)$ всех чисел $\lambda \in \mathbf{C}$, для которых $A - \lambda I$ обратим, называется *резольвентным множеством* элемента $A \in \mathfrak{A}$. Число $\lambda \in \rho(A)$ называется *регулярной* точкой и элемент $R_\lambda = R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1}$ — *резольвентой* элемента $A \in \mathfrak{A}$. Дополнение $\sigma(A) := \mathbf{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* элемента A.

Для λ, $\mu \in \rho(A)$ имеет место *резольвентное равенство* или *тождество Гильберта*

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu.$$

1.2.4. Если $\lambda_0 \in \rho(A)$ и $|\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}\| < 1$ $(\lambda \in \mathbf{C})$, то, в силу (1.1), имеем $\lambda \in \rho(A)$ и

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}. \tag{1.2}$$

Следовательно, $\rho(A)$ есть открытое множество, содержащее, в частности, все λ с $|\lambda| > \|A\|$, а спектр $\sigma(A)$ является замкнутым ограниченным множеством.

1.2.5. Число $r_A := \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ называется *спектральным радиусом* элемента A. Справедлива формула (И. М. Гельфанд)

$$r_A = \lim_{n \to \infty} \| A^n \|^{1/n} \leqslant \| A^m \|^{1/m} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

при этом предел всегда существует. Для каждого λ, $|\lambda| > r_A$, резольвента допускает представление $R_\lambda = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n$.

1.2.6. Из (1.2) следует, что резольвента $R_\lambda : \rho(A) \to \mathfrak{A}$ является аналитической функцией, причем для ряда (1.2) радиус сходимости $\rho_0 \geqslant \| R_{\lambda_0} \|^{-1}$. Более того, имеет место равенство

$$\rho_0 = (\overline{\lim_{n \to \infty}} \| R_{\lambda_0}^{n+1} \|^{1/n})^{-1}.$$

Так как резольвента ограничена на бесконечности, то, в силу теоремы Лиувилля, она не может быть определена на всей комплексной плоскости. Поэтому спектр любого элемента банаховой алгебры не пуст.

Отсюда, в свою очередь, сразу вытекает, что банахово тело изометрически изоморфно телу **C**. Для этого достаточно сопоставить элементу $A \in \mathfrak{A}$ число $\lambda \in \mathbf{C}$, для которого элемент $A - \lambda I$ сингулярен. Если $\mathfrak{A}$ тело, то это означает, что $A = \lambda I$.

1.3. Полюсы резольвенты.

Пусть $\mathfrak{A}$ — банахова алгебра с единицей.

1.3.1. Функция $f : D \to \mathfrak{A}$, определенная на открытом множестве $D \subseteq \mathbf{C}$, называется *аналитической* или *голоморфной* в D, если для каждой точки $\lambda_0 \in D$ существует окрестность U такая, что

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n A_n$$

для всех $\lambda \in U$, причем $A_n \in \mathfrak{A}$.

1.3.2. Точка $\lambda_0 \in D$ называется *полюсом* аналитической функции $f : D \setminus \{\lambda_0\} \to \mathfrak{A}$, если существуют натуральное число p и элементы $A_{-n} \in \mathfrak{A}$, $n = 1, \dots, p$, $A_{-p} \neq 0$, такие, что функция

$$f_0(\lambda) = f(\lambda) - \sum_{n=1}^{p} (\lambda - \lambda_0)^{-n} A_{-n} \qquad (1.3)$$

является аналитической в окрестности точки λ_0 (включая λ_0). Как легко видеть, представление (1.3) однозначно. Число p называется *порядком* полюса, а элемент A_{-1} — *вычетом*. Сумму в (1.3) называют *главной частью*, а f_0 — *регулярной частью* разложения в ряд Лорана функции f по отношению к полюсу λ_0.

1.3.3. Пусть $R_\lambda=R_\lambda(A)$ — резольвента элемента $A\in\mathfrak{A}$ и λ_0 — ее полюс порядка p. Тогда $\lambda_0\in\sigma(A)$. Вычет A_{-1} полюса λ_0 обладает следующими свойствами: $A_{-1}^2=A_{-1}$, $A_{-1}A=AA_{-1}$,

$$(A-\lambda_0 I)^n A_{-1}\neq 0,\ n=0,\ 1,\ldots,\ p-1;\quad (A-\lambda_0 I)^p A_{-1}=0.$$

Для всех $\lambda\in\rho(A)$ имеет место представление $R_\lambda=S_\lambda+T_\lambda$, где $S_\lambda=\sum\limits_{n=1}^{p}(\lambda-\lambda_0)^{-n}(A-\lambda_0 I)^{n-1}A_{-1}$ и T_λ — функция, аналитическая в $\rho(A)\cup\{\lambda_0\}$. Если B_{-1} — вычет другого полюса резольвенты R_λ, то $A_{-1}B_{-1}=B_{-1}A_{-1}=0$.

1.4. Максимальные идеалы. Гельфандов гомоморфизм.

1.4.1. Множество I элементов банаховой алгебры с единицей $\mathfrak{A}$ называется *идеалом*, если I — линейное подпространство в $\mathfrak{A}$ и AB, $BA\in I$ при любых $A\in\mathfrak{A}$ и $B\in I$. В дальнейшем под идеалом всегда понимается *собственный* идеал (т. е. $I\neq\{0\}$ и $I\neq\mathfrak{A}$). Замыкание любого идеала есть снова идеал.

1.4.2. Факторпространство $\mathfrak{A}/I$ по любому замкнутому идеалу I есть банахова алгебра с единицей относительно нормы

$$|||\tilde{A}|||:=\inf_{A\in\tilde{A}}\|A\|\quad(\tilde{A}\in\mathfrak{A}/I),$$

если умножение в $\mathfrak{A}/I$ определить равенством $\tilde{A}\tilde{B}=\widetilde{AB}$. Алгебра $\mathfrak{A}/I$ называется *факторалгеброй*.

1.4.3. Любой идеал содержит только сингулярные элементы из $\mathfrak{A}$. Элемент $A\in\mathfrak{A}$ регулярен тогда и только тогда, когда он не принадлежит ни одному идеалу.

1.4.4. Всякий идеал содержится в *максимальном*, т. е. в таком идеале, который не является собственной частью другого идеала. Максимальный идеал всегда замкнут.

1.4.5. В дальнейшем в п. 1.4 будем предполагать, что $\mathfrak{A}$ — коммутативная банахова алгебра с единицей. В таком случае элемент $A\in\mathfrak{A}$ регулярен тогда и только тогда, когда он не принадлежит ни одному из максимальных идеалов.

Так, например, каждый максимальный идеал винеровской алгебры W есть совокупность всех функций из W, обращающихся в нуль в какой-либо фиксированной точке единичной окружности. Применение к алгебре W утверждения этого пункта сразу приводит к известной *теореме Винера*: если $f\in W$ и $f(z)\neq 0$ ($|z|=1$), то $1/f\in W$.

1.4.6. Факторалгебра по любому максимальному идеалу M не содержит ни одного (собственного) идеала и, следовательно, является банаховым телом. Изометрический изоморфизм $\varphi_M:\mathfrak{A}/M\leftrightarrow\mathbf{C}$ (см. п. 1.2.6) определяет линейный непрерывный мультипликативный функционал, т. е. такой $f_M\in\mathfrak{A}'$, что $f_M(AB)=f_M(A)f_M(B)$ $(A,\ B\in\mathfrak{A})$; при этом $\ker f_M=M$. Действительно, достаточно положить $f_M(\tilde{A})=\varphi_M(\tilde{A})$.

Обратно, всякий линейный мультипликативный функционал непрерывен, имеет единичную норму, а его ядро является максимальным идеалом.

1.4.7. Поскольку норма линейного мультипликативного функционала равна единице, каждому такому функционалу соответствует точка на единичной сфере сопряженного пространства $\mathfrak{A}'$. Возникающее при этом множество $\mathfrak{M}$ является компактным хаусдорфовым пространством со $*$-слабой топологией сопряженного пространства. $\mathfrak{M}$ называется *пространством максимальных идеалов* алгебры $\mathfrak{A}$.

1.4.8. Каноническое отображение $\gamma_{\mathfrak{A}}: \mathfrak{A}\to C(\mathfrak{M})$, определяемое формулой $\gamma_{\mathfrak{A}}(A)=\hat{A}$, $\hat{A}(M)=f_M(A)$ $(A\in\mathfrak{A},\ M\in\mathfrak{M})$, называется *гельфандовым гомоморфизмом*. Этот гомоморфизм обладает следующими важными свойствами:

(i) $\|\hat{A}\|_{C(\mathfrak{M})}=\lim\limits_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}\leqslant\|A\|$;

(ii) $\operatorname{im}\hat{A}=\sigma(A)$;

(iii) $A\in\mathfrak{A}$ регулярен $\Leftrightarrow$ $\hat{A}(M)\neq 0$ $\forall M\in\mathfrak{M}$;

(iv) если $M_1\neq M_2$, то существует $A\in\mathfrak{A}$ такой, что $\hat{A}(M_1)\neq\hat{A}(M_2)$.

1.4.9. Ядро гельфандова гомоморфизма называется *радикалом* алгебры $\mathfrak{A}$. Радикал, очевидно, совпадает с пересечением всех максимальных идеалов; его составляют все элементы $A\in\mathfrak{A}$, для которых $\|A^n\|^{1/n}\to 0$ при $n\to\infty$.

1.4.10. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *полупростой* или *алгеброй функций*, если ее радикал состоит только из нуля. Если $\mathfrak{L}$ — полупростая коммутативная банахова алгебра с единицей, то всякий алгебраический гомоморфизм $\varphi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{L}$ непрерывен.

1.5. Алгебры с инволюцией. C^*-алгебры.

1.5.1. Банахова алгебра $\mathfrak{A}$ называется *алгеброй с инволюцией*, если в ней определена операция $A\to A^*$, обладающая свойствами $(A^*)^*=A$, $(\lambda A+\mu B)^*=\bar{\lambda}A^*+\bar{\mu}B^*$, $(AB)^*=B^*A^*$ при любых $A, B\in\mathfrak{A}$ и $\lambda, \mu\in\mathbf{C}$. Если, кроме того, $\|A^*A\|=\|A\|^2$ для всех $A\in\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ называют *C^*-алгеброй*. Элемент A^* называется *сопряженным* к элементу A.

Легко видеть, что если $\mathfrak{A}$ — коммутативная C^*-алгебра, то $\|A^2\|=\|A\|^2$, $\|A^*\|=\|A\|$ и $I^*=I$ (если в $\mathfrak{A}$ существует единица).

1.5.2. Важным примером C^*-алгебры является алгебра $\mathscr{L}(H)$ непрерывных линейных операторов в гильбертовом пространстве H; в этом случае инволюция есть переход к сопряженному оператору (см. также § 2). Более того, всякая C^*-алгебра изометрически изоморфна подалгебре алгебры $\mathscr{L}(H)$ (*теорема Гельфанда — Наймарка*).

$C(X)$ является C^*-алгеброй с изометрической инволюцией $f^*(x)=\overline{f(x)}$ $(x\in X,\ f\in C(X))$.

1.5.3. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две банаховы алгебры с инволюциями $*$ и $+$. Тогда всякий гомоморфизм $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ такой, что $\varphi(A^*) = \varphi(A)^+$, называется *$*$-гомоморфизмом.*

Теорема (И. М. Гельфанд—М. А. Наймарк). Для любой коммутативной C^*-алгебры с единицей $\mathfrak{A}$ гельфандов гомоморфизм $\mathfrak{A} \to C(\mathfrak{M})$ есть изометрический $*$-изоморфизм на $C(\mathfrak{M})$.

Частным случаем этой теоремы является известная теорема Стоуна—Вейерштрасса.

1.5.4. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра с инволюцией. Элемент $A \in \mathfrak{A}$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$; он называется *нормальным*, если $A^*A = AA^*$.

Легко доказываются следующие полезные свойства C^*-алгебры $\mathfrak{A}$.

1) Элемент $A \in \mathfrak{A}$ регулярен тогда и только тогда, когда A^* регулярен; при этом $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

2) $\sigma(A^*) = \{\lambda \mid \bar{\lambda} \in \sigma(A)\}$ и $R_\lambda(A^*) = [R_{\bar{\lambda}}(A)]^*$ для всех $\lambda \in \rho(A^*)$.

3) Если A нормален, то и резольвента $R_\lambda(A)$ нормальна. Если A — самосопряженный элемент и $\lambda \in \mathbf{R}$, то и $R_\lambda(A)$ самосопряжена.

4) Если A нормален, то $\|A^*\| = \|A\|$ и $r_A = \|A^n\|^{1/n}$ для $n = 1, 2, \ldots$.

5) Пусть λ_0 — полюс резольвенты нормального элемента. Тогда порядок полюса λ_0 равен единице и его вычет является нормальным элементом.

1.6. Символ. Пусть $\mathfrak{A}$ — банахова алгебра с единицей и $J \subset \mathfrak{A}$ — замкнутый идеал. Предположим, что факторалгебра $\tilde{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A}/J$ коммутативна. Тогда отображение

$$\sigma_{(\mathfrak{A}, J)} := \gamma_{\tilde{\mathfrak{A}}} \circ \pi_{\tilde{\mathfrak{A}}} : \mathfrak{A} \to C(\mathfrak{M})$$

будем называть *символом алгебры* $\mathfrak{A}$; при этом $\pi_{\tilde{\mathfrak{A}}}: \mathfrak{A} \to \tilde{\mathfrak{A}}$ — каноническая проекция, а $\mathfrak{M}$ — пространство максимальных идеалов коммутативной алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$. Функция $\sigma_{(\mathfrak{A}, J)}(A) \in C(\mathfrak{M})$ называется *символом элемента* $A \in \mathfrak{A}$ (относительно идеала J).

Очевидно, что символ $\sigma_{(\mathfrak{A}, J)}$ является гомоморфизмом и если $A - B \in J$, то $\sigma_{(\mathfrak{A}, J)}(A) = \sigma_{(\mathfrak{A}, J)}(B)$. Кроме того, из определения непосредственно следует, что

$$\|\sigma_{(\mathfrak{A}, J)}(A)\|_{C(\mathfrak{M})} \leqslant \|A\| \quad \forall A \in \mathfrak{A},$$

т. е. символ есть непрерывное отображение из $\mathfrak{A}$ в $C(\mathfrak{M})$.

В [23] строится матричный аналог гельфандова гомоморфизма и матричный символ для некоторых классов некоммутативных банаховых алгебр (по этому поводу см. также гл. 3, § 3).

§ 2. Алгебры линейных операторов

2.1. Основные определения.

2.1.1. Пусть E и F — комплексные нормированные пространства и $D\subseteq E$ — линейное подмножество. Отображение $A: D\to F$ называется *линейным оператором*, если $A(\alpha x+\beta y)=\alpha A(x)+\beta A(y)$ для любых $x, y\in D$ и $\alpha, \beta\in\mathbf{C}$. Будем также пользоваться обозначением $Ax:=A(x)$. Множество D называется *областью определения* оператора A и обозначается $D(A)$. Линейные подмножества $N(A)=\ker A:=\{x\in D(A): Ax=0\}$ и $R(A)=\operatorname{im} A:=\{Ax: x\in D(A)\}$ называются *ядром* и *образом* (*областью значений*) оператора A.

Факторпространство $F\setminus\overline{\operatorname{im} A}$ назовем *коядром* оператора и обозначим $\operatorname{coker} A$. Если из чисел $\alpha(A)=\dim\ker A$, $\beta(A):=\dim\operatorname{coker} A$ хотя бы одно конечно, то разность

$$\operatorname{Ind} A:=\alpha(A)-\beta(A)$$

называется *индексом* оператора A.

2.1.2. Линейный оператор A называется *непрерывным* в точке $x_0\in D(A)$, если при $x_n\to x_0$ $(x_n\in D(A))$ будет $Ax_n\to Ax_0$. Если $D(A)=E$ и A непрерывен в какой-нибудь точке, то A непрерывен на E.

2.1.3. Линейный оператор A, определенный на E, называется *ограниченным*, если $\|Ax\|_F\leqslant C\|x\|_E$, где постоянная C не зависит от выбора $x\in E$. Наименьшее из чисел C в этом неравенстве называется *нормой* оператора A и обозначается через $\|A\|_{E\to F}$. Если $F=E$, то часто пишут просто $\|A\|$. Из определения следует

$$\|A\|_{E\to F}=\sup_{x\in E}\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}=\sup_{\|x\|_E=1}\|Ax\|_F.$$

Для того чтобы линейный оператор был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.

Теорема (*о продолжении по непрерывности*). Пусть $D\subseteq E$ — плотное подмножество и F — банахово пространство. Всякий непрерывный линейный оператор A_0 из D в F допускает единственное непрерывное линейное продолжение A на E, при этом $\|A\|_{E\to F}=\|A_0\|_{D\to F}$.

Таким образом, ограниченный линейный оператор A из E в F достаточно определить на каком-нибудь плотном множестве $D\subseteq E$.

2.1.4. Одним из глубоких результатов теории линейных операторов является

Принцип открытости отображения. При непрерывном линейном отображении банахова пространства E на банахово пространство F образ каждого открытого множества есть снова открытое множество.

2.1.5. Непрерывный линейный оператор P из E в себя называется *проектором*, если $P^2=P$. Очевидно, что вместе с P проектором является и оператор $Q = I - P$, где I — тождественный оператор в E. Проектор Q называется *дополнительным* проектором к P. Поскольку $\operatorname{im} P = \ker Q$, образ проектора всегда замкнут. Ясно, что P является дополнительным проектором к Q и $PQ = QP = 0$. Норма проектора $P \neq 0$ не меньше единицы.

2.1.6. Пусть M и N — замкнутые подпространства в E, такие что $E = M + N$ и $M \cap N = \{0\}$. Тогда E называют *прямой суммой* подпространств M и N и пишут $E = M \dot{+} N$. Очевидно, каждый элемент $x \in E$ допускает единственное представление вида $x = x_M + x_N$, где $x_M \in M$, $x_N \in N$. Полагая $Px := x_M$, мы получаем проектор P, называемый *проектором из E на M вдоль N*. При этом

$$M = \operatorname{im} P, \quad N = \ker P \tag{1.4}$$

и M изоморфно E/N.

Обратно, для любого проектора P в E пространство E есть прямая сумма подпространств (1.4). При этом M и N называются *дополняемыми* подпространствами, а каждое из них называют *прямым дополнением* другого.

Каждое конечномерное подпространство и каждое замкнутое подпространство M конечной коразмерности $\operatorname{codim} M := \dim E/M$ произвольного банахова пространства E дополняемы. В гильбертовом пространстве H любое замкнутое подпространство M дополняемо: в качестве N можно взять, например, ортогональное дополнение $H \ominus M$; соответствующий проектор называется *ортогональным*, его норма равна 1.

2.2. Пространство линейных операторов. Пусть E и F — комплексные нормированные пространства.

2.2.1. Совокупность всех непрерывных линейных операторов из E в F становится линейным нормированным пространством $\mathscr{L}(E, F)$, если для любых $A, B \in \mathscr{L}(E, F)$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ оператор $\alpha A + \beta B \in \mathscr{L}(E, F)$ определить равенством $(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx$ $(x \in E)$, в качестве нормы оператора A взять $\|A\|_{E \to F}$.
Если F — банахово, то и $\mathscr{L}(E, F)$ — банахово.

2.2.2. В случае $F = E$ будем писать просто $\mathscr{L}(E)$ вместо $\mathscr{L}(E, E)$. Для операторов $A, B \in \mathscr{L}(E)$ можно также ввести операцию умножения, полагая $(AB)x = A(Bx)$ для $x \in E$. При этом $AB \in \mathscr{L}(E)$ и $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$.

В частности, если E — банахово пространство, то $\mathscr{L}(E)$ является банаховой алгеброй с единицей I, где I — тождественный оператор. Если пространство E не одномерно, то алгебра $\mathscr{L}(E)$ не является коммутативной.

Оператор $[A, B] := AB - BA$ называется *коммутатором* операторов $A, B \in \mathscr{L}(E)$. Если $AB = BA$, то говорят, что A и B *коммутируют*.

2.3. Сопряженные пространства и сопряженные операторы.

2.3.1. Важным частным случаем пространства $\mathscr{L}(E, F)$ является $E' := \mathscr{L}(E, \mathbf{C})$, которое называется *сопряженным* (или *дуальным*) пространством к E. Элементы $f \in E'$ называются *непрерывными линейными функционалами* или просто *функционалами* на E. Сопряженное пространство E' банахово, даже если E не полно.

2.3.2. Иногда удобнее алгебраические операции для функционалов $f, g \in \mathscr{L}(E, \mathbf{C})$ вводить не так, как указано в п. 2.2.1, а равенством $(\alpha f + \beta g)(x) = \bar{\alpha} f(x) + \bar{\beta} g(x)$. При таком определении $\mathscr{L}(E, \mathbf{C})$ — банахово пространство, которое обозначается через E^* и также называется *сопряженным пространством* к E.

Если H — гильбертово пространство, то, в силу известной теоремы Рисса, H^* изометрично самому пространству H, и в этом смысле $H^* = H$.

Для удобства (и по аналогии с обозначением скалярного произведения гильбертова пространства) в дальнейшем будем писать $\langle x, f \rangle := f(x)$ $(f \in E^*)$.

Например, для пространства $L_p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$, имеем $[L_p(0, 1)]^* = L_{p'}(0, 1)$, где $p' = p/(p-1)$ для $p > 1$ и $p' = \infty$ для $p = 1$. При этом любой функционал $f \in [L_p(0, 1)]^*$ представляется в виде $\langle x, f \rangle = \int\limits_0^1 x(t) \overline{y(t)}\, dt$, где $y \in L_{p'}(0, 1)$, $\|f\| = \|y\|_{L_{p'}}$ (см. также гл. 2, п. 1.2).

2.3.3. Если $A \in \mathscr{L}(E, F)$, то *сопряженный оператор* $A^* \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$ определяется равенством

$$\langle Ax, f \rangle = \langle x, A^* f \rangle \quad (x \in E,\ f \in F^*).$$

Имеют место равенства $\|A^*\| = \|A\|$ и $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$ $(A, B \in \mathscr{L}(E, F);\ \alpha, \beta \in \mathbf{C})$. Если $A, B \in \mathscr{L}(E)$, то $(AB)^* = B^* A^*$.

Если H — гильбертово пространство, то $\mathscr{L}(H)$ является C^*-алгеброй с инволюцией $A \to A^*$.

2.4. Односторонне обратимые операторы. Пусть E и F — банаховы пространства. Оператор $A \in \mathscr{L}(E, F)$ называется *обратимым слева (справа)*, если существует оператор $A_l^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$ $\left(A_r^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)\right)$ такой, что $A_l^{-1} A = I_E$ $\left(A A_r^{-1} = I_F\right)$, где I_E — тождественный оператор в E. Оператор A_l^{-1} $\left(A_r^{-1}\right)$ называется *обратным слева (справа)* к оператору A. Если существуют оба оператора A_l^{-1} и A_r^{-1}, то $A^{-1} = A_l^{-1} = A_r^{-1}$ является *обратным* к A и A называется *обратимым*.

Из принципа открытости отображения вытекают следующие критерии:

1°. Оператор $A \in \mathscr{L}(E, F)$ обратим тогда и только тогда, когда A биективен, т. е. $\ker A = \{0\}$ и $\operatorname{im} A = F$ (*теорема Банаха*).

2°. A обратим слева тогда и только тогда, когда $\ker A = \{0\}$ и существует проектор из F на $\operatorname{im} A$.

3°. A обратим справа тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} A = F$ и существует проектор из E на $\ker A$.

Из результатов п. 1.2.2 следует, что множество всех обратимых слева (справа) операторов открыто в $\mathscr{L}(E, F)$.

2.5. Транспонированные операторы. Пусть E и F — нормированные пространства.

2.5.1. Говорят,что E и F образуют *дуальную систему* $\langle E, F\rangle$, если определено отображение $\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle : E\times F\to\mathbf{C}$ со следующими свойствами:

1. $\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle$ является ограниченной билинейной формой (т. е. отображение линейно относительно каждой из переменных и $|\langle x, y\rangle|\leqslant\gamma\|x\|\|y\|$, где $\gamma=\text{const.}>0$).

2. Если $\langle x_0, y\rangle=0$ для всех $x\in E$ и некоторого $y_0\in F$, то $y_0=0$.

3. Если $\langle x_0, y\rangle$ 0 для всех $y\in F$ и некоторого $x_0\in E$, то $x_0=0$.

Для дуальной системы $\langle E, F\rangle$ определены естественные вложения $F\to E^*$ и $E\to F^*$ равенствами $\hat{y}(x)=\langle x, y\rangle$, $\hat{x}(y)=\langle x, y\rangle$.

2.5.2. Пусть $\langle E, F\rangle$ — дуальная система. Два оператора $A\in\mathscr{L}(E)$ и $A^T\in\mathscr{L}(F)$ называются *транспонированными* (друг к другу), если

$$\langle Ax, y\rangle=\langle x, A^Ty\rangle\ \forall x\in E,\ y\in F.$$

Не каждый оператор $A\in\mathscr{L}(E)$ (или $A^T\in\mathscr{L}(F)$) имеет транспонированный; если такой существует, то он, очевидно, единственен.

2.5.3. Пусть $\langle E, F\rangle$ — дуальная система. Совокупность всех операторов $A\in\mathscr{L}(E)$, имеющих транспонированный $A^T\in\mathscr{L}(F)$, образует линейное пространство $\mathscr{A}(E, F)$. Это пространство содержит тождественный оператор I_E, а вместе с операторами A, B и их произведение; при этом $I_E{}^T=I_F$, $(\alpha A+\beta B)^T=\alpha A^T+\beta B^T$, $(AB)^T=B^TA^T$.

На $\mathscr{A}(E, F)$ можно определить норму равенством $|A|=\max\{\|A\|, \|A^T\|\}$. При этом

$$|AB|\leqslant|A||B|,\quad |I_E|=1.$$

Если E и F — банаховы пространства, то $\mathscr{A}(E, F)$ является банаховой алгеброй с единицей.

2.5.4. Примеры.

1^0. Всякому нормированному пространству E соответствует *естественная дуальная система* $\langle E, E'\rangle$ с билинейной формой $\langle x, f\rangle=f(x)$ $(x\in E,\ f\in E')$. При этом $\mathscr{A}(E, E')=\mathscr{L}(E)$ и $|A|=\|A\|=\|A^T\|$ для всех $A\in\mathscr{L}(E)$. Оператор $A^T\in\mathscr{L}(E')$ определяется тем же равенством, что и оператор A^* (см. п. 2.3.3); его часто называют *дуальным оператором* к A и обозначают A'.

2^0. $E=F=C[0, 1]$ образует дуальную систему с билинейной формой

$$\langle x, y\rangle=\int_0^1 x(t)\,y(t)\,\rho(t)\,dt,$$

где $\rho \in C[0, 1]$ — произвольная положительная функция. В этой дуальной системе каждый интегральный оператор k вида

$$(Kx)(t) = \int_0^1 k(t, s)\, \rho(s)\, x(s)\, ds$$

с непрерывным ядром k имеет транспонированный оператор K^T того же вида с ядром $k^T(t, s) = k(s, t)$.

3⁰. Если $1/p + 1/q \leqslant 1$ $(1 \leqslant p, q \leqslant \infty)$, то $\langle L_p(0, 1), L_q(0, 1) \rangle$, а также $\langle C[0, 1], L_1(0, 1) \rangle$ являются дуальными системами с формой $\langle x, y \rangle = \int\limits_0^1 x(t)\, y(t)\, dt$.

2.6. Компактные операторы. Пусть E, F, G — банаховы пространства.

2.6.1. Линейный оператор $A: E \to F$ называется *компактным* или *вполне непрерывным*, если для всякого ограниченного множества $M \subset E$ замыкание $\overline{A(M)}$ компактно в F. Совокупность всех компактных операторов из E в F будем обозначать через $\mathcal{K}(E, F)$ $(\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E, E))$.

Ясно, что $\mathcal{K}(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$. Тождественный оператор I_E компактен тогда и только тогда, когда E — конечномерное пространство.

2.6.2. Оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ компактен тогда и только тогда, когда каждая последовательность (x_n) в E со свойством $\|x_n\| \leqslant 1$ содержит подпоследовательность (x_{n_k}) такую, что последовательность (Ax_{n_k}) сходится в F.

2.6.3. $A \in \mathcal{K}(E, F) \Leftrightarrow A^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$.

2.6.4. Пусть $A \in \mathcal{K}(E, F)$. Тогда область значений $\operatorname{im} A$ сепарабельна. Кроме того, для всякой слабо сходящейся в E последовательности (x_n) последовательность (Ax_n) сходится в F по норме.

2.6.5. $\mathcal{K}(E, F)$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{L}(E, F)$. Если один из операторов $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $B \in \mathcal{L}(F, G)$ компактен, то $BA \in \mathcal{K}(E, G)$.

В частности, $\mathcal{K}(E)$ — замкнутый идеал банаховой алгебры $\mathcal{L}(E)$. Факторалгебра $\mathcal{L}(E)/\mathcal{K}(E)$ называется *алгеброй Калкина*, а норма

$$|||A||| := \inf\{\|A - T\| : T \in \mathcal{K}(E, F)\}$$

— *существенной нормой оператора* $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

2.6.6. Простейшим примером компактного оператора является конечномерный оператор:

Оператор $K \in \mathcal{L}(E, F)$ называется *конечномерным*, если его область значений конечномерна. Конечномерный оператор может быть представлен в виде $K = \sum\limits_{j=1}^{m} f_j \otimes y_j$, где $y_j \in F$ и

$f_j \in E'$ $(j=1, \ldots, m)$ — фиксированные элементы. По определению,

$$(f_j \otimes y_j)\, x = f_j(x)\, y_j.$$

Если образ компактного оператора замкнут, то оператор конечномерен.

Обозначим совокупность всех конечномерных операторов $K \in \mathcal{L}(E, F)$ через $\mathcal{F}(E, F)$. Очевидно, $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, E)$ является идеалом алгебры $\mathcal{L}(E)$. Оказывается, любой идеал $\mathcal{I}$ алгебры $\mathcal{L}(E)$ содержится в $\mathcal{K}(E)$ и содержит $\mathcal{F}(E)$: $\mathcal{F}(E) \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}(E)$ (*теорема Калкина*).

2.6.7. Важный подкласс $\mathcal{K}(E, F)$ образуют ядерные операторы. Оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ называется *ядерным*, если

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes y_j,$$

где

$$y_j \in F, \quad f_j \in E' \text{ и } \sum_{j=1}^{\infty} \| f_j \|_{E'} \| y_j \|_F < \infty.$$

Ясно, что ядерный оператор представим в виде

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j g_j \otimes x_j,$$

где $\sigma_j \geqslant 0$, $x_j \in F$, $g_j \in E'$, $\| x_j \| = \| g_j \| = 1$, $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j < \infty$.

Заметим, что каждый ядерный оператор по норме аппроксимируется конечномерными операторами.

2.6.8. В сепарабельном гильбертовом пространстве любой компактный оператор является пределом равномерно сходящейся последовательности конечномерных операторов (см. также п. 7.1).

Существуют сепарабельные банаховы пространства, в которых имеются компактные операторы, не являющиеся пределами последовательностей конечномерных операторов. Впервые пример такого пространства был построен Энфло в 1972 г. и тем самым было получено решение сразу двух фундаментальных проблем функционального анализа: проблемы базиса, поставленной еще Банахом (1932) и проблемы аппроксимации, поставленной Гротендиком (1955).

По поводу материала настоящего параграфа см., например, [65], [73].

§ 3. Нётеровы и фредгольмовы операторы

Рассматриваемые в следующих главах линейные интегральные операторы обладают в надлежащим образом выбранных банаховых пространствах весьма важными свойствами: они нормально разрешимы и имеют конечный индекс. Такие операторы будем называть *нётеровыми*. В настоящем параграфе приводятся основные свойства этих операторов, устанавливается связь нётеровости с априорной оценкой и с теорией разрешимости соответствующих операторных уравнений.

Начиная с этого параграфа, все рассматриваемые в настоящей главе пространства предполагаются комплексными банаховыми, если не будет оговорено противное.

3.1. Пусть $A \in \mathscr{L}(E, F)$ и $y \in F$. Если уравнение

$$Ax = y \tag{1.5}$$

имеет решение $x \in E$, то, очевидно,

$$\langle y, f \rangle = 0 \text{ для всех } f \in \ker A^*. \tag{1.6}$$

Если имеет место и обратное, т. е. если условие (1.6) влечёт разрешимость уравнения (1.5), то оператор A называется *нормально разрешимым* (*по Хаусдорфу*). Оператор A нормально разрешим тогда и только тогда, когда его образ $\operatorname{im} A$ замкнут (*лемма Хаусдорфа*). Кроме того, следующие свойства равносильны (*теорема Банаха—Хаусдорфа*):

(i) A нормально разрешим;

(ii) $\operatorname{im} A^*$ есть замкнутое множество в E^*;

(iii) $\operatorname{im} A^* = \{f \in E^* : \langle x, f \rangle = 0 \ \forall x \in \ker A\}$.

3.2. Важный подкласс класса нормально разрешимых операторов составляют обобщенно обратимые операторы. Оператор $A \in \mathscr{L}(E, F)$ называется *обобщенно обратимым*, если существует оператор $B \in \mathscr{L}(F, E)$ такой, что $ABA = A$.

Нетрудно видеть, что оператор A обобщенно обратим в том и только том случае, когда A нормально разрешим и подпространства $\ker A \subseteq E$ и $\operatorname{im} A \subseteq F$ дополняемы. Более того, для обобщенно обратимого оператора A всегда существует оператор $B \in \mathscr{L}(F, E)$ такой, что

$$ABA = A \quad \text{и} \quad BAB = B. \tag{1.7}$$

Оператор B со свойством (1.7) назовем *обобщенным обратным* к A и обозначим его через $A^{(-1)}$. Легко проверить, что (1.7) эквивалентно соотношениям

$$BA = I_E - P, \ AB = I_F - Q; \ PB = BQ = 0, \tag{1.8}$$

где P — проектор из E на $\ker A$ и $I_F - Q$ — проектор из F на $\operatorname{im} A$.

Ясно, что оператор, обратный слева или справа к A, является обобщенным обратным к A. Знание обобщенного обратного оператора позволяет найти все решения уравнения (1.5), если оно разрешимо: элемент $x_0 = A^{(-1)}y$ является одним из решений уравнения (1.5), а общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$x=x_0+u-A^{(-1)}Au$, где u — произвольный элемент E. Условие $AA^{(-1)}y=y$ является необходимым и достаточным для разрешимости уравнения (1.5).

3.3. Нормально разрешимый оператор $A\in\mathscr{L}(E,F)$ называется *нётеровым* или *Ф-оператором*, если числа $\alpha(A)=\dim\ker A$ и $\beta(A)=\alpha(A^*)$ конечны, и *полунётеревым*, если хотя бы одно из этих чисел конечно. В случае полунётеровости различают *Φ_+-операторы* $(\alpha(A)<\infty)$ и *Φ_--операторы* $(\beta(A)<\infty)$.

Множество всех Φ $(\Phi_\pm)$-операторов $A\in\mathscr{L}(E,F)$ обозначим через $\Phi(E,F)$ $(\Phi_\pm(E,F))$. В силу сказанного выше,

$$A\in\Phi_\pm(E,F)\Leftrightarrow A^*\in\Phi_\mp(F^*,E^*).$$

Если $A\in\Phi(E,F)$, то $\operatorname{Ind}A=\alpha(A)-\alpha(A^*)$ и $\operatorname{Ind}A=-\operatorname{Ind}A^*$.

Замечание. Понятие «Ф-оператор» было введено в [9]. Часто, особенно в английской литературе, Ф-оператор называют «фредгольмовым». Автор считает, что эпитет «нётеров» больше соответствует истории развития теории этих операторов: нормально разрешимые операторы с отличным от нуля индексом впервые появились в фундаментальной работе Нётера [71], где были заложены основы для построения общей теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта. Нётер, в частности, получил явную формулу для индекса соответствующего интегрального оператора. Тем самым, между прочим, были исправлены некоторые неточности, допущенные Гильбертом (1904) при исследовании сингулярного интегрального уравнения, к которому он приводил краевую задачу Римана—Гильберта (см. также [62, стр. 219, теорема 43] и [70, стр. 189]).

3.4. Имеется тесная связь нётеровости и существенной нормы оператора с некоторой априорной оценкой (см. [66], [70]). Будем говорить, что полунорма $|\cdot|$, заданная на E, *компактна* относительно нормы $\|\cdot\|$, если каждая последовательность элементов из E, нормы $\|\cdot\|$ которых ограничены, содержит подпоследовательность, являющуюся последовательностью Коши по полунорме.

Теорема. Пусть $A\in\mathscr{L}(E,F)$. Тогда $A\in\Phi_+(E,F)$ в том и только том случае, если существуют полунорма $|\cdot|$, компактная относительно нормы $\|\cdot\|_E$, и число $C>0$, такие, что

$$\|x\|_E\leqslant C\|Ax\|_F+|x|\quad\forall x\in E. \tag{1.9}$$

Теорема. Пусть H — гильбертово пространство и оператор $A\in\mathscr{L}(H)$ удовлетворяет следующему условию: для некоторой константы K и любого $\varepsilon>0$ существует полунорма $|\cdot|$ на H, компактная относительно нормы $\|\cdot\|$, возможно зависящая от ε, и такая, что

$$\|Ax\|\leqslant(K+\varepsilon)\|x\|+|x|\ (x\in H).$$

Тогда $|||A|||\leqslant K$.

3.5. Из приведенных выше результатов вытекают следующие основные свойства нётеровых операторов.

(i) $A \in \mathscr{L}(E, F)$ является Ф-оператором в том и только том случае, если существуют операторы $B, C \in \mathscr{L}(F, E)$, $T_E \in \mathscr{K}(E)$, $T_F \in \mathscr{K}(F)$ такие, что

$$BA = I_E + T_E, \quad AC = I_F + T_F. \tag{1.10}$$

Обратно, если $A \in \Phi(E, F)$, то существует обобщенный обратный оператор $A^{(-1)} \in \mathscr{L}(F, E)$, такой, что $A^{(-1)}A - I_E$ и $AA^{(-1)} - I_F$ — конечномерные операторы.

Таким образом, оператор $A \in \mathscr{L}(E)$ нётеров тогда и только тогда, когда соответствующий класс эквивалентности $\bar{A}$ алгебры Калкина $\mathscr{L}(E)/\mathscr{K}(E)$ обратим.

(ii) $A \in \Phi_\pm(E, F)$, $B \in \Phi_\pm(F, G) \Rightarrow BA \in \Phi_\pm(E, G)$ и

$$\operatorname{Ind} BA = \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} B.$$

(iii) $A \in \Phi_\pm(E, F)$, $T \in \mathscr{K}(E, F) \Rightarrow A + T \in \Phi_\pm(E, F)$ и

$$\operatorname{Ind}(A + T) = \operatorname{Ind} A.$$

В частности, если $T \in \mathscr{K}(E)$, то

$$I + T \in \Phi(E) \text{ и } \operatorname{Ind}(I + T) = 0$$

(*теорема Рисса*).

(iv) Для каждого оператора $A \in \Phi_\pm(E, F)$ существует такое число $\rho > 0$, что $A + C \in \Phi_\pm(E, F)$ и

$$\operatorname{Ind}(A + C) = \operatorname{Ind} A$$

$$\alpha(A + C) \leqslant \alpha(A), \quad \beta(A + C) \leqslant \beta(A)$$

для всех $C \in \mathscr{L}(E, F)$ таких, что $\|C\| < \rho$.

Отсюда следует, что множество $\Phi_\pm(E, F)$ открыто в пространстве $\mathscr{L}(E, F)$ и индексы двух гомотопных операторов $A_0, A_1 \in \Phi(E, F)$ равны между собой.

Первая часть теоремы (ii) допускает обращение. Пусть $A \in \mathscr{L}(E, F)$, $B \in \mathscr{L}(F, G)$.

(v) $BA \in \Phi_+(E, G) \Rightarrow A \in \Phi_+(E, F)$;

$BA \in \Phi_-(E, G) \Rightarrow B \in \Phi_-(F, E)$.

(vi) Если $BA \in \Phi(E, G)$, то A и B одновременно являются или не являются Ф-операторами.

3.6. Оператор $A \in \Phi(E, F)$ будем называть *фредгольмовым*, если

$$\operatorname{Ind} A = 0.$$

Оператор $A \in \mathscr{L}(E, F)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда он представим в виде $A = D + T$, где $D \in \mathscr{L}(E, F)$ обратим и $T \in \mathscr{K}(E, F)$ (*теорема Никольского*).

Если оператор A — нётеров или фредгольмов, то и уравнение (1.5) называется *нётеровым* или *фредгольмовым*, соответственно. В силу теоремы Рисса, классическим примером фредгольмова уравнения является уравнение вида $x + Tx = y$, где $T \in \mathscr{K}(E)$, которое часто называют *уравнением Рисса—Шаудера* (или *уравнением второго рода*).

В силу сказанного выше, нётеровы и фредгольмовы уравнения обладают следующими фундаментальными свойствами. Если $A\in\Phi(E, F)$, то справедливы *теоремы Нётера*:

(i) или уравнение (1.5) имеет хотя бы одно решение при любой правой части $y\in F$, или уравнение $A^*f=0$ имеет нетривиальное решение $f\in F^*$;

(ii) каждое из уравнений $Ax=0$ и $A^*f=0$ имеет конечномерное подпространство решений;

(iii) уравнение (1.5) разрешимо в том и только том случае, если выполнено условие (1.6).

Если A — фредгольмов оператор, то справедливы *теоремы Фредгольма*:

a) или уравнение (1.5) имеет единственное решение при любой правой части, или уравнение $Ax=0$ имеет нетривиальное решение;

b) уравнения $Ax=0$ и $A^*f=0$ имеют одинаковое число линейно независимых решений;

c) имеет место утверждение (iii) теорем Нётера.

3.7. Напомним определение дуальной системы $\langle E, F\rangle$ и банаховой алгебры $\mathscr{A}(E, F)$ (см. п. 2.5). Смысл этого определения состоит в том, что F есть некоторая замена для сопряженного пространства E^*, а транспонированный оператор A^T — замена для сопряженного оператора A^*. Такая замена приносит особую пользу тогда, когда структуры пространств E^* или оператора A^* сложны или, может быть, неизвестны (см. примеры из п. 2.5.4).

Теорема. Пусть $A\in\mathscr{A}(E, F)$, причем $A\in\Phi(E)$, $A^T\in\Phi(F)$, и $\operatorname{Ind} A=-\operatorname{Ind} A^T$. Тогда $\ker A^T=\ker A^*$, $\ker A=\ker(A^T)^*$ и, следовательно, $\alpha(A)=\beta(A^T)$, $\alpha(A^T)=\beta(A)$.

Таким образом, если выполняются условия теоремы, то в формулировках теорем Нётера и Фредгольма уравнение $A^*f=0$ всюду может быть заменено уравнением $A^Tf=0$.

3.8. Любое нётерово уравнение можно свести к уравнениям Рисса—Шаудера с помощью двух линейных преобразований. Для этого удобно ввести еще следующие понятия.

Операторы B и $C\in\mathscr{L}(F, E)$, удовлетворяющие равенствам (1.10) с компактными операторами $T_E\in\mathscr{K}(E)$ и $T_F\in\mathscr{K}(F)$, называются *левым и правым регуляризаторами оператора* $A\in\mathscr{L}(E, F)$. Построение регуляризаторов является одним из важных методов доказательства нётеровости уравнения. Заметим, что разность любых двух регуляризаторов одного и того же Φ-оператора есть компактный оператор.

С другой стороны, наличие левого или правого регуляризаторов позволяет преобразовать уравнение (1.5) к виду

$$x+T_Ex=By \tag{1.11}$$

или, с помощью замены $x=Cu$, к виду

$$u+T_Fu=y.$$

Левый регуляризатор B называется *эквивалентным*, если $\ker B = \{0\}$. Правый регуляризатор C называется *эквивалентным*, если $\operatorname{im} C = E$.

Оператор A имеет эквивалентный левый (правый) регуляризатор в том и только том случае, если он нётеров и его индекс неотрицателен (неположителен).

Если $B(C)$ — неограниченный оператор, действующий из F в E и обладающий указанными свойствами, то его называют *неограниченным левым* (*правым*) *регуляризатором*.

Важным для приложений примером уравнения, для которого просто строятся левый и правый регуляризаторы, является уравнение

$$x - Sx = y, \tag{1.12}$$

где $S \in \mathscr{L}(E)$ — так называемый *квазикомпактный* оператор. Это означает, что существуют оператор $T \in \mathscr{K}(E)$ и натуральное число m со свойством $\|S^m - T\| < 1$. В этом случае оператор $A := I - S^m + T$ обратим и, следовательно, при $D = I + S + \ldots + S^{m-1}$ справедливы равенства:

$$A^{-1}D(I-S) = I - A^{-1}T, \quad (I-S)DA^{-1} = I - TA^{-1}.$$

Таким образом, оператор $A^{-1}D$ является одновременно левым и правым регуляризатором для уравнения (1.12).

Если, в частности, $S^m = T \in \mathscr{K}(E)$, то уравнение (1.12) имеет эквивалентный левый и правый регуляризатор $B := (\varepsilon_1 I - S) \ldots (\varepsilon_{n-1} I - S)$. Здесь $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ — все отличные от единицы корни степени n из единицы, а $n \geqslant m$ — столь большое число, что все операторы $\varepsilon_k I - S$ ($k = 1, \ldots, n-1$) обратимы. Ясно, что $B(I-S) = (I-S)B = I - S^n$.

3.9. Все результаты настоящего параграфа, кроме тех, формулировка которых имеет смысл лишь для банаховых пространств, остаются в силу для произвольных локально выпуклых топологических линейных пространств. При этом к условию нормальной разрешимости оператора $A \in \mathscr{L}(E, F)$ всюду надо добавить требование, что A есть гомеоморфизм, т. е. что для каждого открытого множества $U \subset E$ множество $A(U)$ открыто в $\operatorname{im} A$ (в топологии, индуцированной F в $\operatorname{im} A$) (см. п. 2.1.4 и п. 2.4).

По поводу результатов настоящего параграфа см., например, [9], [11], [65], [70], [76].

§ 4. Классификация точек спектра линейного оператора

Здесь мы дополним спектральную теорию для банаховой алгебры $\mathscr{L}(E)$, комбинируя ее с теорией нётеровых операторов. Напомним, что число $\lambda \in \mathbf{C}$ принадлежит спектру $\sigma(A)$ оператора $A \in \mathscr{L}(E)$ в том и только том случае, когда нарушено одно из условий $\alpha(A - \lambda I) = 0$, $\beta(A - \lambda I) = 0$ или $A - \lambda I \in \Phi(E)$.

4.1. Пусть $A\in\mathscr{L}(E)$. Множество $\varphi(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}: A-\lambda I\in\Phi(E)\}$ называется *областью нётеровости* оператора A. Очевидно, $\rho(A)\subset\varphi(A)$. В силу теоремы п. 3.5 (iv), $\varphi(A)$ — открытое множество, и в каждой связной компоненте $\varphi(A)$ операторы $A-\lambda I$ имеют один и тот же индекс. Если эта компонента содержит хотя бы одну точку $\lambda_0\in\rho(A)$, то $A-\lambda I$ — фредгольмов для всех λ из этой компоненты. Такая компонента может содержать лишь изолированные точки спектра оператора A. Все они являются полюсами резольвенты $R_\lambda(A)$, причем операторы, стоящие в главной части разложения $R_\lambda(A)$ в ряд Лорана, конечномерны.

4.2. Все точки $\lambda\in\mathbf{C}$, для которых $|\lambda|>r_A$, регулярны; следовательно, существует связная компонента области $\varphi(A)$, содержащая всю внешность спектрального круга, и в этой компоненте оператор $A-\lambda I$ фредгольмов.

4.3. Множество $\sigma_e(A):=\mathbf{C}\setminus\varphi(A)\,(\subset\sigma(A))$ называется *существенным спектром* оператора A. Если $\dim E=\infty$, то $\sigma_e(A)$ совпадает со спектром соответствующего элемента $\tilde{A}$ алгебры Калкина $\mathscr{L}(E)/\mathscr{K}(E)$, и следовательно, $\sigma_e(A)$ — непустое множество. Если, в частности, $A\in\mathscr{K}(E)$, то, в силу теоремы Рисса, $\sigma_e(A)=\{0\}$.

Может случиться, что $\sigma_e(A)=\sigma(A)=\{0\}$ и, следовательно, $r_A=0$. Примером такого оператора является действующий в пространстве $L_p(0,1)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, или $C[0,1]$ компактный *интегральный оператор Вольтерра*

$$(Ax)(t)=\int_0^t k(t,s)\,x(s)\,ds,$$

где k — произвольная непрерывная в треугольнике $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ функция. С другой стороны, существуют такие интегральные операторы (например, сингулярные, см. главы 3 и 4), существенный спектр которых заполняет отрезки или дуги на комплексной плоскости.

4.4. Общепринята следующая классификация точек спектра оператора $A\in\mathscr{L}(E)$: если $\alpha(A-\lambda I)\neq 0$, то говорят, что λ принадлежит *точечному спектру* $\sigma_p(A)$ оператора A; если $\alpha(A-\lambda I)=0$, но $\beta(A-\lambda I)\neq 0$, то λ принадлежит *остаточному спектру* $\sigma_r(A)$; если $\alpha(A-\lambda I)=\beta(A-\lambda I)=0$ и $\lambda\in\sigma_e(A)$ (т. е. $A-\lambda I$ не нормально разрешим), то λ принадлежит *непрерывному спектру* $\sigma_c(A)$. Очевидно, $\sigma_c(A)\subseteq\sigma_e(A)$.

Таким образом, вся комплексная плоскость разлагается в сумму четырех взаимно непересекающихся множеств:

$$\mathbf{C}=\rho(A)\cup\sigma_p(A)\cup\sigma_r(A)\cup\sigma_c(A).$$

Если $\alpha(A-\lambda I)\neq 0$, то число λ называется *собственным значением* оператора A, а число $\gamma(\lambda):=\alpha(A-\lambda I)$ — *порядком* или *геометрической кратностью* собственного значения λ. Подпространство $\ker(A-\lambda I)$ называется *собственным подпространством*, а все ненулевые элементы $u \in \ker(A - \lambda I)$, т. е. решения уравнения $Au = \lambda u$ — *собственными векторами*, отвечающими собственному значению λ.

Если $\beta(A - \lambda I) \neq 0$, то число λ называют *дефектным значением оператора* A порядка $\beta(A - \lambda I)$, а подпространство $[\operatorname{im}(A - \lambda I)]^{\perp}$ всех функционалов $f \in E^*$, аннулирующихся на $\operatorname{im}(A - \lambda I)$ — *дефектным подпространством*.

Ясно, что число $\bar{\lambda}$ является собственным значением сопряженного оператора A^* тогда и только тогда, когда λ есть дефектное значение A, при этом соответствующие порядки совпадают. Пользуясь результатами из § 3, легко установить связь между спектрами σ_p, σ_r, σ_c для операторов A и A^*. В частности, верны следующие соотношения:[1]

$$[\sigma_c(A)]^* \subset \sigma_c(A^*) \cup \sigma_r(A^*), \quad [\sigma_r(A)]^* \subset \sigma_p(A^*),$$
$$[\sigma_p(A)]^* \subset \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*).$$

Если E — рефлексивное пространство, то $[\sigma_c(A)]^* = \sigma_c(A^*)$ и, следовательно, $[\sigma_r(A^*)]^* \subset \sigma_p(A)$.

4.5. Из результатов п. 1.3.3 вытекает, что если λ_0 — полюс порядка p резольвенты $R_\lambda(A)$, то λ_0 является собственным значением оператора A. Кроме того, если A_{-1} — вычет полюса λ_0, то[2]

$$\{0\} \subset \ldots \subset N((A - \lambda_0 I)^{p-1}) \subset N((A - \lambda_0 I)^p),$$
$$E \supset \ldots \supset R((A - \lambda^0 I)^{p-1}) \supset R((A - \lambda I)^p),$$
$$R(A_{-1}) = N((A - \lambda_0 I)^n), \; N(A_{-1}) = R((A - \lambda_0 I)^n)$$

при всех $n \geqslant p$, и эти подпространства инвариантны относительно A. Пространство E разлагается в прямую сумму

$$E = N((A - \lambda_0 I)^n) + R((A - \lambda_0 I)^n) \quad (n \geqslant p).$$

4.6. Число $\mu = 1/\lambda$, обратное к собственному значению λ $(\neq 0)$ оператора A, называется *характеристическим значением* оператора A. Радиус ρ_A наибольшего круга, внутри которого $I - \mu A$ фредгольмов, называют *радиусом Фредгольма* оператора A. Из предыдущего следует оценка $\rho_A \geqslant 1/|||A|||$, где $|||A|||$ — существенная норма A. Для компактного оператора $\rho_A = \infty$.

4.7. Часто бывает удобно вместе с резольвентой $R_\lambda(A)$ рассматривать оператор

$$A(\mu) := A(I - \mu A)^{-1} (\mu^{-1} \in \rho(A) \text{ или } \mu = 0),$$

который называется *резольвентой Фредгольма*. Этот оператор обычно обладает лучшими свойствами по сравнению с A. Он оказывается полезным в приложениях к интегральным уравнениям (см. гл. 2). Очевидно, если $\mu \neq 0$ и $\lambda = 1/\mu$, то $A(\mu) = -\lambda A R_\lambda(A)$.

Простым вычислением устанавливается, что

$$(I - \mu A)^{-1} = I + \mu A(\mu) \quad (\mu^{-1} \in \rho(A) \text{ или } \mu = 0).$$

---

[1] Для множества $M \subseteq \mathbf{C}$ обозначим $M^* = \{\bar{\lambda} : \lambda \in M\}$

[2] Напомним обозначения: $N(A) = \ker A$. $R(A) = \operatorname{im} A$.

Как и резольвента $R_\lambda(A)$, функция $A(\cdot)$ аналитична (на $\{\mu\in\mathbf{C} : \mu^{-1}\in\rho(A)\}\cup\{0\}$). Из сказанного в п. 4.5 следует, что каждый полюс функции $A(\cdot)$ является характеристическим значением оператора A.

По поводу материала настоящего параграфа см., например, [65], [73], [80].

§ 5. Теория Рисса

В 1954 г. Растон ввел понятие операторов Рисса и перенес на них, в основном, всю классическую теорию Ф. Рисса, относящуюся к операторам вида $I-\lambda S$, где S — компактный оператор.

5.1. Оператор $S\in\mathcal{L}(E)$ называется *оператором Рисса*, если $I-\lambda S\in\Phi(E)$ для всех $\lambda\in\mathbf{C}$.

В силу последнего утверждения п. 3.8, S является оператором Рисса, если $S^m\in\mathcal{K}(E)$ для некоторого натурального числа m. Другими примерами операторов Рисса являются строго сингулярные или строго косингулярные операторы. При этом оператор $S\in\mathcal{L}(E)$ называется *строго сингулярным*, если сужение $S|_M$ не является инъекцией ни для какого бесконечномерного подпространства M в E. Он называется *строго косингулярным*, если $\pi_N S$ не является сюръекцией ни для какого подпространства N бесконечной коразмерности в E, где π_N — каноническая проекция из E на E/N.

Если S — оператор Рисса, то, очевидно, zS — оператор Рисса для всех $z\in\mathbf{C}$. Кроме того, S квазикомпактен в силу равенства $r_{\tilde{S}}=\lim\limits_{n\to\infty}|||S^n|||^{1/n}=0$, где $\tilde{S}$ — соответствующий элемент алгебры Калкина. Последнее свойство существенно используется в доказательстве следующей основной теоремы о структуре спектра оператора Рисса.

5.2. Теорема. Пусть S — оператор Рисса. Тогда

(i) спектр $\sigma(S)$ представляет собой не более чем счетное множество, точкой сгущения которого может быть лишь 0;

(ii) отличные от нуля точки спектра $\lambda_k (k=1, 2, \ldots)$ являются полюсами порядков p_k резольвенты $R_\lambda(S)$ и, следовательно, собственными значениями оператора S.

Как уже отмечалось, пространство E разлагается в прямую сумму инвариантных относительно оператора S подпространств:

$$E=N\left((S-\lambda_k I)^{p_k}\right)\dotplus R\left((S-\lambda_k I)^{p_k}\right). \tag{1.13}$$

5.3. Конечномерное подпространство $N_k:=N\left((S-\lambda_k I)^{p_k}\right)$ называется *корневым подпространством*, отвечающим собственному значению оператора Рисса S, а его размерность $\alpha(\lambda_k):=\dim N_k$ — *алгебраической кратностью* собственного значения λ_k. Очевидно, что геометрическая кратность $\gamma(\lambda_k)=$

$=\dim N((S-\lambda_k I))$ не превосходит алгебраической кратности и, поскольку $N_k \neq N((S-\lambda_k I)^{p_k-1})$, обе кратности совпадают в том и только том случае, если $p_k=1$. Кроме того, $p_k \leqslant \alpha(\lambda_k)$.

5.4. Разложению (1.13) соответствует представление оператора Рисса S в виде суммы

$$S=S'_k+S''_k, \tag{1.14}$$

где $S'_k=SP_k$, $S''_k=S(I-P_k)$ и P_k — проектор из E на N_k вдоль $R((S-\lambda_k I)^{p_k})$. Из инвариантности подпространств (1.13) следует, что разложение (1.14) удовлетворяет следующим условиям:

(1) λ_k является единственной точкой спектра оператора S'_k;
(2) $\sigma(S''_k)=\sigma(S)\setminus\{\lambda_k\}$;
(3) $S'_k S''_k=S''_k S'_k=0$.

5.5. В силу того, что $P_k P_j=0$ при $k\neq j$ (см. п. 1.3.3), все пространство E расщепляется в прямую сумму $E=N_0+N_1+\dots$ $\dots+N_n$, где $N_0=P_0E$, $P_0=I-\sum\limits_{k=1}^{n}P_k$, а n — любой номер, не превосходящий числа отличных от нуля собственных значений оператора S. Оператор S отображает каждое из подпространств N_j $(j=0,\dots,n)$ в себя, а его сужение S_j на N_j имеет спектр $\sigma(S_j)=\{\lambda_j\}$ при $j\geqslant 1$, $\sigma(S_0)=\{0,\lambda_{n+1},\lambda_{n+2},\dots\}$. Этому разложению соответствует представление резольвенты $R_\lambda(S)$ в виде суммы главных частей, соответствующих полюсам $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ и некоторого остатка, аналитического в $\mathbf{C}\setminus\sigma(S_0)$.

5.6. Следующая теорема показывает, что в каждом корневом подпространстве N_k оператора Рисса S может быть построен такой базис, что матричное представление оператора $S_k=S|_{N_k}$ в этом базисе имеет жорданову нормальную форму.

Теорема. Пусть λ_0 — отличная от нуля точка спектра оператора Рисса S, p — ее порядок и P — проектор из E на корневое подпространство $N=N((S-\lambda_0 I)^p)$ вдоль $R((S-\lambda_0 I)^p)$. Тогда в N существует базис $\{e_{j,k}\}$ $(k=1,\dots,n_j;\ j=1,\dots,m:=\gamma(\lambda_0))$ такой, что

$$(S-\lambda_0 I)e_{j,k}=\begin{cases}0, & k=1;\\ e_{j,k-1}, & k=2,\dots,n_j;\end{cases} \tag{1.15}$$

при этом

$$\max\{n_j \mid j=1,\dots,m\}=p,\qquad \sum_{j=1}^{m}n_j=\alpha(\lambda_0).$$

Кроме того, в корневом подпространстве $N((S^*-\bar\lambda_0 I)^p)$ сопряженного оператора может быть построен базис $\{f_{j,k}\}$ $(k=1,\dots,n_j;\ j=1,\dots,m)$, удовлетворяющий равенствам

$$(S^* - \bar{\lambda}_0 I) f_{j,k} = \begin{cases} 0, & k=1; \\ f_{j,k-1}, & k=2,\dots,n_j; \end{cases}$$

а также соотношениям биортогональности

$$\langle e_{j,k}, f_{l,h} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,n_l-h+1}.$$

Набор элементов $\{e_{j,k}\}$ и функционалов $\{f_{j,k}\}$, указанный в теореме, называется *каноническим базисом оператора* S, отвечающим собственному значению λ_0. Используя канонический базис, проектор P можно представить в виде

$$Pu = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} \langle u, f_{j,n_j-k+1} \rangle e_{j,k}, \tag{1.16}$$

а оператор SP (см. (1.14)) — в виде

$$SPu = \lambda_0 Pu + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j-1} \langle u, f_{j,n_j-k} \rangle e_{j,k}. \tag{1.17}$$

В достаточно малой окрестности точки λ_0 резольвента $R_\lambda(S)$ имеет разложение

$$R_\lambda(S) = \sum_{k=1}^{p} (\lambda - \lambda_0)^{-k} S_{-k} + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n S_n, \tag{1.18}$$

где $S_{-k} = -(S - \lambda_0 I)^{k-1} P$ $(k=1,\dots,p)$, $S_n = S_0^{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ и $S_0 \in \mathscr{L}(E)$. Ряд (1.18) сходится по норме пространства $\mathscr{L}(E)$.

По поводу результатов настоящего параграфа см., например, [65], [73], [80].

§ 6. Теория Гротендика — Пича определителей Фредгольма

Определители интегральных операторов были введены Фредгольмом в 1903 г., который выразил в их терминах точное решение интегрального уравнения второго рода с непрерывным ядром (см. также гл. 2, § 3). Таким путем, следуя параллельно теории линейных алгебраических систем, Фредгольм провел полное исследование упомянутых уравнений.

Абстрактная теория определителей для ядерных операторов в банаховом пространстве была развита Гротендиком, Растоном и Лежаньским в начале пятидесятых годов. Здесь мы изложим способ прямого построения определителей и делителей Фредгольма, восходящий к Пичу (1963; см. его монографию [73]). Моделями послужили характеристические многочлены матриц, определение фон Коха (1900) бесконечных определителей и теория Фредгольма интегральных уравнений. На первом шаге строятся определители и делители Фредгольма для ядерных операторов в пространстве l_1. При помощи понятия родственных операторов результаты переносятся затем на некоторые классы операторов, в том числе и ядерных, действующих в произвольных банаховых пространствах.

6.1. Начнем с характеристики операторов Рисса, использующей мероморфность их резольвенты Фредгольма:

Теорема. Оператор $S\in\mathcal{L}(E)$ является оператором Рисса в том и только том случае, если для каждого $\lambda_0\in C$ существует такое $\rho>0$, что

$$S(\lambda)=\sum_{k=1}^{p}(\lambda-\lambda_0)^{-k}S_{-k}(\lambda_0)+\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{n}S_n(\lambda_0)$$

для $0<|\lambda-\lambda_0|<\rho$, где $S_{-p}(\lambda_0),\ldots,S_{-1}(\lambda_0)$ — конечномерные операторы в E и $S_n(\lambda_0)\in\mathcal{L}(E)$ $(n=0,1,\ldots)$.

Более того, в каждой точке λ_0, являющейся характеристическим значением оператора S, резольвента Фредгольма $S(\lambda)$ имеет полюс.

Эта теорема выводится из указанных в предыдущем параграфе свойств операторов Рисса.

6.2. Поскольку множество характеристических чисел оператора Рисса S не имеет конечных точек сгущения (см. теорему 5.2), то из известной теоремы Вейерштрасса вытекает существование целой комплексной функции d комплексной переменной, нули которой совпадают с характеристическими значениями оператора S. Кроме того, d может быть выбрана так, что порядок каждого нуля λ_0 равен алгебраической кратности $\alpha(1/\lambda_0)$. Каждая такая функция называется *делителем Фредгольма* для оператора S.

6.3. Делители Фредгольма обладают следующим важным свойством:

Теорема. Пусть $S\in\mathcal{L}(E)$ — оператор Рисса с делителем Фредгольма $d(\lambda)=\sum_{0}^{\infty}\delta_n\lambda^n$ $(\forall\lambda\in C)$. Тогда существует целая $\mathcal{L}(E)$-значная функция $D(\lambda)=\sum_{0}^{\infty}D_n\lambda^n$ $(\forall\lambda\in C)$ такая, что

$$S(\lambda)=\frac{D(\lambda)}{d(\lambda)}\quad(\forall\lambda\in C:1/\lambda\in\rho(S)).$$

При этом выполняются рекуррентные соотношения

$$D_0=\delta_0S,\quad D_n=\delta_nS+D_{n-1}S\,(n=1,2,\ldots). \qquad (1.19)$$

В самом деле, функция $D(\lambda):=d(\lambda)S(\lambda)$ аналитична на $\{\lambda\in C:1/\lambda\in\rho(S)\}$ и допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Сравнивая коэффициенты в разложениях левой и правой частей равенства $D(\lambda)(I-\lambda S)=d(\lambda)S$, получим (1.19).

6.4. В дальнейших построениях существенно используется следующий известный результат о представлении ядерных операторов в l_1.

Теорема. Оператор $S \in \mathscr{L}(l_1)$ является ядерным в том и только том случае, если существует такая бесконечная матрица $(\sigma_{i,k})$, что

$$S(\xi_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{i,k}\xi_k\right), \quad \underline{N}(S) := \sum_{i=1}^{\infty} \sup_k |\sigma_{i,k}| < \infty.$$

Число $\operatorname{tr}(S) := \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{j,j}$ называется *следом* ядерного оператора $S \in \mathscr{L}(l_1)$.

В дальнейшем операторы и представляющие их матрицы будут отождествляться.

6.5. Пусть $(\sigma_{i,k})$ — произвольная бесконечная ядерная матрица. Определим числа

$$\sigma\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_n \\ k_1, \ldots, k_n \end{pmatrix} := \det\left(\sigma_{i_p,k_q}\right)_{p,q=1}^{n},$$

$$\delta_0 := 1, \quad \delta_n := \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \sigma\begin{pmatrix} j_1, \ldots, j_n \\ j_1, \ldots, j_n \end{pmatrix}$$

и образуем следующую комплексную функцию комплексной переменной λ: $d(\lambda) := \sum_{0}^{\infty} \delta_n \lambda^n$. Функция d называется *определителем Фредгольма*, а числа δ_n — *коэффициентами Фредгольма*.

Определитель Фредгольма является целой функцией. Это непосредственно следует из оценок

$$|\delta_n| \leqslant \frac{n^{n/2}}{n!} \underline{N}(S)^n \ (n=0, 1, \ldots),$$

которые, в свою очередь, являются простым следствием известного *неравенства Адамара*:

$$|\det(\sigma_{p,q})_{p,q=1}^{n}| \leqslant \prod_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{n} |\sigma_{p,q}|^2\right)^{1/2}.$$

6.6. Аналогично определяется *первый минор Фредгольма*. Положим

$$\Delta_{i,k}^{0} := \sigma_{i,k} \text{ и } \Delta_{i,k}^{n} := \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j,\ldots,j_n=1}^{\infty} \sigma\begin{pmatrix} i, j_1, \ldots, j_n \\ k, j_1, \ldots, j_n \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор $D_n := \left(\Delta_{i,k}^{n}\right)$ является ядерным в l_1. С помощью неравенства Адамара нетрудно получить оценки

$$\underline{N}(D_n) \leqslant \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n!} \underline{N}(S)^{n+1} \text{ для всех } n=0, 1, \ldots.$$

В силу последних оценок, функция $D: C \to \mathscr{L}(l_1)$, определенная равенством $D(\lambda) := \sum_0^\infty D_n \lambda^n$ ($\lambda \in C$), является целой функцией, значениями которой служат ядерные операторы в l_1. Функция D и называется первым минором Фредгольма.

6.7. Разложением $\Delta_{i,k}^n$ по элементам первой строки легко устанавливается рекуррентная формула (1.19). Отсюда по индукции получаем формулу $\delta_n = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \operatorname{tr}(S^{n-k})$ ($n=1, 2, \ldots$), показывающую, что определитель Фредгольма однозначно определяется числами $\operatorname{tr}(S^k)$ ($k=1, 2, \ldots$).

6.8. Установим основные свойства определителя и первого минора Фредгольма.

Теорема. (i) Если $d(\lambda) \neq 0$, то $1/\lambda \in \rho(S)$. Кроме того

$$S(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{d(\lambda)} \text{ и } \operatorname{tr}(S(\lambda)) = -\frac{d'(\lambda)}{d(\lambda)}.$$

(ii) Если $d(\lambda_0) = 0$, то λ_0 есть характеристическое значение оператора S.

В самом деле, из (1.19) вытекает, что $D(\lambda) = d(\lambda) S + \lambda D(\lambda) S = d(\lambda) S + \lambda S D(\lambda)$ и, следовательно,

$$\left(I + \lambda \frac{D(\lambda)}{d(\lambda)}\right)(I - \lambda S) = (I - \lambda S)\left(I + \lambda \frac{D(\lambda)}{d(\lambda)}\right) = I.$$

Отсюда получаем включение $1/\lambda \in \rho(S)$ и первую формулу. Далее,

$$\operatorname{tr}(S(\lambda)) = -\frac{1}{d(\lambda)} \sum_1^\infty n \delta_n \lambda^{n-1} = -\frac{d'(\lambda)}{d(\lambda)}.$$

Если $d(\lambda_0) = 0$, то λ_0 является полюсом резольвенты Фредгольма и, следовательно, характеристическим значением для S.

6.9. Пользуясь теоремой п. 6.8, а также разложениями (1.14), можно доказать, что для каждого ядерного оператора $S \in \mathscr{L}(l_1)$ определитель Фредгольма является делителем Фредгольма.

6.10. Чтобы перенести результаты пп. 6.4—6.9 на ядерный оператор $S \in \mathscr{L}(E)$, действующий в произвольном банаховом пространстве E, воспользуемся тем фактом, что каждый такой оператор является *родственным* некоторому ядерному оператору T в l_1. Это означает, по определению, что существуют такие операторы $A \in \mathscr{L}(E, l_1)$ и $B \in \mathscr{L}(l_1, E)$, что $S = BA$ и $T = AB$.

Эти операторы можно построить следующим образом. Пусть $S = \sum_{j=1}^\infty \sigma_j f_j \otimes x_j$ — ядерное представление оператора S, где $x_j \in E$,

$f_j \in E'$, $\|x_j\|=\|f_j\|=1$ и $(\sigma_j)\in l_1$. Положим

$$Ax:=(\sigma_j \langle x, f_j \rangle), \quad B(\xi_j):=\sum_1^\infty \xi_j x_j.$$

Очевидно, что операторы A и B обладают требуемым свойством и оператор $S=BA$ родственен оператору $T=AB$, который является ядерным в l_1 с матрицей $(\sigma_j\langle x_k, f_j\rangle)$.

6.11. Таким же образом можно определить родственность двух операторов $S\in\mathscr{L}(E)$ и $T\in\mathscr{L}(E)$.

Родственные операторы имеют много общих свойств:

1) $\rho(S)=\rho(T)$;

2) родственные операторы S и T являются или не являются операторами Рисса одновременно. Более того, S и T имеют общие характеристические значения одной и той же алгебраической кратности.

6.12. Из последнего свойства непосредственно следует, что родственные операторы Рисса имеют одни и те же делители Фредгольма. Таким образом, в силу п. 6.10, результаты пп. 6.4—6.9 переносятся на ядерные операторы в произвольных банаховых пространствах:

Теорема. Пусть $S\in\mathscr{L}(E)$—ядерный оператор. Для каждого ядерного представления $S=\sum\limits_1^\infty \sigma_j f_j \otimes x_j$ положим $\delta_0:=1$ и

$$\delta_n:=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\sigma_{j_1}\ldots\sigma_{j_n}\det(\langle x_{j_p}, f_{j_p}\rangle).$$

Тогда $d(\lambda):=\sum\limits_0^\infty \delta_n\lambda^n$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ является делителем Фредгольма оператора S.

6.13. Неизвестно, является ли каждый оператор $S\in\mathscr{L}(E)$ родственным некоторому ядерному интегральному оператору $T\in\mathscr{L}(C[0, 1])$ с непрерывным ядром. Положительное решение этой проблемы позволило бы вывести теорию определителей ядерных операторов из классической теории Фредгольма.

§ 7. Компактные операторы в гильбертовом пространстве

В этом параграфе через H будем обозначать бесконечномерное комплексное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.

Для операторов, действующих в H, можно установить ряд важных результатов, не имеющих места для произвольных банаховых пространств. В частности, это относится к операторам, обладающим свойством нормальности, самосопряженности или операторам Гильберта—Шмидта. Эти результаты имеют важные приложения к интегральным уравнениям в пространстве L_2 (см. гл. 2). По поводу материала настоящего параграфа см., например, [10], [65].

7.1. Некоторые общие свойства.

7.1.1. Если $T \in \mathcal{K}(H)$, то, согласно теории Рисса, имеют место следующие *ортогональные разложения* пространства H:

$$H = N(I-T) \oplus R(I-T^*) = R(I-T) \oplus N(I-T^*).$$

7.1.2. Пусть (e_j) — полная ортонормированная система в H и P_n — ортогональный проектор, определенный равенством $P_n x = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда «усеченные» операторы $P_n T P_n =: T_n$ по норме сходятся к T при $n \to \infty$ для любого $T \in \mathcal{K}(H)$.

7.2. Компактные нормальные операторы.

7.2.1. Напомним, что оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется *нормальным* (*самосопряженным*), если $A^*A = AA^*$ $(A^* = A)$.

Ясно, что для нормального оператора A имеют место соотношения $\|Ax\| = \|A^*x\|$ $(x \in H)$, $N(A-\lambda I) = N(A^* - \bar{\lambda} I)$ $(\lambda \in \mathbf{C})$, $N(A-\lambda I) \perp N(A-\mu I)$ (при $\lambda \neq \mu$).

7.2.2. Спектр нормального оператора имеет следующую структуру:

Теорема. Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ нормален. Тогда $\alpha(A-\lambda I) = \beta(A-\lambda I)$ для всех $\lambda \in \mathbf{C}$. Остаточный спектр $\sigma_r(A)$ пуст. Несущественный спектр $\sigma(A) \cap \varphi(A)$ состоит из не более чем счетного множества собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, которые могут сгущаться лишь в точках существенного спектра. Любое такое собственное значение λ_0 является полюсом первого порядка резольвенты $R_\lambda(A)$; вычет имеет вид

$$Pu = \sum_{j=1}^{n} (u, e_j) e_j,$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормальный базис собственного подпространства $N(\lambda_0 I - A)$. Кроме того, корневое подпространство совпадает с собственным подпространством и, следовательно, алгебраическая кратность равна геометрической.

7.2.3. Для компактных нормальных операторов имеется важный признак существования собственных чисел.

Теорема (Гильберт). Каждый компактный нормальный оператор $k \neq 0$ имеет собственное значение λ_0 такое, что $|\lambda_0| = \|K\|$.

Действительно, для нормального элемента C^*-алгебры $\mathcal{L}(H)$ имеем $r_k = \|K\| > 0$ и, стало быть, существует $\lambda_0 \in \sigma(K)$ такое, что $|\lambda_0| = \|K\|$. В силу теории Рисса, λ_0 — собственное значение оператора K.

7.2.4. Из теории Рисса следует, что спектр любого компактного оператора $K\in\mathscr{L}(H)$ состоит из нуля и собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ конечной алгебраической кратности, точкой сгущения которых может быть лишь 0. В отличие от принятых ранее обозначений теперь нам будет удобно повторять каждое собственное значение в последовательности (λ_j) столько раз, какова его алгебраическая кратность. Кроме того, упорядочиваем эту последовательность таким образом, что $|\lambda_{j+1}|\leqslant|\lambda_j|$ для всех j. Если K имеет только n собственных значений, то положим $\lambda_j=0$ при $j>n$. Следовательно, $\lambda_j\to0$ $(j\to\infty)$.

Из предшествующих результатов этого раздела выводится

Спектральная теорема Гильберта. Пусть $K\neq\neq0$ — компактный нормальный оператор и (λ_j) — упорядоченная последовательность его собственных значений. Тогда существует ортонормированная последовательность собственных элементов e_j, отвечающих значениями λ_j. При этом для каждого $u\in H$ имеют места равенства

$$u=u_0+\sum_j (u, e_j)\,e_j \tag{1.20}$$

с некоторым элементом $u_0\in\ker K$ и

$$Ku=\sum_j \lambda_j(u, e_j)\,e_j. \tag{1.21}$$

При этом ряд (1.21) сходится по норме в $\mathscr{L}(H)$.

7.2.5. Рассмотрим теперь случай компактного самосопряженного оператора $K\neq0$. Очевидно, что все собственные значения такого оператора вещественны. Следовательно, упорядоченную последовательность собственных значений оператора K можно разбить на две монотонных последовательности положительных и отрицательных собственных значений λ_j^+ и λ_j^-. Им будут соответствовать ортонормированные последовательности собственных элементов (e_j^+) и (e_j^-). Формула (1.21) принимает вид

$$Ku=\sum_j \lambda_j^+(u, e_j^+)\,e_j^+ + \sum_j \lambda_j^-(u, e_j^-)\,e_j^-. \tag{1.22}$$

Из (1.22) вытекает следующий важный *вариационный принцип Куранта* (1920). С целью упрощения формулировки положим $\lambda_i^+=0$ $\lambda_i^-=0$) при $j>n$, если K имеет только n положительных (отрицательных) собственных значений.

Теорема. Пусть $k\in\mathscr{K}(H)$ самосопряжен. Тогда

$$\lambda_1^+=\sup_x\{(Kx, x):\|x\|\leqslant1\},\quad \lambda_1^-=\inf_x\{(Kx, x):\|x\|\leqslant1\};$$

$$\lambda_n^+=\inf_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in H}\ \sup_x\{(Kx, x):\|x\|\leqslant1,\ x\perp x_j,\ j=1,\ldots,n-1\};$$

$$\lambda_n^-=\sup_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in H}\ \inf_x\{(Kx, x):\|x\|\leqslant1,\ x\perp x_j,\ j=1,\ldots,n-1\}.$$

7.3. Сингулярные числа и классы Шаттена—фон Неймана. Естественно ожидать, что скорость стремится к нулю последовательности собственных значений компактного оператора K тем выше, чем «лучше» K (см. также гл. 2, § 2). Таким образом, возникает вопрос о «мере» компактности оператора. Такая «мера» может быть определена с помощью s-чисел, которые впервые были введены Шмидтом (1907) при изучении интегральных уравнений с несимметричным ядром.

7.3.1. Пусть $K\in\mathscr{K}(H)$. Очевидно, что оператор K^*K самосопряжен и неотрицателен, поскольку $(K^*Kx,\ x)=\|Kx\|^2\geqslant 0$ при всех $x\in H$. Следовательно, если $\lambda\neq 0$ — собственное значение оператора K^*K, то оно положительно; положительный корень $s=\sqrt{\lambda}$ называется *сингулярным числом*, короче, *s-числом* или *числом Шмидта* оператора K. Если $K\neq 0$, то $K^*K\neq 0$, и, в силу теоремы п. 7.2.3, K имеет, по крайней мере, одно s-число. Обозначим через $s_n=s_n(K)$, $n=1, 2, \ldots$, все s-числа оператора K, расположенные в порядке убывания: $s_1\geqslant s_2\geqslant\ldots\geqslant 0$.

Отметим, прежде всего, что $s_1(K)=\|K\|$. Из вариационного принципа Куранта легко следует аппроксимационное свойство $s_n(K)=\inf\limits_{T\in\mathscr{F}_{n-1}}\|K-T\|$, где $\mathscr{F}_{n-1}$ — множество всех $(n-1)$-мерных операторов $T\in\mathscr{K}(H)$. Отсюда вытекает, что $|s_n(K)-s_n(L)|\leqslant\|K-L\|$, если $K,\ L\in\mathscr{K}(H)$. Более того, s-числа обладают следующими важными свойствами: 1) $s_n(K)=s_n(K^*)$; 2) $s_n(AK)\leqslant\|A\|s_n(K)$, $s_n(KA)\leqslant\|A\|s_n(K)$ для любого $A\in\mathscr{L}(H)$; 3) если $K,\ L\in\mathscr{K}(H)$, то $s_{m+n-1}(K+L)\leqslant s_m(K)+s_n(L)$ и $s_{m+n-1}(KL)\leqslant s_m(K)\,s_n(L)$ $(m,\ n=1, 2, \ldots)$.

7.3.2. Пусть e_j — собственный элемент оператора K^*K, отвечающий его собственному значению s^2_j. Положим $f_j{:}=s_j^{-1}Ke_j$. Из спектральной теоремы Гильберта (п. 7.2.4) вытекает следующее утверждение.

Теорема. Пусть $K\in\mathscr{K}(H)$ и (s_j) — последовательность s-чисел оператора K. Существуют ортонормированные последовательности (e_j) и (f_j) в H такие, что $Ke_j=s_jf_j$, $K^*f_j=s_je_j$ $(j=1, 2, \ldots)$ и

$$Ku=\sum_j s_j(u,\ e_j)\,f_j\ \ (u\in H). \tag{1.23}$$

7.3.3. Представление (1.23) характерно для компактных операторов в гильбертовом пространстве; оно называется *разложением Шмидта* оператора K:

Теорема. Оператор $K\in\mathscr{L}(H)$ компактен в том и только том случае, если для него имеет место разложение Шмидта (1.23) для двух ортонормированных последовательностей (e_j) и (f_j) в H и некоторой последовательности положительных чисел $s_1\geqslant s_2\geqslant\ldots$, причем последовательность (s_j) либо конечна, либо сходится к нулю.

Необходимость представления (1.23) является следствием теоремы п. 7.3.2. Достаточность вытекает из компактности конечномерных операторов $K_n u := \sum_{j=1}^{n} s_j (u, e_j) f_j$ и из оценки

$$\| (K - K_n) u \|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} s_j^2 \, | (u, e_j) |^2 \leqslant s_{n+1}^2 \| u \|^2.$$

7.3.4. Следующая важная теорема принадлежит Вейлю (1949).

Теорема. Пусть K — компактный оператор в H, а (λ_j) и (s_j) — упорядоченные последовательности его собственных значений и s-чисел. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$|\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n| \leqslant s_1 s_2 \ldots s_n \quad (\textit{неравенство Вейля})$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} | \lambda_j |^p \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j^p \tag{1.24}$$

для любых чисел $p > 0$ и $n = 1, 2, \ldots$.

Заметим, что в случае нормального оператора $K \in \mathscr{K}(H)$ имеем $s_j = |\lambda_j|$ и, следовательно, последние неравенства превращаются в равенства. Кроме того, из (1.24) при $p = 2$ и из (1.23) вытекает *неравенство Шура*

$$\sum_j | \lambda_j |^2 \leqslant \sum_b s_j^2, \tag{1.25}$$

справедливое для любого $K \in \mathscr{K}(H)$; для интегрального оператора, действующего в L_2, неравенство (1.25) было впервые получено Шуром (1909) в случае непрерывного ядра и Карлеманом (1921) в случае квадратично суммируемого ядра (см. также гл. 2, §§ 1, 2).

7.3.5. Для любого $p > 0$ будем обозначать через $\mathscr{S}_p = \mathscr{S}_p(H)$ совокупность всех операторов $K \in \mathscr{K}(H)$, для которых

$$N_p(K) := \left[\sum_j s_j^p (K) \right]^{1/p} < \infty; \tag{1.26}$$

классы $\mathscr{S}_p$ называются *классами Шаттена — фон Неймана.*

Если $p < q$, то $\mathscr{S}_p \subset \mathscr{S}_q$, в силу оценки $[N_q(K)]^q \leqslant s_1^{q-p} \cdot [N_p(K)]^p$. Существуют операторы $K \in \mathscr{K}(H)$, не принадлежащие классу $\mathscr{S}_p(H)$ ни при каком $p > 0$. Таким является, например, оператор (1.23) с s-числами $s_j = 1/\log(1 + j)$ и произвольными ортонормированными последовательностями (e_j) и (f_j).

Так как сопряженные операторы имеют одинаковые s-числа, то $N_p(K) = N_p(K^*)$. Более того, из указанных выше свойств s-чисел следует, что $N_p(K)$ при $1 \leqslant p < \infty$ является *симметричной нормой* на $\mathscr{S}_p$, т. е. нормой с дополнительным свойством

$$N_p(AKB) \leqslant \|A\| N_p(K) \|B\| \quad (A, B \in \mathscr{L}(H),\ K \in \mathscr{K}(H)).$$

Естественно положить $\mathscr{S}_\infty(H)=\mathscr{K}(H)$ и $N_\infty(K)=\sup\limits_j s_j(K)$. Ясно, что норма $N_\infty(K)$ эквивалентна операторной норме $\|K\|$ на $\mathscr{S}_\infty(H)$.

В качестве следствия из предыдущих результатов получаем следующее предложение.

Теорема. $\mathscr{S}_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ является сепарабельным идеалом в $\mathscr{L}(H)$ с симметричной нормой $N_p(K)$. Множество всех конечномерных операторов плотно в $\mathscr{S}_p$ и

$$\inf_{T\in\mathscr{F}_n}\|K-T\|=\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}s_j^p(K)\right)^{1/p}\quad(K\in\mathscr{S}_p;\ n=1,2,\ldots).$$

Нетрудно видеть, что $\mathscr{S}_1(H)$ — идеал всех ядерных операторов в H. Если $K\in\mathscr{S}_1(H)$, то число $\operatorname{tr}K:=\sum\limits_{j=1}^{\infty}(Ke_j,e_j)$, не зависящее от ортонормированного базиса (e_j) пространства H, называется *следом* оператора K. Имеет место равенство $\operatorname{tr}K=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j$ (*теорема Лидского*, 1958).

Операторы идеала $\mathscr{S}_2(H)$ называются *операторами Гильберта—Шмидта*; важнейшими примерами таких операторов являются *интегральные операторы Гильберта—Шмидта*, т. е. интегральные операторы с квадратично суммируемым ядром, рассматриваемые в L_2. Любой оператор $K\in\mathscr{S}_2(H)$ унитарно эквивалентен некоторому интегральному оператору Гильберта—Шмидта в $L_2(0,1)$.

7.3.6. Из (1.24) и (1.25) вытекают следующие оценки для собственных и сингулярных значений оператора $K\in\mathscr{S}_p(H)$: $\sum\limits_j|\lambda_j|^p\leqslant[N_p(K)]^p$ и $|\lambda_n|\leqslant N_p(K)n^{-1/p}$, $s_n\leqslant N_p(K)n^{-1/p}$ $(n=1,2,\ldots)$.

7.3.7. Из теоремы п. 7.3.2 можно вывести следующую характеристику операторов Гильберта—Шмидта:

Теорема. $K\in\mathscr{L}(H)$ является оператором Гильберта—Шмидта в том и только том случае, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\|Kx_j\|^2<\infty$ для любой ортонормированной последовательности $(x_j)\subset H$.

7.3.8. Сформулируем следствие теорем пп. 7.3.2 и 7.3.7.

Теорема. $K\in\mathscr{L}(H)$ является ядерным оператором в том и только том случае, если он представим в виде произведения двух операторов Гильберта—Шмидта.

Глава 2

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

В настоящей главе приведенные в предыдущей главе общие результаты (критерии ограниченности или компактности, определители и миноры Фредгольма, структура корневых подпространств, оценки собственных значений и сингулярных чисел) уточняются для интегральных операторов, действующих в пространствах C или L_p. В заключение рассматриваются интегральные уравнения Фредгольма первого, второго или третьего рода.

§ 1. Линейные интегральные операторы

Так называются операторы вида

$$(Kf)(x)=\int_X k(x, y) f(y) d\mu(y). \qquad (2.1)$$

Здесь (X, μ) — некоторое пространство с σ-конечной мерой μ, k—$(\mu\times\mu)$-измеримая комплекснозначная функция на $X\times X$, называемая *ядром* интегрального оператора K.

В приложениях часто бывает естественным искать решение данного интегрального уравнения $Kf=g$ в пространстве непрерывных функций или в пространствах $L_p(X, \mu)$. Поэтому полезно знать условия, обеспечивающие ограниченность или компактность интегрального оператора в этих пространствах. В настоящем параграфе указываются некоторые из таких признаков.

1.1. Интегральные операторы в пространстве $C(X)$. На протяжении этого раздела X — множество в $\mathbf{R}^n$, на котором определена σ-конечная неотрицательная мера μ.

1.1.1. Условия ограниченности и компактности.

1. В случае конечного промежутка $X=[a, b]$ Радоном (1919) было найдено следующее описание непрерывного или компактного оператора в пространстве $C(X)$.

Теорема. T является линейным непрерывным оператором, отображающим пространство $C[a, b]$ в себя, тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$(Tf)(x)=\int_a^b f(y) d\tau_x(y),$$

где $\tau_x(y)$ — функция, определенная в квадрате $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$ и удовлетворяющая следующим условиям: $\tau_x(a)=0$, полная вариация $\tau_x(y)$ относительно y не превосходит некоторой постоянной, не зависящей от x, и выражения $\tau_x(b)$ и $\int_a^\xi \tau_x(y) dy$ непрерывны по x при любом фиксированном значении $\xi\in[a, b]$.

Теорема. Для того чтобы оператор $K\in\mathcal{L}(C[a,b])$ был компактным, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде

$$(Kf)(x)=\int_a^b k(x, y)\, f(y)\, d\sigma(y),$$

где σ — некоторая неубывающая функция, а функция $k(x, \cdot)$ при любом фиксированном x суммируема относительно σ и удовлетворяет условию

$$\int_a^b |k(x, y)-k(z, y)|\, d\sigma(y)\to 0 \text{ при } z\to x.$$

2. Рассмотрим теперь случай произвольного множества $X\subseteq\mathbf{R}^n$ и неотрицательной меры μ.

Теорема. Пусть комплекснозначная функция k непрерывна на $X\times X$ и обладает следующими свойствами:

1) при любом $x\in X$ функция $k(x, \cdot)$ суммируема относительно μ и

$$m_K := \sup_{x\in X}\int_X |k(x, y)|\, d\mu(y)<\infty; \tag{2.2}$$

2) для любого $\varepsilon>0$ и $x\in X$ существует число $\delta(x)>0$ такое, что

$$\int_X |k(x, y)-k(x', y)|\, d\mu(y)<\varepsilon \tag{2.3}$$

для всех $x'\in X$, подчиненных неравенству $|x-x'|<\delta(x)$.

Тогда $K\in\mathcal{L}(C(X))$ и $\|K\|=m_K$.

Если X — компактное множество, то любой интегральный оператор с непрерывным ядром компактен в $C(X)$; это непосредственно следует из известной теоремы Арцела—Асколи.

Если X — некомпактное множество, то такой оператор будет компактным в $C(X)$ лишь при некотором дополнительном условии:

Теорема. Пусть функция k удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и следующему требованию:

3) для любого $\varepsilon>0$ существует компактное множество $M\subset X$ такое, что $\int_X |k(x, y)|\, d\mu(y)<\varepsilon$ для всех $x\in X\setminus M$.

Тогда $K\in\mathcal{K}(C(X))$.

На примере ядра вида $k(x, y)=a(x)b(y)$ легко убедиться в том, что условие 3) не является необходимым для компактности K.

1.1.2. Транспонированный интегральный оператор. Если $\mu(X)<\infty$, то формула

$$\langle f, g\rangle=\int_X f(x)\, g(x)\, d\mu(x) \tag{2.4}$$

определяет дуальную систему $\langle C(X),\ C(X)\rangle$ (см. гл. 1, п. 2.5). Если же $\mu(X)=\infty$, то правая часть в (2.4) определена не для всех функций $f, g\in C(X)$, но она имеет смысл для тех $f, g\in C(X)$, из которых, по крайней мере, одна интегрируема. Следовательно, естественно ввести в рассмотрение пространство

$$C_1(X,\mu):=\{f\in C(X): \|f\|_1<\infty\},\quad \|f\|_1:=\int_X |f(x)|\,d\mu(x).$$

Пространство $C_1(X,\mu)$ банахово относительно нормы $\|f\|=\max\{\|f\|_{C(X)},\ \|f\|_1\}$. Кроме того, билинейная форма (2.4), очевидно, определяет дуальные системы $\langle C(X),\ C_1(X,\mu)\rangle$ и $\langle C_1(X,\mu),\ C(X)\rangle$.

Учитывая важное значение транспонированного оператора в теории Фредгольма, естественно поставить вопрос, при каких условиях интегральный оператор с транспонированным ядром $k^T(x,y)=k(y,x)$,

$$(K^Tf)(x):=\int_X k(y,x)\,f(y)\,d\mu(y), \tag{2.5}$$

является транспонированным оператором для K по отношению к дуальной системе $\langle C(X),\ C_1(X,\mu)\rangle$.

Теорема. Пусть ядра k и k^T удовлетворяют условиям первой теоремы п. 1.1.1.2. Тогда K и K^T являются транспонированными операторами по отношению к дуальным системам $\langle C(X),\ C_1(X,\mu)\rangle$ и $\langle C_1(X,\mu),\ C(X)\rangle$, т. е. $\langle Kf, g\rangle=\langle f, K^Tg\rangle$ для всех $f\in C(X)$, $g\in C_1(X,\mu)$ и для всех $f\in C_1(X,\mu)$, $g\in C(X)$.

Пусть теперь X — компактное множество. Обозначим через $\mathscr{A}(X,\mu)$ алгебру всех операторов $A\in\mathscr{L}(C(X))$, имеющих транспонированный оператор A^T относительно формы (2.4) (см. п. 2.5 гл. 1). Через $\mathscr{F}(X,\mu)$ обозначим множество всех (конечномерных) интегральных операторов вида (2.1) с *вырожденным ядром* вида

$$k(s,t)=\sum_{j=1}^{m} a_j(s)\,b_j(t),$$

где a_j, $b_j\in C(X)$, $\mathscr{K}(X,\mu)$ — замыкание множества $\mathscr{F}(X,\mu)$ по норме $\mathscr{A}(X,\mu)$. Оказывается, что $\mathscr{K}(X,\mu)$ совпадает с совокупностью всех компактных операторов $A\in\mathscr{A}(X,\mu)$, для которых A^T также компактен.

1.1.3. Интегральные операторы с диагональным ядром. Эти операторы образуют важный для приложений подкласс $\mathscr{K}(X,\mu)$. Пусть X — компактное множество. Ядро k будем называть *диагональным*, если оно непрерывно на $X_\Delta:=\{(x,y): x,\ y\in X,\ x\neq y\}$ и если для всех $x\in X$ существуют пределы

$$h(x):=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_X |k(x,y)|\,\eta_\varepsilon(|x-y|)\,d\mu(y)$$

и

$$h^T(x):=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_X |k(y,x)|\,\eta_\varepsilon(|x-y|)\,d\mu(y)$$

равномерно относительно x; при этом η_ε $(\varepsilon>0)$ — срезающая функция, определенная равенствами

$$\eta_\varepsilon(t):=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant\varepsilon/2,\\ \frac{2}{\varepsilon}t-1, & \text{если } \varepsilon/2\leqslant t\leqslant\varepsilon<1,\\ 1, & \text{если } \varepsilon\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

Ясно, что функции h и h^T непрерывны и неотрицательны. Поскольку данное определение симметрично относительно переменных, то транспонированное ядро для диагонального ядра также диагонально.

Обозначим через K_ε и K_ε^T интегральные операторы вида (2.1) с непрерывными ядрами $k_\varepsilon(x,y):=k(x,y)\eta_\varepsilon(|x-y|)$ и $k_\varepsilon^T(x,y)=k_\varepsilon(y,x)$, соответственно. Нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы:

Пусть k — диагональное ядро. Тогда существует оператор $K\in\mathscr{K}(X,\mu)$ такой, что

$$\|K-K_\varepsilon\|\to 0 \text{ и } \|K^T-K_\varepsilon^T\|\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

При этом $\|K\|=\max\limits_{x\in X} h(x)$, $\|K^T\|=\max\limits_{x\in X} h^T(x)$. Ядро $k:X_\Delta\to\mathbf{C}$ однозначно определяется оператором K.

Таким образом, оправдана запись

$$(Kf)(x)=\int_X k(x,y)\,f(y)\,d\mu(y):=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_X k_\varepsilon(x,y)\,f(y)\,d\mu(y).$$

Не для любых мер μ непрерывные ядра являются диагональными. Легко видеть, что ядро $k(x,y)\equiv 1$ диагонально в том и только том случае, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_X [1-\eta_\varepsilon(|x-y|)]\,d\mu(y)=0 \qquad (2.6)$$

равномерно относительно $x\in X$. Разумеется, мера Лебега удовлетворяет условию (2.6).

Если условие (2.6) выполнено, то каждое ограниченное и непрерывное ядро $k:X_\Delta\to\mathbf{C}$ является диагональным. Более того, в этом случае произведение $M=LK$ двух интегральных операторов $L, K\in\mathscr{K}(X,\mu)$ с диагональными ядрами l и k является оператором с диагональным ядром

$$m(x,y)=\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}\int_X l_\varepsilon(x,z)\,k_{\varepsilon'}(z,y)\,d\mu(z); \qquad (2.7)$$

при этом сходимость в (2.7) равномерна относительно множества $\{(x,y):x,y\in X,\ |x-y|\geqslant\delta\}$ для любого $\delta>0$.

Приведем несколько важных примеров диагональных ядер, часто встречающихся в приложениях:

1°. *Ядро Вольтерра.* Пусть $X=[a,b]\subset\mathbf{R}$, ядро k непрерывно для $a\leqslant y\leqslant x\leqslant b$ и равно нулю при $a\leqslant x\leqslant y\leqslant b$. Если μ — мера Римана, то оператор K с ядром k определяется равенством

$$(Kf)(x)=\int_0^x k(x,y)\,f(y)\,dy \quad (a\leqslant x\leqslant b;\ f\in C[a,b]).$$

2°. *Ядро Абеля.* Здесь $X=[a,b]\subset\mathbf{R}$ и

$$k(x,y)=\begin{cases} h(x,y)/|x-y|^{\alpha} \text{ при } a\leqslant y\leqslant x\leqslant b,\\ 0 \text{ при } a\leqslant x\leqslant y\leqslant b,\end{cases}$$

где h непрерывная функция и $0<\alpha<1$.

3°. *Ядро со слабой особенностью* (или *ядро типа потенциала*). Здесь $X\subset\mathbf{R}^n$ и $k(x,y)=h(x,y)/|x-y|^{\alpha}$ на X_Δ, где $0<\alpha<n$ и h — ограниченная на $X\times X$ функция, непрерывная на X_Δ. Пусть μ — снова мера Римана.

Если k и l — два ядра со слабой особенностью, допускающие оценки

$$|k(x,y)|\leqslant C_1|x-y|^{-\alpha},\quad |l(x,y)|\leqslant C_2|x-y|^{-\beta};\quad C_1, C_2=\mathrm{const}.$$

Тогда ядро произведения $L\cdot K$, равное в данном случае

$$m(x,y)=\int_X l(x,z)\,k(z,y)\,dz,$$

допускает следующую оценку:

$$|m(x,y)|\leqslant\begin{cases} C|x-y|^{-\alpha-\beta+n} \text{ при } \alpha+\beta>n,\\ C\,|\ln(C'|x-y|)| \text{ при } \alpha+\beta=n,\\ C \text{ при } \alpha+\beta<n.\end{cases}$$

В частности, *m-е итерированное ядро*

$$k_m(x,y):=\int_X k_{m-1}(x,z)\,k(z,y)\,dz,\quad k_1(x,y):=k(x,y)$$

являющееся ядром оператора K^m, ограничено при $m>n/(n-\alpha)$.

1.1.4. Положительные операторы. Действующий из одного банахова пространства функций E в другое F линейный оператор K называется *положительным*, если он преобразует неотрицательные функции пространства E в неотрицательные функции пространства F; он называется *регулярным*, если для некоторого действующего из E в F положительного оператора K_0 имеет место неравенство $|Ku|\leqslant K_0|u|$ $(u\in E)$. Регулярные операторы, действующие из L_q в L_p (или C), непрерывны.

Для положительных операторов имеет место следующий признак существования отличного от нуля собственного значения, который впервые доказал Енч (1912).

Теорема. Пусть оператор $K\in\mathscr{K}(X,\mu)$ обладает свойствами:

a) K положителен в $C(X)$ и

b) существует функция $f_0\in C(X)$ такая, что $f_0\geqslant 0$, $f_0\neq 0$ и $Kf_0\geqslant\gamma f_0\,(\gamma>0)$.

Тогда K имеет собственное число $\lambda_0=r_K\geqslant\gamma$, которому отвечает неотрицательная собственная функция.

1.1.5. Случай некомпактного множества X. Пусть теперь $X\subseteq\mathbf{R}^n$ — некомпактное множество. На этот случай дословно переносятся определение диагонального ядра, а также основная теорема п. 1.1.3, если потребовать, чтобы ядра k_ε для любого $\varepsilon>0$ удовлетворяли условиям первой теоремы п. 1.1.1.2.

Можно указать следующий признак компактности оператора K, порожденного диагональным ядром k. Если для любого $\varepsilon>0$ существует компактное множество $X_\varepsilon\subset X$ такое, что $h(x)<\varepsilon$ и $h^T(x)<\varepsilon$ для всех $x\in X\setminus X_\varepsilon$, то K, $K^T\in\mathscr{K}(C(X))$.

В данном случае банахова алгебра $\mathscr{A}(X,\mu)$ состоит из всех операторов $A\in\mathscr{L}(C(X))\cap\mathscr{L}(C_1(X,\mu))$, имеющих транспонированный оператор $A^T\in\mathscr{L}(C(X))\cap\mathscr{L}(C_1(X,\mu))$ такой, что справедливо утверждение теоремы п. 1.1.2.

Оказывается, что если оператор $K\in\mathscr{A}(X,\mu)$ и транспонированный оператор K^T компактны в $C(X)$, то K компактен также в $C_1(X,\mu)$; кроме того, спектры оператора K и его корневые подпространства совпадают в обоих пространствах $C(X)$ и $C_1(X,\mu)$. По поводу материала настоящего раздела см. [16], [65], [80]

1.1.6. Определители и миноры Фредгольма. Применим теперь результаты из гл. 1, § 6 к интегральному оператору вида

$$(Su)(x)=\int_\Omega k(x,t)\,u(t)\,dt$$

с непрерывным ядром $k\in C(\Omega\times\Omega)$, где Ω — компактное множество в $\mathbf{R}^m$.

В этом случае резольвента Фредгольма $S(\lambda)$ есть интегральный оператор

$$(S(\lambda)u)(x)=\int_\Omega \Gamma(x,t;\lambda)\,u(t)\,dt$$

с ядром

$$\Gamma(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{d(\lambda)}.$$

Для функций d и D Фредгольм дал представление в виде следующих рядов, называемых теперь *рядами Фредгольма*:

$$d(\lambda)=\sum_0^\infty d_n\lambda_n,\quad D(x,t;\lambda)=\sum_0^\infty D_n(x,t)\lambda^n,$$

где

$$d_0 := 1, \quad D_0(x, t) := K(x, t),$$

$$d_n := \frac{(-1)^n}{n!} \int_\Omega D_{n-1}(x, x)\, dx, \quad n \geqslant 1,$$

$$D_n(x, t) := \frac{(-1)^n}{n!} \int_\Omega \ldots \int_\Omega k \begin{pmatrix} x, t_1, \ldots, t_n \\ t, t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n$$

и

$$k \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} = \det\left(k(x_p, t_q)\right)_{p,q=1}^n.$$

С помощью неравенства Адамара Фредгольм доказал, что ряды d и D представляют целые функции от λ.

Рекуррентные формулы (1.19) теперь принимают вид

$$D_n(x, t) = d_n k(x, t) + \int_\Omega k(x, y) D_{n-1}(y, t)\, dy,$$

а формула для следов (см. теорему п. 6.8, гл. 1) записывается следующим образом:

$$\frac{d'(\lambda)}{d(\lambda)} = -\sum_1^\infty A_n \lambda^n,$$

где A_n — так называемые следы ядра $k(x, t)$, равные

$$A_n = \int_\Omega k_n(x, x)\, dx$$

с n-ым итерированным ядром $k_n(x, t)$:

$$k_n(x, t) = \int_\Omega \ldots \int_\Omega k(x, y_1)\, k(y_1, y_2) \ldots k(y_{n-1}, t)\, dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}.$$

В рассматриваемом здесь случае можно определить *миноры Фредгольма порядка* p формулой

$$D\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_p \\ t_1, \ldots, t_p \end{pmatrix}; \lambda\Big) = k \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_p \\ t_1, \ldots, t_p \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n \int_\Omega \ldots \int_\Omega k \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n \\ t_1, \ldots, t_p, y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix} dy_1 \ldots dy_n.$$

Последний ряд представляет собой целую функцию от λ при любом p и любых x_k, $t_k \in \Omega$. Очевидно, $D(x, t; \lambda) = D\left(\frac{x}{t}; \lambda\right)$. Через миноры Фредгольма можно выразить собственные функции оператора S (см. [16], [65]).

При помощи функций d и D Фредгольмом была построена теория интегральных уравнений с непрерывным ядром, включая теорему о квадратичной суммируемости последовательности собственных значений такого ядра (см. также гл. 1, п. 7.3).

1.2. Интегральные операторы в пространствах $L_p(X, \mu)$. Пусть (X, μ) и (Y, ν) — произвольные пространства с σ-конечными мерами. Через $L_p(X, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначим банахово пространство всех μ-измеримых комплекснозначных функций f на X с конечной нормой

$$\| f \|_p := \Big[\int_X | f(x) |^p \, d\mu(x) \Big]^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\| f \|_\infty = \inf \{ C : | f(x) | \leqslant C \ \mu\text{-почти всюду на } X \}.$$

В случае лебеговой меры $d\mu(x) = dx$ будем писать $L_p(X)$. Как обычно, обозначим $p' = p/(p-1)$ при $1 < p < \infty$; $p' = 1$, если $p = \infty$ и $p' = \infty$, если $p = 1$.

Тогда для любого $p \in [1, \infty]$ определена дуальная система $< L_p, L_{p'} >$ формулой

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) g(x) \, d\mu(x) \quad (f \in L_p, \ g \in L_{p'}).$$

Для $p \in [1, \infty)$ имеем $L_{p'}(X, \mu) = [L_p(X, \mu)]'$ (см. гл. 1, п. 2.3).

В этом разделе указываются условия, при которых интегральный оператор

$$(Kf)(x) = \int_Y k(x, y) f(y) \, d\nu(y) \tag{2.8}$$

является ограниченным или компактным оператором из $L_q(Y, \nu)$ в одно из пространств $L_p(X, \mu)$ или $C(X)$.

1.2.1. Общие условия ограниченности и компактности.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $X = Y$ — компактное множество в $\mathbb{R}^n$ ненулевой лебеговой меры $\mu = \nu$. В этом случае ядра интегральных операторов (2.8), действующих из $L_q(X)$ в $C(X)$, полностью описываются следующими двумя теоремами, по существу, установленными Радоном.

Теорема. Интегральный оператор K действует из $L_q(X)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, в $C(X)$ в том и только том случае, когда:

a) $h(x) := \| k(x, \cdot) \|_{q'} \leqslant M < \infty$ при всех $x \in X$;

b) для любого измеримого подмножества $D \subseteq X$ и любого $x_0 \in X$ справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0} \int_D k(x, y) \, dy = \int_D k(x_0, y) \, dy.$$

Если условия a) и b) выполнены, то $\| K \|_{L_q \to C} = \| h \|_\infty$.

Теорема. Пусть K действует из $L_q(X)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, в пространство $C(X)$. Тогда K компактен в том и только том случае, когда для любого $x_0 \in X$

$$\lim_{x \to x_0} \| k(x, \cdot) - k(x_0, \cdot) \|_{q'} = 0.$$

Заметим, что если K действует из $L_q(X)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, в $C(X)$, то сопряженный оператор $K^* : L_1(X) \to L_{q'}(X)$ есть интегральный оператор с ядром $k^*(x, y) = \overline{k(y, x)}$.

2. К сожалению, неизвестны необходимые и достаточные условия на ядро k, обеспечивающие непрерывность или компактность интегрального оператора $K: L_q \to L_p$ в общем случае. Ниже приводятся некоторые достаточные условия, а в одном важном частном случае, даже необходимые и достаточные условия такого рода. Другие достаточные признаки см., например, в [16], [20].

Обозначим через P_M оператор умножения на характеристическую функцию χ_M множества $M \subseteq X$:

$$(P_M u)(x) = \chi_M(x) u(x).$$

Здесь, по-прежнему, X — компактное множество в $\mathbf{R}^n$ ненулевой лебеговой меры $|X|$.

Теорема. Пусть функция k измерима на $X \times X$ и пусть интегральный оператор K с ядром k действует из $L_q(X)$ в $L_p(X)$. Пусть выполнено одно из условий:

1) $1 < q \leqslant \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, $q > p$, оператор K регулярен;

2) $1 < q \leqslant \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, $q \leqslant p$, оператор K регулярен и $\lim\limits_{|M|+|N| \to 0} \|P_M K P_N\|_{L_q \to L_p} = 0$;

3) $q > 1$, $p < \infty$, оператор K удовлетворяет условиям

$$\lim_{|M| \to 0} \|P_M K\|_{L_q \to L_p} = \lim_{|N| \to 0} \|K P_N\|_{L_q \to L_p} = 0.$$

Тогда K — компактный оператор из $L_q(X)$ в $L_p(X)$.

1.2.2. Операторы Хилла—Тамаркина. Для произвольных пространств с мерой (X, μ) и (Y, ν) и для любых $p, q \in [1, \infty]$ обозначим через $\mathscr{H}_{pq}(X, Y)$ множество всех интегральных операторов K вида (2.8), действующих из $L_q(Y, \nu)$ в $L_p(X, \mu)$, с $(\mu \times \nu)$-измеримым ядром k таким, что $h(x) := \|k(x, \cdot)\|_{q'} < \infty$ для μ-почти всех $x \in X$ и $h \in L_p(X, \mu)$. Положим $|K|_{pq} = \|h\|_p$.

Операторы $K \in \mathscr{H}_{pq}(X, Y)$ называются *операторами Хилла—Тамаркина.* Заметим, что при $q = p'$ справедливо равенство $\mathscr{H}_{pp'}(X, Y) = L_p(X \times Y, \mu \times \nu)$; в частности, $\mathscr{H}_{22}(X, Y)$ — гильбертово пространство, элементами которого являются интегральные операторы Гильберта—Шмидта.

Для оператора $K \in \mathscr{H}_{pq}(X, Y)$ определен транспонированный оператор K^T с ядром $k^T(x, y) = k(y, x)$. В силу теоремы Фубини, имеет место равенство $\langle Kf, g \rangle = \langle f, K^T g \rangle$ для всех $f \in L_q(Y, \nu)$ и $g \in L_{p'}(X, \mu)$. При $p \in [1, \infty)$ оператор K^T можно отождествить с дуальным оператором K' (см. гл. 1, п. 2.5); если $p = \infty$, то $L_1(X, \mu)$ изоморфно замкнутому подпространству пространства $[L_\infty(X, \mu)]^T$ и K^T — сужение оператора K' на $L_1(X, \mu)$.

$\mathscr{H}_{pq}(X, Y)$ является банаховым пространством с нормой $|\cdot|_{pq}$, причем $\|K\| \leqslant |K|_{pq}$ $(\|K\| \leqslant |K^T|_{q'p'})$ для $K \in \mathscr{H}_{pq}(X, Y)$ $(\in \mathscr{H}_{q'p'}(Y, X))$. Если $1 \leqslant p < \infty$ и $1 < q \leqslant \infty$, то каждый оператор $K \in \mathscr{H}_{pq}(X, Y)$ является компактным оператором из $L_q(Y, \nu)$

в $L_p(X, \mu)$; более того, при $q' \leqslant p$ оператор K является пределом по норме $|\cdot|_{pq}$ последовательности конечномерных операторов, а при $p \leqslant q'$ оператор K^T аппроксимируется конечномерными операторами в $\mathscr{K}_{q'p'}(Y, X)$ (см. [65]).

1.2.3. Интегральные операторы свертки. Недавно Хансоном (1982) были найдены необходимые и достаточные условия непрерывности и компактности оператора свертки K: $L_q(\mathbf{R}^n) \to L_p(\mathbf{R}^n, \mu)$ $(1 < q \leqslant p < \infty)$ вида

$$(Kf)(x) = (K * f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x-y) f(y)\, dy,$$

где $K(x) = k(|x|)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ и k — положительная и невозрастающая функция на $(0, \infty)$. При этом предполагается, что k удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 k(r) r^{n-1} dr < \infty \quad \text{и} \quad \int_1^\infty [k(r)]^{q'} r^{n-1} dr < \infty \tag{2.9}$$

$(q' = q/(q-1))$. Остановимся здесь на более интересном случае $K \notin L^{q'}(\mathbf{R}^n)$.

Теорема. Оператор K непрерывен в том и только том случае, когда $\sup\limits_{E \subset \mathbf{R}^n} \mu(E)/c(E)^{p/q} < \infty$; K компактен в том и только том случае, когда мера μ удовлетворяет следующим двум дополнительным условиям:

a) $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{\operatorname{diam}(E) \leqslant \delta} \mu(E)/c(E)^{p/q} = 0$,

b) $\lim\limits_{R \to \infty} \sup\limits_{E \subset \{x : |x| < R\}} \mu(E)/c(E)^{p/q} = 0$.

При этом c есть *L_q-емкость*, определенная для любого подмножества $E \subset \mathbf{R}^n$ формулой

$$c(E) := \inf \int g^q dx,$$

где точная нижняя грань берется по всем неотрицательным функциям g таким, что $K * g \geqslant 1$ на E.

В следующей теореме предположим, что функция k непрерывна и заменим второй интеграл в условии (2.9) более сильным требованием, что $r_\delta k(r)$ — убывающая функция при $0 < r < \infty$ для некоторого $\delta > 0$.

Теорема Пусть k удовлетворяет вышеуказанным условиям. Тогда оператор $K: L_q(\mathbf{R}^n) \to L_p(\mathbf{R}^n, \mu)$ непрерывен при всех $q < p$, $1 < q < n/(n-\delta)$ в том и только в том случае, когда $\sup\limits_{B_R} \mu(B_R)/h(R) < \infty$, где B_R — шар в $\mathbf{R}^n$ и $h(R) = R^{c - pn'q'} k(R)^{-p}$.

Оператор K компактен в том и только том случае, когда выполнены условия

α) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{R \leqslant \varepsilon} \mu(B_R)/h(R) = 0$

и

β) $\lim\limits_{\rho\to\infty} \sup\limits_{B_R\subset\{|x|>\rho\}} \mu(B_R)/h(R)=0.$

Первая теорема распространяет на широкий класс разностных интегральных операторов критерий типа В. Г. Мазьи (см. [25]). Вторая теорема обобщает результат Адамса (1973), относящийся к ядру типа потенциала $k(r)=r^{-n+\alpha}$ при $0<\alpha q<n$; в этом случае $h(r)=r^m$, где $m=(n-\alpha q)p/q$.

1.2.4. Корневые подпространства интегрального оператора. Рассмотрим интегральный оператор (2.1), где X — множество в $\mathbf{R}^n$ с положительной мерой $\mu(X)$. Предположим, что K является компактным оператором, действующим в пространстве $L_p(X, \mu)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ (в $C(X)$). Пусть λ_0 — ненулевое собственное значение оператора K.

Тогда канонический базис оператора K, отвечающий собственному числу λ_0 (см. гл. 1, § 5), состоит из функций $e_{j,k}\in L_p(X, \mu)$ $(C(X))$, для которых выполняются равенства

$$Ke_{jk}-\lambda_0 e_{jk}=\begin{cases}0, & k=1;\\ e_{j,k-1}, & k=2,\dots,n_j,\end{cases}$$

и из функций $f_{j,k}\in L_{p'}(X, \mu)$ $(L_1(X, \mu))$, $k=1,\dots,n_j$, $j=1,\dots,m$, удовлетворяющих транспонированным уравнениям

$$\int\limits_X k(y, x)\, f_{j,k}(y)\, d\mu(y)-\lambda_0 f_{jk}(x)=\begin{cases}0, & k=1,\\ f_{j,k-1}(x), & k=2,\dots,n_j\end{cases}$$

и соотношениям

$$\int\limits_X e_{jk}(x)\, f_{l,h}(x)\, d\mu(x)=\delta_{jl}\delta_{k,n_l-h+1}.$$

Операторы P, KP и K_{-l} (см. (1.16)—(1.18)) являются интегральными операторами вида (2.1) с вырожденными ядрами

$$p(x, y)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_l} e_{jk}(x)\, f_{j,n_j-k+1}(y),$$

$$k_0(x, y)=\lambda_0 p(x, y)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_j-1} e_{jk}(x)\, f_{j,n_j-k}(y),$$

$$k_{-l}(x, y)=-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_j} e_{j,k-l+1}(x)\, f_{j,n_j-k+1}(y)$$

$(l=1, 2,\dots, p)$, соответственно.

§ 2. Оценки собственных значений и сингулярных чисел интегральных операторов

Восходящая к Риману (1854) классическая задача о поведении коэффициентов Фурье периодической функции в зависимости от ее гладкости является частным случаем задачи об асимптотических оценках собственных значений интегрального оператора. В самом деле, каждой такой функции f соответствует интегральный оператор свертки

$$(Ku)(x)=\int_0^1 f(x-y)\,u(y)\,dy,$$

собственные значения которого в точности совпадают с коэффициентами Фурье функции f.

История проблемы об оценках λ-чисел и s-чисел интегрального оператора в зависимости от свойств интегрируемости и гладкости ядра связано, в первую очередь, с именами Фредгольма, Шура, Карлемана и Вейля. Впоследствии решение этой задачи было существенно продвинуто благодаря работам Хилла, Тамаркина, Смизиса, М. Г. Крейна и А. О. Гельфонда. В последнее время, в связи с нуждами приложений, появилась необходимость в достаточно общих и точных результатах в этой области. С другой стороны, существенно расширились классы исследуемых интегральных уравнений (ядра, отличные от ядер Гильберта—Шмидта, ядра с особенностями на диагонали, неограниченные области, меры, отличные от лебеговой и др.). В указанном направлении большие успехи были достигнуты за последние 15—20 лет. Наиболее общие и полные результаты этих исследований содержатся в обзорах М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка [5] и Пича [75]. В этом параграфе будут сформулированы некоторые из наиболее существенных результатов названных работ.

2.1. Классы Трибеля.

2.1.1. Пусть H_1, H_2 — сепарабельные гильбертовы пространства. Обобщением и уточнением классов $\mathscr{S}_p$ (см. гл. 1, п. 7.3) являются введенные Трибелем (1967) *классы* $\mathscr{S}_{p,q}$ при $0<p,q\leqslant\leqslant\infty$ — аналоги пространств Лоренца $l_{p,q}$ числовых последовательностей: пространство $\mathscr{S}_{p,q}$ образовано всеми операторами $K\in\mathscr{K}(H_1, H_2)$, для которых $(s_n(K))\in l_{p,q}$, т. е. конечен функционал

$$N_{p,q}(K):=\begin{cases}\left(\sum\limits_n [n^{1/p-1/q}s_n(K)]^q\right)^{1/q} & (0<q<\infty),\\ \sup\limits_n [n^{1/p}s_n(K)] & (q=\infty).\end{cases}$$

Ясно, что $\mathscr{S}_{p,q}=\mathscr{S}_p$. Классы $\mathscr{S}_{p,\infty}$, $0<p<\infty$, состоят из операторов, s-числа которых допускают «индивидуальные» оценки вида $s_n(K)=O(n^{-1/p})$. При любых $p,q\in(0, \infty]$ класс $\mathscr{S}_{p,q}$ является квазинормированным пространством с квазинормой $N(\cdot)=N_{p,q}(\cdot)$. Последнее означает, что имеют место обычные свойства нормы, за исключением неравенства треугольника, которое заменяется неравенством $N(K_1+K_2)\leqslant c[N(K_1)+N(K_2)]$; постоянная $c=c(p, q)\geqslant 1$ не зависит от K_1, K_2. При $1<p\leqslant\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, а также при $p=q=1$ пространства $\mathfrak{S}_{p,q}$ нормируемы. Если $p<1$ или $q<1$, а также при $p=1$, $1<q\leqslant\infty$ пространства $\mathfrak{S}_{p,q}$ метризуемы.

Имеют место непрерывные вложения

$$\mathfrak{S}_{p_1,q_1}\subset\mathfrak{S}_{p_2,q_2} \quad (p_1<p_2;\ q_1,\ q_2 \text{ произвольны}),$$

$$\mathfrak{S}_{p,q_1}\subset\mathfrak{S}_{p,q_2} \quad (0<p\leqslant\infty;\ 0<q_1<q_2\leqslant\infty),$$

$$\mathfrak{S}_{p,q}\subset\overset{0}{\mathfrak{S}}_{p,\infty} \quad (0<p<\infty;\ 0<q<\infty).$$

При этом $\overset{0}{\mathfrak{S}}_{p,\infty}$ — сепарабельное подпространство в $\mathfrak{S}_{p,\infty}$ $(0<p<\infty)$, для элементов которого $s_n(K)=o(n^{-1/p})$.

2.1.2. Из неравенства Вейля (см. гл. 1, п. 7.3) можно получить следующие оценки собственных значений через сингулярные числа операторов $K\in\mathfrak{S}_{p,q}$:

$$\sum_n n^{q/p-1}\,|\lambda_n(K)|^q\leqslant cN^q_{p,q}(K) \text{ при } 0<p\leqslant\infty,\ 0<q<\infty;$$

$$\sup_n n^{1/p}\,|\lambda_n(K)|\leqslant \check{c}N_{p,\infty}(K) \text{ при } 0<p\leqslant\infty,\ q=\infty;$$

здесь $c=c(p, q)$. Следовательно, $(\lambda_n(K))\in l_{p,q}$. Если $K\in\overset{0}{\mathfrak{S}}_{p,\infty}$, $0<p<\infty$, то

$$|\lambda_n(K)|=o(n^{-1/p}).$$

Таким образом, задача об оценках λ-чисел и s-чисел оператора K сводится к нахождению критериев принадлежности оператора K классом $\mathfrak{S}_{p,q}$.

2.1.3. Соответствующие классы ядер интегральных операторов удобно трактовать с точки зрения теории абстрактных функций.

Пусть (Y, τ) — пространство с σ-конечной мерой τ и E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Через $[L_p(Y, \tau), E]$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ обозначим пространство всех измеримых функций $f:Y\to E$ таких, что $\|f(\cdot)\|\in L_p(Y, \tau)$. Аналогичным образом определяется класс $[B^\alpha_{p,u}(Q), E]$ $(-\infty<\alpha<\infty,\ 1\leqslant p,\ u\leqslant\infty)$, где $B^\alpha_{p,u}(Q)$ — пространство Бесова функций, определенных в области $Q\subset\mathbf{R}^m$ (например, $Q=\mathbf{R}^m$ или $Q=[0, 1]^m$ — единичный куб).

Напомним, что при нецелых α справедливо равенство $B^\alpha_{p,p}=W^\alpha_p$ (пространство Соболева — Слободецкого). Если α — целое, то такое равенство имеет место лишь при $p=2$, а в противном случае $B^\alpha_{p,p}\subset W^\alpha_p$ при $p<2$ и $B^\alpha_{p,p}\supset W^\alpha_p$ при $p>2$.

Классы $B^{\alpha}_{p,\infty}$ совпадают с пространствами H^{α}_{p} С. М. Никольского. Заметим, что $H^{\alpha}_{p} \supset W^{\alpha}_{p}$.

2.2. Интегральные операторы в пространствах $L^2(X, \mu)$.

2.2.1. В работе М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [5] рассматриваются интегральные операторы $K: L_2(X, \rho) \to L_2(Y, \tau)$ вида

$$(Kg)(y) := \int_X K(x, y)\, g(x)\, d\rho(x). \qquad (2.10)$$

Здесь (X, ρ), (Y, τ) — сепарабельные пространства с мерой, $H_1 = L_2(X, \rho)$, $H_2 = L_2(Y, \tau)$ — соответствующие гильбертовы пространства функций с интегрируемым квадратом. Как правило, X, Y — множества в евклидовых пространствах. При достаточно высокой гладкости ядра, ρ, τ — произвольные конечные (или локально конечные) борелевские меры. В случае меньшей гладкости ядра предполагается, что одна из мер, например ρ, абсолютно непрерывна. При этом ее плотность $d\rho/dx$ должна принадлежать подходящему классу $L_p(X, \rho)$ или интегральному пространству Лоренца $L_{p,r}(X, \rho)$. В зависимости от свойств ядра и мер выясняется, какому классу $\mathscr{S}_{q,s}$ принадлежит оператор K.

Оказывается, что для операторов, не являющихся операторами Гильберта—Шмидта, оценки s-чисел не связаны с гладкостью ядра и требуют лишь условий интегрального типа. Далее, точные по порядку индивидуальные оценки имеют место для ядер из классов Никольского H^{α}_{p}. Точные условия включений вида $K \in \mathscr{S}_p$ связаны с принадлежностью ядра классам Бесова. В частности, для признаков ядерности важны классы $B^{\alpha}_{2,1}$. Здесь мы сформулируем два результата М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [5].

Теорема. Пусть $X = [0, 1]^m$, ρ — конечная борелевская мера на X и $K \in [L_2(Y, \tau), B_{p,q}{}^{\alpha}(X)]$ при $2 \leqslant p < \infty$, $2 \leqslant q \leqslant \infty$ и $p\alpha > m$. Тогда $K \in \mathscr{S}_{\delta,q}$, где $\delta = (\alpha/m + 1/2)^{-1}$.

Следствие. Пусть условия теоремы выполнены при $q = \infty$. Тогда $s_n(K) = O(n^{-1/\delta})$. Если $K \in [L_2(Y, \tau), H^{\alpha}_{p}(X)]$, то $K \in \overset{0}{\mathscr{S}}_{\delta,\infty}$, т. е. $s_n(K) = o(n^{-1/\delta})$.

Заметим, что в случае $p = q = 2$ условия на ядро в теореме выражаются в терминах пространства $W_2{}^{\alpha}$. В этом случае результат точен.

Аналогичные утверждения справедливы при $p\alpha < m$. Более того, исследован пограничный случай $p\alpha = m$.

При доказательстве этих признаков авторы пользуются приемом Вейля, основанным на приближениях ядра вырожденными. Построение аппроксимирующих ядер базируется на специальной технике кусочно-полиномиальных приближений. Таким путем получаются индивидуальные оценки s-чисел для ядер из классов W_p^α. Систематическое использование интерполяционной техники позволяет уточнить оценки и распространить на более широкие классы ядер и мер.

Более того, указанные результаты обобщаются на некоторые классы областей, отличных от куба и $\mathbf{R}^m$, а также на гладкие компактные m-мерные многообразия или многообразия с краем. Кроме того, исследованы некоторые случаи, когда ядра удовлетворяют условиям «смешанной» гладкости (см. п. 2.3).

2.2.2. Для ряда случаев установлены асимптотические формулы для функции распределения s-чисел

$$n(s,)\ K:=\sum_{k\in K_s}1,\quad K_s:=\{k:s_k(K)>s\},\quad s>0.$$

Приведем один из результатов такого рода (см. [5]). Пусть X, Y — измеримые множества в $\mathbf{R}^m$ и обе меры ρ, τ абсолютно непрерывны относительно меры Лебега. Положим $|a(x)|^2=d\rho/dx$, $|b(y)|^2=d\tau/dy$ и рассмотрим оператор $K_{ab}:L_2(X)\to L_2(Y)$ вида

$$(K_{ab}g)(y):=\int_X b(y)K(x,y)a(x)g(x)\,dx. \tag{2.11}$$

Операторы (2.10) и (2.11) имеют одинаковые s-числа.

Обозначим через $O_m^{k,\beta}$ $(k>-m,\ \beta\geqslant 0)$ класс всех положительно однородных функций порядка k, принадлежащих $C^\beta(S^{m-1})$ (S^{m-1} — единичная сфера в $\mathbf{R}^m$), причем $C^0(S^{m-1})=L_\infty(S^{m-1})$. Пусть $F\in O_m^{k,\beta}$, либо F имеет вид $F(z)=P(z)\log f(z)$, где $f\in O_m^{1,\beta}$, $f(z)>0$ при $|z|=1$, а P — однородный полином степени $k\geqslant 0$. Рассмотрим функцию $\tilde{F}$ — преобразование Фурье функции F, понимаемое по Риссу:

$$\tilde{F}(\xi)=\lim_{r\to\infty}\int_{|x|<r}(1-|x|^2r^{-2})^jF(x)\,e^{-ix\xi}dx.$$

При достаточно больших j (нижняя грань допустимых j зависит от k) этот предел для $\xi\neq 0$ существует и является непрерывной положительно однородной функцией порядка $-(m+k)$. Положим

$$\gamma(F):=(2\pi)^{-m}\operatorname{mes}\{\xi:|\tilde{F}(\xi)|>1\}.$$

Если $K(x,y)=\varphi(x,y)F(x-y)$, где функция φ непрерывна на диагонали $x=y$, то асимптотическая формула для $n(s,K)$, $K=K_{ab}$, имеет вид

$$\lim_{s\to 0}s^\delta n(s,K)=\gamma(F)\int_{X\cap Y}|a(x)\varphi(x,x)b(x)|^\delta dx,$$

где $\delta^{-1}=1+km^{-1}$. В общем случае, когда функция φ не является непрерывной на диагонали, требуется некоторая регуляризация интеграла.

2.3. Интегральные операторы в банаховых пространствах.

2.3.1. В конце 70-х годов основные результаты о компактных операторах в гильбертовых пространствах, изложенные в п. 7.3 гл. 1 и п. 2.1, были обобщены на случай банаховых пространств E, F.

Если для оператора $S\in\mathcal{S}(E, F)$ обозначить через

$$\alpha_n(S) = \inf_{T\in\mathcal{F}_{n-1}} \| S - T \|$$

так называемые *аппроксимативные числа*, то класс

$$\mathcal{A}_{p,q} := \{S\in\mathcal{L}(E, F) : (\alpha_n(S))\in l_{p,q}\},\ 0<p,\ q\leqslant\infty,$$

становится «хорошим» обобщением класса $\mathcal{S}_{p,q}$, поскольку для операторов $S\in\mathcal{A}_{p,q}(E, F)$ остается в силе теорема об оценках λ-чисел вида $(\lambda_j(S))\in l_{p,q}$ (Кёниг, 1977). Более того, для *s-чисел* (*по Вейлю*)

$$\varkappa_n(S) := \sup \{\alpha_n(SX) : X\in\mathcal{L}(l_2, H),\ \|X\|\leqslant 1\}$$

было обобщено неравенство Вейля (Пич, 1979). Обзор этого направления, основанный на теории операторных идеалов, дан в [74] (см. также [73]). В последнее время эти результаты были существенно использованы для оценок собственных значений интегральных операторов.

2.3.2. Интегральные операторы вида

$$(Kg)(t) := \int_0^1 k(t, s)\, g(s)\, ds$$

с комплекснозначным ядром k, определенным на квадрате $[0, 1]^2$ и обладающим «смешанной» гладкостью типа $k\in\left[B^{\alpha}_{p,u}, B^{\beta}_{q,v}\right]$, были подробно исследованы Пичем [75].

По определению $k\in\left[B^{\alpha}_{p,u}, B^{\beta}_{q,v}\right]$, если такое включение верно для абстрактной функции $f_k: t \mapsto k(t, s)$, значения которой суть функции от s. Тогда соотношение

$$S_k: g \mapsto h, \quad h(t) = \int_0^1 k(t, s)\, g(s)\, ds$$

определяет оператор $S_k\in\mathcal{L}\left(B^{-\beta}_{q',v'}, B^{\alpha}_{p,u}\right)$, причем $B^{-\beta}_{q',v'} = \left(B^{\beta}_{q,v}\right)'$.

Предположим теперь, что выполнены условия $-\infty<\alpha$, $\beta<\infty$, $1\leqslant p$, $q\leqslant\infty$, $1\leqslant u$, $v\leqslant\infty$,

$$\alpha+\beta > (1/p+1/q-1)_{+}. \tag{2.12}$$

Тогда существует естественное вложение I из $B^{\alpha}_{p,q}$ в $B^{-\beta}_{q',v'}$.

Банахово пространство M называется *допустимым*, если $B^{\alpha}_{p,q}\subset M\subset B^{-\beta}_{q',v'}$. Пусть $I_0\in\mathcal{L}\left(B^{\alpha}_{p,u}, M\right)$ и $I_1\in\mathcal{L}\left(M, B^{-\beta}_{q',v'}\right)$ — естественное вложения, так что $I = I_1 I_0$. Определим оператор $S^M_k := I_0 S_k I_1 \in\mathcal{L}(M)$. Поскольку операторы S^M_k и $S^0_k := I_1 I_0 S_k$

родственны, то семейство ненулевых собственных значений оператора S_k^M не зависит от M. Это обстоятельство показывает, что можно говорить о последовательности $(\lambda_n(k))$ собственных чисел ядра k без упоминания пространства M. Заметим, что пространство $L_2(0, 1)$ допустимо при $\alpha+1/2>1/p$ и $\beta+1/2>1/q$.

2.3.3. Следующая основная теорема была доказана Пичем [75].

Теорема. Пусть выполнены условия (2.12) и $q^+ := \max(2, q')$. Если $k \in [B^\alpha_{p,u}, B^\beta_{q,v}]$ и $1/r := \alpha+\beta+1/q^+$, то $(\lambda_n(k)) \in l_{r,u}$.

Доказательство Пича основано, с одной стороны, на его теории s-чисел по Вейлю и собственных значений операторов в банаховых пространствах и, с другой стороны, на методе сплайн-аппроксимации функций из пространств Бесова.

Заметим, что эта теорема допускает обобщение на случай, когда промежуток $[0, 1]$ заменен кубом $[0, 1]^m$: утверждение теоремы остается в силе, если в условии (2.12), а также в определении числа $1/r$ заменить $\alpha+\beta$ на $(\alpha+\beta)/m$ (см. [75]). Во второй части работы Пича [75] аналогичные результаты устанавливаются для случая, когда область интегрирования есть $\mathbf{R}$. При этом приходится налагать на ядро дополнительные весовые условия, обеспечивающие достаточно быстрое убывание значений $k(t, s)$ при $|t|$, $|s| \to \infty$.

2.4. Операторы Ганкеля. Важный класс интегральных операторов, для которых известны оценки s-чисел и критерии принадлежности классам $\mathcal{S}_p$, составляют так называемые *операторы Ганкеля*. Они тесно связаны с *операторами Тёплица* (см. также гл. 3). Имеются многочисленные задачи анализа и теории вероятностей, в которых возникают эти операторы и для решения которых они используются.

Пусть H_2, H_∞ — пространства Харди на единичной окружности, $H_2^- := L_2 \ominus H_2$, P и P^- — ортопроекторы в L_2 на подпространства H_2 и H_2^-. Тогда для функции φ из L_∞ операторы Ганкеля и Тёплица H_φ и T_φ определяются равенствами

$$H_\varphi f = P^- \varphi f, \ T_\varphi f = P \varphi f, \ f \in H_2.$$

Ясно, что $H_\varphi \in \mathcal{L}(H_2, H_2^-)$, $T_\varphi \in \mathcal{L}(H_2, H_2)$.

Теорема (В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн, 1971). Пусть H_φ — оператор Ганкеля ($\varphi \in L_\infty$) и $\mathcal{R}_n$ $(n \geqslant 0)$ — множество всех рациональных функций, полюсы которых лежат в единичном круге и сумма кратностей этих полюсов (для каждой такой функции) не превосходит n. Тогда

$$s_{n+1}(H_\varphi) = \inf_{H_\psi \in \mathcal{F}_{n-1}} \| H_\varphi - H_\psi \| = \operatorname{dist}_{L_\infty}(\varphi, \mathcal{R}_n + H_\infty).$$

Теорема (Хартман, 1958). Пусть $\varphi \in L_\infty$. Тогда

$$H_\varphi \in \mathcal{S}_\infty \Leftrightarrow \varphi \in C + H_\infty.$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает замкнутость суммы $C+H_\infty$ в L_∞ (см. также гл. 3, § 5).

Теорема (В. В. Пеллер, 1980). Пусть $\varphi \in L_\infty$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда

$$H_\varphi \in \mathcal{S}_p \Leftrightarrow \varphi \in B^{1/p}_{p,p} + H_\infty.$$

§ 3. Интегральные уравнения Фредгольма

В настоящем параграфе приведенные выше общие результаты о компактных операторах применяются к интегральным уравнениям Фредгольма первого, второго и третьего родов. При этом некоторые из сформулированных результатов могут быть значительно уточнены.

3.1. Интегральные операторы Гильберта—Шмидта. Применим результаты из гл. 1, § 7, к интегральным операторам вида

$$(Ku)(x) = \int_X k(x, y)\, u(y)\, dy, \tag{2.13}$$

где X — компактное множество в $\mathbf{R}^m$ с положительной лебеговой мерой и $k \in L_2(X \times X)$, т. е.

$$A^2 := \int_X \int_X |k(x, y)|^2\, dx dy < \infty. \tag{2.14}$$

Тогда $K \in \mathcal{K}(L_2(X))$, причем $\|K\| \leqslant A$ (см. п. 1.2.2). По поводу результатов настоящего и следующего разделов см., например, [29], [56], [65], [91].

3.1.1. Рассмотрим сначала *симметричное ядро*: $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$. Ряд (1.21) теперь принимает вид

$$(Ku)(x) = \sum_j \lambda_j e_j(x) \int_X \overline{e_j(y)}\, u(y)\, dy; \tag{2.15}$$

этот ряд называется *рядом Гильберта—Шмидта*, он сходится по операторной норме в $\mathcal{L}(L_2(X))$.

Принимая во внимание, что система функций $\{e_j(x)\overline{e_j(y)}\}$ ортонормирована в $L_2(X \times X)$, из (2.15) можно вывести, что функция $k \in L_2(X \times X)$ разлагается в ряд Фурье по этой системе

$$k(x, y) = \sum_j \lambda_j e_j(x) \overline{e_j(y)}. \tag{2.16}$$

Ряд (2.16) называется *билинейным рядом* ядра k. Билинейный ряд n-го итерированного ядра имеет вид

$$k_n(x, y) = \sum_j \lambda_j^n e_j(x) \overline{e_j(y)}. \tag{2.17}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\{\lambda_j^n\}$ и $\{e_j\}$ — последовательности собственных значений и собственных функций оператора K^n. Из той же формулы (2.17) вытекает равенство

$$\sum_j \lambda_j^{2n} = \int_X \int_X |k_n(x, y)|^2 \, dxdy \quad (n=1, 2, \ldots). \qquad (2.18)$$

Как было отмечено в общем случае, ряды (2.15), (2.16) и (2.17) сходятся в среднем. Если ядро k, помимо условия (2.14), удовлетворяет неравенству

$$\int_X |k(x, y)|^2 \, dy \leqslant B^2 < \infty \quad \forall x \in X, \qquad (2.19)$$

то ряд (2.15) сходится равномерно и абсолютно на X, причем

$$\sum_j \lambda_j^2 |e_j(x)|^2 \leqslant B^2 \ (x \in X);$$

аналогичное утверждение справедливо для ряда Неймана (при $|\lambda| > B$). При тех же условиях (2.14) и (2.19) ряд (2.17) сходится равномерно по обеим переменным при $n > 2$, а при $n=2$ — равномерно по одной из переменных при почти любом фиксированном значении другой переменной. Если все собственные значения положительны и ядро k непрерывно, то билинейный ряд (2.16) сходится равномерно на $X \times X$ (*теорема Мерсера*, 1909). В частности, при четных n ряд (2.17) сходится равномерно на $X \times X$, если k — непрерывное ядро.

3.1.2. Если k — несимметричное ядро, удовлетворяющее условию (2.14), то из (1.23) и (1.25) вытекают формулы

$$k(x, y) = \sum_j s_j f_j(x) \overline{e_j(y)}, \qquad (2.20)$$
$$\sum_j \lambda_j^2 \leqslant A^2.$$

Ряд в (2.20) можно рассматривать как билинейный ряд несимметричного ядра k; он сходится по норме $L_2(X \times X)$. Неравенство в (2.20) также называют неравенством Шура.

3.2. Уравнения второго рода. Пусть $K(\neq 0)$ — компактный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H и $\lambda \in \mathbf{C}$. Рассмотрим уравнение

$$Ku - \lambda u = f. \qquad (2.21)$$

Он называется *уравнением второго рода* при $\lambda \neq 0$ и *уравнением первого рода*, если $\lambda = 0$. В настоящем разделе будем считать, что $\lambda \neq 0$.

3.2.1. Уравнение (2.21) (при $\lambda \neq 0$) можно решить сведением его к линейной алгебраической системе. Этот метод, предложенный впервые Шмидтом (1908) для интегрального уравнения Фредгольма, состоит в следующем.

Положим $\mu = 1/\lambda$, $|\mu| < R$, и представим оператор K в виде суммы $K = C + D$, где C — конечномерный оператор и $\|D\| \leqslant 1/R$ (см. гл. 1, п. 7.1). Применяя к обеим частям уравнения (2.21) обратный оператор $(I - \mu D)^{-1}$, получим уравнение

$$u - \mu[I + \mu D(\mu)]Cu = -\mu[I + \mu D(\mu)]f =: g, \qquad (2.22)$$

эквивалентное (2.21); при этом $D(\mu)$ — резольвента Фредгольма оператора D (см. гл. 1, § 4). Оператор $T:=[I+\mu D(\mu)]C$ конечномерен, т. е. $Tu=\sum_{k=1}^{n}(u, b_k)a_k$, где (a_k) и (b_k) ортонормированные системы в H, причем $a_k=a_k(\mu)$. Умножив обе части уравнения (2.22) скалярно на b_j, получим систему алгебраических уравнений

$$c_j-\mu\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}c_k=g_j, \quad j=1, \ldots, n, \tag{2.23}$$

где $a_{jk}=(a_k, b_j)$, $g_j=(g, b_j)$, $c_j=(u, b_j)$.

Легко видеть, что определитель системы (2.23) есть голоморфная функция от μ в круге $|\mu|<R$. Он отличен от тождественного нуля (при $\mu=0$ он равен единице) и поэтому имеет не более конечного числа корней в круге $|\mu|<R$. Эти корни являются характеристическими значениями оператора T; все остальные значения μ регулярны.

После того как решение системы (2.23) найдено, мы получим решение уравнения (2.22) в виде $u=g+\mu\sum_{k+1}^{n}c_ka_k$. Более того, отсюда легко выводятся все теоремы Фредгольма для уравнения (2.21) (включая теорему о структуре спектра, см. гл. 1, п. 5.2).

Если выполнено условие $|\mu|<1/|\lambda_1|$, где λ_1 — первое собственное число оператора K (например, если $|\mu|<1/\|K\|$), то достаточно положить $C=0$ и единственное решение уравнения (2.21) представляется в виде

$$u=-\mu[I+\mu K(\mu)]f=-\mu\sum_{n=0}^{\infty}\mu^nK^nf.$$

Последнее означает, что для уравнения (2.21) сходится *метод последовательных приближений* (при любом $f\in H$). В частности, если K — интегральный оператор вида (2.13), то

$$u(x)=-\mu f(x)-\mu^2\int_X\Gamma(x, t;\ \mu)f(t)dt,$$

где $\Gamma(x, t;\ \mu):=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}k_n(x, t)$ — так называемая *резольвента ядра* k. Например, если (2.21) — уравнение Вольтерра (см. п. 1.1.3), то $\lambda_1=0$ и, следовательно, μ может быть любым комплексным числом.

3.2.2. Допустим теперь, что K — компактный нормальный оператор. Спектральная теорема Гильберта (см. гл. 1, п. 7.2) позволяет написать формулы для решения уравнения (2.21), если известны собственные значения λ_j и соответствующие им собственные элементы e_j оператора K:

1) Если $\lambda \neq \lambda_j$ при всех j (т. е. $\lambda \in \rho(K)$), то резольвента $R_\lambda(K)$ оператора K имеет вид

$$R_\lambda(K) f = -\frac{1}{\lambda} f - \frac{1}{\lambda} \sum_j \frac{\lambda_j (f, e_j)}{\lambda - \lambda_j} e_j \qquad (2.24)$$

и, следовательно, (2.24) является единственным решением уравнения (2.21).

2) Если $\lambda = \lambda_p = \ldots = \lambda_q$ — собственное значение, то решения уравнения (2.21) существуют в том и только том случае, когда

$$(f, e_k) = 0 \text{ при всех } k \quad p, \ldots, q; \qquad (2.25)$$

если условия (2.25) выполнены, то решения уравнения (2.21) определяются формулой

$$u = -\frac{1}{\lambda} f - \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq p, \ldots, q} \frac{\lambda_j (f, e_j)}{\lambda - \lambda_j} e_j + \sum_{k=p}^{q} c_k e_k, \qquad (2.26)$$

где $c_p, \ldots, c_q$ — произвольные постоянные.

В самом деле, из (2.21) следует

$$(Ku, e_j) - \lambda (u, e_j) = (\lambda_j - \lambda)(u, e_j) = (f, e_j). \qquad (2.27)$$

Таким образом, в первом случае (2.24) является непосредственным следствием равенств (1.21), (2.21) и (2.27). Во втором случае (2.25) суть необходимые условия разрешимости, в силу (2.27); кроме того, если (2.25) выполнены, то (2.26) является решением, и притом общим, уравнения (2.21).

3.3. Уравнения первого рода. Теория уравнений первого рода

$$Ku = f \qquad (2.28)$$

сложнее теории уравнений второго рода. Это объясняется тем, что бесконечномерный компактный оператор не нормально разрешим и, следовательно, условия разрешимости уравнений (2.28) носят другой характер по сравнению с уравнением (2.21). В частности, обратный к оператору K, если такой существует, неограничен и, следовательно, уравнение (2.28) — некорректная задача (по Адамару).

3.3.1. Пусть сначала $K (\neq 0)$ — компактный нормальный оператор в гильбертовом пространстве H, причем известны собственные значения λ_j и сответствующие им собственные элементы e_j. Следствием спектральной теоремы Гильберта является

Теорема. Уравнение (2.28) разрешимо в H в том и только том случае, когда:

а) $(f, w) = 0$ для всех $w \in H$, таких, что $K^* w = 0$;

б) $\sum_j \frac{1}{\lambda_j^2} |(f, e_j)|^2 < \infty$.

В том случае, когда условия а) и б) выполнены, решения уравнения (2.28) определяются формулой

$$u=v+\sum_j \frac{1}{\lambda_j}(f, e_j)\, e_j,$$

где v — произвольное решение однородного уравнения $Kv=0$.

3.3.2. Рассмотрим теперь уравнение (2.28) с не нормальным компактным оператором $K \neq 0$ в H. Из теоремы гл. 1, п. 7.3.2 вытекает

Теорема. Уравнение (2.28) разрешимо в том и только том случае, когда

а) $(f, w)=0$ для всех решений $w \in H$ уравнения $K^*w=0$;

б) $\sum_j \frac{1}{s_j^2}|(f, f_j)|^2 < \infty$.

В случае, если условия а) и б) выполнены, решения уравнения (2.28) определяются формулой

$$u=v+\sum_j \frac{1}{s_j}(f, f_j)\, e_j,$$

где v — произвольное решение однородного уравнения $Kv=0$.

3.3.3. Одним из основных методов исследования интегральных уравнений первого рода (а также третьего рода, см. следующий пункт) является *метод неограниченной регуляризации* (см. гл. 1, п. 3.1.7).

Поясним это на примере интегрального уравнения Вольтерра первого рода с непрерывным ядром

$$\int_a^x k(x, y)\, u(y)\, dy = f(x),$$

которое рассматривается в пространстве $C[a, b]$. Предположим, что существуют производные $\frac{\partial k}{\partial x}, \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{n+1} k}{\partial x^{n+1}}$, причем

$$\frac{\partial^j k(x, x)}{\partial x^j} \equiv 0 \; (j=0, \ldots, n-1), \quad \frac{1}{r(x)} := \frac{\partial^n k(x, x)}{\partial x^n} \neq 0$$

и непрерывна на $[a, b]$. Ясно, что уравнение (2.29) может иметь решение лишь тогда, когда

$$f \in C_0^{n+1}[a, b] := \{f \in C^{n+1}[a, b] : f(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0\}.$$

Если все эти условия выполнены, то в качестве (неограниченного) эквивалентного левого регуляризатора оператора можно взять определенный на $C_0^{n+1}[a, b]$ оператор

$$(Bf)(x) = r(x)\, f^{(n+1)}(x);$$

уравнение (2.29) эквивалентно уравнению 2-го рода

$$u(x) + \int_a^x r(x) \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} k(x, y)\, u(y)\, dy = r(x)\, f^{(n+1)}(x),$$

которое имеет единственное решение, представимое в виде ряда Неймана.

Допустим теперь, что $\frac{1}{r(x)}:=k(x,\ x)\neq 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ и k дифференцируема по x и y. Тогда в качестве эквивалентного правого регуляризатора можно взять определенный на $C_0^1[a,b]$ оператор

$$(Cf)(x)=[r(x)f(x)]'.$$

Если $f\in C_0^1[a,b]$, то (2.29) эквивалентно уравнению

$$v(x)-\int_a^x r(y)\,k_y'(x,y)\,v(y)\,dy=f(x); \qquad (2.30)$$

решение u уравнения (2.28) определяется по решению уравнения (2.30) равенством $u(x)=[r(x)v(x)]'$.

Аналогичным образом могут быть построены эквивалентные регуляризаторы для оператора (2.13), если ядро удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Различные методы решения интегральных уравнений первого рода подробно рассматриваются в [18], [56], [81].

3.3.4. Отметим, что метод регуляризации применим также к *интегральным уравнениям третьего рода*. Так называются уравнения вида

$$a(x)\,u(x)+\int_X k(x,y)\,u(y)\,dy=f(x), \qquad (2.31)$$

где a — функция, обращающаяся в нуль на некотором подмножестве множества X. Для простоты допустим, что $X=[0,1]$, $a(x)=(x-\alpha)^m$ (m — натуральное число, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$) и ядро $k\in C([0,1]\times[0,1])$ имеет непрерывные производные по x до порядка m в окрестности точки $x=\alpha$. Далее будем считать, что f принадлежит множеству $C(\alpha,m)$ всех функций $f\in C[0,1]$ вида

$$f(x)=\sum_{j=0}^{m-1}c_j(x-\alpha)^j+g(x)(x-\alpha)^m,$$

где c_j $(j=0,\ldots,m-1)$ — некоторые комплексные числа и $g\in C[0,1]$. Числа $f^{(j)}(\alpha):=j!c_j$, однозначно определяемые функцией f, называются *тейлоровскими производными* функции f в точке α. Если указанные условия выполнены, то в качестве левого регуляризатора уравнения (2.31) можно взять определенный на $C(\alpha,m)$ оператор

$$(Bf)(x):=g(x)=\left[f(x)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{\{j\}}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^j\right](x-\alpha)^{-m}.$$

Любое решение $u\in C[0,1]$ уравнения (2.31) является решением уравнения второго рода

$$u(x)+\int_0^1 k_1(x, y)\, u(y)\, dy=g(x), \tag{2.32}$$

имеющего непрерывное ядро

$$k_1(x, y)=\left[k(x, y)-\sum_{j=0}^{m-1} \frac{k_x^{(j)}(\alpha, y)}{j!}(x-\alpha)^j\right](x-\alpha)^{-m}.$$

Уравнения (2.31) и (2.32), вообще говоря, не эквивалентны.

Подробное изложение метода неограниченной регуляризации и его приложений к различным классам интегральных уравнений можно найти в [76].

3.3.5. Теория интегральных уравнений первого рода типа Фредгольма и Вольтерра получила существенное развитие в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова, М. И. Иманалиева, их учеников и сотрудников. Подробный обзор этих исследований содержится в [18], [19]. Здесь мы остановимся на некоторых результатах, тесно связанных с методом регуляризации.

Будем считать, что функции k, f непрерывны и имеют непрерывные производные до требуемого порядка. Показано, что уравнение (2.29) имеет обобщенное решение вида

$$u(x)=v(x)+\sum_{j=0}^{m} a_j \delta^{(j)}(x-a), \tag{2.33}$$

а уравнение (2.13) (при $X=[a, b]$) имеет обобщенное решение вида

$$u(x)=w(x)+\sum_{j=0}^{m}\left[b_j \delta^{(j)}(x-a)+c_j \delta^{(j)}(x-b)\right], \tag{2.34}$$

где v, $w \in C[a, b]$, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, a_j, b_j, c_j — некоторые постоянные. Решения (2.33) и (2.34) для уравнений (2.29) и (2.13) соответственно понимаются в том смысле, что справедливы равенства

$$\int_a^x k(x, y)\, v(y)\, dy+\sum_{j=0}^{m}(-1)^j a_j k_y^{(j)}(x, a)=f(x),$$

$$\int_a^b k(x, y)\, w(y)\, dy+\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\left[b_j k_y^{(j)}(x, a)+c_j k_y^{(j)}(x, b)\right]=f(x).$$

Более того, наряду с уравнениями (2.29) и (2.13), рассматривались так называемые *сингулярно возмущенные уравнения*

$$c(x, \varepsilon)\, u(x)+\int_a^x k(x, y)\, u(y)\, dy=f_\varepsilon(x),$$

$$c(x, \varepsilon)\, u(x) + \int_a^b k(x, y)\, u(y)\, dy = f_\varepsilon(x),$$

где ε — малый положительный параметр, $c(x, \varepsilon)$ и f_ε — заданные функции, причем $c(x, \varepsilon) \to 0$, $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ $(x \in [a, b])$ в некотором смысле при $\varepsilon \to 0$. Были найдены условия, при выполнении которых возмущенные уравнения имеют обычные непрерывные решения, сходящиеся на $[a, b]$ при $\varepsilon \to 0$ к одному из обобщенных решений (2.33) или (2.34).

Глава 3

ОДНОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основными в теории сингулярных интегральных операторов являются проблемы ограниченности, обратимости, нётеровости и вычисления индекса. Решение этих задач позволяет, в частности, описать спектр оператора. Методом явного обращения простейшего сингулярного оператора является факторизация Винера—Хопфа. Алгебраический подход заключается в том, что вместе с сингулярными операторами, коэффициенты которых принадлежат тому или иному подклассу L_∞, рассматривается алгебра, порожденная этими операторами, и проблема обратимости или нётеровости изучается сразу для всех операторов из этой алгебры.

Начнем с весовых оценок одномерного сингулярного интеграла. Во втором и третьем параграфах изучаются сингулярные уравнения с кусочно-непрерывными коэффициентами и банаховы алгебры, порожденные сингулярными операторами. Задача факторизации матриц-функций рассматривается в § 4. В §§ 5 и 6 мы изучаем тёплицевы операторы и интегральные уравнения в свертках с коэффициентами, принадлежащими различным подклассам L_∞. Уравнения с вырождающимся символом рассмотрены в § 7. В заключительном § 8 дается краткий обзор некоторых других результатов и приложений.

§ 1. Ограниченность сингулярного интегрального оператора

1.1. Преобразование Гильберта. Весовые оценки.

1.1.1. *Преобразованием Гильберта* называется интеграл

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y - x}\, dy, \qquad (3.1)$$

который существует в смысле главного значения, например, для всех функций $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ (т. е. бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем). Ограниченность оператора

H в пространстве $L_p(\mathbf{R})$, $1<p<\infty$, является классическим результатом, доказанным впервые Н. Н. Лузиным (1915) при $p=2$ и М. Риссом (1927) для произвольного p; при $p=1$ и $p=\infty$ оператор H не ограничен в $L_p(\mathbf{R})$. Более того, $H^2=I$, откуда следует, что H является некомпактным оператором в $L_p(\mathbf{R})$, $1<p<\infty$.

1.1.2. Хант, Макенхаупт и Уиден (1973) получили полное описание весов ρ в $\mathbf{R}$ (неотрицательных, измеримых и локально интегрируемых функций) таких, что $H\in\mathscr{L}(L_p(\mathbf{R},\rho))$, $1<p<\infty$, т. е. справедливы оценки

$$\int_{\mathbf{R}}|(Hf)(x)|^p\rho(x)\,dx\leqslant C\int_{\mathbf{R}}|f(x)|^p\rho(x)\,dx,\qquad f\in C^\infty(\mathbf{R}).\tag{3.2}$$

Здесь и в дальнейшем через C, $C_1,\ldots$ обозначаются различные положительные постоянные, зависящие лишь от явно указанных индексов.

Теорема. Неравенство (3.2) справедливо в том и только том случае, если вес ρ удовлетворяет условию

$$\|\rho^{1/p}\|_{L_p(Q)}\|\rho^{-1/p}\|_{L_{p'}(Q)}\leqslant C_1|Q|\tag{A_p}$$

для любого промежутка $Q\subset\mathbf{R}$ длины $|Q|$.

Необходимость условия (A_p) сразу получается подстановкой в (3.2) пробной функции $f=\rho^{-1/(p-1)\psi_Q}$ доказательство достаточности существенно сложнее.

Условие (A_p) было введено в 1972 г. Макенхауптом, который доказал, что оно эквивалентно ограниченности в $L_p(\mathbf{R},\rho)$ максимального оператора Харди—Литлвуда (см. также гл. 4, п. 1.2).

Для степенных весов вида

$$\rho(x)=(1+|x|)^\beta\prod_{k=1}^m|x-x_k|^{\beta_k},\tag{3.3}$$

где $x_1,\ldots,x_m$ — различные точки $\mathbf{R}$, а β, $\beta_1,\ldots,\beta_m$ — вещественные числа, условие (A_p), как легко видеть, эквивалентно условиям

$$-1<\beta_k<p-1\quad(k=1,\ldots,m),\qquad -1<\beta+\sum_{k=1}^m\beta_k<p-1.\tag{3.4}$$

Для таких весов ограниченность оператора H в $L_p(\mathbf{R},\rho)$ была доказана впервые Харди и Литлвудом (1936).

Достаточные условия справедливости двухвесовых оценок для оператора H были получены в работах Макенхаупта и Уидена (1976), Котляра и Садоски (1975—1982) и Сойера (1981); подробнее см. обзор [15] (см. также гл. 4, § 2).

1.2. Сингулярный интеграл Коши.

1.2.1. Пусть Γ — спрямляемая жорданова плоская кривая и $f\in L_1(\Gamma)$. *Сингулярным интегралом Коши* называется интеграл

$$(S_\Gamma f)(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau:=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\quad t\in\Gamma, \qquad (3.5)$$

где $\Gamma_\varepsilon=\{\tau\in\Gamma:|\tau-t|>\varepsilon\}$.

Известно, что ограниченность оператора (3.5) в пространстве $L_p(\Gamma)$ (относительно длины дуги) сводится к проблеме: для каких кривых Γ оператор S_Γ ограничен в $L_2(\Gamma)$? Для этого необходимо, чтобы Γ была *карлесоновской кривой*, т. е. для любого круга $B(z, r)$ радиуса r с центром в точке $z\in\mathbf{C}$ длина $\Gamma\cap B(z, r)$ не должна превышать $C\cdot r$.

До недавнего времени известные достаточные условия ограниченности оператора S_Γ были очень далеки от необходимых. Например, было доказано, что $S_\Gamma\in\mathscr{L}(L_p(\Gamma,\rho))$, если Γ — ляпуновская или радоновская кривая и ρ — степенной вес на Γ вида

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{m}|t-t_k|^{\beta_k},\quad -1<\beta_k<p-1\ \ (k=1,\ldots,m) \qquad (3.6)$$

(см. [13], [36], [37]; [70]). При этом Γ называется *ляпуновской* (*радоновской*) *кривой*, если в ее параметрическом представлении

$$x(s)=x(0)+\int\limits_0^s\cos\theta(\sigma)\,d\sigma,\quad y(s)=y(0)+\int\limits_0^s\sin\theta(\sigma)\,d\sigma,$$

где s $(0\leqslant s\leqslant\gamma)$ — длина дуги, угол $\theta(\delta)$, определяемый в каждой точке s с точностью до кратного 2π, может быть выбран так, чтобы функция θ на $[0,\gamma]$, удовлетворяла условию Гёльдера (имела ограниченную вариацию).

Совсем недавно задача об ограниченности оператора S_Γ была решена полностью.

В первую очередь надо отметить следующий замечательный результат, доказанный Кальдероном (1977) для липшицевых кривых Γ с достаточно малой липшицевой постоянной. Речь идет о кривой, локально представимой в виде $z(x)=x+i\varphi(x)$ $(x\in\mathbf{R})$, где вещественная функция φ удовлетворяет условию

$$|\varphi(x)-\varphi(x')|\leqslant M|x-x'|.$$

Теорема Кальдерона. Для заданной липшицевой кривой и произвольного $\varepsilon>0$ рассмотрим оператор

$$(A_{\varphi,\varepsilon}f)(x):=\int\limits_{|x-y|>\varepsilon}\frac{f(y)}{x-y+i(\varphi(x)-\varphi(y))}\,dy,\quad x\in\mathbf{R}.$$

Тогда:

а) оператор $A_\varphi f:=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}A_{\varphi,\varepsilon}f$ ограничен в $L_p(\mathbf{R})$, $1<p<\infty$;

b) если $f\in L_p(\mathbf{R})$, $1\leqslant p<\infty$, то для почти всех $x\in\mathbf{R}$ существует предел $(A_\varphi f)(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(A_{\varphi,\varepsilon}f)(x)$;

c) оператор A_φ слабого типа (1, 1), т. е.

$$m\{x\in\mathbf{R}:|(A_\varphi f)(x)|>\lambda\}\leqslant\frac{c}{\lambda}\int\limits_{\mathbf{R}}|f(x)|\,dx\quad\forall f\in L_1(\mathbf{R}),$$

где $\lambda>0$ и m — мера Лебега.

Упомянутое выше ограничение Кальдерона на постоянную M удалось снять Койфману, Макинтошу, Мейеру (1982) и Давиду (1982, 1984) (см. также [51] и Мурай (1983)). Существенным моментом в доказательстве теоремы Кальдерона являются L_2-оценки так называемых *коммутаторов Кальдерона*

$$T(h,\varphi)f(x):=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|>\varepsilon}h\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right]\frac{f(y)}{x-y}\,dy.$$

К таким коммутаторам (с функциями $h(x)=x^n$) приводит разложение оператора $A_{\lambda\varphi}$ по степеням λ. Они также важны для теории псевдодифференциальных уравнений. Справедливо следующее утверждение, полученное Койфманом, Давидом и Мейером (1981, 1983).

Теорема (*о коммутаторе*). Пусть $\varphi'\in L_\infty(\mathbf{R})$ и $h\in C^\infty(\mathbf{R})$. Тогда $T(h,\varphi)\in\mathscr{L}(L_p(\mathbf{R}))$, $1<p<\infty$.

1.2.2. Опираясь на теорему Кальдерона, Давид (1982) нашел простое доказательство ограниченности в L_2 сингулярного оператора Коши на любой карлесоновской кривой Г; отсюда стандартным путем выводится следующая

Теорема. Пусть Г — карлесоновская кривая. Тогда $S_\Gamma\in\mathscr{L}(L_p(\Gamma,\rho))$, $1<p<\infty$, в том и только том случае, когда вес ρ на Г удовлетворяет условию

$$\|\rho^{1/p}\|_{L_p(\Gamma(z,r))}\|\rho^{-1/p}\|_{L_{p'}(\Gamma(z,r))}\leqslant Cr\qquad(A_p^\Gamma)$$

для любых $z\in\Gamma$ и $r>0$, где $\Gamma(z,r)=\Gamma\cap B(z,r)$.

Заметим, что если выполнены условия теоремы и Г замкнута, то $S_\Gamma^2=I$.

По поводу результатов пп. 1.2.1 и 1.2.2 см. обзоры [15], [64].

1.2.3. Пусть Г — контур, состоящий из конечного числа непересекающихся ляпуновских кривых и Γ_0 — единичная окружность. Тогда для нормы $\|S_\Gamma\|_p$ оператора $S_\Gamma\in\mathscr{L}(L_p(\Gamma))$, $1<p<\infty$, справедлива формула

$$\|S_{\Gamma_0}\|_p=\|H\|_p=|||S_\Gamma|||_p=\begin{cases}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2p}, & 2\leqslant p<\infty,\\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2p}, & 1<p\leqslant 2.\end{cases}$$

Более того, если $\Gamma\neq\Gamma_0$, то $\|S_\Gamma\|_2>\|S_{\Gamma_0}\|_2=1$. Следовательно, норма $\|S_\Gamma\|_p$ существенно зависит от формы контура Г, в отличие от существенной нормы $|||S_\Gamma|||_p$. Эти результаты принадлежат Котляру (1955), И. Ц. Гохбергу, Н. Я. Крупнику (1968) и Пихоридесу (1972). Обобщения на случай пространств $L_p(\Gamma, \rho)$ со степенным весом ρ были получены И. Э. Вербицким и Н. Я. Крупником (1980) (см. также [11], [23]).

1.2.4. Если $f \in C^\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha<1$, т. е. $|f(t)-f(\tau)| \leqslant \leqslant C|t-\tau|^\alpha$ $(t, \tau \in \Gamma)$, то из определения непосредственно следует, что $(S_\Gamma f)(t)$ существует во всех внутренних точках t кривой Γ, причем

$$(S_\Gamma f)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)-f(t)}{\tau - t}\,d\tau + f(t)\,(S_\Gamma 1)(t).$$

В последней формуле первый интеграл справа — абсолютно сходящийся. Более того, $S_\Gamma 1 = 1$, если Γ — замкнутая кривая с положительной ориентацией, и $(S_\Gamma 1)(t) = 1 + \frac{1}{\pi i}\log\frac{b-t}{a-t}$, если Γ — простая разомкнутая дуга с концами a и b, а $\log(z-t)$ — ветвь логарифма, однозначная и непрерывная на комплексной плоскости с разрезом, соединяющим точку t $(t \neq a,\ t \neq b)$ с бесконечно удаленной точкой и расположенным справа от Γ.

В частности, если Γ — замкнутая ляпуновская кривая, то $S_\Gamma \in \mathcal{L}(C^\alpha(\Gamma))$, $0<\alpha<1$ (*теорема Племеля—Привалова*). Обобщение последнего результата на случай весовых пространств Гёльдера было получено Р. В. Дудучавой (1970).

1.2.5. С сингулярным интегралом Коши тесно связан так называемый *сингулярный интеграл Гильберта* (или *оператор гармонического сопряжения*)

$$(\tilde{H}g)(s) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\, g(\sigma)\, d\sigma, \quad -\pi \leqslant s \leqslant \pi, \tag{3.7}$$

который также понимается в смысле главного значения. Этот интеграл играет важную роль в вопросах сходимости тригонометрических рядов, а также в теории общих ортогональных рядов.

Если функция $g \in C^\alpha[-\pi, \pi]$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ является 2π-периодической, то интеграл (3.7) существует при любом s и может быть представлен в виде абсолютно сходящегося интеграла

$$(\tilde{H}g)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,[g(\sigma) - g(s)]\, d\sigma.$$

Пусть Γ_0 — единичная окружность и $t = e^{is}$, $\tau = e^{i\sigma} \in \Gamma_0$ $(-\pi \leqslant s, \sigma \leqslant \pi)$. Полагая $\tilde{f}(s) := f(e^{is})$ для заданной на Γ_0 функции f, установим связь между операторами S_{Γ_0} и $\tilde{H}$:

$$(S_{\Gamma_0} f)(t) = \frac{1}{i}(\tilde{H}\tilde{f})(s) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\sigma)\, d\sigma.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что оператор $\tilde{H}$ ограничен в пространствах $C^{\alpha}(\Gamma_0)$ $(0<\alpha<1)$ и $L_p(\Gamma_0, \rho)$ $(1<p<\infty)$, если вес ρ на Γ_0 удовлетворяет условию $(A_p^{\Gamma_0})$.

1.2.6. Отметим, наконец, что тесная связь между сингулярным интегралом Коши и теорией аналитических функций выявляется также в известной теореме И. И. Привалова (1950) о предельных значениях интеграла типа Коши.

Теорема Привалова. Пусть $f\in L_1(\Gamma)$. Интеграл типа Коши

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau \quad (z\notin\Gamma) \qquad (3.8)$$

имеет п. в. на Γ конечные угловые граничные значения $F^{\pm}(t)$ слева (справа) в том и только том случае, если интеграл (3.5) п. в. на Γ существует и конечен. При этом п. в. на Γ имеют место *формулы Сохоцкого—Племеля*

$$F^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}(S_{\Gamma}f)(t).$$

Эта теорема имеет фундаментальное значение для многих приложений одномерных сингулярных интегралов.

По поводу материала пп. 1.2.3—1.2.6 см. [11], [23], [37], [70].

§ 2. Сингулярные интегральные уравнения

Будем теперь рассматривать уравнение вида

$$(Au)(t):=c(t)u(t)+d(t)(S_{\Gamma}u)(t)+(Tu)(t)=f(t) \qquad (3.9)$$

в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, $1<p<\infty$. При этом предполагается, что Γ и ρ, удовлетворяют условиям теоремы пункта 1.2.2; c и $d\in L_{\infty}(\Gamma)$ — заданные функции, которые называются *коэффициентами* уравнения (3.9); T — компактный оператор в $L_p(\Gamma, \rho)$; f — заданная функция из $L_p(\Gamma, \rho)$.

Оператор $A\in\mathscr{L}(L_p(\Gamma, \rho))$, определяемый левой частью уравнения (3.9), называется *общим* (или *полным*) *сингулярным интегральным оператором*; если $T=0$, то оператор A называется *простейшим* (или *характеристическим*). Часто бывает удобным представить простейший сингулярный оператор $A_0=cI+dS_{\Gamma}$ в виде

$$A_0=aP_{\Gamma}+bQ_{\Gamma};\ P_{\Gamma}=\frac{1}{2}(I+S_{\Gamma}),\ Q_{\Gamma}=I-P_{\Gamma},$$

где $a=c+d$, $b=c-d$.

К настоящему времени наиболее развита теория сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Этот случай, главным образом, изучается в § 2 и

§ 3. Другие классы коэффициентов будут рассматриваться в последующих параграфах.

2.1. Случай непрерывных коэффициентов. Будем сначала считать, что Γ — замкнутая кривая и $c, d \in C(\Gamma)$. Тогда $S_\Gamma^2 = I$, P_Γ и Q_Γ — дополнительные проекторы и, как уже отмечалось, операторы S_Γ, P_Γ и Q_Γ некомпактны.

2.1.1. Существенную роль в теории сингулярных уравнений играет компактность коммутатора $K_c u := cS_\Gamma u - S_\Gamma cu$, которая является следствием того, что $\|K_c - K_{c_n}\| \to 0$ при $n \to \infty$ для произвольной последовательности функций $c_n \in C^\alpha(\Gamma)$ $(0 < \alpha < 1)$, равномерно сходящейся к c и $K_{c_n} \in \mathscr{K}(L_p(\Gamma, \rho))$.

Важнейшим понятием этой теории является понятие символа, впервые введенное С. Г. Михлиным [28] для рассматриваемого здесь случая. *Символом* общего сингулярного оператора A называется функция

$$A(t, \theta) = c(t) + \theta d(t) \quad (t \in \Gamma), \tag{3.10}$$

где θ — переменная, принимающая два значения: $\theta = \pm 1$. Его можно отождествить с парой функций $\{a, b\}$. Из компактности коммутаторов K_c и K_d непосредственно вытекает, что сумме и произведению двух сингулярных операторов A_1 и A_2 отвечает соответственно сумма и произведение их символов; более того, коммутатор $[A_1, A_2]$ компактен. В частности, если символ *не вырождается*[1], т. е. $A(t, \theta) \neq 0$ при любых $t \in \Gamma$ и $\theta = \pm 1$, или, что то же самое, если

$$a(t) b(t) = c^2(t) - d^2(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{3.11}$$

то сингулярный оператор $B := a^{-1} P_\Gamma + b^{-1} Q_\Gamma$ является регуляризатором оператора A и, следовательно, A нётеров. Важным дополнением к этим свойствам сингулярного оператора является следующая теорема, доказанная И. Ц. Гохбергом, С. Г. Михлиным, И. Б. Симоненко и Б. В. Хведелидзе (см., например, [70]).

Теорема. Для того чтобы оператор $A_0 = aP_\Gamma + bQ_\Gamma$ был полунётеровым в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.11). Если это условие удовлетворено, то A_0 обратим, обратим только слева или обратим только справа в зависимости от того, будет ли число $\varkappa = \operatorname{ind} a/b$ равным нулю, положительным или отрицательным; более того,

$$\dim \ker A_0 = \max(-\varkappa, 0), \quad \dim \ker A_0^* = \max(\varkappa, 0). \tag{3.12}$$

---

[1] В этом случае сингулярный оператор A часто называют *оператором нормального типа* или *эллиптическим*.

Здесь через $\operatorname{ind} a/b$ обозначается число оборотов ориентированной кривой $V(a/b) := \{a(t)/b(t) : t\in\Gamma\}$ вокруг начала координат; точнее говоря,

$$\operatorname{ind} a/b := \frac{1}{2\pi i}\int_V z^{-1}dz.$$

Заметим, что из (3.12) и теоремы п. 3.4.4, гл. 1 вытекает *формула для вычисления индекса общего сингулярного оператора*:

$$\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} A_0 = -\varkappa.$$

Эта формула впервые была получена Нётером (1921).

Все результаты, сформулированные в настоящем разделе, верны и для пространства $C^\alpha(\Gamma), 0<\alpha<1$, если только предположить, что a и b принадлежат этому пространству, что в нем оператор T компактен и что Γ — ляпуновская замкнутая кривая (см. [31]).

2.1.2. Обозначим через $\tilde{C}(\Gamma)$ банахову алгебру функций вида (3.10), где $c, d\in C(\Gamma)$, с нормой

$$\| A(t, \theta)\| = \max_{t\in\Gamma, \theta=\pm 1} |c(t) + \theta d(t)|.$$

Имеет место оценка $\|A(t, \theta)\| \leqslant \|A\|$, где справа стоит норма сингулярного оператора $A\in\mathcal{L}(L_p(\Gamma, \rho))$. В самом деле, в противном случае оператор $B=I-\lambda_0 A$ обратим для некоторого $\lambda_0 = 1/A(t_0, \theta_0)$; с другой стороны, символ оператора B равен нулю в точке (t_0, θ_0), что противоречит теореме п. 2.1.1.

Из доказанного неравенства и результатов п. 2.1.1 вытекает следующая теорема, установленная И. Ц. Гохбергом (1952, 1964).

Теорема. Сингулярные операторы вида (3.9) с непрерывными коэффициентами образуют замкнутую подалгебру $\mathfrak{A}$ банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_k(\Gamma, \rho))$. Факторалгебра $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathcal{K}(L_p(\Gamma, \rho))$ изоморфна алгебре $\tilde{C}(\Gamma)$.

Изоморфизм $A_0+T\to A_0(t, \theta)$ является реализацией гельфандова гомоморфизма (гл. 1, см. п. 1.4 и 1.6). При $p=2$ и $\rho=1$ этот $*$-изоморфизм является изометрическим.

2.2. Случай кусочно-непрерывных коэффициентов. Пусть теперь Γ — ориентированный контур, состоящий из конечного числа непересекающихся замкнутых ляпуновских кривых. Обозначим через $PC(\Gamma)$ алгебру всех кусочно-непрерывных функций на Γ. Будем рассматривать уравнение (3.9) с коэффициентами $c, d\in PC(\Gamma)$ в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$, $1<p<\infty$, со степенным весом вида (3.6). Тогда утверждения, изложенные в предыдущем пункте, перестают быть верными; это связано с тем, что коммутатор K_c ($c\in PC(\Gamma)$) компактен в том и только том случае, если $c\in C(\Gamma)$. Результаты предыдущего пункта допускают, однако, следующее обобщение.

Положим $\delta(t)=2\pi/p$ при $t\in\Gamma\setminus\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, $\delta(t_k)=2\pi(1+\beta_k)/p$, $\gamma(t)=\pi-\delta(t)$ и

$$f(t, \mu)=\begin{cases}\sin(\gamma\mu)\sin^{-1}\gamma\exp(i\gamma(\mu-1)) & \text{при } \delta(t)\neq\pi,\\ \mu & \text{при } \delta(t)=\pi.\end{cases}$$

Каждой функции $a\in PC(\Gamma)$ поставим в соответствие функцию $a_{p\rho}:\Gamma\times[0, 1]\to\mathbf{C}$, определенную равенством
$a_{p\rho}(t, \mu):=a(t+0)f(t, \mu)+a(t-0)(1-f(t, \mu))$ $(t\in\Gamma,\ 0\leqslant\mu\leqslant 1)$. Множество $V_{p\rho}(a)$ значений функции $a_{p\rho}$ является объединением множества значений функции a и некоторых дуг окружностей и отрезков, а также отрезков, соединяющих точки $a(t_k-0)$ и $a(t_k+0)$ $(k=1, \ldots, m)$.

Тогда теорема п. 2.1.1 остается в силе, если условие (3.11) заменить условиями

$$b(t\pm 0)\neq 0,\quad (a/b)_{p\rho}(t, \mu)\neq 0,\quad (t, \mu)\in\Gamma\times[0, 1] \tag{3.13}$$

и положить

$$\varkappa=\mathrm{ind}_{p\rho}a/b:=\mathrm{ind}\,V_{p\rho}(a/b).$$

В такой общности этот результат был установлен И. Ц. Гохбергом и Н. Я. Крупником (1969). При дополнительных ограничениях подобные результаты были получены ранее Б. В. Хведелидзе(1956), Шамиром (1960), Уидомом (1960) и Девинатцом (1964). Более общие сингулярные интегральные операторы вида

$$(Au)(t)=a(t)u(t)+\int_\Gamma b(t, \tau)(\tau-t)^{-1}u(\tau)\,d\tau,$$

где a, $b\in PC$, в пространствах $L_p(\Gamma, \rho)$ изучались А. П. Солдатовым (1978) и Н. Я. Крупником (1984).

Оказывается, на алгебрах, порожденных сингулярными интегральными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами, нельзя ввести скалярный символ (см. [23]). Однако на таких алгебрах можно ввести матричный символ (см. § 3.3).

2.3. Случай разомкнутых кривых. Будем теперь считать, что Γ — ориентированный контур, состоящий из конечного числа непересекающихся замкнутых и разомкнутых ляпуновских кривых. Этот случай можно свести к рассмотренному в предыдущем разделе. Для этого дополним Γ до замкнутого контура $\tilde{\Gamma}$, а коэффициенты a и b $(\in PC(\Gamma))$ сингулярного оператора $A=aP_\Gamma+bQ_\Gamma$ продолжим до функций $\tilde{a}$, $\tilde{b}\in PC(\tilde{\Gamma})$, полагая

$$\tilde{a}(t)=\begin{cases}a(t) & \text{при } t\in\Gamma,\\ 1 & \text{при } t\in\tilde{\Gamma}\setminus\Gamma,\end{cases}$$

$$\tilde{b}(t)=\begin{cases}b(t) & \text{при } t\in\Gamma,\\ 1 & \text{при } t\in\tilde{\Gamma}\setminus\Gamma.\end{cases} \tag{3.14}$$

Оператор $A\in\mathscr{L}(L_p(\Gamma, \rho))$ нормально разрешим ($\Phi_\pm$-оператор, обратим хотя бы с одной стороны) в том и только том случае, когда сингулярный оператор $\tilde{A}=\tilde{a}P_{\tilde{\Gamma}}+\tilde{b}Q_{\tilde{\Gamma}}\in\mathscr{L}(L_p(\tilde{\Gamma}, \rho))$ обладает тем же свойством. Более того,

$$\ker A=\ker\tilde{A}, \quad \operatorname{coker} A=\operatorname{coker}\tilde{A}.$$

Это непосредственно вытекает из следующих простых соображений. Пространство $L_p(\tilde{\Gamma}, \rho)$, очевидно, можно представить как прямую сумму $L_p(\Gamma, \rho)\dotplus L_p(\tilde{\Gamma}\setminus\Gamma, \rho)$. Если через $\tilde{P}$ обозначить проектор пространства $L_p(\tilde{\Gamma}, \rho)$ на $L_p(\Gamma, \rho)$ вдоль $L_p(\tilde{\Gamma}\setminus\Gamma, \rho)$, то, как легко видеть справедливы соотношения

$$A=\tilde{A}|_{L_p(\Gamma,\rho)}, \quad \tilde{A}=(I+\tilde{P}\tilde{A}\tilde{Q})(A\tilde{P}+\tilde{Q}), \tag{3.15}$$

где $\tilde{Q}=I-\tilde{P}$; при этом $(I+\tilde{P}\tilde{A}\tilde{Q})^{-1}=I-\tilde{P}\tilde{A}\tilde{Q}$. В частности, из (3.15) следует, что если $\tilde{B}$ — левый (правый) обратный или регуляризатор оператора $\tilde{A}$, то $B:=\tilde{P}\tilde{B}|_{L_p(\Gamma,\rho)}$ будет левым (правым) обратным или, соответственно, регуляризатором оператора A.

Заметим, что все результаты настоящего параграфа дословно переносятся на операторы вида $P_\Gamma aI+Q_\Gamma bI$. Эффективные методы решения сингулярных интегральных уравнений с кусочно-гёльдеровскими коэффициентами подробно рассматриваются в книгах [8] и [31] (по этому вопросу см. также § 4).

2.4. Краевая задача Римана—Гильберта. Пусть Γ — замкнутый контур. Используя формулы Сохоцкого—Племеля, можно представить уравнение (3.9) при $T=0$ в форме

$$a(t)\Phi^{+}(t)=b(t)\Phi_{+}(t)+f(t) \quad (t\in\Gamma), \tag{3.16}$$

где $\Phi^{\pm}(\in L_p(\Gamma, \rho))$ — граничные значения интеграла типа Коши (3.8) с плотностью $u\in L_p(\Gamma, \rho)$. Таким образом, сингулярное уравнение (3.9) (при $T=0$) эквивалентно следующей классической задаче теории функций (называемой разными авторами *задачей Римана—Гильберта*, *Римана*, *Гильберта* или *задачей сопряжения*):

Найти функцию Φ, представимую в виде интеграла типа Коши (1.8) с плотностью $u\in L_p(\Gamma, \rho)$, граничные значения $\Phi^{\pm}$ которой почти всюду на Γ удовлетворяют условию (3.16).

Решение этой краевой задачи (в более общей постановке) будет рассматриваться в § 4 (по этому поводу см. также обзор [37]).

§ 3. Сингулярные операторы с матричными коэффициентами и порожденные ими банаховы алгебры

В этом параграфе будем считать, что Γ — ориентированный контур, состоящий из конечного числа непересекающихся замкнутых и разомкнутых ляпуновских кривых, а ρ — степенной вес на Γ вида (3.6).

3.1. В дальнейшем будет применяться следующая система обозначений.

Если E — линейное пространство, то E^n (где n — натуральное число) обозначает множество всех n-мерных векторов с компонентами из E, а $E^{n\times n}$ — множество всех квадратных матриц порядка n с элементами из E.

Пусть E — банахово (гильбертово) пространство. Тогда E^n можно превратить в банахово (гильбертово) пространство, взяв, например, в качестве нормы (скалярного произведения) векторов из E^n сумму норм (скалярных произведений отдельных компонент. Более того, норму матрицы $A=(a_{jk})_1^n\in E^{n\times n}$ можно определить соотношением

$$\|A\|=n\max_{j,k}\|a_{j,k}\|.$$

В случае, когда E банахова алгебра, пространство $E^{n\times n}$ с этой нормой также будет банаховой алгеброй.

Без труда проверяется, что $\mathscr{L}(E^n)=\mathscr{L}(E)^{n\times n}$, $\mathscr{K}(E^n)=\mathscr{K}(E)^{n\times n}$; каждый оператор $A\in\mathscr{L}(E^n)$ представим в виде $A=(a_{jk})_1^n$, где $a_{jk}\in\mathscr{L}(E)$.

Оказывается, при некоторых дополнительных ограничениях за нётеровы свойства оператора $A\in\mathscr{L}(E^n)$ отвечает его определитель $\det A\in\mathscr{L}(E)$:

Теорема. Пусть $A=(a_{jk})_1^n\in\mathscr{L}(E^n)$, причем $[a_{jk}, a_{jl}]\in\mathscr{K}(E)$. Тогда

1. $A\in\Phi_\pm(E^n)\Leftrightarrow\det A\in\Phi_\pm(E)$.

2. Оператор A имеет левый (правый) регуляризатор тогда и только тогда, когда этим свойством обладает оператор $\det A\in\mathscr{L}(E)$[1].

Теорема. Пусть $\mathfrak{A}$ — подалгебра $\mathscr{L}(E)$, обладающая следующими свойствами: $\mathscr{K}(E)\subseteq\mathfrak{A}$; $[A,B]\in\mathscr{K}(E)$ $\forall A,B\in\mathfrak{A}$; множество $\Phi(E)\cap\mathfrak{A}$ плотно $\mathfrak{A}$. Если $A\in\mathfrak{A}^{n\times n}\cap\Phi(E^n)$, то

$$\operatorname{Ind} A=\operatorname{Ind}\det A.$$

Как показывает пример многомерного сингулярного интегрального оператора с непрерывным символом, рассматриваемого в $L_p(\mathbf{R}^m)$, теорема 2 перестает быть верной, если $\Phi(E)\cap\mathfrak{A}$ не плотно в $\mathfrak{A}$ (см. гл. 4). Первая теорема была доказана Н. Я. Крупником (1965) для случая Φ-операторов и Келером, Зильберманном (1973) для общего случая. Вторая теорема принадлежит Зильберманну (1973). Следующая теорема доказана А. С. Маркусом и И. А. Фельдманом (1977).

Теорема. Пусть H — гильбертово пространство и $A=(a_{jk})_1^n\in\Phi(H^n)$, причем $[a_{jk}, a_{jl}]$ — ядерные операторы. Тогда

$$\operatorname{Ind} A=\operatorname{Ind}\det A.$$

---

[1] При составлении определителя $\det A$ порядок сомножителей не существенен, так как все получающиеся определители отличаются друг от друга компактным слагаемым.

3.2. Рассмотрим в пространстве $L_p^n(\Gamma, \rho) := [L_p(\Gamma, \rho)]^n$ сингулярный оператор вида $A = aP + bQ$, где $a, b \in [L_\infty(\Gamma)]^{n \times n}$, $P = (P_\Gamma \delta_{jk})_1^n$ и $Q = I - P$.

Согласно теореме Ф. Рисса, произвольный непрерывный линейный функционал в $L_p^n(\Gamma, \rho)$ можно представить в виде

$$\langle u, v \rangle = \int_\Gamma u(t)\, v(t)\, dt; \quad u \in L_p^n(\Gamma, \rho), \quad v \in L_{p'}^n(\Gamma, \rho^{1-p'}), \qquad (3.17)$$

так что формула (3.17) определяет дуальную систему. Нетрудно показать, что при этом справедливо соотношение

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^T v \rangle,$$

где $A^T = Pb^T + Qa^T$ и a^T — транспонированная матрица для a. Таким образом, A^T является транспонированным оператором для A относительно дуальной системы (3.17).

Если, в частности, коэффициенты a и b непрерывны или кусочно-непрерывны и A является нётеровым оператором в $L_p^n(\Gamma, \rho)$, то

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{Ind} A^T.$$

В этом случае необходимые и достаточные условия разрешимости сингулярного уравнения $Au = f$ принимают вид

$$\langle f, v_k \rangle = 0, \quad k = 1, \ldots, \alpha(A^T),$$

где $v_k \in L_{p'}^n(\Gamma, \rho^{1-p'})$ — линейно независимые решения уравнения $A^T v = 0$ (см. гл. 1, п. 3.7).

Теорема (И. Б. Симоненко, 1964). Пусть $a, b \in [L_\infty(\Gamma)]^{n \times n}$. Если $aP + bQ$ $(Pa + Qb)$ является Φ_+- или Φ_--оператором, то

$$\operatorname{ess\,inf} |\det a(t)| > 0$$

и

$$\operatorname{ess\,inf} |\det b(t)| > 0;$$

в случае $n = 1$ он обратим с соответствующей стороны.

3.3. Предположим сначала, что Γ состоит только из замкнутых кривых и $a, b \in [C(\Gamma)]^{n \times n}$. В этом случае естественно матрицу-функцию, определенную формулой (3.10) при $a = c + d$, $b = c - d$, называть *символом* полного сингулярного оператора $A = aP + bQ + T$ $(T \in \mathscr{K}(L_p^n(\Gamma, \rho)))$. Из результатов п. 3.1 и п. 2.1 сразу вытекает

Теорема. Для того чтобы оператор $A = aP + bQ + T$ был Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве $L_p^n(\Gamma, \rho)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\det a(t) \neq 0, \quad \det b(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma. \qquad (3.18)$$

Если они выполнены, то оператор $B = a^{-1}P + b^{-1}Q$ является регуляризатором оператора A и имеет место формула

$$\operatorname{Ind} A = \operatorname{ind}[\det b/\det a], \qquad (3.19)$$

где $(\det a)(t) = \det a(t)$.

Более того, справедлива теорема, аналогичная теореме п. 2.1.2.

Формула для индекса (3.19) впервые была установлена Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа (1943) для случая пространства $[C^\alpha(\Gamma)]^{n\times n}$ $(0<\alpha<1)$. Сформулированная здесь теорема была доказана в работах Жиро (1939), С. Г. Михлина (1948), И. Ц. Гохберга (1952, 1964), Б. В. Хведелидзе (1956), Г. Ф. Манджавидзе (1958) и И. Б. Симоненко (1961).

3.4. Перейдем к случаю контура Γ, состоящего из замкнутых и разомкнутых ляпуновских кривых. Через $\mathcal{K}$ обозначим идеал всех компактных операторов в $L_p^n(\Gamma,\rho)$, а через $\mathfrak{A}$ — наименьшую подалгебру алгебры $\mathcal{L}(L_p^n(\Gamma,\rho))$, содержащую все сингулярные операторы вида $aP+bQ$ с коэффициентами a, $b\in[PC(\Gamma)]^{n\times n}$. Оказывается, в этом случае алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ изоморфна некоторой алгебре матриц-функций порядка $2n$. Более того, символ существенно зависит от числа p и от веса.

Обозначим через $t_1,\dots,t_l$ и $t_{l+1},\dots,t_{2l}$ соответственно начала и концы всех разомкнутых дуг контура Γ, а через $t_{2l+1},\dots,t_m$ — некоторые фиксированные точки на Γ, не совпадающие с точками $t_1,\dots,t_{2l}$. Пусть ρ — степенной вес вида (3.6), $f(t,\mu)$ — функция, определенная в п. 2.2, а $h(t,\mu)=\sqrt{f(t,\mu)(1-f(t,\mu))}$. Образуем новый контур $\tilde{\Gamma}$, полученный из Γ добавлением петель и отрезков следующим образом: каждая точка t_k $(k=2l+1,\dots,m)$ раздваивается на t_k^- и t_k^+ и к Γ добавляется петля, соединяющая точки t_k^- и t_k^+; в каждой точке t_k $(k=1,\dots,2l)$ к контуру Γ добавляется отрезок. Будем считать, что вдоль каждой из добавленных петель и всех отрезков параметр μ меняется от нуля до единицы.

Символом оператора $A=aP+bQ$ $(a,\ b\in[PC(\Gamma)]^{n\times n})$, действующего в $L_p^n(\Gamma,\rho)$, называется матрица-функция $\mathcal{A}$, определенная на $\Gamma\times[0,1]$ по правилу:

$$\mathcal{A}(t,\mu)=\begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & b(t)\end{pmatrix} \text{ при } t\in\Gamma,\ t\neq t_k\ (k=1,\dots,m);$$

$$\mathcal{A}(t_k,\mu)=\begin{pmatrix} f(t_k,\mu)a_k^-+(1-f(t_k,\mu))\,b_k^- & 0 \\ 0 & b_k^-\end{pmatrix},\quad k=1,\dots,l;$$

$$\mathcal{A}(t_k,\mu)=\begin{pmatrix} (1-f(t_k,\mu))\,a_k^-+f(t_k,\mu)\,b_k^- & 0 \\ 0 & b_k^-\end{pmatrix},\quad k=l+1,\dots,2l;$$

$$\mathcal{A}(t_k,\mu)=\begin{pmatrix} f(t_k,\mu)\,a_k^++(1-f(t_k,\mu))\,a_k^- & h(t_k,\mu)\left(b_k^+-b_k^-\right) \\ h(t_k,\mu)\,(a_k^+-a_k^-) & (1-f(t_k,\mu))\,b_k^++f(t_k,\mu)\,b_k^-\end{pmatrix},$$

$k=2l+1,\dots,m$; при этом $a_k^\pm=a(t_k\pm0)$, $b_k^\pm=b(t_k\pm0)$.

Чтобы построить алгебру $\mathfrak{A}$ естественно ввести в рассмотрение совокупность $\mathfrak{A}_0$ всех операторов вида

$$A=\sum_{j=1}^{k} A_{j1}A_{j2}\ldots A_{jr}, \qquad (3.20)$$

где $A_{jl}=a_{jl}P+b_{jl}Q$; a_{jl}, $b_{jl}\in[PC(\Gamma)]^{n\times n}$. *Символом* оператора $A\in\mathfrak{A}_0$ назовем матрицу-функцию

$$\mathcal{A}=\sum_{j=1}^{k}\mathcal{A}_{j1}\mathcal{A}_{j2}\ldots\mathcal{A}_{jr},$$

где $\mathcal{A}_{jl}$ — определенный выше символ оператора A_{jl}. Тогда для элементов α_{uv} символа $\mathcal{A}(t,\mu)=(\alpha_{uv}(t,\mu))_{u,v=1}^{2n}$ имеет место основная оценка (ср. с п.2.1.2)

$$\max_{t\in\Gamma,0<\mu<1}|\alpha_{uv}(t,\mu)|\leqslant C_{p\rho}|||A|||, \qquad (3.21)$$

где

$$|||A|||=\inf_{T\in\mathcal{K}}\|A+T\| \qquad (A\in\mathfrak{A}_0).$$

Из неравенства (3.21), в частности, вытекает, что символ оператора $A\in\mathfrak{A}_0$ не зависит от способа его представления в виде (3.20); более того, сумме и произведению двух операторов из $\mathfrak{A}_0$ отвечают соответственно сумма и произведение их символов.

Искомой алгеброй $\mathfrak{A}$ является банахова алгебра, полученная замыканием множества $\mathfrak{A}_0$ в алгебре $\mathcal{L}(L_p^n(\Gamma,\rho))$. Если (A_ν) — последовательность операторов из $\mathfrak{A}_0$, сходящаяся (по норме) к оператору $A\in\mathfrak{A}$, а $\mathcal{A}_\nu=\left(\alpha_{uv}^{(\nu)}\right)_{u,v=1}^{2n}$ — символы операторов A_ν, то, в силу (3.21), последовательность $(\alpha_{uv}^{(\nu)}(t,\mu))$ $(u,v=1,\ldots,2n)$ сходится равномерно относительно $(t,\mu)\in\Gamma\times[0,1]$ к функции $\alpha_{uv}(t,\mu)$. Матрица-функция $\mathcal{A}(t,\mu)=(\alpha_{uv}(t,\mu))_{u,v=1}^{2n}$ называется *символом* оператора (легко видеть, что он не зависит от выбора последовательности (A_ν), сходящейся к A). Можно показать, что $\mathcal{K}\subseteq\mathfrak{A}$; более того, символ осуществляет изоморфизм факторалгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ на алгебру $\mathcal{S}$, состоящую из символов всех операторов алгебры $\mathfrak{A}$. В случае $p=2$ алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ является C^*-алглеброй (некоммутативной) и символ есть изометрический $*$-изоморфизм.

Как показывает следующая теорема, в терминах символа формулируются условия нётеровости оператора $A\in\mathfrak{A}$. Для формулировки этого утверждения нам понадобится еще одно определение.

Запишем символ оператора $A\in\mathfrak{A}_0$ в виде $\mathcal{A}(t,\mu)=(c_{uv}(t,\mu))_{u,v=1}^{2}$. Нетрудно проверить, что если $\det\mathcal{A}(t,\mu)\neq0$, то $0\neq\det(c_{22}(t,1)\,c_{22}(t,0))$ и функция

$$\Delta_A(t,\mu):=\det\mathcal{A}(t,\mu)/\det(c_{22}(t,1)\,c_{22}(t,0))$$

непрерывна на $\tilde{\Gamma}$. Через $\operatorname{ind}\Delta_A$ обозначим число оборотов кривой $z=\Delta_A(t,\mu)$ вокруг точки $z=0$, когда точка (t,μ) пробегает контур $\tilde{\Gamma}$ в положительном направлении. Пусть теперь $A\in\mathfrak{A}$, $\det\mathcal{A}(t,\mu)\neq 0$ и $A_\nu\to A$ $(A_\nu\in\mathfrak{A}_0)$. Тогда функции Δ_{A_ν} равномерно сходятся к функции Δ_A. Отсюда следует, что $\operatorname{ind}\Delta_{A_\nu}=\operatorname{ind}\Delta_{A_{\nu_0}}$ при всех $\nu\geqslant\nu_0$. Примем следующее определение:

$$\operatorname{ind}\Delta_A=\operatorname{ind}\Delta_{A_{\nu_0}}.$$

Тогда справедлива

Теорема. Для того чтобы оператор $A\in\mathfrak{A}$ был Φ_+- или Φ_--оператором в $L_p^n(\Gamma,\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы его символ не вырождался:

$$\det\mathcal{A}(t,\mu)\neq 0,\quad (t,\mu)\in\Gamma\times[0,1]. \qquad (3.22)$$

Если выполнено условие (3.22), то A является нётеровым оператором в $L_p^n(\Gamma,\rho)$ и его индекс находится по формуле

$$\operatorname{Ind}A=-\operatorname{ind}\Delta_A.$$

Отметим три важных следствия, легко вытекающие из этой теоремы. Пусть Γ — замкнутый контур и $a, b\in PC(\Gamma)$. Тогда

1. $[aI, S_\Gamma]=\frac{1}{2}[aI, P_\Gamma]\in\mathcal{K}(L_p(\Gamma,\rho))\Leftrightarrow a\in C(\Gamma)$.
2. $P_\Gamma aP_\Gamma bP_\Gamma-P_\Gamma abP_\Gamma\in\mathcal{K}(L_p(\Gamma,\rho))\Leftrightarrow a$ и b не имеют общих точек разрыва.
3. $P_\Gamma aP_\Gamma bP_\Gamma-P_\Gamma bP_\Gamma aP_\Gamma\in\mathcal{K}(L_p(\Gamma,\rho))$.

Результаты настоящего пункта, а также их обобщения на случай кусочно-ляпуновского контура с конечным числом точек самопересечения принадлежат И. Ц. Гохбергу и Н. Я. Крупнику (1971). Они были обобщены на случай кусочно-ляпуновского контура, имеющего конечное число угловых точек, в работах Р. В. Дудучавы (1976), Н. Я. Крупника, В. И. Няги (1975) и Костабеля (1980) (см. также [55], где систематически используется аппарат преобразования Меллина). Аналогичные результаты для пространства C^α с весом получил Р. В. Дудучава (1970—1973). Н. Я. Крупник (см. [23]) дал характеризацию банаховых алгебр операторов, обладающих скалярным или матричным символом; он также построил матричный аналог гельфандова гомоморфизма.

§ 4. Факторизация матриц-функций и решение сингулярных интегральных уравнений

С задачей явного решения сингулярных интегральных уравнений по контуру Γ и систем таких уравнений тесно связана задача так называемой факторизации Винера—Хопфа функций (матриц-функций) на Γ.

В этом параграфе будем считать, что Γ — ориентированный замкнутый ляпуновский контур, ограничивающий связную область $G_+ \subset \mathbf{C}$. Не ограничивая общности, будет считать, что $0 \in G_+$.

4.1. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Gamma)$ — банахова алгебра, состоящая из комплексных ограниченных измеримых функций на Γ и содержащая функции $\varphi_1(t) = t$ и $\varphi_2(t) = t^{-1}$. Пусть P_Γ и $Q_\Gamma = I - P_\Gamma$ — проекторы в $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$, введенные в § 2.

Алгебра $\mathfrak{B}$ называется *распадающейся*, если подпространства $P_\Gamma \mathfrak{B}$ и $Q_\Gamma \mathfrak{B}$ $(\subset L_p(\Gamma))$ являются подалгебрами алгебры $\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — распадающаяся алгебра. Положим $\mathfrak{B}_+ = P_\Gamma \mathfrak{B}$, $\mathring{\mathfrak{B}}_- = Q_\Gamma \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_- = \mathfrak{B}_0 + \mathring{\mathfrak{B}}_-$, где $\mathfrak{B}_0$ — одномерное подпространство постоянных функций; тогда $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_+ + \mathring{\mathfrak{B}}_-$. Нетрудно видеть, что P_Γ, $Q_\Gamma \in \mathscr{L}(\mathfrak{B})$.

Факторизацией (точнее, *правой факторизацией*) матрицы-функции $a \in G(\mathfrak{B}^{n\times n})$ в алгебре $\mathfrak{B}$ называется представление ее в форме

$$a = a_- d a_+, \quad d(t) = \operatorname{diag}(t^{\varkappa_1}, \ldots, t^{\varkappa_n}), \tag{3.23}$$

где $a_\pm \in G(\mathfrak{B}_\pm^{n\times n})$, $\varkappa_1 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n$ — целые числа. Числа $\varkappa_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ однозначно определяются матрицей-функцией a; они называются *частными индексами*. Если любая матрица-функции $a \in G(\mathfrak{B}^{n\times n})$ допускает факторизацию в $\mathfrak{B}$, то будем говорить, что алгебра $\mathfrak{B}$ обладает *свойством факторизации*.

Следующие алгебры являются классическими примерами алгебр со свойством факторизации: 1) $C^\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$ (Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа, 1943); 2) W (И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, 1958); 3) *распадающаяся* R-алгебра (так называется алгебра $\mathfrak{B}$, состоящая из непрерывных функций, если она содержит множество всех рациональных функций, не имеющих полюсов на Γ, и если это множество плотно в $\mathfrak{B}$) (И. Ц. Гохберг, 1964). Более общие распадающиеся алгебры со свойством факторизации были исследованы М. С. Будяну и И. Ц. Гохбергом (1968). Обзор классических результатов по теории факторизации дан в книге [49] (см. также [70]).

4.2. При помощи факторизации можно построить обобщенный обратный оператор к сингулярному оператору и таким образом решить сингулярное интегральное уравнение (см. гл. 1, п. 3.2).

Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Gamma)$ — алгебра со свойством факторизации. Рассмотрим сингулярный интегральный оператор $A = aP + bQ \in \mathscr{L}(L_p^n(\Gamma))$ $(1 < p < \infty)$ с коэффициентами a, $b \in G(\mathfrak{B}^{n\times n})$. Положим $c = b^{-1}a$.

Пусть $c = c_- d c_+$ — факторизация матрицы-функции c, причем $d(t) = (t^{\varkappa_j}\delta_{jk})_1^n$. Тогда обобщенным обратным к A является оператор

$$A^{(-1)} = (c_+^{-1}P + c_-Q)(d^{-1}P + Q)\, c_-^{-1} b^{-1}.$$

Более того, справедливы формулы

$$\dim \ker A = -\sum_{\varkappa_j<0} \varkappa_j, \quad \dim \operatorname{coker} A = \sum_{\varkappa_j>0} \varkappa_j.$$

Уравнение

$$Au = f \tag{3.24}$$

разрешимо в $L_p^n(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда вектор $g = c_-^{-1} b^{-1} f =: (g_1, g_2, \ldots, g_n)^T$ удовлетворяет условиям

$$\int_\Gamma t^k g_j(t)\, dt = 0 \ (k = 0, 1, \ldots, \varkappa_j - 1) \tag{3.25}$$

для всех $j = 1, \ldots, n$ таких, что $\varkappa_j > 0$. Если условия (3.25) выполнены, то $u_0 = A^{(-1)} f$ является одним из решений уравнения (3.24).

Общее решение однородного уравнения $Au = 0$ задается формулой

$$u = (c_+^{-1} - c_-)\, dq, \quad q = (q_{-\varkappa_1-1}, \ldots, q_{-\varkappa_n-1})^T,$$

где $q_{-\varkappa_j-1}$ — произвольный полином степени $\leqslant -\varkappa_j - 1$ ($q_{-\varkappa_j-1}(t) \equiv 0$ при $\varkappa_j \geqslant 0$).

Аналогичные результаты получаются для оператора $A = Pa + Qb$, если положить $c = ab^{-1}$. Более того, все эти результаты остаются в силе для пространства $L_p^n(\Gamma, \rho)$.

Метод решения сингулярных интегральных уравнений с применением факторизации их коэффициентов (или, что эквивалентно, путем решения соответствующей задачи сопряжения) был предложен Карлеманом (1922); им же указана идея построения явной факторизации с помощью интегралов типа Коши (при $n = 1$). Метод Карлемана был широко использован и обобщен в работах Ф. Д. Гахова, Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, Н. П. Векуа, Д. А. Квеселава, Б. В. Хведелидзе, И. Б. Симоненко и др. (см. [6], [8], [31], [36], [37]).

4.3. Полное описание алгебр со свойством факторизации недавно было дано Хайнигом и Зильберманом (1983) (см. также [44]):

Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Gamma)$ — распадающаяся алгебра. Для каждой матрицы-функции $a \in \mathfrak{B}^{n\times n}$ введем в рассмотрение операторы $T_+(a) \in \mathscr{L}(\mathfrak{B}_+^n)$ и $T_-(a) \in \mathscr{L}(\mathring{\mathfrak{B}}_-^{1\times n})$, определенные равенствами

$$T_+(a) f_+ = P_\Gamma a f_+ \ (f_+ \in \mathfrak{B}_+^n), \quad T_-(a) g_- = Q_\Gamma g_- a \ (g_- \in \mathring{\mathfrak{B}}_-^{1\times n}).$$

Теорема. Распадающаяся алгебра $\mathfrak{B}$ обладает свойством факторизации в том и только том случае, если для любого $a \in G(\mathfrak{B}^{n\times n})$ выполняются условия

a) $T_+(a)$ и $T_-(a)$ — нётеровы операторы;

b) $\operatorname{Ind} T_+(a) = -\operatorname{Ind} T_-(a)$.

Кроме алгебр 1)—3), перечисленных в п. 4.1, условиям этой теоремы удовлетворяют, например, следующие алгебры ограниченных функций на единичной окружности Γ_0: 4) $C^\alpha + H_\infty$ $(0<\alpha<1)$, где $C^\alpha = C^\alpha(\Gamma_0)$, $H_\infty = L_\infty(\Gamma_0) \cap P_{\Gamma_0} L_\infty(\Gamma_0)$ (пространство Харди); 5) $B^1_{1,1} + H_\infty$, где $B^1_{1,1}$ — класс Бесова.

4.4. В силу неограниченности оператора S_Γ в $L_\infty(\Gamma)$, алгебра $C(\Gamma)$ не является распадающейся. Эта алгебра обладает следующим обобщенным свойством факторизации (Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе (1958), И. Б. Симоненко (1961)). Положим $L_p^+(\Gamma) = P_\Gamma L_p(\Gamma)$, $L_p^-(\Gamma) = Q_\Gamma L_p(\Gamma)$.

Теорема. Каждая матрица-функция $a \in G(C(\Gamma)^{n\times n})$ допускает факторизацию (3.23), причем

1) $a_+^{\pm1} \in [L_p^+(\Gamma)]^{n\times n}$, $a_-^{\pm1} \in [L_p^-(\Gamma)]^{n\times n}$,

2) $a\_Pa_-^{-1} \in \mathscr{L}(L_p^n(\Gamma))$, при всех p, $1<p<\infty$.

Следовательно, все результаты п. 4.2 остаются в силе, если $a, b \in G(C(\Gamma)^{n\times n})$.

4.5. *Обобщенной факторизацией* матрицы-функции $a \in G[L_\infty(\Gamma)^{n\times n}]$ *в пространстве* $L_p^n(\Gamma, \rho)$ называется представление вида (3.23) где $a_- \in [L_p^-(\Gamma, \rho)]^{n\times n}$, $a_+ \in [L_{p'}^+(\Gamma, \rho^{1-p'})]^{n\times n}$, $a_-^{-1} \in [L_p^+(\Gamma, \rho)]^{n\times n}$, $a_-^{-1} \in [L_{p'}^-(\Gamma, \rho^{1-p'})]^{n\times n}$, причем $a\_Pa_-^{-1} \in \mathscr{L}(L_p^n(\Gamma, \rho))$.

Теорема. Матрица $a \in G[L_\infty(\Gamma)^{n\times n}]$ допускает обобщенную факторизацию в $L_p{}^n(\Gamma, \rho)$ в том и только том случае, когда $aP+Q$ — нётеровый оператор в $L_p{}^n(\Gamma, \rho)$.

С помощью обобщенной факторизации все результаты п. 4.2 переносятся на случай пространства $L_p{}^n(\Gamma, \rho)$ и коэффициентов $a, b \in G[L_\infty(\Gamma)^{n\times n}]$. Эти результаты были получены И. Б. Симоненко (1964, 1968).

Простейшим примером функции на Γ_0, не допускающей факторизации в мысле п. 4.4, является функция $a(t) = t^{1/2} (\in G(L_\infty(\Gamma_0)))$. Обобщенной факторизацией ее в пространстве $L_p(\Gamma_0)$ $(1<p<2)$ является представление $a(t) = (t-1)^{1/2}(1-1/t)^{-1/2}$.

Достаточно широкие классы функций $a \in L_\infty(\Gamma)$ таких, что $aP_\Gamma + Q_\Gamma$ является нётеровым оператором в $L_p(\Gamma, \rho)$, были рассмотрены в работах И. Б. Симоненко (1964, 1968) Ф. Д. Фролова (1970) и Н. Я. Крупника, В. И. Няги (1974) (по этому поводу см. также [23] и следующий параграф).

§ 5. Достаточные условия нётеровости и индекс сингулярных интегральных уравнений с ограниченными измеримыми коэффициентами. Тёплицевы операторы

Названная в заглавии тематика активно развивается в настоящее время. Здесь мы остановимся на некоторых новых достижениях этого направления. Для простоты ограничимся случаем единичной окружности $\Gamma = \Gamma_0$ и пространстве $L_2 = L_2(\Gamma_0)$.

В силу теоремы п. 3.2, достаточно рассматривать операторы вида $T_a := aP+Q$, где $a\in G(L_\infty^{n\times n})$. Если $b\in G(L_\infty^{n\times n})$ и $c=b^{-1}a$, то $aP+bQ=b(cP+Q)=b(PcP+Q)(I+QcP)$, причем оператор $I+QcP$ обратим $((I+QcP)^{-1}=I-QcP)$. Отсюда вытекает, что оператор $A=aP+bQ$ (слева, справа или обобщенно) обратим или является $\Phi_\pm$-оператором тогда и только тогда, когда оператор $T(c) := PcP|_{H_2}$ обладает этим свойством, где $H_2=\operatorname{im} P$ — пространство Харди. Более того, справедливы формулы

$$\dim\ker A=\dim\ker T(c),\ \dim\operatorname{coker} A=\dim\operatorname{coker} T(c).$$

Аналогичные утверждения справедливы для оператора $Pa+Qb$.

Оператор $T(c)$ называется *тёплицевым оператором*, порожденным функцией c. В силу сказанного выше, $T(c)$ можно отождествлять с сингулярным интегральным оператором T_c.

5.1. Матрица-функция $a\in L_\infty^{n\times n}$ называется *локально секториальной*, если для каждой точки $\tau\in\Gamma_0$ существуют окрестность $U_\tau\subset\Gamma_0$ и функции $b_\tau, c_\tau\in G(C^{n\times n})$, $g_\tau\in L_\infty^{n\times n}$ такие, что $\operatorname{Re} g_\tau(t)\geqslant\delta>0$ (п. в. $t\in\Gamma_0$) и $a(t)=b_\tau(t)g_\tau(t)c_\tau(t)$ $(t\in U_\tau)$.

Какова бы ни была локально секториальная матрица-функция a, оператор T_a нётеров (И. Б. Симоненко, 1968).

5.2. Обозначим через hf гармоническое продолжение функции $f\in L_\infty$, определенное для любой точки $z=re^{i\varphi}(0\leqslant r<1,$ $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ единичного круга равенством

$$hf(re^{i\varphi}):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)f(e^{i\psi})}{1-2r\cos(\varphi-\psi)+r^2}\,d\psi.$$

Положим $h_rf(t):=hf(rt)$, $t\in\Gamma_0$, и $h_ra:=(h_ra_{jk})_1^n$, если $a=(a_{jk})\in L_\infty^{n\times n}$. Справедлива

Теорема. Пусть $a\in L_\infty^{n\times n}$ локально секториальна или $a\in G(C+H_\infty)^{n\times n}$. Тогда $T_a\in\Phi(L_2^n)$ и

$$\operatorname{Ind} T_a=-\lim_{r\to 1}\operatorname{ind}\det h_ra. \tag{3.26}$$

В предположении, что $a\in G(C+H_\infty)^{n\times n}$, эта теорема была доказана Дугласом [53]. Он установил и обратное утверждение: из $T_a\in\Phi(L_2)$, $a\in C+H_\infty$, следует, что $a\in G(C+H_\infty)$; алгебру $C+H_\infty$ часто называют *алгеброй Дугласа*. Более того, Дуглас (см. [52]) впервые обнаружил важное значение гармонического продолжения в теории тёплицевых операторов T_a, где $a\in C+H_\infty$. Для локально секториальной матрицы-функции формула (3.26) совсем недавно была установлена Зильберманом (1985). Его доказательство проходит и в случае $a\in G(C+H_\infty)^{n\times n}$.

5.3. Естественным обобщением алгебры PC является класс V всех функций на Γ_0, имеющих в каждой точке Γ_0 не более двух существенных пределов.

Если $a \in V^{n \times n}$, то $T_a \in \Phi(L_2^{n \times n})$ тогда и только тогда, когда a локально секториальна (Кланси, 1974). Следовательно, в этом случае применима формула индекса (5.1) (Фаюр, 1977).

В случае пространства L_p, $1 < p < \infty$, ситуация более сложная. Тем не менее, известны условия нётеровости (И. М. Спитковский, 1983) и формула для вычисления индекса (Зильберман, 1985).

5.4. Обозначим через PQC наименьшую C^*-алгебру в L_∞, содержащую алгебры PC и $\mathrm{QC} := (C_\infty + H_\infty) \cap (\overline{C + H_\infty})$ (— означает знак комплексного сопряжения). Элементы PQC(QC) называются *кусочно-квазинепрерывными* (квазинепрерывными) функциями. Сарасоном (1977) была построена теория тёплицевых операторов T_a с функциями $a \in \mathrm{PQC}$; им же была изучена C^*-алгебра операторов, порожденная операторами $T_a (a \in \mathrm{PQC})$. В этой теории существенную роль играет гармоническое продолжение. Недавно Зильберман (1985) обобщил результаты Сарасона на случай $n > 1$. В частности, имеет место

Теорема. Пусть

$$A = \sum_j \prod_k T_{a_{jk}},$$

где $a_{jk} \in (\mathrm{PQC})^{n \times n}$. Следующие утверждения равносильны:

1. A — нётеров оператор;
2. существуют числа δ, $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\left| \det \sum_j \prod_k h_r a_{jk} \right| \geqslant \varepsilon \text{ при } 1 - \delta < r < 1.$$

Если одно из этих условий выполнено, то

$$\mathrm{Ind}\, A = -\lim_{r \to 1} \mathrm{ind} \left(\det \sum_j \prod_k h_r a_{jk} \right).$$

5.5. Другие классы коэффициентов поддаются спектральному анализу тем труднее, чем большей может быть осцилляция функций, входящих в эти классы. Эти трудности были преодолены, например, для почти-периодических функций.

Обозначим через AP классическую алгебру почти-периодических функций, т. е. замыкание по норме $L_\infty(\mathbf{R})$ линейной оболочки всех функций вида $e^{i\delta x}$, где $\delta \in \mathbf{R}$. Пусть $\zeta \in \Gamma_0$ и $\mathrm{AP}_\zeta := \{f \circ \omega : f \in \mathrm{AP}\}$, где $\omega = -i(z + \zeta)(z - \zeta)^{-1}$ — стандартное отображение Γ_0 на $\mathbf{R}$ с полюсом ζ. Если $f \in \mathrm{AP}$ и $\inf_{\mathbf{R}} |f| > 0$, то, в силу известной теоремы Бора, существует предел

$$w_f := \lim_{l \to \infty} \frac{1}{21} (\arg f(l) - \arg f(-l)).$$

Для функции $\varphi=f\circ\omega\in AP_\zeta$ число w_f играет роль своего рода «числа вращения» в точке ζ функции φ.

Теорема. Пусть $\varphi\in AP_\zeta$, $\zeta\in\Gamma_0$, $\varphi=f\circ\omega$ $(f\in AP)$.

(a) Следующие утверждения равносильны: 1. Оператор T_φ обратим; 2. оператор T_φ нётеров; 3. $\inf|\varphi|>0$, $w_f=0$.

(b) Оператор T_φ односторонне обратим тогда и только тогда, когда $\inf|\varphi|>0$; при этом $\dim\ker T_\varphi=\infty$, если $w_f<0$, и $\dim\ker T_\varphi^*=\infty$, если $w_f>0$.

Эта теорема была доказана в работах И. Ц. Гохберга, И. А. Фельдмана (1968) и Кобурна, Дугласа (1969). Она была обобщена в разных направлениях И. Ц. Гохбергом и А. А. Семенцулом (1970) (см. также [11], [12]), Сарасоном (1977), А. И. Салинашвили (1979), Абрахамсом (1979), Пауэром (1980), В. Б. Дыбиным (1976, 1985), С. М. Грудским (1980, 1985).

В ряде работ были исследованы другие, иногда довольно экзотические классы коэффициентов (см., например, Дуглас (1978)).

5.6. В заключение этого параграфа отметим важное соотношение между операторами Тёплица и Ганкеля (см. гл. 2, п. 2.4):

$$T_{\varphi\psi}-T_\varphi T_\psi=H^*_{\bar\varphi}H_\psi\ (\varphi,\ \psi\in L_\infty). \tag{3.27}$$

Формула (3.27), найденная Сарасоном (1973), играет важную роль в изучении алгебр операторов Тёплица. Она, с одной стороны, позволяет «оценивать» *полукоммутатор*

$$[T_\varphi,\ T_\psi)\ :=T_\varphi T_\psi-T_{\varphi\psi}$$

и тем самым коммутатор, являющийся разностью полукоммутаторов. С другой стороны, она содержит некоторую информацию о символах операторов из алгебр. В частности, из формулы (3.27) и теоремы Хартмана (см. гл. 2, п. 2.4) вытекает:

1. Если хотя бы одна из функций $\bar\varphi$, ψ содержится в $C+H_\infty$, то $[T_\varphi,\ T_\psi)\in\mathcal{S}_\infty$. Если $\varphi,\ \psi\in C+H_\infty$, то $[T_\varphi,\ T_\psi]\in\mathcal{S}_\infty$.

2. Если в каждой точке Γ_0 непрерывны либо φ, либо ψ, то $[T_\varphi,\ T_\psi)\in\mathcal{S}_\infty$.

Приведем еще один важный критерий компактности полукоммутатора, который был доказан в части достаточности Акслером, Чангом и Сарасоном (1978) а в части необходимости — А. Л. Вольбергом (1982). При этом через $\mathcal{H}_\infty(a)$ $(a\in L_\infty)$ обозначим наименьшую замкнутую подалгебру в L_∞, содержащую H_∞ и a.

Теорема. $[T_\varphi,\ T_\psi)\in\mathcal{S}_\infty\Leftrightarrow\mathcal{H}_\infty(\bar\varphi)\cap\mathcal{H}_\infty(\psi)\subseteq C+H_\infty$.

По поводу результатов настоящего параграфа см. [33] (а также [44, гл. 2], [60]).

§ 6. Интегральные уравнения Винера — Хопфа

Так называются уравнения на полуоси $\mathbf{R}_+=(0, \infty)$ вида

$$(W_k\varphi)(x):=c\varphi(x)+\int_0^\infty k(x-t)\,\varphi(t)\,dt=f(x), \quad x\in\mathbf{R}_+, \quad (3.28)$$

впервые рассмотренные Винером и Хопфом (1931). Они возникают в различных задачах механики, физики и математики. Между операторами Винера—Хопфа W_k и операторами Тёплица существуют тесные связи; это является причиной сходства свойств уравнения (3.28) (например, в пространстве $L_p(\mathbf{R}_+)$ при условиях $k\in L_1(\mathbf{R})$, $c\neq 0$) и свойств сингулярных интегральных уравнений.

6.1. Во всех случаях, когда применимо преобразование Фурье $\mathcal{F}$, оператор W_k сводится к оператору Тёплица T_a. Рассмотрим, например, случай $W_k: L_2(\mathbf{R}_+)\to L_2(\mathbf{R}_+)$. Пусть $\hat{k}\in L_\infty(\mathbf{R})$, $k=\mathcal{F}\hat{k}$ (преобразование Фурье и свертка понимаются в смысле теории обобщенных функций), $a=c+\hat{k}\circ\omega$, $\omega(z)=$ $=i(1+z)(1-z)^{-1}$, $Uf=\pi^{-1/2}(x+i)^{-1}f\circ\omega^{-1}$ (унитарное отображение H_2 на пространство Харди в верхней полуплоскости). Тогда $W_k=(\mathcal{F}U)\,T_a\,(U^{-1}\mathcal{F}^{-1})$ (Девинац, 1967).

В частности, последняя формула справедлива, если $k\in L_1(\mathbf{R})$ и

$$\hat{k}(x):=\int_{-\infty}^\infty e^{ixt}k(t)\,dt.$$

В этом случае связь между операторами T_a и W_k можно получить, переходя к матричным представлениям этих операторов в базисах, составленных из функций $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ и функций Лагерра, соответственно (см. [12]). Для обоих операторов матричным представлением является *теплицева матрица* $(a_{j-k})_{j,k=0}^\infty$, где a_i $(i=0, \pm 1, \ldots)$ — коэффициенты Фурье функции a.

6.2. Другая связь между операторами $W_k\in\mathcal{L}(L_p(\mathbf{R}))$ $(k\in L_1)$ и $T_a=(a_{j-k})\in\mathcal{L}(l_p{}^+)$ при условиях $a\in W$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, заключается в том, что оба оператора являются функциями от некоторых односторонне обратимых операторов типа сдвига. Это обстоятельство позволило М. Г. Крейну в фундаментальной работе [22] единым методом построить теории одновременно для обоих операторов W_k, T_a в некоторой шкале банаховых пространств, содержащей в том числе и пространства L_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Теорема (М. Г. Крейн). Пусть $k\in L_1(\mathbf{R})$. Для того чтобы оператор W_k, определенный равенством (3.28), был Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве $L_p(\mathbf{R}_+)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\mathscr{A}(x):=c+\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}k(t)\,dt\neq 0,\quad -\infty\leqslant x\leqslant\infty. \tag{3.29}$$

Если условие (3.29) выполнено, то W_k будет обратим, обратим только слева или обратим только справа в зависимости от того, будет ли число $\varkappa=\operatorname{ind}\mathscr{A}$ равным нулю, положительным или отрицательным; более того,

$$\dim\ker W_k=\max(-\varkappa, 0),\ \dim\operatorname{coker} W_k=\max(\varkappa, 0).$$

Теоремы, аналогичные теоремам п. 2.1 и п. 3.2, справедливы для парных операторов A_1P+A_2Q и PA_1+QA_2 в пространствах $L_p(\mathbf{R})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и для их матричных аналогов; при этом

$$(A_j\varphi)(x)=c_j\varphi(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_j(x-t)\,\varphi(t)\,dt\ (k_j\in L_1),\quad j=1, 2;\quad x\in\mathbf{R};$$

P — оператор умножения на функцию $\frac{1}{2}(1+\operatorname{sgn} x)$, $Q=I-P$. Кроме того, применимы результаты п. 4.1 и п. 4.2 к распадающейся алгебре $W(\mathbf{R})$ (см. гл. 1, п. 1.1). Все эти результаты были установлены И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном (1958) (см. [12]).

6.3. Аналогом уравнения с тёплицевыми операторами, рассмотренными в п. 5.5, являются так называемые *интегрально-разностные уравнения Винера—Хопфа*

$$(PAP\varphi)(x)=f(x),\ x\in\mathbf{R}_+,$$

где

$$\begin{gathered}(A\varphi)(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\varphi(x-\delta_j)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt,\quad x\in\mathbf{R};\\ \sum_{-\infty}^{\infty}|a_j|<\infty,\quad \delta_j\in\mathbf{R}\ (j=0, \pm 1, \ldots),\quad k\in L_1(\mathbf{R}).\end{gathered} \tag{3.30}$$

Эти уравнения тесно связаны с интегральными уравнениями Винера—Хопфа первого рода ($c=0$) (см. п. 7.3).

Символом операторов $A\in\mathscr{L}(L_p(\mathbf{R}))$ и $A_+:=PAP\in\mathscr{L}(L_p(\mathbf{R}_+))$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, называется функция

$$\mathscr{A}=a+\hat{k},\quad a(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_j e^{i\delta_j x};\quad x\in\mathbf{R}. \tag{3.31}$$

Функции вида (3.31) образуют банахову алгебру $\mathfrak{S}$ с нормой

$$\|\mathscr{A}\|:=\sum_{-\infty}^{\infty}|a_j|+\|k\|_{L_1},$$

причем $\|A_+\|_{\mathscr{L}(L_p)}\leqslant\|\mathscr{A}\|$. Символ осуществляет изоморфизм коммутативной алгебры операторов вида (3.30) на $\mathfrak{S}$. Соответствие между символами (3.31) и операторами A_+ взаимно однозначно и линейно, но не мультипликативно (операторы не образуют алгебру).

Из легко проверяемого неравенства

$$\inf_{\mathbb{R}}|\mathcal{A}|\leqslant\inf_{\mathbb{R}}|a|$$

следует, что для каждой функции $\mathcal{A}=a+\hat{k}\in\mathfrak{S}$, $\inf|\mathcal{A}|>0$, существуют числа w_a (см. п. 5.5) и $n_{\mathcal{A}}:=\operatorname{ind}(1+a^{-1}\hat{k})$. Справедлива

Теорема. Оператор $A_+=PAP$ является Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, тогда и только тогда, когда $\inf|\mathcal{A}|>0$. Если это условие выполняется, то A_+ при $w_a>0$ обратим только слева, а при $w_a<0$ — только справа. При $w_a=0$ оператор A_+ обратим, обратим только слева или только справа в зависимости от того, равно ли число $n_{\mathcal{A}}$ нулю, положительно или отрицательно. Кроме того, справедливы формулы

$$\dim\ker A_+=\begin{cases}\infty & \text{при } w_a<0,\\ -n_{\mathcal{A}} & \text{при } w_a=0,\quad n_{\mathcal{A}}\leqslant 0,\end{cases}$$

$$\dim\operatorname{coker} A_+=\begin{cases}\infty & \text{при } w_a>0,\\ n_{\mathcal{A}} & \text{при } w_a=0,\quad n_{\mathcal{A}}\geqslant 0.\end{cases}$$

Аналогичные результаты имеют место для парных операторов. Все эти результаты принадлежат И. Ц. Гохбергу и И. А. Фельдману (см. [12]).

6.4. В цикле работ Р. В. Дудучавы (1973—1982) (см. в частности, его книгу [14]) были исследованы интегральные уравнения Винера—Хопфа с разрывными «предсимволами», включающие в себя сингулярные интегральные уравнения на вещественной оси и парные операторы Винера—Хопфа.

Пусть $a\in L_\infty(\mathbb{R})$ и $W_a^0\varphi=\mathcal{F}a\mathcal{F}^{-1}\varphi$ $(\varphi\in L_p(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R}))$. Если a — кусочно-постоянная функция, то W_a^0 допускает непрерывное продолжение на все пространство $L_p(\mathbb{R})$ $(1<p<\infty)$. Через $\Pi C_p(\mathbb{R})$ обозначим замыкание алгебры кусочно-постоянных функций по норме $\|a\|_p^0:=\|W_a^0\|_p$. Доказывается, что $\Pi C_p(\mathbb{R})$ содержит все функции ограниченной вариации на $\mathbb{R}$, а также алгебру $W(\mathbb{R})$. Если, например,

$$a(x)=c_0+\hat{k}_0(x)+c_1\operatorname{sgn}(x+\delta);\quad k_0\in L_1(\mathbb{R}),\quad \delta\in\mathbb{R},$$

и $k(x):=k_0(x)+c_1e^{i\delta t}/(\pi i t)$, то оператор W_a^0 имеет вид

$$(W_a^0\varphi)(x)=c_0\varphi(x)+\int_{-\infty}^{\infty}k(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

В частности, $-W_{\mathrm{sgn}}^0=H$ — преобразование Гильберта.

Пусть $W_a:=PW_a^0|_{L_p(\mathbb{R}_+)}$. Оператору W_a $(a\in\Pi C_p(\mathbb{R}))$ сопоставляется символ

$$a_p(x, \xi) := \frac{a(x+0)}{2}\left[1+\operatorname{cth}\pi\left(\frac{i}{p}+\xi\right)\right]+$$
$$+\frac{a(x-0)}{2}\left[1-\operatorname{cth}\pi\left(\frac{i}{p}+\xi\right)\right],$$

где $x \in \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ и $a(\infty \pm 0) := a(\pm\infty)$. Если $\inf |a_p(x, \xi)| > 0$ $(x \in \tilde{\mathbf{R}},\ \xi \in \mathbf{R})$, через $\operatorname{ind} a_p$ обозначим приращение функции $(2\pi)^{-1}\arg a_p(x, \xi)$, когда x пробегает $\tilde{R}$ и в точках разрыва a (в том числе и на бесконечности) ξ пробегает $\mathbf{R}$. Тогда справедлива

Теорема. Пусть $a \in \Pi C_p(\mathbf{R})$, $1 < p < \infty$. Для нормальной разрешимости оператора W_a в пространстве $L_p(\mathbf{R}_+)$ необходимо и достаточно, чтобы $\inf |a_p(x, \xi)| > 0$ $(x \in \tilde{\mathbf{R}},\ \xi \in \mathbf{R})$. Если это условие выполнено, то оператор W_a обратим, обратим только слева или только справа в зависимости от того является ли число $\operatorname{ind} a_p$ равным нулю, положительным или отрицательным; при этом $\operatorname{Ind} W_a = -\operatorname{ind} a_p$.

Р. В. Дудучава исследовал также банаховы алгебры, порожденные операторами вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_j W^0_{b_j} c_j I; \quad a_j,\ c_j \in [\mathrm{PC}(\mathbf{R})]^{m\times m}, \quad b_j \in [\Pi C_p(\mathbf{R})]^{m\times m},$$

в пространстве $L_p^m(\mathbf{R})$ $(1 < p < \infty)$. Для таких алгебр им была построена теория, аналогичная теории И. Ц. Гохберга и Н. Я. Крупника для сингулярных интегральных операторов (см. п. 3.3). Исследование проводится, в основном, с помощью локального принципа, предложенного И. Б. Симоненко [35] и модифицированного И. Ц. Гохбергом и Н. Я. Крупником (см. [11], а также гл. 4, § 8). Эти результаты существенно обобщают утверждения, установленные раньше В. А. Фоком, И. М. Рапопортом, Ф. Д. Гаховым, Ю. И. Черским, М. Г. Крейном, И. Ц. Гохбергом, Л. С. Раковщиком, Кремером, Н. К. Карапетянцем, С. Г. Самко и др. Они были перенесены Шнайдером (1984) на пространства $L_p(\mathbf{R}, \rho)$ со степенным весом (3.3).

Подробные обзоры исследований по интегральным уравнениям Винера—Хопфа (типа свертки) и их приложений к задачам математической физики даны в [3], [14], [34], [69], [87], где можно найти также обширную библиографию; в [87] построена теория этих уравнений в пространствах Соболева.

§ 7. Уравнения с вырождающимся символом

Этому направлению посвящена обширная литература, в которой названные уравнения исследуются с разных точек зрения и разными методами. Работы, появившиеся до середины 70-х годов и посвященные изучению сингулярных интегральных уравнений, интегральных и дискретных уравнений Винера—Хопфа и систем таких уравнений с вырождающимся символом, подытожены в монографии автора [76]. Основные исследования последнего десятилетия отражены в английском издании книги [70]. В этой связи отметим также монографию [54], в которой рассматриваются сингулярные интегро-дифференциальные и одномерные псевдодифференциальные уравнения с вырождающимся символом и их приложения к некоторым плоским граничным задачам для дифференциальных уравнений в частных производных.

В этом параграфе мы ограничиваемся рассмотрением простых примеров и поясним на них некоторые характерные свойства и методы исследования названных выше уравнений.

7.1. Неэллиптический сингулярный интегральный оператор или оператор Винера—Хопфа A, рассматриваемый в одном из упомянутых ранее банаховых пространств E (например, в L_p), не является полунётеровым оператором (вообще говоря, даже не нормально разрешимым). Основные методы изучения таких операторов заключаются в их «нормализации», т. е. в сведении их к нормально разрешимым операторам (там, где это возможно). Одним из таких методов является неограниченная регуляризация (см. гл. 1, п. 3.8 и гл. 2, п. 3.3, 3.4). Другой метод, тесно связанный с методом неограниченной регуляризации, состоит в выборе банаховых пространств $\bar{E}$ и $\tilde{E}$ таких, что имеют место непрерывные вложения $\bar{E}\subset E\subset\tilde{E}$ и расширения оператора A до нормально разрешимого оператора $\tilde{A}\in\mathscr{L}(\tilde{E},\bar{E})$. Такие построения очень просто осуществимы, например, в следующей ситуации.

Допустим, что удалось представить оператор A в виде

$$A=BCD, \tag{3.32}$$

где $C\in\mathscr{L}(E)$ — нормально разрешимый оператор, а операторы B и $D(\in\mathscr{L}(E))$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $\dim\ker B=0$;

2. существуют определенный на всем E оператор $D^{(-1)}$ с множеством значений $\tilde{E}:=D^{(-1)}(E)$ $(\supset E)$ и линейное продолжение $\tilde{D}$ оператора D на $\tilde{E}$ такие, что

$$D^{(-1)}Df=f,\quad \tilde{D}D^{(-1)}f=f\quad \forall f\in E.$$

Оператор $D^{(-1)}$ в условии 2 играет роль «формального» обратного оператора к D; нетрудно видеть, что условие 2 заведомо выполняется, если $\dim\ker D=\dim\operatorname{coker} D=0$. Полагая $\bar{E}=B(E)$ и вводя нормы $\|x\|_{\bar{E}}=\|B^{-1}\|_E$ $(x\in\bar{E})$, $\|y\|_{\tilde{E}}=\|\tilde{D}y\|_E\,(y\in\tilde{E})$, получаем банаховы пространства $\bar{E},\tilde{E}$ с требуемыми свойствами $(\tilde{A}=BC\tilde{D})$; при этом, в силу теоремы Банаха, нормы $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_{\bar{E}}$ на $\bar{E}$ эквивалентна тогда и только тогда, когда B нормально разрешимы. Очевидно, что $\tilde{D}$ и B устанавливают соответственно изометрический изоморфизм $\tilde{E}$

на E и E на $\bar{E}$, так что уравнение

$$A\varphi=f \quad (\varphi\in\tilde{E},\ f\in\bar{E}) \tag{3.33}$$

эквивалентно нормально разрешимому уравнению $C\psi=$ $=B^{-1}f(\psi\in E)$.

Оказывается, что представление (3.32) со свойствами 1 и 2 всегда возможно, если символ оператора A «не слишком сильно» вырождается, например, если он имеет конечное (или даже счетное) множество нулей конечного порядка. При этом операторы B и D в представлении (3.32) определены неоднозначно. При определенных предположениях относительно символа можно, в частности, реализовать оба предельных случая $B=I$ (ищется «обобщенное» решение уравнения (3.33) с правой частью $f\in E$) или $D=I$ (ищется решение $\varphi\in E$, но правая часть ($f\in\bar{E}$) «более гладка»). Выбор множителей B, D в (3.32) следует производить так, чтобы пространства $\bar{E}$ и $\tilde{E}$ допускали по-возможности простое аналитическое описание.

7.2. Поясним выдвинутые в п. 7.1 положения на примере интегрального уравнения Винера—Хопфа первого рода вида (3.28) при $c=0$ и $k\in L_1(\mathbf{R})$. В этом случае определенный формулой (3.29) символ обращается в нуль на бесконечности. Простоты ради допустим, что точка $x=\infty$ — единственный нуль функции $\mathscr{A}$; пусть $\mathscr{A}(x)=(x+l)^{-1}\mathscr{B}(x)$, где l — натуральное число, $\mathscr{B}(\in W(\mathbf{R}))$ — функция вида (3.29) и $\mathscr{B}(x)\neq 0$ $(x\in\tilde{\mathbf{R}})$. Выбрав произвольно два неотрицательных целых числа m и n так, чтобы $m+n=l$, мы можем представить функцию $\mathscr{A}$ в виде

$$\mathscr{A}(x)=(x-i)^{-m}\mathscr{C}(x)\,(x+i)^{-n}, \quad \mathscr{C}(x)=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{m}\mathscr{B}(x)\ (\in W(R)).$$

Обозначим через B и D интегральные операторы Винера—Хопфа первого рода с символами $(x-i)^{-m}$ и $(x+i)^{-n}$ соответственно. Из известной теоремы о свертке вытекает представление (3.30) для оператора $A=W_k$. При этом $B=I$, если $m=0$, и $D=I$, если $n=0$.

В рассматриваемом случае пространство

$$\tilde{L}_p(\mathbf{R}_+)=:\tilde{L}_p(\mathbf{R}_+;\,n)\ (1\leqslant p\leqslant\infty)$$

состоит из всех функций вида

$$D^{(-1)}f=i^{n}(1+d/dx)^{n}f(x)\ (f\in L_p(\mathbf{R}_+)), \tag{3.34}$$

где производная понимается в смысле обобщенных функций.

Пространство $\bar{L}_p(\mathbf{R}_+)=:\bar{L}_p(\mathbf{R}_+;\,m)$ содержит те и только те функции $f\in L_p(\mathbf{R}_+)$, производные $f^{(j)}$ которых при $j=0, 1, \ldots$ $\ldots, m-1$ абсолютно непрерывны на $\mathbf{R}_+$ и принадлежат $L_p(\mathbf{R}_+)$ при $j=0, 1, \ldots, m$. Норма в $\bar{L}_p(\mathbf{R}_+;\,m)$ эквивалентна норме $\|f\|=\sum_{j=0}^{m}\|f^{(j)}\|_{L_p}$, а оператор, обратный к B, имеет вид $B^{-1}=i^{m}(-1+d/dx\}^{m}$. Для оператора

$$W_k : \tilde{L}_p(\mathbf{R}_+;\, n) \to L_p(\mathbf{R}_+;\, m) \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

справедливы утверждения теоремы п. 6.2, если в ее формулировке функцию $\mathscr{A}$ заменить на $\mathscr{C}$.

Аналогичные результаты имеют место в случае любого конечного числа нулей (не обязательно целого порядка) символа, для парных операторов Винера—Хопфа, для сингулярных интегральных операторов и других (см. [76]).

7.3. Существует тесная связь между неэллиптическими операторами и операторами с осциллирующими коэффициентами. В этом можно убедиться уже на следующем простом примере интегрального оператора Винера—Хопфа первого рода вида (3.28) с ядром

$$k(t) = h_\delta(t) + i \int_{-\infty}^{0} e^s k_1(t-s)\, ds, \quad h_\delta(t) = \begin{cases} ie^{t-\delta}, & t < \delta, \\ 0, & t > \delta, \end{cases}$$

где $\delta \in \mathbf{R}$, $k_1 \in L_1(\mathbf{R})$. Ясно, что $k \in L_1(\mathbf{R})$, и преобразование Фурье функции k (символ оператора W_k) дается формулой

$$\hat{k}(x) = (x-i)^{-1}\mathscr{C}(x), \quad \mathscr{C}(x) = e^{i\delta x} + \hat{k}_1(x) \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Случай $\delta = 0$ был рассмотрен в п. 7.2. Пусть $\delta \neq 0$. Тогда функция $\mathscr{C}\,(\in \mathfrak{S})$ имеет вид (3.31), причем $a(x) = e^{i\delta x} \in AP$. Очевидно, что $w_a = \operatorname{sgn} \delta$ (см. п. 5.5).

Из теоремы следует, что если $\inf |\mathscr{C}| > 0$, то оператор $W_k : L_p(\mathbf{R}_+) \to \tilde{L}_p(\mathbf{R}_+;\, 1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, при $\delta > 0$ обратим только слева, а при $\delta < 0$ — только справа. Соответственно, коядро или ядро этого оператора бесконечномерно. Таким образом, построен пример оператора A с вырождающимся непрерывным символом ($\hat{k} \in W(\mathbf{R})$), для которого в пространстве $L_p(\mathbf{R}_+)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, одно из чисел $\dim \ker A$ или $\dim \operatorname{coker} A$ бесконечно.

7.4. Теория неэллиптических сингулярных интегральных уравнений на замкнутом контуре принимает особенно простой и законченный вид в счетно-нормированном пространстве бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(\Gamma)$, а также в пространстве обобщенных функций $C^{-\infty}(\Gamma) = [C^\infty(\Gamma)]^*$. Для этих пространств справедлив следующий результат: для того чтобы сингулярный интегральный оператор (с коэффициентами из $C^\infty(\Gamma)$) был нётеровым необходимо и достаточно, чтобы его символ имел не более чем конечное множество нулей конечных порядков. Более того, удается описать ядро, коядро и вычислить индекс этих операторов (см. [76]).

Аналогичные утверждения справедливы для парных интегральных операторов Винера — Хопфа в пространствах $L_p^\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} L_p^{(k)}$, $L_p^{-\infty} = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_p^{(-k)}$, $1 \leqslant p < \infty$, причем

$$L_p^{(k)} := \{ f : \| f \|_k = \| (x+i)^k f \|_{L_p(\mathbf{R})} < \infty \} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

§ 8. Краткие замечания о других результатах

8.1. К уравнениям Винера—Хопфа на полуоси вида $W_a\varphi=f$ ($a\in\Pi C_p(\mathbf{R})$) (см. п. 6.4) можно привести сингулярные интегральные уравнения вида

$$c_0\psi(x)+c_1\int_0^1\frac{\psi(y)\,dy}{y-x}+\sum_{k=0}^{n}c_{k+2}\int_0^1\frac{y^{k-n_k}\psi(y)}{(y+x)^{k+1}}dy=g(x), \qquad (3.35)$$

где $x\in[0, 1]$, $0\leqslant\operatorname{Re}n_k\leqslant k$; для этого достаточно сделать подстановки $x=e^{-t}$ $y=e^{-\tau}$. Характерной особенностью таких уравнений является то, что их ядра наряду с особенностью вдоль диагонали $x=y$ имеют еще неподвижные особенности в точке $x=y=0$; эти особенности существенно влияют на нётеровость и индекс уравнений. Уравнения вида (3.35) находят многочисленные приложения в теории упругости и математической физике (см. [14]).

С помощью локальных принципов и результатов, упомянутых в п. 6.4, Р. В. Дудучава [14] построил полную теорию для уравнений (3.35) и других подобных уравнений; в частности, получены условия нётеровости, формула индекса и формулы для решений в пространствах L_p ($[0, 1]$, $x^\alpha(1-x)^\beta$) (см. также [55]).

8.2. Пусть Γ — замкнутый ляпуновский контур и α — диффеоморфное отображение Γ на себя, сохраняющее ориентацию на Γ и удовлетворяющее следующим условиям: 1) существует натуральное число $n\geqslant2$ такое, что $\alpha_n(t)=t$ и $\alpha_i(t)\neq t$ ($\forall t\in\Gamma$), $i=1,\ldots,n-1$, где $\alpha_i(t)=\alpha(\alpha_{i-1}(t))$, $\alpha_0(t)=t$; 2) $\alpha'\in C^\lambda(\Gamma)$, $0<\lambda<1$. Такое отображение α называется *прямым сдвигом Карлемана*. Рассмотрим в пространстве $L_p{}^k(\Gamma,\rho)$ ($1<p<\infty$) *сингулярный интегральный оператор со сдвигом* α вида $K=aP+bQ$, где P, Q — определенные в п. 3.2 проекторы

$$a=\sum_{j=0}^{n-1}a_jW^j,\quad b=\sum_{j=0}^{n-1}b_jW^j;\quad (W\varphi)(t)=\varphi[\alpha(t)],$$

a_j, $b_j\in[L_\infty(\Gamma)]^{k\times k}$ $(j=0,\ldots,n-1)$. Оператору K сопоставим сингулярный интегральный оператор без сдвига (см. § 3) $C=AP+BQ$, рассматриваемый в $L_p^{k\cdot n}(\Gamma,\rho)$ с матрицами-функциями порядка $k\cdot n$

$$A(t)=(a_{j-i}[\alpha_i(t)])_{i,j=0}^{n-1},\quad B(t)=(b_{j-i}[\alpha_i(t)])_{i,j=0}^{n-1};$$

При этом $a_{-j}:=a_{n-j}$, $b_{-j}:=b_{n-j}$. Тогда имеет место следующая теорема, полностью решающая вопрос о нётеровости оператора K (см. [70]).

Теорема. Операторы K и C одновременно нётеровы или нет. Если они нётеровы, то $\operatorname{Ind}K=\frac{1}{n}\operatorname{Ind}C$.

В случае непрерывных коэффициентов эта теорема была доказана Г. С. Литвинчуком (1967); более общее утверждение, чем сформулированное здесь (для вырождающихся коэффициентов A и B) получено Мейером и Зильберманом (1977). Аналогичный результат справедлив в случае, когда α меняет ориентацию, но обладает свойствами 1) и 2) (*обратный сдвиг Карлемана*).

Существенно сложнее ситуация, когда Γ — незамкнутый контур или α — некарлемановский сдвиг. К настоящему времени с наибольшей полнотой изучены уравнения с карлемановским сдвигом. Для этого случая дано полное описание алгебр операторов, порожденных операторами вида K с кусочно-непрерывными коэффициентами, и соответствующих алгебр символов; в терминах символов получены критерии нётеровости и формула для индекса. Достаточно полный обзор исследований этого направления дан в [21] и в монографии [24] (см. также [78]). В случае некарлемановского сдвига доказано несуществование матричного символа (см. [23]).

8.3. К настоящему времени проведены исследования сингулярных интегральных уравнений на кривых бесконечной длины, а также на совокупности счетного множества кривых (библиографию таких работ можно найти в обзоре [37, § 13, гл. IV]). Простые необходимые и достаточные условия, налагаемые на кривую $\Gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, при которых имеют место L_2-оценки для операторов

$$(Hf)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\Gamma(t))\frac{dt}{t}, \quad (\bar{H}f)(x) := \int_{-1}^{1} f(x-\Gamma(t))\frac{dt}{t}$$

($x \in \mathbf{R}^n$, $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$) даны в работе Нагеля, Ванса, Вайнгера, Вайнберга (1983). По этому поводу см. также обзор Стейна, Вайнгера (1978).

8.4. Недавно Бартом, И. Ц. Гохбергом, Касхуком (1984) был предложен новый метод приведения интегральных уравнений разных классов к более простым уравнениям, которые часто оказываются линейными системами. Сущность этого метода, называемого авторами методом сопряжения (coupling method), заключается в следующем. Допустим, что $T : E_1 \to E_1$, $S : E_2 \to E_2$ — операторы, действующие между банаховыми пространствами и связанные между собой соотношением вида

$$\begin{pmatrix} T & * \\ * & * \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & S \end{pmatrix},$$

причем все элементы $*$ в этих операторных матрицах (порядка 2) известны. Тогда можно дать явные формулы для обратного или обобщенного обратного оператора, для ядра и области значений оператора T в терминах соответствующих объектов для оператора S. Это обстоятельство особенно важно тогда, когда S имеет значительно более простой вид по сравнению с

Т. Авторы применяют этот метод к явному решению интегральных уравнений первого и второго рода (на отрезке или на прямой) со специальными ядрами, сингулярных интегральных уравнений и уравнений Винера—Хопфа с рациональными матричными символами и др. Более того, в цикле работ этих авторов, опубликованных после 1979 г., изучены связи названных уравнений с линейными динамическими системами. Эти исследования существенно опираются на теорию минимальной факторизации матричных и операторных функций, развитую авторами монографии [42].

Глава 4

МНОГОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Настоящая глава начинается с рассмотрения различных классов многомерных сингулярных ядер, для которых соответствующий интегральный оператор определен в смысле главного значения. Формулируются теоремы об ограниченности многомерного сингулярного интегрального оператора в пространствах $L_p(\mathbf{R}^n)$ и $L_p(\mathbf{R}^n|x|^a)$. В § 2 вводится класс операторов Кальдерона—Зигмунда, обобщающих «классические» сингулярные интегральные операторы; для них справедливы весовые оценки с весами из класса Макенхаупта. Устанавливаются связи между весовыми оценками сингулярных интегралов и максимальной функцией Харди—Литлвуда. Алгебры сингулярных интегральных операторов и их символов изучаются в §§ 3 и 4. В § 5 исследуются сингулярные интегральные операторы на гладком многообразии. Вопросы, связанные с индексом матричного сингулярного интегрального оператора, рассматриваются в § 6. В параграфах 7 и 8 даются краткие обзоры результатов о сингулярных интегральных операторах с разрывными или вырождающимися символами и о многомерных уравнениях Винера—Хопфа. В заключение вводится понятие псевдодифференциального оператора; излагаются самые простые факты, относящиеся к таким операторам и связанные с основной тематикой этой главы.

§ 1. Многомерный сингулярный интеграл

1.1. Хорошо известно, и без труда проверяется, что интеграл свертки

$$(Ku)(x)=\int_{\mathbf{R}^n} k(x-y)\,u(y)\,dy \tag{4.1}$$

существует для почти всех $x\in\mathbf{R}^n$ и определяет ограниченное отображение пространства $L_p(\mathbf{R}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, в себя, если $k\in L_1(\mathbf{R}^n)$ (см., например, [86]).

С другой стороны, в случае $n=1$ интеграл (4.1) с не абсолютно интегрируемым ядром $k(x)=1/(\pi i x)$ существует в смысле главного значения (благодаря взаимному сокращению положительных и отрицательных значений подынтегральной функции) и определяет ограниченное отображение пространства $L_p(\mathbf{R})$ в себя для $1<p<\infty$, называемое *преобразованием Гильберта* (см. гл. 3, п. 1.1).

В многомерном случае можно выделить различные классы не интегрируемых абсолютно ядер k, для которых интеграл (4.1) существует в смысле главного значения. Один класс, для которого теория и проста и богата, порождают операторы, коммутирующие не только со сдвигом, но и с растяжением $x\to\varepsilon x$, $\varepsilon>0$. Такие ядра имеют вид

$$k(x)=\frac{f(x)}{|x|^n}, \tag{4.2}$$

где функция f положительно однородна степени 0, т. е. $f(\varepsilon x)=f(x)$ для всех $\varepsilon>0$. Это условие на f эквивалентно тому, что функция f постоянна на лучах, выходящих из начала координат. В частности, f полностью определена своим сужением на единичную сферу S^{n-1}. Например, в случае преобразования Гильберта имеем $f(x)=(\operatorname{sgn} x)/\pi i$.

В случае когда f — нечетная функция, т. е. $f(-x)=-f(x)$, используя теорему М. Рисса об ограниченности преобразования Гильберта в $L_p(\mathbf{R})$ (см. гл. 3, п. 1.1), можно показать, что если $f\in L_1(S^{n-1})$ и $u\in L_p(\mathbf{R}^n)$, $1<p<\infty$, то интеграл (4.1) существует в смысле главного значения

$$Ku=\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon u, \quad (K_\varepsilon u)(x):=\int_{|x-y|>\varepsilon>0} k(x-y)\,u(y)\,dy \tag{4.3}$$

для почти всех $x\in\mathbf{R}^n$ и определяет ограниченное отображение K пространства $L_p(\mathbf{R}^n)$ в себя (Кальдерон и Зигмунд [46]; см. также [85], [86]). Предел (4.3), существующий в смысле $L_p(\mathbf{R}^n)$, называется *многомерным сингулярным интегралом*, а оператор K — *сингулярным интегральным оператором с ядром* k. Следуя первой работе по многомерным сингулярным интегралам (Трикоми, [89]), принято называть функцию f *характеристикой* сингулярного интеграла (4.3).

Другое более общее ядро получается, если предположить только, что функция $f\in L_1(S^{n-1})$ удовлетворяет «условию сокращения»

$$\int_{S^{n-1}} f(x)\,d\sigma(x)=0, \tag{4.4}$$

где $d\sigma$ — индуцированная евклидова мера на S^{n-1}. (Условие (4.4), очевидно, выполнено, если f — нечетная функция; легко убедиться, что интеграл (4.3) не существует, если условие (4.4) не выполняется.) Изучение сингулярных интегральных операторов с такими более общими ядрами сложнее, чем изучение операторов с нечетными ядрами. В частности, для доказательства ограниченности такого оператора в $L_p(\mathbf{R}^n)$, $1<p<\infty$, необходимо наложить условия более сильные, чем интегрируемость характеристики f на S^{n-1}. Следующая теорема принадлежит Кальдерону и Зигмунду [45], [46] (см. также [85, гл. 2]).

Теорема. Пусть k — ядро, определенное равенством (4.2), и f — однородная функция степени 0, удовлетворяющая условию (4.4) и, кроме того, обладающая следующим свойством интегрируемости:

$$\int_{S^{n-1}} |f(x)|\,d\sigma(x)<\infty, \qquad \int_{S^{n-1}} |f(x)|\ln^+|f(x)|\,d\sigma(x)<\infty. \tag{4.5}$$

Предположим, что $u\in L_p(\mathbf{R}^n)$, $1<p<\infty$. Тогда

а) Существует постоянная C_p (не зависящая от u и ε) такая, что $\|K_\varepsilon u\|_p\leqslant C_p\|u\|_p$.

б) Предел $Ku=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}K_\varepsilon u$ существует в смысле $L_p(\mathbf{R}^n)$ и $\|Ku\|_p\leqslant C_p\|u\|_p$.

в) Если $u\in L_2(\mathbf{R}^n)$, то преобразования Фурье[1]

$$\hat{u}(x)=(Fu)(x):=\int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i(x,y)}u(y)\,dy$$

и $\widehat{Ku}$ связаны соотношением

$$\widehat{Ku}(x)=\mathscr{K}(x)\,\hat{u}(x), \tag{4.6}$$

где $\mathscr{K}$ — положительно однородная функция степени 0. В явном виде

$$\mathscr{K}(\xi)=\int_{S^{n-1}}\left[\frac{\pi i}{2}\operatorname{sgn}(\xi, y)+\ln(1/|(\xi, y)|)\right]f(y)\,d\sigma(y), \quad |\xi|=1. \tag{4.7}$$

Основными этапами в доказательстве сформулированной теоремы Кальдерона и Зигмунда являются L_2-оценки, неравенства слабого типа (1.1) (см. также § 2) и применение интерполяционной теоремы Марцинкевича.

Более того, если модуль непрерывности характеристики f удовлетворяет условию Дини, то, используя максимальную функцию (см. § 2) и утверждения а), б), можно доказать, что $\lim\limits_{\to 0}(K_\varepsilon u)(x)$ существует для почти всех $x\in\mathbf{R}^n$ (см. [85, гл. 2]).

1.2. Из формулы (4.6) вытекает следующее представление сингулярного оператора K:

$$Ku=F^{-1}\mathscr{K}Fu. \tag{4.8}$$

Функция $\mathscr{K}$ называется *символом* оператора K. Можно доказать, что символ совпадает с преобразованием Фурье ядра k в

---

[1] В отличие от определения $\hat{u}$, принятого в гл. 3, §6, в настоящей главе выбран множитель 2π в показателе экспоненты.

смысле теории обобщенных функций [45] (см. также [30], [70]). Формула (4.7) дает явное выражение символа через характеристику. Заметим, что условие (4.5) обеспечивает ограниченность символа.

Более того, из формулы (4.8) непосредственно вытекает, что сингулярный оператор K ограничен в пространстве $L_2(\mathbf{R}^n, \rho)$ с весом $\rho(\dot{x}) = (1+|x|^2)^{1/2} (l \in \mathbf{R})$ в том и только том случае, если справедлива оценка

$$\| \mathscr{K} v \|_{W_2^l(R^n)} \leqslant C \| v \|_{W_2^l(\mathbf{R}^n)}, \quad v \in W_2^l(\mathbf{R}^n) \tag{4.9}$$

с постоянной $C>0$, не зависящей от v.

1.3. Можно рассматривать сингулярные интегралы с так называемыми *«переменными ядрами»* вида

$$(Ku)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x, x-y)\, u(y)\, dy, \tag{4.10}$$

где ядро $k(x, z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1^0. k — положительно однородная функция степени $-n$ относительно z, т. е. $k(x, \varepsilon z) = \varepsilon^{-n} k(x, z)$ для всех $\varepsilon>0$;

2^0. $\int\limits_{S^{n-1}} k(x, z)\, d\sigma(z) = 0$ для каждого $x \in \mathbf{R}^n$.

Имеет место следующая, сравнительно недавняя теорема доказанная Кальдероном и Зигмундом [47].

Теорема. Пусть $\int\limits_{S^{n-1}} |k(x, z)|^q\, d\sigma(z) < \infty$ для некоторого q, $1<q<\infty$, и всех $x \in \mathbf{R}^n$. Тогда сингулярный интеграл (4.10) существует почти всюду для произвольной функции $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и справедлива оценка

$$\| Ku \|_p \leqslant C_{p,q} \sup_x \left(\int\limits_{S^{n-1}} |k(x, z)|^q\, d\sigma(z) \right)^{1/q} \| u \|_p,$$

если q удовлетворяет следующему условию (CZ_p):

i) $q > p' \frac{n-1}{n}$ при $1 < p \leqslant 2$ $(p' = p/(p-1))$,

ii) $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} \frac{n}{n-1} + \left(1 - \frac{2}{p}\right)$ при $2 \leqslant p < \infty$.

В частности, $K \in \mathscr{L}(L_p(\mathbf{R}^n))$ для всех $p \geqslant q'$. Этот результат неулучшаем для значений $1 < p \leqslant 2$.

Для сингулярного оператора (4.10) можно установить формулу, аналогичную формуле (4.8). С этой целью положим

$$f(x, \theta) := |x-y|^n k(x, x-y), \quad \theta = (y-x)/|y-x|.$$

Тогда, в силу равенств (4.7) и (4.8), справедлива формула

$$K = F^{-1}_{\xi \to x} \mathscr{K}(x, \xi)\, F_{x \to \xi}, \tag{4.11}$$

где $\mathscr{K}$ — функция, положительно однородная степени 0 относительно ξ. Равенство (4.11) следует из (4.7) после замены $f(y)$

на $f(x, y)$. Функция $\mathscr{K}$ называется *символом* сингулярного оператора (4.10).

1.4. Формулы (4.8) и (4.11) дают основание для расширения понятия сингулярного интегрального оператора: мы будем называть так оператор вида (4.8) или (4.11), если множитель $\mathscr{K}$ есть ограниченная функция, измеримая по x, ξ и положительно однородная нулевой степени по ξ. Упомянутый множитель назовем *символом* сингулярного интегрального оператора.

Можно рассматривать операторы вида (4.8) или (4.11), не предполагая, что символ — положительно однородная функция степени 0 по ξ. При некоторых довольно общих предположениях относительно символа мы приходим таким образом к понятию *псевдодифференциального оператора* (см. первые работы по этой тематике [63], [66] и вышедшие в последние годы монографии [39], [64], [88]; см. также § 9).

1.5. В пространствах $L_p(\mathbf{R}^n, \rho)$ со степенным весом ρ имеет место следующий многомерный аналог теоремы Харди—Литлвуда (см. гл. 3, п. 1.1.2), установленный Стейном (1957).

Теорема. Пусть

$$(Ku)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} k(x, y)\, u(y)\, dy,$$

где $|k(x, y)| \leqslant C|x-y|^{-n}$. Предположим, что оператор K ограничен в $L_p(\mathbf{R}^n)$, $1<p<\infty$. Тогда оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbf{R}^n, |x|^{\alpha})$, если

$$-n<\alpha<n(p-1). \tag{4.12}$$

Отсюда легко получить такой же результат для пространства $L_p(\mathbf{R}^n, (1+|x|)^{\alpha})$.

1.6. В связи с теоремой Стейна возникает вопрос: в какой мере можно ее распространить на значения α, расположенные вне интервала (4.12)? Некоторые результаты в этом направлении были независимо получены Б. А. Пламеневским (1968) в случае $p=2$ и Ю. Е. Хайкиным (1970, 1973) для $p\in(1, \infty)$. Этими авторами было доказано, что существует плотное в $L_p(\mathbf{R}^n, |x|^{\alpha})$ множество $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{M}_-)$ достаточно гладких функций с компактными носителями такое, что при некоторых ограничениях на символ сингулярный оператор, определяемый формулой (4.11) на $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{M}_-)$, ограничен в $L_p(\mathbf{R}^n, |x|^{\alpha})$ для всех положительных (отрицательных) значений α, отличных от чисел

$$n(p-1)+pj \text{ (соответственно, } -n+pj), \; j=0, 1, 2\ldots.$$

Обзоры других результатов, относящихся к ограниченности сингулярных интегральных операторов, см. в [15], [30], [47], [70]; там же сформулированы некоторые открытые вопросы.

1.7. Отметим, что, в отличие от сингулярных операторов (4.3) или (4.10), ядро интегрального оператора, определяемого формулой (4.7), имеет сингулярность не на диагонали, а на экваторе $(\xi, y)=0$. Операторы с такими ядрами изучены недостаточно. Некоторые свойства оператора (4.7) были исследованы А. Д. Гаджиевым (1981) при доказательстве соотношений (4.25) (см. ниже п. 3.2).

§ 2. Весовые оценки сингулярных интегралов и максимальных функций

2.1. Максимальная функция. Весовые оценки для сингулярного интеграла тесно связаны с такими же оценками для *максимальной функции Харди—Литлвуда* M. Пусть u — локально суммируемая функция в $\mathbf{R}^n$. Тогда Mu определяется формулой (см. [85])

$$(Mu)(x)=\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |u|\,dy,\quad x\in\mathbf{R}^n,$$

где точная верхняя грань берется по всем кубам Q в $\mathbf{R}^n$, содержащим точку x. Оператор $M: f\mapsto Mf$ называется *максимальным оператором Харди—Литлвуда.* Классическая теорема [85] утверждает, что M — ограниченный оператор в $L_p(\mathbf{R}^n)$, $1<p\leqslant\infty$, и имеет слабый тип (1,1) (см. также гл. 3, п. 1.2.1).

Общая проблема весовых оценок максимальной функции формулируется следующим образом: найти характеристику всех пар весов (ρ, ω), для которых имеет место оценка сильного типа

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}[(Mu)(x)]^p\,\rho(x)\,dx\leqslant C\int\limits_{\mathbf{R}^n}|u(x)|^p\,\omega(x)\,dx, \tag{4.13}$$

либо оценка слабого типа

$$\int\limits_{\{x:(Mu)(x)>\lambda\}}\rho(x)\,dx\leqslant C\lambda^{-p}\int\limits_{\mathbf{R}^n}|u(x)|^p\,\omega(x)\,dx, \tag{4.14}$$

где постоянная C в неравенствах (4.13), (4.14) не зависит от $u\in L_p(\mathbf{R}^n, \omega)$ и $\lambda>0$.

Для одновесовых оценок (4.13), (4.14) $(\rho=\omega)$ этот вопрос полностью был решен Макенхауптом в 1972 г., который установил следующий фундаментальный результат.

Теорема. Пусть $\rho=\omega$ — вес в $\mathbf{R}^n$ и $1<p<\infty$. Тогда следующие условия равносильны: (i) $\rho\in(A_p)$[1]; (ii) имеет место оценка (4.13); (iii) справедлива оценка (4.14).

Необходимость условия (A_p) сразу получается подстановкой (в (ii) или (iii) пробной функции $u=\rho^{-1/(p-1)}\chi_Q$. Доказательство достаточности (A_p)-условия существенно сложнее. Сравнительно простое доказательство было дано Койфманом и Фефферманом (1974); ключевым фактом в нем является импликация $(A_p)\Rightarrow(A_{p-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$. Сойер (1981) дал совершенно иное доказательство, получив следующий результат о двухвесовых оценках.

---

[1] См. гл. 3, п. 1.1.2.

Теорема. Пусть ρ, ω — два веса в $\mathbf{R}^n$, $1<p<\infty$. Следующие условия равносильны: 1. имеет место оценка (4.13); 2. справедливо неравенство

$$\int\limits_Q \left|M\left(\omega^{-\frac{1}{p-1}}\chi_Q\right)\right|^p \rho dx \leqslant C \int\limits_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}} dx < \infty$$

с постоянной C, не зависящей от куба Q.

2.2. Операторы Кальдерона—Зигмунда. Все сингулярные интегральные операторы, для которых к настоящему времени известны весовые оценки, относятся к обширному классу операторов Кальдерона—Зигмунда. Этот класс, введенный Койфманом и Мейером [50] в 1978 г., охватывает «классические» сингулярные операторы вида (4.10) (в литературе они часто называются *сингулярными интегралами Михлина—Кальдерона—Зигмунда*), сингулярные интегралы Коши на липшицевых кривых, а также псевдодифференциальные операторы (см. также [15], [64]).

Оператор $K\in\mathscr{L}(L_2(\mathbf{R}^n))$ называется *оператором Кальдерона—Зигмунда*, если существует функция $k(x,y)$, $x\neq y$, такая, что

$$|k(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n}, \tag{4.15}$$

$$|k(x,y)-k(x',y)|\leqslant C|x-y|^{-n-\alpha}|x-x'|^{\alpha},\ 2r_{xx'}<r_{xy}, \tag{4.16}$$

$$|k(x,y)-k(x,y')|\leqslant C|x-y|^{-n-\alpha}|y-y'|^{\alpha},\ 2r_{yy'}<r_{xy}, \tag{4.17}$$

и для любой функции $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$(Ku)(x)=\int k(x,y)\,u(y)\,dy, \quad x\notin \operatorname{supp} u.$$

Здесь α — положительная постоянная. Оператор K, вообще говоря, не определяется однозначно своим ядром $k(x,y)$.

Простейшим примером оператора Кальдерона—Зигмунда является *оператор Рисса* R_j $(j=1,\dots,\mathrm{n})$,

$$(R_ju)(x):=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|>\varepsilon}\frac{c_n(x_j-y_j)}{|x-y|^{n+1}}u(y)\,dy;\quad c_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Легко видеть, что сингулярный оператор (4.3) с ядром (4.2) является оператором Кальдерона—Зигмунда, если $f\in C^\alpha(S^{n-1})$ $(0<\alpha\leqslant 1)$. Койфман и Мейер [50] установили следующее важное обобщение теоремы гл. 3, п. 1.1.2.

Теорема. Пусть K — оператор Кальдерона—Зигмунда и $\rho\in(A_p)$, $1<p<\infty$. Тогда справедлива оценка

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}|(Ku)(x)|^p\rho(x)\,dx\leqslant C\int\limits_{\mathbf{R}^n}[(Mu)(x)]^p\rho(x)\,dx \quad \forall u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \tag{4.18}$$

Таким образом, если выполнены условия теоремы, то $K\in\mathscr{L}(L_p(\mathbf{R}^n,\rho))$.

Более того, если вес ρ таков, что $(M\rho)(x)\leqslant C\rho(x)$ п. в. («условие (A_1)»), то для оператора Кальдерона—Зигмунда при $p=1$ имеет место оценка слабого типа, аналогичная (4.14) (при $K=M$).

Для сингулярных интегралов (4.3) с ядрами вида (4.2) эти результаты были доказаны Койфманом и Фефферманом (1974) и, независимо, Канеко и Яно (1975). Ими же было показано, что условие (A_p) является необходимым для ограниченности операторов Рисса в пространстве $L_p(\mathbf{R}^n,\rho)$ $(1<p<\infty)$. Известно, кроме того, что в оценке (4.18) условие (A_p) неулучшаемо, по крайней мере, для степенных весов $|x|^\alpha$ (в этом случае оно совпадает с условием (4.12)). Из оценки (4.18) и теоремы Сойера (п. 2.1) вытекают, конечно, и двухвесовые оценки для операторов Кальдерона—Зигмунда.

Отметим, наконец, что если для ядра оператора Кальдерона—Зигмунда, удовлетворяющего условиям (4.15)—(4.17), почти всюду существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\varepsilon<|x-y|<1} k(x,y)\,dy$ и если $\rho\in(A_p)$, $1\leqslant p<\infty$, $u\in L_p(\mathbf{R}^n,\rho)$, то почти всюду существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{|x-y|>\varepsilon} k(x,y)\,u(y)\,dy.$$

§ 3. Связь символа с ядром

3.1. Рассмотрим теперь сингулярный оператор вида

$$(Au)(x)=a(x)u(x)+\int\limits_{\mathbf{R}^n} k(x,x-y)\,u(y)\,du, \qquad (4.19)$$

где $a\in L_\infty(\mathbf{R}^n)$ и ядро k удовлетворяет условиям § 1. *Символ* оператора A определяется формулой

$$\mathscr{A}(x,\xi)=a(x)+\hat{k}(x,\xi), \qquad (4.20)$$

где $\hat{k}(x,\xi)$ — преобразование Фурье ядра $k(x,z)$ по переменной z.

Разложим характеристику $f(x,\theta)=|x-y|^n k(x,x-y)$ в ряд Фурье по сферическим функциям

$$f(x,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\varkappa_m} a_m^{(l)}(x)Y_m^{(l)}(\theta). \qquad (4.21)$$

Здесь $Y_m^{(l)}$ $(l=1,\ldots,\varkappa_m;\ m=0,1,2\ldots)$ — ортонормированные в $L_2(S^{n-1})$ n-мерные сферические функции и $\varkappa_m$ — число линейно независимых сферических функций порядка m; свободный член отсутствует в силу условия 2° п. 1.3.

Из (4.20) и известной формулы (см., например, [70, стр. 259])

$$\hat{K}(\xi)=\pi^{n/2}i^m\frac{\Gamma(m/2)}{\Gamma((n+m)/2)}Y_m^{(l)}\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right),\quad K(x):=\frac{Y_m^{(l)}\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^n}$$

вытекает разложение символа оператора (4.19) в ряд по сферическим функциям:

$$\mathcal{A}(x,\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\varkappa_m}\gamma_m a_m^{(l)}(x)\,Y_m^{(l)}\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right). \tag{4.22}$$

Здесь $a_0^{(1)}=a$, $\gamma_0=1$, $\gamma_m=\pi^{n/2}i^m\dfrac{\Gamma(m/2)}{\Gamma((n+m)/2)}$.

Формула (4.22) была получена С. Г. Михлиным (1936) для $n=2$ и обобщена Жиро (1936) на случай произвольного n.

3.2. Соотношения (4.7) и (4.21), (4.22) позволяют переходить от характеристики к символу и обратно. В частности, с помощью этих формул можно изучать связи между свойствами дифференцируемости символа и характеристики. Как будет видно из дальнейшего, эти связи играют важную роль в теории сингулярных интегральных уравнений. Для формулировки соответствующих результатов нам понадобится следующее определение.

Обозначим через $H_p^l(S^{n-1})$, $l\geqslant 0$, $1<p<\infty$, пополнение пространства $C^\infty(S^{n-1})$ по норме $\|(I+\delta)^{l/2}u\|_{L_p(S^{n-1})}=:\|u\|_{p,l}$, где δ — оператор Бельтрами на сфере (сферическая часть оператора Лапласа). При $p=2$ это пространство совпадает с пространством Соболева — Слободецкого (см., например, [70]). Далее, будем говорить, что определенная на $\mathbb{R}^n\times S^{n-1}$ функция f равномерно (на $\mathbb{R}^n$) принадлежит пространству $H_p^l(S^{n-1})$ и обозначать это $f\hat{\in}H_p^l(S^{n-1})$, если $f(x,\cdot)\in H_p^l(S^{n-1})$ при любом $x\in\mathbb{R}^n$ и $\|f(x,\cdot)\|_{p,l}\leqslant C$, где C не зависит от x.

Следующая теорема представляет собой принадлежащее М. С. Аграновичу (1965) и Н. М. Михайловой—Губенко (1966) уточнение более раннего результата С. Г. Михлина [30].

Теорема. Пусть f — характеристика сингулярного интегрального оператора (4.19) и $\mathcal{A}$ — его символ. Тогда

$$f\hat{\in}H_2^l(S^{n-1})\Leftrightarrow\mathcal{A}\hat{\in}H_2^{l+n/2}(S^{n-1}).$$

В плоском случае ($n=2$) теорема остается в силе при любом $p\in(1,\infty)$; это следует из формулы (4.7) и теоремы М. Рисса об ограниченности сингулярного оператора Гильберта в $L_p(0,2\pi)$. Недавно А. Д. Гаджиевым (1981, 1982) было доказано, что в случае $n\geqslant 3$, $p\neq 2$ теорема не имеет места, однако, справедливы соотношения

$$\mathcal{A}\hat{\in}H_p^{n/2+l}(S^{n-1})\Rightarrow f\hat{\in}L_p(S^{n-1})\Rightarrow\mathcal{A}\hat{\in}H_p^{n/2-l}(S^{n-1}), \tag{4.25}$$

где $l=(n-2)|1/p-1/2|$, причем соответствующие вложения точны. Отметим, что импликации (4.25), конечно, можно сформулировать и отправляясь от характеристик, принадлежащих равномерно $H_p^k(S^{n-1})$.

3.3. Из теоремы п. 1.3 и соотношений (4.25) вытекает следующий критерий ограниченности сингулярного интегрального оператора в терминах гладкости символа.

Теорема. Пусть $a\in L_\infty(\mathrm{R}^n)$, $1<p<\infty$, $\mathscr{A}\in\hat{H}_q^{n/2+l}(S^{n-1})$, где $l=(n-2)|1/q-1/2|$ и q удовлетворяет условию (CZ_p) из теоремы п. 1.3. Тогда сингулярный оператор (4.19) ограничен в пространстве $L_p(\mathrm{R}^n)$, причем

$$\|A\|\leqslant C[\|a\|_{L_\infty(\mathrm{R}^n)}+\sup_x\|\mathscr{A}(x,\cdot)\|_{q,n/2+l}]. \tag{4.26}$$

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы и $A_m^{(k)}$ — сингулярный оператор с характеристикой $Y_m^{(k)}$ $(A_0^{(1)}=I)$. Тогда

$$Au=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\varkappa_m}a_m^{(k)}A_m^{(k)}u, \tag{4.27}$$

причем ряд (4.27) сходится по норме $L_p(\mathrm{R}^n)$.

§ 4. Алгебра сингулярных интегральных операторов

4.1. Известно, что $H_q^k(S^{n-1})$ является банаховой алгеброй в том и только том случае, если $qk>n-1$. В дальнейшем будем считать, что это условие выполнено. Тогда совокупность всех функций $f\in\hat{H}_q^k(S^{n-1})$ образует банахову алгебру $\mathscr{S}_p^k$ с нормой $\sup_x\|f(x,\cdot)\|_{q,k}$. Обозначим через $\mathring{\mathscr{S}}_q^k$ подалгебру $\mathscr{S}_q^k$, состоящую из непрерывных на $\tilde{\mathrm{R}}^n\times S^{n-1}$ функций, где $\tilde{\mathrm{R}}^n=\mathrm{R}^n\cup$ $\cup\{\infty\}$. Можно доказать, что каждый максимальный идеал алгебры $\mathring{\mathscr{S}}_q^k$ есть совокупность всех функций из $\mathring{\mathscr{S}}_q^k$, обращающихся в нуль в какой-либо точке $(x_0,\theta_0)\in\tilde{\mathrm{R}}^n\times S^{n-1}$ (см., например, [70]). Следовательно, если $f\in\mathring{\mathscr{S}}_q^k$ и $f(x,\theta)\neq0$ на $\tilde{\mathrm{R}}^n\times S^{n-1}$, то $f^{-1}\in\mathring{\mathscr{S}}_q^k$ (см. гл. 1, п.1.4).

4.2. Пусть теперь A и B — сингулярные интегральные операторы вида (4.19) с символами $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}\in\mathring{\mathscr{S}}_q^k$, где $k=n/2+$ $+(n-2)|1/q-1/2|$ и q удовлетворяет условию (CZ_p) из теоремы п.1.3. Обозначим через C сингулярный интегральный оператор с символом $\mathscr{A}\cdot\mathscr{B}$, а через $[A,B):=AB-C$ — *полукоммутатор* операторов A, B. Из результатов п.3.3. вытекает

Теорема. Если $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}\in\mathring{\mathscr{S}}_q^k$, то $[A,B)\in\mathscr{K}(L_p(\mathrm{R}^n))$.

Следствие 1. Если $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}\in\mathring{\mathscr{S}}_q^k$, то $[A,B]\in\mathscr{K}(L_p(\mathrm{R}^n))$.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{A}\in\overset{\circ}{\mathcal{S}}{}^k_q$ и $\inf|\mathcal{A}|>0$. Тогда сингулярный оператор с символом $\mathcal{A}^{-1}$ является регуляризатором оператора A и, следовательно, A — нётеров в пространстве $L_p(\mathbf{R}^n)$.

4.3. Если A — сингулярный интегральный оператор (4.19), $\mathcal{A}$ — его символ, а T — произвольный компактный оператор в $L_p(\mathbf{R}^n)$, то естественно называть функцию $\mathcal{A}$ *символом* «общего» сингулярного оператора $A+T$. Из теоремы п.4.2 непосредственно следует, что сумме и произведению двух общих сингулярных операторов с символами из алгебры $\overset{\circ}{\mathcal{S}}{}^k_q$ отвечают соответственно сумма и произведение их символов.

Теорема. Пусть A — общий сингулярный оператор с символом $\mathcal{A}\in\overset{\circ}{\mathcal{S}}_q$, где $k=n/2+(n-2)|1/q-1/2|$ и q удовлетворяет условиям (CZ_p) и $(CZ_{p'})$, $p'=p/(p-1)$, из теоремы п.1.3. Тогда оператор, сопряженный к $A\in\mathcal{L}(L_p(\mathbf{R}^n))$, $1<p<\infty$, является общим сингулярным оператором с символом $\overline{\mathcal{A}}$, комплексно сопряженным к $\mathcal{A}$.

Теорема. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и $\inf|\mathcal{A}|>0$. Тогда $\operatorname{Ind} A=0$.

Отметим, что эта теорема не имеет одномерного аналога.

Результаты п. 4.2 и п. 4.3 принадлежат С. Г. Михлину [30] (см. также [70]).

4.4. Важным дополнением к предыдущим результатам является следующая теорема, доказанная И. Ц. Гохбергом (1960) для $p=2$ и обобщенная Сили (1965) и Н. Я. Крупником (1965) на случай произвольного $p\in(1,\infty)$.

Теорема. Пусть выполнены условия первой теоремы из п. 4.3. Если A является нётеровым оператором в пространстве $L_p(\mathbf{R}^n)$, $1<p<\infty$, то $\inf|\mathcal{A}|>0$.

Из этой теоремы точно так же, как в одномерном случае (см. гл. 3, п. 2.1.2), выводится оценка

$$\max_{(x,\theta)\in\tilde{\mathbf{R}}^n\times S^{n-1}}|\mathcal{A}(x,\theta)|\leqslant\|A+T\| \tag{4.28}$$

для любого компактного оператора $T\in\mathcal{K}(L_p(\mathbf{R}^n))$. При $p=2$ справедливо равенство (Сили, 1965)

$$\max_{(x,\theta)\in\tilde{\mathbf{R}}^n\times S^{n-1}}|\mathcal{A}(x,\theta)|=\inf_T\|A+T\|. \tag{4.29}$$

4.5. Обозначим теперь через $\mathfrak{A}_p$, $1<p<\infty$, замыкание по норме $\mathcal{L}(L_p(\mathbf{R}^n))$ множества $\mathfrak{A}$ всех операторов вида

$$\sum_{m=0}^{j}\sum_{k=1}^{\varkappa_m}a_m^{(k)}A_m^{(k)}+T;\quad A_0^{(1)}=I,\quad T\in\mathcal{K}(L_p(\mathbf{R}^n)),\quad j=0,1,\ldots,$$

где $a_m^{(k)}\in C(\tilde{\mathbf{R}}^n)$. Для операторов из $\mathfrak{A}$ справедливы оценки (4.28), (4.29). Если (A_j) — последовательность операторов из $\mathfrak{A}$, сходящаяся к оператору $A\in\mathfrak{A}_p$, а $\mathcal{A}_j$ — их символы, то, в силу (4.28), последовательность $(\mathcal{A}_j)$ сходится равномерно на $\tilde{\mathbf{R}}^n\times S^{n-1}$ к непрерывной функции $\mathcal{A}$. Назовем функцию $\mathcal{A}$ *символом* оператора $A\in\mathfrak{A}_p$.

Отметим, что если A — сингулярный интегральный оператор вида (4.19) с символом $\mathcal{A}\in\overset{\circ}{\mathcal{S}}{}^k_q$ (см. первую теорему п. 4.3), то $A\in\mathfrak{A}_p$. Ясно, что для всех операторов $A\in\mathfrak{A}_p$ остаются в силе соотношения (4.28), (4.29) и также все остальные результаты настоящего параграфа. Более того, символ осуществляет изоморфизм факторалгебры $\mathfrak{A}_p/\mathcal{K}(L_p(\mathbf{R}^n))$ на алгебру $C(\tilde{\mathbf{R}}^n\times S^{n-1})$ (см. гл. 1, п. 1.4 и п. 1.6). В случае $p=2$ алгебра $\mathfrak{A}_p/\mathcal{K}(L_p(\mathbf{R}^n))$ является C^*-алгеброй и символ есть изометрический $*$-изоморфизм (И. Ц. Гохберг (1960), Сили (1965)).

4.6. Аналогичные результаты справедливы для алгебры сингулярных интегральных операторов, рассматриваемых в пространствах Соболева $W_p^s(\mathbf{R}^n)$ и в других пространствах обобщенных функций (Н. Я. Крупник (1965), С. Г. Михлин (1977); см. также [70]). В. Г. Мазья и Т. О. Шапошникова [67] нашли приложения развитой ими теории мультипликаторов в пространствах дифференцируемых функций к теории сингулярных интегральных операторов в пространствах W_p^s. Они показали, что основные свойства сингулярных операторов с символами, гладкими по θ, сохраняются, если характеризовать гладкость по x в терминах пространств мультипликаторов. В известном смысле такие термины являются максимально общими.

§ 5. Сингулярные интегральные операторы на многообразии

До сих пор в настоящей главе речь шла о сингулярных интегральных операторах в $\mathbf{R}^n$, рассматриваемых в фиксированной системе координат. В этом параграфе будут кратко рассмотрены сингулярные интегральные операторы на гладком многообразии.

5.1. Пусть Γ—n-мерное бесконечно дифференцируемое многообразие, для простоты компактное, $\{U_j\}$ — конечная система координатных окрестностей на Γ и $\{\varphi_j\}$ — конечное разбиение единицы на Γ, состоящее из бесконечно гладких неотрицательных функций и подчиненное покрытию $\{U_j\}$ (т. е. такое, что $\operatorname{supp}\varphi_j\subset\subset U_j$ и $\sum\limits_j\varphi_j\equiv 1$).

На многообразии Γ можно определить пространство Соболева $W_p^s(\Gamma)$ (в частности, $L_p(\Gamma)$), пространство Гёльдера $C^\alpha(\Gamma)$ и другие часто используемые пространства функций. Если f — функция на Γ, то $f=\sum\varphi_jf$ в слагаемое φ_jf можно, переходя к локальным координатам, рассматривать как функцию на $\mathbf{R}^n$. Пространство $W_p^s(\Gamma)$ определяется как пополнение пространства бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $C^\infty(\Gamma)$ по норме

$$\| f \| = \sum \| \varphi_j f \|_{p,s},$$

где $\| \varphi_j f \|_{p;s}$ — норма в $W_p^s(\mathbf{R}^n)$ функции $\varphi_j f$. Аналогичным образом можно определить норму в $C_\alpha(\Gamma)$. Разные системы координатных окрестностей и разные разбиения единицы приводят к эквивалентным нормам.

5.2. Следуя Сили (1959), дадим следующее определение.

Оператор A, заданный на функциях из $L_p(\Gamma)$, $1<p<\infty$, называется *сингулярным интегральным оператором* в $L_p(\Gamma)$ (или просто, на Γ), если выполнены два условия:

1) для любых функций φ, $\psi \in C^\infty(\Gamma)$ с непересекающимися носителями оператор $\varphi A \psi$ компактен в $L_p(\Gamma)$;

2) для любых функций φ, $\psi \in C^\infty(\Gamma)$ с носителями, лежащими в одной координатной окрестности U_j с локальными координатами x, оператор $\varphi A \psi$ может быть представлен в форме $\varphi A_j L \psi + T_j$; здесь T_j — компактный в $L_p(\Gamma)$ оператор, A_j — сингулярный оператор вида (4.19) в $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}_x^n$, L — тождественный оператор, если U_j — внутренняя окрестность и L — оператор продолжения функций с полупространства $R_+^n = \{(x', x^n) \in \mathbf{R}^n : x^n \geqslant 0\}$ на $\mathbf{R}^n$, если U_j — граничная окрестность (в случае, когда Γ — многообразие с краем).

Из этого определения легко получить удобную формулу для сингулярного интегрального оператора A на многообразии Γ. Пусть ψ_j — функция из $C^\infty(\Gamma)$ с носителем, лежащим в U_j, равная 1 на носителе функции φ_j. Тогда

$$A = \Sigma \varphi_j A_j L \psi_j + T, \tag{4.30}$$

где T — компактный оператор в $L_p(\Gamma)$.

Символ сингулярного интегрального оператора A на Γ определяется как функция $\mathcal{A} : T^*\Gamma \setminus \{0\} \to \mathbf{C}$ на пучке ненулевых кокасательных векторов (p, ξ_p) $(p \in \Gamma)$ кокасательного расслоения $T^*\Gamma$; для точек $P \in U_j$ в локальных координатах x функция $\mathcal{A}$ совпадает с символом $\mathcal{A}_j(x, \xi)$ оператора A_j (с сужением символа $\mathcal{A}_j(x, \xi)$ на $x \in \mathbf{R}_+^n$, если U_j — граничная окрестность). Можно доказать, что символ $\mathcal{A}$ не зависит от выбора покрытия $\{U_j\}$ и разбиения единицы $\{\varphi_j\}$ (Сили, 1959).

Формула (4.30) позволяет перенести на сингулярные интегральные операторы на многообразии те факты, которые справедливы для сингулярных операторов в $\mathbf{R}^n$. В частности, сингулярные интегральные операторы на многообразии Γ без края с достаточно гладкими символами образуют C^*-алгебру. Более того, любой такой оператор A нётеров в $L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$ в том и только том случае, если $\inf |\mathcal{A}| > 0$; если последнее условие выполнено, то $\operatorname{Ind} A = 0$.

5.3. Пусть Γ—n-мерное замкнутое многообразие класса $C^{1,\alpha}$, $0<\alpha<1$. Если в условиях 1) и 2) предыдущего пункта заменить классы функции $C^\infty(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma)$ на $C^\alpha(\Gamma)$, то получим определение сингулярного интегрального оператора A в пространстве $C^\alpha(\Gamma)$. Классическая теорема Племеля—Привалова (см. гл. 3, п. 1.2.4) об ограниченности одномерного сингулярного оператора в $C^\alpha(\Gamma)$ была доказана Жиро (1934) для многомерного случая в предположении непрерывной дифференцируемости характеристики. Теорема Жиро была затем обобщена С. Г. Михлиным, Коном и Спенсером, Т. Г. Гегелиа, Тейблсоном, Н. М. Михайловой—Губенко, В. И. Шевченко, А. А. Хволесом и др. в разных направлениях (см. [70, гл. IX и XIII]). Сформулируем два наиболее общих результата, доказанных А. А. Хволесом (1974, 1978).

Теорема. Пусть $\mathcal{A}\hat{\in}W_2^{n/2+\varepsilon}(S^{n-1})$, где $\varepsilon>0$, и

$$\|\mathcal{A}(x+h,\ \cdot)-\mathcal{A}(x,\ \cdot)\|_{W_2^{n/2}(S^{n-1})}\leqslant B|h|^\alpha.$$

Тогда оператор A ограничен в $C^\alpha(\Gamma)$.

Теорема. Пусть $\mathcal{A}\hat{\in}W_2^l(S^{n-1})$, где $l>n/2$ и

$$\|\mathcal{A}(x+h,\ \cdot)-\mathcal{A}(x,\ \cdot)\|_{W_2^l(S^{n-1})}\leqslant B|h|^\alpha.$$

Если $\inf|\mathcal{A}|>0$, то любое решение $u\in L_2(\Gamma)$ уравнения $Au=g$ при $g\in C^\alpha(\Gamma)$ принадлежит $C^\alpha(\Gamma)$.

5.4. Нётеровы свойства матричного сингулярного интегрального оператора на гладком многообразии Γ с краем в пространстве $L_2{}^m(\Gamma)$ были исследованы И. Б. Симоненко (1965) с помощью предложенного им локального принципа (см. [35]). Эти результаты были обобщены Р. В. Дудучавой (1981, 1983) на случай пространств $L_p{}^m(\Gamma)$ и $W_p{}^s(\Gamma)$ (см. также Петерхэнзель, 1980). М. И. Вишиком и Г. И. Эскиным (1964—1967) развита теория эллиптических псевдодифференциальных уравнений в $W_2{}^s(\Gamma)$ на многообразии Γ с краем, включающая теорию многомерных сингулярных интегральных уравнений в областях с гладкой границей (см. [40]). В работах Б. А. Пламеневского и В. Н. Сеничкина (1981, 1985) были изучены алгебры сингулярных интегральных и псевдодифференциальных операторов на многообразии с коническими особенностями (см. также §§ 7, 9).

§ 6. Системы сингулярных интегральных уравнений. Формула для индекса

В настоящем параграфе Γ означает либо евклидово пространство $\mathbf{R}^n$, либо n-мерное компактное гладкое многообразие без края. Будем рассматривать системы сингулярных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{m} A_{jk}u_k = g_j, \quad j=1,\dots,m, \qquad (4.31)$$

где A_{jk} $(j,k=1,\dots,m)$ — сингулярный интегральный оператор, определенный в §§ 1 и 5. Предположим, что символ $\mathcal{A}_{jk}$ оператора A_{jk} удовлетворяет условиям, сформулированным в §§ 4 и 5.

Введя матрицу $A=(A_{jk})_1^n$ и векторы-столбцы u и g с составляющими $u_1,\dots,u_n$ и $g_1,\dots,g_n$, соответственно, можно записать систему (4.1) в виде одного уравнения $Au=g$ (см. также гл. 3, § 3). Матрица A называется *матричным сингулярным оператором*, а матрица $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{jk})_1^n$ — *символом* (или *символической матрицей*) оператора A.

Матричные сингулярные операторы перемножаются по обычному правилу умножения матриц; такое умножение, конечно, в общем случае некоммутативно. Из результатов §§ 4 и 5 следует, что произведению матричных сингулярных операторов соответствует произведение их символов. Очевидно также, что сумме матричных сингулярных операторов соответствует сумма их символов. Более того, символом сингулярного интегрального оператора $\det A$ (см. также гл. 3, п. 3.1) является функция $\det\mathcal{A}$. В силу результатов §§ 4, 5 и первой теоремы гл. 3, п. 3.1, отсюда вытекает

Теорема. Матричный сингулярный оператор A нётеров в пространстве $L_p{}^m(\Gamma)$ в том и только том случае, если

$$\inf|\det\mathcal{A}|>0. \qquad (4.32)$$

Будем считать, что условие (4.32) выполняется. В отличие от случая скалярного сингулярного оператора $(m=1)$, индекс матричного сингулярного оператора A может быть отличен от нуля; это, по-видимому, впервые было показано А. И. Вольпертом (1960). Индекс матричного сингулярного оператора исследован в работах А. И. Вольперта (1962), А. С. Дынина (1961, 1962), Сили (1963, 1965), Атьи и Зингера (1963, 1968—1971), С. Г. Михлина (1963), Боярского (1963), М. С. Аграновича (1965), Б. В. Федосова (1970, 1974) и др. Полное решение задачи о вычислении индекса общего эллиптического оператора в случае многообразия без края дано в работах Атьи и Зингера, а в случае многообразия с краем — Атьи и Ботта (1964). По отношению к классу операторов, рассмотренных названными авторами, матричные сингулярные операторы являются довольно узким подклассом. Работа Атьи, Зингера и Ботта породили большой поток исследований, в значительной мере изложенных в книгах [43], [72], [79] (см. также [70 гл. XIV]).

Приведем здесь частный случай формулы Атьи—Зингера. Пусть Γ — n-мерное компактное многообразие без края, вложенное в евклидово пространство $\mathbf{R}^N$ достаточно большой размерности N. Если матричный сингулярный оператор A удовлетворяет условию (4.31), то справедлива формула (Б. В. Федосов, 1970)

$$\operatorname{Ind} A = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(2\pi i)^n (2n-1)!} \int\limits_{S^*\Gamma} \operatorname{tr} (\mathcal{A}^{-1} d\mathcal{A})^{2n-1}. \tag{4.33}$$

Здесь $S^*\Gamma$ — расслоение на единичные сферы в кокасательном расслоении $T^*\Gamma$, и степень под знаком интеграла понимается в смысле внешнего умножения дифференциальных форм.

В случае $\Gamma = \mathbf{R}^n$ формула (4.33) упрощается. Для простоты будем считать, что символ $\mathcal{A}(x, \xi)$ совпадает с единичной матрицей вне некоторого шара $|x| < a$. Тогда в формуле (4.33) можно интегрировать не по $S^*\Gamma$, а по границе S^{2n-1} шара $D_a : |x|^2 + |\xi|^2 \leqslant a^2$, ориентация которой согласована с ориентацией пространства $\mathbf{R}^{2n}$, определяемой порядком следования координат $x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, \dots, x_n, \xi_n$.

§ 7. Краткие замечания о других результатах

7.1. В работах Б. А. Пламеневского (1979, 1982) и Б. А. Пламеневского, В. Н. Сеничкина (1981, 1985) рассматриваются C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, порожденные многомерными сингулярными интегральными операторами (точнее, псевдодифференциальными операторами нулевой степени, см. § 9) на замкнутом многообразии с особыми «коническими» точками. Вводятся операторные символы сингулярных операторов и устанавливается изоморфизм между факторалгеброй $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ (по идеалу компактных операторов) и алгеброй операторных символов. В символах допускаются особенности двух типов; в случае первого типа при подходе к точке разрыва существует предел символа, зависящий от направления подхода, а в случае второго типа символ может осциллировать вблизи особой точки. Выясняется зависимость спектра элементов алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ от характера особенности символов, от особенностей многообразия, от выбора функциональных пространств. Любой из разрывов указанных типов приводит к появлению бесконечномерных представлений алгебры $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ (если размерность многообразия $\dim \Gamma \geqslant 2$; при $\dim \Gamma = 1$ разрывы первого типа порождают двумерные представления, а разрывы второго типа — бесконечномерные). Оказывается, что даже в гладкой ситуации алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ может иметь бесконечномерные неприводимые представления, если рассматривать сингулярные операторы в пространствах с весовыми нормами (в $L_p(\Gamma)$ все неприводимые представления одномерны, см. § 5).

7.2. В цикле работ Н. Л. Василевского (с 1979 г.) изучена банахова алгебра $\mathfrak{R}$, порожденная всеми действующими в пространстве $L_2(\bar{D})$ операторами вида

$$A = aI + bK_D + T.$$

Здесь D — ограниченная область в комплексной плоскости, граница которой состоит из конечного числа замкнутых непересекающихся гладких кривых, a и b — кусочно-непрерывные в области D функции, T — компактный оператор, а K_D — оператор, определенный в $L_2(\bar{D})$ равенством

$$(K_D u)(z) = \iint_D k_D(z, \bar{\zeta})\, u(\zeta)\, dD_{\zeta},$$

где $k_D(z, \bar{\zeta}) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 G(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}$ — так называемая керн-функция Бергмана области D, G — функция Грина области D. Отметим, что в случае единичного круга D функция k_D имеет вид $k_D(z, \bar{\zeta}) = [\pi(1 - z\bar{\zeta})^2]^{-1}$.

Сингулярный оператор K_D имеет много общих свойств с одномерным сингулярным оператором Коши (см. гл. 3, п. 1.2). В частности, $K_D \in \mathscr{L}(L_2(\bar{D}))$, $K_D^2 = K_D$, и для любой функции $c \in C(\bar{D})$ коммутатор $cK_D - K_D c$ компактен. Следовательно, алгебра $\mathfrak{R}$ совпадает с наименьшей банаховой алгеброй, порожденной всеми операторами вида $aI + bS_D + T$, где $S_D = I - 2K_D$. Очевидно, что $S_D{}^2 = I$. Таким образом, алгебру $\mathfrak{R}$ можно рассматривать как некоторый двумерный аналог алгебры $\mathfrak{A}$ одномерных сингулярных интегральных операторов, рассмотренной в п. 3.4, гл. 3.

С помощью локального принципа (см. [11], [35]) Н. Л. Василевский дал описание C^*-алгебры символов, изоморфной алгебре $\mathfrak{R}/\mathscr{K}$. Доказано, что все неприводимые представления алгебры символов имеют размерность один или два. В терминах символа указаны критерии нётеровости операторов из $\mathfrak{R}$ и получены формулы для индекса. Эти теоремы обобщают результаты, установленные А. А. Джураевым (1979) в случае $a, b \in C^1(D) \cap C^{\alpha}(\bar{D})$, $0 < \alpha < 1$, и И. И. Комяком (1979) в случае непрерывных коэффициентов a, b.

7.3. По сравнению с одномерными уравнениями (см. гл. 3, § 7), многомерные сингулярные интегральные уравнения с обращающимся в нуль символом изучены недостаточно. Важные результаты известны для двух классов многомерных уравнений с вырождающимся символом: во-первых, для уравнения с символом, зависящим только от $\xi \in S^{n-1}$ (см. п.п. 1.1—1.2, § 1) (В. Г. Мазья и Б. А. Пламеневский (1965), В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский и Ю. Е. Хайкин (1977), Лоренц (1974—1979), Шефер (1980); во-вторых, для уравнений с многомерным аналогом сингулярного интеграла Коши, введенным А. В. Бицадзе (1953) (Шпрессиг (1974)). Обзор этих исследований можно найти в гл. XVI монографии [70].

§ 8. Многомерные операторы Винера — Хопфа

8.1. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и $a\in L_\infty(\mathbf{R}^n)$. Через P_Ω обозначим канонический проектор из $L_2(\mathbf{R}^n)$ на $L_2(\Omega)$, а через $L_\Omega : L_2(\Omega)\to L_2(\mathbf{R}^n)$ — оператор продолжения

$$(L_\Omega\varphi)(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{при } x\in\Omega\\ 0 & \text{при } x\in\mathbf{R}^n\setminus\Omega.\end{cases}$$

Действующий в пространстве $L_2(\Omega)$ оператор $W_\Omega(a):=P_\Omega F^{-1}aFL_\Omega$ называется *многомерным интегральным оператором Винера—Хопфа*. Если a имеет вид $a=c+Fk$, где $c\in\mathbf{C}$, $k\in L_1(\mathbf{R}^n)$, то $W_\Omega(a)$ допускает представление

$$(W_\Omega(a)\varphi)(x)=c\varphi(x)+\int_\Omega k(x-t)\varphi(t)\,dt\quad(x\in\Omega)$$

(см. гл. 3, § 6).

8.2. Пусть теперь G — подмножество $\mathbf{Z}^n$, $\mathbf{T}$ — единичная окружность и $a\in L_\infty(\mathbf{T}^n)$. Через P_G обозначим канонический проектор из $l_2(\mathbf{Z}^n)$ на $l_2(G)$, через L_G: $l_2(G)\to l_2(\mathbf{Z}^n)$ — оператор продолжения нулем, а через V — канонический изоморфизм из $l_2(\mathbf{Z}^n)$ на $L_2(\mathbf{T}^n)$. Оператор $W_G(a):=P_GV^{-1}aVL_G$, действующий в $l_2(G)$, называется *многомерным дискретным оператором Винера—Хопфа*; его можно рассматривать как обобщение одномерного оператора в $l_2(\mathbf{Z}_+)$, порожденного тёплицевой матрицей (см. гл. 3, п. 6.1). Если последовательность $\{a_k\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$ коэффициентов Фурье функции a принадлежит $l_1(\mathbf{Z}^n)$, то $W_G(a)$ можно записать в виде

$$(W_G(a)\varphi)_j=\sum_{k\in G}a_{j-k}\varphi_k\quad(j\in G).$$

Функция $a\in L_\infty(\mathbf{T}^n)$ (соответственно $a\in L_\infty(\mathbf{R}^n)$) называется *символом* оператора $W_G(a)$ (соответственно $W_\Omega(a)$).

При некоторых дополнительных ограничениях на символ a можно продолжить операторы $W_\Omega(a)\,|_{L_2(\Omega)\cap L_p(\Omega)}$ и $W_G(a)\,|_{l_2(G)\cap l_p(G)}$ до ограниченных операторов, действующих в пространствах $L_p(\Omega)$ и $l_p(G)$ $(1\leqslant p<\infty)$, соответственно.

8.3. Обычно предполагается, что Ω и G — конические множества, т. е. что вместе с каждой своей точкой эти множества содержат весь луч, исходящий из начала координат и проходящий через эту точку. Для случая полупространств $\Omega=\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}_+$ и $G=\mathbf{Z}^{n-1}\times\mathbf{Z}_+$ теория многомерных операторов Винера—Хопфа была построена Л. С. Гольдштейном и И. Ц. Гохбергом (1960, 1967); она, по существу, аналогична теории одномерных операторов Винера—Хопфа (см. также [12, § 4, гл. III]). Для более общих множеств Ω и G теория многомерных операторов Винера—Хопфа существенно сложнее чем в одномерном случае и она еще не завершена.

8.4. В качестве примера рассмотрим случай четверти плоскости: $\Omega=\mathbf{R}^2_{++}=\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+$ и $G=\mathbf{Z}^2_{++}=\mathbf{Z}_+\times\mathbf{Z}_+$.

Начало нётеровой теории операторов Винера—Хопфа с непрерывными символами в пространствах $L_p(\mathbf{R}^2_{++})$ и $l_p(\mathbf{Z}^2_{++})$ было положено в работах И. Б. Симоненко (1967, 1968) и Дугласа, Хоу (1971). Этим авторам принадлежит следующий критерий.

Теорема. Пусть $a\in C(\mathbf{T}^2)$. Для каждой точки $\tau\in\mathbf{T}$ определим функции b_τ, $c_\tau\in C(\mathbf{T})$ равенствами $b_\tau(t)=a(t,\tau)$, $c_\tau(t)=a(\tau,t)$ $(t\in\mathbf{T})$. Оператор $W_{\mathbf{Z}^2_{++}}(a)\in\mathcal{L}(l_2(\mathbf{Z}^2_{++}))$ нётеров в том и только том случае, если операторы $W_{\mathbf{Z}_+}(b_\tau)$ и $W_{\mathbf{Z}_+}(c_\tau)$ обратимы в $l_2(\mathbf{Z}_+)$ для любой точки $\tau\in\mathbf{T}$. Если эти условия выполнены, то $\operatorname{Ind}W_{\mathbf{Z}^2_{++}}(a)=0$.

Аналогичные критерии справедливы для интегральных операторов Винера—Хопфа в случае матричных символов и при $p\neq2$. В доказательстве И. Б. Симоненко, основанном на локальном принципе, вопрос сводится к случаю полуплоскости. Дуглас и Хоу применили технику C^*-алгебр. Стрэнг (1970) и Р. В. Дудучава (1977) доказали достаточность условий теоремы, построив регуляризатор оператора $W_{\mathbf{Z}^2_{++}}(a)$ (см. также В. С. Пилиди (1971)).

Теория Нётера для оператора $W_{\mathbf{R}^2_{++}}(a)$ с кусочно-непрерывным символом в пространстве $L_p(\mathbf{R}^2_{++})$, $1<p<\infty$, была разработана Р. В. Дудучавой (1976). Аналогичные вопросы для дикретного оператора $W_{\mathbf{Z}^2_{++}}(a)$ изучены Р. В. Дудучавой (1977) при $p=2$ и Бёттхером (1983) для произвольного $p\in(1,\infty)$. Во всех указанных случаях доказано, что двумерный оператор Винера—Хопфа нётеров тогда и только тогда, когда обратимы все операторы, принадлежащие некоторым двум семействам одномерных операторов Винера—Хопфа.

8.5. Вопрос об обратимости операторов Винера—Хопфа в четверти плоскости является весьма трудным и его более или менее полное решение в настоящее время известно лишь для специальных классов символов.

Дуглас и Хоу (1971) впервые указали пример необратимого нётерова дискретного оператора Винера—Хопфа на квадранте. Пусть символ a имеет вид $a(\xi,\eta)=b(\xi\eta^{-1})$ $(\xi,\eta\in\mathbf{T})$, где $b\in C(\mathbf{T})$ и пусть b_k $(k=0,\pm1,\ldots)$—коэффициенты Фурье функции b. Тогда оператор $W_{\mathbf{Z}^2_{++}}(a)$ нётеров (обратим) в $l_2(\mathbf{Z}^2_{++})$ в том и только том случае, если матрицы $B_n:=(b_{j-k})^n_{j,k=0}$ неособенны для всех достаточно больших n (для всех $n=0, 1, \ldots$) и если нормы обратных матриц B_n^{-1} ограничены независимо от n.

Назовем некоторые другие классы символов, для которых известны критерии обратимости соответствующего оператора Винера — Хопфа на квадранте: 1) символ a допускает факторизацию $a=a_{--}a_{-+}a_{++}$, где $a_{\pm\pm}(\xi, \eta)=\sum\limits_{i,j} a_{ij}\xi^i\eta^j\ (i\in\mathbf{Z}_{\pm},\ j\in\mathbf{Z}_{\pm})$ (В. С. Рабинович, 1967); 2) символ a имеет вид $a(\xi, \eta)=b(\xi)\,c(\eta)+d(\xi)$ (Ошер, 1970)); 3) $a(\xi, \eta)=(\xi-\lambda)^{-1}(\eta-\mu)^{-1}\times\sum\limits_{i,j\geqslant 0} a_{ij}\xi^i\eta^j$, $|\lambda|<1$, $|\mu|<1$ (В. А. Малышев 1975, Дуглас 1973); 4) носитель ядра $k(x)$ $(x\in\mathbf{R}^2)$ или $\{a_k\}_{k\in\mathbf{Z}^2}$ лежит в некоторой полуплоскости, граница которой проходит через начало координат (Бёттхер и А. Э. Пасенчук, 1982).

Майстер и Шпек (1984) указали способ явного построения обобщенного обратного (см. гл. 1, п. 3.2) для оператора Винера—Хопфа на квадранте.

По поводу обратимости, других результатов и различных приложений многомерных операторов Винера—Хопфа см. также обзоры [26], [68], [69].

8.6. Теория многомерных операторов Винера—Хопфа с вырождающимся символом намного сложнее и менее разработана чем соответствующая одномерная теория (см. гл. 3, § 7). Известные до сих пор результаты в этом направлении относятся, главным образом, к операторам на квадранте с так называемыми «аналитическими» символами вида $a_{\mp\pm}$ или a_{--} (см. В. Б. Дыбин и А. Э. Пасенчук, 1978; М. Б. Городецкий, 1980; Бёттхер, 1984; И. И. Кислицкий, 1985).

8.7. В заключение этого параграфа отметим, что, в силу результатов §§ 5 и 6, гл. 3, одномерный оператор Винера—Хопфа $W_{\mathbf{Z}_+}(a)$ с символом $a\in L_\infty(\mathbf{T})$ можно отождествить с тёплицевым оператором T_a, действующим в пространстве Харди $H_2=H_2(\mathbf{D})$ ($\mathbf{D}$ — единичный диск в $\mathbf{C}$). Отсюда следует, что существуют другие возможности многомерного обобщения одномерного оператора Винера—Хопфа, которые принципиально отличаются от определений, данных в пунктах 8.1 и 8.2. Одним из таких обобщений является оператор $T_B(a)$, определяемый в пространстве Харди $H_2(B)$ (B — единичный шар или более общая область в $\mathbf{C}^n$) равенством $T_B(a)f=P_Baf$, где P_B — ортопроектор из $L_2(B)$ на $H_2(B)$, $a\in L_\infty(B)$ (см. Кобурн, 1973; Венугопалькришна 1972; Дуглас, 1973; Макдональд, 1977; Дэви, Джевел, 1977). Отметим, что оператор $TD^n(a)$ унитарно эквивалентен оператору $W_{\mathbf{Z}_+^n}(a)$. См. также обзор [59], где изучаются связи между операторами $T_B(a)$ и псевдодифференциальными операторами.

§ 9. Псевдодифференциальные операторы

Понятие псевдодифференциальных операторов (ПДО) является естественным обобщением понятия сингулярных интегральных операторов (см. § 1). Основы теории ПДО были заложены в 1965 г. в работах Кона и Ниренберга [66], Хёрмандера [63] и Сили [82]. Подробное изложение различных аспектов современной теории ПДО и ее приложений дано в монографиях [39], [40], [64], [88]. Остановимся здесь лишь на простейших фактах, относящихся к ПДО и примыкающих к результатам §§ 1, 4, 5 (подробнее см. [2], [70]).

9.1. Пусть $a(x, \xi)$ — скалярная или матричная комплекснозначная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, положительно однородная по ξ степени $\sigma \geqslant 0$:

$$a(x, t\xi) = t^\sigma a(x, \xi), \quad t > 0.$$

Предположим, что существует предел $a(\infty, \xi) = \lim\limits_{|x| \to \infty} a(x, \xi)$, причем разность $a(x, \xi) - a(\infty, \xi)$, рассматриваемая как функция от x, равномерно по ξ принадлежит пространству $S(\mathbf{R}^n)$ функций, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными по x быстрее любой степени $|x|$.

Однородным псевдодифференциальным оператором с *символом* $a(x, \xi)$ называется оператор

$$(Au)(x) = F^{-1}_{\xi \to x} a(x, \xi) F_{x \to \xi} u, \tag{4.34}$$

определенный на функциях $u \in S(\mathbf{R}^n)$. Число σ называется *степенью* ПДО (4.34).

Отметим два частных случая: 1) при $\sigma = 0$ ПДО (4.34) является сингулярным интегральным оператором с символом a (см. формулу (4.11)); 2) если

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = \sigma} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

— полином степени σ относительно ξ, то A представляет собой дифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \sum_{|\alpha| = \alpha} a_\alpha(x) D^\alpha u(x).$$

9.2. В теории ПДО играют важную роль пространства Соболева—Слободецкого $H^l := W_2{}^l(\mathbf{R}^n)$ $(l \in \mathbf{R})$, определяемые как пополнение пространства $S(\mathbf{R}^n)$ по норме

$$\|u\|_l = \left(\int (1 + |\xi|^2)^l |(Fu)(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Если некоторый линейный оператор A ограниченно действует из H^l в $H^{l-\sigma}$ при всех $l \in \mathbf{R}$ и некотором $\sigma \in \mathbf{R}$, то говорят, что *A — оператор порядка σ*. Нижняя грань всех порядков оператора A называется его *истинным порядком.*

Оказывается, что однородный ПДО степени $\sigma \geqslant 0$ имеет порядок σ (*теорема об ограниченности*).

Особую роль в теории ПДО играет алгебра $\mathscr{L}_{-\infty}$ всех операторов истинного порядка $-\infty$; ее роль в известной мере аналогична роли идеала компактных операторов в теории сингулярных интегральных операторов.

9.3. ПДО отрицательной степени определяется следующим образом. Пусть a — функция, удовлетворяющая условиям п. 9.1 с одним исключением: степень $\sigma < 0$. Тогда она имеет особеннсть при $\xi = 0$, и формула (4.34) может потерять смысл. Чтобы обойти эту трудность, введем в рассмотрение неотрицательную функцию $\zeta \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, равную нулю в некоторой окрестности точки $\xi = 0$ и единице вне несколько большей окрестности. Положим

$$(A_{\zeta} u)(x) = F^{-1}_{\xi \to x} a(x, \xi) \zeta(\xi) F_{x \to \xi} u. \qquad (4.35)$$

Оператор A_{ζ} называется *однородным псевдодифференциальным оператором отрицательной степени* σ *с символом* a.

В отличие от случая $\sigma \geqslant 0$ и оператора A, определяемого формулой (4.34), оператор A_{ζ} восстанавливается по своему символу не единственным образом. Однако, $A_{\zeta_1} - A_{\zeta_2} \in \mathscr{L}_{-\infty}$ для разных функций ζ_1, ζ_2. Это утверждение верно и при $\sigma \geqslant 0$ — более того, в этом случае $A - A_{\zeta} \in \mathscr{L}_{-\infty}$. Поэтому и при $\sigma \geqslant 0$ естественно называть оператор A_{ζ} однородным ПДО степени σ с символом a.

Теорема об ограниченности ПДО верна и в случае отрицательной степени.

9.4. Если A и B — однородные ПДО с символами $a(\xi)$ и $b(\xi)$, не зависящими от x, то очевидно, что произведение AB есть ПДО с символом $a(\xi) b(\xi)$. В общем случае справедлива

Теорема (*об умножении ПДО*). Пусть A и B — однородные ПДО с символами a и b, степени которых равны σ_a, σ_b, соответственно. Тогда при любом натуральном ρ справедливо представление $AB = C_0 + C_1 + \ldots + C_{\rho-1} + T_{\rho}$, где C_k ($k = 0, \ldots, \rho - 1$) однородный ПДО степени $\sigma_a + \sigma_b - k$ с символом

$$c_k(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} \partial^{\alpha} a(x, \xi) D^{\alpha} b(x, \xi), \qquad (4.36)$$

а T_{ρ} — оператор порядка $\sigma_a + \sigma_b - \rho$.

В формуле (4.36) ∂^{α} означает дифференцирование по ξ, а D^{α} — дифференцирование по x.

Таким образом, для произведения AB двух однородных ПДО получено асимптотическое разложение в ряд из ПДО убывающих степеней $\sigma_a + \sigma_b$, $\sigma_a + \sigma_b - 1, \ldots$. В частности, отсюда вытекает, что полукоммутатор $[A, B)$ (см. п. 4.2) — оператор порядка $\sigma_a + \sigma_b - 1$.

9.5. Пусть А — однородный ПДО степени σ с символом a и B — однородный ПДО с символом a^*, где a^* — матрица, сопряженно-транспонированная к a. Обозначим через A^* оператор, сопряженный с A относительно скалярного произведения в $L_2(\mathbf{R}^n)$. Если символ $a=a(\xi)$ не зависит от x, то, как легко видеть, $B=A^*$. В общем случае справедлива

Теорема. Пусть A — однородный ПДО степени σ с символом $a(x, \xi)$. Тогда при любом натуральном ρ имеет место представление

$$A^*=\sum_{k=0}^{\rho-1} B_k+T_\rho,$$

где B_k — ПДО с символом

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \partial^\alpha a^* (x, \xi),$$

а T_ρ — оператор порядка $\sigma-\rho$.

9.6. Теоремы п.п. 9.4 и 9.5 показывают, что операции умножения и перехода к сопряженному оператору выводят за пределы совокупности однородных ПДО. С другой стороны, эти теоремы подсказывают способ построения C^*-алгебры, порожденной ПДО. Этот способ состоит в том, что в ПДО включаются младшие члены, которые составляются из ПДО понижающихся порядков. Дадим теперь точное определение упомянутой C^*-алгебры.

Пусть (σ_k) — строго монотонно убывающая последовательность вещественных чисел, конечная или бесконечная; если она бесконечная, то потребуем, чтобы $\sigma_k \to -\infty$. Пусть A_k — однородный ПДО степени σ_k с символом a_k. Наконец, пусть A — оператор, определенный на функциях из $S(\mathbf{R}^n)$, такой, что разность $A-\sum\limits_{k=0}^{N} A_k$ при любом натуральном N является оператором порядка меньше σ_N. Тогда говорят, что A — *псевдодифференциальный оператор с асимптотическим разложением*

$$A \sim \sum_{0}^{\infty} A_k. \tag{4.37}$$

Символом оператора A называется формальный ряд

$$a(x, \xi) \sim \sum_{0}^{\infty} a_k(x, \xi); \tag{4.38}$$

слагаемое a_0 называется *старшей частью символа.*

Обозначим через $\mathcal{L}$ класс ПДО с асимптотическим разложением вида (4.37). Если (σ_k) — конечная последовательность, то оператор $A \in \mathcal{L}$ определяется равенством $A=\Sigma A_k+T$, где $T \in \mathcal{L}_{-\infty}$ является частным случаем ПДО класса $\mathcal{L}$, символ которого тождественно равен нулю. Более того, оператор $A \in \mathscr{L}$ определяется по своему символу с точностью до произвольного слагаемого $T \in \mathscr{L}_{-\infty}$.

Можно доказать, что всякому формальному ряду (4.38) из символов a_k убывающих степеней отвечает ПДО $A \in \mathscr{L}$ с символом a (Хёрмандер, 1965).

Из теорем п. п. 9.4 и 9.5 вытекает, что $\mathscr{L}$ — алгебра с инволюцией $*$; символы c и d операторов AB и A^* определяются через символы a и b операторов A, $B \in \mathscr{L}$ формулами

$$c \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial^{\alpha} a D^{\alpha} b, \quad d \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} \partial^{\alpha} a^*$$

в смысле равенства членов одинаковых степеней слева и справа от знака $\sim$. Здесь a^* — формальный ряд $a^* \sim \sum_{0}^{\infty} a_k^*$.

9.7. Пусть теперь Γ — n-мерное бесконечно гладкое компактное многообразие без края. По аналогии с определением сингулярного интегрального оператора на Γ (см. п. 5.2) оператор A, действующий в пространстве $C^{\infty}(\Gamma)$, называется *псевдодифференциальным оператором степени σ на* Γ при выполнении двух условий.

1) Если носители функций φ, $\psi \in C^{\infty}(\Gamma)$ не пересекаются, то $\varphi A \psi$ — оператор порядка σ—1 (т. е. $\varphi A \psi \in \mathscr{S}(H^l(\Gamma), H^{l-\sigma+1}(\Gamma))$ при всех $l \in \mathbf{R}$).

2) Выполняется условие 2 п. 5.2 с той лишь разницей, что в его формулировке A_j — однородный ПДО степени σ в $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}_x^n$, T_j — оператор порядка σ—1.

Символ ПДО на Γ определяется точно так же, как в случае сингулярного интегрального оператора на Γ (см. п. 5.2).

ПДО на Γ образуют алгебру с инволюцией $*$ (точнее, с операцией сопряжения относительно скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$). Более того, если A — ПДО степени σ на Γ, то A — нётеровый оператор из $H^l(\Gamma)$ в $H^{l-\sigma}(\Gamma)$ в том и только том случае, когда его символ не обращается в нуль (является невырожденным в матричном случае). Индекс оператора $A \in \mathscr{L}(H^l(\Gamma), H^{l-\sigma}(\Gamma))$ не зависит от l.

9.8. Обобщением ПДО являются так называемые *интегральные операторы Фурье*. Изложение этой теории см. в [39], [88].

АННОТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Начнем с аннотации некоторых книг и обзорных статей из приводимого ниже списка литературы.

В справочниках [16] и [56] изложены результаты по основным направлениям теории интегральных уравнений и их приложений. Книги [65] и [56] содержат подробное и современное изложение классических теорий линейных операторных уравнений и интегральных уравнений типов Вольтерра и Фредгольма, а также некоторых приближенных методов их решения. В учебниках [29], [33], [80], [81] излагаются основы этой теории.

В книгах [56], [65], [91] рассматриваются также некоторые типы сингулярных уравнений, а в [16], [91] — некоторые классы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра и Фредгольма первого рода изложены в книгах [18], [56], [81].

Книги [62] и [92] стоят у истоков общей теории интегральных уравнений типов Фредгольма и Вольтерра. В монографии [62] построена теория линейных интегральных уравнений Фредгольма на основе теории линейных и билинейных форм с бесконечным числом переменных и создана спектральная теория интегральных уравнений с симметричным ядром. В книге [61] дан обстоятельный и уникальный обзор всех результатов по интегральным уравнениям, опубликованных до 1928 г. В названных выше книгах обсуждаются также связи теорий Фредгольма и Гильберта — Шмидта с другими областями математики и многочисленные приложения к различным разделам физики, механики и техники.

Книги [10], [20], [65], [73], [80] содержат теорию идеалов линейных компактных операторов в абстрактных гильбертовых и банаховых простанствах. В монографии [73] изложена полная теория операторов Рисса в банаховых пространствах, включая теорию определителей Фредгольма.

Статьи [5] и [75] посвящены обзору современного состояния теории асимптотических оценок собственных и сингулярных чисел интегральных операторов. В обзорной статье [9] дано подробное изложение теории неограниченных нётеровых операторов в банаховых пространствах; дальнейшие исследования в этой области освещены в книгах [11], [23], [65], [70], [76].

Обстоятельное и изящное изложение теории одномерных сингулярных интегральных уравнений в гёльдеровых классах функций дано в монографии одного из создателей этой теории Н. И. Мусхелишвили [31]; значительная часть этой книги посвящена приложениям к решению задач теории потенциала, теории упругости и других основных разделов математнческой физики. В книгах [6] и [8] рассматриваются краевые задачи теории функций комплексного переменного и их приложения к сингулярным интегральным уравнениям с ядрами Коши, Гильберта, степенными, логарифмическими и некоторыми другими в тех же гёльдеровых классах функций.

Книги [11], [12], [76] посвящены теориям одномерных сингуляриых интегральных уравнений, уравнений Винера — Хопфа и некоторых их обобщений в различных функциональных пространствах; изложение основано на современных методах теории операторов и функционального анализа. В книгах [12], [76], [79] рассматриваются также проекционные методы приближенного решения упомянутых уравнений; в [76], [77] основное внимание уделено неэллиптическим уравнениям (с обращающимся в нуль символом).

В книге [49] систематически изложена классическая теория факторизации непрерывиых и кусочно-непрерывных матриц-функций, даны приложения к системам одномерных сингулярных интегральных уравнений. Разные вопросы обобщенной факторизации матриц- и оператор-функций и их приложений к сингулярным уравнениям и уравнениям Винера — Хопфа рассматриваются в монографиях [42], [44], [84].

Книга [13] посвящена теории двумерных краевых задач и одномерных сингулярных интегральных уравнений при широких предположениях о гладкости границы области и коэффициентов уравнений (класс допустимых граничных контуров охватывает кривые Ляпунова и кривые Радона). В обзорной статье [37] отражены основные исследования (опубликованные до середины 70-х годов) по теории интегралов типа Коши в связи с изучением граничных задач для аналитических функций в неклассических предположениях и приложения этой теории к граничной задаче сопряжения в постановке И. И. Привалова.

Книга [24] посвящена краевым задачам теории аналитических функций и одномерным сингулярным интегральным уравнениям со сдвигом. Различные классы интегральных и других уравнений со сдвигом изучены алгебраическими методами в книге [78].

В книге [14] излагается теория интегральных уравнений в свертках с ядрами, преобразования Фурье которых — разрывные функции, и сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями в ядре, рассматриваются приложения к задачам теории упругости и математической физики. Статьи [3] и [34] содержат обзоры результатов по специальным направлениям теории интегральных уравнений в свертках (связи с нелинейными уравнениями факторизации, уравнения на конечном отрезке, приложения к задачам математики и математической физики).

В книге [23] характеризуются банаховы алгебры операторов, обладающих скалярными или матричными символами, исследуются сингулярные интегральные операторы с матричными коэффициентами и алгебры, порожденные такими операторами. В книгах [52], [53] с использованием техники банаховых алгебр построена теория теплицевых операторов, порожденных функциями из алгебры Дугласа.

Книга [44] посвящена систематическому изложению теории теплицевых операторов и определителей, в ней центральное место занимают вопросы обратимости, вычисления индекса, метода редукции, асимптотики определителей (обобщения теоремы Сёге), применения локального принципа. В книге [60] изложены алгебраические методы обращения теплицевых и ганкелевых матриц и некоторых их обобщений. Книга [33] содержит обзор современного состояния некоторых направлений спектральной теории теплицевых и ганкелевых операторов (прежде всего направлений, примыкающих к общей спектральной теории оператора сдвига).

Книга [30] является первой монографией по теории многомерных сингулярных интегралов и уравнений. В ней в основном изложены результаты работ С. Г. Михлина, одного из основоположников этой теории; первая часть книги отражает состояние теории многомерных сингулярных интегральных уравнений в начале 60-х годов.

Книга [70] посвящена систематическому изложению теории сингулярных интегральных операторов, их приложениям и различным методам приближенного решения сингулярных интегральных уравнений. Существенной особенностью книги [70] является рассмотрение с единой точки зрения как одномерного, так и многомерного случаев; изложение широко использует идеи и методы функционального анализа.

В книгах [85], [86] систематически изложены результаты исследований последних десятилетий по многомерным сингулярным интегралам и связанным с ними интегральным преобразованиям, а также по мультипликаторам Фурье; на основе этих результатов строится изложение пространств дифференцируемых функций и пространств гармонических функций.

В книге [67] рассматриваются приложения развитой авторами теории мультипликаторов в пространствах дифференцируемых функций к теории сингулярных интегральных операторов: изучаются свойства сингулярных операторов в пространствах Соболева при слабых предположениях на символ по первой переменной, приводятся двусторонние оценки нормы и существенной нормы операторов, инвариантных относительно сдвига и действующих в паре весовых пространств L_2, описывается спектр этих операторов.

Широкий круг вопросов теории пространств Соболева рассматривается в книге [25]: даны обобщения и новые доказательства теорем вложения, необходимые и достаточные условия справедливости различных интегральных неравенств для функций с обобщенными производными, формулируемые в терминах изопериметрических неравенств, приложения к теории эллиптических краевых задач.

Книга [64] посвящена систематическому изложению теории операторов Кальдерона — Зигмунда. Здесь рассматриваются максимальный оператор Харди — Литлвуда, классы весов Макенхаупта, пространства Харди и ВМО, весовые оценки для операторов Кальдерона — Зигмунда, связи этих операторов с псевдодифференциальными операторами и с теорией Литлвуда — Пэли, сингулярный интеграл Коши на липшицевых кривых. В статье [15] дан обзор исследований по проблеме одновесовых и двухвесовых оценок сильного и слабого типов для максимальной функции Харди — Литлвуда, потенциалов

Рисса, сингулярных интегральных операторов и гармонических функций. Этот обзор написан в рамках классической теории функций и по духу примыкает к книге [85]; особое внимание уделено работам, вышедшим после 1980 г.

Статьи [26], [68], [69] содержат обзоры результатов по разным направлениям теории многомерных операторов в свертках и их приложений к задачам теории вероятностей и математической физики.

Книга [54] посвящена систематическому изложению теории одномерных псевдодифференциальных уравнений с вырождающимся символом и ее приложениям к некоторым плоским граничным задачам для уравнений в частных производных. Подробное изложение различных аспектов современной теории псевдодифференциальных операторов и ее приложений дано в монографиях [39], [40], [64], [88].

Книги [43], [72], [79] посвящены систематическому изложению теории Атьи — Зингера об индексе.

Различные вопросы теории приближенных методов решения интегральных уравнений с разной степенью подробности и строгости изложения рассматриваются в книга [4], [7], [12], [17], [41], [44], [56], [60], [70], [76], [78].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агранович М. С.*, Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы. Успехи мат. наук, 1965, *20*, № 5, 3—120
2. —, *Вишик М. И.*, Псевдодифференциальные операторы. М.: МГУ, Мех.-мат. фак., 1968, 41 с.
3. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.*, Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мат. анализ, 1984, *22*, 175—244
4. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.*, Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985, 253 с.
5. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.*, Оценки сингулярных чисел интегральных операторов. Успехи мат. наук, 1977, *32*, № 1, 17—84
6. *Векуа Н. П.*, Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970, 379 с.
7. *Габдулхаев Б. Г.*, Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1980, 232 с.
8. *Гахов Ф. Д.*, Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640 с.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.*, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. Успехи мат. наук, 1957, *12*, № 2, 44—118
10. —, —, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965, 448 с.
11. —, *Крупник Н. Я.*, Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиннца, 1973, 426 с.
12. —, *Фельдман И. А.*, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971, 352 с.
13. *Данилюк И. И.*, Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975, 295 с.
14. *Дудучава Р. В.*, Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. Тбилиси: Мецниереба, 1979, 134 с.
15. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.*, Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мат. анализ, 1983, *21*, 42—129
16. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я.*, Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 448 с.

17. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наукова Думка, 1968, 287 с.
18. *Иманалиев М. И.*, Обобщенные решения ннтегральных уравнений первого рода. Фрунзе: Илим, 1981, 144 с.
19. —, *Хведелидзе Б. В., Гегелиа Т. Г., Бабаев А. А., Боташев А. И.*, Интегральные уравнения. Дифференц. уравнения, 1982, *18*, № 12, 2050—2069
20. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.*, Функциональный анализ. М.: Наука, 1977, 742 с.
21. *Карлович Ю. И., Кравченко В. Г., Литвинчук Г. С.*, Теория Нётера сингулярных интегральных операторов со сдвигом. Изв. вузов. Мат., 1983, № 4, 3—27
22. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. Успехи мат. наук, 1958, *13*, № 5, 3—120
23. *Крупник Н. Я.*, Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы. Кишинев: Штиинца, 1984, 138 с.
24. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977, 448 с.
25. *Мазья В. Г.*, Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ 1985, 416 с.
26. *Малышев В. А.*, Уравнения Винера—Хопфа и их приложения в теории вероятностей. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Теория вероятностей. Матем. статистика. Теорет. кибернетика, 1975, *13*, 5—36
27. *Михлин С. Г.*, Сингулярные интегральные уравнения с двумя независимыми переменными. Мат. сб., 1936, *1*, № 4, 535—550; № 6, 963—964
28. —, Сингулярные интегральные уравнения. Успехи мат. наук, 1948, *3*, № 3, 29—112
29. —, Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Фнзматгиз, 1959, 232 с.
30. —, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962, 264 с.
31. *Мусхелишвили Н. И.*, Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 511 с.
32. *Наймарк М. А.*, Нормированные кольца. М.: Наука, 1968, 664 с.
33. *Никольский Н. К.*, Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980, 383 с.
34. *Сахнович Л. А.*, Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 4, 69—129
35. *Симоненко И. Б.*, Новый общий метод исследования линейных операториых уравнений тнпа сингулярных интегральных уравнений. I, II. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, *29*, 567—586; 757—782
36. *Хведелидзе Б. В.*, Линейные разрывные граничиые задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения. Тр. Тбилис. мат. ин-та АН ГССР, 1956, *23*, 3—158
37. —, Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории гомоморфных функций одной комплексной переменной. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. 1975, *7*, 5—162
38. —, Интегральные уравнения. В кн.: Очерки развития математики в СССР. Киев: Наукова Думка, 1983, 444—460
39. *Шубин М. А.*, Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978, 279 с.
40. *Эскин Г. И.*, Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973, 232 с.
41. *Baker C. T. H.*, The numerical treatment of integral equations. Oxford: Clarendon Press, 1977, 1034 pp.
42. *Bart H., Gohberg I., Kaashoek M. A.*, Minimal factorization of matrix and operator functions. Basel-Boston-Stuttgart: Birkhäuser Verl., 1979, 227 pp.
43. *Booß B.*, Topologie und Analysis. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Ver., 1977, 352 S.
44. *Böttcher A., Silbermann B.*, Invertability and asymptotics of Toeplitz matrices. Berlin: Akad.-Verl., 1983, 200 pp.

45. *Calderón A. P., Zygmund A.*, On the existence of certain singular ittegrals. Acta Math., 1952, *88*, № 1—2, 85—139
46. —, —, On singular integrals. Amer. J. Math., 1956, *78*, № 2, 289—309
47. —, —, On singular integrals with variable kernels. Appl. Anal., 1978, *7*, 221—238
48. *Carleman T.*, Sur la résolution de certaines équations intégrales. Ark. Math., 1922, *16*, № 26, 1—19
49. *Clancey K., Gohberg I.*, Factorization of matrix functions and singular integral operators. Basel-Boston-Stuttgart: Birkhäuser Verl., 1981, 234 pp.
50. *Coifman R. R., Meyer Y.*, Au dela des operateurs pseudodifferentiels. Astérisque, 1978, № 57, 2—184
51. —, —, *Stein E. M.*, Un nouvel espace fonctionnel adapté a l'étude des opérateurs définis par des intégrales singulières. Harmonic Analysis, Lect. Notes Math., 1983, *992*, 1—15
52. *Douglas R. G.*, Banach algebra techniques in operator theory. New York—London: Acad. Press, 1972
53. —, Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators. Conference Board of the Math. Sci., Regional Conference Ser. in Math., № 15, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1973
54. *Elschner J.*, Singular ordinary differential operators and pseudodifferential equations. Lect. Notes Math., 1985, *1128*, 200 pp.
55. —, Asymptotics of solutions to pseudodifferential equations of Mellin type. Preprint P-MATH-28/85, Akademie der Wissenschaften der DDR, Karl-Weierstrass-Institut für Mathematik, Berlin 1985, 81 pp.
56. *Fenyö S., Stolle H. W.*, Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1, 2, 3, 4. 1982, 328 S.; 1983, 376 S.; 1983, 548 S.; 1984, 708 S.
57. *Fichera G.*, Una introduzione a la teoria delle equazioni integrali singolari. Rend. mat. e appl., 1958, *17*, № 1—2, 82—191
58. *Fredholm I.*, Sur une classe d'équations fonctionelles. Acta Math., 1903, *27*, 365—390
59. *Guillemin V.*, Toeplitz operators in *n* dimensions. Integral Equat. and Oper. Theory, 1984, *7*, № 2, 145—205
60. *Heinig G., Rost K.*, Algebraic methods for Toeplitz-like matrices and operators. Berlin: Akad.-Verl., 1984, 212 pp.
61. *Hellinger E., Toeplitz O.*, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Enzyklopädie Math. Wiss. II. C 13. Leipzig-Berlin: Verlag B. G. Teubner, 1928, 322 S.
62. *Hilbert D.*, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig, Berlin: Teubner-Verl., 1912, 282 S.
63. *Hörmander L.*, Pseudo-differential operators. Commun. Pure and Appl. Math., 1965, *18*, № 3, 501—517
64. *Journé J.-L.*, Calderón-Zygmund operators, pseudodifferential operators and the Cauchy integral of Calderón. Lect. Notes Math., 1983, *994*, 128 pp.
65. *Jörgens K.*, Lineare Integraloperatoren. Stuttgart: B. G. Teubner, 224 S.
66. *Kohn J. J., Nirenberg L.*, An algebra of pseudodifferential operators. Commun. Pure and Appl. Math., 1965, *18*, № 1—2, 269—305
67. *Maz'ya V. G., Shaposhnikova T. O.*, Theory of multipliers in spaces of differentiable functions. Boston-London-Melbourne: Pitman, 1985, 356 pp.
68. *Meister E., Speck F.-O.*, Some multidimensional Wiener-Hopf equations with applications. In: Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, Vol. II (H. Zorski, ed.). London: Pitman, 1979, 217—262
69. —, Some classes of integral and integro-differential equations of convolutional type. Lect. Notes Math., 1980, *827*, 182—228
70. *Michlin S. G., Prößdorf S.*, Singuläre Integraloperatoren. Berlin, Akademie-Verlag, 1980, 514 S.
71. *Noether F.*, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. Math. Ann., 1921, *82*, 42—63

72. *Palais R. S.*, Seminar on the Atiyah-Singer index theorem. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1965 (Пер. на рус. яз.: *Пале Р.*, Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе, М.: Мир, 1970, 359 с.)
73. *Pietsch A.*, Operator ideals. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978, 451 S. (Пер. на рус. яз.: *Пич А.*, Операторные идеалы, М.: Мир, 1982, 536 стр.).
74. —, Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces. Math. Ann., 1980, *247*, 149—168
75. —, Eigenvalues of integral operators. I, II. Math. Ann., 1980, *247*, 169—178; 1983, *262*, 343—376
76. *Prößdorf S.*, Einige Klassen singulärer Gleichungen. Berlin: Akademie-Verlag, 1974, 353 S. (Пер. на рус. яз.: *Прёсдорф З.*, Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979, 493 с.)
77. —, *Silbermann B.*, Projektionsverfahren und die näherungsweise Lösung singulärer Gleichungen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Teubner-Texte zur Mathematik, 1977, 225 S.
78. *Przeworska-Rolewicz D.*, Equations with transformed argument. An algebraic approach. Amsterdam: Elsevier Sci. Publ. Company, 1973, 354 pp.
79. *Rempel S.*, *Schulze B.-W.*, Index theory of elliptic boundary problems. Berlin: Akad.-Verl., 1982, 393 pp. (Пер. на рус. яз.: *Ремпель Ш.*, *Шульце Б.-В.*, Теория индекса эллиптических краевых задач.. М.: Мир, 1986, 575 с.)
80. *Riesz F.*, *Sz.-Nagy B.*, Leçons d'analyse fonctionalle. Budapest: Acad. Kiadó, 1952, 488 p. (Пер. на рус. яз.: *Рисс Ф.*, *Секефальфи-Надь Б.*, Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979, 587 с.)
81. *Schmeidler W.*, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft, 1950
82. *Seeley R. T.*, Integro-differential operators on vector bundles. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, *117*, № 5, 167—204
83. —, Elliptic singular integral equations. Proc. Symp. Pure Math., Singular Integrals, AMS, Providence, Rhode Island, 1967, vol. X, 308—315
84. *Speck F.-O.*, General Wiener-Hopf factorization methods. Boston, London, Melburne: Pitman, 1985, 157 pp.
85. *Stein E. M.*, Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1970 (Пер. на рус. яз.: *Стейн И.*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М.: Мир, 1973, 342 с.).
86. —, *Weiss G.*, Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1971 (Пер. на рус. яз.: *Стейн И.*, *Вейс Г.*, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М.: Мир, 1974, 331 с.)
87. *Talenti G.*, Sulle equazioni integrali di Wiener-Hopf. Boll. unione mat. ital., 1973, *7*, Suppl. fasc. 1, 18—118
88. *Treves F.*, Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators, 1, 2. New York, London: Plenum Press, 1982, 338 pp.; 374 pp. (Пер. на рус. яз.: *Трев Ф.*, Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, 1, 2. М.: Мир, 1984, 359 с.; 398 с.
89. *Tricomi F.*, Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppio «con asterisco». Rend. Accad. Naz. dei Lincei, 1926, III, ser. 6a, fasc. 9, 535—539
90. —, Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale doppio. Math. Z., 1928, *27*, 87—133
91. —, Integral equations. New York, London: Interscience Publ., 1957 (Пер. на рус. яз.: *Трикоми Ф.*, Интегральные уравнения, М.: ИЛ, 1960, 299 с.)
92. *Volterra V.*, Leçons sur le équations intégrales et les équations intégro-différentielles. Paris: Gauthier-Villars, 1913
93. *Wiener N.*, *Hopf E.*, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. Sitzungsber. Preuss. Akad. d. Wiss., 1931, 696—706
94. *Wolfersdorf L. V.*, Integralgleichungen. In: Entwicklung der Mathematik in der DDR. Berlin: VEB Deritscher Verl. Wiss., 1974, 455—485

УДК 517.968.2+517.956

II. ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В. Г. Мазья

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена граничным интегральным уравнениям и их приложениям к решению краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Принципиальная схема использования граничных уравнений для решения краевых задач заключается в следующем. В основе метода лежат представления решений дифференциальных уравнений в виде интегралов по границе, содержащих неизвестные функции. Для определения этих функций служат краевые условия. Последние в результате подстановки указанных представлений в граничные операторы превращаются в интегральные (иногда интегро-дифференциальные) уравнения. Решив их, мы тем самым получаем и решение краевой задачи в интегральной форме.

Пионерами применения интегральных уравнений в теории гармонических функций были Нейман, Пуанкаре, Робен, Гёльдер, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Фредгольм. Дальнейшее развитие метода граничных уравнений связано с именами Карлемана, Радона, Жиро, Н. И. Мусхелишвили, В. Д. Купрадзе, С. Г. Михлина, Кальдерона, Зигмунда и др. С историей становления метода можно ознакомиться по работам [7], [36], [86], [126], [156], [162]. Термин «граничное интегральное уравнение» появился сравнительно недавно. Ранее говорили об интегральных уравнениях теории потенциала.

Ниже рассматриваются только теоретические аспекты метода граничных уравнений. Тем самым, в стороне остаются привлекающие все большее внимание проблемы его численной реализации.

В статье пять глав. В первой главе приведены физические предпосылки теории гармонических потенциалов и дано систематическое изложение основных свойств интегральных уравнений этой теории для областей с границами класса $C^{1,\alpha}$. В главе 2 изложен аналогичный материал для линейных эллиптических систем стационарной теории упругости и гидродинамики. Цель третьей главы заключается в том, чтобы продемонстрировать одну из двух основных тенденций современного развития метода граничных интегральных уравнений, а именно, расширение границ его применимости за счет включения новых классов краевых и начально-краевых задач математической физики. Не претендуя на полноту, мы ограничиваемся задачей с косой производной для уравнения Лапласа, бигармоническим уравнением, начально-краевыми задачами для уравнений теплопроводности и волнового, нестационарными задачами теории упругости и вязкоупругости. В заключительных замечаниях к главе 3 указаны направления, оставшиеся за рамками статьи, со ссылками на соответствующую литературу.

Другая тенденция развития метода отражена в последних двух главах 4 и 5. Она имеет своим истоком исследования Карлемана и Радона и заключается в изучении классических уравнений на негладких поверхностях. Это направление получило мощный импульс в работах последних лет. Глава 4 посвящена теории некоторых из рассмотренных ранее интегральных уравнений и систем в пространствах C и L_p на негладких кривых и поверхностях определенных классов. В пятой главе рассматриваются те же граничные уравнения на кусочно-гладких поверхностях. Приведенные здесь результаты получаются при помощи единого метода, сводящего изучение граничных интегральных уравнений к исследованию вспомогательных краевых задач.

Я весьма признателен И. Кралу, Н. В. Грачеву, Г. И. Кресину, А. А. Соловьеву, Н. М. Хуторянскому и Т. О. Шапошниковой за предоставленный материал. Особую благодарность мне хотелось бы выразить Н. Г. Кузнецову за большую помощь на всех этапах работы над статьей.

Глава 1

ТЕОРИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Эта глава посвящена классическим результатам теории граничных уравнений, порожденных краевыми задачами для уравнения Лапласа. В первом параграфе приведены необходимые сведения о потенциалах простого и двойного слоя. В § 2 исследована разрешимость интегральных уравнений. Спектральные свойства граничных операторов изучены в третьем параграфе. В четвертом параграфе рассмотрены другие способы сведения краевых задач к интегральным уравнениям первого и второго рода.

§ 1. Исходные понятия теории гармонических потенциалов

1.1. Физические предпосылки метода граничных интегральных уравнений. Корни метода уходят в проблемы физики и механики, благодаря которым сформировались основные понятия теории потенциала. Впервые понятие о потенциалах (гармонических) возникло в связи с законом всемирного тяготения Ньютона.

Пусть в точке $\xi=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\in\mathbf{R}^3$ находится частица массы m_ξ. Она притягивает частицу, помещенную в точке $x=(x_1, x_2, x_3)$ и имеющую массу m_x, с силой $\mathbf{F}$, проекции которой на оси декартовой системы координат равны

$$F_i=G\frac{m_x m_\xi}{r^2}\,\frac{\xi_i-x_i}{r};\quad i=1, 2, 3.$$

Здесь $r=\left[\sum_{i=1}^{3}(\xi_i-x_i)^2\right]^{1/2}$, а G — положительная постоянная. Последнюю можно считать равной единице, подобрав соответствующие единицы измерения. Компоненты силы притяжения представляют собой частные производные

$$F_i = Gm_x \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{m_\xi}{r}\right); \quad i=1, 2, 3,$$

причем функцию $U(x) = m_\xi r^{-1}$, определенную в $\mathbf{R}^3 \setminus \{\xi\}$, принято называть *потенциалом* массы m_ξ, сосредоточенной в точке ξ. Потенциал U удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\Delta U = 0 \text{ в } \mathbf{R}^3 \setminus \{\xi\},$$

где $\Delta U = \sum_{i=1}^{3} \partial^2 U / \partial x_i^2$.

Закон Кулона, описывающий электростатическое силовое поле, выражается той же формулой, что и закон тяготения Ньютона с точностью до величины и знака постоянной G. Кроме того, **величины m_x и m_ξ, имеющие в этом случае** смысл электрических зарядов, могут принимать любые вещественные значения (в отличие от положительных масс). Тот же закон имеет место и в магнитостатике.

Наличие потенциала у поля (для конкретности будем говорить о гравитационном поле), создаваемого точечной массой m_ξ, приводит к важному следствию относительно работы, совершаемой при перемещении другой точечной массы m. Если последняя перенесена из точки x_1 в точку x_2 вдоль некоторого пути γ, то работа по преодолению силового поля равна

$$\int_\gamma \sum_{i=1}^{3} F_i dx_i = Gm\,[U(x_2) - U(x_1)].$$

Таким образом, она не зависит от пути γ. Последнее свойство часто берется в качестве определения потенциального силового поля.

В случае, когда притягивающая масса распределена по телу, занимающему область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, с объемной плотностью ρ, потенциал, согласно принципу суперпозиции, представляет собой следующий интеграл

$$(U\rho)(x) = \int_\Omega \frac{\rho(\xi)}{r}\, d\xi.$$

Однако для метода граничных интегральных уравнений гораздо важней потенциал поверхностного распределения источников поля — *потенциал простого слоя*:

$$(V\rho)(x) = \int_S \frac{\rho(\xi)}{r}\, d_\xi S.$$

Здесь S — поверхность в $\mathbf{R}^3$, а ρ — плотность, отнесенная к единице площади поверхности S. Свойства потенциала $V\rho$ существенные для метода граничных уравнений, прослеживаются уже на элементарных примерах, в которых возможно непосредственное вычисление интеграла.

Пусть $S_0=\{x\in\mathbf{R}^3 : |x|=R\}$ — сфера с центром в начале координат, а $\rho=\mathrm{const}$ на S_0. Тогда

$$(V\rho)(x)=\begin{cases}4\pi\rho R \text{ при } |x|\leqslant R,\\ 4\pi\rho R^2/|x| \text{ при } |x|\geqslant R.\end{cases}$$

Если $S_1=\{x\in\mathbf{R}^3 : x_3=0, \quad x_1^2+x_2^2\leqslant R^2\}$ — круг радиуса R и $\rho=\mathrm{const}$ на S_1, то для $x^{(0)}=(0, 0, x_3)$ имеем

$$(V\rho)(x^{(0)})=2\pi\rho\left[-|x_3|+(R^2+x_3^2)^{1/2}\right].$$

Мы видим, что в обоих примерах потенциал простого слоя непрерывен при пересечении поверхности S, но его производная $\partial V/\partial\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к S претерпевает на S скачок, равный $4\pi\rho$.

Наряду с потенциалом $V\rho$, в методе граничных уравнений используется так называемый *потенциал двойного слоя*

$$(W\chi)(x)=\int\limits_S \chi(\xi)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_\xi}\frac{1}{r}d_\xi S.$$

Считая одну из сторон S «положительной», можно фиксировать направление нормали на S. В случае замкнутой S мы будем считать, что $\mathbf{n}$ направлена во внешность.

Одним из физических объектов, описываемых этим потенциалом, является «лейденская банка», то есть конденсатор, представляющий собой трехслойную поверхность S, средний слой которого не электропроводен, а два крайних — проводники. На последние нанесены равные по абсолютной величине и противоположные по знаку электрические заряды (см. рис. 1). Отдельная пара таких зарядов называется диполем и математически моделируется следующим образом.

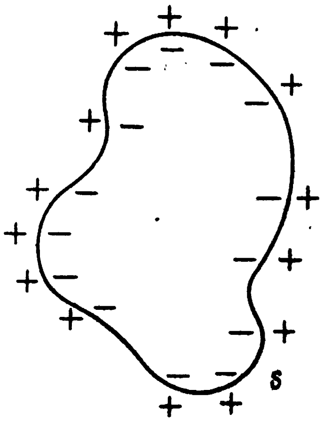

Рис. 1

Пусть в находящихся на расстоянии ε друг от друга точках ξ и ξ' помещены заряды $-\varepsilon^{-1}$ и $+\varepsilon^{-1}$ соответственно (см. рис. 2). Согласно принципу суперпозиции, их потенциал равен $\varepsilon^{-1}[(r')^{-1}-r^{-1}]$, где $r'=\left[\sum_{i=1}^{3}(\xi_i'-x_i)^2\right]^{1/2}$. При стремлении ε к нулю в пределе получаем потенциал, равный $\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{r}$.

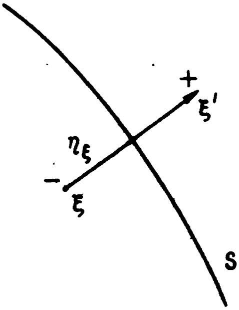

Рис. 2

Для этого потенциала так называемый момент диполя равен единице. Момент — это произведение заряда на конце вектора, определяющего ориентацию диполя, на расстояние между зарядами. Функция χ в потенциале $W\chi$ характеризует плотность распределения диполей по поверхности S.

Другая физическая интерпретация потенциала двойного слоя относится к магнитостатике. При этом функция χ является плотностью распределения по поверхности S «микромагнитов», оси которых направлены вдоль нормалей, и, скажем, «северные полюсы» находятся с внешней стороны S, а «южные» — с внутренней.

Как и в случае потенциала простого слоя, свойство, на котором основано использование потенциала двойного слоя в методе граничных интегральных уравнений, выявляется уже на простейших примерах. Так для сферы S_0 и $\chi=\text{const}$ на S_0

$$(W\chi)(x)=\begin{cases}0 & \text{при } |x|>R,\\ -2\pi\chi & \text{при } |x|=R,\\ -4\pi\chi & \text{при } |x|<R.\end{cases}$$

Если диполи с постоянной плотностью χ распределены по кругу S_1 так, что нормаль к S_1 направлена вдоль оси x_3, то для $x^{(0)}=(0, 0, x_3)$ имеем

$$(W\chi)(x^{(0)})=\begin{cases}-2\pi\chi\,\text{arctg}\,(R/x_3) \text{ при } x_3\neq 0,\\ 0 \text{ при } x_3=0.\end{cases}$$

Мы видим, что в обоих примерах потенциал $W\chi$ претерпевает скачки, равные по абсолютной величине $2\pi\chi$, при переходе с одной стороны поверхности на саму поверхность и затем на другую сторону поверхности.

В случае произвольных поверхностей и плотностей справедлива следующая формула для предельных значений потенциала двойного слоя на гладкой поверхности S:

$$\pm 2\pi\chi(x)+\int\limits_S \chi(\xi)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi}\frac{1}{r}\,d_\xi S, \quad x \in S.$$

Здесь знак плюс берется в том случае, когда точка стремится к предельному положению $x \in S$ со стороны, в которую обращена нормаль $\mathbf{n}_\xi$. Знак минус берется в противном случае. Кроме того, предполагается, что x является внутренней точкой поверхности S. Интеграл в последней формуле называется *прямым значением потенциала двойного слоя.*

Выражение для предельных значений потенциала двойного слоя позволяет свести к интегральному уравнению *задачу Дирихле для уравнения Лапласа.* Пусть, например, нужно найти решение *и внутренней задачи Дирихле*, то есть $\Delta u=0$ в области, ограниченной замкнутой гладкой поверхностью S, на которой $u=f$, причем последняя функция задана. Если искать решение этой задачи в виде потенциала $W\chi$ с неизвестной плотностью, то, в силу краевого условия, для отыскания χ имеем уравнение

$$-2\pi\chi(x)+\int\limits_S \chi(\xi)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi}\frac{1}{r}\,d_\xi S=f(x), \quad x \in S.$$

Уравнению Лапласа потенциал $W\chi$ удовлетворяет при любой плотности χ вследствие свойств функции r^{-1}.

Аналогично к интегральному уравнению сводится *внешняя задача Дирихле.* Для сведения к интегральным уравнениям внутренней и внешней задач Неймана, в которых на S задано значение $\partial u/\partial \mathbf{n}$, используется потенциал простого слоя. Как было указано, его нормальная производная претерпевает на S скачки, аналогичные скачкам потенциала двойного слоя.

Откладывая подробные формулировки перечисленных результатов до следующего пункта, остановимся здесь на геометрической интерпретации потенциала двойного слоя с плотностью, тождественно равной единице (так называемого *интеграла Гаусса*). Он представляет собой телесный угол, под которым поверхность S видна из точки x, взятый со знаком минус, если $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}_\xi) \geqslant 0$, и со знаком плюс в противном случае. Это сразу объясняет значение нуль в формуле для $W\chi$ сферы S_0. В этом случае два сферических сегмента видны из точки x под одинаковым телесным углом, но с разных сторон.

В заключение этих предварительных замечаний отметим, что имеется важный специальный случай потенциальных полей — так называемые плоские поля. Они возникают, в частности, при распределении массы с плотностью, не зависящей от x_3, на бесконечной цилиндрической поверхности, параллельной оси x_3 (см., например, [148]). Для исследования таких полей используются логарифмические потенциалы на плоскости. При этом S — плоская кривая (направляющая цилиндра) а роль функции $(-4\pi r)^{-1}$ играет $(2\pi)^{-1}\log[|(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2]^{1/2}$. Ниже плоские потенциальные поля изучаются одновременно с полями в пространствах размерности больше двух.

1.2. Свойства потенциалов. Сначала приведем некоторые обозначения и определения. Через Ω^+ обозначим ограниченную односвязную область в $\mathbf{R}^n$ ($n\geqslant 2$) с *границей S класса* $C^{1,\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$ (то есть S локально задается в декартовых координатах функциями, первые производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α). Положим $\Omega^-=\mathbf{R}^n\setminus\Omega^+$. Через $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ будем обозначать точки $\mathbf{R}^n$.

Определение. Говорят, что функция $u^\pm$ класса $C^2(\Omega^\pm)$ — *гармоническая* в $\Omega^\pm$, если она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u^\pm=0 \text{ в } \Omega^\pm,$$

причем для u^- должно выполняться условие на бесконечности

$$u^-(x)=\begin{cases}O(1), & n=2,\\ o(1), & n\geqslant 3\end{cases} \text{ при } |x|\to\infty.$$

Здесь $\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\partial^2/\partial x_i^2$, $|x|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$.

При $n\geqslant 3$ гармоническая функция u^- и ее градиент ∇u^- имеют следующие асимптотики при $|x|\to\infty$:

$$u^-(x)=O(|x|^{-n+2}),\quad |\nabla u^-(x)|=O(|x|^{-n+1}). \tag{1.1}$$

Фундаментальным решением уравнения Лапласа называется распределение $\mathscr{E}(x,\xi)$, для которого

$$\Delta_x\mathscr{E}=\delta(x-\xi) \quad \text{в } \mathbf{R}^n,$$

где $\delta(x-\xi)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке ξ. Используемое в теории гармонических функций фундаментальное решение имеет вид

$$\mathscr{E}(x,\xi)=\begin{cases}(2\pi)^{-1}\log r, & n=2,\\ -[(n-2)\,\sigma_n r^{n-2}]^{-1}, & n\geqslant 3.\end{cases}$$

Здесь $r=|x-\xi|$, $\sigma_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbf{R}^n$.

Через $\mathbf{n}_x(\mathbf{n}_\xi)$ обозначим единичный вектор нормали к поверхности S в точке $x\in S$ ($\xi\in S$), направленный внутрь области Ω^-. Так как S является поверхностью класса $C^{1,\alpha}$, то при $(x,\xi)\in S\times S$ и $x\neq\xi$ справедливы оценки

$$(\partial/\partial \mathrm{n}_x)\mathcal{E}(x,\ \xi),\quad (\partial/\partial \mathrm{n}_\xi)\mathcal{E}(x,\ \xi)=O(r^{-n+1+\alpha}). \qquad (1.2)$$

Определение. Будем говорить, что функция $v^\pm \in C^1(\Omega^\pm)$ имеет *правильную нормальную производную* $\partial v^\pm/\partial \mathrm{n}_\pm$ на S, если равномерно по $x\in S$

$$\frac{\partial v^\pm}{\partial \mathrm{n}_x}(x\mp t\mathrm{n}_x)\to\frac{\partial v^\pm}{\partial \mathrm{n}_\pm}(x) \text{ при } t\to+0.$$

Ясно, что $\partial v^\pm/\partial \mathrm{n}_\pm \in C(S)$.

Если гармоническая в $\Omega^\pm$ функция $u^\pm$ принадлежит классу $C(\overline{\Omega^\pm})$ и имеет правильную нормальную производную, то она представима в следующем виде

$$u^\pm(x)=\pm\int\limits_S\left[u^\pm(\xi)\frac{\partial}{\partial \mathrm{n}_\xi}\mathcal{E}(x,\ \xi)-\mathcal{E}(x,\ \xi)\frac{\partial u^\pm}{\partial \mathrm{n}_\xi}\right]d_\xi S,\quad x\in\Omega^\pm. \qquad (1.3)$$

Зависящие от параметра $x\in\mathrm{R}^n\setminus S$ интегралы

$$(V\rho)(x)=\int\limits_S\rho(\xi)\,\mathcal{E}(x,\ \xi)\,d_\xi S; \qquad (1.4)$$

$$(W\chi)(x)=\int\limits_S\chi(\xi)\frac{\partial}{\partial \mathrm{n}_\xi}\mathcal{E}(x,\ \xi)\,d_\xi S, \qquad (1.5)$$

вид которых подсказан формулой (1.3), называются *потенциалами простого слоя и двойного слоя с плотностями* ρ и χ соответственно. Будем предполагать, что $\rho,\ \chi\in C(S)$.

При $n\geqslant 3$ потенциалы $V\rho$ и $W\chi$ гармоничны в $\Omega^\pm$. Кроме того, при $|x|\to\infty$ справедливы оценки

$$(V\rho)(x)=O(|x|^{-n+2});\quad (W\chi)(x)=O(|x|^{-n+1}). \qquad (1.6)$$

Для $n=2$ указанные свойства потенциала $W\chi$, а также гармоничность потенциала $V\rho$ в Ω^+ сохраняются. В области Ω^- потенциал $V\rho$, вообще говоря, не гармоничен ввиду логарифмического роста на бесконечности. Ограниченность $V\rho$ в Ω^- имеет место, если $\int\limits_S\rho dS=0$.

Перейдем к свойствам потенциалов, на которых основано сведение краевых задач к граничным интегральным уравнениям (доказательства см., например, в книгах [12], [17], [65], [67], [89], [148]).

Вследствие оценки (1.2), потенциал двойного слоя имеет определенное значение для всякого $x\in S$. Оно называется *прямым значением* и обозначается $(W_0\chi)(x)$. Функция $W_0\chi$ непрерывна на S.

Потенциал

$$(W1)(x)=\int\limits_S\frac{\partial}{\partial \mathrm{n}_\xi}\mathcal{E}(x,\ \xi)\,d_\xi S\quad (\sigma=1 \text{ на } S)$$

называется *интегралом Гаусса* и вычисляется явно:

$$(W1)(x)=\begin{cases}1, & x\in\Omega^+,\\ 0, & x\in\Omega^-,\\ 1/2, & x\in S.\end{cases} \tag{1.7}$$

При помощи последней формулы доказывается следующая теорема о предельных значениях для потенциала двойного слоя с произвольной плотностью (*теорема о скачках потенциала* $W\chi$).

Теорема 1. Существуют функции $W_\pm\chi\in C(S)$ такие, что $(W\chi)(x)\to(W_\pm\chi)(x_0)$, когда $x\in\Omega^\pm$ и $x\to x_0\in S$. Сходимость потенциала $W\chi$ к предельным значениям $W_\pm\chi$ равномерна относительно $x_0\in S$, и имеют место равенства

$$W_\pm\chi=\pm\frac{1}{2}\chi+W_0\chi. \tag{1.8}$$

Следствие 1. Справедливо равенство

$$W_+\chi-W_-\chi=\chi. \tag{1.9}$$

Из свойств потенциала $V\rho$ прежде всего следует отметить его непрерывность в $\mathbf{R}^n$. Далее, в силу оценки (1.2), для всякого $x\in S$ имеет определенное значение интеграл

$$\frac{\partial(V\rho)}{\partial\mathbf{n}_0}(x)=\int_S\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}\mathscr{E}(x,\xi)\,d_\xi S.$$

Эта величина называется *прямым значением нормальной производной потенциала простого слоя* и принадлежит пространству $C(S)$.

Теорема 2. Для потенциала $V\rho$ существует правильная нормальная производная $\partial(V\rho)/\partial\mathbf{n}_\pm$ на S, которая выражается формулой

$$\frac{\partial(V\rho)}{\partial\mathbf{n}_\pm}=\mp\frac{1}{2}\rho+\frac{\partial(V\rho)}{\partial\mathbf{n}_0}. \tag{1.10}$$

Следствие 2. Имеет место соотношение

$$\partial(V\rho)/\partial\mathbf{n}_--\partial(V\rho)/\partial\mathbf{n}_+=\rho. \tag{1.11}$$

1.3. Задачи Дирихле и Неймана в $\Omega^\pm$ и интегральные уравнения для них. *Решением задачи Дирихле* в $\Omega^\pm$ называется гармоническая функция $u^\pm\in C(\Omega^\pm)$ такая, что

$$u^\pm=\varphi^\pm \text{ на } S, \tag{1.12}$$

где $\varphi^\pm$ — заданная функция из $C(S)$. Эта задача имеет не более одного решения.

Для сведения к интегральным уравнениям задачи Дирихле, будем искать ее решение в виде потенциала (1.5) с неизвестной плотностью $\chi^\pm$. Ввиду теоремы 1, последний будет решением указанной краевой задачи тогда и только тогда, когда $\chi^\pm$ удовлетворяет уравнению

$$\chi^\pm\pm T\chi^\pm=\pm2\varphi^\pm. \tag{1.13}$$

Здесь T — интегральный оператор с ядром $2(\partial/\partial\mathbf{n}_\xi)\mathscr{E}(x,\xi)$ (см. формулы (1.8) и (1.12)).

Решением задачи Неймана в классической постановке называется гармоническая функция $u^{\pm}\in C(\Omega^{\pm})$, удовлетворяющая условию

$$\partial u^{\pm}/\partial \mathfrak{n}_{\pm}=\psi^{\pm} \text{ на } S, \tag{1.14}$$

где $\partial u^{\pm}/\partial \mathfrak{n}_{\pm}$ — правильная нормальная производная, а $\psi^{\pm}$ — заданная функция из $C(S)$. В области Ω^{+}, а при $n=2$ и в области Ω^{-}, любые два решения этой задачи отличаются на постоянное слагаемое. Если $n>2$, то задача Неймана в Ω^{-} имеет не более одного решения.

Условие

$$\int\limits_{S}\psi^{+}dS=0 \tag{1.15}$$

необходимо для разрешимости Неймана в области Ω^{+}. При $n=2$ необходимым условием разрешимости задачи Неймана в Ω^{-} также является (1.15) с ψ^{-} вместо ψ^{+}.

Для сведения к интегральному уравнению задачи Неймана в Ω^{-}, будем искать ее решение в виде потенциала (1.4) с неизвестной плотностью $\rho^{\pm}$. Ввиду теоремы 2, последний будет решением указанной краевой задачи тогда и только тогда, когда $\rho^{\pm}$ удовлетворяет уравнению

$$\rho^{\pm}\mp T^{*}\rho^{\pm}=\mp 2\psi^{\pm}. \tag{1.16}$$

Здесь T^{*} — интегральный оператор с ядром $2(\partial/\partial\mathfrak{n}_{x})\mathscr{E}(x,\xi)$ (см. формулы (1.10) и (1.14)).

Оценки (1.2) показывают, что T и T^{*} представляют собой интегральные операторы со слабой особенностью (см. гл. 2, § 1 статьи I этого тома). Поэтому T и T^{*} компактны в $L_2(S)$ (см. гл. 1, § 2 статьи I этого тома). Кроме того, так как ядра этих операторов вещественны и получаются одно из другого перестановкой аргументов x и ξ, то T и T^{*} является сопряженными операторами (см. гл. 1, § 2 статьи I этого тома). Таким образом, при исследовании уравнений (1.13) и (1.16) можно пользоваться теорией Фредгольма в $L_2(S)$ (см. гл. 1, § 5 статьи I этого тома).

Следующий результат также является следствием того обстоятельства, что ядра операторов T и T^{*} имеют слабую особенность.

Теорема 3 (см., например, [65, § 14]). Если $\varphi^{\pm}$, $\psi^{\pm}\in C(S)$, то принадлежащие $L_2(S)$ решения $\chi^{\pm}$ и $\rho^{\pm}$ уравнений (1.13) и (1.16), соответственно, непрерывны на S.

§ 2. Разрешимость граничных интегральных уравнений

2.1. Исследование интегральных уравнений внутренней задачи Дирихле и внешней — Неймана при $n\geqslant 3$.

Теорема 4. Если $n\geqslant 3$, то уравнения

$$\chi^{+}+T\chi^{+}=2\varphi^{+},\qquad \rho^{-}+T^{*}\rho^{-}=2\psi^{-} \tag{1.17}$$

однозначно разрешимы в $L_2(S)$ для любой правой части.

Доказательство. Согласно альтернативе Фредгольма, теорема будет доказана, если хотя бы одно из однородных уравнений, соответствующих (1.17), имеет лишь тривиальное решение.

Пусть $\rho_0^- \in L_2(S)$ — какое-нибудь решение уравнения

$$\rho_0^- + T^* \rho_0^- = 0. \qquad (1.18)$$

Согласно теореме 3, $\rho_0^- \in C(S)$. Рассмотрим потенциал $V\rho_0^-$. В силу (1.18) и (1.10), имеем

$$\partial (V\rho_0^-)/\partial \mathbf{n} = 0 \text{ на } S. \qquad (1.19)$$

По теореме единственности для внешней задачи Неймана, $V\rho_0^- = 0$ на $\bar{\Omega}^-$. Тогда $V\rho_0^- = 0$ на $\bar{\Omega}^+$, вследствие гармоничности $V\rho_0^-$ в Ω^+, непрерывности $V\rho_0^-$ в $\mathbf{R}^n$ и теоремы единственности для внутренней задачи Дирихле. Следовательно, $\partial (V\rho_0^-)/\partial \mathbf{n}_+ = 0$ на S. Сопоставляя это с (1.19) и принимая во внимание (1.11), находим, что $\rho_0^- = 0$ на S.

Таким образом, уравнения (1.7) однозначно разрешимы в $L_2(S)$ для любых правых частей. Так как решения непрерывны для правых частей из $C(S)$, то мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. Задачи Дирихле и Неймана в областях Ω^+ и Ω^-, соответственно, разрешимы при любых граничных данных из $C(S)$, если $n \geqslant 3$. Решение задачи Дирихле (Неймана) представимо в виде потенциала двойного (простого) слоя, плотность которого $\chi^+ (\rho^-)$ определяется из первого (второго) уравнения в (1.17).

2.2. Исследование интегральных уравнений внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана при $n \geqslant 2$. Согласно формуле (1.7), уравнение $\chi_0^- - T\chi_0^- = 0$ имеет нетривиальное решение $\chi_0^- = 1$ на S.

Лемма 1. Решения уравнения

$$\rho^+ - T^* \rho^+ = 0 \qquad (1.20)$$

образуют одномерное подпространство в $L_2(S)$.

Доказательство проведем в предположении, что $n \geqslant 3$. Изменения, которые следует внести в рассуждения при $n = 2$, приведены в п. 2.4.

Пусть ρ_0^+ и ρ_1^+ — произвольные нетривиальные решения уравнения (1.20), непрерывные согласно теореме 3. Рассмотрим потенциалы $V\rho_i^+$ ($i = 0, 1$). В силу (1.20) и (1.10), имеем

$$\partial (V\rho_i^+)/\partial \mathbf{n}_+ = 0 \text{ на } S. \qquad (1.21)$$

По теореме единственности для внутренней задачи Неймана, $V\rho_i^+ = c_i$ в $\overline{\Omega^+}$, где $c_i = \mathrm{const}$. При этом $c_i \neq 0$. Действительно, если $c_i = 0$, то $V\rho_i^+ = 0$ в $\overline{\Omega^-}$ вследствие гармоничности $V\rho_i^+$ в Ω^-, непрерывности $V\rho_i^+$ в $\mathbf{R}^n$ и теоремы единственности для внешней задачи Дирихле. Тогда $\partial(V\rho_i^+)/\partial \mathbf{n}_- = 0$ на S. Сопоставляя это равенство с (1.21) и принимая во внимание (1.11), находим, что $\rho_i^+ = 0$ на S. Последнее противоречит предположению, что ρ_i^+ — нетривиальное решение уравнения (1.20).

Попутно доказано предложение: если потенциал (1.4) тождественно обращается в нуль в области Ω^+, то его плотность также равна нулю всюду на S[1].

Положим $\rho_2^+ = c_1\rho_0^+ - c_0\rho_1^+$. Очевидно, ρ_2^+ также удовлетворяет уравнению (1.20). Ясно, что $V\rho_2^+ = c_1 V\rho_0^+ - c_0 V\rho_1^+$ и, следовательно, $V\rho_2^+ = 0$ на $\overline{\Omega^+}$. По доказанному выше, $\rho_2^+ = 0$ на S. Отсюда $\rho_1^+ = \rho_0^+ c_1/c_0$, что и требовалось доказать.

Решение ρ_0^+ уравнения (1.20), для которого $\int\limits_S \rho_0^+ dS = 1$, называется *плотностью потенциала Робена*. Согласно доказательству леммы 1, $V\rho_0^+ = C$ на $\overline{\Omega^+}$, где $C \neq 0$ (величина C^{-1} называется *емкостью* $\overline{\Omega^+}$).

В силу теории Фредгольма, справедлива

Теорема 6. Для разрешимости уравнения

$$\rho^+ - T^*\rho^+ = -2\psi^+ \tag{1.22}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие ортогональности (1.15).

Если уравнение (1.22) имеет решение, то разрешима и задача Неймана в Ω^+. Учитывая сказанное в пункте 1.3, приходим к следующему утверждению.

Теорема 7. При $n \geqslant 2$ внутренняя задача Неймана разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.15). Решение представимо в виде суммы произвольной постоянной и потенциала (1.4), плотность которого определяется из уравнения (1.22).

Согласно альтернативе Фредгольма и лемме 1, в случае внешней задачи Дирихле справедлива

Теорема 8. Для разрешимости уравнения

$$\chi^- - T\chi^- = -2\varphi^- \tag{1.23}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие ортогональности

---

[1] Это утверждение неверно при $n = 2$, так как $\int\limits_{|\xi|=1} \mathcal{E}(x,\xi)\,d_\xi S = 0$ при $|x| \leqslant 1$

$$\int_S \varphi^- \rho_0^+ dS = 0, \qquad (1.24)$$

где ρ_0^+ — нетривиальное решение уравнения (1.20). Любые два решения уравнения (1.23) отличаются на постоянное слагаемое.

Внешняя задача Дирихле разрешима для функции φ^-, удовлетворяющей (1.24), и ее решение представимо в виде потенциала (1.5), плотность которого χ^- определяется из (1.23).

2.3. Модифицированное интегральное уравнение внешней задачи Дирихле. Если условие (1.24) нарушено, то уравнение (1.23) неразрешимо. Тем самым, внешняя задача Дирихле не имеет решения, представимого в виде потенциала двойного слоя. Этого следовало ожидать, так как потенциал (1.5) убывает на бесконечности быстрее, чем произвольная гармоническая функция (ср. (1.1) и (1.6)).

Не ограничивая общности, можно считать, что начало координат лежит в области Ω^+. Так как при этом функция $|x|^{-n+2}$ гармонична в Ω^-, то можно искать решение внешней задачи Дирихле в виде

$$u^-(x) = \int_S \chi^-(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathrm{n}_\xi} \mathscr{E}(x, \xi)\, d_\xi S + \frac{1}{|x|^{n-2}} \int_S \chi^-(\xi)\, d_\xi S. \qquad (1.25)$$

Согласно теореме о предельных значениях потенциала двойного слоя, функция χ^- должна удовлетворять уравнению

$$\chi^- - T_1\chi^- = -2\varphi^-, \qquad (1.26)$$

где T_1 — интегральный оператор с ядром $2[|x|^{-n+2} + (\partial/\partial \mathrm{n}_\xi)\mathscr{E}(x, \xi)]$. Рассмотрим однородное уравнение, получающееся из (1.26) при $\varphi^- = 0$ на S. Пусть $\chi_0^- \in L_2(S)$ — решение этого однородного уравнения. Так как ядро оператора T, имеет слабую особенность, то $\chi_0^- \in C(S)$ (см. теорему 3).

Функция u_0^-, которая получается по формуле (1.25) при $\chi^- = \chi_0^-$, гармонична в Ω^- и удовлетворяет условию $u_0^- = 0$ на S. Тогда, по теореме единственности для внешней задачи Дирихле, имеем $u_0^- = 0$ на $\overline{\Omega^-}$. Следовательно, при $x \in \overline{\Omega^-}$ справедливо равенство

$$|x|^{n-2} \int_S \chi_0^-(\xi) (\partial/\partial \mathrm{n}_\xi) \mathscr{E}(x, \xi)\, d_\xi S = -\int_S \chi_0^- dS.$$

Отсюда, согласно (1.6), находим, что $\int_S \chi_0^- dS = 0$ (достаточно перейти к пределу при $|x| \to \infty$). Таким образом, χ_0^- удовлетворяет уравнению $\chi_0^- = T\chi_0^-$. В п.2.2 установлено, что при этом $\chi_0^- = \mathrm{const}$ на S. Ввиду равенства нулю среднего функции χ_0^-, имеем $\chi_0^- = 0$ на S.

В силу альтернативы Фредгольма, из полученного результата вытекает

Теорема 9. Уравнение (1.26) однозначно разрешимо в $L_2(S)$.

Теоремы 9 и 3 позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 10. Если $n\geqslant 2$, то внешняя задача Дирихле разрешима для любой граничной функции φ^-. Решение представимо в виде (1.25), где функция χ^- определяется из уравнения (1.26).

2.4. Замечания о граничных интегральных уравнениях для краевых задач на плоскости. 1) При $n=2$ доказательство теоремы 4 отличается от приведенного в п. 1.4 лишь тем, что $V\rho_0^-=\mathrm{const}$ в $\mathbf{R}^2$ вместо $V\rho_0^-=0$ в $\mathbf{R}^n$ при $n\geqslant 3$. Однако и в этом случае из формулы (1.11) вытекает, что $\rho_0^-=0$ на S. Таким образом, теорема 4 и часть теоремы 5, касающаяся задачи Дирихле, справедливы и для $n=2$.

2) Не для любой правой части ψ^- потенциал (1.4), построенный по решению интегрального уравнения внешней задачи Неймана, ограничен в Ω^-. Поэтому следует сформулировать условие, при котором $V\rho$ является решением внешней задачи Неймана. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть ρ^- — решение уравнения $\rho^-+T^*\rho^-=2\psi^-$, где правая часть удовлетворяет условию

$$\int_S \psi^- dS=0. \tag{1.27}$$

Тогда потенциал (1.4) с плотностью ρ^- ограничен в Ω^-.

Доказательство. Действительно, интегрируя уравнение для ρ^- по S с учетом условия (1.27), получаем

$$\int_S \rho^- dS+2\int_S\int_S \rho^-(\xi)\frac{\partial}{\partial n_x}\mathscr{E}(x,\xi)\,d_\xi S d_x S=0.$$

Согласно формуле (1.7), второй член в левой части последнего соотношения равен $\int_S \rho^- dS$. Следовательно, $\int_S \rho^- dS=0$. При этом потенциал (1.4) в области Ω^- можно представить в виде

$$(V\rho^-)(x)=(2\pi)^{-1}\int_S \rho^-(\xi)\log\frac{r}{|x|}\,d_\xi S. \tag{1.28}$$

Здесь, как и ранее, предполагается, что начало координат лежит в области Ω^+. Ясно, что потенциал (1.28) ограничен в Ω^-.

Так как условие (1.27) необходимо для разрешимости внешней задачи Неймана, то мы приходим к следующей теореме.

Теорема 11. Задача Неймана в $\Omega^-\subset\mathbf{R}^2$ разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.27). Решение представимо в виде суммы произвольной постоянной и потенциала (1.4), плотность которого определяется из уравнения $\rho^- + T^*\rho^- = 2\psi^-$.

3) Изменения, которые следует внести в доказательство леммы 1, заключаются в следующем. Рассмотрим интеграл $\int_S \rho_i^+ dS$ и докажем, что он отличен от нуля.

Действительно, в противном случае имеем $(V\rho_i^+)(\infty)=0$. Кроме того, в силу теоремы единственности для внутренней задачи Неймана и уравнения (1.20), имеем $V\rho_i^+=\text{const}$ в $\bar{\Omega}^+$. Отсюда, благодаря теореме единственности внешней задачи Дирихле, $V\rho_i^+=\text{const}$ в $\mathbf{R}^2$. Следовательно, по формуле (1.11), $\rho_i^+=0$ в S, что противоречит нетривиальности ρ_i^+.

Чтобы доказать линейную зависимость ρ_0^+ и ρ_1^+, заметим, что

$$\int_S \left\{\rho_0^+\left(\int_S \rho_1^+ dS\right) - \rho_1^+\left(\int_S \rho_0^+ dS\right)\right\} dS = 0.$$

Поскольку, как было показано выше, интеграл от нетривиального решения уравнения (1.20) отличен от нуля, то $\rho_0^+\left(\int_S \rho_1^+ dS\right) - \rho_1^+\left(\int_S \rho_0^+ dS\right) = 0$ на S. Доказательство закончено.

§ 3. Спектральные свойства граничных операторов

Настоящий параграф посвящен свойствам спектра операторов T и T^* в $L_2(S)$. Здесь, как и ранее, $T=2W_0$, где W_0 — прямое значение потенциала (1.5). Через T^* обозначен сопряженный с T оператор.

Определение. Значение параметра $\lambda \in \mathbf{C}$, для которого уравнение

$$\chi - \lambda T\chi = 0 \tag{1.29}$$

имеет нетривиальное решение, называется *характеристическим числом оператора* T. Функция χ называется *собственной функцией оператора* T.

Согласно теории Фредгольма, значение λ — характеристическое для оператора T тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda}$ — характеристическое значение оператора T^*. Кратности λ и $\bar{\lambda}$ совпадают.

Результаты § 2 показывают, что значение $\lambda=1$ — характеристическое (ср. (1.7) и (1.29)), а $\lambda=-1$ — не характеристическое (см. п. 2.1). Кратность значения $\lambda=1$ равна единице. Собственной функцией оператора T, отвечающей этому характеристическому числу, является $\chi=1$.

Теорема 12. Если λ — характеристическое число оператора T, то: 1) $\lambda \in R$; 2) $|\lambda| \geqslant 1$.

Доказательство. Ограничимся случаем $n \geqslant 3$. В силу соотношений (1.8) и (1.10), справедливы равенства:

$$(1-\lambda)W_+\chi-(1+\lambda)W_-\chi=\chi-\lambda T\chi, \tag{1.30}$$

$$(1-\bar{\lambda})\frac{\partial(V\rho)}{\partial n_-}-(1-\bar{\lambda})\frac{\partial(V\rho)}{\partial n_+}=\rho-\bar{\lambda}T^*\rho. \tag{1.31}$$

Пусть λ — характеристическое число оператора T, $\lambda=\alpha+i\beta$, где $\alpha, \beta \in R$. Тогда существует функция $\rho=\rho_1+i\rho_2 \neq 0$ такая, что правая часть соотношения (1.31) обращается в нуль. Потенциалы $V\rho_i$ — непрерывно дифференцируемые функции на $\Omega^\pm$ (см. [148]). Отделяя вещественную и мнимую части в (1.31), получаем:

$$(1-\alpha)\frac{\partial(V\rho_1)}{\partial n_-}-(1+\alpha)\frac{\partial(V\rho_1)}{\partial n_+}-\beta\left[\frac{\partial(V\rho_2)}{\partial n_-}+\frac{\partial(V\rho_2)}{\partial n_+}\right]=0, \tag{1.32}$$

$$(1-\alpha)\frac{\partial(V\rho_2)}{\partial n_-}-(1+\alpha)\frac{\partial(V\rho_2)}{\partial n_+}+\beta\left[\frac{\partial(V\rho_1)}{\partial n_-}+\frac{\partial(V\rho_1)}{\partial n_+}\right]=0. \tag{1.33}$$

Умножим первое из этих равенств на $V\rho_2$, а второе — на $V\rho_1$, проинтегрируем по S и затем вычтем из второго первое. Вследствие формулы Грина и гармоничности потенциалов $V\rho_1$ и $V\rho_2$, члены, содержащие α, обратятся в нуль. Для оставшихся членов будем иметь:

$$\beta\left[(J_1^+ + J_2^+)-(J_1^- + J_2^-)\right]=0. \tag{1.34}$$

Здесь

$$J_i^\pm=\pm\int\limits_S \frac{\partial(V\rho_i)}{\partial n_\pm}V\rho_i dS=\int\limits_{\Omega^\pm}|\nabla V\rho_i|^2 dx \quad (i=1, 2).$$

Умножая равенства (1.32) и (1.33) на $V\rho_1$ и $V\rho_2$ соответственно, складывая и интегрируя результат по S, приходим к соотношению

$$(1+\alpha)(J_1^+ + J_2^+)+(1-\alpha)(J_1^- + J_2^-)=0. \tag{1.35}$$

Равенства (1.35) и (1.34) можно интерпретировать как линейную алгебраическую систему относительно величин $J_1^+ + J_2^+$ и $J_1^- + J_2^-$. Определитель этой системы равен 2β. Если $\beta \neq 0$, то $J_1^+ = J_2^+ = J_1^- = J_2^- = 0$. Тогда $V\rho_1$ и $V\rho_2$ являются константами как в Ω^+, так и в Ω^-, откуда, согласно формуле (1.11), $\rho_1=\rho_2=0$ на S. Это противоречит нетривиальности функции ρ. Таким образом, $\beta=0$, что доказывает свойство 1).

Теперь $\lambda=\alpha$, $\rho=\rho_1$, а соотношение (1.35) приобретает вид

$$(1+\lambda)J_1^+ + (1-\lambda)J_1^- = 0.$$

Отсюда

$$\lambda=(J_1^- + J_1^+)/(J_1^- - J_1^+),$$

что доказывает свойство 2).

Теорема 13. Пусть λ_0 — характеристическое число оператора $T(T^*)$, а $\chi_0(\rho_0)$ — собственная функция, отвечающая λ_0. Тогда функция $\chi_0(\rho_0)$ не имеет присоединенных функций.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, ограничимся случаем $n \geqslant 3$. Предполагая, что ρ_1 — *присоединенная к* ρ_0 *функция* (то есть $\rho_1 - \lambda_0 T^* \rho_1 = T^* \rho_0$), получаем из (1.31) и (1.10) соотношения:

$$(1-\lambda_0)\frac{\partial (V\rho_0)}{\partial n_-} - (1+\lambda_0)\frac{\partial (V\rho_0)}{\partial n_+} = 0,$$

$$(1-\lambda_0)\frac{\partial (V\rho_1)}{\partial n_-} - (1+\lambda_0)\frac{\partial (V\rho_1)}{\partial n_+} = \frac{\partial (V\rho_0)}{\partial n_-} + \frac{\partial (V\rho_0)}{\partial n_+}.$$

Отсюда находим (ср. с выводом (1.34) и (1.35)), что $J_0^+ - J_0^- = 0$ и $(1+\lambda_0)J_0^+ + (1-\lambda_0)J_0^- = 0$. Здесь

$$J_0^\pm = \pm \int\limits_S \frac{\partial (V\rho_0)}{\partial n_\pm} V\rho_0 dS + \int\limits_{\Omega^\pm} |\nabla V\rho_0|^2 dx.$$

Тогда $J_0^+ = J_0^- = 0$, откуда, в силу (1.11), $\rho_0 = 0$ на S. Последнее противоречит тому, что ρ_0 — собственная функция. Таким образом, присоединенные функции операторов T и T^* отсутствуют.

§ 4. Другие способы сведения задач Дирихле и Неймана к граничным уравнениям

4.1. Прямые варианты метода интегральных уравнений. Вместо того, чтобы представлять решения в виде потенциалов и решать интегральные уравнения для плотностей, можно использовать другие способы сведения краевых задач к интегральным уравнениям на S. Мы имеем в виду так называемые *прямые варианты граничных уравнений*, когда решения интегральных уравнений явно выражаются через решения краевых задач.

Воспользуемся формулой (1.3), где $x \in \Omega^\pm$. Устремляя x к предельному положению на S и учитывая непрерывность $u^\pm$ и потенциала простого слоя, а также теорему о скачках потенциала двойного слоя, получаем:

$$\frac{1}{2} u^\pm(x) = \pm \int\limits_S \left[u^\pm(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \mathscr{E}(x, \xi) - \mathscr{E}(x\ \ \xi) \frac{\partial u^\pm}{\partial n_\xi} \right] d_\xi S, \quad x \in S. \quad (1.37)$$

В случае задачи Неймана в области $\Omega^\pm$ функция $\partial u^\pm / \partial n$ известна на S и соотношения (1.37) можно интерпретировать как интегральные уравнения для граничных значений функций $u^\pm$:

$$u^\pm \mp T u^\pm = \mp 2 V_0 \varphi^\pm. \qquad (1.38)$$

Как было показано в пп. 2.1 и 2.4, уравнение для u^- однозначно разрешимо при любой правой части.

Согласно п. 2.2, функцию u^+ можно найти из уравнения (1.38) тогда и только тогда, когда справедливо условие ортогональности

$$\int_S \rho_0^+ V_0 \varphi^+ dS = 0,$$

где $\rho_0{}^+$ — решение уравнения (1.20). Ввиду симметричности оператора V_0 и постоянства функции $V\rho_0{}^+$ на Ω^+ (см. доказательство леммы 1), последнее соотношение эквивалентно равенству (1.15), которое является необходимым и достаточным условием разрешимости внутренней задачи Неймана.

В случае задачи Дирихле в области $\Omega^\pm$, подставляя в (1.37) известные граничные значения $u^\pm$, получаем интегральное уравнение первого рода для значений $\partial u^\pm/\partial \mathbf{n}$ на S. Ядром интегрального оператора в этом уравнении первого рода является фундаментальное решение $\mathscr{E}(x, \xi)$. Доказательству разрешимости уравнения первого рода с таким ядром посвящен следующий п. 4.2.

В заключение раздела остановимся на еще одном прямом способе сведения задачи Дирихле к граничному интегральному уравнению. Предположим, что S принадлежит классу $C^{2,\alpha}$ и $\varphi^\pm \in C^{1,\alpha}(S)$. Известно (см. [166]), что при этом $u^\pm \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Тогда равенство (1.3) допускает дифференцирование, из него вытекает соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^\pm}{\partial \mathbf{n}_x} = \mp \int_S \frac{\partial u^\pm}{\partial \mathbf{n}_\xi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \mathscr{E}(x, \xi)\, d_\xi S \pm$$

$$\pm \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \int_S \varphi^\pm \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \mathscr{E}(x, \xi)\, d_\xi S, \quad x \in S. \qquad (1.39)$$

которое можно интерпретировать как уравнение относительно $\partial u^\pm/\partial \mathbf{n}$ на S. Для исследования уравнений (1.39) можно воспользоваться результатами пп. 2.1—2.4.

4.2. Уравнение первого рода для решения задачи Дирихле. Здесь речь пойдет о решении уравнений вида

$$\int_S \rho(\xi)\, \mathscr{E}(x, \xi)\, d_\xi S = f(x), \quad x \in S. \qquad (1.40)$$

В п. 4.1 было показано (см. формулу (1.37)), как это уравнение возникает в прямом варианте метода граничных уравнений для задачи Дирихле. Уравнение (1.40) получается и при отыскании решения задачи Дирихле в $\Omega^\pm$ в виде потенциала $V\rho$. В этом случае $f = \varphi^\pm$. Для простоты изложения будем считать, что $n \geqslant 3$ и S принадлежит классу $C^{2,\alpha}$.

Лемма 3. Уравнение (1.40) имеет решение $\rho \in C(S)$, если $f \in C^2(S)$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta v = 0 \text{ в } \Omega^+, \quad v = f \text{ на } S,$$

которая имеет единственное решение $v \in C^1(\Omega^+)$. Положим $g(x) = (\partial v/\partial \mathbf{n})(x)$ при $x \in S$.

Ясно, что v является решением задача Неймана

$$\Delta v = 0 \text{ в } \Omega^+, \ \partial v/\partial \mathbf{n} = g \text{ на } S.$$

Из результатов п. 2.2 вытекает, что $v = V\rho_* + C$, где C — некоторая постоянная, а $\rho_* \in C(S)$. Далее, можно написать $\mathbf{1} = V(K\rho_0^+)$, где ρ_0^+ — нетривиальное решение уравнения (1.20), а K — некоторая постоянная. Таким образом, $v = V(\rho_* + CK\rho_0^+)$ и, следовательно, $\rho = \rho_* + CK_0^+$.

Хорошо известно, что оператор V_0 в левой части уравнения (1.40) представляет собой ограниченный, симметричный, компактный оператор в $L_2(S)$. Более того, нуль не является его собственным числом. Действительно, если $V_0\rho_0 = 0$, то для любой функции $f \in C^2(S)$ имеем

$$\int_S \rho_0 f dS = \int_S \rho_0 V_0 \rho dS = \int_S \rho V_0 \rho_0 dS = 0$$

(ср. с доказательством леммы 1). Здесь ρ — решение уравнения (1.40) для f, существование которого установлено в лемме 3. Таким образом, $\rho_0 = 0$ на S, и существует оператор V_0^{-1}, который, согласно лемме 3, действует из $C^2(S)$ в $C(S)$. Более того, справедлива следующая

Теорема 18. Оператор V_0^{-1} может быть расширен до непрерывного оператора, отображающего $L_2(S)$ на $H^{-1}(S)$. (Здесь и далее $H^{-r}(S)$, $r > 0$, пространство обобщенных функций, сопряженное с $H^r(S) = W_2{}^r(S)$; см. [146, гл. 2]).

Доказательство этого результата может быть получено, например, при помощи того факта, что V_0 является псевдодифференциальным оператором, главная часть символа которого совпадает с главной частью символа **оператора** $(-\delta)^{-1/2}$, где δ — оператор Лапласа—Бельтрами на S. Предположив достаточную гладкость поверхности S, можно показать, что V_0^{-1} отображает $H^r(S)$ на $H^{r-1}(S)$ при любом вещественном r.

Наряду с использованием уравнения (1.40) при решении задачи Дирихле с помощью потенциала простого слоя, возможно применение потенциала двойного слоя для решения задачи Неймана. Пример такого рода содержится в работе Жируара и Неделека [142], где рассмотрена внешняя задача Неймана в $\mathbf{R}^3$. Для отыскания плотности χ потенциала (1.5) в [142] получено интегральное тождество

$$\int_S \int_S [\chi(\xi) - \chi(x)][\tau(\xi) - \tau(x)] \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \mathscr{E}(x, \xi) \, d_x S d_\xi S = -2 \int_S \psi\tau dS. \tag{1.41}$$

Здесь $\psi \in H^{-1/2}(S)$, а χ и τ принадлежат факторпространству $H^{1/2}(S)/\mathbf{R}^1$, причем τ — произвольный элемент.

Билинейная форма в левой части (1.41) симметрична и положительно определена на пространстве $H^{1/2}(S)/\mathbf{R}^1$, что позволяет найти единственный элемент χ из этого пространства, удовлетворяющий тождеству (1.41) при произвольном τ.

Глава 2

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЛАМЕ И СТОКСА

Граничные интегральные уравнения являются эффективным методом исследования и решения краевых задач механики сплошной среды. Это демонстрируется в настоящей главе на примере систем Ламе и Стокса. Краевые задачи для этих систем сводятся к системам интегральных уравнений, для которых справедливы результаты, аналогичные изложенным в главе 1. Другие примеры применения граничных уравнений к задачам механики сплошной среды приведены в главе 3.

Первый параграф посвящен интегральным уравнениям, вообще говоря, сингулярным, к которым сводятся первая и вторая основные краевые задачи для трехмерной системы Ламе линейной однородной изотропной теории упругости. Рассматривается вопрос о регуляризации сингулярных уравнений, приводящей к уравнениям, для которых справедлива теория Фредгольма.

В последнем разделе § 1 обсуждаются системы интегральных уравнений для смешанной задачи теории упругости.

Мы не останавливаемся в этом параграфе на использовании теории функций комплексного переменного для получения и исследования интегральных уравнений плоской теории упругости. Этот вопрос затронут в третьей главе. Там же рассматриваются интегральные уравнения динамических задач.

Во втором параграфе излагаются результаты, касающиеся граничных интегральных уравнений для системы Стокса, которая получается в результате линеаризации уравнений Навье—Стокса. В этом случае, как и в теории гармонических потенциалов, ядра интегральных операторов имеют слабую особенность.

§ 1. Метод граничных интегральных уравнений для системы Ламе

1.1. Исходные положения теории равновесия изотропного упругого тела.[1] Для описания состояния упругого тела, подвергнутого деформации, принято использовать вектор смеще-

---

[1] Подробное изложение элементов механики сплошных сред см., например, в книге [135].

ний $\mathbf{u}(x)=(u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x))$ и тензор напряжений $\sigma_{ij}(x)$ $(i,j=1,\ 2,\ 3)$. Здесь $x\in\mathbf{R}^3$ и $x_1,\ x_2,\ x_3$ — координаты первоначального положения точек упругого тела, смещение которой выражается вектором $\mathbf{u}(x)$.

Из закона сохранения количества движения для упругого тела вытекает, что в случае равновесия имеют место равенства

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+F_i=0;\quad i=1,\ 2,\ 3,$$

где F_i — компоненты вектора объемной плотности внешних сил, действующих на тело. Другим следствием закона сохранения количества движения является то, что тензор напряжений симметричен:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji},\ i,j=1,\ 2,\ 3.$$

Для описания равновесия деформированного твердого тела наряду с приведенными динамическими соотношениями необходимы уравнения состояния, связывающие тензор напряжений с кинематическими характеристиками деформации. Последние представлены в теории упругости тензором деформации.

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right);\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3.$$

В качестве уравнений состояния в теории упругости принята линейная зависимость между компонентами тензоров деформации и напряжений (*закон Гука*). В случае однородного изотропного тела закон Гука имеет вид

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_i^j\sum_{k=1}^{3}e_{kk}+2\mu e_{ij};\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3,$$

где δ_i^j —символ Кронекера, а λ и μ — физические постоянные среды, называемые *константами Ламе*. Они подчинены условиям: $\mu>0$, $\lambda>-2\mu/3$. Пользуясь определением тензора деформации, закон Гука можно записать в виде

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_i^j\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right);\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3.$$

Система Ламе получается в результате подстановки последнего выражения в динамические соотношения. Обычно ее записывают следующим образом:

$$\mu\Delta\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\mathbf{F}=0.$$

Далее речь пойдет о применении метода потенциалов к *однородной системе Ламе*

$$\mu\Delta\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}=0. \tag{2.1}$$

Эта эллиптическая система представляет собой аналог уравнения Лапласа, и к ней применим метод граничных интегральных уравнений, который будет далее изложен в соответствии со схемой, использованной в главе 1.

1.2. Фундаментальное решение системы Ламе. Матрица с элементами

$$\Gamma_{ij}(x, \xi) = -\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{\delta_i^j}{r}+\frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{r^3}\right];$$
$$i,\ j=1, 2, 3$$

служит *фундаментальным решением системы Ламе*. Действуя на k-й столбец этой матрицы оператором из левой части (2.1), получаем $\delta(x-\xi)\mathbf{e}^k$. Здесь $\mathbf{e}^k$ — единичный вектор, направленный вдоль k-й оси декартовой системы координат, а $\delta(x-\xi)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке ξ. Приведенное фундаментальное решение называется *матрицей Кельвина—Сомильяны*.

Пусть Ω^+ — односвязная ограниченная область в $\mathbf{R}^3$, граница которой $\partial\Omega^+=S$ принадлежит классу $C^{1,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$. Через Ω^- обозначим $\mathbf{R}^2\setminus\overline{\Omega}^+$. Введем матричный дифференциальный оператор

$$\mathscr{T}_x(\partial/\partial x,\ \mathbf{n}_x)\mathbf{u}=(\mu+\varkappa)\,\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{n}_x+ \qquad (2.2)$$
$$+(\lambda+\mu-\varkappa)\,\mathbf{n}_x\operatorname{div}\mathbf{u}+\varkappa\mathbf{n}_x\times\operatorname{rot}\mathbf{u},\ \varkappa>0,$$

называемый *оператором обобщенного напряжения*. Его элементы выражаются формулой:

$$(\mathscr{T}_\varkappa)_{ij}=\mu\delta_i^j\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}+(\lambda+\mu)\,n_i(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j}+\varkappa\left(n_j(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i}-n_i(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

где $n_j(x)=\cos(\mathbf{n}_x,\ x_j)$.

При $\varkappa=\mu$ этот оператор называется *оператором напряжения*, так как $\mathscr{T}_\mu(\partial/\partial x,\ \mathbf{n}_x)u$ является вектором силового напряжения в направлении $\mathbf{n}_x$. Если $\varkappa=\mu(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)^{-1}$, то оператор (2.2) называется *оператором псевдонапряжения* и обозначается $\mathscr{N}(\partial/\partial x,\ \mathbf{n}_x)$.

Будем говорить, что решение $\mathbf{u}^\pm=(u_1^\pm,\ u_2^\pm,\ u_3^\pm)$ системы Ламе *регулярно* в $\Omega^\pm$, если $u_k^\pm\in C^2(\Omega^\pm)\cap C^1(\overline{\Omega}^\pm)$ и в области Ω^- справедливы оценки при $|x|\to\infty$

$$|\mathbf{u}^-(x)|=O(|x|^{-1});\quad |\nabla u_k^-|=O(|x|^{-2}),\quad k=1, 2, 3. \qquad (2.3)$$

Для регулярного решения системы (2.1) в области $\Omega^\pm$ имеет место представление (ср. с формулой (1.3)):

$$\mathbf{u}^\pm(x)=\pm\int\limits_S\{[\mathscr{T}_\varkappa(\partial/\partial\xi,\ \mathbf{n}_\xi)\,\Gamma(x,\ \xi)]'\mathbf{u}^\pm(\xi)-$$
$$-\Gamma(x,\ \xi)\,(\mathscr{T}_\varkappa(\partial/\partial\xi,\ \mathbf{n}_\xi)\,\mathbf{u}^\pm)(\xi)\}\,d_\xi S,\quad x\in\Omega^\pm. \qquad (2.4)$$

Здесь штрихом обозначена операция транспонирования матрицы, а интеграл понимается в смысле главного значения.

1.3. Потенциалы теории упругости и их свойства. Как и в теории гармонических функций, введем *потенциалы простого и двойного слоя.* Новой является возможность ввести семейство потенциалов двойного слоя $\{W^{(\varkappa)}\chi\}$, зависящих от параметра $\varkappa$.

Потенциал $W^{(\varkappa)}\chi$ вводится следующим образом:

$$(W^{(\varkappa)}\chi)(x)=\int_S [\mathscr{T}_\varkappa(\partial/\partial\xi,\ \mathbf{n}_\xi)\,\Gamma(x,\ \xi)]\,\chi(\xi)\,d_\xi S,\quad x\in\Omega^{\pm}. \tag{2.5}$$

Его векторная запись имеет вид

$$(W^{(\varkappa)}\chi)(x)=\frac{\varkappa(\lambda+3\mu)-\mu(\lambda+\mu)}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\int_S\frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{n}_\xi)\times\chi(\xi)}{r^3}\,d_\xi S+$$
$$+\frac{\mu(\lambda+3\mu)-\varkappa(\lambda+\mu)}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\int_S\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_\xi)\,\chi(\xi)}{r^3}\,d_\xi S+$$
$$+\frac{3(\lambda+\mu)(\mu+\varkappa)}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\int_S\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_\xi)(\mathbf{r}\cdot\chi)\,\mathbf{r}}{r^5}\,d_\xi S, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор с началом в точке x и концом в точке ξ, а плотность $\chi(\xi)=(\chi_1(\xi),\ \chi_2(\xi),\ \chi_3(\xi))$ образована функциями пространства $C^{0,\beta}(S)$, $0<\beta<\alpha$.

Существует *прямое значение* $(W_0^{(\varkappa)}\chi)(x)$, $x\in S$, *потенциала двойного слоя.* При вычислении прямого значения по формуле (2.5), интеграл следует понимать в смысле главного значения. То же относится к первому интегралу в правой части (2.6). Единственным исключением из сказанного является случай $\varkappa=\mu(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)^{-1}$, когда $W_0^{(\varkappa)}\chi$ представляет собой обычный несобственный интеграл, сходящийся при $\chi_k\in C(S)$, $k=1,\ 2,\ 3$, вследствие принадлежности поверхности S классу $C^{1,\alpha}$.

Теорема 1. Если компоненты χ_k, $k=1,\ 2,\ 3$, принадлежат пространству $C^{0,\beta}(S)$, то компоненты потенциала $W^{(\varkappa)}\chi$ являются элементами $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}^{\pm})$ после доопределения потенциала на S его предельными значениями

$$W_{\pm}^{(\varkappa)}\chi=\pm\frac{1}{2}\chi+W_0^{(\varkappa)}\chi. \tag{2.7}$$

Потенциалом простого слоя с плотностью ρ называется вектор-функция

$$(V\rho)(x)=\int_S\Gamma(x,\ \xi)\,\rho(\xi)\,d_\xi S. \tag{2.8}$$

Теорема 2. Потенциал $V\rho$ непрерывен в $\mathbf{R}^3$, если $\rho_k\in C(S)$, $k=1,\ 2,\ 3$. При условии, что $\rho_k\in C^{0,\beta^*}(S)$, $0<\beta<\alpha$ $(k=1,\ 2,\ 3,$ первые производные компонент потенциала (2,8) принадлежат классу $C^{0,\beta}(\overline{\Omega^{\pm}})$, если доопределить их на S предельными значениями

$$\left[\frac{\partial(V\rho)_k}{\partial x_j}\right]_{\pm}=\mp\frac{1}{2}\left\{\mu^{-1}\rho_k-\frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\,n_k(\mathbf{n}\cdot\rho)\right\}n_j+\left[\frac{\partial(V\rho)_k}{\partial x_j}\right]_0. \tag{2.9}$$

Прямое значение $[\partial(V\rho)_k/\partial x_j]_0$ понимается в смысле главного значения.

Следствие. Из формулы (2.9) вытекает, что обобщенное напряжение потенциала $V\rho$ ведет себя аналогично нормальной производной гармонического потенциала простого слоя (см. п. 1.2 гл. 1). А именно, имеем

$$[\mathcal{T}_\varkappa(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)(V\rho)]_\pm = \mp\frac{1}{2}\rho + [\mathcal{T}_\varkappa(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)(V\rho)]_0. \qquad (2.10)$$

Здесь прямое значение обобщенного напряжения потенциала (2.8) является сингулярным интегральным оператором при всех $\varkappa$, кроме $\varkappa = \mu(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)^{-1}$. В последнем случае он представляет собой оператор со слабой особенностью.

Операторы $W_0^{(\varkappa)}$ и $[\mathcal{T}_\varkappa V]_0$ являются сопряженными друг другу.

В заключение этого пункта отметим, что потенциалы (2.5) и (2.8) удовлетворяют системе (2.1) в $\Omega^\pm$. Для потенциала $V\rho$ справедливы оценки (2.3), а потенциал $W^{(\varkappa)}\chi$ убывает при $|x|\to\infty$ на порядок быстрее.

1.4. Граничные интегральные уравнения основных задач теории упругости. *Решением первой краевой задачи* назовем решение $u^\pm$ системы Ламе в области $\Omega^\pm$, удовлетворяющее краевому условию

$$\mathbf{u}^\pm = \varphi^\pm \text{ на } S. \qquad (2.11)$$

где $\varphi_i^\pm \in C^{0,\beta}(S)$, $0<\beta<\alpha$ $(i=1, 2, 3)$. Кроме того, потребуем, чтобы в Ω^- при $|x|\to\infty$ выполнялись оценки (2.3).

Для сведения этой задачи к системе граничных интегральных уравнений будем искать ее решение в виде потенциала $W^{(\varkappa)}\chi$ с неизвестной плотностью $\chi^\pm$. При этом, согласно формуле (2.7), получаем уравнение

$$\chi^\pm \pm 2W_0^{(\varkappa)}\chi = \pm 2\varphi^\pm. \qquad (2.12)$$

Чтобы провести аналогию с теорией гармонического потенциала (см. гл. 1, §§ 1, 2), рассмотрим зависящее от параметра $\varkappa$ семейство краевых задач, которые приводятся к интегральным уравнениям, сопряженным с (2.12). Эти задачи состоят в отыскании решений $\mathbf{u}^\pm$ системы Ламе в области $\Omega^\pm$, для которых

$$\mathcal{T}_\varkappa(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)\mathbf{u}^\pm = \psi^\pm \text{ на } S, \qquad (2.13)$$

$$\psi_i^\pm \in C^{0,\beta}(S), \quad i=1, 2, 3.$$

В области Ω^- должно выполняться также условие (2.3).

Условие (2.13) имеет физический смысл при $\varkappa=\mu$. В этом случае задачу называют *второй основной задачей теории упругости*. Для произвольного $\varkappa$ будем говорить об *обобщенной второй основной задаче*. Если искать ее решение в виде $V\rho^\pm$, то для неизвестной плотности $\rho^\pm$, согласно соотношениям (2.10), получаем уравнение

$$\rho^{\pm} \mp 2[\mathcal{T}_{\varkappa}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)(V\rho^{\pm})]_0 = \mp 2\psi^{\pm}. \qquad (2.14)$$

Непосредственно применять теорию Фредгольма к уравнениям (2.12) и (2.14) можно лишь при $\varkappa = \mu(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)^{-1}$. Для остальных значений $\varkappa$ операторы $W_0^{(\varkappa)}$ и его сопряженный не являются компактными. Тем не менее, теоремы Фредгольма справедливы для и сингулярных интегральных уравнений (2.12) и (2.14). Это вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. Для уравнений (2.12) и (2.14) существуют двусторонние регуляризаторы (определение регуляризатора см. в гл. 1, § 3 статьи I этого тома).

Доказательство ([59]). Обозначим через $\mathcal{W}$ символическую матрицу оператора $W_0^{(\varkappa)}$ (см. гл. 4, § 6 статьи I этого тома). Вычисления, проведенные в § 45 книги [66], показывают, что

$$\mathcal{W}(\xi) = \frac{ic_{\varkappa}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{bmatrix},$$

где ξ — точка на сфере с координатами θ, φ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, а

$$c_{\varkappa} = [\varkappa(\lambda+3\mu) - \mu(\lambda+\mu)][4\mu(\lambda+2\mu)]^{-1}.$$

Поскольку $\left(\frac{2}{c_{\varkappa}}\mathcal{W}\right) = \frac{2}{c_{\varkappa}}\mathcal{W}$, то

$$(J - 2\mathcal{W})^{-1} = \mathcal{J} + \frac{2}{1-c_{\varkappa}^2}\mathcal{W} + \frac{4}{1-c_{\varkappa}^2}\mathcal{W}^2,$$

где J — тождественная матрица. Отсюда следует, что оператор

$$I + \frac{2}{1-c_{\varkappa}^2}W_0^{(\varkappa)} + \frac{4}{1-c_{\varkappa}^2}\left(W_0^{(\varkappa)}\right)^2$$

является регуляризатором уравнения (2.12) при нижнем знаке (I — тождественный оператор), а регуляризованный оператор имеет вид

$$I + \frac{c_{\varkappa}^3}{1-c_{\varkappa}^2}\left[\frac{2}{c_{\varkappa}}W_0^{(\varkappa)} - \left(\frac{2}{c_{\varkappa}}W_0^{(\varkappa)}\right)^3\right].$$

Так как $\mathcal{W}^* = -\mathcal{W}$, то регуляризатор уравнения (2.14) при верхнем знаке равен

$$I - \frac{2}{1-c_{\varkappa}^2}W_0^{(\varkappa)} + \frac{4}{1-c_{\varkappa}^2}\left(W_0^{(\varkappa)}\right)^2.$$

Аналогично осуществляется регуляризация второй пары сопряженных уравнений из (2.12) и (2.14).

В силу теоремы 3, для уравнений (2.12) и (2.14) имеют место теоремы Фредгольма. Дальнейшее исследование разрешимости этих уравнений проводится по схеме, которая в § 2, гл. 1

была использована для анализа интегральных уравнений теории гармонических функций и которая приводит к аналогичным результатам.

В частности, однородное уравнение $\chi^+ + 2W_0^{(\mu)}\chi^+ = 0$ и его сопряженное имеют лишь тривиальные решения. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Уравнение $\chi^+ + 2W_0^{(\mu)}\chi^+ = 2\varphi^+$ и его сопряженное однозначно разрешимы.

Эта теорема позволяет получить решения внешней второй и внутренней первой основных задач для системы Ламе в виде соответствующих потенциалов (см. [36]).

Однородное уравнение

$$\chi_0^- - 2W_0^{(\mu)}\chi_0^- = 0 \tag{2.15}$$

имеет шесть линейно независимых решений

$$\begin{gathered}\chi_{0k}^- = \mathbf{e}^k, \quad k = 1, 2, 3;\\ \chi_{04}^- = (0, x_3, -x_2), \quad \chi_{05}^- = (-x_3, 0, x_1), \quad \chi_{06}^- = (x_2, -x_1, 0).\end{gathered} \tag{2.16}$$

Теорема 5. Необходимыми и достаточными условиями разрешимости уравнения $\rho^- - 2[\mathcal{T}_\mu(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)(V\rho^-)]_0 = -2\psi^-$ являются соотношения

$$\int\limits_S \psi^- dS = 0, \quad \int\limits_S \mathbf{x} \times \psi^- dS = 0. \tag{2.17}$$

Так как условия (2.17) являются также необходимыми для разрешимости второй основной задачи в области Ω^+, то мы приходим к следующему результату.

Теорема 6. При выполнении условий (2.17) вторая основная задача для системы (2.1) имеет единственное (с точностью до жесткого смещения) решение, которое представимо в виде потенциала простого слоя с плотностью, удовлетворяющей интегральному уравнению из теоремы 5.

Согласно теории Фредгольма, сопряженное с (2.15) однородное уравнение имеет также шесть линейно независимых решений ρ_{0k}^+ $(k = 1, \ldots, 6)$. С их помощью можно видоизменить интегральное уравнение внешней первой основной задачи (см. (2.12) так, чтобы оно стало разрешимым для любой правой части (ср. с гл. 1, п. 2.3).

Будем искать решение первой основной задачи в Ω^- в виде

$$\mathbf{u}^- = W^{(\mu)}\chi^- + \sum_{k=1}^{6} c_k V\rho_{0k}^+. \tag{2.18}$$

Здесь неизвестными являются плотность χ^- и постоянные c_k (ср. с гл. 1, п. 1.6). При этом для отыскания плотности χ^- получается уравнение

$$\chi^- - 2W_0^{(\mu)}\chi^- = -2\left(\varphi^- + \sum_{k=1}^{6} c_k V_0 \rho_{0k}^+\right) \qquad (2.19)$$

(см. формулу (2.7)). Постоянные c_k в правой части (2.19) должны быть найдены предварительно из соотношений

$$\sum_{k=1}^{6} c_k \int_S \rho_{0i}^+ \cdot V_0 \rho_{0k}^+ dS = -\int_S \varphi^- \cdot \rho_{0i}^+ dS. \qquad (2.20)$$

Относительно констант c_k уравнения (2.20) образуют однозначно разрешимую линейную алгебраическую систему. В то же время соотношения (2.20) выражают ортогональность правой части уравнения (2.19) линейно независимым решениям ρ_{0i}^+ сопряженного однородного уравнения. Таким образом имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. Если $(c_1, \ldots, c_6)$ — вектор решений однозначно разрешимой линейной алгебраической системы (2.20), то при любой функции φ^- уравнение (2.19) разрешимо. Решение χ^- определено с точностью до произвольной линейной комбинации функций $\chi_{01}^-, \ldots, \chi_{06}^-$.

Спектральные свойства операторов $2W_0^{(\mu)}$ и $2[\mathcal{T}_\mu(\partial/\partial x,$

Следствием этого результата является

Теорема 7. Первая основная задача теории упругости разрешима в области Ω^+. Решение представимо в виде (2.18), где χ^+ и $(c_1, \ldots, c_6)$ определяются согласно теореме 6.

$\mathbf{n}_x) V]_0$ полностью аналогичны спектральным свойствам операторов T и T^* в теории гармонических функций (см. гл. 1, § 3). Более того, доказательства этих результатов в случае потенциалов теории упругости дословно такие же (с точностью до размерности и обозначений). Они приведены в § 4 главы 6 книги [36]. Мы ограничимся лишь формулировкой результатов.

Теорема 8. Все характеристические значения операторов $2W_0^{(\mu)}$ и его сопряженного вещественны и их абсолютные величины не меньше единицы. Присоединенные функции отсутствуют.

Значение $\lambda = -1$ — не характеристическое для операторов $2W_0^{(\mu)}$ и его сопряженного, а $\lambda = +1$ — характеристическое, и ему соответствуют шесть линейно независимых собственных функций.

1.5. Система интегральных уравнений для смешанной задачи теории упругости. Пусть S_1 и S_2 — непересекающиеся открытые подмножества поверхности S такие, что $S_1 \cup S_2 = S$. *Смешанная задача* ставится следующим образом. Требуется найти решение $\mathbf{u}^\pm$ системы Ламе в области $\Omega^\pm$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\mathbf{u}^\pm = \varphi^\pm \text{ на } S_1, \qquad (2.21)$$
$$\mathcal{T}_\mu(\partial/\partial x, n_x)\mathbf{u}^\pm = \psi^\pm \text{ на } S_2.$$

Рассмотрим потенциалы $V_k\rho$ и $W_k\chi$, которые получаются в результате замены S на S_k ($k=1, 2$) в формулах (2.5) и (2.8). Если искать функцию $\mathbf{u}^\pm$ в виде $W_1\chi^\pm+V_2\rho^\pm$, то для определения плотностей $\chi^\pm$ и $\rho^\pm$, заданных на S_1 и S_2 соответственно, в силу условий (2.21), получается система

$$\pm\frac{1}{2}\chi^\pm+W_{10}\chi^\pm+V_{20}\rho^\pm=\varphi^\pm \text{ на } S_1,$$
$$\mp\frac{1}{2}\rho^\pm+[\mathcal{T}_\mu(W_1\chi^\pm)]_0+[\mathcal{T}_\mu(V\rho^\pm)]_0=\psi^\pm \text{ на } S_2. \tag{2.22}$$

Эта система исследована автором в случае поверхностей, на которых допускаются ребра [45] (см. п. 1.5 гл. 5).

Для нахождения решения $\mathbf{u}^\pm$ смешанной задачи можно воспользоваться также представлением $W_2\chi^\pm+V_1\rho^\pm$. Последнее приводит к следующей системе уравнений для $\chi^\pm$ и $\rho^\pm$, заданных на S_2 и S_1 соответственно:

$$W_{20}\chi^\pm+V_{10}\rho^\pm=\varphi^\pm \text{ на } S_1;$$
$$[\mathcal{T}_\mu(W_2\chi^\pm)]_0+[\mathcal{T}_\mu(V_1\rho^\pm)]_0=\psi^\pm \text{ на } S_2. \tag{2.23}$$

Система вида (2.23) возникает и при использовании прямого метода для решения смешанной задачи. В этом случае неизвестные не являются плотностями потенциалов и правые части имеют другой вид (ср. с гл. 1, п. 4.1). Разрешимость системы вида (2.23), которая получается прямым методом, вытекает из существования решений соответствующих краевых задач теории упругости (см. [135]). Единственность решения системы (2.23) при $S_1\neq\varnothing$ была установлена в работе [91].

Достоинством системы (2.23) является симметричность оператора в ее левой части. Другие свойства этой системы исследованы в книге А. Г. Угодчикова и Н. М. Хуторянского [92].

При помощи прямого варианта метода граничных интегральных уравнений смешанная задача теории упругости может быть сведена также к системе

$$\mathbf{g}\mp{}^\pm/2+W_{10}\mathbf{g}^\pm\mp V_{20}\mathbf{h}^\pm=\mathbf{f}_1^\pm \text{ на } S_1,$$
$$\pm\mathbf{h}^\pm/2+[\mathcal{T}_\mu(V_2\mathbf{h}^\pm)]_0\mp[\mathcal{T}_\mu(W_1\mathbf{g}^\pm)]_0=\mathbf{f}_2^\pm \text{ на } S_2. \tag{2.24}$$

Здесь $\mathbf{g}^\pm$ и $\mathbf{h}^\pm$ — неизвестные, а $\mathbf{f}_1^\pm$ и $\mathbf{f}_2^\pm$ — заданные функции, определенные на S_1 и S_2 соответственно. Существование решения системы (2.24) следует из разрешимости соответствующих краевых задач (см. [135]). В работе [91] установлено, что решение ($\mathbf{g}^+$, $\mathbf{h}^+$) единственно, если $S_1\neq\varnothing$, а ($\mathbf{g}^-$, $\mathbf{h}^-$) единственно, если $S_2\neq\varnothing$.

В [95] показано, что собственные числа λ некоторого расширения оператора системы (2.24) лежат в круге $|\lambda|\leqslant 1/2$.

В заключение параграфа укажем, что подробное изложение метода граничных интегральных уравнений для системы Ламе содержится в книге В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе [36], где этот метод применяется и к другим задачам механики деформируемого твердого тела. С дальнейшим развитием метода можно познакомиться по монографии Т. Г. Гегелиа и Т. В. Бурчуладзе [7], в которой имеется также исторический обзор по данному вопросу. В этой связи отметим еще § 45 книги С. Г. Михлина [66], книги В. З. Партона и П. И. Перлина [80], А. Г. Угодчикова и Н. М. Хуторянского [92]. Обширная библиография по применению интегральных уравнений в теории упругости приведена в [7], [36].

§ 2. Метод граничных интегральных уравнений для системы Стокса

2.1. Система Стокса — модель для описания медленного стационарного течения вязкой жидкости. В качестве величин характеризующих движение вязкой жидкости используют вектор скорости $\mathbf{v}(x,t)=(v_1(x,t),\ v_2(x,t),\ v_3(x,t))$ и тензор напряжений $\sigma_{ij}(x,t)$ $(i,j=1,\ 2,\ 3)$. Здесь $x\in\mathbf{R}^3$ и $x_1,\ x_2,\ x_3$ — координаты точки, в которой приложены вектор v и тензор σ_{ij}.

Закон сохранения массы для несжимаемой жидкости выражается *уравнением неразрывности*

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0.$$

Векторы, удовлетворяющие этому уравнению, называются *соленоидальными*.

Закон сохранения количества движения имеет вид

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+F_i;\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

Здесь ρ — плотность жидкости, F_i — компоненты объемных сил, действующих на жидкость, а d/dt — полная производная, равная $\partial/\partial t+\mathbf{v}\cdot\nabla$. Как и в случае деформируемого твердого тела, тензор напряжений симметричен

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji};\quad i,j=1,2,3.$$

Согласно закону Стокса, уравнение состояния вязкой жидкости связывает тензор напряжений с давлением p и тензором скоростей деформации $(\partial v_i/\partial x_j+\partial v_j/\partial x_i)/2$ по формуле

$$\sigma_{ij}=-p\delta_i^j+\rho\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right);\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3,$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости.

В результате подстановки последнего выражения в закон сохранения количества движения и учета уравнения неразрывности получаются *уравнения Навье—Стокса*

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\rho^{-1}\nabla p+\nu\Delta\mathbf{v}+\mathbf{F}.$$

В случае стационарного течения жидкости первый член в левой части пропадает. Для медленного течения (когда число Рейнольдса $\mathrm{Re} \ll 1$) допустима *линеаризация* уравнений Навье—Стокса, то есть пренебрежение нелинейным членом ввиду его малости по сравнению с остальными. Таким образом, для описания медленного стационарного течения вязкой жидкости мы приходим к *системе Стокса*

$$\begin{cases} \nu\Delta \mathbf{v} - \rho^{-1}\nabla p + \mathbf{F} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Без ограничения общности, можно считать, что $\rho = 1$. Далее речь пойдет о применении метода потенциалов к *однородной системе Стокса*

$$\begin{cases} \nu\Delta \mathbf{v} - \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases} \qquad (2.25)$$

Для отыскания четырех неизвестных v_1, v_2, v_3 и p эта система содержит четыре уравнения. Давление p может быть определено из нее с точностью до произвольного постоянного слагаемого, что далее особо оговариваться не будет.

С подробным изложением приведенных ниже результатов, восходящих к Лихтенштейну [160] и Одквисту [175], можно познакомиться по книге О. А. Ладыженской [37]. Конкретные вопросы, связанные с практическим применением граничных интегральных уравнений при решении краевых задач для системы Стокса, рассмотрены в книге С. М. Белоносова и К. Е. Черноуса [3], где приведена и библиография.

2.2. Фундаментальное решение системы Стокса. Составленная из векторов скорости квадратная матрица $U(x,\xi) = [u_i^j(x,\xi)]$ и соответствующий ей вектор давления $\mathbf{Q}(x,\xi) = (q^1(x,\xi),\ q^2(x,\xi),\ q^3(x,\xi))$ называются *фундаментальным решением системы Стокса*, если они удовлетворяют соотношениям

$$\nu\Delta_x \mathbf{u}^j - \nabla_x q^j = \delta(x-\xi)\,\mathbf{e}^j,$$
$$\operatorname{div} \mathbf{u}^j = 0.$$

Здесь $\mathbf{e}^j$ — единичный вектор, направленный вдоль j-й оси декартовой системы координат, а $\delta(x-\xi)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке ξ.

Фундаментальное решение, компоненты которого стремятся к нулю при $|x| \to \infty$, определяются формулами

$$\begin{aligned} u_i^j &= -\frac{1}{8\pi\nu}\left[\frac{\delta_i^j}{r} + \frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{r^3}\right], \\ q^j &= -\frac{x_j-\xi_j}{4\pi r^3}, \quad i,\ j = 1, 2, 3, \end{aligned} \qquad (2.26)$$

где δ_i^j — символ Кронекера.

Отметим, что выражение в квадратных скобках в (2.26) получается из аналогичного выражения в тензоре Кельвина—Сомильяна, если в последнем положить $(\lambda+3\mu)/(\lambda+\mu)=1$.

Пусть Ω^+ — односвязная ограниченная область в $\mathbf{R}^3$. Будем считать, что граница S области Ω^+ принадлежит классу $C^{1,\alpha}$, $0<\alpha<1$ (ср. с п. 1.2). Через Ω^- обозначим $\mathbf{R}^3\setminus\bar{\Omega}^+$. Введем матричные операторы $\mathscr{P}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)$ и $\mathscr{P}'(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)$, действующие на пары (v, p) по правилу

$$\mathscr{P}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)\mathbf{v}=-p\mathbf{n}_x+\nu(2\partial v/\partial\mathbf{n}_x+\mathbf{n}_x\times\operatorname{rot}\mathbf{v});$$

$$\mathscr{P}'(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)\mathbf{v}=p\mathbf{n}_x+\nu(2\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{n}_x+\mathbf{n}_x\times\operatorname{rot}\mathbf{v}).$$

Для решения $(\mathbf{v}^\pm, p^\pm)$ системы Стокса в области $\Omega^\pm$ справедливо представление (ср. с (2.4)).

$$\begin{gathered}\mathbf{v}^\pm(x)=\pm\int_S\{[\mathscr{P}'(\partial/\partial\xi, \mathbf{n}_\xi)\,U(x, \xi)]\,\mathbf{v}^\pm(\xi)-\\ -U(x, \xi)\,\mathscr{P}(\partial/\partial\xi, \mathbf{n}_\xi)\,\mathbf{v}^\pm\}\,d_\xi S,\end{gathered}\qquad(2.27)$$

$$p^\pm(x)=\mp\int_S[\mathbf{Q}(x, \xi)\,\mathscr{P}(\partial/\partial\xi, \mathbf{v}_\xi)\,\mathbf{v}^\pm-2\nu\mathbf{v}^\pm(\xi)\,\partial\mathbf{Q}/\partial\mathbf{n}_\xi]\,d_\xi S.$$

Формулы (2.27) в Ω^- имеют место в предположении, что при $|x|\to\infty$

$$\begin{gathered}|\mathbf{v}^-(x)|=O(|x|^{-1}),\\ |\nabla v_k(x)|,\ p(x)=O(|x|^{-2}),\ k=1, 2, 3.\end{gathered}\qquad(2.28)$$

Представления (2.27) являются аналогами формулы (1.3) для гармонический функций.

2.3. Гидродинамические потенциалы и их свойства. *Гидродинамическими потенциалами* называются пары $(V, \mathscr{V})\rho$ и $(W, \mathscr{W})\chi$, компоненты которых представляют собой зависящие от параметра $x\in\mathbf{R}^3\setminus S$ интегралы. *Потенциал простого слоя* определяется следующим образом:

$$(V\rho)(x)=\int_S U(x, \xi)\,\rho(\xi)\,d_\xi S,$$

$$(\mathscr{V}\rho)(x)=\int_S \mathbf{Q}(x, \xi)\,\rho(\xi)\,d_\xi S.$$

Потенциал двойного слоя имеет вид

$$(W\chi)(x)=\int_S[\mathscr{P}'(\partial/\partial\xi, \mathbf{n}_\xi)\,U(x, \xi)]\,\chi(\xi)\,d_\xi S,$$

$$(\mathscr{W}\chi)(x)=2\nu\int_S\chi(\xi)\,(\partial\mathbf{Q}/\partial\mathbf{n}_\xi)\,(x, \xi)\,d_\xi S.$$

Будем предполагать, что компоненты плотностей ρ_k и χ_k ($k=1, 2, 3$) — непрерывные функции.

Потенциалы $(V, \mathscr{V})\rho$ и $(W, \mathscr{W})\chi$ удовлетворяют системе (2.25) в $\Omega^{\pm}$. Кроме того, при $|x|\to\infty$ справедливы оценки

$$(V\rho)(x)=O(|x|^{-1});$$
$$(\mathscr{V}\rho)(x),\ (W\chi)(x),\ (\mathscr{W}\chi)(x)=O(|x|^{-2}). \tag{2.29}$$

Если потенциалу $W\chi$ придать более явный вид

$$W\chi=-\frac{3}{4\pi}\int\limits_S \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_\xi)(\mathbf{r}\cdot\chi)\,\mathbf{r}}{r^5}\,d_\xi S, \tag{2.30}$$

где обозначения те же, что и в (2.6), то становится очевидным, что для поверхности $S\in C^{1,\alpha}$ ядро оператора W на $S\times S$ допускает оценку $O(r^{-2+\alpha})$. Отсюда вытекает существование прямого значения $W_0\chi$ на S.

Для потенциала двойного слоя с плотностью $\chi=\mathrm{const}$ **имеет** место аналог формулы (1.7). В общем случае справедлива следующая теорема о предельных значениях.

Теорема 9. Существуют непрерывные на S вектор-функции $W_{\pm}\chi$ такие, что $(W\chi)(x)\to(W\chi)(x_0)$, если $x\in\Omega^{\pm}$ и $x\to x_0\in S$. При этом имеют место равенства

$$W_{\pm}\chi=\pm\frac{1}{2}\chi+W_0\chi. \tag{2.31}$$

Вектор-функция $V\rho$ непрерывна в $\mathbf{R}^3$, а выражение $\mathscr{P}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)(V\rho)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам нормальной производной гармонического потенциала простого слоя (см. гл. 1, п. 1.2).

Теорема 10. При стремлении точки $y\in\Omega^{\pm}$ к точке $x\in S$ вдоль нормали $\mathbf{n}_x$ существуют пределы для $\mathscr{P}(\partial/\partial y, \mathbf{n}_x)(V\rho)$, которые обозначаются $[\mathscr{P}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)(V\rho)]_{\pm}$ и выражаются формулой

$$[\mathscr{P}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)(V\rho)]_{\pm}=\mp\frac{1}{2}\rho-[\mathscr{P}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)(V\rho)]_0. \tag{2.32}$$

Последнее слагаемое в (2.32) (прямое значение функции $\mathscr{P}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)(V\rho)$) существует ввиду принадлежности поверхности S классу $C^{1,\alpha}$ (ср. с формулой (2.10)).

2.4. Краевые задачи для системы Стокса и их решение при помощи граничных интегральных уравнений. Рассмотрим по две задачи для системы (2.25) в областях $\Omega^{\pm}$. Первая из них (*задача Дирихле*) состоит в отыскании пары $(\mathbf{v}^{\pm}, p^{\pm})$, компоненты которой непрерывны в $\Omega^{\pm}$, удовлетворяют системе (2.25) и условию

$$\mathbf{v}^{\pm}=\varphi^{\pm} \text{ на } S;\quad \varphi_i^{\pm}\in C(S),\quad i=1, 2, 3. \tag{2.33}$$

Кроме того, требуется, чтобы при $|x|\to\infty$

$$|\mathbf{v}^{-}(x)|=O(|x|^{-1}),\quad p^{-}(x)=O(|x|^{-2}). \tag{2.34}$$

В силу соленоидальности искомого вектора $\mathbf{v}^+$, необходимым условием разрешимости задачи Дирихле в Ω^+ является равенство

$$\int\limits_S \varphi^+ \cdot \mathbf{n} dS = 0. \qquad (2.35)$$

Для сведения к задачи Дирихле в Ω^+ к интегральному уравнению на S, будем искать ее решение в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью χ^+. При этом последняя должна удовлетворять уравнению

$$\chi^+ + 2W_0\chi^+ = 2\varphi^+ \qquad (2.36)$$

(см. формулу (2.31)). Чтобы исследовать уравнение (2.36) при помощи теории Фредгольма, нужно привлечь вторую краевую задачу в Ω^- и ее граничное интегральное уравнение (ср. с п. 2.1 гл. 1).

При решении второй краевой задачи в $\Omega^\pm$ требуется найти пару $(\mathbf{v}^\pm, p)$, удовлетворяющую системе (2.25) и условию

$$\mathcal{P}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)\mathbf{v}^\pm = \psi^\pm \text{ на } S. \qquad (2.37)$$

В области Ω^- должно выполняться также условие (2.34).

Представляя решение второй краевой задачи в области Ω^- в виде потенциала простого слоя с неизвестной плотностью ρ^-, получаем уравнение

$$\rho^- - 2[\mathcal{P}(\partial/\partial x, \mathbf{n}_x)(V\rho^-)]_0 = 2\psi^-. \qquad (2.38)$$

Уравнения (2.36) и (2.38) являются взаимно сопряженными.

Теорема 11. Единственным нетривиальным решением однородного уравнения (2.38) является $\mathbf{n}$. Условие (2.35) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (2.36). Задача Дирихле для системы Стокса разрешима в области Ω^+ при любом φ^+, удовлетворяющем условию (2.35). Решение представимо в виде потенциала $(W, \mathcal{W})\chi^+$, где χ^+ удовлетворяет уравнению (2.36). Решение задачи Дирихле в Ω^+ единственно.

Справедливо следующее утверждение (ср. с п. 1.4).

Лемма 1. Однородное интегральное уравнение

$$-\chi_0^- + 2W_0\chi_0^- = 0 \qquad (2.39)$$

имеет шесть линейно независимых решений, которые определяются формулами (2.15) (предполагается, что начало координат лежит в Ω^+).

Согласно теории Фредгольма, шесть линейно независимых решений ρ_{0k}^+ $(k=1, \ldots, 6)$ имеет и сопряженное с (2.39) уравнение. Поэтому, как и в случае системы Ламе, следует модифицировать уравнение внешней задачи Дирихле для системы Стокса так, чтобы новое уравнение было разрешимо при любых граничных данных.

Дословно повторяя схему, которая изложена перед теоремой 6, приходим к следующему результату.

Теорема 12. Если $(c_1, \ldots, c_6)$ — вектор решений однозначно разрешимой системы

$$\sum_{k=1}^{6} c_k \int_S \rho_{0i}^+ V_0 \rho_{0k}^+ dS = -\int_S \varphi^- \rho_0^+ dS,$$

то при любой функции φ^- уравнение

$$\chi^- - 2W_0\chi^- = -2\left(\varphi^- + \sum_{k=1}^{6} c_k V_0 \rho_{0k}^+\right)$$

разрешимо относительно χ^-. Функция χ^- определена с точностью до произвольной линейной комбинации решений $\chi_{01}^-, \ldots, \chi_{06}^-$ однородного уравнения (2.39).

Относительно разрешимости задачи Дирихле для системы Стокса в области Ω^- справедлива теорема, дословно повторяющая теорему 7 для системы Ламе.

В заключение параграфа отметим, что метод граничных интегральных уравнений применим к системе Стокса и в плоском случае. При этом используется фундаментальное решение

$$u_i^j = \frac{1}{4\pi\nu}\left[\delta_i^j \log r - \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r}\right];$$

$$q^j = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial(\log r)}{\partial x_j}.$$

Глава 3

ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В двух предыдущих главах метод граничных интегральных уравнений был изложен применительно к задачам Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, первой и второй краевым задачам теории упругости и гидродинамики вязкой жидкости. Рассмотренные примеры являются не только типичными, но и хронологически первыми приложениями метода граничных уравнений. В дальнейшем метод нашел широкое применение при решении не только краевых, но и начально-краевых задач математической физики. Цель этой главы — более или менее полно отразить многообразие таких задач. Ограниченный объем статьи не позволяет охватить все направления приложений метода граничных интегральных уравнений. Многие из них будут лишь перечислены в заключительных замечаниях к главе. С той или иной степенью подробности в настоящей главе будут изложены следующие вопросы: сингулярные интегральные уравнения задачи с косой производной для уравнения Лапласа (§ 1); системы интегральных уравнений, связанные с краевыми задачами для бигармонического оператора (§ 2); гранично-временные интегральные уравнения теории тепловых, волновых, динамических упругих, а также квазистатических и динамических вязкоупругих потенциалов (§ 3).

§ 1. Интегральные уравнения для задачи с косой производной

При изложении метода граничных уравнений для задачи с косой производной ограничимся случаем уравнения Лапласа. Пусть Ω^+ — односвязная ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$) с границей S класса $C^{1,\alpha}$ ($0<\alpha<1$). Решением *задачи с косой производной* называется гармоническая функция $u^+ \in C^{1,2}(\overline{\Omega}^+)$, удовлетворяющая краевому условию

$$\partial u^+/\partial l = \psi^+ \text{ на } S \tag{3.1}$$

где ψ^+ — заданная функция из $C^\alpha(S)$, а l—поле единичных векторов на S. Впервые она появилась в исследованиях Пуанкаре по теории приливов [176], поэтому некоторые авторы называют ее *задачей Пуанкаре*. При изучении этой задачи Пуанкаре ввел в рассмотрение сингулярные интегральные уравнения на контуре.

Сначала остановимся на результатах, полученных для плоского случая. При $n=2$ условие (3.1) можно переписать в виде

$$\cos \lambda u^+_{x_1} + \sin \lambda u^+_{x_2} = \psi^+, \tag{3.2}$$

где $\lambda(s)$ — угол между вектором l_s в условии (3.1) и положительным направлением оси x_1; s — длина дуги на S.

Отыскание гармонической функции u^+ в области Ω^+ эквивалентно определению аналитической функции Φ комплексного переменного $z=x_1+ix_2$, для которой u^+ является вещественной частью. Считая, что начало координат находится в Ω^+, удобно искать функцию Φ в виде

$$\Phi(z) = \int_S \rho(\zeta) \log \frac{\zeta - z}{\zeta}\, d_\zeta s,$$

где ρ — вещественная искомая плотность, удовлетворяющая условию Гёльдера. Из условия (3.2) получаем сингулярное интегральное уравнение (см. [71]):

$$\operatorname{Re}\{-\pi i\, \overline{(dz/ds)}\}\rho(z) - \\ - \int_S \rho(\zeta) \operatorname{Re} \frac{e^{i(\zeta - z)}}{\zeta - z}\, d_\zeta s = \psi^+(z), \quad z, \zeta \in S. \tag{3.3}$$

Теорема 1 ([71]). Индекс $\varkappa$ уравнения (3.3) конечен и вычисляется по формуле

$$\varkappa=2-\pi^{-1}[\lambda(s)]_S,$$

где $[\lambda]_S$ — приращение угла при обходе контура S в положительном направлении; число $\varkappa$ — четное.

Если $\varkappa\leqslant0$, то уравнение (3.3) при $\psi^+=0$ на S имеет одно нетривиальное решение и для разрешимости уравнения (3.3) необходимо и достаточно, чтобы его правая часть удовлетворяла условиям ортогональности, число которых равно $1-\varkappa$.

Если $\varkappa>0$, то однородное уравнение (3.3) имеет $\varkappa$ линейно независимых решений, а неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части.

Утверждения, сформулированные в теореме 1 для интегрального уравнения, справедливы и для задачи с косой производной. Отметим, что при $\varkappa\leqslant0$ единственным решением однородной краевой задачи служит функция $u^+=\text{const}$ на $\overline{\Omega}^+$.

В многомерном случае ($n\geqslant3$) граничное интегральное уравнение для задачи с косой производной было получено и исследовано Жиро [141]. Решение задачи ищется в виде потенциала простого слоя (см. (1.4)). При этом для плотности получается сингулярное интегральное уравнение

$$-\frac{\cos(\nu,l)}{2}\rho(x)+\int\limits_S\rho(y)\frac{\partial}{\partial l_x}\mathscr{E}(x,y)\,d_yS=\psi^+(x),\quad x\in S,\quad (3.4)$$

где ν — внешняя по отношению к Ω^+ нормаль в точке $x\in S$.

Разработанная С. Г. Михлиным теория сингулярных интегральных уравнений с символом, не обращающимся в нуль, позволила ему упростить исследование уравнения (3.4), проведенное Жиро, Символ $A(x,\xi)$ сингулярного оператора в левой части (3.4) (см. гл. 4, § 3 статьи I этого тома) равен

$$1/2(-\cos(\nu,l)+i\cos(\xi,l))$$

и при $n=2$ не вырождается. В случае $n>2$ символ может обратиться в нуль в том и только в том случае, если $\cos(\nu,l)=0$ в некоторой точке поверхности S. Тогда говорят о вырождающейся задаче с косой производной.

Из теории многомерных сингулярных уравнений вытекает следующий результат (см. [66]).

Теорема 2. Если векторное поле l нигде не касается поверхности S, то уравнение (3.4) нормально разрешимо и его индекс равен нулю.

Согласно теореме о знаке косой производной в точке экстремума гармонической функции, единственным решением однородного уравнения (3.4) является плотность потенциала Робена (см. гл. 1, § 2). Отсюда и из теоремы 2 следует, что для разрешимости невырождающейся задачи с косой производной необходимо и достаточно, чтобы функция ψ^+ удовлетворяла одному условию ортогональности. Решение краевой задачи определено с точностью до постоянного слагаемого.

Имеется ряд работ, посвященных вырождающейся задаче с косой производной (см., например, [20], [41], [46], [62], [145]. Наиболее полно исследован случай, когда поле l касается S на $(n-2)$-мерном подмногообразии S_0, оставаясь некасательным к нему. Тем самым, компоненты многообразия S_0 распадаются на три класса: точки «входа» (поля l в Ω^+), «выхода» и «status quo». На разрешимости задачи эти три ситуации сказываются следующим образом. Компоненты входа порождают переопределенность задачи, компоненты выхода — недоопределенность, а компоненты многообразия S, на которых поле l остается с одной стороны S, не влияют на разрешимость.

Ограничение, связанное с отсутствием на S_0 точек, где поле касается S_0, снято в работе автора [41], где доказана теорема об однозначной разрешимости задачи с косой производной в обобщенной постановке. Последняя включает задание краевого условия $u=0$ на множестве «выхода» и возможность разрыва решения в точках входа. При этом точки обоих классов могут находиться на одной и той же компоненте многообразия S_0.

Часть упомянутых результатов о вырождающейся задаче с косой производной получена в контексте общей теории псевдодифференциальных операторов на многообразии, часть установлена методами теории эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка (принцип максимума, априорные оценки и др.). Специальное исследование граничного интегрального уравнения (3.4) с достаточно общим характером вырождения символа еще не проведено.

§ 2. Интегральные уравнения краевых задач для бигармонического уравнения

2.1. Системы граничных интегральных уравнений для бигармонического уравнения. В работе [39] Я. Б. Лопатинский указал способ сведения краевой задачи для эллиптической системы в ограниченной области к регулярным интегральным уравнениям. В качестве примера в [39] рассмотрена первая краевая задача для бигармонического уравнения. Исследование потенциалов и граничных интегральных уравнений для бигармонического уравнения проведено в работах [77]—[79].

Пусть Ω^+ — односвязная ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ $(n=2, 3)$ с компактным замыканием и границей класса $C^{1,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$. Положим $\Omega^-=\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}^+$.

Функция $u^\pm$ класса $C^4(\Omega^\pm)$ называется *бигармонической* в $\Omega^\pm$, если она удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 u^\pm = 0 \text{ в } \Omega^\pm, \tag{3.5}$$

где $\Delta^2 = \sum_{j=1}^{n} \partial^4/\partial x_j^4 + 2\sum_{\substack{j=2\\ i<j}}^{n} \partial^4/\partial x_i^2 \partial x_j^2$.

Фундаментальным решением бигармонического уравнения (3.5) называется распределение $\mathscr{E}(x, \xi)$, для которого

$$\Delta_x{}^2 \mathscr{E} = \delta(x-\xi) \text{ в } \mathbf{R}^n,$$

где $\delta(x-\xi)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке ξ. Обычно используется фундаментальное решение вида (см. [85, § 2 гл. 12])

$$\mathscr{E}(x, \xi) = \begin{cases} -r/(8\pi), & n=3, \\ r^2 \log r/(8\pi), & n=2. \end{cases}$$

Здесь $r = |x-\xi|$. Для бигармонических функций имеет место представление, аналогичное формуле (1.3) для гармонических функций (см. § 1 гл. 12 книги [85]). Более того, бигармоническая функция u выражается через гармонические функции v_1 и v_2 следующим образом

$$u(x) = |x| v_1(x) + |x|^2 v_2(x) + u(0).$$

Многие свойства бигармонических функций распространяются на полигармонические функции (см. [85]), удовлетворяющие уравнению $\Delta^m u = 0$ $(m \geqslant 2)$.

Бигармонические потенциалы для $n=2$, 3 можно ввести следующим образом

$$(V\rho)(x) = \frac{-1}{2(n-1)\pi} \int_S \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{n}_\xi)^2}{r^n} \rho(\xi)\, d_\xi S, \tag{3.6}$$

$$(W\chi)(x) = \frac{(-1)^n n}{2(n-1)\pi} \int_S \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{n}_\xi)^3}{r^{n+2}} \chi(\xi)\, d_\xi S, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор с началом в точке x и концом в точке ξ. Плотности ρ и χ предполагаются непрерывными на S. Потенциалы $V\rho$ и $W\chi$ являются бигармоническими функциями в $\Omega^\pm$. Кроме того, при $|x| \to \infty$ имеют место оценки

$$(V\rho)(x) = O(|x|^{-n+2}); \quad (W\chi)(x) = O(|x|^{-n+1}). \tag{3.8}$$

Согласно (1.2), $r^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{n}_\xi) = O(r^\alpha)$. Поэтому потенциал (3.7) имеет непрерывное на S прямое значение $W_0\chi$.

Теорема 3. Существуют пределы $W_\pm$ со стороны области $\Omega^\pm$, равные

$$W_\pm \chi = \pm \frac{1}{2} \chi + W_0 \chi. \tag{3.9}$$

Что касается нормальной производной потенциала (3.7), то для нее имеет место теорема о скачках.

Теорема 4. Пусть S принадлежит классу $C^{2,\alpha}$, а $\chi \in C^1(S)$. Тогда существуют предельные значения $\partial(W\chi)/\partial \mathbf{n}_\pm$ нормальной производной потенциала (3.7), причем

$$\frac{\partial (W\chi)}{\partial \mathbf{n}_\pm} = \mp 2^{n-2} \varkappa \chi + \frac{\partial (W\chi)}{\partial \mathbf{n}_0}, \qquad (3.10)$$

где $\varkappa$ — средняя кривизна S, а $\partial(W\chi)/\partial \mathbf{n}_0$ — прямое значение, нормальной производной.

Теорема 5. Потенциал (3.6) непрерывен в $\mathbf{R}^n$, а предельные значения правильной нормальной производной выражаются формулой

$$\frac{\partial (V\rho)}{\partial \mathbf{n}_\pm} = \mp \frac{1}{2} \rho + \frac{\partial (V\rho)}{\partial \mathbf{n}_0}. \qquad (3.11)$$

Здесь второй член в правой части — прямое значение нормальной производной.

Решением первой краевой задачи для бигармонического уравнения называется функция $u^\pm$ в области $\Omega^\pm$, для которой

$$\begin{gathered} \Delta^2 u^\pm = 0 \text{ в } \Omega^\pm, \\ u^\pm = \varphi^\pm \text{ и } \partial u^\pm / \partial \mathbf{n} = \psi^\pm \text{ на } S. \end{gathered} \qquad (3.12)$$

Если искать функцию $u^\pm$ в виде суммы $V\rho^\pm + W\chi^\pm$, то, согласно (3.9)—(3.11), получим для плотностей $\rho^\pm$ и $\chi^\pm$ систему

$$\begin{gathered} \pm \chi^\pm + 2W_0 \chi^\pm + 2V_0 \rho^\pm = 2\varphi^\pm \\ \mp \rho^\pm \mp 2^{n-1} \varkappa \chi^\pm + 2 \frac{\partial (W\chi^\pm)}{\partial \mathbf{n}_0} + 2 \frac{\partial (V\rho^\pm)}{\partial \mathbf{n}_0} = 2\psi^\pm. \end{gathered}$$

При $n = 2$ в работе [78] для задачи (3.12) в $\Omega^\pm$ предложено использовать другие потенциалы. Пусть

$$(W^{(1)}) \chi (x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_S \chi (\xi) \mathcal{G} (x, \xi) d_\xi S,$$

где

$$\mathcal{G} (x, \xi) = \frac{-(\mathbf{r}, \mathbf{n}_\xi)^3}{r^4} + \varkappa (\xi) \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{n}_\xi)^2}{r^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial s_\xi} \left\{ \varkappa (\xi) \frac{\partial}{\partial s_\xi} [r^2 \log r] \right\}.$$

Здесь $\partial / \partial s_\xi$ — дифференцирование вдоль дуги S. Если представить решение первой краевой задачи в Ω^+ в виде $u^+ = V^{(1)} \rho^+ + W^{(1)} \chi^+$, где $V^{(1)} \rho^+$ — потенциал с ядром $-(2\pi)^{-1} \log r$, то плотности ρ^+ и χ^+ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} \chi^+ + 2W_0^{(1)} \chi^+ + 2V_0^{(1)} \rho^+ = \varphi^+, \\ \rho^+ + 2 \dfrac{\partial (W^{(1)} \chi^+)}{\partial \mathbf{n}_0} + 2 \dfrac{\partial (V^{(1)} \rho^+)}{\partial \mathbf{n}_0} = \Psi^+. \end{cases} \qquad (3.13)$$

Эта система не эквивалентна внутренней задаче (3.12), так как последняя разрешима однозначно, а решения однородной системы (3.13) образуют одномерное подпространство. Для разрешимости системы (3.13) вектор (φ^+, ψ^+) должен удовлетворять условию ортогональности. Это приводит к следующему утверждению.

Теорема 6. Пусть S принадлежит классу $C^{5,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ и пусть $\varphi^+ \in C^{3,\alpha}(S)$, а $\psi^+ \in C^{2,\alpha}(S)$. Если искать решение задачи (5.12) в области Ω^+ в виде

$$u^+ = W^{(1)}\chi^+ + V^{(1)}\rho^+ + Av^+,$$

где v^+ — гармоническая в Ω^+ функция класса $C^1(\bar{\Omega}^+)$, а A — неизвестная постоянная, то система вида (3.13) для χ^+ и ρ^+ разрешима для значения A, определенного из условия ортогональности.

Для решения задачи (5.12) в области Ω^- в работе [78] использован прием, аналогичный приведенному в гл. 1, п. 2.3 для уравнения Лапласа в случае внешней задачи Дирихле.

Краевые задачи более общего вида для бигармонического уравнения на плоскости изучаются при помощи потенциалов в статье [79]. Кроме того, в [79] рассматривается полигармоническое уравнение.

В заключение раздела отметим, что система интегральных уравнений внутренней первой краевой задачи для бигармонического уравнения изучена в работе [119] в случае, когда S — кривая класса C^1 на плоскости, а граничные данные подчинены условиям $\varphi^+ \in W_p^1(S)$, $\psi^+ \in L_p(S)$. Матричный оператор прямых значений потенциалов Агмона [106] оказывается компактным в прямом произведении $W_p^1(S) \times L_p(S)$ (ср. с результатами Фейбса, Джодейта и Ривьера для уравнения Лапласа, приведенными в гл. 4, § 3). Система интегральных уравнений, а вместе с ней и краевая задача однозначно разрешимы.

2.2. Методы теории функций комплексного переменного и граничные интегральные уравнения плоских задач теории упругости. Решение плоских задач теории упругости можно свести (см. [70]) к отысканию так называемой *функции Эйри* W, которая является решением бигармонического уравнения. В свою очередь, при $n=2$ решение W бигармонического уравнения выражается через две комплексные аналитические функции φ и ψ следующим обарзом (см. [70]):

$$W(x, y) = \operatorname{Re}\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\}, \tag{3.14}$$

где $z = x + iy$. Эта формула была получена Гурса в 1898 году и называется его именем.

Таким образом, формула (3.14) позволяет свести основные краевые задачи плоской теории упругости к задачам об отыскании двух аналитических функций φ и $\psi = d\chi/dz$.

Первая задача, в которой на контуре заданы смещения, приводится к нахождению в Ω^+ функций φ и ψ, удовлетворяющих краевому условию

$$k\varphi(\zeta)-\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}=g(\zeta),\quad \zeta\in S. \tag{3.15}$$

Здесь $k=(\lambda+3\mu)(\lambda+\mu)^{-1}$, $g=2\mu(u+iv)$, λ, μ — постоянные Ламе; u, v — смещения.

Для второй задачи теории упругости краевое условие также имеет вид (3.15), но $k=-1$, а функция g представляет собой криволинейный интеграл от напряжений, приложенных к S.

Н. И. Мусхелишвили показал (см. [70]), что аналитические функции φ и ψ, удовлетворяющие условию (3.15), можно найти, решая интегральное уравнение для граничных значений функции φ. Уравнение Н. И. Мусхелишвили выглядит следующим образом:

$$-k\overline{\varphi(t)}-\frac{k}{2\pi i}\int\limits_S\overline{\varphi(\zeta)}\,d\log\frac{\overline{\zeta}-\overline{t}}{\zeta-t}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\varphi(\zeta)\,d\frac{\overline{\zeta}-\overline{t}}{\zeta-t}=A(t);$$

$$\zeta,\ t\in S, \tag{3.16}$$

где

$$A(t)=-\frac{1}{2}g(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{g(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta,$$

причем интеграл понимается в смысле главного значения. Вывод этого уравнения основан на теореме Коши и формулах Сохоцкого—Племеля.

Уравнение (3.16) может быть переписано в виде

$$k\overline{\varphi(t)}-\frac{k}{\pi}\int\limits_S\overline{\varphi(\zeta)}\,\frac{\partial\theta}{\partial s}\,d_\zeta S-\frac{1}{\pi}\int\limits_S\varphi(\zeta)\,e^{-2i\theta}\frac{\partial\theta}{\partial s}\,d_\zeta S=-A(t). \tag{3.17}$$

Здесь $\zeta-t=re^{i\theta}$, а $\partial\theta/\partial s=-\cos(\mathbf{r},\mathbf{n}_\zeta)/r$. Если кривая S принадлежит классу $C^{1,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$, то вещественная и мнимая части уравнения (3.17) образуют систему, для которой справедлива альтернатива Фредгольма.

При $k=1$ однородное уравнение (3.17) имеет нетривиальное решение $\varphi_0(t)=i\alpha t+\beta$ $(\alpha\in\mathbf{R},\ \beta\in\mathbf{C})$. Это приводит к следующему результату.

Теорема 7. Пусть $k=1$. Тогда для разрешимости уравнения (3.17) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\mathrm{Re}\int\limits_S\overline{g}\,dS=0, \tag{3.18}$$

где g — правая часть в соотношении (3.15). Решение уравнения (3.17) аналитически продолжимо в область Ω^+.

Отметим, что условие (3.18) необходимо для разрешимости второй краевой задачи теории упругости.

Теорема 8. При $\bar{k}>1$ уравнение (3.17) однозначно разрешимо для любой правой части.

Уравнения (3.16) и (3.17) справедливы и для многосвязных областей.

Для отыскания аналитических в Ω^+ функций φ и ψ можно воспользоваться также *интегральным уравнением Шермана—Лауричелла.* Для его вывода используются представления аналитических в Ω^+ функций φ и ψ в виде

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\bar{\zeta}\omega(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}\,d\bar{\zeta}, \tag{3.19}$$

где $\omega(\zeta)$ — неизвестная функция на S. Пусть выполнено условие (3.18). Из краевого условия (3.15) при $k=1$ получается уравнение для ω

$$\omega(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_S\omega(\zeta)\,d\log\frac{\zeta-t}{\bar{\zeta}-\bar{t}}-\frac{1}{2\pi i}\int_S\overline{\omega(\zeta)}\,d\frac{\zeta-t}{\bar{\zeta}-\bar{t}}=g(t). \tag{3.20}$$

Его называют *уравнением Лауричелла.* Необходимым и достаточным условием его разрешимости является (3.18).

Чтобы получить уравнение, разрешимое для любой правой части, Д. И. Шерман заменил его следующим

$$\omega(t)+\frac{1}{\pi}\int_S\omega d\theta-\frac{1}{\pi}\int_S\overline{\omega(\zeta)}\,e^{2i\theta}d\theta+$$

$$+\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{\bar{t}-\bar{a}}+\frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2}\right)\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{Re}\int_S\frac{\omega(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^2}=f(t). \tag{3.21}$$

Здесь a — внутренняя точка области Ω^+, а $\zeta-t=r\zeta^{i\theta}$. Уравнение (3.21) разрешимо для любой правой части, а при выполнении условия (3.18) его решение удовлетворяет и уравнению (3.20).

При помощи аналогичного приема уравнение Н. И. Мусхелишвили для $k=1$ можно заменить уравнением, разрешимым для любой правой части.

В заключение отметим, что система, которая получается разделением вещественной и мнимой части в (3.21), имеет в качестве сопряженной физически осмысленную систему интегральных уравнений (см. [70]). Последняя получается при использовании прямого варианта метода граничных уравнений (см. гл. 1, п. 4.1) для плоской задачи теории упругости в постановке Б. Е. Победри [81].

§ 3. Решение нестационарных краевых задач при помощи граничных интегральных уравнений

Метод граничных интегральных уравнений используется и для решения нестационарных краевых задач. В первом пункте настоящего параграфа обсуждаются интегральные уравнения, возникающие при решении начально-краевых задач для уравнений параболического типа. В п. 3.2 речь идет о применении метода граничных интегральных уравнений к начально-краевым задачам для волнового уравнения. Два заключительных раздела посвящены гранично-временным интегральным уравнениям для нестационарных задач теории упругости и вязкоупругости.

3.1. Тепловые потенциалы. Пусть Ω^+—односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ с границей S класса $C^{1,\alpha}$, $0<\alpha<1$. Через Ω^- обозначим $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega^+}$ и положим $Q_T^{\pm} = \Omega^{\pm} \times (0, T)$, $S_T = S \times (0, T)$.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - a^2 \Delta u = 0, \quad a > 0, \tag{3.22}$$

где Δ—оператор Лапласа. *Фундаментальное решение уравнения* (3.22) имеет вид (см. [12]):

$$\mathscr{E}(x, t;\ \xi, \tau) = \frac{\theta(t-\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} \exp\{-r^2/(4a^2 t)\}.$$

Здесь $\theta(t)$—функция Хевисайда, $r = |x-\xi|$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - a^2 \Delta_x \mathscr{E} = \delta(x-\xi,\ t-\tau).$$

Пусть $\rho, \chi \in C(\bar{S}_T)$. Рассмотрим зависящие от параметров (x, t) интегралы (ср. с (1.4) и (1.5))

$$(V\rho)(x, t) = \int_0^t d\tau \int_S \rho(\xi, \tau)\, \mathscr{E}(x, t;\ \xi, \tau)\, d_\xi S;$$

$$(W\chi)(x, t) = \int_0^t d\tau \int_S \chi(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \mathscr{E}(x, t;\ \xi, \tau)\, d_\xi S.$$

Они называются *тепловыми потенциалами простого и двойного слоя* соответственно и удовлетворяют уравнению (3.22) в $Q_T^{\pm}$ для любого $T>0$. Очевидно, что $(V\rho)(x, 0) = (W\chi)(x, 0) = 0$ на $\Omega^{\pm}$.

Теорема 9. Для потенциала $W\chi$ существуют предельные значения $W_{\pm}\chi$ на S_T со стороны $Q_T^{\pm}$, которые связаны с прямым значением $W_0\chi$ соотношениями (ср. с (1.8))

$$W_{\pm}\chi = \mp \frac{1}{2}\chi + W_0\chi. \tag{3.23}$$

Теорема 10. Существует правильная нормальная производная потенциала $V\rho$, равная (ср. с. (1.10))

$$\frac{\partial(V\rho)}{\partial \mathbf{n}_\pm} = \pm\frac{1}{2}\rho + \frac{\partial(V\rho)}{\partial \mathbf{n}_0}, \qquad (3.24)$$

где $\partial(V\rho)/\partial\mathbf{n}_0$ — прямое значение нормальной производной.

Потенциал простого слоя непрерывен как по пространственным переменным, так и по времени в $\mathbf{R}^n \times [0, T]$.

Определение. Классическим решением *первой смешанной задачи для уравнения* (3.22) в области $Q_T^\pm$ называется функция $u^\pm$, обладающая непрерывными производными, входящими в уравнение, и удовлетворяющая ему. Кроме того, требуется, чтобы функция $u^\pm$ принадлежала пространству $C(\overline{Q_T^\pm})$ и выполнялось начальное условие

$$u^\pm = 0 \text{ при } t = 0 \text{ на } \overline{\Omega^\pm}, \qquad (3.25)$$

а также краевое условие

$$u^\pm = \varphi^\pm \text{ на } \overline{S_T}. \qquad (3.26)$$

Здесь $\varphi^\pm \in C(\overline{S_T})$, причем $\varphi^\pm = 0$ на S при $t = 0$.

Для сведения этой задачи к граничному интегральному уравнению, ее решение можно искать в виде потенциала $W\chi^\pm$ с неизвестной плотностью $\chi^\pm$. Для отыскания последней, согласно формуле (3.23), имеется уравнение

$$\chi^\pm \mp T\chi^\pm = \mp 2\varphi^\pm, \quad T = 2W_0. \qquad (3.27)$$

В случае *второй смешанной задачи* вместо (3.26) на S ставится условие Неймана. При отыскании решения в виде потенциала $V\rho^\pm$ для плотности $\rho^\pm$ получается уравнение, сопряженное с (3.27).

Теорема 11. Интегральные уравнения, возникающие при решении первой и второй смешанных задач для уравнения (3.22), являются уравнениями Вольтерра со слабой особенностью (см. гл. 2, § 1 статьи I этого тома). Их решения непрерывны на S_T, если непрерывны правые части. Решения представимы в виде равномерно сходящихся рядов, получаемых методом последовательных приближений.

В случае, когда S — контур с непрерывной кривизной, n-й член ряда Неймана не превосходит величины

$$(Ct)^{n/2} \max |\varphi^\pm| / \Gamma(n/2 + 1).$$

Постоянная C зависит от S (см. [72]). Для произвольного выпуклого (не обязательно гладкого) контура S сходимость ряда Неймана доказана в [64].

Остановимся на некоторых обобщениях того классического материала.

Оператор Лапласа в уравнении (3.22) можно заменить общим эллиптическим оператором второго порядка с гладкими коэффициентами (см. книгу [38]).

Смешанные задачи для уравнения (3.22) рассматривались в цилиндре $Q_T^{\pm}$, основание которого $\Omega^{\pm}$ имеет негладкую границу S. Согласно [32], при наличии на S непересекающихся ребер спектральный радиус оператора T равен $(\pi-\varphi)/\pi$, где φ — минимальный из углов, образованных касательными плоскостями в точках ребер. В той же работе показано, что если на двумерной поверхности имеется конечное множество круговых конических точек O_i, $1\leqslant i\leqslant N$, то спектральный радиус равен $\cos(\psi/2)$. Здесь $\psi=\min\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N, 2\pi-\varphi_1, \ldots, 2\pi-\varphi_N\}$, φ_i — раствор конуса с вершиной O_i (со стороны области $\Omega^{\pm}$). Кроме того, в [32] вычислена существенная норма оператора T и рассмотрен случай матричных операторов.

Первая начально-краевая задача с нулевым начальным условием для уравнения теплопроводности в четверти пространства изучена в [137]. В этой работе показано, что соответствующее интегральное уравнение однозначно разрешимо в L_p, $p>3/2$, при любых данных из L_p; при $1<p<3/2$ пространство решений однородного уравнения бесконечномерно.

В статьях [130]—[134], [185], [186] рассмотрены тепловые потенциалы и краевые задачи в областях, удовлетворяющих условию, аналогичному условию (A) из § 2 гл. 4.

В [27] тепловые потенциалы были исследованы для нецилиндрических областей. Наконец, работы [63], [87], [103] посвящены обобщению методов теории потенциала на параболические системы.

3.2. Волновые потенциалы. Первые указания на возможность применения метода потенциалов к волновому уравнению содержатся в работах Вольтерра и Адамара (см. книгу [143]). Те же идеи были применены Мюнцем [167] к динамической плоской задаче теории упругости, которая сводится к задаче отыскания скалярного и векторного решений волнового уравнения, связанных краевыми условиями. Исследование *волновых потенциалов* (в многомерном случае) проведено С. Г. Михлиным и В. Д. Сапожниковой в работе [69], результаты которой излагаются в настоящем пункте.

Рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt}-\Delta u=0 \quad \text{в } Q_\infty^{\pm} \tag{3.28}$$

с однородными начальными условиями

$$u=u_t=0 \text{ при } t=0 \text{ в } \Omega^{\pm}. \tag{3.29}$$

Положим

$$\mathscr{E}(x-\xi,\ t-\tau)=\frac{1}{(n-2)!\,\sigma_n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\,q\left(\frac{t-\tau}{r}\right),$$

где

$$q(\lambda)=\begin{cases}\int\limits_1^\lambda (z^2-1)^{(n-3)/2}\,dz, & \lambda\geqslant 1,\\ 0, & \lambda<1.\end{cases}$$

Распределение $\mathscr{E}$ является *фундаментальным решением уравнения* (3.28).

Обозначим через $K_{x,t}$ характеристический конус с вершиной в точке (x, t). Пусть $S_{x,t}=K_{x,t}\cap K_\infty$. Для функции $u\in C^2(\overline{Q^\pm_\infty})$, удовлетворяющей (3.28) и (3.29), имеет место представление

$$u(x, t)=\frac{1}{(n-2)!\sigma_n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int\limits_{S_{x,t}}\left[q\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_\xi}-u\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi}q\left(\frac{t-\tau}{r}\right)\right]d_\xi S d\tau.$$

Рассмотрим интегралы (ср. с п. 3.1)

$$(V\rho)(x, t)=\frac{1}{(n-2)!\sigma_n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int\limits_{S_{x,t}}\rho(\xi, \tau)\,q\left(\frac{t-\tau}{r}\right)d_\xi S d\tau,$$

$$(W\chi)(x, t)=\frac{1}{(n-2)!\,\sigma_n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int\limits_{S_{x,t}}\chi(\xi, \tau)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi}q\left(\frac{t-\tau}{r}\right)d_\xi S d\tau,$$

называемые *волновыми потенциалами простого и двойного слоя*, соответственно.

Теорема 12 ([69]). Формулы (3.23) и (3.24) для волновых потенциалов справедливы, если

а) при $n=2$, $\rho\in C^{(0,1)}(\bar{S}_\infty)$ и $\rho(x, 0)=0$; $\chi\in C^{(0,2)}(\bar{S}_\infty)$ и $\chi(x, 0)=\chi_t(x, 0)=0$;

б) при $n=2k$, $k>1$ или при $n=2k+1$, $k=0, 1, \ldots$, $\rho\in C^{(0,k+1)}(\bar{S}_\infty)$, $\partial^j\rho/\partial t^j=0$, $j=0, \ldots, k$; $\chi\in C^{(0,k+2)}(\bar{S}_\infty)$, $\partial^j\chi/\partial t^j=0$, $j=0, \ldots, k+1$.

Волновые потенциалы простого и двойного слоя удовлетворяют уравнению (3.28). Кроме того, при выполнении условий, аналогичных а) и б), но более сильных, имеют место и соотношения (3.29) (см. [69]).

Если кроме уравнения (5.28) и начальных условий (3.29) функция u удовлетворяет условию Дирихле на $\bar{S}_\infty$ (см. (3.26)), то она называется решением *первой смешанной задачи для волнового уравнения*. В случае *второй задачи* на $\bar{S}_\infty$ ставится условие Неймана. При отыскании решений этих задач в виде потенциалов двойного и простого слоя, соответственно, с неизвестными плотностями $\chi^\pm$ и $\rho^\pm$ получаются уравнения

$$\chi^\pm\mp 2W_0\chi^\pm=\mp 2\varphi^\pm,$$

$$\rho^\pm\pm 2\frac{\partial V\rho^\pm}{\partial n_\bullet}=\pm 2\psi^\pm.$$

Применение преобразования Лапласа по t при нечетном n превращает эти уравнения в следующие:

$$\tilde{\chi}^{\pm}(x, \eta) \pm \frac{2}{(n-2)!\sigma_n} \int\limits_S \frac{1}{r^{n-3}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{r} K(r, \eta)\, \tilde{\chi}^{\pm}(\xi, \eta)\, d_\xi \boldsymbol{S} =$$

$$= \mp 2\tilde{\varphi}^{\pm}(x, \eta), \tag{3.30}$$

$$\tilde{\rho}^{\pm}(x, \eta) \pm \frac{2}{(n-2)!\sigma_n} \int\limits_S \frac{1}{r^{n-3}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{r} K(r, \eta)\, \tilde{\rho}^{\pm}(\xi, \eta)\, d_\xi S =$$

$$= \pm 2\tilde{\psi}^{\pm}(x, \eta). \tag{3.31}$$

Здесь $\tilde{\chi}^{\pm}$, $\tilde{\rho}^{\pm}$, $\tilde{\varphi}^{\pm}$, $\tilde{\psi}^{\pm}$ — образы соответствующих функций при преобразовании Лапласа, и

$$K(r, \eta) = \left(\frac{n-3}{2}\right)! \sum_{\frac{n-3}{2} \leqslant k < n-2} \frac{e^{-\eta r}}{\eta^{k-n+2}} \binom{k}{\frac{n-3}{2}} \frac{k+1}{2} \frac{n-3}{2} \frac{n-5}{2} \cdots$$

$$\ldots (n-k-1)(2r)^{n-k-2}.$$

Теорема 13. Уравнения (3.30) и (3.31) разрешимы для любых $\varphi^{\pm}$, $\psi^{\pm} \in L_2(S_\infty)$, если поверхность S принадлежит классу $C^{[n/2]+5}$.

Следовательно, существуют решения первой и второй смешанных задач, представимые в виде потенциалов двойного и простого слоя соответственно. В случае четного n можно воспользоваться методом спуска, то есть применить результат для размерности $n+1$ предположив, что решение и данные не зависят от одной из пространственных переменных (см. [68]).

3.3. Потенциалы нестационарных задач теории упругости. Методы граничных интегральных уравнений находят применение и в *динамической теории упругости*. Речь идет о начально-краевых задачах для системы

$$A(\partial/\partial x)\, u(x, t) - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \tag{3.32}$$

где ρ — плотность материала, A — оператор системы (2.1) в случае однородного изотропного тела или его обобщение на случай анизотропной среды.

Прежде всего требуется получить представление вектора перемещений, аналогичное формуле (2.4). Такого рода представления были построены в ряде работ (де Хуп [128], Новацкий [76] и др.) при условии, что известна матрица $\mathscr{E}(x, y, t)$ фундаментальных решений системы (3.32). В случае однородной изотропной среды фундаментальные решения были найдены еще Стоксом (1849). Для трехмерной однородной анизотропной среды матрица фундаментальных решений была представлена Д. Г. Натрошвили [73] в виде тройного интеграла и Н. М. Хуторянским [97] в виде криволинейного интеграла (формула типа Герглотца—Петровского [13]).

Потенциалы простого и двойного слоя определяются равенствами

$$(V\rho)(x, t)=\int\limits_S \mathscr{E}(x, \xi, t)*\rho(\xi, t)\, d_\xi S,$$

$$(W\chi)(x, t)=\int\limits_S [\mathscr{T}(\partial/\partial\xi, \mathbf{n}_\xi)\, \mathscr{E}(x, \xi, t)]'*\chi(\xi, t)\, d_\xi S,$$

где $\mathscr{T}$ — оператор напряжений, а звездочкой обозначена свертка по времени:

$$f*g=\int\limits_{\mathbf{R}^1} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Различные формы интегральных уравнений, соответствующих начально-краевым задачам упругой динамики, приведены в книгах [36], [92]. Например, в случае второй краевой задачи с однородными начальными данными гранично-временное интегральное уравнение, полученное предельным переходом из формулы представления перемещений $u(x, t)$ имеет вид

$$1/2u(x, t)+\int\limits_S [\mathscr{T}(\partial/\partial\xi, \mathbf{n}_\xi)\, \mathscr{E}(x, \xi, t)]'*u(\xi, t)\, d_\xi S=$$

$$=\int\limits_S \mathscr{E}(x, \xi, t)*p(\xi, t)\, d_\xi S, \quad x\in S,$$

где p — вектор поверхностных сил. Существование решения последнего уравнения следует из теоремы о разрешимости второй краевой задачи динамической теории упругости (см. [36], [135]).

В случае смешанных краевых условий возникают аналоги интегральных уравнений (2.22)—(2.24) статики. Аналог граничного уравнения (2.23) исследован в работе [99], где показано, что соответствующий оператор является положительно определенным.

3.4. Гранично-временные интегральные уравнения вязкоупругости. Еще одной областью применения граничных уравнений является *квазистатическая теория вязкоупругости*. Здесь, в отличие от теории упругости, где действует закон Гука, напряжения в некоторый момент зависят от всей истории деформаций. Точнее, связь между напряжениями и деформациями в однородном теле, занимающем область $\Omega^+\subset\mathbf{R}^3$ задается в виде

$$\sigma_{ij}(x, t)=G_{ijkl}(t, \cdot)**\varepsilon_{kl}(x, \cdot), \quad x\in\Omega^+, \quad i, j=1, 2, 3,$$

где двумя звездочками обозначена *свертка Стилтьеса*

$$\int\limits_{-\infty}^{t} G_{ijkl}(t, \tau)\, d_\tau \varepsilon_{kl}(x, \tau).$$

Здесь $G_{ijkl}(t, \tau)$ — так называемые *функции релаксации*.

Задачи вязкоупругости могут быть сведены к интегральным уравнениям двумя способами — при помощи преобразования Лапласа к уравнениям с параметром (см. [181]) или непосредственно к гранично-временным уравнениям (см. [94]). Остановимся на втором подходе.

Матричное фундаментальное решение $\mathscr{E}(x,t)\equiv[\mathscr{E}_{ij}]_{3\times 3}$, соответствующее приложенной в момент времени τ единичной сосредоточенной силе, удовлетворяет уравнению

$$-\int\limits_{-\infty}^{t} G_{ijml}(t,\lambda)\,d_\lambda \mathscr{E}_{mk,l_j}(x,\lambda,\tau)=\delta_{ik}\delta(x)\,\theta(t-\tau),$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака, $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

При помощи матрицы $\mathscr{E}$ перемещения выражаются формулой (см. [92], [96])

$$u(x,t)=\int\limits_S \mathscr{E}(x-\xi,t,\cdot)**p(\xi,\cdot)\,d_\xi S-$$
$$-\int\limits_S T(x,\xi,t,\cdot)**u(\xi,\cdot)\,d_\xi S, \qquad (3.33)$$

где p — поверхностные силы, а T — матрицы третьего порядка с элементами

$$T_{ij}(x,\xi,t,\tau)=n_k(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_l}\mathscr{E}_{im}(x-\xi,t,\cdot)**G_{mljk}(\cdot,\tau). \qquad (3.34)$$

(Заметим, что в отличие от теории упругости величины (3.34) не являются вообще говоря, напряжениями в точке ξ. Так будет лишь в случае стабильной среды, когда функции релаксации зависят только от разности $t-\tau$.)

Матрица фундаментальных решений $\mathscr{E}(x,t,\tau)$ в случае анизотропной среды может быть явно выражена, как и в упругом случае с помощью интеграла по окружности

$$\mathscr{E}(x,t,\tau)=\frac{1}{8\pi^2|x|}\int\limits_{\{\xi\in R^3:|\xi|=1,\xi\cdot x=0\}} C^{-1}(\xi,t,\tau)\,d_\xi S.$$

Здесь $C^{-1}(\xi,t,\tau)$ — матрица, определяемая уравнением типа Вольтерра:

$$C^{-1}(\xi,t,\cdot)**C(\xi,\cdot,\tau)=\theta(t-\tau)I,$$

где $I=[\delta_{ij}]$, $C(\xi,t,\tau)=[G_{ijkl}(t,\tau)\xi_j\xi_l]$, $i,j,k,l=1,2,3$.

Если до момента $t=0$ тело находится в недеформированном состоянии и на границе заданы напряжения, то из (3.34) вытекает уравнение $u+2W_0u=f$, где

$$(W_0u)(x,t)=\int\limits_S\int\limits_0^t T(x,\xi,t,\tau)\,d_\tau u(\xi,\tau)\,d_\xi S.$$

Свойства оператора W_0 (в том числе спектральные) изучены в работе [96] (см. также [92]).

Для нестационарных динамических задач вязкоупругости в случае стабильной среды возникают гранично-временные интегральные уравнения такого же типа, как в динамической теории упругости (см. [94]). Различие состоит лишь в используемом фундаментальном решении. Попытка получить его в явном виде приводит к задаче вычисления обратного преобразования Лапласа функции $s \mapsto \exp(-|x|s(s\tilde{J}\rho)^{1/2})$, где $\tilde{J}$ — преобразование Лапласа функции ползучести, а ρ — плотность среды. В работах [26], [100], [105] эта задача решена для специальных моделей вязкоупругой среды.

3.5. Заключительные замечания. В настоящем обзоре были рассмотрены лишь некоторые примеры применения метода граничных интегральных уравнений к задачам математической физики. В действительности область приложения этого метода значительно шире — ограниченный объем статьи не позволил отразить в ней ряд важных направлений использования граничных уравнений. Здесь мы упомянем некоторые из таких направлений.

1^0. Прежде всего отметим, что схема метода граничных интегральных уравнений носит общий характер и, по существу, применима к любым линейным дифференциальным уравнениям, фундаментальные решения которых известны. Методы сведения общих эллиптических краевых задач к системам псевдодифференциальных уравнений на границе области были разработаны Я. Б. Лопатинским [39], Кальдероном [114], Сили [180], Хёрмандером [145], М. И. Вишиком и Г. И. Эскиным [104] и др.

2^0. Метод граничных интегральных уравнений находит широкое применение при решении внешних краевых задач для уравнений Гельмгольца и Максвелла (см. [82], [109], [150], [151] и др.). В принципе, соответствующие граничные уравнения исследуются так же, как в случае уравнения Лапласа (см. гл. 1). Однако для значений волнового числа, принадлежащих дискретному спектру соответствующих внутренних краевых задач, интегральные уравнения разрешимы не при всех правых частях, хотя внешние краевые задачи с условием излучения однозначно разрешимы. Для получения граничных интегральных уравнений, разрешимых для любой правой части предложены различные методы: модифицированной функции Грина, уравнений нулевого поля, воспроизводящего ядра и др. (см. [107]).

3°. В линейной *теории поверхностных волн* граничные интегральные уравнения применяются к стационарным и нестационарным задачам (см. [8], [42], [108], [182] и др.). Основные функции Грина, используемые для вывода интегральных уравнений, приведены в работах [182], [187]. При исследовании граничных уравнений стационарных задач приходится преодолевать те же трудности, что и в случае уравнения Гельмгольца (см. [108], [147], [163] и др.). Кроме того, в этой области остаются открытыми некоторые вопросы, связанные с однозначной разрешимостью краевых задач (см. [8], [42], [182]).

4⁰. В обзоре рассмотрены некоторые применения метода граничных интегральных уравнений в механике деформируемого твердого тела. Кроме упомянутых приложений, она используется в *теории упругих колебаний, моментной теории упругости, теории разрушения, термоупругости* и т. д. Соответствующие результаты освещены в книгах [7], [36], [80], [92].

5⁰. Важным аспектом теории граничных интегральных уравнений является техника их численного решения (в частности, *метод граничных элементов*). Это направление представляет собой в известном смысле самостоятельную область исследований. Оно интенсивно развивается в последние годы (см. книги [28], [111], [113], [126] и сборники [112], [121], [183]).

История становления метода граничных элементов отражена в [111], [126]. В книге [111] приведена классификация различных вариантов этого метода. По сравнению с другими численными алгоритмами решения краевых задач, метод граничных элементов обладает рядом достоинств. Это, прежде всего, снижение на единицу размерности и удобство решения внешних краевых задач.

В заключение отметим, что В. С. Рябенький [83] развил метод потенциалов для систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами, приводящий к *дискретным аналогам граничных интегральных уравнений.*

Глава 4

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА В ПРОСТРАНСТВАХ C И L_p

§ 1. Радиус Фредгольма граничных интегральных операторов

1.1. Введение. Теория граничных интегральных уравнений, которой посвящены предыдущие главы, развита в предположении достаточной гладкости границы. Однако потребности приложений и внутренняя логика самой теории требуют рассмотрения кривых и поверхностей более общего характера.

Первыми в этом направлении были исследования Корна [152], Зарембы [190] и Карлемана [118], изучивших методами теории потенциала краевые задачи для уравнения Лапласа при наличии конечного числа угловых точек на границе. В 1919 г. Радон [178] обобщил результаты работ [152], [190] на плоские контуры с «ограниченным вращением» без точек возврата. Соответствующие интегральные операторы рассматривались им в пространстве C непрерывных функций. Новым моментом при изучении граничных интегральных уравнений на нерегулярных кривых или поверхностях является потеря свойства компактности соответствующих операторов при сохранении для достаточно широкого класса областей свойства ограниченности. Радон преодолел эту трудность, применив разработанный им ранее подход к построению теории линейных уравнений в функциональных пространствах, в основу которого положено понятие радиуса Фредгольма.

1.2. Теория Радона и ее развитие. Пусть L — линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathcal{B}$. Через L^* обозначим сопряженный с L оператор, действующий в пространстве $\mathcal{B}^*$, сопряженном с $\mathcal{B}$.

Радон [177] ввел понятие *радиуса Фредгольма* $R(L)$ оператора L, то есть радиуса наибольшего круга на комплексной плоскости с центром в точке $\lambda=0$, внутри которого для уравнений

$$u-\lambda Lu=f, \quad v-\bar{\lambda}L^*v=g$$

(u, $f\in\mathcal{B}$, v, $g\in\mathcal{B}^*$) справедливы теоремы Фредгольма (см. гл. 1, § 5 статьи I этого тома). Следуя Радону [177], назовем *степенью непрерывности оператора* L верхнюю грань радиусов равномерной сходимости рядов

$$I+\lambda(L-\mathcal{K})+\lambda^2(L-\mathcal{K})^2+\ldots, \qquad (4.1)$$

где supremum берется по множеству $\{\mathcal{K}\}$ всех компактных операторов в пространстве $\mathcal{B}$.

Теорема 1 ([177]). Радиус Фредгольма оператора L равен его степени непрерывности.

Результаты Радона легли в основание важной главы функционального анализа (см. работы С. М. Никольского [75], Аткинсона [1], И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [14]).

Определение. Величина

$$|L|=\inf_{\{\mathcal{K}\}}\|L-\mathcal{K}\|_{\mathcal{B}}$$

называется *существенной нормой оператора* L в пространстве $\mathcal{B}$.

Это понятие впервые появилось и было использовано в работе [178] для оценки $R(L)$ снизу: так как операторный ряд (4.1) сходится при $|\lambda|\leqslant\|L-\mathcal{K}\|_{\mathcal{B}}^{-1}$, то

$$R(L)\geqslant|L|^{-1}.$$

Последнее неравенство позволяет получать достаточные условия справедливости теорем Фредгольма для конкретных интегральных уравнений и систем. С этой целью оно и было применено Радоном при исследовании оператора $T=2W_0$, где W_0 —

прямое значение логарифмического потенциала двойного слоя (см. гл. 1, п. 1.2).

Пусть S — спрямляемая кривая, s — переменная длины дуги $(0 \leqslant s \leqslant l)$. Если угол $\theta(s)$, образованный положительным направлением касательной и осью абсцисс, является функцией ограниченной вариации на $[0, l]$, то S называется *кривой с ограниченным вращением* (*кривой Радона, кривой с ограниченной вариацией поворота*).

Следующая теорема Радона дает значение радиуса Фредгольма оператора T.

Теорема 2 ([178]). Пусть S — замкнутая кривая с ограниченным вращением. Тогда для оператора T в пространстве $C(S)$ имеют место равенства

$$R(T) = |T|^{-1} = \pi/\alpha, \tag{4.2}$$

где α — наибольший по модулю скачок поворота касательной в точках контура S.

Из (4.2) следует, что если $\alpha < \pi$, то есть на кривой с ограниченным вращением отсутствуют *точки заострения* (будем иногда говорить также: *точки возврата* или *пики*), то $R(T) > 1$ и для интегральных уравнений задач Дидихле и Неймана справедливы теоремы Фредгольма. Отправляясь отсюда, Радон при помощи дальнейших (нетривиальных) построений доказывает теоремы о разрешимости интегральных уравнений и тем самым переносит классическую теорию логарифмических потенциалов на кривые с ограниченным вращением без точек заострения.

Интересно, что тремя годами ранее Карлеман в своей диссертации [118] по существу показал, что если S есть объединение конечного числа N замкнутых дуг $p_j p_{j+1}$, $p_{N+1} = p_1$ класса C^2, то для операторов в пространстве $C(S)$ с нормой

$$\sup_j \sup_{x \in S} |x - p_j|^{\varkappa_j} |u(x)|, \quad 0 \leqslant \varkappa_j \leqslant 1,$$

имеет место оценка

$$|T| \leqslant \sup_j \frac{\sin(|\pi - \alpha_j| \varkappa_j)}{\sin(\pi \varkappa_j)},$$

где α_j — угол между полукасательными в точке p_j. При $\varkappa_j = 0$ эта оценка совпадает с полученной Радоном.

В той же работе [118] аналогичный результат установлен и для двумерной поверхности, состоящей из двух частей S_1 и S_2 класса C^2 с общим краем E (E — замкнутая дважды непрерывно дифференцируемая кривая). В частности, согласно [118], в случае пространства $C(S)$ существенная норма оператора допускает оценку

$$|T| \leqslant \sup_{p \in E} |1 - \alpha(p)/\pi|,$$

где $\alpha(p)$ — наименьшая из величин углов между касательными плоскостями к S_1 и S_2 в точке $p \in E$.

Долгое время после работы Радона [178] существовало мнение, что он обобщил теорию потенциала в пространстве непрерывных функций «до ее естественных пределов» [179]. Однако в шестидесятых годах в работах Крала, Ю. Д. Бураго, В. Г. Мазьи и В. Д. Сапожниковой [4]—[6], [31], [153], [154] было показано, что теорию Радона можно перенести на более широкий класс кривых, описываемый в терминах вариации угла, под которым подмножества границы видны из произвольной ее точки. Об этих результатах будет сказано в § 2 в контексте многомерного случая.

Начало другому направлению в теории граничных интегральных уравнений на негладких кривых было положено в 1963 г. работой Я. Б. Лопатинского [40], который опирался на результаты И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [14] в теории интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. В [40] рассмотрена система уравнений $\chi-T\chi=f$ на кусочно-гладком контуре без точек заострения, где

$$(T\chi)(s)=\int_S K\left(s, \sigma, \nu_s, \nu_\sigma, \frac{z(s)-z(\sigma)}{|z(s)-z(\sigma)|}\right)\frac{\chi(\sigma)\,d\sigma}{|z(s)-z(\sigma)|},$$

матрица K допускает оценку

$$K(s, \sigma, \xi, \eta, \zeta)=O(|(\xi, \zeta)|+|(\eta, \zeta)|).$$

Оператор T рассматривается в пространстве $L_1(\rho^{-\varepsilon}, S)$ с нормой

$$\|u;\, L_1(\rho^{-\varepsilon}, S)\|=\int_S |u(\sigma)|\frac{d\sigma}{\rho(\sigma)^{\varepsilon}},$$

где ρ — расстояние от точки интегрирования до ближайшей угловой точки контура.

В нескольких словах метод Я. Б. Лопатинского может быть охарактеризован следующим образом. Сначала показывается, что T с точностью до компактного слагаемого совпадает с интегральным оператором на сторонах угла с положительно однородным ядром степени —1. Явное обращение последнего («модельного») оператора достигается при помощи преобразования Меллина. Далее для того, чтобы определить индекс оператора $I-T$, остается применить формулу И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [14].

Итак, вместо того, чтобы оценивать сверху существенную норму оператора T, как это делает Радон, Я. Б. Лопатинский строит для $I-T$ регуляризатор (см. гл. 1, § 3 статьи I этого тома). На том же пути в работе 1980 г. Б. В. Базалий и В. Ю. Шелепов [2] углубили теорему 2, получив следующее описание областей Нётера и Фредгольма (см. гл. 1, § 4 статьи I этого тома) оператора T, действующего в пространстве $C(S)$.

Теорема 3 ([2]). Пусть S — замкнутая кривая Радона без точек заострения. Оператор $I+\lambda T$ нётеров в пространстве $C(S)$ тогда и только тогда, когда λ не принадлежит вещественным полупрямым

$$\left(-\infty,\ -\min_{s\in S}\frac{\pi}{|\pi-\alpha_s|}\right],\quad \left[\min_{s\in S}\frac{\pi}{|\pi-\alpha_s|},\ \infty\right),$$

где α_s — угол в точке $s\in S$, внутренний относительно области Ω^+, ограниченной кривой S.

При выполнении этого условия индекс оператора $I+\lambda T$ равен нулю.

В [102] теорема 3 была распространена на действующие в пространстве непрерывных m-компонентных вектор-функций операторы вида

$$(T\chi)(s)=\int\limits_S K\left(\frac{z(s)-z(\sigma)}{|z(s)-z(\sigma)|}\right)\chi(\sigma)\frac{(\nu(\sigma),\ z(s)-z(\sigma))}{|z(s)-z(\sigma)|^2}\,d\sigma.$$

Здесь $K(\mathrm{e})$ — $(m\times m)$-матрица, элементы которой являются непрерывным четными функциями на единичной окружности, причем интеграл от K по окружности — невырожденная матрица; ν — единичный вектор внутренней нормали к S.

Как частный случай основного результата работы [102], получается следующее утверждение о системе интегральных уравнений плоской теории упругости.

Теорема 4 ([102]). Пусть S — замкнутая кривая Радона без точек заостроения. Интегральный оператор $I+\lambda T$, отвечающий первой и второй основным краевым задачам плоской теории упругости,

$$K_{ij}(\mathrm{e})=-\frac{1}{\pi}[(1-k)\delta_{ij}-k(\mathrm{e},\mathrm{e}_i)(\mathrm{e},\mathrm{e}_j)],\quad i,\ j=1,2,$$

где e_i — орты координатных осей, является оператором Нётера в пространстве $C(S)$ тогда и только тогда, когда λ не принадлежит вещественным полупрямым

$$\left(-\infty,\ \min_{s\in S}\frac{\pi}{|\pi-\alpha_s|+|k|\sin|\pi-\alpha_s|}\right],$$

$$\left[\min\frac{\pi}{|\pi-\alpha_s|+|k|\sin|\pi-\alpha_s|},\ \infty\right),$$

где $k=-1$ для первой задачи, $k=(\lambda_0+\mu_0)(\lambda_0+3\mu_0)^{-1}$ — для второй основной краевой задачи (λ_0, μ_0 — постоянные Ламе). Таким образом,

$$R(T)=\min_{s\in S}\frac{\pi}{|\pi-\alpha_s|+|k|\sin|\pi-\alpha_s|}.$$

Любопытно, что существенная норма оператора T из последней теоремы строго меньше, чем $R(T)^{-1}$, в отличие от ситуации, рассмотренной Радоном. Это вытекает из следующей теоремы Г. И. Кресина и автора ([33], [34]).

Теорема 5. Пусть Ω^+ — ограниченная плоская область, $C^{1,\gamma}$ — диффеоморфная N-угольнику, $\gamma>0$, и α_j — минимальная из величин углов между полукасательными в точках p_j, $1\leqslant j\leqslant N$. Тогда для оператора T из теоремы 4

$$|T|=\frac{2}{\pi}(1+k)E\left(\frac{\pi-\alpha_{\min}}{2},\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right),$$

где E — эллиптический интеграл второго рода и $\alpha_{\min}=\min\{\alpha_j\colon 1\leqslant j\leqslant N\}$. В частности, для оператора T, отвечающего системе Стокса ($k=1$), справедливо равенство

$$|T|=\frac{4}{\pi}\cos\frac{\alpha_{\min}}{2}.$$

Сформулируем теперь близкий к теореме 3 результат для логарифмического потенциала двойного слоя в пространстве $L_p(S)$, $1<p<\infty$ (см. [19], [101]).

Теорема 6 ([101]). Пусть S — замкнутая кривая Радона без точек заострения и T — удвоенное прямое значение логарифмического потенциала двойного слоя. Тогда при $p\neq 1+|\pi-\alpha_k|/\pi$ оператор $I+T$ нётеров в $L_p(S)$ и для индекса оператора T имеет место формула

$$\varkappa_p=\sum_{k=1}^{\infty}1/2\,(1-\operatorname{sign}(p-1-|\pi-\alpha_k|/\pi)).$$

Радиус Фредгольма оператора T в $L_p(S)$, $1<p<\infty$, равен

$$\min_{k\geqslant 1}\frac{\sin(\pi/p)}{\sin(|\pi-\alpha_k|/p)}.$$

Если S — кривая Радона без точек заострения и $2\leqslant p<\infty$, то к действующим в $L_p(S)$ операторам интегральных уравнений Шермана —Лауричелла, Мусхелишвили и Фредгольма, возникающим в плоской теории упругости (см. гл. 3, п. 2.2), применимы теоремы Фредгольма.

В связи с обсуждаемым направлением, обратим внимание читателя на монографию И. И. Данилюка [18], в которой изложена теория интегральных уравнений для краевых задач на плоскости. В [18] основной акцент сделан на исследовании задач с разрывными коэффициентами в областях, ограниченных негладкими контурами, в частности, кривыми Радона.

В том же круге идей находится работа Фейбса, Джодейта и Льюиса [137], посвященная изучению разрешимости в $L_p(S)$ интегральных уравнений задачи Дирихле (внутренней и внешней) для уравнения Лапласа в нескольких специальных областях (квадрант на плоскости, прямой круговой конус, четверть пространства и ограниченная плоская область с углом $\pi/2$ на контуре). Например, в случае квадранта, когда уравнение решается при помощи преобразования Меллина, в [137] показано, что упомянутое интегральное уравнение разрешимо в $L_p(S)$ при $p \neq 3/2$, в то время как значение $p=3/2$ не является исключительным при явном представлении решения задачи Дирихле в виде интеграла Пуассона. С другой стороны, для $1 < p < 3/2$ решение задачи Дирихле в дополнении квадранта представимо потенциалом двойного слоя, но не интегралом Пуассона. Для интегрального уравнения внутренней задачи Дирихле в конусе $\{(x, y, z) : z^2 > x^2 + y^2,\ z > 0\}$ в [137] установлена однозначная разрешимость при всех $p \in (1, \infty)$, кроме некоторой последовательности $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, содержащейся в интервале $(1,2)$. В случае четверти пространства авторы работы [137] получают однозначную разрешимость интегрального уравнения (не решая его явно) в $L_p(S)$ при $p > 3/2$, а также бесконечномерность подпространства решений однородного уравнения при $p \in (1, 3/2)$. Поскольку оператор представляет собой свертку с неотрицательным ядром по одной из переменных, удается вычислить его L_p-норму и тем самым выяснить, что она меньше единицы при $p > 3/2$.

§ 2. Многомерная теория потенциала в пространстве $C(S)$

2.1. Класс поверхностей. Начиная с 1962 г. ряд работ был посвящен развитию теории граничных интегральных уравнений в пространствах C и C^* на нерегулярных кривых и поверхностях довольно широкого класса [4]—[6], [31], [153], [154], [156]. Отправным пунктом для авторов заметки [5] послужило замечание в знаменитом курсе функционального анализа [179, с. 245] о том, что в «случае пространственной задачи аналог кривых с ограниченным вращением не найден». Оказалось, что «правильное» обобщение результата Радона на многомерный случай можно провести в терминах некоторой функции $\omega(\xi, B)$, отвечающей интуитивному представлению о телесном угле, под которым множество B видно из точки ξ. (точное определение $\omega(\xi, B)$ дано в п. 2.2). Основные результаты, то есть теоремы о разрешимости интегральных уравнений основных краевых задач, были получены для областей, подчиненных следующим двум условиям:

$$\sup \{\operatorname{var} \omega(\xi, S \setminus \xi) : \xi \in S\} < \infty, \tag{A}$$

$$\lim_{r \to 0} \sup \{\operatorname{var} \omega(\xi, S \cap B_r(\xi)) : \xi \in S\} < \sigma_n/2. \tag{B}$$

Здесь S — граница области Ω^+, var — вариация заряда, $B_r(\xi)$ — шар с центром ξ и радиусом r, а σ_n — площадь поверхности единичного шара.

Отметим, что в то время как *условие* (A) существенно используется при построении всей теории, *условие* (B) появляется лишь при доказательстве альтернативы Фредгольма.

Приведем простые примеры, поясняющие смысл условий (A) и (B).

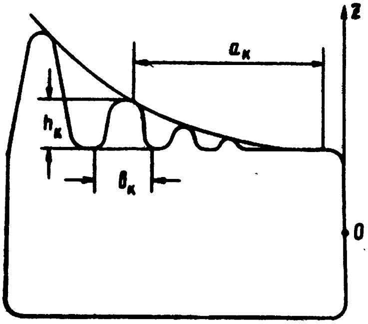

Рис. 3

Пример 1. Рассмотрим кривую S, изображенную на рис. 3. Положим $a_k=k2^{-k}$, $b_k=2^{-k}$, $h_k=k^{-1}2^{-k}$. Нетрудно видеть, что S удовлетворяет условиям (A) и (B). Однако вариация поворота этой кривой бесконечна. Контур S — гладкий, но не принадлежит никакому классу $C^{1,\gamma}$, $\gamma>0$. Если положить $a_k=k^{-1}$, $b_k=k^{-2}$, $h_k=k^{-3}$, то кривая S принадлежит классу $C^{1,1/2}$, но имеет бесконечную вариацию поворота.

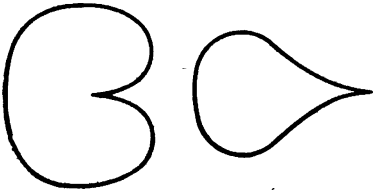

Рис. 4

Пример 2. Кривые, изображенные на рис. 4, удовлетворяет условию (A), но не удовлетворяют условию (B). Тем же свойством обладает кривая на рис. 3 при $a_k=k^{-1}$, $b_k=k^{-4}$, $h_k=k^{-3}$.

Недавно Крал [157] построил пример множества $\Omega^+\subset\mathbf{R}^2$, для которого знак неравенства в условии (B) заменен равенством, имеющего положительную двумерную меру Хаусдорфа. Там же показано, что при $n=2$ из условия (B) вытекает, что для каждой точки $x\in S$ существуют две непересекающиеся липшицевы открытые дуги C_1, $C_2\subset S$ с общим концом x, такие, что $C_1\cup\{x\}\cup C_2$ является окрестностью точки x на S. Кроме того, существуют односторонние касательные к C_1 и C_2 в точке x

(понимаемые в определенном смысле) и они не совпадают (то есть x не является точкой возврата).

Легко видеть, что область в $\mathbf{R}^n$, ограниченная поверхностью класса C^1, удовлетворяет условиям (A) и (B), если

$$\int_0 \rho^{-1}\omega(\rho)\,d\rho < \infty,$$

где $\omega(\rho)$ — модуль непрерывности нормали к S.

Заканчивая обсуждение ограничений на поверхность S, отметим, что еще Радон [178] доказал справедливость условия (A) для всякого контура с ограниченным вращением. В то же время в связи с вопросом о многомерном аналоге кривых Радона небезинтересно отметить, что при $n>2$ существуют поверхности класса $C^1\cap(C^\infty\setminus\{0\})$ с суммируемой гауссовой кривизной, для которых условие (A) не выполнено. В качестве примера может служить поверхность, полученная вращением кривой, изображенной на рис. 3, вокруг оси Oz. При этом следует положить $a_k=2^{1-k}$, $b_k=2^{-k}$, $h_k=k^{-1}2^{-k}$ (см. [4]).

2.2. Потенциалы и интегральные уравнения. Перейдем к построению теории потенциала, следуя работе Ю. Д. Бураго и автора [4]. Близкое изложение содержится в книге Крала [156]. Начнем со вспомогательных сведений о периметре множества (см., например, [140]).

Определение. Пусть характеристическая функция χ_B борелевского множества $B\subset\mathbf{R}^n$ принадлежит пространству $\mathrm{BV}(\mathbf{R}^n)$ локально суммируемых в $\mathbf{R}^n$ функции, градиенты которых (в смысле теории обобщенных функций) являются конечными векторными зарядами в $\mathbf{R}^n$. Тогда полная вариация заряда $\nabla\chi_B$ называется *периметром множества B* (*по Каччополи и Де Джорджи*) и обозначается через $P(B)$.

В дальнейшем Ω^+ — фиксированное борелевское подмножество $\mathbf{R}^n$ с компактным замыканием Ω^+, конечным периметром $P(\Omega^+)$ и границей S.

Определение. Единичный вектор $\mathbf{n}_x$ называется (внешней) *нормалью* (*по Федереру*) к множеству Ω^+ в точке x, если

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}\,\mathrm{mes}_n(\{y: y\in\Omega^+\cap B_r(x),\ (y-x)\,\mathbf{n}_x>0\})=0,$$

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}\,\mathrm{mes}_n(\{y: y\in B_r(x)\setminus\Omega^+,\ (y-x)\,\mathbf{n}_x<0\})=0.$$

Множество тех точек $x\in S$, в которых существует нормаль к Ω^+, называется *приведенной границей* множества Ω^+ и обозначается через $\partial^*\Omega^+$.

Полезно иметь в виду следующий важный результат теории периметра.

Теорема 7 ([139]). Приведенная граница $\partial^*\Omega^+$ измерима относительно H_{n-1} и $\mathrm{var}\,\nabla\chi_{\Omega^+}$, причем $\mathrm{var}\,\nabla\chi_{\Omega^+}(\mathbf{R}^n\setminus\partial^*\Omega^+)=0$

и для любого множества $B \subset \partial^* \Omega^+$

$$\nabla \chi_{\Omega^+}(B) = -\int_B \mathbf{n}_x H_{n-1}(dx). \tag{4.3}$$

Определение. *Телесным углом*, под которым множество $B \cap S$ видно из точки $\xi \notin \overline{B}$, называется функция множества

$$\omega(\xi, B) = \begin{cases} -\int_B \nabla \log|x-\xi|^{-1} \nabla \chi_{\Omega^+}(dx) & \text{при } n=2, \\ \frac{1}{2-n} \int_B \nabla |x-\xi|^{2-n} \nabla \chi_{\Omega^+}(dx) & \text{при } n>2. \end{cases}$$

В силу (4.3), интегрирование здесь можно считать распространенным на $\partial^* \Omega^+ \cap B$ и заменить $\nabla \chi_{\Omega^+}(dx)$ на $-\mathbf{n}_x H_{n-1}(dx)$.

В предположении, что

$$\operatorname{var} \omega(\xi, \cdot)(B) \leqslant c(\xi) < \infty$$

при $\overline{B} \subset \mathbf{R}^n \setminus \xi$, функция множества $\omega(\xi, B)$ доопределяется для всех борелевских множеств B следующим образом:

$$\omega(\xi, B) = \omega(\xi, B \setminus \xi) + \omega(\xi, \xi),$$

где $\omega(\xi, \xi) = \sigma/2 - \omega(\xi, \mathbf{R}^n \setminus \xi)$ при $\xi \in S$, $\omega(\xi, \xi) = 0$ при $\xi \notin S$.

Определение. *Гармоническим потенциалом двойного слоя* с непрерывной плотностью χ назовем функцию

$$(W\chi)(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_S \chi(\xi) \omega(x, d\xi),$$

определенную при $x \notin S$.

Теорема 8 ([4]). Пусть $P(\Omega^+) < \infty$ и $S = \partial \Omega^-$. Тогда условие

$$\sup\{\operatorname{var} \omega(\xi, \cdot)(S) : \xi \in \mathbf{R}^n \setminus S\} < \infty$$

необходимо и достаточно для того, чтобы при любой непрерывной функции χ существовали предельные значения $W_\pm \chi$ потенциала $W\chi$ слоя изнутри и извне Ω^+. Эти предельные значения равны, соответственно,

$$W_+ \chi = \frac{1}{2}(\chi + T\chi), \tag{4.4}$$

$$W_- \chi = \frac{1}{2}(-\chi + T\chi), \tag{4.5}$$

где удвоенное прямое значение потенциала двойного слоя

$$(T\chi)(x) = \frac{2}{\sigma_n} \int_S \chi(\xi) \omega(x, d\xi)$$

определяет непрерывный оператор в $C(S)$.

Вопрос о некасательных пределах (определение см. в § 3) потенциала двойного слоя был рассмотрен в работах [129], [155].

Равенства (4.4), (4.5) естественно интерпретируются как интегральные уравнения внутренней и внешней задач Дирихле с данными φ_+ и φ_- из $C(S)$, решения которых ищутся в пространстве непрерывных функций:

$$\chi+T\chi=2\varphi_+, \tag{4.6}$$

$$-\chi+T\chi=2\varphi_-. \tag{4.7}$$

Обобщенная постановка задачи Неймана для поверхностей, удовлетворяющих условию (A), потребует введения понятия *краевого потока.*

Определение. Функция $u \in C^1(\operatorname{int}\Omega^+)$ имеет *внутренний краевой поток*, если:

1) для любой бесконечно дифференцируемой в $\mathbf{R}^n$ функции с компактным носителем и любой сходящейся к Ω^+ последовательности множеств $\Omega_m \subset \operatorname{int}\Omega^+$ с гладкими границами существует предел

$$l_u(\varphi)=\lim_{m\to\infty}\int_{\partial\Omega_m}\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial\nu_x}H_{n-1}(dx),$$

где ν_x — внешняя нормаль к $\partial\Omega_m$, H_{n-1} — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа;

2) функционал $l_u(\varphi)$ ограничен в $C(S)$.

Определение. Пусть выполнены условия 1) и 2) предыдущего определения. Тогда конечный заряд Σ^+ на S, порождающий расширение функционала $l_u(\varphi)$ на пространство $C(S)$:

$$l_u(\varphi)=\int_S\varphi(x)\,\Sigma^+(dx)$$

называется **внутренним краевым потоком функции** u.

Аналогично определяется *внешний краевой поток* Σ^- функции $u \in C^1(\Omega^-)$.

Заряды Σ^+ и Σ^- играют роль нормальных производных при постановке внутренней и внешней задач Неймана.

Определение. Пусть ρ — конечный заряд на $S\subset\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 3)$. *Потенциалом простого слоя с зарядом* ρ называется интеграл

$$(V\rho)(x)=\frac{1}{\sigma_n}\int_S r^{2-n}\rho(d\xi), \quad x\notin S.$$

Функция $V\rho$ — гармоническая в $\mathbf{R}^n\setminus S$.

Теорема 9 ([4]). Пусть $\operatorname{mes}_n(S)=0$, $S=\partial\Omega^-$ и выполнено условие (A). Тогда потенциал $V\rho$ имеет внутренний и внешний краевые потоки, равные

$$-\frac{1}{2}\rho(B)+\frac{1}{\sigma_n}\int_S\omega(x,B)\,\rho(dx),$$

$$\frac{1}{2}\rho(B)+\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_S \omega(x, B)\rho(dx),$$

где B — произвольное борелевское подмножество S.

Условие (A) не только достаточно, но и необходимо для существования потоков любого потенциала $V\rho$.

Решение задачи Неймана, если его искать в виде потенциала простого слоя, сводится, таким образом, к уравнениям

$$-\rho+T^*\rho=2\Sigma^+, \tag{4.8}$$

$$\rho+T^*\rho=2\Sigma^-, \tag{4.9}$$

где T^* — оператор, сопряженный с T и действующий в пространстве $C^*(S)$, сопряженном с $C(S)$.

2.3. Существенная норма оператора T. Применимость теории Фредгольма к интегральным уравнениям из п. 2.2 основана на неравенстве (B) и следующем представлении существенной нормы оператора T в пространстве $C(S)$.

Теорема 10 ([4], [156]). Если $S=\partial\Omega^-$ и выполнено условие (A), то

$$|T|=\frac{2}{\sigma_n}\lim_{r\to 0}\sup\{\operatorname{var}\omega(\xi, S\cap B_r(\xi)):\xi\in S\}.$$

Тем самым, условие (B) равносильно неравенству $|T|<1$. В предположении выпуклости области Ω^+, формулу для $|T|$ можно упростить следующим образом.

Теорема 11 ([174]). Пусть Ω^+ — выпуклая область в $\mathbf{R}^n$. Тогда

$$|T|=\sup\{|1-2d(\xi)|:\xi\in S\},$$

где $d(\xi)$ — объемная плотность области Ω^+ в точке ξ.

Отсюда немедленно следует, что $|T|<1$, если Ω^+ — выпуклая область. Легко видеть, что последнее неравенство или, что равносильно, условие (B) не выполняется даже для довольно простых многогранников, и это обстоятельство является слабым местом теории. Успешная попытка добиться равенства $|T|<1$, заменив обычную норму в пространстве $C(S)$ эквивалентной весовой нормой, зависящей от геометрии границы, сделана Кралом, Вендландом, Энджелом и Клейнманом [110], [159]. В [159] рассматриваются многогранники в $\mathbf{R}^3$, границы которых составлены из конечного числа прямоугольников, лежащих в плоскостях, параллельных координатным.

Не исключено, что трудность, связанная с условием (B), обусловлена лишь использованием существенной нормы для доказательства теорем Фредгольма. В пользу этого предположения говорят результаты работ [15], [16], [164], о которых пойдет речь в гл. 5.

Откладывая до следующего раздела обсуждение теорем о разрешимости интегральных уравнений теории гармонических потенциалов, остановимся на формулах для существенной нормы некоторых матричных операторов, возникающих при рассмотрении предельных значений потенциалов типа двойного слоя

$$(W\chi)(x)=\frac{1}{2}\int\limits_S K(\mathbf{e}_{x\xi})\,\chi(\xi)\,\omega(x, d\xi),\quad x\notin S.$$

Здесь K — четная $(m\times m)$-матрица-функция на единичной сфере S^{n-1} в $\mathbf{R}^n$; $e_{x\xi}=(\xi-x)|\xi-x|^{-1}$; χ — элемент пространства $C_m(S)$, т. е. непрерывная m-компонентная вектор-функция на S с нормой $\|\chi\|=\sup\{|\chi(x)| : x\in S\}$.

Теорема 12 ([33], [34]). Пусть $S=\partial\Omega^-$ и выполнено условие (A). Тогда

$$|T|=\lim_{\delta\to 0}\sup_{\xi\in\partial^*\Omega^+}\sup_{z\in S^{m-1}}\int\limits_{S\cap B_\delta(\xi)}|K^*(\mathbf{e}_{\xi x})\,z|\,|\omega|(\xi, dx),$$

где $T\chi$ — удвоенное прямое значение потенциала $W\chi$, рассматриваемый как оператор в $C_m(S)$, K^* — сопряженная матрица, а $\partial^*\Omega^+$ — приведенная граница Ω^+.

В частности, если Ω^+ — ограниченная выпуклая область в $\mathbf{R}^n$, то

$$|T|=\sup_{\xi\in S\setminus\partial^*\Omega^+}\sup_{z\in S^{m-1}}\left[\frac{1}{2}\int\limits_{S^{n-1}}|K^*(\sigma)\,z|\,d\sigma-\int\limits_{\mathscr{E}_\xi}|K^*(\sigma)\,z|\,d\sigma\right],$$

где $\mathscr{E}_\xi$ — топологический предел при $\delta\to 0$ проекций множеств $\Omega^+\cap\partial B_\delta(\xi)$ на сферу $\partial B_1(\xi)$.

В качестве потенциала W можно взять двумерные и трехмерные упругие потенциалы двойного слоя. Тогда в плоском случае из последней формулы для существенной нормы получится сформулированная в § 1 теорема 4. При $n=3$ обозначим через $K_\varkappa(\mathbf{e})$ матрицу с элементами

$$-\frac{1}{4\pi}\left[(1-\varkappa)\,\delta_{ij}+3\varkappa\,(\mathbf{e}, \mathbf{e}_i)\,(\mathbf{e}, \mathbf{e}_j)\right]\quad (i, j=1, 2, 3).$$

Если $\varkappa=(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu)^{-1}$ и $\varkappa=1$, то получаем матрицы, входящие в граничные интегральные операторы, порожденные задачей Дирихле для систем Ламе и Стокса, соответственно (см. гл. 2, §§ 1 и 2).

Для оператора $T(\varkappa)$ в $C_3(S)$, отвечающего матрице $K_\varkappa(\mathbf{e})$, справедливо следующее утверждение о случае конических особенностей на S.

Теорема 13 ([33], [34]). Пусть Ω^+ — ограниченная область в $\mathbf{R}^3$, на границе которой выделены точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ такие, что $S\setminus\bigcup\xi_i$ — многообразие класса $C^{1,\gamma}$, $\gamma>0$. Пусть для каждого $i=1, 2, \ldots, N$ существует диффеоморфизм класса $C^{1,\gamma}$ с тождественной в точке ξ_i матрицей Якоби, отображающий пересечение с $\overline{\Omega^+}$ некоторой окрестности этой точки в круговой конус с углом при вершине α_i. Пусть еще $\alpha_{\min}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_N, 2\pi-\alpha_1,\ldots,2\pi-\alpha_N\}$. Тогда

$$|T_3(\varkappa)|=\frac{|1-\varkappa|}{\pi}\left[\sqrt{1+\Gamma^2\sin^2\frac{\alpha_{\min}}{2}}\,E\left(\frac{\Gamma\sin\frac{\alpha_{\min}}{2}}{\sqrt{1+\Gamma^2\sin^2\frac{\alpha_{\min}}{2}}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{\alpha_{\min}}{2}+\int_0^{\pi/2}\frac{1+\Gamma^2\cos^2\theta}{\Gamma\cos\theta}\arcsin\frac{\Gamma\cos\theta\cos\frac{\alpha_{\min}}{2}}{\sqrt{1+\Gamma^2\cos^2\theta}}\,d\theta\right],$$

где $\Gamma=|1-\varkappa|^{-1}\sqrt{3\varkappa(\varkappa+2)}$, E — полный эллиптический интеграл второго рода. В частности, для оператора системы Стокса

$$|T(1)|=(2\pi)^{-1}(\pi-\alpha_{\min}+\sin\alpha_{\min}).$$

В следующей теореме Ω^+ — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, на границе которой выделено замкнутое подмножество M. Предположим, что $S\setminus M$ — двумерное подмногообразие в $\mathbb{R}^3$ класса $C^{1,\gamma}$ и что пересечение с Ω^+ некоторой окрестности каждой точки из M диффеоморфно (класса $C^{1,\gamma}$) двугранному углу. Тогда для каждой точки $\zeta\in M$ определены две касательные плоскости. Наименьший из углов между этими плоскостями обозначим $\alpha(\zeta)$ и пусть $\alpha_{\min}=\min\{\alpha(\zeta):\zeta\in M\}$.

Теорема 14 ([33], [34]). Если область Ω^+ удовлетворяет только что сформулированным условиям, то

$$|T(\varkappa)|=\frac{|1-\varkappa|}{\pi}\left[\frac{\pi-\alpha_{\min}}{2}+\right.$$

$$\left.+\int_{\alpha_{\min}/2}^{\pi/2}\frac{1+\Gamma^2\sin^2\theta}{\Gamma\sin\theta}\arccos(1+\Gamma^2\sin^2\theta)^{-1/2}d\theta\right],$$

где Γ — та же константа, что и в теореме 3.13. В частности, $|T(1)|=\frac{3}{2}\cos(\alpha_{\min}/2)$.

2.4. Разрешимость интегральных уравнений теории гармонических потенциалов. Вернемся к задачам Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в области Ω^+, удовлетворяющей условию (A) и (B) будем следовать работе [4] (см. также [156]).

После того как установлены теоремы Фредгольма для оператора T, можно в существенном воспользоваться схемой исследования разрешимости уравнений (4.6) и (4.9), примененной Радоном для кривых с ограниченным вращением.

Приведем основной результат о разрешимости интегральных уравнений теории гармонических потенциалов в пространствах $C(S)$ и $C^*(S)$. С единственной целью упрощения формулировки будем предполагать, что множества $\operatorname{int}\Omega^+$ и $\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}^+$ связны.

Теорема 15 ([4]). Пусть Ω^+ — борелевское подмножество $\mathbf{R}^n$ с компактным замыканием и конечным периметром, удовлетворяющее условию (B).[1]

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Интегральное уравнение (4.6) внутренней задачи Дирихле для любой непрерывной правой части φ_+ имеет единственное решение в $C(S)$.

2) Интегральное уравнение (4.9) внешней задачи Неймана для любого конечного заряда Σ^- имеет единственное решение.

Аналогично переформулируются классические теоремы об интегральных уравнениях внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана.

Заметим, что теорема 15 не гарантирует единственности для задачи Неймана. В ней лишь утверждается, что единственно решение, представимое в виде потенциала простого слоя. Следующее утверждение, доказательство которого опирается на теорему 8, представляет собой теорему единственности решения задачи Неймана из некоторого класса гармонических функций.

Предварительно введем некоторый класс зарядов.

Определение. Пусть $S=\partial\Omega^-$. Будем говорить, что конечный заряд ρ принадлежит классу $\mathfrak{S}_V$, если порожденный им потенциал простого слоя $V\rho$ имеет на S равные между собой конечные предельные значения изнутри и извне S.

Теорема 16 ([4]). Пусть Ω^+ — борелевское подмножество $\mathbf{R}^n$ с компактным замыканием и конечным периметром. Пусть еще множества $\operatorname{int}\Omega^+$ и $\mathbf{R}^n\setminus\overline{\Omega^+}$ связны. Если выполнено условие (B), то

1) для любого конечного заряда $\Sigma^+\in\mathfrak{S}_V$ с нулевой общей массой существует единственное с точностью до постоянного слагаемого решение внутренней задачи Неймана из класса $C(\overline{\Omega^+})\cap \mathrm{BV}(\operatorname{int}\Omega^+)$;

2) для любого конечного заряда $\Sigma^-\in\mathfrak{S}_V$ существует единственное решение внешней задачи Неймана из класса $C(\mathbf{R}^n\setminus\operatorname{int}\Omega^+)\cap \mathrm{BV}^{(\mathrm{loc})}(\mathbf{R}^n\setminus\overline{\Omega^+})$, стремящееся к нулю на бесконечности.

В заключение раздела укажем на некоторые другие результаты по применению метода граничных интегральных уравнений для решения краевых задач в областях с нерегулярной границей. Задача Дирихле с разрывной граничной функцией рассмотрена в работе [173]. Обобщение теоремы 16 на случай областей с многосвязной границей приведено в книге [156]. Третья краевая задача для уравнения Лапласа исследована в работах [84], [170]—[172]. В статье [158] показано, что опера-

---

[1] Согласно [4], из условия (B) для борелевского множества Ω^+ с компактным замыканием и конечным периметром вытекает, что $S=\partial\Omega^-$ и $\operatorname{mes}_n(S)=0$.

тор T^2 является сжимающим, если область Ω^+ выпукла. Это позволяет применять метод последовательных приближений для решения интегральных уравнений краевых задач в произвольных выпуклых областях (см. также книгу [156]).

§ 3. Граничные интегральные уравнения в пространстве L_p на липшицевых поверхностях

В течение последнего десятилетия значительный прогресс достигнут в изучении граничных уравнений для краевых задач в липшицевых областях с данными из $L_p(S)$. Начало этим исследованиям было положено работой Кальдерона [115], в которой установлена ограниченность в L_p интегрального оператора Коши на липшицевых кривых с достаточно малой локальной константой Липщица (см. также [117] и гл. 3, § 1 статьи I этого тома). Койфман, Макинтош и Мейер сняли последнее условие в статье [120]. Теорема Кальдерона была использована Фейбсом, Джодейтом и Ривьером [138] при построении L_p-теории потенциала в случае поверхностей класса C^1. Затем в работах Веркота, Кенига, Фейбста и Дальберга (см. [136], [149], [184] и др.) разрешимость граничных уравнений различных краевых задач в $L_p(S)$ была доказана для липшицевых областей с использованием результата статьи [120].

В настоящем параграфе речь сначала пойдет об интегральных уравнениях задач Дирихле и Неймана в липшицевых областях. Кроме того, будет указано, какие усиления результатов имеют место для поверхностей класса C^1. Далее, мы коснемся метода граничных уравнений для систем Ламе и Стокса в липшицевых областях.

3.1. Некоторые определения. Обозначим через Ω^+ ограниченную односвязную область в $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ и положим $\Omega^-=\mathbf{R}^n\setminus\bar{\Omega}^+$.

Определение. Будем говорить, что граница S областей $\Omega^\pm$ *липшицева* или, иначе, принадлежит *классу* $C^{0,1}$, если для каждой точки $\xi\in S$ существуют шар $B_\delta(\xi)$, декартова система координат в $\mathbf{R}^n$ с началом в точке ξ и функция $\mathbf{R}^{n-1}\ni x\to\varphi(x)\in\mathbf{R}^1$ такие, что

$$\Omega^+\cap B_\delta(\xi)=\{(x,t):x\in\mathbf{R}^{n-1},\ t<\varphi(x)\}\cap B_\delta(\xi).$$

При этом требуется, чтобы $\varphi(0)=0$, функция φ имела компактный носитель и удовлетворяла условию Липшица: $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant c_\xi|x-y|$ для любых $x,y\in\mathbf{R}^{n-1}$, $c_\xi<\infty$.

Если здесь считать, что функция φ непрерывно дифференцируема (без ограничения общности можно предположить, что $(\partial\varphi/\partial x_i)(0)=0$, $i=1,\dots,n-1$), то получится определение *поверхности класса* C^1. В этом случае в каждой точке $\xi\in S$ существует нормаль к S, единичный вектор которой, направленный в область Ω^-, обозначим через $\mathbf{n}_\xi$. Кроме того, для произвольного $\beta \in (0, 1)$ можно так выбрать $\varepsilon > 0$, что конусы $\Gamma_\beta^\pm(\xi) = \{x \in B_\varepsilon(\xi) : \mp(x-\xi, \mathbf{n}_\xi) > \beta|x-\xi|\}$ не пересекаются с $\Omega^\mp$.

Если S принадлежит классу $C^{0,1}$, то вектор нормали существует лишь почти всюду относительно меры Лебега на S. Однако и для таких поверхностей имеются два семейства $\{\Gamma^\pm(\xi)\}$, симметричных относительно точки $\xi \in S$, некасательных круговых конусов, содержащихся в $\Omega^\pm$, для которых величина угла при вершине отделена от нуля на S.

Определение. Будем говорить, что функция u, заданная в области $\Omega^\pm$ класса $C^{0,1}$, имеет *некасательный предел a* в точке $\xi \in S$, если $\lim\limits_{x \in \Gamma^\pm(\xi)} u(x) = a$.

Далее, в зависимости от того, где определена функция u, для нее можно ввести следующие *некасательные максимальные функции.*

$$u_*(\xi) = \sup\{|u(x)| : x \in \bigcup_\pm \Gamma^\pm(\xi)\}, \ g \in S.$$

$$u_*(\xi) = \sup\{|u(x)| : x \in \bigcup \Gamma^\pm(\xi)\}, \ \xi \in S.$$

Если S принадлежит классу C^1, то для каждого значения $\beta \in (0, 1)$ при помощи конусов $\Gamma_\beta^\pm(\xi)$ аналогично определяются некасательные максимальные функции $u_\beta^\pm(\xi)$ и $u_\beta(\xi)$.

Стандартным способом, с использованием разбиения единицы, можно определить пространство $W_p^1(S)$, где $p \in (1, \infty)$, а S принадлежит классу $C^{0,1}$. Для $f \in W_p^1(S)$ при почти всех $\xi \in S$ существует касательный градиент $\nabla_t f(\xi)$ (см., например, [168]).

3.2. Свойства потенциалов простого и двойного слоя. Обычным образом на $\mathbf{R}^n \setminus S$ определяются гармонические потенциалы простого и двойного слоя (см. формулы (1.4) и (1.5)).

При помощи теоремы из [120] об ограниченности в L_p интегрального оператора Коши на липшицевых кривых в статье [184] установлен следующий результат.

Теорема 17. Пусть $S \in C^{0,1}$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{S \setminus B_\varepsilon(x)} \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \mathscr{E}(x, \xi)\, d_\xi S. \tag{4.10}$$

Если $\chi \in L_p(S)$, $1 < p < \infty$, то при $\varepsilon \to 0$ семейство (4.10) сходится в $L_p(S)$ и почти везде на S.

Обозначим этот предел через $(W_0\chi)(x)$ и будем называть его *прямым значением потенциала двойного слоя.*

Для поверхностей S в $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 3)$, принадлежащих классу C^1, существование $W_0\chi$ в указанном в теореме 17 смысле было установлено в работе [138]. В этом случае оказалось, что оператор W_0 компактен в пространствах $L_p(S)$ и $W_p^1(S)$, $1 < p < \infty$. Однако для S из класса $C^{0,1}$ оператор W_0, вообще говоря, не является компактным в $L_p(S)$ (см. § 2).

Теорема 18 ([184]). Если S принадлежит классу $C^{0,1}$, а $\chi \in L_p(S)$, $1 < p < \infty$, то потенциал $W\chi$ при почти всех $x \in S$ имеет некасательные пределы $(W_\pm\chi)(x)$ со стороны $\Omega^\pm$, причем справедливы равенства

$$W_\pm\chi=\pm\frac{1}{2}\chi+W_0\chi. \tag{4.11}$$

Для поверхности $S\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 3)$ из класса C^1 в работе [138] показано, что при любом $\beta\in(0,1)$ некасательная максимальная функция $(W\chi)_\beta{}^+$ принадлежит пространству $L_p(S)$ и имеет место оценка

$$\|(W\chi)_\beta^+\|_{L_p(S)}\leqslant C_\beta\|\chi\|_{L_p(S)}.$$

Более того, для $\chi\in W_p^1(S)$ в статье [138] установлено неравенство

$$\||\nabla(W\chi)|_\beta^+\|_{L_p(S)}\leqslant C_\beta\|\chi\|_{W_p^1(S)},\quad \beta\in(0,1).$$

Теперь перейдем к свойствам потенциала простого слоя.

Теорема 19 ([184]). Если $S\in C^{0,1}$ и $\rho\in L_p(S)$, $1<p<\infty$, то существует прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя

$$\frac{\partial(V\rho)}{\partial\mathfrak{n}_0}(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{S\setminus B(x,\varepsilon)}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\mathfrak{n}_x}\mathscr{E}(x,\xi)\,d_\xi S.$$

Здесь предел понимается в смысле сходимости в $L_p(S)$ или поточечной сходимости для почти всех $x\in S$. Оператор $\partial V/\partial\mathfrak{n}_0$ является сопряженным оператору W_0.

Нормальная производная $\partial(V\rho)\partial\mathfrak{n}_x$ при почти всех $x\in S$ имеет некасательные пределы $\partial(V\rho)/\partial\mathfrak{n}_\pm$ со стороны $\Omega^\pm$, которые выражаются формулами

$$\frac{\partial(V\rho)}{\partial\mathfrak{n}_\pm}=\mp\frac{1}{2}\rho+\frac{\partial(V\rho)}{\partial\mathfrak{n}_0}. \tag{4.12}$$

Кроме того, для некасательной максимальной функции градиента потенциала $V\rho$ справедлива оценка

$$\||\nabla(V\rho)|_*;\ L_p(S)\|\leqslant C\|\rho;\ L_p(S)\| \tag{4.13}$$

В [138] показано, что при $n\geqslant 3$ для всякого $\beta\in(0,1)$ имеет место оценка (4.13) с некасательной максимальной функцией, определяемой данным значением β.

3.3. Интегральные уравнения для задач Дирихле и Неймана в Ω^+. Если искать решение задачи Дирихле в области Ω^+ в виде потенциала $W\chi$, то, согласно (4.11), плотность χ должна удовлетворять уравнению

$$\chi+T\chi=2\varphi,\quad T=2W_0. \tag{4.14}$$

Если S принадлежит классу C^1, то вследствие компактности оператора W_0 в пространстве $L_p(S)$, $1<p<\infty$, для исследованиз разрешимости уравнения (414) и его сопряженного применима классическая схема (см. гл. 1, § 2), основанная на теории Фредгольма и теоремах единственности для краевых задач. На этом пути в работе [138] доказано, что (4.14) имеет единственное решение в $L_p(S)$, $1<p<\infty$, и потенциал $W\chi$ является решением задачи Дирихле в Ω^+. Кроме того, для всякого $\beta \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$\| (W\chi)_\beta^+ ; L_p(S) \| \leqslant c_\beta \| \varphi ; L_p(S) \|. \tag{4.15}$$

В случае принадлежности S классу $C^{0,1}$, для доказательства замкнутости и плотности в $L_2(S)$ области значений оператора $I+T^*$ (откуда вытекает разрешимость уравнения (4.14)) необходим аппарат, способный заменить теорию Фредгольма. В работе [184] для указанной цели использована

Лемма. Имеет место неравенство

$$\| f \mp T^* f ; L_2(S) \| \leqslant C \left\{ \| f \pm T^* f ; L_2(S) \| + \left| \int\limits_S V_0 f \, dS \right| \right\}. \tag{4.16}$$

Здесь C зависит только от константы Липшица для S, $f \in L_2(S)$, если $n \geqslant 3$ и $f \in L_{2,0}(S)$, если $n=2$, где $L_{p,0}(S) = \left\{ f \in L_p(S) : \int\limits_S f \, dS = 0 \right\}$.

Приведем схему доказательства неравенств (4.16). Исходным пунктом является *тождество Реллиха* (см. [168]):

$$\int\limits_S (\mathbf{n}, \mathbf{h}) \, | \nabla u |^2 ds = 2 \int\limits_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{h}, \nabla u) \, dS + \int\limits_{\Omega^+} [\operatorname{div} (| \nabla u |^2 \mathbf{h}) - 2 (\nabla \mathbf{h} \cdot \nabla u, \nabla u)] \, dx,$$

где $\mathbf{h}$ — гладкое векторное поле в $\mathbf{R}^n$ такое, что $(\mathbf{n}, \mathbf{h}) \geqslant C > 0$ на S.

Следствием тождества Реллиха служит неравенство

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ; L_2(\partial\Omega_j) \right\|^2 \leqslant C \left\{ \| \nabla_t u ; L_2(\partial\Omega_j) \|^2 + \| \nabla_t u ; L_2(\partial\Omega_j) \| \left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ; L_2(\partial\Omega_j) \right\| + \int\limits_{\partial\Omega_j} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS \right\},$$

где $\{\Omega_j\}$ — последовательность гладких областей, монотонно аппроксимирующая область Ω^+ изнутри. Отсюда вытекает, что

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ; L_2(\partial\Omega_j) \right\| \leqslant C \, \| \nabla_t u ; L_2(\partial\Omega_j) \|.$$

Полагая в последнем неравенстве $u = Vf$, при $j \to \infty$ получаем:

$$\| f - T^* f ; L_2(S) \| \leqslant 2C \, \| \nabla_t V_0 f ; L_2(S) \|, \tag{4.17}$$

ввиду существования предела касательных производных Vf.

Аппроксимируя S гладкими поверхностями извне, при помощи аналогичных рассуждений устанавливаем неравенство

$$\| \nabla_t V_0 f;\, L_2(S) \| \leqslant C \left\{ \| f + T^* f;\, L_2(S) \| + \left| \int\limits_S V_0 f\, dS \right| \right\},$$

которое вместе с (4.17) доказывает лемму.

Из неравенств (4.16) в работе [184] выводится следующее утверждение.

Теорема 19. (i) Если $S \in C^{0,1}$, то уравнение (4.14) однозначно разрешимо в пространстве $L_2(S)$.

(ii) Если $\varphi \in W_2^1(S)$, то $\chi \in W_2^1(S)$ и $| \nabla (W\chi) |_*^+ \in L_2(S)$, где χ — решение уравнения (4.14).

В работе [116] для сведения задачи Дирихле к интегральному уравнению применяется потенциал

$$(W^{(1)}\chi)(x) = \int\limits_S \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}_\xi} \mathscr{E}(x, \xi)\, d_\xi S.$$

Здесь $S \in C^{0,1}$, $\chi \in L_p(S)$, $\mathbf{l}$ — липшицева вектор—функция на S, такая, что $|\mathbf{l}| = 1$, а $(\mathbf{l}, \mathbf{n}) \geqslant \delta > 0$. При этом для задачи Дирихле получается интегральное уравнение, сопряженным к которому является граничное уравнение задачи с косой производной.

В статье [116] доказано, что указанные уравнения являются фредгольмовскими в пространствах $L_p(S)$ при $p \in (p_0, p_0/(p_0 - 1))$. (Величина $p_0 \in (1, 2)$ определяется локальной осцилляцией вектора нормали $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{|x-\xi|<\varepsilon} |\mathbf{n}_x - \mathbf{n}_\xi|$.) Это позволяет установить однозначную разрешимость задачи Дирихле с данными из $L_p(S)$, $p_0 < p \leqslant 2$, а также разрешимость задачи с косой производной для функций из $L_p(S)$, $p \in (p_0, p_0/(p_0 - 1))$, удовлетворяющих конечному числу условий ортогональности.

Если искать решение задачи Неймана в области Ω^+ в виде потенциала $V\rho$, то, согласно (4.12), плотность ρ должна удовлетворять уравнению

$$\rho - T^*\rho = -2\psi. \tag{4.18}$$

Для последнего уравнения при помощи неравенств (4.16) в работе [184] получен следующий результат.

Теорема 20. Если $S \in C^{0,1}$, то уравнение (4.18) однозначно разрешимо в $L_{2,0}(S)$.

Замечание ([138]). Если $S \in C^1$, то уравнение (4.18) однозначно разрешимо в $L_{p,0}(S)$, $1 < p < \infty$. При этом для $| \nabla (V\rho) |_\beta^+$ справедливо неравенство, аналогичное (4.13).

В заключение этого раздела укажем, что задачу Дирихле в липшицевой области Ω^+ можно сводить к интегральному уравнению первого рода при помощи потенциала простого слоя (ср. с гл. 1, п. 2.4). В этом направлении в статье [184] доказана

Теорема 21. Если $\varphi \in W_p^1(S)$, $1 < p \leqslant 2$, то в области $\Omega^+ \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ граница которой S принадлежит $C^{0,1}$, решение задачи Дирихле представимо в виде потенциала $V\rho$. При этом плотность $\rho\in L_p(S)$ является единственным решением уравнения

$$V_0\rho=\varphi \text{ п. в. на } S.$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\| |\nabla(V\rho)|_*;\ L_p(S)\| \leqslant C\|\varphi;\ W_p^1(S)\|.$$

3.4. Интегральные уравнения для систем Ламе и Стокса в L_2 на липшицевых поверхностях. Некоторые из упомянутых в п.п. 3.2 и 3.3 результатов для гармонических потенциалов недавно были перенесены [136], [149] на упругие и гидродинамические потенциалы. Следуя этим работам, ограничимся случаем специальной липшицевой области $\Omega^+=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\in\mathbf{R}^3 : x_3 > \varphi(x_1,\ x_2)\}$, где φ — липшицева функция.

Для потенциалов $W^{(\varkappa)}\chi$ и $V\rho$, введенных в п. 1.3 гл. 2, с плотностями из $L_2(S)$ в [136], [149], наряду с обычными теоремами о скачках, получены оценки

$$\begin{gathered}\|(W^{(\varkappa)}\chi)_*^+;\ L_2(S)\|+\|(W^{(\varkappa)}\chi)_*^-;\ L_2(S)\|+\\ +\|W^{(\varkappa)}\chi;\ H^{1/2}(\Omega^+)\|\leqslant C\|\chi;\ L_2(S)\|;\\ \||\nabla(V\rho)|_*^+;\ L_2(S)\|+\||\nabla(V\rho)|_*^-;\ L_2(S)\|+\\ +\|V\rho;\ H^{3/2}(\Omega^+)\|\leqslant C\|\rho;\ L_2(S)\|.\end{gathered}\qquad(4.19)$$

Доказательство этих неравенств основано на теореме Койфмана, Макинтоша и Мейера о непрерывности в L_p интеграла Коши на липшицевой кривой [120].

Как и для гармонических потенциалов (см. лемму из п. 3.3), разрешимость интегральных уравнений (2.12) и (2.14) выводится из неравенства

$$\|f\pm(T^{(\varkappa)})^*f;\ L_2(S)\|\leqslant C\|f\mp(T^{(\varkappa)})^*f;\ L_2(S)\|,\qquad(4.20)$$

где $f\in L_2(S)$, $T^{(\varkappa)}=2W_0^{(\varkappa)}$.

Оценка (4.20) получена в [136], [149] при $\varkappa\neq\mu$, и тем самым, из рассмотрения исключена задача с заданными напряжениями. Ограничение $\varkappa\neq\mu$ появилось при выводе вспомогательного неравенства

$$\sum_{k=1}^{3}\int_S|\nabla_t u_k|^2\,dS\leqslant C\|\mathcal{T}_\varkappa\mathbf{u};\ L_2(S)\|^2.$$

Заметим, что обратное неравенство

$$\|\mathcal{T}_\varkappa\mathbf{u};\ L_2(S)\|^2\leqslant C\sum_{k=1}^{3}\int_S|\nabla_t u_k|^2\,dS,$$

вытекающее из тождества Реллиха для системы Ламе [170] и также используемое при выводе оценки (4.20) установлено для всех $\varkappa>0$.

Полученный в [136], [149] основной результат теории упругих потенциалов содержится в следующей теореме.

Теорема 22. При $\varkappa \neq \mu$ интегральные уравнения (2.12) и (2.14) первой и обобщенной второй задач теории упругости в липшицевой области Ω^+ однозначно разрешимы.

В заключение параграфа сформулируем аналогичный результат, установленный в [136], [149] для системы Стокса.

Теорема 23. Интегральное уравнение задачи Дирихле для системы Стокса в Ω^+ однозначно разрешимо в $L_2(S)$. Потенциал двойного слоя, построенный по решению интегрального уравнения и представляющий поле скоростей, принадлежит пространству $H^{1/2}(\Omega^+)$ (см. [161]).

Глава 5

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В предыдущей главе были выделены некоторые классы нерегулярных поверхностей, хорошо приспособленные для развития теории граничных интегральных уравнений в пространствах C и L_p. В первом случае речь шла о поверхностях, подчиненных ограничению (B) на локальную вариацию телесного угла, а во втором — о поверхностях, заданных в локальных декартовых системах координат липшицевыми функциями. Несмотря на значительную общность таких поверхностей, они все же недостаточны для многих приложений. Прежде всего, столь простые поверхности как многогранники или конусы с гладкими направляющими не исчерпываются указанными классами. Кроме того, упомянутые классы плохо приспособлены для исследования гладкости и локальных особенностей решений.

Трудности изучения подобных вопросов для произвольных кусочно-гладких поверхностей вызваны в значительной мере ограниченностью существующей теории интегральных и псевдодифференциальных операторов на негладких многообразиях.

Оказалось, что это препятствие можно обойти, если воспользоваться тем фактом, что решения граничных интегральных уравнений выражаются через решения вспомогательных внешних и внутренних краевых задач. Такой подход, позволяющий строить теорию потенциала, не привлекая теории фредгольмовых и сингулярных интегральных операторов, был предложен в работах автора [43], [45]. Поскольку теория эллиптических краевых задач для областей с кусочно-гладкими границами находится в удовлетворительном состоянии ([21], [51], [53], [54], [55], [58], [88] и др.), можно с ее помощью прийти к теоремам о разрешимости граничных интегральных уравнений. На таком пути можно исследовать свойства дифференцируемости решений этих уравнений и найти их асимптотику вблизи особенностей границы.

Настоящая глава посвящена различным приложениям указанного метода. В § 1 он иллюстрируется на примере двух основных краевых задач для системы Ламе. На границах областей допускаются ребра, конические точки и многогранные углы (без нулевых заострений). Рассмотрена также интегро-дифференциальная система граничных уравнений смешанной краевой задачи теории упругости в случае поверхности с ребрами, на которых стыкуются различные краевые условия. Кроме того, в первом параграфе приведены формулы обращения операторов интегральных уравнений и вытекающие из них оценки ядер этих операторов. Результаты такого рода носят общий характер, но здесь мы ограничиваемся гармоническими потенциалами на поверхности с конической точкой. В заключение § 1 приведена формула для радиуса Фредгольма в пространствах типа Гёльдера на поверхностях с ребрами для интегральных операторов, возникающих при решении задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Во втором параграфе исследуется асимптотика вблизи угловой или конической точки границы для решений интегральных уравнений тех же краевых задач.

§ 1. Разрешимость граничных интегральных уравнений на кусочно-гладких поверхностях

1.1. Области и функциональные пространства. Пусть Ω^+ — область в $\mathbf{R}^3$ с компактным замыканием $\overline{\Omega^+}$ с границей S, $\Omega^- = \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$. Предположим, что S является объединением конечного числа «граней» $\{F\}$, «рёбер» $\{E\}$ и «вершин» $\{Q\}$. Ограничимся здесь только этим наглядным описанием, отсылая читателя, интересующегося точным определением классов областей, к работе [59]. Отметим, что все многогранники входят в рассматриваемый класс.

Предположим, что начало координат находится в Ω^+. Пусть $\{U\}$ достаточно мелкое конечное покрытие $\overline{\Omega^+}$ открытыми множествами, удовлетворяющее следующим условиям: а) U содержит не более одной вершины Q, б) если $\overline{U}$ не содержит вершин, то $\overline{U}$ может пересекаться не более чем с одним ребром E. С каждой вершиной Q и ребром E будем связывать вещественные числа β_Q и γ_E, соответственно.

С помощью разбиения единицы, подчиненного покрытию $\{U\}$, определим *пространство* $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^+)$, где $0<\alpha<1$, $\beta=\{\beta_Q\}$, $\gamma=\{\gamma_E\}$. Если $\overline{U}$ не пересекается с особенностями S, то норма в пространстве $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^+)$ функции с носителем в U эквивалентна норме в обычном пространстве Гёльдера $C^{1,\alpha}$. В случае $U\cap E\neq\varnothing$, $\overline{U}\cap\{Q\}=\varnothing$ и $\operatorname{supp} u\subset U$ мы имеем

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^+)}\sim\sup_{x\in\Omega^+}|u(x)|+\sup_{x,y\in\Omega^+}\frac{|r_E(x)^{\gamma_E}\nabla u(x)-r_E(y)^{\gamma_E}\nabla u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

где $r_E(x)$ — расстояние от точки x до E. Если U включает вершину Q и $\operatorname{supp} u\subset U$, то

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^+)}\sim\sup_{x\in\Omega^+}|u(x)|+$$

$$+\sup_{x,y\in\Omega^+}\frac{\left|\rho_Q(x)^{\beta_Q}\prod_{\{E:Q\in\overline{E}\}}r_E(x)^{\gamma_E}\nabla u(x)-\rho_Q(y)^{\beta_Q}\prod_{\{E:Q\in\overline{E}\}}r_E(y)^{\gamma_E}\nabla u(y)\right|}{|x-y|^\alpha},$$

где $\rho_Q(x)=|x-Q|$.

Заменяя Ω^+ на Ω^- и $\sup\limits_{x\in\Omega^+}|u(x)|$ на $\sup\limits_{x\in\Omega^-}(1+|x|)|u(x)|$, получим определение *пространства* $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^-)$. Через $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$ обозначим пространство следов на UF функций из $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^+)$ или $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^-)$.

Введем еще *пространство* $C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$ функций на UF. Если $U\cap E\neq\varnothing$, $\overline{U}\cap\{Q\}=\varnothing$ и $\operatorname{supp} u\subset U$, то

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)}\sim\sup_{x\in UF}r_E(x)^{\gamma_E-\alpha}|u(x)|+$$

$$+\sup_{x,y\in UF}\frac{|r_E(x)^{\gamma_E}u(x)-r_E(y)^{\gamma_E}u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Если U содержит вершину Q и $\operatorname{supp} u\subset U$, то

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)}\sim\sup_{x\in UF}\rho_Q(x)^{\beta_Q}\prod_{\{E:Q\in\overline{E}\}}r_E(x)^{\gamma_E}\sum_{\{E:Q\in\overline{E}\}}\frac{1}{r_E^\alpha}|u(x)|+$$

$$+\sup_{x,y\in UF}\frac{\left|\rho_Q(x)^{\beta_Q}\prod_{\{E:Q\in\overline{E}\}}r_E(x)^{\gamma_E}u(x)-\rho_Q(y)^{\beta_Q}\prod_{\{E:Q\in\overline{E}\}}r_E(y)^{\gamma_E}u(y)\right|}{|x-y|^\alpha}.$$

Если U не пересекаются с особенностями границы и $\operatorname{supp} u\subset U$, то норма в пространстве $C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$ эквивалентна норме в $C^{0,\alpha}(S)$.

Те же обозначения будут использоваться и для пространств вектор-функции.

1.2. Краевые задачи теории упругости. Рассмотрим *внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле*:

$$\mu\Delta\mathbf{u}^++(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}^+=0 \text{ в } \Omega^+,\ \mathbf{u}^+=\varphi^+ \text{ на } UF;\quad (D^+)$$

$$\mu\Delta\mathbf{u}^- + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}^- = 0 \text{ в } \Omega^-,\ \mathbf{u}^- = \varphi^- \text{ на } UF;\quad (D^-)$$
$$\mathbf{u}^-(x) = o((1+|x|)^{-1})$$

а также внутреннюю и внешнюю задачи Неймана:

$$\mu\Delta\mathbf{u}^+ + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}^+ = 0 \text{ в } \Omega^+,\ \mathscr{T}\mathbf{u}^+ = \psi^+ \text{ на } UF,\qquad (N^+)$$
$$\mu\Delta\mathbf{u}^- + (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}^- = 0 \text{ в } \Omega^-,\ \mathscr{T}\mathbf{u}^- = \psi^- \text{ на } UF,\qquad (N^-)$$
$$\mathbf{u}^-(x) = o((1+|x|^{-1}),$$

где $\mathscr{T} = \mathscr{T}_\mu$ — оператор напряжения (см. гл. 2, п. 1.2).

Введем наборы вещественных чисел $\{\delta_E\}$, которые появятся в следующем утверждении и будут использованы в дальнейшем. Пусть $\varphi(z)\in(0, 2\pi)$ — угол между касательными полуплоскостями в точке z со стороны Ω^+. Положим $\omega_E = \inf\limits_{z\in E}(\pi + |\pi - \varphi(z)|)$.

Пусть δ_E — корень уравнения $\sin(\omega_E\delta) + \delta\sin\omega_E = 0$ с наименьшей положительной вещественной частью, число δ_E вещественно и уменьшается при возрастании ω_E, $1/2 < \delta_E < 1$.

Сформулируем теорему о разрешимости всех приведенных выше краевых задач, которая является достаточной для дальнейших приложений к методу граничных интегральных уравнений.

Теорема 1. Пусть γ_E и $\{\beta_Q\}$ удовлетворяют следующим условиям

$$0 < 1 - \gamma_E + \alpha < \delta_E \text{ для всех } E, \qquad (5.1)$$
$$\Bigl|\beta_Q + \sum_{\{E:Q\in\bar{E}\}} \gamma_E - \alpha - 3/2\Bigr| < \varepsilon_Q \text{ для всех } Q, \qquad (5.2)$$

где $\{\varepsilon_Q\}$ — набор положительных чисел из интервала $(0, 1)$, которые зависят от геометрии касательного конуса к S с вершиной в Q.[1]

Тогда (i) задачи (D^+) и (D^-) однозначно разрешимы в $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^+)$ и $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^-)$ для всех $\varphi^\pm\in C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$;

(ii) задача (N^-) однозначно разрешима в $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^-)$ для всех $\psi^-\in C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$;

(iii) задача (N^+) разрешима в $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^+)$ для всех $\psi^+\in C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$ при условии равенства нулю главного вектора и главного момента. Решение единственно с точностью до жесткого смещения.

Для задач (D^+) и (D^-) эти результаты содержатся в теореме 11.5 [58]. Доказательства для задач (N^+) и (N^-) требуют незначительных технических изменений.

---

[1] Числа ε_Q могут быть определены при помощи некоторых спектральных краевых задач в областях на единичной сфере (см. [30]). Для задач $(D+)$ и $(D-)$ в [57] показано, что $\varepsilon_Q > 1/2$. То же неравенство для задач $(N+)$ и $(N-)$ позднее получено В. А. Козловым и автором при дополнительном предположении, что граница в окрестности вершины конуса допускает явное задание в декартовой системе координат [29].

1.3. Решение задач (D^+) и (D^-) при помощи потенциала простого слоя. Пусть $V\rho$ — упругий потенциал простого слоя с плотностью ρ (см. формулу (2.8)).

Теорема 2. Пусть $\{\gamma_E\}$ и $\{\beta_Q\}$ удовлетворяют неравенствам (5.1) и (5.2). Тогда операторы $C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S) \ni \rho \mapsto (V\rho)|_\Omega \in C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^-)$ и $C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S) \ni \rho \mapsto (V\rho)|_\Omega \in C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^+)$ ограничены. Существует ограниченный обратный оператор V^{-1}: $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(S) \to C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$.

Первая часть теоремы может быть проверена непосредственно. Вторая часть следует из теоремы 2 и равенства $\rho = \mathcal{T}\mathbf{u}^+ - \mathcal{T}\mathbf{u}^-$, где $\mathbf{u}^+$ и $\mathbf{u}^-$ сужения $V\rho$ на Ω^+ и Ω^-, соответственно.

1.4. Решение задач (D^+), (D^-), (N^+), (N^-) при помощи потенциала двойного слоя. Пусть $W\chi$ — потенциал двойного слоя с плотностью χ (см. формулы (2.5) и (2.6)).

Если $\mathbf{u}^+ = W\chi^+$, то χ^+ удовлетворяет системе сингулярных интегральных уравнений

$$\chi^+ + 2W_0\chi^+ = 2\varphi^+ \text{ на } UF. \tag{5.3}$$

Решение задачи (D^-) может быть представлено в виде суммы $(W\chi)(x) + \Gamma(x, 0)\mathbf{a} + \operatorname{rot}\Gamma(x, 0)\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — неизвестные постоянные вектора. Тогда тройка (χ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) будет удовлетворять системе уравнений

$$-\chi^- + 2W_0\chi^- + 2\Gamma(\cdot, 0)\mathbf{a} + 2\operatorname{rot}\Gamma(\cdot,)\mathbf{b} = -2\psi^-. \tag{5.4}$$

Представляя решения задач (N^+) и (N^-) в виде $V\chi^\pm$, приходим к следующим системам

$$-\chi^+ + 2W_0{}^*\chi^+ = 2\varphi^+, \tag{5.5}$$

$$\chi^- + 2W_0{}^*\chi^- = 2\psi^-. \tag{5.6}$$

Теорема 3. Пусть $\{\gamma_E\}$ и $\{\beta_Q\}$ удовлетворяют условиям (5.1) и (5.2). Тогда

(i) операторы W_0 и W_0^* ограничены в $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$ и $C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$;

(ii) если $\varphi^\pm \in C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$, то системы (5.3) и (5.4) однозначно разрешимы в $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$ и $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(S) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, соответственно.

Приведем схему доказательства разрешимости этих систем на примере системы (5.3). Пусть $\mathbf{u}^+$ и $\mathbf{u}^-$ — решения задач (D^+) и (D^-) при $\varphi^+ = \varphi^-$. Тогда $-\varphi^+ = V(\mathcal{T}\mathbf{u}^+ - \mathcal{T}\mathbf{u}^-)$. Рассмотрим решение $\mathbf{v}^-$ задачи (N^-), где $\psi = -(\mathcal{T}\mathbf{u}^+ - \mathcal{T}\mathbf{u}^-)$. Поскольку $\mathbf{v} = -(W\mathbf{v}^- - V\mathcal{T}\mathbf{v}^-)$ на Ω^-, то $\frac{1}{2}\mathbf{v}^- + W_0\mathbf{v}^- = V\mathcal{T}\mathbf{v}^- - \varphi^+$ на UF. Следовательно, вектор-функция $\chi^+ = \mathbf{v}^-|_{UF}$ есть решение (5.3). Из теоремы 1 непосредственно вытекает, что $\chi^+ \in C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$.

Для доказательства единственности решения системы (5.3) достаточно установить разрешимость в $C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$ формально сопряженной системы (5.6) при $\psi^- \in C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$. Пусть $\mathbf{v}^-$ — решение задачи (N^-). Остается рассмотреть потенциал простого слоя $V\rho$, который совпадает с $\mathbf{v}^-$ на Ω^- (см. теорему 2), и заметить, что плотность ρ удовлетворяет системе (5.6).

Приведенные выше рассуждения содержат все основные моменты доказательства следующей теоремы о разрешимости систем (5.5) и (5.6)

Теорема 4. Пусть числа $\{\gamma_E\}$ и $\{\beta_Q\}$ удовлетворяют неравенствам (5.1) и (5.2). Тогда существует непрерывный обратный оператор $(I+2W_0^*)^{-1}$ в пространстве $C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$. Система (5.5) разрешима в $C^{0,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$ для всех ψ^+ с нулевым главным вектором и главным моментом.

Для решения рассматриваемых систем интегральных уравнений имеют место теоремы о повышении гладкости и изменении наборов $\{\gamma_E\}$ и $\{\beta_Q\}$, подобные аналогичным теоремам для решений краевых задач [58]. Прежде, чем сформулировать соответствующий результат, введем некоторые функциональные пространства.

Пусть l — целое число, $l \geqslant 1$, $0<\alpha<1$. Заменяя в определении пространства $C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^+)$ градиент на $\nabla_l=\{\partial^l/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}\}$, приходим к определению *пространства* $C^{l,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^+)$. Через $C^{l,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$ обозначим пространство следов на S функций из $C^{l,\alpha}_{\beta,\gamma}(\Omega^+)$ (здесь индекс $+$ можно везде заменить на $-$).

Следующее утверждение дополняет теорему 3.

Теорема 5. Пусть $\{\gamma_E\}$, $\{\beta_Q\}$, $\{\gamma_E^*-l+1\}$ и $\{\beta_Q^*-l+1\}$ удовлетворяют условиям (4.1) и (4.2). Если $\rho^\pm \in C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)\cap$ $\cap C^{l,\alpha}_{\beta^*,\gamma^*}(S)$ и $\chi^\pm \in C^{1,\alpha}_{\beta,\gamma}(S)$ — решение системы (4.3) или (4.4), то $\chi^\pm \in C^{l,\alpha}_{\beta^*,\gamma^*}(S)$.

Аналогичные дополнения могут быть сделаны и к теоремам 2 и 4.

Теория потенциала для краевых задач на плоскости может быть построена с помощью тех же самых рассуждений. Если под S понимать кусочно-гладкую кривую без точек возврата и обозначить через $\{Q\}$ совокупность угловых точек, то формулировки теорем 1—5 останутся без изменений.

Для гармонических и гидродинамических потенциалов теоремы, аналогичные теоремам 1—5, получаются при помощи того же метода.

1.5. Система теории потенциала для смешанной задачи ([47]). Допустим, что на S нет вершин и что компоненты множества $S\setminus UE$ разделены на две группы. Объединения компонент первой и второй групп обозначим через S_1 и S_2. Предположим, что UE — общая граница множеств S_1 и S_2. Рассмотрим краевую задачу для системы Ламе в области Ω^+ со следующими условиями:

$$\mathbf{w}^+|_{S_1}=\varphi^+, \qquad \mathcal{T}(\partial_x, \mathbf{n})\,\mathbf{w}^+|_{S_2}=\psi^+. \qquad (Z^+)$$

Заменяя здесь Ω^+ на Ω^- и добавляя требование $\mathbf{w}(x)=O((1+|x|)^{-1})$, получаем постановку внешней задачи (Z^-).

Обозначим через $\zeta(z)$ тот из корней уравнений $\varkappa\sin^2[\zeta(\pi\pm\pm\pi-\varphi(z))]=(1+\varkappa)^2-\zeta^2\sin^2\varphi(z)$, где $\varkappa=(\lambda+3\mu)/(\lambda+\mu)$, который имеет наименьшую положительную вещественную часть. Всюду в этом пункте будем предполагать, что

$$0<1-\beta+\alpha<\min\{1, \operatorname{Re}\zeta(z)\} \text{ для всех } z\in UE.$$

Пусть $0<\alpha<1$, $\beta\in\mathbf{R}^1$ и $d(x)$ — расстояние от x до UE.

Обозначим через $C_\beta^{1,\alpha}(\Omega^+)$ пространство функций на Ω^+, имеющих конечную норму

$$\|u;\ C_\beta^{1,\alpha}(\Omega^+)\|=\sup_{x,y\in\Omega^+}\frac{|d(x)^\beta\nabla u(x)-d(y)^\beta\nabla u(y)|}{|x-y|^\alpha}+\sup_{x\in\Omega^+}|u(x)|.$$

Аналогично, под $C_\beta^{1,\alpha}(\Omega^-)$ будем понимать пространство функций на Ω^- с конечной нормой

$$\|u;\ C_\beta^{1,\alpha}(\Omega^-)\|=\sup_{x,y\in\Omega^-}\frac{|d(x)^\beta\nabla u(x)-d(y)^\beta\nabla u(y)|}{|x-y|^\alpha}+$$
$$+\sup_{x\in\Omega^-}(1+|x|)|u(x)|.$$

Пусть $C_\beta^{1,\alpha}(S)$ — пространство предельных значений на S_k функций любого из пространств $C_\beta^{1,\alpha}(\Omega^+)$, $C_\beta^{1,\alpha}(\Omega^-)$.

Введем еще пространство $C_\beta^{0,\alpha}(S_k)$ функций на S_k с конечной нормой

$$\|u;\ C_\beta^{0,\alpha}(S_k)\|=\sup_{x,y\in S_k}\frac{|d(x)^\beta u(x)-d(y)^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}+$$
$$+\sup_{x\in S_k}|d(x)^{\beta-\alpha}u(x)|.$$

Пусть еще $\overset{0}{C}{}_\beta^{1,\alpha}(S_k)$ — подпространство пространства $C_\beta^{1,\alpha}(S_k)$, содержащее функции, равные нулю на UE.

Сформулируем вспомогательные утверждения о разрешимости задач (Z^+) и (Z^-).

Теорема 6. Существуют непрерывные обратные операторы задач (Z^+) и (Z^-), отображающие $C_\beta^{1,\alpha}(S_1)\times C_\beta^{0,\alpha}(S_2)$ в $C_\beta^{1,\alpha}(\Omega^+)$ и в $C_\beta^{1,\alpha}(\Omega^-)$ соответственно.

Для определенности ограничимся задачей (Z^-), но все дальнейшее с очевидными изменениями относится и к внутренней задаче. Введем потенциалы $V_k\rho$ и $W_k\chi$, заменяя в определениях потенциалов $V\rho$ и $W\chi$ поверхность S множеством S_k, $k=1, 2$.

Будем искать решение задачи (Z^-) в виде $W_1\chi+V_2\rho$. Тогда вектор-функции ρ и χ, заданные на S_2 и S_1, соответственно, удовлетворяют системе

$$-\frac{1}{2}\chi+W_{10}\chi+V_{20}\rho=\varphi^- \text{ на } S_1, \qquad (5.7)$$

$$\frac{1}{2}\rho+\mathcal{T}W_1\chi+\mathcal{T}V_2\rho=\psi^- \text{ на } S_2.$$

Отметим, что эта система не является интегральной — второе уравнение содержит псевдодифференциальный оператор $\mathcal{T}W_1$ первого порядка. Обратим также внимание на то обстоятельство, что в следующей теореме о непрерывности и обратимости оператора системы (5.7) требуется, чтобы функция χ удовлетворяла условию $\chi=0$ на UE.

Теорема 7. Оператор системы (5.7)

$$\overset{0}{C}{}^{1,\alpha}_{\beta}(S_1)\times C^{0,\alpha}_{\beta}(S_2)\ni(\chi,\rho)\mapsto(\varphi^-,\psi^-)\in C^{1,\alpha}_{\beta}(S_1)\times C^{0,\alpha}_{\beta}(S_2) \qquad (5.8)$$

непрерывен и имеет ограниченный обратный, заданный на $C^{1,\alpha}_{\beta}(S_1)\times C^{0,\alpha}_{\beta}(S_2)$.

Доказательство основано на теореме 6 и следующих соображениях. Обозначим через $\mathfrak{w}^+$ решение задачи (Z^+). Пусть еще $\mathbf{q}$ — решение системы Ламе в Ω^+, удовлетворяющее условиям $\mathbf{q}=-(\mathbf{w}^+-\mathbf{w}^-)$ на S_2, $\mathcal{T}_{\mathbf{q}}=-(\mathcal{T}\mathbf{w}^--\mathcal{T}\mathbf{w}^+)$ на S_1. При помощи формулы Бетти проверяется, что вектор-функции $\chi=\mathbf{q}|_{S_1}$, $\rho=(\mathcal{T}\mathbf{q})|_{S_2}$, удовлетворяют системе (5.7). Из разрешимости сопряженной системы, порожденной задачей (Z^+), в которой множества S_1 и S_2 меняются ролями, выводится единственность решения системы (5.7).

1.6. Представления и оценки обратных операторов интегральных уравнений. Здесь рассматриваются интегральные уравнения теории гармонических потенциалов для поверхностей или кривых, гладких всюду, кроме конечного числа конических точек. Мы следуем работе Н. В. Грачева и автора [16], в которой приведены оценки ядер обратных операторов интегральных уравнений. Из этих оценок, следует, в частности, разрешимость интегрального уравнения задачи Дирихле в пространстве непрерывных функций без дополнительных предположений о границе области. Ранее разрешимость в пространстве C была установлена при условии, что существенная норма интегрального оператора меньше единицы (см. § 1, гл. 4).

Пусть Ω^+ — односвязная область в $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 2$, с компактным замыканием $\overline{\Omega}{}^+$, $S=\partial\Omega^+$, $0\in S$. Допустим, что $S\setminus\{0\}$ — гладкая поверхность, причем Ω^+ вблизи точки 0 совпадает с конусом, вырезающим на единичной сфере S^{n-1} область G^+ множества Ω^- и G^- определим равенствами $\Omega^-=\mathbf{R}^n\setminus\overline{\Omega}{}^+$, $G^-=S^{n-1}\setminus\overline{G}{}^+$.

Обозначим через T удвоенное прямое значение гармонического потенциала двойного слоя и через T^* — оператор, сопряженный к T. Пусть еще $C^\infty(S)$ — пространство сужений на S функций из $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $(\,,\,)$ — скалярное произведение в $L_2(S)$ и $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S.

Теорема 8. Пусть D^+ и D^- (N^+ и N^-) — обратные операторы задачи Дирихле в Ω^+ и Ω^- (задачи Неймана в Ω^+ и Ω^-), причем оператор N^+ определен на функциях, ортогональных единице на S, и $(N^+\psi^+, 1)=0$.

1) Если $\varphi \in C^\infty(S)$, то

$$(I+T)^{-1}\varphi=\frac{1}{2}\left(I-N^-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}D^+\right)\varphi, \quad (I+T^*)^{-1}\varphi=\frac{1}{2}\left(I-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}D^+N^-\right)\varphi.$$

2) Если $\varphi, \psi \in C^\infty(S)$, то решения уравнений

$$(I-T)\chi=\varphi, \quad (\varphi, \sigma_0)=0 \text{ и } (I-T^*)\rho=\psi, \quad (\psi, 1)=0,$$

где $\sigma_0=\partial(D^-1)/\partial\mathbf{n}$, могут быть получены с помощью формул

$$\chi=\frac{1}{2}\left(I=N^+\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}D^-\right)\varphi+c \text{ и } \rho=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}D^-N^+\right)\psi+c\sigma_0.$$

В дальнейшем $\delta(\delta+n-2)$ и $\gamma(\gamma+n-2)$ — первые собственные числа задачи Дирихле в G^+ и Неймана в G^- для оператора Бельтрами, $\delta, \gamma>0$.

Лемма 1 (см. [10], [56]). Для ядра $P^+(x, \xi)$ оператора D^+ имеют место оценки

$$|D_x^\alpha D_\xi^\sigma P^+(x, \xi)|\leqslant c|x|^{\delta-|\alpha|}/|\xi|^{n-1+\delta+|\sigma|} \text{ при } |x|<|\xi|/2,$$

$$|D_x^\alpha D_\xi^\sigma P^+(x, \xi)|\leqslant c|x-\xi|^{1-n-|\alpha|-|\sigma|} \text{ при } |\xi|/2<|x|<2|\xi|,$$

$$|D_x^\alpha D_\xi^\sigma P^+(x, \xi)|\leqslant c|\xi|^{\delta-1-|\sigma|}/|x|^{n-2+\delta+|\alpha|} \text{ при } |x|>2|\xi|.$$

Аналогичная информация о ядре $N^-(x, \xi)$ оператора N^- приведена в следующей лемме (см. [56]).

Лемма 2. Пусть шар B_R содержит область $\overline{\Omega^+}$. Тогда в $B_R\setminus\overline{\Omega^+}$ для ядра $N^-(x, \zeta)$ выполнены неравенства

$$|D_x^\alpha D_\xi^\sigma(N^-(x, \xi)-N^-(0, \xi))|\leqslant c|x|^{\gamma-|\alpha|}/|\xi|^{n-2-\gamma+|\sigma|}$$

$$\text{при } |x|<|\xi|/2,$$

$$|D_x^\alpha D_\xi^\alpha N^-(x, \xi)|\leqslant c|x-\xi|^{2-n-|\alpha|-|\sigma|} \text{ при } |\xi|/2<|x|<2|\xi|,$$

$$|D_x^\alpha D_\xi^\sigma(N^-(x, \xi)-N^-(x, 0))|\leqslant c|\xi|^{\gamma-|\sigma|}/|x|^{n-2+\gamma+|\alpha|}$$

$$\text{при } |x|>2|\xi|.$$

Здесь $N^-(0, \eta)=N^-(\eta, 0)=c_0|\eta|^{2-n}+c_1+R(\eta)$, где $|D_\eta^\alpha R(\eta)|\leqslant \leqslant c|\eta|^{\gamma-|\alpha|}$.

Теорема 8 в сочетании со сформулированными только что оценками функций P^+ и N^- позволяет получить точечные оценки ядер упомянутых в ней обратных операторов. Ограничимся формулировкой соответствующего результата для $(I+T)^{-1}$.

Теорема 9. Пусть $\mu=\min\{\delta, \gamma, 1\}$. Тогда $(I+T)^{-1}=I+\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$, где $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — интегральные операторы на S, ядра которых удовлетворяют при $\delta\neq\gamma$ неравенствам

$$|M_1(x,y)|\leqslant c(1+|y|^{\mu-1}), \tag{5.9}$$

$$M_2(x, y) | \leqslant \begin{cases} c|y|^{1-n}(|x|/|y|)^{\mu} \text{ при } |x|<|y|/2, \\ c|y|^{-1}|x-y|^{2-n} \text{ при } |y|/2<|x|<2|y|, \\ c|y|^{-1}|x|^{2-n}(|y|/|x|)^{\mu} \text{ при } |x|>2|y|. \end{cases} \qquad (5.10)$$

В случае $\delta=\gamma$ в правую часть (5.9) нужно добавить слагаемое $v|y|^{\mu-1}|\log|y||$, а в правую часть (5.10) сомножитель $(1+|\log(|x|/|y|)|)$.

Из теоремы 9 вытекает следующий результат.

Теорема 10. 1) Пусть $1\leqslant p<\infty$, $(1-n)/p<\beta<\mu+n-2+(1-n)/p$, либо $p=\infty$, $\beta\in[0, \mu+n-2)$. Тогда оператор $(I+T)^{-1}$ непрерывен в $L_{p,\beta}(S)$, где $L_{p,\beta}(S)$ — пространство функций с конечной нормой $\|u; L_{p,\beta}(S)\|=\||x|^{\beta}u; L_p(S)\|$.

2) Пусть $0<\alpha<\mu$. Тогда оператор $(I+T)^{-1}$ непрерывен в пространстве Гёльдера $C^{0,\alpha}(S)$.

Все сказанное в настоящем разделе относится и к системам интегральных уравнений (2.12), (2.36) теории упругости и гидродинамики. При этом роль чисел δ и γ играют вещественные части собственных чисел некоторых операторных пучков краевых задач в областях G^+ и G^- на единичной сфере. Положительность δ доказана в [57], а положительность γ установлена в [29] при дополнительном требовании явного задания поверхности S вблизи вершины конуса в декартовой системе координат. Поэтому вторая часть теоремы, утверждающая разрешимость в $C^{0,\alpha}(S)$ интегральных уравнений системы Ламе и Стокса, доказана при только что сформулированном дополнительном предположении.

Аналогичные представления и оценки, с точностью до очевидных изменений, имеют место и при $n=2$ в случае кусочно-гладкой кривой без точек возврата.

1.7. Радиус Фредгольма операторов типа потенциала двойного слоя на кусочно-гладких поверхностях. В настоящем пункте приводится формула для радиуса Фредгольма интегральных операторов теории n-мерных гармонических потенциалов в областях с ребрами на границе, действующих в некоторых весовых пространствах типа Гёльдера [15]. Этот результат в существенном следует из теорем об операторах некоторых вспомогательных краевых задач. Прямым методом радиус Фредгольма тех же операторов ($n=2$) в пространствах C и C^* вычислен в [178], а в L_p — в [101] (см. гл. 4, § 1).

Пусть на S выделено замкнутое подмножество $\{E\}$, которое является гладким (класса C^{∞}) $(n-2)$-мерным подмногообразием $\mathbf{R}^n$ и что $S\setminus\{E\}$ также есть гладкое подмногообразие $\mathbf{R}^n$. Предположим еще, что в окрестности каждой точки из $\{E\}$ множество $\overline{\Omega}^+$ диффеоморфно n-мерному двугранному углу. Тем самым для каждой точки $z\in\{E\}$ определены два касательных $(n-1)$-мерных полупространства $\Gamma_1(z)$ и $\Gamma_2(z)$. Пусть $\varphi(z)\in(0, 2\pi)$ — величина угла между $\Gamma_1(z)$ и $\Gamma_2(z)$ со стороны множества Ω^+.

Определим основные функциональные пространства, используемые в дальнейшем. Пусть $0<\alpha<1$, l — целое число, $d(x)$ — расстояние от x до $\{E\}$.

Если $l\geqslant 1$, $0<\beta<l+\alpha$, то под $C_{\beta}^{l,\alpha}(\Omega^+)$ будем понимать пространство функций в Ω^+ с конечной нормой

$$\| u;\, C_{\beta}^{l,\alpha}(\Omega^+)\| = \sup_{x,y\in\Omega^+} |x-y|^{-\alpha}\, |d(x)^{\beta}\nabla_l u(x) - d(y)^{\beta}\nabla_l u(y)| + \\ + \| u;\, C^{l+\alpha-\beta}(\Omega^+)\|, \tag{5.11}$$

где $\nabla_l = \{\partial^l/\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\}$, $C^{\rho}(\Omega^+)$ — пространство Гёльдера.

Аналогично вводится **пространство** $C_{\beta}^{l,\alpha}(\Omega^-)$, норма в котором получается заменой Ω^+ на Ω^- в (5.11) и добавлением в правую часть слагаемого $\sup\limits_{x\in\Omega^-}|x|^{n-2}|u(x)|$. Пусть $C_{\beta}^{l,\alpha}(S)$ — пространство предельных значений на $S\setminus\{E\}$ функций любого из пространств $C_{\beta}^{l,\alpha}(\Omega^+)$, $C_{\beta}^{l,\alpha}(\Omega^-)$.

При $l\geqslant 0$, $\beta\geqslant l+\alpha$ через $C_{\beta}^{l,\alpha}(S)$ обозначим пространство функций на $S\setminus\{E\}$ с конечной нормой

$$\| u;\, C_{\beta}^{l,\alpha}(S)\| =$$

$$= \sup_{x,y\in S\setminus\{E\}} \frac{|d(x)^{\beta}\nabla_l u(x) - d(y)^{\beta}\nabla_l u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} + \sup_{x\in S\setminus\{E\}} d(x)^{\beta-l-\alpha}|u(x)|.$$

Теорема 11. Пусть $\alpha\in(0, 1)$, $0<1+\alpha-\beta-1$, а l — неотрицательное целое число и пусть

$$\varkappa = \min_{z\in\{E\}} |\sin(\pi(1+\alpha-\beta))/\sin((\pi-\varphi(z))(1+\alpha-\beta))|$$

(если $1+\alpha-\beta<\pi/(\pi+|\pi-\varphi(z)|)$ для всех $z\in\{E\}$, то $\varkappa>1$; в противном случае $\varkappa\leqslant 1$).

Тогда радиусы Фредгольма операторов T^* и T в пространствах $C_{\beta+l}^{l,\alpha}(S)$ и $C_{\beta+l}^{l+1,\alpha}(S)$ соответственно равны $\varkappa$.

§ 2. Асимптотика решений интегральных уравнений вблизи угловых точек

В настоящем параграфе рассматриваются интегральные уравнения теории гармонических потенциалов. Начнем с вывода асимптотики решений вблизи угловых точек контура. Приведем также формулы для коэффициентов в асимптотических формулах. Как и в § 1, информация о решениях интегральных уравнений выводится из известных результатов об асимптотике решений внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана [30], [47], [49], [52]. Будем следовать работе [25]. В заключение параграфа мы останавливаемся на асимптотике решения граничной системы смешанной задачи для уравнения Лапласа [24].

Пусть S — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая с конечным числом угловых точек, причем все углы отличны от 0 и 2π. Через $\Omega^+(\Omega^-)$ обозначается область, расположенная внутри (вне) S. Сначала будем искать асимптотику для решения χ^+ интегрального уравнения внутренней задачи Дирихле, которое в случае кусочно-гладкого контура S совпадает с (1.13) вне угловых точек. Рассмотрим решения $u^\pm$ задач Дирихле для уравнения Лапласа в областях $\Omega^\pm$, отвечающие одной и той же функции φ, заданной на S (см. гл. 1, пп. 2.1—2.4, где $\varphi^+=\varphi^-=$ $=\varphi$). Как известно,

$$\varphi(x)=\int\limits_S\left(\frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}_\xi}-\frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right)\mathscr{E}(x,\ \xi)\,d^\xi S+u^-(\infty), \tag{5.25}$$

если x лежит на S вне множества угловых точек.

Введем решение v^- внешней задачи Неймана

$$\begin{gathered}\Delta v^-=0 \text{ в } \Omega^-,\quad \frac{\partial v^-}{\partial \mathbf{n}}=\frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}}-\frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}} \text{ на } S,\\ v^-(x)=o(1) \text{ при } |x|\to\infty.\end{gathered} \tag{5.26}$$

Из формул (1.3) и (1.8) для Ω^- вытекает, что

$$\frac{1}{2}v^-+W_0v^-=\int\limits_S\left(\frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}}-\frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathscr{E}(x,\ \xi)\,d_\xi S.$$

Отсюда и из (5.25) находим, что функция $v^-+u^-(\infty)$ удовлетворяет уравнению (1.13), то есть совпадает с χ^+.

Для простоты предположим, что вблизи одной из угловых точек контура S область Ω^+ совпадает с сектором $\{x_1+ix_2=$ $=re^{i\theta}$: $0<r<\delta$, $0<\theta<\alpha\}$. Пусть сначала $0<\alpha<\pi$. При $r\to 0$ имеем

$$\begin{gathered}u^+(x)=\varphi(0)+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0)\,x_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0)\,x_2+O(r^{1+\varepsilon}),\quad \varepsilon>0,\quad x\in\Omega^+;\\ u^-(x)=\varphi(0)+c_1r^{\pi/(2\pi-\alpha)}\sin\frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0)\,x_1+\\ +\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0)\,x_2+O(r^{1+\varepsilon}),\quad x\in\Omega^-\end{gathered}$$

(см. [30]). Так как эти равенства можно дифференцировать, то

$$\frac{\partial u^-}{\partial n}-\frac{\partial u^+}{\partial n}=\frac{\pi c_1}{2\pi-\alpha}\,r^{(\alpha-\pi)/(2\pi-\alpha)}+O(r^\varepsilon),\quad x\in S\setminus\{0\}.$$

Поэтому из (5.26) следует, что при $r\to 0$

$$\begin{gathered}v^-(x)-v^-(0)\sim c_0r^{\pi/(2\pi-\alpha)}\cos\frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha}+\\ +c_1r^{\pi/(2\pi-\alpha)}\sin\frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha},\quad x\in\Omega^-.\end{gathered} \tag{5.27}$$

Таким образом, в случае $0<\alpha<\pi$

$$\chi^+(x)-\chi^+(0)\sim\pm c_0 r^{\pi/(2\pi-\alpha)},$$

где плюс соответствует лучу $\theta=0$, а минус — лучу $\theta=2\pi-\alpha$.

Постоянная c_0 определяется методом, предложенным в [47], [52]. Обозначим через η функцию из $C^\infty(0,\infty)$ такую, что $\eta(r)=1$ для $r<\delta$ и $\eta(r)=0$ для $r>2\delta$. Положим

$$w(x)=v(x)-v(0)-c_1\eta(r)\,r^{\pi/(2\pi-\alpha)}\sin\frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha}.$$

Согласно (5.26), эта функция является решением задачи

$$\Delta w=c_1\Delta\left(\eta(r)\,r^{\pi/(2\pi-\alpha)}\sin\frac{\pi\theta}{\pi-\alpha}\right)\text{ в }\Omega^-,$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}=\frac{\partial u^-}{\partial n}-\frac{\partial u^+}{\partial n}-c_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\eta(r)\,r^{\pi/(2\pi-\alpha)}\sin\frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha}\right)\text{ на }S.$$

В силу (5.27), при $r\to0$

$$w(x)\sim c_0 r^{\pi/(2\pi-\alpha)}\sin\frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha},\quad x\in\Omega^-.$$

Поэтому (см. [52]) справедливо равенство

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Omega^-}\zeta^- c_1\Delta\left(\eta(r)\,r^{\pi/(2\pi-\alpha)}\sin\frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha}\right)dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_S\zeta^-\left\{\frac{\partial u^-}{\partial n}-\frac{\partial u^+}{\partial n}-c_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\eta(r)\,r^{\pi/(2\pi-\alpha)}\sin\frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha}\right)\right\}dS,$$

где ζ^- — непрерывная вне любой окрестности начала, гармоническая в Ω^- функция с нулевой нормальной производной на S (вне угловых точек), которая имеет асимптотику

$$\zeta^-(x)\sim r^{-\pi/(2\pi-\alpha)}\cos\frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha},\quad r\to0.$$

Отсюда после упрощений получаем

$$c_0=\frac{-1}{\pi}\int\limits_S\zeta^-\frac{\partial u^+}{\partial n}\,dS.\tag{5.28}$$

Построим гармоническое продолжение Z^+ функции ζ^- на область Ω^+ с сохранением непрерывности на $S\setminus\{0\}$. Тогда

$$c_0=\frac{-1}{\pi}\int\limits_S[\varphi-\varphi(0)]\frac{\partial Z^+}{\partial n}\,dS.$$

По аналогичной схеме находим, что при $\pi<\alpha<2\pi$ имеет место асимптотическая формула

$$\chi^+(x)-\chi^+(0)\sim\operatorname{tg}\frac{\pi^2}{\alpha}D_1 r^{\pi/\alpha},$$

где
$$D_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_S[\varphi-\varphi(0)]\frac{d\zeta^+}{\partial n}dS. \qquad (5.29)$$

Здесь ζ^+ — гармоническая в Ω^+ функция, равная нулю на $S\setminus\{0\}$, для которой $\zeta^+\sim r^{-\pi/\alpha}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}$.

Перейдем к асимптотике решения ρ^- для интегрального уравнения внешней задачи Неймана. Это уравнение совпадает с (1.16) вне угловых точек контура S и является сопряженным уравнению для χ^+. Асимптотика для ρ^- выводится из равенства
$$\rho^-(x)=\frac{\partial v^-}{\partial n}-\frac{\partial v^+}{\partial n},$$
где v^- — решение исходной задачи Неймана в Ω^-, а v^+ — решение задачи Дирихле:
$$\Delta v^+=0 \text{ в } \Omega^+, \quad v^+=v^- \text{ на } S.$$

Если $0<\alpha<\pi$, то асимптотика имеет вид
$$\rho^-\sim\pm\pi/(2\pi-\alpha)\,c_2r^{(\alpha-\pi)/(2\pi-\alpha)}\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2(2\pi-\alpha)},$$
где плюс соответствует лучу $\theta=\alpha$, а минус — лучу $\theta=0$. Постоянная c_2 определяется согласно [52]:
$$c_2=\frac{-1}{\pi}\int\limits_S\zeta^-\psi^-dS,$$
где ζ^- — та же функция, что в (5.28).

Для $\pi<\alpha<2\pi$ справедливы формулы
$$\rho^-\sim\frac{\pi}{\alpha}D_2r^{(\pi-\alpha)/\alpha}, \quad D_2=\frac{1}{\pi}\int\limits_S[v^--v^-(0)]\frac{\partial\zeta^+}{\partial n}dS,$$
где ζ^+ — та же функция, что и в (5.29). Для D_2 в [25] получено еще одно представление:
$$D_2=\frac{1}{\pi}\int\limits_S Z^-\psi^-dS.$$

Здесь Z^- — решение краевой задачи
$$\Delta Z^-=0 \text{ в } \Omega^-; \quad \frac{\partial Z^-}{\partial n}=\frac{\partial\zeta^+}{\partial n} \text{ на } S\setminus\{0\},$$
исчезающее на бесконечности и имеющее вблизи начала координат асимптотику
$$Z^-(x)=r^{-\pi/\alpha}\frac{\sin\alpha^{-1}\pi(\theta-\pi)}{\cos\alpha^{-2}\pi^2}+O(1).$$

Асимптотика решений граничных интегральных уравнений для задач Дирихле и Неймана найдена (А. В. Левин, В. Г. Мазья) и в случае трехмерных областей с коническими точками на границе. В частности, для прямого кругового конуса с углом α при вершине справедливы следующие результаты.

Пусть (r, φ, θ) — сферические координаты, полюсом и осью которых являются вершина и ось конуса. Если $0<\alpha<\pi$, то при $r\to 0$ имеем

$$\chi^+(r, \varphi) = c_0 + r^\sigma (c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi) + O(r^{1+\varepsilon}),$$

$$\rho^-(r, \varphi) = r^{\sigma-1} (D_1 \cos\varphi + D_2 \sin\varphi) + O(1).$$

Здесь χ^+ — решение граничного интегрального уравнения внутренней задачи Дирихле, а ρ^- — внешней задачи Неймана; σ — наименьший положительный корень уравнения $P_\sigma^0(-\cos(\alpha/2)) = 0$, где P_s^m — обобщенная функция Лежандра первого рода.

Для $\pi<\alpha<2\pi$ асимптотика имеет вид

$$\chi^+(r, \varphi) = c_3 + c_4 r^\lambda + O(r^{1+\varepsilon}),$$

$$\rho^-(r, \varphi) = D_3 r^{\lambda-1} + O(1),$$

где λ — наименьший положительный корень уравнения

$$(P_\lambda^1)'(\cos(\alpha/2)) = 0.$$

Отметим, что в обоих случаях $\alpha<\pi$ и $\alpha>\pi$ градиент решения χ^+ и само решение ρ^- обращаются в угловой или конической точке в бесконечность. Отсутствие особенности решения соответствующей краевой задачи при $\alpha<\pi$ легко объясняется видом асимптотики функции χ^+ и ρ^-.

Изложенная методика отыскания асимптотики решений граничных интегральных уравнений теории гармонических потенциалов применима и к другим уравнениям. Так в работах [22], [23] найдена асимптотика решений систем сингулярных интегральных уравнений основных задач плоской теории упругости, а в [24] получена асимптотика решений граничных уравнений для плоской задачи Зарембы (смешанной задачи) теории гармонических потенциалов.

Рассмотрим *внешнюю задачу Зарембы*:

$$\Delta u^- = 0 \text{ в } \Omega^-;\ u^- = \varphi^- \text{ на } S_1;\ \partial u^-/\partial n = \psi^- \text{ на } S_2,$$

где S_1 — объединение открытых дуг $\widehat{p_{2j-1}p_{2j}}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $S_2 = S \setminus S_1$. Будем искать ограниченное решение сформулированной краевой задачи в виде суммы двух потенциалов и неизвестной константы:

$$u^-(x) = \int_{S_1} \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \mathscr{E}(x, \xi)\, d_\xi S + \int_{S_2} \rho(\xi) \mathscr{E}(x, \xi)\, d_\xi S + A.$$

Тогда χ, ρ, A удовлетворяют системе уравнений

$$\chi(x) - 2\int_{S_1} \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \mathscr{E}(x, \xi)\, d_\xi S - 2\int_{S_2} \rho(\xi) \mathscr{E}(x, \xi)\, d_\xi S - 2A =$$

$$= -2\varphi^-(x) \text{ на } S_1;$$

$$\rho(x)+2\int\limits_{S_1}\chi(\xi)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_\xi}\mathscr{E}(x,\xi)\,d_\xi S+2\int\limits_{S_2}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_x}\mathscr{E}(x,\xi)\,d_\xi S=$$

$$=2\psi^-(x)\ \text{на}\ S_2.$$

Так же, как в случае системы Ламе (ср. с п. 1.5), неизвестный вектор (χ, ρ, A) выражается через решения некоторых вспомогательных краевых задач. Из асимптотики решений этих задач вблиз точки p_j следует, что

$$\chi\sim Cr^{\pi/[2(\pi+|\pi-\alpha_j|)]};\quad \rho\sim Dr^{\pi/[2(\pi+|\pi-\alpha_j|)]-1}.$$

В работах [122], [124] развит другой подход к вычислению асимптотики решений интегральных уравнений теории потенциала на плоском кусочно-гладком контуре без точек возврата. В основе метода — решение модельного интегрального уравнения на сторонах угла при помощи преобразования Меллина (ср. [40], [104]).

АННОТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Изложение классического метода потенциалов простого и двойного слоя для гармонических функций в областях с гладкими границами имеется в книгах [12], [17], [67], [89], [148]. Для эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами метод потенциалов применяется в книге [166].

Книги [7], [36], [80], [92] посвящены интегральным уравнениям, используемым для решения задач механики деформируемого твердого тела и, в частности, теории упругости. Теория гидродинамических потенциалов и граничных уравнений для системы Стокса отражены в книгах [3], [37].

Начало исследованиям граничных интегральных уравнений в случае негладкой границы было положено работами [118], [178], [190]. Основные результаты относительно разрешимости граничных уравнений теории потенциала в пространстве C на нерегулярных кривых и поверхностях приведены в книгах [4], [18], [156]. В [18] граничные интегральные операторы на плоских кривых изучены также в пространстве L_p.

Для липшицевых поверхностей L_p-теория граничных интегральных уравнений развита в работах [116], [184] в случае гармонических потенциалов, а в [136], [149] — для систем Ламе и Стокса. Граничные уравнения в пространстве L_p на поверхностях класса C^1 исследованы в статьях [119], [138]. С другими подходами к изучению краевых задач в липшицевых областях можно познакомиться, например, по статьям [123], [127].

Работы [15], [16], [22]—[25], [43], [45], [60], [61], [164] посвящены различным аспектам метода, описанного в главе 4 и основанного на использовании теории краевых задач для исследования граничных интегральных уравнений на кусочно-гладких многообразиях.

Кратко коснемся библиографии по применению метода потенциалов к различным краевым задачам. Граничные интегральные уравнения теории бигармонических потенциалов рассмотрены в работах [39], [64], [71], [77]—[80], [119]. С приложениями метода граничных уравнений к краевым задачам для уравнения Гельмгольца можно познакомиться по работам [82], [107], [109], [125], [151]. Интегральные уравнения теории поверхностных волн исследованы в статьях [8], [43], [147]. Обширная литература посвящена граничным уравнениям теории тепловых потенциалов [27], [64], [72], [90], [130]—[134], [137], [185], [186] и их обобщений на параболические уравнения и системы

[63], [87], [103]. Метод потенциалов для волнового уравнения развит в работе [68].

Классические результаты по численным методам решения граничных интегральных уравнений приведены в книге [28]. Представление о современном состоянии данного вопроса можно почерпнуть, например, из книг [111], [113], [126], где уделено также много внимания техническим приложениям граничных интегральных уравнений. Значительное число работ посвящено вопросам сходимости численных алгоритмов решения граничных уравнений (см., например, [146], [188], [189]).

История метода граничных интегральных уравнений достаточно полно отражена в работах [86], [111], [126], [162].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аткинсон Ф. В.*, Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах. Мат. сб., 1951, *28*, № 1, 3—14
2. *Базалий Б. В., Шелепов В. Ю.*, О спектре потенциала двойного слоя на кривой ограниченного вращения. В кн.: Граничные задачи для дифференциальных уравнений, Киев: Наукова думка, 1980, 13—30
3. *Белоносов С. М., Черноус К. А.*, Краевые задачи для уравнений Навье—Стокса. М.: Наука, 1985, 311 с.
4. *Бураго Ю. Д., Мазья В. Г.*, Многомерная теория потенциалов и решение краевых задач для областей с нерегулярными границами. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, 1967, *3*, 5—86
5. —, —, *Сапожникова В. Д.*, О потенциале двойного слоя для нерегулярных областей. Докл. АН СССР, 1962, *147*, № 3, 523—525
6. —, —, —, К теории потенциалов двойного и простого слоя для областей с нерегулярными границами. В сб.: Проблемы математического анализа. Краевые задачи и интегральные уравнения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966, 3—44
7. *Бурчуладзе Т. В., Гегелиа Т. Г.*, Развитие метода потенциала в теории упругости. Тбилиси: Мецниереба, 1985, 226 с.
8. *Вайнберг Б. Р., Мазья В. Г.*, К задаче о движении погруженного в жидкость тела. Тр. Моск. мат. об-ва, 1973, *28*, 35—56
9. *Векуа И. Н.*, Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л.: Гостехиздат, 1948, 296 с.
10. *Вержбинский Г. М., Мазья В. Г.*, О замыкании в L_p оператора задачи Дирихле в области с коническими точками. Изв. вузов. Мат., 1974, № 6, 8—19
11. *Верюжский Ю. В.*, Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. Киев: Вища школа, 1978, 183 с.
12. *Владимиров В. С.*, Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976, 527 с.
13. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.*, Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958, 439 с.
14. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.*, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. Успехи мат. наук, 1957, *12*, № 2, 43—118
15. *Грачев Н. В., Мазья В. Г.*, О радиусе Фредгольма для операторов типа потенциала двойного слоя на кусочно-гладких границах. Вестн. Ленингр. ун-та. Мат., мех., 1986, № 4, 60—64
16. —, —, Представления и оценки обратных операторов интегральных уравнений теории потенциала для поверхностей с коническими точками. Сообщ. АН ГССР (в печати)
17. *Гюнтер Н. М.*, Теория потенциала и ее применение к задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953, 415 с.
18. *Данилюк И. И.*, Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975, 295 с.

19. —, *Шелепов В. Ю.*, Об ограниченности в L_p сингулярного оператора с ядром Коши вдоль кривой ограниченного вращения. Докл. АН СССР, 1967, *174*, № 3, 514—517
20. *Егоров Ю. В.*, Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: Наука, 1984, 360 с.
21. *Зайончковский В., Солонников В. А.*, О задаче Неймана для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами. Зап. научн. семин. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, 1983, *126*, 7—48
22. *Заргарян С. С.*, Об асимптотике решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной уравнениями Ламе, в окрестности угловых точек контура. Докл. АН АрмССР, 1983, *77*, № 1, 30—35
23. —, Об особенностях системы сингулярных интегральных уравнений плоской теории упругости при заданных на границе напряжениях. Докл. АН Арм. ССР, 1983, *77*, № 4, 167—172
24. —, *Мазья В. Г.*, Об особенностях решений системы интегральных уравнений теории потенциала для задачи Зарембы. Вестн. Ленингр. ун-та. Мат., мех., 1983, № 1, 43—48
25. —, —, Об асимптотике решений интегральных уравненнй теории потенциала в окрестности угловых точек контура. Прикл. мат. и мех., 1984, *48*, № 1, 169—174
26. *Игумнов Л. А., Хуторянский Н. М.*, Численное исследование полей перемещений и напряжений в вязкоупругой среде от сосредоточенных импульсных источников. В сб.: Прикладные пробл. прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Горький: Изд-во ГГУ, 1983, 42—51
27. *Камынин Л. И.*, О гладкости тепловых потенциалов. I, II. Дифференц. уравнения, 1965, *1*, № 6, 799—839; 1966, *2*, № 5, 647—687
28. *Канторович Л. В., Крылов В. И.*, Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962, 695 с.
29. *Козлов В. А., Мазья В. Г.*, Спектральные свойства операторных пучков, порождаемых эллиптическими краевыми задачами в конусе. Функц. анализ и его прил. (в печати)
30. *Кондратьев В. А.*, Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с конническими или угловыми точками. Тр. Моск. мат. об-ва, 1967, *16*, 209—292
31. *Крал И.*, О потенциале двойного слоя в многомерном пространстве. Докл. АН СССР, 1964, *159*, № 6, 1218—1220
32. *Кресин Г. И.*, О спектральном радиусе матричного оператора типа теплового потенциала двойного слоя. Тезисы докладов научно-технической конференции молодых ученых и специалистов, Николаев, 1981. Николаев: Изд-во НКИ, 1981, 9—11
33. —, *Мазья В. Г.*, О существенной норме оператора типа потенциала двойного слоя в пространстве C_m. Докл. АН СССР, 1979, *246*, № 2, 272—275
34. —, —, О существенной норме оператора типа потенциала двойиого слоя в пространстве $\mathring{C}_m$. В кн.: Функциональный анализ и вычислительная математика. Алма-Ата: Изд-во АН Каз. ССР, 1981, 131—165
35. *Купрадзе В. Д.*, Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963, 472 с.
36. —, *Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.*, Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976, 663 с.
37. *Ладыженская О. А.*, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970, 288 с.
38. —, *Солонников В. А., Уральцева Н. Н.*, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
39. *Лопатинский Я. Б.*, Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. мат. ж., 1953, *5*, № 2, 123—151
40. —, Об одном типе сингулярных интегральных уравнений. Теор. и прикл. мат., 1963, вып. 2, 53—57

41. *Мазья В. Г.,* О вырождающейся задаче с косой производной. Мат. сб. 1972, *87,* № 4, 417—454.
42. —, К стационарной задаче о малых колебаниях жидкости в присутствии погруженного тела. Тр. семинара С. Л. Соболева, 1977, № 2, 57—79
43. —, Интегральные уравнения теории потенциала в областях с кусочно-гладкой границей. Успехи мат. наук, 1981, *36,* № 4, 229—230
44. —, О разрешимости интегральных уравнений классической теории упругости в областях с кусочно-гладкой границей. Тезисы докладов школы—конференции по общей механике, теории упругости, Телави, 1981. Тбилиси: Мецниереба, 1981, 55—56
45. —, Теория потенциала для системы Ламе в областях с кусочно гладкой границей. Тр. Всесоюзного симпозиума в Тбилиси 21—23 апреля 1982 г. Тбилиси: Мецниереба, 1986, 123—129
46. —, *Панеях Б. П.,* Вырождающиеся эллиптические псевдодифференциальные операторы и задача с косой производной. Тр. Моск. мат. об-ва, 1974, *31,* 237—295
47. —, *Пламеневский Б. А.,* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в конусе. Докл. АН СССР, 1974, *219,* № 2, 286—290
48. —, —, О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка в области с ребрами. Вестн. Ленингр. ун-та. Мат. мех., 1975, № 1, 102—108
49. —, —, О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в конусе. Зап. науч. семин. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, 1975, *52,* 110—127
50. —, —, О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка в области с ребрами. Вестн. Ленингр. ун-та. Мат., мех., 1975, № 1, 102—108
51. —, —, Эллиптические краевые задачи на многообразиях с особенностями. В кн.: Пробл. мат. анализа, вып. 6. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977, 85—142
52. —, —, О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. Math. Nachr., 1977, *76,* 29—60
53. —, —, L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами. Тр. Моск. мат. об-ва, 1978, *37,* 49—93
54. —, —, Оценки функций Грина и шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в двугранном угле. Сиб. мат. ж., 1978, *19,* № 5, 1065—1082
55. —, —, Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе. Тр. семинара С. Л. Соболева, 1978, № 2, 69—102
56. —, —, Об асимптотике фундаментальных решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. Пробл. мат. анализа, 1979, вып. 7, 100—145
57. —, —, О свойствах решений трехмерных задач теории упругости и гидродинамики в областях с изолированными особыми точками. Динамика сплошной среды, 1981, № 50, 99—120
58. —, —, Первая краевая задача для классических уравнений математической физики в областях с кусочно-гладкой границей. I, II. Zeitschr. Anal. Andwendungen, 1983, *2,* № 4, 335—359; № 6, 523—551
59. —, *Сапожникова В. Д.,* Замечание о регуляризации сингулярной системы изотропной теории упругости. Вестн. Ленингр. ун-та, 1964, № 7, 165—167; поправка Вестн. Ленингр. ун-та, 1977, № 19, 160
60. —, *Соловьев А. А.,* Асимптотика решения интегрального уравнения задачи Неймана в плоской области с остриями на границе. Сообщ. АН ГССР (в печати)
61. —, —, Разрешимость интегрального уравнения задачи Дирихле в плоской области с остриями на границе. Докл. АН СССР (в печати)
62. *Малютов М. Б.,* О краевой задаче Пуанкаре. Тр. Моск. мат. об-ва, 1969, *20,* 173—203

63. *Михайлов В. П.,* Решение смешанной задачи для параболической системы методом потенциалов. Докл. АН СССР, 1960, *132,* № 2, 291—294
64. *Михлин С. Г.,* Интегральные уравнения и их приложения. М.: Гостехиздат, 1949, 380 с.
65. —, Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959, 232 с.
66. —, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962, 254 с.
67. —, Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977, 431 с.
68. —, *Морозов Н. Ф., Паукшто М. В.,* Граничные интегральные уравнения и задачи теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ 1986, 87 с.
69. —, *Сапожникова В. Д.,* Потенциалы волнового уравнения. I, II. Изв. вузов. Мат., 1977, № 9, 48—64; № 10, 100—108
70. *Мусхелишвили Н. И.,* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
71. —, Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 511 с.
72. *Мюнтц Г. М.,* Интегральные уравнения. Л.-М.: ГТТИ, 1934, 330 с.
73. *Натрошвили Д. Г.,* О фундаментальных матрицах уравнений установившихся колебаний и псевдоколебаний анизотропной теории упругости. Сообщ. АН ГССР, 1979, *96,* № 1, 49—53
74. —, Об одном интегральном уравнении первого рода. Сообщ. АН ГССР, 1981, *102,* № 3, 565—568
75. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1943, *7,* № 3, 147—163
76. *Новацкий В.,* Теория упругости. М.: Мир, 1975, 872 с.
77. *Панич О. И.,* О потенциалах для полигармонического уравнения четвертого порядка. Мат. сб., 1960, *50,* № 3, 335—368
78. —, Решение основной краевой задачи для полигармонического уравнения четвертого порядка методом потенциалов. Изв. вузов. Мат. 1961, № 3, 80—90; № 4, 66—77, № 6, 89—96; 1962, № 1, 118—129.
79. —, Эквивалентная регуляризация и разрешимость нормально разрешимых краевых задач с нулевым индексом для полигармонических уравнений и сильно эллиптических систем второго порядка на плоскости. Сиб. мат. ж., 1966, *5,* № 3, 591—619
80. *Партон В. З., Перлин П. И.,* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977, 311 с.
81. *Победря Б. Е.,* Новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях. Докл. АН СССР, 1980, *253,* № 2, 295—297
82. *Романов А. В.,* Метод Неймана в краевых задачах для уравнения Гельмгольца. Докл. АН СССР, 1980, *251,* № 2, 288—291
83. *Рябенький В. С.,* Формула Грина для систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Мат. заметки, 1969, *5,* № 6, 615—622
84. *Сапожникова В. Д.,* Решение третьей краевой задачи методами теории потенциала для областей с нерегулярными границами. — В кн.: Пробл. мат. анализа. Краевые задачи и интегральные уравнения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966, 35—44
85. *Соболев С. Л.,* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974, 808 с.
86. *Сологуб В. С.,* Развитие теории эллиптических уравнений в XVIII и XIX столетиях. Киев: Наукова Думка, 1975, 279 с.
87. *Солонников В. А.,* О краевых задачах для линейных параболических систем общего вида. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1965, *83,* 1—162
88. —, Оценки решений задачи Неймана для эллиптического уравнения второго порядка в областях с ребрами на границе. Ленингр. отд. Мат. ин-т АН СССР. Препр., 1983, № Р4, 34 с.
89. *Стеклов В. А.,* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983, 432 с.
90. *Тихонов А. Н.,* Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных. Бюлл. МГУ, секция А, 1938, *1,* вып. 9, 1—45

91. *Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М.,* Об одном подходе к решению смешанных краевых задач теории упругости методов потенциала. В кн.: Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докл. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1979, 345—347
92. —, —, Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во КГУ, 1986, 296 с.
93. *Хуторянский Н. М.,* О методе обобщенных запаздывающих потенциалов и интегральных уравнений в нестационарных динамических задачах теории упругости. В сб.: Прикл. проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во ГГУ, 1978, вып. 9, 8—18
94. —, Метод гранично-временных интегральных уравнений в нестационарных динамических задачах вязкоупругости. В сб.: Прикл. проблемы прочности и пластичности. Механика деформируемых систем. Горький: Изд-во ГГУ, 1979, 11—17
95. —, Граничные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения второго рода для основной смешанной задачи теории упругости. В сб.: Прикл. проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем. Горький: Изд-во ГГУ, 1981, 3—13
96. —, Гранично-временные интегральные уравнения квазистатической вязкоупругости и проекционно-итерационные методы их решения. В сб.: Прикл. проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. Горький: Изд-во ГГУ 1983, 18—30
97. —, Тензор Грина нестационарной динамической теории упругости для анизотропной однородной безграничной среды. В сб.: Прикл. проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем. Горький: Изд-во ГГУ, 1985, 23—31
98. —, Дискретные уравнения с положительно определенными и симметричными матрицами в методе граничных элементов для основных краевых задач теории упругости. В сб. «Прикл. проблемы прочности и пластичности. Автоматиз. научных исслед. по прочности. Горький: Изд-во ГГУ, 1986, 35—40
99. —, Дискретные уравнения с положительно определенными матрицами в методе граничных элементов для нестационарных динамических задач теории упругости. В сб.: Прикл. проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и программное обеспечение задач прочности. Горький: Изд-во ГГУ, 1986, 20—25
100. —, *Игумнов Л. А.,* Построение фундаментальных решений нестационарной динамической теории вязкоупругости для некоторых дифференциальных моделей стабильной изотропной однородной среды. В сб.: Прикл. проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем. Горький: Изд-во ГГУ, 1982, 12—20
101. *Шелепов В. Ю.,* Об индексе интегрального оператора типа потенциала в пространстве L_p. Докл. АН СССР, 1969, *186,* № 6, 1266—1270
102. —, Об исследовании методом Я. Б. Лопатинского матричных интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций. В кн.: Общая теория граничных задач. Киев: Наукова думка, 1983, 220—226
103. *Эйдельман С. Д.,* Параболические системы. М.: Наука, 1964, 443 с.
104. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973, 232 с.
105. *Achenbach J. D., Chao C. C.,* A three-parameter viscoplastic model particularly suited for dynamic problems. J. Mech. Phys. Solids, 1962, *10,* № 3, 245—252
106. *Agmon S.,* Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane. Commun. Pure and Appl. Math., 1957, *10,* 179—239
107. *Ahner J. F.,* A scattering trinity: the reproducing kernel, null-field equations and modified Green's function. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1986, *39,* № 1, 151—162
108. *Angell T. S., Hsiao G. C., Kleinman R. E.,* An integral equation for the floating-body problem. J. Fluid Mech., 1986, *166,* 161—171

109. —, *Kleinman R. E.*, Boundary integral equations for the Helmholtz equation: the third boundary value problem. Math. Meth. Appl. Sci., 1982, *4*, 164—193

110. —, —, *Král J.*, Double layer potentials on boundaries with corners and edges. Comment. Math. Univ. Carol. 1986, *27*, 419

111. *Banerjee P. K.*, *Butterfield R.*, Boundary element methods in engineering science. London et al.: McGraw-Hill, 1981 (Пер. на рус. яз. *Бенерджи П. К.*, *Баттерфилд Р.*, Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984, 494 с.)

112. Boundary-integral equation method: computational applications in applied mechanics. N. Y.: Amer. Soc. Mech. Eng., 1975, (Пер. на рус. яз.: Метод граничных интегральных уравнений: вычислительные аспекты и приложения в механике. М.: Мир, 1978, 210 с.)

113. *Brebbia C. A.*, *Walker C.*, Boundary element techniques in engineering. London: Butterworth, 1980, (Пер. на рус. яз.: *Бреббия К.*, *Уокер С.*, Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982, 248 с.)

114. *Calderón A. P.*, Boundary value problems for elliptic equations. Soviet-American Symp. on Partial Differential Equations. Novosibirsk, М.: Изд-во АН СССР, 1963, 303—304

115. —, Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1977, *74*, 1324—1327

116. —, Boundary value problems for the Laplace equation in Lipschitzian domains. Recent Progr. in Fourier Anal. Amsterdam et al.: Elsevier Sci. Publ., 1985, 33—48

117. —, *Calderón C. P.*, *Fabes E. B.*, *Jodeit M.*, *Rivière N. M.*, Applications of the Cauchy integral along Lipschitz curves. Bull. Amer. Math. Soc., 1978, *84*, 287—290

118. *Carleman T.*, Über das Neumann-Poincaresche Problem für ein Gebiet mit Ecken.-Uppsala: Almqvist and Wiksell, 1916, 195 S.

119. *Cohen J.*, *Gosselin J.*, The Dirichlet problem for the biharmonic equation in a C^1 domain in the plane. Indiana Univ. Math. J., 1983, *32*, № 5, 635—685

120. *Coifman R. R.*, *McIntosh A.*, *Meyer Y.*, L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L_2 pour les courbes Lipschitziennes. Ann. Math., 1982, *116*, № 2, 361—387

121. Contributions of mathematical analysis to the numerical solution of partial differential equations. Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., Canberra, 1984, v. 7.

122. *Costabel M.*, Boundary integral operators on curved polygons. Ann. mat. pura ed appl., 1983, *33*, 305—326

123. —, Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results. Darmstadt: Technische Hochschule, 1985, Preprint THD—898, 23 pp.

124. —, *Stephan E.*, Curvature terms in the asymptotic expansions for solutions of boundary integral equations on curved polygons. J. Integral Equat., 1983, *5*, 353—371

125. —, —, A direct boundary equation method for transmission problems. Darmstadt: Technische Hochschule, 1983, Preprint TDH—753.

126. *Crouch S. L.*, *Starfield A. M.*, Boundary element methods in solid mechanics. London et al.: G. Allen and Unwin, 1983, 322 pp. (Пер. на рус. яз.: *Крауч С.*, *Старфилд А.*, Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987, 328 с.)

127. *Dahlberg B. E. J.*, On the Poisson integral for Lipschitz and C^1 domains. Stud. Math., 1979, *66*, № 1, 7—24

128. *De Hoop A. Y.*, Representation theorems for the displacement in an elastic solid and their application to elastodynamic diffraction theory. — Delft: Tech. Hogeschoof, 195, Dr. Sci. Thesis.

129. *Dont M.*, Non-tangental limits of the double layer potentials. Čas. pěstov. mat., 1972, *97*, 231—258

130. —, On a heat potential. Czechosl. Math. J., 1975, *25*, 84—109

131. —, On a boundary value problem for the heat equation. Czechosl. Math. J., 1975, *25,* 110—133
132. —, A note on a heat potential and the parabolic variation. Čas. pěstov. mat., 1976, *101,* 28—44
133. —, Third boundary value problem for the heat equation. I, II. Čas. pěstov. mat., 1981, *106,* 376—394; 1982, *107,* 7—22
134. —, Flows of heat and time moving boundary. Čas. pěstov. mat., 1983, *108,* 146—182
135. *Duvaut G., Lions J.-L.,* Les inéquations en mécanique et en physique. Paris: Dunod, 1972, 387 pp. (Пер. на рус. яз.: *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.,* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980, 384 с.)
136. *Fabes E. B.,* Boundary value problems of linear elastostatics and hydrostatics on Lipschitz domains. Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., Canberra, 1985, *9,* 27—45
137. —, *Jodeit M., Lewis J. E.,* Double layer potentials for domains with corners and edges. Indiana Univ. Math. J., 1977, *26,* № 1, 95—114
138. —, —, *Rivière N. M.,* Potential techniques for boundary value problems in C^1 domains. Acta Math., 1978, *141,* № 3—4, 165—186
139. *Federer H.* A note on the Gauss-Green theorem. Proc. Amer. Math. Soc., 1958, *9,* 447—451
140. —, Geometric mesure theory. Berlin et al.: Springer, 1969, 676 pp. (Пер. на рус. яз.: *Федерер Г.,* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987, 760 с.)
141. *Giraud G.* Equations a intégrales principales. Ann. Sci. Ecole Norm. Supér., 1934, *51,* № 3—4, 251—372
142. *Giroire J., Nedelec J. C.,* Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential. Math. Comput., 1978, *32,* № 144.
143. *Hadamard J.,* Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles lineaires hyperboliques. Paris: Hermann, 1932, 342 pp. (Пер. на рус. яз.: *Адамар Ж.,* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978, 352 с.)
144. *Hörmander L.,* Linear partial differential operators. Berlin et al.: Springer, 1963, 387 pp. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.,* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965, 380 с.)
145. —, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems. Ann. Math., 1966, *83,* № 1, 129—209 (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.,* Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи. В кн.: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1967, 166—296)
146. *Hsiao G. C., Wendland W. L.,* The Aubin-Nitsche lemma for integral equations. J. Integral Equat., 1981, *3,* 299—315
147. *John F.* On the motion of floating bodies, II. Commun. Pure and Appl. Math., 1950, *3,* № 1, 45—101
148. *Kellogg O. D.,* Foundations of Potential Theory. Berlin: Springer, 1929, 384 pp.
149. *Kenig C. E.,* Boundary value problems of linear elastostatics and hydrostatics on Lipschitz domains. Semin. Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1983-1984, Exp. № 21. Palaiseau: Ecole Politechnique, 1984, 18pp.
150. *Kleinman R. E.,* Low frequency electromagnetic scattering. In: Electromagnetic scattering. New York: Acad. Press, 1978, 1—28 (Пер. на рус. яз.: *Клейнман Р.,* Низкочастотное электромагнитное рассеяние. В кн.: Численные методы теории дифракции. М.: Мир, 1982, 172—198)
151. —, *Wendland W.,* On Neumann's method for the exterior Neumann problem for the Helmholtz equation. J. Math. Anal. and Appl., 1977, *57,* № 1, 170—202
152. *Korn A.,* Abhandlungen zur Potentialtheorie in 5 Hefte. Berlin: Dümmler, 1901—1902, 261 S.
153. *Král J.,* The Fredholm radius of an operator in potential theory. — Czechosl. Math. J., 1965, *15,* № 3—4, 454—473; 565—588
154. —, The Fredholm method in potential theory. Trans. Amer. Math. Soc., 1966, *125,* № 3, 511—547

155. —, Limits of double layer potentials. Rend. Accad. Naz. Lincei, 1970, ser. 8, *48*, 39—42

156. —, Integral operators in potential theory. Lect Notes Math., 1980, *823*, 171 pp.

157. —, Boundary regularity and normal derivatives of logarithmic potentials. Dept. of Math. Univ. of Oelaware Tech. Rep. Newark: Univ. of Delaware, 1985, № 159-A.

158. —, *Netuka I.*, Contractivity of C. Neumann's operator in potential theory. J. Math. Anal. and Appl., 1977, *61*, 607—619

159. —, *Wendland W.* Some examples concerning applicability of the Fredholm-Radon method in potential theory. Apl. Mat., 1986, *31*, 293—318

160. *Lichtenstein L.*, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Math. Z., 1928, *28*, 387—415

161. *Lions J.-L.*, *Magenes E.*, Problemes aux limites non homogenes et applications, 1. Paris: Dund, 1968, 372 pp. (Пер. на рус. яз.: *Лионс Ж.-Л.*, *Мадженес Э.*, Неоднородиые граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.)

162. *Lonseth A. T.*, Sources and applications of integral equations. SIAM Rev., 1977, *19*, № 2, 241—278

163. *Martin P. A.*, On the mull-field equations for water-wave scattering problems. IMA J. Appl. Math., 1984, *33*, № 1, 55—69

164. *Maz'ya V. G.*, Boundary integral equations of elasticity in domains with piecewise smooth boundaries. Equadiff. 6. Proc. Int. Conf. on Diff. Equations and Appl. Brno: Purkyně Univ., 1985, 235—242

165. —, *Shaposhinikova T. O.*, Theory of multipliers in spaces of differentiable functions. Boston-London-Melbourne: Pitman, 1985, 356 pp.

166. *Miranda C.*, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellitico. Berlin: Springer, 1955, 222 pp. (Пер. на рус. яз.: *Миранда К.*, Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957, 256 с.)
256 с.)

167. *Müntz Ch. H.*, Sur la résolution du problème dynamique de l'élasticité. C. r. Acad. sci. 1932, *194*, № 17, 1456—1459

168. *Nečas J.*, Les méthods directes en théorie des équations élliptiques. Prague: Academa, 1967, 351 pp.

169. *Netuka I.*, Smooth surfaces with infinite cyclic variation. Čas. pěstov. mat., 1971, *96*, 86—101

170. —, Generalized Robin problem in potential theory. Czechosl. Math. J., 1972, *22*, 312—324

171. —, An operator connected with the third boundary value problem in potential theory. Czechosl. Math. J., 1972, *22*, 462—489

172. —, The third boundary value problem in potential theory. Czechosl. Math. J., 1972, *22*, 554—580

173. —, Double layer potentials and the Dirichlet problem. Czecosl. Math. J., 1974, *24*, 59—73

174. —, Fredholm radius of a potential theoretic operator for convex sets. Čas. pěstov. mat., 1975, *100*, 374—383

175. *Odqvist F. K. G.*, Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. Math. Z., 1930, *32*, 329—375

176. *Poincaré H.*, Leçons de mécanique célest, 3. Paris: Gauthier-Villars, 1910, 469 pp.

177. *Radon J.*, Über lineare Funktinaltransformationen und Funktionalgleichungen. Sitzungsber. Akad. Wiss., Wien, 1919, Abt. 2a, *128*, № 7, 1083—1121 (Пер. на рус. яз.: *Радон И.*, О линейных преобразованиях и функциональных уравнениях. Успехи мат. наук, 1936, № 1, 200—227)

178. —, Über die Randwertaufgaben beim lograrithmischen Potential. Sitzungsber. Akad. Wiss., Wien, 1919, Abt. 2a, *128*, № 7, 1123—1167 (Пер. на рус. яз.: *Радон И.*, О краевых задачах теории логарифмического потенциала. Успехи мат. наук, 1946, *1*, № 3—4, 96—124)

179. *Riesz F., Sz.-Nagy B.,* Leçons d'analyse fonctionelle. Budapest: Akad. Kiadó, 1952, 488 pp. (Пер. на рус. яз.: *Рисс Ф., Секефальви-Надь В.,* Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во иностр. литер., 1954, 500 с.)
180. *Seeley R. T.,* Singular integrals and boundary value problems. Amer. J. Math., 1966, *88,* 781—809
181. *Shippy D. J.,* Application of the boundary-integral equation method to transient phenomena in solids. Boundary-integral equation method: computational applications. In Applied Mechanics. N. Y.: Amer. Soc. Mech. Eng., 1975, 15—30 (Пер. на рус. яз.: *Шиппи Д. Дж.,* Применение метода граничных интегральных уравнений к изучению нестационарных явлений в твердых телах. Soviet-American Symp. on Partial Differential equations. Novosibirsk. М.: Изд-во СО АН СССР, 30—45)
182. *Stoker J. J.,* Water waves. New York: Interscience Publ., 1957, 567 pp. (Пер. на рус. яз.: *Стокер Дж. Дж.,* Волны на воде. М.: Изд-во инстр. литер., 1959, 618 с.)
183. The application and numerical solution of integral equations. Seminar at Austral. Nat. Univ., Canberra, 1978. Alphen: Sijthoff and Noordhoff, 1980, 259 pp.
184. *Verchota G.,* Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains. J. Funct. Anal., 1984, *59,* № 3, 572—611
185. *Veselý J.,* On the heat potential of the double distribution. Čas. pěstov. mat., 1973, *98,* 181—198
186. —, On a generalized heat potential. Czechosl. Math. J., 1975, *25,* 404—423
187. *Wehausen J. V., Laitone E. V.,* Surface waves. Encyclopedia of Physics, v. 9. Berlin: Springer, 1960, 446—778
188. *Wendland W. L.,* Asymptotic convergence of boundary element methods. Integral equation for mixed boundary value problems. Darmstadt: Technische Hochschule, Preprint 611, 1981.
189. —, Boundary element methods and their asymptotic convergence. Darmstadt: Technische Hochschule, Preprint 690, 1982.
190. *Zaremba S.,* Les fonctions fondamentales de H. Poincaré et méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes. J. math. pures et appl., 1904, ser. 5, *10,* № 4, 395—444

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Технический редактор *З. А. Прусакова*

Сдано в набор 24.11.87 Подписано в печать 13.05.88
Формат бумаги $60\times90^{1}/_{16}$ Бум. тип. № 2 Литературная гарнитура.
Высокая печать Усл. печ. л. 15,0 Усл. кр.-отт. 15,0 Уч.-изд. л. 13,76
Тираж 1700 экз. Заказ 10018 Цена 2 р. 50 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, Балтийская ул., 14. Тел. 155-43-29

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ,
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

ISSN 0233—6723. ИНТ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 27, 1988, 1—240

УДК 517.968.2+517.98

Прёсдорф З., Линейные интегральные уравнения. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 27 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)», М., 1988, 5—130

Обзор современного состояния теории линейных интегральных уравнений. Основное содержание главы 1 — алгебры линейных операторов. В главе 2 обсуждаются уравнения Фредгольма, значительное внимание уделено оценкам собственных и сингулярных чисел интегральных операторов. Главы 3 и 4 посвящены теории одномерных и многомерных сингулярных операторов. Библ. 93.

УДК 517.968.2+517.956

Мазья В. Г., Граничные интегральные уравнения. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 27 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 131—228

Статья посвящена теоретическим аспектам метода граничных интегральных уравнений. Значительное внимание уделено полученным в последние годы результатам для уравнений на негладких поверхностях. В главе 1 изложена классическая теория гармонических потенциалов и порожденных ими граничных интегральных уравнений на гладких поверхностях. Глава 2 посвящена обобщению этой теории на упругие и гидродинамические потенциалы, а в главе 3 рассмотрены обобщения на другие задачи математической физики (задача с косой производной, бигармоническое уравнение, уравнения теплопроводности и волновое, динамическая теория упругости, вязкоупругость и др.). В главах 4 и 5 обсуждаются интегральные уравнения на негладких границах различных классов. Библ. 190

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

ВИНИТИ выпускает в 1988 году информационное издание «Итоги науки и техники», серия

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ.

Фундаментальные направления.

Том 19. Функциональный анализ-1

Цена 1 р. 80 к.

Том содержит одну обзорную статью: д. ф.-м. н. Ю. И. Любич «Линейный функциональный анализ».

Том 21. Группы Ли и алгебры Ли-2.

Цена 1 р. 80 к.

Том содержит две обзорные статьи: д. ф.-м. н. Э. Б. Винберг, д. ф.-м. н. В. В. Горбацевич, к. ф.-м. н. О. В. Шварцман «Дискретные подгруппы групп Ли»· к. ф.-м. н. Б. Л. Фейгин, к. ф.-м. н. Д. Б. Фукс «Когомолог групп и алгебр Ли».

Тома серии «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления» содержат сводное изложение основных разделов современной математики и ее приложений, рассчитанное для профессионального пользования. Любая статья серии вполне доступна специалистам в смежных областях математики, а также физикам, механикам и другим научным работникам, профессионально пользующимся математикой в своей работе.

Издание в целом может послужить широкой базой для профессоров и преподавателей высших учебных заведений при разработке программ и лекционных курсов по различным разделам математики и ее приложений.

Все издание единое целое. Подбор статей в каждом томе и их содержание будут учитывать содержание других томов с широким использованием взаимных отсылок.

Тома высылаются наложенным платежом из имеющихся в наличии.

Заказы от организаций и индивидуальных подписчиков направлять по адресу: *140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403. ПИК ВИНИТИ, отдел распространения. Телефон 553-56-29.*

№ 9

ОПЕЧАТКИ

ИНТ, Совр. пробл. матем. ФН № 27, 1988 г.

Стр.	строка	Напечатано	Следует читать
45	20 снизу	$\ldots \leqslant \sum_{b} s_j^2$	$\ldots \leqslant \sum_{j} s_j^2$
72	18 снизу	$f = \rho^{-1/(p-1)\psi_Q}$	$f = \rho^{-1/(p-1)\chi_Q}$
90	1 снизу	$w_j = \lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{2e} (\arg f(l) - \ldots$	$w_j = \lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{2} l (\arg f(l) - \ldots$
160	14 сверху	$W_{20}\chi^{\pm} + V_{10}\rho^{\pm} = \rho^{\pm}$	$W_{20}\chi^{\pm} + V_{10}\rho^{\pm} = \varphi^{\pm}$
166	6 сверху	φ	ϕ

Зак. 10018